

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES**

Departamento de Economía Cuantitativa



**ESTRATEGIAS EFICIENTES EN LOS MERCADOS DE
OPCIONES Y FUTUROS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR**

Juan Garrido López

Bajo la dirección de los doctores

Gregorio Díaz
Laureano Escudero

Madrid, 2012

R. 57.784

**Estrategias Eficientes en los Mercados
de Opciones y Futuros**

T
1794

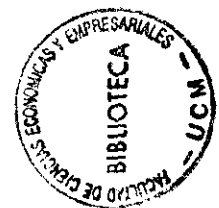
Tesis Doctoral

Juan Garrido López

Directores: Gregorio Díaz, Laureano Escudero

**Departamento de Economía Cuantitativa
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid**

1998



A mis padres, a mis hermanos, a mi abuelita y a Ester

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los Profesores Gregorio Díaz y Laureano Escudero por su labor de dirección en esta tesis y por la gran confianza que me han mostrado. También quiero agradecer las sugerencias recibidas y el apoyo mostrado por el Profesor Miguel Jerez, tutor de esta tesis.

Agradezco también a todos los lectores por leer mi trabajo y por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Por otro lado, agradezco profundamente la inestimable ayuda que me han prestado mis amigos Ricardo Martín y Arthur B. Treadway. Su apoyo y sugerencias han hecho mucho más fácil y llevadero este largo camino.

Quiero, asimismo, expresar mi gratitud al Departamento del Análisis Económico de la Universidad Complutense y al Instituto Complutense de Análisis Económico (ICAE) por facilitarme los medios materiales necesarios para llevar a cabo esta investigación. También quiero agradecer el interés mostrado por mis compañeros de doctorado y muy especialmente por Luis Nuño con quién he mantenido largas y deliciosas discusiones.

Fuera del plano profesional, quiero agradecer el constante aliento, el apoyo incondicional y el interés mostrado por mi familia y por Ester, sin ellos llegar a este momento habría sido prácticamente imposible.

Juan Garrido López

Indice

1	Introducción	1
2	Resolución de la ecuación de Black y Scholes utilizando el método de separación de variables	12
2.1	Estimación del error cometido	25
2.2	Convergencia	27
2.3	Cálculo de sensibilidades	30
2.3.1	Delta de una opción	30
2.3.2	Gamma de una opción	31
2.3.3	Theta de una opción	32
2.3.4	Vega de una opción	33
2.3.5	Rho de una opción	35
2.4	Ejemplos	37
3	Rendimiento esperado condicionado y varianza condicionada del rendimiento de una opción	51
3.1	Rendimiento esperado condicionado de una opción	53
3.2	Varianza condicionada del precio de mercado de una opción	58
3.3	Sensibilidades esperadas de una opción	63
3.3.1	Delta esperada de una opción	63
3.3.2	Gamma esperada de una opción	66
3.3.3	Theta esperada de una opción	68
3.3.4	Vega esperada de una opción	70
3.3.5	Rho esperada de una opción	72
3.4	Ejemplos	74
4	Cálculo de la estrategia eficiente	88
4.1	Problema 1: Estrategia à la Markowitz	92
4.1.1	Ejemplos	93
4.1.2	Comentarios a los resultados del Problema 1	100
4.2	Problema 2: Escenarios sobre la volatilidad estimada por el inversor	107
4.2.1	Ejemplos	108
4.2.2	Comentarios a los resultados del Problema 2	116

4.3 Problema 3: Estrategia à la Markowitz con restricciones sobre las sensibilidades esperadas de la estrategia	122
5 Conclusiones	126
Apéndice 1: Resolución de la ecuación del calor	128
Apéndice 2: Aspectos básicos de las opciones y futuros	131
Apéndice 3: Resolución de la ecuación de Black y Scholes	143
Referencias	145

1 Introducción

Lo que se pretende en esta memoria es generalizar, al ámbito de las opciones europeas sobre un único activo subyacente, las ideas sobre selección de carteras que aparecen por primera vez en Markowitz (1952)¹, es decir, obtener la estrategia, compuesta por opciones europeas sobre un único subyacente, que minimice el riesgo de obtener una determinada rentabilidad. Para llevar a cabo este fin se propone un nuevo método de valoración de opciones, que permite, por una parte, resolver el problema mencionado, y por otra, valorar de forma exacta algunos tipos de opciones.

Comenzaremos introduciendo una serie de definiciones básicas (vid. Hull 1997):

Un contrato a plazo o forward es un acuerdo privado de compra o venta de un activo en un momento determinado del futuro por un precio determinado hoy (precio de entrega). Una de las dos partes del contrato a plazo asume una posición larga y acuerda comprar el activo en una fecha específica y a un precio determinado. La otra parte asume una posición corta y acuerda vender el activo en la misma fecha por el mismo precio. El precio de entrega se suele elegir de tal forma que en el momento en que se firma el contrato sea cero.

Sea K el precio de entrega, T el día de vencimiento del contrato y S_t el precio de contado del activo en el instante $t \leq T$. El valor el día de vencimiento o valor terminal de una posición larga en un contrato a plazo sobre una unidad de activo es:

$$S_T - K$$

y de una posición corta:

$$K - S_T.$$

En la Figura 1.1 se ilustran los valores terminales de un contrato a plazo.

¹ Análisis detallados de muchos de los distintos modelos asociados a la extensa literatura generada por la idea original de Markowitz pueden encontrarse en Ingersoll (1987) y Zenios (1993).

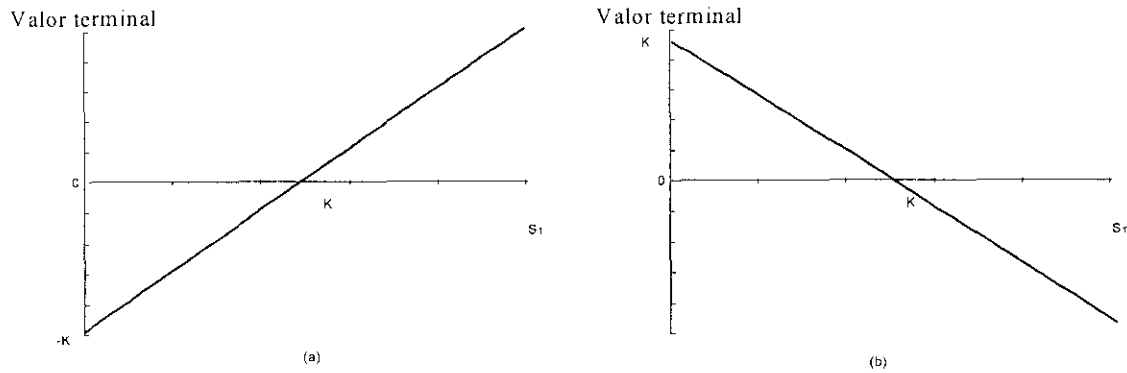


Figura 1.1: Valor terminal de un contrato a plazo. (a) Posición larga. (b) Posición corta

Con respecto a las opciones hay que decir que existen básicamente dos tipos: de compra y de venta (Call y Put). Una opción de compra da a su poseedor el derecho a comprar un activo (activo subyacente) a un precio determinado (precio de ejercicio) en una fecha establecida (fecha de vencimiento). Una opción de venta proporciona a su titular el derecho a vender un activo en una fecha determinada a un precio establecido. El comprador, al adquirir alguno de estos derechos, pagará por ellos una determinada prima.

Una opción se denomina européa si solo puede ser ejercitada en la fecha de vencimiento, mientras que una opción se denomina americana si puede ser ejercitada en cualquier momento hasta su fecha de vencimiento incluida.

A menudo es útil caracterizar las posiciones en opciones en términos de su valor terminal. Llamando T al día de vencimiento, K al precio de ejercicio y S_t al precio del activo subyacente en el instante t , entonces una posición larga de opciones de compra tendrá un valor terminal:

$$\max\{S_T - K, 0\}$$

y una posición corta:

$$-\max\{S_T - K, 0\}.$$

El valor terminal para una posición larga en una opción de venta será:

$$\max\{K - S_T, 0\}$$

y para una posición corta:

$$-\max\{K - S_T, 0\}.$$

La Figura 1.2 ilustra gráficamente estos tipos de valores terminales.

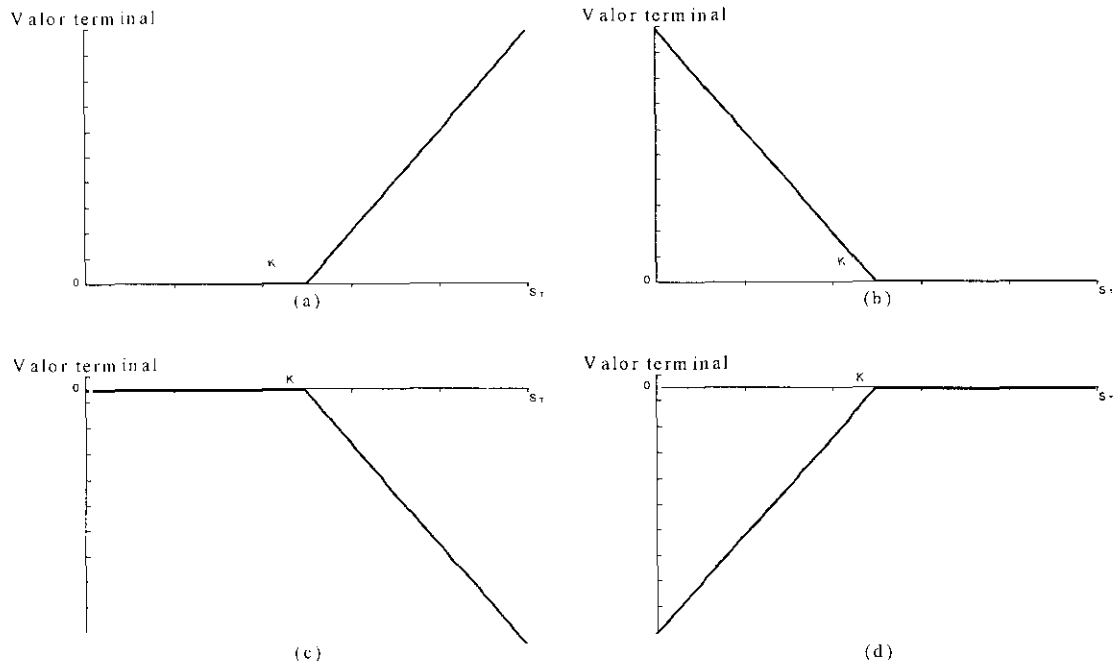


Figura 1.2: Valor terminal de opciones de compra y venta. (a) Posición larga en una opción de compra.

(b) Posición larga en una opción de venta. (c) Posición corta en una opción de compra.

(d) Posición corta en una opción de venta.

Partiendo de estos tipos básicos de opciones, se puede construir una gran variedad de estrategias (vid. Cox y Rubinstein (1985), Hull (1997) y Smith (1976)). Por ejemplo, se toma una posición larga en opciones de compra y de venta con igual precio de ejercicio e igual fecha de vencimiento, se obtendría un valor terminal como el que se muestra en la Figura 1.3. A este tipo de estrategia se la denomina Straddle y es apropiada cuando el inversor espera un movimiento grande del precio del activo subyacente pero duda del sentido del mismo.

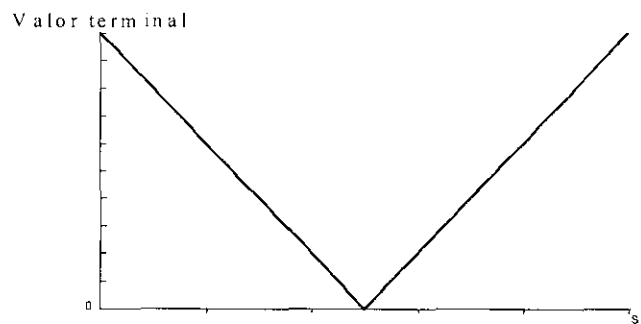


Figura 1.3: Straddle. Combinación de una posición larga en opciones de compra y de venta.

Muchas de las estrategias que se utilizan con carácter especulativo en los mercados de opciones y futuros se detallan en el Apéndice 2. Los operadores eligen unas u otras dependiendo de sus expectativas sobre la volatilidad y el rendimiento del activo subyacente. En las Tablas A.2.1 y A.2.2 del Apéndice 2 se muestran las más usadas dependiendo de dichas expectativas. Hasta donde he podido comprobar, mediante una búsqueda exhaustiva en la literatura, la formalización matemática del problema de la elección de la estrategia eficiente compuesta por opciones europeas, dadas las expectativas sobre volatilidad y rendimiento del activo subyacente, no está planteada ni resuelta. Para poder plantear dicho problema es necesario determinar cuanto debe pagar un inversor por disponer de una opción que dentro de T días le proporcione un determinado valor terminal genérico $g(S)$. En la literatura, este problema de valoración, se encuentra resuelto por diferentes métodos en Black y Scholes (1973), Merton (1973), Wilmot, Dewynne y Howison (1993), Duffie (1988, 1992), Baxter y Rennie (1996) entre otros, y se puede resumir de la siguiente forma.

Se supone un determinado activo financiero, llamado acción, cuyo precio, $S=S_t$, sigue el proceso que evoluciona, atendiendo a consideraciones tanto deterministas como aleatorias, de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica²:

$$dS = (\log(m) - D_0)S dt + \sigma S dB_t; \quad S > 0 \quad (1)$$

siendo B_t un movimiento estándar Browniano, en el ambiente propio de estos procesos estocásticos, y donde $\log(m)$ y σ son escalares estrictamente positivos y D_0 un escalar no negativo que representan respectivamente el rendimiento esperado, la volatilidad y los dividendos de la acción.

Se puede demostrar que para todo instante actual t y todo precio del activo subyacente $S = S_t$ (v. Apéndice 3) el precio, C , del instrumento financiero (la opción) que el día de ejercicio, T , garantiza el valor terminal $g(S)$, sigue el proceso:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - (r - D_0)S - \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \quad (2)$$

$$C(S, T) = g(S) \quad (3)$$

siendo r el tipo de interés libre de riesgo.

² Algunos procesos estocásticos alternativos aparecen en Cox y Ross (1976)

Teniendo en cuenta la fórmula de Feynman-Kac, se resuelve la ecuación en derivadas parciales (EDP) anterior, dando como resultado:

$$C(S, T - t, r, \sigma) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (4)$$

que es el valor en t de la opción financiera que en T tiene un valor terminal $g(S)$ (v. Duffie (1992)).

Para poder plantear, en este contexto, un problema similar al de Markowitz (1952), hace falta calcular primero el precio esperado condicionado de una opción y su varianza. Para ello asumamos las siguientes hipótesis (Rubinstein (1984)):

1. El inversor y el “mercado” están de acuerdo en que el tipo de interés libre de riesgo es constante e igual a r .
2. El inversor y el “mercado” están de acuerdo en que el rendimiento del subyacente sigue una distribución lognormal.
3. Las estimaciones del inversor del rendimiento esperado anualizado y de la volatilidad instantánea del subyacente son \bar{m} y $\bar{\sigma}$, las estimaciones del mercado son m y σ .
4. El precio de mercado de una opción siempre se calcula, utilizando la fórmula de Black-Scholes para opciones europeas:

$$C(S, T - t; r, \sigma)$$

Bajo estas condiciones el precio de mercado esperado condicionado para una opción al final del periodo de posesión, $h \in [0, T]$, medido como fracción de año, será:

$$E\{C|t = h\} = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} C(S_0 e^y, T - h; r, \sigma) e^{-\frac{(y - \bar{m}h)^2}{2\bar{\sigma}^2 h}} dy \quad (5)$$

y su varianza condicionada:

$$V\{C|t = h\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} (C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) - E\{C|h\})^2 e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2 h}} dy \quad (6)$$

donde:

$$\mu = \log(\bar{m}) - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0.$$

Llamando $C_0 = C(S_0, T; r, \sigma)$ al precio hoy del instrumento financiero que garantiza en T el valor terminal g, el rendimiento esperado anualizado de la estrategia será:

$$m_c = \left(\frac{E\{C|h\}}{C_0} \right)^{\frac{1}{h}}$$

y su varianza anualizada:

$$Vm_c = \frac{V\{C|h\}}{h C_0^2} \quad (7)$$

(vid. Rubinstein (1984)).

Surge, entonces, el principal objetivo de esta memoria: hallar la combinación de opciones, g, que minimice la varianza condicionada del rendimiento de la estrategia (7), sujeto a conseguir una determinada rentabilidad, R_h , (exigida por el inversor) y a que se cumpla una determinada restricción presupuestaria, es decir; calcular aquella función g (la estrategia) que sea solución del problema de optimización funcional:

$$\left. \begin{array}{l} \min_g Vm_c \\ m_c \geq (1 + R_h)^h \\ C(S_0, T, r, \sigma) = C_0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (4), (5) y (6) el problema que se plantea en la memoria se expresa como:

$$\min_g \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{\omega(z,y)}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma \sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \right)^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy$$

sujeta a

$$\frac{e^{-r(T-h)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma \sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz} \geq 1 + R_h$$

$$e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = C_0$$

siendo:

$$\omega(z,y) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} z + y,$$

R_h el rendimiento exigido por el inversor y C_0 el capital inicial a invertir. En definitiva, lo que se pretende en la memoria es calcular la frontera eficiente de una cartera de opciones europeas sobre un determinado subyacente, donde cada punto de esta representaría una estrategia g a comprar o vender.

La resolución de este problema permite formalizar matemáticamente el problema de selección de la estrategia compuesta por opciones europeas, dadas las expectativas del inversor y del "mercado" sobre la volatilidad y rendimiento del activo subyacente.

Para resolver el problema de optimización anterior se desarrolla, en el siguiente capítulo, un método aproximado de valoración de opciones europeas resolviendo la ecuación de Black y Scholes (1973) por el método de separación de variables (vid. Churchill (1963), Godunov (1978), Tijonov, Samarski y Budak (1980) y Weinberger (1992)).

Para ello se asume una nueva hipótesis:

- El rango de variación del precio del subyacente está acotado sobre el intervalo $[S_m, S_M]$, con $S_m \approx 0$ y $S_M \gg 1$, de tal forma que se pueden añadir dos nuevas condiciones de contorno a la ecuación (3) de la forma:

$$\left. \begin{aligned} C(S_m, t) &= f_1(t) \\ C(S_M, t) &= f_2(t) \end{aligned} \right\}$$

donde, como se prueba en el Capítulo 2, para opciones europeas se tiene que $f_1(t) \approx u_0 e^{-r(T-t)}$ y

$f_2(t) \approx u_1 e^{-D_0(T-t)}$, con lo que el nuevo problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= rC - (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, (S, t) \in]S_m, S_M[\times]0, T[\\ C(S, T) &= g(S), S \in]S_m, S_M[\\ C(S_m, t) &= u_0 e^{-r(T-t)}, t \in]0, T[\\ C(S_M, t) &= u_1 e^{-D_0(T-t)}, t \in]0, T[\end{aligned}$$

cuya solución se puede expresar como suma infinita de autofunciones propias o de forma aproximada como el producto escalar (para cada S y para cada t) de los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\ Q &= [\beta_0 \ \beta_1 \ \Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_N] \\ C(S, t; r, \sigma) &= PQ' \end{aligned} \quad (9)$$

siendo β_0, β_1 , y Φ_n ($n=1, \dots, N$) ciertas funciones que no dependen de $g(S)$ y g_n ($n=1, \dots, N$) los coeficientes del desarrollo de Fourier asociados al valor terminal. Para N suficientemente grande las diferencias obtenidas al calcular el precio de la opción obtenido según (4) o según (9) son prácticamente despreciables.

Hay que hacer notar que, aunque el método propuesto es aproximado a la hora de valorar algunas opciones europeas, es exacto a la hora de valorar otras, como por ejemplo las opciones con doble frontera. En este tipo de opciones el derecho a ejercitar la opción aparece (Double-Barrier Knock-In) o desaparece (Double-Barrier Knock-Out), si el precio del activo subyacente el día de

ejercicio se encuentra entre las barreras inferior y superior, que aquí se representan por S_m y S_M respectivamente. Es lógico pensar que si, como se hace en la memoria, $S_m \approx 0$ y $S_M \gg 1$ el precio de una opción con doble barrera será muy parecido al precio de una opción valorada mediante el método propuesto por Black y Scholes (1973), pero con la ventaja de estar expresada mediante un producto escalar en lugar de mediante una integral impropia.

Aprovechando la representación anterior del precio de la opción, en el Capítulo 3 se transforma el valor esperado condicionado de la opción (5) y su varianza condicionada (6) en un producto escalar y en una forma cuadrática respectivamente:

$$\begin{aligned} E\{C|h\} &= P\hat{Q}' \\ P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\ \hat{Q} &= [\hat{\beta}_0 \ \hat{\beta}_1 \ \hat{\Phi}_1 \ \hat{\Phi}_2 \ \dots \ \hat{\Phi}_N] \\ V\{C|h\} &= P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P' \end{aligned}$$

de tal suerte que, como se muestra en el Punto 4.1, el sistema integral (8) se transforma en un problema de programación cuadrática con restricciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{h} \min_{C_0} P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P' \\ &P\hat{Q}' - (1 + R_h)C_0 \geq 0 \\ &PQ' = C_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

que se resolverá, dadas las expectativas del mercado sobre la volatilidad, el tipo de interés libre de riesgo etc., para distintos valores de \bar{m} y $\bar{\sigma}$, obteniéndose para cada valor de estos parámetros una función $g(S)$ eficiente. Hay que hacer notar que los resultados obtenidos al resolver este problema tienen un gran parecido con las estrategias que utilizan, en situaciones de mercado similares, los operadores (compárese las Tablas 2 y 3 del Apéndice 2). En la memoria se resuelven otros casos parecidos al anterior, comparando, de igual modo, las estrategias resultantes con las estrategias más usuales utilizadas por los operadores en cada escenario particular.

La mayoría de los inversores no pueden definir sus expectativas, para una determinada fecha futura $t = h$, sobre la volatilidad y rendimiento del subyacente, de una forma tan contundente como la mostrada en el problema anterior, sólo tienen una idea aproximada de la distribución de éstas. Por ello podría ser más útil e interesante plantear el problema anterior modelizando las expectativas del inversor mediante escenarios y asignando a cada uno de ellos una determinada probabilidad. Se usará la siguiente notación (vid. Zenios (1993), Dembo (1991)):

E : Conjunto de escenarios posibles sobre la volatilidad en $t = h$, $e = 1, \dots, E$

w_e : Probabilidad asignada al escenario e , $e \in E$; $\left(\sum_e w_e = 1\right)$

σ_e : Volatilidad estimada por el inversor en el escenario e -ésimo.

Teniendo en cuenta estas definiciones:

$$\sum_{e=1}^E \frac{w_e}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy$$

será el valor esperado ponderado de la estrategia condicionado a $t=h$ sobre los E escenarios y:

$$\sum_{e=1}^E \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} (C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) - E\{C|h\})^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy$$

la varianza condicionada del rendimiento de la estrategia ponderada correspondiente. La

formalización matemática de este problema se expresa en la memoria de la siguiente manera³:

$$\min_g \sum_{e=1}^E \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{\omega(z,y)}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy \right)^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy$$

sujeta a

$$\sum_{e=1}^E \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} (C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) - E\{C|h\})^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy \geq (1 + R_h) C_0$$

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = C_0$$

³ Hasta donde ha podido saber el autor este problema tampoco está planteado ni resuelto.

Para abordar la resolución del sistema de optimización funcional anterior se hará uso de los resultados obtenidos en los Capítulos 2 y 3 de la memoria. De esta manera, el problema que se trata se transforma en el problema de programación cuadrática con restricciones lineales⁴:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h C_0^2} \min_P \sum_{e=1}^E w_e P(\hat{\Omega}_e - \hat{Q}'_e \hat{Q}_e) P' \\ & \sum_{e=1}^E w_e P \hat{Q}'_e \geq (1 + R_h)^h C_0 \\ & P Q' = C_0 \end{aligned} \right\}$$

que se resolverá, dadas las expectativas del mercado sobre la volatilidad, el tipo de interés libre de riesgo etc., para distintos valores de \bar{m} y los distintos escenarios sobre la volatilidad $\bar{\sigma}_e$, obteniéndose para cada valor de estos parámetros una función $g(S)$ eficiente.

Por último, dado que en el Capítulo 3 se expresan las distintas sensibilidades esperadas de una opción como producto escalar de dos vectores se puede resolver problemas como el mostrado en el Punto 4.2, similar al problema comentado inicialmente, pero donde, además, se añaden una serie de restricciones sobre las distintas sensibilidades esperadas de la opción (vid. Dillman y Harding (1985)).

En definitiva, utilizando la metodología de valoración exacta de opciones con doble frontera genérica desarrollada en el Capítulo 2, se formaliza matemáticamente el problema de selección de la estrategia compuesta por opciones europeas, dadas las expectativas sobre el rendimiento y la volatilidad del activo subyacente. Este problema se ilustra en la memoria mediante tres ejemplos. En el primero se calcula la estrategia en sí, en el segundo se moleliza las expectativas del inversor sobre la volatilidad del subyacente mediante escenarios y en el tercero se añaden, al problema inicial, una serie de restricciones sobre las sensibilidades esperadas de la opción.

⁴ El subíndice 'e' en el vector \hat{Q} y en la matriz $\hat{\Omega}$ significa que deben ser evaluados en la volatilidad especificada en el escenario e-ésimo.

2 Resolución de la ecuación de Black y Scholes utilizando el método de separación de variables

Como se vio anteriormente, la ecuación en derivadas parciales que sigue el precio de una opción europea es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, \underline{S \geq 0}, t \in]0, T[\quad (11)$$

$$C(S, T) = g(S), S \geq 0$$

cuya solución se pudo expresar en forma de la integral impropia:

$$C(S, T - t, r, \sigma) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Sin embargo, a la hora de resolver una serie de problemas similares al que se menciona en el capítulo introductorio (8) sobre selección de carteras, parece conveniente expresarla de forma más sencilla desde el punto de vista matemático. Una primera idea consiste en considerar las opciones europeas usuales como un caso particular de opciones con doble frontera, de tal forma que la frontera inferior esté suficientemente cercana a cero y la frontera superior suficientemente alejada. Al llevar a cabo este tipo de aproximación se consigue expresar el precio de la opción como producto escalar de dos vectores. Como se demuestra a lo largo de la tesis, esta será la clave para resolver el sistema (8).

Por tanto, se supone que el rango de variación del precio del subyacente, S , está acotado sobre el intervalo:

$$[S_m, S_M], \text{ con } S_m \approx 0 \text{ y } S_M \gg 1$$

y se añaden dos nuevas condiciones de contorno al problema, de la misma manera que se hace al resolver el problema por el método de diferencias finitas (vid. Brennan y Schwartz (1978), Courtadon (1982), Hull y White (1990)). Al acotar el intervalo de variación del subyacente se aproxima la solución al problema original de Black y Scholes, lo que no significa que el nuevo problema a resolver sea menos realista. De hecho, en muchos países, como por ejemplo en España, la cotización de un determinado activo subyacente se suspende si sube o baja en un mismo día un determinado

tanto por ciento δ (en el caso español $\delta = 15\%$), de tal forma que, si en $t=0$ el precio del subyacente es S_0 , dentro de T días será como máximo $S_0 (1 + \delta T)$ y como mínimo $\max\{S_0 (1 - \delta T), 0\}$.

Aún en el caso de que por ley se contemplen los anteriores precios máximos y mínimos, es muy improbable que se alcancen, de tal forma que se puede tomar como valor de S_m un número cercano a cero y como valor de S_M el correspondiente al límite superior de un intervalo de confianza al $100(1 - \alpha)\%$ sobre el precio del subyacente. Con todo ello si, como se vio en el capítulo introductorio, el modelo que sigue el precio del subyacente es:

$$dS = (\log(m) - D_0)S dt + \sigma S dB_t,$$

asumiendo la hipótesis de lognormalidad de S (vid. Kon (1984)) y aplicando el lema de Ito (vid. Ito (1951) y Oksendal (1995)) a $\log(S)$, se obtiene que el cambio en el logaritmo del precio del subyacente entre la fecha actual t y cualquier fecha futura $t=T$ se distribuye como una normal de media y desviación estándar:

$$\left(\log(m) - D_0 - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \text{ y } \sigma \sqrt{T - t}$$

es decir:

$$\log\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \approx N\left(\mu(T - t), \sigma \sqrt{T - t}\right)$$

con:

$$\mu = \log(m) - D_0 - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Teniendo en cuenta estos resultados y haciendo corresponder la fecha actual con $t=0$, el intervalo de confianza buscado será:

$$\left[S_0 e^{\mu T - z_{\alpha/2} \sigma \sqrt{T}}, S_0 e^{\mu T + z_{\alpha/2} \sigma \sqrt{T}} \right]$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor de la normal estándar tal que:

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = 1 - N(z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

Para poder desarrollar el precio de una opción en serie de autofunciones, hace falta conocer cuánto vale este en los extremos del intervalo $[S_m, S_M]$, es decir, especificar dos nuevas condiciones de contorno de la forma:

$$\left. \begin{aligned} C(S_m, t) &= f_1(t) \\ C(S_M, t) &= f_2(t) \end{aligned} \right\}$$

Teniendo en cuenta que $S_m \approx 0$ y que el precio de la opción según Black y Scholes es (11), podemos aproximar el precio de la opción en $S=S_m$ como:

$$\begin{aligned} C(S_m, t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_m) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx \\ &\approx \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(0) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = g(0) e^{-r(T-t)} = \\ &= u_0 e^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, para $S_M \gg 1$ y teniendo en cuenta que, en la práctica, cualquier instrumento financiero, con valor terminal $g(S)$, a valorar, está compuesto por combinaciones de Puts y Calls, es decir, que se puede expresar el valor terminal de la opción como la suma:

$$g(S) = \sum_{n=1}^N n_i \max\{K_i - S, 0\} + m_i \max\{S - K_i, 0\}$$

donde n_i y m_i son el número de opciones Put y Call respectivamente, K_i el precio de ejercicio de la opción correspondiente, y N el número de opciones con distinto precio de ejercicio, entonces, para S suficientemente alto, se puede aproximar la función $g(S)$ de la forma:

$$\begin{aligned} g(S) &= \sum_{i=1}^N m_i (S - K_i) \approx m S \\ m &= \sum_{i=1}^N m_i \end{aligned} \tag{12}$$

donde se considera que $S \gg K_j$. Si se sustituye, como antes, el valor de $g(S)$ en (11) y se integra se tiene que el precio de una opción en $S=S_M$, para S_M suficientemente grande, se puede aproximar mediante la fórmula:

$$\begin{aligned} C(S_M, t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} mS_M e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{mS_M}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2}\sigma^2+D_0)(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = mS_M e^{-D_0(T-t)} = \\ &= u_1 e^{-D_0(T-t)} \end{aligned}$$

Por tanto, las dos nuevas condiciones de contorno buscadas son¹:

$$\left. \begin{aligned} C(S_m, t) &= u_0 e^{-r(T-t)} \\ C(S_M, t) &= u_1 e^{-D_0(T-t)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Por ejemplo, para una Call con precio de ejercicio K , las condiciones anteriores se expresan de la forma:

$$\left. \begin{aligned} C(S_m, t) &= 0 \\ C(S_M, t) &= S_M e^{-D_0(T-t)} \end{aligned} \right\}$$

y para una Put con el mismo precio de ejercicio:

$$\left. \begin{aligned} C(S_m, t) &= Ke^{-r(T-t)} \\ C(S_M, t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, se puede plantear el siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= rC - (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, (S, t) \in]S_m, S_M[\times]0, T[\\ C(S, T) &= g(S), S \in]S_m, S_M[\\ C(S_m, t) &= u_0 e^{-r(T-t)}, t \in]0, T[\\ C(S_M, t) &= u_1 e^{-D_0(T-t)}, t \in]0, T[\end{aligned} \quad (14)$$

¹Recuérdese que, esencialmente, u_0 tiene que ver con el comportamiento de g en el origen, mientras que u_1 tiene que ver con su comportamiento en el infinito.

Debido a la complejidad de la EDP anterior, se consideran los siguientes cambios de variables:

$$\tau = T - t, x = \log\left(\frac{S}{S_m}\right).$$

El primero transforma (14) en una ecuación directa, con la condición de contorno temporal especificada en $\tau=0$:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -rC + (r - D_0)S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}, (S, \tau) \in]S_m, S_M[\times]0, T[$$

$$C(S, 0) = g(S), S \in]S_m, S_M[$$

$$C(S_m, \tau) = u_0 e^{-r\tau}, \tau \in]0, T[$$

$$C(S_M, \tau) = u_1 e^{-D_0\tau}, \tau \in]0, T[$$

El segundo elimina los términos S y S^2 que acompañan a $\frac{\partial C}{\partial S}$ y $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ respectivamente,

de tal forma que se llaman:

$$a^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$b = r - D_0 - a^2$$

$$L = \log \frac{S_M}{S_m}$$

se obtiene el problema mixto de contorno y valor inicial:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \frac{\partial C}{\partial x} - rC, (x, \tau) \in]0, L[\times]0, T[$$

$$C(x, 0) = g(S_m e^x), x \in]0, L[$$

$$C(0, \tau) = u_0 e^{-r\tau}, \tau \in]0, T[$$

$$C(L, \tau) = u_1 e^{-D_0\tau}, \tau \in]0, T[$$

(15)

La estructura lineal del problema anterior permite desdoblarlo en problemas más sencillos de tal forma que la solución de la ecuación (11) puede obtenerse como la suma de las soluciones de tres problemas, cada uno de los cuales con dos condiciones de contorno homogéneas. En definitiva, la solución a (15) puede obtenerse resolviendo los problemas auxiliares:

A)

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \frac{\partial C}{\partial x} - r C$$

$$C(x, 0) = g(S_m e^x)$$

$$C(0, \tau) = 0$$

$$C(L, \tau) = 0$$

C)

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \frac{\partial C}{\partial x} - r C$$

$$C(x, 0) = 0$$

$$C(0, \tau) = 0$$

$$C(L, \tau) = u_1 e^{-D_0 \tau}$$

B)

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \frac{\partial C}{\partial x} - r C$$

$$C(x, 0) = 0$$

$$C(0, \tau) = u_0 e^{-r \tau}$$

$$C(L, \tau) = 0$$

Se comienza resolviendo un problema similar al A) para, más tarde, transformar los problemas B) y C) en problemas con condiciones de contorno similares a las del A).

