CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD EN OPERADORES DE AGREGACIÓN: Una aplicación al problema de datos perdidos.

Daniel Gómez[1], **Karina Rojas**[2], **Javier Montero**[2], **J.Tinguaro Rodríguez**[2], **Gleb Beliakov**[3]

[1]*Faculty of Statistics, Av. Puerta de Hierro s/n 28040, Madrid (Spain),* dagomez@estad.ucm.es
[2]*Faculty of Mathematics, Plz. Ciencias s/n 28040, Madrid (Spain),* {krpatuelli,monty,jtrodrig}@mat.ucm.es
[3]*School of Information Technology, Deakin University, 221 Burwood Hwy, Burwood, Victoria 3125, Australia,* gbeliako@gmail.com

Resumen

En este trabajo se analiza una cuestión clave respecto de la relación que debe existir entre operadores de una misma familia de operadores de agregación (FAO) $\{A_n\}$, a fin de comprender que ellos deben definir adecuadamente un todo *consistente*. Se extienden algunas de las ideas de estabilidad de una FAO con un enfoque más general, definiéndose formalmente las nociones de $i-L$ y $j-R$ *estabilidad estricta* para familias de operadores de agregación, e introduciendo la noción de estabilidad estricta de orden k. Finalmente, se muestra una aplicación de las condiciones de estabilidad estricta al problema de pérdida de datos en un proceso de agregación de información, utilizándose las familias de la media ponderada y de la media ponderada cuasi-aritmética.

Palabras Clave: Operadores de agregación, estabilidad, datos perdidos, self-identity, conjuntos borrosos.

1 INTRODUCCIÓN

Usualmente, un *operador de agregación* [1, 6, 3, 7, 8, 10] se define como una función real A_n tal que si se tienen n elementos $x_1,\ldots,x_n$ en $[0,1]$, A_n produce un valor agregado $A_n(x_1,...,x_n)$ en [0,1] (ver [5]). Ésta definición puede ser extendida a una familia de operadores para cualquier n en vez de un operador simple para un n determinado. Esto lleva a la definición estándar [5, 12] de una *familia de operadores de agragación* (*FAO*) como un conjunto $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$, entregando las instrucciones de cómo agregar una colección de n elementos. Esta secuencia de funciones de agregación $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es llamada por algunos autores [12, 6] como *funciones de agregación extendidas* (*EAF*). En este trabajo se estudian dos diferentes pero relacionadas problemáticas en relación a las *funciones de agregación extendidas* o *familias de operadores de agregación*.

En primer lugar, debemos destacar que en la práctica, a menudo algunos datos pueden perderse, eliminarse o incorporarse a un conjunto de datos que se debe agregar, y cada vez que un cambio de cardinalidad ocurre, un nuevo operador de agregación A_m tiene que ser utilizado para agregar la nueva colección de m elementos. Sin embargo, es importante hacer hincapié que no necesariamente existe una relación entre A_n y A_m en una familia de operadores de agregación, tal como se define en [5]. En este contexto, parece natural incorporar algunas propiedades que mantengan la *consistencia* lógica entre operadores de una misma *FAO* frente a cambios de cardinalidad, para lo cual se necesita ser capaz de definir una familia de operadores de agregación en términos de su consistencia lógica. En otras palabras, los operadores que componen una familia tienen que estar de alguna manera relacionados de modo que el proceso de agregación siga siendo el mismo ante posibles cambios en la dimensión del conjunto de datos. Por lo tanto, parece ser apropiado estudiar propiedades que le den sentido a la secuencia $A_2, A_3, A_4, \ldots,$ ya que de otra forma sólo se tiene un conjunto de operadores desconectados. Bajo este objetivo, en [15, 16, 11] se presentan las nociones de *estabilidad* y *consistencia* basadas en la robustez de un proceso de agregación. En este sentido, la noción de *estabilidad* para una familia de operadores de agregación está inspirada en el concepto de *continuidad*, aunque nuestro enfoque se centra en la cardinalidad de los datos en lugar de en los datos en sí, permitiendo asegurar cierta robustez en el resultado del proceso de agregación a pesar de los posibles cambios de cardinalidad. En particular, sea $A_n(x_1,\ldots,x_n)$ un valor agregado desde el conjunto de datos n-dimensional $x_1,\ldots,x_n$. Supongamos que un nuevo elemento x_{n+1} será agregado. Si x_{n+1} es un valor que se encuentra cerca del valor agregado dado por $A_n(x_1,\ldots,x_n)$, entonces el resultado de la agregación de estos $n+1$ elementos no debiera diferir significativamente al resultado de la agregación de los n elementos. Siguiendo con la idea de estabilidad para cualquier herramienta matemática, si $|x_{n+1} - A_n(x_1,\ldots,x_n)|$ es pequeña, entonces $|A_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) - A_n(x_1,\ldots,x_n)|$ debiera ser pequeña también. Es importante tener en cuenta que si la familia A_n no es simétrica, es decir, existe un n para el cual el operador de agregación A_n no es simétrica, entonces la posición de los nuevos elementos es relevante para el resultado final del proceso de agregación. A partir de esta observación, en [15, 16, 11] se presentan algunas definiciones de *estabilidad* que extienden la noción de $self-identity$ definida en [18].

