
La Función de Takagi y sus generalizaciones

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
Y MATEMÁTICA APLICADA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Jesús Llorente Jorge

Trabajo dirigido por:

Juan Ferrera Cuesta

Javier Gómez Gil

CURSO 2017-2018

A mi padre,
Ignacio.

Resumen

La función de Takagi es un ejemplo clásico de una función continua no derivable en ningún punto de su dominio. A lo largo del tiempo, numerosos autores han estudiado sus extraordinarias propiedades redescubriendo ésta en diversos campos de la matemática como la teoría de números o la teoría de la probabilidad. En este trabajo estudiamos la función de Takagi desde diferentes aproximaciones. En primer lugar, adoptamos una perspectiva funcional considerando la función de Takagi como solución de un sistema de ecuaciones funcionales. En segundo lugar, consideramos una perspectiva analítica utilizando diversas técnicas del análisis no diferencial. Y en tercer lugar, estudiamos las propiedades cualitativas de su grafo. Este análisis en profundidad nos permitirá tomar conciencia de estas sorprendentes características.

Finalmente, realizamos un recorrido por la generalizaciones más relevantes de la función de Takagi desde las más clásicas hasta la más actual, introducida en 2018. Estas generalizaciones tienen por objetivo extender las cualidades intrínsecas de la función de Takagi a una familia más amplia de funciones. Como novedad, obtendremos resultados que generalizan los ya conocidos utilizando técnicas del cálculo subdiferencial.

Palabras clave: función de Takagi, subdiferencial Fréchet, clase de Takagi, funciones de Takagi-Van der Waerden, conjuntos de nivel, función singular de Lebesgue, convexidad aproximada, dimensión de Hausdorff y cálculo fraccionario.

Abstract

The Takagi function is a classical example of a continuous nowhere differentiable function. Over time many mathematicians have researched its extraordinary properties rediscovering the Takagi function in a surprising number of different mathematical contexts such as probability theory or number theory. In this work we present the Takagi function from different approaches. Firstly, we carry out a functional study which considers it as the solution of a system of functional equations. Secondly, we study the Takagi function from an analytical approach by using different techniques of nonsmooth analysis. And thirdly, we examine the qualitative properties of its graph. This in-depth analysis will make us aware of these amazing properties.

Finally, we make a tour through the most important generalizations of the Takagi function from the most classic generalization to the most current one introduced in 2018. The aim of these generalizations is to extend the intrinsic properties of the Takagi function to a wider family of functions. As a novelty, we will obtain more general results to those already known by using a nonsmooth approach.

Keywords: Takagi function, Fréchet subdifferential, Takagi class, Takagi-Van der Waerden functions, level sets, Lebesgue's singular function, approximate midconvexity, Hausdorff dimension and fractional derivatives.

Índice general

Resumen	III
Abstract	v
Prefacio	XI
Agradecimientos	XV
1. La función de Takagi y sus representaciones	1
1.1. Construcción de la función de Takagi	2
1.1.1. Sistema dinámico discreto	5
1.1.2. Funciones de Rademacher	6
1.2. Definición original de Takagi	6
1.3. La función de Takagi y la hipótesis de Riemann	8
2. Ecuaciones funcionales	11
2.1. Sistema de ecuaciones funcionales	11
2.2. Sistema de ecuaciones en diferencias	18
2.3. La función singular de Lebesgue y la función de Takagi	20
3. Estudio analítico de la función de Takagi	25
3.1. Subdiferencial de la función de Takagi	25
3.2. Superdiferencial de la función de Takagi	27
3.3. Derivadas laterales y derivabilidad en sentido de Zygmund	32
3.4. Continuidad en sentido de Hölder	33
3.5. Derivabilidad aproximada en ningún punto	35
3.6. Convexidad aproximada y convexidad Lipschitz	38
3.7. Serie de Fourier	42
4. Grafo de la función de Takagi	47
4.1. Valor máximo de la función de Takagi	48
4.2. Extremos relativos	51
4.3. Conjuntos de nivel	53

4.3.1. Conjuntos de nivel locales en los números racionales	59
4.4. La función de Takagi en los números racionales	60
5. Generalizaciones de la función de Takagi	63
5.1. Funciones de Takagi-Van der Waerden	63
5.1.1. Ecuaciones funcionales	64
5.1.2. Valor máximo	65
5.1.3. Continuidad en sentido de Hölder	69
5.2. La función de Takagi generalizada	70
5.3. Funciones de Takagi-Van der Waerden generalizadas	73
5.3.1. Continuidad en sentido de Hölder	75
5.3.2. Dimensión de Hausdorff y dimensión de box-counting	76
6. La clase de Takagi	81
6.1. La clase de Takagi	81
6.1.1. Sistema de ecuaciones en diferencias	85
6.1.2. Derivabilidad. Teorema de Kôno	88
6.1.3. Serie de Fourier	92
6.2. La clase de Takagi generalizada	93
6.2.1. Convergencia a cero de la sucesión de pesos	97
6.2.2. Convergencia absoluta de la sucesión de pesos	106
6.2.3. Convergencia cuadrática de la sucesión de pesos	110
A. Cálculo fraccionario	115
B. La función de Takagi en Maple	121
B.1. La función de Takagi en los números racionales.	121
B.2. Serie de Fourier	124
C. Algoritmo de Box-Counting en Matlab	127
Bibliografía	138

Índice de figuras

1.1. Función de Takagi	5
2.1. Función singular de Lebesgue, $\alpha = 0.3$	20
3.1. Función de Takagi conjugada	45
4.1. Conjunto de nivel en la ordenada $y = 0.6$	53
4.2. Caminata en el instante 7 para $x = 0.011000101$	57
C.1. Ejecución del algoritmo para $b = 5, c = 4$	129

Prefacio

La función de Takagi fue introducida en 1903 por T. Takagi [99] y constituye probablemente el ejemplo más sencillo de una función continua no derivable en ningún punto de su dominio. En cuanto a su contexto histórico, la función de Takagi surge en una época en la que numerosos matemáticos como K. Weierstrass [105], H. A. Schwarz [90], D. Hilbert [50] y S. Banach [11] entre otros, construyeron ejemplos de funciones continuas no derivables en ningún punto, desterrando por completo la falsa creencia de principios del siglo XIX según la cual una función continua debía ser derivable salvo en un conjunto finito de puntos.

La función de Takagi permaneció inadvertida a lo largo de las primeras décadas del siglo XX siendo redescubierta en varias ocasiones por diversos autores como G. de Rham [82], B. van der Waerden [103] o T. H. Hildebrandt [51] entre otros. Con el paso de los años, la función de Takagi ha ido apareciendo paulatinamente en diversos campos de la matemática como la teoría de probabilidad, la teoría de números o el análisis real originando una gran variedad de estudios sobre sus sorprendentes propiedades.

A partir de mediados del siglo XX surgieron diversas generalizaciones de la función de Takagi entre las que destacamos la familia de funciones de Takagi-Van der Waerden [106], la clase de Takagi [48] y las funciones de T. Sekiguchi e Y. Shiota [92] entre otras. Estas generalizaciones tienen por objetivo extender las propiedades analíticas, gráficas y funcionales de la función de Takagi a una familia más amplia de funciones. Por esta razón, ligado a la aparición de estas generalizaciones surgen trabajos sobre la derivabilidad, las ecuaciones funcionales y la dimensión de Hausdorff del grafo de las funciones pertenecientes a dichas generalizaciones. Entre otros, destacamos los trabajos de N. Kôno [64], Y. Baba [9] y M. Hata y M. Yamaguti [48].

Llegados a este punto, parece lógico aceptar la relevancia de la función de Takagi a lo largo de la matemática del siglo XX y de principios del siglo XXI. Este hecho, junto a otras razones, constituye un motivo de peso por el que se ha realizado este trabajo. A continuación, presentamos brevemente los objetivos de este trabajo.

- Recopilación bibliográfica de los trabajos existentes sobre la función de

Takagi y sus generalizaciones obteniendo un conocimiento profundo de las mismas así como de las técnicas empleadas en dichos trabajos que permita obtener resultados generales sobre sus propiedades intrínsecas. Para ello, hemos realizado una metodología inductiva partiendo de una investigación bibliográfica previa.

- Abordar el estudio de la función de Takagi adoptando diferentes aproximaciones. En primer lugar, realizaremos un enfoque funcional en el que consideraremos la función de Takagi como la única solución acotada de un sistema de ecuaciones funcionales. Posteriormente, adoptaremos un enfoque analítico en el que presentaremos los resultados conocidos sobre la derivabilidad de la función de Takagi, sus coeficientes de Fourier, su derivabilidad en sentido de Hölder así como introduciremos resultados recientes sobre la función de Takagi utilizando técnicas del cálculo subdiferencial. Finalmente, presentaremos las propiedades cualitativas del grafo de la función de Takagi así como los estudios recientes sobre sus conjuntos de nivel locales.
- Estudiar las generalizaciones más relevantes de la función de Takagi estableciendo las propiedades comunes entre las mismas y concluir resultados más generales de los ya conocidos.

Una vez establecidos los objetivos que se pretenden conseguir, comenzamos con un primer capítulo que adquiere un carácter introductorio natural. Establecemos la notación que emplearemos a lo largo del trabajo así como un breve marco conceptual que constituye el punto de partida de este estudio.

El segundo capítulo tiene por objetivo abordar el enfoque funcional que se ha comentado anteriormente, caracterizando la función de Takagi como la única solución acotada de un sistema de ecuaciones funcionales y como la única solución continua de un sistema de infinitas ecuaciones en diferencias. Además, presentamos la relación existente entre la función de Takagi y la función singular de Lebesgue.

El tercer capítulo considera la función de Takagi desde un punto de vista analítico. Debido a su no derivabilidad en ningún punto, utilizando técnicas del *nonsmooth analysis* estudiamos la subdiferencial y la superdiferencial de la función de Takagi. Posteriormente, estudiamos su continuidad en sentido de Hölder, su serie de Fourier, su derivabilidad aproximada en ningún punto y su papel en la teoría de la convexidad aproximada.

Continuamos el estudio de la función de Takagi con un cuarto capítulo en el que caracterizamos el conjunto de máximos absolutos, la dimensión de Hausdorff así como los conjuntos de nivel locales. Además, desarrollamos un algoritmo teórico que he implementado en Maple, cuyo código puede verse en el apéndice **B**, que permite calcular de manera exacta el valor de la función de Takagi en los números racionales.

En el quinto capítulo presentamos las funciones de Takagi-Van der Waerden, la función de Takagi generalizada y una generalización de las funciones de Takagi-Van der Waerden así como sus propiedades más relevantes.

El sexto capítulo está dedicado a presentar la clase de Takagi y la reciente clase de Takagi generalizada introducida en 2018 por J. Ferrera y J. Gómez Gil [41]. Muchos de los resultados que presentaremos sobre la clase de Takagi serán obtenidos como caso particular de la clase de Takagi generalizada. Sin embargo, la presencia de los primeros se justifica por su relevancia histórica así como por dar a conocer las diversas técnicas que se han empleado en la obtención de los mismos. Además, presentaremos los resultados obtenidos por el autor de este trabajo en colaboración con los profesores J. Ferrera y J. Gómez Gil en [42].

Finalmente, introducimos un apéndice **A** que pretende establecer el marco teórico necesario para relacionar la noción de derivada fraccionaria y la continuidad en sentido de Hölder. Como se ha comentado anteriormente, el apéndice **B** contiene el código desarrollado en Maple para graficar la función de Takagi así como el algoritmo para calcular su valor en los números racionales. El apéndice **C** tiene como objetivo exponer el algoritmo implementado en Matlab para computar la dimensión de box-counting del grafo de una función.

Jesús Llorente

Agradecimientos

Con estas casi ciento cincuenta páginas pongo fin a otra etapa de mi vida que comenzó aquel 18 de septiembre de hace ya casi un año. Una etapa ilusionante y enriquecedora pero sobre todo de esfuerzo personal y de superación. Este máster que en unos días llegará a su fin ha sido todo un reto personal en el que he podido reafirmarme en mi creencia de que todo esfuerzo tiene recompensa, pues no hay mejor sensación que saber que has dado todo de ti para alcanzar tu meta.

Cuando tomas conciencia de que una nueva etapa se cierra, es inevitable pensar en lo rápido que pasa el tiempo. Sin embargo, al volver la vista atrás, los recuerdos son las experiencias que uno ha vivido y que le van permitiendo “quemar” las etapas de la vida. En este sentido, este máster constituye un pequeño paso más hacia mi meta, que aún lejana, me entusiasma cada día más. Pues nadie dijo que fuera fácil pero sí que merecería la pena ¡Y no puedo estar más de acuerdo!

Detrás de cada paso que se da en la vida hay un factor humano y social sin el que dicho paso nunca podría realizarse. Por esta razón, me gustaría agradecer este trabajo a todas las personas que me han acompañado.

A mi amigos, Rubén, Mike, Dani, Irene, Iñigo, Mario, Edu, Miguel... porque todo tiende al equilibrio y sin vosotros es imposible que dicho equilibrio pueda darse.

A Viky, Óscar, Ángel... porque aunque no tenga mucho tiempo de tocar la dulzaina siempre estáis pendientes por si me puedo escapar un rato para tocar.

A todos los profesores que he tenido a lo largo de mi vida y que han contribuido a mi crecimiento personal. Especialmente a los profesores de la facultad de Matemáticas y de la facultad de Informática, pues con el paso del tiempo no puedo sentirme más orgulloso de haber sido alumno del doble grado.

A Juan y Javier, por vuestro apoyo y dedicación. Gracias por darme esta bonita oportunidad y ayudarme a crecer tanto en el ámbito profesional como personal, sólo tengo palabras de admiración y agradecimiento.

A mis abuelos Felipa y Sebastián, mis primos Víctor y Adrián y sobre todo a mi tía Belén, el mejor regalo que puedo hacerlos es verme seguir

adelante.

A mi novia Alicia, por sacarme las mejores sonrisas y siempre hacerme ver el lado positivo de las cosas. Espero que podamos seguir cumpliendo sueños durante mucho tiempo.

Y finalmente a mis padres, Inés e Ignacio, por darme la posibilidad de cumplir mi sueño. Especialmente me gustaría dedicar mi trabajo a mi padre, por ser un apoyo constante y transmitirme su capacidad de trabajo y superación.

Jesús Llorente

CAPÍTULO 1

La función de Takagi y sus representaciones

“Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n’ont point de dérivées”

Charles Hermite (1822-1901)

A principios del siglo XIX, una vez establecidos rigurosamente los conceptos de continuidad y derivabilidad de una función, la creencia generalizada imperante en la comunidad matemática era que una función continua debía ser derivable salvo quizás en un número finito de puntos. El 18 de julio de 1872, K. Weierstrass [105] presentó en la Real Academia de Ciencias de Berlín un ejemplo de una función continua no derivable en ningún punto,

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x), \quad x \in \mathbb{R}$$

siendo $0 < a < 1$ y b un número entero par tales que $ab > 1 + 3\pi/2$. La función de Weierstrass fue la primera función no derivable en ningún punto en ser publicada, concretamente en 1875, constituyendo la prueba definitiva de aquella falsa creencia. A partir de la función de Weierstrass, numerosos matemáticos como H. A. Schwarz [90], U. Dini [27], D. Hilbert [50], T. Takagi [99], B. van der Waerden [103] y S. Banach [11] entre otros, construyeron ejemplos de funciones continuas no derivables en ningún punto. Sin embargo, la función de Takagi es probablemente el ejemplo más sencillo de una función continua no derivable en ningún punto de su dominio. En notación moderna,

la función de Takagi, denotada por T , se define como

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n x), \quad x \in [0, 1] \quad (1.1)$$

siendo ϕ la función distancia al entero más cercano. Es importante destacar que la definición original dada por T. Takagi en [99] es completamente diferente a la presentada anteriormente. Probablemente, este hecho junto con el aislamiento político, social, geográfico y económico de Japón a principios del siglo XX debido a al sistema sakoku constituyan la razón que justifique el paso inadvertido de la función de Takagi durante varias décadas en el mundo occidental.

A lo largo del siglo XX, la función de Takagi ha sido redescubierta por numerosos autores como B. van der Waerden [103], R. T. Lyche [72], G. de Rham [82] y T. H. Hildebrandt [51] entre otros. Además, la función de Takagi es especialmente rica ya que posee sorprendentes propiedades desde diferentes perspectivas. Por esta razón, ha sido estudiada por un extenso grupo de matemáticos dando lugar a una gran cantidad de generalizaciones con el objetivo de extender sus interesantes propiedades a una familia más amplia de funciones.

Este trabajo tiene por objetivo estudiar, en primer lugar, la función de Takagi adoptando un enfoque analítico, funcional y gráfico exponiendo resultados tanto clásicos como actuales. Cabe destacar que también es posible realizar un estudio de la misma desde la perspectiva de la teoría de números y la combinatoria. Y en segundo lugar, estudiar las generalizaciones más relevantes de la función de Takagi haciendo un recorrido desde las más clásicas hasta la más actual, denominada clase de Takagi generalizada.

1.1 Construcción de la función de Takagi

Esta sección tiene como objetivo establecer la notación que emplearemos a lo largo de este trabajo así como esclarecer el origen de la no derivabilidad en ningún punto de la función de Takagi.

Para cada $x \in [0, 1]$ consideramos su expresión binaria dada por

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{2^k}, \quad \varepsilon_k(x) \in \{0, 1\}$$

Si no hay lugar a confusión, denotaremos simplemente ε_k en lugar de $\varepsilon_k(x)$. Además, denotamos por

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n} \in [0, 1] : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

el conjunto de los números diádicos en el intervalo $[0, 1]$.

La expresión binaria de $x \in [0, 1]$ es única salvo en el conjunto de los números diádicos. En este caso, existen dos posibles representaciones: o bien terminada en infinitos ceros, o bien terminada en infinitos unos. Salvo mención explícita, adoptaremos la representación binaria terminada en infinitos ceros.

Para cada $x \in [0, 1]$ definimos

$$I_n(x) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad O_n(x) = n - I_n(x), \quad \delta_n(x) = O_n(x) - I_n(x)$$

La función $\delta_n(x)$ recibe el nombre de *función diferencia de dígito* entre los n primeros dígitos del desarrollo binario de x .

A continuación, denotamos por

$$D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \in [0, 1] : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

el conjunto de los números diádicos de orden n pertenecientes al intervalo $[0, 1]$. Observemos que $D_n \subset D_{n+1}$ y $D = \bigcup_n D_n$. Esta notación nos permite expresar la función de Takagi como

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

siendo $g_n(x) = d(x, D_n)$ la distancia de x al conjunto D_n .

Denominamos intervalo diádico de orden n al intervalo

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$$

siendo $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$.

Proposición 1.1. *Para cada n , se verifica:*

- (1) *La función g_n es 1-Lipschitz en $[0, 1]$ y afín en el intervalo diádico $I_{k,n+1}$.*
- (2) *La función g_n es derivable en el interior de cada intervalo diádico $I_{k,n+1}$ con derivada 1 si k es par y derivada -1 si k impar.*
- (3) *La función g_n satisface que $g_n(x) \leq 2^{-(n+1)}$ para todo $x \in [0, 1]$.*

Definimos la *función de Takagi de nivel n* como

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n g_n(x), \quad x \in [0, 1]$$

Proposición 1.2. *Para cada n , se verifica:*

- (1) La función G_n es $(n+1)$ -Lipschitz en $[0, 1]$ y afín en el intervalo diádico $I_{k,n+1}$.
- (2) La función G_n es derivable en el interior de cada intervalo diádico $I_{k,n+1}$ con derivada entera dada por

$$G'_n(x) = \frac{G_n(x + y2^{-(n+1)}) - G_n(x)}{y2^{-(n+1)}} = \delta_{n+1}(x) \quad (1.2)$$

para todo $x \in \text{Int}(I_{k,n+1})$ e $y > 0$ tal que $x + y2^{-(n+1)} \in I_{k,n+1}$.

La expresión (1.2) se verifica para las derivadas laterales de los extremos del intervalo diádico $I_{k,n+1}$ si consideramos la expresión binaria terminada en infinitos ceros para el extremo $k2^{-(n+1)}$ y la expresión binaria terminada en infinitos unos para $(k+1)2^{-(n+1)}$.

Es inmediato ver que $T(1) = T(0) = 0$ y que si $x \in D_n$, entonces $T(x) = G_{n-1}(x)$.

Proposición 1.3. *La función de Takagi es uniformemente continua en $[0, 1]$ y*

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x)$$

Demostración. El criterio de Weierstrass nos garantiza la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ en $[0, 1]$, y en consecuencia, la función de Takagi es continua en $[0, 1]$. \square

Es posible extender la función de Takagi a una función 1-periódica en \mathbb{R} definida como

$$T(x) = T(x - [x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

siendo $[x]$ la parte entera de x .

Por la simetría de la función ϕ obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *La función de Takagi satisface la ecuación de simetría*

$$T(x) = T(1 - x), \quad x \in [0, 1] \quad (1.3)$$

y por tanto, su gráfica es simétrica con respecto a la recta $x = \frac{1}{2}$.

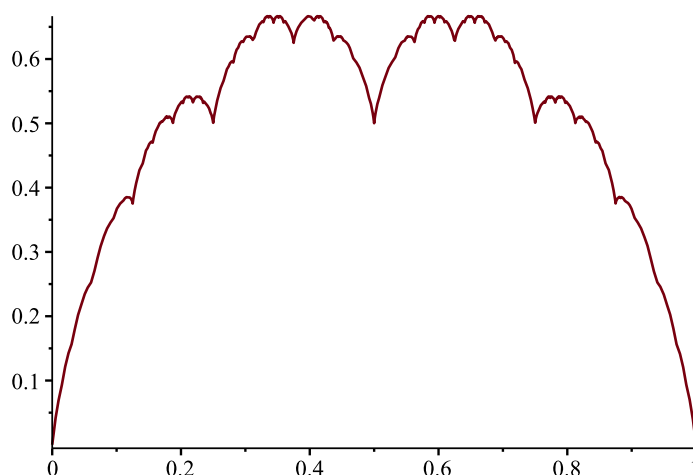


Figura 1.1: Función de Takagi en $[0, 1]$.

1.1.1 Sistema dinámico discreto

Comenzamos definiendo la función $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$\psi(x) = 2\phi(x)$$

En la literatura, la función ψ es conocida como *tent map* o *función tienda*.

Proposición 1.5. *La iteración n -ésima de la aplicación ψ viene dada por*

$$\psi^n(x) = 2\phi(2^{n-1}x)$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . El caso base $n = 1$ es trivial. Supongamos cierta dicha expresión para todo $k \leq n$ y probémosla para $n + 1$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \psi^{n+1}(x) &= \psi^n(\psi(x)) = 2\phi(2^{n-1}\psi(x)) \\ &= 2\phi(2^n\phi(x)) = 2\phi(2^n x) \end{aligned}$$

□

Corolario 1.6. *La función de Takagi admite una representación mediante el sistema dinámico discreto $x_{n+1} = \psi^n(x)$ dada por*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi^n(x)$$

Para finalizar este apartado, observamos que la función ψ es caótica en $[0, 1]$ en el sentido de Li y Yorke (véase [26, Capítulo 15]) ya que posee puntos de periodo tres. Además, esta función es topológicamente transitiva en el intervalo $[0, 1]$. Por tanto, ψ es una función caótica en dicho intervalo en el sentido de Devaney (véase [107, Sección 30]).

1.1.2 Funciones de Rademacher

En esta sección presentamos una representación de la función de Takagi en términos de las clásicas funciones de Rademacher.

Definición 1.7. Se define la n -ésima función de Rademacher, y se denota por r_n , como

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \chi_{I_{k,n}}(x), \quad x \in [0, 1]$$

donde $\chi_{I_{k,n}}$ es la función característica en el intervalo diádico $I_{k,n}$.

Proposición 1.8. La función de Takagi se expresa como

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x r_n(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

Demostración. Para cada n , observemos que si k es par entonces $\int_0^{k2^{-n}} r_n(t) dt = 0$. Por tanto, si $x \in I_{k,n}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x r_{n+1}(t) dt &= \int_0^{\frac{2k}{2^{n+1}}} r_{n+1}(t) dt + \int_{\frac{2k}{2^{n+1}}}^x r_{n+1}(t) dt = \\ &= \begin{cases} x - \frac{k}{2^n} & \text{si } x \leq \frac{2k+1}{2^{n+1}} \\ \frac{k+1}{2^n} - x & \text{si } x > \frac{2k+1}{2^{n+1}} \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusión, $\int_0^x r_{n+1}(t) dt = g_n(x)$ para todo n y $x \in [0, 1]$. □

Nótese que la función de Rademacher r_n es la derivada de la función g_{n-1} en el interior del intervalo diádico $I_{k,n}$.

Las funciones de Rademacher $(r_n)_n$ constituyen un sistema ortonormal de $L_2([0, 1])$. Una introducción más detallada de las funciones de Rademacher puede verse en [21].

1.2 Definición original de Takagi

En su artículo *A simple example of the continuous function without derivative* [99], T. Takagi define para $x \in [0, 1]$ con expresión binaria

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} = 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\dots, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) \tau_n + \varepsilon_n \tau'_n \tag{1.4}$$

donde $\tau_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ y $\tau'_n = \frac{1}{2^{n-1}} - \tau_n$. Podemos formular la expresión (1.4) como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n O_n(x) + (1 - \varepsilon_n) I_n(x)}{2^n} \quad (1.5)$$

Además, es posible escribir

$$\varepsilon_n O_n(x) + (1 - \varepsilon_n) I_n(x) = |\{j : 1 \leq j \leq n-1, \varepsilon_j \neq \varepsilon_n\}|$$

Proposición 1.9. *La definición original de la función de Takagi (1.4) es equivalente a la definición moderna*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n x), \quad x \in [0, 1]$$

Demostración. En primer lugar, tenemos que

$$2^n x = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \varepsilon_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-n}}$$

y en consecuencia,

$$\phi(2^n x) = \phi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-n}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(1 - \varepsilon_{n+1}) + (1 - \varepsilon_{n+k})\varepsilon_{n+1}}{2^k}$$

Por tanto,

$$\frac{\phi(2^n x)}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(1 - \varepsilon_{n+1}) + (1 - \varepsilon_{n+k})\varepsilon_{n+1}}{2^{n+k}}$$

y sustituyendo en la definición moderna de la función de Takagi obtenemos que

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(1 - \varepsilon_{n+1}) + (1 - \varepsilon_{n+k})\varepsilon_{n+1}}{2^{n+k}} \quad (1.6)$$

Se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(1 - \varepsilon_{n+1}) + (1 - \varepsilon_{n+k})\varepsilon_{n+1}}{2^{n+k}} = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\{j : 1 \leq j \leq m-1, \varepsilon_j \neq \varepsilon_m\}|}{2^m} \end{aligned}$$

□

A lo largo del siglo XX numerosos matemáticos como T. H. Hildebrandt [51], F. S. Cater [22], P. Billingsley [15], G. de Rham [82] y D. Tall [100] entre otros autores, han demostrado la derivabilidad en ningún punto de la función de Takagi. Sin embargo, la mayoría de estas pruebas están basadas en argumentaciones similares. A continuación, presentamos en notación moderna la demostración de la no derivabilidad en ningún punto dada originalmente por T. Takagi en [99].

Teorema 1.10. *La función de Takagi no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$.*

Demostración. Consideremos la definición original de la función de Takagi dada por (1.5). Sea $x \in [0, 1]$ cuya expresión binaria es $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ con $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$.

- Si $\varepsilon_n = 0$ entonces

$$\Delta_n := \frac{f(x + 2^{-n}) - f(x)}{2^{-n}} = O_n(x) - I_n(x) - 2^{n+1}\tau_{n+1}$$

- Si $\varepsilon_{n-1} = 0$ y $\varepsilon_n = 1$ entonces

$$\Delta_n := \frac{f(x + 2^{-n}) - f(x)}{2^{-n}} = O_n(x) - I_n(x)$$

En consecuencia, si $\varepsilon_n = 0$ y $\varepsilon_{n+1} = 0$ entonces $\Delta_{n+1} - \Delta_n = 1 - 2^{n+1}\tau_{n+2}$, mientras que si $\varepsilon_n = 0$ y $\varepsilon_{n+1} = 1$ entonces $\Delta_{n+1} - \Delta_n = 2^{n+1}\tau_{n+2}$.

Si f es derivable en x entonces $|\Delta_{n+1} - \Delta_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, para $\varepsilon = \frac{1}{8}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$ entonces $|\Delta_{n+1} - \Delta_n| < \frac{1}{8}$. Por tanto,

- Si $\varepsilon_n = 0$ y $\varepsilon_{n+1} = 0$ entonces $2^{n+1}\tau_{n+2} > \frac{7}{8}$. En consecuencia, $\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_{n+3} = 1$.
- Si $\varepsilon_n = 0$ y $\varepsilon_{n+1} = 1$ entonces $2^{n+1}\tau_{n+2} < \frac{1}{8}$. En consecuencia, $\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_{n+3} = 0$.

obteniendo así una contradicción. □

1.3 La función de Takagi y la hipótesis de Riemann

En esta sección presentamos la relación existente entre la función de Takagi y la hipótesis de Riemann mediante las fracciones de Farey. La función zeta de Riemann, denotada por $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, se define como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Esta función fue desarrollada por B. Riemann en [84] con el objetivo de encontrar una estimación del cardinal del conjunto de números primos menores o iguales que un número dado. La función zeta de Riemann es convergente en los números complejos con parte real estrictamente mayor que 1. Riemann demostró que la función $\zeta(z)$ puede extenderse a una función meromorfa en el plano complejo con un polo simple en $z = 1$ obteniendo la ecuación funcional

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \zeta(1-z) \Gamma(1-z) \sin \frac{\pi z}{2}, \quad z \neq 1$$

donde Γ es la función Gamma. Esta ecuación nos permite deducir que $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de los números enteros negativos pares recibe el nombre de *ceros triviales de la función ζ* . Riemann conjeturó que la parte real de todo cero no trivial de la función ζ es $1/2$. Un estudio en profundidad de la hipótesis de Riemann puede consultarse en [44].

Definición 1.11. Las *fracciones de Farey* de nivel n , denotadas por \mathcal{F}_n , se definen como

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \frac{p}{q} \in [0, 1] : p, q \in \mathbb{N}, q \leq n, \text{mcd}(p, q) = 1 \right\}$$

En 2006, R. Balasubramanian, S. Kanemitsu y M. Yoshimoto [10] probaron que la hipótesis de Riemann es equivalente a la siguiente afirmación: para todo $\varepsilon > 0$ se verifica

$$\sum_{r \in \mathcal{F}_n} T(r) - \frac{1}{2} |\mathcal{F}_n| = o\left(n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Observación 1.12. En la expresión anterior se evalúa la función de Takagi en números racionales. Por esta razón, y debido a la importancia de la equivalencia anterior, en la sección 4.4 del capítulo cuarto desarrollamos un algoritmo teórico que permite calcular de manera exacta el valor de la función de Takagi en cualquier número racional. Este algoritmo ha sido implementado en Maple (véase Apéndice B).

CAPÍTULO 2

Ecuaciones funcionales

En este capítulo estudiamos la función de Takagi adoptando un enfoque funcional. En primer lugar, presentamos ésta como la única solución acotada de un conjunto de ecuaciones funcionales haciendo un recorrido desde el primer trabajo realizado en esta perspectiva funcional debido a H. Kairies, W. Darsow y M. Frank [57], hasta los trabajos más recientes debidos a L. Sadowski [88] y M. Krüppel [65].

En segundo lugar, presentamos el trabajo realizado por M. Hata y M. Yamaguti [48] que caracteriza a la función de Takagi como la única solución continua de un problema de contorno discreto. Finalmente, introducimos la función singular de Lebesgue y exponemos su sorprendente relación con la función de Takagi.

2.1 Sistema de ecuaciones funcionales

Comenzamos esta sección presentando la función de Takagi como la única solución acotada de un sistema de cuatro ecuaciones funcionales.

Proposición 2.1. *La función de Takagi satisface en $[0, 1]$ las siguientes ecuaciones funcionales:*

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = -x \tag{1}$$

$$T\left(\frac{x+1}{2}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) = -x + \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$2T\left(\frac{x+1}{2}\right) - T(x) = -x + 1 \quad (4)$$

Demostración. Expresando la función de Takagi como

$$T(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi\left(2^n \frac{x}{2}\right) = 2 \left[T\left(\frac{x}{2}\right) - \phi\left(\frac{x}{2}\right) \right] = 2T\left(\frac{x}{2}\right) - x$$

obtenemos (1). En segundo lugar, escribiendo

$$\begin{aligned} T\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \phi\left(\frac{x+1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi\left(2^n \frac{x}{2}\right) = \phi\left(\frac{x+1}{2}\right) + T\left(\frac{x}{2}\right) - \phi\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= T\left(\frac{x}{2}\right) - x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

obtenemos (2). Finalmente, observemos que (3) = (1) - (2) y (4) = 2 · (2) - (1). \square

Proposición 2.2. Si $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface dos de las ecuaciones (1), (2), (3), (4), entonces F satisface las dos restantes.

Demostración. Según la observación realizada en la demostración de la proposición 2.1, basta advertir que (4) = (1) - 2 · (3). \square

Proposición 2.3. Si $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface dos de las ecuaciones (1), (2), (3), (4), entonces $F = T$ en D .

Demostración. Iterando la ecuación (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= -x + 2F\left(\frac{x}{2}\right) = -x + 2 \left[-\frac{x}{2} + 2F\left(\frac{x}{4}\right) \right] = \\ &= \dots = -mx + 2^m F\left(\frac{x}{2^m}\right) \end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$. Utilizando la ecuación (3), se tiene

$$F(x) = -mx + 2^m \left[F\left(\frac{x}{2^m} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2x}{2^m} - \frac{1}{2} \right]$$

Denotando $\xi_m(x) := \frac{x}{2^m} + \frac{1}{2}$, escribimos

$$F(\xi_m(x)) = \frac{1}{2^m} F(x) + \frac{x}{2^m} (m-2) + \frac{1}{2}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in [0, 1]. \quad (*)$$

A continuación, consideramos una k -tupla de enteros positivos (a_1, a_2, \dots, a_k) con $a_k \geq 2$ y definimos

$$a = \xi_{a_1} \circ \xi_{a_2} \circ \dots \circ \xi_{a_k}(1)$$

Observamos que

- Si $k = 1$, entonces

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{a_1}}$$

- Si $k \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned} a &= \xi_{a_1} (\xi_{a_2} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\xi_{a_2} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)}{2^{a_1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1+a_1}} + \frac{\xi_{a_3} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)}{2^{a_1+a_2}} \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{1+a_1}} + \frac{1}{2^{1+a_1+a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{1+a_1+\cdots+a_{k-1}}} + \frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_k}} \end{aligned}$$

Además, la aplicación $(a_1, a_2, \dots, a_k) \mapsto a$ es una biyección entre las k -tuplas de enteros positivos con $a_k \geq 2$ y los números diádicos $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ con exactamente $k + 1$ unos. Iterando la ecuación (*) para $k \geq 2$, escribimos

$$\begin{aligned} F(a) &= F(\xi_{a_1} (\xi_{a_2} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1))) \\ &= \frac{1}{2^{a_1}} F(\xi_{a_2} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)) + \frac{\xi_{a_2} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)}{2^{a_1}} (a_1 - 2) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{a_1}} F(\xi_{a_2} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)) + \left(a - \frac{1}{2}\right) (a_1 - 2) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{a_1}} \left[\frac{1}{2^{a_2}} F(\xi_{a_3} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)) + \frac{\xi_{a_3} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)}{2^{a_2}} (a_2 - 2) + \frac{1}{2} \right] + \\ &\quad + \left(a - \frac{1}{2}\right) (a_1 - 2) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{a_1+a_2}} F(\xi_{a_3} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)) + (a_2 - 2) \left(a - \frac{1}{2}\right) - (a_2 - 2) \frac{1}{2^{1+a_1}} + \\ &\quad + \frac{1}{2^{1+a_1}} + \left(a - \frac{1}{2}\right) (a_1 - 2) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{a_1+a_2}} F(\xi_{a_3} \circ \cdots \circ \xi_{a_k} (1)) + \left(a - \frac{1}{2}\right) (a_1 + a_2 - 4) - \\ &\quad - \frac{1}{2^{1+a_1}} (a_2 - 3) + \frac{1}{2} = \dots \end{aligned}$$

y, dado que $F(1) = 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} F(a) &= (a_1 + \cdots + a_k - 2k) \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^{a_1}} (a_2 + \cdots + a_k - 2k + 1) + \right. \\ &+ \frac{1}{2^{a_1+a_2}} (a_3 + \cdots + a_k - 2k + 3) + \cdots + \\ &\left. + \frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_{k-2}}} (a_{k-1} + a_k - 5) + \frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_{k-1}}} (a_k - 3) \right] \end{aligned}$$

Por tanto, los valores de F en los números diádicos del intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$ están completamente determinados. Como consecuencia de la expresión obtenida para a , de la ecuación (2), de que $F(0) = 0$ y $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, dichos valores también están totalmente determinados en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$. En consecuencia, $F = T$ en los números diádicos del intervalo $[0, 1]$. \square

Observemos que el resultado anterior implica que toda función continua que satisface dos de las ecuaciones (1),(2),(3),(4) entonces necesariamente es la función de Takagi. Sin embargo, podemos afirmar más.

Teorema 2.4 (H. Kairies, W. Darsow y M. Frank [57]). *La función de Takagi es la única función acotada que satisface dos de las ecuaciones funcionales (1),(2),(3),(4) en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}([0, 1])$ el espacio de Banach de las funciones reales acotadas en $[0, 1]$ dotado de la norma del supremo. Definimos la aplicación $\mathcal{S} : \mathcal{B}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{B}([0, 1])$ por

$$\mathcal{S}(F)(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{2}F(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x + \frac{1}{2}F(2x - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

para $F \in \mathcal{B}([0, 1])$. Por las ecuaciones (1) y (4), tenemos que $\mathcal{S}(T) = T$. Como la aplicación \mathcal{S} es contractiva, el teorema del punto fijo de Banach nos garantiza la existencia de un único punto fijo para dicha aplicación. \square

La derivabilidad en ningún punto de la función de Takagi puede obtenerse a través de las cuatro ecuaciones funcionales anteriores. La demostración de este resultado puede verse en [57, Teorema 2.1].