Sea la ecuación parabólica en derivadas parciales:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \frac{\partial C}{\partial x} - r C, (x, \tau) \in]0, L[\times]0, T[$$

$$C(x, 0) = G(x), x \in]0, L[$$

$$C(0, \tau) = 0, \tau \in]0, T[$$

$$C(L, \tau) = 0, \tau \in]0, T[$$

(16)

Hagamos²:

$$\alpha = -\frac{b}{2a^2}, \eta = -r - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Entonces el cambio de incógnitas:

$$C(x, \tau) = e^{\alpha x + \eta \tau} v(x, \tau)$$

lleva a:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, (x, \tau) \in]0, L[\times]0, T[$$

$$v(x, 0) = e^{-\alpha x} G(x), x \in]0, L[$$

$$v(0, \tau) = 0, \tau \in]0, T[$$

$$v(L, \tau) = 0, \tau \in]0, T[$$

que es la conocida ecuación de transferencia de calor sobre una barra de longitud L, y cuya solución puede calcularse fácilmente por el método de separación de variables (v. Apéndice 1) y es:

$$\begin{aligned} v(x, \tau) &= \int_0^L e^{-\alpha \xi} G(\xi) \left\{ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} \sin \frac{n\pi}{L} \xi \sin \frac{n\pi}{L} x \right\} d\xi = \\ &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} \sin \frac{n\pi}{L} x \end{aligned} \tag{17}$$

donde:

$$G_n = \int_0^L e^{-\alpha \xi} G(\xi) \sin \frac{n\pi}{L} \xi d\xi$$

son los coeficientes de Fourier del dato inicial. Por tanto, se tiene:

$$C(x, \tau) = e^{\alpha x + \eta \tau} \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} \sin \frac{n\pi}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \Phi_n(x, \tau)$$

² Nótese que $\alpha = \alpha(r, D_0, \sigma)$ y $\eta = \eta(r, D_0, \sigma)$.

para:

$$\Phi_n(x, \tau) = \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \tau + \alpha x} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (18)$$

donde recordemos que:

$$\tau = T - t$$

$$x = \log\left(\frac{S}{S_m}\right).$$

Sustituyendo en (17) la función:

$$G(\xi) = g(S_m e^\xi)$$

se obtiene que la solución del problema A) es:

$$v_A(x, \tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

para los coeficientes:

$$g_n = \int_0^L e^{-\alpha \xi} g(S_m e^\xi) \sin \frac{n\pi}{L} \xi d\xi,$$

de donde, recuperando la incógnita que nos ocupa, se obtiene³:

$$C_A(x, \tau) = \frac{2}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} \sin \frac{n\pi}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \Phi_n(x, \tau).$$

Para resolver el problema B):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} &= a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \frac{\partial C}{\partial x} - r C, (x, \tau) \in]0, L[\times]0, T[\\ C(x, 0) &= 0, x \in]0, L[\\ C(0, \tau) &= u_0 e^{-r\tau}, \tau \in]0, T[\\ C(L, \tau) &= 0, \tau \in]0, T[\end{aligned} \quad (19)$$

³ Recordemos que las variables naturales del modelo son $t=T-\tau$ y $S=S_M e^x$.

argumentamos de forma que:

$$C(x, \tau) = w(x, \tau) + U(x, \tau) \quad (20)$$

donde $U(x, \tau)$ se elige de modo que transforme las condiciones de contorno del problema B en condiciones homogéneas; para ello consideremos la función:

$$U(x, \tau) = H_0(x)u_0e^{-r\tau}$$

que será solución particular de la EDP:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial U}{\partial x} - r U$$

si:

$$a^2 H_0'' + b H_0' = 0.$$

Nótese que $U(0, \tau) = U(L, \tau) = 0$ se verifica, si se impone:

$$H_0(0) = 1$$

$$H_0(L) = 0$$

con lo que se llega a la función:

$$H_0(x) = B_0 + B_0' e^{-\frac{b}{a^2}x}$$

$$B_0 = \frac{1}{1 - e^{-\frac{Lb}{a^2}}}$$

$$B_0' = 1 - B_0.$$

En estas condiciones, una representación de C , solución de (19) en la forma (20), requiere que w satisfaga:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial w}{\partial x} - r w$$

$$w(x, 0) = -H_0(x)u_0$$

$$w(0, \tau) = 0$$

$$w(L, \tau) = 0$$

que tiene la misma estructura que (16), de tal forma que su solución es:

$$w(x, \tau) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n} \Phi_n(x, \tau)$$

donde los coeficientes son:

$$H_{0n} = - \int_0^L e^{-\alpha \xi} \left(B_0 + B'_0 e^{-\frac{b}{a^2} \xi} \right) \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi = - \frac{\frac{n\pi}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \alpha^2}$$

concluyéndose:

$$C_B(x, \tau) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n} \Phi_n(x, \tau) + u_0 e^{-r\tau} H_0(x).$$

El problema C) se resuelve de forma similar al B). Ahora, pretendemos representar cualquier solución de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \tau} &= a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + b \frac{\partial C}{\partial x} - r C, (x, \tau) \in]0, L[\times]0, T[\\ C(x, 0) &= 0, x \in]0, L[\\ C(0, \tau) &= 0, \tau \in]0, T[\\ C(L, \tau) &= u_1 e^{-D_0 \tau}, \tau \in]0, T[\end{aligned} \tag{21}$$

en la forma:

$$C(x, \tau) = w(x, \tau) + U(x, \tau) \tag{22}$$

con $U(x, \tau)$ de modo que transforme las condiciones de contorno en condiciones homogéneas. Así,

para que:

$$U(x, \tau) = H_1(x) u_1 e^{-D_0 \tau} \tag{23}$$

sea solución de la EDP:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial U}{\partial x} - r U \tag{24}$$

se requiere:

$$a^2 H_1'' + b H_1' - (r - D_0) H_1 = 0$$

que, para las condiciones:

$$H_1(0) = 0$$

$$H_1(L) = 1$$

deducidas de nuestro propósito $U(0, \tau) = U(L, \tau) = 0$, llevan a:

$$H_1(x) = B_1 e^x + B_1' e^{\frac{D_0 - r}{a^2} x}$$

$$B_1 = \frac{1}{e^L - e^{\frac{D_0 - r}{a^2} L}}$$

$$B_1' = -B_1.$$

Entonces, la función w debe verificar el problema:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial w}{\partial x} - r w$$

$$w(x, 0) = -H_1(x) u_0$$

$$w(0, \tau) = 0$$

$$w(L, \tau) = 0$$

que de nuevo tiene la misma estructura que (16), siendo, por tanto, su solución:

$$w(x, \tau) = u_1 \sum_{n=1}^{\infty} H_{1n} \Phi_n(x, \tau)$$

de coeficientes:

$$H_{1n} = - \int_0^L e^{-\alpha \xi} \left(B_1 e^{\xi} + B_1' e^{\frac{D_0 - r}{a^2} \xi} \right) \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{\frac{n\pi}{L} e^{-\alpha L} (-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + (1 - \alpha)^2}$$

y concluyendo:

$$C_C(x, \tau) = u_1 \sum_{n=1}^{\infty} H_{1n} \Phi_n(x, \tau) + u_1 e^{-D_0 \tau} H_1(x).$$

Con todo lo anterior la solución al problema (14) es, por tanto:

$$\begin{aligned} C(x, \tau) &= C_A(x, \tau) + C_B(x, \tau) + C_C(x, \tau) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (g_n + u_0 H_{0n} + u_1 H_{1n}) \Phi_n(x, \tau) + u_0 e^{-r\tau} H_0(x) + u_1 e^{-D_0 \tau} H_1(x) \end{aligned} \quad (25)$$

con:

$$\tau = T - t, \quad x = \log\left(\frac{S}{S_m}\right).$$

Como se verá en el Capítulo 4, resulta conveniente emplear la notación:

$$B_j = \frac{1}{e^{jL} - e^{(2j-1)(2\alpha-j)L}}, \quad j = 0, 1$$

$$H_j(x) = B_j e^{jx} + (1 - j - B_j) e^{(2\alpha-j)x}, \quad j = 0, 1$$

$$H_{jn} = - \frac{\frac{n\pi}{L} e^{-\alpha jL} (1 - 2j)^{n+1}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + (\alpha - j)^2}, \quad j = 0, 1 \quad (26)$$

$$\beta_j(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} \Phi_n(x, \tau) + (j e^{-D_0 \tau} + (1 - j) e^{-r\tau}) H_j(x), \quad j = 0, 1 \quad (27)$$

para la que podemos expresar el precio de una opción como:

$$C(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \Phi_n(x, \tau) + u_0 \beta_0(x, \tau) + u_1 \beta_1(x, \tau) \quad (28)$$

sobre las variables auxiliares:

$$\tau = T - t, \quad x = \log\left(\frac{S}{S_m}\right).$$

Ello es útil, pues si se toman los N primeros términos de la serie, se puede expresar el valor de dicho precio en cada (x, τ) , como el producto escalar de los vectores:

$$\begin{aligned} P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \quad P \in \mathfrak{R}^{N+2} \\ Q(x, \tau) &= Q = [\beta_0 \ \beta_1 \ \Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_N] \quad Q \in \mathfrak{R}^{N+2} \\ C(x, \tau) &= PQ', \quad C \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{29}$$

Con esto se logra separar, por una parte, todo lo referente al instrumento financiero a valorar, vector P , y, por otra, todo lo referente a la valoración en sí, vector Q . En el Capítulo 5 se verá con más detalle la utilidad de esta representación a la hora de calcular la estrategia eficiente, que no será más que calcular el vector P (la estrategia) que cumple unos determinados requisitos de varianza y esperanza. Por último, una aplicación inmediata de este método consiste en la valoración de opciones con frontera (vid. Cho (1997)), sin más que interpretar S_m y S_M como los precios del subyacente a partir de los cuales la opción vale una determinada cantidad. Podríamos valorar opciones del tipo down-and-in, down-and-out, up-and-in y up-and-out, donde el derecho a ejercitar la opción aparece “in” o desaparece “out” por encima “up” o por debajo “down” del precio actual del subyacente. Por ejemplo, para valorar una opción Call del tipo down-and-out con la barrera en $S = S_D$ únicamente se debe hacer $S_m = S_D$, es decir, utilizar las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} C(S_D, t) &= 0 \\ C(S_M, t) &= S_M e^{-D_0(T-t)} \\ C(S, T) &= g(S) \end{aligned} \right\}$$

y calcular los coeficientes de Fourier apropiados para la opción Call particular.

El método de separación de variables proporciona excelentes resultados no sólo en la valoración de todos estos tipos de opciones, sino también al aplicarlo a la valoración de opciones con dos fronteras generales (Double-Barrier Knock-Out, Double-Barrier Knock-in), donde las condiciones de contorno son del tipo:

$$\left. \begin{aligned} C(S_{up}, t) &= f_1(t) \\ C(S_{down}, t) &= f_2(t) \end{aligned} \right\}$$

2.1 Estimación del error cometido

Existen dos fuentes de error que pueden influir significativamente en los resultados obtenidos al utilizar (6) o al utilizar (28) en la valoración de opciones. Por una parte, la introducción de las dos nuevas condiciones de contorno (13) y, por otra, la aproximación de una serie ilimitada por la suma de sus N primeros términos. Respecto de las condiciones de contorno, hay que decir que no influyen demasiado en el valor de la opción, debido a que la primera, $C(S_m, t) = u_0 e^{-r(T-t)}$, está implícita en (6), con tal de que $S_m \approx 0$. La segunda aproxima una condición en el infinito, lo que significa que la influencia de dicho extremo sobre la solución es prácticamente insignificante.

El error cometido al aproximar la suma infinita (25) por la suma de sus N primeros términos se puede estimar mediante el siguiente procedimiento.

Como se ha señalado, el precio exacto de la opción se puede expresar en la forma:

$$C(x, \tau) = \sum_{n=1}^N (g_n + u_0 H_{0n} + u_1 H_{1n}) \Phi_n(x, \tau) + u_0 e^{-r\tau} H_0(x) + u_1 e^{-D_0 \tau} H_1(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (g_n + u_0 H_{0n} + u_1 H_{1n}) \Phi_n(x, \tau)$$

donde el último sumando representa el error cometido. Por tanto:

$$|\text{Error}(N)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (g_n + u_0 H_{0n} + u_1 H_{1n}) \Phi_n(x, \tau) \right|$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} |\text{Error}(N)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (g_n + u_0 H_{0n} + u_1 H_{1n}) \Phi_n(x, \tau) \right| = \\ &= \frac{2}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (g_n + u_0 H_{0n} + u_1 H_{1n}) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} \sin \frac{n\pi}{L} x \right| \end{aligned}$$

y, dado que la función seno siempre está acotada entre 1 y -1, entonces:

$$|\text{Error}(N)| \leq \frac{2}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \sum_{n=N+1}^{\infty} (|g_n| + |u_0 H_{0n}| + |u_1 H_{1n}|) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau}.$$

De la propia definición de los coeficientes de Fourier se tiene que $|g_n| \leq M \forall n, M \in \mathfrak{R}_+$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\text{Error}(N)| &\leq \frac{2}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} (M + |u_0 H_{0n}|) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_1 H_{1n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} \right| \right) \\ &< \frac{2}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \left(\int_N^{\infty} (M + |u_0 H_{0\zeta}|) e^{-\frac{\zeta^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} d\zeta + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_1 H_{1n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} \right| \right) \\ &= \frac{2}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \left(M \int_N^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} d\zeta + |u_0| \int_N^{\infty} |H_{0\zeta}| e^{-\frac{\zeta^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} d\zeta + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_1 H_{1n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} \right| \right). \end{aligned}$$

Analizando estos tres sumandos, se introduce la notación:

$$E_1(N) = \int_N^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} d\zeta = \frac{L}{2a \sqrt{\pi \tau}} \left(1 - \text{ERF} \left(\frac{\pi a}{L} \sqrt{\tau} N \right) \right) \quad (30)$$

$$E_2(N) = \int_N^{\infty} |H_{0\zeta}| e^{-\frac{\zeta^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} d\zeta = \int_N^{\infty} \frac{\frac{\zeta \pi}{L}}{\alpha^2 + \left(\frac{\zeta \pi}{L} \right)^2} e^{-\frac{\zeta^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} d\zeta = \quad (31)$$

$$= \frac{L e^{a^2 \tau \alpha^2}}{2\pi} \text{Ei} \left(a^2 \tau (\alpha^2 + N^2) \right)$$

siendo ERF la función error y Ei la integral exponencial:

$$\text{ERF}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$$\text{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

y:

$$E_3(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |H_{1n}| e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} = e^{-\alpha L} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\frac{n\pi}{L} (-1)^n}{(1-\alpha)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} \right|$$

Entonces, dado que la serie del segundo miembro de la última igualdad satisface las condiciones del Teorema de Leibniz para series con signo variable, el resto de la serie anterior no sobrepasa por su valor absoluto al primero de los términos omitidos:

$$E_3(N) \leq \frac{\pi e^{-\alpha L}}{L} \frac{N+1}{(1-\alpha)^2 + \left(\frac{(N+1)\pi}{L}\right)^2} e^{-\frac{(N+1)^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau}. \quad (32)$$

En virtud de (30) (31) y (32) se concluye que el error cometido al aproximar la suma infinita por la suma de sus N primeros términos se puede aproximar por⁴:

$$|\text{Error}(N)| \leq \frac{2}{L} e^{\alpha x + n\tau} (M E_1(N) + |u_0| E_2(N) + |u_1| E_3(N))$$

2.2 Convergencia

En la resolución de (11) por el método de separación de variables, se descompuso el sistema en tres problemas de la forma genérica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, (x, \tau) \in]0, L[\times]0, T[\\ v(x, 0) &= f(x), x \in]0, L[\\ v(0, \tau) &= 0, \tau \in]0, T[\\ v(L, \tau) &= 0, \tau \in]0, T[\end{aligned} \quad (33)$$

Como se mencionó anteriormente, el problema de contorno (33), es equivalente a la ecuación que describe un proceso de transferencia de calor en una barra de longitud L y coeficiente de conductividad a^2 , en donde inicialmente existe una distribución de temperaturas $f(x)$ y en cuyos extremos se mantiene, durante todo el proceso, la temperatura a cero grados. Las propiedades de

⁴ Nótese que $\text{Error}(N)$, $E_1(N)$, $E_2(N)$ y $E_3(N)$ tienden hacia cero conforme N tiende hacia infinito.

convergencia, unicidad de la solución, etc. de dicha ecuación se estudian en numerosos libros de Física Matemática como Churchill (1963), Mijáilov (1978), Weinberger (1992) etc. Por ello, no nos extenderemos demasiado en dichas demostraciones.

Dado que se puede expresar el precio de una opción como:

$$C(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n + u_0 H_{0n} + u_1 H_{1n}) \Phi_n(x, \tau) + u_0 e^{-r\tau} H_0(x) + u_1 e^{-D_0\tau} H_1(x),$$

la convergencia hacia el precio vendrá determinada por la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \Phi_n(x, \tau) \quad (34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} \Phi_n(x, \tau), j = 0, 1. \quad (35)$$

En el primer caso se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \Phi_n(x, \tau) = \frac{2}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

De su propia definición se sigue que los coeficientes de Fourier, g_n , estarán uniformemente acotados, más concretamente se verifica:

$$c = \int_0^L |e^{-\alpha \xi} g(S_m e^{\xi})| d\xi$$

$$|g_n| \leq c, \forall n.$$

Por tanto, la serie (34) tiene cada uno de sus términos acotados en valor absoluto por el correspondiente término de:

$$\frac{2c}{L} e^{\alpha x + \eta \tau} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \tau}.$$

Esta serie converge para todo $\tau > 0$ y uniformemente en $x \in [0, L]$ y $\tau \in [0, T]$. En el segundo caso, se tiene que probar la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} \Phi_n(x, \tau), j = 0, 1.$$

Teniendo en cuenta (26), entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} \Phi_n(x, \tau) = -\frac{2e^{\alpha(x-jL)+\eta\tau}}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n\pi}{L} (1-2j)^{n+1}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + (\alpha-j)^2} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2}\tau} \sin \frac{n\pi}{L} x, j=0,1$$

y dado que los términos en seno están acotados conforme $n \rightarrow \infty$, se puede demostrar la convergencia

de (35), demostrando que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\tau}}{n}$ converge. Utilizando la desigualdad de Schwarz se

obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\tau}}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^4\tau^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde cada una de las series que aparecen en el lado derecho de la desigualdad convergen.

También hay que hacer notar que la suma parcial de una serie de Fourier para una función periódica determinada, f , solo se aproxima a ésta uniformemente sobre un intervalo que no contenga puntos donde f sea discontinua. La naturaleza de dicha desviación es conocida en la literatura como efecto Gibbs. Por ello es de esperar que, aunque la estrategia a valorar, $g(S)$, sea continua en el intervalo $[S_m, S_M]$, en los extremos la convergencia sea mucho peor que en el resto del intervalo, apareciendo en ellos los picos característicos de dicho efecto.

Por último, hay que tener en cuenta que debido a que las autofunciones asociadas al problema, tienen términos de la forma:

$$e^{\alpha x} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

para:

$$x = \log \left(\frac{S}{S_m} \right)$$

se puede tener problemas de convergencia para valores de alfa positivos y altos, ya que dicho término no se amortiguaría. Aún así, para valores de τ suficientemente grandes, y conforme N tiende a infinito, cualquier término de las autofunciones asociadas se hace despreciables con respecto a los primeros.

2.3 Cálculo de sensibilidades

La mayoría de los operadores intentan hacer su cartera inmune a pequeños cambios en los parámetros fundamentales de la opción en pequeños intervalos de tiempo (vid. Fong y Vasicek (1984), Bookstaber y Langsam (1988), Dillman y Harding (1985)).

Parece interesante expresar dichas sensibilidades en forma de producto escalar, como se verá en el Capítulo 4, e introducirlas como restricciones en el problema del cálculo de la estrategia eficiente.

Para llevar a cabo esta tarea es necesario calcular una serie de tediosas derivadas que se emplearán en los próximos capítulos.

Nos fijaremos fundamentalmente en cinco: Delta, Gamma, Theta, Vega y Rho, cuyas definiciones matemáticas son:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \quad \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} \quad \Lambda = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$$

2.3.1 Delta de una opción

La Delta de una opción se define como la derivada parcial de su precio con respecto al precio del activo subyacente, es decir:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

En definitiva, la Delta mide la sensibilidad del precio de la opción ante cambios en el precio del activo subyacente. En general, se piensa que el precio del activo subyacente va a subir se querrá una opción o conjunto de opciones con Delta positiva. si se piensa que va a bajar, se querrá que sea negativa. Y si no se está seguro, se querrá una Delta igual a cero (posición Delta neutral).

Conforme el precio del activo subyacente se mueve y el tiempo transcurre, la Delta de la posición cambia. Por tanto, para continuar manteniendo una determinada Delta objetivo, se hace preciso revisar constantemente la posición, comprando o vendiendo opciones, de tal forma que la

Delta global de la posición sea la deseada. Por esta razón, merece la pena expresar en forma de producto escalar la Delta de una opción, de tal forma que pueda ser introducida como restricción en problemas de selección de carteras como los planteados en el capítulo introductorio. Por tanto, teniendo en cuenta la representación (28):

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{n=1}^N g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \\ &= \frac{1}{S} \left(\sum_{n=1}^N g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

donde para $j=0,1$:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \tau + \alpha x} \left(\frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} x + \alpha \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (36)$$

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial x} = \sum_{n=1}^N H_{jn} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) \frac{\partial H_j(x)}{\partial x} \quad (37)$$

$$\frac{\partial H_j(x)}{\partial x} = B_j j e^{jx} + (1-j-B_j)(2\alpha-j) e^{(2\alpha-j)x}. \quad (38)$$

De esta forma se puede expresar la Delta como el producto escalar siguiente:

$$\begin{aligned} P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\ Q_\Delta &= \left[\frac{\partial \beta_0}{\partial x} \ \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \ \dots \ \frac{\partial \Phi_N}{\partial x} \right] \frac{1}{S} \\ \Delta &= P Q'_\Delta \end{aligned} \quad (39)$$

2.3.2 Gamma de una opción

La Gamma de una opción se define como la derivada parcial de la Delta con respecto al precio del activo subyacente:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2},$$

es decir, es la sensibilidad de la Delta ante cambios en el precio del activo subyacente. Lo que indica es la velocidad con que habrá que hacer los ajustes en la composición de la cartera para mantener la

Delta objetivo. De nuevo, para poder introducirla como restricción en problemas similares al (8) del capítulo introductorio, hace falta expresarla como producto escalar de dos vectores.

Derivando dos veces (28):

$$\Gamma = \frac{1}{S^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right) + u_0 \left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta_0}{\partial x} \right) + u_1 \left(\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \right)$$

donde, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el cálculo de la Delta y para $j=0,1$, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} = \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \tau + \alpha x} \left(2\alpha \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} x + \left(\alpha^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \beta_j}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) \frac{\partial^2 H_j(x)}{\partial x^2} \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 H_j(x)}{\partial x^2} = B_j j^2 e^{jx} + (1-j-B_j)(2\alpha-j)^2 e^{(2\alpha-j)x} \quad (42)$$

y, por tanto, se puede expresar la Gamma de una opción como el producto de los vectores:

$$P = [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N]$$

$$Q_{\Gamma} = \left[\left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) \dots \left(\frac{\partial^2 \Phi_N}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_N}{\partial x} \right) \right] \frac{1}{S^2}$$

$$\Gamma = P Q'_{\Gamma} \quad (43)$$

2.3.3 Theta de una opción

La Theta de una opción se define como menos la derivada parcial de su precio con respecto al tiempo hasta el día de ejercicio, es decir:

$$\Theta = - \frac{\partial C}{\partial T}$$

Aunque el precio del activo subyacente no cambie, el mero hecho de que el tiempo pase influye, de manera decisiva, en que la posición produzca beneficios o pérdidas. Dado que ni la Delta ni la Gamma captan la influencia del tiempo, el operador necesita esta tercera medida para caracterizar de forma adecuada su posición.

Para poder introducirla como restricción lineal en un problema como el (8) se hace preciso expresarla como producto escalar de dos vectores. Derivando con respecto de T la ecuación (28) se tiene:

$$\begin{aligned}\Theta &= -\sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial T} - u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial T} - u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial T} = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} - u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \tau} - u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \tau}\end{aligned}$$

donde:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} = -\frac{2}{L} \left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta \right) e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta \right) \tau + \alpha x} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (44)$$

y que, para $j=0,1$:

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} - (jD_0 e^{-D_0 \tau} + (1-j)re^{-r\tau}) H_j(x) \quad (45)$$

De nuevo se puede expresar la Theta como producto escalar de los vectores:

$$\begin{aligned}P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\ Q_{\Theta} &= - \left[\frac{\partial \beta_0}{\partial \tau} \ \frac{\partial \beta_1}{\partial \tau} \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} \ \dots \ \frac{\partial \Phi_N}{\partial \tau} \right] \\ \Theta &= PQ'_{\Theta}\end{aligned} \quad (46)$$

2.3.4 Vega de una opción

Hasta ahora se ha asumido implícitamente que la volatilidad del activo subyacente es constante. En la práctica, la volatilidad varía. Esto significa que el valor de una opción tiende a cambiar debido a los cambios en la volatilidad al igual que debido a los cambios en el precio del activo subyacente y el paso del tiempo. Por tanto, es conveniente tener una medida que cuantifique dicho efecto.

La Vega de una opción se define como la derivada parcial de su precio con respecto a la volatilidad:

$$\Lambda = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Teniendo en cuenta (28):

$$\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial \sigma} \Phi_n + g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \sigma} \right) + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \sigma} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma}$$

donde:

$$\frac{\partial g_n}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \int_0^L \xi e^{-\alpha \xi} g(S_m e^{\xi}) \sin \frac{n\pi}{L} \xi d\xi$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial \sigma} = \Phi_n \left(-\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sigma - \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right) \tau + \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} x \right)$$

con:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = \frac{(r - D_0)^2 - a^4}{\sigma^3} = \frac{(r - D_0)^2 - \frac{1}{4} \sigma^4}{\sigma^3}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} = 2 \frac{r - D_0}{\sigma^3}$$

y para $j=0,1$:

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial \sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial H_{jn}}{\partial \sigma} \Phi_n + H_{jn} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \sigma} \right) + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) \frac{\partial H_j(x)}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial H_{jn}}{\partial \sigma} = \frac{n\pi(1-2j)^{n+1}}{L} e^{-Lj\alpha} \left(\frac{Lj}{(\alpha-j)^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} + \frac{2(\alpha-j)}{\left((\alpha-j)^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right)^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial H_j(x)}{\partial \sigma} = \frac{\partial B_j}{\partial \sigma} (e^{jx} - e^{(2\alpha-j)x}) + (1-j-B_j) 2x e^{(2\alpha-j)x} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial \sigma} = \frac{2L(2j-1)e^{L(2j-1)(2\alpha-j)}}{(e^{Lj} - e^{L(2j-1)(2\alpha-j)})^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$$

se puede expresar la Vega como el producto de los vectores:

$$\begin{aligned}
 P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\
 P_\Lambda &= \left[P \ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \ \dots \ \frac{\partial g_N}{\partial \sigma} \right] \\
 Q &= \left[\frac{\partial \beta_0}{\partial \sigma} \ \frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma} \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma} \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma} \ \frac{\partial \Phi_N}{\partial \sigma} \right] \\
 Q_\Lambda &= [Q \ \beta_0 \ \beta_1 \ \Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_N] \\
 \Lambda &= P_\Lambda Q'_\Lambda
 \end{aligned} \tag{47}$$

2.3.5 Rho de una opción

La Rho de una opción se define como la derivada parcial de su precio con respecto al tipo de interés libre de riesgo:

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Mide la sensibilidad del valor de una cartera ante cambios en el tipo de interés libre de riesgo. La magnitud de esta sensibilidad suele ser pequeña y no es tan utilizada por los operadores como la Delta, la Gamma, la Theta o la Vega. Para poder introducirla como restricción lineal en un problema como el (8) se hace preciso expresarla como producto escalar de dos vectores. Para ello se deriva con respecto de r la ecuación (28):

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} \Phi_n + g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right) + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial r} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial r}$$

donde:

$$\frac{\partial g_n}{\partial r} = -\frac{\partial \alpha}{\partial r} \int_0^L \xi e^{-\alpha \xi} g(S_m e^\xi) \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial r} = \Phi_n \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \tau + \frac{\partial \alpha}{\partial r} x \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \alpha - 1$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{-1}{\sigma^2}$$

y para $j=0,1$:

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial H_{jn}}{\partial r} \Phi_n + H_{jn} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right) + (je^{-D_0\tau} + (1-j)e^{-r\tau}) \frac{\partial H_j(x)}{\partial r} + (j-1)\tau e^{-r\tau} H_j(x)$$

$$\frac{\partial H_{jn}}{\partial r} = \frac{n\pi(1-2j)^{n+1}}{L} e^{-Lj\alpha} \left(\frac{Lj}{(\alpha-j)^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} + \frac{2(\alpha-j)}{\left((\alpha-j)^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right)^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

$$\frac{\partial H_j(x)}{\partial r} = \frac{\partial B_j}{\partial r} (e^{jx} - e^{(2\alpha-j)x}) + (1-j-B_j) 2x e^{(2\alpha-j)x} \frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial r} = \frac{2L(2j-1)e^{L(2j-1)(2\alpha-j)}}{(e^{Lj} - e^{L(2j-1)(2\alpha-j)})^2} \frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

De la misma forma que antes, se tiene que:

$$P = [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N]$$

$$P_\rho = \left[P \ \frac{\partial g_1}{\partial r} \ \frac{\partial g_2}{\partial r} \ \dots \ \frac{\partial g_N}{\partial r} \right]$$

$$Q = \left[\frac{\partial \beta_0}{\partial r} \ \frac{\partial \beta_1}{\partial r} \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \ \dots \ \frac{\partial \Phi_N}{\partial r} \right] \tag{48}$$

$$Q_\rho = [Q \ \beta_0 \ \beta_1 \ \Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_N]$$

$$\rho = P_\rho Q'_\rho$$

En definitiva, lo que se ha conseguido en este capítulo es, por una parte, expresar en forma de producto escalar de dos vectores tanto el precio de una opción europea como sus sensibilidades más importantes. Esta aproximación permitirá en capítulos posteriores resolver una serie de problemas de selección de carteras como los apuntados en el capítulo introductorio. Por otra parte, se desarrolla la metodología necesaria para poder valorar de forma exacta opciones con doble frontera. A

continuación se muestran una serie de ejemplos que pone de manifiesto la bondad de la aproximación realizada. Con ellos se pretende mostrar gráficamente la similitud de los resultados al valorar por el método de separación de variables y por el método de Black y Scholes⁵.

⁵ Nótese que este hecho es fundamental a la hora de resolver el problema (8)

2.4 Ejemplos

Calculando los coeficientes del desarrollo en autofunciones $g_1 \cdots g_N$ para una Call con precio de ejercicio $K=40$, $T=120/360$, $\sigma=.3$, $r=\log(1.05)$, $S_m=.1$, $S_M=300$, $u_0=0$, $u_1=300$,

$N=20$ se obtienen los siguientes resultados:

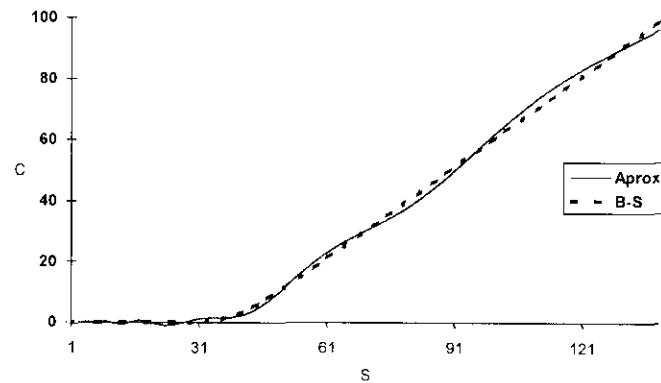


Figura 2.1

Comparación entre el valor de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=20$

Con $N=20$ la solución aproximada oscila en torno a la solución propuesta por Black y Scholes (1973), pero para N suficientemente grande las dos son prácticamente la misma. Por ejemplo para $N=50$:

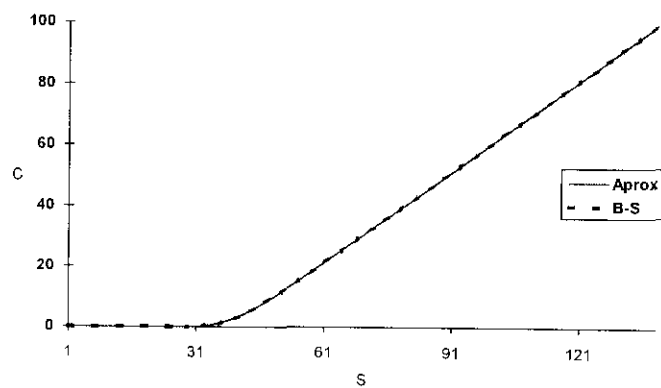


Figura 2.2

Comparación entre el valor de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para una Put con precio de ejercicio $K=40$, $T=120/360$, $\sigma=.3$, $r=\log(1.05)$, $S_m = 1$, $S_M = 300$, $u_0=K$,

$u_1=0$, $N=10$ se obtienen los siguientes resultados:

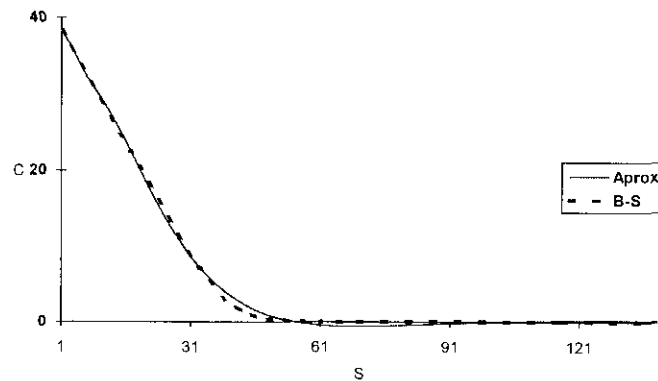


Figura 2.3

Comparación entre el valor de una Put evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=10$

Con $N=10$ la solución aproximada oscila muy poco en torno a la solución propuesta por Black y Scholes (1973). Para $N=25$ ⁶:

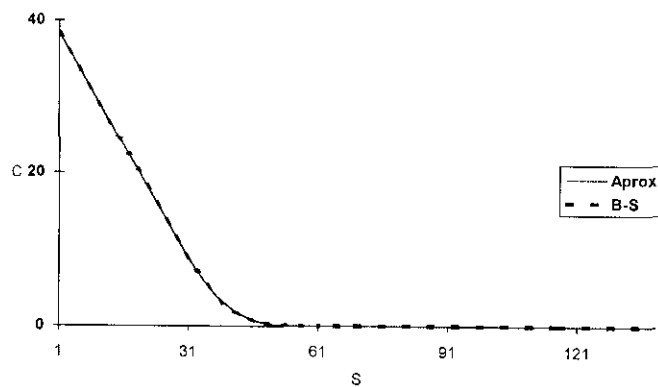


Figura 2.4

Comparación entre el valor de una Put evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=25$

⁶ La velocidad de convergencia a la solución original de Black y Scholes, es mayor para las opciones Put que para las Call, debido a que las primeras están acotadas cuando el precio del subyacente tiende a infinito.

Calculando los coeficientes del desarrollo en autofunciones $g_1 \cdots g_N$ para una Call con precio de ejercicio $K=40$, $T=1$, $\sigma=.3$, $r=\log(1.05)$, $S_m=.1$, $S_M=300$, $u_0=0$, $u_1=300$, $N=30$ se obtienen los siguientes resultados para la Delta de la opción:

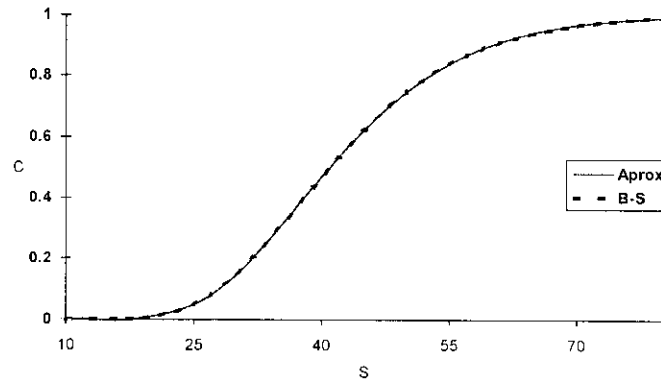


Figura 2.5

Comparación entre el valor de la Delta de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=30$

Con $N=30$ la solución aproximada oscila muy poco en torno a la solución propuesta por Black y Scholes (1973). Para N suficientemente grande las dos son prácticamente la misma. Por ejemplo, para $N=50$:

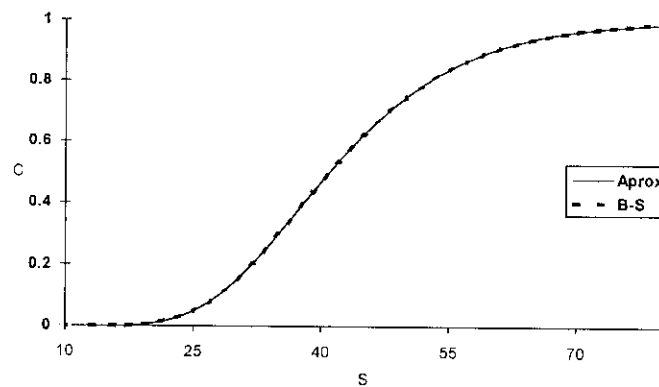


Figura 2.6

Comparación entre el valor de la Delta de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para la Gamma de la opción Call anterior se obtiene para $N=30$:

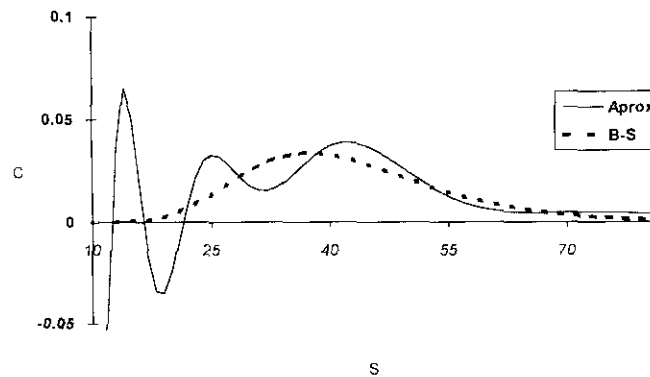


Figura 2.7

Comparación entre el valor de la Gamma de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=30$

Con $N=30$ la solución aproximada oscila bastante⁷ en torno a la solución propuesta por Black y Scholes (1973). Para N suficientemente grande, las dos son prácticamente la misma. Por ejemplo para $N=50$:

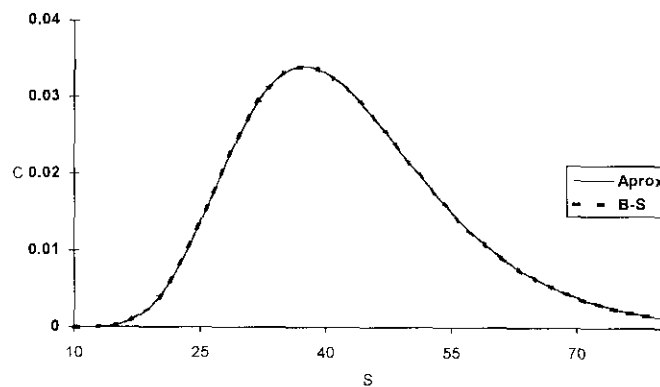


Figura 2.8

Comparación entre el valor de la Gamma de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

⁷ Este comportamiento se puede explicar si se tiene en cuenta que la Gamma de una Call, el día de ejercicio, es una Delta de Dirac y, por tanto, es lógico pensar que la convergencia sea más lenta.