Por otro lado, un problema que no ha recibido demasiada atención es cómo obtener una agregación cuando algunas de las variables que serán agregadas no tienen información. Si el operador de agregación A_n tiene una definición clara para el caso en el cual la dimensión es menor, entonces este problema se puede solucionar fácilmente, aunque no siempre es una tarea trivial. En este artículo se trata el problema de datos perdidos para algunas familias de operadores de agregación conocidas, basándose en la consistencia de las familias de agregación a través de la noción de estabilidad.

2 CONSISTENCIA DE FAMILIAS DE OPERADORES DE AGREGACIÓN

Tal como se ha señalado en la introducción, una *familia de operadores de agregación* es un conjunto de operadores $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$, que proporciona instrucciones sobre cómo agregar colecciones de elementos de cualquier dimensión n. En [12] se muestra que los operadores de una familia pueden estar relacionados por medio de un grupo de propiedades. Por ejemplo, continuidad, simetría u otras propiedades conocidas que usualmente se definen para una función de agregación A_n, y que puede ser definida en general para una familia de operadores de agregación, imponiendo que éstas propiedades tienen que ser satisfechas para todo n. Sin embargo, este tipo de propiedades no garantizan una coherencia en el proceso de agregación, en tanto no establecen ninguna restricción que conecten las diferentes funciones de agregación.

A pesar que pocas propiedades han sido estudiadas o definidas para una *FAO* en general (ver [16] para más detalle), es posible encontrar en la literatura algunas propiedades de operadores de agregación que pueden ser entendidas como propiedades de una familia como un todo, en tanto establecen alguna relación entre los diferentes operadores.

Un concepto que establece una relación entre operadores de diferente dimensión en una FAO es la noción de *recursividad*. La recursividad es introducida en [7] en el contexto de operadores de agregación *OWA*. A partir de [7], en [1, 8, 10, 4] es estudiada la recursividad de una FAO de manera más general y en conexión con la consistencia de un proceso de agregación. Es importante notar que la recursividad garantiza un tipo de consistencia de una *FAO* $\{A_n\}$, en tanto cada función A_n es construida tomando en cuenta las funciones previas A_{n-1}. De esta manera, la situación en la cual diferentes operadores A_n sin una relación entre si, no pueden ser recursivos. Otras propiedades que establecen algunas condiciones entre diferentes miembros de una misma familia son las de *descomponibilidad* (ver [5, 6] para más detalle) o *bisimetra* (ver [5, 6] para más detalle) entre otros.

A pesar que estas propiedades pueden ser consideradas como modelamiento de un tipo de consistencia en una familia de operadores de agregación, éstas se centran más en la construcción de un operador de agregación de dimensión n a partir de operadores de agregación de dimensiones más bajas, que es una idea particular de consistencia. Por otro lado, en la búsqueda de la idea de consistencia de una familia de operadores de agregación basados en la definición de $self-identity$ dada por Yager en [18], la noción de *estabilidad estricta* de una FAO fue definida en [15, 16, 11] en tres grados diferentes. Además, en [6], la propiedad de Yager y su propiedad dual fueron analizadas y estudiadas a fin de determinar una familia consistente de pesos para diferentes familias de operadores de agregación ponderados.

La idea es simple: en una familia de operadores de agregación, A_n y A_{n+1} deben estar estrechamente relacionados, en el sentido que si un nuevo elemento va a ser incorporado, y este nuevo elemento corresponde a la agregación de los n ítems anteriores, entonces el resultado de la agregación de estos $n+1$ elementos debe ser cercana a la agregación de los n anteriores. En otras palabras, si el operador de agregación A_{n+1} se diferencia demasiado de A_n, producirá una familia $inestable$ $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Teniendo en cuenta que las FAOs no son necesariamente simétricas, en [16] se analizaron dos posibilidades sobre la definición de estabilidad estricta (L- o left y R- o right estabilidad).

Definition 2.1. *([15, 16]) Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación. Entonces, diremos que:*

1. *$\{A_n\}_n$ es una $familia$ R-estrictamente estable si $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$, y $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ coincide con:*

$$A_n(x_1,...,x_{n-1},A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})).$$

2. *$\{A_n\}_n$ es una $familia$ L-estrictamente estable si $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$, y $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ coincide con:*

$$A_n(A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1}),x_1,...,x_{n-1}).$$

A pesar que las definiciones anteriores pueden ser relajadas desde un punto de vista asintótico y probabilístico (ver [16]), este trabajo se enfoca en las condiciones de estabilidad estricta expuestas.

3 $i-L$ y $j-R$ ESTABILIDAD.

Las definiciones anteriores suponen que el nuevo elemento se incorpora en la primera o en la última posición, supuesto puede ser relajado, en tanto dicho elemento puede ser incorporado en cualquier posición del conjunto de datos. El concepto de j-L estabilidad estricta fue introducido en [2], en el cual se impone que el nuevo elemento se ubica en la j-ésima posición. Análogamente, es posible definir la i-R estabilidad estricta ubicando el elemento en la posición i-ésima desde la derecha. De este mismo modo, pueden ser definidas las nociones de j-L y i-R estabilidad estricta en términos asintóticos y probabilísticos.