Proposición 2.5. *La función de Takagi es la única función acotada que satisface en $[0, 1]$ la ecuación funcional*

$$T(2x) = 2T(x) - 2\phi(x) \tag{5}$$

Demostración. Reescribiendo las ecuaciones (1) y (4) como:

$$\begin{aligned} T(2x) &= 2T(x) - 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ T(2x-1) &= 2T(x) - 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

y combinando ambas obtenemos (5). A continuación, sea $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que satisface (5). Iterando dicha ecuación obtenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= \phi(x) + \frac{1}{2}F(2x) = \phi(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}F(4x) + \phi(2x) \right] = \dots \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} \phi(2^n x) + \frac{1}{2^{m+1}} F(2^{m+1}x) \end{aligned}$$

para todo m . Haciendo $m \rightarrow \infty$, tenemos que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

□

La siguiente proposición es un resultado reciente, en concreto del año 2017.

Proposición 2.6 (L. Sadowski [88]). *La función de Takagi es la única función acotada que satisface la ecuación de simetría (1.3) y una de las ecuaciones (1), (4) en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Sea $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que satisface la ecuación de simetría (1.3). Si F cumple (1), considerando $x = 0$ en dicha ecuación y en la ecuación de simetría concluimos que $F(0) = F(1) = 0$. Si F cumple (4), considerando $x = 1$ en dicha ecuación y $x = 0$ en la ecuación de simetría obtenemos que $F(0) = F(1) = 0$.

A continuación, extendemos F a una función 1-periódica en \mathbb{R} definida por

$$F(x) = F(x - [x])$$

Además, para cada $x \in \mathbb{R}$ escribimos $x = n + t$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $t \in [0, 1)$. Por la ecuación de simetría

$$F(-x) = F(-n - t) = F(1 - t) = F(t) = F(n + t) = F(x)$$

Finalmente, probamos que F verifica la ecuación (5) y, por la proposición 2.5, $F = T$ en dicho intervalo.

Supongamos que F verifica (1). Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces se verifica (5). Por otra parte, si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} 2F(x) &= 2F(1-x) = F(2(1-x)) + 2(1-x) = \\ &= F(-2x) + 2\phi(x) = F(2x) + 2\phi(x) \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que F verifica (4). Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces

$$2F(x) = 2F\left(\frac{2x-1+1}{2}\right) = F(2x-1) + 2(1-x) = F(2x) + 2\phi(x)$$

Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces $1-x \in [\frac{1}{2}, 1]$, y por el caso anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} 2F(x) &= 2F(1-x) = F(2(1-x)) + 2\phi(1-x) = \\ &= F(-2x) + 2\phi(x) = F(2x) + 2\phi(x) \end{aligned}$$

□

A continuación, presentamos una generalización de las ecuaciones (1) y (4). Sea $k \in \mathbb{N}$ con representación binaria $k = \sum_{n=1}^m \varepsilon_n 2^{n-1}$ donde $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ para todo $n = 1, \dots, m$. Definimos la función $I: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$I(k) = \sum_{n=1}^m \varepsilon_n \quad (2.1)$$

Observemos que $I(2k) = I(k)$ y que $I(2k+1) = I(k) + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.7 (M. Krüppel [65]). Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. La función de Takagi satisface en $[0, 1]$ la ecuación funcional

$$T\left(\frac{k+x}{2^n}\right) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{n-2I(k)}{2^n}x + \frac{1}{2^n}T(x) \quad (6)$$

Demostración. Sea $n = 1$, si $k = 0$ la ecuación (6) es (1) y si $k = 1$ la ecuación (6) es (4). Sea $x \in [0, 1]$ y supongamos (6) cierta para $n \geq 1$. Por una parte, aplicando (6) a $\frac{x}{2}$, y utilizando (1), tenemos que

$$T\left(\frac{2k+x}{2^{n+1}}\right) = T\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) + \frac{n-2I(2k)}{2^{n+1}}x + \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}T(x)$$

Por otra parte, aplicando (6) a $\frac{x+1}{2}$, y utilizando (4), tenemos

$$T\left(\frac{2k+x+1}{2^{n+1}}\right) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{n-2I(2k)}{2^{n+1}}(x+1) + \frac{1-x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}T(x)$$

En particular, para $x = 0$ se tiene

$$T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{n-2I(2k)}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

De esta forma, escribimos

$$T\left(\frac{2k+1+x}{2^{n+1}}\right) = T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{n+1-2I(2k+1)}{2^{n+1}}x + \frac{1}{2^{n+1}}T(x)$$

□

Proposición 2.8 (M. Krüppel [65]). Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$. La función de Takagi satisface en $[0, 1]$ la ecuación funcional

$$T\left(\frac{k-x}{2^n}\right) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{2I(k-1)-n}{2^n}x + \frac{1}{2^n}T(x) \quad (7)$$

Demostración. Particularizando (6) en $k-1$ y $1-x$ tenemos que

$$T\left(\frac{k-x}{2^n}\right) = T\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + \frac{n-2I(k-1)}{2^n}(1-x) + \frac{1}{2^n}T(x) \quad (2.2)$$

para todo $x \in [0, 1]$. Si $x = 0$ entonces

$$T\left(\frac{k}{2^n}\right) = T\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + \frac{n-2I(k-1)}{2^n}$$

Así, reescribimos (2.2) obteniendo (7). □

Corolario 2.9. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$. La función de Takagi satisface en $[0, 1]$ la ecuación funcional

$$T\left(\frac{k+x}{2^n}\right) - T\left(\frac{k-x}{2^n}\right) = \frac{n-I(k)-I(k-1)}{2^{n-1}}x \quad (8)$$

Observación 2.10. Si $n = k = 1$ entonces la ecuación (8) es la ecuación de simetría (1.3).

Finalmente, presentamos una ecuación funcional para las funciones de Takagi de nivel n .

Proposición 2.11. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. La función de Takagi de nivel n , denotada por G_n , satisface en $[0, 1]$ la ecuación funcional

$$G_n\left(\frac{k+x}{2^{n+1}}\right) = G_n\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) + \frac{n+1-2I(k)}{2^{n+1}}x \quad (2.3)$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. La función G_n es lineal en el intervalo diádico $I_{k,n+1}$, y por tanto,

$$G_n \left(\frac{k+x}{2^{n+1}} \right) = G_n \left(\frac{k}{2^{n+1}} \right) + ax$$

para cierta pendiente $a \in \mathbb{Z}$. Como $T \left(\frac{k}{2^{n+1}} \right) = G_n \left(\frac{k}{2^{n+1}} \right)$ y $T \left(\frac{k+1}{2^{n+1}} \right) = G_n \left(\frac{k+1}{2^{n+1}} \right)$, particularizando la ecuación (6) en $x = 1$ tenemos que

$$G_n \left(\frac{k+1}{2^{n+1}} \right) - G_n \left(\frac{k}{2^{n+1}} \right) = \frac{n+1 - 2I(k)}{2^{n+1}}$$

obteniendo así (2.3). □

2.2 Sistema de ecuaciones en diferencias

Consideremos el espacio de Banach $\mathcal{C}([0, 1])$ formado por las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$ dotado con la norma del supremo y su base de Schauder (véase [21]) dada por

$$\begin{aligned} S_0(x) &= x, & S_1(x) &= 1 - x, & x &\in [0, 1] \\ S_{k,n}(x) &= \begin{cases} 2\phi(2^n x), & \text{si } x \in I_{k,n} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. El grafo de la función $S_{k,n}$ es un triángulo isósceles de altura uno cuya base está conformada por el intervalo $I_{k,n}$. Utilizando la función ψ descrita en la sección 1.1.1, expresamos

$$S_{k,n}(x) = \psi^{n+1}(x) \chi_{k,n}(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2.4)$$

donde $\chi_{k,n}$ denota la función característica en el intervalo $I_{k,n}$.

Toda función $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ se escribe de manera única a través de dicha base de Schauder como

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n} S_{k,n}(x)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0), & a_1 &= f(1) - f(0) \\ a_{k,n} &= f \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} \right) - \frac{1}{2} \left[f \left(\frac{k}{2^n} \right) + f \left(\frac{k+1}{2^n} \right) \right] \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Aplicando este resultado a la función de Takagi junto con la unicidad de los coeficientes de Schauder obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.12 (M. Hata y M. Yamaguti [48]). *La función de Takagi es la única solución continua del sistema de ecuaciones en diferencias*

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k}{2^n}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right] = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad (2.5)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $f(0) = f(1) = 0$.

Demostración. La continuidad de la función de Takagi en el intervalo $[0, 1]$ junto con $T(0) = T(1) = 0$ permiten expresar dicha función en la base de Schauder introducida anteriormente como

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n} S_{k,n}(x)$$

Utilizando la ecuación (2.4),

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n+1}} \chi_{k,n}(x) \right) \psi^{n+1}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n+1}} S_{k,n}(x) \end{aligned}$$

Por la unicidad de los coeficientes de la base de Schauder, tenemos que

$$a_{k,n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

para todo $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. En conclusión,

$$T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[T\left(\frac{k}{2^n}\right) + T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right] = \frac{1}{2^{n+1}}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. La ecuación (2.5) y las condiciones de contorno determinan unívocamente el valor de la función en el conjunto D , obteniendo así la unicidad de la solución continua. \square

Dada $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, se define el *laplaciano discreto* de f por

$$\Delta_{k,n} f = -2f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{k}{2^n}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \quad (2.6)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$.

Corolario 2.13. *La función de Takagi es la única solución continua del problema de contorno discreto*

$$-\Delta_{k,n} f = \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $f(0) = f(1) = 0$.

2.3 La función singular de Lebesgue y la función de Takagi

En 1957 G. de Rham obtuvo en [83] el siguiente resultado: dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ existe una única solución continua, denotada por L_α , del sistema de ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} L_\alpha(x) = \alpha L_\alpha(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ L_\alpha(x) = (1 - \alpha)L_\alpha(2x - 1) + \alpha, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Claramente, si $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces $L_\alpha(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$. Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, la solución L_α de (2.7) recibe el nombre de *función singular de Lebesgue*, también conocida como *función singular de De Rham*.

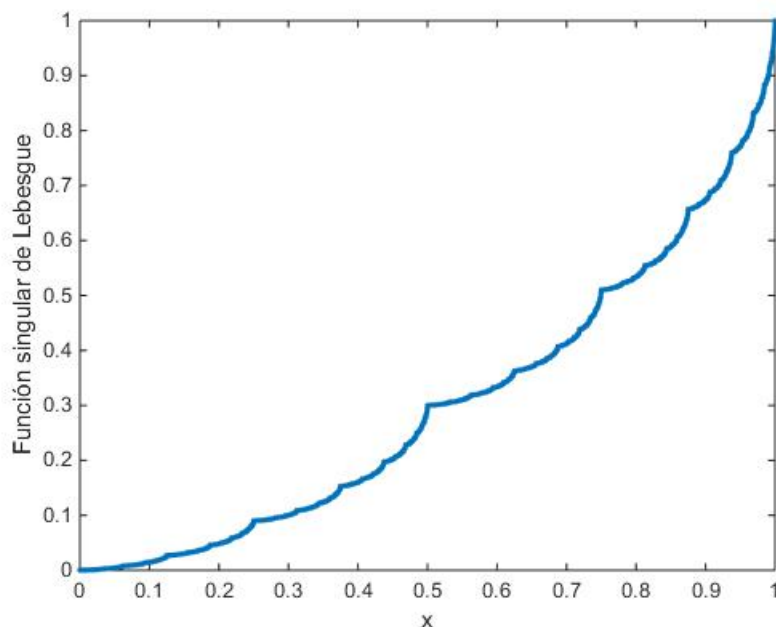


Figura 2.1: Función singular de Lebesgue, $\alpha = 0.3$.

Proposición 2.14. Sea $0 < \alpha < 1$. La función L_α es la única solución continua del sistema de ecuaciones en diferencias

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = (1 - \alpha)f\left(\frac{k}{2^n}\right) + \alpha f\left(\frac{k+1}{2^n}\right), \quad (2.8)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

Demostración. En primer lugar, utilizando (2.7) tenemos que $L_\alpha(1) = 1$ y $L_\alpha(0) = 0$. A continuación, procedemos por inducción sobre n . Si $n = 1$,

entonces $k \in \{0, 1\}$, y utilizando (2.7), tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= L_\alpha\left(\frac{1}{4}\right) = (1 - \alpha)L_\alpha(0) + \alpha L_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha^2 \\ 2\alpha - \alpha^2 &= L_\alpha\left(\frac{3}{4}\right) = (1 - \alpha)L_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha L_\alpha(1) = 2\alpha - \alpha^2\end{aligned}$$

Supongamos cierto (2.8) para $n-1$. En primer lugar, si $k \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$, entonces $\frac{k}{2^n}$, $\frac{k+1}{2^n}$ y $\frac{2k+1}{2^{n+1}}$ pertenecen al intervalo $[0, \frac{1}{2}]$. Utilizando (2.7) tenemos que

$$\begin{aligned}L_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) &= \alpha L_\alpha\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right), \quad L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = \alpha L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right), \\ L_\alpha\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) &= \alpha L_\alpha\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)\end{aligned}$$

y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos (2.8). En segundo lugar, si $k \in \{2^{n-1}, \dots, 2^n - 1\}$, entonces $\frac{k}{2^n}$, $\frac{k+1}{2^n}$ y $\frac{2k+1}{2^{n+1}}$ pertenecen al intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Utilizando (2.7) tenemos que

$$\begin{aligned}L_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) &= (1 - \alpha)L_\alpha\left(\frac{k - 2^{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \alpha \\ L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) &= (1 - \alpha)L_\alpha\left(\frac{k - 2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}\right) + \alpha\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo (2.7) y la hipótesis de inducción obtenemos que

$$\begin{aligned}L_\alpha\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) &= (1 - \alpha)L_\alpha\left(\frac{2(k - 2^{n-1}) + 1}{2^n}\right) + \alpha = \\ &= (1 - \alpha)\left[(1 - \alpha)L_\alpha\left(\frac{k - 2^{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \alpha L_\alpha\left(\frac{k - 2^{n-1} + 1}{2^{n-1}}\right)\right] + \alpha \\ &= (1 - \alpha)\left[L_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) - \alpha\right] + \alpha\left[L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \alpha\right] + \alpha \\ &= (1 - \alpha)L_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) + \alpha L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\end{aligned}$$

La ecuación (2.8) y las condiciones de contorno determinan unívocamente el valor de la función en el conjunto D , obteniendo así la unicidad de solución continua. \square

Proposición 2.15. *La función singular de Lebesgue L_α en $[0, 1]$ se escribe de manera única a través de la base de Schauder definida en 2.2 como*

$$L_\alpha(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \alpha^{n-I(k)} (1 - \alpha)^{I(k)} S_{k,n}(x) \quad (2.9)$$

Demostración. En primer lugar, $a_0 = L_\alpha(0) = 0$, $a_1 = L_\alpha(1) - L_\alpha(0) = 1$ y $a_{0,0} = \alpha - \frac{1}{2}$. Por la ecuación (2.8),

$$a_{k,n} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left[L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - L_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) \right], \quad n \in \mathbb{N}, k = 0, \dots, 2^n - 1$$

Si $k = 2l$ con $l \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} a_{2l,n} &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left[L_\alpha\left(\frac{2l+1}{2^n}\right) - L_\alpha\left(\frac{l}{2^{n-1}}\right) \right] \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left[(1-\alpha) L_\alpha\left(\frac{l}{2^{n-1}}\right) + \alpha L_\alpha\left(\frac{l+1}{2^{n-1}}\right) - L_\alpha\left(\frac{l}{2^{n-1}}\right) \right] \\ &= \alpha a_{l,n-1} \end{aligned}$$

Si $k = 2l + 1$ con $l \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} a_{2l+1,n} &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left[L_\alpha\left(\frac{l+1}{2^{n-1}}\right) - L_\alpha\left(\frac{2l+1}{2^n}\right) \right] \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left[L_\alpha\left(\frac{l+1}{2^{n-1}}\right) - (1-\alpha) L_\alpha\left(\frac{l}{2^{n-1}}\right) - \alpha L_\alpha\left(\frac{l+1}{2^{n-1}}\right) \right] \\ &= (1-\alpha) a_{l,n-1} \end{aligned}$$

En consecuencia, $a_{k,n} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \alpha^{n-I(k)} (1-\alpha)^{I(k)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. \square

Observemos que, para cada $x \in [0, 1]$, la serie de las derivadas con respecto al parámetro α de la expresión (2.9) es uniformemente convergente, y en consecuencia, la función singular de Lebesgue es C^1 con respecto al parámetro α .

Proposición 2.16. *La función singular de Lebesgue es estrictamente creciente en $[0, 1]$.*

Demostración. Según hemos visto en la demostración de la proposición 2.15,

$$L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - L_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) = \alpha^{n-I(k)} (1-\alpha)^{I(k)} > 0 \quad (2.10)$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. \square

Proposición 2.17. *La función singular de Lebesgue es derivable en casi todo punto de $(0, 1)$ con derivada nula.*

Demostración. Por la proposición 2.16, la función singular de Lebesgue es derivable en casi todo punto de $(0, 1)$. Supongamos que L_α es derivable en $z_0 \in (0, 1)$ tal que $L'_\alpha(z_0) \neq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

tal que $\frac{k_n}{2^n} \leq z_0 < \frac{k_n+1}{2^n}$. Si denotamos por $\theta_n = \alpha^{n-I(k_n)} (1-\alpha)^{I(k_n)}$ entonces

$$\frac{L_\alpha\left(\frac{k_n+1}{2^n}\right) - L_\alpha\left(\frac{k_n}{2^n}\right)}{2^{-n}} = 2^n \theta_n$$

Como $L'_\alpha(z_0) \neq 0$, se comprueba fácilmente que $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \theta_n \neq 0$. En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \theta_{n+1}}{2^n \theta_n} = 1 \quad (2.11)$$

Sin embargo,

$$\frac{2^{n+1} \theta_{n+1}}{2^n \theta_n} = 2 \frac{\alpha^{n-I(k_{n+1})} (1-\alpha)^{I(k_{n+1})}}{\alpha^{n-I(k_n)} (1-\alpha)^{I(k_n)}} \in \{2\alpha, 2(1-\alpha)\}$$

Como $\alpha \neq \frac{1}{2}$, obtenemos una contradicción con (4.6). \square

Las dos propiedades anteriores de la función singular de Lebesgue fueron estudiadas en primer lugar por R. Salem en [89]. Una vez introducida la función singular de Lebesgue así como sus características más relevantes, finalizamos esta sección estudiando la relación existente entre la función de Takagi y la función singular de Lebesgue.

Proposición 2.18 (M. Hata y M. Yamaguti [48]). *Para cada $x \in [0, 1]$ se verifica que*

$$\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} \right) (x) = 2T(x)$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Sea $h \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + h \in (0, 1)$. Por la proposición 2.14,

$$\begin{aligned} \frac{L_{\alpha+h}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - L_\alpha\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)}{h} &= (1-\alpha) \left[\frac{L_{\alpha+h}\left(\frac{k}{2^n}\right) - L_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)}{h} \right] + \\ &+ \alpha \left[\frac{L_{\alpha+h}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - L_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right)}{h} \right] + L_{\alpha+h}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - L_{\alpha+h}\left(\frac{k}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad (2.10), haciendo $h \rightarrow 0$ y particularizando en $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} \right) &= \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{k}{2^n} \right) + \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{k+1}{2^n} \right) \right] &+ \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Como la función singular de Lebesgue es C^1 con respecto al parámetro α , concluimos que la función $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} \right)$ es una solución continua del sistema de ecuaciones en diferencias (2.5) cuya única solución continua es la función de Takagi. En consecuencia, para cada $x \in [0, 1]$ se verifica

$$\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} \right) (x) = 2T(x)$$

□

CAPÍTULO 3

Estudio analítico de la función de Takagi

La función de Takagi es, probablemente, el ejemplo más sencillo de una función no derivable en ningún punto de $[0, 1]$. Sin embargo, admite cierto grado de derivabilidad. El término *nonsmooth analysis* hace referencia a extender las técnicas del cálculo diferencial en ausencia de diferenciabilidad. Por esta razón, el estudio de la función de Takagi desde un punto de vista analítico debe comenzarse estudiando su subdiferencial y su superdiferencial. En la siguiente sección, estudiamos las derivadas laterales de la función de Takagi así como la derivabilidad en sentido de Zygmund en $[0, 1]$. En la cuarta sección, establecemos la continuidad en sentido de Hölder de la función de Takagi para $0 < \alpha < 1$ obteniendo a través de la teoría desarrollada en el apéndice A la existencia y continuidad de derivadas fraccionarias de orden $0 < \beta < 1$. A continuación, estudiamos la función de Takagi desde la perspectiva de la derivabilidad aproximada y obtenemos que dicha función no satisface la propiedad de Lusin de clase C^1 en $[0, 1]$. Posteriormente, presentamos el rol de la función de Takagi en la teoría de la convexidad aproximada así como la noción de función Lipschitz convexa de orden θ probando que la función de Takagi satisface esta condición para $\theta(h) = h \ln(1/h)$. Finalmente, estudiamos la serie de Fourier de la función de Takagi.

3.1 Subdiferencial de la función de Takagi

El concepto de subdiferencial y sus diferentes nociones constituyen una de las temáticas centrales del *nonsmooth analysis*. A continuación, presentamos una breve introducción a algunos conceptos del *nonsmooth analysis* que pueden verse en mayor profundidad en [37] o en [24].

Definición 3.1. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente y $z_0 \in \mathbb{R}$. La *subdiferencial Fréchet de f en z_0* , denotada por $\partial f(z_0)$, se define como

$$\partial f(z_0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R} : \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \xi h}{|h|} \geq 0 \right\}$$

En términos de las derivadas de Dini, podemos caracterizar la subdiferencial Fréchet de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto z_0 como $\partial f(z_0) = [D^- f(z_0), d_+ f(z_0)] \cap \mathbb{R}$ donde

$$D^- f(z_0) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad d_+ f(z_0) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Ciertamente, la subdiferencial Fréchet de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto z_0 puede ser vacía, esto ocurre si, pero no sólo si, $d_+ f(z_0) < D^- f(z_0)$. En un nivel más restrictivo que la subdiferencial Fréchet se encuentra la subdiferencial proximal.

Definición 3.2. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente y $z_0 \in \mathbb{R}$. La *subdiferencial proximal de f en z_0* , denotada por $\partial_P f(z_0)$, se define como el conjunto de puntos $\xi \in \mathbb{R}$ que verifican la desigualdad proximal: existen $\delta, \sigma > 0$ tales que

$$f(z_0 + h) \geq f(z_0) + \xi h - \sigma |h|^2$$

para todo $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \delta$.

Una generalización inmediata de la subdiferencial proximal es la subdiferencial α -Hölder.

Definición 3.3. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente, $z_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha > 1$. La *subdiferencial α -Hölder de f en z_0* , denotada por $\partial_\alpha f(z_0)$, se define como el conjunto de puntos $\xi \in \mathbb{R}$ que verifican la siguiente desigualdad: existen $\delta, \sigma > 0$ tales que

$$f(z_0 + h) \geq f(z_0) + \xi h - \sigma |h|^\alpha$$

para todo $h \in \mathbb{R}$ con $|h| < \delta$.

Es inmediato ver que $\partial_{\alpha_2} f(z_0) \subset \partial_{\alpha_1} f(z_0) \subset \partial f(z_0)$ para todo $1 < \alpha_1 < \alpha_2$.

Finalmente, a partir de la subdiferencial Fréchet es posible definir la subdiferencial limiting.

Definición 3.4. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $z_0 \in \mathbb{R}$. La *subdiferencial limiting de f en z_0* , denotada por $\partial_L f(z_0)$, se define como

$$\partial_L f(z_0) = \left\{ \lim_n \xi_n : \xi_n \in \partial f(z_n) \text{ donde } \lim_n z_n = z_0 \right\}$$

Claramente, $\partial f(z_0) \subset \partial_L f(z_0)$.

En 2011, P. Gora y R. J. Stern [45] probaron que la función de Takagi tiene subdiferencial \mathbb{R} en los números diádicos y vacía en el complementario. Posteriormente, J. Ferrera y J. Gómez Gil [38] introdujeron una generalización de la función de Takagi obteniendo un resultado más general para espacios de Hilbert, y en particular, para la función de Takagi utilizando técnicas más sencillas. En la sección 5.2 del capítulo quinto presentamos la generalización introducida por J. Ferrera y J. Gómez Gil [38] y demostramos el resultado de P. Gora y R. J. Stern [45] comentado anteriormente en un contexto más general.

La función de Takagi, desde el punto de vista subdiferencial, constituye un caso extremo para funciones de variable real. En primer lugar, debido a que el conjunto de puntos donde la subdiferencial es no vacía es un conjunto denso, y en segundo lugar, debido a que la subdiferencial tiene cardinal mayor que uno en un conjunto a lo sumo numerable.

Teorema 3.5 (P. Gora y R. J. Stern [45]). *Para $\alpha > 1$, la función de Takagi satisface que $\partial_\alpha T(z_0) = \mathbb{R}$ si $z_0 \in D$ y $\partial_\alpha T(z_0) = \emptyset$ en otro caso.*

Corolario 3.6. *Si $z_0 \in D$ entonces $\partial T(z_0) = \mathbb{R}$.*

Corolario 3.7. *Para todo $z_0 \in [0, 1]$ se verifica que $\partial_L T(z_0) = \mathbb{R}$.*

3.2 Superdiferencial de la función de Takagi

Comenzamos esta sección estableciendo la notación así como los resultados previos que emplearemos.

Definición 3.8. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente y $z_0 \in \mathbb{R}$. La *superdiferencial de f en z_0* , denotada por $\partial^+ f(z_0)$, se define como

$$\partial^+ f(z_0) = \left\{ \xi \in \mathbb{R} : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \xi h}{|h|} \leq 0 \right\}$$

En términos de las derivadas de Dini, podemos caracterizar la superdiferencial de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto z_0 como $\partial^+ f(z_0) = [D^+ f(z_0), d_- f(z_0)] \cap \mathbb{R}$ donde

$$D^+ f(z_0) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad d_- f(z_0) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Al igual que la subdiferencial, la superdiferencial de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto z_0 puede ser vacía, en concreto sí, pero no sólo sí, $d_- f(z_0) < D^+ f(z_0)$. Además, es fácil ver que si $\partial f(z_0) \neq \emptyset$ y $\partial^+ f(z_0) \neq \emptyset$ entonces f es derivable en z_0 . Este resultado así como otros similares pueden verse en [37].

En [39], J. Ferrera y J. Gómez Gil estudiaron en detalle la superdiferencial de la función de Takagi.

Por la sección anterior, si $z_0 \in D$ entonces $\partial^+ T(z_0) = \emptyset$. Por esta razón, estudiamos el caso $z_0 \notin D$.

Proposición 3.9. *Si $z_0 \notin D$, entonces*

$$\begin{aligned} d_- T(z_0) &\leq \liminf_n G'_n(z_0) + 1 \\ D^+ T(z_0) &\geq \limsup_n G'_n(z_0) - 1 \end{aligned}$$

Demostración. Si $z_0 \notin D$, para todo n existen $x_n, y_n \in D_n$ tales que $z_0 \in (x_n, y_n)$ y $(x_n, y_n) \cap D_n = \emptyset$. Sea $c_n = \frac{x_n + y_n}{2} \in D_{n+1}$. De esta manera, $y_{n+1} = y_n$, $x_{n+1} = c_n$ si $z_0 > c_n$ y $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = c_n$ si $z_0 < c_n$. Por consiguiente, para $k < n$, o bien $(x_n, y_n) \subset (x_k, c_k) \subset (x_k, y_k)$, o bien $(x_n, y_n) \subset (c_k, y_k) \subset (x_k, y_k)$.

Para cada n definimos $x_n^* = 2x_n - z_0$. Como g_k es una función par y periódica de periodo 2^{-k} tenemos que $g_k(x_n^*) = g_k(z_0)$ para todo $k \geq n-1$. Por tanto,

$$T(x_n^*) - T(z_0) = \sum_{k < n-1} g_k(x_n^*) - g_k(z_0)$$

para todo n .

Si $x_{n-1} < x_n$ entonces $x_n^* \in (x_{n-1}, x_n) \subset (x_{n-1}, y_{n-1})$ y $g'_{n-1}(z_0) = -1$. Así, para $k < n-1$, o bien $x_n^*, z_0 \in (x_k, c_k)$, o bien $x_n^*, z_0 \in (c_k, y_k)$. Por tanto,

$$g_k(x_n^*) - g_k(z_0) = g'_k(z_0)(x_n^* - z_0)$$

para todo $k < n-1$ y, entonces

$$\frac{T(x_n^*) - T(z_0)}{x_n^* - z_0} = G'_{n-2}(z_0) = G'_{n-1}(z_0) + 1 \quad (3.1)$$

Debido a que $|g'_k(z_0)| = 1$ para todo k , la sucesión $\{G'_n(z_0)\}_n$ no converge y $\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) \geq 1$ si uno de ellos es finito. Además, existe una subsucesión $\{n_j\}_j$ tal que

$$\liminf_n G'_n(z_0) = \lim_j G'_{n_j-1}(z_0)$$

Como $z_0 \notin D$, la sucesión $\{x_n\}_n$ posee infinitos elementos distintos, y por tanto, podemos escoger $(n_j)_j$ satisfaciendo $x_{n_j-1} < x_{n_j}$ para todo j . Utilizando (3.1) obtenemos que

$$d_- T(z_0) \leq \lim_j \frac{T(x_{n_j}^*) - T(z_0)}{x_{n_j}^* - z_0} = \liminf_n G'_n(z_0) + 1$$

Finalmente, como T es una función par y $g_k(-z_0) = -g_k(z_0)$ para todo k , tenemos que

$$D^+T(z_0) = -d_-T(-z_0) \geq -\liminf_n G'_n(-z_0) - 1 = \limsup_n G'_n(z_0) - 1$$

□

Corolario 3.10. *Sea $z_0 \notin D$. Si uno de los límites $\limsup_n G'_n(z_0)$ o $\liminf_n G'_n(z_0)$ es infinito, o si ambos son finitos y*

$$\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) > 2$$

entonces $\partial^+T(z_0) = \emptyset$.

Demostración. En primer lugar, si $\limsup_n G'_n(z_0) = +\infty$ o $\liminf_n G'_n(z_0) = -\infty$ entonces $\partial^+T(z_0) = \emptyset$.

Si ambos límites son finitos y $\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) > 2$ entonces

$$D^+T(z_0) - d_-T(z_0) \geq \limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) - 2 > 0$$

y por tanto, $\partial^+T(z_0) = \emptyset$. □

Estudiamos el caso en que el $\limsup_n G'_n(z_0)$ y $\liminf_n G'_n(z_0)$ son números finitos, en particular deben ser números enteros y

$$\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) \in \{1, 2\}$$

Proposición 3.11. *Si $z_0 \in \mathbb{R}$, entonces*

$$g_n(z_0) + g_{n+1}(z_0) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad (3.2)$$

para todo n . Además, si $z_0 \notin D$, entonces $g_n(z_0) + g_{n+1}(z_0) = 2^{-(n+1)}$ si y sólo si $g'_n(z_0) + g'_{n+1}(z_0) = 0$.

Demostración. En primer lugar, escribimos

$$\begin{aligned} g_n(z_0) + g_{n+1}(z_0) &= \\ &= \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}} + (1 - 2\varepsilon_{n+1}) \sum_{k \geq n+2} \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{2^{n+2}} + (1 - 2\varepsilon_{n+2}) \sum_{k \geq n+3} \frac{\varepsilon_k}{2^k} = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} + \varepsilon_{n+2}) - 2(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} - 1) \sum_{k \geq n+3} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \end{aligned}$$

Observamos que $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} + \varepsilon_{n+2} = 0$ si y sólo si $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = 0$. En este caso,

$$g_n(z_0) + g_{n+1}(z_0) = 2 \sum_{k \geq n+3} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

siendo esta desigualdad estricta si $z_0 \notin D$. En otro caso, $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} + \varepsilon_{n+2} = 1$ obteniendo la desigualdad (3.2) y, si $z_0 \notin D$, $g_n(z_0) + g_{n+1}(z_0) = 2^{-(n+1)}$ si y sólo si $\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} = 1$. \square

Proposición 3.12. *Sea $z_0 \notin D$. Si $\limsup_n G'_n(z_0)$ y $\liminf_n G'_n(z_0)$ son finitos y*

$$\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) \in \{1, 2\}$$

entonces

$$d_-T(z_0) = \liminf_n G'_n(z_0) + 1$$

$$D^+T(z_0) = \limsup_n G'_n(z_0) - 1$$

Demostración. En primer lugar, denotamos por $S = \limsup_n G'_n(z_0)$, $I = \liminf_n G'_n(z_0)$ y por $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$, $\{c_n\}_n$ las sucesiones descritas en la demostración de la proposición 3.9.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G'_{n_0}(z_0) = I$ y $I \leq G'_n(z_0) \leq S$ para todo $n \geq n_0 - 1$. Esto implica que $g'_{n_0}(z_0) = -1$ y que

$$g'_{n_0+2k}(z_0) + g'_{n_0+2k+1}(z_0) = 0$$

para todo k . Por la proposición 3.11,

$$g_{n_0+2k}(z_0) + g_{n_0+2k+1}(z_0) = \frac{1}{2^{n_0+2k+1}}$$

para todo k . Sea $x^* \in (x_{n_0}, x)$, y por la proposición 3.11, obtenemos que

$$g_{n_0+2k}(z_0) + g_{n_0+2k+1}(z_0) - (g_{n_0+2k}(x^*) + g_{n_0+2k+1}(x^*)) \geq 0$$

concluyendo que

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq n_0+2k} g_j(z_0) - g_j(x^*) &= \\ &= \sum_{k \geq p} g_{n_0+2k}(z_0) + g_{n_0+2k+1}(z_0) - (g_{n_0+2k}(x^*) + g_{n_0+2k+1}(x^*)) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo $p \in \mathbb{N}$.

Como $x^* \in (x_{n_0}, x)$, existe $n > n_0$ tal que $x_{n-1} < x^* \leq x_n$. Esto implica que $g'_{n-1}(z_0) = -1$, y por tanto, $G'_{n-2}(z_0) = G'_{n-1}(z_0) + 1 \geq I + 1$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{T(x^*) - T(z_0)}{x^* - z_0} &= G'_{n-2}(z_0) + \frac{1}{x^* - z_0} \sum_{j \geq n-1} g_j(x^*) - g_j(z_0) \\ &\geq I + 1 + \frac{1}{z_0 - x^*} \sum_{j \geq n-1} g_j(z_0) - g_j(x^*) \end{aligned}$$

- (1) Si $\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) = 1$ entonces $G'_{n-2}(z_0) = I + 1$, y por tanto, $n = n_0 + 2p + 1$ para cierto p . Además, por 3.3, obtenemos que

$$\frac{T(x^*) - T(z_0)}{x^* - z_0} \geq I + 1$$

- (2) Si $\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) = 2$ y $G'_{n-2}(z_0) = I + 1$ entonces $n = n_0 + 2p + 1$ para cierto p , y por 3.3, obtenemos que

$$\frac{T(x^*) - T(z_0)}{x^* - z_0} \geq I + 1$$

- (3) Si $\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) = 2$ y $G'_{n-2}(z_0) = I + 2$ entonces $n = n_0 + 2p$ para cierto p . Como $|g_{n-1}(z_0) - g_{n-1}(x^*)| \leq |z_0 - x^*|$, por la expresión 3.3 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{T(x^*) - T(z_0)}{x^* - z_0} &= I + 2 + \frac{1}{z_0 - x^*} \sum_{j \geq n-1} g_j(z_0) - g_j(x^*) = \\ &= I + 2 + \frac{g_{n-1}(z_0) - g_{n-1}(x^*)}{z_0 - x^*} + \sum_{j \geq n} g_j(z_0) - g_j(x^*) \geq I + 1 \end{aligned}$$

Esto prueba que $d_-T(z_0) = \liminf_n G'_n(z_0) + 1$. Por último, la relación $D^+T(z_0) = \limsup_n G'_n(z_0) - 1$ se obtiene de manera inmediata a partir de la igualdad $D^+T(z_0) = -d_-T(-z_0)$. \square

Finalmente, recopilando los resultados obtenidos anteriormente caracterizamos la superdiferencial de la función de Takagi.

Teorema 3.13 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [39]). *Sea $z_0 \in \mathbb{R}$ y escribimos $z_0 = q + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-n}$ para cierto $q \in \mathbb{Z}$ y $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ para todo n .*

- (1) *Si $z_0 \in D$ entonces $\partial^+T(z_0) = \emptyset$.*
(2) *Si $z_0 \notin D$ y existe m tal que $\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} = 1$ para todo $n > m$ entonces*

$$\partial^+T(z_0) = \begin{cases} m - 2 \sum_{k=1}^m \varepsilon_k + [0, 1], & \text{si } \varepsilon_{m+1} = 0 \\ m - 2 \sum_{k=1}^m \varepsilon_k + [-1, 0], & \text{si } \varepsilon_{m+1} = 1 \end{cases}$$

- (3) *Si $z_0 \notin D$ no verifica (2) y existe m tal que $\varepsilon_{m+2k} + \varepsilon_{m+2k+1} = 1$ para todo k entonces*

$$\partial^+T(z_0) = \left\{ m - 2 \sum_{k=1}^m \varepsilon_k \right\}$$

(4) Si $z_0 \notin D$ no verifica (2) ni (3) entonces $\partial^+ T(z_0) = \emptyset$.