Para la Theta de la opción anterior se obtienen los siguientes resultados:

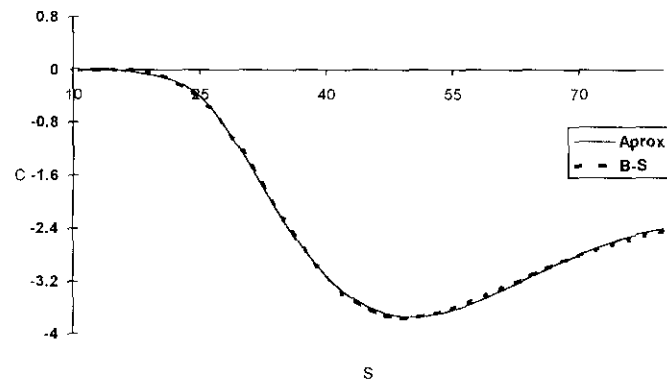


Figura 2.9

Comparación entre el valor de la Theta de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=30$

Con $N=30$ la solución aproximada oscila muy poco en torno a la solución propuesta por Black y Scholes (1973). Para $N=50$ las dos son prácticamente la misma:

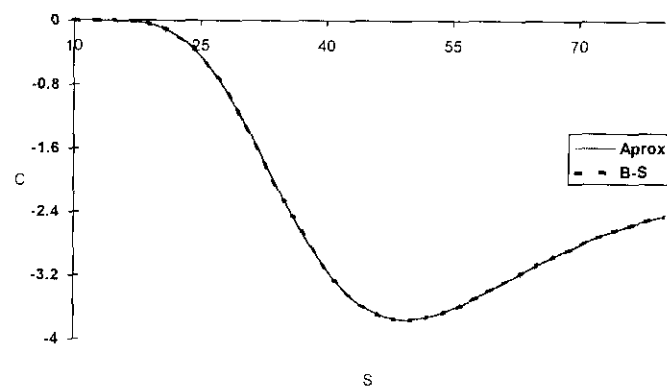


Figura 2.10

Comparación entre el valor de la Theta de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para la Vega de la opción anterior se obtienen los siguientes resultados:

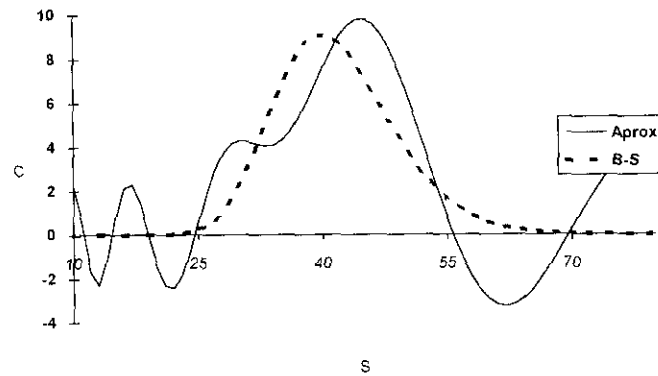


Figura 2.11

Comparación entre el valor de la Vega de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=30$

Con $N=30$ la solución aproximada oscila bastante en torno a la solución propuesta por Black y Scholes (1973). Para N suficientemente grande las dos son prácticamente la misma. Por ejemplo, para $N=50$:

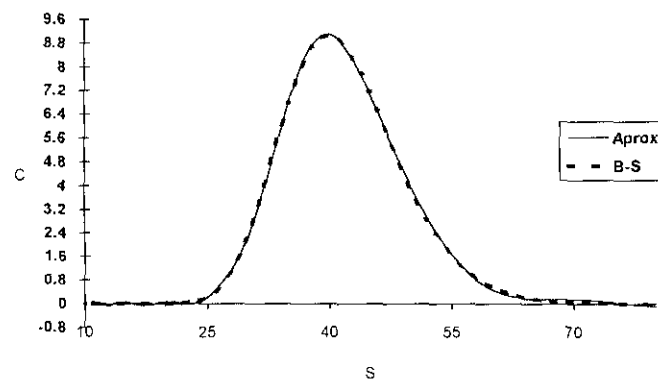


Figura 2.12

Comparación entre el valor de la Vega de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para la Rho de la opción anterior se obtienen los siguientes resultados:

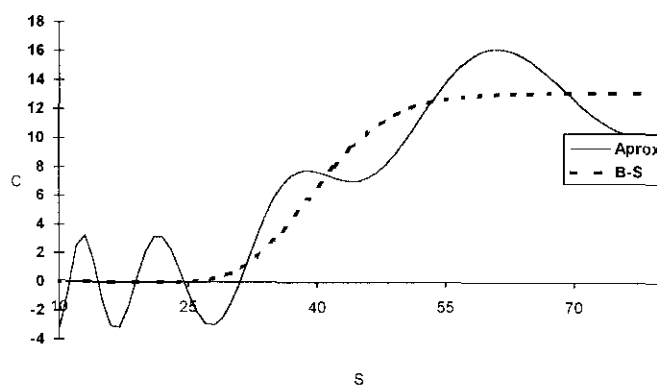


Figura 2.13

Comparación entre el valor de la Rho de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=30$

Con $N=30$ la solución aproximada oscila bastante en torno a la solución propuesta por Black y Scholes (1973). Para N suficientemente grande las dos son prácticamente la misma. Por ejemplo, para $N=50$:

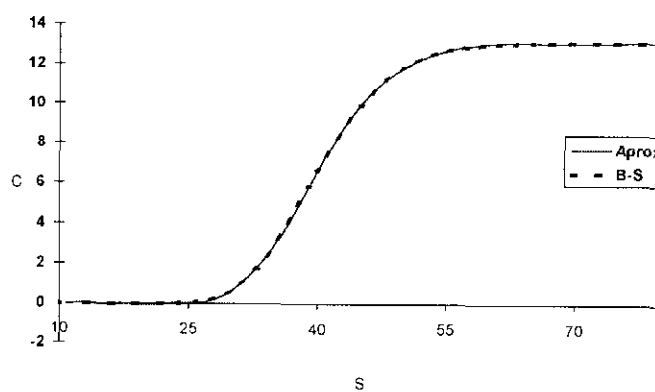


Figura 2.14

Comparación entre el valor de la Rho de una Call evaluada por el método de Black y Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Tabla 2.1

Precio de una Call calculado a partir del método de separación de variables
 ($S=40$, $r=\log(1.05)$, $D_0=\log(1.02)$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=100$)

σ	K	$T=\frac{50}{360}$	$T=\frac{120}{360}$	$T=\frac{1080}{360}$
.2	35	5.17 (1.45e-3)	5.52 (1.36e-5)	9.3 (6.5e-15)
	40	1.27 (7.6e-3)	2.02 (4.5e-5)	6.69 (5.57e-15)
	45	0.10 (1.0e-1)	0.45 (2.0e-4)	4.69 (6.6e-15)
.5	35	6.05 (6e-12)	7.42 (3.6e-16)	15.45 (1.8e-4)
	40	3.04 (1.6e-11)	4.73 (9.4e-16)	13.73 (2.35e-4)
	45	1.3 (3.1e-11)	2.88 (3.4e-15)	12.25 (2.9e-4)
.9	35	7.94 (2.2e-15)	10.53 (1.5e-9)	23.32 (1.2e-2)
	40	5.38 (5.9e-15)	8.30 (2.2e-9)	22.29 (1.4e-2)
	45	3.55 (7.5e-15)	6.52 (3.2e-9)	21.36 (1.6e-2)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio de la opción, se utilizaron los artículos de Black y Scholes (1973) y Hull (1997).

Tabla 2.2

Precio de una Put calculado a partir del método de separación de variables
 ($S=40$, $r=\log(1.05)$, $D_0=\log(1.02)$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=K$, $u_1=0$, $N=100$)

σ	K	$T=\frac{50}{360}$	$T=\frac{120}{360}$	$T=\frac{1080}{360}$
.2	35	0.04 (1.1e-2)	0.22 (4.2e-6)	1.84 (4.8e-16)
	40	1.11 (1.3e-3)	1.64 (4.2e-6)	3.55 (6.2e-16)
	45	4.89 (7.3e-5)	4.99 (6.8e-7)	5.87 (7.5e-16)
.5	35	0.93 (4.1e-12)	3.7 (3.6e-15)	7.99 (4.2e-13)
	40	2.88 (3.9e-12)	4.35 (2.8e-15)	10.59 (2.4e-13)
	45	6.11 (4.2e-13)	7.42 (1.2e-15)	13.42 (1.7e-14)
.9	35	2.82 (9.8e-15)	5.23 (3.0e-15)	15.59 (3.7e-6)
	40	5.22 (1.7e-16)	7.92 (3.4e-16)	18.84 (8.9e-6)
	45	8.35 (1.3e-15)	11.06 (2.4e-15)	22.19 (1.4e-5)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio de la opción, se utilizaron los artículos de Black y Scholes (1973) y Hull (1997).

Tabla 2.3
Delta de una Call calculado a partir del método de separación de variables
($S=40$, $r=\log(1.05)$, $D_0=0$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=180$)

σ	K	$T=\frac{50}{360}$	$T=\frac{120}{360}$	$T=\frac{1080}{360}$
.2	35	.97 (3.1e-5)	.91 (9.7e-12)	.84 (3.6e-14)
	40	.55 (6.2e-5)	.58 (1.7e-11)	.72 (3.7e-14)
	45	.07 (5.2e-4)	.21 (5.5e-11)	.6 (4.2e-14)
.5	35	.80 (5.5e-16)	.75 (0.0)	.78 (5.6e-4)
	40	.55 (1.6e-15)	.58 (1.7e-15)	.73 (6.8e-4)
	45	.31 (1.1e-15)	.42 (1.3e-15)	.68 (8.2e-4)
.9	35	.72 (1.1e-15)	.71 (7.7e-9)	.85 (1.8e-2)
	40	.57 (5.8e-16)	.61 (1.0e-8)	.83 (2.1e-2)
	45	.44 (2.5e-16)	.53 (1.4e-8)	.81 (2.4e-2)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio de la opción, se utilizaron los artículos de Black y Scholes (1973) y Hull (1997).

Tabla 2.4
Gamma de una Call calculado a partir del método de separación de variables
($S=40$, $r=\log(1.05)$, $D_0=0$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=180$)

σ	K	$T=\frac{50}{360}$	$T=\frac{120}{360}$	$T=\frac{1080}{360}$
.2	35	.02 (3.4e-2)	.03 (2.3e-9)	.02 (1.3e-8)
	40	.13 (5.5e-3)	.08 (9.9e-10)	.02 (9.8e-9)
	45	.05 (1.5e-2)	.06 (1.4e-9)	.03 (8.4e-9)
.5	35	.04 (8.7e-5)	.03 (1.2e-4)	.01 (7.8e-2)
	40	.05 (6.2e-5)	.03 (9.7e-5)	.01 (7.0e-2)
	45	.05 (6.9e-5)	.03 (9.7e-5)	.01 (6.4e-2)
.9	35	.03 (1.6e-4)	.02 (2.5e-4)	.01 (5.0e-1)
	40	.03 (1.4e-4)	.02 (2.2e-4)	.01 (4.7e-1)
	45	.03 (1.4e-4)	.02 (2.1e-4)	.01 (4.5e-1)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio de la opción, se utilizaron los artículos de Black y Scholes (1973) y Hull (1997).

Tabla 2.5

Theta de una Call calculado a partir del método de separación de variables
 ($S=40$, $r=\log(1.05)$, $D_0=0$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=180$)

σ	K	$T=\frac{50}{360}$	$T=\frac{120}{360}$	$T=\frac{1080}{360}$
.2	35	-2.32 (4.4e-4)	-2.60 (8.4e-11)	-1.66 (7.7e-14)
	40	-5.26 (2.3e-4)	-3.73 (6.8e-11)	-1.78 (6.5e-14)
	45	-1.63 (8.2e-4)	-2.35 (1.2e-10)	-1.77 (7.0e-14)
.5	35	-8.75 (2.2e-15)	-6.63 (1.2e-15)	-2.41 (3.4e-3)
	40	-11.54 (9.2e-16)	-7.66 (1.1e-16)	-2.60 (3.6e-3)
	45	-9.97 (1.6e-15)	-7.43 (3.6e-16)	-2.73 (3.9e-3)
.9	35	-17.24 (0.0)	-11.56 (8.4e-8)	-3.23 (6.7e-2)
	40	-19.79 (5.4e-16)	-12.71 (8.8e-8)	-3.48 (7.2e-2)
	45	-19.69 (1.3e-15)	-13.11 (9.6e-8)	-3.7 (7.6e-2)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio de la opción, se utilizaron los artículos de Black y Scholes (1973) y Hull (1997).

Tabla 2.6
 Vega de una Call calculado a partir del método de separación de variables
 ($S=40$, $r=\log(1.05)$, $D_0=0$, $S_m=0.1$, $S_M=300$, $u_0=0$, $u_1=300$, $N=180$)

σ	K	$T=\frac{50}{360}$	$T=\frac{120}{360}$	$T=\frac{1080}{360}$
.2	35	.94 (1.4e-3)	3.68 (3.4e-4)	17.08 (2.8e-5)
	40	5.93 (5.4e-3)	9.05 (2.3e-3)	23.15 (1.9e-4)
	45	2.10 (1.2e-2)	6.61 (5.3e-3)	26.77 (6.1e-4)
.5	35	4.16 (1.3e-5)	7.39 (4.6e-6)	24.14 (1.6e-1)
	40	5.90 (1.4e-4)	9.03 (5.8e-5)	26.91 (1.7e-1)
	45	5.24 (3.3e-4)	9.02 (1.4e-4)	29.13 (1.7e-1)
.9	35	5.01 (1.2e-6)	7.95 (3.2e-3)	21.13 (2.1e-1)
	40	5.84 (1.3e-5)	8.86 (3.3e-3)	22.98 (2.2e-1)
	45	5.87 (3.2e-5)	9.23 (3.6e-3)	24.62 (2.2e-1)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio de la opción, se utilizaron los artículos de Black y Scholes (1973) y Hull (1997).

Tabla 2.7
 Rho de una Call calculado a partir del método de separación de variables
 ($S=40$, $r=\log(1.05)$, $D_0=0$, $S_m=0.1$, $S_M=300$, $u_0=0$, $u_1=300$, $N=180$)

σ	K	$T=\frac{50}{360}$	$T=\frac{120}{360}$	$T=\frac{1080}{360}$
.2	35	4.67 (5.8e-4)	10.24 (2.5e-4)	66.87 (1e-5)
	40	2.81 (2.3e-2)	6.95 (6.0e-3)	62.02 (1.9e-4)
	45	.34 (1.34e-1)	2.50 (2.8e-2)	54.06 (6.1e-4)
.5	35	3.60 (7.9e-5)	7.42 (2.3e-5)	43.21 (4.4e-2)
	40	2.63 (1.6e-3)	6.10 (4.4e-4)	43.12 (5.1e-2)
	45	1.51 (5.8e-3)	4.57 (1.4e-3)	42.53 (5.8e-2)
.9	35	2.89 (1.5e-5)	5.87 (5.3e-4)	25.60 (2.9e-2)
	40	2.43 (2.9e-4)	5.38 (5.9e-4)	26.40 (3.3e-2)
	45	1.92 (8.9e-4)	4.79 (6.3e-4)	27.03 (3.8e-2)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio de la opción, se utilizaron los artículos de Black y Scholes (1973) y Hull (1997).

3 Rendimiento esperado condicionado y varianza condicionada del rendimiento de una opción

Una vez que se ha expresado el precio de una opción como producto escalar de dos vectores, para cada S y para cada t , parece interesante expresar de la misma manera el rendimiento esperado de una opción (vid. Rubinstein (1984)), así como utilizar el mismo método para transformar la varianza en una forma cuadrática; todo ello en aras de poder calcular, de una forma fácil, qué instrumento financiero (vector P), minimiza la varianza del rendimiento de una opción condicionada a una fecha futura y sujeta a una serie de restricciones sobre la rentabilidad exigida por el inversor, el presupuesto del inversor, y sobre las distintas sensibilidades de la opción, etc. Se comienza asumiendo un determinado modelo para el precio del activo subyacente (Kon (1984)), así como una serie de hipótesis necesarias para el cálculo del valor esperado y se finalizará expresando como producto escalar de dos vectores, tanto el precio esperado como las distintas sensibilidades esperadas de la opción, y expresando como una forma cuadrática la varianza del rendimiento de esta.

Como se vio en el capítulo anterior, el modelo que se asume para el cambio en el logaritmo del precio del subyacente entre la fecha actual, t , y cualquier fecha futura, h , es:

$$\log\left(\frac{S_h}{S_t}\right) \approx N(\mu(h-t), \sigma^2(h-t))$$
$$\mu = \log(\bar{m}) - \frac{\sigma^2}{2} - D_0$$

siendo S_t el precio en t del subyacente,

\bar{m} el rendimiento esperado anualizado del subyacente estimado por el inversor,

σ la volatilidad instantánea estimada por el inversor,

D_0 Tasa de pago de dividendos continua.

Por tanto:

$$S_h \propto S_t e^y$$

donde Y es una variable aleatoria que se distribuye como la normal:

$$Y \approx N(\mu(h - t), \sigma^2 \sqrt{h - t})$$

Asumamos las siguientes hipótesis (vid. Rubinstein (1984)):

1. El inversor y el “mercado” están de acuerdo en que el tipo de interés libre de riesgo es constante e igual a r .
2. El inversor y el “mercado” están de acuerdo en que el rendimiento del subyacente sigue una distribución lognormal.
3. Las estimaciones del inversor del rendimiento esperado anualizado y de la volatilidad instantánea del subyacente son \bar{m} y $\bar{\sigma}$; las estimaciones del mercado son m y σ .
4. El precio de mercado de una opción siempre se calcula utilizando la fórmula de Black-Scholes para opciones Europeas:

$$C(S, T - t; r, \sigma)$$

Estas hipótesis aíslan una única fuente de discordancia entre el inversor y el “mercado” sobre el precio de una opción. En la práctica puede haber otras fuentes de discrepancia como tasas de interés, dividendos, la propia fórmula, etc., pero las diferencias en la volatilidad estimada son las más importantes.

Se habla aquí del mercado, como si tuviese “inteligencia” propia (vid. Rubinstein (1984)). Esto es consecuencia del tipo de inferencias que se pueden hacer de los precios de mercado de un determinado activo financiero. Por ejemplo, si se conoce el precio de mercado de una determinada opción, se podría despejar de la fórmula de Black-Scholes la volatilidad, dados los demás parámetros. Esta informaría de la opinión del mercado sobre dicha desviación típica.

Las hipótesis anteriores también encierran implícitamente una hipótesis sobre la naturaleza de la ineficiencia en el mercado.

Si se cree que un activo está infra o sobrepreciado, para medir su rendimiento esperado sobre un determinado intervalo temporal, hace falta alguna hipótesis sobre la velocidad con que dicha diferencia de precios desaparece. En el caso de una opción que está mal valorada con respecto a su activo subyacente, se sabe que cualquier infra o sobrevaloración debe desaparecer completamente el día de ejercicio para que no existan oportunidades de arbitraje. Todos los modelos de valoración de opciones y todos los estimadores de volatilidad están de acuerdo sobre el valor de una opción relativa al del subyacente el día de ejercicio. Una posibilidad es medir esta diferencia de precios por el valor absoluto de la resta entre el valor y el precio y suponer que ésta disminuye como una función lineal del tiempo hasta el día de ejercicio. Un supuesto más fundamental puede ser derivado de las variables que afectan el precio de una opción. Aquí se asume que la fuente de infra o sobre valoración tiene que ver con las diferencias en la estimación de la volatilidad del subyacente y que tanto el inversor como el mercado persisten en sus opiniones sobre la volatilidad hasta el día de ejercicio de la opción.

3.1 Rendimiento esperado condicionado de una opción

Bajo las condiciones expuestas en el epígrafe anterior, el precio de mercado esperado para un instrumento financiero con valor terminal $g(S)$, al final del periodo de posesión del instrumento, $h < T$ medido como fracción de año, será (vid. Rubinstein (1984)):

$$\begin{aligned}
 E\{C|h\} &= E\{C(S_h, T-h; r, \sigma)\} = \\
 &= \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} C(S_0 e^y, T-h, r, \sigma) e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\bar{\sigma}^2 h}} dy
 \end{aligned} \tag{49}$$

donde:

$$\mu = \log(\bar{m}) - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 - D_0$$

Hay que notar que, en el cálculo de la esperanza anterior, el precio de la opción debe evaluarse en la volatilidad estimada por el “mercado” σ (volatilidad implícita), para poder obtener, dadas las expectativas de volatilidad y rendimiento del subyacente ($\bar{\sigma}$, μ), el precio de mercado esperado condicionado a la fecha futura $t=h$.

Teniendo en cuenta (6), se puede expresar (49) como:

$$E\{C|h\} = \frac{e^{-r(T-h)}}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{y+(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-h)+\sigma\sqrt{T-h}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy. \quad (50)$$

Lo que interesa para el desarrollo posterior de la investigación, es expresar (50) como producto escalar de dos vectores de la misma forma que se expresa en el capítulo anterior el precio de una opción.

Utilizando la representación (28), la integral doble anterior se convierte en una suma de integrales simples, resolubles por los métodos tradicionales de integración.

El precio de una opción en $S=S_h$ se puede expresar como:

$$C(S_h, T-h; r, \sigma) = \sum_{n=1}^N g_n \Phi_n(X, \tau) + u_0 \beta_0(X, \tau) + u_1 \beta_1(X, \tau)$$

donde tanto Φ_n como β_j se evalúan en¹:

$$\tau = T-h$$

$$X = \log\left(\frac{S_h}{S_m}\right) = \log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + Y$$

y en la volatilidad implícita σ . Entonces²:

$$E\{C|h\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^N g_n \Phi_n + u_0 \beta_0 + u_1 \beta_1 \right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy =$$

¹ Nótese que ahora X e Y son variables aleatorias.

² Por las razones expuestas en el capítulo primero se considera que el precio de la opción es cero fuera del intervalo $[S_m, S_M]$.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_0 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy + \\
 &+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\
 &= \sum_{n=1}^N g_n \hat{\Phi}_n(x, \tau) + u_0 \beta_0(x, \tau) + u_1 \beta_1(x, \tau)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Phi}_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2 - \eta\right)\tau + \alpha\left(\log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + y\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\left(\log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + y\right)\right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy. \quad (51)
 \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de la función exponencial, la identidad de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (52)$$

y con ayuda de la integral:

$$\int e^{-(ax^2 + bx + c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2 - 4ac)/4a} \operatorname{ERF}\left\{\frac{b + 2ax}{2\sqrt{a}}\right\} \quad (53)$$

se obtiene que:

$$\hat{\Phi}_n = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-1}{L} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2 - \eta\right)\tau + \frac{\sigma^2 h}{2}\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)} e^{i\frac{n\pi}{L}\left(\alpha h\sigma^2 + \log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + \mu h\right)} \operatorname{ERF}\left\{W(y; \alpha)\right\} \right\} \quad (54)$$

con:

$$W(y; p) = i \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{h}{2}} \sigma + \frac{-y + h(\mu + p\sigma^2)}{\sigma\sqrt{2h}}$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior es fácil ver que:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_j &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_j e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^N H_{jn} \Phi_n + (je^{-D_0\tau} + (1-j)e^{-r\tau}) H_j \right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \sum_{n=1}^N H_{jn} \hat{\Phi}_n + (je^{-D_0\tau} + (1-j)e^{-r\tau}) \hat{H}_j \end{aligned}$$

donde $\hat{\Phi}_n$ se define en (51) y:

$$\begin{aligned} \hat{H}_j &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} H_j e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \frac{B_j}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \left(\log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + y \right)} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy + \frac{1-j-B_j}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\alpha-j) \left(\log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + y \right)} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de la función exponencial y el resultado (53), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \hat{H}_j &= \frac{-B_j}{2} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^j e^{hj \left(\mu + j \frac{\sigma^2}{2} \right)} \text{ERF}(\text{Re}\{W(y; j)\}) - \\ & \quad - \frac{(1-j-B_j)}{2} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^{2\alpha-j} e^{h(2\alpha-j) \left(\mu + (2\alpha-j) \frac{\sigma^2}{2} \right)} \text{ERF}(\text{Re}\{W(y; 2\alpha-j)\}) \Big|_{\log \frac{S_m}{S_0}}^{\log \frac{S_M}{S_0}} \end{aligned} \quad (55)$$

Por tanto se puede expresar el precio esperado de mercado de una opción, condicionado a una determinada fecha futura $t=h$ y a un estado inicial S_0 , como:

$$E\{C|h\} = \sum_{n=1}^N g_n \Phi_n(x, \tau) + u_0 \beta_0(x, \tau) + u_1 \beta_1(x, \tau)$$

o bien como producto escalar de dos vectores (para cada S y para cada t):

$$\begin{aligned} E\{C|h\} &= P\hat{Q}' \\ P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\ \hat{Q} &= [\hat{\beta}_0 \ \hat{\beta}_1 \ \hat{\Phi}_1 \ \hat{\Phi}_2 \ \dots \ \hat{\Phi}_N] \end{aligned} \quad (56)$$

Por tanto, se puede separar, al igual que con el precio de la opción, por una parte todo lo que concierne al instrumento financiero a valorar (vector P) y, por otra, todo lo concerniente a la valoración en sí.

El rendimiento esperado anualizado de la opción será pues la fracción:

$$m_C = \left(\frac{E\{C|h\}}{C_0} \right)^{\frac{1}{h}} = \left(\frac{P\hat{Q}'}{P\hat{Q}'} \right)^{\frac{1}{h}}$$

donde C_0 es el precio de mercado hoy ($t=0$) del instrumento financiero a valorar:

$$C_0 = C(S_0, T; r, \sigma).$$

También hay que notar que la tasa de crecimiento μ no aparece en la solución de la ecuación de Black-Scholes (6). Aunque el valor de una opción depende de la desviación típica del rendimiento del precio del subyacente, no depende de su tasa de crecimiento. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el valor esperado de mercado de la opción, como se aprecia en los resultados anteriores.

Por otra, parte el precio de una opción y su valor esperado descontado sólo coincidirán en el caso en que $\mu = r$ y $\bar{\sigma} = \sigma$; esta es una de las razones por las cuales no es correcto interpretar la Delta de una opción como la probabilidad de que esta expire "in the money", ya que para calcular esta probabilidad se debe hallar el valor esperado de la función $U(S-K)$ donde U es la función de Heaviside, que necesariamente contendría al parámetro μ , mientras que la Delta, como se apuntó anteriormente, no lo contiene.

3.2 Varianza condicionada del precio de mercado de una opción.

En esta sección se expresa la varianza condicionada a una fecha futura $t=h$ del precio de mercado de una opción como una forma cuadrática. Esto permitirá, en el Capítulo 5, plantear diversos problemas del cálculo de la estrategia de mínima varianza sujeta a una serie de restricciones. La varianza del precio buscada se puede expresar como:

$$V\{C|h\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} (C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) - E\{C|h\})^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy$$

o como es habitual:

$$V\{C|h\} = E\{C^2|h\} - (E\{C|h\})^2$$

donde utilizando (6) se obtiene por una parte que:

$$(E\{C|h\})^2 = \left(\frac{e^{-r(T-h)}}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{y+(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-h)+\sigma\sqrt{T-h}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \right)^2$$

y por otra:

$$E\{C^2|h\} = \frac{e^{-2r(T-h)}}{\sigma (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{y+(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-h)+\sigma\sqrt{T-h}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy.$$

Si lo que se pretende es calcular qué instrumento financiero, con valor terminal $g(S)$, minimiza la varianza sujeta a una serie de restricciones sobre rentabilidad, presupuestarias, etc. Las fórmulas anteriores no parecen estar expresadas de la forma más sencilla. Sin embargo, si se utiliza la expresión del precio de una opción (29) y de su valor esperado (56), las fórmulas

anteriores se pueden representar simplemente como la formas cuadráticas siguientes:

$$(E\{C|h\})^2 = P\hat{Q}'\hat{Q}P'$$

donde:

$$\hat{Q}'\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0^2 & \hat{\beta}_0\hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_0\hat{\Phi}_1 & \dots & \hat{\beta}_0\hat{\Phi}_N \\ \hat{\beta}_1\hat{\beta}_0 & \hat{\beta}_1^2 & \hat{\beta}_1\hat{\Phi}_1 & \dots & \hat{\beta}_1\hat{\Phi}_N \\ \hat{\Phi}_1\hat{\beta}_0 & \hat{\Phi}_1\hat{\beta}_1 & \hat{\Phi}_1^2 & \dots & \hat{\Phi}_1\hat{\Phi}_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\Phi}_N\hat{\beta}_0 & \hat{\Phi}_N\hat{\beta}_1 & \hat{\Phi}_N\hat{\Phi}_1 & \dots & \hat{\Phi}_N^2 \end{bmatrix}.$$

Queda por calcular $E\{C^2|h\}$. Ahora bien:

$$C^2 = PQ'QP' = P\Omega P'$$

para:

$$\Omega = Q'Q = \begin{bmatrix} \beta_0^2 & \beta_0\beta_1 & \beta_0\Phi_1 & \dots & \beta_0\Phi_N \\ \beta_1\beta_0 & \beta_1^2 & \beta_1\Phi_1 & \dots & \beta_1\Phi_N \\ \Phi_1\beta_0 & \Phi_1\beta_1 & \Phi_1^2 & \dots & \Phi_1\Phi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_N\beta_0 & \Phi_N\beta_1 & \Phi_N\Phi_1 & \dots & \Phi_N^2 \end{bmatrix}.$$

Entonces la esperanza buscada es:

$$E\{C^2|h\} = E\{PQ'QP'\} = E\{P\Omega P'\} = PE\{\Omega\}P' = P\hat{\Omega}P'$$

con:

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} E\{\beta_0^2\} & E\{\beta_0\beta_1\} & E\{\beta_0\Phi_1\} & \dots & E\{\beta_0\Phi_N\} \\ E\{\beta_1\beta_0\} & E\{\beta_1^2\} & E\{\beta_1\Phi_1\} & \dots & E\{\beta_1\Phi_N\} \\ E\{\Phi_1\beta_0\} & E\{\Phi_1\beta_1\} & E\{\Phi_1^2\} & \dots & E\{\Phi_1\Phi_N\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{\Phi_N\beta_0\} & E\{\Phi_N\beta_1\} & E\{\Phi_N\Phi_1\} & \dots & E\{\Phi_N^2\} \end{bmatrix}$$

donde $E\{f\}$ quiere decir:

$$E\{f\} = E\{f|h\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \quad (57)$$

Por tanto, mediante esta formulación, se puede expresar la varianza condicionada del precio de mercado de una opción como la forma cuadrática:

$$V\{C|h\} = P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P'$$

La matriz $(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})$ tiene dos propiedades que serán de gran utilidad en el Capítulo 5; es simétrica y definida positiva. La primera se demuestra trivialmente, dado que, si las matrices $\hat{\Omega}$ y $\hat{Q}'\hat{Q}$ son simétricas, la matriz $(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})$ también lo será. Para demostrar la segunda, basta con observar que una varianza es siempre positiva:

$$V\{C|h\} > 0 \Rightarrow P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P' > 0, \forall P$$

y se concluye que la matriz $(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})$ es definida positiva.

Para calcular cada uno de los elementos de $\hat{\Omega}$, basta con calcular los siguientes valores esperados, para $j, j' = 0, 1$:

$$\begin{aligned} E\{\beta_j \beta_{j'}\} \\ E\{\beta_j \Phi_n\} \\ E\{\Phi_n \Phi_k\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta, como antes, que tanto Φ_n como β_j deben ir evaluados en:

$$\begin{aligned} \tau &= T - h \\ X &= \log\left(\frac{S_h}{S_m}\right) = \log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + Y \end{aligned}$$

y en la volatilidad implícita σ , entonces:

$$\begin{aligned} E\{\beta_j \beta_{j'}\} &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N H_{jn} H_{jk} E\{\Phi_n \Phi_k\} + (j' e^{-D_0 \tau} + (1-j') e^{-r\tau}) \sum_{n=1}^N H_{jn} E\{H_j \Phi_n\} \\ &+ (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) \sum_{n=1}^N H_{jn} E\{H_j \Phi_n\} \\ &+ (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau})(j' e^{-D_0 \tau} + (1-j') e^{-r\tau}) E\{H_j H_{j'}\} \end{aligned}$$

Utilizando la identidad de Euler y (53), se llega a que:

$$E\{\Phi_n \Phi_k\} = A \operatorname{Im}\{I(y; k-n) - I(y; k+n)\} \Big|_{\log \frac{S_m}{S_0}}^{\log \frac{S_M}{S_0}} \quad (58)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{L^2} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^{2\alpha} e^{-\left(\frac{\pi^2 a^2}{L^2} (n^2 + k^2) - 2\eta \right) \tau} \\ I(y; p) &= \frac{i}{4} e^{2i \frac{h}{2\sigma^2} (-p^2 \pi^2 \sigma^4 + L^2 (\mu + 2\alpha \sigma^2)^2 - \mu^2 L^2) + i\theta'} \operatorname{ERF}(W(y; 2\alpha)) \\ \theta' &= \frac{p\pi}{L} \left(\log \frac{S_0}{S_m} + h(\mu + 2\alpha \sigma^2) \right) \end{aligned}$$

De la misma manera se tiene que:

$$E\{H_j \Phi_n\} = B_j \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^j E\{e^{jy} \Phi_n\} + (1-j-C_j) \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^{2\alpha-j} E\{e^{(2\alpha-j)y} \Phi_n\} \quad (59)$$

donde, para calcular $E\{e^{jy} \Phi_n\}$ y $E\{e^{(2\alpha-j)y} \Phi_n\}$ se utiliza que:

$$E\{e^{Ay} \Phi_n\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-1}{L} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^\alpha e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 - \eta \right) \tau + \frac{\sigma^2 h}{2} \left((\alpha+A)^2 + 2 \frac{\alpha+A}{\sigma^2} \mu - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + i\theta'} \operatorname{ERF}\left\{ W(y; \alpha+A) \right\} \Big|_{\log \frac{S_m}{S_0}}^{\log \frac{S_M}{S_0}} \right\} \quad (60)$$

$$\theta' = \frac{n\pi}{L} \left(\log \frac{S_0}{S_m} + h(\mu + \alpha \sigma^2) \right).$$

El término $E\{H_j H_{j'}\}$ se calcula trivialmente teniendo en cuenta (60), de tal forma que:

$$\begin{aligned} E\{H_j H_{j'}\} = & B_j B_{j'} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^{j+j'} E\{e^{(j+j')y}\} + \\ & + B_j (1-j' - B_{j'}) \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^{j+2\alpha-j'} E\{e^{(j+2\alpha-j')y}\} + \\ & + B_{j'} (1-j - B_j) \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^{j'+2\alpha-j} E\{e^{(j'+2\alpha-j)y}\} + \\ & + (1-j - B_j)(1-j' - B_{j'}) \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^{4\alpha-j-j'} E\{e^{(4\alpha-j-j')y}\} \end{aligned}$$

y, por último, dados los resultados anteriores (58) y (59), el valor de $E\{\beta_j \Phi_n\}$ se calcula según:

$$E\{\beta_j \Phi_n\} = \sum_{k=1}^N H_{jk} E\{\Phi_n \Phi_k\} + (je^{-D_0\tau} + (1-j)e^{-r\tau}) E\{H_j \Phi_n\}.$$

En definitiva se logra expresar la varianza del precio de la opción condicionada a una determinada fecha futura como la forma cuadrática:

$$V\{C|h\} = P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P'. \quad (61)$$

De nuevo se ha separado la parte concerniente al instrumento financiero a valorar (vector P) y la concerniente a la valoración en sí. Esta separación, tanto en el precio de la opción como en su valor esperado y varianza, será crucial a la hora de calcular la estrategia de mínima varianza que garantice un determinado rendimiento.

