

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
Departamento de Geometría y Topología



TESIS DOCTORAL

**Topología lineal a pedazos, transformaciones periódicas en  
esferas homológicas y el invariante de Rohlin**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Lucía Contreras Caballero**

DIRECTOR:

**José María Montesinos Amilibia**

Madrid, 2015

Lucía Contreras Caballero

TP  
1980  
042



\* 5 3 0 9 8 5 3 0 9 X \*  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

X-53-166917-2

TOPOLOGIA LINEAL A PEDAZOS. TRANSFORMACIONES  
PERIODICAS EN ESFERAS HOMOLOGICAS  
Y EL INVARIANTE DE ROHLIN

Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Universidad Complutense de Madrid  
1980



BIBLIOTECA

© Lucía Contreras Caballero  
Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1980  
Xerox 9200 XB 480  
Depósito Legal: M-8922-1980

Autora: LUCIA CONTRERAS CABALLERO.

TESIS DOCTORAL : TOPOLOGIA LINEAL A PEDAZOS. TRANSFORMACIONES  
PERIODICAS EN ESFERAS HOMOLOGICAS Y EL  
INVARIANTE DE ROHLIN.

Director : José María Montesinos.

Profesor Agregado de la Facultad de Ciencias de la  
Universidad de Zaragoza.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.  
Facultad de Ciencias Matemáticas.  
Departamento de Geometría y Topología.

Año 1979-80.

II

A mis Padres.

INDICE

INTRODUCCION.....	1
CAPITULO 1.....	5
1. Definiciones y Resultados Previos.....	6
2. Puntos Fijos de Difeomorfismos en Variedades Paracompactas.....	10
CAPITULO 2.....	16
1. Teorema 2.....	17
2. Teorema 3.....	23
APENDICE.....	27
BIBLIOGRAFIA.....	30



INTRODUCCION

INTRODUCCION.

R. Kirby y L. Siebenmann demostraron la existencia de variedades topológicas cerradas no lineales a pedazos de dimensión mayor o igual que cinco, [18]. Esto quiere decir que esas variedades no son topológicamente equivalentes a un complejo simplicial en el que el halo de cada vértice sea una esfera. Pero se ignora si toda variedad topológica es homeomorfa a un complejo simplicial [29]. La existencia de una  $Z$ -esfera homológica tridimensional  $M$  con invariante de Rohlin  $\gamma^2$  y tal que  $M \# M$  bordea una variedad acíclica probaría que toda variedad topológica de dimensión mayor o igual que cinco es homeomorfa a un complejo simplicial [9].

El Invariante de Rohlin está definido para  $Z_2$ -esferas homológicas  $M$  [27]. Si  $M$  es la frontera de una variedad tetradimensional  $W^4$  tal que  $H_1(W^4, Z_2) = 0$  y la forma cuadrática de intersección en  $H_2(W^4)/\text{Tor}$  es par, el invariante de Rohlin de  $M$ :  $\mu M$  es

$$\mu M = - \frac{\sigma W^4}{16} \pmod{1}.$$

donde  $\sigma W^4$  es la signatura de la forma cuadrática. [5].

El invariante  $\mu$  es independiente de la variedad  $W^4$  debido al teorema de Rohlin, [27]. Es también un invariante de  $H$ -cobordismo.

Una  $Z_2$ -esfera homológica  $M$  simétrica (es decir, con un autohomeomorfismo que invierte la orientación) e invariante de Rohlin  $1/2$  daría la solución al problema de triangulación de variedades topológicas de dimensión mayor o igual que cinco, ya que esta

variedad  $M$  verificaría  $M \# M = M \# -M = \partial[(M - B^3) \times I]$  y evidentemente  $(M - B^3) \times I$  es acíclica. Esto explica el interés de obtener el invariante de Rohlin de variedades simétricas, entre las que se encuentran los recubridores cíclicos y dihedrales con grupo  $D_{2p}$  de esferas homológicas tridimensionales simétricas, ramificadas sobre un nudo anfiqueiral.

No se pierde generalidad al estudiar el invariante de Rohlin de esferas homológicas simétricas cuyo autohomeomorfismo que invierte la orientación es periódico, debido a que en toda variedad hiperbólica todo autohomeomorfismo es isotópico a una isometría de la variedad [20],[34] y las isometrías de variedades hiperbólicas son periódicas [19], y a que la clase de variedades hiperbólicas es muy amplia como se deduce de los resultados de W. Thurston, [32].

J. S. Birman [2], W. C. Hsiang y P. Pac [13], y D. Galewski y R. Stern [10], separadamente, han probado el Teorema 1:

Teorema 1 :

Sea  $M$  una  $Z_2$ -esfera homológica tridimensional con un autodifeomorfismo de período 2 (una involución) que invierte la orientación. Entonces  $\mu M = 0$ .

El Teorema fundamental de esta Tesis es el Teorema 3:

Teorema 3 :

Sea  $M$  una  $Z$ -esfera homológica tridimensional con un autodifeomorfismo periódico de período mayor que 2, que invierte la orientación. Entonces  $\mu M = 0$ .

Un Corolario (Corolario 3) de ello es la anulación del invariante  $\mu$  de esferas homológicas hiperbólicas simétricas.

Resultado posterior de L. Siebenmann, [30], es la anulación del invariante de Rohlin de esferas homológicas primas simétricas suficien-

temente largas. La demostración utiliza el Corolario 3, un Teorema de W. Neumann [35] sobre la anulación del invariante de Rohlin de variedades de Seifert simétricas y el hecho de que las variedades suficientemente largas admiten una familia de toros que descompone la variedad en piezas hiperbólicas y en piezas de Seifert.

Los resultados y demostraciones originales de esta Tesis son los Teoremas 2 y 3, el Lema 1 y los Corolarios 1, 2 y 3.

Expreso mi agradecimiento a A. J. Casson (Trinity College, Cambridge) y a mi director de Tesis J. M. Montesinos.

Quiero recordar aquí con cariño a mi hermana Isabel, quien ha mecanografiado esta Tesis.

CAPITULO 1.

1. Definiciones y Resultados Previos.
2. Puntos Fijos de Difeomorfismos en Variedades Paracompactas.

### 1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS.

Se dice que una variedad  $M^n$  es una  $Z_2$ -esfera homológica si tiene los mismos grupos de homología con coeficientes  $Z_2$  que la esfera euclídea  $S^n$ .

Veamos una definición equivalente cuando  $M^3$  es orientable y conexa: En este caso, el Teorema de Dualidad de Poincaré dice que

$H_1(M^3, Z_2) \cong H_2(M^3, Z_2)$ , por lo que entonces una condición necesaria y suficiente para que  $M^3$  sea una  $Z_2$ -esfera homológica es  $H_1(M^3, Z_2) = 0$ .