Nótese que si $z_0 \notin D$, la condición (2) es equivalente a $\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) = 1$ mientras que la condición (3) equivale a que

$$\limsup_n G'_n(z_0) - \liminf_n G'_n(z_0) = 2$$

3.3 Derivadas laterales y derivabilidad en sentido de Zygmund

Comenzamos esta sección estudiando las derivadas laterales de la función de Takagi. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del corolario 3.6 y la caracterización de la subdiferencial en términos de las derivadas de Dini.

Proposición 3.14. Si $z_0 \in D$, entonces $T'^+(z_0) = +\infty$ y $T'^-(z_0) = -\infty$.

Teorema 3.15 (F. S. Cater [22]). La función de Takagi no tiene derivada lateral finita en ningún punto de $[0, 1]$.

Demostración. Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $T'^+(z_0) = L$ para cierto $z_0 \in [0, 1]$. Por el proposición 3.14, $z_0 \notin D$. Para cada n , sean $u_n = k2^{-n}$ y $v_n = (k+1)2^{-n}$ tales que $(k-1)2^{-n} \leq z_0 < k2^{-n}$, para cierto $k \in \mathbb{Z}$. A continuación, definimos $\{r_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ como

$$T(u_n) - T(z_0) = (L + r_n)(u_n - z_0), \quad T(v_n) - T(z_0) = (L + s_n)(v_n - z_0)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} T(v_n) - T(u_n) &= (L + s_n)(v_n - z_0) - (L + r_n)(u_n - z_0) = \\ &= \frac{L}{2^n} + s_n(v_n - z_0) - r_n(u_n - z_0) \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$2^n (T(v_n) - T(u_n)) = L + 2^n s_n (v_n - z_0) - 2^n r_n (u_n - z_0)$$

Como $0 < u_n - z_0 < 2^{-n}$ y $0 < v_n - z_0 < 2^{1-n}$ se verifica que

$$|2^n (T(v_n) - T(u_n)) - L| \leq 2|s_n| + |r_n|$$

Debido a que $\lim_n r_n = \lim_n s_n = 0$ tenemos que

$$\lim_n 2^n (T(v_n) - T(u_n)) = L$$

Sin embargo,

$$2^n (T(v_n) - T(u_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (g_k(v_n) - g_k(u_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k'^+(u_n)$$

obteniendo así una contradicción ya que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} g_k'^+(u_n)$ no converge. \square

En [109], A. Zygmund introduce el concepto de función *smooth*, hoy conocido como derivabilidad en sentido de Zygmund.

Definición 3.16. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *derivable en sentido de Zygmund* en $z_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) + f(z_0 - h) - 2f(z_0)}{h} = 0$$

Es inmediato ver que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en z_0 entonces f es derivable en sentido de Zygmund en dicho punto. Además, si las derivadas laterales de f en z_0 son finitas y f es derivable en sentido de Zygmund en dicho punto es fácil ver que f es derivable en z_0 ya que, en ese caso, ambas derivadas laterales deben coincidir. El concepto de derivabilidad en sentido de Zygmund así como otros resultados relacionados pueden verse en detalle en [101].

Proposición 3.17. Si $z_0 \in D$, entonces T no es derivable en sentido de Zygmund en z_0 .

Demostración. Sea $z_0 \in D$ y supongamos que T es derivable en sentido Zygmund en z_0 . Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + h) - T(z_0)}{h} - \frac{T(z_0 - h) - T(z_0)}{-h} = 0$$

En particular, $T'^+(z_0) = T'^-(z_0)$, obteniendo una contradicción con la proposición 3.14. \square

3.4 Continuidad en sentido de Hölder

Al no ser derivable en ningún punto, la función de Takagi no es Lipchitz en $[0, 1]$. Sin embargo, verifica una propiedad más débil.

Definición 3.18. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua en sentido de Hölder* en $[0, 1]$ para $0 < \alpha < 1$ si existe una constante C_α tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\alpha |x - y|^\alpha$$

para todo $x, y \in [0, 1]$.

Teorema 3.19 (A. Shidfar y K. Sabetfakhri [94]). *La función de Takagi es continua en sentido de Hölder en $[0, 1]$ para todo $0 < \alpha < 1$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$. Consideremos $x \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |t| \leq 1$ y $x + t \in [0, 1]$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2^{-(n+1)} < |t| \leq 2^{-n}$, y en consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g_k(x+t) - g_k(x)| \leq n|t| \leq n2^{-n(1-\alpha)} |t|^\alpha$$

Como $|g_k(x+t) - g_k(x)| \leq 2^{-(k+1)}$ para todo k , tenemos que

$$\sum_{k=n}^{\infty} |g_k(x+t) - g_k(x)| \leq 2^{-n} \leq 2|t| \leq 2|t|^\alpha$$

Sumando ambas desigualdades obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x+t) - g_k(x)| \leq \left(2 + n2^{-n(1-\alpha)}\right) |t|^\alpha$$

Es claro que existe una constante C_α tal que $2 + n2^{-n(1-\alpha)} \leq C_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, y por consiguiente,

$$|T(x+t) - T(x)| \leq C_\alpha |t|^\alpha$$

para todo $x \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $x+t \in [0, 1]$. Finalmente, por el teorema 1.10, la función de Takagi no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$, y en consecuencia, T no es Hölder continua de orden $\alpha \geq 1$. \square

Si una función es continua en sentido de Hölder para $\alpha \in (0, 1)$, la dimensión de Hausdorff de su grafo es a lo sumo $2 - \alpha$. Este resultado así como otros similares pueden verse en [108, Teorema 1.3] o [34].

Corolario 3.20. *El grafo de la función de Takagi, como subconjunto del plano, tiene dimensión de Hausdorff uno.*

Demostración. Por el teorema 3.19, concluimos que la dimensión de Hausdorff del grafo de la función de Takagi es menor o igual que 1. Como la función de Takagi es continua, la dimensión de Hausdorff de su grafo es mayor o igual que uno, concluyendo que dicha dimensión es igual a uno. \square

Definición 3.21. Sean $f \in L_1([0, 1])$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 0$. Definimos la *integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β* de la función f como

$$D^{-\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt$$

donde Γ es la función Gamma.

Definición 3.22. Sean $f \in L_1([0, 1])$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 0$. Definimos la *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β* de la función f como

$$D^\beta f(x) = D^{\lceil \beta \rceil} \left[D^{-(\lceil \beta \rceil - \beta)} f(x) \right]$$

donde $\lceil \beta \rceil$ es el menor entero mayor o igual que β y D es el operador de derivación.

Utilizando la teoría desarrollada en el apéndice A, en concreto por el corolario A.11, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.23. *Para todo $0 < \beta < 1$, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β de la función de Takagi, denotada por $D^\beta T$, existe y es continua en $[0, 1]$.*

3.5 Derivabilidad aproximada en ningún punto

En [40], J. Ferrera y J. Gómez Gil probaron que la función de Takagi no es aproximadamente derivable en ningún punto de $[0, 1]$. Con el objetivo de presentar este resultado introducimos los siguientes conceptos.

Definición 3.24. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{R}$. Decimos que $l \in \mathbb{R}$ es el *límite aproximado de f en z_0* , denotado por

$$\text{ap } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ se verifica

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}((z_0 - r, z_0 + r) \cap \{|f - l| \geq \varepsilon\})}{2r} = 0$$

donde \mathcal{L} es la medida de Lebesgue.

Definición 3.25. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{R}$. Decimos que f es *aproximadamente derivable en z_0* si existe una aplicación lineal, denotada por $f'_{ap}(z_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\text{ap } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'_{ap}(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0$$

La aplicación $f'_{ap}(z_0)$ recibe el nombre de *derivada aproximada de f en z_0* .

Las nociones expuestas anteriormente pueden verse en profundidad en [32]. A partir de las definiciones 3.24 y 3.25 se demuestra sin dificultad el siguiente resultado.

Lema 3.26. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función aproximadamente derivable en un punto $z_0 \in \mathbb{R}$ con derivada aproximada $f'_{ap}(z_0)$. Entonces, para todo número real $\alpha > f'_{ap}(z_0)$ tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}\left(y \in (z_0 - r, z_0 + r) \setminus \{z_0\} : \frac{f(y) - f(z_0)}{y - z_0} \geq \alpha\right)}{2r} = 0$$

Análogamente, para todo número real $\beta < f'_{ap}(z_0)$ tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}\left(y \in (z_0 - r, z_0 + r) \setminus \{z_0\} : \frac{f(y) - f(z_0)}{y - z_0} \leq \beta\right)}{2r} = 0$$

Si $z_0 \notin D$ entonces para todo n existen $x_n, y_n \in D_n$ tales que $z_0 \in (x_n, y_n)$ y $(x_n, y_n) \cap D_n = \emptyset$. Para $k < n$ tenemos que $(x_n, y_n) \subset (x_k, y_k)$ y

$$g_k(x^*) - g_k(z_0) = g'_k(z_0)(x^* - z_0) \quad (3.4)$$

para todo $x^* \in [x_n, y_n]$.

Proposición 3.27. Sea $z_0 \notin D$. Si $g'_n(z_0) = 1$, entonces

$$\mathcal{L} \left(y : 0 < |z_0 - y| < 2^{-n}, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \leq G'_{n-1}(z_0) + \frac{2}{5} \right) \geq \frac{1}{2^{n+5}}$$

Análogamente, si $g'_n(z_0) = -1$, entonces

$$\mathcal{L} \left(y : 0 < |z_0 - y| < 2^{-n}, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \geq G'_{n-1}(z_0) - \frac{2}{5} \right) \geq \frac{1}{2^{n+5}}$$

Demostración. Si $g'_n(z_0) = 1$ entonces $y_n - z_0 > 2^{-(n+1)}$. Además, si $0 < t < 2^{-(n+5)}$ entonces

$$g_{n+k}(y_n - t) \leq \min \left\{ \frac{1}{2^{n+5}}, \frac{1}{2^{n+k+1}} \right\}$$

para todo k . Utilizando (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned} T(y_n - t) - T(z_0) &\leq G_{n-1}(y_n - t) - G_{n-1}(z_0) + \sum_{k=n}^{\infty} g_k(y_n - t) \leq \\ &\leq G'_{n-1}(z_0)(y_n - t - z_0) + \frac{5}{2^{n+5}} + \sum_{k>4} \frac{1}{2^{n+k+1}} = \\ &= G'_{n-1}(z_0)(y_n - t - z_0) + \frac{6}{2^{n+5}} \end{aligned}$$

Debido a que $y_n - z_0 - t \geq 2^{-(n+1)} - 2^{-(n+5)} = 15 \cdot 2^{-(n+5)}$ concluimos que

$$\frac{T(y_n - t) - T(z_0)}{y_n - t - z_0} \leq G'_{n-1}(z_0) + \frac{2}{5}$$

El caso $g'_n(z_0) = -1$ es análogo. \square

Proposición 3.28. Sea $z_0 \notin D$. Si uno de los límites $I = \liminf_n G'_n(z_0)$ o $S = \limsup_n G'_n(z_0)$ es finito, entonces T no es aproximadamente derivable en z_0 .

Demostración. Supongamos que I es finito y T es aproximadamente derivable en z_0 con derivada aproximada $T'_{ap}(z_0)$. Por tanto, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G'_n(z_0) \geq I$ para todo $n \geq n_0$ y una subsucesión $\{n_k\}_k$ tal que $G'_{n_k-1}(z_0) = I$ para todo k . Por la proposición 3.27,

$$\begin{aligned} &\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L} \left(y : 0 < |z_0 - y| < r, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \leq I + \frac{2}{5} \right)}{2r} \geq \\ &\geq \limsup_k \frac{\mathcal{L} \left(y : 0 < |z_0 - y| < 2^{-n_k}, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \leq G'_{n_k-1}(z_0) + \frac{2}{5} \right)}{2^{-n_k+1}} \geq \\ &\geq \frac{1}{2^6} > 0 \end{aligned}$$

Análogamente, como $G'_{n_k-2}(z_0) = I + 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}\left(y : 0 < |z_0 - y| < r, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \geq I + 1 - \frac{2}{5}\right)}{2r} \geq \\ & \geq \limsup_k \frac{\mathcal{L}\left(y : 0 < |z_0 - y| < 2^{-n_k+1}, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \geq G'_{n_k-2}(z_0) - \frac{2}{5}\right)}{2r} \geq \\ & \geq \frac{1}{2^6} > 0 \end{aligned}$$

Por el lema 3.26,

$$T'_{ap}(z_0) \leq I + \frac{2}{5} < I + 1 - \frac{2}{5} \leq T'_{ap}(z_0)$$

llegando así a una contradicción. \square

Proposición 3.29. *Sea $z_0 \notin D$. Si*

$$I = \liminf_n G'_n(z_0), \quad S = \limsup_n G'_n(z_0)$$

son infinitos, entonces T no es aproximadamente derivable en z_0 .

Demostración. Si $I = S$ el resultado es obvio. Por tanto, supongamos que $I = -\infty$, $S = +\infty$ y que T es aproximadamente derivable en z_0 con derivada aproximada $T'_{ap}(z_0)$. Por consiguiente, existe una subsucesión $\{n_k\}_k$ estrictamente creciente tal que $g'_{n_k+1}(z_0) = -1$ para todo k y $G'_{n_k}(z_0) \rightarrow +\infty$ cuando k tiende a ∞ .

Por el lema 3.26, dados $\alpha > T'_{ap}(z_0)$ y $\varepsilon = \frac{1}{64}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{L}\left(y \in (z_0 - r, z_0 + r) \setminus \{z_0\} : \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \geq \alpha\right) < \frac{1}{32}r \quad (3.5)$$

para $0 < r < \delta$. Si $G'_{n_k-1}(z_0) > \alpha + 1$ y $2^{-n_k} < \delta$, utilizando la proposición 3.27, tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left(y : 0 < |z_0 - y| < 2^{-n_k}, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \geq G'_{n_k-1}(z_0) - \frac{2}{5}\right) \geq \\ & \geq \frac{1}{2^{n_k+5}} = \frac{1}{32}2^{-n_k} \end{aligned}$$

obteniendo así una contradicción con (3.5). \square

De esta manera, aunando los resultados obtenidos anteriormente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.30 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [40]). *Si $z_0 \notin D$, entonces la función de Takagi no es aproximadamente derivable en z_0 .*

Finalmente, estudiamos el caso $z_0 \in D$.

Teorema 3.31 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [40]). *Si $z_0 \in D$, entonces la función de Takagi no es aproximadamente derivable en z_0 .*

Demostración. Si $z_0 \in D$ entonces existe n_0 tal que $z_0 \notin D_{n_0}$ y $z_0 \in D_{n_0+1}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2n_0$. Si $|h| < 2^{-(n+1)}$ entonces $g_k(z_0 + h) = |h|$ para todo k tal que $n_0 < k \leq n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} T(z_0 + h) - T(z_0) &\geq \sum_{k=1}^{n_0} (g_k(z_0 + h) - g_k(z_0)) + \sum_{k=n_0+1}^n g_k(z_0 + h) \geq \\ &\geq -n_0 |h| + (n - n_0) |h| = (n - 2n_0) |h| \end{aligned}$$

Este hecho implica que

$$\mathcal{L} \left(y : 0 < |z_0 - y| < \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{T(y) - T(z_0)}{y - z_0} \geq n - 2n_0 \right) \geq \frac{1}{4} 2^{-n}$$

Por el lema 3.26, la función de Takagi no es aproximadamente derivable en z_0 . \square

La derivabilidad aproximada está estrechamente relacionada con la propiedad de Lusin de clase C^1 . En [71, Teorema 1], F. C. Liu y W. S. Tai probaron que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Lusin de clase C^1 en \mathbb{R} si y sólo si f es aproximadamente derivable en casi todo punto de \mathbb{R} .

Definición 3.32. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f tiene la *propiedad de Lusin de clase C^1 en \mathbb{R}* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $g_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}) \leq \varepsilon$$

Corolario 3.33. *La función de Takagi no tiene la propiedad de Lusin de clase C^1 en $[0, 1]$.*

3.6 Convexidad aproximada y convexidad Lipschitz

Esta sección se divide en dos partes. La primera parte tiene como objetivo poner de manifiesto el papel de la función de Takagi en la teoría de la convexidad aproximada. En segundo lugar, presentamos el concepto de función Lipschitz convexa de orden θ y probamos que la función de Takagi satisface dicha propiedad para $\theta(h) = h \ln(1/h)$.

Definición 3.34. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es (ε, p) -mid convexa si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \varepsilon |x - y|^p, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si $p = 1$ entonces decimos que f es ε -Jensen convexa.

En 2004, A. Háy y Z. Páles probaron en [49, Teorema 4] la siguiente generalización de los resultados obtenidos por Ng y Nikodem en [79] y por Bernstein y Doetsch en [13].

Teorema 3.35 (A. Háy y Z. Páles [49]). *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función ε -Jensen convexa localmente acotada superiormente, entonces*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 2\varepsilon T(t)|y-x| \quad (3.6)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$.

Los autores de esta generalización no fueron capaces de determinar la optimalidad del coeficiente $T(t)$ en la desigualdad anterior. Esta cuestión se reducía a probar si la función de Takagi era $\frac{1}{2}$ -Jensen convexa, ya que en este caso tendríamos la identidad en (3.6) para $x = 1$ e $y = 0$. Este problema fue resuelto afirmativamente por Z. Boros en [17] basándose en numerosos cálculos y desigualdades. Sin embargo, a raíz del trabajo de J. Tabor y J. Tabor [98], J. Makó obtuvo en [73] una prueba más sencilla que presentamos a continuación.

En primer lugar, definimos las funciones $\Psi, \Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Psi(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(2^n x)}{4^n}, \quad \Theta(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^2(2^n x)}{2^n}$$

y la función $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como la extensión 1-periódica de la función $x \mapsto 4\phi(x)(1-\phi(x))$ para $x \in [0, 1]$.

Las proposiciones que presentamos a continuación tienen por objetivo demostrar que las tres funciones anteriores coinciden.

Proposición 3.36. *La función $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la única solución acotada de la ecuación funcional*

$$F(x) = 2\phi(x) + \frac{1}{4}F(2x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de las funciones reales acotadas en \mathbb{R} dotado de la norma del supremo. Definimos la aplicación $\mathcal{S} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{S}(F)(x) = 2\phi(x) + \frac{1}{4}F(2x)$$

Observamos que $\mathcal{S}(\Psi) = \Psi$. Como la aplicación \mathcal{S} es contractiva, el teorema del punto fijo de Banach nos garantiza la existencia de un único punto fijo para dicha aplicación. \square

De forma análoga, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.37. *La función $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la única solución acotada de la ecuación funcional*

$$F(x) = 4\phi^2(x) + \frac{1}{2}F(2x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

Como la función Φ es acotada y satisface las ecuaciones funcionales (3.7) y (3.8), el siguiente corolario es inmediato.

Corolario 3.38. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que*

$$\Phi(x) = \Theta(x) = \Psi(x)$$

Proposición 3.39. *La función $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $(1, 2)$ -mid convexa.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función 1-periódica tal que $f(x) = -x^2$ para $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En primer lugar, probamos que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x)+f(y)}{2} \leq \frac{1}{4}(y-x)^2, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

En efecto, como $\text{Im}(f) \subset [-\frac{1}{4}, 0]$ tenemos que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x)+f(y)}{2} \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Si $|y-x| \geq 1$ entonces se verifica (3.9). Si $|y-x| < 1$ basta considerar $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y $0 \leq y-x < 1$. Distinguimos tres casos:

– Si $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ entonces

$$-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{(y-x)^2}{4}$$

– Si $y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ y $\frac{x+y}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces

$$-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2+(y-1)^2) \leq \frac{(y-x)^2}{4}$$

– Si $y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ y $\frac{x+y}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$ entonces

$$-\left(\frac{x+y}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2+(y-1)^2) \leq \frac{(y-x)^2}{4}$$

En segundo lugar, como $\Phi(x) = 4f(x - \frac{1}{2}) + 1$ obtenemos que $\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2} \leq (y-x)^2$. Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x-y-2k \in [-1, 1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\Phi(x)+\Phi(y)}{2} = \\ & = \Phi\left(\frac{(x-k)+(y+k)}{2}\right) - \frac{\Phi(x-k)+\Phi(y+k)}{2} \\ & \leq [(x-k)-(y+k)]^2 = 4\phi^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq |x-y|^2 \end{aligned}$$

□

Proposición 3.40. Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$2T(x) = \Psi(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi(2^n x)}{2^n}$$

Demostración. Escribimos el término de la derecha como $2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi(2^k x)$. De esta manera, basta probar que $a_k = \frac{1}{2^k}$. En primer lugar, $a_0 = 1$. Para $k \geq 1$ tenemos que

$$a_k = \frac{1}{4^k} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{4^{k-1}} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{4^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right] = \frac{1}{2^k}$$

□

Teorema 3.41 (J. Makó [73]). La función de Takagi es $\frac{1}{2}$ -Jensen convexa.

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Utilizando los resultados anteriores,

$$\begin{aligned} 2T\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}[2T(x) + 2T(y)] &= \Psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}[\Psi(x) + \Psi(y)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\Psi\left(2^n \frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}[\Psi(2^n x) + \Psi(2^n y)] \right) \leq \\ &\leq 4\phi^2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 4\phi^2\left(2^n \frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2} \Theta\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2\phi^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ &= 2\phi\left(\frac{x-y}{2}\right) \left[1 - \phi\left(\frac{x-y}{2}\right) \right] + 2\phi^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\phi\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq |x-y| \end{aligned}$$

□

El concepto de función Lipschitz convexa de orden θ fue introducido por R. D. Mauldin y S. C. Williams en [77] con el objetivo de estudiar la dimensión de Hausdorff del grafo de las funciones que satisfacen dicha propiedad.

Definición 3.42. Para una función $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es *Lipschitz convexa de orden θ* si existe $M > 0$ tal que

$$|\Delta(x, y, \delta)| := |f(x + \delta y) - (\delta f(x + y) + (1 - \delta)f(x))| \leq M\theta(y)$$

para todo $x, y \in [0, 1]$ tales que $0 \leq x < x + y \leq 1$ y $\delta \in [0, 1]$.

Proposición 3.43. La función de Takagi es Lipschitz convexa de orden $\theta(y) = y \ln(1/y)$.

Demostración. Considerando $p \in \mathbb{N}$, escribimos

$$T(x) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^n} \phi(2^n x) + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{2^n} \phi(2^n x), \quad x \in [0, 1]$$

Sean $x, y \in [0, 1]$ tales que $0 \leq x < x + y \leq 1$ y $\delta \in [0, 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\Delta(x, y, \delta)| &= |T(x + \delta y) - (\delta T(x + y) + (1 - \delta)T(x))| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{p-1} g_n(x + \delta y) - g_n(x) - \delta [g_n(x + y) - g_n(x)] \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n=p}^{\infty} g_n(x + \delta y) - g_n(x) - \delta [g_n(x + y) - g_n(x)] \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{p-1} g_n(x + \delta y) - g_n(x) - \delta [g_n(x + y) - g_n(x)] \right| + 2 \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Como g_n es 1-Lipschitz para todo n ,

$$|\Delta(x, y, \delta)| \leq 2\delta y p + 2 \frac{1}{2^p} = 2\delta y p + 2 \frac{1}{2^p}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

Si elegimos $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-(p+1)} \leq y \leq 2^{-p}$ entonces $p \leq \frac{\ln(1/y)}{\ln 2}$. Sustituyendo en la expresión (3.10), tenemos que

$$|\Delta(x, y, \delta)| \leq \frac{2}{\ln 2} y \ln \left(\frac{1}{y} \right) + 2y$$

En consecuencia, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|\Delta(x, y, \delta)| \leq M \cdot y \ln \left(\frac{1}{y} \right)$$

□

3.7 Serie de Fourier

A cada función $f \in L^1(0, \tau)$, que se puede suponer prolongada a una función periódica de periodo τ sobre \mathbb{R} , se le asocian las series de Fourier, compleja y real,

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi n i x / \tau}$$

y

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{2\pi n x}{\tau} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi n x}{\tau} \right) \right]$$

cuyos coeficientes de Fourier vienen dados por

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(x) e^{-2\pi nix/\tau} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Proposición 3.44. *La serie de Fourier real asociada a la función ϕ es*

$$\phi(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ n \text{ impar}}} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

En su forma compleja,

$$\phi(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{n = -\infty, \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{e^{2\pi nix}}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Demostración. Como ϕ es una función real tenemos que $c_n = c_{-n}$ para todo n . De esta manera,

$$c_0 = \int_0^1 \phi(x) dx = \frac{1}{4}$$

y por tanto, $a_0 = \frac{1}{2}$. Integrando por partes, calculamos

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2\pi nix} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi ni}, & n \text{ par} \\ \frac{-1}{4\pi ni} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) e^{2\pi nix} = \begin{cases} \frac{-1}{4\pi ni}, & n \text{ par} \\ \frac{1}{4\pi ni} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Sumando ambas integrales, obtenemos que

$$c_n = c_{-n} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{-1}{\pi^2 n^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

El criterio de Dini nos garantiza la convergencia puntual de la serie de Fourier. \square

Proposición 3.45. *Los coeficientes de Fourier de la función de Takagi vienen dados por*

$$\widehat{T}(0) = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{T}(-n) = \widehat{T}(n) = \frac{-1}{2^p \pi^2 (2k+1)^2}, \quad n = 2^p (2k+1), \quad n \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{N}$$

y la correspondiente serie de Fourier coincide con la función.

Demostración. Utilizando la notación anterior, los coeficientes de Fourier de $\phi(2^m x)$ son

$$c_n^m = \begin{cases} c_{\frac{n}{2^m}} & \text{si } 2^m | n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $m \in \mathbb{Z}^+$. En consecuencia,

$$\widehat{T}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} c_n^m, \quad n \in \mathbb{Z}$$

En primer lugar, $\widehat{T}(0) = 2c_0 = \frac{1}{2}$. Como T es una función par tenemos que $\widehat{T}(-n) = \widehat{T}(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, para $n = 2^p(2k+1)$

$$\widehat{T}(n) = \sum_{m=0}^p \frac{1}{2^m} c_{2^{p-m}(2k+1)} = \frac{1}{2^p} \frac{-1}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

La continuidad en sentido de Hölder en $[0, 1]$ de la función de Takagi para $0 < \alpha < 1$ nos garantiza la convergencia puntual de la serie de Fourier. \square

Proposición 3.46. Sean $\{\widehat{T}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ los coeficientes de Fourier de la función de Takagi. La serie de potencias

$$F(z) = \frac{1}{2} \widehat{T}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.11)$$

converge absolutamente en el disco unidad cerrado definiendo una función continua en dicho disco y analítica en su interior. Además, F no es analítica en la frontera del disco unidad y verifica

$$F(e^{2\pi i \theta}) = \frac{1}{2} (T(\theta) + iT^*(\theta)), \quad \theta \in [0, 1]$$

donde $T^*(\theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n) \sin(2\pi n \theta)$, $\theta \in [0, 1]$ recibe el nombre de función de Takagi conjugada.

Demostración. Debido a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{T}(n)| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{T}(n)| = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^p (2k+1)^2 \pi^2} = \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{3}{4}$$

la serie de potencias (3.11) es absolutamente convergente y uniformemente convergente en el disco unidad cerrado definiendo una función continua en dicho disco y analítica en su interior.

Como la función de Takagi es par, se tiene

$$F(e^{2\pi i \theta}) + F(e^{-2\pi i \theta}) = 2\Re(F(e^{2\pi i \theta})) = T(\theta), \quad \theta \in [0, 1]$$

Además,

$$\begin{aligned} F\left(e^{2\pi i\theta}\right) - F\left(e^{-2\pi i\theta}\right) &= 2i \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n) \sin(2\pi\theta n) = \\ &= 2i\Im\left(F\left(e^{2\pi i\theta}\right)\right) = iT^*(\theta), \quad \theta \in [0, 1] \end{aligned}$$

Por tanto, la función F en la frontera del disco unidad viene dada por

$$F\left(e^{2\pi i\theta}\right) = \frac{1}{2}(T(\theta) + iT^*(\theta)), \quad \theta \in [0, 1]$$

La derivabilidad en ningún punto de la función de Takagi nos permite concluir que F no es analítica en la frontera del disco unidad. \square

La función de Takagi conjugada es una función impar 1–periódica. Utilizando la herramienta Maple he computado la gráfica de la función conjugada de Takagi a través de su desarrollo de Fourier (véase [B.2](#)).

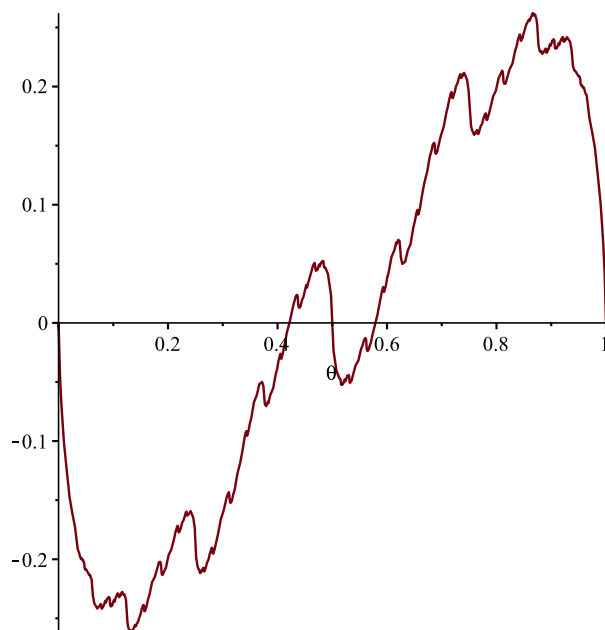


Figura 3.1: Función de Takagi conjugada en $[0, 1]$.

CAPÍTULO 4

Grafo de la función de Takagi

Este capítulo tiene por objetivo presentar la función de Takagi adoptando un enfoque desde las propiedades cualitativas de su grafo. Comenzamos estudiando el carácter auto-afín del grafo de la función de Takagi.

$$I_n(x) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad O_n(x) = n - I_n(x), \quad \delta_n(x) = O_n(x) - I_n(x)$$

para todo n y $x \in [0, 1]$.

Proposición 4.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $z_0 \in D_n \setminus \{1\}$. Entonces,

$$T\left(z_0 + \frac{y}{2^n}\right) = T(z_0) + \frac{1}{2^n} [T(y) + \delta_n(z_0)y] \quad (4.1)$$

para todo $y \in [0, 1]$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $z_0 \in D_n \setminus \{1\}$ e $y \in [0, 1]$. Por la ecuación (1.2),

$$G_{n-1}\left(z_0 + \frac{y}{2^n}\right) - G_{n-1}(z_0) = \frac{y}{2^n} \delta_n(z_0)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} T\left(z_0 + \frac{y}{2^n}\right) &= G_{n-1}\left(z_0 + \frac{y}{2^n}\right) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \phi\left(2^k \frac{y}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \phi\left(2^k y\right) = \\ &= G_{n-1}\left(z_0 + \frac{y}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} T(y) \end{aligned}$$

Como $T(z_0) = G_{n-1}(z_0)$, tenemos que

$$T\left(z_0 + \frac{y}{2^n}\right) = T(z_0) + \frac{1}{2^n} [T(y) + y\delta_n(z_0)]$$

□

A continuación, consideremos $z_0 \in D$. Decimos que z_0 es un número diádico equilibrado de índice $n \in \mathbb{Z}^+$ si $z_0 \in D_{2n}$ y $\delta_{2n}(z_0) = 0$.

Corolario 4.2. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y z_0 un número diádico equilibrado de índice n . Entonces,

$$T\left(z_0 + \frac{y}{2^{2n}}\right) = T(z_0) + \frac{1}{2^{2n}} T(y)$$

para todo $y \in [0, 1]$.

Observemos que el corolario 4.2 afirma que si z_0 es un número diádico equilibrado de índice n , entonces el grafo de la función de Takagi en el intervalo diádico $I_{k,2n}$ es una reproducción a escala $1 : \frac{1}{2^{2n}}$ del grafo de la función de Takagi en el intervalo $[0, 1]$ desplazada verticalmente $T(z_0)$.

Como ya vimos en la sección 3.4, al ser una función continua en el sentido de Hölder para todo $0 < \alpha < 1$, el grafo de la función de Takagi en $[0, 1]$ tiene dimensión de Hausdorff uno.

La primera sección de este capítulo está dedicada a determinar el valor máximo de la función de Takagi así como la estructura del conjunto de puntos donde se alcanza dicho máximo. Análogamente, estudiamos los extremos relativos de la función de Takagi. En la sección tercera, introducimos la noción de conjunto de nivel y estudiamos sus propiedades desde la perspectiva de los conjuntos de nivel locales introducidos por J. C. Lagarias y Z. Maddock [69]. Finalmente, desarrollamos un algoritmo teórico para calcular el valor de la función de Takagi en los números racionales. Además, he realizado una implementación de dicho algoritmo en Maple cuyo código puede verse en el apéndice B.

4.1 Valor máximo de la función de Takagi

El primer autor en estudiar el máximo absoluto de la función de Takagi así como las propiedades del conjunto de puntos donde se alcanza fue J. P. Kahane.

Teorema 4.3 (J. P. Kahane [54]). *El valor máximo de la función de Takagi en el intervalo $[0, 1]$ es $\frac{2}{3}$. Además, el conjunto de puntos donde se alcanza dicho máximo es el conjunto*

$$\mathcal{M} = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k} : a_k \in \{1, 2\} \right\}$$

siendo $\min \mathcal{M} = \frac{1}{3}$ y $\max \mathcal{M} = \frac{2}{3}$.

Demostración. Se comprueba fácilmente que

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} G_1(4^n x), \quad x \in [0, 1]$$

Observemos que

$$G_1(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \quad (4.2)$$

En consecuencia,

$$T(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}$$

y, $T(x) = \frac{2}{3}$ si y sólo si $G_1(4^n x) = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (4.2), $G_1(4^n x) = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}, \quad a_k \in \{1, 2\}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} = \frac{1}{3}$, concluimos que $\min \mathcal{M} = \frac{1}{3}$ y $\max \mathcal{M} = \frac{2}{3}$. \square

El siguiente resultado sobre la dimensión de Hausdorff del conjunto \mathcal{M} fue obtenido por Y. Baba en [9]. Sin embargo, hemos realizado una demostración alternativa, que presentamos a continuación, utilizando conceptos de la teoría de conjuntos autosemejantes.

Definición 4.4. Decimos que las funciones $S_1, \dots, S_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son *semejantes* si existen $0 < r_i < 1$ tales que

$$|S_i(x) - S_i(y)| = r_i |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

para todo $i = 1, \dots, m$. La constante r_i recibe el nombre de *razón de semejanza de S_i* . Si $m \geq 2$, decimos que $\{S_1, \dots, S_m\}$ es un *sistema iterativo de funciones*.

Proposición 4.5. Si $\{S_1, \dots, S_m\}$ es un sistema iterativo de funciones entonces existe un único conjunto compacto no vacío $F \subset \mathbb{R}$ tal que

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

En este caso, el conjunto F recibe el nombre de *atractor* o *conjunto autosemejante*.

Definición 4.6. Sean $\{S_1, \dots, S_m\}$ un sistema iterativo de funciones y $F \subset \mathbb{R}$ su atractor. Se define la *dimensión de autosemejanza de F* como la única solución s de la ecuación

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$$

Definición 4.7. Sea $\{S_1, \dots, S_m\}$ un sistema iterativo de funciones. Decimos que las funciones S_1, \dots, S_m satisfacen la *condición de conjunto abierto de Moran* si existe un conjunto $U \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(U) \subset U$$

y $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

En general, la dimensión de Hausdorff y la dimensión de autosemejanza de un atractor $F \subset \mathbb{R}$ no coinciden. Sin embargo, la condición de conjunto abierto de Moran nos garantiza su igualdad.

Teorema 4.8. *Sea $\{S_1, \dots, S_m\}$ un sistema iterativo de funciones satisfaciendo la condición de conjunto abierto de Moran y sea $F \subset \mathbb{R}$ su atractor. Entonces, la dimensión de Hausdorff y la dimensión de autosemejanza de F coinciden.*

Estos conceptos así como otros resultados similares pueden verse en profundidad en [34, Capítulo 9] y en [28, Secciones 6.4 y 6.5].

Proposición 4.9. *El conjunto \mathcal{M} es autosemejante con dimensión de autosemejanza y dimensión de Hausdorff igual a $\frac{1}{2}$.*

Demostración. En primer lugar, expresamos \mathcal{M} como

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k} : a_k \in \{1, 2\} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k} : a_k \in \{1, 2\} \right\}$$

A continuación, definimos

$$S_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x, \quad S_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

y observemos que ambas funciones son semejantes con razón de semejanza igual a $\frac{1}{4}$. Además, \mathcal{M} es compacto y,

$$\mathcal{M} = S_1(\mathcal{M}) \cup S_2(\mathcal{M})$$

Por tanto, el conjunto \mathcal{M} es autosemejante. La dimensión de autosemejanza es la solución s de la ecuación

$$\left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s = 1$$

Por consiguiente, la dimensión de autosemejanza es $s = \frac{1}{2}$. En segundo lugar, las funciones S_1, S_2 satisfacen la condición de conjunto abierto de Moran para el conjunto $U = (0, 1)$ ya que

$$S_1(0, 1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad S_2(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

Por el teorema 4.8, la dimensión de Hausdorff y la dimensión de autosemejanza coinciden. \square

Corolario 4.10. *El conjunto \mathcal{M} es totalmente desconexo, diseminado y tiene medida de Lebesgue cero.*

Proposición 4.11. *El conjunto \mathcal{M} es un conjunto perfecto.*

Demostración. En efecto, probemos que \mathcal{M} no tiene puntos aislados. Sea $x \in \mathcal{M}$ cuya representación es $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}$ con $a_k \in \{1, 2\}$. Consideremos la sucesión

$$x_n = x + \frac{3 - 2a_n}{4^n}$$

Observemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ y que $\lim_n x_n = x$. En consecuencia, x no es un punto aislado. \square

4.2 Extremos relativos

El conjunto de extremos relativos de la función de Takagi fue estudiado por J. P. Kahane [54]. Con posterioridad, M. Krüppel [65] profundizó en el trabajo realizado por J. P. Kahane obteniendo los resultados que presentamos en esta sección.