Por último, hay que tener en cuenta que, si se llama $C_0 = C(S_0, T; r, \sigma)$ al precio hoy de la opción con valor terminal $g(S)$, entonces la varianza anualizada del rendimiento de una opción condicionada a una fecha futura $t=h$, se puede expresar como la fracción:

$$V_{m_e} = \frac{P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P'}{hC_0^2}.$$

3.3 Sensibilidades esperadas de una opción

Al igual que con el precio esperado de una opción, se puede expresar la Delta, Gamma, Theta, Vega y Rho esperadas como producto escalar de dos vectores, de tal suerte que se podrán utilizar en el capítulo siguiente como restricciones lineales en un programa de minimización cuadrática de la varianza.

Asumiendo las hipótesis descritas al comienzo de este capítulo sobre el rendimiento del precio del subyacente, se puede calcular las esperanzas anteriores sin más que integrar sobre la distribución de dicho rendimiento.

3.3.1 Delta esperada de una opción

Como se vio en el capítulo anterior, se puede expresar la Delta de una opción como la siguiente suma:

$$\Delta = \frac{1}{S} \left(\sum_{n=1}^N g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \quad (62)$$

donde las derivadas parciales que componen la suma anterior se describen en las fórmulas (36), (37) y (38). Integrando (62) sobre la distribución del rendimiento del subyacente se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \left(\sum_{n=1}^N g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^N g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy + \frac{u_0}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial \beta_0}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy + \\ &+ \frac{u_1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial \beta_1}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \end{aligned}$$

donde tanto $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta_0}{\partial x}$, como $\frac{\partial \beta_1}{\partial x}$ deben ir evaluadas en la volatilidad implícita (estimada

por el mercado), y en:

$$\tau = T - h$$

$$X = \log\left(\frac{S_h}{S_m}\right) = \log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + Y.$$

Resolviendo las integrales anteriores, se puede expresar la Delta de mercado esperada como la suma siguiente:

$$\hat{\Delta} = \sum_{n=1}^N g_n \Phi_{n,x} + u_0 \beta_{0,x} + u_1 \beta_{1,x}$$

donde, teniendo en cuenta (57):

$$\begin{aligned} \Phi_{n,x} &= E\left\{ \frac{1}{S} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right\} = \frac{1}{\bar{\sigma} \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\bar{\sigma}^2 h}} dy \\ &= \frac{2e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \tau}}{S_0 L \bar{\sigma} \sqrt{2\pi h}} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha-1)y} \left(\frac{n\pi}{L} \cos \vartheta + \alpha \sin \vartheta\right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\bar{\sigma}^2 h}} dy \end{aligned}$$

con:

$$\vartheta = \frac{n\pi}{L} \left(\log \frac{S_0}{S_m} + y \right).$$

Utilizando la identidad de Euler y la integral (53) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,x} &= \frac{-1}{2S_0 L} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \tau} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^\alpha e^{\frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 h \left((\alpha-1)^2 + 2 \frac{(\alpha-1)\mu}{\bar{\sigma}^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right)} \\ &\quad \left(\frac{n\pi}{L} \operatorname{Re}\{e^{i\vartheta'} \operatorname{ERF}\{W(y; \alpha)\}\} + \alpha \operatorname{Im}\{e^{i\vartheta'} \operatorname{ERF}\{W(y; \alpha)\}\} \right) \Bigg|_{\log \frac{S_m}{S_0}}^{\log \frac{S_M}{S_0}} \end{aligned}$$

donde:

$$\vartheta' = \left(\bar{\sigma}^2 h (\alpha - 1) + \log \frac{S_0}{S_m} + \mu h \right) \frac{n\pi}{L}.$$

De la misma forma se puede calcular $\hat{\beta}_{j,x}$, ($j=0,1$):

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{j,x} &= E\left\{\frac{1}{S} \frac{\partial \beta_j}{\partial x}\right\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial \beta_j}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \left(\sum_{n=1}^N H_{jn} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) \frac{\partial H_j}{\partial x} \right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^N H_{jn} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy + \frac{(j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau})}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial H_j}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \sum_{n=1}^N H_{jn} \hat{\Phi}_{n,x} + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) \hat{H}_{j,x}\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{j,x} &= E\left\{\frac{1}{S} \frac{\partial H_j}{\partial x}\right\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \frac{\partial H_j}{\partial x} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0 e^y} \left(B_j j \left(\frac{S_0 e^y}{S_m} \right)^\alpha + (1-j-B_j)(2\alpha-j) \left(\frac{S_0 e^y}{S_m} \right)^{2\alpha-j} \right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy\end{aligned}$$

y utilizando las mismas técnicas de integración que en los casos anteriores se obtiene que:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{j,x} &= \frac{-B_j j}{2S_0} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^j e^{h(j-1) \left(\mu + (j-1) \frac{\sigma^2}{2} \right)} \text{ERF}\{\text{Re}\{W(y; j-1)\}\} \\ &\quad - \frac{(1-j-B_j)(2\alpha-j)}{2S_0} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^{2\alpha-j} e^{h(2\alpha-j-1) \left(\mu + (2\alpha-j-1) \frac{\sigma^2}{2} \right)} \text{ERF}\{\text{Re}\{W(y; 2\alpha-j-1)\}\}.\end{aligned}$$

Por tanto, se puede expresar la Delta esperada de una opción como el producto escalar (para cada x y para cada τ) de los vectores:

$$\begin{aligned}P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\ \hat{Q}_\Delta &= [\hat{\beta}_{0,x} \ \hat{\beta}_{1,x} \ \hat{\Phi}_{1,x} \ \hat{\Phi}_{2,x} \ \dots \ \hat{\Phi}_{N,x}] \\ \hat{\Delta} &= P \hat{Q}'_\Delta.\end{aligned}\tag{63}$$

3.3.2 Gamma esperada de una opción

Como se demostró anteriormente, la Gamma de una opción se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{S^2} \left(\sum_{n=1}^N g_n \left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial X^2} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial X} \right) + u_0 \left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial X^2} - \frac{\partial \beta_0}{\partial X} \right) + u_1 \left(\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial X^2} - \frac{\partial \beta_1}{\partial X} \right) \right) \\ &= \frac{1}{S^2} \left(\sum_{n=1}^N g_n (\Phi_{n,xx} - \Phi_{n,x}) + u_0 (\beta_{0,xx} - \beta_{0,x}) + u_1 (\beta_{1,xx} - \beta_{1,x}) \right) \end{aligned}$$

donde cada uno de los términos de la suma anterior se define mediante (36), (37), (40) y (41).

Utilizando el operador $E\{ \}$ definido en (57) la Gamma esperada es la suma de esperanzas siguiente:

$$\hat{\Gamma} = \sum_{n=1}^N g_n E \left(\frac{\Phi_{n,xx} - \Phi_{n,x}}{S^2} \right) + u_0 E \left(\frac{\beta_{0,xx} - \beta_{0,x}}{S^2} \right) + u_1 E \left(\frac{\beta_{1,xx} - \beta_{1,x}}{S^2} \right).$$

Teniendo en cuenta que tanto Φ_n , β_0 y β_1 como cualquiera de sus derivadas deben ir evaluadas en la volatilidad implícita (estimada por el mercado), y en:

$$\begin{aligned} \tau &= T - h \\ X &= \log \left(\frac{S_h}{S_m} \right) = \log \left(\frac{S_0}{S_m} \right) + Y \end{aligned}$$

y resolviendo las integrales anteriores se puede expresar la Gamma esperada como:

$$\hat{\Gamma} = \sum_{n=1}^N g_n (\hat{\Phi}_{n,xx} - \hat{\Phi}_{n,x}) + u_0 (\hat{\beta}_{0,xx} - \hat{\beta}_{0,x}) + u_1 (\hat{\beta}_{1,xx} - \hat{\beta}_{1,x})$$

donde:

$$\hat{\Phi}_{n,xx} - \hat{\Phi}_{n,x} = E \left\{ \frac{\Phi_{n,xx} - \Phi_{n,x}}{S^2} \right\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{S_0^2} e^{2y} \left(\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial X^2} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial X} \right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy. \quad (64)$$

Restando (36) de (40), se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \tau} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^\alpha e^{\alpha y} \left((2\alpha - 1) \frac{n\pi}{L} \cos \vartheta + \left(\alpha^2 - \alpha - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \sin \vartheta \right)$$

con:

$$\vartheta = \frac{n\pi}{L} \left(\log \frac{S_0}{S_m} + y \right).$$

Sustituyendo este último resultado en (64), utilizando la identidad de Euler y la integral (53), se obtiene que:

$$\hat{\Phi}_{n,xx} - \hat{\Phi}_{n,x} = \frac{-1}{S_0^2 L} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \tau} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^\alpha e^{\frac{1}{2} \sigma^2 h (\alpha - 2)^2 + 2 \frac{(\alpha - 2)}{\sigma^2} \mu - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \left((2\alpha - 1) \frac{n\pi}{L} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\vartheta'} \operatorname{ERF} \{ W(y; \alpha) \} \right\} + \left(\alpha^2 - \alpha - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \operatorname{Im} \left\{ e^{i\vartheta'} \operatorname{ERF} \{ W(y; \alpha) \} \right\} \right) \Bigg|_{\log \frac{S_m}{S_0}}^{\log \frac{S_M}{S_0}}$$

donde:

$$\vartheta' = \left(\sigma^2 h (\alpha - 2) + \log \frac{S_0}{S_m} + \mu h \right) \frac{n\pi}{L}.$$

De la misma manera se puede calcular $\hat{\beta}_{j,xx} - \hat{\beta}_{j,x}$ ($j=0,1$):

$$\hat{\beta}_{j,xx} - \hat{\beta}_{j,x} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} E \left\{ \frac{\Phi_{n,xx} - \Phi_{n,x}}{S^2} \right\} + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) E \left\{ \frac{H_{j,xx} - H_{j,x}}{S^2} \right\}$$

donde la primera esperanza se calculó en el paso anterior y la segunda se resuelve utilizando técnicas similares a las anteriormente descritas:

$$E \left\{ \frac{H_{z,xx} - H_{z,x}}{S^2} \right\} = \frac{C_z z (z-1)}{S_0^2} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^z e^{h(z-2) \left(\mu + (z-2) \frac{\sigma^2}{2} \right)} + \frac{(1-z-C_z)(2\alpha-z)(2\alpha-z-1)}{S_0^2} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^{2\alpha-z} e^{h(2\alpha-z-2) \left(\mu + (2\alpha-z-2) \frac{\sigma^2}{2} \right)}$$

Por tanto se expresa la Gamma esperada como:

$$\begin{aligned}
 P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\
 \hat{Q}_\Gamma &= [\hat{\beta}_{0,xx} - \hat{\beta}_{0,x} \ \hat{\beta}_{1,xx} - \hat{\beta}_{1,x} \ \hat{\Phi}_{1,xx} - \hat{\Phi}_{1,x} \ \dots \ \hat{\Phi}_{N,xx} - \hat{\Phi}_{N,x}] \quad (65) \\
 \hat{\Gamma} &= P\hat{Q}'_\Gamma.
 \end{aligned}$$

3.3.3 Theta esperada de una opción

Como se demostró en el Capítulo 2, se puede expresar la Theta de una opción como:

$$\Theta = - \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} - u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \tau} - u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \tau} \quad (66)$$

donde las derivadas parciales que componen la suma anterior se describen en las fórmulas (44), y (45). Integrando (66) sobre la distribución del rendimiento del subyacente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Theta} &= \frac{-1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^N g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \tau} \right) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy = \\
 &= \frac{-1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^N g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy - \frac{u_0}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \beta_0}{\partial \tau} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy - \\
 &\quad - \frac{u_1}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \beta_1}{\partial \tau} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy
 \end{aligned}$$

donde tanto $\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau}$, $\frac{\partial \beta_0}{\partial \tau}$, como $\frac{\partial \beta_1}{\partial \tau}$ deben ir evaluadas en la volatilidad implícita (estimada por el mercado), y en:

$$\begin{aligned}
 \tau &= T - h \\
 X &= \log\left(\frac{S_h}{S_m}\right) = \log\left(\frac{S_0}{S_m}\right) + Y.
 \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales anteriores se puede expresar la Delta de mercado esperada como la suma siguiente:

$$\hat{\Phi} = \sum_{n=1}^N g_n \hat{\Phi}_{n,\tau} + u_0 \hat{\beta}_{0,\tau} + u_1 \hat{\beta}_{1,\tau}$$

donde, teniendo en cuenta (57):

$$\hat{\Phi}_{n,\tau} = E\left\{\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau}\right\} = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\bar{\sigma}^2 h}} dy = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y} \sin \vartheta e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\bar{\sigma}^2 h}} dy$$

con:

$$A = -\frac{2\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right)\tau}}{L\bar{\sigma}\sqrt{2\pi h}} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^\alpha$$

$$\vartheta = \frac{n\pi}{L} \left(\log \frac{S_0}{S_m} + y\right)$$

utilizando la identidad de Euler y la integral (53), se obtiene que:

$$\hat{\Phi}_{n,\tau} = \left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right) \frac{1}{L} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \eta\right)\tau} \left(\frac{S_0}{S_m}\right)^\alpha e^{\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 h \left(\alpha^2 + 2\frac{\alpha}{\bar{\sigma}^2} \mu - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)} \text{Im}\left\{e^{i\vartheta} \text{ERF}\{W(y; \alpha)\}\right\} \Bigg|_{\log \frac{S_0}{S_m}}^{\log \frac{S_M}{S_0}}$$

donde:

$$\vartheta' = \left(\bar{\sigma}^2 h \alpha + \log \frac{S_0}{S_m} + \mu h\right) \frac{n\pi}{L}$$

Por último (para j=0,1):

$$\hat{\beta}_{j,\tau} = E\left\{\frac{\partial \beta_j}{\partial \tau}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} E\left\{\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau}\right\} - (jD_0 e^{-D_0\tau} + (1-j)re^{-r\tau}) E\{H_j\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} H_{jn} \hat{\Phi}_{n,\tau} - (jD_0 e^{-D_0\tau} + (1-j)re^{-r\tau}) \hat{H}_j$$

Por tanto, se puede expresar la Theta de la opción como el producto:

$$\begin{aligned} P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\ \hat{Q}_\Theta &= [\hat{\beta}_{0,\tau} \ \hat{\beta}_{1,\tau} \ \hat{\Phi}_{1,\tau} \ \hat{\Phi}_{2,\tau} \ \dots \ \hat{\Phi}_{N,\tau}] \\ \hat{\Theta} &= P\hat{Q}'_\Theta \end{aligned} \quad (67)$$

3.3.4 Vega esperada de una opción

La Vega de una opción se puede expresar como:

$$\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial \sigma} \Phi_n + g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial \sigma} \right) + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \sigma} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma}. \quad (68)$$

Tomando esperanzas en (68), se obtiene que la Vega esperada de una opción es:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial \sigma} E\{\Phi_n\} + g_n E\left\{ \frac{\partial \Phi_n}{\partial \sigma} \right\} \right) + u_0 E\left\{ \frac{\partial \beta_0}{\partial \sigma} \right\} + u_1 E\left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial \sigma} \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial \sigma} \hat{\Phi}_n + g_n \hat{\Phi}_{n,\sigma} \right) + u_0 \hat{\beta}_{0,\sigma} + u_1 \hat{\beta}_{1,\sigma} \end{aligned}$$

donde $\hat{\Phi}_n$ se define en (54) y los demás términos se calculan, utilizando métodos de integración similares a los anteriormente descritos. Teniendo esto en cuenta, es fácil calcular el

valor esperado de $\frac{\partial \Phi_n}{\partial \sigma}$:

$$\hat{\Phi}_{n,\sigma} = -\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sigma - \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right) \tau \hat{\Phi}_n + \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \left(\log \left(\frac{S_0}{S_m} \right) \hat{\Phi}_n + E\{y \Phi_n\} \right)$$

donde:

$$E\{y \Phi_n\} = A \operatorname{Im} \left\{ -2\bar{\sigma} e^{\frac{i n \pi}{L} (\log \frac{S_0}{S_m} + y) + y \alpha - \frac{(y - i \mu h)^2}{2 h \sigma^2}} - \operatorname{Be}^{\frac{1}{2} \sigma^2 h \left(\alpha^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{2 \alpha \mu}{\sigma^2} \right) + i \theta'} \operatorname{ERF}\{W(y; \alpha)\} \right\} \begin{matrix} \log \frac{S_M}{S_0} \\ \log \frac{S_m}{S_0} \end{matrix} \quad (69)$$

con:

$$A = \sqrt{\frac{h}{2\pi}} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} a^2 - \eta \right) \tau} \left(\frac{S_0}{S_m} \right)^\alpha$$

$$B = \sqrt{2\pi h} \left(\mu + \left(i \frac{n\pi}{L} + \alpha \right) \bar{\sigma}^2 \right)$$

$$g' = \left((\alpha \bar{\sigma}^2 + \mu) h + \log \frac{S_0}{S_m} \right) \frac{n\pi}{L}$$

Por último (para $j=0,1$):

$$\hat{\beta}_{j,\sigma} = E \left\{ \frac{\partial \beta_j}{\partial \sigma} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial H_{jn}}{\partial \sigma} E \{ \Phi_n \} + H_{jn} E \left\{ \frac{\partial \Phi_n}{\partial \sigma} \right\} \right) + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) E \left\{ \frac{\partial H_j}{\partial \sigma} \right\}$$

donde todos sus términos se han determinado anteriormente excepto el último valor esperado:

$$E \left\{ \frac{\partial H_j}{\partial \sigma} \right\} = \frac{\partial B_j}{\partial \sigma} E \left\{ e^{jx} - e^{(2\alpha-j)x} \right\} + (1-j-B_j) 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} E \left\{ X e^{(2\alpha-j)x} \right\}$$

$$X = \log \left(\frac{S_h}{S_m} \right) = \log \left(\frac{S_0}{S_m} \right) + Y$$

Este se calcula, teniendo en cuenta que:

$$E \left\{ y e^{Ay} \right\} = - \frac{\sigma \sqrt{h}}{\sqrt{2\pi}} e^{Ay - \frac{(y-\mu h)^2}{2h\bar{\sigma}^2}} - \frac{h}{2} e^{\frac{Ah}{2} (A\bar{\sigma}^2 + 2\mu)} (A\bar{\sigma}^2 + \mu) \text{ERF} \left\{ \text{Re} \{ W(y; A) \} \right\} \Big|_{\log \frac{S_m}{S_0}}^{\log \frac{S_M}{S_0}} \quad (70)$$

donde para calcular éste último resultado se utiliza de nuevo la identidad de Euler y la integral (53).

Por tanto, se puede expresar la Vega esperada de una opción como el producto:

$$P = [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N]$$

$$P_\Lambda = \left[P \ \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \ \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \ \dots \ \frac{\partial g_N}{\partial \sigma} \right]$$

$$\hat{Q} = [\hat{\beta}_{0,\sigma} \ \hat{\beta}_{1,\sigma} \ \Phi_{1,\sigma} \ \Phi_{2,\sigma} \ \dots \ \Phi_{N,\sigma}] \quad (71)$$

$$\hat{Q}_\Lambda = [\hat{Q} \ \hat{\beta}_0 \ \hat{\beta}_1 \ \hat{\Phi}_1 \ \hat{\Phi}_2 \ \dots \ \hat{\Phi}_N]$$

$$\hat{\Lambda} = P_\Lambda \hat{Q}'_\Lambda$$

3.3.5 Rho esperada de una opción

La Rho esperada de una opción se calcula de forma muy similar a la Vega esperada, sin más que tener en cuenta que sí, la expresión:

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} \Phi_n + g_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right) + u_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial r} + u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial r}. \quad (72)$$

entonces, tomando esperanzas en (72), se obtiene que la Rho esperada de la opción es:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} E\{\Phi_n\} + g_n E\left\{ \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right\} \right) + u_0 E\left\{ \frac{\partial \beta_0}{\partial r} \right\} + u_1 E\left\{ \frac{\partial \beta_1}{\partial r} \right\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g_n}{\partial r} \hat{\Phi}_n + g_n \hat{\Phi}_{n,r} \right) + u_0 \beta_{0,r} + u_1 \beta_{1,r} \end{aligned}$$

donde $\hat{\Phi}_n$ se define en (54):

$$\hat{\Phi}_{n,r} = \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \tau \hat{\Phi}_n + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \left(\log \left(\frac{S_0}{S_m} \right) \hat{\Phi}_n + E\{y \Phi_n\} \right)$$

y $E\{y \Phi_n\}$ se define en (69). Por último, teniendo en cuenta que:

$$E\left\{ \frac{\partial H_j}{\partial r} \right\} = \frac{\partial B_j}{\partial r} E\left\{ e^{jx} - e^{(2\alpha-j)x} \right\} + (1-j-C_j) 2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} E\left\{ x e^{(2\alpha-j)x} \right\} \quad (73)$$

donde:

$$X = \log \left(\frac{S_h}{S_m} \right) = \log \left(\frac{S_0}{S_m} \right) + Y$$

y los resultados desarrollados anteriormente, se determinan los términos de (73), los términos de

$$\hat{\beta}_{j,r} = E\left\{ \frac{\partial \beta_j}{\partial r} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial H_{j,n}}{\partial r} \hat{\Phi}_n + H_{j,n} E\left\{ \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right\} \right) + (j e^{-D_0 \tau} + (1-j) e^{-r\tau}) E\left\{ \frac{\partial H_j}{\partial r} \right\} + (j-1) \tau e^{-r\tau} \hat{H}_j.$$

Según se desprende de los resultados anteriores, podemos expresar la Rho esperada como el producto escalar (para cada x y para cada t) de los vectores siguientes:

$$\begin{aligned}
 P &= [u_0 \ u_1 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N] \\
 P_\rho &= \left[P \ \frac{\partial g_1}{\partial r} \ \frac{\partial g_2}{\partial r} \ \dots \ \frac{\partial g_N}{\partial r} \right] \\
 \hat{Q} &= [\hat{\beta}_{0,r} \ \hat{\beta}_{1,r} \ \Phi_{1,r} \ \Phi_{2,r} \ \dots \ \Phi_{N,r}] \\
 \hat{Q}_\rho &= [\hat{Q} \ \hat{\beta}_0 \ \hat{\beta}_1 \ \hat{\Phi}_1 \ \hat{\Phi}_2 \ \dots \ \hat{\Phi}_N] \\
 \hat{\rho} &= P_\rho \hat{Q}'_\rho
 \end{aligned} \tag{74}$$

En resumidas cuentas, lo que se ha conseguido en este capítulo es expresar, en forma de producto escalar (para cada x y para cada t) de dos vectores, tanto el precio esperado de una opción como las distintas sensibilidades esperadas de ésta. También se expresa como una forma cuadrática la varianza del precio de la opción. De esta manera se tiene todos los ingredientes necesarios para plantear y resolver, de forma sencilla, el problema de minimización de la varianza con determinadas restricciones sobre el rendimiento esperado etc., que se planteó en el capítulo introductorio. A modo de resumen se tiene:

Tabla 3.1
Resumen de resultados

	Hoy	Valor esperado
Precio	$C = PQ'$ (29)	$\hat{C} = P\hat{Q}'$ (56)
Delta	$\Delta = PQ'_\Delta$ (39)	$\hat{\Delta} = P\hat{Q}'_\Delta$ (63)
Gamma	$\Gamma = PQ'_\Gamma$ (43)	$\hat{\Gamma} = P\hat{Q}'_\Gamma$ (65)
Theta	$\Theta = PQ'_\Theta$ (46)	$\hat{\Theta} = P\hat{Q}'_\Theta$ (67)
Vega	$\Lambda = P_\Lambda Q'_\Lambda$ (47)	$\hat{\Lambda} = P_\Lambda \hat{Q}'_\Lambda$ (71)
Rho	$\rho = P_\rho Q'_\rho$ (48)	$\hat{\rho} = P_\rho \hat{Q}'_\rho$ (74)
Varianza	$V\{C h\} = P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P'$ (61)	

3.4 Ejemplos

A continuación se muestran una serie de ejemplos que ponen de manifiesto la bondad de la aproximación realizada. Calculando los coeficientes del desarrollo en autofunciones $g_1 \cdots g_N$ para una Call con precio de ejercicio $K=70$, $T=1$, $h=120/360$, $\sigma=.3$, $\bar{\sigma}=.6$, $D_0=0$, $r=\log(1.05)$, $S_m=.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $m=1.1$ y $N=20$ se obtienen los siguientes resultados:

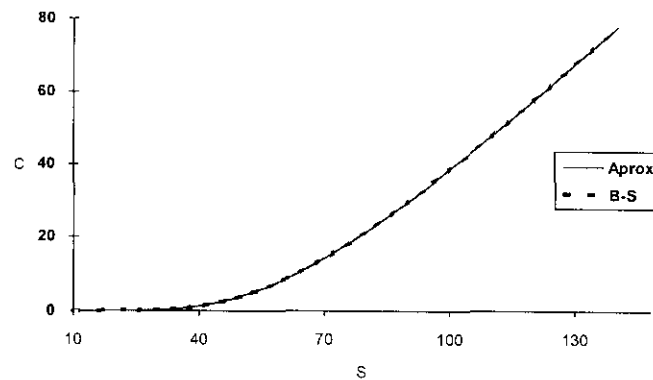


Figura 3.1

Comparación entre el precio esperado de una Call evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=20$

Para $N=50$, prácticamente no existe diferencia:

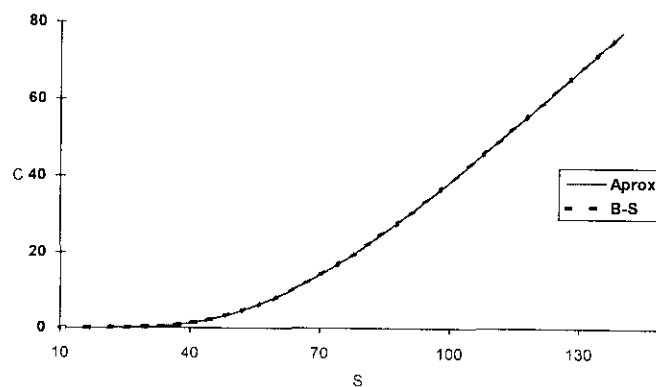


Figura 3.2

Comparación entre el precio esperado de una Call evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para una Put con precio de ejercicio $K=70$, $T=1$, $h=120/360$, $\sigma=.3$, $\bar{\sigma}=.6$, $D_0 = 0$,
 $r=\log(1.05)$, $S_m = 1$, $S_M = 900$, $u_0=K$, $u_1=0$, $m=1.1$ y $N=20$ se obtienen los siguientes
 resultados:

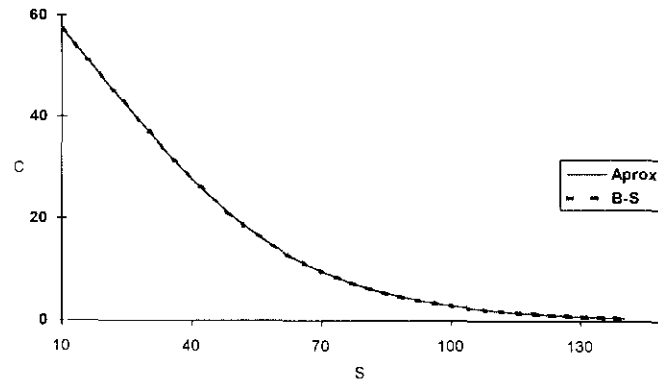


Figura 3.3

Comparación entre el precio esperado de una Put evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=20$

Para $N=50$:

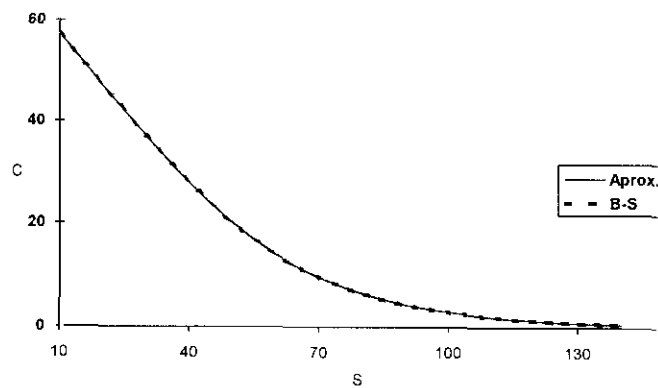


Figura 3.4

Comparación entre el precio esperado de una Put evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Calculando los coeficientes del desarrollo en autofunciones $g_1 \cdots g_N$ para una Call con precio de ejercicio $K=40$, $T=1$, $\sigma=.3$, $r=\log(1.05)$, $S_m=.1$, $S_M=300$, $u_0=0$, $u_1=1000$, $N=20$ se obtienen los siguientes resultados para la Delta esperada de la opción:

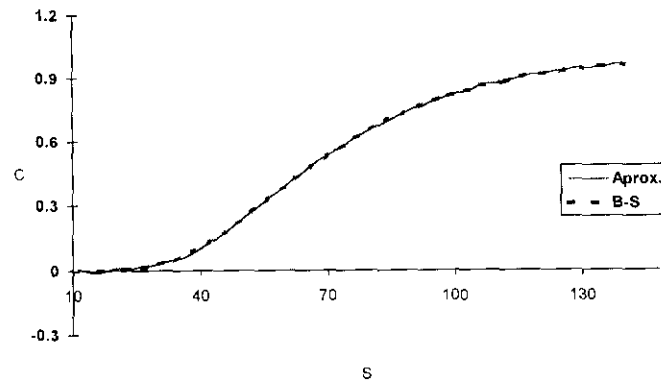


Figura 3.5

Comparación entre el valor de la Delta esperada de una Call evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=20$

Para $N=50$:

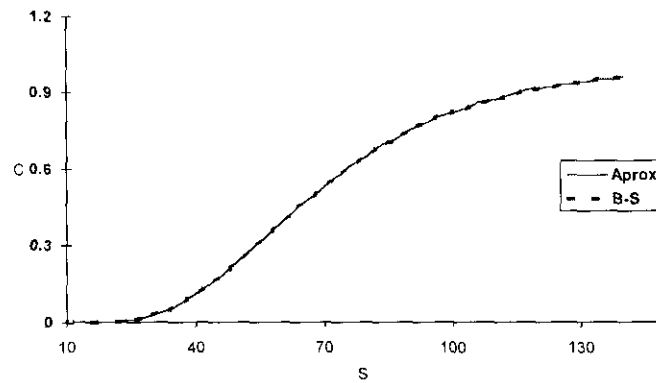


Figura 3.6

Comparación entre el valor de la Delta esperada de una Call evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para la Gamma esperada de la opción Call anterior se obtiene para $N=20$:

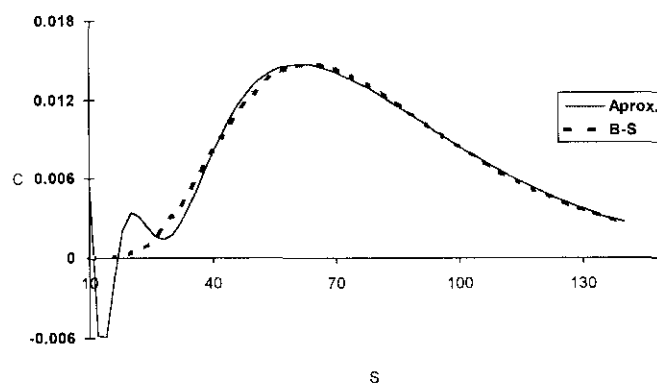


Figura 3.7

Comparación entre el valor de la Gamma esperada de una Call evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=20$

Con $N=30$ la solución aproximada oscila en torno a la solución propuesta por Black-Scholes.