Se dice que una variedad  $M^n$  es acíclica si tiene los mismos grupos de homología con coeficientes enteros que una bola euclídea  $B^n$ .

Un nudo en una  $Z_2$ -esfera homológica es un par  $(M, K)$ ,  $S^1 \cong K \subset M$ .

El nudo está determinado por la clase de isotopía global de la aplicación  $S^1 \rightarrow M$  que es un homeomorfismo sobre su imagen.

Un nudo  $(M, K)$  se llama +(-) anfiqueiral si existe un homeomorfismo  $h$  de  $M$  que invierte la orientación tal que  $(M, K)$  es equivalente a  $(-M, h(K))$  (ó a  $(-M, -h(K))$ ).

Los ejemplos más usuales de nudos anfiqueirales se dan en  $S^3 = R^3 \cup \infty$  cuando se considera como  $h$  la simetría respecto a una esfera  $S^2 = R^2 \cup \infty$  (corrientemente llamada la simetría respecto a un espejo). Uno de estos nudos es el nudo ocho:

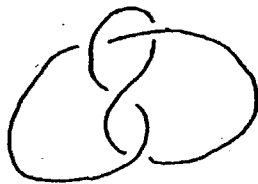


Fig. 1

Dado un nudo en una  $Z_2$ -esfera homológica  $M$ , si  $K$  es nulhomólogo en  $M$ , existe una superficie orientable y conexa  $F$  sumergida en  $M$  tal que  $K = \partial F$ . A esta superficie se le llama Superficie de Seifert

del nudo  $K$ . [6], [26], [11].

La orientabilidad de una esfera homológica y de la Superficie de Seifert de un nudo en ella permite orientar coherente y continuamente las fibras de un fibrado entorno regular de  $F$ , homeomorfo a  $F \times I$ . Esta orientación de las fibras da la posibilidad de desplazamiento de las curvas de  $F$  en el sentido positivo o en el sentido negativo de orientación de las fibras, obteniéndose así curvas cerradas que no intersecan  $F$ . Dada una curva simple cerrada  $c$  en  $F$ , llamamos  $c^+$  a la obtenida desplazando  $c$  en el sentido positivo y  $c^-$  a la obtenida desplazando  $c$  en el sentido negativo.

Una Matriz de Seifert  $A = (a_{ij})$  de un nudo  $K$  viene determinada por una Superficie de Seifert  $F$  del nudo  $K$  y una base  $\{c_k\}$   $k \in \{1, \dots, 2g\}$  de  $H_1(F)$ . Podemos suponer que las  $c_k$  son curvas simples cerradas y entonces  $a_{ij} = lk(c_i^+, c_j)$ , (número de intersección de una superficie de Seifert de  $c_i^+$  con  $c_j$ ).

Las distintas matrices de Seifert correspondientes a un nudo  $K$  son  $S$ -equivalentes. [24], [33], [11].

Dada  $A$ , una matriz de Seifert del nudo  $K$ , se define la Signatura del nudo  $K$  :  $\sigma K$  como la signatura de la matriz  $A \mp A'$  ( $A'$  indica traspuesta de  $A$ ). La Signatura del nudo es un invariante del nudo, independiente de la Superficie de Seifert elegida. [26].

La literatura sobre signaturas es abundante. [11].

Un cambio de orientación de la variedad  $M$  da lugar a un cambio de orientación de las fibras del entorno regular de  $F$  y a un cambio de signo en los números de enlace. Como consecuencia si  $A$  es una matriz de Seifert de un nudo  $(M, K)$ ,  $-A'$  es una matriz de Seifert del nudo  $(-M, K)$ .

Un cambio de orientación de  $K$  da lugar a un cambio de orientación de  $F$  y por tanto a un cambio de orientación de las fibras de un entorno regular de  $F$ , por lo que dada una base  $\{[c_k^+]\}_{k \in \{1, \dots, 2g\}}$  de  $H_1(F)$ ,  $c_i^+$  se transforma en  $c_i^-$  y recíprocamente. Como consecuencia si  $A$  es una matriz de Seifert del nudo  $(M, K)$ ,  $A'$  es una matriz de Seifert del nudo  $(M, -K)$ .

La Anulación de la Signatura de un Nudo Anfiqueiral se sigue de las consideraciones anteriores que muestran que si  $A$  es una matriz de Seifert de un nudo  $\pm (\delta -)$  anfiqueiral,  $-A'(\delta - A)$  es otra matriz de Seifert de  $K$ ; entonces  $\sigma K = \sigma(A + A') = \sigma(-A - A')$  prueba  $\sigma K = 0$ .

De gran importancia en esta Tesis van a ser las variedades recubridores cíclicos ramificados. Sus definiciones y propiedades pueden verse por ejemplo en [28], [11], [15].

Nos limitamos aquí a recordar que el Recubridor Cíclico de  $m$  hojas de una variedad  $M^n$  ramificado sobre una subvariedad  $L^{n-2}$  de  $M^n$  tal que  $H_1(M^n - L^{n-2}) \supset \mathbb{Z}$  y  $[L^{n-2}] = 0 \in H_{n-2}(M^n, \partial M^n)$  se obtiene considerando una subvariedad escisora  $F^{n-1}$  de  $L^{n-2}$  en  $M^n$  ( $[F^{n-1}] = [L^{n-2}]$ ) y pegando en orden cíclico  $m$  copias de  $M^n$  cortadas a lo largo de  $F^{n-1}$ . Los grupos de homología de tales recubridores cuando  $M^n$  es una esfera homológica tridimensional se encuentran calculados en [11].

También son de importancia en esta Tesis las Formas Cuadráticas de las variedades de dimensión par, orientables.

Sea  $M$  una variedad orientada de dimensión  $2m$ ; dos representantes de elementos de  $H_m(M)$  pueden colocarse en posición general en  $M$ , de forma que sus intersecciones sean sólo puntos. Dos sistemas de referencia de estos representantes en uno de los puntos de intersección determinan una orientación de  $M$ . Si esta orientación coincide con la dada en  $M$ , asociamos a este punto un signo positivo, en caso

contrario le asociamos un signo negativo. El número de signos + menos el número de signos - así obtenidos es el número de intersección de estos dos elementos de  $H_m M$  representados. Es fácil comprobar que este número es aditivo y distributivo respecto al producto por un entero. Por ello define una forma cuadrática  $Q$  en  $H_m(M)$  con valores en  $Z$  que se llama Forma Cuadrática de la variedad  $M$ .

La signatura de esta forma cuadrática se llama signatura de la variedad.