Definition 3.1. *Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación, diremos que:*

1. *$\{A_n\}_n$ es una familia i-R-estrictamente estable si $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$, y $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ coincide con:*

$$A_n(x_1,...,x_{n-i},A_{n-1}(x_1...,x_{n-1}),\ldots,x_{n-1}).$$

2. *$\{A_n\}_n$ es una familia j-L-estrictamente estable si $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$, y $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ coincide con:*

$$A_n(x_1,...,x_{j-1},A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1}),x_j,\ldots,x_{n-1}).$$

Notar que las nociones de j-L y i-R estabilidad estricta definidas anteriormente son equivalentes (para cualquier j y/o i) cuando la FAO es simétrica. Pero en general, es muy difícil que una FAO no simétrica satisfaga más de una condición de manera simultánea (ver [16] para más detalle). En nuestra opinión, las condiciones de estabilidad estricta que en general son satisfechas por las FAOs no simétricas, deben tener en cuenta la estructura del conjunto de datos que será agregado (además de la forma en la que esta familia es definida).

Similarmente, las FAOs simétricas imponen de manera implícita que la estructura del conjunto de datos no tiene un efecto en el resultado del proceso de agregación, es decir, el orden en la cual la información es agregada no es relevante, mientras que para las familias de operadores de agregación no simétricas, se asume que el conjunto de datos tiene una estructura inherente, y por tanto, la posición de los elementos del conjunto de datos es relevante. En este sentido, la estabilidad estricta debe tener en cuenta que el conjunto de datos presenta una estructura (ver [17, 13] para más detalle). En el capítulo siguiente, se presentan algunas definiciones de estabilidad estricta para FAOs no simétricas las cuales dependen de la estructura del conjunto de datos a ser agregado.

4 ESTAB. ESTRICTA DE ORDEN k.

Los tres niveles de estabilidad presentados en [16, 15] (*estricta*, *asintotica* y *casi segura*) establecen restricciones hacia la existencia de una relación entre los miembros de una FAO $\{A_n\}_n$, a fin de garantizar algún nivel de consistencia y robustez del proceso de agregación. Sin embargo, estas condiciones se centran en la relación entre dos elementos consecutivos, i.e. A_n y A_{n+1}. La noción de estabilidad estricta puede ser extendida imponiendo condiciones sobre la relación entre los operadores de agregación A_n y A_m cuando $|m-n| = k$. En este contexto, se presenta el concepto de estabilidad estricta de orden k con respecto a la posición $r_1,\ldots,r_k$. Como en el caso de estabilidad estricta de orden 1, se asume que x es un vector n-dimensional que será agregado por un operador A_n. Supongamos ahora que k elementos son adicionados a x, las cuales coinciden con la agregación $A_n(x)$. Entonces, la agregación del vector $n+k$-dimensional resultante al incorporar el valor $A_n(x)$ en la posición $r_1,\ldots,r_k$ coincide con $A_n(x)$. En nuestra opinión, para introducir este nuevo concepto es necesario especificar la siguiente notación:

Dado $n \in N$ y dada la secuencia de k posiciones $r_1,\ldots,r_k$ con $r_1 < r_2 \ldots < r_k \leq n+k$, se denota por $\xi^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k}$ la función

$$\xi^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k} : [0,1]^n \times [0,1] \longrightarrow [0,1]^{n+k}$$

en la cual, para un $x \in [0,1]^n$ dado y $\alpha \in [0,1]$, el vector x se transforma en un vector $[0,1]^{n+k}$ adicionando el valor α en la posición $r_1,\ldots,r_k \leq n+k$. Por ejemplo, sea $x = (x_1,\ldots,x_6)$ en $[0,1]^6$, entonces $\xi^6_{1,3,8}(x,\alpha)$ es el vector en $[0,1]^9$ que resulta de incluir el valor α en x en la posición 1, 3 y 8, i.e. $\xi^n_{1,3,8}(x,\alpha) = (\alpha,x_1,\alpha,x_2,x_3,x_4,x_5,\alpha,x_6)$.

Una vez ha sido introducida la notación, vemos la ecuación asociada a la j-L estabilidad estricta puede ser reformulada como:

$$A_{n+1}(\xi^n_j(x,\alpha)) = A_n(x) \ \ con\ \alpha = A_n(x)\ para\ x \in [0,1]^n.$$

Esto es posible introducirlo mediante la siguiente definición:

Definition 4.1. *Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación. Entonces, $\{A_n\}_n$ es una familia $r_1,\ldots,r_k$-L-estrictamente estable para un valor dado $r_1 < \ldots < r_k$ si $\forall n \geq r_k - k$ y $\forall x \in [0,1]^n$*

$$A_{n+k}\left(\xi^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x,A_n(x))\right) = A_n(x)$$

Del mismo modo se establecen algunas condiciones entre los miembros de una FAO cuando ellos difieren en un elemento (i.e. A_n y A_{n+1}). La definición anterior establece la relación entre los elementos de una FAO cuando ellos difieren en k su cardinalidad (i.e. A_n y A_{n+k}), tomando en cuenta la información agregada (i.e. la estructura del conjunto de datos). En las siguientes subsecciones, se analizan las consecuencias y los vínculos entre familias estrictamente estables de diferentes órdenes, diferenciando entre los casos simétricos y no simétricos.