Para N suficientemente grande las dos son prácticamente la misma, por ejemplo para

$N=50$:

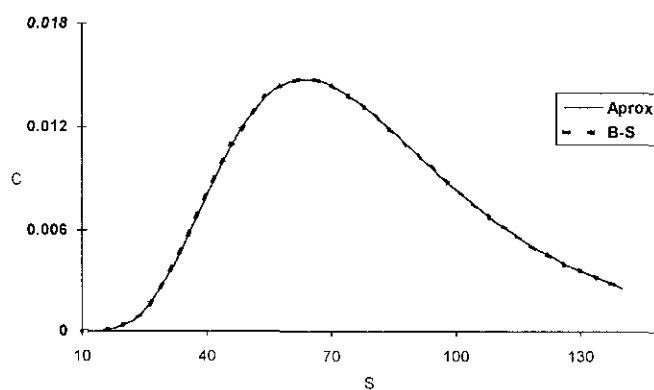


Figura 3.8

Comparación entre el valor de la Gamma esperada de una Call evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para la Theta esperada de la opción anterior se obtienen los siguientes resultados:

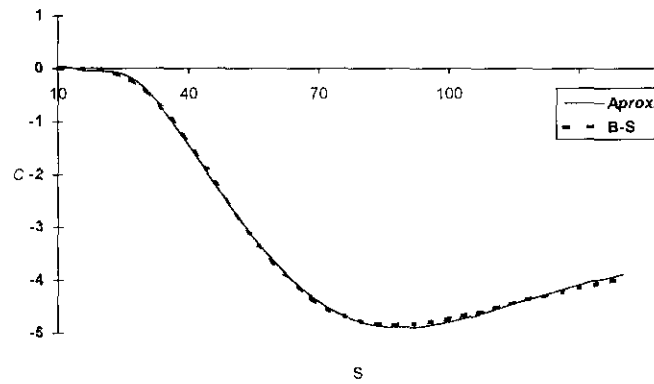


Figura 3.9

Comparación entre el valor de la Theta esperada de una Call evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=20$

Para $N=50$:

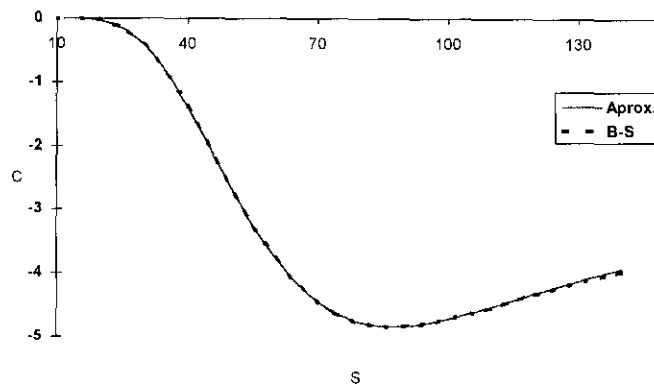


Figura 3.10

Comparación entre el valor de la Theta esperada de una opción evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para la Vega esperada de la opción con $N=20$:

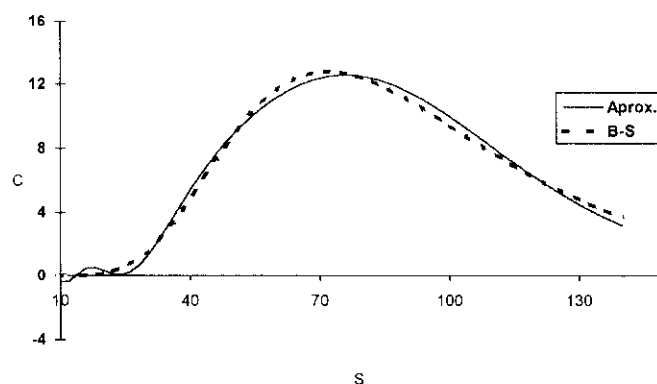


Figura 3.11

Comparación entre el valor de la Vega esperada de una opción evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

La solución parece oscilar un poco con respecto a la solución original. Para $N=50$ la solución es prácticamente la misma:

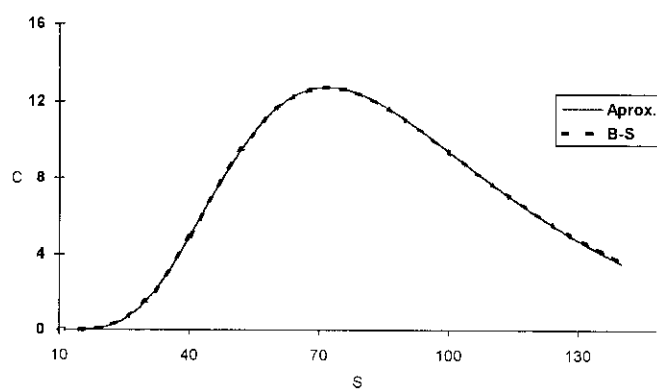


Figura 3.12

Comparación entre el valor de la Vega esperada de una opción evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para la Rho esperada, con $N=20$, se obtiene que:

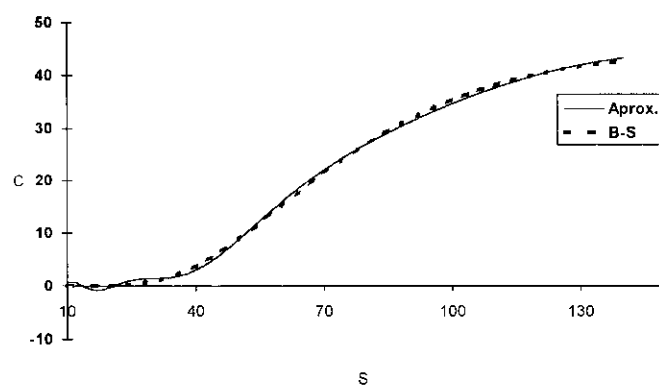


Figura 3.13

Comparación entre el valor de la Rho esperada de una opción evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Para $N=50$:

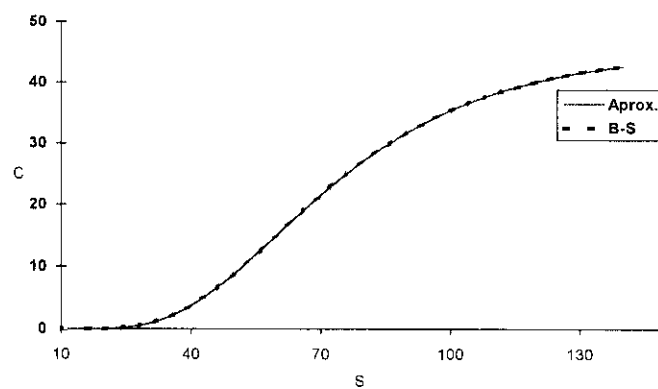


Figura 3.14

Comparación entre el valor de la Rho esperada de una opción evaluada por el método de Black-Scholes y por el método de separación de variables, $N=50$

Tabla 3.2

Precio actual (C), Rendimiento esperado (ER) y volatilidad (Vol) para una Call, calculados a partir del método de separación de variables
($m=1.1$, $\bar{\sigma}=0.3$, $S=40$, $r=\log(1.05)$, $T=120/360$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=80$)

		h, Periodo de Posesión (Días)								
		1		15		60		120		
σ	K	C	ER	Vol.	ER	Vol.	ER	Vol.	ER	Vol.
.25	35	5.98 (3.8e-4)	0.58 (3.4e-3)	1.74 (1.5e-2)	0.57 (4.0e-3)	1.75 (9.6e-3)	0.55 (4.0e-3)	1.80 (3.0e-3)	0.53 (3.0e-3)	1.86(2.2e-1)
	40	2.62 (5.0e-4)	1.79 (3.6e-3)	2.60 (2.6e-3)	1.72 (8.0e-4)	2.73 (1.5e-2)	1.55 (2.2e-3)	3.01 (9.5e-4)	1.38 (2.2e-3)	3.35(5.0e-1)
	45	0.86 (3.6e-3)	6.84 (2.3e-2)	3.71 (6.2e-2)	6.35 (2.3e-2)	4.15 (2.6e-2)	5.14 (1.9e-2)	5.41 (2.0e-2)	4.11 (1.3e-2)	7.00 (1.7e0)
.30	35	6.25 (8.5e-6)	0.34 (2.0e-4)	1.59 (2.0e-4)	0.34 (2.0e-4)	1.62 (2.0e-4)	0.34 (2.0e-4)	1.68 (2.0e-4)	0.34 (1.8e-4)	1.78(3.1e-2)
	40	3.07 (1.1e-5)	0.48 (3.8e-4)	2.24 (3.6e-4)	0.48 (3.8e-4)	2.31 (3.2e-4)	0.48 (3.6e-4)	2.54 (9.5e-5)	0.48 (3.3e-4)	2.85(8.8e-2)
	45	1.25 (5.9e-5)	0.66 (8.6e-4)	2.97 (7.4e-4)	0.66 (8.4e-4)	3.16 (5.3e-4)	0.65 (7.8e-4)	3.80 (9.4e-4)	0.65 (6.9e-4)	4.74(3.9e-1)
.35	35	6.56 (1.1e-7)	0.15 (1.5e-5)	1.47 (2.1e-6)	0.15 (2.1e-5)	1.49 (3.2e-6)	0.15 (6.7e-5)	1.57 (1.4e-5)	0.16 (3.9e-4)	1.69(1.1e-3)
	40	3.53 (1.5e-7)	-0.01 (4.1e-4)	1.95 (3.4e-6)	-0.01 (4.7e-4)	1.98 (5.1e-6)	-0.01 (1.0e-3)	2.18 (6.8e-6)	-0.02 (4.1e-3)	2.48(1.4e-2)
	45	1.67 (6.0e-7)	-0.24 (3.4e-5)	2.48 (6.4e-6)	-0.25 (4.6e-5)	2.57 (8.3e-6)	-0.27 (1.4e-4)	2.92 (5.1e-5)	-0.30 (7.9e-4)	3.55(1.3e-1)

Nota: r , m , σ_j , σ_M , el rendimiento esperado y la volatilidad están expresados en términos anuales. El rendimiento esperado no está expresado en tanto por ciento así 0.55 significa 55%. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio, rendimiento esperado y de la volatilidad, se utilizaron Rubinstein (1984) y Cox y Rubinstein (1985).

Tabla 3.3
 Precio actual (C), Rendimiento esperado (ER) y volatilidad (Vol) para una Put, calculados a partir del método de separación de variables
 ($m=1.1$, $\bar{\sigma}=0.3$, $S=40$, $r=\log(1.05)$, $T=120/360$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=K$, $u_1=0$, $N=80$)

			h, Periodo de Posesión (Días)							
			1		15		60		120	
σ	K	C	ER	Vol.	ER	Vol.	ER	Vol.	ER	Vol.
.25	35	.41 (1.0e-3)	3.17 (1.9e-2)	3.9 (7.1e-4)	2.96 (1.5e-2)	4.32 (8.3e-4)	2.44 (8.0e-3)	5.47 (1.8e-3)	1.98 (3.0e-3)	6.78(2.1e-1)
	40	1.97 (3.9e-4)	.50 (1.4e-2)	2.6 (6.2e-4)	.48 (1.1e-2)	2.64 (7.3e-4)	.44 (6.5e-3)	2.76 (9.5e-4)	.40 (3.45e-4)	2.91(1.1e-1)
	45	5.14 (1.6e-4)	.03 (7.5e-2)	1.72 (5.7e-4)	.03 (5.8e-2)	1.71 (4.7e-4)	.03 (2.9e-2)	1.69 (3.3e-4)	.03 (1.5e-2)	1.68(4.8e-2)
.30	35	.69 (1.4e-5)	-.34 (1.3e-5)	2.99 (1.3e-5)	-.34 (1.4e-5)	3.11 (3.5e-6)	-.34 (1.8e-5)	3.48 (1.1e-4)	-.34 (2.1e-3)	4.09(2.1e-1)
	40	2.43 (6.5e-6)	-.24 (1.2e-5)	2.12 (1.2e-5)	-.24 (1.1e-5)	2.14 (1.7e-5)	-.25 (9.6e-6)	2.22 (6.4e-5)	-.25 (3.1e-3)	2.36(1.1e-1)
	45	5.53 (3.3e-6)	-.17 (1.4e-5)	1.50 (1.2e-5)	-.17 (1.3e-5)	1.50 (1.3e-5)	-.17 (1.2e-5)	1.52 (2.4e-5)	-.17 (4.9e-5)	1.56(5.0e-2)
.35	35	1.00 (1.2e-7)	-.71 (7.0e-7)	2.41 (1.1e-7)	-.72 (8.8e-7)	2.43 (8.3e-8)	-.74 (2.1e-6)	2.52 (7.2e-6)	-.78 (3.2e-4)	2.82(2.0e-1)
	40	2.88 (6.1e-8)	-.49 (9.5e-7)	1.78 (1.4e-7)	-.49 (1.2e-6)	1.8 (2.6e-7)	-.52 (3.4e-6)	1.85 (4.4e-6)	-.55 (8.6e-4)	1.99(1.1e-1)
	45	5.95 (3.7e-8)	-.30 (1.3e-6)	1.32 (1.5e-7)	-.30 (1.6e-6)	1.33 (2.5e-7)	-.32 (4.6e-6)	1.37 (2.0e-6)	-.33 (4.0e-5)	1.4 (5.0e-2)

Nota: r , m , σ_i , σ_M , el rendimiento esperado y la volatilidad están expresados en términos anuales. El rendimiento esperado no está expresado en tanto por ciento así 0.55 significa 55%. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto del precio, rendimiento esperado y de la volatilidad, se utilizaron Rubinstein (1984) y Cox y Rubinstein (1985).

Tabla 3.4

Delta esperada de una Call, calculada a partir del método de separación de variables
 ($m=1.1$, $\bar{\sigma}=0.3$, $S=40$, $r=\log(1.05)$, $T=120/360$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=80$)

σ	K	$h=\frac{15}{360}$	$h=\frac{60}{360}$	$h=\frac{120}{360}$
.25	35	.86 (1.0e-4)	.83 (2.8e-5)	.82 (8.4e-6)
	40	.57 (1.8e-4)	.55 (4.8e-5)	.54 (1.4e-5)
	45	.27 (4.4e-4)	.27 (1.1e-4)	.28 (3.2e-5)
.3	35	.83 (2.2e-6)	.82 (2.3e-6)	.81 (2.3e-6)
	40	.57 (3.7e-6)	.56 (3.9e-6)	.54 (3.9e-6)
	45	.31 (8.2e-6)	.29 (8.7e-6)	.28 (8.9e-6)
.35	35	.80 (3.6e-8)	.80 (1.8e-7)	.81 (7.4e-7)
	40	.57 (6.0e-8)	.56 (2.9e-7)	.54 (1.2e-6)
	45	.34 (1.2e-7)	.31 (6.4e-7)	.29 (2.8e-6)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto de la Delta esperada de la opción, se utilizaron Rubinstein (1984) y Cox y Rubinstein (1985).

Tabla 3.5

Gamma esperada de una Call, calculada a partir del método de separación de variables
 ($m=1.1$, $\bar{\sigma}=0.3$, $S=40$, $r=\log(1.05)$, $T=120/360$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=80$)

σ	K	$h=\frac{15}{360}$	$h=\frac{60}{360}$	$h=\frac{120}{360}$
.25	35	.04 (3.2e-5)	.04 (2.0e-4)	.04 (9.8e-5)
	40	.07 (8.5e-5)	.06 (1.7e-4)	.06 (8.7e-5)
	45	.05 (2.0e-5)	.05 (2.3e-4)	.04 (1.3e-4)
.3	35	.04 (2.3e-6)	.04 (1.2e-5)	.04 (2.2e-5)
	40	.06 (7.8e-7)	.06 (1.2e-5)	.06 (2.1e-5)
	45	.05 (2.6e-6)	.05 (1.5e-5)	.04 (2.9e-5)
.35	35	.04 (8.9e-8)	.04 (7.5e-7)	.04 (6.2e-6)
	40	.05 (1.7e-8)	.05 (9.0e-7)	.06 (6.3e-6)
	45	.05 (9.8e-8)	.05 (8.9e-7)	.04 (8.4e-6)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto de la Gamma esperada de la opción, se utilizaron Rubinstein (1984) y Cox y Rubinstein (1985).

Tabla 3.6

Theta esperada de una Call, calculada a partir del método de separación de variables
 ($m=1.1$, $\bar{\sigma}=0.3$, $S=40$, $r=\log(1.05)$, $T=120/360$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=80$)

σ	K	$h=\frac{15}{360}$	$h=\frac{60}{360}$	$h=\frac{120}{360}$
.25	35	-3.24 (1.2e-4)	-3.18 (6.2e-5)	-3.13 (2.7e-5)
	40	-4.31 (6.0e-5)	-4.12 (4.4e-5)	-3.98 (2.1e-5)
	45	-3.32 (1.73e-4)	-3.34 (8.1e-5)	-3.35 (3.4e-5)
.3	35	-3.94 (5.6e-6)	-3.91 (9.4e-6)	-3.88 (1.3e-5)
	40	-5.06 (3.0e-6)	-5.11 (6.4e-6)	-5.16 (9.2e-6)
	45	-4.24 (7.2e-6)	-4.38 (1.2e-5)	-4.49 (1.5e-5)
.35	35	-4.66 (1.4e-7)	-4.73 (1.0e-6)	-4.76 (5.4e-6)
	40	-5.81 (8.6e-8)	-6.14 (7.0e-7)	-6.48 (3.7e-6)
	45	-5.15 (1.8e-7)	-5.47 (1.3e-6)	-5.79 (6.2e-6)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto de la Theta esperada de la opción, se utilizaron Rubinstein (1984) y Cox y Rubinstein (1985).

Tabla 3.7

Vega esperada de una Call, calculada a partir del método de separación de variables
 ($m=1.1$, $\sigma=0.3$, $S=40$, $r=\log(1.05)$, $T=120/360$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=80$)

σ	K	$h=\frac{15}{360}$	$h=\frac{60}{360}$	$h=\frac{120}{360}$
.25	35	4.31 (4.7e-4)	2.40 (4.2e-4)	.78 (7.9e-4)
	40	7.73 (1.2e-3)	4.13 (2.0e-3)	1.30 (5.7e-3)
	45	6.59 (2.8e-3)	3.72 (4.6e-3)	1.22 (1.3e-2)
.3	35	5.09 (6.4e-5)	2.95 (1.1e-4)	0.93 (3.3e-4)
	40	7.95 (5.2e-4)	4.56 (9.1e-4)	1.53 (2.7e-3)
	45	7.18 (1.2e-3)	4.22 (2.1e-3)	1.44 (6.4e-3)
.35	35	5.67 (2.5e-5)	3.26 (4.3e-5)	1.08 (1.3e-4)
	40	8.08 (2.8e-4)	4.90 (4.8e-4)	1.73 (1.4e-3)
	45	7.59 (6.6e-4)	4.63 (1.1e-3)	1.64 (3.4e-3)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto de la Vega esperada de la opción, se utilizaron Rubinstein (1984) y Cox y Rubinstein (1985).

Tabla 3.8

Rho esperada de una Call, calculada a partir del método de separación de variables
 ($m=1.1$, $\bar{\sigma}=0.3$, $S=40$, $r=\log(1.05)$, $T=120/360$, $S_m=0.1$, $S_M=900$, $u_0=0$, $u_1=900$, $N=80$)

σ	K	$h=\frac{15}{360}$	$h=\frac{60}{360}$	$h=\frac{120}{360}$
.25	35	8.34 (3.3e-4)	4.73 (4.0e-4)	1.57 (9.4e-4)
	40	5.97 (3.8e-3)	3.49 (5.8e-3)	1.19 (1.6e-2)
	45	2.95 (1.5e-2)	1.88 (2.3e-2)	.68 (6.2e-2)
.3	35	7.90 (1.1e-4)	4.60 (1.9e-4)	1.56 (5.8e-4)
	40	5.84 (2.1e-3)	3.44 (3.7e-3)	1.18 (1.1e-2)
	45	3.29 (8.2e-3)	1.97 (1.4e-2)	.69 (4.1e-2)
.35	35	7.52 (6.8e-5)	4.46 (1.1e-4)	1.54 (3.1e-4)
	40	5.72 (1.4e-3)	3.39 (2.5e-3)	1.17 (7.6e-3)
	45	3.55 (5.0e-3)	2.06 (9.2e-3)	.70 (2.9e-2)

Nota: r y σ están expresados en términos anuales. Entre paréntesis aparece el error relativo expresado en tanto por uno. Para calcular el valor exacto de la Rho esperada de la opción, se utilizaron Rubinstein (1984) y Cox y Rubinstein (1985).

4 Cálculo de la estrategia eficiente

Existen cuatro parámetros fundamentales que determinan la elección de una de las múltiples estrategias especulativas, compuestas por opciones, que un inversor puede utilizar: el rendimiento esperado del activo subyacente (\bar{m}), el tipo de interés libre de riesgo (r), la volatilidad estimada por el inversor (σ) y la volatilidad implícita o estimada por el "mercado" (σ). El problema de selección entre una determinada combinación de opciones u otra, depende fundamentalmente de si el rendimiento esperado del activo subyacente es mayor, menor o igual que el tipo de interés libre de riesgo y de si la volatilidad estimada por el inversor es mayor menor o igual que la volatilidad implícita. En las Tablas A.2.1 y A.2.2 del Apéndice 2 se especifican cuales son las estrategias mas usadas en estas circunstancias. En lo que conozco, la formalización matemática del problema de la elección de la estrategia, compuesta por opciones europeas, dadas las expectativas del inversor y del mercado sobre la volatilidad y rendimiento del activo subyacente, no está planteado ni resuelto. En esta memoria se aborda de la siguiente manera.

Como se vio anteriormente, el precio de un determinado activo financiero que en $t = T$ tiene un valor terminal $g(S)$ es:

$$C(S, T - t, r, \sigma) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Su valor esperado condicionado a $t=h$:

$$E\{C|h\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} C(S_0 e^y, T - h; r, \sigma) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy$$

y su varianza:

$$V\{C|h\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} (C(S_0 e^y, T - h; r, \sigma) - E\{C|h\})^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy$$

donde:

$$\mu = \log(\bar{m}) - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0.$$

Llamando:

$$C_0 = C(S_0, T; r, \sigma)$$

al precio hoy del instrumento financiero con valor terminal g , el rendimiento esperado anualizado de la estrategia será:

$$m_c = \left(\frac{E\{C|h\}}{C_0} \right)^{\frac{1}{h}}$$

y su varianza anualizada:

$$Vm_c = \frac{V\{C|h\}}{h C_0^2}$$

Lo que se pretende hallar es aquella combinación de opciones que minimice la varianza del rendimiento de la estrategia, sujeto a conseguir una determinada rentabilidad y a una determinada restricción presupuestaria, es decir, calcular aquella función g que sea solución al problema:

$$\left. \begin{aligned} \min_{g(S)} Vm_c \\ m_c \geq (1 + R_h)^{\frac{1}{h}} \\ C(S_0, T; r, \sigma) = C_0 \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

siendo R_h el rendimiento exigido por el inversor y C_0 el capital inicial a invertir, o bien, teniendo en cuenta las fórmulas anteriores el problema se expresa como:

$$\min_g \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{\omega(z,y)}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma \sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \right)^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy$$

sujeta a

$$\frac{e^{-r(T-h)}}{\sigma \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma \sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \geq (1 + R_h) \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = C_0$$

siendo:

$$\omega(z, y) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - D_0 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} z + y.$$

En definitiva, se quiere calcular la frontera eficiente de una cartera de opciones sobre un determinado subyacente, donde cada punto de esta representaría una estrategia $g(S)$ a comprar o vender. De igual manera se podría plantear el problema de maximización del rendimiento sujeto a que la varianza del rendimiento de la opción tome un determinado valor y a que se cumpla la restricción presupuestaria, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} \max_{g(S)} m_c \\ Vm_c \leq V_h \\ C(S_0, T; r, \sigma) = C_0 \end{array} \right\}$$

donde V_h es la varianza objetivo del inversor, o bien problemas del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{g(S)} Vm_c - \lambda m_c \\ C(S_0, T; r, \sigma) = C_0 \end{array} \right\}$$

siendo λ un indicador de la importancia relativa que tiene para el inversor el riesgo con respecto al rendimiento. Cualquiera de estos tres problemas dará soluciones muy similares. Por ello nos centraremos fundamentalmente en el primero (75), considerando también alguna restricción más sobre las sensibilidades.

Para resolver el modelo (75), se debe suponer que el inversor tiene estimaciones sobre la volatilidad ($\bar{\sigma}$) y sobre el rendimiento esperado del subyacente (\bar{m}) y que es capaz de obtener las estimaciones del "mercado" sobre la volatilidad (vid. Rubinstein (1984)) así como el tipo de interés libre de riesgo r , el precio de mercado del subyacente S_0 y todos los parámetros necesarios para la valoración de opciones. Una vez obtenidos estos parámetros se podría abordar el problema (75) por medio de técnicas abstractas de optimización sobre funcionales en espacios de dimensión ilimitada (L^2). Sin embargo, aquí se aborda directamente, haciendo uso de los resultados obtenidos anteriormente y que se resumen en la tabla 3.1 del capítulo anterior, de tal suerte que el sistema integral (75) se transforma en un problema de programación cuadrática, en un espacio de dimensión

limitada, consistente en calcular qué condiciones de contorno (vector P) minimizan la varianza del rendimiento sujeta a una serie de restricciones. Teniendo en cuenta dicha tabla, se resuelve primeramente el problema más sencillo, con dos únicas restricciones, para más adelante añadirle otras sobre las sensibilidades de la opción.

Por último, cabe apuntar que, dado que el problema a resolver tiene restricciones lineales y el Hessiano de la función objetivo es definido positivo, la solución que se encuentre será un mínimo global. Para la resolución de este tipo de programas cuadráticos existen múltiples programas disponibles. En este trabajo se utiliza el programa Matlab 5 y en concreto el procedimiento de programación cuadrática qp.m, todos los demás procedimientos adicionales, necesarios para el cálculo de precios, valores esperados, varianza etc. también se realizaron con dicho programa¹.

A continuación se presentan una serie de ejemplos de estrategias eficientes. En todos ellos la volatilidad “estimada” por el mercado es $\sigma = 3$, el precio en $t = 0$ del subyacente es $S_0 = 6000$, el tipo de interés libre de riesgo $r = \log(1.05)$, la fecha de ejercicio $T = 1$ año, el periodo de posesión del instrumento $h = 1$ año, el intervalo de precios a estudiar es $S_m = 10$, $S_M = 100000$, la cantidad de dinero disponible $C_0 = 1$, el rendimiento exigido por el inversor $R_h = 0.1$ y el número de términos del desarrollo de Fourier $N=20$. Cada una de las figuras consta de dos gráficos: la estrategia óptima cuando quedan T años para vencimiento (línea punteada) y la estrategia óptima cuando quedan T-h años para vencimiento (línea continua). Además se especifica el sentimiento del inversor sobre la volatilidad y el rendimiento futuro del subyacente, la estrategia a priori², así como la desviación típica

$$\text{anualizada de la estrategia óptima, } \sigma_c = \frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P'}{h}}.$$

¹ También se hizo uso de algunos algoritmos publicados en Teukolsky, Vetterling, Flannery y Press (1992).

² La que usualmente utilizan los traders en situaciones de mercado similares (v. Tabla A.2.1, Apéndice 2).

4.1 Problema 1: Estrategia à la Markowitz

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, el primer problema que se resuelve es el de minimización de la varianza del rendimiento de la estrategia, compuesta por opciones europeas, sujeto a que el inversor dispone de C_0 ptas. y exige un rendimiento del R_h por uno, es decir:

$$\min_g \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{\omega(z,y)}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \right)^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy$$

sujeta a

$$\frac{e^{-r(T-h)}}{\sigma\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}} dy \geq (1 + R_h) \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = C_0.$$

Utilizando los resultados obtenidos en los Capítulos 2 y 3, se puede expresar el problema de optimización funcional anterior como el problema de programación cuadrática con restricciones lineales siguiente:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{h C_0^2} \min_P (\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P' \\ &P\hat{Q}' - (1+R_h)^h C_0 \geq 0 \\ &PQ' = C_0 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

donde Q , \hat{Q} y $\hat{\Omega}$ se calculan mediante los procedimientos programados en Matlab. Una vez obtenido el vector óptimo P , el precio de la opción en t se recupera dando valores a S en la ecuación:

$$C(S, T - h; r, \sigma) = PQ'.$$

4.1.1 Ejemplos

1.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .29$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = .95$.

Estrategia a priori: Vender Call.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

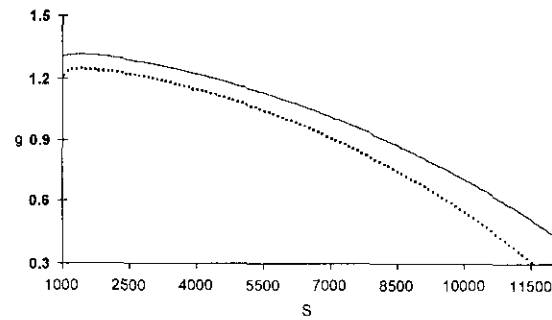


Figura 4.1: $\sigma_C = .14$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

2.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .29$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1$.

Estrategia a priori: Mezcla entre vender Call y vender Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

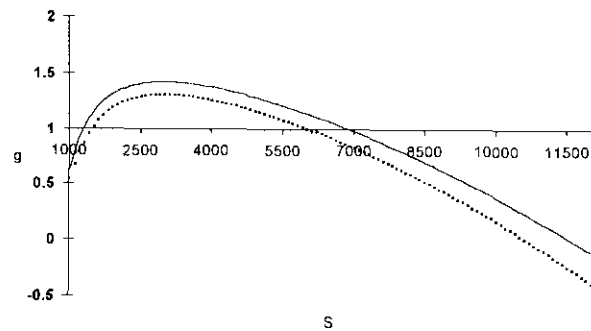


Figura 4.2: $\sigma_C = .29$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

3.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .29$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.05$.

Estrategia a priori: Vender Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

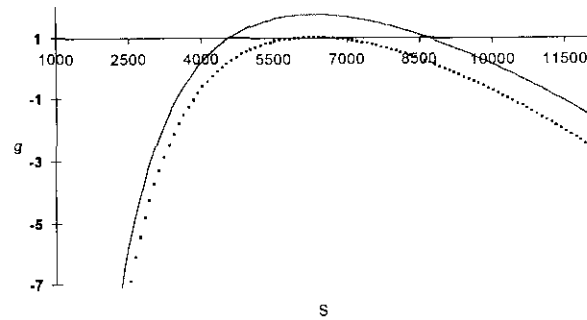


Figura 4.3: $\sigma_C = .98$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

4.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .29$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.1$.

Estrategia a priori: Vender Put.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

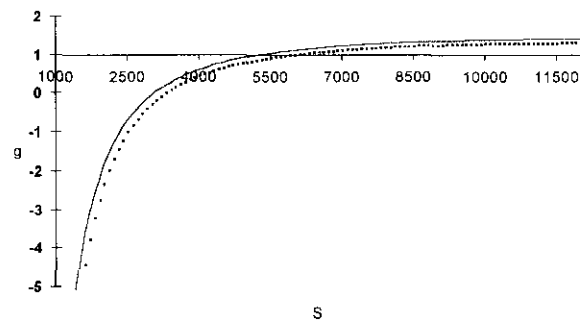


Figura 4.4: $\sigma_C = .27$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

5.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .29$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.15$.

Estrategia a priori: Vender Put.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

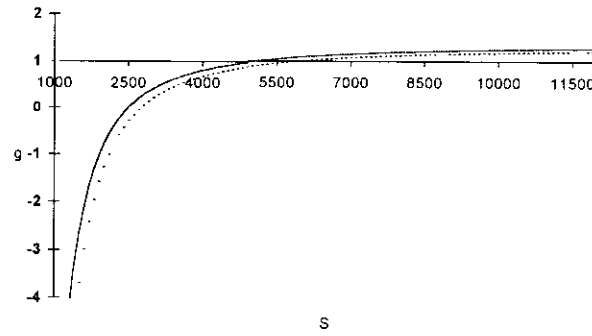


Figura 4.5: $\sigma_C = .14$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

6.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .3$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = .95$.

Estrategia a priori: Vender futuros.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

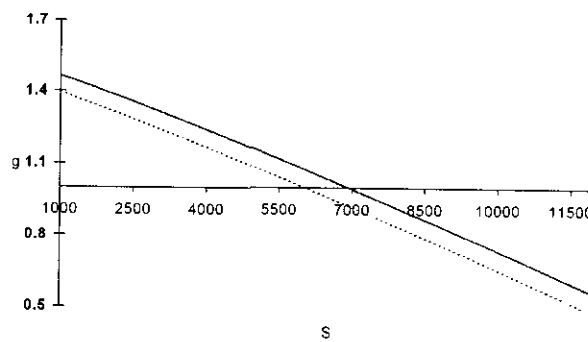


Figura 4.6: $\sigma_C = .14$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

7.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .3$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1$.

Estrategia a priori: Vender futuros o vender Call.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

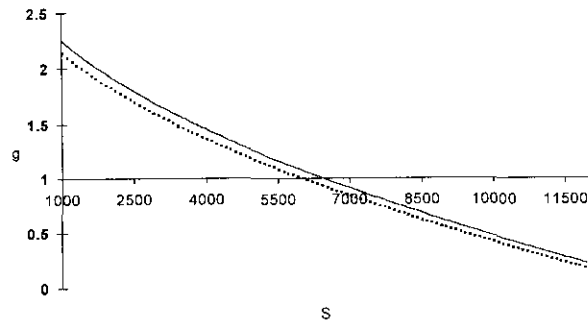


Figura 4.7: $\sigma_C = .30$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

8.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .3$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.05$.

Estrategia a priori: No hay estrategia, intentar arbitraje.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

El problema de optimización (76) no tiene solución factible y por tanto no existe, para este caso particular, una estrategia eficiente. En estas circunstancias un inversor sólo podría recurrir a las estrategias clásicas de arbitraje.

9.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .3$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.1$.

Estrategia a priori: Comprar futuros o vender Put.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

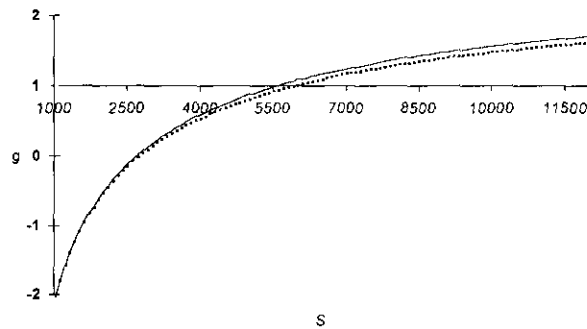


Figura 4.9: $\sigma_C = .32$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

10.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .3$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.15$.

Estrategia a priori: Comprar futuros o vender Put.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

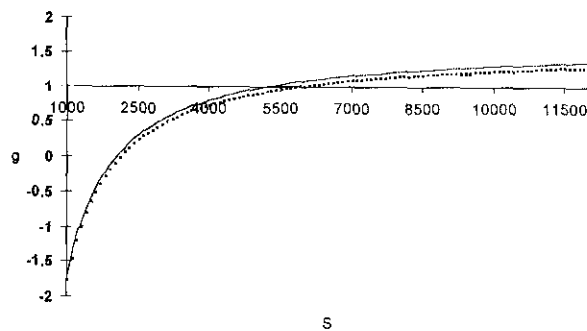


Figura 4.10: $\sigma_C = .16$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

11.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .31$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = .95$.

Estrategia a priori: vender Call Spread o comprar Put.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

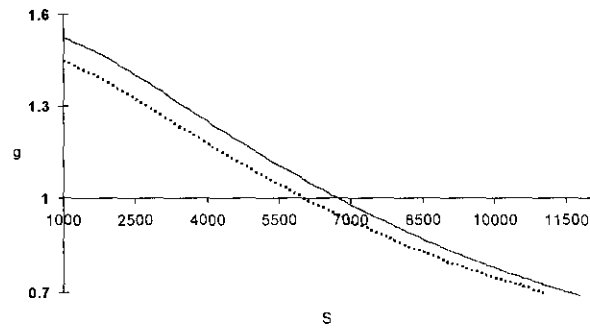


Figura 4.11: $\sigma_C = .15$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

12.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .31$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1$.

Estrategia a priori: vender Call Spread o comprar Put.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

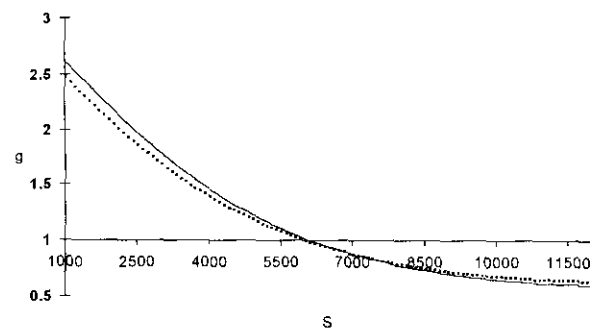


Figura 4.12: $\sigma_C = .29$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

13.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .31$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.05$.

Estrategia a priori: Comprar Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

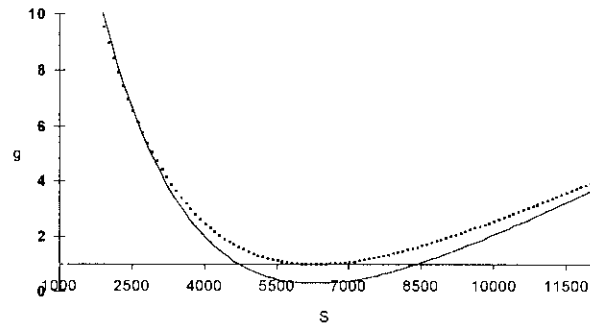


Figura 4.13: $\sigma_C = 1.1$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

14.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .31$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.1$.

Estrategia a priori: Mezcla entre comprar Straddle y comprar Call.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

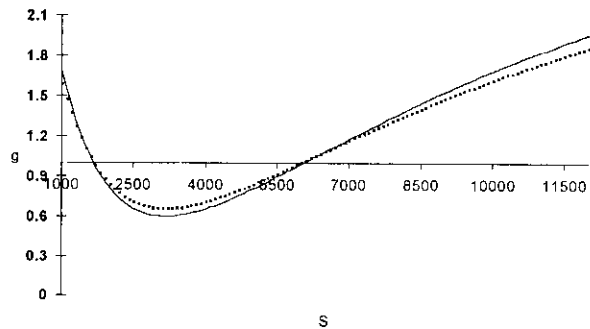


Figura 4.14: $\sigma_C = .35$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

15.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .31$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.15$.