Se dice que la forma cuadrática  $Q$  de la variedad es par si para cada elemento  $[x] \in H_m(M)$  se verifica  $Q([x], [x]) \in 2Z$ .

Hemos dicho en la Introducción, al definir el Invariante de Rohlin, que éste era un invariante de H-Cobordismo. Un H-Cobordismo entre dos variedades  $M_1^n$  y  $M_2^n$  es una variedad  $W^{n+1}$  tal que  $\partial W^{n+1} = M_1^n \sqcup M_2^n$  y las inclusiones  $i_k : M_k^n \rightarrow W^{n+1}$  son equivalencias de homotopía.

2. PUNTOS FIJOS DE DIFEOMORFISMOS  
EN VARIETADES PARACOMPACTAS.

En este capítulo describimos algunas de las propiedades conocidas del conjunto de puntos fijos de un autodifeomorfismo periódico  $h$  en una variedad paracompacta  $M$ . Estas propiedades se utilizarán en la demostración del Teorema 3.

Proposición 1.-

El conjunto de puntos fijos de un autodifeomorfismo periódico  $h$  de una variedad  $M$ ,  $\text{Fix } h$ , es una subvariedad de  $M$ .

Demostración :

Por ser  $M$  paracompacta existe una métrica Riemanniana en ella para la cual  $h$  es una isometría. La aplicación exponencial  $\exp$  da entonces cartas de entornos del origen en  $\mathbb{R}^n$  en entornos de cada punto. Además, si  $\tau h$  es la aplicación inducida por  $h$  en  $\tau M$  y  $v$  un vector del entorno del origen correspondiente a una carta, se verifica

$$\exp(\tau h(v)) = h(\exp(v)).$$

De la igualdad  $h^n = 1$ , se deduce  $(\tau h)^n = 1$ , es decir,

$$(\tau h - 1)(\tau h^{n-1} + \tau h^{n-2} + \dots + 1) = 0.$$

Para cada punto  $p$  la restricción de  $\tau_p h$  al subespacio propio  $L_p$  de  $\tau_p M$  correspondiente al valor propio 1 (puede ser trivial) es la identidad. Evidentemente, la aplicación exponencial da una carta de la intersección del entorno del origen que da la carta alrededor de  $p$  y  $L_p$  en  $\text{Fix } h$ . Por ello  $\text{Fix } h$  es una subvariedad de  $M$ . c. q. d.

Si  $M$  es cerrada la construcción de las cartas muestra que  $\text{Fix } h$  es también cerrada.

Si  $M$  es tridimensional y cerrada y  $h \neq 1$ ,  $\dim(\text{Fix } h) \leq 2$  y  $\text{Fix } h$  es cerrada; por ello  $\text{Fix } h$  queda completamente determinada por su dimensión, característica y número de componentes conexas. Estas propiedades vienen determinadas por la conservación o inversión de la orientación de  $M$  por  $h$ :

Proposición 2.-

La dimensión de la subvariedad de puntos fijos de un autohomeomorfismo periódico  $h$  de una variedad tridimensional  $M$  es  $-1$  ó  $1$  si  $h$  conserva la orientación y  $0$  ó  $2$  si  $h$  invierte la orientación.

Demostración :

Es conocido que toda variedad tridimensional admite una triangulación combinatoria, [22]. Si  $h$  es simplicial y  $p$  es un punto fijo de  $h$ , la estrella simplicial del punto  $p$  es una bola  $B^3$  tal que  $h(B^3) = B^3$  ya que símlices se transforman en símlices y el punto  $p$  es fijo.

Es conocido que si  $h$  no es simplicial,  $h$  puede aproximarse tanto como se quiera por una aplicación lineal a pedazos homotópica a  $h$  con el mismo conjunto de puntos fijos y las mismas propiedades locales [14]. Por ello podemos suponer que  $h$  es simplicial y que existe esta bola  $B^3$  tal que  $h(B^3) = B^3$  y  $h(\partial B^3) = \partial B^3$ . Los autohomeomorfismos periódicos de  $S^2$  están clasificados salvo conjugación. Cfr. [25]. Son rotaciones, simetrías o aplicaciones antipodales, siendo entonces el conjunto de puntos fijos del autohomeomorfismo dos puntos, una circunferencia y el vacío respectivamente.

Debido a que  $h$  es simplicial los correspondientes conjuntos de puntos fijos de  $h$  en  $B^3$  son un segmento, un círculo o únicamente el punto dado  $p$ . Es evidente que en el primer caso  $h$  conserva la

orientación mientras que en el segundo y tercer casos  $h$  invierte la orientación, quedando así demostrada la Proposición 2.

Proposición 3.-

La variedad de puntos fijos de un autodifeomorfismo periódico  $h$  de una  $Z_2$ - esfera homológica tridimensional es vacía o varias  $S^1$  si  $h$  conserva la orientación y dos puntos ó una  $S^2$  si  $h$  invierte la orientación.

Demostración :

Puesto que la característica clasifica las variedades cerradas y conexas de dimensión menor que tres, vamos a determinar la característica de  $\text{Fix } h$  por medio del Teorema del Índice de Lefschetz-Hopf, lo cual junto con las Proposiciones 1 y 2 prueba la Proposición 3.

Definimos el índice de una aplicación  $h$  definida en un abierto  $V$  de  $R^n$  con valores en  $R^n$  y  $\text{Fix } h$  compacto (según [4].) considerando la aplicación

$$1-h : (V, V-\text{Fix } h) \longrightarrow (R^n, R^n-0)$$

$$1-h(x) = x - h(x).$$

Establecemos el índice de  $h$  :  $I_h$  como el grado de  $1-h$ , es decir el número que da

$$(1-h)_* (O_{\text{Fix } h}) = I_h O_0$$

donde  $O_F$  es el generador de  $H_n(V, V-F)$  y  $O_0$  es el generador de  $H_n(R^n, R^n-0)$ .

El índice se puede definir también para una aplicación  $h:U \rightarrow Y$  donde  $U$  es un E. N. R. e  $Y$  es un espacio topológico si  $\text{Fix } h$  es compacto : la aplicación  $h$  admite una factorización  $h = \beta\alpha$  donde  $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y$  y  $V$  es abierto de algún espacio euclídeo  $R^n$ ; el índice  $I_h$  se define entonces como el índice  $I_{\alpha\beta}$  de la aplicación

$\beta^{-1}(U) \xrightarrow{\alpha} V \subset R^n$ . Se demuestra que  $I_h$  es independiente de

la factorización de  $h$ .

