UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN
CENTRO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO

DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de resoluciones de problemas aritméticos verbales en primer curso de educación primaria

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA

PRESENTADA POR

Mónica Ramírez García

DIRECTORES

Carlos de Castro Hernández
José Antonio Bueno Álvarez

Madrid, 2016

Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación
Facultad de Educación – Centro de Formación del Profesorado
Universidad Complutense de Madrid

DESARROLLO DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS INFORMALES A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES EN PRIMER CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis Doctoral

Autora: Mónica Ramírez García

Directores: Dr. Carlos de Castro Hernández
Dr. José Antonio Bueno Álvarez

MADRID, 2015

A mi madre, a José y mis niños.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Carlos de Castro su aportación, tanto en la trayectoria de elaboración de este trabajo, como en los aspectos profesional y personal. Cuesta plasmar en un documento formal todo lo que tengo que agradecerte, toda la ayuda que me has prestado desde el principio, tus recomendaciones para mi formación, para mi trabajo del día a día, para mi desarrollo profesional, etc. Creo que no hay sitio aquí para todo.

Asimismo, agradezco a José Antonio Bueno Álvarez todo lo que me ha transmitido a lo largo de toda mi formación doctoral: primero, en el periodo de docencia con la motivación y el aprendizaje, después por sus recomendaciones realizadas a lo largo de toda mi formación doctoral, por sus valiosas aportaciones en la elaboración de este documento y por haberme animado continuamente en el desarrollo de esta tesis.

Tengo que agradecerle a Purificación Rodríguez Marcos todo lo que he aprendido de ella: primero, a través de sus publicaciones; después, por su ayuda en la elaboración de mi trabajo sobre interpretaciones del signo igual, y su colaboración en mi formación inicial investigadora; y al final, por sus recomendaciones para que este trabajo estuviese bien incardinado dentro de las líneas de investigación del Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación.

Recuerdo con gran afecto a todas las personas que intervinieron en mi experimentación, en el Colegio Virgen de Peña Sacra, de Manzanares el Real. Desde luego, me acuerdo de Rosa María, Marina y Beatriz, las tutoras del cole, que han seguido invitándome a visitarlas, y de Bea Escorial, que me facilitó todo allí. También quiero mencionar a Clara, Elisa, Lidia, Celia, Ana y Luz, por su ayuda en el proceso de recogida de datos, y por todo lo que hemos compartido en Manzanares.

Muchos compañeros y compañeras de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) me han acompañado, animado y han aportado ideas valiosas a lo largo del proceso de elaboración del trabajo. Los simposios, y las reuniones intermedias de pensamiento numérico y educación infantil, han sido momentos especiales que, además de suponer un impulso para la investigación, también han supuesto un estímulo personal. Con todos estos compañeros siento que comparto algo importante en mi vida.

Agradezco también a mis compañeros de trabajo en La Salle, la UNIR y de la UCM, con los que he compartido a diario mis preocupaciones por este trabajo, y por la enseñanza de las matemáticas en general.

A todos mis amigos que me animan constantemente y esperan con paciencia el final de la tesis, para poder seguir compartiendo muchos momentos.

A mis hijos y mi marido, que han sufrido la ausencia de su madre o mujer y, sin embargo, no han dejado de animarme.

Y finalmente, a mi madre, no solo por su ayuda, sino por educarme para ser perseverante y no rendirme nunca.

Índice

Índice i
Índice de figuras v
Índice de tablas xix
Resumen xxv
Abstract xxvii

Capítulo 1. Planteamiento del problema, antecedentes y objetivos de la investigación 1

1. Tendencias en la resolución de problemas en educación matemática 2

1.1. Aspectos metodológicos de las investigaciones sobre resolución de problemas 5

1.2. Temas tratados en las investigaciones sobre resolución de problemas 6

2. Marco curricular: la importancia de la resolución de problemas en los documentos curriculares de matemáticas 11

2.1. El NCTM 12

2.2. Los Common Core State Standards for Mathematics (CCS) 24

2.3. Los trabajos del National Research Council (NRC) 26

2.4. OCDE y PISA 27

2.5. Hacia una síntesis de estas propuestas 30

2.6. Evolución en el enfoque y en el tratamiento de la resolución de problemas en el currículo Español 31

3. Enfoque y problemática sobre el aprendizaje de la resolución de problemas aritméticos verbales en los primeros años 34

4. Revisión de los trabajos del aprendizaje de la aritmética y valor posicional a través de la resolución de problemas aritméticos verbales 40

4.1. Problemas aritméticos verbales escolares 41

4.2. Estrategias de resolución de problemas aritméticos verbales 48

4.3. Comprensión del valor posicional y su implicación en las operaciones con varias cifras 55

5. Resumen 62

6. Objetivos de la investigación 67

7. Estructura y plan de trabajo 68

Capítulo 2. Marco teórico 71

1. Estructura conceptual de los números naturales: sistema decimal de numeración 72

2. Enfoques de la enseñanza de las matemáticas 75
3. Instrucción cognitivamente guiada 76
4. Aprendizaje con comprensión... 85
4.1. Enfoque cognitivo de la comprensión 86
4.2. Niveles de comprensión de la decena.. 89
5. Conocimientos informales y formales 90
6. Trayectorias de aprendizaje-enseñanza... 99
6.1. Revisión del término trayectorias de aprendizaje-enseñanza.................... 100
6.2. Descripción de trayectorias de aprendizaje-enseñanza en el presente estudio 109
6.3. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas...................... 117
7. Síntesis 117
Capítulo 3. Metodología 119
1. Caracterización de la investigación 119
2. Participantes... 119
3. Las sesiones del taller de resolución de problemas 120
3.1. Un taller de resolución de problemas aritméticos verbales....................... 121
3.2. Breve descripción de las clases habituales fuera del taller 130
4. Recogida de información... 133
Capítulo 4. Resultados 135
1. Categorización de las estrategias 135
1.1. Las estrategias como secuencias de capacidades 140
2. Categorización de las representaciones 142
3. Resultados generales de las sesiones 144
4. Análisis y evolución de las estrategias 145
4.1. Problemas multiplicativos con agrupamientos de 10................................. 146
4.2. Problemas de estructura aditiva 168
4.3. Problemas de estructura multiplicativa sin grupos de 10 207
4.4. Evolución del conocimiento informal y formal... 225
4.5. Comprensión de la decena 233
5. Análisis y evolución de las representaciones 237
Capítulo 5. Discusión, conclusiones e implicaciones 241
1. Discusión y conclusiones 241

1.1. Sobre el diseño de las tareas del taller 241
1.2. Sobre las estrategias, sus modalidades de aplicación, y su evolución 242
1.3. Sobre las representaciones y su evolución 246
1.4. El uso y evolución de conocimientos informales y comprensión de la decena 247
2. Implicaciones 250
2.1. Implicaciones para la investigación 250
2.2. Implicaciones para la enseñanza 254
Referencias 259
Anexo 1. Desarrollo de las sesiones 271
1.1. Sesión 1 271
1.2. Sesión 2 287
1.3. Sesión 3 298
1.4. Sesión 4 311
1.5. Sesión 5 326
1.6. Sesión 6 336
1.7. Sesión 7 347
1.8. Sesión 8 366
1.9. Sesión 8b 371
1.10. Sesión 9 379
1.11. Sesión 10 390
1.12. Sesión 11 400
1.13. Sesión 12 407
1.14. Sesión 13 419
1.15. Sesión 14 426
1.16. Sesión 15 437
1.17. Sesión 16 444
1.18. Sesión 17 455
1.19. Sesión 18 464
1.20. Sesión 19 475
1.21. Sesión 20 485
1.22. Sesión 21 490
1.23. Sesión 22 498

1.24. Sesión 23 ... 505
1.25. Sesión 24 ... 513
Anexo 2. CFP y CCSSM de Número y operaciones ... 523
Anexo 3. Horario de clase de 1ºA ... 529
Anexo 4. Cuentos utilizados y problemas planteados ... 531
Anexo 5. Contenido del bloque número y operaciones del libro de texto de aula 533
1.1. Tema 1 ... 533
1.2. Tema 2 ... 534
1.3. Tema 3 ... 534
1.4. Tema 4 ... 535
1.5. Tema 5 ... 536
1.6. Tema 6 ... 536
1.7. Tema 7 ... 537
1.8. Tema 8 ... 537
1.9. Tema 9 ... 537
1.10. Tema 10 ... 538
1.11. Tema 11 ... 538
1.12. Tema 12 ... 539
Anexo 6. Listados de estrategias observadas en el desarrollo de las sesiones ... 541
1.1. Listado de las estrategias observadas en problema o etapas de suma ... 541
1.2. Lista de estrategias observadas en problemas de resta ... 543
1.3. Listado de estrategias observadas en problemas o etapas de multiplicación 544
1.4. Listado de estrategias observadas en problemas de división medida ... 546
1.5. Listado de estrategias observadas en problemas de división partitiva ... 547
1.6. Listado de estrategias inventadas ... 548
Anexo 7. Tablas de frecuencias de estrategias observadas por problema ... 549
1.1. Tabla de frecuencias absolutas de estrategias en problemas de multiplicación con grupos de 10 a lo largo del taller ... 549
Anexo 8. Capacidades y errores ... 561
1.1. Listado de capacidades por expectativas de aprendizaje ... 561
1.2. Listado de capacidades ... 565
1.3. Dificultades y errores ... 571

Índice de figuras

Figura 1.1. Diagrama del planteamiento del problema y objetivos del trabajo de investigación 2
Figura 1.2. Documentos e instituciones para el marco curricular de referencia 12
Figura 1.3. Relaciones entre la resolución de problemas y demás Estándares de Procesos 18
Figura 1.4. Conexiones entre las fases de matematización (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 236) 28
Figura 1.5. Dos sentidos en la relación aprendizaje aritmética – resolución problemas 39
Figura 1.6. Estructura de un problema de una etapa para Nesher (1991). 47
Figura 1.7. Esquema jerárquico de un problema de dos etapas. 47
Figura 1.8. Esquema de un problema de dos etapas que comparten el todo. 48
Figura 1.9. Esquema de un problema de dos etapas que comparte una parte. 48
Figura 1.10. Desarrollo de la comprensión de los números de dos cifras (adaptada de Fuson, Smith y otros, 1997, p. 743). 56
Figura 1.11. Estrategias de métodos que descomponen en decenas y unidades (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 148). 58
Figura 1.12. Posible relación con la perspectiva de modelización (adaptado de Lesh y Zawojewski, 2007). 63
Figura 1.13. Relación de los procesos del NCTM con la resolución de problemas en este trabajo. 64
Figura 1.14. Focos Curriculares de "Números y operaciones" obtenidos de NCTM (2006). 65
Figura 1.15. Estructura de la tesis 70
Figura 2.1. Enfoque cognitivo del trabajo 71
Figura 2.2. Mapa conceptual del sistema de numeración decimal (adaptado de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 303) 74
Figura 2.3. Sistema de representaciones de los números naturales en este trabajo (adaptado de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 299). 75
Figura 2.4. Aprendizaje con comprensión (Carpenter y Lehrer, 1999). 87
Figura 2.5. Relaciones entre estrategias informales y formales (Carpenter y Lehrer, 1999). 88
Figura 2.6. Formalización progresiva (Braithwaite y Goldstone, 2013). 91
Figura 2.7. Relación de distintas trabajos del desarrollo del pensamiento matemático (adaptado de Tall, 2013, pp. 6-8). 93
Figura 2.8. Desarrollo de los mundos de las matemáticas (adaptado de Tall, 2013, pp. 6-8). 94
Figura 2.9. Las representaciones en los distintos trabajos previos comentados. 97
Figura 2.10. Representación del tipo 3.3 y 1.1 (recuperado de Hernández, 2012, pp. 199-210). 98
Figura 2.11. Representación de tipo 2.3 tomada de Hernández (2012, p. 33). 99
Figura 2.12. Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas (Simon, 1995, p. 136). 100
Figura 2.13. Ejemplo de un grafo de los caminos de aprendizaje para una tarea (adaptado de González y Gómez, 2015, p.29). 102
Figura 2.14. Trayectorias de aprendizaje según (Clemens y Sarama, 2009). 103
Figura 2.15. Trayectorias de aprendizaje con objetivos intermedios (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Treffers y Buys, 2001). 108
Figura 2.16. Focos curriculares desde Kindergarten a Grado 2 sobre la suma y la resta con números de una cifra (NCTM, 2006) 110
Figura 2.17. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la suma y resta con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI) 110
Figura 2.18. Trayectoria de aprendizaje para la multiplicación con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI) 111

Figura 2.19. Trayectoria de aprendizaje para la división medida con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI) 111
Figura 2.20. Trayectoria de aprendizaje para la división partitiva con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI) 112
Figura 2.21. Focos curriculares desde Kindergarten a Grado 2 sobre la comprensión del valor posicional (NCTM, 2006) 112
Figura 2.22. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para el valor posicional con problemas de multiplicación (deducida de los trabajos de la CGI) 113
Figura 2.23. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para el valor posicional con problemas de división medida (deducida de los trabajos de la CGI) 113
Figura 2.24. Caminos de aprendizaje para la comprensión de la decena de los tres trabajos de referencia (Fuson, 1992; Wright y otros, 2006; Carpenter, Fennema, y otros, 1999). 114
Figura 2.25. Focos curriculares desde Kindergarten a Grado 2 sobre la comprensión de la suma resta con números de dos cifras (NCTM, 2006) 114
Figura 2.26. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para problemas aditivos con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI) 115
Figura 2.27. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la multiplicación con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI) 115
Figura 2.28. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la división medida con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI) 115
Figura 2.29. Trayectoria de aprendizaje para la división partitiva con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI) 116
Figura 3.1. Organización semanal de las clases de matemáticas. 121
Figura 3.2. Explicación de estrategias en la puesta común de la sesión 13 123
Figura 3.3. Carta con resolución a Clara en el grupo B en la sesión 21 123
Figura 3.4. Uso de nuevas tecnologías en la recepción y envío de la carta 124
Figura 3.5. Tabla 100 expuesta en el aula. 124
Figura 3.6. Evolución de las estrategias según CGI. 126
Figura 3.7. Estructura de los problemas multiplicativos de grupos de 10. 127
Figura 4.1. Resumen de la resolución de alumnos de todas las sesiones 145
Figura 4.2. Representaciones de A1-JT13 y A3-JT17 147
Figura 4.3. Representación de A7-JT13 y A9-JT18 147
Figura 4.4. Representación para el recuento final de A22-JT3 148
Figura 4.5. Representaciones de A27-JT19 y A25-JT19 148
Figura 4.6. Representaciones para VP2-JT27 y VP2-JT28 150
Figura 4.7. Secuencia de capacidades para la estrategia A10-JT17 150
Figura 4.8. Caminos de aprendizaje para problemas grupos iguales agrupamientos 10 151
Figura 4.9. Evolución de estrategias de la primera etapa de la sesión 7 a la sesión 12 153
Figura 4.10. Evolución por la agrupación de estrategias de la segunda etapa de la sesión 7 a sesión 12 154
Figura 4.11. Evolución de las variantes observadas de la sesión 7 y la sesión 12 155
Figura 4.12. Evolución por la agrupación de las dos etapas de la sesión 7 y la sesión 12 157
Figura 4.13. Trayectoria de aprendizaje para el valor posicional en este trabajo de las sesiones 7 y 12 159
Figura 4.14. Modalidad de uso de medida M4 160
Figura 4.15. Representación de M5 161
Figura 4.16. Representaciones de M5 y M9 161
Figura 4.17. Estrategia M10 162
Figura 4.18. Secuencia de capacidades para la estrategia M1 163

Figura 4.19. Caminos de aprendizaje para problemas división medida con agrupamientos 10 164
Figura 4.20. Frecuencias absolutas de las modalidades observadas en las sesiones 8, 8b, 11 y 15 164
Figura 4.21. Estrategia M10 en la sesión 11 166
Figura 4.22. Representación de estrategia de Medida con huevera y objetos en la sesión 11 166
Figura 4.23. Trayectoria de aprendizaje para el valor posicional en este trabajo de las sesiones 8, 8b, 11 y 15 167
Figura 4.24. Modalidad JT1 en la sesión 10 169
Figura 4.25. Modalidad JT5 en la sesión 9 169
Figura 4.26. Modalidad JT32 en la sesión 10 170
Figura 4.27. Estrategia A29 – JT23 en la sesión 18 170
Figura 4.28. Modalidad JT25 en la sesión 18 171
Figura 4.29. Secuencia de capacidades para la estrategia JT1 173
Figura 4.30. Caminos de aprendizaje para problemas de suma 174
Figura 4.31. Secuencia de capacidades para el algoritmo de la suma 174
Figura 4.32. Caminos de aprendizaje para problemas de suma con dos etapas 175
Figura 4.33. Evolución de las variantes observadas de la sesión 3 a la sesión 20 de suma ... 176
Figura 4.34. Frecuencias absolutas de estrategias agrupadas de los problemas de suma 179
Figura 4.35. Evolución de la modelización directa para suma de la sesión 10 a la sesión 18 180
Figura 4.36. Intento de resolución con Tabla 100 en la sesión 9. 181
Figura 4.37. Representación para la estrategia JT12 en la sesión 9 181
Figura 4.38. Representación para la estrategia CP2 en la sesión 10 182
Figura 4.39. Frecuencias absolutas de uso de la Tabla 100 en problema de sumar 182
Figura 4.40. Modalidad Q3 185
Figura 4.41. Modalidad Q6 con el rekenrek 185
Figura 4.42. Modalidad QH12 186
Figura 4.43. Modalidad QH11 en la sesión 6 187
Figura 4.44. Estrategia E4 en la sesión 22 187
Figura 4.45. Estrategia CH1 en la sesión 19 189
Figura 4.46. Modalidades A1-Q1 y A2-Q1 de la sesión 16 190
Figura 4.47. Modalidad A31-Q13 de la sesión 16 190
Figura 4.48. Modalidad VP3-AH5 de la sesión 19 191
Figura 4.49. Representaciones de Q3 y Q14 191
Figura 4.50. Estrategia VP2-AH3 en la sesión 19 193
Figura 4.51. Secuencia de capacidades para la estrategia VP2-Q3 o Q3 194
Figura 4.52. Caminos de aprendizaje para problemas de resta de las sesiones 1, 2, 6 y 22 ... 195
Figura 4.53. Caminos de aprendizaje para problemas de resta con agrupamientos de 10 en la primera etapa de las sesiones, 16, 19 y 23 195
Figura 4.54. Frecuencias absolutas de estrategias de resta 196
Figura 4.55. Frecuencias absolutas de grupos de estrategias en problema de restar 198
Figura 4.56. Estrategia con el rekenrek usando su configuración en la sesión 1 199
Figura 4.57. Evolución de la modelización directa para resta de la sesión 6 a la sesión 19 .. 200
Figura 4.58. Estrategia quitar los primeros con Tabla 100 200
Figura 4.59. Estrategia quitar los últimos con Tabla 100 201
Figura 4.60. Estrategia quitar hasta con Tabla 100 201
Figura 4.61. Estrategia añadir hasta con Tabla 100 201
Figura 4.62. Frecuencias absolutas de uso de la Tabla 100 en problema de resta 202
Figura 4.63. Trayectoria de Aprendizaje para la suma y resta con números de una cifra en este trabajo 204

Figura 4.64. Trayectoria de Aprendizaje para la suma y resta con números de dos cifras en este trabajo 206
Figura 4.65. Representaciones de A1 y A7 en la sesión 4 208
Figura 4.66. A35 en la sesión 21 208
Figura 4.67. Estrategia A12 en la sesión 4 con plastilina 208
Figura 4.68. Estrategias AL3 y AL4 en la sesión 21 210
Figura 4.69. Secuencia de capacidades para la estrategia A10 211
Figura 4.70. Caminos de aprendizaje para problemas de multiplicación 211
Figura 4.71. Evolución de las variantes observadas de la sesión 4 a la sesión 21 212
Figura 4.72. Evolución del tipo de estrategia de la segunda etapa de la sesión 4 a la sesión 21 214
Figura 4.73. Estrategia A6 en la sesión 4 214
Figura 4.74. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza observada para la multiplicación en este trabajo 216
Figura 4.75. Representación utilizada para R8 y R7 en la sesión 5 217
Figura 4.76. Reparto R4 en la sesión 5 217
Figura 4.77. Representación utilizada para R13 y R28 en la sesión 25 218
Figura 4.78. Representación utilizada R29 218
Figura 4.79. Representación para R16 218
Figura 4.80. Representación para R17 en la sesión 5 220
Figura 4.81. Secuencia de capacidades para la estrategia R14 220
Figura 4.82. Caminos de aprendizaje para problemas de división partitiva 221
Figura 4.83. Evolución de las variantes observadas de las sesiones 5, 14 y 24 222
Figura 4.84. Evolución de las estrategias agrupadas observadas de las sesiones 5, 14 y 24 . 223
Figura 4.85. Trayectoria de aprendizaje para la división partitiva en este trabajo 225
Figura 4.86. Frecuencias absolutas de las representaciones A1 y B1 238
Figura 4.87. Representaciones en la resolución a lo largo del taller 239
Figura 4.88. Representaciones en la solución a lo largo del taller 240
Figura 4.89. Representaciones en la carta a lo largo del taller 240
Figura A1.1.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 1. 273
Figura A1.1.2. Cartas de contestación a Clara con la solución de la sesión 1 273
Figura A1.1.3. Estrategia Q1 en la sesión 1 274
Figura A1.1.4. Estrategia Q2 con bolas de plastilina en la sesión 1 274
Figura A1.1.5. Representaciones de Q3 y Q4 la sesión 1 275
Figura A1.1.6. Estrategia Q5 en la sesión 1 275
Figura A1.1.7. Estrategia Q6 en la sesión 1 con 10 bolas en una fila y una en la otra 276
Figura A1.1.8. Estrategia Q6 en la sesión 1 con 6 bolas en una fila y 5 en la otra 276
Figura A1.1.9. Estrategia Q7 en la sesión 1 276
Figura A1.1.10. Estrategia Q8 en la sesión 1 277
Figura A1.1.11. Estrategia Quitar Q10 en la sesión 1 277
Figura A1.1.12. Estrategia AH1 en la sesión 1 278
Figura A1.1.13. Estrategia E1 en la sesión 1 278
Figura A1.1.14. Estrategia JT en la sesión 1 utilizada inadecuadamente 279
Figura A1.1.15. Estrategia JT en la sesión 1 utilizada inadecuadamente 280
Figura A1.1.16. Uso erróneo de la Tabla 100 280
Figura A1.1.17. Representaciones A1Oc en la sesión 1 281
Figura A1.1.18. Representación A1Oo con plastilina en la sesión 1 282
Figura A1.1.19. Representaciones distintas A1R con el rekenrek en la sesión 1 282
Figura A1.1.20. Representaciones A1Gm con marcas en la sesión 1 282
Figura A1.1.21. Representación B1I y B1D con dibujos iguales y diferentes en la sesión 1 283

Figura A1.1.22. Representación A2 en la sesión 1 283
Figura A1.1.23. Representación A2 con la Tabla 100 en la sesión 1 283
Figura A1.1.24. Representación A3 en la carta en la sesión 1 284
Figura A1.1.25. Representación A3 y A4 para dar la solución en la sesión 1 284
Figura A1.1.26. Representación C3 en la carta en la sesión 1 284
Figura A1.1.27. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 1 286
Figura A1.2.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 2 288
Figura A1.2.2. Representación de QH1 con representación A1Gm 289
Figura A1.2.3. Representación de QH1 en la sesión 2 289
Figura A1.2.4. QH2 con representación B1I en la sesión 2 290
Figura A1.2.5. Aplicación de la estrategia de QH3 con el ábaco en la sesión 2 290
Figura A1.2.6. Aplicación de la estrategia de QH4 en la sesión 2 291
Figura A1.2.7. Representación de Q3 en la sesión 2 291
Figura A1.2.8. Representaciones de Q2 y Q1 en la sesión 2 291
Figura A1.2.9. Estrategia de Q11 en la sesión 2 292
Figura A1.2.10. Estrategia E1 en la sesión 2 292
Figura A1.2.11. Distintas representaciones A1Oc en la sesión 2 294
Figura A1.2.12. Representaciones con rekenrek (A1R) y plastilina (A1Oo) en la sesión 2 294
Figura A1.2.13. Representaciones A1Gm en la sesión 2 295
Figura A1.2.14. Representaciones B1 en la sesión 2 295
Figura A1.2.15. Representación A2 para resolver y A3 para dar la solución en la sesión 2 295
Figura A1.2.16. Representación A1Gm para resolver, B1I y A3 para dar solución en la sesión 2 296
Figura A1.2.17. Representación A1Gm, A3 y A4 en la sesión 2 296
Figura A1.2.18. Representación A3, C3 y C4 en carta de la sesión 2 297
Figura A1.2.19. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 2 298
Figura A1.3.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 3 299
Figura A1.3.2. Estrategia de JT1 en la sesión 3 300
Figura A1.3.3. Estrategia de JT2 en la sesión 3 301
Figura A1.3.4. Aplicación de la estrategia JT3 en la sesión 3 301
Figura A1.3.5. Estrategia JT4 en la sesión 3 302
Figura A1.3.6. Estrategia JT5 en la sesión 3 302
Figura A1.3.7. Representación para la estrategia JT6 en la sesión 3 303
Figura A1.3.8. Representación para la estrategia JT8 en la sesión 3 303
Figura A1.3.9. Representación para la estrategia JT7 en la sesión 9 303
Figura A1.3.10. Aplicación de la estrategia de JT9 en la sesión 3 304
Figura A1.3.11. Estrategia de JT11 en la sesión 3 304
Figura A1.3.12. Estrategia de JT10 en la sesión 3 305
Figura A1.3.13. Estrategia JT12 en la sesión 3 305
Figura A1.3.14. Representación de parte de las cantidades en la sesión 3 306
Figura A1.3.15. Representaciones A1Oc y A1R en la sesión 3 307
Figura A1.3.16. Representación A1Gm en las marcas moradas de abajo y A3 en la sesión 3 308
Figura A1.3.17. Representaciones B1I y A3 en la sesión 3 308
Figura A1.3.18. Representaciones C1 Y A3 en la sesión 3 308
Figura A1.3.19. Representaciones A2, A3, A4 en la sesión 3 309
Figura A1.3.20. Representaciones A2, A3 en la sesión 3 309
Figura A1.3.21. Representación C3 en una carta en la sesión 3 309
Figura A1.3.22. Representación C4 en una carta en la sesión 3 309
Figura A1.3.23. Representación C3, B3 y A4 310

Figura A1.3.24. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 3 311
Figura A1.4.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 4 312
Figura A1.4.2. Agrupamiento A1 en la sesión 4... 314
Figura A1.4.3. Agrupamiento A2 en la sesión 4... 314
Figura A1.4.4. Agrupamiento con marcas A3 en la sesión 4... 314
Figura A1.4.5. Agrupamiento con dedos A4 en la sesión 4.. 315
Figura A1.4.6. Estrategia A6 en la sesión 4... 315
Figura A1.4.7. Estrategia A7 en la sesión 4... 316
Figura A1.4.8. Estrategia A9 y A10 en la sesión 4 316
Figura A1.4.9. Estrategia A12 en la sesión 4 con plastilina 317
Figura A1.4.10. Estrategia A13 en la sesión 4... 317
Figura A1.4.11. Estrategia A16 en la sesión 4 con plastilina 318
Figura A1.4.12. Agrupamiento A17 con el rekenrek en la sesión 4 318
Figura A1.4.13. Agrupamiento A18 en la sesión 4.. 318
Figura A1.4.15. Estrategia JT1 inadecuada en la sesión 4... 319
Figura A1.4.16. Estrategia JT12 inadecuada para este problema 320
Figura A1.4.17. Dificultad en la escritura del numeral con cifras en la sesión 4 320
Figura A1.4.18. Diferentes representaciones A1Oc y A1Oo en la sesión 4 321
Figura A1.4.19. Representaciones A1Gm en la sesión 4... 321
Figura A1.4.20. Representaciones B1I en la sesión 4.. 322
Figura A1.4.21. Representaciones B1D con dibujos distintos en la sesión 4 322
Figura A1.4.22. Representaciones B1I de las niñas y B2 los brazos en la sesión 4 323
Figura A1.4.23. Representaciones A1Gm para los brazos, A2, para las niñas, A3 y A4 para la solución en la sesión 4 323
Figura A1.4.24. Representaciones de los personajes en las sesión 4................................... 323
Figura A1.4.25. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 4 325
Figura A1.5.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 5 327
Figura A1.5.2. Reparto por la mitad con cubos encajables R1 en la sesión 5 con centicubos 328
Figura A1.5.3. Reparto R2 en la sesión 5 328
Figura A1.5.4. Reparto R3 en la sesión 5 328
Figura A1.5.5. Reparto R4 en la sesión 5 329
Figura A1.5.6. Reparto por la mitad con objetos R5 en la sesión 5 con rotuladores............ 329
Figura A1.5.7. Reparto de objetos de uno en uno sin contar inicialmente la cantidad total (R6) 329
Figura A1.5.8. Estrategia R8 en la sesión 5... 330
Figura A1.5.9. Estrategia R9 en la sesión 5... 330
Figura A1.5.10. Estrategia R10 en la sesión 5... 331
Figura A1.5.11. Reparto R13 en la sesión 5 331
Figura A1.5.12. Reparto R15 y R16 en la sesión 5.. 332
Figura A1.5.13. Reparto R16 y R17 en la sesión 5.. 332
Figura A1.5.14. Reparto R19 en la sesión 5 333
Figura A1.5.15. Estrategia inadecuada A3 en la sesión 5.. 334
Figura A1.5.16. Representaciones de resolución y para dar la solución en la sesión 5......... 335
Figura A1.5.17. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 5 336
Figura A1.6.1. Resumen de la resolución de la sesión 6 337
Figura A1.6.2. Estrategias Q4 y Q3 en la sesión 6 338
Figura A1.6.3. Estrategias Q1 en la sesión 6 338
Figura A1.6.4. Representación para Q1 en la sesión 6 338
Figura A1.6.5. Estrategias Q9 en la sesión 6 339

Figura A1.6.6. Estrategias QH5 en la sesión 6 340
Figura A1.6.7. Estrategia QH4 en la sesión 6 340
Figura A1.6.8. Estrategia QH10 en la sesión 6 340
Figura A1.6.9. Estrategia QHB11 en la sesión 6 341
Figura A1.6.10. Estrategia QH13 en la sesión 6 341
Figura A1.6.11. Diferenciar usos de la secuencia de numerales en la sesión 6 342
Figura A1.6.12. Diferenciar usos de la secuencia de numerales 2 en la sesión 6 342
Figura A1.6.13. Estrategia AH1 y E3 en la sesión 6 342
Figura A1.6.14. Estrategia CP con Tabla 100 en la sesión 6 344
Figura A1.6.15. Representación B1I en la sesión 6 345
Figura A1.6.16. Carta con representación A3 y C3 en la sesión 6 345
Figura A1.6.17. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 6 347
Figura A1.7.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 7 348
Figura A1.7.2. Representación de la estrategia A3 en la sesión 7 349
Figura A1.7.3. Representación de la estrategia A1 en la sesión 7 349
Figura A1.7.4. Representación de la estrategia A21 en la sesión 7 350
Figura A1.7.5. Representación de la estrategia A22 en la sesión 7 350
Figura A1.7.6. Representación de A10 y A9 en la sesión 7 351
Figura A1.7.7. Representación de A7 en la sesión 7 351
Figura A1.7.8. Recuento en la estrategia A27 en la sesión 7 351
Figura A1.7.9. Hoja de trabajo de un estudiante que aplica EI2 en la sesión 7 352
Figura A1.7.10. Reparto de las unidades sueltas del estudiante A35 en la sesión 7 353
Figura A1.7.11. Estudiante A16 utilizando JT13 en la sesión 7 354
Figura A1.7.12. Alumno A33 utilizando JT19 en la sesión 7 354
Figura A1.7.13. Estrategia A7-JT13 en la sesión 7 355
Figura A1.7.14. Estrategias A3-JT17 y A23-JT18 en la sesión 7 357
Figura A1.7.15. Estrategias A9-JT18 y A10-JT17 en la sesión 7 357
Figura A1.7.16. Estrategia A2-JT1 en la sesión 7 358
Figura A1.7.17. Estrategias A20-JT15 y A22-JT3 en la sesión 7 358
Figura A1.7.18. Estrategias A25-JT19 en la sesión 7 358
Figura A1.7.19. Estrategia A27-JT19 en la sesión 7 359
Figura A1.7.20. Estrategia A10-Q3, inadecuada en la sesión 7 360
Figura A1.7.21. Representación de los patos en el agua del estudiante A17 en la sesión 7 .. 360
Figura A1.7.22. El estudiante A13 representa utiliza la estrategia A10 360
Figura A1.7.23. Representación de cajas del estudiante A30 en la sesión 7 361
Figura A1.7.24. Estudiante A47 con la estrategia errónea 361
Figura A1.7.25. El estudiante A27 representa los patitos numerados en la sesión 7 363
Figura A1.7.26. Representaciones C3 y B3 en una carta en la sesión 7 364
Figura A1.7.27. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 7 365
Figura A1.8.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 8 366
Figura A1.8.2. Representaciones de Medida con marcas y dibujos en la sesión 8 367
Figura A1.8.3. Representaciones de M5 y M6 en la sesión 8 368
Figura A1.8.4. Representaciones de los grupos en la sesión 8 369
Figura A1.8.5. Representaciones A2 y C3 en la sesión 8 370
Figura A1.8.6. Representación B1I en la sesión 8 370
Figura A1.8.7. Camino de aprendizaje para el problema de la sesión 8 371
Figura A1.8.8. Capacidades para la estrategia M1 en la sesión 8 371
Figura A1.9.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 8b 372
Figura A1.9.2. Estrategia M1 en la sesión 8b 373
Figura A1.9.3. Estrategia M2 en la sesión 8b 373

Figura A1.9.4. Estrategia M8 en la sesión 8b 374
Figura A1.9.5. Estrategia M4 en la sesión 8b 374
Figura A1.9.6. Estrategia M4 y M9 en la sesión 8b... 375
Figura A1.9.7. Respuesta “Muchos” en la sesión 8b 376
Figura A1.9.8. Estrategia Medida con agrupamientos incorrectos en la sesión 8b 376
Figura A1.9.9. Estrategias de Reparto en 10 grupos en la sesión 8b 376
Figura A1.9.10. Estrategia inadecuada de Juntar todo con Tabla 100 en la sesión 8b 377
Figura A1.9.11. Estrategia inadecuada Quitar en la sesión 8b 377
Figura A1.9.12. Representación B3 en la sesión 8b 378
Figura A1.9.13. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 8b 379
Figura A1.10.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 9 380
Figura A1.10.2. Estrategia JT2 en la sesión 9... 381
Figura A1.10.3. Estrategia JT23 en la sesión 9... 381
Figura A1.10.4. Estrategia JT3 en la sesión 9... 381
Figura A1.10.5. Estrategia JT4 en la sesión 9... 382
Figura A1.10.6. Estrategia JT5 en la sesión 9... 382
Figura A1.10.7. Representación para la estrategia JT6 en la sesión 9 383
Figura A1.10.8. Representación para la estrategia JT7 y JT5 en la sesión 9 383
Figura A1.10.9. Representación para la estrategia JT10 en la sesión 9 384
Figura A1.10.10. Representación para la estrategia JT12 en la sesión 9 384
Figura A1.10.11. Estrategia JT5-CM2 en la sesión 9 385
Figura A1.10.12. Estrategia JT9-CM3 en la sesión 9 385
Figura A1.10.13. Solución a través de una sentencia numérica en la sesión 9..................... 385
Figura A1.10.14. Dificultades en la sesión 9 387
Figura A1.10.15. Intento de resolución con Tabla 100 en la sesión 9 387
Figura A1.10.16. Representación B1I y A3 en la sesión 9 388
Figura A1.10.17. Representación C1 en la sesión 9 388
Figura A1.10.18. Representación C3 en la sesión 9 389
Figura A1.10.19. Representación A1Oc para mostrar las la solución en la sesión 9 389
Figura A1.10.20. Representación B3 en la carta en la sesión 9 389
Figura A1.10.21. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 9 390
Figura A1.11.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 10 391
Figura A1.11.2. Estrategia JT2 en la sesión 10... 392
Figura A1.11.3. Estrategia JT1 en la sesión 10... 392
Figura A1.11.4. Estrategia JT3 en la sesión 10... 392
Figura A1.11.5. Estrategia JT6 y JT7 en la sesión 10... 393
Figura A1.11.6. Estrategia JT12 en la sesión 10... 393
Figura A1.11.7. Estrategia CP2 en la sesión 10... 394
Figura A1.11.8. Estrategia JT23 en la sesión 10... 394
Figura A1.11.9. Estrategia JT24 en la sesión 10... 394
Figura A1.11.10. Estrategia JT25 en la sesión 10... 395
Figura A1.11.11. Estrategia EI2 en la sesión 10 395
Figura A1.11.12. Algoritmo AL1 en la sesión 10... 395
Figura A1.11.13. Representación de las marcas numeradas en la sesión 10 396
Figura A1.11.14. Orden de la posición de cifras cambiado en la sesión 10 397
Figura A1.11.15. Representaciones A1Oc y A1Oo en la sesión 10 398
Figura A1.11.16. Representaciones B1I y A1Gm en la sesión 10.. 398
Figura A1.11.17. Representaciones B1I con “pez” en la sesión 10..................................... 398
Figura A1.11.18. Representaciones B1I con A3 en la sesión 10 398
Figura A1.11.19. Representaciones A1Gm en plastilina en la sesión 10 399

Figura A1.11.20. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 10 400
Figura A1.12.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 11 401
Figura A1.12.2. Representación de M4 y M9 en la sesión 11 402
Figura A1.12.3. Representación de la Estrategia de Medida con bloques de base 10 (M11) 402
Figura A1.12.4. Representación en una estrategia M12 en la sesión 11 402
Figura A1.12.5. Representación utilizada para la estrategia M13 en la sesión 11 403
Figura A1.12.6. Estrategia M10 en la sesión 11 403
Figura A1.12.7. Estrategia basada en el valor posicional en la sesión 11 403
Figura A1.12.8. Reparto de cubos encajables en los huecos de la huevera en la sesión 11 ... 404
Figura A1.12.9. Estrategia Medida con huevera y cubos encajables en la sesión 11 405
Figura A1.12.10. Representación de forma diferente los elementos y los grupos en la sesión 11 405
Figura A1.12.11. Representación C1 en la sesión 11 406
Figura A1.12.12. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 11 407
Figura A1.13.1. Resumen de la resolución de alumnos en la sesión 12 408
Figura A1.13.2. Representación en una estrategia A28 en la sesión 12 408
Figura A1.13.3. Representación en una estrategia A26 en la sesión 12 409
Figura A1.13.4. Estrategia de A30 en la sesión 12 409
Figura A1.13.5. Estrategia de A29 en la sesión 12 409
Figura A1.13.6. Explicación de la estrategia de VP3 en la sesión 12 410
Figura A1.13.7. Representaciones para JT27 y JT28 en la sesión 12 411
Figura A1.13.8. Estrategia de JT23 en la sesión 12 411
Figura A1.13.9. Estrategia de AL1 en la sesión 12 412
Figura A1.13.10. Estrategia de Juntar todo, utilizada de forma inadecuada, en la sesión 12 414
Figura A1.13.11. Estrategia con agrupamiento erróneo, utilizada de forma inadecuada, en la sesión 12 415
Figura A1.13.12. Estrategia de con varios agrupamientos, utilizada de forma inadecuada, en la sesión 12 415
Figura A1.13.13. Identificación incorrecta de las cantidades, en la sesión 12 415
Figura A1.13.14. Identificación incorrecta de las cantidades, en la sesión 12 415
Figura A1.13.15. Representación con marcas de diferentes unidades, en la sesión 12 417
Figura A1.13.16. Representación con marcas de diferentes unidades, en la sesión 12 417
Figura A1.13.17. Representación curiosa en la sesión 12 417
Figura A1.13.18. Hoja de trabajo con distintas representaciones en la sesión 12 418
Figura A1.13.19. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 12 418
Figura A1.14.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 13 420
Figura A1.14.2. Estrategia JT1 de la sesión 13 420
Figura A1.14.3. Estrategias JT5 y JT4 de la sesión 13 421
Figura A1.14.4. Estrategias JT6 y JT7 de la sesión 13 421
Figura A1.14.5. Estrategias JT6 con diferentes representantes de la sesión 13 421
Figura A1.14.6. Estrategias JT30 de la sesión 13 422
Figura A1.14.7. Estrategias JT31 de la sesión 13 422
Figura A1.14.8. Estrategias JT19 de la sesión 13 422
Figura A1.14.9. Estrategia JT25 de la sesión 13 423
Figura A1.14.10. Confusión en identificar cantidades en el enunciado de la sesión 13 424
Figura A1.14.11. Número en espejo de la sesión 13 424
Figura A1.14.12. Representación A2 en la sesión 13 425
Figura A1.14.13. Representación A1HOc en la sesión 13 425
Figura A1.14.14. Representación A1B10 en la sesión 13 425
Figura A1.14.15. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 13 426

Figura A1.15.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 14 428
Figura A1.15.2. Estrategia R20 en la sesión 14 428
Figura A1.15.3. Estrategia R2 en la sesión 14 429
Figura A1.15.4. Estrategia R21 mal ejecutada en la sesión 14... 429
Figura A1.15.5. Estrategia R22 en la sesión 14 429
Figura A1.15.6. Estrategia R23 en la sesión 14 430
Figura A1.15.7. Estrategia R14 en la sesión 14 430
Figura A1.15.8. Representación de las cantidades en la estrategia R13 en la sesión 14 430
Figura A1.15.9. Representación de la estrategia M15 en la sesión 14 431
Figura A1.15.10. Representación de la estrategia M15 en la sesión 14 431
Figura A1.15.11. Representación de la estrategia M15 en la sesión 14 431
Figura A1.15.12. Estrategia M14 en la sesión 14 432
Figura A1.15.13. Dar la solución que se escucha en la sesión 14 433
Figura A1.15.14. Agrupar sin conocer cantidades en la sesión 14 434
Figura A1.15.15. Dificultad al escribir el numeral en la sesión 14....................................... 434
Figura A1.15.16. Representación B1I en la sesión 14 435
Figura A1.15.17. Uso distintos de las representaciones A2 en la sesión 14......................... 435
Figura A1.15.18. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 14 436
Figura A1.16.1. Ayuda entre los niños en la sesión 15... 437
Figura A1.16.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 15 438
Figura A1.16.3. Cartas en la sesión 15 438
Figura A1.16.4. Representaciones de M1 y M2 en la sesión 15.. 438
Figura A1.16.5. Estrategia de M1 en la sesión 15 439
Figura A1.16.6. Representación de la R30 en la sesión 15... 439
Figura A1.16.7. Estrategia basada VP1 en la sesión 15... 440
Figura A1.16.8. Estrategia inadecuada Quitar en la sesión 15 440
Figura A1.16.9. Estrategia inadecuada con grupos de 5 en la sesión 15 441
Figura A1.16.10. Incomprensión de la tarea en la sesión 15 441
Figura A1.16.11. Estrategia no terminada correctamente en la sesión 15............................ 441
Figura A1.16.12. Representación A1Oc para resolver 442
Figura A1.16.13. Representación A2.. 442
Figura A1.16.14. Representación A1Gm y A2 443
Figura A1.16.15. Representación B1I para dar la solución y con hueveras y centicubos 443
Figura A1.16.16. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 15 444
Figura A1.17.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 16 445
Figura A1.17.2. Estrategias A2 y A1 en la primera etapa de la sesión 16............................ 446
Figura A1.17.3. Estrategias A22 y A20 en la primera etapa de la sesión 16........................ 446
Figura A1.17.4. Estrategia A31 en la primera etapa de la sesión 16 447
Figura A1.17.5. Estrategias A1-Q1 de la sesión 16 448
Figura A1.17.6. Estrategias A2-Q1 de la sesión 16 448
Figura A1.17.7. Estrategias A22-Q2 de la sesión 16 448
Figura A1.17.8. Estrategias A4-Q12 de la sesión 16 450
Figura A1.17.9. Estrategias VP2-Q3 y VP2-Q14 de la sesión 16 450
Figura A1.17.10. Estrategias VP2 – Q9 de la sesión 16 450
Figura A1.17.11. Estrategias VP2-QH13 de la sesión 16... 451
Figura A1.17.12. Estrategias A31-Q13 de la sesión 16 451
Figura A1.17.13. Estrategia VP3 – Q16 de la sesión 16... 451
Figura A1.17.14. Carta con explicación de estrategia de la sesión 16.................................. 451
Figura A1.17.15. Estrategia VP3 – Q15 de la sesión 16... 452
Figura A1.17.16. Estrategia VP2 – CA1 de la sesión 16 452