Estrategia a priori: Comprar Call o Call Spread.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

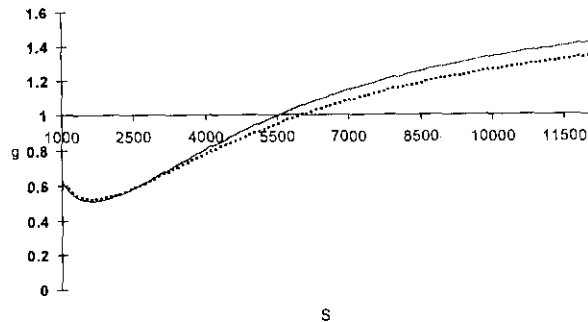


Figura 4.15: $\sigma_C = .18$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

4.1.2 Comentarios a los resultados del Problema 1

Parece existir una cierta correspondencia entre los resultados obtenidos al resolver el programa cuadrático (76) y entre las estrategias que usualmente utilizan los traders en situaciones similares (este hecho se pone claramente de manifiesto si se comparan las tablas A.2.2 y A.2.3 del apéndice 2). Se aprecia cierta continuidad en el espacio de las estrategias de tal forma que, conforme las estimaciones del inversor sobre el rendimiento del subyacente van tomando valores más altos, manteniendo constante la volatilidad estimada, es decir, como se observa en las Figuras 1 a 5, 6 a 10 y 11 a 15, la estrategia eficiente pasa de ser vender Call a vender Put, vender futuros a vender Put y comprar Call a comprar Put respectivamente (v. Figuras 4.18 a 4.23) de una forma suave, transformándose de la primera a la segunda de manera paulatina y sin cambios bruscos, excepto en el Caso 8 en el que no existe una estrategia factible y hay un punto de discontinuidad.

También hay que poner de manifiesto que un aumento en C_0 no modifica la desviación típica de la estrategia σ_C , aunque se aumente el riesgo de perder más dinero con la operación, y sólo afecta a la escala de la figura. Así, por ejemplo, si C_0 es 2 en vez de 1, las estrategias resultantes simplemente aparecen multiplicadas por un factor 2 sin cambiar su forma relativa. Esta última afirmación está justificada por la propia estructura de las restricciones que implican que el vector óptimo P sea

proporcional a la cantidad inicial de dinero invertida C_0 . Por ejemplo, si en el Caso 3 se multiplicase por 2 la inversión inicial, se obtendrían los siguientes resultados:

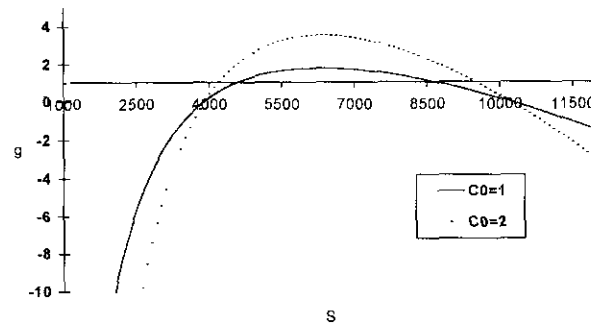


Figura 4.16: Variación de la estrategia eficiente conforme varía la inversión inicial. (Línea continua $C_0=1$, línea discontinua $C_0=2$).

Lo que naturalmente modifica la desviación típica de la estrategia σ_C , son los cambios en el rendimiento exigido por el inversor R_h . Dado que una opción se puede replicar combinando acciones con una determinada cantidad del activo sin riesgo, la relación entre σ_C y R_h debe ser lineal. Por ejemplo, si en el Caso 13 se aumentase R_h paulatinamente, se obtendría la frontera eficiente en el plano (R_h, σ_C) (v. Figuras 24 a 26), donde cada punto de esta frontera vendría a representar una estrategia a comprar o vender. Cada inversor se situará en un punto u otro de la frontera, dependiendo de su función de utilidad, grado de aversión al riesgo, etc. Un caso a tener en cuenta cuando se varía R_h es aquel en el cual el rendimiento exigido por el inversor es tal que $(1 + R_h)^h \leq e^{r_h}$. Siempre que se cumpla esta condición e independientemente del escenario en el que nos encontremos, la solución a priori es comprar el activo sin riesgo que garantice $C_0 e^{r_h}$ ptas. en $t = h$. La estrategia eficiente resultante de resolver (76), bajo cualquier escenario en el caso que nos ocupa, es:

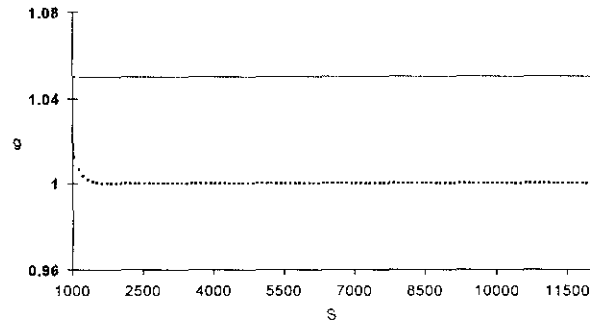


Figura 4.17: Estrategia eficiente en el caso en que el rendimiento

exigido por el inversor sea menor o igual al tipo libre de riesgo. (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

Un hecho que llama poderosamente la atención es la suavidad que presentan las estrategias eficientes obtenidas al resolver el problema (76) (v. Tabla A.2.3) en contraste con los picos característicos de las estrategias usuales en escenarios similares (v. Tabla A.2.2). Este efecto, es debido, fundamentalmente, a que, en el mercado, solo están disponibles una serie de opciones limitada a un conjunto finito de precios de ejercicio y aquí nos interesamos por una estrategia genérica $g(S)$ sin ningún tipo de restricción.

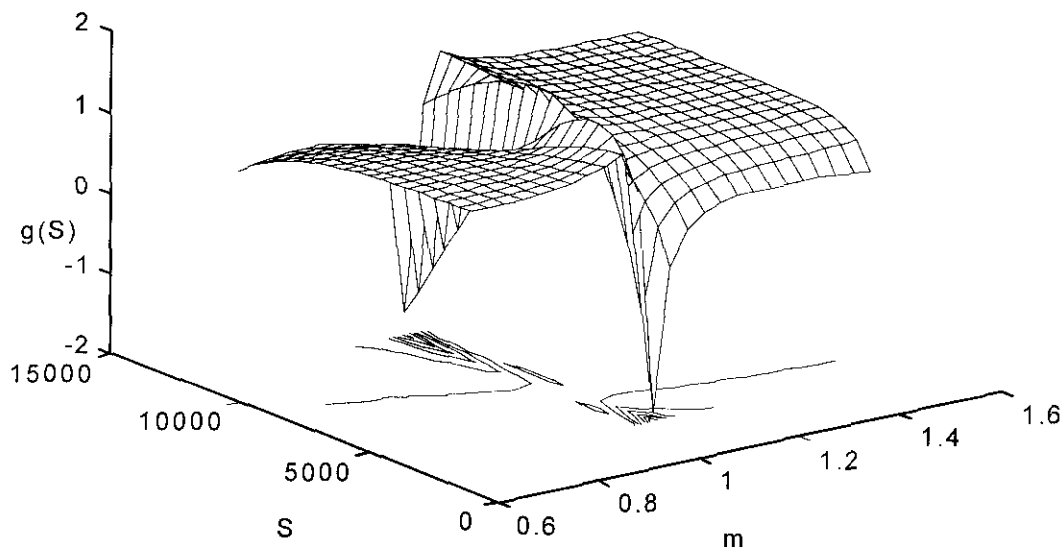


Figura 4.18: Estrategias eficientes en el caso de que $\bar{\sigma} = .29, \sigma = .3, 0.6 \leq \bar{m} \leq 1.6, r = \log(1.05)$

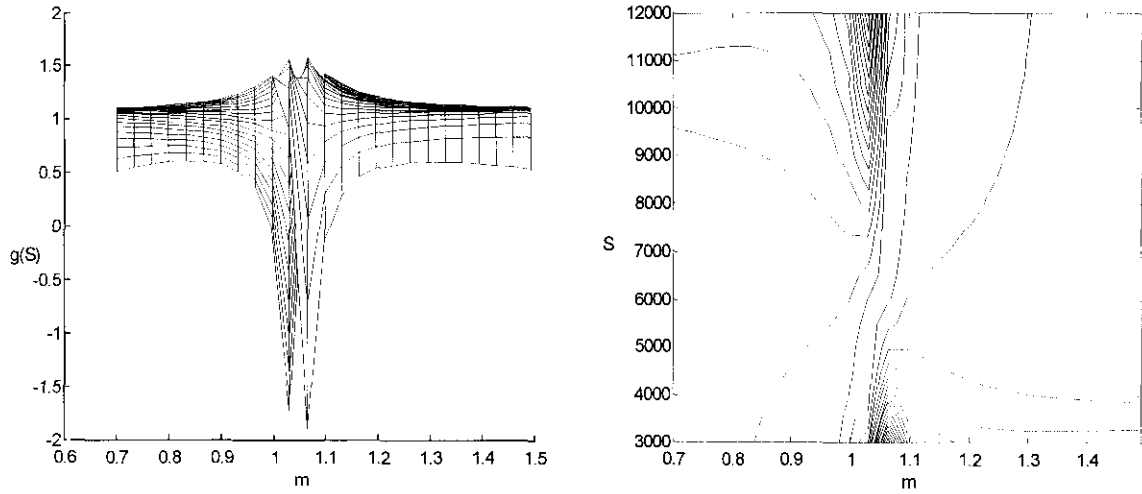


Figura 4.19: Contornos de la Figura 4.18

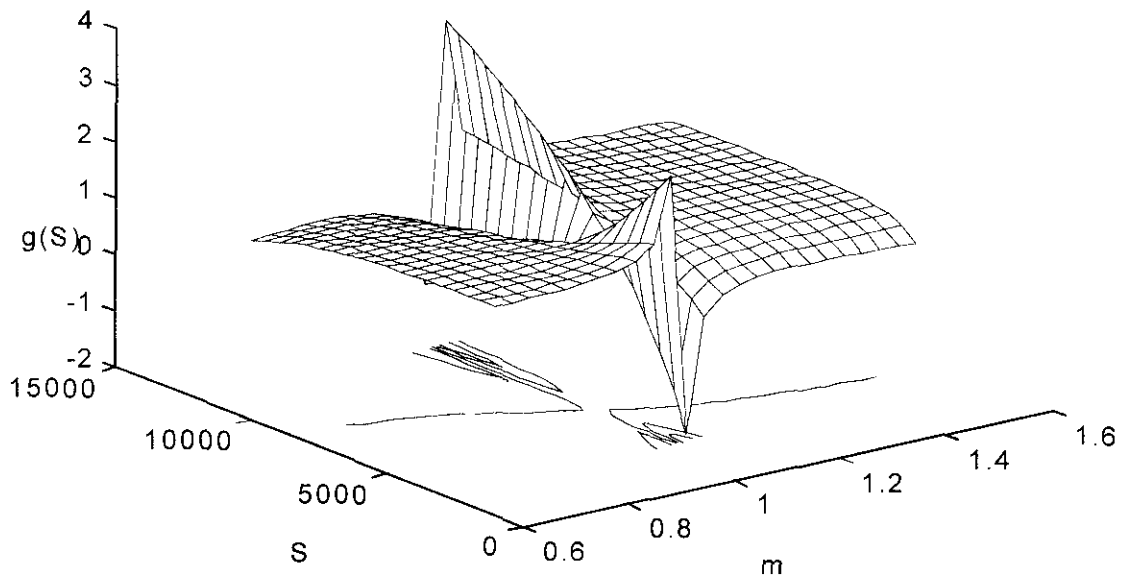


Figura 4.20: Estrategias eficientes en el caso de que $\bar{\sigma} = .3, \sigma = .3, 0.6 \leq m \leq 1.6, r = \log(1.05)$

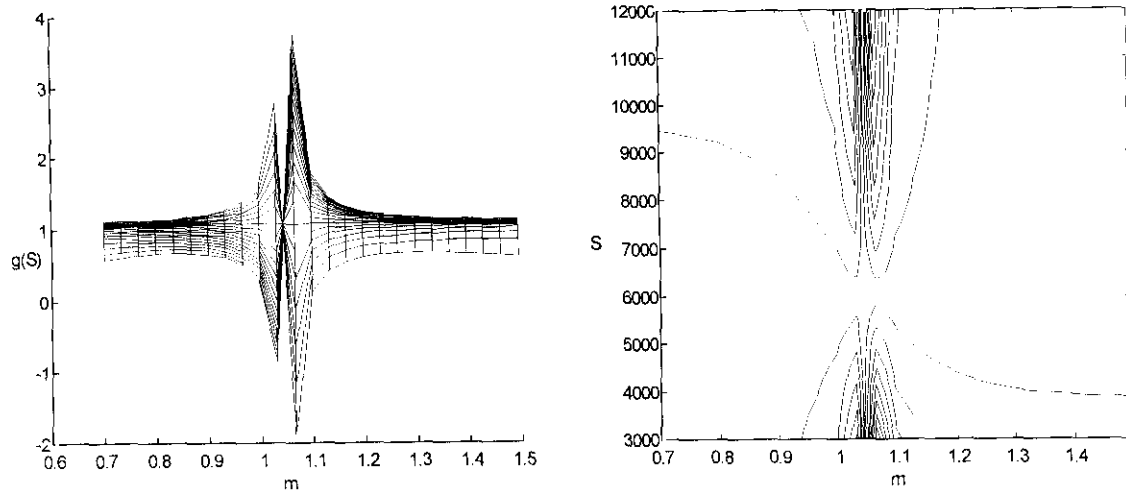


Figura 4.21: Contornos de la Figura 4.20

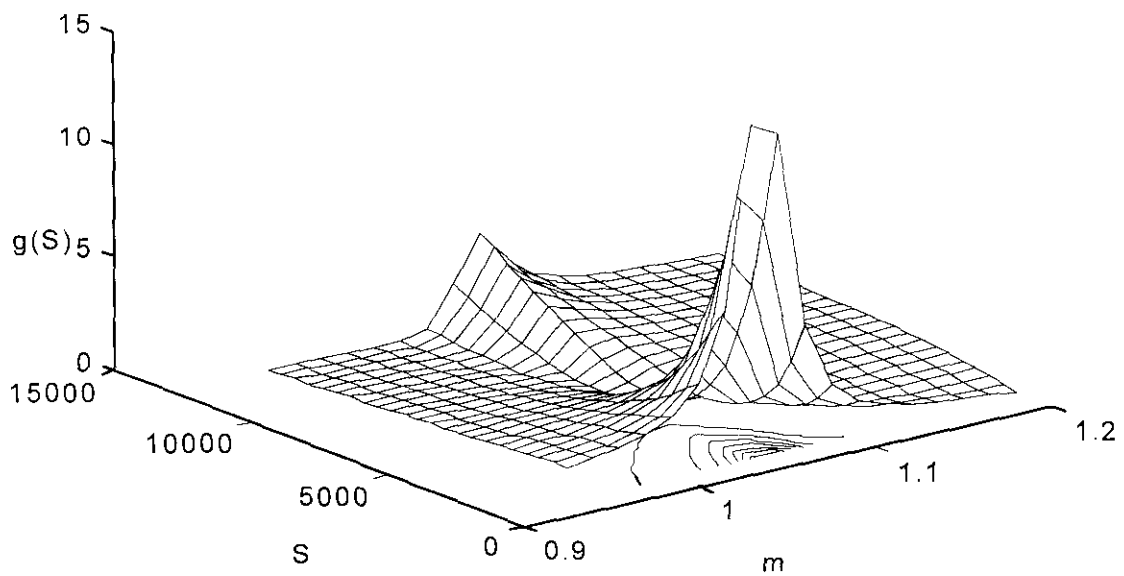


Figura 4.22: Estrategias eficientes en el caso de que $\sigma = .31, \sigma = .3, 0.9 \leq m \leq 1.2, r = \log(1.05)$

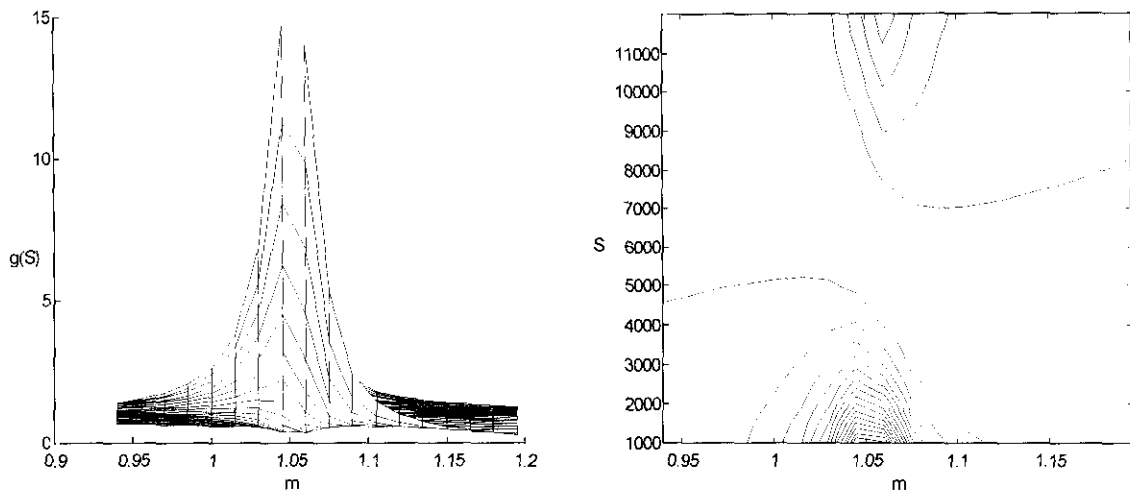


Figura 4.23: Contornos de la Figura 4.22

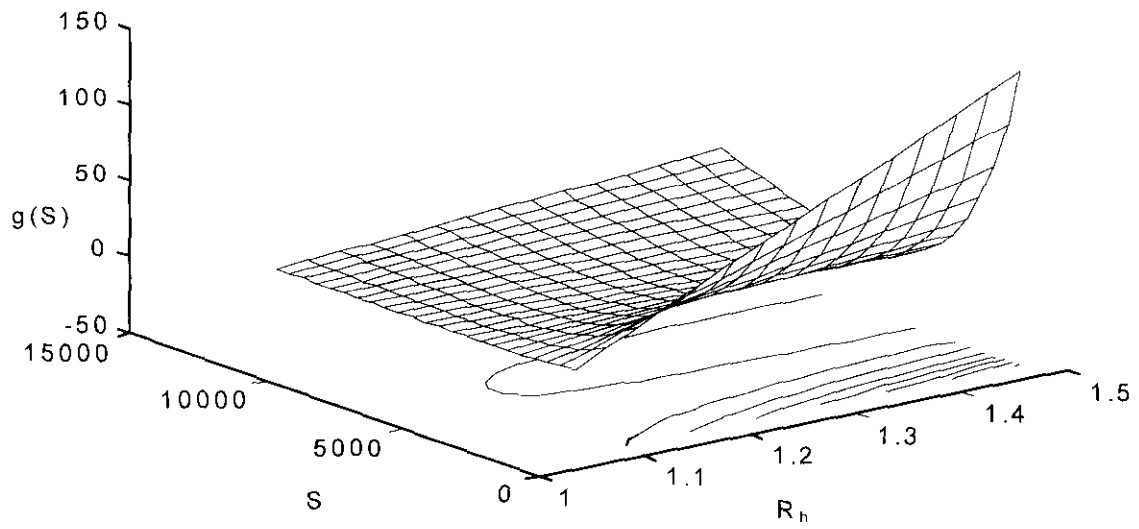


Figura 4.24: Variación de la estrategia con el rendimiento exigido por el inversor para el caso en el que $\bar{\sigma} = .31, \sigma = .3, \bar{m} = 1.05, r = \log(1.05), 1 \leq R_h \leq 1.5$

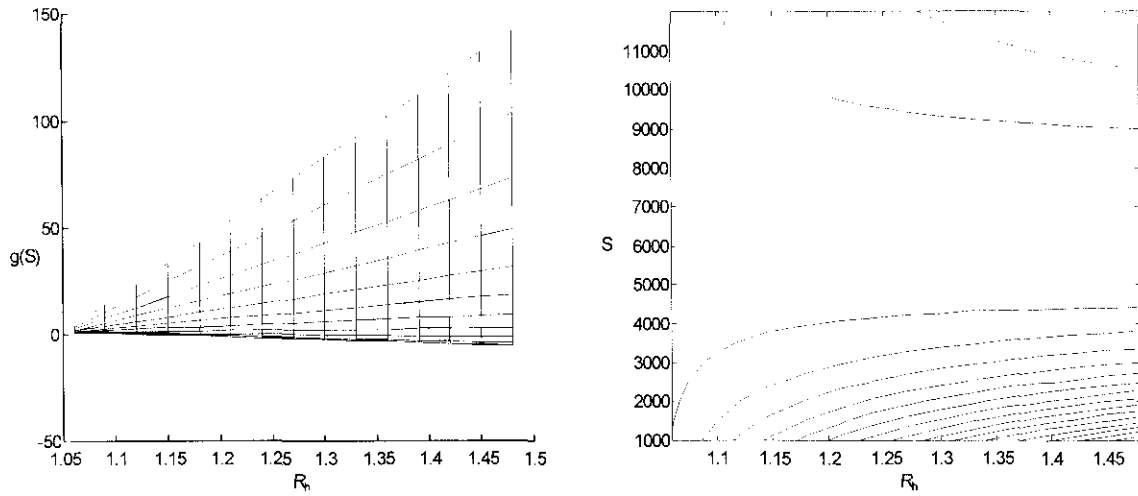


Figura 4.25: Contornos de la Figura 4.24

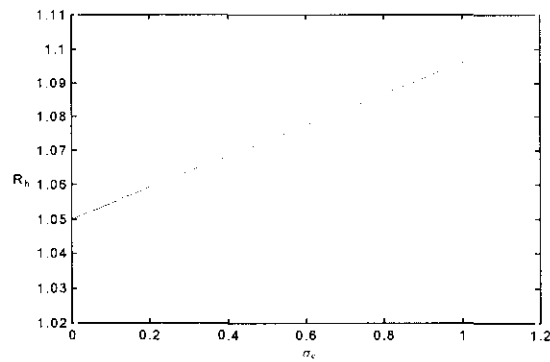


Figura 4.26: Frontera eficiente en el caso $\bar{\sigma} = .31, \sigma = .3, \bar{m} = 1.05, r = \log(1.05), 1 \leq R_h \leq 1.5$

4.2 Problema 2: Escenarios sobre la volatilidad estimada por el inversor

La mayoría de los inversores no pueden definir sus expectativas, para una determinada fecha futura $t = h$, sobre la volatilidad y rendimiento del subyacente, de una forma tan contundente como la mostrada en el problema anterior, sólo tienen una idea aproximada de la distribución de éstas. Por ello podría ser más útil e interesante plantear el problema anterior modelizando las expectativas del inversor mediante escenarios y asignando a cada uno de ellos una determinada probabilidad. Se usará la siguiente notación (vid. Zenios (1993), Dembo (1991)):

E : Conjunto de escenarios posibles sobre la volatilidad en $t = h$, $e = 1, \dots, E$

w_e : Probabilidad asignada al escenario e , $e \in E$; $\left(\sum_e w_e = 1 \right)$

σ_e : Volatilidad estimada por el inversor en el escenario e -ésimo.

Teniendo en cuenta estas definiciones:

$$\sum_{e=1}^E \frac{w_e}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy$$

será el valor esperado ponderado de la estrategia condicionado a $t=h$ sobre los E escenarios y:

$$\sum_{e=1}^E \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} (C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) - E\{C|h\})^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy$$

la varianza condicionada del rendimiento de la estrategia ponderada correspondiente. Por tanto, el problema del cálculo de la estrategia eficiente en estas circunstancias se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$\min_g \sum_{e=1}^E \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{\omega(z,y)}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(S_0 e^{\omega(z,y)})}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy \right)^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy$$

sujeta a

$$\sum_{e=1}^E \frac{1}{\sigma_e \sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} (C(S_0 e^y, T-h; r, \sigma) - E\{C|h\})^2 e^{-\frac{(y-\mu h)^2}{2\sigma_e^2 h}} dy \geq (1 + R_h) C_0$$

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-D_0)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = C_0$$

Para abordar la resolución de este problema de optimización funcional se hará uso de los resultados obtenidos en los Capítulos 2 y 3 de la memoria. De esta manera, el problema que se trata se transforma en el problema de programación cuadrática con restricciones lineales:

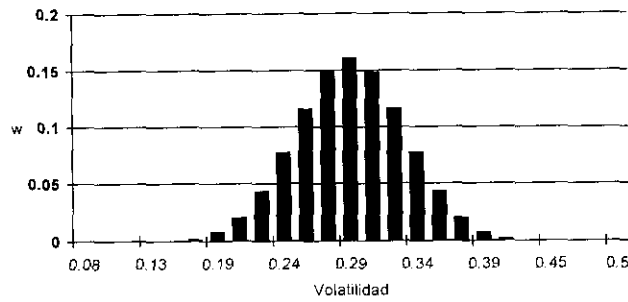
$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h C_0^2} \min_P \sum_{e=1}^E w_e P(\hat{\Omega}_e - \hat{Q}'_e \hat{Q}_e) P' \\ & \sum_{e=1}^E w_e P \hat{Q}'_e \geq (1 + R_h)^h C_0 \\ & P Q' = C_0 \end{aligned} \right\}$$

donde el subíndice 'e' en el vector \hat{Q} y en la matriz $\hat{\Omega}$ significa que deben ser evaluados en la volatilidad especificada en el escenario e-ésimo.

4.2.1 Ejemplos

Para los próximos ejemplos, se construyen los escenarios mediante árboles binomiales, de tal forma que el valor de la volatilidad en un determinado nodo ascendente o descendente se calcula, sumando o restando respectivamente un determinado tanto por ciento de la volatilidad del nodo inicial al valor de su nodo padre. Se asumirá que la cantidad a sumar o restar es igual al $I = 3\%$ de una determinada volatilidad inicial que se especifica en cada figura; también se considera que la probabilidad de movimientos ascendentes y descendentes es igual a 0.5 y que el número de nodos finales es igual a 25. Todos los demás parámetros son iguales a los del Problema 1, con lo que las estrategias en los escenarios medios se corresponderá con los resultados obtenidos en éste.

1.- Escenarios (volatilidad inicial: $\bar{\sigma} = .29$):



Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = .95$.

Estrategia a priori: Vender Call /Comprar Put con más peso hacia vender Call, dado que el escenario medio está en $\bar{\sigma} = .29$.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

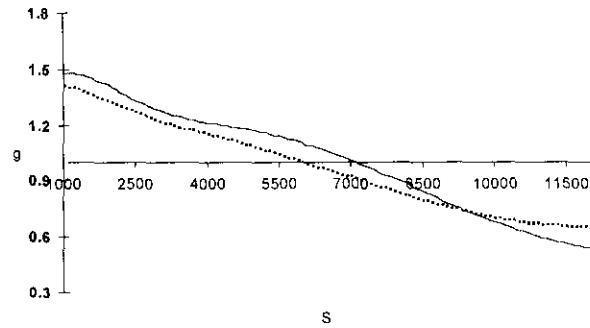


Figura 4.27: $\sigma_C = .14$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

2.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1$.

Estrategia a priori: Vender Call /Comprar Put con más peso hacia vender Call, dado que el escenario medio está en $\bar{\sigma} = .29$.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

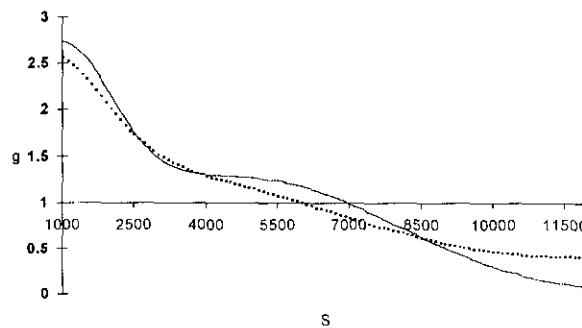


Figura 4.28: $\sigma_C = .29$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

3.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.05$.

Estrategia a priori: Vender Straddle / Comprar Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

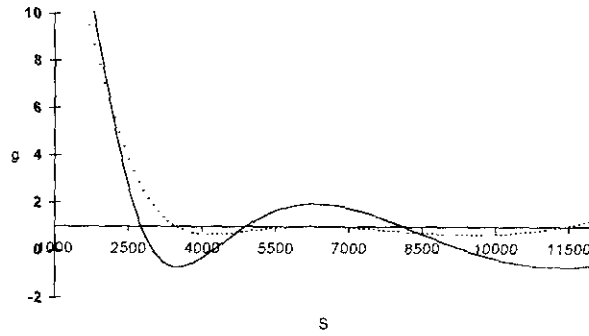


Figura 4.29: $\sigma_C = .86$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

4.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.1$.

Estrategia a priori: Mezcla entre vender Put/ vender Straddle y
comprar Call/ comprar Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

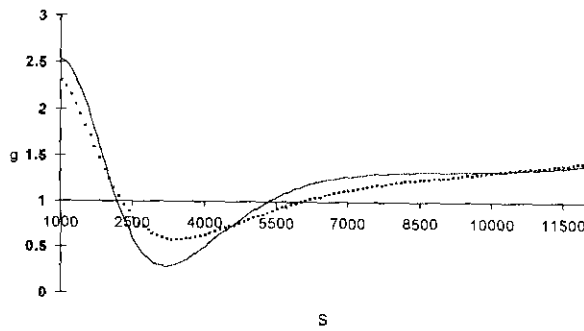


Figura 4.30: $\sigma_C = .28$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

5.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.15$.

Estrategia a priori: Mezcla entre vender Put/ vender Straddle y
comprar Call/ comprar Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

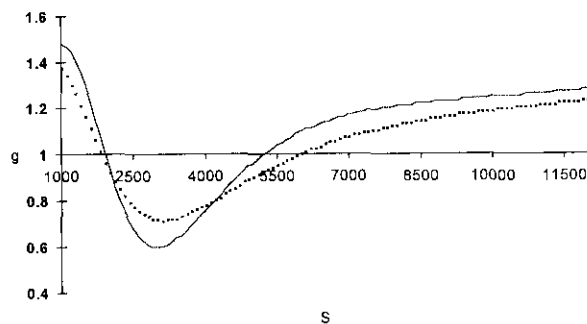
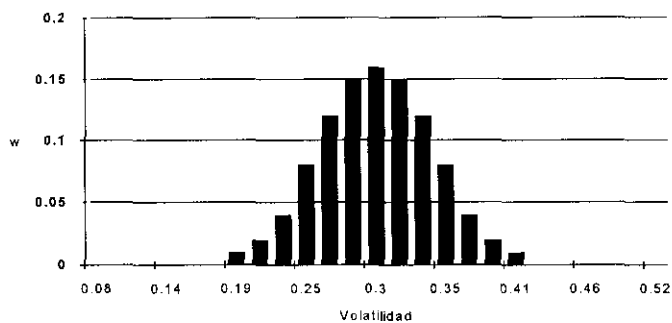


Figura 4.31: $\sigma_C = .15$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

6.- Escenarios (volatilidad inicial: $\bar{\sigma} = .3$):



Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = .95$.

Estrategia a priori: Túnel vendido.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

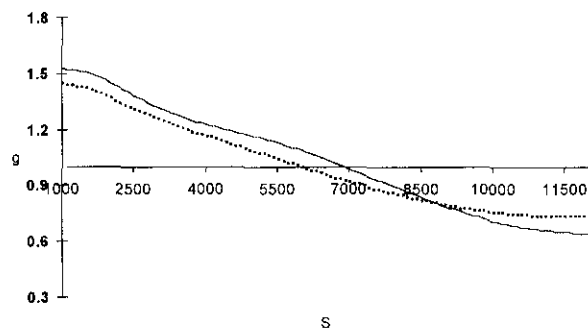


Figura 4.32: $\sigma_C = .14$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

7.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1$.

Estrategia a priori: Túnel vendido.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

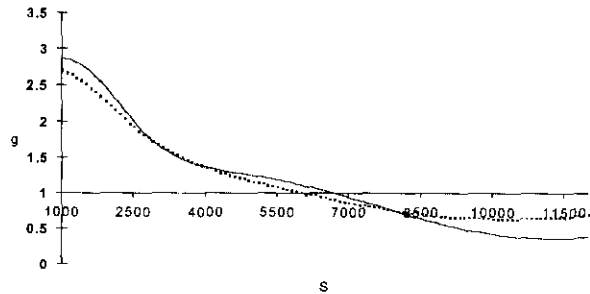


Figura 4.33: $\sigma_C = .29$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

8.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.05$.

Estrategia a priori: Comprar/Vender Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

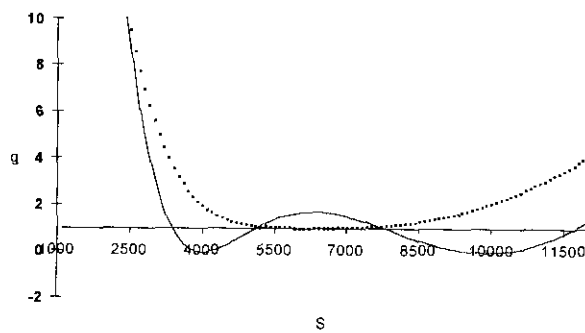


Figura 4.34: $\sigma_C = 1.14$ (Línea continua: T años para voto., línea discontinua: T-h años para voto.)

9.- Sentimiento del inversor sobre la volatilidad: $\bar{\sigma} = .3$.

Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.1$.

Estrategia a priori: Mezcla entre vender Put/ vender Straddle y
comprar Call/ comprar Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

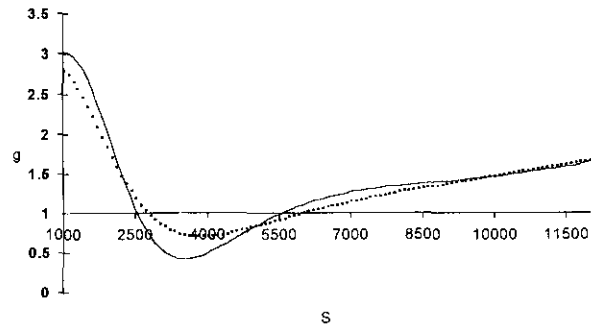


Figura 4.35: $\sigma_C = .31$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

10.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.15$.

Estrategia a priori: Mezcla entre vender Put/ Straddle y comprar Call/ Straddle

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

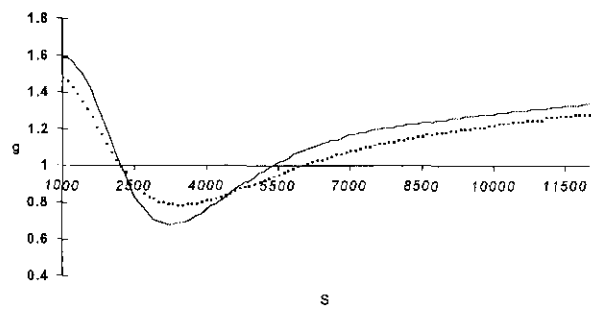
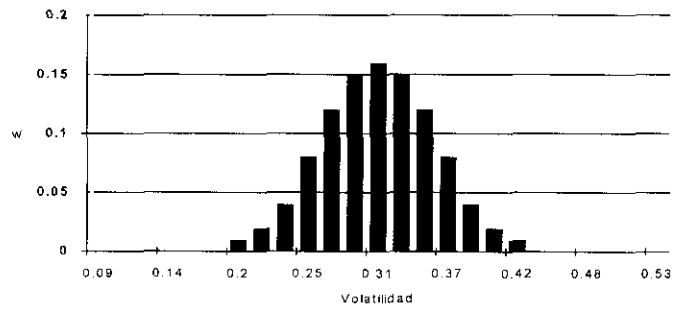


Figura 4.36: $\sigma_C = 16$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

11.- Escenarios (volatilidad inicial: $\bar{\sigma} = .31$):



Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = .95$.