Al no ser derivable en ningún punto, la función de Takagi no es monótona en ningún subintervalo de $[0, 1]$.

Proposición 4.12. *El conjunto de mínimos locales de la función de Takagi es el conjunto D . Además, dichos mínimos son estrictos.*

Demostración. Sea $x \in D$. Por la proposición 3.14, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{|h|} = +\infty$$

Por tanto, x es un mínimo local estricto de T . Si $x \notin D$ es tal que $x \in I_{k,n+1}$, entonces $x = t \frac{k}{2^{n+1}} + (1-t) \frac{k+1}{2^{n+1}}$ para cierto $t \in (0, 1)$. Como

$$T\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = G_n\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right), \quad T\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) = G_n\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

tenemos que

$$T(x) > G_n(x) = tG_n\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) + (1-t)G_n\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

concluimos que $T(x) > \min \{T(k2^{-(n+1)}), T((k+1)2^{-(n+1)})\}$. En consecuencia, T no tiene un mínimo local propio en x . \square

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, denotaremos por $\mathcal{M}_{k,n}$ al conjunto de máximos absolutos de la función T restringida al intervalo $I_{k,n}$.

Teorema 4.13 (M. Krüppel [65]). *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. El conjunto $\mathcal{M}_{k,n}$ es un conjunto perfecto, diseminado y tiene medida de Lebesgue cero. Además,*

$$\max_{x \in I_{k,n}} T(x) = \begin{cases} T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{4^{I(k)}} \frac{2}{3} & \text{si } 2I(k) \geq n \\ T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) + \frac{1}{4^{n-I(k)}} \frac{2}{3} & \text{si } 2I(k) < n \end{cases}$$

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Por la proposición 2.11,

$$G_{n-1}\left(\frac{k+x}{2^n}\right) = G_{n-1}\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{n-2I(k)}{2^n}x, \quad x \in [0, 1]$$

La función G_{n-1} es lineal en el intervalo $I_{k,n}$ con pendiente $p = n - 2I(k)$. Según los resultados obtenidos en la sección 4.1, la función T alcanza su máximo en el intervalo $I_{k,n}$ en un conjunto perfecto diseminado de medida de Lebesgue cero. Por tanto, En primer lugar, consideremos $p = 0$. Utilizando la ecuación (6),

$$T\left(\frac{k+x}{2^n}\right) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}T(x), \quad x \in [0, 1]$$

En este caso,

$$\max_{x \in I_{k,n}} T(x) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \frac{2}{3}$$

En segundo lugar, consideremos $p < 0$. La función G_{n-1} es estrictamente decreciente en el intervalo $I_{k,n}$. Además, la función $G_{n-1+|p|}$ es decreciente en el intervalo $I_{k,n}$, y en particular, constante en el intervalo $I_{2^{|p|}k, n+|p|} \subset I_{k,n}$. En este caso, tenemos que

$$\begin{cases} G_{n-1+|p|}(x) = G_{n-1}\left(\frac{k}{2^n}\right) & \text{si } x \in I_{2^{|p|}k, n+|p|} \\ G_{n-1+|p|}(x) < G_{n-1}\left(\frac{k}{2^n}\right) & \text{si } x \in I_{k,n} \setminus I_{2^{|p|}k, n+|p|} \end{cases}$$

Por tanto, el máximo de T en el intervalo $I_{k,n}$ se encuentra en el intervalo $I_{2^{|p|}k, n+|p|}$. Utilizando la ecuación (6),

$$T\left(\frac{2^{|p|}k+x}{2^{n+|p|}}\right) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+|p|}}T(x), \quad x \in [0, 1]$$

Como $n + |p| = 2I(k)$, tenemos que

$$\max_{x \in I_{k,n}} T(x) = T\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{4^{I(k)}} \frac{2}{3}$$

Finalmente, consideremos $p > 0$. La función G_{n-1} es estrictamente creciente en el intervalo $I_{k,n}$. Además, la función G_{n-1+p} es creciente en el intervalo $I_{k,n}$, y en particular, constante en el intervalo $I_{2^p(k+1)-1, n+p} \subset I_{k,n}$. En este caso, tenemos que

$$\begin{cases} G_{n-1+p}(x) = G_{n-1}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) & \text{si } x \in I_{2^p(k+1)-1, n+p} \\ G_{n-1+p}(x) < G_{n-1}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) & \text{si } x \in I_{k,n} \setminus I_{2^p(k+1)-1, n+p} \end{cases}$$

En consecuencia, el máximo de T en el intervalo $I_{k,n}$ se encuentra en el intervalo $I_{2^p(k+1)-1, n+p}$. Utilizando la ecuación (7),

$$T\left(\frac{2^p(k+1) - x}{2^{n+p}}\right) = T\left(\frac{k+1}{2^{n+p}}\right) + \frac{1}{2^n}T(x), \quad x \in [0, 1]$$

Como $n+p = 2(n - I(k))$, tenemos que

$$\max_{x \in I_{k,n}} T(x) = T\left(\frac{k+1}{2^n}\right) + \frac{1}{4^{n-I(k)}} \frac{2}{3}$$

□

Corolario 4.14. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. El conjunto $\mathcal{M}_{k,n}$ es de primera categoría (unión numerable de conjuntos diseminados).

4.3 Conjuntos de nivel

El estudio de los conjuntos de nivel de la función de Takagi nace aproximadamente en el año 2005 con el trabajo de D. E. Knuth [62]. Para cada $y \in [0, \frac{2}{3}]$ el conjunto

$$L(y) = \{x \in [0, 1] : T(x) = y\}$$

recibe el nombre de conjunto de nivel en la ordenada y .

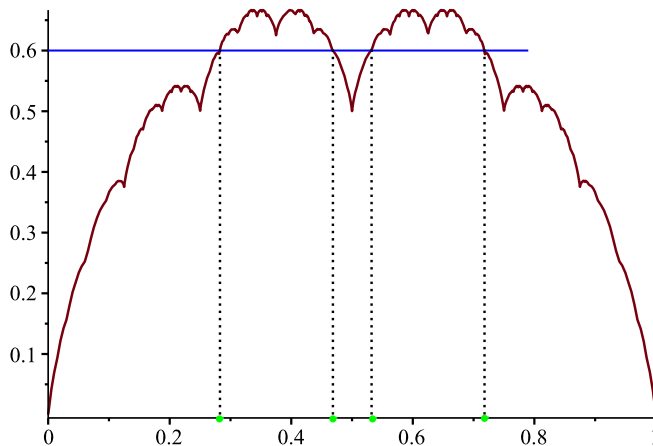


Figura 4.1: Conjunto de nivel en la ordenada $y = 0.6$.

En la sección 4.1 hemos probado que el conjunto de nivel $L\left(\frac{2}{3}\right)$ es un conjunto Cantor de dimensión de Hausdorff $\frac{1}{2}$. El estudio de los conjuntos de nivel de la función de Takagi puede realizarse desde el eje de abscisas o desde el eje de ordenadas. Debido a que los trabajos más recientes enfocan dicho estudio desde el eje de abscisas, los resultados que presentamos a lo largo de esta sección adoptan dicho enfoque.

En un primer momento, los conjuntos de nivel de la función de Takagi fueron estudiados desde el eje de ordenadas. En este sentido, los dos resultados más relevantes son los siguientes.

Teorema 4.15 (Z. Buczolich [20]). *El conjunto de nivel $L(y)$ es finito en casi todo punto de $\left[0, \frac{2}{3}\right]$*

Teorema 4.16 (P. C. Allaart [1]). *Para cada n , existe un conjunto no numerable de ordenadas y tales que $|L(y)| = 2n$.*

En 2012, J. C. Lagarias y Z. Maddock enfocaron el estudio de los conjuntos de nivel de la función de Takagi desde el eje de abscisas. En este sentido, presentamos los siguientes resultados.

Proposición 4.17. *Sea $x \in [0, 1]$ con expresión binaria $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$. Entonces,*

$$T(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\varepsilon_{n+1}} \frac{\delta_n(x)}{2^n} \right] \quad (4.3)$$

Demostración. En primer lugar,

$$\varepsilon_{n+1} O_{n+1}(x) + (1 - \varepsilon_{n+1}) I_{n+1}(x) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_{n+1}} \delta_n(x)$$

En efecto, basta observar que si $\varepsilon_{n+1} = 0$ entonces $\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \delta_n(x) = I_n(x) = I_{n+1}(x)$, y si $\varepsilon_{n+1} = 1$ entonces $\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \delta_n(x) = O_n(x) = O_{n+1}(x)$. A continuación, utilizando la definición original de la función de Takagi (1.5) obtenemos la expresión (4.3). \square

La expresión (4.3) para la función de Takagi fue introducida por J. C. Lagarias y Z. Maddock en [69, Sección 2] con el objetivo de obtener el siguiente resultado.

Lema 4.18. *Sean $x, y \in [0, 1]$. Si $|\delta_n(x)| = |\delta_n(y)|$ para todo n , entonces $T(x) = T(y)$.*

Demostración. Consideremos $x, y \in [0, 1]$. Sea $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N} : \delta_n(x) = 0\}$ y enumeramos sus elementos $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$. Si el conjunto \mathcal{U} es finito con $|\mathcal{U}| = p$ entonces añadimos a dicho conjunto el punto $n_p = +\infty$. Si existe $n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{U}$ entonces existe k tal que $n_k < n < n_{k+1}$ y $\delta_n(x) = -\delta_n(y)$.

Por tanto, $\varepsilon_j(x) = 1 - \varepsilon_j(y)$ para todo $n_k < j \leq n_{k+1}$. Como $\delta_{n_{k+1}}(x) = \delta_{n_{k+1}}(y) = 0$, tenemos que

$$\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} (-1)^{\varepsilon_{n+1}(x)} \frac{\delta_n(x)}{2^n} = \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} (-1)^{\varepsilon_{n+1}(y)} \frac{\delta_n(y)}{2^n}$$

Por (4.3), concluimos que $T(x) = T(y)$. \square

El lema anterior motiva las siguientes definiciones.

Definición 4.19. Sea $x \in [0, 1]$. Se denomina *conjunto balanceado asociado a x* , y se denota por $\mathcal{Z}(x)$, al conjunto

$$\mathcal{Z}(x) = \{n \in \mathbb{N} : \delta_n(x) = 0\} \cup \{+\infty\}$$

Además, enumeramos sus elementos como $0 = \xi_0^x < \xi_1^x < \xi_2^x < \dots$.

Observemos que, para $x \in [0, 1]$, si $n \in \mathcal{Z}(x)$ entonces n es par.

Definición 4.20. Sean $x \in [0, 1]$ con expresión binaria $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ y $k \geq 0$. Se denomina *k -ésimo bloque asociado a x* , y se denota por $B_k(x)$, al conjunto

$$B_k(x) = \{\varepsilon_j \in \mathbb{N} : \xi_k^x < j < \xi_{k+1}^x\}$$

A continuación, definimos las siguientes relaciones de equivalencia.

Definición 4.21. Sean $x_0, x_1 \in [0, 1]$, $n_0 \in \mathbb{Z} \cap [0, |\mathcal{Z}(x_0)| - 1]$ y $n_1 \in \mathbb{Z} \cap [0, |\mathcal{Z}(x_1)| - 1]$. Decimos que los bloques $B_{n_0}(x_0)$ y $B_{n_1}(x_1)$ son *equivalentes*, denotado por

$$B_{n_0}(x_0) \sim B_{n_1}(x_1)$$

si $\xi_{n_0}^{x_0} = \xi_{n_1}^{x_1}$ y $\xi_{n_0+1}^{x_0} = \xi_{n_1+1}^{x_1}$ y se verifica una de las siguientes afirmaciones:

- $B_{n_0}(x_0) = B_{n_1}(x_1)$.
- $B_{n_0}(x_0) = \overline{B_{n_1}(x_1)}$ donde el operador $\overline{}$ es la operación complemento de bits.

Definición 4.22. Sean $x_0, x_1 \in [0, 1]$. Decimos que x_0 y x_1 son *equivalentes*, denotado por $x_0 \sim x_1$, si se cumplen las dos siguientes afirmaciones:

- $\mathcal{Z}(x_0) \equiv \mathcal{Z}(x_1)$.
- $B_k(x_0) \sim B_k(x_1)$ para todo $k \geq 0$.

Las definiciones introducidas anteriormente nos permiten estudiar los conjuntos de nivel de la función de Takagi desde la noción de conjunto de nivel local.

Definición 4.23. Sea $x_0 \in [0, 1]$. Se define el *conjunto de nivel asociado a x_0* , y se denota por $L_{x_0}^{loc}$, como el conjunto

$$L_{x_0}^{loc} = \{x \in [0, 1] : x \sim x_0\}$$

Observación 4.24. Si $x \in [0, 1]$ entonces $x \sim 1 - x$. Además, $|L_x^{loc}| = 2^{|\mathcal{Z}(x)|}$.

A continuación, exponemos algunas propiedades fundamentales de los conjuntos de nivel locales. En primer lugar, por su definición como clases de equivalencia, dados dos conjuntos de nivel, o bien coinciden, o bien son disjuntos.

Proposición 4.25. *Los conjuntos de nivel locales son cerrados.*

Demostración. Consideremos $x_0 \in [0, 1]$. Si $L_{x_0}^{loc}$ es finito el resultado es inmediato. Por esta razón, suponemos que $L_{x_0}^{loc}$ es infinito. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \subset L_{x_0}^{loc}$ una sucesión de Cauchy tal que $\lim_n x_n = x^*$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que $B_k(x_n) = B_k(x_m)$ para todo $m > n \geq n_0(k)$. Como los conjuntos $\mathcal{Z}(x_n)$ coinciden para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$B_k(x^*) = B_k(x_n) \text{ para todo } n \geq n_0(k) \quad (4.4)$$

En consecuencia, $B_k(x^*) \sim B_k(x_0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la relación (4.4), los primeros k elementos de $\mathcal{Z}(x^*)$ coinciden con los primeros k elementos de $\mathcal{Z}(x_n)$ para todo $n \geq n_0(k)$. Haciendo $k \rightarrow \infty$ tenemos que $\mathcal{Z}(x_0) = \mathcal{Z}(x^*)$. En consecuencia, $x^* \in L_{x_0}^{loc}$. \square

Proposición 4.26. *Sean $x_0, x_1 \in [0, 1]$. Si $x_0 \sim x_1$ entonces $T(x_1) = T(x_0)$.*

Demostración. Sean $x_0, x_1 \in [0, 1]$ tal que $x_0 \sim x_1$. En primer lugar, suponemos que existe un único $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{k_0}(x_1) = \bar{B}_{k_0}(x_0)$ y $B_k(x_1) = \bar{B}_k(x_0)$ para todo $k \neq k_0$. En este caso, x_1 es la reflexión de x_0 respecto al centro del intervalo diádico de longitud $\frac{1}{2^{k_0}}$ que contiene a x_0 . Por la ecuación de simetría (1.3) y la ecuación de autosemejanza (4.1), tenemos que $T(x_0) = T(x_1)$.

En el caso general, mediante la complementación de los dígitos de los bloques de x_0 obtenemos una sucesión $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \subset L_{x_0}^{loc}$ tal que $T(\xi_n) = T(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\lim_n \xi_n = x_1$. Por la continuidad de la función de Takagi, $T(x_1) = \lim_n T(\xi_n) = T(x_0)$. \square

A continuación, denotamos por Ω^L el conjunto de todos los mínimos de los conjuntos de nivel locales. De esta manera, el siguiente resultado es consecuencia de los dos lemas anteriores.

Corolario 4.27. *Si $y \in [0, \frac{2}{3}]$ entonces*

$$L(y) = \bigcup_{\substack{x \in \Omega^L, \\ T(x) = y}} L_x^{loc} \quad (4.5)$$

Observación 4.28. Sea $x_0 \in [0, 1]$. Si el conjunto $\mathcal{Z}(x_0)$ es finito entonces $L_{x_0}^{loc}$ es finito y está constituido por todos los posibles puntos que se obtienen mediante la complementación y no complementación de los bloques de x_0 . Si el conjunto $\mathcal{Z}(x_0)$ es infinito entonces $L_{x_0}^{loc}$ es un conjunto de Cantor (no numerable, compacto, perfecto, totalmente desconexo y diseminado).

En virtud de la observación anterior, obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 4.29. *Sea $x \in [0, 1]$. El conjunto de nivel local L_x^{loc} es no numerable o finito.*

Corolario 4.30. *Sea $y \in [0, \frac{2}{3}]$. Si el conjunto de nivel $L(y)$ es numerable entonces es una unión disjunta numerable de conjuntos de nivel locales finitos.*

Cada número real del intervalo $[0, 1]$ puede ser interpretado en términos de *caminatas al azar* o *random walks* realizadas por el movimiento de una “partícula” en el plano situada inicialmente en el origen: consideremos $x \in (0, 1)$ con expresión binaria $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}$ y denotemos por s_k la posición de la “partícula” en el instante $k \in \mathbb{N}$. En el instante inicial $s_0 = 0$, y en cada instante k la partícula realiza un paso en la dirección positiva (+1) si $\varepsilon_k = 0$, o un paso en la dirección negativa (-1) si $\varepsilon_k = 1$. Concretamente, en el instante k la posición de la partícula en la caminata viene dada por

$$s_k = s_0 \sum_{j=1}^k (-1)^{\varepsilon_j}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Utilizando la terminología de las caminatas al azar, diremos que la partícula retorna al origen en el instante $k \in \mathbb{Z}^+$ si $s_k = 0$. En este sentido, cada punto $x \in [0, 1]$ describe un única caminata (adoptando la expresión binaria terminada en infinitos ceros para los números diádicos).

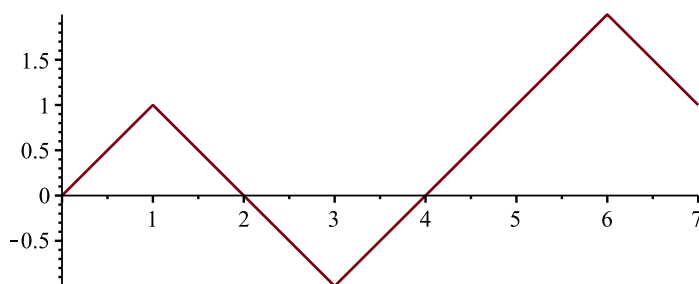


Figura 4.2: Caminata en el instante séptimo para $x = 0.011000101$.

Considerando la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, la elección aleatoria de un punto del intervalo $[0, 1]$ con distribución uniforme es equivalente, en términos de probabilidad, a la elección de una caminata al azar con pasos

equiprobables. Este resultado puede verse en [16, Sección 3]. La propiedad fundamental de una caminata al azar en dimensión uno con pasos equiprobables es que, con probabilidad uno, retorna al origen en infinitos instantes de tiempo. Además, con probabilidad uno, el número de veces que una caminata al azar retorna al origen en los n primeros instantes es $o(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Este resultado así como un desarrollo en profundidad de la teoría de caminatas al azar puede verse en [36, Capítulo 12].

Observación 4.31. Dado $x \in [0, 1]$, el conjunto $\mathcal{Z}(x)$ puede ser interpretado como el conjunto de instantes donde la caminata asociada a x retorna al origen.

Lema 4.32. *Sea $x \in [0, 1]$. Si el número de retornos al origen en los primeros n instantes de tiempo de la caminata asociada a x es $o(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $\dim_H L_x^{loc} = 0$.*

Demostración. Sea $x \in [0, 1]$ y consideremos el conjunto $\mathcal{Z}(x)$ denotando sus elementos por $(\xi_k^x)_k$. En primer lugar, la hipótesis sobre la caminata asociada a x implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\xi_k^x} = 0 \quad (4.6)$$

En segundo lugar, para cada k podemos recubrir L_x^{loc} por 2^k intervalos de longitud $2^{-\xi_k^x}$, denotando este recubrimiento por \mathcal{C}_k . Como consecuencia de (4.6), para $\delta > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{I \in \mathcal{C}_k} \text{diam}(I)^\delta = 2^k 2^{-\delta \xi_k^x} = 0$$

Por tanto, $\dim_H L_x^{loc} = 0$. □

Teorema 4.33 (J. C. Lagarias y Z. Maddock [69]). *El conjunto de nivel local L_x^{loc} es un conjunto de Cantor con dimensión de Hausdorff cero en casi todo punto $x \in [0, 1]$.*

Demostración. Por la observación 4.31 tenemos que, con probabilidad uno, el conjunto $\mathcal{Z}(x)$ es infinito, y por tanto, con probabilidad uno, el conjunto de nivel local L_x^{loc} es un conjunto de Cantor. En términos de la medida de Lebesgue, el conjunto de nivel local L_x^{loc} es un conjunto de Cantor en casi todo punto de $[0, 1]$. El lema 4.32 implica que $\dim_H L_x^{loc} = 0$. □

Corolario 4.34. *El conjunto de nivel $L(T(x))$ es no numerable en casi todo punto $x \in [0, 1]$.*

4.3.1 Conjuntos de nivel locales en los números racionales

Teorema 4.35 (J. C. Lagarias y Z. Maddock [69]). *Sea $x \in \mathbb{Q}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (1) *El conjunto de nivel local L_x^{loc} tiene dimensión de Hausdorff positiva.*
- (2) *El conjunto de nivel local L_x^{loc} es no numerable.*
- (3) *La expresión binaria de x tiene una parte periódica pura con el mismo número de ceros y unos, y una parte preperiódica con el mismo número de ceros y unos.*

Demostración. En primer lugar, es inmediato ver que (1) implica (2). En segundo lugar, probemos que (2) implica (3). Sea $x \in \mathbb{Q}$ y consideremos el conjunto $\mathcal{Z}(x)$. En este caso, observemos que la condición (3) es equivalente a que el conjunto $\mathcal{Z}(x)$ sea infinito. Por la observación 4.24, L_x^{loc} es no numerable si y sólo si el cardinal de $\mathcal{Z}(x)$ es infinito.

En tercer lugar, probemos que (3) implica (1). Por la invarianza geométrica de la dimensión de Hausdorff podemos suponer sin pérdida de generalidad que x es periódico puro, es decir, $x = 0.\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r)^\infty$ siendo r la longitud de la parte periódica. Supongamos que dichos r dígitos dan lugar a k bloques siendo $0 \leq k \leq \frac{r}{2}$ y sean q_1, \dots, q_{2^k} todos los posibles números diádicos obtenidos mediante la complementación y no complementación de los bloques de $q_1 = 0.\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r$. A continuación, definimos

$$\psi_p(x) = q_p + \frac{x}{2^r}, \quad p = 1, \dots, 2^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

y observemos que dichas funciones son semejantes con razón de semejanza igual a 2^{-r} . Además, L_x^{loc} es compacto y,

$$L_x^{loc} = \bigcup_{p=1}^{2^k} \psi_p(L_x^{loc})$$

Por tanto, el conjunto L_x^{loc} es autosemejante. La dimensión de autosemejanza se define como la solución s de la ecuación

$$2^k \left(\frac{1}{2^r}\right)^s = 1$$

En consecuencia, la dimensión de autosemejanza es $s = \frac{k}{r}$. Como las funciones $\psi_1, \dots, \psi_{2^k}$ satisfacen la condición de conjunto abierto de Moran para el conjunto $U = (0, 1)$, por [34, Teorema 9.3], la dimensión de Hausdorff de L_x^{loc} coincide con la dimensión de autosemejanza. Por tanto, $\dim_H L_x^{loc} = \frac{k}{r} > 0$. \square

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la demostración del teorema anterior.

Corolario 4.36. *Sea $x \in \mathbb{Q}$ satisfaciendo una de las afirmaciones del teorema 4.35. Entonces,*

$$\dim_H L_x^{loc} = \frac{k}{r}$$

siendo r la longitud de la parte periódica de x y k el número de elementos de $\mathcal{Z}(x)$ pertenecientes a dicha parte periódica.

Corolario 4.37. *Si $x \in D$ entonces L_x^{loc} es finito.*

4.4 La función de Takagi en los números racionales

En esta sección mostramos el desarrollo teórico del algoritmo presentado por D. E. Knuth en [62] para calcular de manera exacta el valor de la función de Takagi en los números racionales.

Teorema 4.38 (D. E. Knuth [62]). *Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $T(x) \in \mathbb{Q}$.*

Demostración. Como $T(0) = T(1) = 0$, consideramos $x = \frac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$.

En primer lugar, supongamos que q es par. Por tanto, expresamos $q = 2^m q'$ para ciertos $m, q' \in \mathbb{N}$ siendo q' un número impar. Además, observamos que

$$\phi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\min\{p, q-p\}}{q}$$

Sean

$$\begin{aligned} q_0 &= q & p_0 &= \min\{p, q-p\} \\ q_j &= \frac{q_{j-1}}{2} & p_j &= \min\{p_{j-1}, q_j - p_{j-1}\} \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, m$. Utilizando la ecuación de simetría (1.3), obtenemos que

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = T\left(\frac{p-q}{q}\right)$$

Iterando m veces la ecuación (5) calculamos

$$\begin{aligned} T\left(\frac{p_0}{q}\right) &= \frac{1}{2}T\left(\frac{p_0}{q_1}\right) + \frac{p_0}{q} = \frac{1}{2}T\left(\frac{p_1}{q_1}\right) + \frac{p_0}{q} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}T\left(2 \cdot \frac{p_1}{q_1}\right) + \phi\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right] + \frac{p_0}{q} = \frac{1}{4}T\left(\frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{p_1}{q} + \frac{p_0}{q} \\ &= \dots\dots\dots (m-2 \text{ veces}) \\ &= \frac{1}{2^m}T\left(\frac{p_m}{q'}\right) + \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{m-1} p_j \end{aligned}$$

En consecuencia, si denotamos por $p' = p_m$, tenemos que

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{2^m} T\left(\frac{p'}{q'}\right) + \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{m-1} p_j$$

Por consiguiente, sin pérdida de generalidad, podemos suponer q impar. Sean

$$\begin{aligned} p_0 &= \min\{p, q - p\} \\ p_j &= \min\{2p_{j-1}, q - 2p_{j-1}\}, \quad j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

y, por la ecuación de simetría (1.3), obtenemos que

$$T\left(\frac{p_j}{q}\right) = \frac{1}{2} T\left(\frac{2p_j}{q}\right) + \frac{p_j}{q} = \frac{1}{2} T\left(\frac{p_{j+1}}{q}\right) + \frac{p_j}{q} \quad j \in \mathbb{Z}^+$$

Como consecuencia de las definiciones anteriores, tenemos que $p_j \equiv \pm 2p_{j+1} \pmod{q}$, luego $p_j \equiv \pm 2^j p_0 \pmod{q}$ para $j \in \mathbb{Z}^+$. Como q es impar, por el teorema de Euler

$$2^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod{q}$$

siendo φ la función indicatriz de Euler. Por consiguiente, $p_{\varphi(q)} \equiv p_0 \pmod{q}$, y por tanto,

$$T\left(\frac{p_{\varphi(q)}}{q}\right) = T\left(\frac{p_0}{q}\right)$$

En consecuencia, iterando $\varphi(q)$ veces la ecuación (5)

$$T\left(\frac{p_0}{q}\right) = \frac{1}{2^{\varphi(q)}} T\left(\frac{p_{\varphi(q)}}{q}\right) + \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{\varphi(q)-1} \frac{1}{2^j} p_j$$

Finalmente,

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q(2^{\varphi(q)} - 1)} \sum_{j=0}^{\varphi(q)-1} 2^{\varphi(q)-j} p_j \quad (4.7)$$

□

Observemos que el teorema de Euler nos garantiza la existencia de un entero positivo l tal que $p_l \equiv p_0 \pmod{q}$. Si denotamos por

$$k = \min\left\{l \in \mathbb{N} : 2^l \equiv \pm 1 \pmod{q}\right\}$$

entonces $k \leq \varphi(q)$.

Lema 4.39. *Sea $\text{ord}_q(2)$ el menor número entero positivo n tal que $2^n \equiv 1 \pmod{q}$, entonces*

$$k = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ord}_q(2), & \text{si } q|2^{j_0} + 1 \text{ para cierto } j_0 \in \mathbb{N} \\ \text{ord}_p(2), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Observemos que el resultado se verifica de manera inmediata si $q = 3$ ya que $\text{ord}_3(2) = 2$, $(2^2 \equiv 1 \pmod{3})$ y $2^1 \equiv -1 \pmod{3}$ implican necesariamente $k = 1$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos $q > 3$. Por tanto, $2 \leq k$ y $3 \leq \text{ord}_q(2)$. En primer lugar, si para ningún $j \in \mathbb{N}$ se satisface que $2^j \equiv -1 \pmod{q}$, entonces $2^k \equiv 1 \pmod{q}$ y, por tanto, $k = \text{ord}_q(2)$.

En segundo lugar, si existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j_0} \equiv -1 \pmod{q}$ entonces $k \leq j_0$. El algoritmo de la división nos garantiza la existencia de enteros m y r con $0 \leq r < k$ tales que $j_0 = mk + r$.

Si $2^k \equiv 1 \pmod{q}$ entonces $-1 \equiv 2^{j_0} \equiv 2^r \pmod{q}$, obteniendo una contradicción ya que $r < k$. Por tanto, necesariamente $2^k \equiv -1 \pmod{q}$. Esto implica que $k < \text{ord}_q(2)$ y $2^{2k} \equiv 1 \pmod{q}$, y por consiguiente, tenemos que $\text{ord}_q(2) | 2k$. Si $\text{ord}_q(2)$ no es par entonces $\text{ord}_q(2) | k$, obteniendo una contradicción ya que $k < \text{ord}_q(2)$. Finalmente, $\text{ord}_q(2)$ es par y $\frac{\text{ord}_q(2)}{2}$ divide a k , y por tanto, $k = \frac{\text{ord}_q(2)}{2}$. \square

El lema 4.39 nos permite concluir que se precisan únicamente k iteraciones de la ecuación funcional (5) para expresar $T\left(\frac{p}{q}\right)$ en términos de dicho número racional. De esta forma,

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q(2^k - 1)} \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-j} p_j$$

He implementado un algoritmo en Maple que nos permite computar el valor de la función de Takagi en los números racionales. Este algoritmo se muestra en detalle en el apéndice B. Los siguientes valores de la función de Takagi han sido computados utilizando dicho algoritmo:

$$T\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{256}{819}$$

$$T\left(\frac{23}{31}\right) = \frac{520}{961}$$

$$T\left(\frac{17}{54}\right) = \frac{17477}{27594}$$

$$T\left(\frac{33}{72}\right) = \frac{21}{32}$$

$$T\left(\frac{1}{203}\right) = \frac{254896236364957388633462}{6447604371278022265099605}$$

$$T\left(\frac{1}{605}\right) = \frac{101366897985272772807008}{6447604371278022265099605}$$

CAPÍTULO 5

Generalizaciones de la función de Takagi

Este capítulo tiene como objetivo presentar las generalizaciones más relevantes de la función de Takagi así como estudiar sus características fundamentales. Las diferentes generalizaciones buscan extender las propiedades de la función de Takagi. Por esta razón, en algunos casos obtendremos resultados análogos a los presentados en los capítulos anteriores para la función de Takagi.

5.1 Funciones de Takagi-Van der Waerden

Una primera generalización de la función de Takagi es la familia de funciones $F_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \phi(r^n x), \quad r \in \mathbb{N}, r \geq 2$$

denominada *funciones de Takagi-Van der Waerden*. Esta clase de funciones fue introducida por H. Whitney en [106]. La función F_2 es la función de Takagi y F_{10} es la función de Van der Waerden definida en [103].

Para cada entero $r \geq 2$, F_r es una función continua no derivable en ningún punto de $[0, 1]$. Actualmente, no se ha conseguido determinar el conjunto de puntos donde F_r tiene derivada infinita. En [95], A. Shidfar y K. Sabetfakhri probaron que F_r es Hölder continua para $0 < \alpha < 1$. Además, para $x \in [0, 1]$ se verifica

$$-1 \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{F_r(x+h) - F_r(x)}{h \log_r \frac{1}{|h|}} \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{F_r(x+h) - F_r(x)}{h \log_r \frac{1}{|h|}} \leq 1$$

En consecuencia, F_r no es derivable en sentido Zygmund en ningún punto de $[0, 1]$. Posteriormente, J. B. Brown y G. Kozłowski demostraron en [19] que F_r no coincide con ninguna función C^1 en ningún conjunto de medida positiva. Por tanto, F_r no tiene la propiedad de Lusin de clase C^1 y no es aproximadamente derivable en casi todo punto. Como caso particular de su estudio, J. Ferrera y J. Gómez Gil probaron en [38] que si $x \in \mathbb{R}$ es de la forma $\frac{k}{r^n}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \{0, \dots, r^n\}$ entonces $\partial F_r(x) = \mathbb{R}$ mientras que la subdiferencial es vacía en otro caso.

En la sección 5.3 de este capítulo presentamos una generalización de las funciones de Takagi-Van der Waerden en el que obtendremos como caso particular las propiedades analíticas mencionadas anteriormente.

Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$. Para cada n , definimos

$$G_n^r(x) = \sum_{k=0}^n g_k^r(x), \quad x \in [0, 1]$$

donde $g_k^r(x) = \frac{1}{r^k} \phi(r^k x)$ y $x \in [0, 1]$. El criterio de Weierstrass nos garantiza la convergencia uniforme de la serie concluyendo la continuidad de la función F_r en $[0, 1]$. Finalmente, podemos extender F_r a una función continua 1-periódica en \mathbb{R} definida por

$$F_r(x) = F_r(x - [x])$$

5.1.1 Ecuaciones funcionales

En esta sección generalizamos para las funciones de Takagi-Van der Waerden algunas de las ecuaciones funcionales presentadas en la sección 2.1 del capítulo dos para la función de Takagi clásica.

Proposición 5.1. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$. La función F_r es la única función acotada que satisface en $[0, 1]$ la ecuación funcional*

$$F_r(rx) = rF_r(x) - r\phi(x) \quad (5.1)$$

Demostración. Sean $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$ y $x \in [0, 1]$. En primer lugar,

$$\begin{aligned} G_n^r(rx) &= r \left[\frac{1}{r} \phi(rx) + \frac{1}{r^2} \phi(r^2x) + \dots + \frac{1}{r^{n+1}} \phi(r^{n+1}x) \right] = \\ &= r (G_{n+1}^r(x) - \phi(x)) \end{aligned}$$

Haciendo $n \rightarrow +\infty$ obtenemos (5.1). En segundo lugar, sea $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que satisface (5.1). Aplicando (5.1), obtenemos que

$$\frac{H(r^k x)}{r^k} = \frac{H(r^{k-1} x)}{r^{k-1}} - \frac{\phi(r^{k-1} x)}{r^{k-1}}$$

para todo k . Sumando desde $k = 1$ hasta n

$$\frac{H(r^n x)}{r^n} = H(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{r^k} \phi(r^k x)$$

Como H es acotada, haciendo $n \rightarrow +\infty$ en ambos lados de la igualdad obtenemos que $H(x) = F_r(x)$. \square

Observemos que para $r = 2$, la ecuación (5.1) es la ecuación (5) introducida en 2.1.

Proposición 5.2. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$. La función F_r satisface las ecuaciones funcionales*

$$F_r(x) = G_1^r(x) + \frac{1}{r^2} F_r(r^2 x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.2)$$

$$F_r(x) = F_r(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.3)$$

Demostración. Utilizando (5.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} F_r(r^2 x) &= r F_r(rx) - r \phi(rx) = r^2 F_r(x) - r^2 \phi(x) - r \phi(rx) = \\ &= r^2 (F_r(x) - G_1^r(x)) \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]$. La ecuación (5.3) es inmediata debido a la simetría de la función ϕ . \square

5.1.2 Valor máximo

En esta sección generalizamos para las funciones de Takagi-Van der Waerden los resultados obtenidos en la sección 4.1 del capítulo cuarto para la función de Takagi clásica.

Para cada $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$ definimos

$$M_r = \max_{x \in [0,1]} F_r(x), \quad E_r = \{x \in [0, 1] : F_r(x) = M_r\}$$

Proposición 5.3. *Si r es impar entonces $E_r = \{\frac{1}{2}\}$ y $M_r = \frac{r}{2r-2}$.*

Demostración. En primer lugar, como r es impar

$$F_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \phi(r^n x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \phi\left(r^n \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{r}{r-1} = F_r\left(\frac{1}{2}\right)$$

para todo $x \in [0, 1]$. Como $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ entonces $E_r = \{\frac{1}{2}\}$ y $M_r = F_r\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{r}{2r-2}$. \square

Proposición 5.4. *Si r es par, entonces*

$$E_r \subset \left[\frac{r}{2r+2}, \frac{r+2}{2r+2} \right], \quad M_r = \frac{r^2}{2r^2-2}$$

Demostración. En primer lugar, como r es par tenemos que $G_1^r(x) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in \left[\frac{r-1}{2r}, \frac{r+1}{2r} \right]$. Por la periodicidad de la función F_r y utilizando (5.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} F_r\left(\frac{r}{2r+2}\right) &= G_1^r\left(\frac{r}{2r+2}\right) + \frac{1}{r^2}F_r\left(\frac{r^3}{2r+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{r^2}F_r\left(\frac{r^3}{2r+2} - \frac{r^3-r}{2r+2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{r^2}F_r\left(\frac{r}{2r+2}\right) \end{aligned}$$

En consecuencia, por la ecuación de simetría (5.3)

$$F_r\left(\frac{r+2}{2r+2}\right) = F_r\left(\frac{r}{2r+2}\right) = \frac{r^2}{2r^2-2}$$

Sea $x \in E_r$ tal que $x \leq \frac{1}{2}$. Por (5.1), $M_r \geq F_r(rx) = rM_r - rx$. Por tanto,

$$x \geq \frac{r-1}{r}M_r \geq \frac{r-1}{r}F_r\left(\frac{r}{2r+2}\right) = \frac{r}{2r+2}$$

La ecuación de simetría (5.3) nos permite obtener que $E_r \subset \left[\frac{r}{2r+2}, \frac{r+2}{2r+2} \right]$. En segundo lugar, si $x \in E_r$ entonces

$$M_r = F_r(x) = G_1^r(x) + \frac{1}{r^2}F_r(r^2x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{r^2}M_r$$

Por tanto, $M_r \leq \frac{r^2}{2r^2-2} = F_r\left(\frac{r}{2r+2}\right)$. En consecuencia,

$$M_r = F_r\left(\frac{r}{2r+2}\right) = F_r\left(\frac{r+2}{2r+2}\right) = \frac{r^2}{2r^2-2}$$

□

Proposición 5.5. *Supongamos r par. Entonces,*

- (1) *Si $x \in E_r$ entonces $r^2x - [r^2x] \in E_r$.*
- (2) *Si $x \in \left[\frac{r-1}{2r}, \frac{r+1}{2r} \right]$ y $F_r(r^2x) = M_r$ entonces $x \in E_r$.*

Demostración. En primer lugar, si $x \in E_r$ entonces

$$M_r = \frac{r^2}{2r^2-2} = F_r(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{r^2}F_r(r^2x)$$

Por tanto, $F_r(r^2x) = M_r$.