Figura A1.17.17. Estrategia Juntar todo con decenas como unidades de la sesión 16..........452
Figura A1.17.18. Estrategia algoritmo de la suma como estrategia inadecuada de la sesión 16 453
Figura A1.17.19. Estrategia inadecuada de la sesión 16 453
Figura A1.17.20. Dificultad en la comprensión de la decena de la sesión 16..........453
Figura A1.17.21. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 16..........455
Figura A1.18.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 17..........457
Figura A1.18.2. Estrategia JT2 de la sesión 17 457
Figura A1.18.3. Representación de la estrategia JT1 y JT21 de la sesión 17..........458
Figura A1.18.4. Representaciones de las estrategias JT5 y JT6 de la sesión 17 458
Figura A1.18.5. Representaciones de las estrategias JT8 y J7 de la sesión 17..........458
Figura A1.18.6. Estrategia JT12 de la sesión 17 459
Figura A1.18.7. Representaciones de las estrategias JT19 y JT25 de la sesión 17 459
Figura A1.18.8. Representaciones de la solución con hueveras de la sesión 17 461
Figura A1.18.9. Representaciones de varios tipos (A1 y B1I) 462
Figura A1.18.10. Representaciones B1 y C1 en la sesión 17..........462
Figura A1.18.11. Representaciones..........463
Figura A1.18.12. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 17..........463
Figura A1.19.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 18..........465
Figura A1.19.2. Representaciones de A32- JT8 y A32- JT7 en la sesión 18..........467
Figura A1.19.3. Representaciones de A33- JT27 en la sesión 18 469
Figura A1.19.4. Estrategia A29 – JT23 en la sesión 18 469
Figura A1.19.5. Estrategia VP3-JT34 en la sesión 18..........470
Figura A1.19.6. Estrategia A34-JT32 en la sesión 18..........470
Figura A1.19.7. Estrategia VP2–JT6 y VP2–JT1 en la sesión 18..........471
Figura A1.19.8. Estrategia VP2-AL1 en la sesión 18 471
Figura A1.19.9. Dificultad "no identifica decenas como grupos de 10" en la sesión 18 472
Figura A1.19.10. Dificultad "decenas de 4" en la sesión 18 472
Figura A1.19.11. "Formar colecciones grandes" en la sesión 18..........472
Figura A1.19.12. Escalera de centicubos en la sesión 18..........472
Figura A1.19.13. Representación B1I con A2 en la sesión 18..........474
Figura A1.19.14. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 18..........474
Figura A1.20.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 19..........476
Figura A1.20.2. Estrategias A25 y A1 de la sesión 19..........477
Figura A1.20.3. Estrategias A32 de la sesión 19..........477
Figura A1.20.4. Algoritmo para dar la solución en la sesión 19 478
Figura A1.20.5. Estrategia VP2-AH3 en la sesión 19..........478
Figura A1.20.6. Estrategia VP2-Q14 en la sesión 19..........480
Figura A1.20.7. Estrategia VP3– AH5 de la sesión 19 480
Figura A1.20.8. CH2 en sustitución del algoritmo de la sesión 19 480
Figura A1.20.8. Estrategia CH1 en la sesión 19..........481
Figura A1.20.9. Dificultad tras conseguir las 9 decenas en la sesión 19..........481
Figura A1.20.10. Carta a Clara en la sesión 19 481
Figura A1.20.11. Representación de la 9 decenas en la sesión 19 481
Figura A1.20.12. Agrupamiento con grupos de 6 en la sesión 19..........482
Figura A1.20.13. Algoritmo de la resta con suma de izquierda a derecha en la sesión 19 482
Figura A1.20.14. Ayuda de la tutora en la sesión 19..........483
Figura A1.20.15. Representación B1I con A2 en la sesión 19..........484
Figura A1.20.16. Representaciones A3, A1Gm para resolver, B3 para dar la solución en la sesión 19 484

Figura A1.20.17. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 19 485
Figura A1.21.1. Carta de 1ºA de la sesión 20 486
Figura A1.21.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 20 486
Figura A1.21.3. Representaciones de las estrategias JT1 y JT2 en la sesión 20.................... 487
Figura A1.21.4. Representaciones de la estrategia JT5 en la sesión 20................................. 487
Figura A1.21.5. Representaciones de la estrategia JT12 en la sesión 20.............................. 487
Figura A1.21.6. Dificultades en la ejecución de procedimiento y combinación básica en la sesión 20.. 488
Figura A1.21.7. Representación C2 en la sesión 20 489
Figura A1.21.8. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 20 490
Figura A1.22.1. Indicaciones de un maestro ajeno al taller en la sesión 21 491
Figura A1.22.2. Carta con resolución a Clara en el grupo A en la sesión 21 491
Figura A1.22.3. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 21 492
Figura A1.22.4. Representaciones de A1 y A3 en la sesión 21 492
Figura A1.22.5. Estrategia A6 en la sesión 21.. 493
Figura A1.22.6. Estrategia A8 en la sesión 21.. 493
Figura A1.22.7. Estrategia A35 en la sesión 21.. 494
Figura A1.22.8. Estrategia AL3 en la sesión 21 495
Figura A1.22.9. Estrategia ALSP en la sesión 21 495
Figura A1.22.10. Algoritmo forzado en la sesión 21.. 496
Figura A1.22.11. Juntar todo en la sesión 21.. 496
Figura A1.22.12. Representaciones A2 en la sesión 21.. 497
Figura A1.22.13. Carta del grupo B en la sesión 21 497
Figura A1.22.14. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 21 498
Figura A1.23.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 22 499
Figura A1.23.2. Carta en la pizarra de la sesión 22 500
Figura A1.23.3. Estrategia Q3 en la sesión 22.. 500
Figura A1.23.4. Estrategia Q1 en la sesión 22.. 501
Figura A1.23.5. Estrategia AH1 en la sesión 22... 501
Figura A1.23.6. Estrategia AH6 en la sesión 22... 501
Figura A1.23.7. Estrategia E4 en la sesión 22 501
Figura A1.23.8. Estrategia algoritmo en la sesión 22 502
Figura A1.23.9. Resta con llevada bien ejecutada en la sesión 22 502
Figura A1.23.10. Resta con llevada mal ejecutadas en la sesión 22..................................... 503
Figura A1.23.11. Dificultad de aprendizaje en la sesión 22 503
Figura A1.23.12. Estrategias Juntar todo con marcas y dibujos inadecuadas en la sesión 22 503
Figura A1.23.13. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 22 505
Figura A1.24.1. Ayuda de la tutora en grupo B de la sesión 23 506
Figura A1.24.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 23 506
Figura A1.24.3. Representación alumnos que abandonan en la sesión 23 506
Figura A1.24.4. Carta del grupo A en la sesión 23 507
Figura A1.24.5. Carta con explicación VP2 – AH7 de la sesión 23..................................... 509
Figura A1.24.6. Estrategia VP2 – E4 de la sesión 23 509
Figura A1.24.7. Estrategia Algoritmo en la sesión 23 510
Figura A1.24.8. Algoritmo inadecuado en la sesión 23... 510
Figura A1.24.9. Ayuda de la tutora en el grupo b en la sesión 23 510
Figura A1.24.10. Representaciones A3, B3 en la sesión 23 511
Figura A1.24.11. Algoritmo para dar la solución en la sesión 23.. 512
Figura A1.24.12. Representaciones de las decenas en la sesión 23...................................... 512
Figura A1.24.13. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 23 513

Figura A1.25.1. Añadir un elemento más para reparto equitativo de la sesión 24................514
Figura A1.25.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 24................................515
Figura A1.25.3. Intento de algoritmo escrito de la sesión 24..515
Figura A1.25.4. Estrategia R2 la sesión 24 516
Figura A1.25.5. Representación de la estrategia R6 en la sesión 24.....................................516
Figura A1.25.6. Representación de la estrategia R26 en la sesión 24...................................516
Figura A1.25.7. Representaciones de las estrategias R28 y R13 en la sesión 24..................517
Figura A1.25.8. Estrategia R29 en la sesión 24 517
Figura A1.25.9. Estrategia R16 en la sesión 24 518
Figura A1.25.10. Solución de la estrategia R16 en la sesión 24 518
Figura A1.25.11. Estrategias inadecuadas Q3 y Algoritmo de la resta en la sesión 24 519
Figura A1.25.12. Dificultades en la sesión 24...519
Figura A1.25.13. Representación B1I con A2 para resolver y A3 para solución en la sesión 24 520
Figura A1.25.14. Representación A1Oo con regletas en la sesión 24...................................520
Figura A1.25.15. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 24.........................521
Figura A5.1. Ejemplos de actividades del tema 2 del libro de texto.....................................534
Figura A5.2. Sumas de números de una cifra y descomposiciones aditivas del 10. 535
Figura A5.3. Unidades y decenas en los números de dos cifras (tema 6). 536
Figura A5.4. Descomposiciones aditivas de números de dos cifras (tema 9). 538

Índice de tablas

Tabla 1.1. *Principios del NCTM (2003, p. 11)* 14
Tabla 1.2. *Estándares de Procesos de NCTM (2003)* 16
Tabla 1.3. *Relación entre el Estándar de Resolución de Problemas y los de más procesos* 19
Tabla 1.4. *Estándar Números y Operaciones de prekindergarten a grado 2 (NCTM, 2003, p. 82)* 20
Tabla 1.5. *Estándar Álgebra de prekindergarten a grado 2 (NCTM, 2003, p. 94) relacionado con Números y Operaciones y resolución de problemas* 22
Tabla 1.6. *Relación entre los Estándares de Procesos del NCTM (2000) y las Prácticas de los Commom Core State Standars (CCSSI, 2010)* 25
Tabla 1.7. *Ejes de la competencia matemáticas (NRC, 2001, p. 5)* 26
Tabla 1.8. *Capacidades en las fases de matematización (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 235)* 29
Tabla 1.9. *Relación entre los Estándares de Procesos (NCTM), Competencias PISA 2003 y Capacidades PISA 2012 (tabla adaptada de Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012).* 30
Tabla 1.10. *Problemas de Cambio Creciente* 42
Tabla 1.11. *Problemas de Cambio Decreciente* 42
Tabla 1.12. *Problemas aditivos de combinación* 43
Tabla 1.13. *Problemas aditivos de comparación* 43
Tabla 1.14. *Problemas aditivos de igualación* 44
Tabla 1.15. *Operaciones aritméticas que resuelven problemas de cambio* 45
Tabla 1.16. *Problemas de Grupos Iguales* 46
Tabla 1.17. *Problemas aritméticos de dos etapas* 48
Tabla 1.18. *Estrategias de modelización utilizadas por los niños según el enunciado del problema verbal de grupos iguales (Carpenter Fennema y otros, 1999)* 54
Tabla 1.19. *Estrategias de métodos que empiezan en un número al resolver (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 147)* 58
Tabla 1.20. *Estrategias de métodos mixtos (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 147)* 59
Tabla 1.21. *Estrategias de métodos que cambian ambos números (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 147)* 59
Tabla 1.22. *Estrategias inventadas para multiplicación con números de dos cifras (Carpenter, Fennema y otros, 1999)* 61
Tabla 1.23. *Características importantes de Principios del NCTM (2003) para este trabajo* 63
Tabla 2.1. *Focos conceptuales prioritarios de Números naturales (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 296)* 73
Tabla 2.2. *Enfoques de la enseñanza de las matemáticas (Baroody, Cibulskis, Lai y Li, 2004)* 76
Tabla 2.3. *Estrategias de modelización directa utilizadas por los niños según el enunciado del problema verbal aditivo (Carpenter Fennema y otros, 1999)* 78
Tabla 2.4. *Estrategias de conteo utilizadas por los niños según el enunciado del problema verbal aditivo (Carpenter Fennema y otros, 1999)* 79
Tabla 2.5. *Problemas de grupos iguales con grupos de 10* 81
Tabla 2.6. *Estrategias observadas en problemas de multiplicación con grupos de 10 (Carpenter, Fennema y otros, 1999)* 82
Tabla 2.7. *Estrategias observadas en problemas de división medida con grupos de 10 (Carpenter, Fennema y otros, 1999)* 82
Tabla 2.8. *Estrategias observadas para problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10 con bloques de base 10 (Carpenter, Franke y otros, 1997; (Carpenter, Fennema y otros, 1999)* 82

Tabla 2.9. *Estrategias observadas en problemas de estructura aditiva con números de dos cifras (Carpenter, Fennema y otros, 1999)*.. 83
Tabla 2.10. *Estrategias inventadas (Carpenter, Franke y otros, 1997)* 84
Tabla 2.11. *Estrategias de multiplicación y división hasta números de 3 cifras (Carpenter, Fennema y otros, 1999) y Ambrose, Baek y Carpenter (2003)*... 85
Tabla 2.12. *Relación entre las estrategias observadas en problemas de agrupamiento con grupos de 10 (Carpenter, Fennema y otros, 1999) y niveles de comprensión de la decena de Wright y otros (2006)*.. 90
Tabla 2.13. *Descripción general de los tipos de ítems del TEMA3 (Núñez y Lozano, 2009)*.. 96
Tabla 2.14. *Tipos de representaciones de cantidades discretas (De Castro, en prensa)* 98
Tabla 2.15. *Camino de aprendizaje de la suma y resta basado en el conteo y la descomposición/composición propuesto por Clements y Sarama (2009) y Sarama y Clements (2004)* 105
Tabla 2.16. *Camino de enseñanza de la suma y resta propuesto por Clements y Sarama (2009)* 106
Tabla 2.16 (continuación). *Camino de enseñanza de la suma y resta propuesto por Clements y Sarama (2009)*.. 107
Tabla 3.1. *Problemas planteados en las seis primeras sesiones* 126
Tabla 3.2. *Problemas planteados en el taller con grupos de 10*... 128
Tabla 3.3. *Problemas planteados en el taller con dos cifras*.. 129
Tabla 3.5. *Contenido del libro de texto del aula*.. 130
Tabla 3.6. *Relación de Sesiones del taller y las clases habituales del primer trimestre* 131
Tabla 3.7. *Relación de Sesiones del taller y las clases habituales del segundo trimestre*..... 132
Tabla 3.8. *Relación de Sesiones del taller y las clases habituales del tercer trimestre* 133
Tabla 3.9. *Relación de los instrumentos de recogida de datos y fases del taller* 134
Tabla 4.1. *Categorización inicial de estrategias en situaciones aditivas*............................. 136
Tabla 4.2. *Capacidades y estrategias dependiendo de la secuencia de numerales*.............. 137
Tabla 4.3. *Categorización inicial de estrategias en situaciones sustractivas* 138
Tabla 4.4. *Capacidades y estrategias dependiendo de la secuencia de numerales*.............. 139
Tabla 4.5. *Categorización de las representaciones (adaptada de De Castro y Bosch, en prensa)* 143
Tabla 4.6. *Tabla para el análisis de las representaciones*.. 143
Tabla 4.7. *Problemas de multiplicación con agrupamientos de 10*...................................... 146
Tabla 4.8. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades de problemas de multiplicación con agrupamientos de 10* 149
Tabla 4.9. *Agrupación de estrategias observadas en la primera etapa de las sesiones 7 y 12 por representación y conteo*.. 152
Tabla 4.10. *Agrupación de estrategias observadas en la segunda etapa de las sesiones 7 y 12 por representación y conteo*.. 154
Tabla 4.11. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones 7 y 12 por representación y conteo*.. 156
Tabla 4.12. *Problemas de división medida con agrupamientos de 10* 160
Tabla 4.13. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades de problemas de división medida con agrupamientos de 10* 162
Tabla 4.14. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones 8, 8b, 11 y 15 por representación y conteo* 165
Tabla 4.15. *Frecuencia absoluta de las estrategias observadas en las sesiones 8, 8b, 11 y 15* 165
Tabla 4.16. *Problemas de suma* 168

Tabla 4.17. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades en problemas aditivos (suma)* 172
Tabla 4.18. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones de suma por representación y conteo* 177
Tabla 4.19. *Progresión de estrategias de alumnos que eligen Tabla 100 para sumar* 183
Tabla 4.20. *Variantes de Estrategias inventadas en problemas de suma* 184
Tabla 4.21. *Problemas de resta* 184
Tabla 4.22. *Frecuencia acumulada de estrategias de modelización directa y modalidades en problemas aditivos (resta)* 188
Tabla 4.23. *Frecuencia acumulada de estrategias de conteo, inventadas y formales en problemas aditivos (resta)* 189
Tabla 4.24. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades en problemas aditivos (resta) con agrupamientos de 10* 192
Tabla 4.25. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones de resta por representación y conteo* 197
Tabla 4.26. *Progresión de estrategias de alumnos que eligen Tabla 100 para restar* 202
Tabla 4.27. *Variantes de estrategias inventadas en problemas de resta* 203
Tabla 4.28. *Problemas de multiplicación* 207
Tabla 4.29. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades en problemas grupos iguales* 209
Tabla 4.30. *Estrategias agrupadas de las sesiones 4 y 21* 213
Tabla 4.31. *Problemas de división partitiva* 216
Tabla 4.32. *Frecuencia acumulada de modalidades en problemas de división partitiva* 219
Tabla 4.33. *Estrategias agrupadas de las sesiones 5, 14 y 24* 222
Tabla 4.34. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas de las sesiones 7 y 12* 227
Tabla 4.35. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas de las 8, 8b, 11 y 15* 228
Tabla 4.36. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemas de suma y resta de números de una cifra* 229
Tabla 4.37. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemas de suma y resta con números de dos cifras* 231
Tabla 4.38. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemasde multiplicación* 232
Tabla 4.39. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemas de división partitiva* 232
Tabla 4.40. *Comprensión de la decena observable en problemas multiplicativos con grupos de 10* 234
Tabla 4.41. *Comprensión de la decena observable en problemas aditivos* 235
Tabla 4.42. Ejemplos de representaciones del taller 237
Tabla 4.43. *Tabla de las frecuencias acumuladas de representaciones del taller* 237
Tabla A1.10. *Características principales de la primera sesión* 272
Tabla A1.11. *Estrategias adecuadas recogidas en la sesión 1* 279
Tabla A1.12. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 1* 281
Tabla A1.13. *Representaciones encontradas en la sesión 1* 281
Tabla A1.14. *Características principales de la segunda sesión* 287
Tabla A1.15. *Estrategias adecuadas en la sesión 2* 293
Tabla A1.16. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 2* 293
Tabla A1.17. *Representaciones encontradas en la sesión 2* 294
Tabla A1.18. *Características principales de la tercera sesión* 299

Tabla A1.19. *Estrategias observadas en la sesión 3* 306
Tabla A1.20. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 3* 307
Tabla A1.21. *Representaciones encontradas en la sesión 3*.. 307
Tabla A1.22. *Características principales de la cuarta sesión*.. 312
Tabla A1.23. *Tipos de Agrupamiento n grupos con m elementos en cada grupo* 313
Tabla A1.24. *Estrategias adecuadas en la sesión 4* 319
Tabla A1.25. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 4* 320
Tabla A1.26. *Representaciones encontradas en la sesión 4*.. 321
Tabla A1.27. *Características principales de la quinta sesión*.. 326
Tabla A1.28. *Estrategias adecuadas en la sesión 5* 333
Tabla A1.29. *Estrategias inadecuadas en la sesión 5* 334
Tabla A1.30. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 5* 334
Tabla A1.31. *Representaciones encontradas en la sesión 5*.. 335
Tabla A1.32. *Características principales de la sexta sesión*.. 337
Tabla A1.33. *Estrategias adecuadas en la sesión 6* 343
Tabla A1.34. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 6* 344
Tabla A1.35. *Representaciones encontradas en la sesión 6*.. 345
Tabla A1.36. *Características principales de la séptima sesión*.. 347
Tabla A1.37. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 7*............................ 352
Tabla A1.38. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 7* 355
Tabla A1.39. *Estrategias adecuadas en la sesión 7* 356
Tabla A1.40. *Dificultades y estrategias inadecuadas en la sesión 7*.................................. 362
Tabla A1.41. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 7* 362
Tabla A1.42. *Representaciones encontradas en la sesión 7*.. 363
Tabla A1.43. *Características principales de la octava sesión* 366
Tabla A1.44. *Estrategias adecuadas en la sesión 8* 368
Tabla A1.45. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 8* 369
Tabla A1.46. *Representaciones encontradas en la sesión 8b*.. 369
Tabla A1.47. *Características principales de la "octava b" sesión* 372
Tabla A1.48. *Estrategias adecuadas en la sesión 8b* 375
Tabla A1.49. *Dificultades y estrategias inadecuadas en la sesión 8b*................................ 377
Tabla A1.50. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 2* 377
Tabla A1.51. *Representaciones encontradas en la sesión 8b*.. 378
Tabla A1.52. *Características principales de la novena sesión*.. 379
Tabla A1.53. *Estrategias adecuadas en la sesión 9* 386
Tabla A1.54. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 9* 387
Tabla A1.55. *Representaciones encontradas en la sesión 9*.. 388
Tabla A1.56. *Características principales de la décima sesión*.. 391
Tabla A1.57. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 10*................ 396
Tabla A1.58. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 10* 397
Tabla A1.59. *Representaciones encontradas en la sesión 10*.. 397
Tabla A1.60. *Características principales de la décimo primera sesión*.............................. 400
Tabla A1.61. *Estrategias adecuadas en la sesión 11* 404
Tabla A1.62. *Estrategias inadecuadas en la sesión 11* 404
Tabla A1.63. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 11* 405
Tabla A1.64. *Representaciones encontradas en la sesión 11*.. 406
Tabla A1.65. *Características principales de la decimosegunda sesión* 407
Tabla A1.66. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 12*.......................... 410

Tabla A1.67. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 12* ... 412
Tabla A1.68. *Estrategias adecuadas en la sesión 12* ... 413
Tabla A1.69. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 12* ... 416
Tabla A1.70. *Representaciones encontradas en la sesión 12* ... 416
Tabla A1.71. *Características principales de la décimo tercera sesión* ... 419
Tabla A1.72. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 13* ... 423
Tabla A1.73. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 13* ... 424
Tabla A1.74. *Representaciones encontradas en la sesión 13* ... 425
Tabla A1.75. *Características principales de la décimo cuarta sesión* ... 427
Tabla A1.76. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 14* ... 432
Tabla A1.77. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 14* ... 434
Tabla A1.78. *Representaciones encontradas en la sesión 14* ... 435
Tabla A1.79. *Características principales de la décimo quinta sesión* ... 437
Tabla A1.80. *Estrategias adecuadas en la sesión 15* ... 440
Tabla A1.81. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 15* ... 441
Tabla A1.82. *Representaciones encontradas en la sesión 15* ... 442
Tabla A1.83. *Características principales de la décimo sexta sesión* ... 444
Tabla A1.84. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 16* ... 445
Tabla A1.85. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 16* ... 447
Tabla A1.86. *Estrategias adecuadas en la sesión 16* ... 449
Tabla A1.87. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 16* ... 454
Tabla A1.88. *Representaciones encontradas en la sesión 16* ... 454
Tabla A1.89. *Características principales de la décimo séptima sesión* ... 456
Tabla A1.90. *Estrategias adecuadas recogidas en la sesión 17* ... 460
Tabla A1.91. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 17* ... 461
Tabla A1.92. *Representaciones encontradas en la sesión 17* ... 462
Tabla A1.93. *Características principales de la décimo-octava sesión* ... 464
Tabla A1.94. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 18* ... 466
Tabla A1.95. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 18* ... 466
Tabla A1.96. *Estrategias adecuadas en la sesión 18* ... 468
Tabla A1.97. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 17* ... 473
Tabla A1.98. *Representaciones encontradas en la sesión 18* ... 473
Tabla A1.99. *Características principales de la décimo novena sesión* ... 475
Tabla A1.100. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 19* ... 476
Tabla A1.101. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 19* ... 477
Tabla A1.102. *Estrategias adecuadas en la sesión 19* ... 479
Tabla A1.103. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 19* ... 483
Tabla A1.104. *Representaciones encontradas en la sesión 19* ... 483
Tabla A1.105. *Características principales de la vigésima sesión* ... 485
Tabla A1.106. *Estrategias adecuadas en la sesión 20* ... 488
Tabla A1.107. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 20* ... 488
Tabla A1.108. *Representaciones encontradas en la sesión 20* ... 489
Tabla A1.109. *Características principales de la vigésima primera sesión* ... 491
Tabla A1.110. *Estrategias adecuadas en la sesión 21* ... 495
Tabla A1.111. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 21* ... 496
Tabla A1.112. *Representaciones encontradas en la sesión 21* ... 497
Tabla A1.113. *Características principales de la vigésima segunda sesión* ... 499
Tabla A1.114. *Estrategias adecuadas en la sesión 22* ... 500

Tabla A1.115. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 22* 504
Tabla A1.116. *Representaciones encontradas en la sesión 22* 504
Tabla A1.117. *Características principales de la vigésima tercera sesión* 505
Tabla A1.118. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 23* 507
Tabla A1.119. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 23* 507
Tabla A1.120. *Estrategias adecuadas en la sesión 23* 508
Tabla A1.121. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 23* 511
Tabla A1.122. *Representaciones encontradas en la sesión 23* 511
Tabla A1.123. *Características principales de la vigésima cuarta sesión* 513
Tabla A1.124. *Estrategias adecuadas en la sesión 24* 518
Tabla A1.125. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 24* 519
Tabla A1.126. *Representaciones encontradas en la sesión 24* 520
Tabla A1.15. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas* 571

Resumen

El objetivo general de esta investigación es estudiar el desarrollo de los conocimientos informales sobre la agrupación de base 10 y los conocimientos del valor posicional, a través del estudio de las estrategias utilizadas por los niños en la resolución de problemas aritméticos verbales, así como el análisis de las representaciones de cantidades discretas utilizadas en sus procedimientos, describiendo además, la evolución de las estrategias y representaciones a lo largo de un curso.

En la investigación, han participado 54 alumnos de primer curso de educación primaria de un centro público de la zona noroeste de Madrid. Se ha diseñado un taller de resolución de problemas compuesto por 25 sesiones, una por semana, desarrollado a lo largo de un curso escolar. En el taller se han planteado problemas de estructura multiplicativa, de grupos iguales, con agrupamientos de 10, de multiplicación y división; otros de grupos iguales, sin grupos de diez; y problemas de estructura aditiva con números de dos cifras. Los problemas estaban basados en cuentos leídos en el aula. A los alumnos se les ofrecían diversos materiales manipulativos (estructurados y no estructurados), sin instrucción sobre su uso, entre los cuales podían elegir libremente. En los talleres había una fase de trabajo individual, seguida de una puesta en común, y la escritura de una carta con la explicación de proceso de resolución del problema.

La recogida de datos se realiza a través de entrevistas individuales, realizadas dentro del aula, grabadas en video o anotadas en hojas de registro. Se han tomado fotografías del proceso de resolución cuando los alumnos utilizaban materiales manipulativos. Finalmente, se han recogido las hojas de trabajo de los alumnos y las cartas escritas.

Para analizar las estrategias, se parte de una categorización proveniente de estudios previos. Las estrategias de modelización directa han sido analizadas prestando especial atención a la representación de las cantidades y su conteo. Esta circunstancia, unida a la libertad que se ha dado en la selección y uso de materiales, ha dado lugar a la detección de gran diversidad de modalidades de aplicación de las estrategias no descritas en estudios previos. Algunas de ellas son estrategias de transición de modelización directa a estrategias de conteo y a otras que suponen el uso de hechos numéricos, facilitadas por el uso del rekenrek y la Tabla 100. Otras muestran, con más detalle que los estudios previos, la evolución de las estrategias de modelización directa, desde la ausencia de representación de las cantidades en grupos de 10, a la representación de las cantidades separadas en decenas y unidades con ayuda de materiales no estructurados como los cartones de decenas de huevos y barras de 10 formadas con cubos encajables. Todo esto ha permitido describir la evolución, desde las estrategias informales de modelización a estrategias formales, así como el desarrollo de la comprensión de la decena, para el que se describen transiciones entre niveles de comprensión señalados en estudios previos.

Tras la categorización de las estrategias, en un segundo análisis, estas se describen como sucesión de capacidades y se representan, dentro de un diagrama, como posibles caminos de aprendizaje para la resolución de un problema.

Al analizar las representaciones de cantidades discretas, cada cantidad se considera compuesta por un número y un tipo de objeto, identificando cada componente como icónica, simbólica, o ambas, lo que da lugar a un esquema de clasificación. Las representaciones se han estudiado en función del momento en que se producen: el proceso de resolución del problema, la anotación de la respuesta, o la carta en que se comunican el proceso y la respuesta. Los niños han utilizado con más frecuencia representaciones icónicas para resolver problemas, aumentando las representaciones simbólicas a lo largo del taller, por el uso de la Tabla 100 y los algoritmos. Para comunicar la solución por escrito o elaborar la carta, utilizan

representaciones más formales como la escritura del número y el tipo de objeto en cifras o palabras.

Entre las conclusiones de la investigación, los niños de primero de primaria han utilizado preferentemente, a lo largo de todo el curso, estrategias de modelización directa que reflejan el uso de conocimientos informales. Esto se ha producido en una situación de aprendizaje gobernada por normas que permitían elegir libremente estrategias y materiales, y a pesar de los conocimientos formales que se introducían en las clases ordinarias de matemáticas.

Como implicación para el aula, se propone incluir en la enseñanza tareas que fomenten el uso de conocimientos informales, proporcionando experiencias en que los niños puedan construir ideas sobre los conceptos antes de su enseñanza formal. Por ejemplo, se pueden incluir problemas de estructura multiplicativa en primer curso de educación primaria. Esto supone un cambio de enfoque, pasando a ver la resolución de problemas como vía de construcción de contenidos matemáticos, superando un enfoque aplicacionista. Asimismo, el uso de materiales manipulativos debe someterse a reflexión, otorgando más importancia al pensamiento que desarrollan los niños con ayuda de materiales de su elección, que a la propia estructura del material.

La actuación de los alumnos en el taller ha evidenciado características propias de un aprendizaje con comprensión, como la conexión entre estrategias informales y formales, el conocimiento infantil de la aplicabilidad de los algoritmos de adición y sustracción, o el uso de diferentes estrategias para un mismo problema. La introducción en la educación primaria de una metodología como la descrita en el taller, inspirada en la Instrucción Cognitivamente Guiada, puede favorecer el aprendizaje con comprensión.

Como implicación para la teoría, propongo utilizar las trayectorias de enseñanza-aprendizaje y los caminos de aprendizaje de una tarea, como instrumentos complementarios para el diseño curricular y la planificación de aula. Las estrategias pueden desglosarse en secuencias de capacidades, que constituyen el nivel máximo de concreción de las expectativas de aprendizaje y, desde una perspectiva más amplia, este análisis permite identificar las capacidades necesarias para pasar de unos niveles de comprensión a otros superiores. Estas herramientas sirven para articular conocimientos informales y formales, estableciendo conexiones entre ambos.

Abstract
The overall objective of this research is to study the development of informal knowledge on base 10 grouping and place value. This is done through the study of the strategies used by children in solving arithmetic word problems and the analysis of representations of discrete quantities used in their procedures, and the description of the evolution of strategies and representations along one academic year.

Fifty-four students have participated in the research. They were studying first grade of primary education in a public school in the northwest of Madrid (Spain). We have designed an arithmetic problem-solving workshop composed of 25 sessions, one per week, developed over a school year. The workshop posed problems of multiplicative structure, of equal groups, with 10 groups, of multiplication and division; other problems of equal groups, without groups of ten; and additive structure problems with two digit numbers. The problems were based on stories previously read in the classroom. We offered to the students various manipulatives (structured and unstructured), without instruction on its use, among which they could choose freely. In the workshops, there was a phase of individual work followed by sharing strategies, and writing a letter explaining the problem solving process.

Data collection has been done through individual interviews videotaped in the classroom. We have also taken notes on record sheets and photographs of the resolution process, while students used manipulatives. Finally, we have collected the students' worksheets and their written letters.

Para analizar las estrategias, se parte de una categorización proveniente de estudios previos. Las estrategias de modelización directa han sido analizadas prestando especial atención a la representación de las cantidades y su conteo. Esta circunstancia, unida a la libertad que se ha dado en la selección y uso de materiales, ha dado lugar a la detección de gran diversidad de modalidades de aplicación de las estrategias no descritas en estudios previos. Algunas de ellas son estrategias de transición de modelización directa a estrategias de conteo y a otras que suponen el uso de hechos numéricos, facilitadas por el uso del rekenrek y la Tabla 100.

For the analysis of strategies, we start with a categorization from previous studies. Direct modeling strategies have been analyzed according to the representation of the quantities and the mode to carry out counting. This circumstance coupled with the freedom given in the selection and use of materials, has led to the detection of great diversity of modalities for implementing strategies, not described in previous studies. Some of them are transition strategies from direct modeling to counting strategies and other strategies involving the use of number facts, promoted by the use of rekenrek and hundred chart. It also shows, with greater detail than previous studies, the development of direct modeling strategies, since the lack of representation of numbers in groups of 10, to the representation of the amounts separated in tens and units, using non structured manipulatives as cartons of ten eggs and ten bars constructed by children with interlocking cubes. This has allowed the description of the evolution from informal direct modeling strategies to formal strategies, as well as developing an understanding of tens, for which we describe transitions between levels of understanding identified in previous studies.

After categorization of strategies, in a second analysis, we describe strategies as successions of capacities and represent them, in a diagram, as possible learning paths to solve a problem.

When analyzing representations of discrete quantities, we consider each quantity as composed by a number and an object type, and we identify each component as iconic, symbolic, or a mixture of both, which results in a classification scheme. Representations have been classified depending on the phase in which they are produced: the process of solving the problem, the moment of annotation of the solution, or the stage of writing the letter in which the process

and the answer are communicated. Children have most often used iconic representations to solve problems. The frequency of symbolic representations has been increasing throughout the workshop, because of the use of hundred charts and the application of algorithms. At the stage of communication of the written solution, and in the elaboration of the letter, they use more formal representations, as writing the number and the name of the object in figures or words.

Among the conclusions of the investigation, we noted that first grade children applied preferably, throughout the entire course, direct modeling strategies that reflect an informal knowledge. This has occurred in a learning situation governed by rules that allowed free choice of strategies and manipulatives, and despite formal mathematical knowledge, which students were learning in their daily math classes.

As an implication for teaching, we propose to include tasks in the classroom that promote the use of informal knowledge, by providing experiences that enable children building ideas on mathematical concepts, prior to their formal teaching. For example, problems of multiplicative structure may be included in first grade of primary education. This supposes a change of teaching approach, in which we think about problem solving as a way of construction of mathematical content, to overcome an applicationist approach. The use of manipulatives also must undergo reflection, paying more attention to thinking that children develop using manipulatives of their own choice, that to the structure of the manipulatives.

Students' performance in the workshop has evidenced characteristics of learning with understanding, as the connection between informal and formal strategies, children's knowledge of the applicability of the algorithms of addition and subtraction, or the use of different strategies for the same problem. The introduction, in primary education, of a teaching approach as described in the workshop, inspired in cognitively guided instruction, can promote learning with understanding.

As implication for theory, I propose to use the teaching-learning trajectories and the learning paths for a task, as complementary tools for curriculum design and classroom planning. Strategies can subdivided into sequences of capacities, which constitutes the highest level of concretion of student learning expectations and, from a broader perspective, this analysis identifies the necessary capacities to move from a level of understanding to the following. These tools serve also to articulate informal and formal knowledge, establishing connections between them.

Capítulo 1. Planteamiento del problema, antecedentes y objetivos de la investigación

El trabajo de investigación que presento tiene por título "Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de la resolución de problemas aritméticos verbales en primer curso de educación primaria". El estudio se sitúa dentro del campo de investigación de la resolución de problemas, que acumula una gran cantidad de investigaciones desde distintas perspectivas (Castro, 2008). Esta tesis sigue, en la metodología de investigación y en la propuesta de intervención, un enfoque cognitivo de la enseñanza-aprendizaje, donde la resolución de problemas se utiliza como medio para desarrollar conocimientos y competencias matemáticas.

El nivel educativo elegido es el primer curso de educación primaria, curso de transición entre educación infantil y primaria, en el que los contenidos numéricos empiezan a tratarse formalmente. En concreto, el número natural y sus operaciones toman gran importancia en el aprendizaje de los niños y se introducen ideas propias del sistema de numeración, como el valor posicional de las cifras, y las operaciones aritméticas, con sus propiedades y con números cada vez mayores. Surgen aquí nuevos retos para estudiar cómo es el aprendizaje de estas ideas en este primer curso, en un momento de transición entre una etapa de educación infantil, en la que priman los conocimientos informales, y el inicio de la educación primaria, donde se comienzan a trabajar los conocimientos matemáticos de manera más formal.

En este primer capítulo pretendo justificar el interés del campo de estudio comenzando con una breve reseña sobre las tendencias de investigación en resolución de problemas dentro de la educación matemática. Continúo mostrando el marco curricular de esta tesis, donde se puede observar la importancia que ha adquirido la resolución de problemas en recomendaciones y documentos curriculares recientes, tanto en el ámbito internacional como en las legislaciones educativas en España. El interés de este trabajo se centra en la resolución de problemas aritméticos escolares verbales y su relación con el aprendizaje de la aritmética y la compresión de la decena. Por esta razón, también describo lo referente a estos contenidos en documentos curriculares a nivel internacional y nacional.

El uso de la resolución de problemas en el aula para el aprendizaje de la aritmética plantea ciertas dificultades que dan motivo a la investigación de este trabajo. Por esta razón, mostraré la problemática existente en el rendimiento académico de los estudiantes en la resolución de problemas aritméticos. En el tercer apartado, voy a plantear el enfoque adoptado en este trabajo sobre la enseñanza del número y la aritmética en relación con la resolución de problemas. Por último, en el cuarto punto voy a describir las revisiones más importantes sobre el aprendizaje y la enseñanza de la aritmética y el valor posicional en el sistema de numeración decimal a través de la resolución de problemas aritméticos verbales.

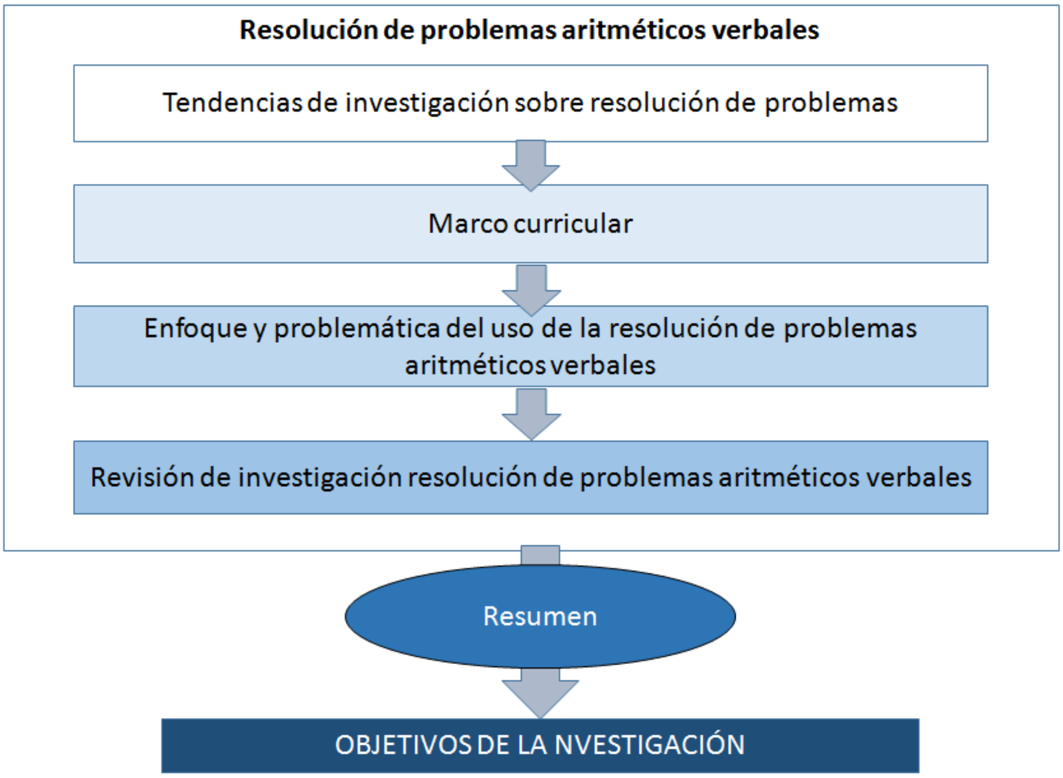


Figura 1.1. Diagrama del planteamiento del problema y objetivos del trabajo de investigación

Tras enmarcar la motivación de mi trabajo, partiendo de la problemática planteada y las investigaciones previas sobre el aprendizaje del número y la aritmética a través de la resolución de problemas, plantearé los objetivos de este trabajo. Finalmente, describiré la estructura y el plan de trabajo.

1. Tendencias en la resolución de problemas en educación matemática

A lo largo de este apartado voy a realizar una breve revisión de las tendencias de investigación sobre resolución de problemas en educación matemática. El término “problema” y la expresión “resolución de problemas” reciben multitud de significados según el área de conocimiento, e incluso según el enfoque (Castro, 2008; Santos-Trigo, 2007). Castro (2008) indica que la resolución de problemas forma parte de la actividad científica y por ello, desde cada disciplina existe una aproximación diferente a la noción de problema y su resolución. Así, Schoenfeld (1992) sugiere que en todo trabajo de investigación sobre resolución de problemas se debería especificar el significado de estos términos.

Puig (1996), tras un análisis del término problema en la antigua Grecia, concluye con la definición de problema de matemáticas:

> … en los problemas de matemáticas hay que hacer algo con los objetos matemáticos que aparecen en ellos, una construcción con figuras, un cálculo con números, etc., y que el procedimiento con que ese algo finalmente se obtenga ha de probarse mediante una argumentación, cuyas reglas están establecidas por un marco discursivo determinado, propio de una práctica matemática concreta (Puig, 1996, p. 26).

Esta definición se centra solo en la tarea, pero en la educación matemática intervienen las tareas, los alumnos y el profesor. Así, desde un enfoque más sociológico, Puig (1996) define un problema de matemáticas de la escuela como “una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que éste desea abordar, y para la cual no ha producido sentido (p. 28)”. Este autor entiende por proceso de resolución de un problema “la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (Puig, 1996, p. 31).

Dentro de la actividad matemática en el aula, parece importante diferenciar lo que es un problema de un ejercicio. Schoenfeld (1985) realiza esta distinción con las siguientes palabras:

> Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace la tarea un problema para esa persona. La palabra problema se usa aquí en su sentido relativo, como una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Más aún, esa dificultad ha de ser un atolladero intelectual más que de cálculo […] Por enunciar las cosas más formalmente, si uno tiene acceso a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema (p. 74).

Puig (1996) afirma que la resolución de problemas se introduce en el ámbito educativo, no como meros ejercicios del conocimiento recién adquirido, sino como su transferencia a situaciones no familiares. En este sentido, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) indica que “la resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano” (NCTM, 2003, p. 55).

La resolución de problemas matemáticos se ha abordado desde áreas como la psicología. Castro (2002) recoge algunas definiciones procedentes del ámbito de la Psicología, que pueden ser de interés para la educación matemática. Por ejemplo, se define problema como “una situación en la cual se intenta alcanzar una meta y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo, porque el camino directo está bloqueado (Castro, 2002, p. 17). Un punto de vista en el que se ven involucrados el problema y el resolutor es la teoría del procesamiento de la información donde destacan los trabajos de Newell y Simon (1972). Se trata de una teoría en la que el ser humano se considera un sistema de procesamiento, que recibe una información, la procesa, y pasando por varios estados intermedios en los que aplica operadores, devuelve la respuesta (Castro, Rico y Castro, 1988, Castro, 2001).

Coincidiendo con el comienzo en la investigación de la educación matemática y tras trabajos pioneros como los de Polya, aparece la concepción de la resolución de problemas entendida como un proceso que se desarrolla a lo largo de varias etapas (Puig, 1996; Castro, 2008). Polya (1957) mantiene que se puede ayudar a los alumnos a resolver problemas mediante preguntas y sugerencias, agrupadas en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y realizar una revisión de la solución obtenida. Desde enfoques diferentes, el desglose en etapas de la resolución de problemas ha estado presente en la investigación y educación. Castro (1991)[1] recoge una revisión de varios modelos de fases para la resolución de un problema desde principios del siglo XX.

Santos-Trigo (2008) explica la resolución de problemas relacionando las perspectivas cognitiva social y situada. Este autor considera la resolución de problemas como una forma de pensamiento en la que los estudiantes, en una comunidad de aprendizaje, “desarrollan y muestran hábitos, valores, recursos, estrategias, y una disposición conforme a la práctica

[1] Puede consultar en Castro (1991, p. 39)

matemática con el fin de comprender ideas y conceptos matemáticos y explorar y resolver tareas matemáticas o situaciones" (Santos-Trigo, 2007, p. 534). Para ello, toma la resolución de problemas como "como una actividad que implica la participación de los estudiantes en una variedad de acciones cognitivas incluyendo el acceso y uso de los conocimientos previos y experiencia" (p. 525), para generar nuevos conocimientos. Por lo tanto, plantear preguntas, buscar diferentes maneras de representar y analizar las relaciones matemáticas, presentar argumentos, comunicar resultados, incluso conectar y extender conocimientos son las actividades esenciales y necesarias de la resolución de problemas. El estudiante desarrolla estrategias y herramientas que le permiten superar las dificultades iniciales y fortalecer sus formas de pensar sobre su propio aprendizaje y la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2008).

Santos-Trigo (2007) afirma:

> Yo sostengo que un principio general que caracteriza a cualquier enfoque de resolución de problemas para construir o aprender matemáticas es que los investigadores, profesores y estudiantes conceptualicen la disciplina como un conjunto de problemas o dilemas que deben ser examinados y resueltos a través de la utilización de recursos matemáticos (p. 526).

Así, la resolución de problemas es una tarea de investigación para los estudiantes a los que se les debe animar a plantear preguntas, formular, buscar pruebas, presentar información y comunicarla dentro de una comunidad que valora la colaboración y reflexión.

Una de las perspectivas más actuales es la de que los problemas implican un proceso de modelización matemática del mundo real, en la que los resolutores expresan, prueban y revisan interpretaciones matemáticas de una situación en varios ciclos iterativos (Lesh y Zawojewski, 2007). Estos autores indican que una tarea en un problema para una persona cuando ésta necesita desarrollar una forma productiva de pensamiento que conlleva emplear un proceso de interpretación de la situación, que en matemáticas significa modelizar, lo que implica varios ciclos iterativos de expresar, probar y revisar interpretaciones matemáticas, descartando, integrando, modificando y refinando conceptos matemáticos implicados dentro y más allá de las matemáticas (Lesh y Zawojewski, 2007). Desde esta perspectiva, Lesh y Zawojewski (2007) entienden que las personas aprenden matemáticas a través de la resolución de problemas creando modelos matemáticos.