4.1 El caso simétrico.

De manera similar ocurre con la j-L estabilidad estricta, cuando una *FAO* es simétrica (i.e. todos sus miembros son operadores simétricos), la posición $r_1,\ldots,r_k$ no es relevante en la definición de la estabilidad estricta de orden k. Un parámetro muy importante es el número k, en tanto representa el orden de la estabilidad impuesta, que puede ser definida $\forall n \geq 2$ y $\forall x \in [0,1]^n$ como:

$$A_{n+k}\left(\xi^{n}_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x))\right) = A_n(x)$$

La siguiente proposición analiza la relación que existe entre los diferentes órdenes de las familias estrictamente estables.

Proposition 4.1. *Sea $\{A_n\}_n$ una familia simétrica estrictamente estable. Entonces, $\{A_n\}$ es una familia estrictamente estable de orden k para cualquier $k \geq 2$.*

Dem. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO simétrica estrictamente estable, y sea $k \geq 2$. Además, sea x un elemento de $[0,1]^n$. Entonces, tomando en cuenta que $\{A_n\}_n$ es una familia estrictamente estable, se tiene que:

$$A_n(x) = A_{n+1}(x,A_n(x)) = A_{n+2}(x,A_n(x),A_{n+1}(x,A_n))$$

$$= A_{n+2}(x,A_n(x),A_n(x)) = \ldots A_{n+k}(x,A_n(x),\ldots,A_n(x)),$$

se concluye la demostración.

Se observa que la situación opuesta no es necesariamente verdadera. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO definida como:

$$A_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} Max\{x_1,\ldots,x_n\} & si\ n = 2m \\ Min\{x_1,\ldots,x_n\} & si\ n = 2m+1 \end{cases}$$

Es fácil de ver que $\{A_n\}_n$ es una familia estrictamente estable de orden 2, pero (como se muestra en [16]), $\{A_n\}_n$ no es una familia estrictamente estable de orden 1.

Corolario 1 Las FAOs

- $\{Min_n(x_1,\ldots,x_n) = Min\{x_1,\ldots,x_n\} \forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{Max_n(x_1,\ldots,x_n) = Max\{x_1,\ldots,x_n\} \forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{Av_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1,n} \frac{x_i}{n} \forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{G_n(x_1,\ldots,x_n) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^n \forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{H_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1,n} x_i} \forall n \in \mathbb{N}\}$

son familias estrictamente estable de cualquier orden.

Dem. Todas estas familias son estrictamente estables (ver [16] para más detalle), y en base a la Proposición 1 también son familias estrictamente estables de orden k.

Se observa que una familia estrictamente estable de orden k en general no es estrictamente estable de orden 1 cuando $k \leq l$. En la siguiente proposición se establece un resultado para los casos en que esta implicación es verdadera.

Proposition 4.2. *Sea $\{A_n\}_n$ una familia simétrica estrictamente estable de orden k, y sea $k \leq l$. $\{A_n\}$ es una familia estrictamente estable de orden l si $l = mk$ para un entero m.*

Dem. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO simétrica estrictamente estable de orden k, sea m un entero positivo y sea $l = mk$. Dado $x \in [0,1]^n$, se tiene que:

$$A_{n+l}\left(x_1,\ldots,x_n,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{l\ times}\right) = A_n(x)$$

Como $\{A_n\}_n$ es una familia estrictamente estable de orden k, entonces se cumple que:

$A_n(x) = A_{n+k}(x,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{k\ times})$, que es igual a:

$$A_{n+2k}\left(\xi^{n+k}_{n+k,\ldots,n+2k}\left(\xi_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x)),A_{n+k}\left(\xi_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x))\right)\right)\right). \quad (1)$$

$A_n(x) = A_{n+k}\left(\xi_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x))\right)$, la expresión dada en (1) coincide con $A_{n+2k}(x,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{2k\ times})$. Por lo tanto, en estos casos se tiene una estabilidad estricta de orden k que implica una estabilidad estricta de orden $2k$. Siguiendo con esta secuencia, se concluye que:

$A_n(x) = A_{n+mk}(x,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{mk\ times})$, y entonces el resultado es demostrado.

4.2 El caso no simétrico.

Para concluir este capítulo, se presenta un resultado que establece algunas condiciones entre diferentes órdenes de

FAOs estrictamente estables no simétricas.