En segundo lugar, por la ecuación (5.2),

$$F_r(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{r^2} F_r(r^2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{r^2} \frac{r^2}{2r^2 - 2} = \frac{r^2}{2r^2 - 2} = M_r$$

□

Definición 5.6. Para cada número entero par $r \geq 2$ definimos el conjunto

$$\mathcal{V}_r = \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{r^2 - r}{2} \leq k \leq \frac{r^2 + r - 2}{2} \right\}$$

Proposición 5.7. Supongamos r par. Sean $x \in E_r$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $\frac{x+k}{r^2} \in E_r$ si y sólo si $k \in \mathcal{V}_r$.

Demostración. En primer lugar, por la proposición 5.4, si $\frac{x+k}{r^2} \in E_r$ entonces

$$\frac{r}{2r+2} \leq \frac{x+k}{r^2} \leq \frac{r+2}{2r+2}$$

Como $\frac{r}{2r+2} \leq x \leq \frac{r+2}{2r+2}$, entonces

$$\frac{r^3}{2r+2} - \frac{r}{2r+2} \leq k \leq \frac{r^3 + 2r^2}{2r+2} - \frac{r+2}{2r+2}$$

obteniendo $\frac{r^2-r}{2} \leq k \leq \frac{r^2+r-2}{2}$. Recíprocamente, si $\frac{r^2-r}{2} \leq k \leq \frac{r^2+r-2}{2}$, como $x \in \left[\frac{r-1}{2r}, \frac{r+1}{2r} \right]$, tenemos que

$$\frac{r-1}{2r} \leq \frac{x+k}{r^2} \leq \frac{r+1}{2r}$$

Además, $F_r\left(r^2 \frac{x+k}{r^2}\right) = M_r$. Por la proposición 5.5, concluimos que $\frac{x+k}{r^2} \in E_r$. □

Sean

$$\alpha = \frac{r^2 - r}{2}, \quad \beta = \frac{r^2 + r - 2}{2}$$

El desarrollo en base r^2 de los extremos del intervalo $\left[\frac{r}{2r+2}, \frac{r+2}{2r+2} \right]$ viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{r}{2r+2} &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r^2)^n} = 0.\alpha\alpha\dots = 0.\dot{\alpha} \\ \frac{r+2}{2r+2} &= \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r^2)^n} = 0.\beta\beta\dots = 0.\dot{\beta} \end{aligned}$$

Proposición 5.8. *Supongamos r par. Sea $x \in [0, 1]$ cuyo desarrollo en base r^2 viene dado por $x = 0.x_1x_2\dots x_n\dots$. Entonces, $x \in E_r$ si y sólo si $\alpha \leq x_j \leq \beta$ para todo $j \geq 1$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $x = 0.x_1x_2x_3\dots \in E_r$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \notin [\alpha, \beta]$ entonces, aplicando $k-1$ veces la proposición 5.5, tenemos que $0.x_kx_{k+1}\dots \in E_r$. Este hecho contradice que $E_r \subset [0.\dot{\alpha}, 0.\dot{\beta}]$.

En segundo lugar, supongamos que $\alpha \leq x_j \leq \beta$ para todo $j \geq 1$. Como $0.\dot{\alpha}, 0.\dot{\beta} \in E_r$, si $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\alpha, \beta]$ entonces, aplicando n veces la proposición 5.5, tenemos que $0.x_1x_2\dots x_n\dot{\alpha} \in E_r$ y $0.x_1x_2\dots x_n\dot{\beta} \in E_r$. Por la continuidad de la función F_r , $0.x_1x_2\dots x_n\dots \in E_r$. \square

En [9], Y. Baba prueba el teorema 5.10 calculando la dimensión de Minkowski-Bouligand (o dimensión de box counting) de E_r . Sin embargo, he realizado una demostración alternativa basada en la autosemejanza del conjunto E_r y la condición de conjunto abierto de Moran. Este resultado, así como otros similares, pueden verse en [34, Capítulo 9] o [28].

Corolario 5.9. *Supongamos r par. El conjunto E_r es autosemejante con dimensión de autosemejanza $\frac{1}{2}$.*

Demostración. Como r es par, se verifica que $|\mathcal{V}_r| = r$. Además, observemos que E_r es un conjunto compacto. Por la proposición 5.8,

$$E_r = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{(r^2)^k} : w_k \in \mathcal{V}_r \right\} = \bigcup_{p=0}^{r-1} \left\{ \frac{r^2 - r + 2p}{2r^2} + \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{(r^2)^k} : w_k \in \mathcal{V}_r \right\}$$

Definimos

$$S_p(x) = \frac{r^2 - r + 2p}{2r^2} + \frac{1}{r^2}x, \quad x \in [0, 1]$$

para $p \in \{0, \dots, r-1\}$. El conjunto E_r satisface la ecuación de autosemejanza

$$E_r = \bigcup_{p=0}^{r-1} S_p(E_r)$$

La dimensión de autosemejanza es la solución de la ecuación

$$r \left(\frac{1}{r^2} \right)^s = 1$$

Por tanto, la dimensión de autosemejanza es $\frac{1}{2}$. \square

Teorema 5.10. *Supongamos r par. La dimensión de Hausdorff y la dimensión de autosemejanza de E_r es igual a $\frac{1}{2}$.*

Demostración. Las funciones S_0, \dots, S_{r-1} satisfacen la condición de conjunto abierto de Moran para el conjunto $U = (0, 1)$. En efecto, denotando

$$W_p = \psi_p(U) = \left(\frac{r^2 - r + 2p}{2r^2}, \frac{r^2 - r + 2p + 2}{2r^2} \right), \quad p \in \{0, \dots, r-1\}$$

observamos que $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $W_p \subset U$ para todo $p \in \{0, \dots, r-1\}$. Por tanto, la dimensión de autosemejanza y la dimensión de Hausdorff de E_r coinciden. \square

Corolario 5.11. *Supongamos r par. El conjunto E_r es totalmente disconexo.*

5.1.3 Continuidad en sentido de Hölder

Como las funciones de Takagi-Van der Waerden no son derivables en ningún punto, dichas funciones no son continuas en sentido de Hölder para $\alpha \geq 1$.

Proposición 5.12. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$. La función F_r es continua en sentido de Hölder en $[0, 1]$ para todo $0 < \alpha < 1$.*

Demostración. Supongamos $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Sean $x \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |t| \leq 1$ y $x + t \in [0, 1]$. En consecuencia, existe n tal que $r^{-(n+1)} < |t| \leq r^{-n}$, y por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g_k^r(x+t) - g_k^r(x)| \leq n|t| \leq nr^{-n(1-\alpha)}|t|^\alpha$$

Como $|g_k^r(x+t) - g_k^r(x)| \leq \frac{1}{r^k}$ para todo k , tenemos que

$$\sum_{k=n}^{\infty} |g_k^r(x+t) - g_k^r(x)| \leq r^{-(n-1)} \frac{1}{r-1} \leq r^2|t| \leq r^2|t|^\alpha$$

Sumando ambas desigualdades obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k^r(x+t) - g_k^r(x)| \leq \left(r^2 + nr^{-n(1-\alpha)} \right) |t|^\alpha$$

Es claro que existe una constante K_α tal que $r^2 + nr^{-n(1-\alpha)} \leq K_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, y por consiguiente,

$$|T(x+t) - T(x)| \leq K_\alpha |t|^\alpha$$

para todo $x \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $x+t \in [0, 1]$. \square

Corolario 5.13. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$. El grafo de la función F_r , como subconjunto del plano, tiene dimensión de Hausdorff uno.*

Utilizando la teoría desarrollada en el apéndice A, en concreto por el corolario A.11, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.14. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 2$. Para todo $0 < \beta < 1$, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β de la función F_r , denotada por $D^\beta F_r$, existe y es continua en $[0, 1]$.*

5.2 La función de Takagi generalizada

En esta sección presentamos la generalización de la función de Takagi introducida por J. Ferrera y J. Gómez Gil [38] en 2017.

Sean D un subconjunto denso y numerable de $[0, 1]$ y $\{\alpha_n\}_n \in l_1$ una sucesión decreciente de números positivos. Además, denotamos por $\mathcal{D} = \{D_n\}_n$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de D tales que

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

y se verifica que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{x \in D_n} (x - \alpha_n, x + \alpha_n)$$

para todo n . En ese caso, decimos que \mathcal{D} es una descomposición de D . Observemos que dicha descomposición siempre existe.

Para cada descomposición $\mathcal{D} = \{D_n\}_n$ de D , se define la función de Takagi generalizada $T_{\mathcal{D}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ asociada a la descomposición \mathcal{D} de D por

$$T_{\mathcal{D}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \lim_n G_n(x)$$

siendo $g_k(x) = d(x, D_k)$ la distancia de x al conjunto D_k y $G_n = g_1 + \dots + g_n$. Por el criterio de Weierstrass, las funciones definidas anteriormente son continuas en $[0, 1]$.

Cabe destacar que las funciones de Takagi generalizadas incluyen las funciones de Takagi-Van der Waerden presentadas en la sección anterior. En efecto, basta definir

$$D_n = \left\{ \frac{k}{r^{n-1}} \in [0, 1] : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

para todo n .

A continuación, caracterizamos la subdiferencial de las funciones de Takagi generalizadas. Para ello, introducimos la siguiente definición.

Definición 5.15. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $z_0 \in \mathbb{R}$. Se define la *derivada direccional de f en z_0* , y se denota $df(z_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$df(z_0)(w_0) = \liminf_{t \downarrow 0, w \rightarrow w_0} \frac{f(z_0 + tw) - f(z_0)}{t} \quad (5.4)$$

En concreto, el límite (5.4) denota

$$\lim_n \left[\inf_{\substack{0 < t < \frac{1}{n}, \\ w \in (w_0 - \frac{1}{n}, w_0 + \frac{1}{n})}} \frac{f(z_0 + tw) - f(z_0)}{t} \right]$$

La noción de derivada direccional nos permite caracterizar la subdiferencial de la función en un punto.

Proposición 5.16. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente y $z_0 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\partial f(z_0) = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi w_0 \leq df(z_0)(w_0) \text{ para todo } w_0 \in \mathbb{R}\}$$

El concepto de derivada direccional de una función así como un estudio de la subdiferencial a través de dicho concepto puede verse en profundidad en [37, Sección 4.2].

Teorema 5.17 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [38]). Si $z_0 \in D$, entonces la función $T_{\mathcal{D}}(z) - \xi z$ posee un mínimo local en z_0 para todo $\xi \in \mathbb{R}$. En particular,

$$\partial_{\alpha} T_{\mathcal{D}}(z_0) = \mathbb{R}$$

para $\alpha > 1$.

Demostración. Si $z_0 \in D$ entonces existe n_0 tal que $z_0 \notin D_{n_0}$ y $z_0 \in D_n$ para $n > n_0$. Para cada $\xi \in \mathbb{R}$, sea n tal que $n > 2(n_0 + 1) + |\xi|$. Si consideramos $|h| < \frac{1}{2^{n+1}}$ entonces $g_k(z_0 + h) = |h|$ para todo k , $n_0 < k \leq n$. De esta manera,

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{D}}(z_0 + h) - T_{\mathcal{D}}(z_0) - \xi h &\geq \\ &\geq \sum_{k=0}^{n_0} (g_k(z_0 + h) - g_k(z_0)) + \sum_{k>n_0}^n g_k(z_0 + h) - |\xi| |h| \geq \\ &\geq -|h|(n_0 + 1) + |h|(n - n_0) - |\xi| |h| \geq |h| \end{aligned}$$

En consecuencia, la función $T_{\mathcal{D}}(z) - \xi z$ posee un mínimo local en z_0 y, por consiguiente, $\partial_{\alpha} T(z_0) = \mathbb{R}$ para todo $\alpha > 1$. \square

Corolario 5.18. Si $z_0 \in D$, entonces $\partial T_{\mathcal{D}}(z_0) = \mathbb{R}$.

Corolario 5.19. Para todo $z_0 \in \mathbb{R}$, se verifica que $\partial_L T_{\mathcal{D}}(z_0) = \mathbb{R}$.

Teorema 5.20 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [38]). Si $z_0 \notin D$, entonces $\partial T_{\mathcal{D}}(z_0) = \emptyset$.

Demostración. Si $z_0 \notin D$, consideramos la sucesión $\{x_n\}_n$ tal que $g_n(z_0) = |x_n - z_0|$. Para cada n , definimos

$$L_n = \{k \leq n : x_k < z_0\}, \quad R_n = \{k \leq n : x_k > z_0\}$$

Si $\lim_n |L_n| = \lim_n |R_n| = +\infty$, consideramos la subsucesión $\{x_{n_j}\}_j \subset (z_0, +\infty)$ tal que $x_{n_{j+1}} < z_0$. De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} dT_{\mathcal{D}}(z_0)(1) &= \liminf_{t \downarrow 0} \frac{T_{\mathcal{D}}(z_0 + t) - T_{\mathcal{D}}(z_0)}{t} \leq \liminf_j \frac{T_{\mathcal{D}}(x_{n_j}) - T_{\mathcal{D}}(z_0)}{x_{n_j} - z_0} \leq \\ &\leq \liminf_j \frac{G_{n_j}(x_{n_j}) - G_{n_j}(z_0)}{x_{n_j} - z_0} \leq \liminf_j \sum_{k=0}^{n_j} \frac{|x_{n_j} - x_k| - |x_k - z_0|}{x_{n_j} - z_0} \leq \\ &\leq \liminf_j (|L_{n_j}| - |R_{n_j}|) \end{aligned}$$

y, análogamente

$$\begin{aligned} dT_{\mathcal{D}}(z_0)(-1) &= \liminf_{t \downarrow 0} \frac{T_{\mathcal{D}}(z_0 - t) - T_{\mathcal{D}}(z_0)}{t} \leq \liminf_j \frac{T_{\mathcal{D}}(x_{n_{j+1}}) - T_{\mathcal{D}}(z_0)}{|x_{n_{j+1}} - z_0|} \\ &\leq \liminf_j (|R_{n_{j+1}}| - |L_{n_{j+1}}|) \end{aligned}$$

Si $\xi \in \partial T_{\mathcal{D}}(z_0)$ entonces, por [37, Proposición 4.11], necesariamente tendríamos que $\xi \leq dT_{\mathcal{D}}(z_0)(1)$ y $-\xi \leq dT_{\mathcal{D}}(z_0)(-1)$. Por tanto, sumando ambas desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &\leq dT_{\mathcal{D}}(z_0)(1) + dT_{\mathcal{D}}(z_0)(-1) \leq \\ &\leq \liminf_j (|L_{n_j}| - |R_{n_j}|) + \liminf_j (|R_{n_{j+1}}| - |L_{n_{j+1}}|) \leq \\ &\leq \liminf_j (|L_{n_j}| - |R_{n_j}| + |R_{n_{j+1}}| - |L_{n_{j+1}}|) = -1 \end{aligned}$$

ya que $|R_{n_{j+1}}| = |R_{n_j}|$ y $|L_{n_{j+1}}| = |L_{n_j}| + 1$, obteniendo así una contradicción.

Por tanto, uno de los dos límites debe ser finito. Si $\lim_n |L_n| < +\infty$ entonces

$$\begin{aligned} dT_{\mathcal{D}}(z_0)(1) &\leq \liminf_n \frac{T_{\mathcal{D}}(x_n) - T_{\mathcal{D}}(z_0)}{|x_n - z_0|} \leq \liminf_n \frac{G_n(x_n) - G_n(z_0)}{|x_n - z_0|} \leq \\ &\leq \liminf_n \sum_{k=0}^n \frac{|x_n - x_k| - |x_k - z_0|}{|x_n - z_0|} = -\infty \end{aligned}$$

De manera similar, si $\lim_n |R_n| < +\infty$ entonces $dT_{\mathcal{D}}(z_0)(-1) = -\infty$. Ambas situaciones implican que $\partial T_{\mathcal{D}}(z_0) = \emptyset$. \square

En [38, Sección 2], J. Ferrera y J. Gómez Gil definieron la función de Takagi generalizada en un espacio de Hilbert real separable obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 5.21 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [38]). *Si D es un subconjunto denso numerable de la bola unidad abierta de un espacio de Hilbert real separable, \mathcal{H} , entonces existe una descomposición \mathcal{D} de D tal que la función de Takagi generalizada asociada a dicha descomposición satisface que*

$$\partial T_{\mathcal{D}}(z_0) = \mathcal{H} \text{ para todo } z_0 \in D$$

y $\partial T_{\mathcal{D}}(z_0) = \emptyset$ en otro caso.

5.3 Funciones de Takagi-Van der Waerden generalizadas

La familia de las funciones de Takagi-Van der Waerden generalizadas, denotada por \mathcal{TWG} , está constituida por todas las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} \phi(b^n x)$$

donde $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 1$ y $b \in \mathbb{N}$ tal que $b \geq c$. Esta generalización fue introducida por K. G. Spurrier en [97]. En particular, para $b = c$ obtenemos las funciones de Takagi-Van der Waerden presentadas anteriormente. Además, considerando los parámetros b y c tales que $c > 1$ y $b \geq 4c$ obtenemos la familia de funciones no derivables en ningún punto introducida por K. Knopp en [61].

Sea $f \in \mathcal{TWG}$. Si denotamos por $g_n(x) = \frac{1}{c^n} \phi(b^n x)$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x), \quad x \in [0, 1]$$

Como $c > 1$ y $|g_n(x)| \leq \frac{1}{2c^n}$, el criterio de Weierstrass nos garantiza la convergencia uniforme de la serie, y en consecuencia, la continuidad de la función f . Además, podemos extender f a una función continua 1-periódica en \mathbb{R} definida por

$$f(x) = f(x - [x])$$

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata a partir del teorema 6.35 que presentaremos en el capítulo sexto. Por esta razón, omitiremos su demostración. Además, observemos que dicho resultado justifica la condición $b \geq c$ que define la familia de funciones \mathcal{TWG} en pos de su no derivabilidad en ningún punto.

Proposición 5.22. Sean $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ tales que $c > 1$ y $b < c$. La función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} \phi(b^n x)$$

es Lipschitz en $[0, 1]$ y derivable en $[0, 1]$ salvo en el conjunto

$$\left\{ \frac{k}{2b^n} \in [0, 1] : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

En las hipótesis de la proposición anterior, por el teorema de Rademacher, f es derivable en casi todo punto de $[0, 1]$. Sin embargo, para ciertos parámetros $b \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$ tales $c > 1$ y $b < c$, la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} \phi(b^n x)$ es derivable en todo punto de $[0, 1]$. Prueba de ello, presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.23. Sean $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \phi(2^n x)$ y $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x - 2x^2$. Entonces $f = h$ en $[0, 1]$.

Demostración. Por el criterio de Weierstrass, la función f es continua en el intervalo $[0, 1]$. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. La función $g_j(x) = \frac{1}{4^j} \phi(2^j x)$ es afín en el intervalo $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ para todo entero $j < n$. Por tanto,

$$g_j\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \left(g_j\left(\frac{k}{2^n}\right) + g_j\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right)$$

para todo entero $j < n$. En consecuencia,

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{k}{2^n}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right) = g_n\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{4^n} = \frac{2}{4^{n+1}}$$

y

$$\begin{aligned} h\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(h\left(\frac{k}{2^n}\right) + h\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right) &= \\ &= \frac{4k^2 + 4k + 2}{2^{2n+1}} - \frac{4k^2 + 4k + 1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{4^{n+1}} \end{aligned}$$

Por tanto, f y h coinciden en los números diádicos del intervalo $[0, 1]$. \square

El siguiente teorema establece la derivabilidad en ningún punto de las funciones de Takagi-Van der Waerden generalizadas. Este resultado fue obtenido por K. Spurrer [97] y es consecuencia inmediata de las proposiciones 6.33 y 6.37 que presentaremos en el capítulo sexto, por lo que omiteremos su demostración.

Teorema 5.24 (K. Spurrer [97]). Si $f \in \mathcal{TWG}$, entonces f no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$.

5.3.1 Continuidad en sentido de Hölder

En la sección 5.1.3, probamos que las funciones de Takagi-van der Waerden son continuas en sentido de Hölder para todo $0 < \alpha < 1$.

Teorema 5.25. *Sea $f \in \mathcal{TWG}$ tal que $b > c$. Entonces, f es Hölder continua de orden α en $[0, 1]$ si y sólo si $0 < \alpha \leq \frac{\log c}{\log b}$.*

Demostración. Comenzamos probando que f es continua en sentido de Hölder en $[0, 1]$ para todo $0 < \alpha \leq \frac{\log c}{\log b}$. Sean $x \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |t| \leq 1$ y $x + t \in [0, 1]$. En consecuencia, existe n tal que $b^{-(n+1)} < |t| \leq b^{-n}$, y por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(x+t) - g_k(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{c}\right)^k b^{-n(1-\alpha)} |t|^\alpha = \\ &= \frac{c}{b-c} \left[\left(\frac{b^\alpha}{c}\right)^n - b^{-n(1-\alpha)} \right] |t|^\alpha \end{aligned}$$

Como $|g_k(x+t) - g_k(x)| \leq \frac{1}{c^k}$ para todo k , tenemos que

$$\sum_{k=n}^{\infty} |g_k(x+t) - g_k(x)| \leq c^2 |t| \leq c^2 |t|^\alpha$$

Sumando ambas desigualdades obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x+t) - g_k(x)| \leq \left(c^2 + \frac{c}{b-c} \left[\left(\frac{b^\alpha}{c}\right)^n - b^{-n(1-\alpha)} \right] \right) |t|^\alpha$$

Como $b > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{-n(1-\alpha)} = 0$. Además, como $0 < \alpha \leq \frac{\log c}{\log b}$, entonces $\frac{b^\alpha}{c} \leq 1$, y en consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b^\alpha}{c}\right)^n \leq 1$. Por tanto, existe una constante K_α tal que $c^2 + \frac{c}{b-c} \left[\left(\frac{b^\alpha}{c}\right)^n - b^{-n(1-\alpha)} \right] \leq K_\alpha$ para todo n , y por consiguiente,

$$|T(x+t) - T(x)| \leq K_\alpha |t|^\alpha$$

para todo $x \in [0, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $x+t \in [0, 1]$.

Finalmente, probamos que si $\alpha > \frac{\log c}{\log b}$ entonces f no es continua en sentido de Hölder en $[0, 1]$. Por el teorema 5.24, f no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$, y por tanto, f no es continua en sentido de Hölder en $[0, 1]$ para $\alpha \geq 1$.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\log c}{\log b} < \alpha < 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $b \geq 2$, tenemos que $\frac{b^k}{b^n} \leq \frac{1}{2}$ para todo $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{1}{b^n}\right) - f(0) \right| &= f\left(\frac{1}{b^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} g_k\left(\frac{1}{b^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{c_k} \frac{b^k}{b^n} \\ &= \frac{c}{b-c} \left[\left(\frac{b^\alpha}{c}\right)^n - \frac{1}{b^{n(1-\alpha)}} \right] \left(\frac{1}{b^n}\right)^\alpha \end{aligned}$$

Si f es continua en sentido de Hölder para α entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{b-c} \left[\left(\frac{b^\alpha}{c} \right)^n - \frac{1}{b^{n(1-\alpha)}} \right]$$

es finito. Sin embargo, como $\alpha > \frac{\log c}{\log b}$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b^\alpha}{c} \right)^n = +\infty$. Además, como $b \geq 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{-n(1-\alpha)} = 0$. En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{b-c} \left[\left(\frac{b^\alpha}{c} \right)^n - \frac{1}{b^{n(1-\alpha)}} \right] = +\infty$$

□

Utilizando la teoría desarrollada en el apéndice A, en particular por el corolario A.11, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.26. *Sea $f \in \mathcal{TWG}$. Para todo $0 < \beta < \frac{\log c}{\log b}$, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β de la función f , denotada por $D^\beta f$, existe y es continua en $[0, 1]$.*

5.3.2 Dimensión de Hausdorff y dimensión de box-counting

El concepto de dimensión constituye la temática central de la geometría fractal. Existen múltiples definiciones de la noción de dimensión que dan lugar a un conjunto de dimensiones frecuentemente interrelacionadas. La dimensión de box-counting, también conocida como dimensión de Minkowski-Bouligand, fue introducida en los años treinta y es ampliamente utilizada debido a su sencillez de cálculo.

Sean $\delta > 0$ y $F \subset \mathbb{R}^2$. La colección de cubos

$$\{[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times [m_2\delta, (m_2 + 1)\delta] : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

se denomina *malla de orden δ* de \mathbb{R}^2 . Definimos $N_\delta(F)$ como el número de cubos de la malla de orden δ que intersecan con F .

Definición 5.27. Sea $F \subset \mathbb{R}^2$. Definimos la *dimensión de box counting inferior* y *superior* como

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad \overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Si ambos límites coinciden, definimos la *dimensión de box counting de F* , denotada por $\dim_B F$, como el valor común de ambos límites.

En la definición anterior basta considerar el límite cuando δ tiende a cero a través de cualquier sucesión decreciente $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\delta_n = c^n$ para $0 < c < 1$. En cuanto a la dimensión de Hausdorff de F , denotada por $\dim_H F$,

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

El siguiente resultado puede verse en [34, Proposición 11.1].

Proposición 5.28. Sean $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Para cada $0 < \delta < 1$, sea $m = \lceil \frac{1}{\delta} \rceil$ el menor entero mayor o igual que $\frac{1}{\delta}$ y denotemos por

$$R_{j,\delta} = \sup_{x,t \in [j\delta, (j+1)\delta]} |f(t) - f(x)|$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\frac{1}{\delta} \sum_{j=0}^{m-1} R_{j,\delta} \leq N_\delta \leq 2m + \frac{1}{\delta} \sum_{j=0}^{m-1} R_{j,\delta}$$

La breve introducción realizada a la dimensión de box counting así como otros conceptos de dimensión se encuentran detallados en [34].

Consideremos $f \in \mathcal{TWG}$ y sea F su grafo en $[0, 1]$. Debido a la continuidad Hölder de f de orden $0 < \alpha < \frac{\log c}{\log b}$, junto con el corolario 11.2 de [34], obtenemos que

$$1 \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq 2 - \frac{\log c}{\log b}$$

Lema 5.29. Sea $f \in \mathcal{TWG}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2b^n - 1\}$ entonces

$$f\left(\frac{k+1}{2b^n}\right) - f\left(\frac{k}{2b^n}\right) = \frac{1}{2b^n} \sum_{j=0}^n \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j, \quad \text{si } b \text{ es par}$$

$$f\left(\frac{k+1}{2b^n}\right) - f\left(\frac{k}{2b^n}\right) = \frac{1}{2b^n} \left[\sum_{j=0}^n \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j \pm \frac{c}{c-1} \left(\frac{b}{c}\right)^n \right], \quad \text{si } b \text{ es impar}$$

Demostración. Para cada n y $k \in \{0, \dots, 2b^n - 1\}$, sean $u = \frac{k}{2b^n}$ y $v = \frac{k+1}{2b^n}$. Para todo entero $0 \leq j < n$ la función $g_j(x) = \frac{1}{c^j} \phi(b^j x)$ es afín en el intervalo $[u, v]$ con pendiente igual, o bien a $\left(\frac{b}{c}\right)^j$, o bien a $-\left(\frac{b}{c}\right)^j$. En consecuencia, para todo entero $0 \leq j < n$, tenemos que

$$\frac{g_j(v) - g_j(u)}{v - u} = \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j$$

Supongamos que b es par. Consideremos $j = n$. Si k es par entonces

$$\frac{g_n(v) - g_n(u)}{v - u} = \frac{\frac{1}{2c^n} - 0}{\frac{1}{2b^n}} = \left(\frac{b}{c}\right)^n$$

Análogamente, si k es impar entonces

$$\frac{g_n(v) - g_n(u)}{v - u} = - \left(\frac{b}{c}\right)^n$$

A continuación, consideremos $j > n$. Como b es par, tenemos que $g_j(v) = g_j(u) = 0$. Por tanto,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \sum_{j=0}^n \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j$$

Supongamos que b es impar. Consideremos $j \geq n$. Si k es par entonces

$$\frac{g_j(v) - g_j(u)}{v - u} = \frac{\frac{1}{2c^j} - 0}{\frac{1}{2b^n}} = \frac{b^n}{c^j}$$

Análogamente, si k es impar entonces

$$\frac{g_j(v) - g_j(u)}{v - u} = -\frac{b^n}{c^j}$$

Por tanto, como $c > 1$ tenemos que

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \sum_{j=0}^{n-1} \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j \pm b^n \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j \pm \frac{c}{c-1} \left(\frac{b}{c}\right)^n$$

□

Los siguientes resultados determinan la dimensión de box counting de f bajo ciertas asunciones sobre los parámetros.

Proposición 5.30. *Sea $f \in \mathcal{TWG}$ tal que b es par y $b \geq 2c$. Si F es el grafo de f en $[0, 1]$, entonces $2 - \frac{\log c}{\log b} \leq \underline{\dim}_B F$.*

Demostración. Sean $\delta_n = \frac{1}{2b^n}$ y $m_n = 2b^n$. Por el lema 5.29, tenemos que

$$\begin{aligned} R_{k, \delta_n} &\geq \left| f\left(\frac{k+1}{2b^n}\right) - f\left(\frac{k}{2b^n}\right) \right| = \frac{1}{2b^n} \left| \sum_{j=0}^n \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j \right| \geq \\ &\geq \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{b}{c}\right)^j}{2b^n} \geq \frac{b^{n-1}(b-2c)}{c^n 2b^n} \geq 0 \end{aligned}$$

para todo $k \in \{0, \dots, m_n - 1\}$. Por la proposición 5.28,

$$N_{\delta_n} \geq 2b^n \sum_{j=0}^{2b^n-1} \frac{b^{n-1}(b-2c)}{c^n 2b^n} = \frac{2b^{2n-1}}{c^n} (b-2c)$$

En consecuencia,

$$\underline{\dim}_B F \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{2b^{2n-1}}{c^n} (b-2c)}{-\log \frac{1}{2b^n}} = 2 - \frac{\log c}{\log b}$$

□

Proposición 5.31. *Sea $f \in \mathcal{TWG}$ tal que b es impar y $b \geq 2c - 1$. Si F es el grafo de f en $[0, 1]$, entonces $2 - \frac{\log c}{\log b} \leq \underline{\dim}_B F$.*

Demostración. Sean $\delta_n = \frac{1}{2b^n}$ y $m_n = 2b^n$. Por el lema 5.29, para todo $k \in \{0, \dots, m_n - 1\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} R_{k, \delta_n} &\geq \left| f\left(\frac{k+1}{2b^n}\right) - f\left(\frac{k}{2b^n}\right) \right| = \frac{1}{2b^n} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \pm \left(\frac{b}{c}\right)^j \pm \frac{c}{c-1} \left(\frac{b}{c}\right)^n \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2b^n} \left[\frac{c}{c-1} \left(\frac{b}{c}\right)^n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{b}{c}\right)^j \right] \geq \frac{b^{n-1}(b-2c+1)}{c^n 2b^n} \geq 0 \end{aligned}$$

Por la proposición 5.28,

$$N_{\delta_n} \geq 2b^n \sum_{j=0}^{2b^n-1} \frac{b^{n-1}(b-2c+1)}{c^n 2b^n} = \frac{2b^{2n-1}}{c^n} (b-2c+1)$$

En consecuencia,

$$\underline{\dim}_B F \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{2b^{2n-1}}{c^n} (b-2c+1)}{-\log \frac{1}{2b^n}} = 2 - \frac{\log c}{\log b}$$

□

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos a lo largo de esta sección.

Teorema 5.32. *Sea $f \in \mathcal{TWG}$. Si F es el grafo de f en $[0, 1]$, entonces*

$$1 \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq 2 - \frac{\log c}{\log b}$$

Además, si b es par tal que $b \geq 2c$, o bien si b es impar tal que $b \geq 2c - 1$, entonces

$$\dim_B F = 2 - \frac{\log c}{\log b}$$

No he encontrado en la literatura resultados que caractericen completamente la dimensión de box counting del grafo de $f \in \mathcal{TWG}$ para todos los valores posibles de b y c . Por esta razón, he diseñado un algoritmo de box counting en Matlab que recibe como entrada la gráfica de una función $f \in \mathcal{TWG}$ y calcula la dimensión de box counting de su grafo con una aproximación bastante razonable. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para diferentes valores de los parámetros no contemplados en el teorema 5.32.

c	b	$\dim_B F$	$2 - \frac{\log c}{\log b}$
3	4	1.1045	1.2075
4	5	1.1087	1.1386
4	6	1.1151	1.2262
5	6	1.0659	1.1017
5	8	1.1358	1.2260
6	10	1.0857	1.2218

El código de Matlab del algoritmo de box counting así como la justificación de la estimación razonable de la dimensión de box counting pueden verse en el apéndice [C](#).

CAPÍTULO 6

La clase de Takagi

Este capítulo está dedicado a presentar la generalización de la función de Takagi, conocida como la clase de Takagi, introducida en 1984 por M. Hata y M. Yamaguti [48] así como a exponer la generalización de la clase de Takagi definida por J. Ferrera y J. Gómez Gil [41] en 2018.

6.1 La clase de Takagi

La clase de Takagi, denotada por $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, está constituida por todas las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \psi^n(x)$$

donde $w = (w_n)_n \in l_1$. Por el criterio de Weierstrass, las funciones así definidas son continuas en $[0, 1]$. Cabe destacar que la clase de Takagi contiene un gran número de funciones que ya habían aparecido en la literatura. En concreto, A. S. Besicovitch y H. D. Ursell [14] habían estudiado con anterioridad una clase de funciones que es un subconjunto de la clase de Takagi obteniendo que la dimensión de Hausdorff de su grafo es estrictamente mayor que uno. En este sentido, la clase de Takagi contiene funciones que son fractales.

Comenzamos esta sección probando que la clase de Takagi es un espacio de Banach isomorfo a l_1 . A continuación, generalizamos los resultados obtenidos en las secciones 2.2 y 2.3 del capítulo segundo para la función de Takagi clásica. En un segundo apartado, presentamos el estudio realizado por N. Kôno [64] sobre la derivabilidad de las funciones de la clase de

Takagi en términos de la sucesión de pesos w . Finalmente, concluimos la sección estudiando la serie de Fourier de las funciones de la clase de Takagi, generalizando así los resultados obtenidos en la sección 3.7 del capítulo tercero.

Consideramos el espacio de Banach $\mathcal{C}([0, 1])$ formado por las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$ dotado con la norma del supremo. Utilizando la teoría desarrollada en la sección 2.2, si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ y $f(0) = f(1) = 0$ entonces, utilizando la base de Schauder [21], f se expresa de manera única en el intervalo $[0, 1]$ como

$$\begin{aligned} S_0(x) &= x, & S_1(x) &= 1 - x, \\ S_{k,n}(x) &= \psi^{n+1}(x) \chi_{k,n}(x), & n \in \mathbb{Z}^+, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \end{aligned}$$

como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n}(f) S_{k,n}(x), \quad x \in [0, 1]$$

donde

$$a_{k,n}(f) = f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k}{2^n}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ y siendo $\chi_{k,n}$ la función característica en el intervalo diádico $I_{k,n}$. Si no hay lugar a confusión, denotaremos simplemente $a_{k,n}$ en lugar de $a_{k,n}(f)$. A continuación, definimos el subespacio \mathcal{V} como el subespacio de las funciones f de $\mathcal{C}([0, 1])$ tales que $f(0) = f(1) = 0$ y

$$a_{k,n}(f) = a_{j,n}(f)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k, j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$.

Nótese que si $f \in \mathcal{V}$ entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi^n(x), \quad x \in [0, 1]$$

para cierta sucesión $(b_n)_n$.

Proposición 6.1. *La clase de Takagi $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ está contenida en \mathcal{V} .*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. La continuidad de la función f en el intervalo $[0, 1]$ junto con $f(0) = f(1) = 0$ permiten expresar dicha función en la base de Schauder anterior como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n}(f) S_{k,n}(x)$$

Si $x \in [0, 1]$ entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \psi^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} w_{n+1} \chi_{k,n}(x) \right) \psi^{n+1}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} w_{n+1} S_{k,n}(x) \end{aligned}$$

Por la unicidad de los coeficientes de la base de Schauder, se verifica

$$a_{k,n}(f) = w_{n+1}$$

para todo $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Por consiguiente, $f \in \mathcal{V}$. \square

Proposición 6.2. \mathcal{V} es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}([0, 1])$.