Como se puede ver, la definición de resolución de problemas ha ido variando según enfoques y perspectivas. Desde un perspectiva cognitiva y social, en mi trabajo la resolución de problemas se considera una actividad para desarrollar nuevos conocimientos, muy próxima a la definición de Santos-Trigo (2008). A continuación, voy a hacer una breve revisión de las tendencias de investigación dentro de la educación matemática sobre resolución de problemas que soportan las definiciones anteriormente expuestas.

La investigación sobre resolución de problemas en educación matemática es muy amplia y resulta difícil abarcar todo el tratamiento que se ha dado a este tema. Publicaciones como la revista *The International Journal on Mathematics Education* (ZDM) en su volumen 39 (números 5-6) en el 2007 con el monográfico titulado *Problem Solving Around the World: Summing Up the State of the Art*, en el que autores de distintos países aportan las líneas de investigación en resolución de problemas en su país, así como su tratamiento e incorporación en los currículos, ponen de manifiesto la gran variedad de temas tratados. En el XII Simposio de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Castro, 2008; Puig, 2008; Santos-Trigo, 2008) se dedicó un seminario a la investigación sobre la resolución de problemas. Santos-Trigo, Castro y Puig presentaron su visión del estado de la investigación de la resolución de problemas y su incorporación a la práctica educativa, trabajos a los que voy a hacer referencia en el transcurso de este trabajo. Un monográfico más reciente sobre resolución de problemas es *The Mathematics Enthusiast*[2] que permite consultar líneas de investigación más actuales. Con ayuda de revisiones como las mencionadas, se puede construir un esquema general aproximado de las tendencias de investigación, objetivo que pretendo en este apartado.

Desde la década de 1960 hasta la actualidad la investigación sobre resolución de problemas ha variado, desde los temas que trataba hasta la metodología utilizada (Santos-Trigo, 2007 y 2008; Schoenfeld, 2007; Verschaffel, Greer y De Corte, 2007; Lesh y Zawojewski, 2007). Algunos de los temas mencionados son los siguientes: aislamiento de determinantes clave de la dificultad de los problemas, esquemas de resolución de problemas, identificación de características de buenos solucionadores de problemas, identificación de estrategias, entrenamiento en heurísticos y estrategias, comparación de éxito y fracaso en buenos frente a malos solucionadores, metacognición, interacciones sociales, resolución de problemas en contexto, invención de problemas, evaluación de la resolución de problemas, representación, afectos y creencias, tecnología y modelización, la función ejecutiva y su papel en la resolución de problemas (Castro, 2008; Schoenfeld, 2007). A continuación haré una breve revisión de las metodologías de los temas tratados.

1.1. Aspectos metodológicos de las investigaciones sobre resolución de problemas

Metodológicamente, en la década de 1970 y principios de la década de 1980, la mayoría de las investigaciones en educación matemática eran estudios estadísticos, centrados en la instrucción del profesor, donde se utilizaban estudios cuantitativos basados en cálculos de correlación, análisis de factores o contrastes de hipótesis, con el objetivo de describir las características de los problemas y aspectos que dificultan la resolución (Schoenfeld, 2007; Santos-Trigo, 2007, Lesh y Zawojewski, 2007). En estos años, adquirieron importancia los métodos heurísticos, basados en la instrucción en resolución de problemas, y aparecieron estudios sobre variables que afectaban la resolución de problemas como el contenido, contexto, estructura, sintaxis, utilizando cuestionarios como instrumentos de recogida de datos (Santos-Trigo, 2007).

En la segunda mitad de la década de 1980, hasta finales del siglo XX, los métodos se tornaron más cualitativos, utilizando entrevistas y estudios de casos, con la enseñanza más centrada en los estudiantes, trabajando con pequeños grupos de discusión, prestando atención a los conocimientos previos de los estudiantes, y con la aparición de las comunidades de aprendizaje (Santos-Trigo, 2007).

A finales de la década de 1990 y ya en el siglo XXI, las metodologías de investigación basadas en experimentos de diseño e ingeniería didáctica, se utilizan en una gran número de estudios centrándose en la creación y exploración de las características de la enseñanza y las teorías que las sustentan (Schoenfeld, 2007; Santos-Trigo, 2007). Estos experimentos de diseño tienen como objetivo la comprensión conceptual de algún contenido por medio de una forma nueva de enseñanza, ya sea desde un nuevo enfoque del contenido o pedagogía, o ambas (Schoenfeld, 2007). Los métodos son cualitativos y toman importancia enfoques antropológicos y etnográficos, indagando en pequeños grupos de discusión y comunidades de aprendizaje, con la influencia del aprendizaje social y la resolución de problemas situada (Schoenfeld, 2007; Santos-Trigo, 2007).

[2] *The Mathematics Enthusiast* (2013), volumen 10, números 1 y 2, del Dept. of Mathematical Sciences-The University of Montana.

1.2. Temas tratados en las investigaciones sobre resolución de problemas

Respecto a la temática, presento a continuación una breve descripción de las tendencias más importantes recogidas en las revisiones sobre investigación en resolución de problemas. A principios del siglo XX, el filósofo Dewey reflexiona sobre cómo pensamos las personas cuando resolvemos problemas, y postula que este pensamiento puede ser enseñado y aprendido (Castro, 2002). Partiendo del modelo de Dewey, en el que se describen etapas del pensamiento en la resolución de problemas, los primeros trabajos de Polya estudian el empleo de estrategias heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, proponiendo una colección de indicaciones, preguntas y sugerencias para ayudar a los estudiantes en su resolución. Estas indicaciones se agrupan en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida (Polya, 1957). Estos estudios se centran en correlaciones entre los usos de diferentes estrategias de resolución y el éxito de la solución, buscando la caracterización de los procesos de resolución de problemas y su impacto en el éxito de la resolución, proponiendo un modelo heurístico para resolver problemas de matemáticas con enunciado verbal en el contexto escolar (Schoenfeld, 2007, Santos-Trigo, 2007).

La heurística se encuentra presente en España desde principios del siglo XX en los trabajos de la Institución Libre de Enseñanza, la obra de Puig Adam y la serie de libros de Rey Pastor (Puig, 2008). Castro (2008) afirma que los modelos de Dewey y Polya pudieron influenciar en las propuestas curriculares a partir de la década de 1980 en España, al comenzar a incluir la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Así, décadas más tarde, el Grupo Cero utiliza la resolución de problemas como método de enseñanza, y propone un diseño curricular con el centro de interés en las estrategias de resolución de problemas utilizando herramientas heurísticas.

Autores como Puig y Cerdán plantearon la resolución de problemas con estilo heurístico para producir aprendizaje significativo y dotar de sentido a conceptos, objetos, hechos y técnicas estableciendo relaciones entre ellos. Más tarde, Puig describe un modelo de competencia en resolución de problemas siguiendo ese estilo heurístico y analiza estructuras de varias herramientas heurísticas indicando cómo hacer ese análisis y las actuaciones de los alumnos al aprenderlas (Puig, 2008).

En la década de 1980 se produjo un cambio de enfoque hacia perspectivas más cognitivas del aprendizaje, en la línea que Castro (2008) relaciona con el pensamiento, cómo pensamos cuando resolvemos problemas (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Lesh y Zawojewski (2007) identifican estos trabajos con investigaciones de pensamiento de *nivel superior*[3] en los que incluyen la metacognición, creencias y disposiciones. Se comienza a indagar sobre el pensamiento matemático, cómo desarrollar formas de razonamientos consistentes con evolución del pensamiento matemático, las diferencias entre estudiantes novatos y expertos al resolver problemas, metacognición, afectividad y creencias que afectan a la resolución de problemas y cómo desarrollar conceptos a través de la resolución de problemas en contextos (Santos-Trigo, 2007; Schoenfeld, 2007).

Schoenfeld (1985) inicialmente documenta aspectos relacionados con el empleo de estrategias heurísticas, indaga sobre la naturaleza del pensamiento matemático, las creencias de los estudiantes y la relevancia de las estrategias cognitivas en la resolución de problemas. Schoenfeld (1992) estudia la influencia de la metacognición, especialmente de la supervisión

[3] Traducción de *higher order* en Lesh y Zawojewski (2007).

y la autorregulación, y los sistemas de creencias en la configuración de las conductas de los estudiantes al resolver un problema, concluyendo que el papel de las experiencias de las personas con las matemáticas, tanto dentro como fuera del aula, eran determinantes en las creencias de la gente y sus prácticas cuando se dedican a la resolución de problemas. Schoenfeld (1992) concluyó que el modelo heurístico no resultaba exitoso por el uso de grandes listas de heurísticas a las que los alumnos no llegaban a acceder, recomendando desarrollar estrategias para problemas específicos y vincularlas a clases de problemas. En España, también existen trabajos que se apartan del modelo heurístico de Polya, como el de Puig Adam (1985), que consideraba que la heurística no podía generalizarse. Más tarde, Schoenfeld (2007) explica que aquellas teorías basadas en la enseñanza de heurísticas aportaba lo que había que tener en cuenta cuando las personas resuelven problemas y proporcionaba explicaciones de éxito y fracaso, y la caracterización de la resolución de problemas, pero quedaba elaborar cómo se lleva a la práctica.

En esta misma década, hubo un gran número de investigaciones sobre la resolución de problemas aritméticos escolares verbales (PAEV), estableciendo categorías semánticas, estudiando la dificultad y las estrategias utilizadas por los niños según estas categorías y dependiendo del lugar que ocupase la incógnita del problema (Castro, 2008). La clasificación de los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva fue objeto de estudio de muchas investigaciones y se llegó a mayor consenso en su clasificación que en la de los problemas de estructura multiplicativa (Puig y Cerdán, 1988; Castro, 2008). Destaco, por su relevancia en esta tesis, el grupo de investigaciones que estudian el pensamiento matemático de los niños al resolver problemas aritméticos verbales recogidas en Carpenter, Moser, y Romberg (1982) y Carpenter y Moser (1984). La comprensión del problema y la relación con la representación que se hace para resolverlo también son objeto de estudio en estos años (Vergnaud, 1982; Hiebert y Carpenter, 1992). En España, se realizan estudios partiendo de este marco teórico, como las investigaciones que se realizan sobre problemas aritméticos verbales escolares, ejemplo de los cuales es la realizada por Ayala, Galve, Mozas y Trallero (1997), Bermejo y Lago (1988), Bermejo, Lago y Rodríguez (1994 y 1998), Bermejo y Rodríguez (1987a, 1987b, 1990 y 1992), Caballero (2005), Castro (1991, 1995), Castro, Batanero, Rico y Castro (1991), Castro, Rico y Gil (1992), Díaz (2005), Díaz y Bermejo (2007), Dopico (2001), Lago, Rodríguez y Caballero (1999), Lago, Rodríguez, Zamora y Madroño (1999), Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano (2001), Lago, Rodríguez, Enesco, Jiménez y Dopico (2008), López de los Mozos (2001), Puig y Cerdán (1988), Puig (1996), Rodríguez y Bermejo (1987); Rodríguez, Lago, Caballero, Dopico, Jiménez y Solbes (2008). En el primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) en 1997, se realizó un seminario sobre problemas aritméticos verbales, donde se presentaron trabajos con problemas aditivos con números negativos (Socas, Hernández y Noda, 1997), problemas de dos etapas (Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia, González, Morcillo, Fernández, 1997) y sobre la comprensión (González Marí, 1997).

La invención de problemas sigue apareciendo en diversos trabajos como (Tortosa y Castro, 1997; Ayllón, Castro y Molina, 2010; Ayllón, 2012; Cázares, 2000 y 2007), donde se reformulan los problemas durante la resolución, pueden incorporarse en las tareas escolares como parte de la metodología de resolución de problemas como para descubrir aspectos cognitivos de los estudiantes (Castro, 2008). Castro (2008) propone seguir trabajando en esta línea con alumnos con talento con atención diversificada, completar el trabajo con los problemas verbales de estructura multiplicativa y de varias etapas, el uso de nuevas tecnologías como potencial representacional, y las actitudes de los solucionadores hacia la resolución de problemas.

La investigación en resolución de problemas en la década de 1980 tuvo un gran auge hasta que, a mediados de la década de 1990, experimentó un descenso (Puig, 2008; Schoenfeld, 2007; Santos-Trigo, 2008). Lesh y Zawojewski (2007) indican que la falta de impacto de la investigación en resolución de problemas en la práctica educativa pudo ser motivo de este descenso en la investigación. Schoenfeld (1992, 2007) lo relaciona con la consideración cíclica de la resolución de problemas en el currículo de EEUU, que varía cada 10 años, tendiendo unas veces a destrezas básicas y otras a resolución de problemas. Castro (2004 y 2008) indica que en la década 1990 cae el interés por la investigación de la clasificación semántica de los problemas aritméticos verbales, surgiendo nuevos focos de investigación como los problemas compuestos (Nesher, 1991; Castro, Rico, Castro y Gutiérrez, 1994; Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia, González, Morcillo, Fernández, 1997; Castro y Frías, 2013), la invención de problemas (Tortosa y Castro, 1997; Ayllón, 2012), y problemas de paso de la aritmética al álgebra (Carpenter, Franke, y Levi, 2003; Molina, 2006).

Desde principios de la década de 1990, la investigación en educación matemática ha pasado de estudios de un enfoque cognitivo en el que se analizaba el pensamiento matemático de los niños individualmente, así como las variables que influían en los procesos de aprendizaje que permiten diagnosticar dificultades, a un enfoque más socio-constructivista donde se estudia cómo aprenden y piensan los niños las matemáticas en un contexto social y cultural complejo, con un objetivo más práctico para el profesor como diseñar, implementar y evaluar innovaciones curriculares, instrumentos o actividades (Verschaffel y otros, 2007, p. 593).

Se utiliza una nueva perspectiva de la construcción del conocimiento situada/pragmática-sociohistórica (Verschaffel et al., 2007) que surge de la etnografía, la psicología ecológica y la teoría de situaciones, que incluyen en los procesos de pensamiento y aprendizaje variables sociales y culturales que afectan a cómo los niños piensan. Se estudia el razonamiento matemático, la construcción de relaciones y los marcos que los sustentan, además de proponer cambios curriculares para introducir las nuevas tecnologías en la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2007). Aparecen investigaciones en las que se crean ambientes de aprendizaje productivos, que permiten avances conceptuales y metodológicos, donde los investigadores desarrollan herramientas y técnicas para la caracterización de los mecanismos por los cuales los individuos se desarrollan e interactúan con su medio ambiente, ya sea dentro o fuera del aula (Schoenfeld, 2007). Las características comunes de estos ambientes son que se debe animar a los estudiantes a asumir los problemas, teniendo cierta responsabilidad ante los demás y la disposición de recursos suficientes para hacer resolver los problemas (Lesh y Zawojewski, 2007, Schoenfeld, 2007).

Lesh y Zawojewski (2007) identifican tres líneas de investigación en los últimos años referentes a la resolución de problemas en educación matemática. La primera es la *cognición situada* que se refiere al aprendizaje y resolución de problemas en contexto, donde se apoya que las personas que resuelven problemas en un contexto local puedan desarrollar estructuras conceptuales para otras situaciones problemáticas. Otras línea es la investigación en *comunidades de prácticas*, que surgen desde la perspectiva social mencionada, y por último las investigación en *fluidez representacional* (Lesh y Zawojewski, 2007). Estos autores ponen de manifiesto que en los cambios tecnológicos continuos de nuestra sociedad requieren adaptar la forma de aprender y enseñar matemáticas, planteando una nueva perspectiva basadas en modelos y modelización. Lesh y Zawojewski (2007) distinguen dos usos de la resolución de problemas en la práctica educativa: un *enfoque tradicional*, en el que primero se ayuda a los estudiantes a ser dominadores de ideas y destrezas descontextualizadas; practicando, en un segundo momento, con problemas verbales de aplicación directa de lo recién aprendido; siguiendo con resolución de problemas con apoyo heurístico; y finalmente, si el tiempo lo permite, planteamiento de situaciones de la vida real para aprender a usar las ideas, destrezas y heurísticos recién aprendidos. El otro *enfoque de modelos y modelización*, el aprendizaje de las matemáticas se consigue a través de la resolución de problemas de la vida real, donde los alumnos tienen que crear, revisar y adaptar modelos matemáticos, dando un significado propio al problema, ganando comprensión durante este proceso de *matematización*.

El enfoque de la Educación Matemática Realista (RME) tienes sus raíces en la idea de Freudenthal de que las matemáticas deben ser un *valor humano*, tener relación con la realidad y estar cercanas a todos, por lo que se deben utilizar situaciones reales o problemas contextualizados para desarrollar conceptos y herramientas matemáticas, que tengan sentido en la vida diaria (Van de Heuvel-Panhuizen, 2003). Desde este enfoque, se pretende plantear problemas realistas en el sentido que los alumnos puedan imaginar y entender la situación. Las Matemáticas no son en sí solo contenidos matemáticos, sino la actividad de resolver problemas realistas, lo que denominan *matematización*. Como veremos más avanzado el capítulo, este proceso de *matematización* se divide en dos partes y va influir en el diseño de elaboración de pruebas que evalúan la competencia matemática (OCDE, 2005). En España hay trabajos como el de Jiménez (2008) que estudian el “conocimiento real” al resolver problemas no-rutinarios de adición.

Otra de las direcciones de futuro en la resolución de problemas es el uso de las TIC (Castro, 2008; Puig, 2008; Santos-Trigo. 2008), un buen ejemplo son los trabajos realizados por Arnau y Puig que estudian las actuaciones de los estudiantes al resolver problemas verbales con herramientas con Excel o sistemas tutoriales inteligentes (Arnau, 2010; Arnau y Puig, 2005 y 2013; González-Calero, Arnau y Puig, 2013; González-Calero, Arnau, Puig y Arevalillo-Herráez, 2014; González-Calero, 2014).

Otro campo de investigación en resolución de problemas es cómo se lleva a la práctica el aprendizaje basado en resolución de problemas, cómo se organiza y se estructura el contenido, y qué actividades se deben plantear en el aula. Puig (2008) opina que los “puentes están rotos entre el trabajo de investigación que se hace y quienes elaboran las directrices curriculares, que se rigen por una lógica distinta (p. 2)”. Este autor afirma que los resultados de investigación en resolución de problemas no terminan de reflejarse en el currículo, existe una falta de relación entre la investigación y el diseño y desarrollo curricular, lo que provoca que no se dé la aplicación en el aula. La inclusión en el currículo de la resolución de problemas no es fácil y hay que estudiar cuáles son las condiciones que debe cumplir la resolución de problemas como método de enseñanza. Además, al tratar la resolución de problemas como contenido, pone “énfasis en el problema de la institucionalización de los aprendizajes de los contenidos de la heurística, que necesitan ser tratados de forma específica en situaciones o secuencias de enseñanza dedicadas en concreto a ello, para que puedan ser institucionalizados” (Puig, 2008, p. 6).

Este tema también apareció en el número monográfico de la revista ZDM mencionado anteriormente. Comento, a continuación, algunas de las conclusiones. Arcavi y Friedlander (2007) proponen una línea de investigación enfocada a observar y documentar de manera exhaustiva cómo puede fomentarse la enseñanza basada en resolución de problemas en el aula, y a diseñar e implementar un currículo teniendo como eje central la resolución de problemas. Santos-Trigo (2007, 2008) también propone investigar sobre cómo estructurar y organizar los contenidos del currículo basados en resolución de problemas:

> El reconocimiento de que pueden existir varios caminos para organizar una propuesta del currículo que promueva la resolución de problemas implica la necesidad de explicitar cómo los principios de esta perspectiva se distinguen en la organización y estructura de contenidos. Por

> ejemplo, si en la resolución de problemas interesa que los estudiantes identifiquen, representen, exploren y justifiquen diversas conjeturas asociadas con la comprensión de los conceptos matemáticos, entonces resulta esencial que el currículum se organice alrededor de las ideas o conceptos fundamentales que se deben estudiar de manera profunda en los distintos niveles educativos. Es decir, es necesario transformar las listas extensas de temas o contenidos que aparecían en las propuestas tradicionales del currículo en un conjunto de temas relevantes donde se muestre su desarrollo y las formas de conectarse en diversos dominios que antes se estudiaban de manera independiente como el álgebra, la geometría, la estadística, el cálculo y probabilidad (Santos-Trigo, 2008, p. 17).

En un análisis del currículo de México, Santos-Trigo (2007) encuentra que las propuestas de los planes de estudio oficiales para los grados PK-6 y 7-9 reconocen la importancia de la resolución de problemas en las actividades de aprendizaje de los estudiantes de matemáticas, pero no muestran claramente la importancia de los procesos que deben seguir los estudiantes para conjeturar y buscar argumentos. También realiza un análisis de dos libros de texto, dado que los profesores se ayudan de éstos para organizar sus clases, y encuentra que la estructura de los libros de texto tampoco favorece la resolución de problemas, ya que marcan las preguntas a hacer, en vez de dejar a los niños que formulen sus propias preguntas. Cada contenido que se incluye lleva aparejadas una serie de preguntas relacionadas con ese contenido y parece independiente de las demás lecciones, por lo que no da cabida a la reflexión e integración de los contenidos previos. De hecho no se ven reflejados procesos como conjeturar, argumentar o comunicar. A la revisión curricular para estructurar los contenidos desde el enfoque de resolución de problemas, también hay que añadirle la revisión de los libros de texto (Santos-Trigo, 2007). Este autor afirma que "es importante proponer un currículo en términos de secuencias de problemas donde se reflejen los aspectos inherentes que transforman las asignaturas tradicionales en líneas de pensamiento numérico, algebraico, geométrico y estadístico (Santos-Trigo, 2008, p. 21)". Además, concluye que la evaluación no sólo depende del trabajo individual, sino de la escucha a los demás y la exposición de las propias ideas en el aula.

Hino (2007) recomienda una estructuración de las clases de matemáticas con las siguientes fases o actividades: Revisar la lección previa y planteamiento preliminar del problema del día; trabajo individual y la presentación de ideas al grupo; presentación del problema del día, trabajo individual y su presentación a la clase; comparación de estrategias de resolución, analizando ventajas y limitaciones; y finalmente, reflexiones sobre la sesión. Cai y Nie (2007) proponen la inclusión de distintos tipos de problemas como los problemas abiertos, que poseen múltiples soluciones, u otros tipos de actividades donde se resuelven variaciones del problema inicial, o se guía a los estudiantes a usar un método para resolver varios problemas. Da Ponte (2007) recomienda incluir actividades que él llama "exploraciones matemáticas", que son realmente investigaciones realizadas en el aula, en las que los estudiantes desarrollan aspectos de la actividad matemáticas como la formulación de preguntas, la búsqueda y la justificación de conjeturas (Da Ponte, 2007). Incluir las exploraciones utilizando las nuevas tecnologías puede dar soporte al desarrollo del conocimiento y es una línea de investigación todavía abierta. Santos-Trigo (2007 y 2008) propone también en esta línea el trabajo con herramientas computacionales para el trabajo de resolución de problemas.

Una vez sintetizadas las tendencias actuales en la resolución de problemas, voy a describir cómo aparece la resolución en documentos curriculares importantes a nivel internacional. En este trabajo, el centro de interés está en la resolución de problemas aritméticos verbales, por lo que también describiré estos contenido en el currículo.

2. Marco curricular: la importancia de la resolución de problemas en los documentos curriculares de matemáticas

La resolución de problemas ha ido creciendo en importancia en propuestas curriculares en el ámbito internacional como práctica fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, ya que se relaciona con el aprendizaje y la construcción del conocimiento matemático (Castro, 2008; Santos-Trigo, 2007 y 2008). Situamos como referencia inicial el informe Cockcroft (1985), de la *Association of Teachers of Mathematics* (ATM) inglesa, que establece la habilidad de resolver problemas como núcleo central de las matemáticas. Otras asociaciones, como el *National Council of Teachers of Mathematics* (en adelante, NCTM) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) han promovido la inclusión la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Estas instituciones han podido influir en el desarrollo curricular en muchos países, ya que muestran un esfuerzo por identificar la resolución de problemas como eje principal de la educación matemática (Castro, 2008; Puig, 2008; Santos-Trigo, 2007 y 2008; y Schoenfeld, 2007).

La intención en este apartado es recopilar las recomendaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en documentos internacionales, que sirven de marco curricular de referencia a este trabajo, e identifican la resolución de problemas como uno de los procesos principales en el aprendizaje de las matemáticas y una de las capacidades de la competencia matemática.

Distintas entidades como el NCTM, el *National Research Council* (NRC) y la *National Association for the Education of Young Children* (NAEYC), en Estados Unidos, o la OCDE, en Europa, publican documentos con recomendaciones, que sirven de base para toda la comunidad implicada en el área. En este trabajo parto de las recomendaciones que se plantean desde el NCTM, que, como voy a comentar más avanzado el capítulo, realizó publicaciones para orientar importantes mejoras en la educación matemáticas (NCTM, 1980, 1989 y 2000). Las recomendaciones realizadas por el NCTM (2000) en la publicación *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2003, traducido por la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas), y en los *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006) y otras publicaciones realizadas en colaboración con otras entidades, que están en la misma línea de los estándares del NCTM, como *Common Core State Standars for Mathematics* (en adelante CCSSM) publicados en 2010 por *National Governors Association* (NGA) y el *Council of Chief State School Officers* (CCSSO), han influido en la investigación y diseño curricular en el ámbito internacional (Schoenfeld, 2007, Santos-Trigo, 2007; Castro, 2008; Puig, 2008). También relaciono las características más relevantes que proponen entidades como el *National Research Council* (NRC). El NRC ha realizado varias publicaciones, como por ejemplo, *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (NRC, 2001) y *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity* (NRC, 2009) que recogen recomendaciones de investigación en educación matemática hasta educación secundaria. Centrándome ya en las primeras edades, la declaración conjunta que han realizado el NCTM y NAEYC sobre la educación matemática en las primeras edades (NAEYC y NCTM, 2013) pone de manifiesto características importantes de la enseñanza y aprendizaje en estas primeras edades. En este documento, al igual en la publicación del NRC (2009) recién mencionada, aparecen como propuestas de investigaciones en educación matemática las basadas en el constructo Trayectorias de Aprendizaje que sostendrá el diseño del instrumento utilizado en esta investigación (Simon, 1995, Clements y Sarama, 2004 y 2009; Gómez, 2007; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

En Europa, la OCDE publica los Informes PISA de 2003 y 2012 (OCDE, 2005; OCDE, 2013) que toman la competencia matemática como área central de evaluación. Las características propuestas por la OCDE (2005 y 2013) sobre el aprendizaje de las matemáticas influyen en las directrices curriculares de muchos países (Rico y Lupiáñez, 2008). La competencia matemática según la OCDE tiene similitudes con los *Estándares de Procesos* del NCTM como expondré más adelante.

Los últimos currículos en España también son referencia imprescindible para este trabajo. El término competencia matemática ha ido tomando importancia en el currículo español, influenciado por los documentos anteriormente mencionados (Rico y Lupiáñez, 2008). Estos autores afirman que optar por un marco basado en competencias implica dar sentido a los aprendizajes, se contempla al alumno como constructor de sus aprendizajes, no basta con la transmisión de saberes. En el currículo vigente (MEC, 2014a y 2014b) se añade un bloque de contenidos, que introduce la resolución de problemas, dentro de los procesos matemáticos, como eje transversal a los cuatro bloques de contenido ya existentes en el currículo anterior (MEC, 2007), en línea con las propuestas citadas del NCTM y de la OCDE. En la Figura 1.2, sintetizo las aportaciones de documentos institucionales citados en los párrafos anteriores.

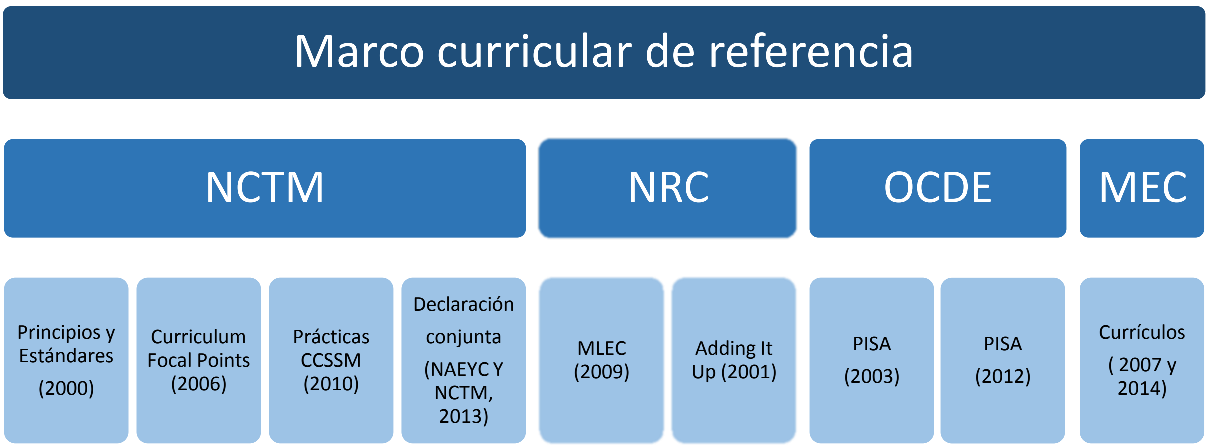


Figura 1.2. Documentos e instituciones para el marco curricular de referencia

A continuación voy a abordar una revisión detallada de las aportaciones de estos documentos institucionales, de gran influencia curricular, reseñando sus aportaciones en lo concerniente a la resolución de problemas. Destacaré, en cada punto, las ideas que se pueden extraer de estos documentos de cara a la elaboración de este trabajo. También incluiré lo concerniente al contenido matemático del número y operaciones, por formar parte de marco curricular de mi tesis.

2.1. El NCTM

Voy a comenzar con las propuestas realizadas desde el NCTM para la educación matemática. El NCTM (1980) incluye la resolución de problemas, en el documento *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*, cuando el desarrollo de la investigación entonces no era suficiente para apoyar su puesta en práctica y el cambio de metodología provocaba una resistencia al cambio de los profesores. Además, las editoriales se resistían a una modificación costosa de los libros de texto (Schoenfeld, 2007). El NCTM (1980) realiza recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas entre las que se planteaba que (a) los planes de estudios de matemáticas deben organizarse en torno a la resolución de problemas; (b) la definición y el lenguaje de la resolución de problemas en matemáticas deben desarrollarse y ampliarse para incluir una amplia gama de estrategias, procesos y modos de presentación, que abarquen todo el potencial de las aplicaciones matemáticas; (c) los maestros de matemáticas deben crear ambientes en clase propicios para la resolución de problemas; (d) se deben desarrollar materiales curriculares apropiados para enseñar la resolución de problemas en todos los grados; (e) los programas de matemáticas deben involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas, y (f) los investigadores y los organismos de financiación deben dar prioridad a las investigaciones sobre la naturaleza de la resolución de problemas y para el desarrollo de formas efectivas de resolver problemas (NCTM, 1980). En todas estas recomendaciones se ve implicada la resolución de problemas, ya sea como contenido a enseñar, o como herramienta indispensable para organizar y desarrollar los contenidos matemáticos.

Con la ayuda de *National Science Foundation* (NSF), que entre 1989 y 1991 respaldó una serie de propuestas para desarrollar el currículo alineadas con las normas del NCTM, la resolución de problemas empezó a incorporarse en la educación matemática de los EEUU. En concreto, el NCTM (1989) incluía en sus recomendaciones cuatro estándares básicos para la enseñanza de las matemáticas: la resolución de problemas, la comunicación, el razonamiento y conexiones matemáticas, que habían sido objetivo de la investigación durante la década de los 80. Entre los objetivos deseables para los estudiantes estaba que se convirtieran en solucionadores de problemas matemáticos, que aprendiesen a comunicarse matemáticamente y a razonar matemáticamente, añadiendo que los estudiantes debían ser expuestos a experiencias que les permitiesen comprender y valorar el papel de las matemáticas en la vida real (Schoenfeld 2007).

Para actualizarse con los avances en investigación de la década de los 90, y las experiencias recogidas desde los anteriores estándares de 1989, el NCTM publicó en el año 2000 los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, como recurso y guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática, tanto desde una perspectiva curricular, como para reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares (NCTM, 2003). El NCTM pretende con este trabajo exponer los objetivos de forma coherente para orientar los currículos, la enseñanza y la evaluación de las matemáticas, proponer un recurso para analizar y mejorar la calidad de los programas de matemáticas, guiar el desarrollo curricular, las evaluaciones y los materiales utilizados en la educación, y estimular las ideas y el debate sobre cómo ayudar a los alumnos a mejorar la comprensión de las matemáticas desde todas las instituciones y responsables de educación matemática (NCTM, 2003). Este ha sido uno de los documentos más influyentes en el contexto internacional de la educación matemática (Castro, 2008; Puig, 2008; Santos-Trigo, 2007; y Schoenfeld, 2007, 2008).

Schoenfeld relata que no todos los Estados en EEUU incorporaron los Estándares del NCTM (2000). Cuando las primeras generaciones de estudiantes de los Estados que los tenían incorporados en su currículo terminaron los estudios básicos, las evaluaciones realizadas indicaban que, cuando se ponían a prueba las destrezas, los estudiantes en los cursos basados en estos *Estándares* tenían un rendimiento más o menos igual que los que habían estudiado planes de estudios tradicionales (sin diferencias estadísticamente significativas). Sin embargo, cuando se ponían a prueba la comprensión conceptual y la resolución de problemas, los estudiantes de cursos basados en *Estándares* superaban significativamente a los estudiantes que habían estudiado planes de estudios tradicionales (Schoenfeld, 2007).

Los *Principios* son “enunciados que reflejan preceptos básicos fundamentales para una educación matemática de calidad” (NCTM, 2003, p. 11). Los *Estándares* son descripciones acerca de lo que la enseñanza de las matemáticas debería capacitar a los estudiantes para saber y hacer, describen el conocimiento matemático que los escolares de todos los niveles deben adquirir, desarrollar y usar adecuadamente al terminar su formación (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 273). Se dividen en *Estándares de Contenidos*, que describen explícitamente los contenidos que deben adquirir los estudiantes en las distintas etapas educativas, repartidos en las áreas de *Números y Operaciones*, que será el implicado en este trabajo, *Álgebra, Geometría, Medida* y *Análisis de Datos y Probabilidad*; y *Estándares de Procesos*, que describen formas de adquisición y uso de dichos contenidos que son *Resolución de Problemas*, *Razonamiento y Demostración, Conexiones, Comunicación y Representación* (NCTM, 2003, p. 31). Los diez *Estándares*, tanto *Procesos* como *Contenidos*, están relacionados, no se trabajan aisladamente y pueden ser base para diseños curriculares coherentes. Ambos, *Principios* y *Estándares*, muestran cómo hacer matemáticas en clase utilizando como base la investigación y experiencias de clase (Rico y Lupiáñez, 2008).

En la Tabla 1.1 reflejo los Principios según los define el NCTM (2003) que muestran características importantes para la enseñanza de las matemáticas.

Tabla 1.1. *Principios del NCTM (2003, p. 11)*

Igualdad	La excelencia en la educación matemática requiere igualdad: altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes.
Currículo	Un currículo es algo más que una colección de actividades: debe ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y bien articulado a través de los diferentes niveles.
Enseñanza	Una enseñanza efectiva requiere conocer lo que los alumnos saben, lo que necesitan aprender y luego estimularles y darles apoyo para que lo aprendan bien.
Aprendizaje	Los estudiantes deben aprender las matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y los conocimientos previos.
Evaluación	La evaluación debería apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil a profesores y alumnos.
Tecnología	La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y potencia el aprendizaje.

El *Principio de Igualdad* aboga por una educación matemática para todos los alumnos, independientemente de sus características, lo que supone grandes expectativas de aprendizaje para los estudiantes, siendo necesario métodos efectivos de apoyo y recursos, para poder llegar a todos ellos (NCTM, 2003). El *Principio Curricular* remarca la importancia de desarrollar un currículo centrado en ideas matemáticas importantes de forma coherente y bien articuladas a los largo de la escolaridad, que preparen a los niños para la resolución de problemas en el aula o en la vida cotidiana (NCTM, 2003, p. 15). Los contenidos matemáticos importantes que capacitan a los estudiantes para desarrollar otras ideas importantes, deben ser centro de atención del diseño curricular, como el valor posicional que es un conocimiento imprescindible para los algoritmos. El currículo debe permitir a los alumnos construir conocimientos cada vez más complejos, construyendo conocimientos más profundos según avanzan en la escuela (NCTM, 2003, p. 16).

El *Principio Curricular* afirma que el pensamiento matemático, las habilidades de razonamiento, formulación de conjeturas, desarrollar argumentos sólidos deductivos, experiencias para modelizar fenómenos del mundo real, que se realizan durante la resolución de problemas, tienen vital importancia en el currículo, como indican los *Estándares de Procesos* (NCTM, 2003).

El *Principio de Enseñanza* enfatiza que los profesores deben conocer las ideas previas de los niños, los objetivos de aprendizaje, y ser capaces de diseñar tareas para estimularles para conseguir estos objetivos (NCTM, 2003). Los profesores deben ayudar a los niños a adquirir habilidad para aplicar los conocimientos matemáticos a la resolución de problemas, y a conectar los conocimientos previos con los nuevos a la hora de resolver problemas. Este principio señala que las experiencias que proporcionan los profesores a sus alumnos marcan el aprendizaje de éstos, su comprensión de los conocimientos matemáticos, su habilidad para aplicarlos a la resolución de problemas, su confianza al hacerlo y su disposición hacia la asignatura. Los profesores deben crear un entorno que favorezca el aprendizaje "animando a los alumnos a pensar, a preguntar, a resolver problemas y a discutir sus ideas, estrategias y soluciones" (NCTM, 2003, p. 19), así los alumnos formulan conjeturas, experimentan diversos enfoques para resolver problemas, construyen argumentos matemáticos y responden a los argumentos de los compañeros. Las tareas tienen que hacer que los alumnos se sientan implicados, tareas motivadoras y desafiantes para ellos, analizando situaciones, elaborando y resolviendo problemas, dando sentido así a los conceptos y procedimientos matemáticos (NCTM, 2003, p. 20).

El *Principio de Aprendizaje* afirma que los alumnos deben construir activamente sus conocimientos, de forma significativa a través de sus experiencias, y que debe prestarse atención a la comprensión de los contenidos matemáticos. Este principio pone de manifiesto la importancia de la comprensión conceptual para poder aplicar después los nuevos conocimientos en otras situaciones no familiares (NCTM, 2003). Trabajos como el de Carpenter y Lehrer (1999), que comentaré en el Capítulo 2, muestran la importancia del aprendizaje de comprensión. Aprender con comprensión da más sentido a los contenidos matemáticos y se pueden aplicar a nuevas situaciones si están bien conectados. Este Principio plantea construir conocimientos matemáticos a partir de conocimientos informales adquiridos por los niños en sus experiencias cotidianas (NCTM, 2003, p. 22)

El *Principio de Evaluación* plantea la evaluación como herramienta docente con el objetivo de guiar el diseño de las tareas, y como ayuda al alumno para asumir responsabilidades sobre su propio aprendizaje. La evaluación debe tomarse como una tarea rutinaria que permite conocer la progresión de los estudiantes, lo que van aprendiendo, y poder adaptar las tareas su situación para conseguir el objetivo de aprendizaje. Por otro lado, la retroalimentación a partir de la evaluación ayuda al estudiante a reflexionar sobre su propio aprendizaje (NCTM, 2003).

Finalmente, el *Principio Tecnológico* plantea que la tecnología apoya a la enseñanza de forma eficaz si se utiliza bien, ya que facilita la ejecución de procedimientos rutinarios, lo que permite dedicar más tiempo a desarrollar conceptos y modelizar (NCTM, 2003, p. 26).

Respecto a los *Estándares*, además de los *Estándares de Contenidos,* destacan los *Estándares de Procesos*, que describen las formas de adquisición y uso de los contenidos, que son: la *resolución de problemas*, el *razonamiento y demostración*, las *conexiones*, la *comunicación* y la *representación* (NCTM, 2003). Uno de los procesos es la *Resolución de Problemas*, tema central de este trabajo, pero voy a hacer una revisión de los demás procesos, porque considero que se ven implicados en la resolución de problemas. Santos-Trigo (2007) afirma que los *Principios y Estándares de la Educación Matemática* es "el documento que mejor promueva el desarrollo de los estudiantes de experiencias matemáticas basada en la resolución de problemas" (p. 527). En los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* se proponen las capacidades que se deben trabajar desde el *prekindergarten*[4] hasta el *High School* en EEUU, que es el periodo equivalente en España desde Educación Infantil hasta

[4] Etapa desde los 0 a los 5 años en EE.UU.

finalizar Educación Secundaria, momento en que esas capacidades deben ser adquiridas. Este trabajo señala por etapas (de *prekindergarten* a grado 2, de grado 3 a grado 5, de grado 6 a grado 8, y de grado 9 a grado 12) los estándares y expectativas de enseñanza y aprendizaje de cada una de dichas etapas. De todos ellos, me voy a centrar en los estándares de la etapa de *prekindergarten* a Grado 2 que corresponden con mi trabajo.

Tabla 1.2. *Estándares de Procesos de NCTM (2003)*

Resolución de Problemas (p. 55)	Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas. Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos. Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas. Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él.
Razonamiento y Demostración (p. 59)	Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas. Formular e investigar conjeturas matemáticas. Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticos. Seleccionar y utilizar diversos tipos de razonamiento y métodos de demostración.
Comunicación (p. 64)	Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación. Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas. Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás. Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión.
Conexiones (p. 68)	Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas. Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente. Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.
Representación (p. 71)	Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas. Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas. Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

En la Tabla 1.2 aparecen los estándares que deben adquirir los estudiantes en los distintos procesos a lo largo de toda la escolaridad. La *Resolución de Problemas* se plantea como "parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas", dando así, la oportunidad a todos los estudiantes de utilizar y aplicar sus conocimientos y destrezas en todos los estándares de contenido (NCTM, 2003, p. 55). Los alumnos pueden construir conocimientos nuevos al resolver problemas, por lo que el profesor debe analizar previamente las ideas matemáticas importantes que están implicadas en su resolución, para asegurarse de que el problema ayudará a los alumnos a conseguir los objetivos de aprendizaje (NCTM, 2003). El NTCM considera la resolución de problemas como objetivo y como método para aprender matemáticas y más tratándose de los niños más pequeños que tienen una gran curiosidad y flexibilidad ante situaciones nuevas (NCTM, 2003).

Los profesores deberían animar a los niños a encontrar matemáticas en sus experiencias, creando una buena disposición hacia la resolución de problemas, favoreciendo la creación de sus estrategias y reflexionando sobre ellas, utilizando contextos desde situaciones de su rutina diaria hasta situaciones extraídas de los cuentos. Los profesores deben dejar tiempo para pensar, confiar que los alumnos pueden resolver el problema, escuchar a los estudiantes, valorar el trabajo de los alumnos y ayudarles a hacer explícitas las estrategias (NCTM, 2003).

El *Estándar de razonamiento y demostración*, en las primeras edades escolares, se reduce a dos elementos importantes del razonamiento que son el reconocimiento de patrones y destrezas de clasificación. El NCTM indica que para desarrollar este proceso hay que animar a los niños a formular conjeturas, que las prueben y que justifiquen sus ideas, favoreciendo así, desarrollar el razonamiento formal. Los niños de esta edad no poseen muchas herramientas de razonamiento pero son capaces de buscar estrategias de situaciones matemáticas y de convencerse por sí mismos que son válidas. La percepción, las pruebas empíricas y las cadenas cortas de razonamientos son los métodos que utilizan los niños de estas edades para justificar sus respuestas dependiendo de la madurez y las oportunidades vividas. El NCTM afirma que en estas edades se debería proporcionar a los alumnos materiales físicos para que puedan manipular objetos ya que a partir de ejemplos concretos los niños son capaces de generalizar. A través del debate, aparecen ejemplos y contraejemplos para demostrar las conjeturas planteadas (NCTM, 2003).

El NCTM indica que la explicación de estrategias obliga a los niños a articular, aclarar, aclarar y ordenar su pensamiento. Es importante escuchar atentamente sus explicaciones ya que el pensamiento de los niños no siempre coincide con el del adulto (NCTM, 2003). El *Estándar de Comunicación* sugiere que los profesores deben animar a los niños a compartir sus estrategias de cálculo con los compañeros y debatir en clase sobre ellas. Así pueden desarrollar y perfeccionar sus estrategias escuchando las descripciones de los compañeros y razonando sobre las propias, y para descubrir por ellos mismos posibles errores. Los niños expresan sus ideas con ayuda de dibujos y materiales, intentan organizar y esclarecer sus ideas para poder expresar lo más claramente posible su pensamiento. Además, escuchan las ideas de otros compañeros que pueden darles otra perspectiva que no habían contemplado, y reflexionan sobre ello. Utilizar el lenguaje oral y/o escrito permite el desarrollo del pensamiento matemático. Las oportunidades que tengan los niños de comunicar, en la escuela o en su entorno familiar, y la madurez, son factores que intervienen en el desarrollo de la comunicación. De hecho, cuando los niños entran en la escuela, si sus oportunidades de comunicación son mayores, entonces aumentará el desarrollo del lenguaje y el pensamiento matemático. La comunicación se puede hacer de forma verbal, con dibujos, objetos y símbolos, dando la oportunidad de desarrollar el lenguaje matemático (NCTM, 2003).