El Teorema del Índice de Lefschetz-Hopf establece [4]:

Sea  $Y$

un E. N.  $\mathbb{R}$ ,  $K$  un subconjunto compacto de  $Y$  y  $h : Y \rightarrow K \subset Y$  una aplicación. Entonces

- i) El conjunto de puntos fijos de  $h$  es compacto.
- ii) La aplicación  $(h|_K)_* : H(K, \mathbb{Q}) \rightarrow H(K, \mathbb{Q})$  tiene rango finito.
- iii) El valor del índice  $I_h$  es

$$I_h = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \sum_{j=1}^i |(h|_K)_* (\sigma_i^j)|_j$$

donde  $\sigma_i^j$  son una base de  $H_i(K, \mathbb{Q})$  y  $(h|_K)_*$  la aplicación lineal inducida por  $h$  en los grupos de homología.

Vemos entonces que si  $K = Y$  es una esfera homológica el índice  $I_h$  puede ser cero o dos según sea la dimensión de  $K$  y según  $h$  conserve o invierta la orientación. Por otro lado  $I_h = I_{h|_{\text{Fix } h}}$  y por ser  $h|_{\text{Fix } h} = 1$ ,  $I_{h|_{\text{Fix } h}} = \chi(\text{Fix } h)$ , (característica de  $\text{Fix } h$ ).

La Proposición 3 se sigue ahora trivialmente del párrafo anterior cuando la dimensión de  $M$  es tres y  $h$  no es la identidad.

Proposición 4 :

Sea  $M$  una  $Z$ -esfera homológica tridimensional y  $h$  un difeomorfismo periódico de  $M$ . El conjunto  $\text{Fix } h$  es vacío o está formado por dos puntos, una curva simple cerrada o una esfera ordinaria [3].

La demostración de la Proposición 4 para un homeomorfismo periódico de  $S^3$  se encuentra en [3] y es muy complicada.

Damos aquí el esquema de la demostración que sigue Floyd en [7] cuando  $h$  es un homeomorfismo de período primo de una  $Z_p$ -esfera homológica. Luego vemos como este resultado puede aplicarse a un autodifeomorfismo  $h$  cuando el período de  $h$  es cualquiera.

Sea  $X$  una  $Z_p$ -esfera homológica con una  $Z_p$  acción. Sea  $X/Z_p$  el espacio cociente y  $q$  la aplicación cociente. Denotamos por  $A$  el haz  $\bigcup_y H^0(q^{-1}(y), Z_p)$ , donde  $y \in X/Z_p$  y denotamos por  $A_F$  la restricción de  $A$  a  $F$ .

La sucesión espectral de Leray [7], muestra que

$$H^p(X, Z_p) = H^p(X/Z_p, A).$$

Sea  $\rho$  el endomorfismo  $1-g$  de  $A$  donde  $g$  es un generador de  $Z_p$  y  $\bar{\rho}$  el endomorfismo  $1+g+\dots+g^{p-1}=(1-g)^{-1}$ , entonces [7], lema 3.1 prueba que  $A/\rho A = \bar{\rho}A = X/G \times Z_p$  y que  $A/\bar{\rho}A = \rho A$ .

Por ello las sucesiones

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{\rho}A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \rho A \otimes A_F \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \rho A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \bar{\rho}A \otimes A_F \longrightarrow 0 \end{array}$$

son exactas y también lo son las sucesiones de cohomología:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \bar{\rho}A) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, A) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \rho A) \otimes H^n(X/Z_p, A_F) \longrightarrow \\ \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \rho A) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, A) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \bar{\rho}A) \otimes H^n(X/Z_p, A_F) \longrightarrow \end{array}$$

es decir, las sucesiones

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \bar{\rho}A) & \longrightarrow & H^n(X, Z_p) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \rho A) \otimes H^n(F, Z_p) \longrightarrow \\ \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \rho A) & \longrightarrow & H^n(X, Z_p) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \bar{\rho}A) \otimes H^n(F, Z_p) \longrightarrow \end{array}$$

De las sucesiones exactas :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^n(X, Z_p) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \rho A) \otimes H^n(F, Z_p) & \longrightarrow & H^{n+1}(X/Z_p, \bar{\rho}A) \\ \longrightarrow & H^n(X, Z_p) & \longrightarrow & H^n(X/Z_p, \bar{\rho}A) \otimes H^n(F, Z_p) & \longrightarrow & H^{n+1}(X/Z_p, \rho A) \end{array}$$

se deduce :

$$[n] \quad \dim H^n(X/Z_p, \rho A) + \dim H^n(F, Z_p) \leq \dim H^{n+1}(X/Z_p, \bar{\rho}A) + \dim H^n(X, Z_p)$$

$$[n+1] \quad \dim H^n(X/Z_p, \bar{\rho}A) + \dim H^n(F, Z_p) \leq \dim H^{n+1}(X/Z_p, \rho A) + \dim H^n(X, Z_p)$$

Sumando las sucesiones [n] y las [n+1] a partir de un  $i$ ,

obtenemos :

$$\dim H^n(X/Z_p, \rho A) + \sum_{n \leq i} \dim H^i(F, Z_p) \leq \sum_{n \leq i} \dim H^i(X, Z_p)$$

Por ser  $\rho^A$  el haz constante  $(X/Z_p \times Z_p)_{X/Z_p - F}$ ,

$$H^n(X/Z_p, \rho^A) = H^n(X/Z_p - F; Z_p)$$

lo que permite escribir la expresión anterior de la forma :

$$\dim H^n(X/Z_p - F; Z_p) + \sum_{n \leq i} \dim H^i(F; Z_p) \leq \sum_{n \leq i} \dim H^i(X, Z_p)$$

Si  $X$  es una  $Z_p$ -esfera homológica  $m$ -dimensional, estos sumatorios son finitos.

Cogiendo  $n < 0$ , obtenemos :

$$\sum_{i \geq 0} \dim H^i(F, Z_p) \leq \sum_{i \geq 0} \dim H^i(X, Z_p)$$

desigualdad que muestra que  $F$  ha de ser una  $Z_p$ -esfera homológica  $r$ -dimensional para algún  $r$ .

Consideremos ahora un difeomorfismo periódico  $h$  con período  $n$  no primo de una  $Z_2$ -esfera homológica tridimensional  $X$ . El Teorema del Índice de Lefschetz-Hopf dice que por ser  $\text{Fix } h$  una subvariedad de  $X$ ,  $\text{Fix } h$  está formado por  $S^0$ ,  $S^2$ , varias  $S^1$  o es vacío, pero teniendo en cuenta que  $n = n'p$  para algún primo  $p$  y que  $\text{Fix } h \subset \text{Fix } h^{n'}$ , siendo  $h^{n'}$  de período primo, la Teoría de Smith dice que si  $\text{Fix } h$  es unidimensional  $\text{Fix } h$  puede ser sólo una  $S^1$ . Con esto hemos demostrado la Proposición 4 cuando  $h$  es un auto-difeomorfismo periódico de una  $Z$ -esfera homológica tridimensional  $M$ .