Demostración. Sea $(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ tal que $g_j \rightarrow g$ cuando $j \rightarrow \infty$. Entonces,

$$a_{k,n}(g_j) \rightarrow a_{k,n}(g) \text{ cuando } j \rightarrow \infty$$

Por unicidad del límite, se verifica que $a_{k,n}(g) = a_{l,n}(g)$ para todo $k, l \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. \square

Lema 6.3. Si la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \psi^n(x), \quad w_n \in \mathbb{R}$$

converge puntualmente en $[0, 1]$, entonces $w \in l_1$.

Demostración. Sean

$$\Sigma = \{w = (w_1, w_2, w_3, \dots) : w_j \in \{0, 1\} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\}$$

dotado de la métrica

$$d(w, \bar{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |w_n - \bar{w}_n|, \quad w, \bar{w} \in \Sigma$$

y $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ la aplicación desplazamiento definida por $\sigma((w_1, w_2, w_3, \dots)) = (w_2, w_3, \dots)$. Denotamos por $I(0) = [0, \frac{1}{2}]$, $I(1) = [\frac{1}{2}, 1]$ y $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función de Heaviside definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La función ψ y la aplicación desplazamiento σ son conjugadas, la función itinerario $S : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ definida por $S(x_0) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ donde

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{si } \psi^n(x_0) \in I(0) \\ 1, & \text{si } \psi^n(x_0) \in I(1) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

es un homeomorfismo tal que $S \circ \psi = \sigma \circ S$. En consecuencia, ψ es caótica en $[0, 1]$ (este resultado así como otros similares pueden verse en [26] o [107]). Definimos $w_0 = (H(w_n))_n$, entonces existe un único punto $x_0 = S^{-1}(w_0)$ tal que $\psi^n(x_0) \in I(H(w_n))$ para todo n .

En primer lugar, por la transitividad topológica de ψ en $[0, 1]$, dado $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeño existe un conjunto

$$N_0 = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \psi^n(x_0) - \frac{1}{2} \right| < \delta_0 \right\}$$

tal que $|i - j| \geq 3$ para todo $i \neq j \in N_0$. En consecuencia,

$$w_n \psi^n(x_0) \geq \frac{1}{2} w_n$$

para todo $n \in N_0$, y

$$w_n \psi^n(x_0) \geq \delta_0 |w_n| + \frac{1}{2} w_n$$

para todo $n \in N_1 \equiv \mathbb{N} \setminus N_0$. Por consiguiente,

$$\sum_{n \in N_1} |w_n| \leq \frac{1}{\delta_0} \left[f(x_0) - \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right) \right]$$

En segundo lugar, sea $x_1 \in [0, 1]$ tal que

- $\psi^n(x_1) \in I(H(w_n))$ para todo $n \in N_0$.
- Si $\psi^n(x_1), \psi^{n+1}(x_1) \in I(0)$ entonces $\psi^{n+2}(x_1) \in I(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, el conjunto ω -límite de x_1 , denotado por $\omega(x_1)$, no contiene el punto $x = \frac{1}{2}$. Como $\omega(x_1)$ es cerrado, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\left| \psi^n(x_1) - \frac{1}{2} \right| \geq \delta_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$w_n \psi^n(x_1) \geq \delta_1 |w_n| + \frac{1}{2} w_n$$

para todo $n \in N_0$, y por tanto,

$$\sum_{n \in N_0} |w_n| \leq \frac{1}{\delta_1} \left[f(x_1) - \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right) \right]$$

En conclusión, $w \in l_1$. □

Proposición 6.4. *El operador $\mathcal{S} : l_1 \rightarrow \mathcal{V}$ definido por*

$$\mathcal{S}((w_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \psi^n(x), \quad x \in [0, 1]$$

es un isomorfismo.

Demostración. Por el lema 6.3, el operador $\mathcal{S} : l_1 \rightarrow \mathcal{V}$ es una biyección lineal continua entre ambos espacios de Banach. Por el teorema del isomorfismo de Banach, \mathcal{S}^{-1} es un operador continuo en \mathcal{V} , y por tanto, \mathcal{S} es un isomorfismo. \square

Corolario 6.5. *La clase de Takagi $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ es un espacio de Banach isomorfo a l_1 .*

6.1.1 Sistema de ecuaciones en diferencias

En términos del laplaciano discreto definido en (2.6), el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 6.6. *Si $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces f es la única solución continua del sistema de ecuaciones en diferencias*

$$-\Delta_{k,n}g = 2w_{n+1} \tag{6.1}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $g(0) = g(1) = 0$.

Observemos que el resultado anterior es una generalización del corolario 2.13.

Proposición 6.7. *Si $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$, entonces f es la única solución débil de la ecuación de Poisson*

$$\Delta g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} w_n \sum_{j=1}^{2^n-1} (-1)^j \delta \left(x - \frac{j}{2^n} \right)$$

con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $g(0) = g(1) = 0$, donde δ es la función delta de Dirac.

Demostración. Sean $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y $g \in C^2([0, 1])$ de soporte compacto. Multiplicando por la función test g e integrando por partes en el primer miembro,

obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f''(x) g(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \int_0^1 \psi^n(x) g(x) dx = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} w_n \int_0^1 (\psi^n)'(x) g'(x) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} (\psi^n)'(x) g'(x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} w_n \sum_{j=1}^{2^n-1} (-1)^j g\left(\frac{j}{2^n}\right) \end{aligned}$$

Análogamente para el segundo miembro, utilizando la propiedad de la función delta de Dirac, $\int_0^1 g(x) \delta(x - \beta) dx = g(\beta)$ para $\beta \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} w_n \sum_{j=1}^{2^n-1} (-1)^j \int_0^1 g(x) \delta\left(x - \frac{j}{2^n}\right) dx = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} w_n \sum_{j=1}^{2^n-1} (-1)^j g\left(\frac{j}{2^n}\right) \end{aligned}$$

El teorema de Lax-Milgram [31, Teorema 6.2.1] nos garantiza la unicidad de la solución. \square

Finalizamos esta sección presentando una generalización de la proposición 2.18 para la clase de Takagi. En 1943, R. Salem [89, Sección 3] obtuvo el siguiente resultado:

Proposición 6.8. *Sea $\nu = (\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \left| \nu_j - \frac{1}{2} \right| \right) < +\infty$$

entonces existe un única solución continua estrictamente creciente, denotada por S_ν , del sistema de ecuaciones en diferencias

$$S_\nu\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = (1 - \nu_{n+1}) S_\nu\left(\frac{k}{2^n}\right) + \nu_{n+1} S_\nu\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \quad (6.2)$$

para todo $n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $S_\nu(0) = 0$ y $S_\nu(1) = 1$.

Nótese que el problema de contorno discreto anterior es una generalización del sistema de ecuaciones en diferencias (2.8) introducido en la proposición 2.14.

Para cada $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ existe una sucesión de funciones derivables $(\theta_n(\alpha))_n$ definidas en $(0, 1)$ con las siguientes propiedades:

- (1) Existen números reales $r > 0$ y $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tales que si $\alpha \in (\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r)$ entonces $|\theta_n(\alpha) - \frac{1}{2}| < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (2) $\theta_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (3) $\theta'_n(\frac{1}{2}) = 2^{n-1}w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, si $\alpha \in (\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r)$ entonces existe una única solución continua estrictamente creciente, denotada por S_α , del sistema de ecuaciones en diferencias

$$S_\alpha\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = (1 - \theta_{n+1}(\alpha))S_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right) + \theta_{n+1}(\alpha)S_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \quad (6.3)$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet $S_\alpha(0) = 0$ y $S_\alpha(1) = 1$. Nótese que la solución S_α de (6.3) depende de la función f a través de la sucesión de pesos $w \in l_1$ que la define.

A través de su desarrollo en la base de Schauder descrita anteriormente, es inmediato ver que la solución S_α de (6.3) es C^1 con respecto al parámetro α .

Proposición 6.9. *Para cada $x \in [0, 1]$, si $f \in \mathcal{C}_T$ entonces*

$$\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)(x) = f(x)$$

donde S_α es la única solución continua de (6.3) para la sucesión de funciones $(\theta_n)_n$ asociada a f .

Demostración. Sean $h \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + h \in (\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r)$, $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Utilizando (6.3),

$$\begin{aligned} \frac{S_{\alpha+h}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - S_\alpha\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)}{h} &= - \left[\frac{\theta_{n+1}(\alpha+h)S_{\alpha+h}\left(\frac{k}{2^n}\right) - \theta_{n+1}(\alpha)S_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)}{h} \right] \\ &+ \frac{S_{\alpha+h}\left(\frac{k}{2^n}\right) - S_\alpha\left(\frac{k}{2^n}\right)}{h} + \left[\frac{\theta_{n+1}(\alpha+h)S_{\alpha+h}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \theta_{n+1}(\alpha)S_\alpha\left(\frac{k+1}{2^n}\right)}{h} \right] \end{aligned}$$

Haciendo $h \rightarrow 0$ y particularizando en $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) &= -\theta'_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)S_{\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{2^n}\right) - \\ &- \theta_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{k}{2^n}\right) + \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{k}{2^n}\right) + \\ &+ \theta'_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)S_{\frac{1}{2}}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) + \theta_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{k}{2^n}\right) + \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right] + w_{n+1} \end{aligned}$$

En consecuencia, la función $\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)$ es una solución continua del problema de contorno discreto (6.1) cuya única solución continua es la función f . Por tanto, para cada $x \in [0, 1]$, tenemos que

$$\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}}\right)(x) = f(x)$$

□

6.1.2 Derivabilidad. Teorema de Kôno

Esta sección esta dedicada a presentar el teorema de Kôno sobre la derivabilidad de las funciones de la clase de Takagi en términos de la sucesión de pesos w .

Los resultados que exponemos son casos particulares de la clase de Takagi generalizada que introduciremos en la siguiente sección, sin embargo, la relevancia histórica del teorema de Kôno justifica la existencia de esta sección.

Para $x \in [0, 1]$ con expresión binaria $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ definimos la sucesión de funciones $(R_n)_n$ como

$$R_n(x) = 1 - 2\varepsilon_n(x), x \in [0, 1]$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lema 6.10. *La iteración n -ésima de la aplicación ψ viene dada por*

$$\psi^n(x) = \frac{1}{2} - 2^{n-1}R_n(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R_k(x)}{2^k}, \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Si $x = 1$, el resultado es inmediato. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in [0, 1)$ con expresión binaria $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - 2^{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R_n(x) R_k(x)}{2^k} &= \frac{1}{2} - 2^{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(1 - 2\varepsilon_n)(1 - 2\varepsilon_k)}{2^k} = \\ &= \frac{1}{2} - 2^{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + 2^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(1 - \varepsilon_k) + \varepsilon_k(1 - \varepsilon_n)}{2^k} = \\ &= 2\phi(2^{n-1}x) = \psi^n(x) \end{aligned}$$

□

A continuación, consideremos $x \in [0, 1]$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $h > 0$ y $x + h \in [0, 1]$. Denotamos por

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}, \quad x + h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_k}{2^k}, \quad \varepsilon_k, \varepsilon'_k \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N} \quad (6.4)$$

$$k_0 = \begin{cases} \text{máx} \{k \in \mathbb{N} : \varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_k = \varepsilon'_k\}, \\ 0, & \text{si } \{k \in \mathbb{N} : \varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon_k = \varepsilon'_k\} = \emptyset \end{cases} \quad (6.5)$$

y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-(p+1)} < h \leq 2^{-p}$. Las siguientes propiedades son inmediatas:

- (1) $0 \leq k_0 \leq p$.
- (2) $\varepsilon_{k_0+1} = 0$ y $\varepsilon'_{k_0+1} = 1$.
- (3) Si $k_0 + 2 \leq p$ entonces $\varepsilon'_k = 0$ y $\varepsilon_k = 1$ para $k_0 + 2 \leq k \leq p$

Utilizando el lema 6.10, tenemos

$$\psi^n(x+h) - \psi^n(x) = 2^{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R_n(x)R_k(x) - R_n(x+h)R_k(x+h)}{2^k}$$

Seguindo la notación anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 6.11. *Sea $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Consideremos x y $x+h$ como en (6.4). Entonces, $f(x+h) - f(x) = A(x) + B(x) + C(x)$ donde*

$$\begin{aligned} A(x) &= h \sum_{n=1}^{k_0} 2^n w_n R_n(x) \\ B(x) &= \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon'_k - \varepsilon_k}{2^k} \right) \sum_{n=k_0+1}^p 2^n w_n R_n(x) \\ C(x) &= \sum_{n=p+1}^{\infty} w_n 2^{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R_n(x)R_k(x) - R_n(x+h)R_k(x+h)}{2^k} \end{aligned}$$

Demostración. Sean x y $x+h$ como en (6.4). Entonces,

$$\begin{aligned} A(x) &= h \sum_{n=1}^{k_0} w_n 2^n R_n(x) = \sum_{n=1}^{k_0} w_n 2^n R_n(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_k - \varepsilon_k}{2^k} \\ &= \sum_{n=1}^{k_0} w_n 2^{n-1} R_n(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{R_k(x) - R_k(x+h)}{2^k} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{n=k_0+1}^p w_n 2^n R_n(x) \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon_k - \varepsilon'_k}{2^k} \right) = \\
&= \sum_{n=k_0+1}^p w_n 2^n \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{-1 + \varepsilon_k + \varepsilon'_k}{2^k} \\
&= \sum_{n=k_0+1}^p w_n 2^{n-1} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{R_n(x) R_k(x) - R_n(x+h) R_k(x+h)}{2^k}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $A(x) + B(x) + C(x) = f(x+h) - f(x)$. □

Corolario 6.12. Si $(2^n w_n)_n \in c_0$ entonces $C(x) = o(h)$.

Teorema 6.13 (N. Kôno [64]). Sea $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Si $(2^n w_n)_n \in l_2$ entonces f es absolutamente continua en $[0, 1]$ con derivada

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n w_n R_n(x)$$

en casi todo punto de $[0, 1]$

Demostración. Como $2^n w_n \in l_2$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n w_n R_n$ converge en L_2 . Por [59, Teorema 2.9], la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n w_n R_n$ converge en casi todo punto de $[0, 1]$. En consecuencia,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=k_0+1}^p 2^n w_n R_n(x) = 0 \quad \text{c.t.p. } x \in [0, 1]$$

Por la proposición 6.11, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n w_n R_n(x) \quad \text{c.t.p. } x \in [0, 1]$$

Análogamente, obtenemos el mismo resultado para la derivada lateral por la izquierda. Por tanto, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n w_n R_n(x)$ en casi todo punto $x \in [0, 1]$. Finalmente, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n w_n R_n$ converge en L_2 , y por tanto, en L_1 . Si $x \in [0, 1]$ entonces

$$\int_0^x f'(t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m 2^n w_n \int_0^x R_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \psi^n(x) = f(x)$$

y, por tanto, f es absolutamente continua en $[0, 1]$. □

Teorema 6.14 (N. Kôno [64]). *Sea $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Si $(2^n w_n)_n \in c_0$ pero $(2^n w_n)_n \notin l_2$ entonces f no es derivable en casi todo punto de $[0, 1]$, pero es derivable en un subconjunto no numerable de $[0, 1]$ y el rango de f' es \mathbb{R} .*

Demostración. Denotemos por \mathbb{I} el conjunto de los números irracionales. Sean $x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]$ con expresión binaria $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-n}$ y

$$h_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} R_n(x) 2^{-n}$$

para $m \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$x + h_m = \sum_{n=1}^m \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon_n}{2^n}$$

En consecuencia,

$$f(x + h_m) - f(x) = h_m \sum_{n=1}^m 2^n w_n R_n(x)$$

Como $(2^n w_n)_n \notin l_2$ y existe $M > 0$ tal que $2^n |w_n| \leq M$ para todo n , $S_m(x) = \sum_{n=1}^m 2^n w_n R_n(x)$ satisface la ley del logaritmo iterado de Kolmogorov (véase [63]), es decir, si denotamos por $B_m = \sum_{n=1}^m (2^n w_n)^2$ para $m \in \mathbb{N}$ entonces

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{S_m(x)}{\sqrt{2B_m} \log \log B_m} = 1$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]$, y por tanto, f no es derivable en casi todo punto de $[0, 1]$. Sin embargo, para cierto $x \in [0, 1]$, $S_m(x)$ puede converger condicionalmente a un número finito $\alpha \in \mathbb{R}$. En este caso, $B(x) = o(h)$ y $C(x) = o(h)$ ya que k_0 tiende a infinito cuando $h \rightarrow 0^+$. Por tanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k_0} 2^n w_n R_n(x) = \alpha$$

Observese que, para dicho x , k_0 también tiende a infinito cuando $h \rightarrow 0^-$. En conclusión, $f'(x) = \alpha$, y por el teorema de reordenamiento de Riemann, el rango de f' es \mathbb{R} . \square

Teorema 6.15 (N. Kôno [64]). *Sea $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Si $(2^n w_n)_n \notin c_0$ entonces f no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$.*

Demostración. Sean $x \in [0, 1]$ con expresión binaria $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-n}$ y $h_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} R_n(x) 2^{-n}$ para $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x + h_m = \sum_{n=1}^m \varepsilon_n 2^{-n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) 2^{-n}$, y en consecuencia,

$$f(x + h_m) - f(x) = h_m \sum_{n=1}^m 2^n w_n R_n(x)$$

Como $(2^n w_n)_n \notin c_0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n w_n R_n(x)$ no es convergente. Por tanto, f no es derivable en ningún punto de $[0, 1]$. \square

6.1.3 Serie de Fourier

En esta sección generalizamos para la clase de Takagi los coeficientes de Fourier obtenido para la función de Takagi clásica en 3.7.

Proposición 6.16. *Sea $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$. Los coeficientes de Fourier de la función f vienen dados por*

$$\begin{aligned}\widehat{f}(0) &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \\ \widehat{f}(-n) &= \widehat{f}(n) = \frac{-w_{p+1}}{\pi^2 (2k+1)^2}, \quad n = 2^p (2k+1), n \in \mathbb{Z}^+, p \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Demostración. Por la proposición 3.44, los coeficientes de la serie de Fourier compleja de ϕ vienen dados por

$$c_0 = \frac{1}{4}, \quad c_n = c_{-n} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{-1}{\pi^2 n^2} & n \text{ impar} \end{cases}$$

En consecuencia, los coeficientes de Fourier de $\phi(2^m x)$ son

$$c_n^m = \begin{cases} c_{\frac{n}{2^m}} & \text{si } 2^m | n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $m \in \mathbb{Z}^+$. Por la convergencia uniforme,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m \psi^m(x) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} w_{m+1} \phi(2^m x) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} w_{m+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^m e^{2\pi n i x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 2w_{m+1} c_n^m e^{2\pi n i x}, \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\widehat{f}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} 2w_{m+1} c_n^m, \quad n \in \mathbb{Z}$$

En primer lugar, $\widehat{f}(0) = 2c_0 \sum_{m=1}^{\infty} w_m = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} w_m$. Como f es una función par tenemos que $\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. De esta manera, para $n = 2^p (2k+1)$

$$\widehat{f}(n) = \sum_{m=0}^p w_{m+1} c_{2^{p-m}(2k+1)} = \frac{-w_{p+1}}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

La serie de Fourier es absolutamente convergente pero no podemos garantizar la convergencia al valor de la función f salvo si la sucesión de pesos $2^n w_n \in l_2$, en ese caso converge al valor de la función f en casi todo punto. \square

Corolario 6.17. Si $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ entonces $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} w_m$

6.2 La clase de Takagi generalizada

En esta sección presentamos una generalización de la clase de Takagi introducida por J. Ferrera y J. Gómez Gil [41] en 2018. Esta nueva generalización posibilita el estudio de una gran variedad funciones desde una perspectiva general y abstracta así cómo una emergente línea de investigación en la que este trabajo podría continuarse.

Sea D un subconjunto denso y numerable de $[0, 1]$ tal que $0, 1 \in D$. Además, denotamos por $\mathcal{D} = \{D_n\}_n$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de D tales que

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

y $D_1 = \{0, 1\}$. En este caso, decimos que \mathcal{D} es una descomposición de D .

Para cada n , sea \mathcal{F}_n la familia de componentes conexas de $[0, 1] \setminus D_n$ y sea

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

Consideraremos además que las descomposiciones \mathcal{D} de D tienen la propiedad de que existen $0 < \rho \leq 1$ y $(\alpha_n)_n \in l_1$ satisfaciendo que $2\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ para todo n , tales que

$$\rho\alpha_n \leq \mathcal{L}(I_n) \leq \alpha_n$$

para todo n e $I_n \in \mathcal{F}_n$.

Observemos que descomposiciones de este tipo siempre existen para $\rho < 1$, independientemente del conjunto D que estemos considerando.

Para cada descomposición $\mathcal{D} = \{D_n\}_n$ de D y cada sucesión de pesos $w = (w_n)_n \subset \mathbb{R}$ satisfaciendo que $(\alpha_n w_n)_n \in l_1$, se define la función de Takagi con pesos, denotada $T_{\mathcal{D}, w} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$T_{\mathcal{D}, w}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k g_k(x) = \lim_n G_n(x)$$

siendo $g_k(x) = d(x, D_k)$ la distancia de x al conjunto D_k y $G_n = w_1 g_1 + \dots + w_n g_n$. La familia de las funciones así definidas recibe el nombre de clase de Takagi generalizada. Si no hay lugar a confusión, denotaremos simplemente T_w en lugar de $T_{\mathcal{D}, w}$. Por el criterio de Weierstrass, las funciones definidas anteriormente son continuas.

Cabe destacar que la clase de Takagi generalizada contiene a todas las generalizaciones de la función de Takagi presentadas anteriormente. En efecto, para $w = \mathbf{1}$ y D el conjunto de los números diádicos en $[0, 1]$ con la descomposición $\mathcal{D} = \{D_n\}_n$, $D_n = \{\frac{k}{2^{n-1}} \in [0, 1] : k \in \mathbb{Z}\}$, obtenemos la función de Takagi clásica estudiada en la primera parte de este trabajo.

Si consideramos $w = \mathbf{1}$, $r \geq 2$ y $D = \{\frac{k}{r^n} \in [0, 1] : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ con la descomposición $D_n = \{kr^{n-1} \in [0, 1] : k \in \mathbb{Z}\}$ obtenemos la familia de las funciones de Takagi-Van der Waerden.

En cuanto a la familia de funciones de Takagi-Van der Waerden generalizadas, basta considerar el conjunto $D = \{kb^{-n} \in [0, 1] : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ con la descomposición

$$D_n = \left\{ \frac{k}{b^{n-1}} \in [0, 1] : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

y la sucesión de pesos $w_n = (\frac{b}{c})^n$.

Además, la clase de Takagi generalizada incluye el conjunto de todas las funciones de la forma

$$f_{\mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n^n} \phi(r_n^n)$$

siendo $\mathbf{r} = (r_n) \subset \mathbb{Z}^+$ tal que r_n divide a r_{n+1} para todo n . En este caso, $D_n = \{\frac{k}{r_n^{n-1}} \in [0, 1] : k \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha_n = \frac{1}{r_n^{n-1}}$ y $\rho = 1$.

Finalmente, si D es el conjunto de los números diádicos en $[0, 1]$ con la descomposición descrita anteriormente y $\alpha_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, entonces obtenemos la clase de Takagi presentada anteriormente.

Análogamente a la proposición 6.3, J. Ferrera y J. Gómez Gil probaron en [41] que la clase de Takagi generalizada es un espacio de Banach isomorfo a l_1 .

En esta sección presentamos los resultados obtenidos por el autor de este trabajo en colaboración con los profesores J. Ferrera y J. Gómez Gil en [42] así como los resultados obtenidos por J. Ferrera y J. Gómez Gil en [41].

Comenzamos estableciendo algunos resultados del análisis real que emplearemos a lo largo de este capítulo.

Definición 6.18. Un conjunto de funciones reales $\{f_n\}_{n=1}^N$ definidas en $[0, 1]$ es un *conjunto de funciones independientes* si para cada familia de intervalos reales I_1, \dots, I_N se verifica la siguiente condición:

$$\mathcal{L}(\{x \in [0, 1]\} : f_n(x) \in I_n, n = 1, \dots, N) = \prod_{n=1}^N \mathcal{L}\{x \in [0, 1] : f_n(x) \in I_n\}$$

Además, una sucesión $(f_n)_n$ de funciones reales definidas en $[0, 1]$ es un *sistema de funciones independientes (S. I. F.)* si el conjunto $\{f_n\}_{n=1}^N$ es un conjunto de funciones independientes para todo $N \in \mathbb{Z}^+$.

Dada una descomposición $\mathcal{D} = \{D_n\}_n$, denotamos por \tilde{D}_n el conjunto de los puntos medios entre dos puntos consecutivos de D_n , es decir,

$$\tilde{D}_n = \left\{ \frac{a+b}{2} : (a, b) \in \mathcal{F}_n \right\}$$

y sea

$$\tilde{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_n$$

Observemos que la descomposición natural de los números diádicos en $[0, 1]$ satisface $\tilde{D}_n \subset D_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Cuando una descomposición satisface tal propiedad, la correspondiente función de Takagi generalizada se comporta análogamente como la función clásica de Takagi. Esto se debe a la siguiente proposición.

Proposición 6.19. *Si $\tilde{D}_n \subset D_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces la sucesión $(g_n^+)_n$ es un S. I. F. en $[0, 1]$.*

Demostración. En primer lugar, denotamos por

$$D_n = \{0 = x_1^n < x_2^n < \dots < x_{k_n}^n = 1\}$$

y sean $c_i^n = \frac{x_i^n + x_{i+1}^n}{2}$ para $i = 1, \dots, k_n - 1$. De esta manera, tenemos que

$$(g_n^+)^{-1}(\{1\}) = [x_1^n, c_1^n] \cup \dots \cup [x_{k_n-1}^n, c_{k_n-1}^n]$$

y que

$$(g_n^+)^{-1}(\{-1\}) = [c_1^n, x_2^n] \cup \dots \cup [c_{k_n-1}^n, x_{k_n}^n]$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(\{x \in [0, 1] : g_n^+(x) = 1\}) = \mathcal{L}(\{x \in [0, 1] : g_n^+(x) = -1\}) = \frac{1}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Por otro lado, si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \{-1, 1\}$ entonces

$$\{x \in [0, 1] : g_n^+(x) = \varepsilon_n, n = 1, \dots, N\} = \bigcap_{n=1}^N J_n$$

salvo un número finito de puntos, siendo $J_1 = [0, \frac{1}{2})$ si $g_1^+(x) = 1$ y $J_1 = [\frac{1}{2}, 1)$ si $g_1^+(x) = -1$. Una vez definidos $J_1 \supset \dots \supset J_{n-1}$, se define J_n como el conjunto de puntos $x \in J_{n-1}$ tales que $g_n^+(x) = \varepsilon_n$. En consecuencia, J_n es unión finita de intervalos pertenecientes a \mathcal{F}_{n+1} ya que $\tilde{D}_n \subset D_{n+1}$. Además, $\mathcal{L}(J_n) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(J_{n-1})$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{x \in [0, 1] : g_n^+(x) = \varepsilon_n, n = 1, \dots, N\}) &= \mathcal{L}(J_N) = \\ &= \frac{1}{2^N} = \prod_{n=1}^N \mathcal{L}(\{x \in [0, 1] : g_n^+(x) = \varepsilon_n\}) \end{aligned}$$

□

La demostración del siguiente resultado puede verse en [59, Teorema 2.7].

Lema 6.20. *Sea $(\psi_n)_n$ un S. I. F. en $[0, 1]$ tal que*

$$\|\psi_n\|_2 = 1, \quad \|\psi_n\|_\infty \leq M, \quad \int_0^1 \psi_n(x) dx = 0 \quad (6.6)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathcal{L} \left(\left\{ x \in [0, 1] : |P(x)| \geq \frac{1}{2} \|P\|_2 \right\} \right) \geq C \quad (6.7)$$

para todo polinomio $P = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n$ para $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$.

Utilizando el lema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.21 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [41]). *Sea $(\psi_n)_n$ un S. I. F. en $[0, 1]$ satisfaciendo las condiciones (6.6). Si existe un conjunto medible $E \subset [0, 1]$ de medida positiva tal que la serie $\sum_n a_n \psi_n$ converge en medida en E , entonces $(a_n)_n \in l_2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $C > 0$ satisfaciendo la desigualdad (6.7) y $0 < r < 1$ tal que $1 - r \leq \frac{C}{2}$. Como $\mathcal{L}(E) > 0$, existe un intervalo $J \subset [0, 1]$ tal que $\mathcal{L}(J \cap E) > r\mathcal{L}(J)$. Si $(a_n)_n \notin l_2(\mathbb{R})$ entonces existe una sucesión creciente de números naturales $(m_k)_k$ tal que

$$\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n^2 > k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Por el lema 6.20, tenemos que

$$\mathcal{L} \left(\left\{ x \in J : \left| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n \psi_n(x) \right| > \frac{k}{2} \right\} \right) \geq C, \quad k = 1, 2, \dots$$

En consecuencia, obtenemos que

$$\mathcal{L} \left(\left\{ x \in J \cap E : \left| \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} a_n \psi_n(x) \right| > \frac{k}{2} \right\} \right) \geq C - \mathcal{L}(J \setminus E) \geq \frac{C}{2}$$

para todo $k = 1, 2, \dots$. Sin embargo, este hecho contradice la convergencia en medida de $\sum_n a_n \psi_n$ en el conjunto E . \square

A lo largo de las secciones de este capítulo estudiamos la derivabilidad de las funciones de la clase de Takagi generalizada a través de la sucesión de pesos w . En primer lugar, observemos que si $w = \mathbf{1}$ obtenemos la función de Takagi generalizada que presentamos en la sección 5.2, donde probamos que si $x \in D$ entonces $\partial T_w(x) = \mathbb{R}$ y si $x \notin D$ entonces $\partial T_w(x) = \emptyset$.

6.2.1 Convergencia a cero de la sucesión de pesos

Comenzamos esta sección estableciendo la notación que seguiremos en nuestro estudio. Si $0 < h < \rho\alpha_1$ entonces existe $n(h) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_{n(h)+1} \leq \frac{1}{\rho}h < \alpha_{n(h)}$$

Para $x \notin D$, sean $x_n, y_n, u_n, v_n \in D_n$ tales que $u_n < x_n < x < y_n < v_n$, y $(u_n, x_n) \cap D_n = (x_n, y_n) \cap D_n = (y_n, v_n) \cap D_n = \emptyset$. Además, sean c'_n, c_n, c''_n los puntos medios de los intervalos (u_n, x_n) , (x_n, y_n) e (y_n, v_n) respectivamente.

Para $0 < h < \rho\alpha_1$ introducimos la siguiente notación:

$$N_0(h) = \{n < n(h) : x, x+h \in [x_n, c_n], \text{ o bien } x, x+h \in [c_n, y_n]\}$$

$$N_1(h) = \{n < n(h) : c_n < x < y_n < x+h \leq c''_n\}$$

$$N_2(h) = \{n < n(h) : x_n < x < c_n < x+h \leq y_n\}$$

Observemos que los conjuntos anteriores son disjuntos dos a dos y que $N_0(h) \cup N_1(h) \cup N_2(h) = \{1, \dots, n(h)-1\}$. Además, si $n \in N_1(h)$ y $n < n(h)-1$ entonces $n+1 \in N_1(h)$ ya que $y_{n+1} = y_n$. En consecuencia, si denotamos por $m^* = \min N_1(h)$ entonces $N_1(h) = \{m^*, \dots, n(h)-1\}$. Como $g_n(x+h) - g_n(x) = 2(x - y_{m^*}) + h$ y $g'_n(x) = -1$ para todo $n \in N_1(h)$, tenemos que

$$\sum_{n \in N_1(h)} (g_n(x+h) - g_n(x)) w_n = [2(y_{m^*} - x) - h] \sum_{n=m^*}^{n(h)-1} w_n g'_n(x)$$

Análogamente, si $h < 0$ definimos

$$N_1(h) = \{n < n(h) : c'_n \leq x+h < x_n < x < c_n\}$$

$$N_0(h) = \{n < n(h) : x, x+h \in [x_n, c_n], \text{ o bien } x, x+h \in [c_n, y_n]\}$$

$$N_2(h) = \{n < n(h) : x_n \leq x+h < c_n < x < y_n\}$$

Los conjuntos anteriores satisfacen las mismas propiedades que sus correspondientes en el caso $h > 0$, y además, es inmediato ver que para cada h , o bien $N_1(h)$ es vacío, o bien $N_1(-h)$ es vacío.

El objetivo que perseguimos es caracterizar la derivabilidad de la función T_w en términos de la convergencia de la serie $\sum_n w_n g'_n$, ya que es el principal candidato a derivada. En esta sección realizamos este análisis considerando la dicotomía entre $w \in c_0$ frente a $w \notin c_0$. En primer lugar, comenzamos exponiendo el caso $w \in c_0$.

Las dos siguientes proposiciones que presentamos a continuación nos permiten obtener condiciones que garantizan la convergencia de la serie a partir de la derivabilidad de la función T_w .

Proposición 6.22. Sea $x \notin D \cup \tilde{D}$. Si T_w es derivable en x entonces toda sucesión $(h_n)_n \in c_0$ tal que $n(h_n) = n + 1$ para todo n , satisface que

$$T'(x) = \lim_n \frac{G_n(x + h_n) - G_n(x)}{h_n}$$

Demostración. Sea $x \notin D \cup \tilde{D}$. Como T_w es derivable en x y $w \in c_0(\mathbb{R})$, para cada $\varepsilon > 0$ existen $\delta_0 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que si $0 < |h| < \delta_0$ entonces

$$|T(x + h) - T(x) - hT'(x)| \leq \varepsilon|h|$$

y si $n \geq n_0$ entonces $|w_n| < \varepsilon$. Como $(h_n)_n \in c_0$, existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$\begin{aligned} & \left| T'(x) - \frac{G_n(x + h_n) - G_n(x)}{h_n} \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{T(x + h_n) - T(x)}{h_n} - T'(x) \right| + \left| \sum_{k>n} \frac{g_k(x + h_n) - g_k(x)}{h_n} w_k \right| \leq \\ & \leq \varepsilon + 2 \frac{\alpha_{n+1}}{|h_n|} \max_{k>n} |w_k| \leq \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_1$ □

Proposición 6.23. Sea $x \notin D \cup \tilde{D}$. Supongamos que existe una sucesión $(h_n)_n \in c_0$ tal que $n(h_n) = n + 1$ para todo n , y

$$\lim_n \sum_{\substack{k \in N_j(h_n) \\ j=1,2}} \left(\frac{g_k(x + h_n) - g_k(x)}{h_n} - g'_k(x) \right) w_k = 0$$

Si T_w es derivable en x entonces la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente y

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n g'_n(x)$$

Demostración. Sea $x \notin D \cup \tilde{D}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\left| \sum_{\substack{k \in N_j(h_n) \\ j=1,2}} \left(\frac{g_k(x + h_n) - g_k(x)}{h_n} - g'_k(x) \right) w_k \right| < \varepsilon$$

Por tanto, si $n > n_0$ entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{G_n(x + h_n) - G_n(x)}{h_n} - G'_n(x) \right| = \\ & = \left| \sum_{k \in N_1(h_n) \cup N_2(h_n)} \left(\frac{g_k(x + h_n) - g_k(x)}{h_n} - g'_k(x) \right) w_k \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_n \left(\frac{G_n(x + h_n) - G_n(x)}{h_n} - G'_n(x) \right) = 0$$

Por la proposición 6.22, la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente y $T'(x) = \sum_n w_n g'_n(x)$. \square

La siguiente proposición nos permite inferir la derivabilidad de la función T_w a partir de la convergencia de la serie.

Proposición 6.24. *Sea $x \notin D \cup \tilde{D}$. Si la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente entonces T_w es derivable en x con derivada $T'_w(x) = \sum_n w_n g'_n(x)$ si y sólo si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n \in N_2(h)} w_n \left(\frac{g_n(x + h) - g_n(x)}{h} - g'_n(x) \right) = 0.$$

Demostración. Como la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces

$$\left| \sum_{k=n}^m w_k g'_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \rho \alpha_{n_0}$ y $\delta < \min \{d(x, \{x_n, y_n, c_n\}) : 1 \leq n \leq n_0\}$. Además, para $0 < |h| < \delta$ se verifica que $\{1, \dots, n_0\} \subset N_0(h)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} & \left| T_w(x + h) - T_w(x) - h \sum_{n=1}^{\infty} w_n g'_n(x) - \right. \\ & \left. - \sum_{n \in N_1(h) \cup N_2(h)} w_n (g_n(x + h) - g_n(x) - h g'_n(x)) \right| = \\ & = \left| \sum_{n \geq n(h)} (g_n(x + h) - g_n(x) - h g'_n(x)) w_n \right| \leq \\ & \leq |h| |w_{n(h)}| + \sum_{n > n(h)} \alpha_n |w_n| + |h| \left| \sum_{n \geq n(h)} g'_n(x) w_n \right| \leq 2\varepsilon |h| + 2\varepsilon \alpha_{n(h)+1} \leq \\ & \leq 2 \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) |h| \varepsilon \end{aligned}$$

Por otra parte, considerando $m^* = \min N_1(h)$ si $N_1(h) \neq \emptyset$ y $m^* = n(h) - 1$

si $N_1(h) = \emptyset$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in N_1(h)} w_n \frac{g_n(x+h) - g_n(x) - hg'_n(x)}{h} \right| = \\ & = \left| \sum_{n=m^*}^{n(h)-1} w_n \frac{g_n(x+h) - g_n(x) - hg'_n(x)}{h} \right| = \\ & = \left| \frac{[2(y_{m^*} - x) - h]}{h} - 1 \right| \left| \sum_{n=m^*}^{n(h)-1} w_n g'_n(x) \right| \leq 2 \left| \sum_{n=m^*}^{n(h)} w_n g'_n(x) \right| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{T(x+h) - T(x)}{h} - \sum_{n \in N_2(h)} w_n \left(\frac{g_n(x+h) - g_n(x)}{h} - g'_n(x) \right) \right] = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} w_n g'_n(x) \end{aligned}$$

obteniendo así el resultado. \square

Corolario 6.25. *Sea $x \notin D \cup \tilde{D}$. Si $\{|N_2(h)| : |h| > 0\}$ es acotado, entonces T_w es derivable en x si y sólo si la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente. En este caso, $T'_w(x) = \sum_n w_n g'_n(x)$.*

Demostración. Sean $x \notin D \cup \tilde{D}$ y $M > 0$ tal que $|N_2(h)| \leq M$ para todo $h \neq 0$. Supongamos que la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente. Entonces,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in N_2(h)} w_n \left(\frac{g_n(x+h) - g_n(x)}{h} - g'_n(x) \right) \right| \leq 2 \sum_{n \in N_2(h)} |w_n| \leq \\ & \leq 2M \max_{n \in N_2(h)} |w_n| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

y por la proposición 6.24 obtenemos el resultado.