Estrategia a priori: Túnel vendido (Vender Call /Comprar Put) con más peso hacia comprar Put, dado que el escenario medio está en $\bar{\sigma} = .31$.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

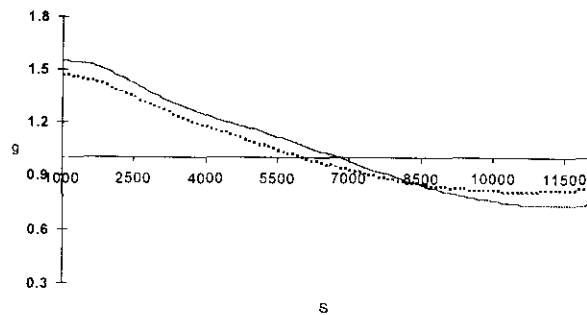


Figura 4.37: $\sigma_C = .15$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

12.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1$.

Estrategia a priori: Túnel vendido (Vender Call /Comprar Put) con más peso hacia comprar Put, dado que el escenario medio está en $\bar{\sigma} = .31$.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

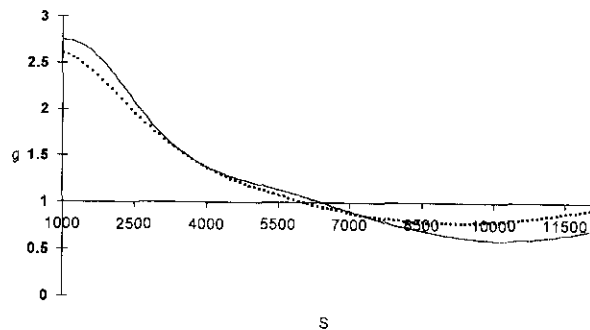


Figura 4.38: $\sigma_C = .28$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

13.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.05$.

Estrategia a priori: Comprar Straddle /Vender Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

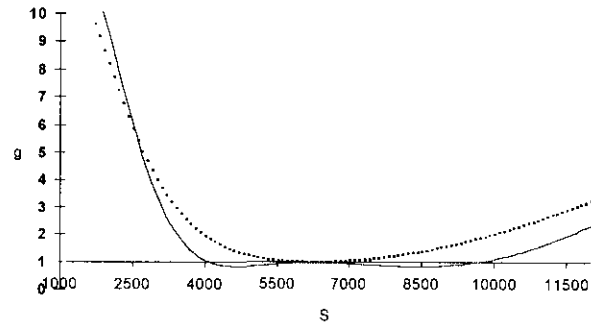


Figura 4.39: $\sigma_C = .75$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

14.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.1$.

Estrategia a priori: Mezcla entre vender Put/ vender Straddle y
comprar Call/ comprar Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

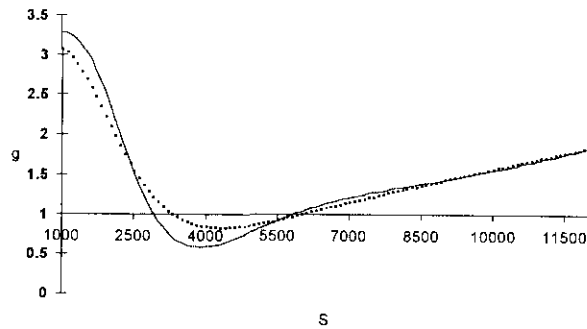


Figura 4.40: $\sigma_C = .33$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

15.- Sentimiento del inversor sobre el rendimiento: $\bar{m} = 1.15$.

Estrategia a priori: Mezcla entre vender Put/ vender Straddle y
comprar Call/ comprar Straddle.

Estrategia eficiente cuando quedan T y T-h años para vencimiento:

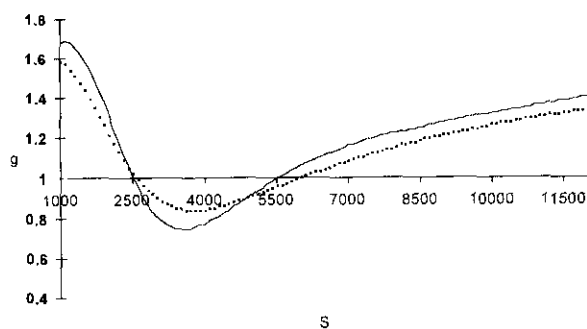


Figura 4.41: $\sigma_C = .17$ (Línea continua: T años para vto., línea discontinua: T-h años para vto.)

4.2.2 Comentarios a los resultados del Problema 2

En estos ejemplos también parece existir una determinada continuidad en el espacio de las estrategias eficientes, incluso más fuerte que en el Problema 1, dado que aquí no existe ningún punto de discontinuidad y las estrategias obtenidas al variar un poco la media de la distribución son muy similares (v. Figuras 4.48 a 4.53). Por otra parte, definir la estrategia a priori es bastante más difícil que en el problema anterior y depende significativamente de la distribución de probabilidades de los escenarios (en nuestro caso, de su media y desviación típica)³.

Intuitivamente parece claro y, se puede comprobar matemáticamente que, conforme dicha distribución se acerca a la distribución degenerada, la estrategia obtenida debe acercarse cada vez más a la calculada en el Problema 1. Por ejemplo, conforme disminuye la cantidad a sumar o restar, l , en cada paso del árbol de escenarios correspondiente al Caso 9, manteniendo la media constante, deberíamos ir acercándonos a los resultados obtenidos en el mismo caso del Problema 1, es decir:

³ Conforme “complicamos” el Problema 1, añadiendo nuevas restricciones, modelizando las expectativas sobre volatilidad mediante escenarios, etc., se hace más evidente la utilidad práctica del método de cálculo de la estrategia eficiente desarrollado en la tesis.

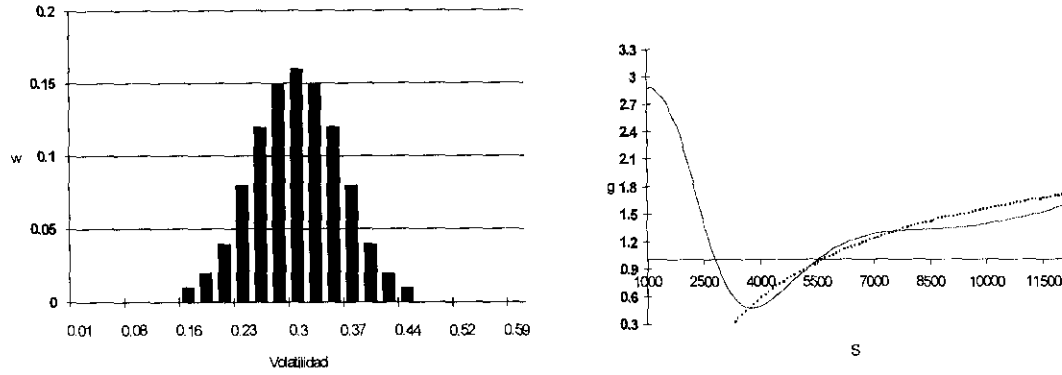


Figura 4.42: (a) Escenarios sobre la volatilidad ($I = 4\%$ 0.3), (b) Estrategia eficiente bajo los escenarios mostrados en el gráfico(a) (línea continua) y bajo una volatilidad $\sigma=0.3$.

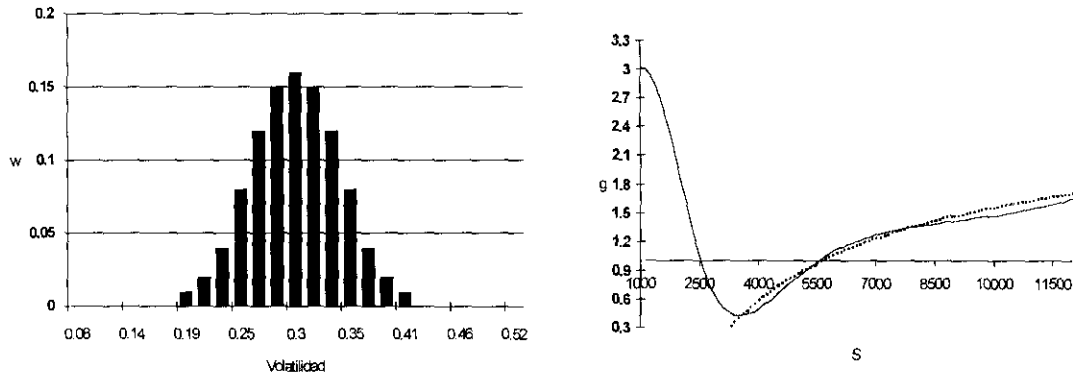


Figura 4.43: (a) Escenarios sobre la volatilidad ($I = 3\%$ 0.3), (b) Estrategia eficiente bajo los escenarios mostrados en (a) (línea continua) y bajo una volatilidad $\sigma=0.3$.

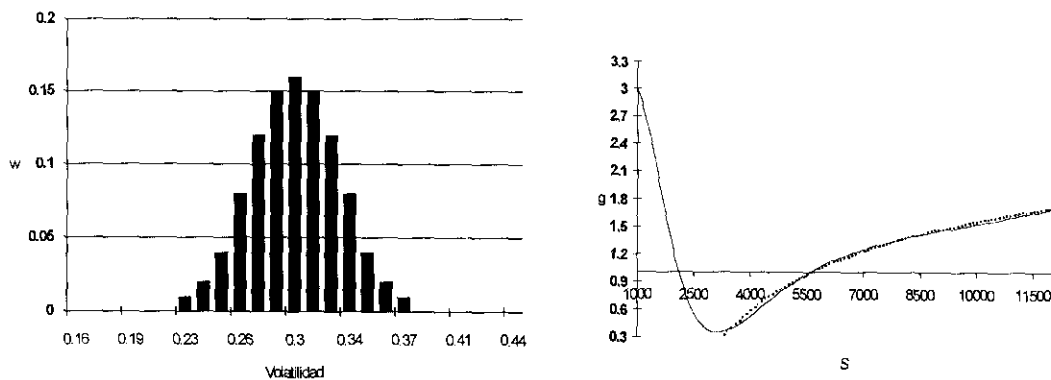


Figura 4.44: (a) Escenarios sobre la volatilidad ($I = 2\%$ 0.3), (b) Estrategia eficiente bajo los escenarios mostrados en (a) (línea continua) y bajo una volatilidad $\sigma=0.3$.

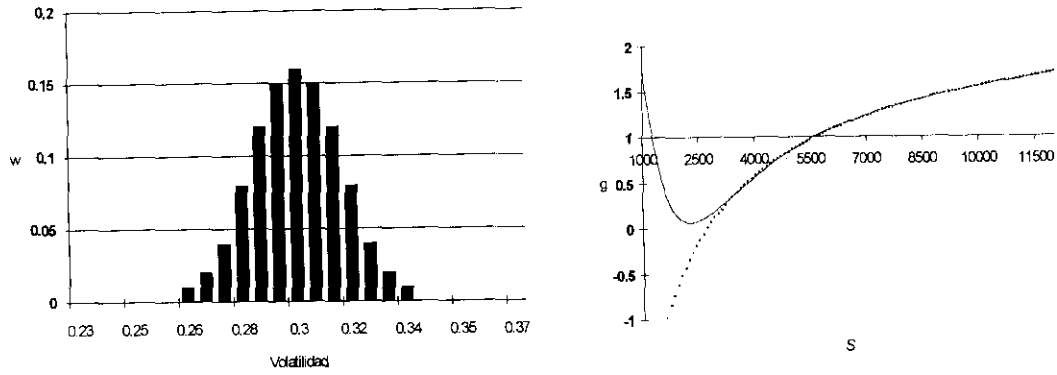


Figura 4.45: (a) Escenarios sobre la volatilidad ($I = 1\% 0.3$), (b) Estrategia eficiente bajo los escenarios mostrados en (a) (línea continua) y bajo una volatilidad $\sigma=0.3$.

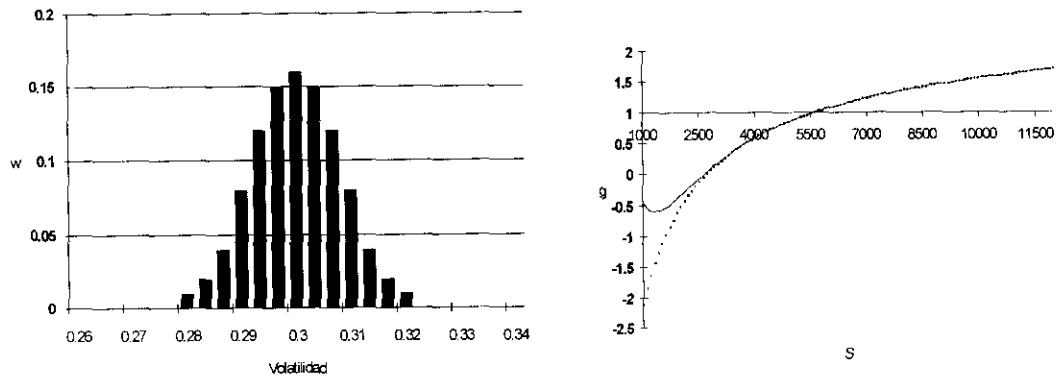


Figura 4.46: (a) Escenarios sobre la volatilidad ($I = 0.5\% 0.3$), (b) Estrategia eficiente bajo los escenarios mostrados en (a) (línea continua) y bajo una volatilidad $\sigma=0.3$.

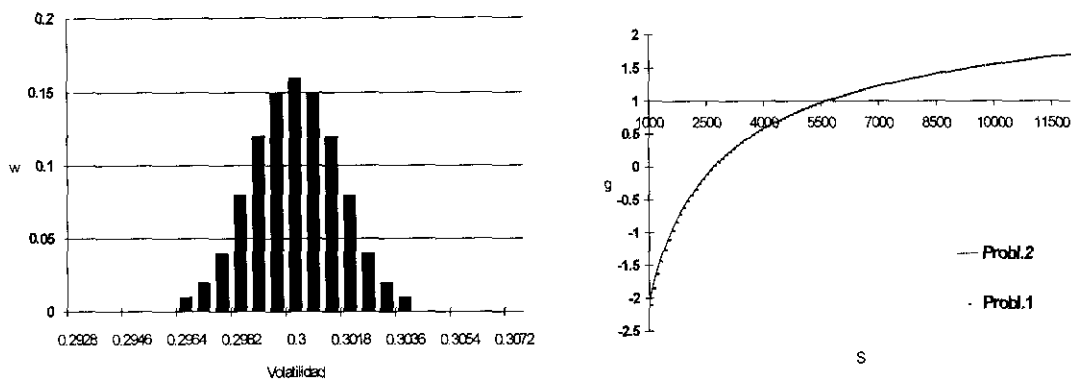


Figura 4.47: (a) Escenarios sobre la volatilidad ($I = 0.1\% 0.3$), (b) Estrategia eficiente bajo los escenarios mostrados en (a) (línea continua) y bajo una volatilidad $\sigma=0.3$.

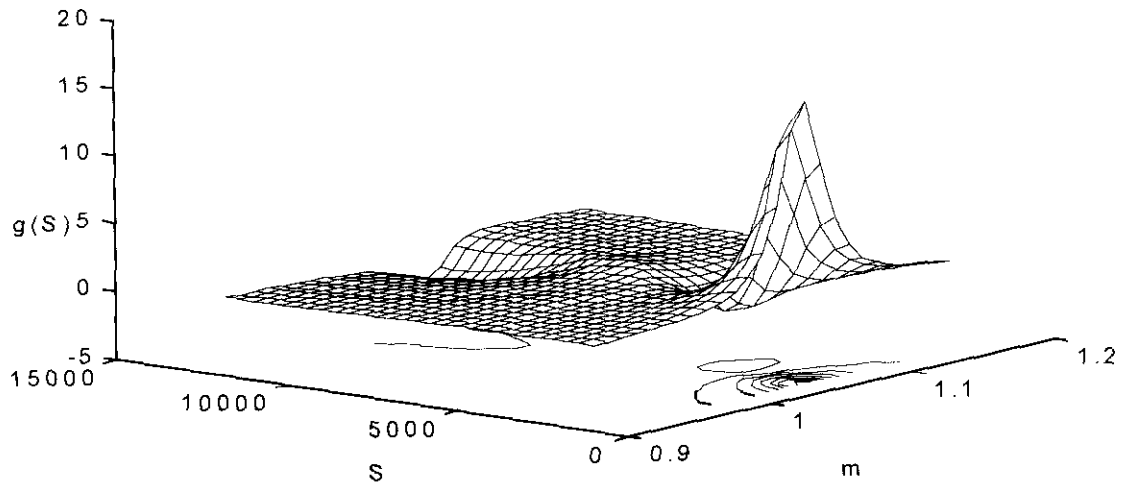


Figura 4.48: Estrategias eficientes en el caso de que la volatilidad inicial de los escenarios sea $\bar{\sigma} = .29$, $\sigma = .3$, $0.9 \leq m \leq 1.2$ y $r = \log(1.05)$.

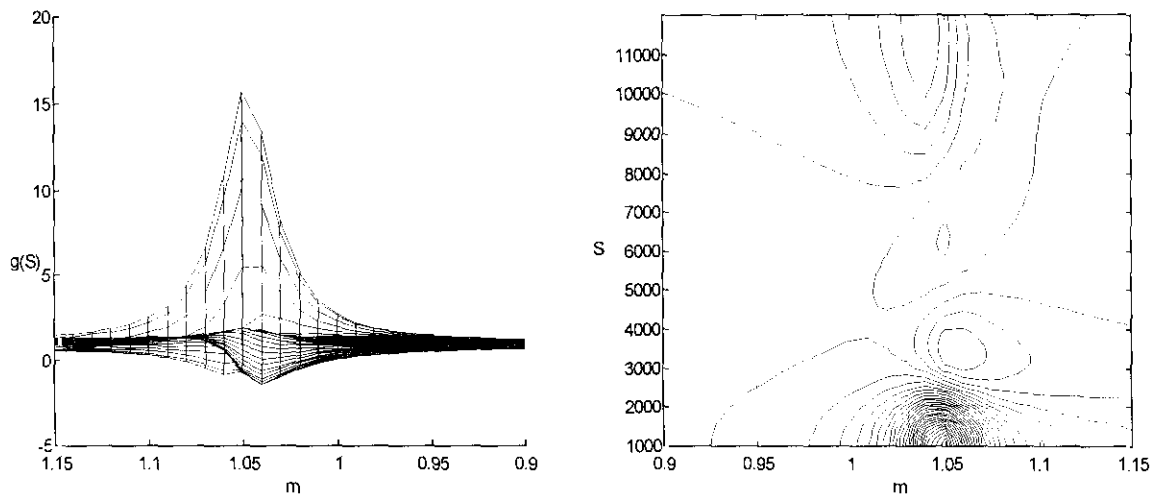


Figura 4.49: Contornos de la Figura 4.48

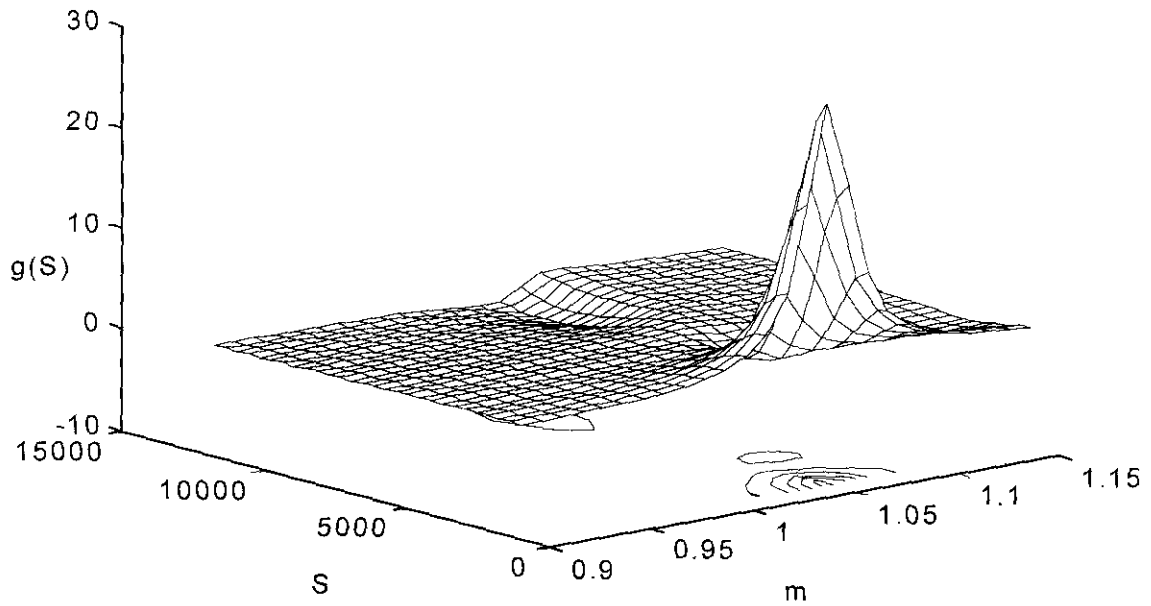


Figura 4.50: Estrategias eficientes en el caso de que la volatilidad inicial de los escenarios sea $\sigma = .3$, $\sigma = .3$, $0.9 \leq m \leq 1.2$ y $r = \log(1.05)$.

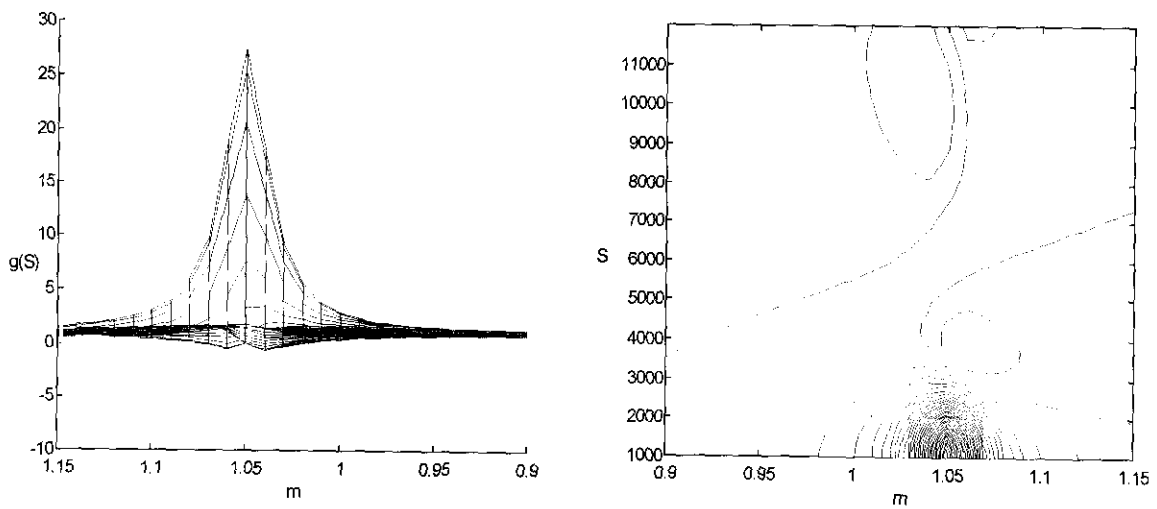


Figura 4.51: Contornos de la Figura 4.50

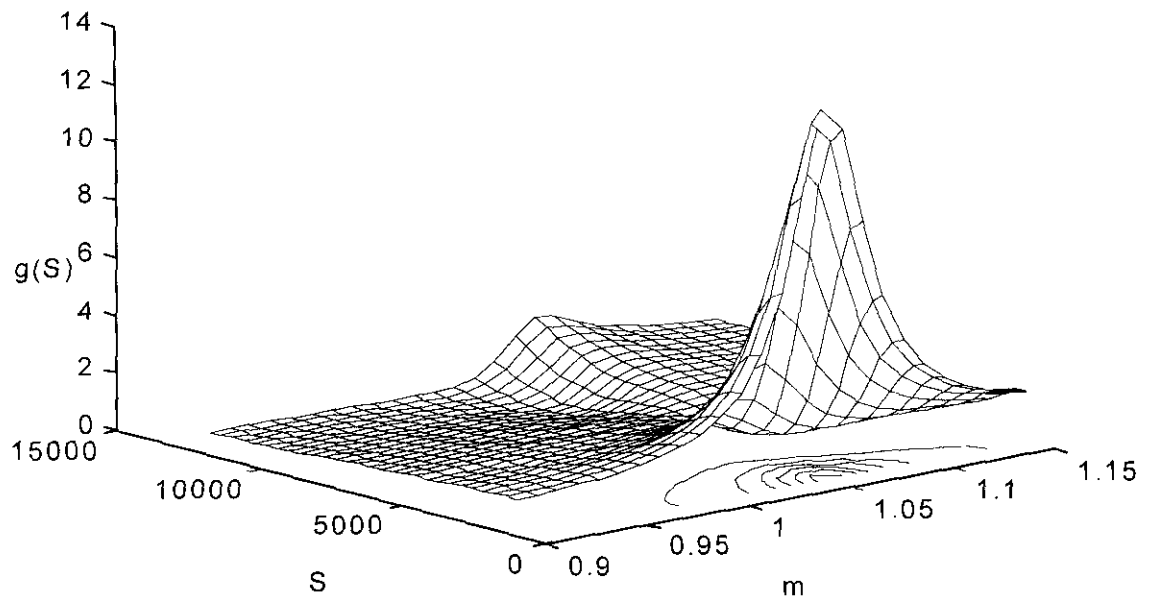


Figura 4.52: Estrategias eficientes en el caso de que la volatilidad inicial de los escenarios sea $\bar{\sigma} = .31$, $\sigma = .3, 0.9 \leq \bar{m} \leq 1.2$ y $r = \log(1.05)$.

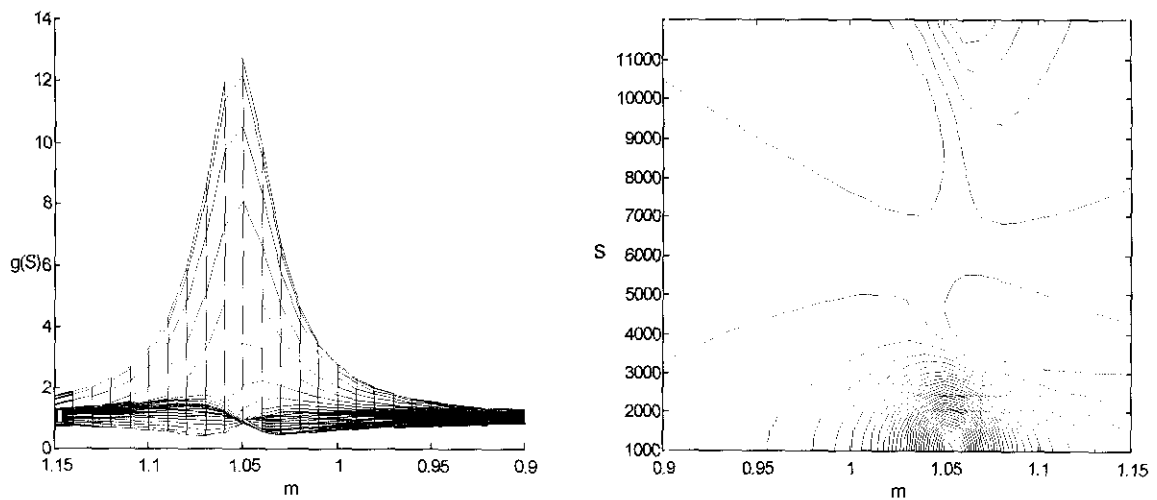


Figura 4.53: Contornos de la Figura 4.52

4.3 Problema 3: Estrategia à la Markowitz con restricciones sobre las sensibilidades esperadas de la estrategia

En los dos problemas resueltos anteriormente, el inversor estaba especialmente interesado en la minimización del riesgo de no conseguir una determinada rentabilidad. Sin embargo, existen otros tipos de contingencias, inherentes a la cartera de opciones, que posiblemente le gustaría controlar aún a costa de aumentar el riesgo de no conseguir el objetivo de rentabilidad. Por dichas contingencias nos referimos a las posibles variaciones del precio de la cartera debido a variaciones del precio del subyacente, el paso del tiempo, etc. En resumidas cuentas, es deseable poder fijar las diferentes sensibilidades de la cartera (vid. Dillman y Harding (1985)). Para ello se podría plantear un problema de minimización de la varianza del rendimiento de la estrategia sujeto a que el inversor dispone de C_0 ptas., exige un rendimiento del R_h por uno e impone objetivos sobre las sensibilidades de la estrategia esperadas en $t = h$, las sensibilidades en $t = 0$ o en ambas fechas. Teniendo en cuenta los resultados resumidos en la Tabla 3.1 se podría plantear una gran variedad de problemas distintos, cada uno de ellos con diferentes restricciones sobre el rendimiento exigido, la restricción presupuestaria y las sensibilidades de la estrategia. Por ello, se desarrolla uno de los casos en profundidad a modo de ejemplo. Supongamos que la volatilidad “estimada” por el mercado es $\sigma = .3$, la volatilidad “estimada” por el inversor es $\bar{\sigma} = .31$, el precio en $t = 0$ del subyacente es $S_0 = 60$, el tipo de interés libre de riesgo $r = \log(1.05)$, el rendimiento esperado del subyacente $\bar{m} = 1.05$, la fecha de ejercicio $T = 1$ años, el periodo de posesión del instrumento $h = 1$ año, el intervalo de precios a estudiar es $S_m = 1$, $S_M = 10^{12}$, la cantidad de dinero disponible $C_0 = 1$, el rendimiento exigido por el inversor $R_h = 0.08$ y el número de términos del desarrollo de Fourier $N=26$, el inversor resuelve inicialmente un problema del tipo Markowitz, es decir:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h C_0^2} \min_P P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P' \\ & P\hat{Q}' - (1 + R_h)C_0 \geq 0 \\ & PQ' = C_0 \end{aligned} \right\}$$

obteniendo como resultado la estrategia en $t = h$:

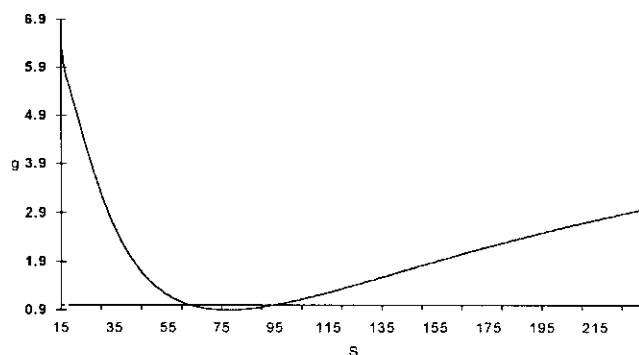


Figura 4.54: Estrategia à la Markowitz ($\bar{\sigma} = .31, \sigma = .3, r = \log(1.05), \bar{m} = 1.05$)

Utilizando las fórmulas descritas en el Capítulo 3 se obtiene que la Delta, la Gamma y la Theta esperadas para dicha estrategia son respectivamente:

$$\hat{\Delta} = -7.8302e - 003 C_0$$

$$\hat{\Gamma} = 1.2409e - 003 C_0$$

$$\hat{\Theta} = -8.8240e - 002C_0$$

y la desviación típica anualizada del rendimiento de la estrategia:

$$\sigma_C = 0.22$$

Supongamos que el inversor quiere que la Delta y la Gamma esperadas sean un veinte por ciento mayores, y la Theta esperada un veinte por ciento menor de tal forma que sus objetivos sobre dichas sensibilidades sean:

$$\hat{\Delta}_h = -7.8302e - 003 C_0 (1+.2)$$

$$\hat{\Gamma}_h = 1.2409e - 003 C_0 (1+.2)$$

$$\hat{\Theta}_h = -8.8240e - 002C_0 (1+.2)$$

Entonces el nuevo problema a resolver será:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h} C_0^2 \min_P P(\hat{\Omega} - \hat{Q}'\hat{Q})P' \\ & P\hat{Q}' - (1 + R_h)C_0 \geq 0 \\ & PQ' = C_0 \\ & P\hat{Q}'_{\Delta} = \hat{\Delta}_h \\ & P\hat{Q}'_{\Gamma} = \hat{\Gamma}_h \\ & P\hat{Q}'_{\Theta} = \hat{\Theta}_h \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

y la estrategia eficiente que cumple las restricciones sobre las sensibilidades:

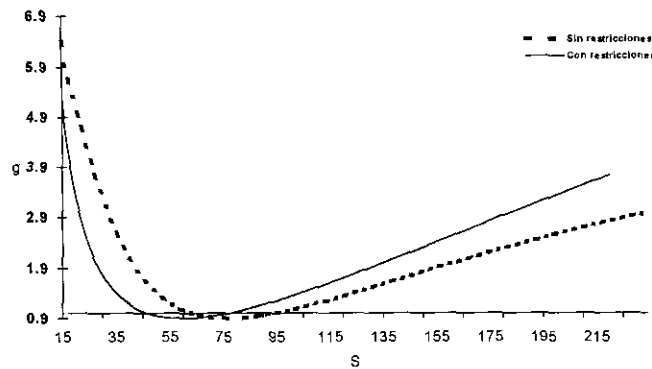


Figura 4.54: Línea discontinua: estrategia à la Markowitz. Línea continua: estrategia à la Markowitz con restricciones sobre las sensibilidades esperadas de la opción.

donde la desviación típica anualizada de la nueva estrategia es ahora $\sigma_C = .24$.

El primer comentario que se debe hacer es que cualquiera que sean los nuevos objetivos sobre las sensibilidades, repercutirán al alza sobre la desviación típica del rendimiento de la estrategia. En el ejemplo, éste aumento es aproximadamente del 9%. Esto es debido a que, de alguna manera, estamos imponiendo una determinada forma a la estrategia y por tanto deja de ser eficiente en el sentido de minimización de la varianza sin restricciones sobre las sensibilidades. Por ello parece natural utilizar las restricciones anteriormente descritas en un marco dinámico, donde constantemente se deba reajustar la cartera según la Delta, Gamma, etc.

Por otra parte, tanto la Vega como la Rho de la estrategia no se ajustan a la estructura del Problema 3 y no se pueden utilizar como restricciones, debido a que los coeficientes de Fourier a estimar en estas sensibilidades aparecen mezclados con sus derivadas con respecto al parámetro alfa.

5 Conclusiones

Las principales aportaciones de esta tesis a la literatura existente en el campo de las opciones y futuros se pueden resumir en los siguientes puntos.

1.- Asumiendo las hipótesis originales del artículo fundamental de Black y Scholes (1973) y acotando el rango de variación del precio del subyacente a un intervalo finito, se desarrolla un nuevo método de valoración de opciones con las siguientes características:

- a) En aquellos países donde el rango de variación del subyacente esté acotado por ley, el nuevo método de valoración resulta más realista.
- b) Proporciona un método adecuado para valorar de forma exacta las opciones con doble barrera.
- c) Expresa el precio de una opción, que en el modelo de Black y Scholes está representado mediante una integral impropia, en forma de serie, de tal manera que su manipulación matemática (derivación, integración) resulta más sencilla.
- d) Dicho precio se puede expresar, de forma aproximada, como producto escalar de dos vectores (para cada S y para cada t). El primero comprende todo lo concerniente a la estrategia a valorar y el segundo todo lo concerniente a la valoración en sí.
- e) Teniendo en cuenta los puntos c) y d), se pueden expresar de la misma forma el precio esperado y las distintas sensibilidades del precio de la opción y de su valor esperado condicionado, así como mediante una forma cuadrática la varianza condicionada de la opción.