En NCTM pone de manifiesto que, en la etapa de educación infantil y primeros cursos de educación primaria, las *Conexiones* más importantes que se deben trabajar son las que se establecen entre los conocimientos matemáticos intuitivos y adquiridos de manera informal, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y los conocimientos matemáticos que se aprenden en la escuela. De esta manera, el aprendizaje de las matemáticas se consigue de forma significativa. Así, los profesores deberían mostrar que los conceptos y destrezas no son hechos aislados, sino que están relacionados, y ayudar a los niños a establecer conexiones entre las ideas matemáticas, el vocabulario asociado a las mismas y las formas en que se representan. Deben aprovechar las situaciones diarias de los niños para relacionarlas con las matemáticas, para dar sentido y utilidad a las matemáticas. Por ejemplo, los niños conectan las estrategias iniciales en las que resuelven problemas de suma o resta con objetos o con estrategias de conteo, con las dos operaciones (NCTM, 2003).

El NCTM afirma que los niños utilizan *representaciones* para expresar sus ideas matemáticas y para construir conocimientos nuevos, que muestran su comprensión hacia éstas. Estas representaciones permiten analizar, junto con las explicaciones de los niños, el desarrollo del pensamiento matemático, y además muestran información para guiar el aprendizaje. En esta etapa, los niños utilizan dibujos y materiales para explicar sus estrategias, pero también empiezan a explicar sus respuestas por escrito, usando diagramas y algunos símbolos matemáticos. Este estándar es complementario al de la *Comunicación*, ya que los niños se sirven del lenguaje y las representaciones para explicar su pensamiento. Los niños van construyendo imágenes mentales a base de representar sus ideas con objetos físicos, con el lenguaje natural, o incluso con diagramas, símbolos o gestos que intercambian con sus compañeros y el profesor. Las representaciones ayudan a mostrar ideas que todavía no han interiorizado. En las representaciones concretas se encuentra el fundamento del posterior uso de los símbolos y ayudan a reconocer la naturaleza matemática común de situaciones distintas. Además, se debería ayudar a los estudiantes a comprender que las representaciones modelizan fenómenos de naturaleza matemática de diferentes contextos. Cuando los alumnos son capaces de utilizar varias representaciones para traducir la misma idea se desarrolla la comprensión y facilita el uso de conceptos y procedimientos matemáticos (NCTM, 2003).

En la siguiente 1.3 muestro las relaciones que se pueden establecer entre el proceso de la *resolución de problemas* y los demás *Estándares de Procesos*.

Figura 1.3. Relaciones entre la resolución de problemas y demás Estándares de Procesos

El NCTM indica que cuando se plantea problema en un ambiente de indagación y discursivo, los niños buscan estrategias conjeturando posibles ideas a partir de la situación del problema y de los conocimientos previos que tienen, prueban su validez mediante representaciones con objetos concretos, dibujos o símbolos. Estas estrategias deben estar bien organizadas y articuladas para poder explicarlas a sus compañeros ayudándose de representaciones, lo que les obliga a reflexionar sobre su pensamiento, tanto cuando explican su propia estrategia como cuando escuchan la de otro niño. La discusión en clase de diferentes resoluciones de problemas compleja ayuda a ser críticos con sus razonamientos y argumentaciones. Los procesos de comunicación y la representación permiten observar el pensamiento matemático de los niños, lo que suministra información sobre la comprensión del contenido matemático (NCTM, 2003).

El *Estándar de Resolución de Problemas* indica las características que están relacionadas con los procesos de razonamiento y demostración, comunicación, representación y conexiones (Tabla 1.3) y que favorecen la adquisición de todos y cada uno de ellos. Estas relaciones entre la *Resolución de Problemas* y todos los Estándares de procesos son base curricular importante de esta tesis y los tendré en cuenta a la hora de diseñar las tareas del método.

Tabla 1.3. *Relación entre el Estándar de Resolución de Problemas y los de más procesos*

Razonamiento y Demostración	"El profesor debe dar tiempo para pensar, dar tiempo en la resolución, escuchar atentamente… y ayudar a los alumnos a hacer explícitas sus estrategias" (p. 123). "Los niños empiezan a resolver los problemas de una manera, y antes de llegar a la solución, cambian sus estrategias, las crean y modifican, y reconocen que necesitan aprender más matemáticas" (p. 122). "Animarles a utilizar una amplia serie de estrategias, se desarrollan formas de pensamiento generadoras de múltiples niveles de comprensión" (p. 124). "Los profesores deberían pedir a los alumnos que reflexionen sobre sus respuestas, las expliquen y las justifiquen" (p. 125). "Los más pequeños pueden desarrollar destrezas básicas, habilidades de pensamiento de alto nivel y estrategias de resolución de problemas" (p. 125).
Comunicación	"Compartir dando oportunidades a los alumnos de escuchar ideas nuevas, de compararlas con las suyas y de justificar su pensamiento" (p. 122). "Animarles a explorar, arriesgarse, compartir fracasos y éxitos y preguntarse unos a otros" (p. 56). "Explicar sus soluciones pictóricas y escritas ayudó a los alumnos a articular su pensamiento y a hacerlo más preciso· (p. 123)
Conexiones	"La resolución de problemas da oportunidades para usar y ampliar el conocimiento de los conceptos de todos los Estándares de Contenido" (p. 120). "Cuando los niños resuelven problemas referentes a comparar y completar colecciones usando estrategias de conteo, desarrollan mejor la comprensión de la adición y sustracción y de la relación entre ambas operaciones" (p. 121). "Desarrollar estrategias de resolución… controlando sus propias ideas y reflexionar sobre ellas" (p. 120) "Ver diversas soluciones mejora su oportunidad de aprender estrategias útiles y les permite determina cuáles son más flexibles y eficaces" (p. 123). "En las primeras edades la resolución de problemas debe referirse a una variedad de contextos, desde las rutinas diarias a situaciones que surgen de los cuentos" (p. 120). "La literatura infantil es útil para proporcionar contextos" (p. 122). "A lo largo de la escolaridad, los profesores… pueden ayudar a sus alumnos a encontrar matemáticas en su mundo y en sus propias experiencias y animándoles a persistir mediante problemas interesantes" (p. 56).
Representación	"Los alumnos deben tener a su alcance materiales… y animarles a utilizar una amplia serie de estrategias" (p. 124). "Explicar sus soluciones pictóricas y escritas ayuda a los niños a articular su pensamiento y a hacerlo más preciso" (p. 123).

Además de describir aquí los estándares de procesos por su importancia en este trabajo, quiero mostrar el contenido matemático relacionado con la tesis, que corresponden al bloque de números y operaciones en primer curso de primaria. Un aspecto importante en la transición de educación infantil a primaria es el inicio de la comprensión del valor posicional de los números, comenzando por la decena, y la resolución de problemas aritméticos con números de dos cifras utilizando, desde estrategias informales, hasta las estrategias más formales como el algoritmo, fruto de la instrucción en el aula. El bloque de número y operaciones, tanto en el NCTM como en los currículos en España, son los que contienen los contenidos clave para este aprendizaje, por lo que voy a exponerlos a continuación.

El estándar de *Números y Operaciones* se encarga del desarrollo del sentido numérico, que incluye usar las relaciones entre las operaciones aritméticas para resolver problemas y comprender el sistema decimal de numeración. A lo largo de toda la educación infantil y primaria, los estudiantes deben alcanzar la comprensión del números, de forma que conozcan "qué son, cómo pueden representarse con objetos, numerales o rectas numéricas, cómo se relacionan unos con otros; cómo están inmersos en sistemas que poseen estructuras y propiedades y cómo utilizar números y operaciones para resolver problemas (NCTM, 2003, p. 32)". La resolución de problemas permite a los alumnos explorar y consolidar los conocimientos sobre los números. Además, los estudiantes deberían adquirir fluidez de cálculo eligiendo la estrategias ya sea cálculo mental, utilización de algoritmos con lápiz o papel, estimaciones razonables o incluso la calculadora (NCTM, 2003).

En la Tabla 1.4 se muestra en la primera columna los contenidos generales que se deberían adquirir al finalizar el grado 12 en EEUU, y en la segunda columna las expectativas de la etapa que incluyen el curso de este trabajo que es primero de Educación Primaria, que estaría incluido en la etapa de *prekindergarten* a grado 2, objetivo de mi estudio.

Tabla 1.4. *Estándar Números y Operaciones de prekindergarten a grado 2 (NCTM, 2003, p. 82)*

Contenidos generales	*Expectativas de la etapa*
Comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos	Contar con comprensión y darse cuenta de cuántos hay en colecciones de objetos. Utilizar modelos variados para desarrollar las primeras nociones sobre el sistema de numeración decimal y su valor posicional. Desarrollar la comprensión de la posición relativa y la magnitud de los números naturales, y de los números ordinales y cardinales y sus conexiones. Dar sentido a los números naturales y representarlos y usarlos de manera flexible, incluyendo relacionar, componer y descomponer números. Relacionar los nombres de los números y los numerales, con las cantidades que representan, utilizando varios modelos físicos y representaciones diversas. Comprender y representar las fracciones comúnmente usadas, como ¼, 1/3 y ½.
Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan	Comprender distintos significados de la adición y sustracción de números naturales y la relación entre ambas operaciones. Comprender los efectos de sumar y restar números naturales. Comprender situaciones que impliquen multiplicar y dividir, tales como la de agrupamiento iguales de objetos y la de repartir en partes iguales.
Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables	Desarrollar y usar estrategias para calcular con números naturales centrándose en la adición y sustracción. Desarrollar fluidez en la adición y sustracción de combinaciones básicas de números. Utilizar diversos métodos y herramientas para calcular, incluyendo objetos, cálculo mental, estimación, lápiz y papel y calculadoras.

En esta primera etapa los conceptos y destrezas relativos a Números y Operaciones tiene una gran importancia ya que los estudiantes deben “intensificar el sentido numérico”, desde la utilización del conteo hasta relaciones numéricas más complejas, patrones, operaciones y valor posicional. Al utilizar estos materiales el profesor debe estar atento a cómo razonan los niños. Por ejemplo, utilizando los bloques de base 10 para representar el número 25 se puede poner 25 unidades sueltas, o 2 decenas y 5 unidades. Los niños podrían interpretar que en el primer caso hay 25 objetos y en segundo caso 7 si toman en cuenta cada decena como un solo objeto. Los niños “deberían reconocer que la palabra decena puede representar una unidad única (1 diez) y a la vez, diez unidades separadas (10 unos) y estas representaciones son intercambiables” (NCTM, 2003, p. 85). En esta situación, será importante señalar que el valor posicional de la notación escrita debe cumplir un orden en la disposición de las cifras, cosa que no ocurre al utilizar los materiales concretos. Al acabar segundo de primaria, los niños podrían contar centenas, descubrir patrones del sistema de numeración decimal relativos al valor posicional que permiten realizar combinaciones diferentes y descomponer números de hasta tres cifras.

Durante estos primeros años de escolarización, los estudiantes se deben enfrentar a una gran variedad de situaciones en las que se ven implicadas la adición y la sustracción de números naturales. Los investigadores se han dado cuenta que los niños son capaces de comprender las operaciones aritméticas a través de resolución de problemas aritméticos sencillos, como mostraré más avanzado el capítulo en la revisiones de investigación sobre este tema. El NCTM consideran que en la etapa de *prekindergarden* a grado 2, los niños pueden empezar a dar sentido a la multiplicación y división en situaciones de su entorno como reparto, pero que el significado de la multiplicación y división con número naturales se trabaja entre los grados 3 a 5 (NCTM, 2003).

El último componente de este estándar en la fluidez de cálculo, en el que el NCTM afirma que se debe evitar practicar cálculo repetidamente sin comprensión, y se debe trabajar la fluidez necesaria en el cálculo para que la resolución del problema sea efectiva (NCTM, 2003). La flexibilidad y fluidez del cálculo es objetivo de este estándar y a finales de grado 2 o segundo de educación primaria los niños deberían conocer las combinaciones básicas de la adición y la sustracción y tener destreza al sumar y restar números de dos cifras. Los niños deben utilizar estrategias que tengan sentido para ellos para que se dé una práctica significativa y los profesores deben buscar contextos para ello. Las combinaciones numéricas básicas de multiplicación y división se van desarrollando en los grados 3 a 5 (NCTM, 2003). El NCTM indica además que si se anima a los niños a desarrollar, registrar, explicar y criticar las estrategias que utilizan en la resolución de problemas, llegan a tener soltura con los cálculos aritméticos con procedimientos eficaces basados en la comprensión del sistema de numeración y las operaciones.

El estándar de *Álgebra* se compone de las relaciones entre cantidades, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio (NCTM, 2003). En la Tabla 1.5 se muestra los contenidos generales y las expectativas de la etapa de educación infantil y dos primeros cursos de primaria (desde *prekindergarten* a grado 2) que están directamente relacionados con este trabajo. La comprensión del número y las operaciones, y sus propiedades por lo tanto, fundamentan las expresiones algebraicas. Aunque el álgebra parece materia para trabajar en edades más avanzadas, en la etapa infantil y primer ciclo de primaria se trabaja con patrones, regularidades, relaciones y representaciones que son base para la estructura algebraica; por ejemplo, se trabajan seriaciones en las que aparecen regularidades y se cuenta a saltos con diferentes números sobre cuadrículas numeradas del 1 al 100 (NCTM, 2003).

Tabla 1.5. *Estándar Álgebra de prekindergarten a grado 2 (NCTM, 2003, p. 94) relacionado con Números y Operaciones y resolución de problemas*

Contenidos generales	*Expectativas de la etapa*
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	• Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números • Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	• Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos

La modelización de problemas aritméticos verbales toma un papel importante en este trabajo. El NCTM afirma:

> Uno de los usos más poderosos de las matemáticas es la modelización de fenómenos. Los estudiantes de todos los niveles deberían tener oportunidades de modelizar matemáticamente una amplia variedad de fenómenos, en la forma apropiada en cada nivel. En los niveles iniciales, pueden utilizar objetos, dibujos y símbolos para modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales (NCTM, 2003, p. 39).

Por lo tanto, los estándares del NCTM sobre el contenido de la aritmética y la numeración desde *prekindergarten* a Grado 2 son la comprensión de distintos significados de suma y resta, desarrollar estrategias de cálculo, fluidez de combinaciones básicas e incluso utilizar métodos variados de cálculo como cálculo mental, con lápiz y papel, estimación y calculadoras. De la multiplicación solo incluye comprender situaciones de multiplicación y división como agrupamiento y reparto.

Para concretar más por nivel y ayudar conectar los conocimientos entre los cursos, se publicaron los *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006).

2.1.1. Los focos curriculares del NCTM

Uno de los principales objetivos del NCTM, que se puede observar en el *Principio Curricular*, es el desarrollo de un currículo coherente, efectivo y bien articulado a través de todos los niveles, que organice e integre las ideas matemáticas importantes para que los alumnos las puedan conectar entre sí, y así desarrollar conocimientos nuevos (NCTM, 2003; Rico y Lupiáñez, 2008). El NCTM publica en 2006 los *Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence* (NCTM, 2006). Este desarrollo supone un punto de partida para concretar por niveles el contenido curricular y mejorar la coherencia de los estándares, teniendo como base los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2003). El NCTM publica los *Curriculum Focal Points* (Focos Curriculares en adelante) para apoyar, expandir y ejemplificar las directrices de los Principios y Estándares y acotar la propuesta de éstos que son demasiado genéricas o abiertas (Rico y Lupiáñez, 2008). Los *Focos Curriculares* son temas y nociones matemáticas importantes para organizar un currículo a través de varios niveles. Un *Foco Curricular* tiene que cumplir que sea matemáticamente importante, tanto en el aula como sus aplicaciones fuera de ella; debe encajar con lo que se sabe sobre el aprendizaje de las matemáticas, y conecta lógicamente con las matemáticas en los niveles anteriores y el posteriores (NCTM, 2006); debe estar relacionado con los *Principios y Estándares* y se presentará a los estudiantes en contextos de resolución de problemas, razonamiento y demostración, conexión, comunicación y representación, que son los estándares de procesos (Rico y Lupiáñez, 2008). La idea es dar un conjunto de puntos centrales en el currículo, integrados con los procesos, que permitirá el aprendizaje de forma gradual a través de los cursos, más que una lista de contenidos y procesos pocos relacionados. Puede servir como un catalizador para el desarrollo curricular e influir positivamente en el diseño de materiales para la enseñanza y la evaluación, ya que por cada nivel se presentan los contenidos conectados e integrados. Además de indicar tres puntos centrales de contenido del currículo en cada curso, se indican las conexiones de estos contenidos con otros focos curriculares de otros grados, señalando si estamos ante una introducción del contenido, o una continuación, y cómo relacionarlos con estos tres puntos centrales que recogen la descripción de conceptos y destrezas más importantes que se deben adquirir en cada nivel, utilizando los estándares de procesos de Principios y Estándares para la Educación Matemática. Esto marcará la experiencia matemática integral de los estudiantes y los preparará para la vida real y profesional, y servirá para capacitarlos para resolver muchos de los problemas con que se enfrentarán en el futuro (Rico y Lupiáñez, 2008).

Los focos curriculares correspondientes a mi tesis están relacionados con el conocimiento del valor posicional y la resolución de problemas aritméticos tanto de estructura aditiva como estructura multiplicativa por lo que, en la Tabla Anexo 2.1, muestro los contenidos relacionados. Incluyo los niveles anterior y posterior porque es uno de los objetivos del estudio, la evolución del aprendizaje desde educación infantil y, utilizaré contenidos correspondientes a Grado 2.

Los focos curriculares que están implicados dentro del contenido *número y operaciones y álgebra* y *número y operaciones en base diez*. Sobre *número y operaciones y álgebra* los niños:

- En educación infantil, deben representar, comparar y ordenar números naturales, y juntar y separar parte de ellos.
- En grado 1, deben desarrollar la comprensión de la suma y resta, y desarrollar también estrategias para hechos numéricos de suma y resta.
- En grado 2, deben desarrollar recuperación rápida de hechos numéricos de suma y resta y fluidez con números de varias cifras.

Respecto al foco *número y operaciones en base diez*, los niños:

- En grado 1, deben desarrollar la comprensión de las relaciones de los números naturales, incluida la agrupación en decenas y unidades.
- En grado 2, deben desarrollar del sistema de numeración de base diez y valor posicional (hasta 100)

Los focos curriculares del NCTM permiten marcar los objetivos de aprendizaje de una manera articulada y conectada a través de los distintos niveles de una etapa. Más avanzado el capítulo, comentaré el contenido matemático en los *Common Core State Standars,* documento curricular más reciente y que también participa el NCTM en su elaboración.

2.1.2. La posición conjunta de NCTM y NAEYC

Las evaluaciones del rendimiento de los estudiantes en EEUU llevaron al NCTM y la NAEYC a publicar una declaración conjunta en la que indican que hay que prestar mayor atención a la competencia matemática de las primeras edades (NAEYC y NCTM, 2013). El NCTM ya incluyó en los *Principios y Estándares* (NCTM, 2000) la etapa desde *prekindergarten* a grado 2 con el fin de concretar los contenidos y procesos matemáticos a desarrollar en los primeros años de vida. Dichas asociaciones recomiendan que los niños de los primeros niveles escolares deben experimentar prácticas de enseñanza efectivas y de alta calidad, guiadas por el currículo y basadas en la investigación, con el apoyo de instituciones y los recursos necesarios (NAEYC y NCTM, 2013). Además, deben estar estrechamente conectadas con el currículo y prácticas de niveles posteriores. En esta declaración se realizan varias recomendaciones para el aula que comento a continuación.

Las investigaciones muestran que los niños en las primeras edades construyen conocimientos matemáticos muy tempranos a partir de sus experiencias en situaciones de la vida cotidiana. Los maestros deberían planificar experiencias positivas de resolución de problemas dentro de su actividad diaria que cultiven y amplíen el sentido matemático, desarrollado disposiciones como la curiosidad, imaginación, flexibilidad, creatividad y perseverancia (NAEYC y NCTM, 2013). Además, los maestros deberían basarse en las experiencias vividas por los niños en su entorno, sus conocimientos previos y sus conocimientos informales para la práctica en el aula, ya que las experiencias nuevas son más significativas si están conectadas con sus experiencias y conocimientos previos (NAEYC y NCTM, 2013).

Esto último implica matematizar solo lo que pueden comprender intuitivamente, por lo que se recomienda fundamentar los currículos de matemáticas y las prácticas docentes basándose en el desarrollo cognitivo, lingüístico, físico, social y emocional de los niños. Es importante para los maestros conocer el desarrollo conceptual y del razonamiento de los niños para saber cómo son las ideas matemáticas de los niños más pequeños que a menudo difieren de las ideas de los adultos. Desde finales de la década de 1990 existen investigaciones que han identificado caminos de aprendizaje de contenidos concretos de las matemáticas, como una secuencia de tareas diseñadas respetando el desarrollo del conocimiento de los niños (Clements y Sarama, 2004; NAEYC y NCTM, 2013).

Otra recomendación importante, y relacionada con los caminos de aprendizaje, es asegurar un currículo coherente con las grandes ideas y conocimientos matemáticos básicos en edades tempranas y las conexiones y secuencia entre dichas ideas (NAEYC y NCTM, 2013; NCTM, 2006). Existen investigaciones que trazan trayectorias de aprendizaje en las que se articulan objetivos marcando un proceso continuo de aprendizaje y desarrollo para los niños de una idea matemática básica (Simon, 1995; Clements y Sarama, 2004). Una secuencia lógica de prácticas con contenido matemático permitirá tratar los conceptos con profundidad y de forma coherente y los niños podrán desarrollar, construir, probar y reflexionar los contenidos matemáticos (NAEYC y NCTM, 2013).

Un currículo interdisciplinar en las primeras edades puede dotar de sentido a las ideas matemáticas que van adquiriendo los niños, además de aprovechar contextos como el juego para que los niños exploren ideas matemáticas. Pero es importante proporcionar experiencias cuidadosamente planificadas para que los niños se centren alrededor de una idea matemática particular, ya sea individualmente o en grupo, para poder debatir con personas de un mismo nivel de desarrollo, y revisar los conceptos previamente explorados, para forjar vínculos entre ideas previas y nuevas. La evaluación de los conocimientos que los niños van comprendiendo, puede ser una herramienta útil para el maestro a la hora de planificar y adaptar la enseñanza y el currículo (NAEYC y NCTM, 2013).

2.2. Los Common Core State Standards for Mathematics (CCS)

Con el objeto de que el currículo de matemáticas en EEUU estuviera más centrado en ejes centrales básicos que pudieran mejorar el rendimiento en matemáticas, la *National Governors Association Center for Best Practices* (NGA Center) y el *Council of Chief State School Officers* (CCSSO) han publicado los *Common Core State Standars for Mathematics* (CCSSI,

2010) en los que definen los conocimientos y destrezas que deben haber adquirido los alumnos al finalizar los estudios de grado 12 en EEUU (equivalente a la Educación Secundaria Obligatoria en España). Estos estándares fueron desarrollados en colaboración con maestros, administradores escolares, y expertos, lo que permitió proporcionar un marco claro, coherente, centrado y comprensible para preparar a los escolares para la universidad y el mundo laboral (NGA y CCSSO, 2010). Estos estándares indican que la práctica matemática debe estar basada en procesos que incluyen los *Estándares de Procesos* de la NCTM (2000) y la competencia matemática[5] del informe *Adding It Up*, que comentaré en el siguiente apartado, del *National Research Council*: razonamiento adaptado, competencia estratégica, comprensión conceptual, fluidez procedimental y disposición productiva (CCSSI, 2010). Como propuesta de *Prácticas Matemáticas* señalan (1) dar sentido a los problemas y perseverar en la solución; (2) razonar de manera abstracta y cuantitativa; (3) construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás; (4) modelizar con matemáticas; (5) utilizar herramienta apropiadas estratégicamente; (6) favorecer la precisión; (7) buscar y hacer uso de la estructura; (8) buscar y expresar la regularidad en el razonamiento repetido. Las prácticas en Matemáticas de los *Common Core State Standars* y los *Estándares de Procesos* del NCTM están relacionados, como se puede ver en la Tabla 1.6. Los *Estándares de Contenido*, que comentaré en el siguiente capítulo, se deben conectar con las *Prácticas Matemáticas*.

Tabla 1.6. *Relación entre los Estándares de Procesos del NCTM (2000) y las Prácticas de los Commom Core State Standars (CCSSI, 2010)*

Estándares de Procesos / *Prácticas* de *Common Core State Standars*	Resolución de problemas	Razonamiento y Demostración	Conexiones	Comunicación	Representación
Dar sentido a los problemas y perseverar en la solución	■		■		
Razonar de manera abstracta y cuantitativa		■			
Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás		■		■	
Modelizar con matemáticas					■
Utilizar herramienta apropiadas estratégicamente	■		■		
Favorecer la precisión				■	■
Buscar y hacer uso de la estructura			■		
Buscar y expresar la regularidad en el razonamiento repetido		■		■	

El contenido central de este trabajo es el valor posicional. En la Tabla Anexo2.2, Anexo 2.3 y Anexo 2.4 describo los CCSSM desde el último año de infantil a grado 2 para poder tener una perspectiva de cómo se articulan las expectativas de aprendizaje en los cursos anteriores y posteriores. Partiendo de los focos curriculares del NCTM (2006) de *número y operaciones y álgebra* (que se corresponde con *operaciones y pensamiento algebraico* de los CCSSM) y *números y operaciones en base 10*, los CCSSM identifican las expectativas de aprendizaje más importantes de cada uno de ellos. La comprensión del valor posicional desarrollado a partir la resolución de problemas aritméticos verbales será objetivo primordial en la tesis, y es importante localizar las recomendaciones curriculares sobre la introducción de estos conceptos. En último curso de infantil, los CCSSM agrupa las expectativas de aprendizaje en:

- Conocer el nombre de los números y la secuencia de conteo.

[5] Traducción de *mathematical proficiency (NGA y CCSSO, 2010, p. 6)*

- Comprender la suma como juntar o añadir a, y la resta como separar o quitar.
- Trabajar los números del 11 al 19 para adquirir fundamentos del valor posicional.

En Grado 1, los niños deben:

- Representar y resolver problemas de suma y resta (hasta 20)
- Comprenden y aplican las propiedades de operaciones, así como la relación entre la suma y la resta.
- Suman y restan (hasta 20).
- Trabajan con sentencias de suma y resta.
- Extienden la secuencia de conteo.
- Comprenden el valor posicional.
- Utilizan la comprensión del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.

En Grado 2, los niños deben:

- Representar y resolver problemas de suma y resta (hasta 100)
- Suman y restan (hasta 20).
- Trabajan con grupos equivalentes de objetos para establecer fundamentos para la multiplicación.
- Comprenden el valor posicional.
- Utilizan la comprensión del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.

El desglose de estas expectativas de aprendizaje permite tener objetivos intermedios evaluables en los niños y ayuda al diseño de tareas para su logro.

2.3. Los trabajos del National Research Council (NRC)

El NRC publica el informe *Adding It Up* con la intención de dar un marco de referencia de lo que los niños deben aprender, como aprenderlo y como podría ser una enseñanza efectiva (NCR, 2001). Este documento detalla los objetivos del bloque números y operaciones, y definen los cinco ejes que conforman la competencia matemática[6], que habrán de alcanzar los niños (ver Tabla 1.7).

Tabla 1.7. *Ejes de la competencia matemáticas (NRC, 2001, p. 5)*

Comprensión conceptual	Comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y las relaciones.
Fluidez procedimental	Habilidad de llevar a cabo procedimientos flexibles, exactos, eficiente y apropiados.
Competencia estratégica	Habilidad de formular, representar y resolver problemas.
Razonamiento adaptativo	Capacidad para pensar lógicamente, reflexionar, explicar y justificar.
Disposición productiva	Inclinación habitual para ver las matemáticas de forma sensible, útil, que merecen la pena junto con la creencia de que son diligentes y eficaces.

[6] Traduzco como *hebras o fibras de la competencia matemática* la expresión *strands of mathematical proficiency* utilizada en NRC (2001, p. 5).

El NRC publica un documento más reciente, *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity* en el que completa el trabajo los anteriores y señala los bloques de números y operaciones y geometría, sentido espacial y medida, como centrales en la enseñanza de las matemáticas. En este documento se remarca la importancia de basar la investigación en caminos de enseñanza-aprendizaje[7] que guíen la práctica en la educación matemática temprana (NRC, 2009, p. 2). En este documento se remarca la importancia de desarrollar dos tipos de procesos de razonamiento matemáticos. Los primeros son los procesos generales tal como los define el NCTM. Los otros son procesos relacionados con grandes ideas matemáticas que permiten conectar conceptos, procedimientos y problemas dentro de un mismo contenido. Ejemplos de estas grandes ideas son la *unitización*, o la descomposición y composición numérica, relacionada con las operaciones aritméticas, donde los números se pueden descomponer en otros, y el valor posicional, donde los números de pueden descomponer según su valor posicional, en decenas y unidades (NRC, 2009).

2.4. OCDE y PISA

Las evaluaciones del programa *Programme for International Student Assessment* (PISA) de la OCDE del 2003 y 2012 evalúan el área de matemáticas y han afectado al diseño curricular en el ámbito internacional, incluida España. Los sistemas educativos deben preparar a los estudiantes a ser ciudadanos activos para un buen desarrollo de la sociedad, por lo que la OCDE establece unos indicadores para valorar la calidad del sistema por medio de competencias básicas en dominios como la lectura comprensiva y la competencia matemática, para alcanzar la alfabetización escolar (OCDE, 2005 y 2013).

Este proyecto se utiliza para valorar el rendimiento de los estudiantes al finalizar los estudios de la enseñanza obligatoria, a través de métodos innovadores que reflejen las competencias consideradas fundamentales para la vida adulta (OCDE, 2005 y 2013). La valoración de las competencias de cada país establece puntos de referencias para identificar los puntos fuertes y débiles de los sistemas educativos y así permitir su mejora. De hecho, uno de los rasgos fundamentales que tiene PISA es el concepto de competencia:

> Se refiere a la capacidad de los alumnos de aplicar sus conocimientos y habilidades en áreas académicas fundamentales y de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando plantean, resuelven e interpretan problemas relacionados con distintas situaciones (OCDE, 2005, p. 20).

El Proyecto de *Definición y Selección de Competencias* (DeSeCo) de la OCDE hace una interpretación comprensiva y funcional de los conocimientos y habilidades matemáticas, y define las competencias humanas fundamentales, incluyendo la alfabetización o competencia matemática, como clave por su contribución valiosa para la sociedad y los individuos, su versatilidad para proporcionar respuesta a una gran variedad de situaciones y su relevancia para los especialistas. Rico y Lupiáñez (2008) señalan que la noción de alfabetización o competencia matemática no se basa solo en el dominio de conceptos y técnicas, sino en su utilización como herramientas útiles para abordar problemas en distintos contextos, por lo que se caracterizan las matemáticas escolares desde un enfoque funcional. Un estudiante está matemáticamente alfabetizado si muestra un gran nivel de desempeño de sus capacidades; es

[7] Traducción de *teaching-learning paths* (NRC, 2009, p. 2)

decir, no basta el dominio instrumental de conceptos y técnicas, los instrumentos matemáticos deben ser herramientas para abordar problemas matemáticos (Rico y Lupiáñez, 2008).

En las evaluaciones PISA se mide el contenido o estructura de contenidos que los alumnos deben adquirir, los procesos o capacidades que han de aplicar, las situaciones en las que se encuentran los problemas matemáticos y la actitud y disposición de los alumnos hacia las matemáticas. Es decir, no sólo se valoran los contenidos aprendidos, sino cómo se utilizan en situaciones de la vida cotidiana. De hecho, las tareas de evaluación de PISA están basadas en procesos de modelización y resolución de problemas, a lo que PISA denominada *matematización*. PISA describe el proceso de *matematización* como la actividad que se desarrolla cuando una persona se ve ante un problema en una situación real, la organiza de acuerdo con conceptos matemáticos, se despega de la realidad generalizando y formalizando, resuelve el problema y da sentido a la solución en la situación de partida.

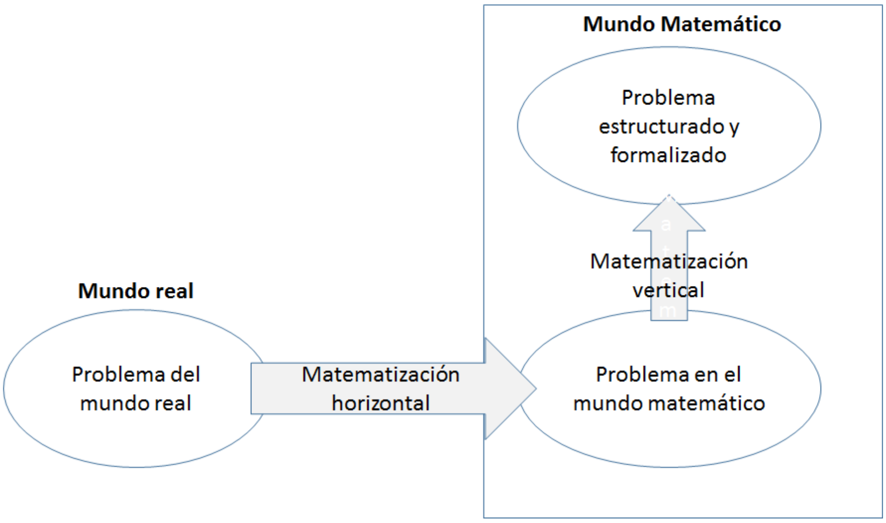


Figura 1.4. Conexiones entre las fases de matematización (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 236)

La *matematización* se puede descomponer en una primera fase de *matematización horizontal*, en la que se traduce el problema del mundo real al matemático, una segunda fase denominada *matematización vertical*, en la que se utilizan conceptos y destrezas matemáticas, y una última fase de validación, en la que se reflexiona sobre todo el proceso desarrollado y sus resultados (ver Figura 1.4, Rico y Lupiáñez, 2008).

Las tres fases implican ciertas capacidades para llegar a la resolución del problema, que pueden verse en la Tabla 1.8.

Dentro de este proceso de *matematización*, todas estas capacidades se resumen en las competencias matemáticas de *pensamiento y razonamiento*, *argumentación*, *comunicación*, *construcción de modelos*, *plantear y solucionar problemas*, *realizar representaciones* y *utilizar operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal* (OCDE, 2005).

Tabla 1.8. *Capacidades en las fases de matematización (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 235)*

Matematización horizontal	Identificar las matemáticas relevantes en el problema.
	Representar el problema de modo diferente.
	Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
	Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
	Reconocer isomorfismos con otros problemas conocidos.
	Traducir el problema a un modelo matemático.
	Utilizar herramientas e instrumentos adecuados.
Matematización vertical	Utilizar diferentes representaciones.
	Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y sus operaciones.
	Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
	Argumentar.
	Generalizar.
Validación y reflexión	Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
	Reflexionar sobre los argumentos matemáticos, explicar y justificar los resultados.
	Comunicar el proceso y la solución.
	Criticar el modelo y sus límites.

Las tres dimensiones en las que se basa la evaluación PISA son: el *contenido* matemático, los *procesos o competencias* implicados, y las *situaciones* en las que se plantean los problemas (OCDE, 2005). El *contenido* se agrupa en Espacio y Forma, Cambio y Relaciones, Cantidad e Incertidumbre. Respecto a las *situaciones*, las tareas matemáticas se deben proponer en contextos de la vida cotidiana como situaciones personales o de su entorno más próximo o de ámbito un poco mayor, o pueden ser científicas como un problema explícitamente matemático. La resolución del problema dependerá de lo cercano que sea el contexto al alumno y de lo explícito que esté el contenido matemático en la situación.

PISA 2003 (OCDE, 2005) define la competencia matemática como "la capacidad de los alumnos de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones, incluyendo conceptos matemáticos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o de otro tipo" (p. 37). En el último informe PISA 2012 (OCDE, 2013), se mantiene la resolución de problemas como una capacidad imprescindible para adquirir los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas. En este informe, se define la competencia matemática como:

> La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan (OCDE, 2013, p. 9).

En el Informe PISA 2012 (OCDE, 2013) consideran para la competencia matemática los procesos de (a) *formulación matemática de situaciones*, (b) empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos, e (c) interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos. Las *Capacidades*[8] que subyacen a estos procesos, cada vez que los alumnos se enfrentan a la resolución de problemas son *Razonamiento y Argumentación, Comunicación Matematización, Representación, Utilización de Herramientas Matemáticas, Utilización de Operaciones y un Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico,* y *Diseño de Estrategias para Resolver Problemas*. Estas *competencias matemáticas* intentan unificar recomendaciones como las *Prácticas Matemáticas* de los *Common Core State Standars* (NCTM, 2010) y *Estándares de Procesos* del NCTM (2000).

2.5. Hacia una síntesis de estas propuestas

Los Estándares de Procesos indicados por el NCTM tienen cierta relación con las competencias matemáticas definidas por la OCDE. En la Tabla 1.9 se muestra la relación de Procesos del NCTM, las competencias matemáticas PISA 2003 y PISA 2012.

La introducción de la competencia matemática en el desarrollo curricular ha marcado una orientación funcional para la innovación en la educación matemática (Rico y Lupiáñez, 2008). El diseño de los currículos basados en las recomendaciones de los documentos elaborados por el NCTM y en las competencias matemáticas definidas por la OCDE (NCTM, 2003; OCDE, 2005 y 2013), ha demandado cambios en la estructura y organización de los contenidos curriculares de muchos países, creando dificultades en el intento de amoldarlo adecuadamente para que la resolución de problemas sea el eje vertebrador de la actividad matemática (Santos-Trigo, 2007 y 2008). Las expectativas de aprendizaje de estos currículos contemplan las competencias que enuncian los modos de actuar de los alumnos cuando hacen matemáticas y describen procesos cognitivos cuyo dominio se produce a largo plazo. Las funciones de las competencias son la integración de los aprendizajes formales con los informales, la selección de contenidos básicos, su integración y su uso en diferentes situaciones y contextos, y la selección de tareas de aprendizaje orientando la enseñanza desde una perspectiva transversal (Rico y Lupiáñez, 2008). En este desarrollo curricular, la resolución de problemas, junto con otros procesos, conforman la competencia matemática.

Tabla 1.9. *Relación entre los Estándares de Procesos (NCTM), Competencias PISA 2003 y Capacidades PISA 2012 (tabla adaptada de Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012).*

Estándares de procesos (NCTM)	*Competencias PISA 2003 (OCDE, 2005)*	*Capacidades PISA 2012 (OCDE, 2013)*
Razonamiento y demostración	Pensamiento y razonamiento. Argumentación	Razonamiento y argumentación
Comunicación	Comunicación	Comunicación
Conexiones Aplicar matemáticas a contextos no matemáticos	Construcción de modelos	Matematización
Representación. Modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal	Representación Utilización de herramientas matemáticas Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas	Diseño de estrategias para resolver problemas

[8] En el informe PISA 2012 (OCDE, 2012) llama *capacidades* a lo que en el informe PISA 2003 (OCDE, 2005) denomina *competencias matemáticas*. En mi trabajo lo seguiré denominando *competencias matemáticas*.

2.6. Evolución en el enfoque y en el tratamiento de la resolución de problemas en el currículo Español

En este apartado, intento mostrar lo relacionado con la competencia matemática y la resolución de problemas que aparece en el currículo Español.

Comienzo por hacer una aclaración sobre diferentes enfoques de entender el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas que han estado presentes en los últimos currículos. Rico y Lupiáñez (2008) hablan de cuatro enfoques; describen el enfoque instrumental, centrado en el dominio de conceptos básicos y destrezas que su usan como herramientas; el estructural, que consiste en un sistema estructurado de reglas y conceptos basados en la deducción; el funcional, que plantea los conceptos y procedimientos matemáticos como herramientas para resolver situaciones de la vida cotidiana; y el integrado, basado en la actividad intelectual de creación de conocimiento en distintas situaciones y contextos. Un currículo funcional, se centra en el desarrollo de estrategias cognitivas propias, por lo que la formación va dirigida a mejorar pensamiento de los alumnos, el desarrollo de competencias matemáticas en diversos contextos. El enfoque integrado comparte atributos del estructural y funcional. El enfoque instrumental y funcional no son opuestos, ya que los instrumentos aprendidos se utilizan para resolver situaciones en otros contextos que no son únicamente dentro de las matemáticas, se promueve el uso apropiado de herramientas en situaciones cotidianas (Rico y Lupiáñez, 2008).

Desde la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo LOGSE de 1991, los currículos españoles se han ido aproximando a un currículo funcional, que inicialmente carecía de recursos para su puesta en práctica. Puig (2008) comenta que en la LOGSE (MEC, 1990) aparece la resolución de problemas como contenido y como metodología, pero no queda muy claro el tratamiento en los diseños curriculares y la puesta en práctica. Como contenido, no estaba bien definido y no se podía organizar bien la enseñanza, y como metodología, se proponía un estilo heurístico con mucha práctica (Puig, 2008). En la LOCE (MEC, 2002) no aparece ni como contenido ni metodología, sino como práctica, tomando la resolución de problemas como algo para aplicar explícitamente los conceptos, algoritmos y técnicas aprendidas, quizás influenciado por el movimiento *back to basics* que se daba en EEUU (Puig, 2008). Pero en la Ley Orgánica de la Educación LOE (MEC, 2007) se profundizó en la orientación funcional contemplando la competencia matemática (Rico y Lupiáñez, 2008). En el currículo de la LOMCE (MEC, 2014b) indica que "las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria" (p. 34060). Así, las matemáticas tienen "un papel funcional para resolver problemas en situaciones cotidianas y un papel instrumental para adquirir conocimientos en otras áreas" (MEC, 2014b, p. 34062). A partir de la LOE (MEC, 2006), se hace un esfuerzo por adaptarse al marco europeo y las recomendaciones de las entidades que pertenecen a la Unión Europea. Rico y Lupiáñez (2008) indican que los planteamientos sobre la competencia matemática del currículo español (refiriéndose a MEC, 2007) están notablemente influenciados por los documentos curriculares como el Informe PISA 2003 (OCDE, 2005) o los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003). Estos autores señalan que ya en la LOGSE se intentó dar un enfoque funcional que no se consiguió hasta la LOE (MEC, 2007).

Uno de los objetivos para Educación Primaria, según indican las Enseñanzas Mínimas del Ministerio de Educación y Ciencia de la LOE, es "la capacidad de desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo… así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana" (MEC, 2006, p. 43054). Este mismo documento señala que la competencia matemática:

> Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento, tanto para producir e interpretar tipos distintos de información como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. … Implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas… (MEC, 2006, p. 43059).

Se proponen los procesos de resolución de problemas como eje principal de la actividad matemática (MEC, 2006). Concluyen que la competencia matemática es “saber matemáticas y hacer cosas con ellas” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 214).

El nuevo currículo adopta la definición de competencia de la Unión Europea, remarcando los procesos de resolución de problemas como fuente y soporte del aprendizaje, y las capacidades de leer, reflexionar, planificar proceso de resolución, establecer estrategas, revisión, comprobación y comunicación, básicas para el aprendizaje, utilizando los procesos de razonamiento y comunicación verbal de las estrategias razonadamente Europea (MEC, 2014b, p. 33828). La importancia de todos los procesos o capacidades implicados en la resolución de problemas en contexto va a ser un punto clave en el desarrollo de este trabajo. Las competencias se definen en el currículo de la LOMCE (MEC, 2014b) como:

> … capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, para lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos… (p. 33827)

La competencia en el currículo de la LOMCE se contempla como un “saber hacer”, conocimiento en práctica a través de participación en distintas situaciones sociales, y que para que se dé la transferencia a nuevas situaciones debe ser un conocimiento con comprensión (MEC, 2014b, p. 33828). El aprendizaje basado en competencias es transversal e integrado y conlleva una revisión curricular que debe abordarse desde todas las áreas de conocimiento tanto en ámbitos formales como informales. Entre las estrategias metodológicas debe contemplarse la creación de entornos de aprendizaje que estimulen la motivación, implicación, curiosidad y diferentes vías de resolución con diferentes recursos (MEC, 2014b, p. 33829). Uno de los principios metodológicos es que la metodología didáctica será comunicativa, activa y participativa (MEC, 2014b).

El nuevo currículo de primaria (MEC, 2014a) profundiza en la relevancia dada a los procesos de resolución de problemas al indicar que “constituyen la piedra angular de la educación matemática” (p. 19386), y al introducir, como nuevo bloque de contenidos en el currículo de matemáticas, los “procesos, métodos y actitudes en matemáticas” (p. 19386). La metodología didáctica estable un enfoque funcional para resolver problemas en situaciones cotidianas y un enfoque instrumental para adquirir conocimientos en otras áreas. Remarca la importancia de los conocimientos previos, así como el trabajo contextualizado y manipulación de recursos, introduciendo el simbolismo una vez comprendidos los conceptos matemáticos (MEC, 2014b, p. 34062). Además el uso del lenguaje para comunicar los procedimientos realizados debe formar parte de trabajo diario en el aula. Se considera los procesos de resolución de problemas como uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte del aprendizaje (MEC, 2014b, p. 34060).

El currículo incluye un nuevo bloque de contenidos, *Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas*, como eje vertebrador del resto de los bloques, proponiendo utilizar el razonamiento en la búsqueda de estrategias de resolución, emplear de forma razonada la expresión verbal de los procesos de resolución de problemas y trabajar sobre problemas resueltos variando datos, preguntas, etc.[9]

El contenido de mi trabajo está incluido en el bloque del número y operaciones. El primero de ellos es la comprensión de algunos aspectos del sistema de numeración decimal, como es la decena y el valor posicional de las cifras. En la LOMCE, lo relacionado sobre este contenido en primer curso de educación primaria incluye nombrar, escribir y ordenar los números hasta la centena. En segundo de primaria se incluye las reglas de formación de los números y del valor posicional, iniciación a las equivalencias entre unidades, decenas y centenas. También debe trabajarse los números en situaciones reales, representación en una recta numérica y la descomposición. En los estándares de evaluación se pide que los niños cuenten de 10 en 10 y de 100 en 100 (MEC, 2014b, 34079).