Recíprocamente, supongamos que T_w es derivable en x . Sea $(h_n)_n \in c_0$ tal que $\alpha_{n+2} < \frac{1}{\rho} |h_n| < \alpha_{n+1}$ y $N_1(h_n) = \emptyset$ para todo n . Observemos que en este caso $n(h_n) = n+1$ para todo n . Por tanto,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \in N_j(h_n), j=1,2} w_k \left(\frac{g_k(x+h_n) - g_k(x)}{h_n} - g'_k(x) \right) \right| = \\ & = \left| \sum_{k \in N_2(h_n)} w_k \left(\frac{g_k(x+h_n) - g_k(x)}{h_n} - g'_k(x) \right) \right| \leq 2 \sum_{k \in N_2(h_n)} |w_k| \leq \\ & \leq 2M \max_{k \in N_2(h_n)} |w_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

y por la proposición 6.23 obtenemos el resultado. \square

El siguiente teorema establece una condición sobre la descomposición \mathcal{D} de D que nos permite garantizar que $|N_2(h)|$ es acotado para todo $h \neq 0$.

Teorema 6.26 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [41]). *Sean $x \notin D \cup \tilde{D}$, $w \in c_0$ y supongamos que para la descomposición \mathcal{D} de D existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que si $n \geq n_0$ entonces*

$$\max_{k < n} d(c_k, D_n) \leq \frac{\rho}{2 + \delta} \alpha_n$$

Bajo estas hipótesis, T_w es derivable en x si y sólo si la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente. En este caso, $T'_w(x) = \sum_n w_n g'_n(x)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos $n_0 = 1$. Sean $m \geq 1$ tal que $\frac{2}{2^{m-1}-1} < \delta$ y $0 < h < \rho\alpha_m$. Si $k \in N_2(h)$ entonces $x < c_k < x + h$. Además, si $k < n(h) - m$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < n \leq n(h) - m$ existe $z_n \in D_n$ tal que $|z_n - c_k| \leq \frac{\rho}{2+\delta} \alpha_n$.

Si $z_n \leq x_n$ entonces

$$\begin{aligned} x + h < c_k + h &\leq x_n + \frac{\rho}{2 + \delta} \alpha_n + \rho\alpha_{n(h)} \leq x_n + \rho \left(\frac{1}{2 + \delta} + \frac{1}{2^m} \right) \alpha_n \leq \\ &\leq x_n + \frac{\rho}{2} \alpha_n \leq c_n \end{aligned}$$

y por tanto, $n \in N_0(h)$.

Si $y_n \leq z_n$ entonces

$$\begin{aligned} x = (x + h) - h &\geq c_k - \rho\alpha_{n(h)} \geq z_n - \frac{\rho}{2 + \delta} \alpha_n - \rho\alpha_{n(h)} \geq \\ &\geq y_n - \rho \left(\frac{1}{2 + \delta} + \frac{1}{2^m} \right) \alpha_n \geq y_n - \frac{\rho}{2} \alpha_n \geq c_n \end{aligned}$$

y por tanto, $n \in N_0(h) \cup N_1(h)$. En consecuencia, $|N_2(h)| \leq m$. Por el corolario 6.25 obtenemos el resultado. El caso $h < 0$ es análogo. \square

Observemos que una descomposición \mathcal{D} de D satisfaciendo $\tilde{D}_n \subset D_{n+1}$ para todo n verifica la condición que el teorema 6.26 impone sobre la descomposición del conjunto D . En particular, la clase de Takagi se encuentra bajo las hipótesis de dicho teorema.

Cabe destacar que la condición impuesta sobre la descomposición por el teorema 6.26 es bastante general en el sentido de que dado un conjunto denso y numerable siempre es posible construir una descomposición que verifique dicha condición.

Proposición 6.27. Sean D un subconjunto denso y numerable de $[0, 1]$ tal que $0, 1 \in D$ y $A \geq 2$. Entonces, existen una sucesión $(\alpha_n)_n$ y una descomposición \mathcal{D} de D satisfaciendo

$$2A \max_{k < n} d(c_k, D_n) \leq \alpha_n \quad (6.8)$$

para cada n .

Demostración. Consideramos $D_1 = \{0, 1\}$ y $\alpha_1 = 1$. Supongamos que la condición se verifica para n . Para cada intervalo $I = (a, b) \in \mathcal{F}_n$, denotamos por $(c_i)_{i=1}^{m_n}$

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{m_n} < c_{m_n+1} = b$$

el conjunto de puntos medios en (a, b) de todos los intervalos pertenecientes a \mathcal{F}_k para $k \leq n$. Denotamos por

$$\beta_I = \min_{0 \leq i \leq m_n} (c_{i+1} - c_i)$$

y por $\beta_n = \min \{\beta_I : I \in \mathcal{F}_n\}$. Sea $\alpha_{n+1} = \min \left\{ \frac{\alpha_n}{2}, \frac{\beta_n}{4} \right\}$ y elegimos

$$z_i \in I \cap \left(c_i - \frac{\alpha_{n+1}}{2A}, c_i + \frac{\alpha_{n+1}}{2A} \right) \cap D$$

para cada $i = 1, \dots, m_n+1$. Claramente, $z_{i+1} - z_i > \alpha_{n+1}$. En cada intervalo (z_i, z_{i+1}) seleccionamos el conjunto de puntos de D , denotado por

$$z_i = r_0^i < r_1^i < \cdots < r_{j_i}^i < r_{j_i+1}^i = z_{i+1},$$

tales que

$$\frac{\alpha_{n+1}}{2} \leq r_{j_i+1}^i - r_{j_i}^i \leq \alpha_{n+1}$$

Finalmente, definimos

$$D_{n+1} \cap I = \bigcup_{i=0}^{m_n} \{z_i, r_1^i, \dots, r_{j_i}^i\}$$

□

En términos generales, independientemente de la descomposición del conjunto D , tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.28 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [41]). Sea $x \notin D \cup \tilde{D}$. Para cada n , sea c_n el punto medio de J_n tal que $x \in J_n \in \mathcal{F}_n$. Si existe un entero $k_0 \geq 1$ tal que

$$\liminf_n \frac{|x - c_n|}{\alpha_{n+k_0}} > 0$$

entonces, T_w es derivable en x si y sólo si la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ es convergente. En este caso,

$$T'_w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n g'_n(x)$$

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $|x - c_n| > M\alpha_{n+k_0}$ para todo n . Además, sea $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^{m-k_0}} < M$. Para cada h tal que $0 < h < \rho\alpha_{m+1}$ tenemos que si $n < n(h) - m$ entonces $n \notin N_2(h)$. En efecto, si $x < c_n$ entonces

$$c_n - x > M\alpha_{n+k_0} > \frac{1}{2^{m-k_0}}\alpha_{n+k_0} \geq \alpha_{n+m} \geq \alpha_{n(h)} > h$$

obteniendo una contradicción con la definición del conjunto $N_2(h)$. En consecuencia, $|N_2(h)| \leq m - 1$. El caso $h < 0$ es análogo. Por el corolario 6.25 obtenemos el resultado. \square

En [41], J. Ferrera y J. Gómez Gil presentaron varios ejemplos que ponen de manifiesto la imposibilidad de obtener resultados análogos a los teoremas 6.28 y 6.26 para la subdiferencial.

Proposición 6.29. *Supongamos $w_n \geq 0$ para todo n . Si $x \notin D$ entonces*

$$\partial T_w(x) \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} w_n g'_n(x) \right\}$$

En particular, $d_+ T_w(x) \leq D^- T_w(x)$.

Demostración. Sea $x \notin D$. Consideremos $(x_n, y_n) \in \mathcal{F}_n$ tal que $x \in (x_n, y_n)$. Observemos que la sucesión $(x_n)_n$ converge a x . Además, para cada n se verifica que $g_k(x_n) - g_k(x) \leq g'_k(x)(x_n - x)$ para todo $k \leq n$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} T_w(x_n) - T_w(x) &= G_{n-1}(x_n) - T_w(x) \leq G_{n-1}(x_n) - G_{n-1}(x) \leq \\ &\leq G_{n-1}'^-(x)(x_n - x) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} D^- T_w(x) &\geq \limsup_n \frac{T_w(x_n) - T_w(x)}{x_n - x} \geq \limsup_n G_{n-1}'^-(x) \geq \\ &\geq \limsup_n G_{n-1}'^+(x) \end{aligned}$$

Por otra parte, la sucesión $(y_n)_n$ converge a x . Análogamente, para cada n se verifica que $g_k(y_n) - g_k(x) \leq g_k'^+(x)(y_n - x)$ para todo $k \leq n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} T_w(y_n) - T_w(x) &= G_{n-1}(y_n) - T_w(x) \leq G_{n-1}(y_n) - G_{n-1}(x) \leq \\ &\leq G_{n-1}'^+(x)(y_n - x) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d_+ T_w(x) &\leq \liminf_n \frac{T_w(y_n) - T_w(x)}{y_n - x} \leq \liminf_n G_{n-1}'^+(x) \leq \\ &\leq \liminf_n G_{n-1}'^-(x) \end{aligned}$$

Finalmente, hemos obtenido que

$$d_+T_w(x) \leq \liminf_n G'_{n-1}^-(x) \leq \limsup_n G'_{n-1}^-(x) \leq D^-T_w(x)$$

En conclusión, si $\partial T_w(x) \neq \emptyset$ entonces $\lim_n G_n^+(x) = \lim_n G_n^-(x)$, lo que implica que $x \notin \tilde{D}$ y $\partial T_w(x) = \{\sum_n w_n g'_n(x)\}$. \square

Por la demostración de la proposición 6.29, deducimos que $\partial T_w(x) = \emptyset$ si $x \in \tilde{D}$ o la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ diverge.

Finalizamos esta sección estudiando la subdiferencial de las funciones de la clase de Takagi generalizada en los $x \in \tilde{D} \cup D$.

Recordemos que para $x \in \tilde{D} \cup D$ se verifica que $g_k^+(x), g_k^-(x) \in \{-1, 1\}$ para todo k . Esto implica que $G_n^+(x)$ y $G_n^-(x)$ existen y son finitas para todo n .

Sea $x \in D \setminus \tilde{D}$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in D_{n_0}$ y $x \notin D_n$ si $n < n_0$. A continuación, expresamos T_w como

$$T_w(z) = G_{n_0-1}(z) + \sum_{n=n_0}^{\infty} w_n g_n(z) := G_{n_0-1}(z) + \check{T}_w(z)$$

La función G_{n_0-1} es derivable en x y

$$G'_{n_0-1}(x) = \sum_{n=1}^{n_0-1} w_n g'_n(x)$$

Proposición 6.30. *Supongamos que la descomposición \mathcal{D} satisface que $\alpha_{n+1} \leq \frac{\rho\alpha_n}{2}$ para cada n . Si $x \in D \setminus \tilde{D}$ y sea n_0 definido como antes, entonces $\partial T_w(x) \neq \emptyset$ si y sólo si*

$$a = \liminf_n \sum_{k=n_0}^n w_k \geq 0$$

En este caso,

$$\partial T_w(x) = \sum_{k=1}^{n_0-1} w_k g'_k(x) + [-a, a]$$

Demostración. Para cada $n \geq n_0$ denotamos por $b_n = \min\{y \in D_n : x < y\}$. Observemos que $|x - c_n| \geq \frac{\rho\alpha_n}{2} \geq \alpha_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$ siendo $c_n \in \tilde{D}_n$ el punto medio entre x y b_n . De esta manera,

$$\begin{aligned} d_+\check{T}_w(x) &= \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\check{T}_w(x+t) - \check{T}_w(x)}{t} = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\check{T}_w(x+t)}{t} \leq \\ &\leq \liminf_n \frac{\check{T}_w(b_n)}{b_n - x} = \liminf_n \sum_{k=n_0}^n w_k \frac{g_k(b_n)}{b_n - x} = \liminf_n \sum_{k=n_0}^{n-1} w_k = a \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\varepsilon > 0$, sea $n_1 > n_0$ tal que si $n \geq n_1$ entonces $|w_n| < \varepsilon$ y

$$\sum_{k=n_0}^n w_k > a - \varepsilon$$

Si $\alpha_{n+1} \leq t < \alpha_n$ y $n > n_1$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\check{T}_w(x+t) - \check{T}_w(x)}{t} &= \frac{\check{T}_w(x+t)}{t} = \sum_{k=n_0}^{\infty} w_k \frac{g_k(x+t)}{t} = \\ &= \sum_{k=n_0}^{n-1} w_k + w_n \frac{g_n(x+t)}{t} + \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \frac{g_k(x+t)}{t} > \\ &> a - \varepsilon - \varepsilon - \sum_{k=n+1}^{\infty} |w_k| \frac{g_k(x+t)}{t} \geq a - 2\varepsilon - 2\varepsilon \end{aligned}$$

obteniendo que $d_+ \check{T}_w(x) \geq a - 4\varepsilon$. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos que $d_+ \check{T}_w(x) = a$.

Análogamente, si elegimos $a_n = \{y \in D_n : y < x\}$ en lugar de b_n , entonces

$$D^- \check{T}_w(x) = -a$$

ya que

$$-D^- \check{T}_w(x) = \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{\check{T}_w(x-s)}{s}$$

Por consiguiente, $[D^- \check{T}_w(x), d_+ \check{T}_w(x)] = [-a, a]$ siempre que $a \geq 0$. \square

En cuanto a la derivabilidad, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 6.31. *Supongamos que la descomposición \mathcal{D} satisface que $\alpha_{n+1} \leq \frac{\rho\alpha_n}{2}$ para cada n . Si $x \in D \setminus \tilde{D}$ y sea n_0 definido como antes, entonces T_w es derivable en x si y sólo si $\sum_{n \geq n_0} w_n = 0$. En este caso,*

$$T'_w(x) = \sum_{k=1}^{n_0-1} w_k g'_k(x)$$

Demostración. Es inmediato ver que la condición es necesaria. Recíprocamente, observemos que $|x - c_n| > \frac{\rho\alpha_n}{2}$ siendo $c_n \in \tilde{D}_n$ el punto medio más cercano. Utilizando el mismo tipo de argumentos que en la demostración del teorema 6.28 concluimos que $|N_2(h)| \leq 1$ para todo $h \neq 0$.

Es inmediato ver que

$$\check{T}_w^+(x) = \sum_{n \geq n_0} w_n, \quad \check{T}_w^{\prime-}(x) = - \sum_{n \geq n_0} w_n$$

Por tanto, \check{T}_w es derivable en x y $\check{T}'_w(x) = 0$ \square

Finalmente, observemos que si $x \in \tilde{D} \cap D$ entonces necesariamente $x \in \tilde{D}_k$ implica $k < n_0$. Por tanto, el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 6.32. *Si $x \in \tilde{D} \cap D$, entonces $\partial T_w(x) \neq \emptyset$ si y sólo si*

$$a = \liminf_n \sum_{k=n_0}^n w_k \geq \sum_{x \in \tilde{D}_k} w_k$$

En este caso,

$$\partial T_w(x) = \sum_{x \notin \tilde{D}_k, k < n_0} w_k g'_k(x) + \left[\sum_{x \in \tilde{D}_k} w_k - a, a - \sum_{x \in \tilde{D}_k} w_k \right]$$

Cabe destacar que el caso $x \in \tilde{D} \setminus D$ da lugar a una casuística muy variada que no presentaremos en este trabajo.

Finalmente, exponemos los siguientes resultados para $w \notin c_0$.

Teorema 6.33 (J. Ferrera, J. Gómez Gil y J. Llorente [42]). *Supongamos $w \notin c_0$ y $w_n \geq 0$ para todo n . Si $x \notin D$, entonces*

$$\partial T_w(x) = \emptyset$$

Demostración. Si $x \notin D$, utilizando el mismo argumento realizado en la demostración de la proposición 6.29 obtenemos que

$$d_+ T_w(x) \leq \liminf_n G'_{n-1}(x) \leq \limsup_n G'_{n-1}(x) \leq D^- T_w(x)$$

Como $w \notin c_0$, la serie $\sum_n w_n g'_n(x)$ no es convergente, y por consiguiente, $d_+ T_w(x) < D^- T_w(x)$ concluyendo que $\partial T_w(x) = \emptyset$. \square

Proposición 6.34. *Supongamos $w \notin c_0$ tal que $w_n \geq 0$ para todo n . Si $x \in \tilde{D} \setminus D$ entonces*

$$\partial T_w(x) = \emptyset$$

Demostración. Si $x \in \tilde{D} \setminus D$ entonces existe n tal que $x \in (x_n, y_n) \in \mathcal{F}_n$ y $x = c_n$. Por tanto, $g'_n(x) = 1$, y en consecuencia, $\liminf_n G'_n(x) < \limsup_n G'_n(x)$. Por la demostración de la proposición 6.33, tenemos que $d_+ T_w(x) < D^- T_w(x)$ concluyendo que $\partial T_w(x) = \emptyset$. \square

6.2.2 Convergencia absoluta de la sucesión de pesos

Si $w \in l_1$ entonces la función T_w es Lipschitz con constante de Lipschitz $\|w\|_1$. Por el teorema de Rademacher, T_w es derivable en casi todo punto de $[0, 1]$. Además, T_w tiene derivadas laterales finitas en todo punto de $[0, 1]$.

En consecuencia, podemos caracterizar la subdiferencial de la función T_w en términos de sus derivadas laterales. Es inmediato ver que

$$\partial T_w(x) \subset [-\|w\|_1, \|w\|_1]$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Para cada $x \in [0, 1]$ definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_x^+ &= \{n \in \mathbb{N} : (x_n, y_n) \in \mathcal{F}_n, x \in (x_n, y_n), g_n(x) = |y_n - x|\} \\ \mathcal{N}_x^- &= \{n \in \mathbb{N} : (x_n, y_n) \in \mathcal{F}_n, x \in (x_n, y_n), g_n(x) = |x_n - x|\} \end{aligned}$$

Si no hay lugar a confusión, utilizaremos la notación \mathcal{N}^+ (respectivamente \mathcal{N}^-) en lugar de \mathcal{N}_x^+ (respectivamente \mathcal{N}_x^-).

Observemos que $\mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-$ pueden ser no vacío, en particular si $x \in \tilde{D}_n$ entonces $\mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^- \neq \emptyset$. Además, $x \in D$ si y sólo si $\mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$ es finito.

Recordemos que si $x \in D$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in D_{n_0}$ y $x \notin D_n$ si $n < n_0$.

Nótese que para $x \in [0, 1]$, si $n \in \mathcal{N}^-$ entonces $g_n^-(x) = 1$ y si $n \in \mathcal{N}^+$ entonces $g_n^+(x) = -1$.

Teorema 6.35 (J. Ferrera, J. Gómez Gil y J. Llorente [42]). *Supongamos $w \in l_1$ y sea $x \in [0, 1]$.*

(1) *Si $x \notin D \cup \tilde{D}$ entonces T_w es derivable en x con derivada*

$$T_w'(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n$$

(2) *Si $x \in \tilde{D} \cap D$ y $\mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^+ = \{1, \dots, n_0 - 1\}$ entonces $\partial T_w(x) \neq \emptyset$ si y sólo si*

$$a = \sum_{n \geq n_0} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-} w_n \geq 0$$

En este caso,

$$\partial T_w(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n + [-a, a]$$

Además, si $a = 0$ entonces T_w es derivable en x con derivada

$$T_w'(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n$$

Demostración. Si $x \notin D \cup \tilde{D}$ entonces

$$T_w^+(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n = T_w^-(x)$$

Por otra parte, si $x \in \tilde{D} \cap D$ y $\mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^+ = \{1, \dots, n_0 - 1\}$ entonces

$$\begin{aligned} T_w'^+(x) &= \sum_{n \in \mathcal{N}^- \setminus \mathcal{N}^+} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \setminus \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-} w_n + \sum_{n \geq n_0} w_n \\ &= \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-} w_n + \sum_{n \geq n_0} w_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_w'^-(x) &= \sum_{n \in \mathcal{N}^- \setminus \mathcal{N}^+} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \setminus \mathcal{N}^-} w_n + \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \geq n_0} w_n \\ &= \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n + \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \geq n_0} w_n \end{aligned}$$

Por tanto, si $a = \sum_{n \geq n_0} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-} w_n > 0$ entonces

$$\partial T_w(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n + [-a, a]$$

Si $a = 0$ entonces

$$T_w'(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n$$

mientras que $\partial T_w(x) = \{0\}$ si $a < 0$. □

Observemos que para los casos $x \in D \setminus \tilde{D}$ tal que $\mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^+ = \{1, \dots, n_0 - 1\}$ y $x \in \tilde{D} \setminus D$ el razonamiento es análogo. En concreto, para $x \in \tilde{D} \setminus D$, $\partial T_w(x) \neq \emptyset$ si y sólo si $a = \sum_{n \in \mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^-} w_n < 0$ ya que

$$\begin{aligned} T_w'^+(x) &= \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n - a \\ T_w'^-(x) &= \sum_{n \in \mathcal{N}^-} w_n - \sum_{n \in \mathcal{N}^+} w_n + a \end{aligned}$$

siendo T_w derivable en x si $a = 0$. El caso $x \in D \setminus \tilde{D}$ tal que $\mathcal{N}^- \cup \mathcal{N}^+ = \{1, \dots, n_0 - 1\}$ es similar.

El teorema 6.35 permite concluir que T_w es derivable en $[0, 1]$ excepto en un conjunto numerable.

Observación 6.36. En cuanto a la familia de funciones de Takagi-Van der Waerden generalizadas, si $b < c$ entonces la sucesión de pesos $w_n = (\frac{b}{c})^n$ está en l_1 , y por tanto, dichas funciones son Lipschitz. Por el teorema 6.35, son derivables en $[0, 1]$ salvo en el conjunto

$$\left\{ \frac{k}{2b^n} \in [0, 1] : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Finalizamos esta sección, estudiando el caso $w \notin l_1$ tal que $w_n \geq 0$ para todo n .

Teorema 6.37 (J. Ferrera, J. Gómez Gil y J. Llorente [42]). *Supongamos $w \notin l_1$ tal que $w_n \geq 0$ para todo n . Si $x \in D$ entonces la función $T_w(z) - \xi z$ posee un mínimo local en x para todo $\xi \in \mathbb{R}$. En particular,*

$$\partial_\alpha T_w(x) = \mathbb{R}$$

para $\alpha > 1$.

Demostración. Si $x \in D$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in D_{n_0}$ y $x \notin D_n$ si $n < n_0$. Para cada $\xi \in \mathbb{R}$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0}^m w_n > \sum_{n=1}^{n_0-1} w_n + |\xi|$$

Si consideramos $|h| < \frac{\rho \alpha m}{2}$ entonces $g_k(x+h) = |h|$ para todo $n_0 \leq k \leq m$. De esta manera,

$$\begin{aligned} T_w(x+h) - T_w(x) - \xi h &\geq \sum_{k=1}^{n_0-1} w_k (g_k(x+h) - g_k(x)) + \\ &+ \sum_{k=n_0}^m w_k g_k(x+h) - |\xi| |h| \geq \\ &\geq -|h| \sum_{k=1}^{n_0-1} w_k + |h| \sum_{n=n_0}^m w_n - |\xi| |h| \geq 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la función $T_w(z) - \xi z$ posee un mínimo local en x y, por consiguiente, $\partial_\alpha T(x) = \mathbb{R}$ para todo $\alpha > 1$. \square

Corolario 6.38. *Supongamos $w \notin l_1$ tal que $w_n \geq 0$ para todo n . Si $x \in D$ entonces $\partial T_w(x) = \mathbb{R}$.*

Corolario 6.39. *Supongamos $w \notin l_1$ tal que $w_n \geq 0$ para todo n . Entonces, $\partial_L T_w(x) = \mathbb{R}$ para todo $x \in [0, 1]$.*

El siguiente ejemplo establece que no es posible obtener un resultado análogo al teorema 6.37 para pesos arbitrarios no necesariamente mayores o iguales que cero. Sea $T_{\mathcal{D}}$ una función perteneciente a la clase de Takagi generalizada. A continuación, definimos

$$f(x) = -T_{\mathcal{D}}(x), \quad x \in [0, 1]$$

y sea $x \in D$. Como $\partial^+ f(x) = -\partial(-f)(x) = -\partial T_{\mathcal{D}}(x) = \mathbb{R}$, lo que implica necesariamente $\partial f(x) = \emptyset$.

Observación 6.40. Respecto a la derivabilidad en ningún punto de las funciones de Takagi-Van der Waerden generalizadas, si $b \geq c$ entonces la sucesión de pesos $w \notin c_0$, y por los teoremas 6.37 y 6.33, obtenemos su no derivabilidad en ningún punto de $[0, 1]$.

6.2.3 Convergencia cuadrática de la sucesión de pesos

En esta sección no es preciso exigir la existencia de $0 < \rho \leq 1$ tal que $\rho\alpha_n \leq \mathcal{L}(I)$ para todo $I \in \mathcal{F}_n$.

Teorema 6.41 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [41]). *Supongamos que la descomposición \mathcal{D} satisface que $\tilde{D}_n \subset D_{n+1}$ para todo n . Si $w \in l_2$ entonces la serie $\sum_n w_n g'_n$ es convergente en casi todo punto de $(0, 1)$.*

Demostración. Denotamos por $r_n = g'_n$ para todo n . Sea $(a_n, b_n) \in \mathcal{F}_n$, si $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ entonces

$$\int_{a_n}^{b_n} r_n = \int_{a_n}^{c_n} r_n + \int_{c_n}^{b_n} r_n = 0, \quad \int_{a_n}^{b_n} r_n^2 = b_n - a_n$$

Sean $m > n$. Si $D_m \cap (a_n, c_n) = \{t_1, \dots, t_p\}$ siendo $a_n = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = c_n$ entonces

$$\int_{a_n}^{c_n} r_n r_m = \sum_{j=0}^p \int_{t_j}^{t_{j+1}} r_m = 0$$

Análogamente, $\int_{c_n}^{b_n} r_n r_m = 0$, y por tanto, $\int_0^1 r_n r_m = 0$.

En conclusión, $(r_n)_n$ es un S. I. F. ortonormal en $L^2(0, 1)$. Por consiguiente, la serie $\sum_n w_n g'_n$ es convergente en casi todo punto de $(0, 1)$ (véase [59, Teorema 2.9]). \square

A continuación, asociamos a cada descomposición \mathcal{D} de D otra descomposición que denotaremos por \mathcal{D}^* . Construimos de manera inductiva la sucesión de conjuntos $D_n^* \subset [0, 1]$ para todo n .

$$D_1^* = D_1, \quad D_{n+1}^* = D_{n+1} \cup \tilde{D}_1^* \cup \dots \cup \tilde{D}_n^*$$

Observemos que $D_{n+1}^* = D_n^* \cup D_{n+1} \cup \tilde{D}_n^*$ para todo n , y por tanto, la descomposición \mathcal{D}^* satisface que $\tilde{D}_n^* \subset D_{n+1}^*$ para todo n .

Para cada n , sea \mathcal{F}_n^* el conjunto de todas las componentes convexas de $[0, 1] \setminus D_n^*$. Si $x \notin D_n$, sea $I_n(x) \in \mathcal{F}_n$ tal que $x \in I_n(x)$. Denotaremos por

$$A_n = \bigcup_{c \in \tilde{D}_{n-1} \setminus D_n} I_n(c), \quad B_n = \bigcup_{k=2}^n A_k$$

para todo $n \geq 2$.

Lema 6.42. *Para todo $n \geq 2$,*

- (1) $\tilde{D}_{n-1}^* \setminus D_n \subset B_n$.
- (2) $D_n^* \setminus B_n = D_n \setminus B_n$.

Demostración. Para $n = 2$ el resultado es inmediato. Supongamos cierto dicho resultado para $n \geq 2$.

Sean $x \in \tilde{D}_n^* \setminus D_{n+1}$ y $(a, b) \in \mathcal{F}_n^*$ tal que x es su punto medio. Si $a \notin D_n$, por hipótesis de inducción, $a \in B_n$, y por tanto, existen $k \leq n$ y $c \in \tilde{D}_{k-1} \setminus D_k$ tal que $a \in I_k(c)$. Como $D_k \subset D_n^*$ entonces $(a, b) \subset I_k(c)$, y en consecuencia, $x \in A_k \subset B_n$. Análogamente, si $b \notin D_n$ entonces $x \in B_n$. Finalmente, si $a, b \in D_n$ entonces $x \in \tilde{D}_n$, y por consiguiente, $x \in \tilde{D}_n \setminus D_{n+1} \subset A_{n+1} \subset B_{n+1}$.

Por otro lado, como $D_{n+1}^* = D_n^* \cup D_{n+1} \cup (\tilde{D}_n^* \setminus D_{n+1})$, por la hipótesis de inducción tenemos que

$$D_{n+1}^* \setminus B_{n+1} \subset (D_{n+1} \setminus B_{n+1}) \cup (D_n^* \setminus B_{n+1}) \subset D_{n+1} \setminus B_{n+1}$$

□

Denotamos $g_n^*(x) = d(x, D_n^*)$ para todo n y $x \in [0, 1]$.

Proposición 6.43. *Si la serie $\sum_{n \geq 2} |\tilde{D}_{n-1} \setminus D_n| \alpha_n$ es convergente, entonces los conjuntos*

$$\left\{ x : \sum_n w_n g_n'(x) \text{ es convergente} \right\}, \quad \left\{ x : \sum_n w_n g_n^{*'}(x) \text{ es convergente} \right\}$$

difieren en un conjunto de medida nula.

Demostración. Por el lema 6.42, tenemos que

$$\{J \in \mathcal{F}_n : J \cap B_n = \emptyset\} = \{J^* \in \mathcal{F}_n^* : J^* \cap B_n = \emptyset\}$$

para todo n . Por consiguiente, si $J = (a, b) \in \mathcal{F}_n$ y $J \cap B_n = \emptyset$ entonces $g_n(x) = d(x, \{a, b\}) = g_n^*(x)$ para todo $x \in J$. En consecuencia, $g_n^* = g_n$ en $(0, 1) \setminus B_n$. Además, observemos que $(0, 1) \setminus B_n$ es un conjunto abierto para todo n . En consecuencia, $\sum_n w_n g_n'(x) = \sum_n w_n g_n^{*'}(x)$ para todo $x \in (0, 1) \setminus \cup_{n \geq 2} B_n = (0, 1) \setminus \cup_{n \geq 2} A_n$.

Repetiendo este proceso comenzando en D_k para $k > 1$ en lugar de D_1 obtenemos que para todo $x \in (0, 1) \setminus \cup_{n \geq k+1} A_n$, y por tanto, para todo $x \in (0, 1) \setminus \cap_k \cup_{n \geq k+1} A_n$, la serie $\sum_n w_n g_n'(x)$ es convergente si y sólo si la serie $\sum_n w_n g_n^{*'}(x)$ es convergente.

Como $\mathcal{L}(A_n) \leq |\tilde{D}_{n-1} \setminus D_n| \alpha_n$ para todo n , obtenemos que para todo $k \geq 1$

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{n \geq k+1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq k+1} |\tilde{D}_{n-1} \setminus D_n| \alpha_n$$

y en consecuencia,

$$\mathcal{L} \left(\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k+1} A_n \right) = 0$$

□

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de la proposición 6.43 y del teorema 6.41.

Teorema 6.44 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [41]). *Si la serie $\sum_{n \geq 2} |\tilde{D}_{n-1} \setminus D_n| \alpha_n$ es convergente y $w \in l_2$, entonces la serie $\sum_n w_n g'_n$ es convergente en casi todo punto de $(0, 1)$.*

Lema 6.45. *Si $I \in \mathcal{F}_n$ y $m > n$ entonces*

$$\left| \int_I g_n'^+ g_m'^+ \right| \leq \alpha_m$$

Demostración. Sea c el punto medio de I . Si $c \in D_m$ entonces la integral es cero. En otro caso, sea $J \in \mathcal{F}_m$ tal que $c \in J$. Entonces,

$$\left| \int_I g_n'^+ g_m'^+ \right| = \left| \int_J g_n'^+ g_{m,+}'^+ \right| \leq \mathcal{L}(J) \leq \alpha_m$$

□

Proposición 6.46. *Si la serie $\sum_{n \geq 2} |\tilde{D}_{n-1} \setminus D_n| \alpha_n |w_{n-1}|$ es convergente y $w \in l_2$, entonces la serie $\sum_n w_n g'_n$ es convergente en $L^2([0, 1])$.*

Demostración. Si $m > n$, por el lema 6.45, entonces

$$\left| \int_0^1 g_n'^+ g_m'^+ \right| \leq \sum_{I \in \mathcal{F}_n} \left| \int_I g_n'^+ g_m'^+ \right| \leq |\tilde{D}_n \setminus D_{n+1}| \alpha_m$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^M \left| \int_0^1 g_n'^+ g_m'^+ \right| &\leq |\tilde{D}_n \setminus D_{n+1}| \sum_{m=n+1}^M \alpha_m \leq \\ &\leq |\tilde{D}_n \setminus D_{n+1}| \sum_{m=n+1}^M \frac{1}{2^{m-n-1}} \alpha_{n+1} \leq 2 |\tilde{D}_n \setminus D_{n+1}| \alpha_{n+1} \end{aligned}$$

En consecuencia, para $M > N$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{n=N}^M w_n g_n'^+ \right)^2 &= \sum_{n=N}^M w_n^2 + 2 \sum_{n=N}^M \sum_{m=n+1}^M \int_0^1 w_n w_m g_n'^+ g_m'^+ \leq \\ &\leq \sum_{n=N}^M w_n^2 + 4 \|w\|_\infty \sum_{n=N}^M |\tilde{D}_n \setminus D_{n+1}| \alpha_{n+1} |w_n| \end{aligned}$$

En conclusión, la serie $\sum_n w_n g_n^+$ es convergente en $L^2([0, 1])$, y por tanto, la serie $\sum_n w_n g_n'$ converge en $L^2([0, 1])$ ya que ambas series coinciden en casi todo punto. \square

Observemos que la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 2} \left| \tilde{D}_{n-1} \setminus D_n \right| \alpha_n |w_{n-1}|$$

es una condición más débil que la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 2} \left| \tilde{D}_{n-1} \setminus D_n \right| \alpha_n$$

Sin embargo, es una condición suficiente para garantizar la derivabilidad en casi todo punto si $w \in l_2$.

Teorema 6.47 (J. Ferrera y J. Gómez Gil [41]). *Si la serie*

$$\sum_{n \geq 2} \left| \tilde{D}_{n-1} \setminus D_n \right| \alpha_n |w_{n-1}|$$

es convergente y $w \in l_2$, entonces la función T_w es absolutamente continua en $[0, 1]$.

Demostración. Como $L^2([0, 1]) \subset L^1([0, 1])$ y la inclusión entre ambos espacios de Banach es continua, por la proposición 6.46, la serie $F(x) = \sum_n w_n g_n'(x)$ es convergente en $L^1([0, 1])$. Además,

$$\int_0^x F(s) ds = \lim_N \int_0^x \sum_{n=1}^N w_n g_n'(s) ds = \lim_N \sum_{n=1}^N w_n \int_0^x g_n'(s) ds = T_w(x)$$

para todo $x \in [0, 1]$. En conclusión, T_w es absolutamente continua en $[0, 1]$. \square

Corolario 6.48. *Si la serie $\sum_{n \geq 2} \left| \tilde{D}_{n-1} \setminus D_n \right| \alpha_n$ es convergente y $w \in l_2$, entonces T_w es absolutamente continua en $[0, 1]$ y $T_w'(x) = \sum_n w_n g_n'(x)$ en casi todo punto.*

Si $w \notin l_2$, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 6.49. *Supongamos que la descomposición \mathcal{D} de D satisface que la serie $\sum_{n \geq 2} \left| \tilde{D}_{n-1} \setminus D_n \right| \alpha_n$ es convergente. Si $w \notin l_2$ entonces*

$$\mathcal{L} \left(\left\{ x : \sum_n w_n g_n'(x) \text{ es convergente} \right\} \right) = 0.$$

Demostración. Sea $E = \{x : \sum_n w_n g'_n(x) \text{ es convergente}\}$. Por la proposición 6.43, tenemos que

$$\mathcal{L} \left(E \Delta \left\{ x : \sum_n w_n g_n^{*'}(x) \text{ es convergente} \right\} \right) = 0$$

Por tanto, la serie $\sum_n w_n g_n^{*'}$ es convergente en casi todo punto de E , y en consecuencia, es convergente en medida en E . Por el teorema 6.21, si $\mathcal{L}(E) > 0$ entonces $w \in l_2$. \square

Si la descomposición \mathcal{D} de D satisface que existe $0 < \rho \leq 1$ tal que

$$\rho \alpha_n \leq \mathcal{I} \leq \alpha_n$$

para todo n y para todo $I \in \mathcal{F}_n$, entonces obtenemos los siguientes corolarios.

Este primer corolario es consecuencia inmediata de la proposición y del teorema 6.26.