2.- El nuevo método de valoración junto con las nuevas expresiones del precio esperado, la varianza, etc., permite generalizar, al ámbito de las opciones europeas sobre un único activo subyacente, las ideas sobre selección de carteras aparecidas originalmente en Markowitz (1952). Es decir, permite formalizar matemáticamente el problema de la elección de la estrategia eficiente compuesta por opciones europeas, dadas las expectativas sobre volatilidad y rendimiento del activo subyacente que hasta donde he podido comprobar, mediante una búsqueda exhaustiva en la literatura,

no esta planteado ni resuelto. En definitiva, permite resolver una serie de problemas en los que se calculan, dadas las expectativas del inversor y del mercado sobre la volatilidad y rendimiento del subyacente, la estrategia financiera, compuesta por opciones europeas sobre un único subyacente, que minimiza la varianza condicionada del rendimiento de la estrategia, sujeta al cumplimiento de una serie de restricciones. Los problemas de este tipo que se resuelven en la tesis son los siguientes:

a) Cálculo de la estrategia financiera que minimiza la varianza de su rendimiento sujeta a que el inversor dispone de una determinada cantidad de dinero y exige un rendimiento de un determinado tanto por ciento.

b) Cálculo de la estrategia financiera que minimiza la varianza de su rendimiento sujeta a que el inversor dispone de una determinada cantidad de dinero y exige un rendimiento de un determinado tanto por ciento, modelizando las expectativas del inversor sobre la volatilidad mediante escenarios.

c) Cálculo de la estrategia financiera que minimiza la varianza de su rendimiento sujeta a que el inversor dispone de una determinada cantidad de dinero y exige un rendimiento de un determinado tanto por ciento e impone objetivos sobre las sensibilidades de la estrategia esperadas en un determinado instante de tiempo.

Hay que destacar que las soluciones teóricas obtenidas al resolver estos problemas, están en concordancia con las estrategias que usualmente utilizan los traders en situaciones de mercado similares.

Aparte de algunas extensiones inmediatas como la resolución de problemas similares a los expuestos en el Punto 2 (con distintas restricciones, otro tipo de función objetivo, etc.), aparecen dos cuestiones fundamentales a investigar en el futuro:

- 1.- Cálculo de la estrategia eficiente formada por opciones sobre distintos subyacentes.
- 2.- Generalización de este trabajo y del punto anterior permitiendo que las opciones puedan ser americanas.

Apéndice 1: Resolución de la ecuación del calor

En el Capítulo 2, página 17, se vio que para resolver la ecuación de Black y Scholes por el método de separación de variables, es necesario resolver la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, (x, t) \in]0, L[\times \mathfrak{R}_+, (k > 0) \\ v(x, 0) &= f(x), x \in]0, L[\\ v(0, t) &= v(L, t) = 0, t > 0\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

Esta ecuación es famosa en los libros de física y representa el modelo de variación de la temperatura (v) según la posición (x) y el tiempo (t) en una varilla de longitud L , cuyos extremos se mantienen durante todo el tiempo a temperatura constante 0 y cuya distribución inicial de temperaturas en la barra es $f(x)$. La ecuación (A.1.1) esta resuelta en numerosos libros de física matemática (v. Churchill (1963), Tijonov y Samarski (1980), Tijonov, Samarski y Budak (1980), Weinberger (1992), etc.) y a continuación se detalla su resolución según el libro de Churchill (1963).

Primeramente buscaremos una serie de funciones que satisfagan la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\tag{A.1.2}$$

y las condiciones homogéneas $v(0, \tau) = v(L, \tau) = 0$, y que todas esas funciones tengan la forma especial:

$$v(x, t) = X(x) T(t), 0 \leq x \leq L, t \geq 0.\tag{A.1.3}$$

La sustitución de (A.1.3) en (A.1.2) produce:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}\tag{A.1.4}$$

El lado izquierdo de la ecuación (A.1.4) es una función solo de x , mientras que el segundo miembro solo depende de t . Si t se mantiene constante en el lado derecho, entonces el primer miembro, $\frac{X''}{X}$, debe permanecer constante aunque x varíe. Análogamente, si x se mantiene constante en el lado izquierdo, $\frac{T'}{kT}$ permanecerá constante en el segundo cuando t varíe. En consecuencia, la

igualdad solamente podrá ser válida si cada una de las dos expresiones es la misma constante, que por razones de comodidad designaremos por $-\lambda$. De esta manera, la ecuación (A.1.4) se convierte en:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda$$

la cual consta de las dos ecuaciones:

$$X'' + \lambda X = 0$$

y:

$$T' + \lambda k T = 0$$

Concentrémonos primeramente en $X(x)$. Las condiciones homogéneas en los puntos extremos determinan:

$$v(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad v(L, t) = X(L)T(t) = 0. \quad (\text{A.1.5})$$

Si $T(t)$ es una función no trivial entonces la ecuación (A.1.5) solo se verifica si $X(0) = X(L) = 0$,

por lo tanto $X(x)$ debe satisfacer el problema de valores de contorno, también conocido por problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) = X(L) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

que tiene una solución no trivial si y solo si λ es uno de los valores propios:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y que la función propia asociada con λ_n es:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

el razonamiento que apoya estas dos últimas ecuaciones es el siguiente:

- Si $\lambda = 0$, entonces la ecuación (A.1.6) implica que $X(x) \equiv 0$.
- Si $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $X(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$, y entonces las condiciones $X(0) = X(L) = 0$ implican $A = B = 0$.

- Si $\lambda = \alpha^2 > 0$, $X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$, y las condiciones $X(0) = X(L) = 0$

implican $A = 0$ y que $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, para algún entero positivo n .

Entonces la ecuación $T' + \lambda k T = 0$, puede reescribirse como $T_n' + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} k T_n = 0$.

Una solución no trivial de la ecuación anterior es:

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt}$$

y por tanto:

$$v_n(x, t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt} \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mediante el principio de superposición se llega a que la solución a la ecuación (A.1.1) es del tipo:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} kt} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Falta solamente aplicar la condición $v(x, 0) = f(x)$, que implica:

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$$

pero esta es una serie de Fourier en senos de $f(x)$ sobre el intervalo $[0, L]$ una vez se escoja:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Nótese, por último, que el estado asintótico es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$$

independientemente de la distribución inicial de temperaturas.

Apéndice 2: Aspectos básicos de las opciones y futuros

A.2.1 Definiciones preliminares

a) Contrato forward:

Contrato que obliga al comprador a comprar una cantidad determinada del activo de referencia en una fecha (T) y a un precio (K) especificado en el contrato. El vendedor del forward esta obligado a vender en las condiciones establecidas contractualmente por las partes intervinientes.

Los ingresos netos en función del precio del activo de referencia (S) en $t = T$ serán:

-Comprador: $g(S) = S - K$

-Vendedor: $-g(S)$

b) Opción de compra (Call):

Es un contrato que proporciona a su poseedor (el comprador) el derecho (no la obligación) a comprar un número determinado de acciones (activo subyacente), a un precio establecido (K), en cualquier momento antes de una fecha determinada (T), o bien únicamente en esa fecha. El número de acciones, la descripción de las mismas (clase y empresa), el precio de la ejecución del contrato y la fecha hasta que el contrato tiene validez son las características fundamentales del contrato.

El comprador tiene la alternativa de ejercer o no su derecho, mientras que el vendedor está obligado a satisfacer el requerimiento del comprador.

Los ingresos netos en función del precio del activo subyacente en $t = T$, serán:

-Comprador: $g(S) = \max\{S - K, 0\}$

-Vendedor: $-g(S)$

c) Opción de venta (Put):

Es un contrato que proporciona a su poseedor (el comprador) el derecho (no la obligación) a vender un número determinado de acciones (activo subyacente), a un precio establecido, en cualquier momento antes de una fecha determinada, o bien únicamente en esa fecha. El comprador de la opción de venta tiene la alternativa de ejercer o no su derecho (vender), mientras que el vendedor está obligado a satisfacer el requerimiento del comprador.

Los ingresos netos en función del precio del activo subyacente en $t = T$, serán:

-Comprador: $g(S) = \max\{K - S, 0\}$

-Vendedor: $-g(S)$

A.2.2 Clases de opciones

Se Puede establecer distintas clasificaciones de las opciones según los diferentes aspectos relativos a su operativa que se toman en consideración.

A.2.2.1 Según su naturaleza

a) Opción de compra o “Call”

b) Opción de venta o “Put”

A.2.2.2 Según el periodo de ejercicio de la opción

a) Opción europea: Se denomina así a la opción que solo puede ejercitarse al vencimiento del correspondiente contrato.

b) Opción americana: Se denomina así a la opción que se puede ejercitar en cualquier momento de la duración del contrato.

A.2.2.3 Según la relación entre el precio de ejercicio y del subyacente

a) At the money: Adquieren esta denominación cuando el precio de ejercicio es igual al precio de mercado del subyacente.

b) Out of the money: Se les denomina así cuando el precio de ejercicio es superior en la Call e inferior en la Put con respecto al precio de mercado del activo subyacente.

c) In the money: Esta situación tiene lugar cuando el precio de ejercicio es inferior en la Call y superior en la Put con respecto al precio de mercado del activo subyacente.

Aunque existen otros tipos de clasificaciones también importantes, no se mencionan por no ser necesarias para la comprensión de esta tesis.

A.2.3 Factores que determinan el precio de una opción

Las seis variables fundamentales que determinan el precio de una opción son:

1. Precio del activo al que se refiere la opción (S)

2. Precio de ejercicio de la opción (K)

3. Volatilidad del rendimiento del activo subyacente (σ)
4. Tipo de interés libre de riesgo (r)
5. Dividendos del activo subyacente durante la vida de la opción (D_0)
6. Tiempo hasta la última fecha de ejercicio de la opción (T)

Como se demuestra en el capítulo introductorio, el precio de una opción europea que el día de ejercicio garantiza una función de pagos $g(S)$ es:

$$C(S, T; r, \sigma) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(S e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0)T + \sigma \sqrt{T}z}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

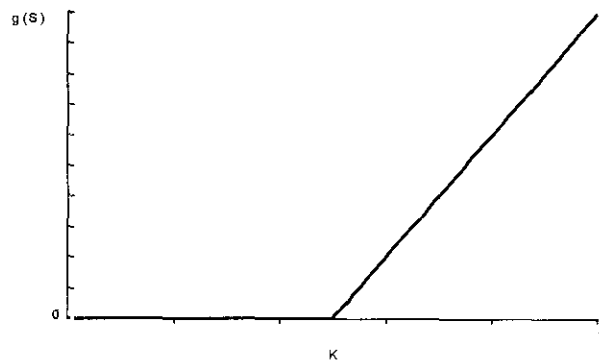
A.2.4 Estrategias básicas compuestas por opciones y futuros

Combinado futuros, opciones Call y opciones Put, se puede conseguir cualquier tipo de función de pagos $g(S)$ el día de ejercicio de la opción. Algunas de las funciones de pagos más usuales se recogen en esta sección. Se mostrarán desde el punto de vista del comprador¹, especificando como se construyen y cual sería el ingreso neto el día de ejercicio. Al final del apéndice se muestra un cuadro resumen que indica cuando comprar o vender dichas opciones.

1. Nombre de la estrategia: Call

Como se construye: Comprar una Call

Ingresos netos el día de ejercicio:

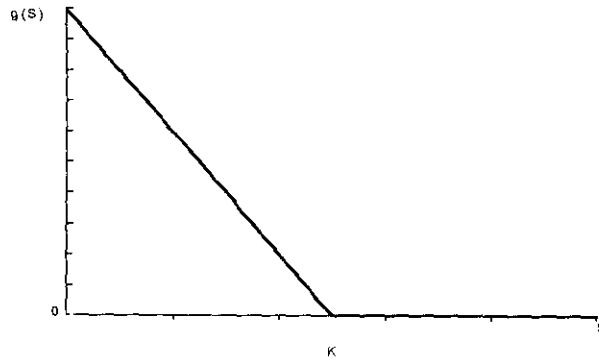


¹Si el comprador tiene una función de pagos el día de ejercicio $g(S)$, el vendedor tendrá una función de pagos igual a $-g(S)$

2. Nombre de la estrategia: Put

Como se construye: Comprar una Put

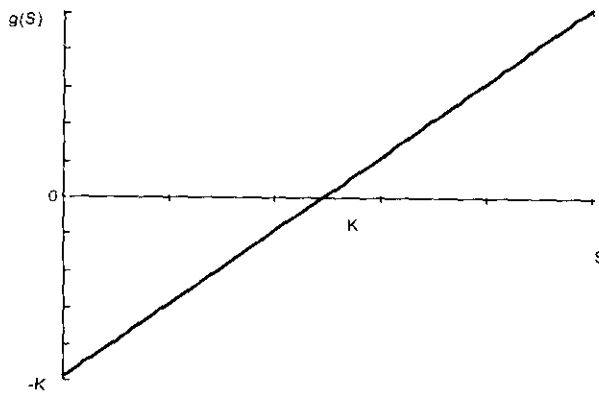
Ingresos netos el día de ejercicio:



3. Nombre de la estrategia: Futuro

Como se construye: Comprar un futuro o comprar Call y vender Put con el mismo precio de ejercicio.

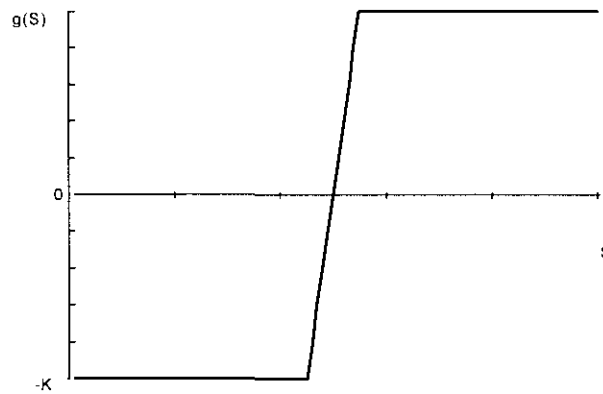
Ingresos netos el día de ejercicio:



4. Nombre de la estrategia: Call Spread

Como se construye: Comprar Call, vender Call con precio de ejercicio mayor.

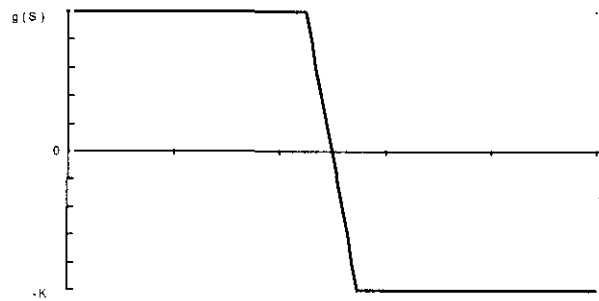
Ingresos netos el día de ejercicio:



5. Nombre de la estrategia: Put Spread

Como se construye: Comprar Put, vender Put con precio de ejercicio menor.

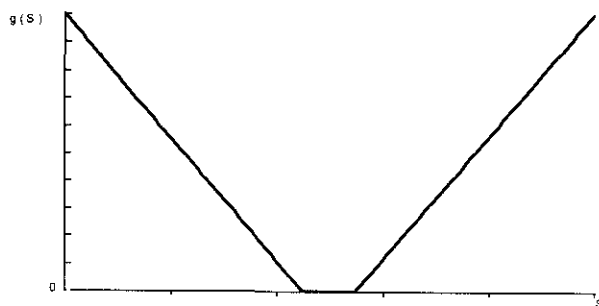
Ingresos netos el día de ejercicio:



6. Nombre de la estrategia: Guts

Como se construye: Comprar Call, comprar Put con precio de ejercicio mayor.

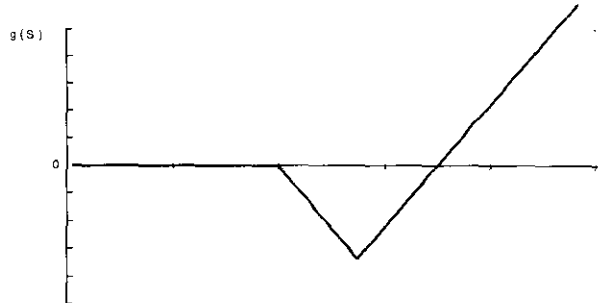
Ingresos netos el día de ejercicio:



7. Nombre de la estrategia: Two by one ratio Call Spread

Como se construye: Vender Call, comprar dos Calls con precio de ejercicio mayor.

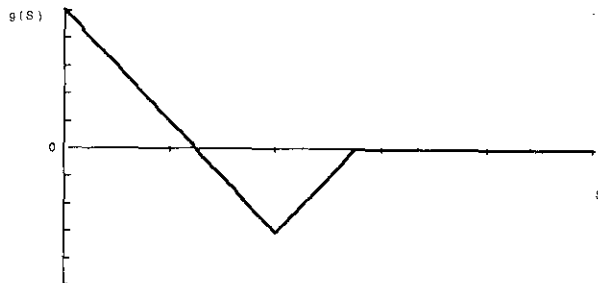
Ingresos netos el día de ejercicio:



8. Nombre de la estrategia: Two by one ratio Put Spread

Como se construye: Vender Call, comprar dos Calls con precio de ejercicio mayor.

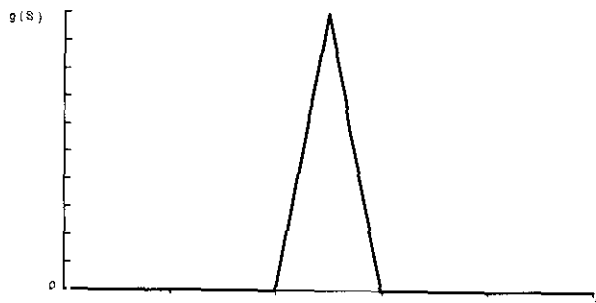
Ingresos netos el día de ejercicio:



9. Nombre de la estrategia: Butterfly

Como se construye: Comprar Put (o Call), vender dos Puts (o Calls) con precio de ejercicio mayor, comprar Put (o Call) con precio de ejercicio igual al mayor de todos.

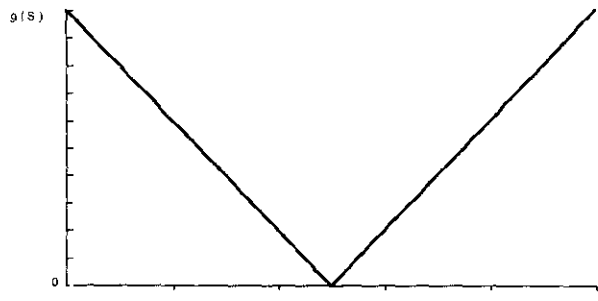
Ingresos netos el día de ejercicio:



10. Nombre de la estrategia: Straddle

Como se construye: Comprar Put, comprar Call con igual precio de ejercicio.

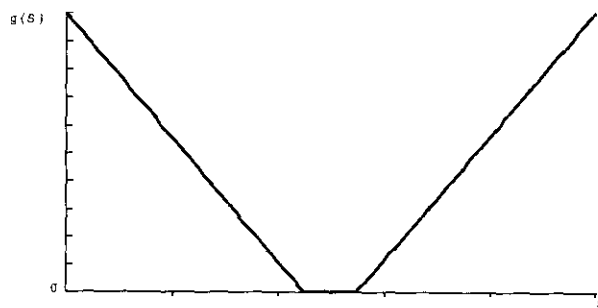
Ingresos netos el día de ejercicio:



11. Nombre de la estrategia: Strangle

Como se construye: Comprar Put, comprar Call con precio de ejercicio mayor.

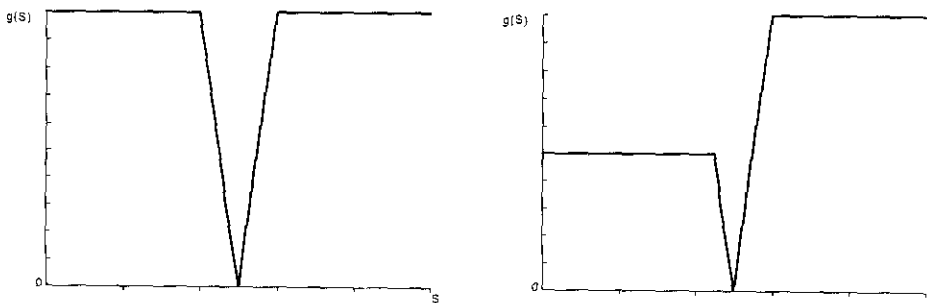
Ingresos netos el día de ejercicio:



12. Nombre de la estrategia: Iron Butterfly

Como se construye: Comprar Straddle, vender Strangle.

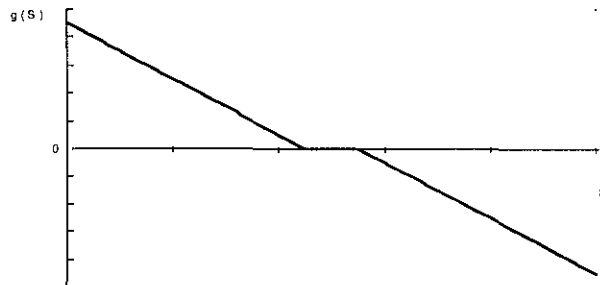
Ingresos netos el día de ejercicio:



13. Nombre de la estrategia: Combo

Como se construye: Vender Call, comprar Put con precio de ejercicio menor.

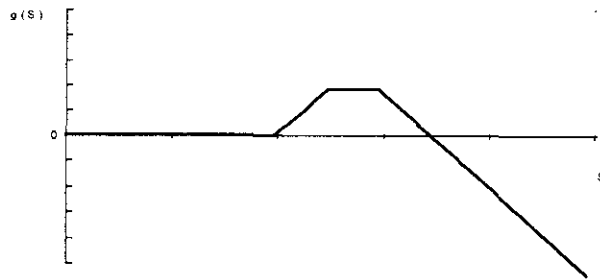
Ingresos netos el día de ejercicio:



14. Nombre de la estrategia: Ladder

Como se construye: Comprar Call, vender Call con precio de ejercicio mayor, vender Call con precio de ejercicio aún mayor.

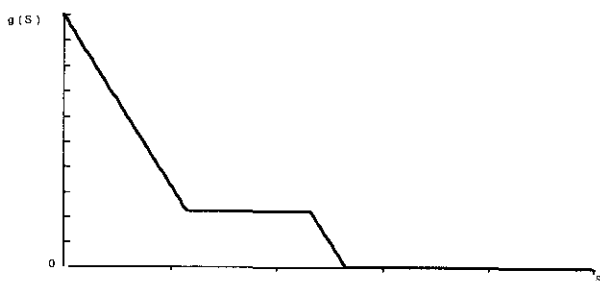
Ingresos netos el día de ejercicio:



15. Nombre de la estrategia: Condor

Como se construye: Compra Put (o Call), vender Put (o Call) con precio de ejercicio mayor, comprar Put (o Call) a precio de ejercicio todavía mayor.

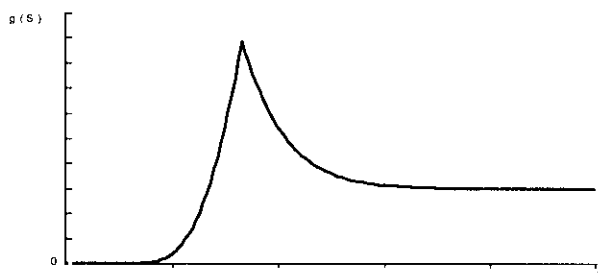
Ingresos netos el día de ejercicio:



16. Nombre de la estrategia: Calendar Spread

Como se construye: Vender Put (o Call), comprar Put (o Call) con mayor tiempo de maduración (esta última será vendida cuando expire la primera).

Ingresos netos el día de ejercicio:



17. Nombre de la estrategia: Diagonal Calendar Spread

Como se construye: Vender Put (o Call), comprar Put (o Call) con mayor tiempo de maduración y precio de ejercicio diferente (esta última será vendida cuando expire la primera).

Ingresos netos el día de ejercicio: Similar al anterior.

18. Nombre de la estrategia: Straddle Calendar Spread

Como se construye: Vender Straddle, comprar Straddle con mayor tiempo de maduración (este último será vendido cuando expire el primero).

Ingresos netos el día de ejercicio:

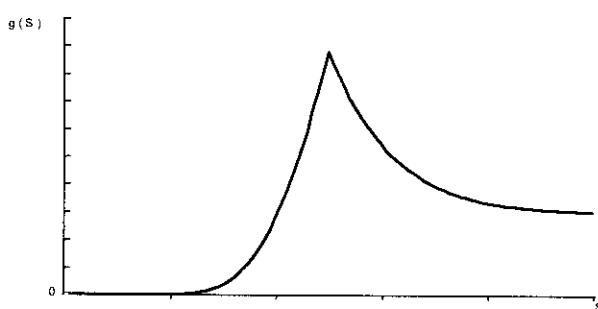


Tabla A.2.1²

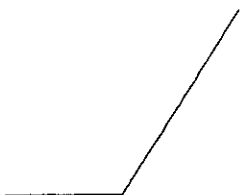
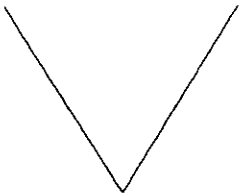
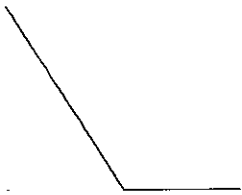
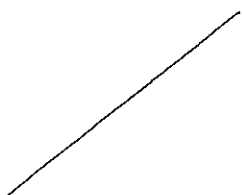

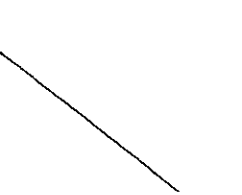
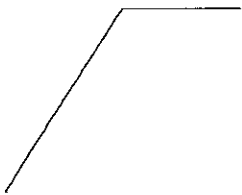
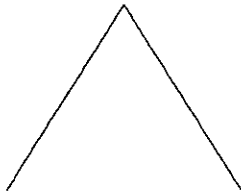
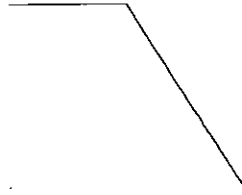
		Rendimiento		
		Alcista	Neutra	Bajista
Volatilidad	Alcista	C. Call , C. 2x1 Ratio Call Spread, C. Call Spread: (C. <i>ATM Call</i> , V. <i>OTM Call</i>), V. Put Spread: (C. <i>ATM Put</i> , V. <i>ITM Put</i>), V. <i>ITM Call Butterfly</i> , V. <i>OTM Put Butterfly</i> , V. <i>ITM Call Condor</i> , V. <i>OTM Put Condor</i> , V. Call Ladder.	C. Straddle , C. Strangle, V. <i>ATM Put/Call Butterfly</i> , V. <i>ATM Iron Butterfly</i> , V. <i>ATM Put/Call Condor</i> , C. <i>ATM Calendar Spread</i> , C. <i>ATM Straddle Calendar Spread</i> , C. Guts.	C. Put , V. Call Spread: (V. <i>ITM Call</i> , C. <i>ATM Call</i>), C. Put Spread: (V. <i>OTM Put</i> , C. <i>ATM Put</i>), V. <i>OTM Call Butterfly</i> , V. <i>ITM Put Butterfly</i> , V. <i>OTM Call Condor</i> , V. <i>ITM Put Condor</i> , V. Put Ladder.
	Neutra	C. Subyacente , C. Call, V. Put C. Call Spread: (C. <i>ITM Call</i> , V. <i>OTM Call</i>), V. Put Spread: (C. <i>OTM Put</i> , V. <i>ITM Put</i>), C. <i>OTM Call Butterfly</i> , C. <i>ITM Put Butterfly</i> , C. <i>OTM Call Condor</i> , C. <i>ITM Put Condor</i> , V. Combo	Arbitraje.	V. Subyacente , V. Call, C. Put V. Call Spread: (V. <i>ITM Call</i> , C. <i>OTM Call</i>), C. Put Spread: (V. <i>OTM Put</i> , C. <i>ITM Put</i>), C. <i>ITM Call Butterfly</i> , C. <i>OTM Put Butterfly</i> , C. <i>ITM Call Condor</i> , V. <i>OTM Put Condor</i> , C. Combo
	Bajista	V. Put , V. 2x1 Ratio Put Spread, C. Call Spread: (C. <i>ITM Call</i> , V. <i>ATM Call</i>), V. Put Spread: (C. <i>OTM Put</i> , V. <i>ATM Put</i>), C. <i>OTM Call Butterfly</i> , C. <i>ITM Put Butterfly</i> , C. <i>OTM Call Condor</i> , C. <i>ITM Put Condor</i> , C. Put Ladder.	V. Straddle , V. Strangle, C. <i>ATM Put/Call Butterfly</i> , C. <i>ATM Iron Butterfly</i> , C. <i>ATM Put/Call Condor</i> , V. <i>ATM Calendar Spread</i> , V. <i>ATM Straddle Calendar Spread</i> , V. Guts.	V. Call , V. 2x1 Ratio Call Spread, V. Call Spread: (V. <i>ATM Call</i> , C. <i>OTM Call</i>), C. Put Spread: (V. <i>ATM Put</i> , C. <i>ITM Put</i>), C. <i>ITM Call Butterfly</i> , C. <i>OTM Put Butterfly</i> , C. <i>ITM Call Condor</i> , C. <i>OTM Put Condor</i> , C. Call Ladder

Estrategias básicas compuestas por opciones y futuros dependiendo de las expectativas sobre el rendimiento y la volatilidad del rendimiento del subyacente (C: Comprar, V: Vender, ATM: At the money, ITM: In the money, OTM: Out of the money)

Fuente: LIFFE strategiser, (LIFFE Administration and Management).

² En negrita aparecen las más usuales.

Tabla A.2.2

		Rendimiento		
		Alcista	Neutra	Bajista
Volatilidad	Alcista			
	Neutra			
	Bajista			

Estrategias básicas compuestas por opciones y futuros dependiendo de las expectativas sobre el rendimiento y la volatilidad del rendimiento del subyacente (marcadas en negrita en la tabla A.2.1 del apéndice 2)

Tabla A.2.3

		Rendimiento		
		Alcista	Neutra	Bajista
Volatilidad	Alcista			
	Neutra			
	Bajista			

Resumen de las estrategias obtenidas al resolver el problema “Estrategias a la Markowitz” (Cap. 4).
 (Compárese con la Tabla A.2.2)

Apéndice 3: Resolución de la ecuación de Black y Scholes

Con la intención de que la tesis sea autocontenida, se procede a resolver la ecuación de valoración de opciones propuesta por Black y Scholes en 1973.

Supongamos un determinado activo financiero, llamado acción, cuyo precio, S , sigue el proceso que evoluciona atendiendo a consideraciones tanto deterministas como aleatorias de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = (\log(m) - D_0) S_t dt + \sigma S_t dB_t; \quad S_0 > 0$$

siendo B_t un movimiento estándar Browniano, en el ambiente propio de estos procesos estocásticos, y donde $\log(m)$ y σ son escalares estrictamente positivos y D_0 un escalar no negativo que representan respectivamente el rendimiento esperado, la volatilidad y los dividendos de la acción.

Junto al anterior se considera otro tipo de activo, llamado bono, cuyo precio $\{\psi_t : t \geq 0\}$ evoluciona exclusivamente de manera determinista a partir de la ecuación diferencial:

$$d\psi_t = \psi_t r dt$$

es decir:

$$\psi_t = \psi_0 e^{rt}, \quad t \geq 0$$

Sea $(a(t), b(t))$ un vector cuya primera componente indica el número de acciones y la segunda el número de bonos respectivamente de una determinada cartera en el instante t , $t \in [0, T]$, determinando la cartera:

$$C(S_t, t) = a(t)S_t + b(t)\psi_t .$$

De no haber extracción de fondos, la naturaleza de los coeficientes hace que la variación de la cartera en el intervalo t y $t+h$ sea:

$$a(t)(S_{t+h} - S_t) + b(t)(\psi_{t+h} - \psi_t),$$

para h suficientemente pequeño, que conduce a la expresión diferencial:

$$dC(S_t, t) = a(t)dS_t + b(t)d\psi_t, \quad t \in [0, T]$$

conocida en la literatura como la propiedad de autofinanciación acumulativa (v. Duffie (1992)).

Claramente, nos interesamos por el proceso $\{C(S_t, t) : t \in [0, T]\}$ con valor terminal $C(S_0, T) = g(S_0)$, donde $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, que represente el precio de $g(S_0)$ en cualquier instante de tiempo $t \in [0, T]$ y de tal forma que pueda ser replicado en todo momento por la cartera de acciones y bonos $(a(t), b(t))$. Aplicando el lema de Ito tenemos que:

$$dC(S_t, t) = \left(C_t(S_t, t) + (\log(m) - D_0) S_t C_s(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 C_{ss}(S_t, t) \right) dt + \sigma S_t C_s(S_t, t) dB_t.$$

A la vista de la propiedad de autofinanciación se tiene:

$$dC(S_t, t) = a(t) dS_t + b(t) d\psi_t = (a(t)(\log(m) - D_0) S_t + b(t) \psi_t) dt + \sigma S_t dB_t$$

con lo que la propiedad de descomposición única de los procesos de Ito (v. Sección 5C Duffie (1992))

lleva a:

$$a(t) = C_s(S_t, t)$$

de donde:

$$C(S_t, t) = C_s(S_t, t) S_t + b(t) \psi_t,$$

es decir:

$$b(t) = \frac{C(S_t, t) - C_s(S_t, t) S_t}{\psi_t},$$

obteniéndose la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = r C - (r - D_0) S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

$$C(S, T) = g(S), \quad S \geq 0$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Feynman-Kac se resuelve la EDP anterior, dando como resultado:

$$C(S_0, T - t, r, \sigma) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - D_0)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} z}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

que determina el precio de una opción con valor terminal genérico $g(S)$.

Referencias

- Baxter, M y Rennie, A., 1996. *Financial Calculus*: Cambridge University Press.
- Black, F., y M. Scholes, 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- Bookstaber, R., y J. A. Langsam, 1988. "Portfolio Insurance Trading Rules," *Journal of Futures Markets*, 6, 15-31.
- Brennan, M. J., y E. S. Schwartz, 1978. "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13, 462-474.
- Cho H. Hui, 1997. "Time Dependent Barrier Option Values," *Journal of Futures Markets* 6, 667-688.
- Churchill, R., 1963. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. McGraw-Hill.
- Courtadon, G., 1982. "A More Accurate Finite Difference Approximation for The Valuation of Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17, 697-705.
- Cox, J. C., y Ross, S. A., 1976. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics* 3, 145-166.
- Cox, J. C., and M. Rubinstein. 1985. *Options Markets*. Prentice-Hall.
- Dembo, R. S. 1991. "Scenario Optimization," *Annals of Operations Research*. 30, 63-80.
- Dillman, S., and J. Harding, 1985. "Life after Delta: the Gamma Factor," *Euromoney*, Supplement, 14-17.
- Duffie, D., 1988. *Security Markets Stochastic Models*. Academic Press, Inc.
- Duffie, D., 1992. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press.
- Fong, H., y O. A. Vasicek. 1984, "A Risk Minimizing Strategy for Portfolio immunization," *Journal of Finance*.
- Godunov, S.K., 1978, *Ecuaciones de la Física Matemática*. MIR.

- Hull, J., 1997. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall.
- Hull, J., y A. White, 1990. "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25, 87-100.
- Ingersoll, J. E., 1987, *Theory of Financial Decision Making*. Studies in Financial Economics. Rowman & Littlefield.
- Ito, K., 1951. "On Stochastic Differential Equations," *Memoirs, American Mathematical Society* 4, 1-51.
- Kon, S. J., 1984. "Models of Stock Returns - A Comparison," *Journal of Finance* 39, 147-65.
- Markowitz, H. M, 1952. "Portfolio Selection," *Journal of Finance* 7, 77-91.
- Merton, R. C., 1973. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-83.
- Mijáilov, V.P., 1978. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. MIR.
- Oksendal, B., 1995. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.
- Rubinstein, M., 1984. "A Simple Formula for the Expected Rate of Return of an Option Over a Finite Holding Period," *Journal of Finance* 39, 1503-1509.
- Smith, C. W., 1976. "Option Pricing: A Review," *Journal of Financial Economics* 3, 3-51.
- Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery y B., Press, W., 1992. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- Tíjonov, A. y Samarski, A., 1980. *Ecuaciones de la Física Matemática*. MIR.
- Tíjonov, A., Samarski, A., y B.M Budak 1980. *Problemas de la Física Matemática*. MIR.
- Weinberger, H., 1992. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Editorial Reverté.
- Wilmott, P., J. Dewynne, y S. Howison, 1993. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford: Oxford Financial Press.
- Wismer, D., y R. Chattergy. 1979. *Introduction to Nonlinear Optimization*. North-Holland.
- Zenios, S., 1993. *Financial Optimization*. Cambridge University Press.