CAPITULO 2.

1. Teorema 2.
2. Teorema 3.

Este Capítulo está formado por los resultados originales de esta Tesis.

### 1. TEOREMA 2

#### Teorema 2.-

Sea M una  $Z_2$ -esfera homológica tridimensional orientable y sea L un enlace -anfiqueiral homólogo a cero en M. Sea  $L(m)$  un recubridor cíclico de m hojas de M ramificado sobre L. Si  $L(m)$  es una  $Z_2$ -esfera homológica, entonces  $\mu L(m) = m\mu M$ .

#### Demostración.-

Construimos un bordismo entre  $L(m)$  y la unión disjunta de m copias de  $-M$ . Este bordismo verifica

- i)  $H_1(F(m); Z_2) = 0$ .
- ii) La forma cuadrática de intersección de  $H_2(F(m))/\text{Tor}$  es par de signatura nula :  $\sigma(F(m)) = 0$ .

Entonces el resultado se sigue de la igualdad

$$\mu L(m) - m\mu M = \mu(\partial F(m)) = \sigma(F(m)) = 0.$$

La construcción de  $F(m)$  es la siguiente : Por ser L nulhomólogo en M existe una superficie orientable F sumergida en M tal que  $L = \partial F$ . Consideramos  $F \subset M \approx M \times 0 \subset M \times I$  y empujamos, utilizando el collar frontera, F en  $M \times I$  a  $F'$  de forma que  $\partial F' = F' \cap \partial(M \times I)$ .

Mediante una sucesión de Mayer-Vietoris encontramos  $H_1(M \times I - F', Z)/\text{Tor} = Z$  lo cual indica que existe un recubridor cíclico de m hojas de  $M \times I$  ramificado sobre  $F'$ , correspondiente al núcleo del homomorfismo  $\pi_1(M \times I - F') \longrightarrow H_1(M \times I - F', Z)/\text{Tor} \longrightarrow Z_m$ . Llamamos  $F(m)$  a este recubridor que evidentemente verifica

$$\partial F(m) = L(m) \bigsqcup_1^m -M.$$

Podemos describir  $F(m)$  como lo hace Kauffman cuando M es una  $S^3$  [15]:

La variedad  $F \times I, 1/2 \subset M \times I$  es una variedad escisora [37] de  $F \times (1/2) \cup F \times [0, 1/2] = F'$ , por lo que  $F(m)$  se obtiene cortando  $M \times I$  a lo largo de  $F \times [0, 1/2] \subset M \times I$  y pegando  $m$  copias de  $M \times I$  cortadas, en orden cíclico.

Consideremos el fibrado normal  $N(F)$  de  $F$  en  $M$ . Tenemos  $N(F) \approx F \times [-1/2, 1/2]$ . Teniendo en cuenta que si identificamos  $F \times [0, 1/2] \times 0$  con  $F \times [0, -1/2] \times 0$  en  $M \times 0$  por la relación  $((x, t), 0) \sim ((x, -t), 0)$  obtenemos de nuevo  $M \times I$ , habiéndose transformado  $F \times [0, 1/2] \times 0$  y  $F \times [-1/2, 0] \times 0$  en una variedad isotopa en  $M \times I$  a  $F \times [0, 1/2]$  encontramos que  $F(m)$  puede obtenerse considerando  $m$  copias de  $M \times I$  e identificando en orden cíclico  $F \times [0, 1/2] \times 0$  en una copia con  $F \times [-1/2, 0] \times 0$  en la copia siguiente.

Para hallar los grupos de homología de  $F(m)$  observamos que  $F(m+1)$  puede obtenerse de  $F(m)$  y una copia de  $M \times I$ , cortando  $F(m)$  a lo largo de  $F \times I [-1/2, 1/2]$  una vez y pegando convenientemente la nueva copia de  $M \times I$ .

Así obtenemos una sucesión de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(F(m), Z_2) & \longrightarrow & H_2(F(m+1), Z_2) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ H_1(F \times I, Z_2) & \longrightarrow & H_1(F(m), Z_2) & \longrightarrow & H_1(F(m+1), Z_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de donde por inducción obtenemos  $H_1(F(m), Z_2) = 0$ .

$$H_2(F(m), Z_2) \approx \bigoplus_1^{m-1} H_1(F, Z_2).$$

Por ser  $F$  orientable, la última igualdad implica

$$H_2(F(m))/\text{Tor} \approx \bigoplus_1^{m-1} H_1(F).$$

donde el isomorfismo viene dado por la aplicación borde. Hallamos la forma cuadrática  $Q$  de intersección en  $H_2(F(m))/\text{Tor}$  por medio de este isomorfismo :

Llamemos  $F_c$  a la Superficie de Seifert de un lazo  $c$  en  $M$  y

$F_c^i, c^i$  a las copias de  $F_c, c$ , en la  $i$ -ésima copia de  $M \times OCM \times IC F(m)$ .

Llamemos  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m-1}$  a las inyecciones  $\phi_i: H_1(F) \rightarrow H_2(F(m))$

definidas por  $\phi_i[c] = F_c^i \cup F_c^{i+1}$ . Entonces el isomorfismo borde

es  $\phi_1$  y la forma cuadrática  $Q$  viene dada por

$$\phi_1[c] \cdot \phi_j[c'] = (F_c^i \cup F_c^{i+1}) \cdot (F_{c'}^j \cup F_{c'}^{j+1}) =$$

$$(F_c^i \times \gamma_2 \times \gamma_2) \cup (c^i \times \gamma_2 \times [0, \gamma_2]) \cup (c^{i+1} \times -\gamma_2 \times [0, \gamma_2]) \cup (F_c^{i+1} \times -\gamma_2 \times \gamma_2) \cdot$$

$$(F_{c'}^j \times \gamma_4) \cup (c'^j \times [0, \gamma_4]) \cup (c'^{j+1} \times [0, \gamma_4]) \cup (F_{c'}^{j+1} \times \gamma_4) =$$

$$(c^i \times \gamma_2) \cdot F_{c'}^j + (-c^{i+1} \times -\gamma_2) \cdot F_{c'}^j +$$

$$(c^i \times \gamma_2) \cdot (-F_{c'}^{j+1}) + (-c^{i+1} \times -\gamma_2) \cdot (-F_{c'}^{j+1}) =$$

$$= \begin{cases} -lk(c \times \gamma_2, c') & \text{si } i = j+1. \\ lk(c \times \gamma_2, c') + lk(c \times -\gamma_2, c') & \text{si } i = j. \\ -lk(c \times -\gamma_2, c') & \text{si } i+1 = j. \end{cases}$$

Un dibujo ilustrativo aunque no exacto debido a la disminución de dimensión es :

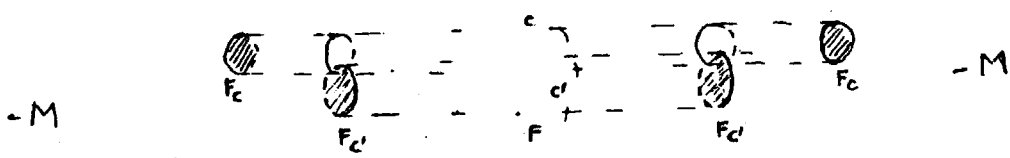


Fig. 2

Haciendo  $i=j$ ,  $c=c'$  obtenemos  $\phi_i [c] \cdot \phi_i [c] = 2lk(c \times \sqrt{2}, c)$  lo que muestra que la forma cuadrática es par.