Respecto a las operaciones aritméticas, en anteriores currículos, la suma y resta se incluían en el primer curso, dejando la iniciación a las tablas de multiplicar para el segundo curso y, de forma más completa, la multiplicación y división para tercero y cuarto primaria (Castro y Ruiz, 2011). Al comenzar el primer ciclo de educación primaria se repasan los números de una cifra y se introduce la decena, cobrando importancia el valor posicional propio de la escritura decimal. Aparecen los números de varias cifras (MEC, 2007, p. 31557) y las situaciones aritméticas se complican. Las estrategias informales, propias de la educación infantil, se vuelven poco eficientes para resolver problemas aritméticos en los que aparecen cantidades con números de dos cifras.

El nuevo currículo de educación primaria del Ministerio de Educación y Ciencia propone la "iniciación a la construcción de las tablas de multiplicar" (MEC, 2014b, P. 34069) en primer curso. En el borrador del currículo de la Comunidad de Madrid se marca la memorización de las tablas de multiplicar del 0, 1, 2 y 5 en el primer curso de Educación Primaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Madrid, 2014). Estas medidas suponen que el aprendizaje formal de las tablas de multiplicar se adelante un curso, con lo que implica dicho aprendizaje de memorización.

Como contenidos sobre el aprendizaje de las operaciones, en primer curso de primaria incluye las operaciones con números naturales, la adicción y la sustracción, e iniciación a la multiplicación y reparto. La multiplicación se debe ver como suma con sumando iguales, y también como contenido, la resolución de problemas de la vida cotidiana. Como contenidos relacionados con el cálculo, señala la utilización de los algoritmos estándar de suma y resta, descomposiciones aditivas y la iniciación en la construcción de las tablas de multiplicar (MEC, 2914b, p. 34069). En mi trabajo son importantes los procedimientos de resolución de las operaciones aritméticas con números de dos cifras. Sobre este contenido, me interesa lo relaciona con la resolución de problemas y así, en los estándares de evaluación aparecen la realización sumas y restas con números naturales, empleando los algoritmos aprendidos y el estándar, en contextos de resolución de problemas (MEC, 2014b, p. 34069). También es objeto de estudio la iniciación a la estructura multiplicativa a través de la resolución de problemas, por lo tanto, aparece como estándares la evaluación la comprensión y utilización expresiones lingüísticas adecuadas para describir situaciones de reparto (p. 34069) y la iniciación en la construcción de tablas de multiplicar, asociando la multiplicación a una suma de sumando iguales (p. 34070).

Relacionado con la resolución de problemas aritméticos en primero de educación primaria se establecen los siguientes estándares de evaluación: resuelve problemas que impliquen una

[9] El NCTM afirma que la resolución de problema da oportunidad a los estudiantes de adquirir formas de pensar, hábitos de perseverancia y curiosidad, y confianza en situaciones no familiares (NCTM, 2003, p. 55)

sola orden, y operaciones de adición y sustracción, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento, construyendo, argumentando y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización (MEC, 2014b, p. 34070); e iniciarse en la reflexión sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo (p. 34070).

Sobre el contenido de operaciones aritméticas en segundo curso de educación primaria, los contenidos son: operaciones de sumar (juntar o añadir) y restar (separar o quitar) y su uso en la vida cotidiana; iniciación a la multiplicación como suma de sumando iguales y como número de veces, y las tablas de multiplicar; estrategias iniciales para la comprensión y la realización de cálculos de sumas y restas; elaboración y utilización de estrategias personales y académicas de cálculo mental; explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos mentales y escritos; realización de algoritmos no académicos de sumas y restas, por medio de descomposiciones numéricas y otras estrategias personales; cálculo de sumas con llevadas, restas sin llevadas, multiplicación utilizando el algoritmo académico e iniciación a la división por un cifra (MEC, 2014b, pp. 34080-34081).

En las recomendaciones planteadas a los largo de este apartado se puede observar que todas ellas plantean la resolución de problemas como actividad en el aula para desarrollar los procesos que conforman la competencia matemática. Visto lo anterior, parece necesario aclarar cómo llevar a cabo una enseñanza basada en la resolución de problemas en el aula, tanto como metodología como contenido. Es necesario saber cómo se organizan y estructuran los contenidos usando la resolución de problemas, para así facilitar la tarea de planificar y diseñar las actividades de aula, utilizando la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas. A continuación, reviso brevemente la evolución de la resolución de problemas dentro de la educación matemática, concretamente la resolución de problemas aritméticos verbales en las primeras edades[10].

3. Enfoque y problemática sobre el aprendizaje de la resolución de problemas aritméticos verbales en los primeros años

La aritmética es uno de los contenidos matemáticos más importantes en Educación Primaria. Las cuatro operaciones, adición, sustracción, multiplicación y división se trabajan a lo largo de los seis cursos de dicho periodo comenzando con números naturales y ampliando más tarde a los números enteros y racionales. La enseñanza y el aprendizaje de las operaciones aritméticas son, por lo tanto, objeto de estudio de muchas investigaciones desde los comienzos de la educación matemática (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007).

La relación entre el aprendizaje de la aritmética y la resolución de problemas aritméticos verbales tiene un doble sentido. Verschaffel, Greer y De Corte (2007) señalan la función de aplicabilidad de los problemas aritméticos verbales, tras la enseñanza formal de destrezas aritméticas, que ha sido utilizada históricamente. Puig (1996) indica que habitualmente se confunde los problemas con ejercicios rutinarios de práctica de procedimientos, introduciendo primero el algoritmo de la operación aritmética, y a continuación, el planteamiento de problemas aritméticos verbales. Así, la resolución del problema se reduce a la aplicación del

[10] En este trabajo, utilizo el término “primeras edades” refiriéndome a los dos últimos cursos de educación infantil y a los dos primeros de educación primaria. Esto es equivalente a la etapa Pre-K-2 (NCTM, 2003).

algoritmo recién aprendido. Cuando ya se ha enseñado el algoritmo de varias operaciones aritméticas, la resolución implica “descubrir” que algoritmo hay que aplicar. De esta forma, Puig y Cerdán (1988) apuntan que los niños buscan palabras clave para decidir el algoritmo a realizar, lo que implica una lectura local del problema, sin profundizar en la comprensión del enunciado. En nuestro país, algunas recomendaciones curriculares anteriores sugieren este orden en la instrucción. Por ejemplo, en la LOGSE aparecía contenidos como “Resolver problemas… para comprobar que el alumnado sabe identificar cuál de las operaciones indicadas (suma o resta) es la adecuada para solucionar el problema y que sabe resolverla mediante el algoritmo aplicando correctamente todos sus pasos (MEC, 1992, p. 9615)” y en la LOE aparece como criterio de evaluación “Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta en los que intervengan números naturales (hasta tres dígitos) y utilizando los algoritmos básicos correspondientes… (MEC, 2007, p. 31559). En la LOMCE, se pide como estándar de evaluación “la realización sumas y restas con números naturales, empleando los algoritmos aprendidos y el estándar, en contextos de resolución de problemas” (MEC, 2014b, p. 34069).

En otro sentido, Verschaffel et al. (2007) indican que los problemas verbales se han empezado a utilizar “como vehículo para desarrollar destrezas resolviendo los problemas (p. 582)”. La resolución de problemas ha ido tomando importancia en las recomendaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Santos-Trigo (2008) señala que un gran número de propuestas curriculares a nivel internacional sugieren la resolución de problemas como eje central de la organización de los contenidos matemáticos. El NCTM (2003) introduce, como he comentado antes, en los estándares de procesos, la resolución de problemas, junto con el razonamiento y demostración, conexiones, comunicación y representación, considerando la resolución de problemas objetivo y método para aprender matemáticas y más ante la curiosidad de los niños más pequeños ante situaciones nuevas. La OCDE (2005) descompone la competencia matemática en la adquisición de varias procesos como el pensamiento y razonamiento, argumentación, comunicación, construcción de modelos, planteamiento y solución de problemas, representación y utilización de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal. La resolución de problemas se plantea como el eje vertebrador de la actividad matemática (NCTM, 2003; OCDE, 2005; MEC, 2007). Más allá, en MEC (2014b) se profundiza en esta idea de dar relevancia a los procesos introduciendo un nuevo bloque de procesos, donde la resolución de problemas toma gran importancia.

En apartados anteriores, tanto investigaciones en educación matemáticas como recomendaciones curriculares proponen el uso de la resolución de problemas como actividad fundamental del aprendizaje de las matemáticas. Centrándome en la resolución de problemas aritméticos verbales, durante la década de 1980 se produjo una gran auge en las investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales, donde se llegó a un gran consenso en su clasificación semántica para la estructura aditiva que no se consiguió en la multiplicativa (Castro, 2008). Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) proponen el planteamiento de problemas aritméticos verbales a niños que no han recibido instrucción formal sobre las operaciones aritméticas para que inventen y utilicen estrategias informales e intuitivas. Castro y Frías (2013) sostienen que los problemas aritméticos verbales mantienen un lugar importante en el aprendizaje de la aritmética, y existen investigaciones en los últimos años con problemas compuestos y de estructura multiplicativa (Castro y Ruiz, 2011; Castro y Frías, 2013).

Puig (1996) distingue un ejercicio de un problema por el conocimiento del algoritmo de la resolución de la tarea, indicando que, habitualmente muchas veces se confunde la resolución de problemas con ejercicios rutinarios de práctica de procedimientos. Distingue entre “ejercicios de reconocimiento” como los que el resolutor solo tiene que buscar en la memoria el resultado, “ejercicios algorítmicos” como los que el resolutor debe ejecutar un algoritmo, “problemas de aplicación” donde el resolutor reconoce un procedimiento de resolución y puede justificarlo, “problemas de búsqueda” en el que el resolutor crea procedimientos de resolución y “situaciones problemáticas” que constan de un enunciado que no indica lo qué hay que hacer y el resolutor tiene primero que averiguar esto. Esta clasificación depende del conocimiento y/o experiencia que haya tenido el resolutor. Si consideramos el primer sentido de la utilización de la resolución de problemas, estaríamos utilizando “problemas de aplicación”. Si tomamos el sentido contrario, en el que utilizamos la resolución de problemas para desarrollar conceptos, plantearíamos “problemas de búsqueda”. Para el aprendizaje de la aritmética y del valor posicional en primero de educación primaria, los problemas aritméticos verbales son problemas de búsqueda ya que su conocimiento sobre la aritmética no es completo.

Puig y Cerdán (1988) definen los problemas aritméticos verbales escolares a través de la descripción del enunciado y su resolución. Así, en un problema aritmético escolar verbal el enunciado tiene datos que suelen ser cantidades, la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y se pregunta por una o varias cantidades o relaciones entre las cantidades. La resolución consiste en la realización de una o varias operaciones aritméticas. Si la resolución consiste en la realización de una única operación aritmética estaremos ante un problema de una etapa y si la resolución implica la realización de varias operaciones aritméticas el problema será de varias etapas. Los problemas aritméticos verbales son problemas en los que se pide una o varias cantidades bajo unas condiciones y otras cantidades dadas. Para su resolución, Puig y Cerdán (1988) proponen el siguiente modelo, siguiendo los modelos de Dewey y Polya, para resolver los problemas aritméticos escolares: (1) lectura, (2) comprensión, donde el niño realiza transformaciones sobre la base del texto usando modelos o esquemas conceptuales para dotarlo de sentido, (3) traducción: el niño para el enunciado verbal a una operación aritmética, (4) cálculo, donde se utiliza las destrezas algorítmicas o cálculo mental, (5) solución, y (6) revisión y comprobación.

La fase de traducción en la que los niños deciden qué operación aritmética van a utilizar, implica el conocimiento formal de las operaciones aritméticas. Los problemas de una etapa se resuelven utilizando una única operación aritmética, por lo que aparecerán dos cantidades conocidas y una cantidad no conocida que será la incógnita del problema. El enunciado contiene una parte informativa donde se dan a conocer las dos cantidades conocidas y una pregunta donde se indaga sobre la cantidad desconocida o incógnita. La información se presenta mediante palabras que pueden desempeñar un papel importante en la decisión sobre qué operación realizar o indican las relaciones y acciones que ocurre entre las cantidades del problemas o ayudan a construir el contexto del problema. Las palabras que ayudan a determinar la operación se denominan palabras clave que Puig y Cerdán (1988) dividen en tres grupos: palabras propias de la terminología matemática como añadir, doblar, substraer, repartir; palabas que no son propias de la terminología matemática pero que ayudan a decidir la operación que hay que realizar como ganar o perder; y palabras que expresan relaciones. Los niños deciden qué operación aritmética van a utilizar dependiendo de la palabra clave del enunciado, ya que la lectura que hacen del enunciado es una lectura local para encontrar un indicio que le lleve a una buena elección (Puig y Cerdán, 1988).

Castro (2008) afirma que en la década de 1980 y principios de 1990, numerosos estudios indagaron en la dificultad de la resolución de estos problemas en función de su categoría y el lugar que ocupa la incógnita. Se suponía que los resolutores realizaban una representación del enunciado que les ayudaba a elegir la operación aritmética a realizar para resolver el problema. Sin embargo, las investigaciones probaron que los estudiantes obviaban la fase de representación que les ayudaba a comprender el problema, y se fijaban en características superficiales, como por ejemplo palabras como *ganar* o *total*, para decidir realizar una suma (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Un ejemplo de esta resolución es el uso de las palabras clave que indican Puig y Cerdán en la fase de traducción para decidir la operación. Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) señalan que los niños son capaces de resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y la resistencia a incluirlos estas situaciones a esta edad, puede provocar no dotar de significado el algoritmo que aprenden en primaria (p. 9). Así, la inversión del orden, primero resolución de problemas antes de enseñanza formal de destrezas, puede ayudar a que los niños doten de sentido las operaciones aritméticas que se introducen después, lo que implica aprendizaje con comprensión de contenidos matemáticos (Carpenter y Lehrer, 1999). En este sentido, se espera que la resolución por parte de los niños implique la comprensión global del enunciado del problema, sin búsqueda de palabras claves, sino con estrategias intuitivas, estableciendo relaciones entre cantidades.

Orrantia (2006) pone de manifiesto que dada la importancia de la resolución de problemas verbales en el aprendizaje de las matemáticas que permiten a los niños saber cuándo y cómo pueden aplicar sus conocimientos en situaciones reales, exista tanta dificultad en los niños al resolver problemas a pesar de realizar los algoritmos con gran habilidad. Una parte de estas dificultades es el uso de las palabras clave que acabo de comentar, o simplemente decidir la operación dependiendo del tamaño de las dos cantidades. Este autor remarca la importancia de los factores lingüísticos, del mundo y matemáticos para comprender el enunciado del problema y realizar una buena representación. Como ya he comentado, los problemas aritméticos verbales se pueden clasificar semánticamente, según estudios que detallaré más adelante, y dentro de cada una de las categorías, la operación aritmética para la resolución puede variar según el lugar que ocupe la incógnita. Por ejemplo, un problema considerado de cambio creciente, como “Raquel tenía unos caramelos, compró 3 más y ahora tienes 7. ¿Cuántos tenía al principio?”, un niño que lo resuelva superficialmente, la palabra “compró” le indicará que hay que añadir, sumar. Sin embargo, la incógnita no es la cantidad final que se obtiene, sino la cantidad inicial, con lo que habría que restar. Orrantia (2003) indica que aquí se ve implicado el conocimiento conceptual de la estructura aditiva como la relación parte-todo dan un total y no dominar este contenido conceptual no permitir comprender el problema. Puig y Cerdán (1988) indican que hay que favorecer una lectura y una comprensión más global de los enunciados en lugar de una lectura local. Fuson, Clements y Beckman (2009) ponen de manifiesto que “es muy importante que los maestros de niños de 5-6 años no enseñen estrategias de palabras clave, en que una sola palabra te indica qué operación hacer… el énfasis debe estar en comprender la situación, no solo una palabra (p.49)”.

En este sentido, Verschaffel, Greer y De Corte (2007) señalan que históricamente se ha enseñado formalmente las destrezas aritméticas, para después aplicarlas a la resolución de problemas aritméticos verbales. Schoenfeld (2007) afirma que a partir de la década de 1980, cuando el término resolución de problemas “se puso de moda”, su puesta en práctica fue una farsa, ya que la investigación sobre la resolución de problemas no estaba suficientemente desarrollada para esos años y la resistencia al cambio que supone cambiar de metodología a los profesores y a las editoriales de los libros de texto que realizaron cambios pocos sustanciales y superficiales. La resolución de problemas que se llevó a cabo en el aula era la resolución de problemas rutinarios y sencillos de aplicación de los contenidos trabajados recientemente. En nuestro país, algunas indicaciones en los currículos, como he comentado antes, favorecen este uso de la resolución de problemas aritméticos verbales. Orrantia, González y Vicente (2005) realizaron una revisión de libros de texto y en general encontraron que la forma de introducir los problemas favorecía estas estrategias superficiales ya que en muchos casos los estudiantes solo tienen que aplicar el conocimiento recién aprendido, y que no se necesita tener adquirido completamente. Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) indican que revisaron libros de texto de primero de Primaria y encontraron que el centro de atención es el cálculo, poniendo de ejemplo que desde el principio del libro se trabaja el algoritmo, introduciéndose el primer problema verbal en la página 30. Esto conlleva un uso "aplicacionista" de los problemas en el aula, simplemente como práctica de un conocimiento recién aprendido. Incluso en la Ley vigente en España, se puede encontrar un pequeño matiz "aplicacionista": "es necesario partir de los conocimientos matemáticos previos, de la experiencia para ir construyendo nuevos conceptos, procedimientos y estrategias, que podrán *aplicar* a la resolución de problemas de la vida diaria y que sentarán las bases para seguir aprendiendo" (MEC, 2014b, p. 34062).

Otro matiz sobre la resolución de problemas aritméticos verbales es, que en los libros de texto ocurre, que no se presentan problemas verbales que abarquen el abanico de situaciones aritméticas que existen, como ocurre por ejemplo con la resta, donde la situación planteada generalmente es la situación de quitar y no se plantean situaciones de añadir una cantidad a algo para llegar a ser una cantidad más grande, o problemas de comparación, como veremos más adelante (Fuson, 1992, p. 254).

En otro sentido, Verschaffel, Greer y De corte (2007) indican que hay investigaciones que han empezado a utilizar los problemas verbales "como vehículo para desarrollar destrezas resolviendo los problemas (p.582)". Santos-Trigo afirma que la resolución de problemas sigue proponiéndose, desde distintas aproximaciones como hemos visto anteriormente, como eje vertebrador de la organización de los contenidos matemáticos. Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) proponen plantear problemas aritméticos verbales a los niños, antes de recibir instrucción formal sobre el contenido aritmético, para que inventen y utilicen estrategias intuitivas aplicadas a su experiencia, el conocimiento informal (Baroody, 1997). Este tipo de trabajo implica una comprensión global del enunciado sin búsqueda de palabras clave, sino a través de estrategias intuitivas de modelización directa y conteo (Carpenter, Fennema et al., 1999). En la revisión sobre el pensamiento numérico temprano, Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez (2013) señalan que los niños pueden resolver situaciones aritméticas sencillas desde los 3 años, y la resistencia a no incluir estas situaciones en estas edades, puede provocar no dotar de significado el algoritmo que aprenden en primaria (p. 9). El conocimiento informal tiene sus limitaciones en los problemas aritméticos verbales al incrementar las cantidades y necesitan del conocimiento matemático formal que se imparte en el colegio (Baroody, 1997). Este autor indica que el aprendizaje informal puede ser base del conocimiento matemático formal, y que evitar las lagunas entre el conocimiento informal y la instrucción formal, puede evitar las dificultades de aprendizaje (p. 47). De esta forma, la inversión del orden tradicional de uso de la resolución de problemas en las que primero se introduce en contenido matemático y a continuación se proponen problemas para su aplicación, a utilizar inicialmente la resolución de problemas antes de la instrucción formal de contenidos matemáticos, puede ayudar a que los niños doten de sentido a las operaciones aritméticas. Carpenter y Lehrer (1999) indican que se facilitaría un aprendizaje con comprensión.

Como se puede observar en la Figura 1.5, en general, dos sentidos en la relación entre el aprendizaje de la aritmética y el uso de la resolución de problemas para este aprendizaje. En el sentido más habitualmente utilizado se introduce primero las operaciones aritméticas en el colegio y a continuación se realizan plantean problemas aritméticos verbales que se resuelven con la operación recién introducido, lo que implica un uso "aplicacionista" de la resolución de problemas y se favorece el uso de estrategias superficiales, de lectura local y uso de palabras clave.

En el otro sentido, el planteamiento de problemas aritméticos verbales antes de haber introducido la operación aritmética que lo resuelve, implica uso inicialmente de estrategias informales de los niños que pueden dar sentido más tarde al conocimiento formal.

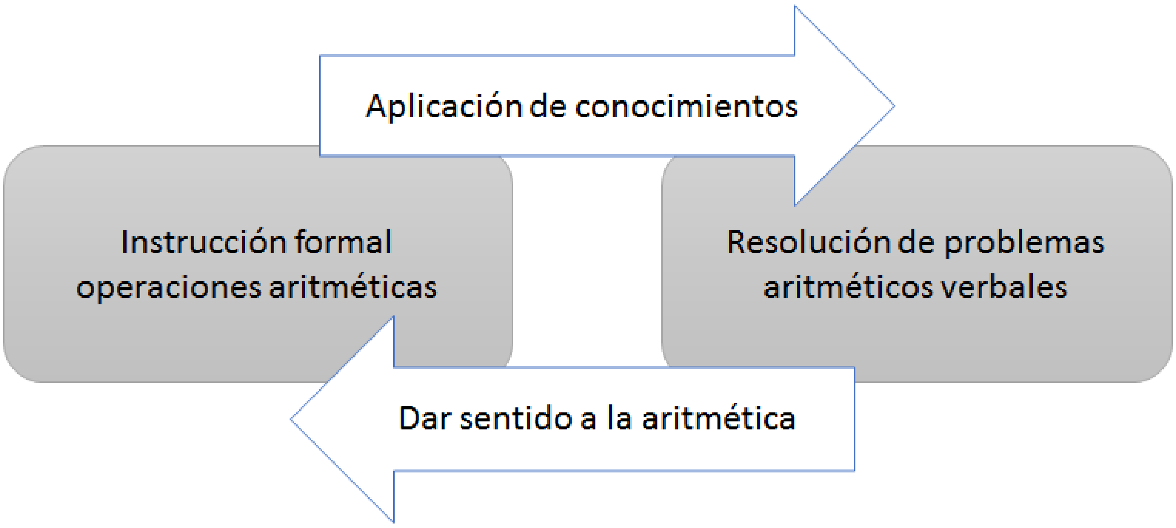


Figura 1.5. Dos sentidos en la relación aprendizaje aritmética – resolución problemas

Esta distinción entre un sentido "aplicacionista" y otro donde los problemas se proponen en primer lugar, refleja dos alternativas metodológicas que corresponden a diferentes formas de ver la enseñanza de las matemáticas. Baroody y Coslick (1998) y Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) explican que existen básicamente cuatro formas de entender la enseñanza de las matemáticas: (a) El enfoque de *destrezas*, con predominio de un aprendizaje memorístico de reglas, fórmulas, procedimientos y hechos; (b) en enfoque *conceptual*, que presta mayor atención a la comprensión de los procedimientos, ligando aspectos procedimentales y conceptuales, para que el aprendizaje sea significativo, usando materiales manipulativos que suelen reflejar una visión adulta de las estructuras matemáticas; (c) el enfoque de *resolución de problemas*, en que se fomentan fundamentalmente los procesos de pensamiento y razonamiento a través de la resolución de problemas y los alumnos desarrollan sus propios procedimientos y su comprensión; y (d) el enfoque *investigativo*, que refleja una visión intermedia entre el enfoque conceptual y el de resolución de problemas.

El modelo de sigue la enseñanza más tradicional es el de destrezas. Cuando a este enfoque se le añade el uso de materiales manipulativos, como pueden ser las Regletas de Cuisenaire o los Bloques de base diez de Dienes, de un modo dirigido por el profesor, buscando la comprensión de los procedimientos, nos situamos entre el enfoque de destrezas y el conceptual. Esta aproximación mixta, con variantes más cercanas a un enfoque o a otro, podría reflejar bastante bien el estado actual de la enseñanza de las matemáticas en muchos centros, y más relacionado con el sentido "aplicacionista". El enfoque de resolución de problemas está alineado con el otro sentido donde se desarrolla conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.

El enfoque investigativo propone trabajar simultáneamente un enfoque conceptual aproximado a primer sentido anteriormente indicado y un enfoque de resolución de problemas en el otro sentido. La propuesta que planteo en esta tesis doctoral se sitúa más cerca del enfoque *investigativo*. La inversión del orden tradicional, introduciendo la resolución de problemas antes de la enseñanza formal de destrezas, puede ayudar a que los niños doten de sentido a las operaciones aritméticas. Esto facilitará un aprendizaje con comprensión de estos contenidos matemáticos (Carpenter y Lehrer, 1999). Verschaffel y otros (2007) indica que, hasta hace unas décadas, la relación entre el conocimiento conceptual y procedimental se basaba el debate de "destrezas primeros" frente a "conceptos primero", y ahora se asume la iteración o simultaneidad de los dos.

4. Revisión de los trabajos del aprendizaje de la aritmética y valor posicional a través de la resolución de problemas aritméticos verbales

En este apartado voy a revisar algunas investigaciones sobre la resolución de problemas aritméticos verbales para el aprendizaje de la aritmética y algunos aspectos del sistema de numeración, como el agrupamiento y el valor posicional. El objeto de estudio de este trabajo va a ser el aprendizaje, a través de la resolución de problemas aritméticos verbales, del valor posicional y su relación con la resolución de problemas aritméticos verbales con números de dos cifras, por lo que las investigaciones que aquí presento están relacionadas con estos contenidos.

Durante mucho tiempo, el objetivo de aprendizaje de la aritmética se basaba en memorizar de forma automática los hechos numéricos básicos. La resolución de problemas aritméticos verbales ha ido ganando importancia en el aprendizaje de la aritmética (Castro, 2008). Si los niños resuelven problemas verbales tienen la oportunidad de construir una comprensión amplia de las operaciones aritméticas, primero con estrategias basadas en el procedimiento de conteo y, más tarde, con estrategias de cálculo más sofisticadas. Los niños de educación infantil y primeros cursos de educación primaria pueden dar más sentido a las relaciones entre cantidades cuando se les plantea un problema verbal, que cuando se les pregunta por el resultado de una combinación básica. Los niños comprenden el contexto del problema y son capaces de utilizar estrategias propias con materiales, más que si les damos las cifras escritas en un papel que no pueden manipular (Verschaffel, Greer, De Corte, 2007). Trabajos, como los de Bermejo, Lago y Rodríguez (1998), proponen reorganizar el currículo matemático sobre la adición y sustracción en torno a los problemas verbales y no sobre los algoritmos, ya que los problemas aritméticos verbales son situaciones matemáticas significativas para los niños. En concreto, señalan que los problemas verbales basados en la vida cotidiana integrarán las matemáticas de la escuela con las de fuera. Los trabajos del grupo de Cognición Cognitivamente Guiada (CGI) ponen de manifiesto que los niños al inicio de la escuela son capaces de resolver problemas de suma, resta, multiplicación y división mediante estrategias basadas en el conteo y con objetos, antes de recibir la instrucción formal sobre estos contenidos (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Carpenter y Moser, 1984; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993).

Como he comentado anteriormente, durante la década de los 80 y principios de los 90 se realizaron muchas investigaciones sobre los problemas aritméticos verbales. En ellas se llegó a consenso de clasificación semántica de los problemas aritméticos escolares verbales de estructura aditiva, menos concretado en la estructura multiplicativa, que representan las distintas situaciones aritméticas (Verschaffel y otros, 2007; Castro, 2008). A continuación voy a describir las categorías implicadas en mi trabajo. Es clave para este trabajo la descripción de las estrategias de los niños utilizadas para resolver problemas de estructura aditiva y multiplicativa con números de una cifra o a lo sumo hasta 20, y la descripción de las estrategias para problemas de números hasta 100 de problemas aditivos. En particular, me interesa la relación entre el conocimiento del valor posicional de los números para utilizar estrategias informales de los niños para resolver estos últimos problemas. Las cantidades más grandes implican estrategias más complejas en las que el valor posicional del sistema de numeración juega un papel importante, por lo que comentaré resultados obtenidos sobre estos contenidos.

4.1. Problemas aritméticos verbales escolares

En el mundo real existen distintos tipos de situaciones problemática a las que las operaciones aritméticas dan respuesta. Estas situaciones se presentan en el entorno escolar en forma de texto escrito, que es lo que llamamos problemas aritméticos escolares de enunciado verbal (PAEV) (Cañadas y Castro-Rodríguez, 2011).

Los problemas aritméticos verbales pueden ser problemas de una etapa o varias etapas dependiendo del número de operaciones aritméticas que hay que realizar para su resolución. Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia, González, Morcillo y Fernández (1997) los denominan también respectivamente problemas simples o compuestos. Los problemas de una etapa o simples relacionan dos datos numéricos y se resuelven por medio de una única operación aritmética. Los problemas de varias etapas o compuestos aparecen más de dos datos y más de una relación y se resuelven a través de más de una operación aritmética, ya sea la misma operación utilizada varias veces como operaciones diferentes.

Durante la década de 1980 se realizaron muchas investigaciones sobre la clasificación de estos problemas desde un enfoque semántico, centrado en el significado del enunciado verbal, llegando a un gran consenso en la estructura aditiva. Sin embargo, los trabajos sobre los problemas verbales de estructura multiplicativa "se cerraron en falso (Castro, 2008, p.25)". A continuación voy a describir brevemente los tipos de problemas que se utilizarán en esta tesis, primeramente los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva, después de estructura multiplicativa y, finalmente, estructuras de problemas de dos etapas.

4.1.1. Problemas aritméticos escolares verbales de estructura aditiva

Las categorías semánticas de los problemas de estructura aditiva fueron desarrolladas por investigaciones como Carpenter y Moser (1982; 1983), Vergnaud (1982) más extendido a número enteros que llegaron a categorías similares. Carpenter y Moser (1982) clasifican los problemas atendiendo a cuatro dimensiones: carácter dinámico o estático de las cantidades, relación entre subconjuntos que forman un conjunto, si se produce un incremento o decremento de una cantidad inicial, y por el lugar que ocupa la incógnita. Así se obtenía seis categorías: unión, separación, parte-parte-todo, comparación, igualación de aumento o disminución. En Carpenter y Moser (1983), modifican la denominación en problemas de cambio, combinación, comparación e igualación. Vergnaud (1982) establece seis categorías: composición de medidas, transformación de unión de dos medidas, relación estática de unión de dos medidas, composición de dos transformaciones, transformación de conecta dos relaciones estáticas y composición que conecta dos relaciones estáticas.

Fuson (1992) recoge el consenso de estas investigaciones con una clasificación basada en dos aspectos, concepción unitaria o binaria, y si las relaciones son estáticas o dinámicas. De esta clasificación surgen cuatro estructuras semánticas diferentes: combinación, comparación, cambio e igualación, que se desglosan en más tipos del problema al atender qué cantidad del problema es la incógnita, y los aspectos comentados. Los problemas de comparación, combinación e igualación representan una concepción binaria de la estructura aditiva, ya que hay dos cantidades que se comparan, combinan o igualan. Los problemas de cambio representan una concepción unitaria, ya que se tiene una cantidad a la que se le añade o se le quita cierta cantidad y quedando una cantidad final. Los problemas de cambio e igualación son dinámico, y también se incluye los problemas de combinación cuando se combinan físicamente dos cantidades. Si hay combinación conceptual, de relación de un conjunto con sus dos subconjuntos, se considera un problema estático, al igual que los problemas de comparación (Fuson, 1992). Bermejo y otros (1998) incluyen más categorías, al considerar si hay implicados uno o dos sujetos, y si hay dos sujetos, si hay acción externa o interna, definiéndome una variante relacional entre las dos cantidades iniciales que se ven afectadas por una acción exterior. Relacionado con estos tipos de problemas está la confusión que a menudo sucede entre problemas de igualación y de reparto igualatorio. En los segundos, hay dos cantidades diferentes se compensan una con la otra para igualarlas, y en los problemas de igualación, se añade o quita a una cantidad desde fuera para igualar las dos cantidades. Una comparativa de clasificación semántica de problemas aritméticos verbales se recoge en Caballero (2005, p. 46), donde compara trabajos importantes. A partir de estos estudios, los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva que utilizaré en esta investigación los describo a continuación, más detalladamente, con ejemplos de todos ellos.

Los problemas de *cambio* describen una secuencia temporal de sucesos, con una cantidad inicial modificada por una acción que añade o quita cierta cantidad resultando una cantidad final. Se distinguen 3 cantidades: cantidad inicial, cantidad de cambio y cantidad final. Dependiendo de si la acción añade o quita, el problema será de *cambio creciente* o *cambio decreciente*. En los problemas de *cambio creciente* se produce una acción por la cual el conjunto inicial aumenta en una cantidad dada (cambio), resultando una cantidad final mayor que la inicial. Teniendo en cuenta que la incógnita puede ser la cantidad final, la cantidad de cambio o la cantidad inicial, hay 3 tipos de problemas de cambio creciente. En la tabla siguiente se muestran ejemplos de problema de cambio creciente con la incógnita en cada una de sus cantidades.

Tabla 1.10. *Problemas de Cambio Creciente*

Incógnita	*Enunciado del problema*
Cantidad final	Lourdes tenía 5 muñecas. Por su cumpleaños le han regalado 3 muñecas. ¿Cuántas muñecas tiene ahora?
Cantidad de cambio	Lourdes tenía 5 muñecas. Le han regalado unas muñecas por su cumpleaños y ahora tiene. ¿Cuántas muñecas le han regalado?
Cantidad inicial	Lourdes tenía algunas muñecas. Por su cumpleaños le han regalado 3 muñecas y ahora tiene 8. ¿Cuántas muñecas tenía al principio?

Si la acción que modifica la cantidad inicial, disminuye dicha cantidad, es un problema de *cambio decreciente*. En la siguiente tabla se muestran ejemplos de problema de cambio decreciente con la incógnita en cada una de sus cantidades.

Tabla 1.11. *Problemas de Cambio Decreciente*

Incógnita	Enunciado del problema
Cantidad final	Nicolás tenía 18 canicas. Ha perdido 5 en el parque. ¿Cuántas canicas le quedan?
Cantidad de cambio	Nicolás tenía 18 canicas. Ha perdido algunas en el parque y le quedan 13. ¿Cuántas canicas ha perdido?
Cantidad inicial	Nicolás tenía algunas canicas. Ha perdido 5 en el parque y le quedan 13. ¿Cuántas canicas tenía al principio?

Los problemas de *combinación* representan situaciones donde hay dos cantidades que se combinan para dar una cantidad total. Estos problemas se consideran estáticos, sin acción, ya que describen relaciones estáticas entre dos subconjuntos disjuntos que forman un conjunto total. Fuson (1992) desglosa estos problemas en estáticos, con un conocimiento conceptual de la relación parte-todo, y añade una variante dinámica a este tipo de problema indicando que, cuando esta situación se plantea a niños que no han alcanzado la noción de inclusión en una situación de combinación parte-todo, los niños representan con objetos la situación de todos juntos y realizan una acción de unión que esta situación sea dinámica. A continuación se muestran ejemplos de problema de combinación con la incógnita en cada una de sus cantidades.

Tabla 1.12. *Problemas aditivos de combinación*

Incógnita	*Enunciado del problema*
Total	En un frutero hay 8 manzanas y 4 peras. ¿Cuánta fruta hay?
Parte	En un frutero 12 frutas de las cuales 8 son manzanas y el resto peras. ¿Cuántas peras hay?

Los problemas de *comparación*, como su nombre indica, comparan cuantitativamente dos cantidades. Representa una relación estática ya que no hay acciones sobre las cantidades, en concreto, se relaciona cuánto mayor o menor es una cantidad que otra. En los enunciados de estos problemas hay tres cantidades: cantidad de referencia, cantidad comparada y la diferencia entre las dos. Cuando se utiliza “más que” la cantidad comparada será mayor que la cantidad de referencia, y cuando se utiliza “menos que” la cantidad comparada será menor que la cantidad de referencia. Teniendo en cuenta las cantidades y la expresión del enunciado aparecen seis tipos de problemas de comparación. A continuación, muestro ejemplos de cada tipo.

Tabla 1.13. *Problemas aditivos de comparación*

Tipo	Incógnita	Enunciado Problema
Comparación aumento	Diferencia	Carlos tiene 8 caramelos. Lourdes tiene 11. ¿Cuántos caramelos tiene Lourdes más que Carlos?
	Referencia	Lourdes tiene 11 caramelos. Tiene 3 más que Carlos. ¿Cuántos tiene Carlos?
	Comparada	Carlos tiene 8 caramelos. Lourdes tiene 3 más que Carlos. ¿Cuántos tiene Lourdes?
Comparación disminución	Diferencia	Nacho tiene 15 cromos. Nicolás tiene 11. ¿Cuántos cromos tiene Nicolás menos que Nacho?
	Referencia	Nicolás tiene 11 cromos. Tiene 4 menos que Nacho. ¿Cuántos cromos tiene Nacho?
	Comparada	Nacho tiene 15 cromos. Nicolás tiene 4 menos que Nacho. ¿Cuántos cromos tiene Nicolás?

Los problemas de comparación tienen una variante de acción, los *problemas de igualación* (Fuson, 1992). Los problemas de igualación es la integración de un problema de comparación y un problema de cambio. Aparecen expresiones “tantos como” como señal de un problema de comparación y además se produce una acción para igualar una cantidad con otra con la que ha sido comparada, que representa el cambio. Las cantidades de estos problemas son la cantidad de referencia, la cantidad comparada y la igualación. Si la cantidad comparada tiene que ser aumentada (creciente) para igualarse a la cantidad referencia mayor será un *problema de igualación aumento*. Si la cantidad comparada tiene que disminuir (decreciente) para igualarse a la cantidad de referencia menor, será un *problema de igualación de disminución*. Teniendo en cuenta estos aspectos y qué cantidad es la incógnita, la clasificación de problemas aditivos de igualación contiene 6 tipos de problemas. A continuación muestro ejemplos de cada uno de estos tipos.

Tabla 1.14. *Problemas aditivos de igualación*

Tipo	Incógnita	Enunciado Problema
Igualación aumento	Igualación	Ana tiene 8 pulseras. Lucía tienes 5 pulseras. ¿Cuántas pulseras tiene que conseguir Ana para tener tantas como Lucía?
	Comparada	Ana tiene 8 pulseras. Si Lucía se compra 3 pulseras tendrá tantas como Ana. ¿Cuántas pulseras tiene Lucía?
	Referencia	Lucía tiene 5 pulseras y si se compra 3 pulseras tendrá tantas como Ana. ¿Cuántas canicas tiene Ana?
Igualación Disminución	Igualación	Víctor tiene 3 piruletas. Marcos tiene 5 piruletas. ¿Cuántas piruletas se tiene que comer Marcos para tener tantas como Víctor?
	Comparada	Víctor tiene 3 piruletas. Si Marcos se come 2 piruletas tendrá tantas como Víctor. ¿Cuántas piruletas tiene Marcos?
	Referencia	Marcos tiene 5 piruletas y si se come 2 tendrá tantas como Víctor. ¿Cuántas piruletas tiene Víctor?

Aspectos de los problemas verbales aritméticos como pueden ser el tipo de esquema semántico de su enunciado y la cantidad desconocida, pueden aumentar o disminuir la dificultad de la tarea de resolverlos (Carpenter y Moser, 1984; Castro, 2008; Puig y Cerdán, 1988). Tanto la descripción de la situación, como el orden en el que se presentan las cantidades pueden afectar a la resolución de los niños (Fuson, 1992). Hay investigaciones que estudian el nivel de dificultad de los problemas según su categoría semántica y el lugar que ocupa la incógnita.

Bermejo y Rodríguez (1987) realizaron un estudio con el objetivo de comparar la dificultad de problemas de combinación con total desconocido y de igualación con la cantidad de igualación desconocida con niños de Educación infantil y primer curso de educación primaria. Los problemas de combinación lo ejecutaban correctamente con porcentajes entre el 87% y 97%, y los errores que cometieron no eran por elegir mal la representación del problema sino al ejecutarlo. El gran éxito de resolución lo justifican a la permisibilidad de disponer objetos, de hecho, la estrategia juntar todo fue utilizado por la mayoría de los niños disminuyendo su uso con la edad y aumentando estrategias de conteo y hechos numéricos. Otra razón por la que explican los buenos resultados de los niños es el lugar de la incógnita, ya que si la incógnita hubiera estado en una de las partes su resolución sería más difícil, que estos autores lo justifican por no ajustarse a la forma canónica “a + b = ¿ ?”. Sin embargo, los problemas de igualación tuvieron muchos menos éxito en todas las edades siendo la representación del problema inicial el error más cometido, por la comprensión de la situación.

Estos autores realizaron un estudio más tarde con el objetivo de jerarquizar los tipos de problemas aritméticos verbales de estructura aditiva según su dificultad según el tipo de problema, lugar que ocupa la incógnita, nivel educativo y operación (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998). Es estudio se realizó con niños de tercer curso de Infantil y primer y segundo curso de Primaria. Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) presentan una secuencia de problemas aritméticos verbales de estructura aditiva ordenados por dificultad. Así el orden de aprendizaje sería: combinación con total desconocido, cambio con la cantidad final desconocida, igualación con referente desconocido, cambio con cantidad de cambio desconocido, igualación con igualación desconocida, combinación con parte desconocida, cambio con cantidad inicial desconocida, comparación con referente desconocido, comparación con diferencia desconocida, igualación con cantidad comparada desconocida, y comparación con cantidad comparada desconocida.

Rodríguez (1992) clasifica los posibles errores de los niños al resolver los problemas en ejecución, donde los niños eligen bien la operación o acción a elegir pero no la realiza correctamente, o de representación, donde repiten alguna cantidad del problema, o inventan una respuesta, o eligen mal la operación. Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) indican que uno de los procedimientos inadecuados que utilizan los niños es la selección de una operación inadecuada. Es importante destacar que los cuatro grandes grupos de esta clasificación semántica no coinciden exactamente con una operación cada uno. Dentro de cada tipo de problema, dependiendo del lugar que ocupe la incógnita tendremos un problema de suma o de resta. En la siguiente tabla relaciono los problemas de cambio, tanto por la dirección de la acción como por el lugar que ocupa la incógnita, y la operación aritmética que resuelve la situación.

Tabla 1.15. *Operaciones aritméticas que resuelven problemas de cambio*

Tipo	*Incógnita*	*Operación*
Cambio Creciente	Final	Suma
	Cambio	Resta
	Inicial	Resta
Cambio decreciente	Final	Resta
	Cambio	Resta
	Inicial	Suma

Orrantia y Vicente (2006) indican que los niños que utilizan estrategias superficiales, utilizando palabras clave para asociar el algoritmo a realizar suelen tener dificultades al resolver los problemas que no está relacionada esa palabra clave con la operación aritmética que lo resuelve. Por ejemplo, un problema de Cambio Creciente tendrá palabras clave que indicarán un aumento de la cantidad inicial. Si la incógnita es la cantidad final, elegir una suma resolverá el problema, pero si la incógnita es la cantidad inicial o de cambio, la suma no resolverá el problema. Fuson (1992) la importancia de distinguir la situación del problema con la operación aritmética que lo resuelve.

Las diferentes situaciones también presentan diferentes significados para los símbolos "+", "-" y "=", que Fuson (1992) denomina marcas ya que lo símbolos tienen un significado establecido, pero las marcas deben interpretarse y darles significado. La sentencia "18 - 5 = 13" representa el problema "Nicolás tenía 18 canicas. Ha perdido 5 en el parque. ¿Cuántas canicas le que quedan?". En esta situación "-" significa "quitar a 18, 5" y la marca "=" significa "llegar a ser". En otra situación como "Carlos tiene 8 caramelos. Lourdes tiene 11. ¿Cuántos caramelos tiene Lourdes más que Carlos?", la expresión "11-8=3", "-" significa "comparo" y "=", "es la misma cantidad que". En la escuela habitualmente se establece significados únicos a las marcas que luego impiden la comprensión y la utilización en otras situaciones. Estudios sobre el signo igual ponen de manifiesto que en la escuela se presenta interpretaciones limitadas y unidireccionales del signo igual, como "resultado de" (Molina, 2006; Ramírez y Rodríguez, 2011).

Caballero (2005) realiza un análisis de los errores cometidos por niños de educación infantil, y utiliza tres tipos de errores, según los propuestos por Bermejo y Rodríguez (1992). Estos tipos son: *errores conceptuales*, donde se refleja falta de comprensión de la estructura implicada; *errores procedimentales*, más relacionados con el procedimiento asociado a la estructura conceptual; y de *errores de ejecución*, como la confusión en el conteo.

Los errores comentados pueden extenderse también a los problemas de estructura multiplicativa. A continuación, describo brevemente los problemas de estructura multiplicativa que voy a utilizar en mi trabajo.

4.1.2. Problemas aritméticos escolares verbales de estructura multiplicativa

La clasificación semántica de los problemas de estructura multiplicativa no está universalmente consensuada (Castro, 2008). Para una clasificación semántica de los problemas de estructura multiplicativa, Puig y Cerdán (1988) distinguen dos tipos de cantidades: extensivas (E) e intensivas (I), siguiendo los trabajos de Schwartz (1986). Como muestro más adelante, una cantidad es un par ordenado (x, u), donde x es un número y u una unidad de magnitud. Las cantidades extensivas expresan la extensión de cierta sustancia o entidad, y se pueden sumar, como “5 muñecas”, y son aditivas en el sentido que la unidad de magnitud no se altera. Las cantidades intensivas, son razones y expresan una propiedad de un elemento en concreto, describen un aspecto interior de una entidad o sustancia, y son unidades compuestas por el cociente de dos cantidades extensivas (Puig y Cerdán, 1988). Ejemplos de cantidades intensivas, son “euros/unidad”, “km/h” o “litros/garrafa”.