Proposition 4.3. *Sea $\{A_n\}_n$ una j-L una FAO estrictamente estable $\forall j \in \{r_1,\ldots,r_k\}$. Entonces $\{A_n\}$ es una $r_1,r_2,\ldots,r_k$ familia estrictamente estable.*

Dem. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO j-L estrictamente estable para todo $j \in \{r_1,\ldots,r_k\}$. Sea $x \in [0,1]^n$ un vector n-dimensional, con $n > r_k - k$. Como $\{A_n\}_n$ es $r_1 - L$ una familia estrictamente estable, entonces se cumple lo siguiente:

$$A_n(x) = A_{n+1}\left(\xi^n_{r_1}(x, A_n(x))\right)$$

Pero como $\{A_n\}_n$ es una familia r_2-L estrictamente estable, la expresión aterior es igual a:

$$A_{n+2}\left(\xi^{n+1}_{r_2}\left(\xi^n_{r_1}(x,A_n(x)), A_{n+1}(\xi^n_{r_1}(x,A_n(x)))\right)\right),$$

la cual es igual a:

$$A_{n+2}\left(\xi^{n+1}_{r_2}\left(\xi^n_{r_1}(x,A_n(x)), A_n(x)\right)\right),$$

que a su vez coincide con:

$$A_{n+2}\left(\xi^n_{r_1,r_2}(x,A_n(x))\right).$$

Siguiendo un razonamiento similar, es posible demostrar de manera iterativa que $A_n(x)$ coincide con $A_{n+k}\left(\xi^n_{r_1,\ldots,r_k}(x,A_n(x))\right)$, con lo que se concluye la demostración.

Se observa que la situación opuesta no es necesariamente verdadera. Por ejemplo, la familia $\{A_n\}$ definida anteriormente como el máximo para $n = 2m$ y el mínimo para $n = 2m+1$ es una familia estrictamente estable de orden 2 para cualquier posición $r_1 < r_2$, pero no es una FAO r_1 o r_2 estrictamete estable.

5 GENERACIÓN DE PESOS CON DATOS PERDIDOS: Una aplicación de la Estabilidad.

Se introduce un ejemplo para ilustrar una interesante aplicación del concepto de estabilidad. Considere un curso de pregrado en el cual la evaluación final se calcula como; 30% para las evaluaciones parciales (3 evaluaciones de 10% cada una) y 70% para el exámen final (por lo que tenemos una media ponderada). Suponga que un estudiante realiza todas las evaluaciones excepto la primera, ya que se matriculó tarde en la asignatura. ¿Cómo se debe calcular su evaluación final de una manera justa y coherente con respecto al resto de sus compañeros de clase?. Esto constituye un problema de datos perdidos, y para nosotros una solución razonable es volver a ponderar la fórmula, por lo que los pesos de los elementos ponderados se aumentan proporcionalmente.

Recordemos una vez más que nuestro objetivo no es decidir cómo es el vector de pesos $w^4 = (w^4_1, w^4_2, w^4_3, w^4_4)$, sino que garantizar una cierta estabilidad o consistencia en el proceso de agregación con diferentes cardinalidades. Por ejemplo, será poco coherente para elegir $w^4 = (0.1, 0.1, 0.1, 0.7)$ cuando los datos sobre las cuatro evaluaciones mencionadas están disponibles, pero también elegir $w^3 = (0,8, 0.2, 0)$ cuando la primera evaluación tiene un valor perdido, ya que la importancia relativa de las pruebas es claramente diferente de una situación a otra. Desde el punto de vista de la coherencia, esta evaluación no será estable.

En primer lugar, centremos nuestra atención en la familia de la agregación de medias ponderadas. Esta familia $\{W_n, n \in \mathbb{N}\}$, se define a través de un vector de pesos $w^n = (w^n_1, ..., w^n_n) \in [0,1]^n$ en la cual se tiene que $W_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} w^n_i x_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} w^n_i = 1$ y $(x_1, ..., x_n) \in [0,1]^n \ \ \forall n$. En la FAO dada por la media ponderada, los pesos asociados a los elementos que serán agregados representan la *importancia* de cada uno de los elementos en el proceso de agregación. Por esta razón, la media ponderada es seguramente uno de los operadores de agregación más relevantes y usados en muchas áreas diferentes (por ejemplo, en estadísticas, en los problemas de representación del conocimiento, en lógica difusa, decisiones de multicriterio, en toma de decisiones, etc), y uno de los problemas más estudiados en todas estas áreas es cómo determinar estas importancias *o pesos*. La estabilidad de esta familia se ha estudiado desde un punto de vista en [16]. Sin embargo, como se observa más adelante, este estudio puede no ser directamente aplicable al problema de valores perdidos en los problemas de agregación.

El problema de datos perdidos aparece cuando un elemento específico de $x = (x_1, \ldots, x_n)$, x_i, es un valor faltante. En el ejemplo anterior es $n = 4$, la información es agregada a través de $W_4(x_1, \ldots, x_4) = \sum_{i=1,4} w^4_i x_i$, y la importancia de los cuatro criterios se ha establecido a través del vector $4-$dimensional $w^4 = \left(w^4_1, w^4_2, w^4_3, w^4_4\right) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.7)$. Ahora, considere una alternativa x que presenta los valores de $x = (sin\ informacin, 0.3, 1, 1)$. ¿Cuál deberá ser el operador de agregación A_3 a utilizar?