Si  $\{ [c_k] \}_{k \in \{1, \dots, 2g\}}$  es una base de  $H_1(F)$ , donde  $g$  es el género de  $F$ ,  $\{ \phi_i [c_k] \}_{\substack{k \in \{1, \dots, 2g\} \\ i \in \{1, \dots, m-1\}}}$  es una base de  $H_2(F(m))/\text{Tor}$

y las expresiones obtenidas anteriormente dan la matriz  $B$  de la forma cuadrática  $Q$  :

$$B = \begin{pmatrix} A+A' & -A & & & 0 \\ -A' & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & -A & & \\ 0 & \dots\dots\dots & -A' & A+A' & \end{pmatrix}$$

donde  $A$  es la matriz de Seifert de  $L$  asociada mediante  $F$  y

$\{ [c_k] \}_{k \in \{1, \dots, 2g\}}$ .

La matriz  $B$  da una presentación de  $H_1(L(m))$  [11], por ello  $|B| = \text{orden } H_1(L(m))$ , es decir, si  $L(m)$  es una  $Z_2$ -esfera homológica  $Q$  es no singular.

Veamos ahora que la signatura de  $Q$  es nula.

Si el enlace  $L$  es -anfiqueiral respecto a un autohomeomorfismo  $h$  de  $M$  que invierte la orientación, el autohomeomorfismo  $h$  se eleva a un autohomeomorfismo  $\tilde{h}$  de  $L(m)$  que invierte la orientación.

Pegando dos copias de  $F(m)$  a lo largo de sus fronteras por medio de la identificación  $x \sim h(x)$  para cada  $x \in -M$  y  $x \sim \tilde{h}(x)$ , para cada  $x \in L(m)$  obtenemos el recubridor cíclico de  $m$  hojas de  $M \times I \cup_{\tilde{h}} M \times I = M \times S^1$  ramificado sobre  $F \cup_{\tilde{h}} F'$  por ser el enlace -anfiqueiral. (Esta última condición no es necesaria si  $M$  es una  $Z$ -esfera homológica).

Por ser  $F$  y  $h(F)$  dos superficies de Seifert de  $L$ , existe una variedad tridimensional en  $M \times I$  y por tanto en  $M \times S^1$  con borde  $F \cup h(F)$  [11]. Por esta razón existe en  $M \times S^1$  una variedad tridimensional  $G^3$  con borde  $F \cup_h F'$ . Empujemos, utilizando el collar frontera de  $M \times S^1$  en  $M \times D^2$ ,  $G^3$  a  $G'^3$  de forma que  $G'^3 \cap \partial(M \times D^2) = \partial G'^3$ . Entonces una sucesión de Mayer-Vietoris da  $H_1(M \times D^2 - G'^3, Z)/\text{Tor} = Z$ , es decir, existe el recubridor cíclico de  $m$  hojas de  $M \times D^2$ , ramificado sobre  $G'^3$ , cuya frontera es el recubridor cíclico de  $m$  hojas de  $M \times S^1$ , ramificado sobre  $\partial G'^3$ , es decir  $F(m) \cup_h F(m)$ . La forma cuadrática de  $F(m) \cup_h F(m)$  es  $Q \dot{\ast} Q$  y por ello es no singular; esto, junto con la propiedad de  $F(m) \cup_h F(m)$  de ser un borde da la anulación de la signatura de  $Q \dot{\ast} Q$  y por tanto la de  $Q$  y la de  $F(m)$  [18].

Nota.-

La demostración de que  $\sigma(F(m) \cup_h F(m)) = 0$  se sigue de que  $\ker i_* : H_2(\partial W^5)/\text{Tor} \longrightarrow H_2(W^5)/\text{Tor}$  tiene dimensión la mitad de la dimensión de  $H_2(\partial W^5)/\text{Tor}$  (sucesión exacta de  $(\partial W^5, W^5)$ ). lo cual hace que la forma cuadrática  $Q$  se anule en un subespacio de  $H_2(\partial W^5)/\text{Tor}$  de dimensión la mitad de la del espacio total. Un ejercicio de álgebra lineal muestra entonces que la signatura de  $Q$  es nula ya que  $Q$  es no singular.

#### COROLARIO 1.-

El  $\mu$ -invariante de una  $Z_2$ -esfera homológica tridimensional recubridor cíclico de una  $Z_2$ -esfera homológica orientable de  $\mu$ -invariante nulo, ramificado sobre un nudo anfiqueiral es nulo.

#### COROLARIO 2.-

El  $\mu$ -invariante de una  $Z_2$ -esfera homológica

tridimensional recubridor cíclico de orden par o recubridor regular dihedral de grupo  $D_{2p}$  [23], de una  $Z_2$ -esfera homológica orientable ramificado sobre un nudo anfiqueiral es nulo.

El interés de las variedades enunciadas en estos Corolarios estriba en que son simétricas, definición que dimos en la Introducción donde explicamos la importancia de estas variedades en relación con el problema de triangulación de variedades de dimensión mayor o igual que cinco.



2. TEOREMA 3.Teorema 3.-

Sea M una  $Z$ -esfera homológica orientable y sea h un autodifeomorfismo de M que invierte la orientación de M tal que  $h^n = -1$ ,  $n > 2$ . Entonces el invariante  $\mu$  de M es nulo.

Demostración.-

Como la identidad conserva la orientación

$h^n = 1$  implica  $n = 2k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $k$  es impar,  $h^k$  es otro autodifeomorfismo de M que invierte la orientación con período 2 ; entonces el  $\mu$ -invariante de M es nulo debido al Teorema 1.

Si  $k$  es par, podemos escribir  $n = 2^r m$ , donde  $r > 1$  y  $m$  es impar; entonces  $h^m$  es otro autodifeomorfismo de M que invierte la orientación de período  $2^r$ ,  $r > 1$ .