Puig y Cerdán (1988) reúnen las clasificaciones de Nesher (1988) y Vergnaud (1983) en tres categorías: *isomorfismo de medidas*, donde se da una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes, donde la cantidades dato del problema se combinan como E×I, I×E, E/E (división partitiva), E/I (división medida o cuotitiva); *comparación multiplicativa*, que no aparece en las clasificación de Vergnaud, que trata de comparar dos cantidades de la misma magnitud con un factor multiplicativo que se considera intensivo; *producto de medidas o cartesiano*, que recogen situación de área, volumen o combinaciones, donde las cantidades son E×E.

Hay investigaciones que distinguen entre situaciones simétricas o asimétricas (Castro, Castro y Rico, 2004; Carpenter, Fennema et al., 1999). Las situaciones simétricas los dos factores tendrán el mismo papel y son intercambiables como son el *producto cartesiano*, por ejemplo las dos dimensiones de un rectángulo para hallar su área, de *combinación*, o de *matrices*. Mientras que las situaciones asimétricas se relacionan con la idea de reiterar una misma cantidad un número de veces como son los *grupos iguales*, problemas de *tasa*, y *comparación multiplicativa*. El trabajo Caballero (2005, p. 101) recoge otras investigación de clasificación semántica de la estructura multiplicativa, además de los citados aquí.

Los problemas multiplicativos que utilizo en este trabajo son los problemas de *grupos iguales*. En los problemas de *grupos iguales* se repite un número determinado de grupos iguales para conseguir una cantidad. Estos problemas son considerados por Carpenter, Fennema et al. (1999) como problemas de agrupamiento y reparto. Aparecen tres cantidades: números grupos, números de elementos por grupos y número total de elementos. En los problemas de multiplicación se conoce el número de grupos y el número de elementos por grupos, la incógnita es el total de elementos. En los problemas de división medida se conoce el número de elementos por grupo y el total de elementos, la incógnita es el número de grupos. En los problemas de división partitiva se conoce el número de grupos y el total de elementos, la incógnita es el número de elementos por grupo. En la tabla siguiente se muestran ejemplos de cada uno de estos tipos.

Tabla 1.16. *Problemas de Grupos Iguales*

Tipo	*Incógnita*	*Problema*
Multiplicación	Total de elementos	Luis tiene 3 cajas de pinturas con 6 pinturas en cada caja. ¿Cuántas pinturas tiene?
División Medida	Número de grupos	Luis tiene 18 pinturas y las quiere guardar en cajas con 6 pinturas en cada caja. ¿Cuántas cajas necesita?
División Partitiva	Número de elementos por grupo	Luis tiene 18 pinturas y va a guardarlas en 3 cajas con el mismo número de pinturas en cada una. ¿Cuántas pinturas caben en cada caja?

4.1.3. Problemas aritméticos de varias etapas

Los problemas aritméticos de varias etapas se componen de dos o más problemas aritméticos de una etapa. Aparecen más datos que en los problemas de una sola etapa, hay más relaciones entre esas cantidades, y por lo tanto, se ven involucradas más operaciones aritméticas en la resolución. Voy a comenzar a describir los problemas de dos etapas. Castro (2008) define un problema aritmético compuesto como “aquel entre cuyos datos hay, al menos, dos relaciones cuantitativas, y por tanto, requiere de más de una operación para obtener la solución numérica” (p. 19).

Los problemas aritméticos de dos etapas suponen la realización de dos operaciones aritméticas consecutivas, así un problema aritmético de dos etapas está compuesto por dos problemas aritméticos de una etapa de los anteriormente descritos. Los problemas aritméticos de una etapa pueden ser de estructura aditiva y estructura multiplicativa según la categorización vista. Al combinar estos problemas se obtiene una clasificación de los problemas de dos etapas dependiendo si los dos problemas que los componen son aditivos o multiplicativos.

Dentro de la estructura aditiva hay problemas de cambio, combinación, comparación e igualación, y dentro de la estructura multiplicativa, hay problemas de grupos iguales, tasa, comparación multiplicativa, producto de medidas, combinación y matrices. Si combinamos estos tipos de problemas en pares ordenados saldrán 100 opciones de problemas de dos etapas, y más si consideramos la incógnita de cada problema. La categorización de los problemas aritméticos de dos etapas se vuelve bastante compleja, y más si consideramos problemas aritméticos de n etapas.

Nesher (1991) analizó las posibilidades estructurales de los problemas de dos etapas. Este autor considera dos esquemas que representan a las cuatro operaciones, un esquema aditivo que lo conforman dos partes y un total, y un esquema multiplicativo con dos factores y su producto. Así, el diagrama para un problema de una etapa puede ser de dos formas como se muestra en la Figura 1.6.

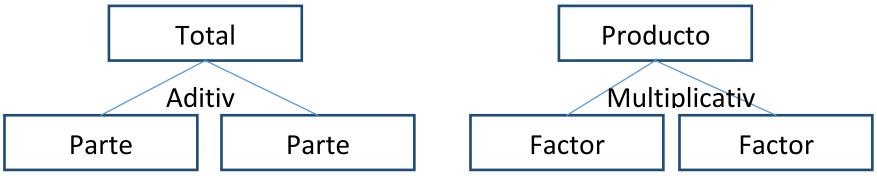


Figura 1.6. Estructura de un problema de una etapa para Nesher (1991).

Nesher (1991) distingue 3 tipos de estructura para problemas de dos etapas:

Esquema Jerárquico: En un esquema jerárquico, el resultado de una operación es el dato de la otra operación. Siguiendo el esquema anterior la estructura del problema quedaría reflejada en la siguiente Figura 1.7.

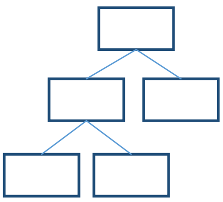


Figura 1.7. Esquema jerárquico de un problema de dos etapas.

Esquema compartir el todo: En un problema de dos etapas con un esquema que comparten el resultado las dos operaciones comparten el resultado de la operación. La estructura del problema queda reflejada en la Figura 1.8.

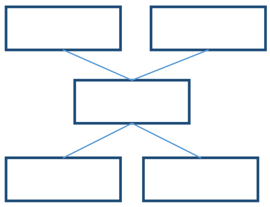


Figura 1.8. Esquema de un problema de dos etapas que comparten el todo.

Esquema compartir una parte: En un problema de dos etapas que se comparte una parte, las dos operaciones a realizar para resolver el problema comparten un dato. El esquema de este tipo de problema se ve en la Figura 1.9.

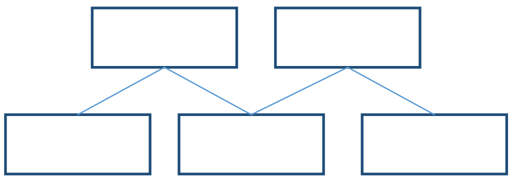


Figura 1.9. Esquema de un problema de dos etapas que comparte una parte.

Ejemplos de los tres tipos anteriores de problemas se muestran en la siguiente Tabla 1.16.

Tabla 1.17. *Problemas aritméticos de dos etapas*

Tipo	*Enunciado*
Jerárquico	Susana ha comprado 3 manzanas y 2 peras. Si cada pieza de fruta cuesta 2 euros, ¿cuánto dinero se ha gastado?
Compartir el todo	Juan tiene 10 euros ahorrados. Quiere comprarse 4 sobres de cromos que valen 3 euros cada uno. ¿Cuánto dinero tendrá que conseguir para comprarse los 4 sobres de cromos?
Compartir una parte	Un paquete de 3 pelotas de baloncesto vale 90 euros. Una camiseta vale 25 euros. ¿Cuánto dinero valdrá una pelota de baloncesto y una camiseta?

Es importante observar que los problemas de dos etapas comparten una cantidad que sirve de enlace entre las dos relaciones que se dan en el problema, y además esta cantidad es desconocida y hay que calcularla utilizando una relación para poder llevar a cabo la operación aritmética de la segunda relación.

Castro (2008) afirma, que partiendo de que los problemas de dos etapas tienen alguna estructura semántica anteriormente vista, existen varios factores que influyan en la comprensión del problema: la que lleva ya aparejada la estructura semántica de cada uno de los problemas simples que lo forman, y “la duplicación semántica y la influencia decisiva de la primera relación enunciada sobre la segunda para formular una representación correcta (p. 20).”

4.2. Estrategias de resolución de problemas aritméticos verbales

La investigación sobre el aprendizaje de las combinaciones básicas, tanto por suma como producto, de número de una cifra ha cambiado drásticamente. Durante mucho tiempo, el objetivo de aprendizaje se basaba en memorizar de forma automática los hechos numéricos básicos. Desde hace unos años, la enseñanza se centra en el desarrollo de esos hechos numéricos a partir de estrategias informales de los niños (Verschaffel, Greer, De Corte, 2007).

El desarrollo de la comprensión del número natural ha estado influenciado durante muchos años por el marco de las operaciones lógicas de Piaget, como clasificaciones, seriaciones y conservación del número, dejando de manifiesto que los niños no adquirían un significado completo del número natural hasta las edad de 6 a 8 años cuando alcanzan la edad de las operaciones concretas. En las tres últimas décadas, se ha cuestionado el papel central de las operaciones lógicas y ha tomado importancia el procedimiento del conteo que permite a los niños más pequeños resolver problemas sencillos numéricos (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Gelman y Gallistel (1975) señalan que la capacidad de la comprensión del número se desarrolla a partir del procedimiento del conteo, y va a permitir a los niños resolver problemas aritméticos sencillos (Clements y Sarama, 2007).

4.2.1. Resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva

Fuson (1992) propone un modelo de comprensión de la estructura conceptual de la adición y la sustracción que consiste en tres niveles donde el dominio de la secuencia de numerales toma un papel importante. Considerando que la estructura aditiva está formada por dos sumando y su suma, en el nivel 1, los niños solo pueden representar una cantidad del problema en un momento dado, es decir, no son capaces de construir una representación mental de la situación del problema globalmente, decidir una estrategia de resolución y ejecutarla. Los niños construyen la situación del problema, las cantidades y el procedimiento de resolución modelizando con objetos o marcar las relaciones existentes en el enunciado (Fuson, 1992). Para ello, no es necesario que los niños sepan escribir sentencias numéricas, como por ejemplo "5 + 4" para resolverlos, sino que utilizan la modelización directa en la que representan todas las cantidades del problemas y las acciones y relaciones sobre ellas (Carpenter y Moser, 1984). Para resolver problemas verbales de suma, se utiliza las estrategia *contar todo con objetos o marcas*[11], que consiste en construir una representación del primer sumando con objetos o marcas, a continuación construyen una representación del segundo sumando, y por último lo cuentan todo. Esta estrategia tiene variaciones. Una de ellas es cuando los niños representan la primera cantidad y después le *añaden* la segunda cantidad, que se utiliza en los problemas de cambio creciente, o cuando se representan las dos cantidades por separado y se *juntan*, como ocurre en los problemas de combinación (Fuson, 1992; Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Estos autores también indican que los niños pueden realizar la acción *física* de juntar las dos cantidades o, *conceptual*, en el que no realizan la acción de juntar.

Para resolver problemas que implica resta se han observado tres procedimientos generalmente. La estrategias *quitar*[12], en la que se representa con objetos o marcas la suma de la estructura aditiva y, se quitan los objetos que indica la cantidad del sumando conocido. La estrategia *añadir hasta*[13], los niños representan con objetos o marcas la cantidad del sumando conocido y añaden objetos hasta conseguir la suma dada, después se cuentan los objetos añadidos. La estrategia *separar de*[14] consiste en representar la suma conocida, contar los objetos del sumando conocido y separarlos del resto de los objetos. Además de estas estrategias, los niños utilizan el *emparejamiento*[15] en las que los niños representan el sumando

[11] Traducción de *counting all* (Fuson, 1992, p. 251)
[12] Traducción de *take-away* (Fuson, 1992, p. 254)
[13] Traducción de a*dd-on-up-to* (Fuson, 1992, p. 254)
[14] Traducción de *separate-to* (Fuson, 1992, p. 254)
[15] Traducción de *matching* (Fuson, 1992, p. 254)

conocido y la suma conocida, y emparejan las dos cantidades, contando los objetos que no quedan emparejados con objetos del otro conjunto (Fuson, 1992).

Dentro del nivel 1, los niños resuelven antes los problemas de cambio y combinación canónicos, es decir, cuando la incógnita es la cantidad final o total respectivamente, que el resto de los problemas, considerando que no todos los estudios incluyen problemas de igualación (Fuson, 1992, p. 254). Más tarde los niños resuelven problemas de cambio con la cantidad de cambio desconocida, siendo primero los problemas de cambio creciente y después los problemas de cambio decreciente (Carpenter y Moser, 1984). Por último, los niños utilizan estrategias de *ensayo y error* para resolver problemas de cambio con la cantidad inicial desconocida (Fuson, 1992).

En un segundo nivel, los niños pueden representar las tres cantidades a la vez, considerando los dos sumandos *embebidos*[16] en su suma (Fuson, 1992). En este nivel la secuencia de numerales no se utiliza para contar las unidades de cada cantidad, sino que las palabras-número son en sí misma contadas, y suele llevarse un registro, muchas veces con los dedos, de las palabras-número que se van contando. Los procedimientos que se aplican a problemas que implican suma se basan en el *conteo a partir de un número*[17]. *Contar desde el primero*, los niños parten del primer sumando y realizan un conteo de tantos numerales como indica el segundo sumando, por ejemplo, para suma 4 + 5, comienzan desde el 4, “4, …, 5, 6, 7, 8, 9”, llevando un registro del número de numerales que van diciendo para contar cinco de ellos (Fuson, 1992). No está muy claro el paso de la estrategias *contar todo* a *contar desde el primero*, y Fuson (1992) lo propone como tema a indagar, ya que parece que hay una estrategia intermedia en la que cuenta desde un sumando pero representando el segundo sumando con objetos, para seguir la secuencia de conteo señalando esos objetos. Tampoco está muy claro cómo evoluciona la estrategia *contar a partir del primero* a la estrategia *contar desde el mayor*, los niños parten del sumando mayor y realizan un conteo de tantos numerales como indica el sumando menor (Fuson, 1992). Carpenter y Moser (1984) observaron que los niños utilizaban ambos procedimientos sin un orden aparente. Para resolver problemas de resta también se utiliza un procedimiento de conteo hacia delante, *contar hasta*[18], en el que se lleva un registro del número de numerales que se cuentan desde el sumando conocido a la suma total. El conteo regresivo se utiliza para dos estrategias, aunque Fuson (1992) indica la dificultad de este procedimiento que provoca errores en su ejecución. La primera es *contar hacia atrás*[19] donde se parte de la suma y cuenta hacia atrás tantos numerales como el sumando conocido indica, siendo la solución el último numeral pronunciado. La otra estrategia es *contar hacia atrás hasta*[20] donde se cuenta desde la suma hasta el otro sumando dado, llevando un conteo de los numerales que se pronuncian (Fuson, 1992). En estas estrategias se utilizan inicialmente objetos para representar el segundo sumando, como ocurre en el paso de la estrategia de contar todo a contar a partir de un sumando, y poder llevar el registro de la secuencia de conteo con los objetos.

También puede darse la estrategia c*ontar todo sin materiales*, los niños hacen un conteo de las dos cantidades pero sin material (Fuson, 1992; Verschaffel y otros, 2007). Como las estrategias de conteo hacia atrás resultan más difíciles por el mismo hecho de utilizar la secuencia de numerales de forma regresiva, los niños que tienen adquirida la comprensión de la estructura aditiva utilizan en su lugar estrategias como *quitar* de modelización de directa o *contar hasta* (Carpenter y Moser, 1984; Fuson, 1992). De hecho, Fuson (1992) indica que se

[16] Traducción de *embedded* (Fuson, 1992, p. 250)
[17] Traducción de *count-on* (Fuson, 1992, p. 255)
[18] Traducción de *counting-up-to* (Fuson, 1992, p. 255)
[19] Traducción de *count-down* (Fuson, 1992, p. 255)
[20] Traducción de *count-down-to* (Fuson, 1992, p. 255)

ha observado un subnivel, dentro de este nivel 2, en el que los niños presentan un conocimiento reversible de la estructura aditiva que les permite reconocer la situación inversa de una situación , así por ejemplo, si en un cambio decreciente con la cantidad inicial desconocida, a ésta se le quita una cantidad de cambio para llegar a la cantidad final, se puede ver como que juntando la cantidad final con la cantidad de cambio quitada se vuelve a conseguir la cantidad inicial. Así Carpenter y Moser (1984) observaron que los niños en un problema que implica resta podían utilizar siempre la estrategia *contar hasta*.

En un tercer nivel, las situaciones aditivas pueden verse con un *trío* numérico en que se conocen dos cantidades y se busca la tercera. Los niños utilizan *hechos numéricos derivados*, en los que redistribuyen las cantidades dadas para recuperar sumas o restas que ya conocen, como por ejemplo 4 + 5 = (4 + 4) + 1 = 8 + 1 = 9. Verschaffel y otros (2007) incluye los hechos numéricos derivados entre el segundo y el tercer nivel considerando ya la recuperación de hechos numéricos básicos en el tercer nivel. En la r*ecuperación de hechos numéricos básicos*, los niños recuperan 4 + 5 = 9, se consideran *maestros* en hechos numéricos (Fuson 1992; Verschaffel y otros, 2007). En este tercer nivel, los niños pueden construir representaciones simultáneas mentales integradas de números en una suma, descomponerlos y utilizar hechos numéricos derivados (Fuson, 1992). Verschaffel y otros (2007) indica que la memorización de los hechos numéricos no son todas las representaciones mentales de las combinaciones básicas, sino que gran parte de ellos se almacenan en forma de reglas, como N + 0 = N y la propiedad conmutativa, gracias al pensamiento relacional.

Los niños de Educación Infantil y primeros cursos de Educación Primaria pueden dar más sentido a las relaciones entre cantidades cuando se les plantea un problema verbal, que cuando se les pregunta por el resultado de una combinación básica (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001, p. 169). Los niños comprenden el contexto del problema y son capaces de utilizar estrategias propias con materiales, más que si les damos las cifras escritas en un papel que no pueden manipular. Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck (1993) describen las estrategias utilizadas por los niños al plantear problemas verbales vistos en los apartados anteriores. Estos autores distinguen tres tipos de estrategias que se asemejan a los tres niveles descritos por Fuson (1992). El primer tipo de estrategias son las de *modelización directa*, en las que los niños representan todas las cantidades del problema y realiza acciones que reflejan las acciones y relaciones entre las cantidades que indica el enunciado del problema. Estas estrategias van evolucionando a *estrategias de conteo*, donde los niños utilizan la secuencia de numerales. Y por último, utilizan los *hechos numéricos derivados* y la *recuperación de hechos numéricos básicos*.

Las estrategias de conteo se utilizan cuando los niños están en niveles avanzados de adquisición de la secuencia de conteo. Fuson (1992) indica varios niveles en la elaboración de la secuencia de numerales. Un primer nivel de *hilera* en el que la secuencia de numerales es una cadena sin distinción de elementos y sin establecer ninguna relación entre ellos. El segundo nivel, *cadena irrompible*, en el que los niños tienen que empezar siempre desde el uno, y ya distinguen los numerales pudiendo establecer relaciones como “anterior” o “posterior”. El tercer nivel, *cadena rompible*, los niños establecen la relación “entre” dos numerales y son capaces de contar desde un número hasta otro en ambas direcciones. El cuarto nivel, *cadena numerable*, los niños utilizan los numerales como ítems que se pueden contar y son capaces de ver el número de numerales que hay entre dos números. Finalmente, *cadena bidireccional*, que implica total dominio de la secuencia de numerales. El nivel de dominio de la secuencia numérica permite evolucionar en las estrategias en la resolución de problemas aritméticos, ya que cuando los niños están en el nivel de cadena numerable, son capaces de llevar el registro necesario de los numerales contados para estrategias como contar a partir de un sumando sin objetos (Fuson, 1992).

Otro trabajo en el que la evolución de la secuencia numérica permite resolver situaciones aritméticas es el trabajo de Olive (2001). Este autor describe la progresión de la estructura de la secuencia numérica de los niños según van resolviendo situaciones numéricas más complejas. En dicho trabajo se describe primero aspectos psicológicos clave para el esquema de la secuencia de numerales. Un *esquema* consiste en la asimilación de una estructura que permite ser reconocida por los niños en una situación, una acción u operación asociada a la situación y un resultado de dicha acción u operación. Los niños realizan acciones con objetos cuando no son capaces de hacerlo mentalmente, y el paso de representar mentalmente esas acciones u operaciones se denomina *interiorización*, que es un proceso de abstracción reflexiva. Así, un niño inicialmente cuenta objetos señalándolos físicamente, y más tarde interioriza esa acción y podrá contar objetos representados mentalmente. El resultado del conteo se suple con la acción de contar. El proceso *re-interiorización* se logra con la aplicación repetida de la acción u operación para un resultado. Así, el niño realiza por ejemplo un conteo cuando necesita saber la cantidad de un conjunto de cosas.

La descripción de Olive (2001) se basa en el desarrollo de la secuencia numérica de Steffe (1994) que empieza con un esquema de conteo pre-numérico, seguido una secuencia inicial de números, una secuencia de números tácitamente anidada, una secuencia de números explícitamente anidada hasta una secuencia de números generalizada

- *Secuencia conteo pre-numérica*: los niños disponen de una secuencia de numerales que intentan coordinar con señalamientos de objetos que no siempre respetan la correspondencia uno a uno y no muestran tener adquiridos los principios del conteo[21], y el resultado del conteo no tiene significado para ellos. Cuando van adquiriendo los principios del conteo, se distingue una primera etapa de conteo perceptual en el que los niños cuentan objetos respetando la correspondencia uno a uno y entendiendo que el resultado de contar varias veces los objetos es el mismo. Y una segunda etapa de conteo figurativo, que surge cuando los niños no pueden contar los objetos que están implicados en la situación y utilizan representaciones imaginarias de los objetos, o los dedos, o incluso dibujan marcas. En este caso se da la *interiorización* de la acción de los objetos a contar.

  En el conteo perceptual y figurativo no se interioriza el resultado, por lo que en el momento de realizar la acción no se tiene en cuenta. En este momento los niños pueden utilizar la estrategia de contar todo cuando a una cantidad se le añade otra. La necesidad de contar todos los elementos es lo que distingue esta fase inicial pre-numérica de la numérica que comienza con la siguiente fase.

- *Secuencia numérica inicial (INS): Se interioriza la acción de contar objetos y el resultado de contar (numeral como la cantidad de elementos de la colección). Los niños comienzan a utilizar* contar a partir de un sumando, utilizando objetos para el segundo sumando, de modo que a partir del cardinal de la primera colección, cuentan los objetos de la segunda colección. Los niños recitan la secuencia a saltos, pero no se considera pensamiento multiplicativo ya que no son capaces de contar los grupos, no se consideran unidades a contar, lo que se llama *unidades compuestas*. En este nivel los niños no reconocen todavía estas unidades compuestas y no pueden ser contadas.
- *Secuencia numérica tácitamente anidada (TNS):* Los niños desarrollan un procedimiento de doble conteo en el que no necesitan representar el segundo sumando, sino que llevan un doble conteo para saber cuántos numerales han contado desde el primer sumando. Esto presenta una segmentación de la secuencia numérica desde el primer sumando hasta

[21] Me refiero a los principios del conteo de Gelman y Gallistel, de los que se puede encontrar información en Escudero (2013).

completar el número de numerales del segundo sumando llegando así al total que implica que los dos sumandos están dentro de la secuencia hasta el numeral que indica el resultado. En el conteo a saltos, se lleva el registro de las unidades que se van contando. Los niños pueden ver cuantos grupos de dos hay en doce. En este nivel se inicia la activación de los esquemas multiplicativos.

- *Secuencia numérica explícitamente anidada (ENS).* Los niños desarrollan un esquema de la secuencia segmentada interiorizando el resultado. Entra en juego el esquema parte-todo. Además de coordinar dos niveles de unidades, donde la secuencia está dividida en un número de segmentos con un número de unidades, los niños pueden resolver problemas de división medida y partitiva.
- *Secuencia numérica generalizada (GNS).* Pueden coordinarse más de dos tipos de unidades, entran en juego tareas de factorización.

A continuación voy a describir estudios sobre estrategias de resolución de problemas de estructura multiplicativa.

4.2.2. Resolución de problemas aritméticos de estructura multiplicativa

La investigación sobre las estrategias que desarrollan los niños para la multiplicación y la división está menos avanzadas que para la suma y la resta. Las estrategias de multiplicación y división siguen una progresión similar a las estrategias de suma y resta, empezando con estrategias como contar todo con objetos, dedos y marcas, hasta estrategias de hechos numéricos derivados. Los estudios se centran en la memorización de los hechos numéricos básicos y su flexibilidad de utilización en estudiantes de segundo ciclo de educación primaria o mayores (Verschaffel y otros, 2007).

La resolución de problemas verbales de estructura aditiva en niños pequeños ha sido estudiada por Carpenter, Ansell y otros (1993) y Clements (2004), entre otros, planteando problemas de agrupamiento y reparto. En concreto, Clements (2004) indica sobre los problemas de división partitiva:

> El *particionamiento* es la operación de descomponer un conjunto de objetos en conjuntos de igual tamaño. La forma más simple de esta gran idea es fácilmente comprensible para los niños. Surge alrededor de los 3 años de edad, cuando los niños de *prekindergarten* consiguen ser capaces de repartir equitativamente una pequeña cantidad de objetos entre dos animales de juguete. A los tres años pueden dividir una colección en conjuntos iguales (cocientes) si los subconjuntos son muy pequeños. Muchos niños de 4 o 5 años pueden trabajar con números mayores inventando una estrategia de correspondencia uno a uno para dividir la colección inicial en subconjuntos iguales. La idea es fundacional para todos los tipos de situaciones multiplicativas y de división medida (donde se conoce el número de objetos en cada grupo) y de división partitiva (donde se conoce el número de grupos). Pero las complejidades de encontrar soluciones exactas con números mayores, excepto mediante ensayo y error y a través de la reflexión sobre una serie de acciones repetidas, hacen que esta idea sea mejor captada en detalle en cursos superiores (Clements, 2004, pp. 24-25).

Clements (2004) indica que a los 4 años los niños pueden utilizar estrategias informales para repartir hasta 10 objetos entre 2 personas y que a los 5 años son capaces de repartir hasta 20 objetos en partes iguales entre 3, 4 o 5 personas, y de formar, con 20 objetos, grupos iguales de 2 a 5 objetos, determinando el número total de grupos. Con 6-7 años manejan cantidades superiores de 100 objetos, repartiéndolas entre 10 personas y agrupándolas en grupos iguales de 10 objetos.

Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck (1993) utilizan problemas de agrupamiento y reparto (problemas de grupos iguales, según la definición anterior). Los niños resuelven estos problemas inicialmente modelizando la acción y las relaciones descritas en el enunciado y posteriormente, utilizando estrategias basadas en el conteo, la suma y la resta y los hechos numéricos. Los problemas de agrupamiento constan de un número de grupos, el número de elementos de cada grupo, y un total de elementos. Las estrategias de modelización directa se pueden observar en la Tabla 1.18.

Tabla 1.18. *Estrategias de modelización utilizadas por los niños según el enunciado del problema verbal de grupos iguales (Carpenter Fennema y otros, 1999)*

Estrategia	*Descripción*	*Problema*
Agrupamiento	Los niños representan cada uno de los grupos y cuentan el número total de elementos.	Multiplicación (grupos iguales con la cantidad total de elementos desconocida).
Medida	Los niños construyen una serie de grupos con el número de elementos por grupo que indica el problema, y cuentan el número de grupos formados. Pueden inicialmente contar el número de objetos total que indica el problema y hacer grupos hasta que se terminen, o pueden formando grupos comprobando si ya tienen el total de elementos indicado.	División medida (grupos iguales con el número de grupos desconocido).
Reparto	Los niños reparten el total de elementos en los grupos indicados. Los grupos pueden estar marcados por un objeto o no. El reparto lo pueden hacer de uno en uno, o de grupito en grupito, hasta repartirlos todos, comprobando que en todos los grupos, hay el mismo número de elementos.	División partitiva (grupos iguales con el número de elementos por grupo desconocido).

Los niños no suelen usar estrategias de conteo tan pronto en los problemas de multiplicación y división en comparación de los de suma y resta. Los niños utilizan la estrategia de conteo a saltos para resolver los problemas de estructura multiplicativa. En los problemas de multiplicación el conteo a saltos consiste en “saltar” en la secuencia numérica tantos numerales como indica el número de elementos en cada grupo. Por ejemplo, cinco paquetes de galletas con 3 galletas en cada uno, se resuelve contando de 3 en 3, (es decir, 3, 6, 9, 12 y 15). Los niños pueden utilizar también la estrategia de suma reiterada, que consiste en sumar tantas veces como indica el número de grupos, el número de elementos de cada grupo (es decir, siguiendo el ejemplo anterior, 3 más 3, 6, más 3, 9, más 3, 12, más 3, quince. También puede utilizarse estrategias de duplicación, como 3 más 3 son 6, 6 más 6 son 12, y 3 más, 15 (Carpenter, Fennema et al., 1999).

En los problemas de división medida los niños también suelen recurrir al conteo a saltos, pero como en este caso se desconoce el número de grupos, el conto se detiene cuando se alcanza el número total de elementos. Por ejemplo, para resolver el problema “con 15 galletas, ¿cuántos paquetes de 3 galletas puedo llenar?”, cuentan de 3 en 3 hasta que llegan a 15 (3, 6, 9, 12 y 15). La solución la extraen contando el número de veces que han contado de 3 en 3 (5 grupos). Estos problemas también se pueden resolver con resta reiterada, restándole al dividendo (15) el número de elementos por grupo, hasta que se agote (15 menos 3 son 12, 12 menos 3 son 9, 9 menos 3 son 6, 6 menos 3 son 3 y una vez menos, hemos restado 5 veces).

Los problemas de división partitiva se resuelven con la misma estrategia pero en este caso no se conoce de cuanto en cuanto hay que “saltar”, por lo que se utiliza el ensayo y error para proponer cuántos elementos hay por grupo, enunciando tantos numerales como grupos hay y teniendo que coincidir el último numeral con el número total de elementos.

Los hechos numéricos para la estructura multiplicativa son las tablas de multiplicar, en las que siempre hay algunos hechos numéricos que se recuperan directamente, y otros de forma derivada (Carpenter, Fennema et al., 1999).

Lago, Rodríguez y Caballero (1999) replicaron el trabajo de Carpenter, Ansell et al. (1993) con niños de 5 y 6 años que no habían recibido instrucción sobre la multiplicación o división. Plantearon problemas de multiplicación, división partitiva, división medida, división con resto y no rutinarios. Encontraron porcentajes de éxito superiores al 70% en todos los tipos de problemas.

Con respecto a los problemas, existen pocos datos al respecto (Verschaffel et al., 2007). Carpenter, Ansell et al. (1993) también plantearon un problema de dos etapas compuesto por una primera etapa de grupos iguales de multiplicación y la segunda etapa un problema de cambio decreciente con la cantidad final desconocida. Un total de 44 de los 70 niños que participaban en este estudio, resolvieron el problema por modelización directa, utilizando para la primera etapa agrupamiento, y para la segunda etapa, quitar. También hubo 3 niños que utilizando hechos numéricos derivados.

Tras los resultados anteriores, se puede considerar que los niños pueden resolver problemas de situaciones multiplicativas mucho más temprano de lo que se cree. Estos autores especifican que los resultados obtenidos no indican qué estructura tienen adquirida los niños en concreto de la multiplicación y división, pero que si es necesario tener algún tupo de estructura adquirida para resolver estos problemas, el que tengan adquirido los niños de educación infantil es suficiente para resolver dichos problemas (Carpenter, Ansell y otros, 1993).

4.3. Comprensión del valor posicional y su implicación en las operaciones con varias cifras

Las matemáticas escolares tradicionales generan dificultades en el aprendizaje de procedimientos de cálculo con números de varias cifras y la comprensión del valor posicional en sistema de numeración decimal (Verschaffel, y otros, 2007). Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Oliver, Carpenter y Fennema (1997) remarcan la importancia de que los niños construyan de una estructura conceptual completa sobre el valor posicional para usarla en la resolución de problemas verbales de adicción y sustracción con varias cifras.

Las investigaciones sobre el aprendizaje de la aritmética con varios dígitos ponen de manifiesto las dificultades que tienen los niños en distinguir el valor de las cifras siendo unas unidades, otras decenas, otras centenas (Verschaffel y otros, 2007). Fuson (1992) indica en sus investigaciones los errores que cometen los niños al resolver problemas aritméticos con números de varias cifras con “lápiz y papel” al realizar algoritmos estándares olvidando o mal recordando algún o algunos pasos de los procedimientos[22]. Según esta autora, estos errores indican la interpretación y tratamiento de los números de varios dígitos como números de una cifra concatenados, sin considerar el valor posicional de cada cifra (p. 263).

La estructura conceptual necesaria para la aritmética con números de una cifra es insuficiente para resolver problemas con números de varias cifras. La construcción de los números de

[22] *Buggy Procedures* es el término que se utiliza para denominar estas dificultades y errores (Verschaffel y otros, 2007, p. 565)

varias cifras se basa en combinaciones de números de una cifra y reglas para combinarlos en un sistema decimal (Verschaffel et al. 2007).

Fuson, Smith y otros (1997) y Fuson, Wearne y otros (1997) muestran un marco de la estructura conceptual para la comprensión de los números de varias cifras. Estos autores plantean un modelo triple donde se relaciona las palabras-número, los numerales escritos y las cantidades (ver la parte central de la Figura 1.10). Este marco tiene cinco estructuras conceptuales que pueden presentarse en los niños en diferentes situaciones y que no sustituyen unas a otras sino que se acumulan. Antes de que los niños puedan aprender los números de dos cifras deben haber aprendido el modelo triple de los números de una cifra. Los niños comienzan con una *concepción unitaria* de los números con varias cifras en las que las cantidades no se diferencian grupos, ni partes en las cifras ni en las palabras número. Por ejemplo, los niños dicen que el 3 tiene un valor de 3, sin tener ningún conocimiento del valor posicional. Para representar 34 hacen un grupo con 34 objetos.

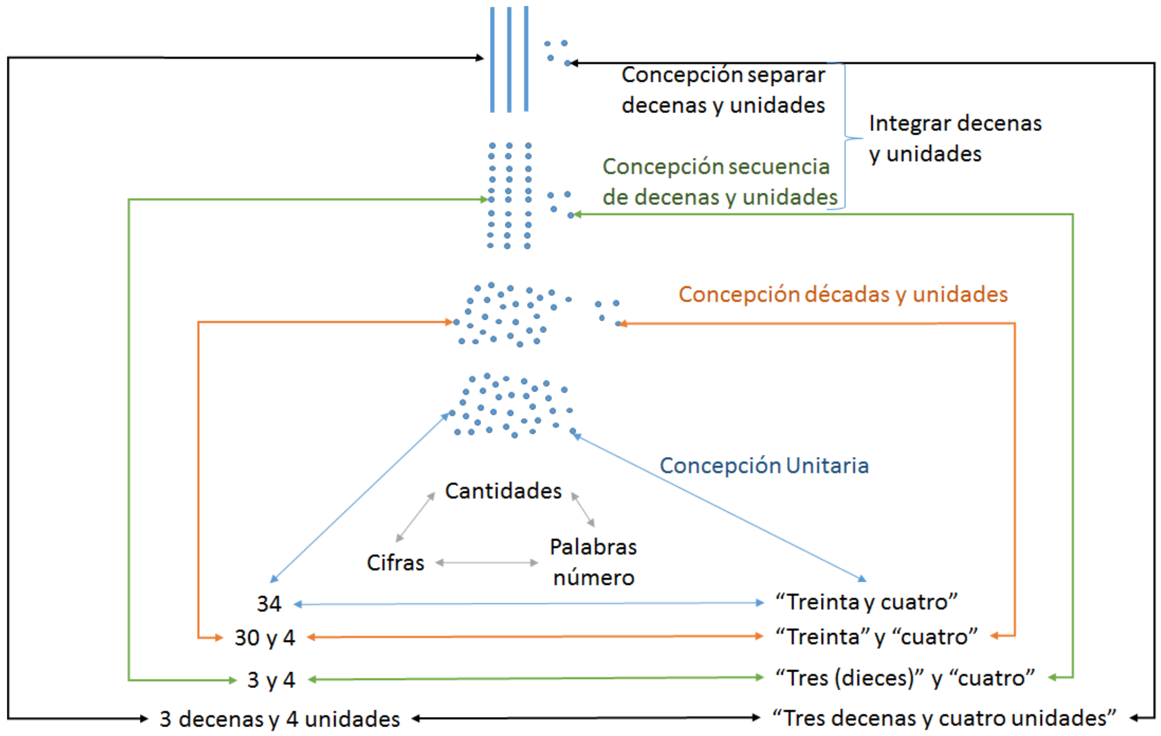


Figura 1.10. Desarrollo de la comprensión de los números de dos cifras (adaptada de Fuson, Smith y otros, 1997, p. 743).

En una segunda etapa los niños adquieren una *concepción de décadas y unidades*, separando en la palabra número la década, por ejemplo treinta, de las unidades 4. Por ejemplo, los niños comprenden que 34 en un grupo de 30 y un grupo de 4, pero la escritura en cifras pueden representarlo como "304".

En una tercera fase, los niños realizan una *secuencia de dieces*, 10, 20, 30 y *unidades*, 4.

En una fase más avanzada, *separar decenas y unidades*, los niños comprenden que hay dos clases de unidades a contar, grupos de 10 o decenas y unidades, por ejemplo, 1 decena, 2 decenas, 3 decenas y 4 unidades.

Hay una fase más completa *que integra las secuencia y la separación* de decenas y unidades (Fuson, Smith y otros, 1997; Fuson, Wearne y otros, 1997).

En estos trabajos también se incluye una sexta concepción denominada *concatenación de cifras simples* en las que los niños comprenden un número de varias cifras como cifras simples independientemente sin tener en cuenta su valor posicional (Fuson, Wearne y otros, 1997). La estructura conceptual de números de más de dos cifras se considera una extensión de la estructura de dos cifras (Verschaffel y otros, 2007).

Los niños pueden presentar una o varias de las concepciones a la vez y no llegar a adquirir todas (Fuson, Wearne y otros, 1997). En ese mismo trabajo, los autores comentan las dificultades que, en algunos idiomas como el inglés o el español, supone completar la triada de conectar las palabras-número con las cifras, ya que las decenas tienen un nombre particular (veinte, treinta, cuarenta…). En otros idiomas como el chino, esta tarea se facilita ya que se nombre como "2 dieces, 3 dieces,..." (Fuson, Wearne y otros, 1997).

Otro modelo de desarrollo de la comprensión de los números de dos cifras es el de Wright, Martland y Stafford (2006), que consideran tres niveles diferentes de la comprensión en la decena, en el uso de estrategias en problemas que contienen números de dos cifras: (a) concepto *inicial* de decena, que se da cuando los niños forman grupos de diez, pero no consideran a la vez la decena y la unidad como unidades diferentes; (b) concepto de decena *intermedio,* en el que los niños toman la decena como unidad, compuesta por diez unidades, y pueden hacer sumas y restas con el apoyo de materiales manipulativos que reflejan la distinción entre ambos tipos de unidades; y (c) concepto de decena *fluido*[23], en el que los niños son capaces de realizar el algoritmo de la suma y la resta operando con unidades y decenas sin ayuda de materiales manipulativos. De acuerdo con este modelo, a través de la observación de las estrategias infantiles, podemos valorar diferentes niveles de comprensión del concepto de decena.

4.3.1. Resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva con dos cifras

El desarrollo de la estructura de los números de varias cifras va unido al aprendizaje de los algoritmos aritméticos (Verschaffel y otros, 2007). Fuson, Wearne y otros (1997) realizan un estudio, desde distintos grupos de investigación pero con el mismo enfoque de resolución de problemas, para enseñar el concepto del número con varias cifras y sus operaciones. Este enfoque no consiste en enseñar un algoritmo concreto sino que los niños deben construir sus propios procedimientos y discutir sobre sus estrategias de resolución de problemas aditivos, así como tareas que implican conocer el significado del valor posicional. Para ello se les proporciona objetos y materiales con estructura en decenas. Estos autores describen las estrategias utilizadas por los niños al resolver problemas verbales con números de dos cifras, dependiendo de la concepción de dichos números.

Los niños que todavía están en una *concepción unitaria* de números de dos cifras siguen utilizando estrategias como las señaladas en el nivel 1 y nivel 2 comentadas antes, indicadas en Fuson (1992). Los niños que tienen adquiridas las concepciones de *secuencias de decenas y unidades*, o *separación de decenas y unidades*, o su *integración*, presentan estrategias que Fuson, Wearne y otros (1997), clasifican en cuatro grupos:

- Métodos que *empiezan en un número* e incrementan o disminuyen en decenas y luego unidades. Requieren tener la capacidad de contar a partir de un número hacia delante, hacia atrás o hasta otro, no solo decenas (10, 20, 30…) sino desde otros número como 34, 44, 54 (ver tabla, 1.18)

[23] Traducción de *facile*.

Tabla 1.19. *Estrategias de métodos que empiezan en un número al resolver (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 147)*

46 + 25 = ¿?,	*71-25 = ¿?*	*46 + ¿? = 71*
Contar de 10 en 10 o sumando las decenas, después las unidades. 46, 56, 66, 67, 68, 69, 70, 71 46 + 20, 66 + 5, 71	Contar hacia atrás de 10 en 10 o restar las decenas y después las unidades. 71, 61, 51,50, 49, 48, 47, 46	Contar hasta de 10 en 10 o sumar hasta las decenas, y después las unidades 46, 56, 66, van 20; 67, 21; 68, 22; 69, 23; 70, 24; 71, 25.
Pasar a la decena mayor y volver 46 + 30, 76 – 5, 71	Quitar la decena mayor del sustraendo y luego volver 71 – 30, 41 + 5, 46	Sobrepasar y volver De 46 a 76, 30; 75, 29; 74, 28; 73, 27; 72, 26; 71, 25.
Contar unidades hasta la decena cercana, contar de 10 en 10 o sumar las decenas, y después el resto de las unidades 46; 47, 48, 49, 50; 60, 70; 71 46 + 4, 50 + 20, 70 + 1, 71	Contar hacia atrás de unidades hasta la decena cerca, contar hacia atrás de 10 en 10 o restar las decenas, y después el resto de las unidades. 71: 70; 60, 50; 49, 48, 47, 46. 71; 70 – 20, 50 - 4, 46.	Contar unidades hasta la decena cercana o sumar hasta la decena cercana, contar de 10 en 10 o sumar hasta la decena, después contar el resto de unidades 46; 47, 48, 49, 50, van 4; 50, 60, 70, son 20 y 4, 24; 71, son 25.

- Métodos que *descomponen en decenas y unidades*, se operan separadamente y se reagrupan (Figura 1.11).

Sumando o restando cada valor posicional y luego agrupando

$$\begin{array}{r} 46 \\ \underline{+25} \\ 60 \\ \underline{11} \\ 71 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 71 \\ \underline{-25} \\ 5\text{-}4 \end{array} \quad 50 - 4 = 46$$

Reagrupar y después sumar o restar

$$\begin{array}{r} 46 \\ \underline{+25} \\ 7^{1}1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6^{1}1 \\ \underline{-25} \\ 46 \end{array}$$

Alternar sumar/restar y reagrupar

$$\begin{array}{r} 46 \\ \underline{+25} \\ \cancel{6} \\ 71 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 7\cancel{1} \\ \underline{-25} \\ \cancel{5} \\ 46 \end{array}$$

Figura 1.11. Estrategias de métodos que descomponen en decenas y unidades (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 148).

- Métodos *mixtos*, en los que se operan las decenas y luego se realiza una secuencia con las unidades. Requieren descomponer los números en decenas y unidades, y operar las decenas y luego sumar o contar unas unidades, y luego sumar, restar o contar las otras unidades (ver Tabla 1.19).

Tabla 1.20. *Estrategias de métodos mixtos (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 147)*

46 + 25 = ¿?,	*71-25 = ¿?*	*46 + ¿? = 71*
Contar de 10 en 10 o sumar las decenas, sumar las unidades de una cantidad, y contar o sumar las otras unidades.	Contar hacia atrás de 10 en 10 o restar las decenas, sumar las unidades del minuendo, contar hacia atrás o restar las otras unidades.	Contar o sumar hasta las decenas, sumar las unidades iniciales, contar hasta las otras unidades.
40, 50, 60; 60+6, 66; 67, 68, 69, 70, 71.	70, 60 y 50; 50 + 1, 51; 50, 49, 48, 47, 46.	40 a 70, 30; 30 + 6; 36

- Métodos en los que se cambian los números por otros más fáciles de operar (ver Tabla 1.21).