Si decidimos utilizar la función de agregación de medias ponderadas para $n = 3$ (i.e. $A_3 = W_3$), el problema es determinar el vector de pesos w^3. Una posibilidad es imponer que W_3 y W_4 satisfagan las condiciones de estabilidad estricta. Sin embargo, se observa que las diferentes condiciones de estabilidad estricta (L, R, $i-L$ or $j-R$ para diferentes posiciones$i$ y j) entregan diferentes posibilidades y soluciones para el vector w^3. Entonces, ¿qué restricciones de estabilidad se debe elegir?. Teniendo en cuenta que el $1-$ésimo valor x_1 es el que falta, parece razonable imponer la condición de estabilidad estricta L (o equivalentemente, el

4−R o 1−L), es decir,

$$W_4(\xi_4^3(x_1,x_2,x_3,W_3(x_1,x_2,x_3))) =$$

$$W_4(W_3(x_2,x_3,x_4),x_2,x_3,x_4) = W_3(x_2,x_3,x_4)$$

para cualquier x_2, x_3 y x_4 en $[0,1]$

Respecto del ejemplo anterior, estas condiciones se satisfacen si y sólo si $w^3 = (\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{7}{9})$. Se observa que este vector mantiene las proporciones relativas entre los pesos originales para los valores no perdidos en las posiciones 2, 3 y 4.

En el mismo ejemplo, la primera posición de la alternativa $x = (no\ evaluado, 0.3, 1, 1)$ es una valor perdido. Pero ¿cómo deberá ser la agregación si el valor que falta ocupa la segunda posición?. En general, la posición en la que aparecen los datos son relevantes para las FAOs no simétricas, si existe alguna información $x = (x_1,\dots,x_n)$ que tiene que ser agregada y se tiene un valor perdido x_j, para encontrar las relaciones que deben existir entre las funciones de agregación A_n y A_{n+1}, se debe imponer la j−L estabilidad estricta o equivalentemente la $(n-(j+1))$-R estabilidad estricta en toda la familia. A continuación se presenta una propuesta que entrega las condiciones suficientes para asegurar j−L estabilidad estricta de la familia $\{W_n\}_n$. Otra demostración de esta afirmación se encuentra en [2] y también en [9], en los que se entregan conclusiones similares cuando se tiene que resolver los problemas de datos perdidos ante la familia de medias ponderada.

Proposition 5.1. *Sea $w^n = (w_1^n,\dots,w_n^n) \in [0,1]^n, n \in \mathbb{N}$, una secuencia de pesos de una familia de medias ponderadas $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i^n = 1$ se satisface $\forall n \geq 2$. Entonces, la familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia j−L-estrictamente estable si y solo si la secuencia de pesos satisface:*

$$\begin{cases} w_k^n = (1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k = 1,\dots,j-1 \\ w_{k+1}^n = (1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k = j,\dots,n-1 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Dem.

Es importante notar que para una FAO de medias ponderadas genérica $\{W_n\}_{n\in N}$, la propiedad de j−L estabilidad estricta puede ser re-escrita $\forall x_1,\dots x_{n-1} \in [0,1]$ como:

$$\sum_{i=1}^{j-1}(w_i^n-(1-w_j^n)w_i^{n-1})x_i + \sum_{i=j}^{n-1}(w_{i+1}^n-(1-w_j^n)w_i^{n-1})x_i = 0$$

A partir de la ecuación anterior se concluye que la proposición se cumple.

5.1 Generalizando a un conjunto de datos perdidos.

A fin de concluir el estudio de operadores de agregación frente a valores perdidos desde el punto de vista de la estabilidad, a continuación se intenta extender los análisis anteriores a la situación en la cual existen más de un valor perdido. Suponga que se tienen valores perdidos en las posiciones $r < s$. Entonces se tiene:

$$x = (x_1,\dots,x_{r-1}, perdido, x_{r+1},\dots,x_{s-1}, perdido, x_{s+1},\dots,x_n).$$

Considerado la ecuación de $r-s$−L estabilidad estricta, es posible construir el operador de agregación A_{n-2} desde A_n para un n dado. Retomando el ejemplo de la evaluación del curso de pregrado para las cuatro pruebas. Se considera un estudiante que no tiene información en la segunda y tercera evaluación por inasistencia causada por enfermedad. Si se decide utilizar la media ponderada como función de agregación para $n = 2$ (i.e. $A_2 = W_2$), el problema en cuestión consiste en determinar el vector de pesos de w^2 y w^4 (que corresponde a las evaluaciones con información). Entonces, parece ser razonable imponer la condición de $2-3$-L estabilidad estricta a fin de encontrar los pesos asociados al operador de agregación W_2 i.e, para cualquier x_1, x_2 en $[0,1]$:

$$W_4(x_1,W_2(x_1,x_2),W_2(x_1,x_2),x_2) = W_2(x_1,x_2)$$

Por convención notacional, se denota por x_1 al valor que ocupa la primera variable y por x_2 al valor de la cuarta variable, por lo que el vector asociado es $x = (x_1, perdido, perdido, x_2)$. Entonces, la condición anterior se satisface si y sólo si $w^2 = (\frac{1}{8},\frac{7}{8})$. Se observa que este vector mantiene las proporciones relativas entre los pesos originales para los valores no perdidos de las posiciones 1 y 4.

Como se muestra más adelante para la estabilidad estricta de orden 1, se analizan las condiciones que la familia de pesos debiera satisfacer para garantizar la estabilidad esticta de orden 2 de la FAO de medias ponderadas. Será posible establecer la relación que debe existir entre pesos de diferentes dimensiones a fin de construir un proceso de agregación consistente bajo el problema de existencia de valores perdidos en más de una variable.