Debido a estas consideraciones el Teorema 3 es una consecuencia del siguiente lema más general :

Lema 1.-

Sea M una  $Z_2$ -esfera homológica orientable y sea h un autodifeomorfismo de M que invierte la orientación, tal que  $h^{2^r} = 1$ ,  $r > 1$ . Sea N el espacio de órbitas de M por la acción de  $h^{2^r}$  y sea  $p : M \rightarrow N$  la proyección canónica. Entonces :

- i) La proyección  $p$  es una cubierta cíclica de  $2^{r-1}$  hojas ramificada sobre la imagen del conjunto de puntos fijos  $K$  de  $h : p(K)$ .
- ii). El espacio cociente N es una  $Z_2$ -esfera homológica. Si M es una  $Z$ -esfera homológica N también lo es.
- iii) El conjunto de ramificación de  $p$  es un nudo -anfiqueiral.
- iv) Si  $p(K)$  es nulhomólogo en N, el invariante  $\mu$  de M es cero.

Demostración del Lema.-

i) La proposición 1 del capítulo anterior dice que el conjunto de puntos fijos de  $h^2$  es una subvariedad de  $M$ .

Por ser  $M$  una  $Z_2$ -esfera homológica y conservar  $h^2$  la orientación de  $M$ , las proposiciones 1, 2 y 3 del Capítulo anterior implican que el conjunto de puntos fijos de  $h^2$  es un nudo  $K$ .

Estas consideraciones prueban i) por conservar  $h^2$  la orientación y ser de período  $2^{r-1}$ .

ii) Probamos primero que  $p$  induce un homomorfismo suprayectivo  $p_*$  desde el grupo fundamental de  $M$  al grupo fundamental de  $N$ :

Sea  $u \in N - p(K)$ . Sea  $(I, \tilde{I}) \xrightarrow{\omega} (N, u)$  una aplicación que representa un elemento  $[\omega] \in \pi_1(N, u)$  y  $I \xrightarrow{\tilde{\omega}} M$  una elevación de  $\omega$  a  $M$  y sean  $\tilde{\omega}(0) = u_0$ ,  $\tilde{\omega}(1) = u_1$ . Sea  $\lambda$  arco que conecta  $u$  con un punto  $v$  de  $p(K)$  y  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1$  arcos en  $M$  con extremos  $p^{-1}v$  y  $u_0, u_1$  respectivamente que se proyectan homeomórficamente sobre  $\lambda$ . Entonces el camino  $\tilde{\lambda}_0 \cdot \tilde{\omega} \cdot \tilde{\lambda}_1^{-1}$  basado en  $v$  se proyecta sobre  $h_\lambda [\omega] \in \pi_1(N, v)$ , donde  $h_\lambda : \pi_1(N, u) \rightarrow \pi_1(N, v)$  es el isomorfismo asociado canónicamente. [36] p. 382. Esto prueba la suprayectividad de  $p_*$ .

Entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(M) & \longrightarrow & H_1(M, Z) & \longrightarrow & H_1(M, Z) \otimes Z_2 = H_1(M, Z_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(N) & \longrightarrow & H_1(N, Z) & \longrightarrow & H_1(N, Z) \otimes Z_2 = H_1(N, Z_2) \end{array}$$

prueba que  $N$  es una  $Z_2$ -esfera homológica en general, y que si  $M$  es además una  $Z$ -esfera homológica,  $N$  también lo es.

iii) Para probar que  $p(K)$  es -anfiqueiral, volvamos a la  $h$  dada al principio del lema. La proposición 2 del Capítulo anterior dice que el conjunto de puntos fijos de  $h$  es una  $S^2$  o una  $S^0$ , por tanto no vacío, por invertir  $h$  la orientación de  $M$ .

Si el conjunto de puntos fijos de  $h$  es  $S^2$ , por ser

$$\{x \mid h^2(x) = x\} \supset \{x \mid h(x) = x\}$$

se deduce también de las Proposiciones 2 y 3 que  $h^2 = 1$ , por ello, este no es el caso considerado en el lema. En nuestro caso el conjunto de puntos fijos de  $h$  es  $S^0$ .

El conjunto de puntos fijos de  $h^2$  es por tanto un nudo  $K = \{x \mid h^2(x) = x\}$ . Evidentemente  $K$  es conservado por  $h$ , cuyos puntos fijos  $S^0$  están contenidos en  $K$ ; la proposición 2 dice entonces que  $h$  invierte la orientación de  $K$ , es decir que  $K$  es un nudo -anfiqueiral en  $M$ .

El autodifeomorfismo  $h$  de  $M$  se proyecta a  $\underline{h}$ , un autodifeomorfismo de  $N$  que invierte la orientación de período 2, y al ser  $K$  un nudo -anfiqueiral por  $h$  en  $M$ ,  $p(K)$  es un nudo -anfiqueiral por  $\underline{h}$  en  $N$ , quedando probado iii).

iv) La anulación del invariante  $\mu$  de  $M$  se sigue directamente del Corolario 2 del Teorema 2, de i) y del Teorema 1 ya que  $N$  tiene una involución  $\underline{h}$  que invierte la orientación, por lo que  $\mu N = 0$

NOTA.-

La demostración del Teorema 3 no requiere el Teorema 1 ni la totalidad del Lema 1 :

Si  $M$  es una esfera homológica,  $N$  también lo es y entonces  $p(K)$  es siempre nulhomólogo en  $N$ , y el invariante  $\mu$  de  $N$  es cero o un medio. Cfr [12] .

COROLARIO 3.-

Toda  $Z$ -esfera homológica hiperbólica simétrica tiene invariante  $\mu$  nulo.

En efecto, toda variedad hiperbólica es una variedad Riemanniana con tensor de Ricci negativo, por ello, [19], toda isometría de una variedad hiperbólica es periódica. Al ser todo autohomeomorfismo

de una variedad hiperbólica isotópico a una isometría de la variedad [20], [34], el Corolario 3 se sigue fácilmente de los Teoremas 1 y 3.

APENDICE.

APENDICE.Posibilidad de Existencia de Infinitas Esferas Homológicas Simétricas con Invariante de Rohlin 1/2.

Sea  $M^3$  una variedad simétrica. Sea  $h$  el autohomeomorfismo de  $M$  que invierte la orientación y  $p$  un punto invariante por  $h$ ; entonces existe un entorno  $B^3$  de  $p$  invariante por  $h$ . Sea  $K$  un nudo en  $B^3$ , podemos isotopar  $K$  en  $B^3$  hasta que pase por  $p$  y  $K \cap h(K)$  sea una bola  $B^1$ , entorno de  $p$  en  $K$ ; utilizando esta bola realizamos la suma conexa de  $K$  y  $h(K)$  y así obtenemos un nudo anfiqueiral en cualquier variedad simétrica.