Tabla 1.21. *Estrategias de métodos que cambian ambos números (adaptado de Fuson, Wearne y otros 1997, p. 147)*

46 + 25 = ¿?,	*71-25 = ¿?*	*46 + ¿? = 71*
Hacer la decena más próxima a uno de ellos y quitar esa cantidad al otro	Hacer la decena más próxima del sustraendo y la misma cantidad añadida se le añade al minuendo	Hacer la decena más próxima del menor, añadir esa misma cantidad al mayor, e ir desde el menor hasta el mayor.
46 + 4, 50; 25-4, 21; 50 + 21, 71	25 + 5, 30; 71 + 5, 76 – 30, 46	46 + 4, 50; 71 + 4, 75; de 50 a 75, 25

Los métodos que empiezan en un número o los métodos mixtos se utilizan cuando se tiene una concepción de secuencia de decenas o concepción de integración de decenas. Los métodos de separar decenas y unidades o cambiar los dos números, se utilizan con todas las concepciones: secuencia de decenas, separar decenas e integrar decenas (Fuson, Wearne y otros, 1997). Los ejemplos mostrados en la Tabla anteriores no incluyen casos en los que se utilizan modelación directa (nivel 1) o recuperación de hechos numéricos básicos, pero los autores indican que también los utilizan los niños. Los métodos, en general comienzan a operarse por las decenas, por la izquierda del número. Para realizar estos procedimientos, los niños deben tener cierta comprensión sobre propiedades como la conmutativa o asociativa que estos autores no han valorado, y que tampoco valoraré en esta tesis. Fuson, Wearne y otros (1997) exponen que, esta articulación de las estructuras conceptuales de los números de varias cifras de los niños y los procedimientos de cálculo de suma y resta con estos números, proporcione un ejemplo de tareas a plantear en el aula para desarrollar el pensamiento matemático de los niños.

Uno de los grupos de investigación que participan en el trabajo de Fuson, Wearne y otros (1997), es el grupo de la Cognición Cognitivamente Guiada (CGI), que será central en el marco teórico de mi trabajo. En un estudio longitudinal de primer grado a tercer grado, lo equivalente en España de primero a tercero de educación primaria, estudiaron la comprensión de los números de varias cifras y sus operaciones. Dentro del enfoque de resolución de problemas donde los niños deben inventar sus propias estrategias para realizar sumas y restas con varias cifras, han observado que los niños que inventan sus propias estrategias antes de aprender el algoritmo, que fueron un 90% de los 82 participantes del estudio, mostraron mayor conocimientos sobre conceptos del sistema de numeración en base 10 y más éxito en extender su conocimiento a nuevas situaciones, en comparación con alumnos que aprendieron primero algoritmos (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson, 1997).

Las estrategias que utilizan los niños inicialmente para resolver problemas verbales de estructura aditiva con números de dos cifras son de modelización directa con contadores individuales, pero cuando van adquiriendo comprensión del agrupamiento en base 10 del sistema de numeración empiezan a representar las cantidades utilizando materiales que representan decenas, como los bloques de base 10 (Carpenter, Franke y otros, 1997; Verschaffel y otros, 2007)

Carpenter, Franke y otros (1997) y Carpenter, Fennema y otros (1999) describen las estrategias de los niños al plantear problemas aritméticos verbales aditivos con números de varias cifras y observaron una serie de estrategias inventadas, en las que se desprenden del material:

- Secuencial, en la que parte de uno de los números y lo combinan con las distintas cifras del otro número respetando su valor posicional.
- Combinación de decenas y unidades, por separado, y los dos resultados los vuelven a combinar.
- Otras estrategias, como la compensación al acercarse con uno de los números a una decena, o potencia de 10, y compensar el otro número.

En el estudio longitudinal de Carpenter, Franke y otros (1997) se plantean varias cuestiones: si las estrategias inventadas proporciona comprensión de los procedimientos con números de varias cifras, debe haber diferencias entre los niños que usan estas estrategias antes de aprender los algoritmos, con los niños que no las usan. También se plantean si es necesario que los niños deben aprender primero las propiedades del sistema de numeración para utilizar estrategias inventadas, qué nivel de comprensión del sistema de base 10 deben tener adquirido. El uso de estrategias inventadas y la comprensión del sistema de base 10 están relacionados, pero falta identificar si el desarrollo de la comprensión conceptual del sistema de base 10 debe ser anterior o se produce a la vez que el uso de estrategias inventadas. Sobre esta afirmación, Carpenter, Fennema y otros (1999) mantienen que no han llegado a probarlo ya que han observado que los niños utilizan estrategias inventadas antes de tener adquirida una comprensión completa del sistema de numeración. Sobre los beneficios del uso de estrategias inventadas, se espera que los niños cometan menos errores en la ejecución de procedimientos de suma y resta con números de varias cifras Carpenter, Franke y otros (1997). Estos autores utilizan problemas verbales de agrupamiento con grupos de 10 para evaluar la comprensión del sistema de numeración decimal. Además, se les proporciona a los niños materiales con grupos de 10, como los bloques de base 10 y grupos de 10 palitos. Estos problemas serán la tarea principal de estudio de mi tesis, como veremos a lo largo del trabajo.

4.3.2. Resolución de problemas aritméticos de estructura multiplicativa con dos cifras

Las estrategias utilizadas por los niños en problemas de multiplicación y división con varias cifras han sido menos estudiadas que en los problemas de multiplicación y división (Verschaffel y otros, 2007). Los problemas de multiplicación y división con números de varias cifras que no tienen grupos de 10, también son resueltos por los niños cuando se les proporciona materiales de base 10 con estrategias semejantes a los problemas de suma y resta (Carpenter, Fennema y otros, 1999). En los problemas de multiplicación modelizan las cantidades de cada grupo utilizando las decenas y las unidades. Después juntan todo y cambian cada 10 unidades por una decena. Finalmente, cuentan las decenas y las unidades.

Estos autores señalan que si los grupos tienen menos de 10 elementos, posiblemente los niños no utilicen los bloques de base 10. Para los problemas de división medida, los niños cogen las barras y las unidades para representar la cantidad total. Después van cogiendo la cantidad que necesitan para hacer cada grupo. Si la cantidad de los grupos es distinta de 10, en casi todos los casos tienen que descomponer barras en unidades para poder completar los grupos. Finalmente cuentan el número de grupos. Para los problemas de división partitiva igualmente representan el total con barras y unidades y al repartirlas, pueden necesitar cambiar las barras por unidades (Carpenter, Fennema y otros, 1999). Los niños también llegan a utilizar estrategias inventadas similares a las estrategias de suma y resta en las que se operan por separado las decenas y las unidades y luego suman, o métodos de duplicación, como se puede ver en la Tabla 1.22.

Tabla 1.22. *Estrategias inventadas para multiplicación con números de dos cifras (Carpenter, Fennema y otros, 1999)*

Estrategias	Multiplicación (6 grupos con 24 libros)	División Medida (84 galletas en cajas con 12 galletas cada una)	División Partitiva (42 niños en 3 grupos)
Duplicación	24 y 24 son 48; 48 y 48, son 80 y 16, 96; 96 y 48, 130 y 14, 144.	12 y 12, 24; 24 y 24, 48, que son 4 cajas; 48 y 48… son muchas; 48 y 24, son 60 y 12, 72 que son 6 cajas, y una caja más 84, son 7 cajas.	Difícil de usar
Combinar unidades separadamente	Seis doses, son 12 que son 120; 6 cuatros son 24; 144	Difícil de usar	10 en cada grupos son 30; quedan 12 por repartir en 3 grupos, a 4; 14 en cada grupo.

Ambrose, Baek y Carpenter (2003) propusieron problemas de multiplicación y división a niños de educación primara en un ambiente de aula en que los niños eran motivados para construir y refinar sus propias estrategias. Las estrategias observadas para la multiplicación se clasificaron en cuatro categorías:

- *Modelización directa*, que se corresponden con el agrupamiento con objetos o marcas.
- *Estrategias de completar números*, como la adición repetida o la duplicación.
- *Estrategias de particionamiento*, en el que uno de los factores se descompone por su valor posicional y se van sumando las cantidades tantas veces como diga el otro factor.
- *Estrategias de compensación*, donde se ajusta uno de los factores para hacer la multiplicación más sencilla.

Las estrategias observadas para la división se agruparon en otras cuatro categorías:

- *Estrategias en la que se trabaja con un grupo*, que consiste en una *sustracción repetida* de la cantidad menor a la cantidad mayor, contando el número de veces que se puede sustraer dichas cantidad. O en una *adición repetida* de la cantidad menor hasta llegar a la cantidad mayor. Estas estrategias se daban más en problemas de división medida.
- *Estrategias más abstractas que no implican descomponer el dividendo*, en las que los niños utilizan formas más efectivas de sustraer o dividir, como por ejemplo, “544

dividido por 17, se puede conseguir de 17 × 10 = 170, 3 veces esta cantidad son 510, y para conseguir 34 más, son dos veces 17, por lo que 30 + 2 veces 17, son 32".

- *Estrategias en las que el dividendo se divide en partes*, separando en centenes, decenas y unidades, haciendo las divisiones parciales y sumando los resultados.
- *Estrategias de construcción*, en las que a partir del divisor se construyen sumando hasta el dividendo, por ejemplo, 544 dividido por 17, 170 + 170 son 340, más 170 son 510, más 34 son 544, el resultado es 32 veces.

5. Resumen

La enseñanza de la resolución de problemas en el aula ha ido evolucionando, desde una instrucción basada en la enseñanza de estrategias, a perspectivas más cognitivas y sociales donde el centro de interés es el pensamiento de los estudiantes en una comunidad de práctica. Las metodologías de investigación han evolucionado hacía experimentos de diseño, donde se describen de forma cualitativa nuevas formas de enseñanza basadas en las teorías que la sustentan. El desarrollo de contenidos matemáticos a través de la resolución de problemas, la modelización, el aprendizaje social y la resolución de problemas situada toman importancia en los estudios (Santos-Trigo, 2008).

El interés de este trabajo se basa en la resolución de problemas aritméticos verbales desde una perspectiva cognitiva. Se indaga en las estrategias que utilizan los niños al resolver problemas aritméticos verbales construyendo sus procedimientos sin haber recibido previamente instrucción formal sobre ellos como en los trabajos de CGI (Carpenter y Moser, 1984; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema, y Weisbeck, 1993). El planteamiento de estos problemas en los primeros años de escolaridad da la oportunidad a los niños de crear estrategias de modelización de la situación planteada, lo que les permitirá dar sentido al conocimiento formal. En este sentido, podría concluirse que el trabajo toma una perspectiva de modelización que plantea Lesh y Zawojewski (2007), sin embargo, los trabajos realizados desde la perspectiva de modelos están realizados en secundaria donde los estudiantes ya tienen unos conocimientos formales que permiten modelizar situaciones reales (English y Watters, 2004). Este enfoque de resolución de problemas y modelización es muy prometedor para el tercer ciclo de primaria, en que los alumnos tienen instrumentos básicos como las cuatro operaciones aritméticas, los decimales, las fracciones, y conocen suficientes matemáticas básicas para elaborar modelos. Los estudios desde esta perspectiva que han trabajado con los niños más jóvenes son los realizados por English y Watters (2004 y 2005) que realizan un estudio longitudinal de modelización matemática desde los 8 años. En esta tesis trabajo con niños de primer curso de Educación Primaria donde los modelos matemáticos formales se están empezando a introducir, como es el caso de la suma y la resta, y no lo considero apropiado para primer ciclo de primaria, salvo que se amplíe la idea de modelos a modelos más sencillo como los que se utilizan en las estrategias de modelización directa ya desde infantil. Si la modelización directa en la que se basan las estrategias de los niños al resolver problemas aritméticos verbales pueden considerarse modelización, en el sentido que señala la perspectiva de modelización matemática de Lesh y Zawojewski (2007), podría decirse que este trabajo está dentro de esta perspectiva.

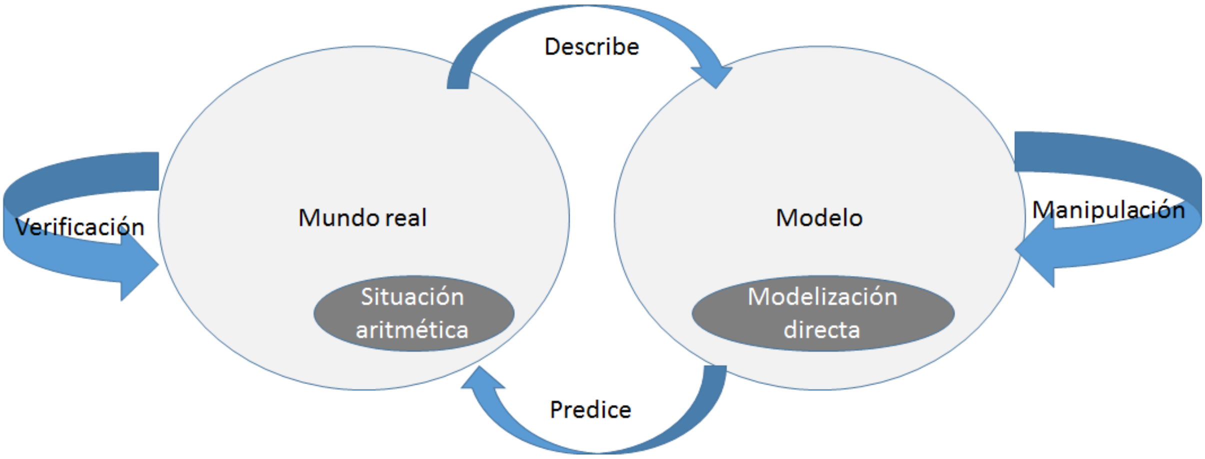


Figura 1.12. Posible relación con la perspectiva de modelización (adaptado de Lesh y Zawojewski, 2007).

Un punto de interés en la investigación sobre resolución de problemas es su incorporación en los documentos curriculares e inclusión en la práctica de la enseñanza de las matemáticas, ya que, según he comentado, anteriormente, los estudios indican que no se está llegando a integrar los resultados de investigación con su incorporación en los currículos y su puesta en práctica en el aula.

Según he comentado anteriormente, los Principios y Estándares del NCTM (2000) son la base curricular de este trabajo. En la Tabla 1.22 remarco características importantes de los principios que sirven de referencia para esta tesis. Pretendo proporcionar información sobre cómo es el aprendizaje de los niños y cómo debe ser su enseñanza, planteando aspectos que puedan ayudar a desarrollar las recomendaciones curriculares a los docentes.

Tabla 1.23. *Características importantes de Principios del NCTM (2003) para este trabajo*

Igualdad	Planteamiento de tareas y utilización de recursos necesarios para llegar a todos los niños
Currículo	Centrado en ideas matemáticas importantes articuladas de forma coherente a lo largo de los distintos cursos
Enseñanza	Conocimientos previos de los niños, objetivos o ideas matemáticas importantes y tareas para conseguir los objetivos.
Aprendizaje	Aprendizaje *activo*, *significativo*, con *comprensión*
Evaluación	Proporcionar información del aprendizaje de los niños a profesores
Tecnología	Facilita procedimientos e información

En este trabajo, los procesos que conforman la competencia matemática están estrechamente relacionados con la resolución de problemas. En NCTM (2003) remarca que “la resolución de problemas es una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas (p. 55)”, así en la Figura 1.23 se denota que la resolución de problemas está relacionada con el proceso de razonar y demostrar cuando los niños construyen sus propias estrategias, utilizando representaciones que modelizan la situación del problema, articulando sus ideas para comunicar sus procedimientos de resolución y establecen conexiones entre las ideas intuitivas con conocimientos formales.

Figura 1.13. Relación de los procesos del NCTM con la resolución de problemas en este trabajo.

Este enfoque de resolución de problemas desarrolla los procesos de los Estándares del NCTM con la competencia matemática tal como la define la OCDE. Así cobran importancia los procesos como el razonamiento y la demostración, la representación y modelización, la articulación de ideas y su comunicación y desde luego, la resolución de problemas usando todos los procesos anteriores.

Cuando los niños resuelven problemas conjeturan cuál puede ser la estrategia adecuada y prueban o refutan su validez, hasta que consiguen encontrar una estrategia válida (*razonamiento y demostración*). Según el NCTM (2003), como he comentado anteriormente, los niños de Pre-K-2 deberían disponer de materiales como contadores o materiales estructurados como los bloques de base 10 para poder realizar pruebas empíricas y validar sus estrategias (*representación*). Reflexionan sobre sus ideas, relacionando las ideas previas con la nueva situación (*conexiones*), y las articulan para *comunicarlas* a los demás. En este trabajo apoyo la idea de que a través de la resolución de problemas, en una ambiente social donde los niños deben compartir sus estrategias, se desarrollan todos estos procesos.

De forma similar a las asociaciones de EEUU, la OCDE define la competencia matemática como la composición de una serie de competencias y capacidades, relacionadas como hemos visto con los estándares de procesos del NCTM y prácticas de las CCSSM. Este interés por incluir estos elementos en el currículo y articularlos con los contenidos, toma gran importancia en las investigaciones centradas en el desarrollo del currículo.

La Estándar de resolución de problemas indica que los programas de enseñanza deben capacitar a los alumnos para (NCTM, 2003, p. 55):

- construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas;
- resolver problemas que surjan de las matemáticas y otros contextos;
- aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas;
- controlar el proceso de resolución de los problemas y reflexionar sobre él.

La resolución de problemas planteada así implica que los maestros debemos dar oportunidades a los niños de construir estrategias propias, relacionando los conocimientos previos con las condiciones nuevas del problema.

Los Principios del NCTM también indican que a través de la resolución de problemas, los profesores han de crear ambientes de resolución de problemas donde los niños pueden formular conjeturas, construir argumentos y razonamientos, modelizar problemas y debatir con sus compañeros esos razonamientos, los niños podrán establecer conexiones entre los conocimientos previos y los nuevos, y desarrollar comprensión conceptual y procedimental de los conocimientos matemáticos en juego. Esta comprensión les permitirá dar sentido a esos conocimientos y podrán ser aplicados en otras situaciones.

Los Principios y Estándares de contenido del NCTM (2003), los focos curriculares (NCTM, 2006), CCSSM (CCSSI, 2010) proponen la articulación y la conexión de los objetivos de aprendizaje a lo largo de los cursos. Una buena organización de los contenidos a lo largo del currículo, relacionándolos con el desarrollo del pensamiento de los niños permite llevar a cabo una enseñanza adecuada con el objetivo de que los niños aprendan matemáticas. En la declaración conjunto de NAEYC y NCTM sobre la educación en las primeras edades (NAEYC Y NCTM, 2013) aparecen herramientas como los caminos de aprendizaje de un tema que puede ser útil para el trabajo en el aula del docente.

Para este trabajo, los contenidos implicados están relacionados con el bloque número y operaciones. Los focos curriculares del NCTM (2006) me ayudarán a organizar los objetivos de aprendizaje en la etapa correspondiente. La tesis se concreta en primer curso de educación primaria, curso de transición entre educación infantil y educación primaria, por lo que en la Figura 1.24 represento las ideas matemáticas importantes que señala el NCTM correspondientes a Grado 1. También incluyo las correspondientes a educación infantil o kindergarten y a grado 2, para tener una perspectiva más amplia de la articulación de los contenidos en los cursos anteriores y posteriores.

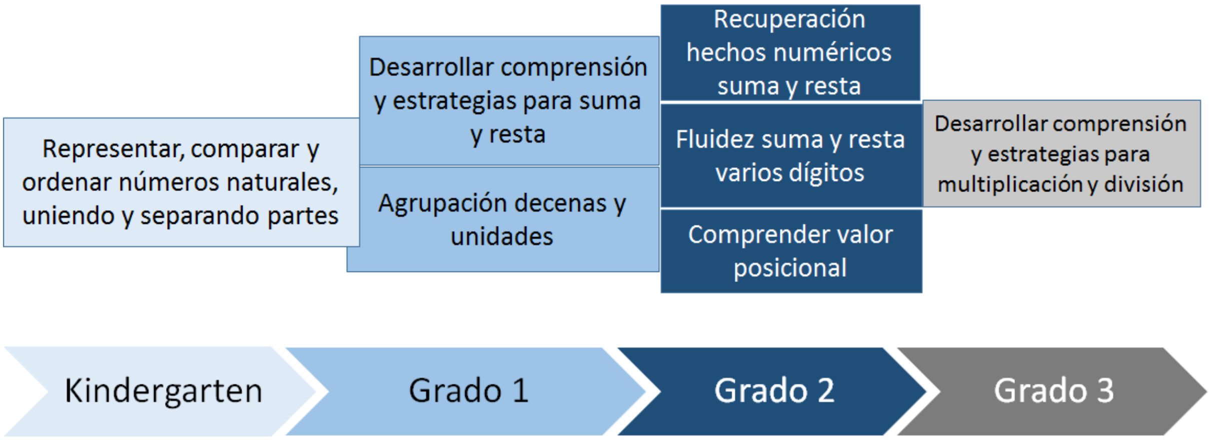


Figura 1.14. Focos Curriculares de "Números y operaciones" obtenidos de NCTM (2006).

Como he comentado antes, en España, hasta la LOMCE, el currículo de educación primaria introducía la estructura multiplicativa a partir del segundo curso de forma intuitiva y de manera más formal en el segundo ciclo. Las primeras nociones sobre el sistema de numeración decimal, tales como los agrupamientos de diez, se empiezan a incluir en el primer curso de Educación Primaria.

En la LOMCE se han adelantado conocimiento formales, como la construcción de algunas tablas de multiplicar, a primero de educación primaria, así como la relación entre la multiplicación y la suma con sumando iguales. En primer curso de primaria también se pide a los niños realizar algoritmos estándar de la suma y la resta, y resolver problemas con ellos, dejando para segundo de educación primaria comprender la suma con juntar y unir cantidades, o la resta, o quitar o separar. Respecto a propiedades del sistema de numeración, como la equivalencia entre unidades, decenas y centenas y el valor posicional, se dejan para segundo de primaria (MEC, 2014b).

La relación entre la resolución de problemas y la enseñanza del número natural y sus operaciones presenta dos sentidos: el primero, "aplicacionista", en el que los problemas aritméticos se proponen como una tarea de aplicación del conocimiento recién presentado; y el segundo, en el que la resolución de problemas se utiliza para desarrollar conocimientos sobre contenidos nuevos. En este trabajo quiero utilizar el segundo sentido, para que los niños utilicen estrategias informales.

A lo largo del capítulo, se han presentado trabajos e investigaciones que muestran que los niños son capaces de resolver situaciones de juntar o añadir, separar o quitar, comparar o igualar, incluso de agrupamiento y reparto en situaciones de resolución de problemas desde Educación Infantil. En la presente investigación conjeturo que los niños de primer curso de Educación Primaria pueden llegar a comprender propiedades como la del agrupamiento del sistema de numeración decimal, desarrollando el pensamiento multiplicativo antes de lo que indica el currículo oficial y otros documentos curriculares resolviendo problemas aritméticos verbales según la metodología del CGI. Estudios como los de Carpenter plantean el dilema sobre la secuencia de contenidos en el currículo sobre qué debe preceder a qué, trabajar primero las operaciones aritméticas y la resolución de problemas después, o trabajar problemas primero antes de la enseñanza formal de las operaciones.

Esta breve revisión de antecedentes nos lleva a elegir el primer curso de educación primaria como el momento idóneo para tratar de enseñar el concepto de decena con comprensión. Al comenzar el primer ciclo de educación primaria se repasan los números de una cifra y se introduce la decena, cobrando importancia el valor posicional propio de la escritura decimal. Los niños resuelven situaciones aritméticas en las que los números implicados llegan hasta 100. Las estrategias de modelización y conteo empiezan a ser costosas de aplicar y necesitan ampliar su conocimiento sobre el sistema de numeración. En este sentido, toma importancia el valor posicional de los números para operar con ellos. Carpenter, Franke y otros (1997) utilizan problemas con agrupamientos de 10 para valorar la comprensión del valor posicional. Estos problemas podrían plantearse desde primero de primaria para desarrollar el concepto de decena. Surgen posibles dificultades porque, según los documentos curriculares, la multiplicación y división no corresponden al primer curso de primaria, excepto la construcción formal de algunas tablas. Pero hay estudios previos, como hemos visto, que aseguran que se pueden plantear problemas de estructura multiplicativa mucho antes de su introducción formal en el aula.

El planteamiento de una serie de problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10 en primero de educación primaria puede permitir a los niños desarrollar la comprensión sobre la decena, utilizando estrategias informales al ser una estructura que formalmente se trabaja más tarde en el currículo.

Esta propuesta rompe con la idea de la enseñanza formal de los contenidos matemáticos en la que se utiliza la resolución de problemas como actividades de aplicación de los contenidos aprendidos. Por el contrario, la resolución de problemas se plantea como medio para la comprensión de los conceptos matemáticos, como actividad fundamental para desarrollar la competencia matemática. En general, focalizar el proceso de enseñanza en la resolución de problemas aritméticos verbales, tanto de estructura aditiva como multiplicativa, facilitará el aprendizaje con comprensión de los estudiantes de las operaciones aritméticas.

Desde un enfoque cognitivo, se desarrollarán talleres de resolución de problemas en los que prestamos especial atención al desarrollo de los procesos que indica el NCTM (2003) y la competencia PISA (OCDE, 2005 y 2013), para desarrollar contenidos matemáticos relacionados con el número y la aritmética. Según las recomendaciones curriculares, los contenidos deben estar bien articulados y conectados a lo largo de los cursos, por lo que me utilizaré un instrumento que soporte esta idea. En este primer capítulo, ya se ha planteado en término trayectorias de aprendizaje para un objetivo, como base para articular los objetivos del currículo (NAYEC y NCTM, 2013).

6. Objetivos de la investigación

El objetivo general de esta tesis es estudiar el desarrollo de los conocimientos informales sobre la agrupación de base 10 y los conocimientos del valor posicional, a través del estudio de las estrategias utilizadas por los niños en la resolución de problemas aritméticos verbales, así como el análisis de las representaciones de cantidades discretas utilizadas en sus procedimientos, describiendo además, la evolución de las estrategias y representaciones a lo largo de un curso.

Para la consecución del objetivo general, voy a plantear los siguientes objetivos específicos divididos en partes. En primer lugar, planteo el primer objetivo específico, necesario para el resto:

- ***Elaborar un taller de resolución de problemas aritméticos verbales para poder abordar el objetivo general*** de este trabajo: constará de una secuencia de tareas que me permitirán analizar las estrategias y representaciones para conseguir el objetivo general. Las tareas del taller deben contener problemas que permitan observar el desarrollo de los conocimientos informales, y su evolución, del principio de agrupamiento y el valor posicional, así como, de las representaciones utilizadas a lo largo del curso. El curso elegido es primero de primaria, que considero de transición entre la etapa infantil donde la enseñanza se basa en el desarrollo de conocimientos informales y educación primaria donde se introducen los conocimientos formales, entre ellos, el concepto de decena y el valor posicional.

La puesta en práctica del taller me permitirá analizar las estrategias que identifico en este trabajo con cada uno de los *caminos de aprendizaje de cada tarea*, por lo que planteo los siguientes objetivos específicos:

- ***Analizar las estrategias en problemas aritméticos de estructura multiplicativa con agrupamientos de 10.*** En concreto, son problemas con sentencia $a = 10 \times b + c$, donde las incógnitas pueden ser b y c, o a.
- ***Analizar las estrategias en problemas aritméticos de estructura aditiva con números de dos cifras.*** Se trata de problemas de suma y resta que implican al menos un número de dos cifras.
- ***Analizar las estrategias en problemas aritméticos de estructura multiplicativa de grupos iguales sin grupos de 10***, a través de los problemas de multiplicación o división reparto/partitiva.

Las estrategias utilizadas por los niños en la resolución de los problemas planteados en el taller me permitirán estudiar las representaciones de las cantidades discretas implicadas, por lo que tengo el siguiente objetivo:

- ***Analizar las representaciones de cantidades discretas utilizadas*** por los niños, en cada una de las sesiones, considerando características icónicas y simbólicas de las mismas.

Los objetivos específicos anteriores relativos al análisis de estrategias y representaciones a lo largo de todo un curso me permitirán abordar los siguientes específicos:

- ***Estudiar la evolución de las estrategias de cada uno de los grupos de problemas anteriores.*** Se estudiará la evolución de las estrategias a lo largo de un curso escolar. Esto permitirá interpretar los resultados obtenidos haciendo referencia a las *trayectorias de aprendizaje* descritas en el marco teórico. Esto también permitirá describir la evolución de la frecuencia de uso de *estrategias informales y formales* a lo largo del curso.

- ***Estudiar la evolución de las representaciones de cantidades discretas.*** Describir la evolución de representaciones a lo largo del taller. Esto permitirá estudiar la evolución de la frecuencia de uso de *representaciones informales y formales* a lo largo del curso.

Dado que en este trabajo cada estrategia está asociada a un nivel de la comprensión de la decena, el estudio de la evolución de las estrategias me va a permitir:

- ***Describir la evolución del nivel de comprensión de la decena a lo largo de un curso***, según los modelos de comprensión de la decena.

7. Estructura y plan de trabajo

Una vez propuesta el planteamiento del problema y los objetivos de la investigación, se presenta la estructura del trabajo y el plan de trabajo.

En el Capítulo 1, *Planteamiento de problema*, antecedentes y objetivos de investigación, se presenta el problema de investigación, en el que enmarco el estudio y propongo los objetivos.

En el Capítulo 2, *Marco teórico*, describo el marco teórico utilizado, en el que detallo las investigaciones en las que se fundamenta mi tesis doctoral. Describo el enfoque de enseñanza elegido para el taller de resolución de problemas. Dado que el objetivo principal es indagar sobre el desarrollo de conocimientos informales acerca de aspectos sobre el sistema de numeración decimal, comienzo el capítulo 2 con definiciones relacionados con estos conceptos. El diseño del taller de resolución de problemas aritméticos estará basado en los conocimientos previos del marco teórico que presento a continuación. Siendo un objetivo el identificar el nivel de comprensión de la decena, introduzco el significado que, en esta tesis y siguiendo el enfoque cognitivo elegido de referencia, se da al aprendizaje con comprensión.

La herramienta que voy a utilizar para apoyar el análisis de las estrategias utilizadas por los niños y su evolución, está basado en el término *Trayectoria de Aprendizaje*, que utilizaré en dos dimensiones diferentes. Desde una visión amplia, me permite describir el desarrollo del conocimiento matemático a lo largo de una etapa, curso, o periodo de tiempo, más o menos amplio, lo que denominaré *trayectorias de aprendizaje para un conocimiento concreto*; desde un análisis más profundo, permite analizar los procedimientos de resolución de una tarea concreta de los estudiantes, en secuencia de capacidades necesarias para su ejecución, y los errores que pueden incurrir, lo que se denomina *caminos de aprendizaje para una tarea*. Por ello, cierro el Capítulo 2, mostrando el significado de *Trayectorias de Aprendizaje*, indicando los significados que utilizaré en esta tesis.

En el Capítulo 3, de *Metodología*, detallo la caracterización de la investigación, incluyendo la parte experimental, donde explico todo lo relacionado con el diseño y la puesta en práctica del taller. Un aspecto importante será el uso de diferentes materiales, que describiré en el diseño del taller, que se pondrán a disposición de los alumnos para realizar sus procedimientos, y que tomaré en cuenta para el análisis de las estrategias. En este capítulo también mostraré como se realizará la recogida de datos de las sesiones del taller.

En el Capítulo 4, *Resultados*, incluiré la síntesis del análisis realizado de las estrategias, describiendo las estrategas utilizadas e identificando las capacidades necesarias para su ejecución para construir los caminos de aprendizaje de cada una de ellas, todo ello por tipo de problema. En el conocimiento de la decena, este análisis me permitirá identificar el nivel de comprensión de la decena, adscribiéndolo a cada camino de aprendizaje. En el Anexo 1 incluyo el desarrollo de las sesiones, analizando las distintas estrategias utilizadas por los niños y las representaciones sesión por sesión.

En este Capítulo, también analizaré la evolución de las estrategias, identificando los resultados con referencia a las *Trayectorias de Aprendizaje* a lo largo del primer curso de primaria del marco teórico. Para tener una perspectiva de la progresión de la adquisición de un conocimiento, se puede utilizar la *Trayectoria de aprendizaje*. Dado que el taller se realiza en primer curso de primaria, dentro del conocimiento acerca del sistema de numeración decimal, se está pasando de conocimientos informales a conocimientos informales. Identificaré las estrategias basadas en el conocimiento informal y formal, así como las estrategias que se enmarcan en la transición entre los dos conocimientos. También analizaré la evolución que siguen las representaciones a lo largo del taller, identificando la evolución de representaciones que corresponden a un conocimiento informal, hasta representaciones que corresponden a un conocimiento formal.

También incluyo los resultados del análisis de las representaciones de cantidades discretas utilizadas por los niños, dando también una categorización basada en la evolución de representaciones icónicas a simbólicas.

Finalmente, en el Capítulo 5, correspondiente a la *Discusión, conclusiones e implicaciones*, discuto los resultados más relevantes obtenidos y sus implicaciones para la educación matemática.

Los anexos, con toda la información complementaria para comprender bien la investigación realizada, completan este trabajo. El Anexo 1 contendrá el análisis de las estrategias observadas sesión por sesión, así como el desglose en capacidades de cada una de las estrategias, la identificación de errores y la descripción de las representaciones utilizadas.

Figura 1.15. Estructura de la tesis.

Capítulo 2. Marco teórico

En este segundo capítulo se presenta el marco teórico del trabajo. Inicialmente voy a describir la estructura conceptual de los números naturales, centrándome en el sistema decimal de numeración y su relación con el resto de los focos curriculares de los números naturales relacionados con ello. Conocer bien los conceptos y procedimientos implicados en un contenido matemático, permite desarrollar el currículo, marcando los objetivos y expectativas de aprendizaje.

Dentro de los enfoques posibles de la enseñanza de las matemáticas, la propuesta de esta intervención se hace desde el enfoque de resolución de problemas, tal como explicaré avanzado el capítulo. A continuación describo el apartado sobre el programa de la Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI), propuesto por Carpenter y otros (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Carpenter y Moser, 1984; Carpenter, Moser y Harriett, 1988; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Carpenter, Fennema, Franke, Levi, y Empson, 1999). Además adopto el concepto de aprendizaje de las matemáticas con comprensión que plantean desde este mismo enfoque (Carpenter y Lehrer, 1999).

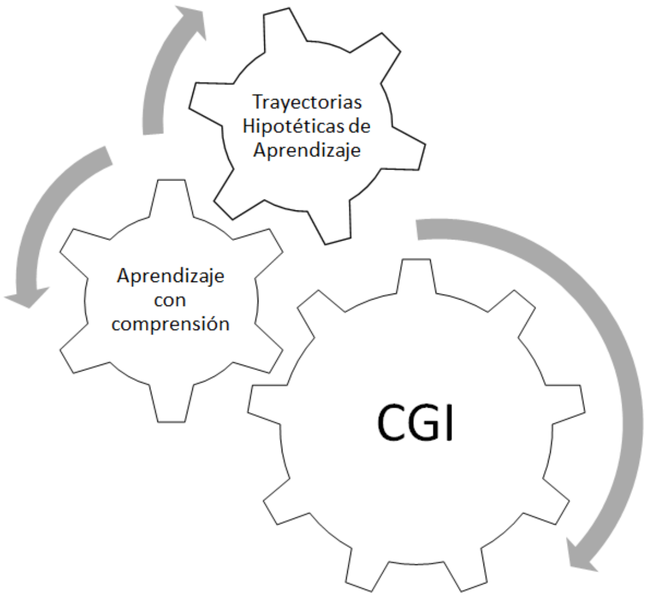


Figura 2.1. Enfoque cognitivo del trabajo

El conocimiento informal de los niños toma importancia en el presente trabajo como base de futuros conocimientos formales por lo que realizo una breve revisión sobre estos términos (Baroody, 1998; Ginsburg y Baroody, 2007). El presente estudio trata sobre el aprendizaje y enseñanza de la decena y de la aplicabilidad de los algoritmos a través de la resolución de problemas aritméticos verbales en los primeros cursos escolares y más concretamente, en la transición de la educación infantil a la educación primaria. Los conocimientos informales desarrollados en la etapa de educación infantil van a tomar un papel muy importante en el aprendizaje con comprensión de los contenidos relacionados con el número y la aritmética en primero de primaria. El desarrollo del conocimiento informal de los niños, a través de la resolución de problemas aritméticos verbales, será objeto de estudio en este trabajo (Ginsburg y Baroody, 2007).

Incluyo también en el marco teórico una revisión sobre el uso del término trayectorias de aprendizaje-enseñanza, que desde el trabajo de Simon en 1995 ha cobrado importancia en las investigaciones enfocadas a desarrollar el currículo. Las trayectorias de aprendizaje-enseñanza han ido tomando relevancia en las investigaciones enfocadas a organizar y articular los contenidos curriculares, y dar apoyo a la labor docente.

Por último, describo las trayectorias de aprendizaje-enseñanza de los contenidos matemáticos implicados en esta tesis, tomando como referencia el marco teórico elegido (CGI). Finalmente, realizaré una síntesis antes de comenzar el siguiente capítulo.

1. Estructura conceptual de los números naturales: sistema decimal de numeración

El campo conceptual de los números naturales es central en las matemáticas escolares elementales (Verschaffel y otros, 2007). El aprendizaje del valor posicional del sistema de numeración decimal forma parte de los objetivos de este estudio. Por esta razón, voy a realizar el análisis de este contenido con objeto de describir la estructura conceptual del sistema de numeración decimal, así como conocer la diversidad de sus significados, necesarios para planificar y orientar el aprendizaje de los estudiantes (Rico, 2015).

> El análisis del contenido matemático consiste en la descripción y organización de los conceptos y procedimientos que conforman un tema de matemáticas, el análisis de las diferentes formas de representar esos conocimientos, y un análisis de los campos de fenómenos y de los contextos vinculados con tales conocimientos y mediante los que se generan problemas en diferentes situaciones, que ponen en juego esos conceptos y procedimientos y todas sus propiedades y relaciones (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 290).

Un *sistema de numeración* lo constituyen un conjunto finito de signos y reglas, que hacen posible expresar cualquier número que se desee mediante el uso de los signos de que consta el sistema y siguiendo sus reglas (Castro y Molina, 2011). Un sistema de numeración debe permitir representar cantidades fácilmente y operar con ellas de la forma más sencilla (Gómez, 1989).

Gómez (1989) explica cómo evolucionan los sistemas de numeración ante la necesidad de representar cantidades más grandes y realizar cálculos con ellas. La *representación simple* es la forma de representar una cantidad en la que se utiliza un solo símbolo para representar cada uno de los elementos de un conjunto. Para representar números muy grandes se recurre al *agrupamiento simple*, donde se sustituye un paquete de símbolos iniciales por un nuevo símbolo, eligiéndose así una base para el agrupamiento. Las cantidades siguen aumentando y se pueden realizar grupos de la misma base de los grupos anteriores y denotar un nuevo símbolo. Así conseguimos nuevos símbolos, donde cada uno de ellos representa la potencia de la base inmediatamente superior, lo que se denomina *agrupamiento múltiple*. Todos estas formas de representar las cantidades están basadas en el *principio aditivo*, en el cual, el valor de un número se obtiene como suma del valor de todos los símbolos utilizados en su representación (Castro y Molina, 2011).

En los *sistemas aditivos* no hay límite en la cantidad de símbolos necesarios, pero sí de las veces que se repite, que como máximo es la base del agrupamiento. Para evitar esta repetición, se introdujeron dos tipos de símbolos, uno para las potencias de la base y otros para la función multiplicadora de aquellos, que formaron los *sistemas multiplicativos* (Gómez, 1989). El siguiente paso fue ordenar los símbolos en el orden que marcan las potencias, hasta que se empezó a escribir sin los símbolos de dichas potencias al entender que siempre ocupaban el mismo lugar. Así surgieron los *sistemas posicionales* donde el cero apareció para ocupar los lugares donde no había cantidades.

En el sistema de numeración decimal, la base es diez, por lo que los distintos órdenes son las sucesivas potencias de diez, que reciben el nombre de decenas, centenas, unidades de millar… (Gómez, 1989). Tener la base diez implica que cada diez unidades de un orden constituyen una unidad de orden superior. Para saber el cardinal de una colección se puede utilizar el método del agrupamiento, en el que se hacen grupos de tantos objetos como indica la base, pudiendo quedar objetos sin agrupar. Una vez realizada la agrupación, se cuenta el número de unidades sueltas que serán la unidades de primer orden, y después se cuenta el número de grupos que serán las unidades de segundo orden (Castro y Molina, 2011). En el caso de que el número de grupos hechos sea igual o mayor que la base, se vuelven a realizar agrupaciones y el número de los nuevos grupos serán las unidades de tercer orden, donde las cantidades utilizadas no superaran la centena.

Para profundizar en el contenido de un tema hay que determinar los conceptos y procedimientos que implica, articulando sus conexiones; además hay que describir sus sistemas de representación y su fenomenología. El sistema de numeración decimal está incluido en el bloque de contenidos del número natural más amplio. El número natural se puede organizar entorno a cinco focos conceptuales curriculares prioritarios: significados y uso de los números naturales, sistema decimal de los números naturales, orden entre naturales, suma de números naturales y producto de los números naturales. Esta disposición permite organizar los contenidos de cada foco conceptual (Rico y Lupiáñez, 2008, ver Tabla 2.1):

Tabla 2.1. *Focos conceptuales prioritarios de Números naturales (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 296)*

Significados y usos	Secuencia-contar; ordinal-ordenar; cardinal-cuantificar; signo-codificar; símbolos-estructurar; números-operar; recta-visualizar; noción y concepto; números pequeños, medianos y grandes
Sistema decimal	Símbolos; cero; base: principio de agrupamiento; unidades de orden superior; escritura, lectura, notación polinómica; tablas, algoritmos
Suma	Símbolos de suma y resta; noción de suma y resta; composiciones aditivas; tablas; algoritmos; calculadora; propiedades; estructura (N; +); estimación
Orden	Siguiente y anterior; secuencia; comparar; relación orden; estructura ordinal de N; orden magnitud; orden aproximación
Producto	Símbolos; noción; notación; tablas; algoritmos; calculadora; divisibilidad; factorización; estructura (N; ×); estimación

En este trabajo, el foco conceptual prioritario es el sistema de numeración decimal, pero para analizar bien el contenido implica tener en cuenta las conexiones que tiene con el resto de los focos conceptuales, que como indican Rico y Lupiáñez (2008) no se pueden observar en esta tabla. En esta investigación, que se centra en la transición de educación infantil a educación primaria, toman importancia el agrupamiento con base 10 y la decena, que permiten realizar composiciones y descomposiciones de los números. Para poder contemplar las relaciones del sistema de numeración decimal con los demás focos conceptuales de los números naturales se puede mirar el mapa conceptual de la Figura 2.2, como adaptación al mapa conceptual construido por Rico y Lupiáñez, 2008).

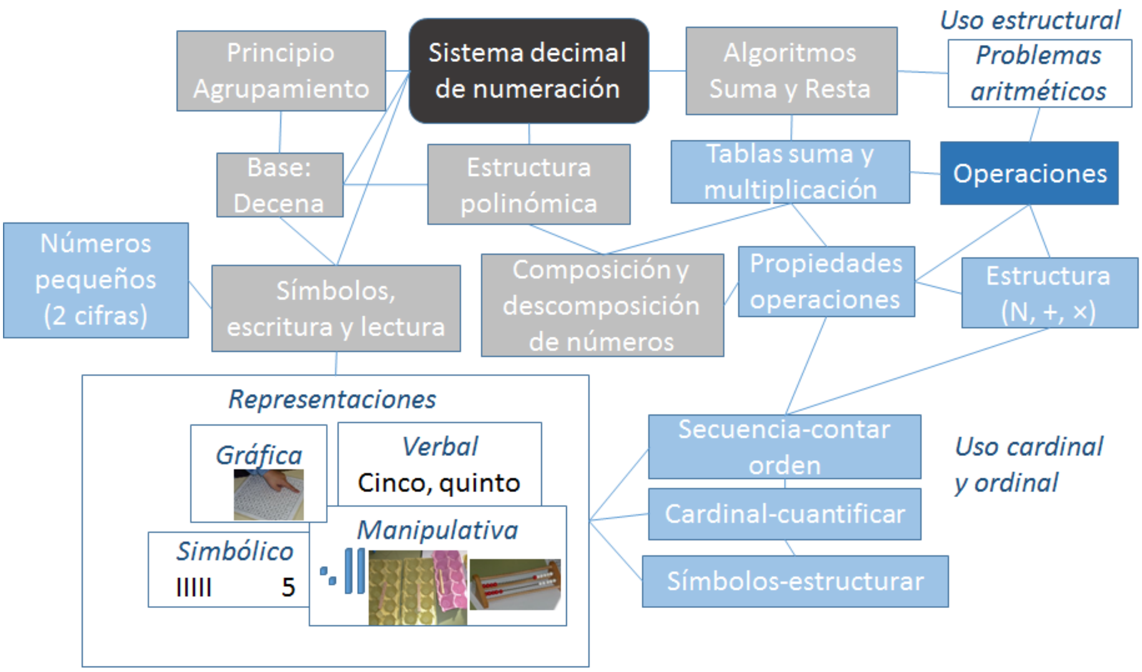


Figura 2.2. Mapa conceptual del sistema de numeración decimal (adaptado de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 303)

En la Figura 2.2, los recuadros grises se corresponden con los contenidos del foco conceptual del sistema de numeración decimal. El principio de agrupamiento y el concepto de base son el objetivo de aprendizaje más importante de esta tesis. En tonos azules, están los contenidos de los otros cuatro focos conceptuales que están relacionados directamente. La intervención que planteo en este estudio es a través de la resolución de problemas aritméticos, por lo que los focos conceptuales de las operaciones aritméticas están implicados, así como la secuencia numérica. En los recuadros con fondo blanco aparecen las representaciones y contextos y usos de los números naturales, que afectan a este trabajo, y que son necesarios para el análisis de este contenido, ya que son los que permiten manejar los números naturales y darles significado.