Proposition 5.2. *Sea $w^n = (w_1^n,\dots,w_n^n) \in [0,1]^n, n \in N$ una secuencia de pesos de una familia de medias ponderadas $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que verifica $\sum_{i=1}^{n} w_i^n = 1\ \forall n \geq 2$. Entonces, la familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia r_1-r_2−L estrictamente estable si y sólo si la secuencia de pesos satisface:*

$$\begin{cases} w_i^{n+2} = (1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n) & i = 1,\dots,r_1-1 \\ w_{i+1}^{n+2} = (1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n) & i = r_1,\dots,r_2-1 \\ w_{i+2}^{n+2} = (1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n) & i = r_2,\dots,n \end{cases}$$

$\forall n \geq r_2 - 2 \in \mathbb{N}$.

Dem. Notar que para una FAO de medias ponderadas genérica $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con pesos w^n, $n\in\mathbb{N}$, la propiedad de r_1-r_2-L estabilidad estricta puede ser re-escrita como:

$$0 = |\sum_{i=1}^{r_1-1} x_i\left(w_i^{n+2}-(1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n)\right)+\dots$$

$$\dots\sum_{i=r_11}^{r_2-1} x_i\left(w_{i+1}^{n+2}-(1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n)\right)+$$

$$+\sum_{i=r_2}^{n} x_i\left(w_{i+2}^{n+2}-(1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n)\right)|$$

.

A partir de la ecuación anterior se concluye que la proposición se satisface.

Proposition 5.3. *Sea $w^n=(w_1^n,...,w_n^n)\in[0,1]^n, n\in\mathbb{N}$ una secuencia de pesos de la familia de medias ponderadas $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i^n=1$ se satisface $\forall n\geq 2$. Entonces, la familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia $r_1,\dots,r_k-L$ estrictamente estable si y sólo si la secuencia de pesos satisface:*

$$w_{i+f}^{n+k}=(1-\sum_{v=1}^{k} w_{r_v}^{n+k})\cdot(w_i^n),$$

para $f=0,\dots,k$ y $i=r_f,\dots,r_{f+1}-1$, donde $r_0=1$ y $r_{k+1}=n+1$ por conveniencia notacional.

Dem. Similar a la demostración de la Proposición 6.

A fin de extender las propiedades anteriores a una clase más general de FAO, a continuación se analiza la estabilidad estricta de orden k para transformaciones de una FAO original, para lo cual primero se introduce las siguientes notaciones y definiciones.

Definition 5.1. *Sea $f:[0,1]\to A$ una función inyectiva y continua, y sea $\{\phi_n : A\to A,\ n\in\mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación definida en el dominio A. Entonces, la familia de operadores de agregación transformada $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es definida como:*

$$M_f^{\phi_n}(x_1,\dots,x_n)=f^{-1}\left(\phi_n\left(f(x_1),\dots,f(x_n)\right)\right)$$

Se observa que si f es la funcion identidad, entonces la familia transformada coincide con la familia original. Si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la media o la media ponderada, entonces $M_f^{\phi_n}$ es llamada media cuasi-aritmética o media cuasi-aritmética ponderada. Las funciones dadas por la media cuasi-aritmética son muy importantes en muchos análisis de agregación. Algunas de las familias cuasi-aritméticas más comocidas son: la media geométrica (cuando $f(x)=log(x)$), la media armónica (cuando $f(x)=1/x$) y la media de la potencia (cuando $f(x)=x^p$), entre otras. Es importante remarcar que algunas de las familias de operadores de agregación más conocidas (por ejemplo el productorio $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), no pueden ser transformadas o extendidas directamente. Por ejemplo si $f(x)=5x$, entonces $A=[0,5]$, pero no es posible garantizar que para todo $n\in N$, $P_n(f(x_1),\dots,f(x_n))=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ pertenece al intervalo $[0,5]$.

En el resultado que se muestra a continuación es analizada la propiedad de estabilidad estricta de diferentes órdenes para transformaciones de FAO originales. Particularmente, se muestra que la estabilidad estricta de orden k se mantiene con la transformación.

Proposition 5.4. *Sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de operadores de agregación y su extensión o agregación transformada. Entonces $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in N}$ es una familia $r_1,\dots,r_kj-L$ estrictamente estable si y sólo si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia $r_1,\dots,r_kj-L$ estrictamente estable en el dominio de A.*

Dem.: Tomando en cuenta que:

$$M_f^{\phi_{n+k}}\left(\xi_{r_1,\dots,r_k}^{n}(x,M_f^{\phi_n}(x))\right)$$

puede ser re-escrito como:

$$f^{-1}\left(\phi_{n+k}\left(\xi_{r_1,\dots,r_k}^{n}(f(x),\phi_n(x))\right)\right),$$

la condición de estabilidad estricta $r_1,\dots,r_kj-L$ para la FAO $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser formulada como:

$$f^{-1}\left(\phi_{n+k}\left(\xi_{r_1,\dots,r_k}^{n}(f(x),\phi_n(x))\right)\right)=f^{-1}\left(\phi_n(f(x))\right).$$

Como f es una función inyectiva y contínua, una condición se satisface si y sólo si $\{\phi_n\}_n$ es una familia estictamente estable en A, con lo cual se concluye la demostración.