Si  $M^3$  es una esfera homológica y  $A$  es una matriz de Seifert del nudo  $K$ , una presentación del primer grupo de homología del recubridor cíclico de  $m$  hojas de  $M$  ramificado sobre  $K \# h(K)$  viene dada [11] por la matriz

$$B_m = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} A + A' \quad -A \\ -A' \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{m-1} \end{array} & \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{m-1} \\ \begin{array}{c} -A - A' \quad A' \dots \\ A \quad \dots \end{array} \end{array} \end{array}$$

Si  $\det(B_m) = \pm 1$ , este recubridor es una esfera homológica. La expresión  $\det(B_m) = \prod \Delta(\omega)$  [11] donde  $\Delta$  es el Polinomio de Alexander de  $K \# h(K)$  y el productorio está extendido a las raíces  $m$ -ésimas de la unidad y la igualdad  $\Delta(K \# h(K)) = \Delta(K) \cdot \Delta(h(K))$  muestran que si  $\Delta(K) = 1$  el recubridor en cuestión es en efecto una esfera homológica.

Si existe una esfera homológica simétrica con invariante  $\mu$   $1/2$ , los recubridores cíclicos de orden impar construidos según el proceso arriba indicado con un nudo  $K$  tal que  $\Delta(K) = \pm 1$  son una infinitud de esferas homológicas simétricas cuyo invariante  $\mu$ , según el Teorema 2, es  $1/2$ .

BIBLIOGRAFIA.

BIBLIOGRAFIA.

1. R. H. BING. An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated. Ann. of Math. 69. (1959) pp. 37-65.
2. J. S. BIRMAN. Orientation reversing involutions in 3-manifolds. (preprint). Columbia University. New York.
3. L. CONTRERAS. Periodic transformations in homology 3-spheres and the Rohlin Invariant. Notices of the American Mathematical Society. October 1979.
4. A. DOLD. Lectures on Algebraic Topology. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. New York 1972.
5. J. EELLS and K. H. KUIPER. An invariant for certain smooth manifolds. Ann. Mat. Pura Appl. (4). 60. 1972. pp. 93-110.
6. F. BRANKL and L. POINTIAGIN. Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie. Math. Ann. 102. (1920). pp. 785- 789.
7. E. E. FLOYD. Periodic maps via Smith theory. Seminar on Transformation Groups. Annals of Mathematics Studies n° 46.
8. R. H. FOX. A quick trip through knot theory. Topology of 3-manifolds and related topics. Englewood Cliffs (1962). pp. 120-167.
9. D. E. GALEWSKI and R. STERN. Classification of simplicial triangulations of topological manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 82. 1976. pp. 916-918.
10. D. E. GALEWSKI and R. STERN. Orientation reversing involutions in homology 3-spheres. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979.
11. C. McA. GORDON. Some aspects of classical knot theory. Lecture Notes in Mathematics vol. 685. Knot Theory Proceedings (Plans sur Bex). Springer-Verlag. 1978. pp. 1-65.

12. F. HIRZEBRUCH, W. D. NEUMANN and S. S. KOH. Differential Manifolds and Quadratic Forms. Marcel Dekker. New York. 1971.
13. W. C. HSIANG and P. S. PAO. Orientation reversing involutions on homology 3-spheres. Notices Amer. Math. Soc. 26. (Feb 1979). p. A-251.
14. J. F. P. HUDSON. Piecewise Linear Topology. W. A. Benjamin, Inc. (1969).
15. L. H. KAUFFMAN. Branched coverings, open books and knot periodicity. Topology. vol. 13. pp. 143-160.
16. A. KAWAUCHI. On three-manifolds admitting orientation-reversing involutions. preprint I. A. S. Princeton.
17. A. KAWAUCHI. Vanishing of the Rohlin invariant of some  $Z_2$ -homology 3-spheres. preprint I. A. S. Princeton.
18. R. KIRBY y L. SIEBENMANN. On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung. Bull. Amer. Math. Soc. 75. 1969. pp. 742-749.
19. S. KOBAYASHI. Transformations Groups in Differential Geometry. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg. New York 1972.
20. A. MARDEN. The geometry of finitely generated kleinian groups. Ann. Math. 99. 1974. pp. 383-462.
21. J. MILNOR y D. HUSEMOLLER. Symmetric Bilinear Forms. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. New York. 1973.
22. E. E. MOISE. Affine structures in 3-manifolds V. The triangulation theorem and the Hauptvermutung. Ann. of Math. 55. 1952. pp. 96-114.
23. J. M. MONTESINOS. Representaciones de enlaces en relación con recubridores dobles ramificados. Collectanea Matemática vol XXV. Fasc. 2º. 1974.
24. K. MURASUGI. On a certain numerical invariant of link types. Trans. Amer. Math. Soc. 117. 1965. pp. 387-422.

- 25.G. de RHAN. Involutions Topologiques de  $S^4$ . Conferenza tenuta al Seminario di Algebra, Geometria e Topologia l'11 maggio 1963.
- 26.D. ROLFSEN. Knots and Links. Publish or Perish. Inc. nº 7. 1976.
- 27.W. A. ROHLIN. A new result in the theory of 4-dimensional manifolds. Doklady. 84. 1952. pp. 221-224.
- 28.H. SEIFERT y W. THRELLFALL. Lecciones de Topología. (traducción al español de Lehrbuch der Topologie. Chelsea. New York. 1942.).
- 29.L. SIEBENMANN. Are non triangulable manifolds triangulable? Topology of Manifolds. Markham Publishing Co. 1970. pp.195-199.
- 30.L. SIEBENMANN. On vanishing of the Rohlin invariant and Nonfinitely amphichaeiral homology 3-spheres. (I. H. S. M/79/276).
- 31.P.A.SMITH. Transformations of finite period,II. Ann of Math.,40. 1939. pp.690-711.
- 32.W. THURSTON. The Geometry and Topology of 3-manifolds. preprints 1978. Princeton University.
- 33.H. F. TROTTER. Homology of group systems with applications to knot theory, Ann. of Math. 76 (1962), 464-498.
34. F. WALDHAUSEN. On irreducible 3-manifolds that are sufficiently large. Ann. of Math. 87. 1968. pp.56-58.
- 35.W. NEUMANN. An invariant of plumbed manifolds. Notices Amer. Math. Soc. 25. (Nov. 1978). p. A. 717.
- 36.E. H. SPANIER. Algebraic Topology. McGraw-Hill, 1966.
37. L. P. NEUWIRTH. Knot Groups. Ann. of Math. nº 56. Princeton University Press. 1965.