Corolario 6.50. *Supongamos que para la descomposición \mathcal{D} de D existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que si $n \geq n_0$ entonces*

$$\max_{k < n} d(c_k, D_n) \leq \frac{\rho}{2 + \delta} \alpha_n$$

Además, supongamos que para cada intervalo acotado I la serie

$$\sum_{n \geq 2} \left| \tilde{D}_{n-1} \cap I \setminus D_n \right| \alpha_n$$

es convergente. Si $w \notin l_2$ entonces el conjunto de puntos donde T_w es derivable tiene medida nula.

Este segundo corolario es consecuencia inmediata a partir del corolario 6.50 y del teorema 6.47.

Corolario 6.51. *Supongamos que la descomposición \mathcal{D} de D satisface que existe $\rho > 0$ tal que $\rho \alpha_n \leq \mathcal{L}(I) \leq \alpha_n$ para todo n e $I \in \mathcal{F}_n$. Además, satisface que $\tilde{D}_n \subset D_{n+1}$ para todo n . Entonces, si $w \in l_2$, T_w es derivable en casi todo punto, mientras que el conjunto de puntos de derivabilidad de T_w tiene medida nula si $w \notin l_2$.*

Observemos que el corolario 6.51 es una generalización para la clase de Takagi generalizada de los teoremas 6.13 y 6.14 debidos a N. Kôno presentados anteriormente.

APÉNDICE A

Cálculo fraccionario

El término cálculo fraccionario hace referencia a la teoría de operadores que describen procesos de derivación e integración de órdenes arbitrarios. Al mismo tiempo, esta teoría es la generalización de los operadores de derivación e integración clásicos. En cuanto a las funciones no derivables en ningún punto de $[0, 1]$, el cálculo fraccionario nos permite obtener una medida del grado de derivabilidad de estas funciones.

La n -ésima integral de una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se define recursivamente como

$$D^{-n} f(x) = \int_0^x D^{-n+1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.1})$$

donde

$$D^{-1} f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

A. L. Cauchy reescribió (A.1) como

$$D^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

que recibe el nombre de *Fórmula de Cauchy de la Integral Iterada*. Esta expresión puede generalizarse dando lugar a las siguientes definiciones.

Definición A.1. Sean $f \in L_1([0, 1])$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 0$. Definimos la *integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β* de la función f como

$$D^{-\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt$$

donde Γ es la función Gamma.

Definición A.2. Sean $f \in L_1([0, 1])$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 0$. Definimos la *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden β* de la función f como

$$D^\beta f(x) = D^{\lceil \beta \rceil} \left[D^{-(\lceil \beta \rceil - \beta)} f(x) \right]$$

donde $\lceil \beta \rceil$ es el menor entero mayor o igual que β y D es el operador de derivación.

En realidad, no existe un único cálculo fraccionario, sino varias definiciones con diferentes propiedades. Cada uno de los cálculos exige unas condiciones a las funciones para poder ser aplicado. Una teoría general así como aplicaciones del cálculo fraccionario puede verse en [78], [87] o [80].

En [47, Teorema 19], G. H. Hardy y J. E. Littlewood probaron que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función 2π periódica Hölder continua de orden $0 < \alpha \leq 1$ tal que

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

entonces $D^\beta f$ existe y es continua en $[0, 2\pi]$ para todo $0 < \beta < \alpha$. Sin embargo, este resultado no puede aplicarse a la función de Takagi ni a la familia de funciones \mathcal{TWG} . Por esta razón, en [97] se demuestra ad hoc el teorema A.4 que establece la relación, entre la continuidad Hölder y la derivada fraccionaria, necesaria para estudiar la familia de funciones \mathcal{TWG} desde la perspectiva del cálculo fraccionario.

La demostración del siguiente lema es inmediata.

Lema A.3. Sea $\alpha \geq 0$. Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es Hölder continua de orden α en $[0, 1]$ entonces la extensión de f , denotada $f^* : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq 1 \\ f(0), & x \leq 0 \end{cases}$$

es Hölder continua de orden α en $(-\infty, 1]$.

Teorema A.4. Sean $0 < \beta < \alpha \leq 1$ y $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Hölder continua de orden α en $[0, 1]$ tal que $f(0) = 0$. Si $f^* : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la extensión de f definida por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

entonces $D^\beta f^*(x)$ existe y es continua en $[0, 1]$.

Demostración. Sean $0 < \beta < \alpha \leq 1$ y $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos convergente a cero. Definimos

$$f_{1-\beta, n}^*(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{x-\varepsilon_n} f^*(t) (x-t)^{-\beta} dt, \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$$

Afirmación A.5. La sucesión $(f_{1-\beta,n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

Demostración. Sea $\eta > 0$. Existen $M > 0$ tal que $|f^*(t)| \leq M$ para todo $t \in (-\infty, 1]$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\varepsilon_n < \left(\frac{\eta(1-\beta)\Gamma(1-\beta)}{2M}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m > n_0$, entonces

$$\begin{aligned} |f_{1-\beta,n}^*(x) - f_{1-\beta,m}^*(x)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_{x-\varepsilon_m}^{x-\varepsilon_n} f^*(t) (x-t)^{-\beta} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left| \frac{M(\varepsilon_n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{M(\varepsilon_m)^{1-\beta}}{1-\beta} \right| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]$. Por el criterio de Cauchy, la sucesión $(f_{1-\beta,n}^*)_n$ converge uniformemente en $[0, 1]$. \square

En consecuencia, definimos $f_{1-\beta}^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_{1-\beta}^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{1-\beta,n}^*, \quad x \in [0, 1]$$

y utilizaremos la notación

$$f_{1-\beta}^*(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x f^*(t) (x-t)^{-\beta} dt, \quad x \in [0, 1]$$

Por otro lado, para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$ tenemos que

$$\Gamma(1-\beta) f_{1-\beta,\varepsilon_n}^{*\prime} = f^*(x-\varepsilon_n) \varepsilon_n^{-\beta} - \beta \int_0^{x-\varepsilon_n} f^*(t) (x-t)^{-\beta-1} dt$$

Además, si $x \in (0, 1]$ entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\beta) f_{1-\beta,n}^{*\prime} &= \beta \int_0^{x-\varepsilon_n} [f^*(x) - f^*(t)] (x-t)^{-\beta-1} dt + \\ &+ f^*(x) x^{-\beta} - \varepsilon_n^{-\beta} [f^*(x) - f^*(x-\varepsilon_n)] \end{aligned}$$

Por el lema A.3, existe $C_\alpha > 0$ tal que $|f^*(x) - f^*(t)| \leq C_\alpha |x-t|^\alpha$ para todo $x, t \in (-\infty, 1]$.

Para cada $x \in [0, 1]$, definimos

$$h_n(x) = \varepsilon_n^{-\beta} [f^*(x) - f^*(x-\varepsilon_n)], \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$$

Afirmación A.6. La sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a cero en $[0, 1]$.

Demostración. Sean $\eta > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\varepsilon_n < \left(\frac{\eta}{C_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$. Por tanto, si $n > n_0$ entonces

$$|h_n(x) - 0| = \left| \frac{f^*(x) - f^*(x - \varepsilon_n)}{\varepsilon_n^\beta} \right| \leq C_\alpha \varepsilon_n^{\alpha-\beta} < \eta$$

para todo $x \in [0, 1]$. \square

Para cada $x \in [0, 1]$, definimos

$$g_n(x) = \int_0^{x-\varepsilon_n} [f^*(x) - f^*(t)] (x-t)^{-\beta-1} dt + f^*(x) x^{-\beta}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Afirmación A.7. La sucesión $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

Demostración. Sea $\eta > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\varepsilon_n < \left(\frac{\eta(\alpha-\beta)}{2C_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m > n_0$, entonces

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &= \left| \int_{x-\varepsilon_m}^{x-\varepsilon_n} [f^*(x) - f^*(t)] (x-t)^{-\beta-1} dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x-\varepsilon_m}^{x-\varepsilon_n} C_\alpha (x-t)^{\alpha-\beta-1} dt \right| \leq \frac{C_\alpha}{\alpha-\beta} \left((\varepsilon_n)^{\alpha-\beta} + (\varepsilon_m)^{\alpha-\beta} \right) < \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]$. Por el criterio de Cauchy, la sucesión $(g_n)_n$ converge uniformemente en $[0, 1]$. \square

En consecuencia, la sucesión $\left(f_{1-\beta,n}^*\right)_n$ converge uniformemente en $(0, 1]$. Por tanto, si $x \in (0, 1]$ definimos

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{1-\beta,n}^*$$

y utilizaremos la notación

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\beta \int_0^x [f^*(x) - f^*(t)] (x-t)^{-\beta-1} dt + f^*(x) x^{-\beta} \right]$$

para todo $x \in [0, 1]$. Como $f_{1-\beta,n}^*(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $F(0) = 0$. Por tanto, la sucesión $\left(f_{1-\beta,n}^*\right)_n$ converge uniformemente a F en $[0, 1]$.

Afirmación A.8. La función F es continua en $[0, 1]$.

Demostración. Como f^* es continua en $[0, 1]$, por la convergencia uniforme, F es continua en $(0, 1]$. Sean $\eta > 0$ y $\delta = \left(\frac{\eta\Gamma(1-\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha C_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$. Si $x \in [0, 1]$ tal que $|x| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq \frac{\beta C_\alpha}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-\beta-1} dt + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} |f^*(x) - f^*(0)| x^{-\beta} \\ &\leq \frac{\beta C_\alpha}{(\alpha-\beta)\Gamma(1-\beta)} x^{\alpha-\beta} + \frac{C_\alpha}{\Gamma(1-\beta)} x^{\alpha-\beta} = \frac{\alpha C_\alpha}{(\alpha-\beta)\Gamma(1-\beta)} x^{\alpha-\beta} < \eta \end{aligned}$$

En consecuencia, F es continua en $[0, 1]$. \square

Por la convergencia uniforme, tenemos que $f_{1-\beta}^{*'}(x) = F(x)$ para todo $x \in (0, 1)$. Como $D^\beta f^* = f_{1-\beta}^{*'}$, concluimos que $D^\beta f^*(x)$ existe para todo $x \in (0, 1)$.

Afirmación A.9. $f_{1-\beta}^{*'}(0) = 0$

Demostración. Sea $\eta > 0$. Como F es continua en $x = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in [0, 1]$ con $|x| < \delta$ entonces $|F(x)| < \eta$. Sea $x \in [0, 1]$ tal que $|x| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f_{1-\beta}^*(x) - f_{1-\beta}^*(0)}{x} \right| = \frac{1}{x} \left| \int_0^x F(t) dt \right| < \eta$$

\square

Afirmación A.10. $f_{1-\beta}^{*'}(1) = F(1)$

Demostración. Sea $\eta > 0$. Como F es continua en $x = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in [0, 1]$ con $|x-1| < \delta$ entonces $|F(x) - F(1)| < \eta$. Sea $x \in [0, 1]$ tal que $|x-1| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{1-\beta}^*(1) - f_{1-\beta}^*(x)}{1-x} - F(1) \right| &= \left| \frac{1}{1-x} \int_x^1 F(t) dt - F(1) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{1-x} \int_x^1 |F(t) - F(1)| dt < \eta \end{aligned}$$

\square

En conclusión, $D^\beta f^*(x) = f_{1-\beta}^{*'}(x) = F(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Por tanto, $D^\beta f^*(x)$ existe en $[0, 1]$. \square

Corolario A.11. Sean $0 < \beta < \alpha \leq 1$ y $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Hölder continua de orden α en $[0, 1]$ tal que $f(0) = 0$, entonces $D^\beta f(x)$ existe y es continua en $[0, 1]$.

En las hipótesis del corolario A.11, si la condición $f(0) = 0$ no se verifica entonces el resultado no es cierto. En concreto, la función constante, $h(t) = c$ para $c \in \mathbb{R}$, es Hölder continua de orden $\alpha \geq 0$. Sin embargo, $D^{\frac{1}{2}}h(t) = \frac{c}{\sqrt{\pi t}}$, y en consecuencia, no está definida para $t = 0$ excepto si $c = 0$.

APÉNDICE B

La función de Takagi en Maple

Este apéndice está dedicado a mostrar el código de Maple que he desarrollado a lo largo de este trabajo.

B.1 La función de Takagi en los números racionales.

He diseñado el siguiente algoritmo en Maple con el objetivo de computar el valor de la función de Takagi en los números racionales. Está basado en el desarrollo teórico realizado en la demostración de la proposición 4.38 de la sección 4.4.

La realización de un algoritmo eficiente capaz de trabajar con grandes números en tiempos de ejecución bajos y sin necesidad de excesivos recursos hardware está básicamente determinado por el cómputo de la expresión $\text{ord}_q(2)$. Esto se debe al enorme coste algorítmico que supone dicho cómputo para grandes valores de q .

La teoría de grupos constituye la herramienta fundamental que nos permitirá desarrollar un algoritmo que trabaje con tiempos de ejecución razonable para grandes valores de q . De esta forma, consideramos $q > 1$ número natural impar y el grupo multiplicativo

$$\mathbb{Z}_q^* = \{a + q\mathbb{Z} : \text{mcd}(a, q) = 1\}$$

El carácter impar de q nos garantiza que $2 \equiv 2 + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q^*$. Por consiguiente, el $\text{ord}_q(2)$ es el orden del subgrupo cíclico H generado por 2, es decir, $H = \langle 2 \rangle$. Además, \mathbb{Z}_q^* es un grupo abeliano finito cuyo orden viene dado por la función indicatriz de Euler $\varphi(q)$.

Proposición B.1 (Fórmula de Lagrange). Sean G un grupo finito y H un subgrupo de G . Entonces,

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(H) [G : H]$$

donde $[G : H]$ denota el índice de H en G .

La fórmula de Lagrange afirma que el orden de H es un divisor del orden de \mathbb{Z}_q^* . Esto nos permite reducir drásticamente el coste computacional del cálculo del $\text{ord}_q(2)$ ya que “sólo” deberemos utilizar los divisores de $\varphi(q)$ como casos de prueba. Para ello, utilizamos la función *divisors* de Maple.

Es importante subrayar que el coste algorítmico del cómputo del valor $\varphi(q)$ para grandes valores de q es elevado, por esta razón, distinguimos el caso en el que q es primo, ya que, en este caso, $\varphi(q) = q - 1$, evitando así hacer una llamada a la rutina *phi* de Maple.

Con el objetivo de comprender de una manera visual el funcionamiento del algoritmo, hemos empleado la misma notación para las variables que la usada en la sección 4.4.

```

1 TakagiRacionales := proc(num, denom)
2
3     # Reducimos a fraccion irreducible
4
5     mcd := igcd(num, denom);
6
7     p := iquo(num, mcd);
8
9     q := iquo(denom, mcd);
10
11    q_prima := q;
12    sumando1 := 0;
13    m := 0;
14
15    #####
16    # Caso: q PAR #
17    #####
18
19    if mod(q, 2) = 0 then
20        q_prima := q;
21        m := 0;
22
23        while mod(q_prima, 2) = 0 do
24            q_prima := iquo(q_prima, 2);
25            m := m+1;
26        od;
27
28        #Computamos los p_j
29

```

```

30     p_0 := min(p, q-p);
31     q_0 := q;
32     p_j := array(1 .. m);
33     q_j := array(1 .. m);
34     q_j[1] := iquo(q_0,2);
35     p_j[1] := min(p_0, q_j[1]-p_0);
36     for i from 2 to m do
37         q_j[i] := iquo(q_j[i-1],2);
38         p_j[i] := min(p_j[i-1],q_j[i]-p_j[i-1]);
39     od;
40     sumatoriol := p_0;
41     for j from 1 to m-1 do
42         sumatoriol := sumatoriol + p_j[j];
43     od;
44     sumandol := iquo(sumatoriol,q);
45 fi;
46
47
48
49 #####
50 # Caso q IMPAR #
51 #####
52
53 sumatorio2 := 0;
54
55 if q_prima <> 1 then
56
57     # Computamos el orden de 2
58
59     with(numtheory);
60     if isprime(q_prima) = true then
61         num_elems := q_prima-1;
62     else
63         num_elems := phi(q_prima);
64     end if
65     ordenes_posibles := divisors(num_elems);
66     num_divisores := tau(num_elems);
67     encontrado:= false;
68     i := 1;
69     while encontrado = false do
70         orden := ordenes_posibles[i];
71         if mod(2^(orden), q_prima) = 1 then
72             encontrado := true;
73         else
74             i := i+1;
75         end if;
76     od;
77
78     # Computamos el valor k

```

```

79
80     orden_de_dos := orden;
81     if mod(orden_de_dos, 2) = 0 then
82         aux := iquo(orden_de_dos, 2);
83         if mod(2^aux, q_prima) = q_prima-1 then
84             k := aux;
85         else
86             k := orden_de_dos;
87         end if;
88     else
89         k := orden_de_dos;
90     end if;
91
92     # Calculamos los nuevos p_j
93
94     p_0_aux := min(p, q-p);
95     if k <> 1 then
96         p_j_aux := array(1 .. k-1);
97         p_j_aux[1] := min(2*p_0_aux, q-2*p_0_aux);
98         for i from 2 to k-1 do
99             p_j_aux[i] := min(2*p_j_aux[i-1],
100 q-2*p_j_aux[i-1]);
101         od;
102         fi;
103         sumatorio2 := 2^k*p_0_aux;
104         for j from 1 to k-1 do
105             exponente := k-j;
106             sumatorio2 := sumatorio2 +
107 2^exponente*p_j_aux[j];
108         od;
109         fi;
110
111     #Computamos el valor de la función de Takagi
112
113     valorTakagi := (1/2^m)*(1/q)*(1/(2^k-1))*sumatorio2 +
114 sumandol;
115
116     return valorTakagi;
117 end;

```

B.2 Serie de Fourier

A través de sus series de Fourier hemos computado en Maple la función de Takagi T y la función de Takagi conjugada T^* (véase 3.7). El cálculo simbólico de Maple junto con su herramienta *evalf* nos permite conseguir una precisión de veinte dígitos decimales en nuestros cálculos y el cómputo de dos mil sumandos en la serie de Fourier.

```
1  coeficientesFourierTakagi := proc (n)
2
3  if n = 0 then
4      value := 1/2;
5  else
6      p := 0;
7      num := n;
8      while mod (num, 2) = 0 do
9          num := iquo(num, 2);
10         p := p+1;
11     od;
12 end if;
13
14 value := -1/(evalf(Pi, 10)^2*2^p*num^2)
15
16 return value;
17 end:
18
19 funcionTakagi := proc (theta)
20 sum := 0;
21 for n to 2000 do
22     sum := sum +
23     coeficientesFourierTakagi(n)*evalf(cos(2*Pi*theta*n), 20);
24 od;
25 value := 1/2 + 2*sum;
26
27 return value;
28 end:
29
30 funcionTakagiConjugada := proc (theta)
31 sum := 0;
32 for n to 2000 do
33     sum := sum +
34     coeficientesFourierTakagi(n)*evalf(sin(2*Pi*theta*n), 20);
35 od;
36 value := 2*sum;
37
38 return value;
39 end:
```


APÉNDICE C

Algoritmo de Box-Counting en Matlab

El algoritmo de box counting recibe como entrada la gráfica de una función $f \in \mathcal{TWG}$ en formato .jpg de dimensiones $512 \times 512 \times 3$ generada por el comando `plot('TWG'(4, 3, x), x = 0..1)` de Maple donde la función TWG , cuyo código en Maple presentamos a continuación, calcula los valores de la función f en $[0, 1]$. Utilizamos una precisión de 1000 cifras decimales ya que una adecuada precisión en el cálculo de la gráfica disminuye considerablemente el error en la estimación de la dimensión de box counting.

```
1 TWG := proc (b, c, x)
2   z := 0;
3   y := 0;
4   val := 0;
5
6   for n from 0 to 10000 do
7     y := b^n*x-floor(b^n*x);
8     if 1/2 <= y then
9       val := 1-y;
10    else
11      val := y;
12    end if;
13    z := z+evalf(val/c^n, 1000);
14  end do;
15
16  return z
17 end proc;
```

El algoritmo recibe la imagen y la convierte en una imagen binaria de dimensiones 512×512 . A continuación, realiza un total de $\log_2 512 = 9$ mallados

de órdenes $\frac{1}{2^n}$ para $n \in \{1, \dots, 9\}$. Para cada $n \in \{1, \dots, 9\}$ calcula el valor $N_{\delta_n}(F)$ definido en 5.3.2. Debido a la aproximación

$$\log_2 N_{\delta_n}(F) \simeq \log_2 c + \dim_B F \cdot \log_2 \frac{1}{\delta}$$

siendo c una constante positiva, representamos n frente a $\log_2 N_{\delta_n}(F)$ obteniendo la recta de regresión con el comando de Matlab *polyfit*. La dimensión de box counting es la pendiente de la recta de regresión y el coeficiente de correlación nos permite estimar el error cometido. En las ejecuciones del algoritmo, el coeficiente de correlación es cercano a 1 lo que justifica la estimación razonable de la dimensión de box counting.

```

1 imagen = imread('c4b5.jpg');
2 imagenbinaria = im2bw(imagen);
3 tamImagen = size(imagenbinaria);
4 longitud = min(tamImagen(1), tamImagen(2));
5 iteraciones = log2(longitud);
6 boxCounting = zeros(1, iteraciones);
7 for n = 1:iteraciones
8     m = 2^(iteraciones-n);
9     celdas = (longitud/m);
10    mallado = mat2cell(imagenbinaria, m * ones(1, celdas),
11    m * ones(1, celdas));
12    malladoArray = reshape(mallado, 1, numel(mallado));
13    N_delta = 0;
14    for j=1:numel(malladoArray)
15        if isequal(malladoArray{j}, ones(m, m)) == 0
16            N_delta = N_delta + 1;
17        end
18    end
19    boxCounting(n) = N_delta;
20 end
21 figure(1);
22 y = 1:(iteraciones-1);
23 x = 1:iteraciones-1;
24 for j = 1:iteraciones-1
25     y(j) = log2(boxCounting(j));
26 end
27 plot(x, y, 's');
28 RR = polyfit(x, y, 1);
29 dimension = RR(1);
30 hold on;
31 plot(x, RR(1)*x+RR(2), 'g');
32 matrizCC = corrcoef(x, y);
33 CC = matrizCC(2, 1);
34 text(5, 3, sprintf('Coef. Cor. = %f', CC));
35 text(5, 4, sprintf('Dim. B.C. = %f', dimension));

```

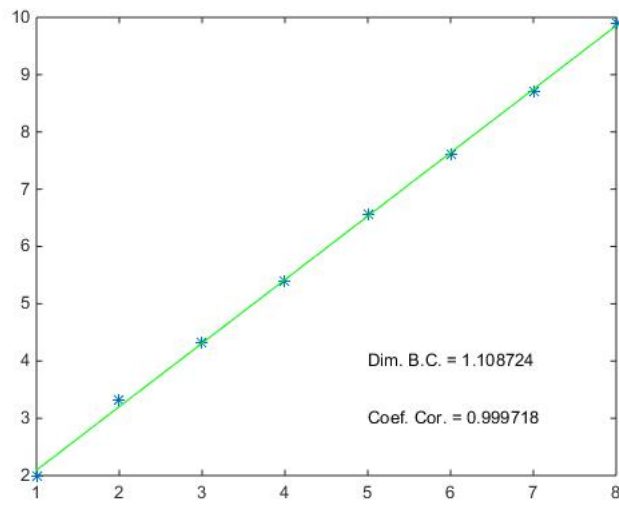


Figura C.1: Ejecución del algoritmo para $b = 5$, $c = 4$.

Bibliografía

- [1] Allaart, P. C. *How large are the level sets of the Takagi function?* Monastsh Math (2012), Vol. 167 311-331
- [2] Allaart, P. C. *Correction and strengthening of “How large are the level sets of the Takagi function?”* Monastsh Math (2014), Vol. 175 313-318
- [3] Allaart, P. C. *The finite cardinalities of level sets of the Takagi function.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 388 (2012), 1117-1129
- [4] Allaart, P. C. *Distribution of the extrema of random Takagi functions.* Acta Math. Hungar. 121 (2008), n^o 3, 243-275.
- [5] Allaart, P. C. *The improper infinite derivaties of Takagi’s nowhere differentiable function.* J. Math. Anal. Appl. (2010), Vol. 372, 656-665.
- [6] Arias de Reyna, J. *Pointwise Convergence of Fourier Series.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2002)
- [7] Aron, R. M., Bernal González, L., Pellegrino, D. M. y Seoane, J. B. *Lineability. The Search for Lineability in Mathematics.* Taylor and Francis Group (2016)
- [8] Azagra, D., Ferrera, J. García Bravo, M. y Gómez Gil, J. *Subdifferentiable functions satisfy Lusin properties of class C^1 or C^2 .* Journal of Approximation Theory (2018), Vol. 230, 1-12.
- [9] Baba, Y. *On maxima of Takagi-van der Waerden functions.* Proc. Amer. Math. Soc. (1984), Vol. 91, n^o 3, 373-376.
- [10] Balasubramanian, R., Kanemitsu, S. y Yoshimoto, M. *Euler products, Farey series and the Riemann hypothesis II.* Publ. Math. Debrecen (2006), Vol. 69, n^o 1-2, 1-16.
- [11] Banach, S. *Über die Baire’sche Kategorie gewisser Funktionenmengen.* Studia Math. (1931), Vol. 3, 174–179.:

- [12] Berg, L. y Krüppel, M. *De Rham's Singular Function and Related Functions*. Journal for Analysis and its Applications (2000), Vol. 19, n^o1, 227-237.
- [13] Bernstein, F. y Doetsch, G. *Zur Theorie der konvexen Funktionen*. Math. Ann. (1915), Vol. 76, 514-526.
- [14] Besicovitch, A. S. y Ursell, H. D. *Sets of fractional dimensions. On dimensional numbers of some continuous curves*. J. London Math. Soc. (1937), Vol. 12, 18-25.
- [15] Billingsley, P. *Van der Waerden's nowhere differentiable function*. American Mathematical Monthly (1984), Vol. 91, n^o 5, 307-308
- [16] Billingsley, P. *Hausdorff dimension in probability theory*. Illinois J. Math. (1960), Vol. 4, n^o 2, 187-209.
- [17] Boros, Z. *An inequality for the Takagi function*. Math. Inequal. Appl. (2008), Vol. 11, n^o 4, 757-765.
- [18] Brown, J. W. y Churchill, R. V. *Variable compleja y aplicaciones*. Mc Graw Hill (2004)
- [19] Brown, J. B. y Kozłowski, G. *Smooth interpolation, Hölder continuity, and the Takagi - van der Waerden function* American Mathematical Monthly (2003), Vol. 110, n^o 2, 142-147.
- [20] Buczolich, Z. *Irregular 1-sets on the graphs of continuous functions*. Acta Math. Hungar. 121 (2008), n^o 4, 371-393.
- [21] Carothers, N. L. *A short course on Banach space theory*. Cambridge University Press, New York (2004).
- [22] Cater, F. S. *On van der Waerden's continuous nowhere differentiable function*. American Mathematical Monthly (1982), Vol. 89, n^o 9, 691
- [23] Cerdá, J. *Análisis Real*. Edicions de la Universitat de Barcelona (2000)
- [24] Clarke, F. H., Ledyaev, Yu. S., Stern, R. J. y Wolenski, P. R. *Nonsmooth analysis and Control Theory*. Springer Science+Business Media (1998)
- [25] Cohn, D. L. *Measure Theory*. Springer Science+Business Media (2013)
- [26] Devaney, R. L., Smale, S. y Hirsch, M.W. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Introduction to Chaos*. Elsevier Inc. (2013)
- [27] Dini, U. *Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata*. Ann. Mat. Pura Appl. (1877), Vol. 8, n^o 2, 121-137.

- [28] Edgar, G. *Measure, topology, and fractal geometry*. Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag (2008)
- [29] Edwards, R. E. *Fourier Series: A modern introduction*. Springer-Verlag New York (1979)
- [30] Edwards, C. H. Jr. *The historical development of the Calculus*. Springer-Verlag New York (1979)
- [31] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in Mathematics, American Mathematical Society (1998)
- [32] Evans, L. C. y Gariepy, R.F. *Measure theory and fine properties of functions*. Taylor & Francis Group (2015)
- [33] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V. y Zizler, V. *Banach Space Theory*. CMS Books in Mathematics, Springer (2011)
- [34] Falconer, K. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* John Wiley and Sons (2014)
- [35] Federer, H. *Surface Area. II*. Transactions of the American Mathematical Society (1944), Vol. 55, n^o. 3, 438–456.
- [36] Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications II*. John Wiley & Sons, New York (1968) Vol. 1.
- [37] Ferrera, J. *An introduction to nonsmooth analysis*. Elsevier/ Academic Press, Amsterdam (2014).
- [38] Ferrera, J. y Gómez Gil, J. *Generalized Takagi-Van Der Waerden Functions and their Subdifferentials*. J. Convex Anal. (2018), n^o 4, 1355–1369.
- [39] Ferrera, J. y Gómez Gil, J. *Superdifferential of the Takagi function*. Comunicación privada.
- [40] Ferrera, J. y Gómez Gil, J. *Non approximate derivability of the Takagi function*. <https://arxiv.org/abs/1807.08783>
- [41] Ferrera, J. y Gómez Gil, J. *Differentiability of the functions of the Generalized Takagi Class*. Preprint (2018)
- [42] Ferrera, J. , Gómez Gil, J. y Llorente, J. *Weighted Takagi functions*. Preprint (2018)
- [43] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern techniques and their applications*. John Wiley and Sons (1999)

- [44] Gamelin, T. W. *Complex Analysis*. Springer Science (2001)
- [45] Gora, P. y Stern, R.J. *Subdifferential analysis of the Van der Waerden function*. J. Convex Anal. (2011), n^o 3, 699-705.
- [46] Hardy, G. H. *Some properties of integrals of fractional order*. Messenger of Mathematics (1918), Vol.47, 145-150
- [47] Hardy, G. H. y Littlewood, J. E. *Some properties of fractional integrals*. Math. Z. (1928), Vol. 27, 565-606
- [48] Hata, M. y Yamaguti, M. *Takagi function and its generalization*. Japan J. Appl. Math. (1984), Vol. 1, 183-199.
- [49] Házy, A. y Páles, Zs. *On approximately midconvex functions*. Bull. London Math. Soc. (2004), Vol. 36, n^o 3, 339-350.
- [50] Hilbert, D. *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*. Math. Ann. (1891), Vol. 38, 459-460;
- [51] Hildebrandt, T. H. *A simple continuous function with a finite derivative at no point*. American Mathematical Monthly (1933), Vol. 40, n^o 9, 547-548.
- [52] Jahnke, H. N. *A history of analysis*. American Mathematical Society (2003).
- [53] Jarnicki, M. and Pflug, P. *Continuous nowhere differentiable functions: The Monsters of Analysis*. Springer Monographs in Mathematics (2015).
- [54] Kahane, J.P. *Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée*. Enseignement Math. (1959), Vol. 5 , 53-57.
- [55] Kairies, H.-H. *A remarkable system of eight functional equations*. Aequationes Mathematicae Vol. 58 (1999), 183-191.
- [56] Kairies, H.-H. *Takagi's function and its functional equations*. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. 15 (1998), 73-83.
- [57] Kairies, H. H., Darsow, W. F., Frank, M. J. *Functional equations for a function of van der Waerden type*. Rad. Mat. 4 (1988), Vol. 2, 361-374.
- [58] Kannappan, Pl. *Functional equations and inequalities with applications*. Springer Monographs in Mathematics (2000)
- [59] Kashin, B. S. y Saakyan, A. A. *Orthogonal series*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 75, American Mathematical Society (1989).

- [60] Kharazishvili, A. *Strange functions in real analysis*. Second Edition, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. CRC Press, 2005
- [61] Knopp, K. *Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen*. Math. Z. (1918), Vol. 2, 1-26.
- [62] Knuth, D. E. *The art of computer programming*. Addison-Wesley, Upper Saddle River (2005), Vol. 4, Fasc. 3
- [63] A. Kolmogorov, *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus*. Math. Ann. (1929), Vol. 101, 126-135.
- [64] Kôno, N. *On generalized Takagi functions*. Acta Math. Hung. (1987), Vol. 49, n^o 3-4, 315-324.
- [65] Krüppel, M. *On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function*. Rostock. Math. Kolloq. (2007), Vol. 62, 41-59.
- [66] Krüppel, M. *Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums*. Rostock. Math. Kolloq. (2008), Vol. 63, 37-54.
- [67] Krüppel, M. *On the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function*. Rostock. Math. Kolloq. (2010), Vol. 65, 3-13.
- [68] Kuczma, M. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*. Birkhäuser Verlag AG (2009)
- [69] Lagarias, J. C. y Maddock, Z. *Level sets of the Takagi function: local level sets* Monastsh Math (2012), Vol. 166 201-238
- [70] Limaye, B. M. *Functional Analysis*. New Age International Publishers, Revised Third Edition 2017.
- [71] Liu, F. C. y Tai, W.S. *Approximate Taylor polynomials and differentiation of functions*. Topological Methods in Nonlinear Analysis (1994), Vol. 3, n^o 1, 189-196.
- [72] Lyche, R. T. *Une fonction continue sans dérivée*. Enseignement Math. (1939/40), Vol. 38, 208-211.
- [73] Makó, J. *A new proof of the approximate convexity of the Takagi function*. Acta Mathematica Hungarica (2017), Vol. 151, n^o 2, 456-461.
- [74] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A. *A theorem of Lusin. Part I*. Duke Math. J. (1938), Vol. 4, n^o 3, 473-485.

- [75] Marsden, J. E. y Hoffman, M. J. *Basic complex analysis*. W. H. Freeman and Company (1987).
- [76] Martynov, B. *Van der Waerden's pathological function: examining a "miserable sore"*. *Quantum* 8 (1998), Vol. 6, 12-19
- [77] Mauldin R. D. y Williams, S. C. *On the Hausdorff dimension of some graphs*. *Transactions of the American Mathematical Society* (1986), Vol. 298, n^o 2, 793-803
- [78] Miller, K.S. y Ross, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* Wiley, New York, 1993.
- [79] Ng, C. T., Nikodem, K. *On approximately convex functions*. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1993), Vol. 118, 103-108.
- [80] Oldham, K. B. y Spanier, J. *The fractional calculus* Academic Press, New York, 1988.
- [81] Porras, J. W. *Análisis de la hipótesis de Riemann*. Escuela naval almirante padilla, Colombia (2017).
- [82] Rham, G. De *Sur un exemple de fonction continue sans dérivée*. *Enseignement Math.* (1957), Vol. 3, 71-72.
- [83] Rham, G. De *Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles*. *Rend. Sem. Mat. Torino* (1957), Vol. 16, 101-113.
- [84] Riemann, B. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* Monatsberichte der Berliner Akademie, (1859).
- [85] Rogers, C. A. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, Cambridge (1970)
- [86] Rudin, W. *Real and Complex analysis*. McGraw Hill Education, India (2006)
- [87] Sabatier, J., Agrawal, O. P. y Tenreiro Machado, J. A. *Advances in fractional calculus* Springer (2007)
- [88] Sadowski, L. *New characterizations of the Takagi function via functional equations*. *Aequationes Mathematicae* Vol. 91 (2017), 1001-1007.
- [89] Salem, R. *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*. *Trans. Amer. Math. Soc.*(1943), Vol. 53, 427-439.
- [90] Schwarz, H. A. *Neues Beispiel einer stetigen, nicht differentiirbaren Funktion*. *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Schaffhausen* (1873).

- [91] Schirotzek, W. *Nonsmooth Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007)
- [92] Sekiguchi, T. y Shiota, Y. *A generalization of Hata-Yamaguti's results on the Takagi function*. Japan J. Indust. Appl. Math. (1991), Vol.8, 203-219.
- [93] Sekiguchi, T. y Shiota, Y. *A generalization of Hata-Yamaguti's results on the Takagi function II: Multinomial case* Japan J. Indust. Appl. Math. (1996), Vol.13, 435-463.
- [94] Shidfar, A. y Sabetfakhri, K. *On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Holder Sense*. American Mathematical Monthly (1986), Vol. 93, n^o. 5, 375-376.
- [95] Shidfar, A. y Sabetfakhri, K. *On the Hölder continuity of certain functions*. Exposition Math. (1990), Vol. 8, 365-369.
- [96] Shapiro, V. L. *Fourier Series in several variables with applications to partial differential equations*. Taylor and Francis Group (2011).
- [97] Spurrier, K. G. *Continuous nowhere differentiable functions*. Senior thesis, University of South Carolina Honors College (2004).
- [98] Tabor, J. y Tabor, J. *Takagi functions and approximate midconvexity*. J. Math. Anal. Appl. (2009), Vol. 356, n^o 2, 729-737.
- [99] Takagi, T. *A simple example of the continuous function without derivative*. Phys. Math. Soc. Japan (1903), Vol. 1, 176-177
- [100] Tall, D. *The blancmange function. Continuous everywhere but differentiable nowhere*. Math. Gaz. (1982), Vol. 66, n^o 435, 11-22.
- [101] Thomson, B. *Symmetric properties of real functions*. Marcel Dekker Inc. (1994).
- [102] Titchmarsh, E. C. *The theory of functions*. Oxford University Press, second edition, 1939
- [103] Van der Waerden, B. L. *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*. Math. Z. (1930), Vol. 32, 474-475.
- [104] Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung*. Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich (1917), Vol. 62 296-303.
- [105] K. Weierstrass, *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen* Lectura en Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlín (1872).

-
- [106] Whitney, H. *On totally differentiable and smooth functions*. Pacific J. Math. (1951), Vol. 1, n^o. 1, 143-159.
- [107] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag New York (2010)
- [108] Yamaguti, M., Hata, M. y Kigami, J. *Mathematics of fractals* American Mathematical Society (1997)
- [109] Zygmund, A. *Smooth functions*. Duke Math. J. (1945), Vol. 12, 47-76.