Corolario 2 La FAO dada por la media ponderada cuasi-aritmética es una familia $j-$L estrictamente estable si y sólo si la secuencia de sus pesos satisface $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} w_k^n=(1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k=1,\dots,j-1\\ w_{k+1}^n=(1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k=j,\dots,n-1\end{cases}$$

Corolario 3 La FAO dada por la media ponderada cuasi-aritmética es una familia $r_1,\dots,r_kj-$L estrictamente estable si y sólo si la secuencia de sus pesos satisface:

$$w_{i+f}^{n+k}=(1-\sum_{v=1}^{k} w_{r_v}^{n+k})\cdot(w_i^n),$$

para $f=0,\dots,k$ y $i=r_f,\dots,r_{f+1}-1$, donde $r_0=1$ y $r_{k+1}=n+1$ por convención notacional.

6 COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se presentan anteriores desarrollos de los autores, todos relativos a la relación que debe existir entre los miembros de una familia de operadores de agregación, a fin de comprender que ellos deben definir adecuadamente un todo *consistente*. En particular, se aplican las nociones básicas de L y R estabilidad estricta de una familia de operadores de agregación presentadas en [16, 11, 15], pero con un enfoque más general que ha llevado a la definición de la $i-$L y $j-$R estabilidad estricta. Además, se introduce la noción de estabilidad estricta del orden k, que constituye una nueva extensión de dichos conceptos, en tanto permite relacionar los operadores de diferentes cardinalidades de manera arbitraria. Por otra parte, todas estos conceptos se han analizado con mayor detalle a partir de la familia dada por la media ponderada y por la media ponderada cuasi-aritmética. Finalmente, se presenta una interesante aplicación de estos conceptos de estabilidad estricta y sus condiciones o restricciones, a fin de hacer frente a los problemas de datos perdidos en el contexto de operadores de agregación.

Agradecimientos

Referencias

[1] A. Amo, J. Montero, E. Molina. Representation of consistent recursive rules. European Journal of Operational Research 130, 29-53, 2001.

[2] G. Beliakov, S. James. Stability of weighted penalty-based aggregation functions. Fuzzy Sets and Systems 226, 1-18, 2013.

[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo. Aggregation Functions, a Guide to Practitioners (Springer-Verlag, Berlin, 2007)

[4] H. Bustince, B. de Baets, J. Fernández, R. Mesiar, J. Montero: A generalization of the migrativity property of aggregation functions. Information Sciences 191:76-85 (2012).

[5] T. Calvo, A. Kolesarova, M. Komornikova, R. Mesiar. Aggregation operators, properties, classes and construction methods. In T. Calvo et al. (Eds.): Aggregation Operators New Trends and Aplications (Physica-Verlag, Heidelberg, 3-104, 2002).

[6] T. Calvo, G. Mayor, J. Torrens, J. Suñer, M. Mas and M. Carbonell. Generation of weighting triangles associated with aggregation fuctions. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 8(4) 417-451, 2000.

[7] V. Cutello, J. Montero. Recursive families of OWA operators. Proceedings FUZZ-IEEE Conference (IEEE Press, Piscataway, 1994), 1137-1141.

[8] V. Cutello, J. Montero. Recursive connective rules. International Journal of Intelligent Systems 14, 3-20, 1999.

[9] J. Dujmovic. The Problem of Missing Data in LSP Aggregation. Advances in Computational Intelligence Communications in Computer and Information Science Volume 299, 2012, pp 336-346. (2012)

[10] D. Gómez, J. Montero. A discussion on aggregation functions. Kybernetika 40, 107-120, 2004.

[11] D. Gómez, K. Rojas, J.T. Rodríguez, J. Montero. Stability in Aggregation Operators. S. Greco et al. (Eds.): IPMU 2012, Part III, CCIS 299, pp. 317-325, 2012Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012.

[12] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar and E. Pap. Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2009).

[13] J. Montero, D. Gómez, H. Bustince. On the relevance of some families of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 158, 2429-2442, 2007.

[14] J. Montero, V. López, D. Gómez. The role of fuzziness in decision making. Studies in Fuzziness and Soft Computing 215, 337-349, 2007.

[15] K. Rojas, D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero. Some properties of consistency in the families of aggregation functions. Advances in Intelligent and Soft Computing 107:169-176 (P. Melo-Pinto, P. Couto, C. Serodio, J. Fodor, B. De Baets, Eds.) Springer, Berlin (2011).

[16] K. Rojas, D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero. Strict Stability in Aggregation Operators. Fuzzy sets and Systems 228, 44-63, 2013.

[17] K. Rojas, D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero. A. Valdivia, F. Paiva. Development of child's home environment indexes based on consistent families of aggregation operators with prioritized hierarchical information. Fuzzy sets and Systems 2013. DOI: 10.1016/j.fss.2013.06.007

[18] R.R. Yager and A.Rybalov. Nonconmutative self-identity aggregation. Fuzzy Sets and Systems, 85:73-82, 1997.