El principio de agrupamiento es un contenido base para el sistema de numeración decimal, que en el taller de resolución de problemas que se propone es un conocimiento central. El taller contiene problemas con agrupamientos de 10, para desarrollar la comprensión de la decena y el valor posicional en números de los números pequeños[24]. La representación de estas cantidades, que comento más abajo, con grupos de 10 y unidades sueltas, permite introducir la idea de unidades de unidades de distinto orden, que conllevarán la comprensión de la notación polinómica. La composición y descomposición de un número en las decenas que los comprenden y las unidades es una descomposición aditiva relacionada con el valor posicional de las cifras. El taller es de resolución de problemas aritméticos verbales, y servirá de contexto estructural para dar significado a las operaciones con los números naturales.

Rico y Lupiáñez (2008) indican que además de tener en cuenta los focos conceptuales y su estructura, es importante considerar las distintas formas de representación (simbólica, verbal, materiales manipulativos y gráficos). En este trabajo, voy a prestar especial atención a las representaciones que utilicen los niños. Además, se les facilitará materiales y recursos que les

[24] Números pequeños me refiero hasta 100 como en el trabajo de Rico y Lupiáñez (2008)

pueda ayudar a evolucionar en sus estrategias. En la Figura 2.3, relaciono los tipos de representaciones con materiales que incluyo en las sesiones de trabajo con los niños. En la Figura 2.2 se puede observar los contenidos relacionados con el foco conceptual significados y usos de los números naturales.

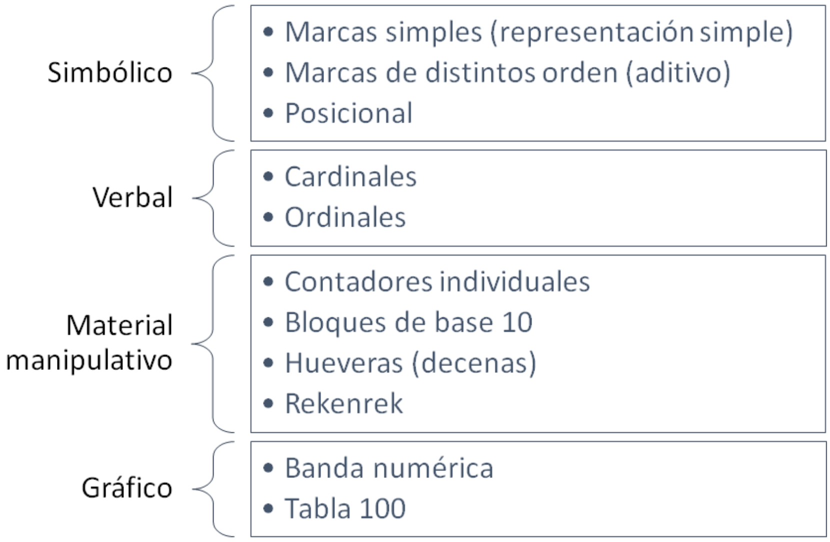


Figura 2.3. Sistema de representaciones de los números naturales en este trabajo (adaptado de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 299).

El uso de materiales con agrupaciones de 10 como los bloques de base 10 de tipo estructurado se complementa con materiales fungibles de la vida cotidiana como cartones de decenas de huevos. También incluyo materiales gráficos como la banda numérica o Tabla 100, que puede permitir la evolución de las estrategias de modelización directa a las estrategias de conteo. El rekenrek o rejilla aritmética facilita la memorización de los hechos numéricos básicos y el desarrollo de los hechos numéricos derivados. Es un material manipulativo, que además contiene una configuración basada en grupos de 5. Además, los niños disponen de contadores como los cubos encajables, plastilina con la que pueden fabricar sus propios contadores y otros materiales utilizados en clase, que ellos mismo pueden elegir para utilizarlos como objetos que representen las cantidades implicadas en los problemas.

2. Enfoques de la enseñanza de las matemáticas

Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) explican que existen básicamente cuatro formas de entender la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de *destrezas*, donde el profesor es la fuente de conocimiento y utiliza una instrucción directa de los conceptos y muestra los procedimientos correctos. En este enfoque de destrezas predomina el aprendizaje memorístico de reglas, fórmulas, procedimientos y hechos. El enfoque *conceptual* presta mayor atención a la comprensión de los procedimientos, ligando aspectos procedimentales y conceptuales, para que el aprendizaje sea significativo, usando materiales manipulativos que reflejan las estructuras matemáticas. El enfoque de *resolución de problemas* en el que se fomentan fundamentalmente los procesos de pensamiento y razonamiento, los alumnos desarrollan sus propios procedimientos y su comprensión; y (d) el enfoque *investigativo*, que refleja una visión intermedia entre el conceptual y el de resolución de problemas.

Tabla 2.2. *Enfoques de la enseñanza de las matemáticas (Baroody, Cibulskis, Lai y Li, 2004)*

Enfoque	*Conocimiento*	*Profesor*	*Focos enseñanza*
Destrezas	Hay una única respuesta correcta	Toda la autoridad	Memorización de destrezas
Conceptual	Hay más respuestas, pero no son las mejores.	Semi-autoritario: Admite respuestas pero decide su conveniencia	Memorización significativa, con comprensión
Investigativo	Hay varias respuestas que pueden ser posibles	Democrático: Junto con los estudiantes debaten las respuestas	Promueve competencia y pensamiento matemáticos
Resolución Problemas	No hay correcto ni incorrecto. Muchas posibilidades válidas	Cada alumno saca sus propias conclusiones	Promueve pensamiento matemático

En la Tabla 2.2 muestro las características más importantes de estos enfoques. El modelo de enseñanza más tradicional es el de destrezas. Cuando a este enfoque se le añade el uso de materiales manipulativos, como los bloques de base diez, de un modo dirigido por el adulto, buscando la comprensión de los procedimientos nos situamos entre el enfoque de destrezas y el conceptual. Esta aproximación mixta, con variantes más cercanas a un enfoque u otro, podría reflejar bastante bien el estado actual de la enseñanza de las matemáticas en muchos centros que intentan promover la comprensión de los conceptos.

En este estudio, la inversión del orden tradicional, introduciendo la resolución de problemas antes de la enseñanza formal de destrezas, puede ayudar a que los niños doten de sentido a las operaciones aritméticas. Esto facilitará un aprendizaje con comprensión de estos contenidos matemáticos. Este tipo de trabajo está orientado a la comprensión global del enunciado del problema, sin búsqueda de palabras claves, a través de estrategias informales de modelización directa (Carpenter y otros, 1999). El enfoque de la enseñanza que queremos utilizar en la intervención en el aula se sitúa más cerca del enfoque *investigativo*, ya que a través del planteamiento de problemas aritméticos verbales los niños van a poder construir la estrategia que quieran, y en la puesta en común se va a debatir la validez de los procedimientos, prestando una gran atención al desarrollo de las competencias matemáticas de PISA (OCDE, 2005 y 2013) como a los estándares de procesos del NCTM (2003).

3. Instrucción cognitivamente guiada

El modelo teórico en el que se basa este trabajo es la Instrucción Guiada Cognitivamente (en adelante, CGI) para el aprendizaje de la aritmética y algunos aspectos del sistema de numeración. El enfoque de la CGI tiene tres componentes, que en mayor o menor medida forman parte del marco teórico de este trabajo. El primer componente está relacionado con los trabajos que se realizaron durante la década de los ochenta y principios de los noventa en los que se investigaba la clasificación semántica de los problemas aritméticos verbales y las estrategias que utilizaban los niños al resolverlos. El enfoque que sigo en este trabajo está basado en estos estudios del CGI sobre resolución de problemas aritméticos desarrollados desde los años 80 (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Carpenter y Moser, 1984; Carpenter, Moser y Harriett, 1988; Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, y Empson, 1997). Estas investigaciones han mostrado que los niños llegan a desarrollar la comprensión de los conceptos numéricos básicos en los primeros cursos y ponen de manifiesto que la enseñanza de las matemáticas en niveles iniciales no está conectada con los conocimientos informales. La clasificación semántica de los problemas ya se ha comentado anteriormente y es la que utilizo en el diseño de las tareas de la intervención.

El segundo componente está relacionado con el enfoque metodológico de la práctica de enseñanza en el aula. Las primeras investigaciones dieron a conocer cómo los niños construyen su pensamiento y así, han fundamentado el enfoque metodológico en el que se utilizan la resolución de problemas para desarrollar los conceptos matemáticos. Desde la CGI se han desarrollado una serie de experimentos de enseñanza orientados a estudiar cómo debe ser la instrucción que favorezca este desarrollo (Verschaffel y otros, 2007). Las investigaciones muestran que los niños pueden resolver una sorprendente variedad de problemas aritméticos (de estructura aditiva y multiplicativa), desde educación infantil, basándose en estrategias informales de modelización directa, apoyándose en el uso de objetos y en el conteo. En estos trabajos se ha comprobado que los niños, sin haber recibido ninguna instrucción formal sobre las operaciones aritméticas, son capaces de resolver problemas aritméticos verbales desarrollando ideas intuitivas que les proporciona la situación del enunciado, utilizando estrategias informales. Llegan a la escuela con una cantidad enorme de conocimientos informales que pueden servir como base para la comprensión de los contenidos curriculares de educación primaria (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, Empson, 1999).

Por último, desde una visión metodológica, el modelo CGI tiene un componente de desarrollo profesional para maestros, basado en las investigaciones de los años 80 sobre el pensamiento matemático infantil en el ámbito de resolución de problemas. Formando a maestros de educación primaria sobre el desarrollo del pensamiento matemático de los niños, los niños aprenden construyendo su propio pensamiento. En la CGI los profesores deben animar a los niños a utilizar una gran variedad de estrategias, escuchar sus explicaciones, lo que les permitirá tener más control acerca de cómo construyen el conocimiento. Se ha comprobado que los niños muestran gran control sobre la aritmética, comprensión sobre ella y una buena predisposición hacia la resolución de problemas. Carpenter, Fennema y otros (1999) dan pautas de cómo los maestros pueden ayudar a los niños a desarrollar su pensamiento. Con un objetivo más a gran escala, Carpenter, Blanton, Cobb, Franke, Kaput y McClain (2004) colaboran con el *National Center for Improving Student Learning and Achievement in mathematics and Science* con el objetivo de hacer llegar las prácticas de enseñanza innovadoras trabajadas en investigación a las aulas. En el informe *Scaling up innovate practices in Mathematics and Science* (Carpenter, Blanton y otros, 2004) se conectan el desarrollo de la comprensión de los estudiantes de las matemáticas y los contenidos centrales de las matemáticas con las prácticas utilizadas para su aprendizaje; cómo debe ser la instrucción en el aula y la evaluación que apoya el aprendizaje de esas ideas con la comprensión; el desarrollo profesional que fomenta ese tipo de instrucción, y la capacidad de organización que se requiere para apoyar el desarrollo profesional y las nuevas prácticas de enseñanza. Desde el enfoque metodológico del CGI toma mucha importancia el aprendizaje con comprensión, definido por estos autores como actividades mentales que permiten la construcción de relaciones, extensión y aplicación de conocimientos, la justificación y explicación de los procedimientos, así como la construcción del conocimiento propio. En el siguiente apartado profundizo más en el aprendizaje por comprensión.

Las tres componentes citadas son referencia en este trabajo, pero no todas van a ser objeto de investigación. El componente de formación de maestros está presente en este trabajo, como se verá en la metodología de esta tesis, pero no es objetivo del estudio. Describiré los aspectos más importantes que sirven de marco teórico de esta tesis a continuación.

Uno de los trabajos más importantes sobre la resolución de problemas verbales aritméticos en la década de los 80, fue el estudio longitudinal de Carpenter y Moser (1984) en el que analizaron las estrategias utilizadas por los niños a lo largo de los tres primeros cursos de educación primaria. Desde la CGI se propone que las estrategias que construyen los niños al resolver problemas sin instrucción previa, pueden vincularse con los procedimientos formales que aprenderán según avance su escolaridad, dando sentido a los algoritmos. Sin embargo, se dedica muy poco tiempo al desarrollo de estrategias informales para pasar a la repetición de ejercicios con datos numéricos y algoritmos.

El modelo teórico de la CGI muestra que planteando problemas aritméticos verbales en un contexto significativo para los niños, éstos son capaces de resolverlos sin una instrucción formal sobre los contenidos aritméticos, simplemente utilizando estrategias inventadas por ellos. Estas estrategias son informales, ya que no son el resultado de una instrucción sino que los niños, utilizando sus propias ideas intuitivas, establecen relaciones entre las cantidades según la estructura semántica del problema y lo resuelven.

Las siguientes estrategias son de modelización directa para problemas verbales de estructura aditiva. Carpenter, Fennema y otros (1999) relacionan las estrategias que inicialmente utilizan los niños con cada tipo de problema. Las acciones y relaciones que implica el enunciado del problema reflejan las estrategias utilizadas por los niños (véase Tabla 2.3).

Tabla 2.3. *Estrategias de modelización directa utilizadas por los niños según el enunciado del problema verbal aditivo (Carpenter Fennema y otros, 1999)*

Estrategia	*Descripción*	*Problema*
Juntar todo	Los niños representan una cantidad contando objetos, luego representan la segunda cantidad, lo juntan y lo cuentan todo.	Combinación (incógnita total)
Juntar a	Los niños representan la cantidad inicial contando objetos, luego representan la cantidad de cambio y la juntan a la primera; finalmente, lo cuentan todo.	Cambio Creciente (incógnita: cantidad final)
Añadir hasta	Los niños representan la cantidad menor del problema y van añadiendo objetos hasta conseguir la mayor. Se cuenta los objetos que se han añadido.	Cambio Creciente (incógnita: cantidad cambio)
Quitar (quitar de)	Los niños representan la cantidad inicial con objetos y retiran el número de objetos que indica la cantidad cambio. Cuentan la cantidad de cosas que quedan.	Cambio decreciente (incógnita: cantidad final)
Quitar hasta	Los niños representan la cantidad más grande del problema y retiran objetos hasta que quedan los que indica la otra cantidad del problema. Cuentan los que han quitado	Cambio decreciente (incógnita: cantidad de cambio)
Correspondencia uno a uno (emparejamiento)	Los niños representan las dos cantidades del problema, y emparejan los dos conjuntos. Cuentan los objetos de no han quedado emparejados.	Comparación (incógnita: diferencia)
Ensayo y error	Los niños proponen una cantidad de objetos y realizan las acciones que indica el problema. Si el resultado final no es el indicado, se propone otro conjunto inicial.	Cambio (incógnita: cantidad inicial)

La evolución de la elaboración de la secuencia de numerales permite aplicar *estrategias de conteo* que Carpenter, Fennema y otros (1999) relacionan con los tipos de problemas (véase

Tabla 2.4). Las estrategias que establece esta tabla se basan en las acciones y relaciones de las cantidades que presenta el enunciado del problema desde el punto de vista semántico. La experiencia en resolución de problemas facilita la memorización de hechos numéricos básicos que los niños van utilizando cada vez más. La memorización de suma de dobles (2+2=4, 3+3=6) o descomposiciones de 5 o 10 (2+3=5, 6+4=10) son las primeras que van adquiriendo los niños y utilizando en la resolución de problemas.

En el trabajo de Carpenter, Fennema y otros (1999) muestran que la utilización de las estrategias va evolucionando de tal manera que los niños llegan a utilizarlas de forma flexible en problemas que no necesariamente tienen la estructura semántica que se corresponde con ellas. En este punto, los niños entienden que en los problemas aditivos hay dos cantidades que suman un total, el esquema parte-todo. Si se conocen las dos cantidades que conforman el total, las estrategias juntar todos, contar a partir del primero o del mayor sirven para resolver el problema. Si se conoce el total y una de las dos cantidades, entonces hay que hallar la otra parte que se puede hacer con las estrategias de quitar, quitar hasta, añadir hasta, contar hasta, contar hacia atrás, contar hacia atrás hasta o incluso con correspondencia uno a uno.

Tabla 2.4. *Estrategias de conteo utilizadas por los niños según el enunciado del problema verbal aditivo (Carpenter Fennema y otros, 1999)*

Estrategia	*Descripción*	*Problema*
Contar a partir de Primero	Los niños toman la primera cantidad del problema y se continúa la secuencia de conteo, tantos numerales como indica la segunda cantidad del problema. El resultado es el último numeral dicho.	Cambio Creciente (incógnita: cantidad final)
Contar a partir del mayor	Los niños toman la mayor cantidad del problema y se continúa la secuencia de conteo, tantos numerales como indica la cantidad más pequeña del problema. El resultado es el último numeral dicho.	Combinación (incógnita total)
Contar hasta	Los niños realizan un conteo del número de numerales que hay entre la cantidad inicial y la cantidad final.	Cambio Creciente (incógnita: cantidad cambio)
Contar hacia atrás	Los niños realizan un conteo hacia atrás desde la cantidad inicial, contando el número de numerales que indica la cantidad cambio, siendo el resultado el último numeral pronunciado.	Cambio decreciente (incógnita: cantidad final)
Contar hacia atrás hasta	Los niños realizan un conteo hacia atrás del número de numerales que hay entre la cantidad inicial hasta la cantidad final.	Cambio decreciente (incógnita: cantidad de cambio)

Carpenter, Fennema y otros (1999) agrupan en tres tipos de estrategias los procedimientos utilizados por los niños en los problemas aritméticos verbales: estrategias de modelización directa, estrategias de conteo y uso de hechos numéricos. Carpenter y Moser (1984) indican también un periodo de transición entre las estrategias de modelado directo y conteo. El paso de las estrategias de modelización directa a las estrategias de conteo conlleva estrategias intermedias, mencionadas también en las revisiones de Fuson (1992). Por ejemplo, entre las estrategias de juntar todo y contar a partir de un sumando, los niños pueden llegar a representar la cantidad del segundo sumando del problema para llevar el rastro del conteo de la segunda colección, comenzando desde el numeral de la primera cantidad (contar a partir de un sumando con objetos). La estrategia contar todo sin objetos se considera de transición y consiste en representar las cantidades mentalmente, de manera figurativa, ya que el niño no las representa físicamente y realiza el conteo desde el 1 (Carpenter, Fennema y otros, 1999; Fuson, 1992).

Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck (1993) observaron las estrategias que utilizan los niños en problemas de multiplicación, división medida y división partitiva en un grupo de 70 niños de Kindergarten, y sin recibir ninguna instrucción. Estos autores observaron que los niños de educación infantil construyen estrategias de resolución para problemas de multiplicación y división, de la misma forma que lo hacen para problemas de suma y resta, modelizando directamente las acciones y relaciones que se dan en la situación del problema. En este estudio presentaron a los niños problemas de grupos iguales (de agrupamiento y reparto) de multiplicación, división medida y división partitiva, como por ejemplo, “Robin tiene 3 paquetes de chicles. Hay 6 chicles en cada paquete. ¿Cuántos chicle tiene Robin en total?”. Participaron 70 niños de educación infantil, y 60 de ellos resolvieron con una estrategia válida los problemas de multiplicación, 51 los de división medida y 49 los de división partitiva.

Las estrategias que utilizan para los problemas verbales de multiplicación fueron de modelización directa y conteo. La estrategia de modelización directa utilizada por los niños fue el agrupamiento, representando los grupos con objetos, poniendo en cada uno y todos los grupos el número de objetos que indica el problema, contando todo para terminar. Las estrategias de conteo consisten en un conteo a saltos en las que, tomando como ejemplo el problema de Robin anterior, se realiza un conteo de 6 en 6, hasta completar 3 grupos, 6, 12, 18 (Carpenter, Fennema y otros, 1999). En el estudio de Carpenter, Ansell y otros (1993), observaron variantes de las estrategias de conteo en las que los niños contaban alguno de los grupos de uno en uno. Por ejemplo, una estrategia fue “1, 2, 3, 4, 5, y 6 (pausa), 7, 8, 9, 10, 11, 12 (pausa), 13, 14, 15, 16,17 y 18”. Otros niños partían de 6, “6 (pausa), 7, 8, 9, 10, 11, 12 (pausa), 13, 14, 15, 16, 17 y 18”.

Para los problemas de división medida, se observaron dos variantes de estrategias de medida de modelización directa. La primera consiste en contar el número total de elementos e ir agrupándolos según indica la cantidad de elementos por grupo. Cuando no quedan más objetos, se cuenta el número de grupos. La otra variante es ir construyendo grupos con el número de objetos por grupo que indica el problema, e ir comprobando el total de elementos hasta completar el total que indica el problema. Una vez agrupado el número total de objetos que indica el problema se cuenta el número de grupos (Carpenter, Ansell y otros, 1993). La estrategia de conteo se realiza contando a saltos como en multiplicación, pero esta vez se cuenta hasta alcanzar el total de elementos llevando el control del número de numerales que se dicen al contar, ya que éste indica el número de grupos. Este control se suele llevar a cabo levantando un dedo por cada numeral (grupo) que se enuncia (Carpenter, Fennema y otros, 1999).

En los problemas de división partitiva los niños utilizan la estrategia de *reparto* como estrategia de modelización directa. Carpenter, Ansell y otros (1993) observaron dos variantes de esta estrategia. En la primera los niños reparten sistemáticamente de uno en uno tantos objetos como indica el total del problema en el número de grupos que se indica, contando lo que hay en un grupo. Otros niños ajustan el total de elementos en los grupos dados, hasta que en cada uno de los grupos hay exactamente los mismos elementos. En este último caso, hay niños que reparten por grupos inicialmente y luego van ajustando o utilizan el ensayo y error hasta que consiguen que en todos los grupos haya lo mismo. Una de las dificultades que pueden presentar los niños en los problemas de reparto cuando colocan un objeto para marcar el grupo, es considerarlo a la hora de saber cuántos elementos tocan en cada grupo. La estrategia de conteo también se realiza a saltos, proponiendo una cantidad de elementos por grupo que marca el salto en el conteo. Las estrategias basadas en hechos numéricos derivados se basan en la suma reiterada.

Desde la CGI recomiendan introducir problemas de estructura multiplicativa desde educación infantil, ya que los niños son capaces de modelizar la situación y resolverla con contadores. En educación primaria los fundamentos sobre el agrupamiento de este tipo de problemas pueden ayudar a comprender el valor posicional. Así, hallar cuántas decenas hay en 64, es un problema de división medida, con un número de grupos de 10 que son las decenas, y algunas unidades sueltas. Cuando los niños resuelven problemas de división medida en los que deben contar el número de grupos, realizan algo similar al conteo de agrupamientos de 10 que se utiliza en situaciones donde se está aprendiendo el principio de agrupamiento del sistema decimal de numeración, en el que se cuentan unidades de orden superior, agrupadas de 10 en 10.

Carpenter, Fennema y otros (1999) afirman que si los niños tienen la oportunidad de resolver problemas de multiplicación y división, con agrupamientos de 10, pueden desarrollar un conocimiento con comprensión de los principios básicos del sistema de numeración esenciales para entender la numeración de base diez. Estos problemas son el objeto principal de estudio de esta tesis, que me permitirán evaluar el nivel de comprensión de la decena de los alumnos en primero de educación primaria.

Para comprender el agrupamiento en base 10 los niños tienen que comprender que las decenas, los grupos de 10, se pueden contar. Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) proponen el planteamiento de problemas de multiplicación y división medida con grupos de 10 para desarrollar la noción de agrupamiento del sistema de numeración decimal. Los problemas de grupos iguales pueden ayudar a los niños a comprender algunos aspectos que subyacen a los sistemas de numeración como es el agrupamiento (Carpenter, Fennema et al, 1999). En la Tabla 2.5 se muestran ejemplos de problemas de multiplicación y división medida. No aparecen problemas de división partitiva ya que la incógnita en este tipo de problemas es el número de elementos por grupo (y en este caso es conocido, 10) (Carpenter, Franke y otros, 1997; Carpenter, Fennema y otros, 1999).

Tabla 2.5. *Problemas de grupos iguales con grupos de 10*

Tipo de problema	*Problema*
Multiplicación	José tiene 3 cajas de pinturas con 10 pinturas en cada caja. ¿Cuántas pinturas tiene en total?
División medida	José tiene 30 pinturas y quiere guardarlas en cajas de 10 pinturas cada una. ¿Cuántas cajas puede llenar?

En la Tabla 2.6 hay ejemplos de las estrategias observadas al plantearse un problema verbal de multiplicación con grupos de 10: “Hay 5 cajas de bollos con 10 bollos en cada una y 3 bollos sueltos. ¿Cuántos bollos hay en total?”. Estos problemas suponen una gran dificultad ya que son problemas de dos etapas, hay un problema de estructura multiplicativa y a continuación, una combinación aditiva. Los niños disponían de barras de 10 cubos encajables y contadores individuales (Carpenter, Fennema y otros, 1999).

Tabla 2.6. *Estrategias observadas en problemas de multiplicación con grupos de 10 (Carpenter, Fennema y otros, 1999)*

Agrupamiento contando de 1 en 1	*Agrupamiento con barras de 10, contando de 1 en 1*	*Agrupamiento con barras de10, contando de 10 en 10*	*Conteo a saltos las decenas, conteo de las unidades.*	*Valor posicional*
Se hace 5 grupos con 10 objetos en cada uno, se cogen 3 objetos más. Se cuenta todo de 1 en 1.	Se cogen 5 barras de 10 y 3 unidades sueltas. Se cuenta todo de uno en uno.	Se cogen 5 barras de 10 y 3 unidades. Se cuenta las barras de 10 en 10, 10, 20, 30, 40, 50, y las unidades, 51, 52, 53.	Sin material, 10, 20, 30, 40, 50, 51, 52, 53.	5 cajas son 5 decenas, 50, y 3 unidades, 53.

En la siguiente Tabla 2.7 muestro las estrategias observadas al plantearse un problema verbal de división medida con grupos de 10, “Hay 53 bollos y queremos meterlos en cajas de 10, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Cuántos bollos quedan sueltos?”

Tabla 2.7. *Estrategias observadas en problemas de división medida con grupos de 10 (Carpenter, Fennema y otros, 1999)*

Medida	*Medida con barras de 10, contando de 10 en 10*	*Conteo a saltos las decenas, conteo de las unidades.*	*Valor posicional*
Se cogen 53 objetos y se hacen grupos de 10. Se cuentan el número de grupos y el número de objetos sueltos.	Se cogen 5 barras de 10, que son 50 y 3 unidades. Se cuenta las barras por un lado, y luego las unidades.	Sin material, 10, 20, 30, 40, 50, levantando un dedo por cada decena, 5 cajas, y 51, 52, 53, son 3 bollos sueltos.	50, son 5 decenas, son 5 cajas, 3 unidades fuera de la caja.

Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson (1997) utilizan estos problemas para evaluar el conocimiento sobre el valor posicional de los niños. Para ello les proporcionaron bloques de base 10 de Dienes. Al igual que las estrategias recién mencionadas, los niños primero contaban de uno en uno las unidades que forman las barras de los bloques de base 10 y más tarde, de 10 en 10.

Tabla 2.8. *Estrategias observadas para problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10 con bloques de base 10 (Carpenter, Franke y otros, 1997; (Carpenter, Fennema y otros, 1999)*

	Conteo de uno en uno	*Conteo de 10 en 10*	*Valor posicional (VP)*
Multiplicación	Agrupamiento con barras de 10 y unidades suelta – conteo de uno en uno	Agrupamiento con barras de 10 y unidades sueltas – contando de 10 en 10	Las barras son decenas, elementos sueltos son unidades
División Medida	Medida con barras de 10 y unidades suelta	Conteo a saltos de 10 en 10 hasta la década	La cifra de las decenas son grupos de 10 y las unidades, objetos sueltos

El enfoque de la CGI plantea los métodos para operar números con varias cifras como una extensión natural de los procedimientos utilizados con cantidades de una cifra. Con las situaciones con números de una cifra utilizan objetos individuales, pero con los números de varias cifras los niños deben explorar bloques de base 10 y otras clases de materiales con dicha estructura para resolver los problemas. Poco a poco, los niños van representando las cantidades como decenas y unidades, lo que les ayuda a empezar a construir el concepto de valor posicional. Con el tiempo, son capaces de abstraer soluciones y dejan de utilizar los materiales (Fuson, Wearne y otros, 1997).

Como he comentado anteriormente el grupo CGI realizó un estudio longitudinal de primero a tercero de educación primaria para investigar el rol de las estrategias inventadas en el desarrollo de la comprensión de los conceptos y procedimientos de suma y resta con números de varias cifras, y su relación con la comprensión de los conceptos del sistema de numeración decimal y su uso en los algoritmos (Carpenter, Franke y otros, 1997). Estos autores consideran que el uso de estrategias inventadas por parte de los niños evita errores típicos en los algoritmos estándar y permite extender el conocimiento a nuevos problemas.

Las estrategias que utilizan los niños inicialmente para resolver problemas verbales de estructura aditiva con números de dos cifras son de modelización directa con contadores individuales, pero cuando van adquiriendo la comprensión del agrupamiento en base 10 del sistema de numeración empiezan a representar las cantidades utilizando materiales que representan las decenas. Las estrategias siguen una evolución que se puede observar en la siguiente Tabla 2.9.

Tabla 2.9. *Estrategias observadas en problemas de estructura aditiva con números de dos cifras (Carpenter, Fennema y otros, 1999)*

Estrategias	*Suma (46 + 25)*	*Resta (71- 25)*
Modelización directa con contadores individuales contando de uno en uno	Se coge 46 objetos y 25 objetos, se juntan y se cuentan todos	Se cogen 71 objetos, se quitan 25 y se cuenta todo.
Modelización directa con contadores individuales haciendo grupos de 10, contando de uno en uno	Se hacen 4 grupos de 10 y 6 unidades. Además se hacen 2 grupos de 10 y cinco unidades. Se junta todo y se cuentan de uno en uno todo.	Se hacen 7 grupos de 10 y una unidad. Se quitan 25 y se cuenta lo que queda de uno en uno.
Conteo de uno en uno	Se cuentan 25 numerales a partir de 46.	Se cuentan 25 numerales hacia atrás desde 71.
Modelización con Base 10	Se cogen 4 barras y 6 unidades. Además se cogen 2 barras y cinco unidades. Se cuentan de uno en uno todas las unidades de las barras y las unidades sueltas	Se cogen 7 barras y una unidad. Se van quitando unidades. Como no pueden quitarse de las decenas, se descomponen en unidades y se quitan. Se cuenta de uno en uno cada unidad de las barras y las unidades que queden sueltas.
Modelización con Base 10, contando barras primero y luego unidades	Se cogen 4 barras y 6 unidades. Además se cogen 2 barras y cinco unidades. Se cuentan de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades sueltas	Se cogen 7 barras y una unidad. Se van quitando unidades. Como no pueden quitarse de las decenas, se descomponen en unidades y se quitan. Se cuenta de 10 en 10 cada barra y las unidades que queden sueltas de uno en uno.

Con el tiempo, los niños no necesitan materiales físicos y comienzan a usar estrategias inventadas (Carpenter, Franke y otros, 1997). Estos autores, resumen las estrategias inventadas como muestro en la Tabla 2.10.

Tabla 2.10. *Estrategias inventadas (Carpenter, Franke y otros, 1997)*

Estrategias	*Suma (46 + 25)*	*Resta (71- 25)*
Secuencial	Cuarenta y veinte, sesenta; sesenta y seis, sesenta y seis, y cinco más, setenta y uno	Setenta menos veinte, cincuenta; cincuenta más uno, cincuenta y uno; menos cinco, cuarenta y seis
Combinar unidades separadamente	Cuarenta y veinte, sesenta; seis y cinco, once; sesenta y once, setenta y uno.	Setenta menos veinte, cincuenta; uno menos cinco, me quedan 4 por quitar; cincuenta menos cuatro, cuarenta y seis.
Compensación	Cincuenta más veinticinco, setenta y cinco; menos cuatro, setenta y uno	Setenta menos treinta, cuarenta; más uno, cuarenta y uno; más cinco, cuarenta y seis.

En el estudio longitudinal de Carpenter, Franke y otros (1997) se plantean de manifiesto varias cuestiones: si las estrategias inventadas proporciona comprensión de los procedimientos con números de varias cifras, debe haber diferencias entre los niños que usan estas estrategias antes de aprender los algoritmos, y los niños que no las usan. También se preguntan si los niños deben aprender primero las propiedades del sistema de numeración para utilizar estrategias inventadas, qué nivel de comprensión del sistema de base 10 deben tener adquirido. El uso de estrategias inventadas y la comprensión del sistema de base 10 están relacionados, pero falta identificar si el desarrollo de la comprensión conceptual del sistema de base 10 debe ser anterior o se produce a la vez que el uso de estrategias inventadas. Carpenter, Fennema y otros (1999) afirman que no han llegado a probar ya que han observado que los niños utilizan estrategias inventadas antes de tener adquirida una comprensión completa del sistema de numeración. Sin embargo, Carpenter, Franke y otros (1997) afirman que el uso de estrategias inventadas, antes o incluso durante la instrucción de los algoritmos estándar, favorece la comprensión de conceptos del sistema de numeración de base diez. Sobre los beneficios del uso de estrategias inventadas, se espera que los niños cometan menos errores en la ejecución de procedimientos de suma y resta con números de varias cifras Carpenter, Franke y otros (1997).

En los trabajos del CGI que he descrito anteriormente se explica la evolución de las estrategias utilizadas en problemas de grupos iguales de multiplicación, división medida y división partitiva, comenzando con números de una cifra. Continuando con números de dos cifras, representando cantidades primero con los bloques de base 10, se utilizan también las estrategias de agrupamiento, medida y reparto. Por último, los niños llegan a elegir estrategias inventadas (Carpenter, Ansell y otros, 1997; Carpenter, Fennema y otros, 1999). En la Tabla 2.11, presento las estrategias utilizadas por los niños en problemas con números de hasta 3 cifras.

Tabla 2.11. *Estrategias de multiplicación y división hasta números de 3 cifras (Carpenter, Fennema y otros, 1999) y Ambrose, Baek y Carpenter (2003)*

<table>
<tr><th></th><th>Tipo de Estrategia</th><th>Multiplicación</th><th>División medida</th><th>División partitiva</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Números de una cifra</td><td>Modelización directa</td><td>Agrupamiento con objetos</td><td>Medida con objetos:
Contando inicialmente el total
Sin contar inicialmente el total</td><td>Reparto con objetos:
De uno en uno
Ajustes
Prueba y error</td></tr>
<tr><td>Conteo</td><td colspan="2">Conteo a saltos:
Conteo a saltos y por unidades:
Inicialmente cuentan de uno en uno todos los grupos.
Cuentan de uno en uno a partir de primer o segundo grupo
Cuentan a saltos todos los grupos</td><td>Conteo a saltos por prueba y error</td></tr>
<tr><td>Hechos numéricos</td><td colspan="3">Hechos numéricos derivados
Hechos numéricos básicos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Números de dos cifras</td><td>Modelización con bloques de base 10</td><td>Agrupamiento con bloques de base 10</td><td>Medida con bloques de base 10</td><td>Reparto con bloques de base 10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estrategias inventadas</td><td>Duplicación y Combinar decenas y unidades por separado</td><td>Duplicación</td><td>Combinar decenas y unidades por separados</td></tr>
<tr><td>Números de 3 cifras</td><td>Adición o sustracción repetida, particionamiento o compensación(Ambrose y otros, 2003)</td><td colspan="2">Adición o sustracción repetida, descomponer el dividendo en partes (decenas y unidades o construirlo, construcción del dividendo (Ambrose y otros, 2003)</td></tr>
</table>

4. Aprendizaje con comprensión

El aprendizaje de las matemáticas con comprensión es requisito imprescindible en la educación matemática. Una muestra de ello se ve reflejado en el *Principio de Enseñanza* de las recomendaciones del NCTM (2000, 2003) en el que se indica que las experiencias que proporcionan los profesores a sus alumnos marcan su aprendizaje, su comprensión de los conocimientos matemáticos, su habilidad para aplicarlos a la resolución de problemas, su confianza al hacerlo y su disposición hacia la asignatura. Los profesores deben ayudar a los niños a conectar sus conocimientos previos con los conocimientos nuevos.

Más concretamente, en el *Principio de Aprendizaje* se afirma que hay que prestar mayor atención a la comprensión de los conceptos numéricos y a los procedimientos de modelización utilizados en la resolución de problemas, así lo aprendido con comprensión en unos problemas capacitará a los alumnos para enfrentarse a nuevos tipos de problemas que se puedan plantear en el futuro. Los conocimientos que se adquieren con comprensión son más significativos, y se recuerdan y aplican con más facilidad si las ideas nuevas y las anteriores están bien conectadas (NCTM, 2003, p. 21).

Un objetivo primordial de la enseñanza obligatoria es formar a los estudiantes para poder afrontar las situaciones que van a encontrarse fuera de aula. Como no podemos controlar todas las situaciones, no podemos dar introducción concreta para cada una de ellas, hay que ayudar a los estudiantes a aprender a desarrollar estrategias de resolución en situaciones nuevas para ellos utilizando los conocimientos que ya tienen.

Desde la educación matemática es importante saber valorar la comprensión hacia los conceptos y procedimientos para poder actuar con esa información sobre la formación de los estudiantes. Gallardo, González y Quispe (2008) agrupan en dos orientaciones los trabajos que tratan la interpretación de la comprensión matemática, orientación cognitiva y orientación semiótica. Desde una orientación cognitiva, la comprensión es un fenómeno cognitivo, por lo que su interpretación supone acceder a las mentes de los alumnos, tomando como vías las distintas manifestaciones observables al resolver situaciones matemáticas. En este caso la interpretación de la comprensión a través de la observación de las realizaciones de los niños suele abordarse desde supuestos teóricos previos, intentando acercar la realidad externa a la realidad interna. El enfoque representacional desarrolla una visión de la comprensión a través de las representaciones internas y externas del conocimiento matemático, y sus conexiones. En este enfoque, la comprensión es un fenómeno cognitivo que para interpretarlo se utiliza un modelo a priori y se busca trasladar a las realidades cognitivas internas del individuo las observaciones externas objetivadas, intentando reducir la distancia entre ambas.

Desde la orientación semiótica, no interesa la construcción mental en sí, sino la actividad matemática visible y del uso que se hace de su simbología. En este enfoque la comprensión es una capacidad intrínseca al individuo, que para interpretarla se utiliza un modelo de análisis estructural de inspiración lingüística y que, a través de la práctica matemática visible y uso de sus sistemas de signos, se intenta trasladar a entornos semióticos de actividad matemática (Gallardo, González y Quispe, 2008).

4.1. Enfoque cognitivo de la comprensión

En este trabajo me baso en una visión cognitiva de la comprensión según la cual esta emerge y se desarrolla a través de distintas actividades mentales. Desde este punto de vista, interesa describir cómo los alumnos construyen significados para los conceptos y procedimientos matemáticos, y cómo debemos favorecer este aprendizaje. El aprendizaje de las matemáticas con comprensión, desde un enfoque cognitivo, se considera como la actividad mental que permite construir significados para los conceptos y procedimientos matemáticos, relacionándolos y organizándolos de algún modo productivo que permitan ser accesibles para resolver nuevos problemas (Carpenter y Lehrer, 1999).

La comprensión matemática se toma como un aprendizaje generativo donde los conocimientos adquiridos pueden aplicarse para aprender nuevos conocimientos y resolver problemas nuevos para los estudiantes (Carpenter y Lehrer, 1999). Una propuesta desde la enseñanza cognitivamente guiada es que los niños entran en educación primaria con una gran cantidad de conocimientos informales o intuitivos sobre las matemáticas que pueden servir como base para desarrollar la comprensión de las matemáticas del currículo de educación primaria. Carpenter, Fennema y otros (1999) conciben la comprensión como actividad mental que se desarrolla en distintos niveles. En concreto, plantean cinco formas de actividad mental con este fin: la “construcción de relaciones, la extensión y aplicación del conocimiento matemático, la reflexión sobre las experiencias, la articulación sobre las experiencias y la apropiación del conocimiento matemático” (Carpenter, Fennema y otros, 1999).

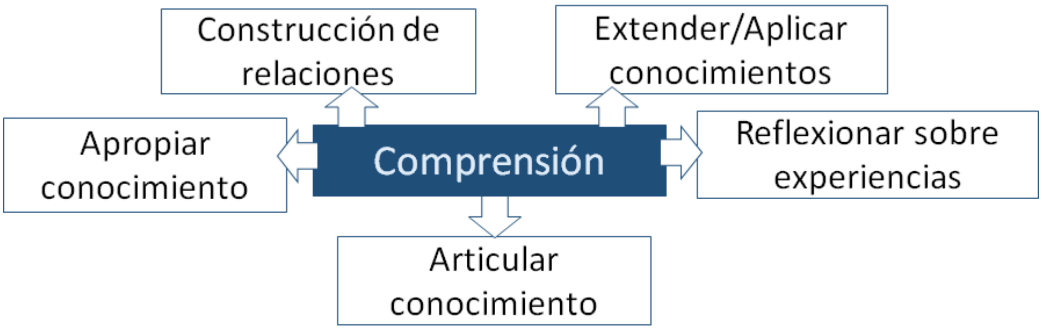


Figura 2.4. Aprendizaje con comprensión (Carpenter y Lehrer, 1999).

Estos autores afirman que los conceptos formales matemáticos del currículo pueden adquirir significado si se relacionan con las ideas intuitivas que construyen los niños antes de recibir una instrucción formal sobre ellos. No trabajar sobre los conocimientos informales e intuitivos de los niños puede provocar una separación entre éstos y los conceptos formales que se trabajan en la escuela, por lo que no hay comprensión en el aprendizaje de los contenidos matemáticos en el aula. Estos autores plantean utilizar los conocimientos informales de los niños para relacionarlos con los conceptos matemáticos trabajados en la escuela. El Real Decreto de enseñanza mínimas (MEC, 2006) señala que una de las finalidades de incluir las competencias básicas en el currículo es integrar los conocimientos formales incorporados en las distintas áreas con los conocimientos informales Además, las enseñanzas mínimas pretenden que los alumnos integren sus aprendizajes, poniéndolos en relación y puedan utilizarlos de manera efectiva cuando sea necesario utilizarlos en diferentes situaciones y contextos (MEC, 2006, pp. 43058). Carpenter y Lehrer (1999) señalaron que este conocimiento debe ser aplicable y extensible, se debe crear una estructura de conocimiento para ser generativo, donde las ideas y procedimientos se van relacionando lo que permitirá su aplicabilidad. Esta integración de los conocimientos adquiridos es fundamental porque adquirir un conocimiento aislado no permite relacionarlo con una situación problemática. Cuando aprendemos conceptos aislados, es difícil utilizarlos en situaciones problemáticas en las que hay que relacionar varios aspectos para concluir y decidir qué estrategias seguir. De hecho, Carpenter y Lehrer afirman:

> A menudo se ha supuesto, que las habilidades y los conceptos básicos necesitan ser aprendidos antes de introducir sus aplicaciones. Esta es una suposición errónea: los niños utilizan el conocimiento que han adquirido intuitivamente para resolver problemas antes de recibir la enseñanza sobre las destrezas (Carpenter y Lehrer, 1999, p. 20).

Respecto a la actividad mental de ser reflexivo en el aprendizaje significa, según Carpenter y Lehrer (1999), que los alumnos examinan conscientemente el conocimiento que están adquiriendo, lo relacionan con el que poseen ya, y además lo reorganizan. La resolución de problemas exige un examen consciente de la relación entre los conocimientos previos y las condiciones del problema.

> Resolver un problema con comprensión conlleva construir una representación cognitiva de los elementos de la situación y las relaciones entre estos elementos. En la medida en que esta representación es coherente, se conecta con la situación de problema, el problema se dice que está resuelto con comprensión (Heller y Greeno, 1979, citado por Castro, 2008, p. 15).

Los procesos de construcción de una representación interna del problema y el uso de una estrategia de solución que citaba anteriormente, relacionaba el primer proceso con la comprensión del problema. Castro (2008) desglosa este proceso en “traducción del problema a una representación interna e integración del problema en una estructura coherente (p. 15).”

Hiebert y Carpenter (1992) indican que la comprensión depende de las estructuras internas del conocimiento, de la fortaleza de las conexiones de la red de representaciones que tenga el estudiante. Así la comprensión de una idea, concepto o procedimiento matemático dependerá de las conexiones de esa estructura de conocimientos. Cuando los niños construyen estrategias informales al resolver problemas aritméticos verbales, utilizan acciones de unir, quitar, repartir, agrupar que pueden ser la base de los conocimientos formales que se introducen en Educación Primaria como son los algoritmos de las operaciones aritméticas (Carpenter y Lehrer, 1999). Establecer relaciones entre las situaciones problema, las estrategias informales y las estrategias formales proporciona aprendizaje con comprensión de los conceptos aritméticos (ver Figura 2.5).

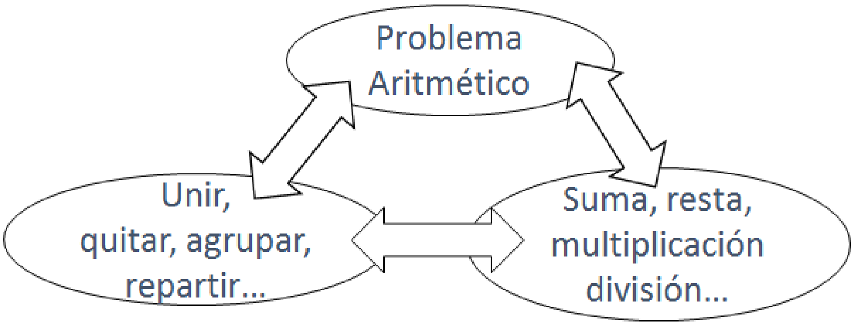


Figura 2.5. Relaciones entre estrategias informales y formales (Carpenter y Lehrer, 1999).

En la etapa de Educación Infantil y primer ciclo de Primaria las *conexiones* más importantes que se deben trabajar son los conocimientos matemáticos intuitivas, que desarrollan el conocimiento informal, que los niños han aprendido a través de sus experiencias y los conocimientos matemáticos que se aprenden en la escuela, de esta manera el aprendizaje de las matemáticas se consigue de forma significativa, dando sentido de la función de éstas como medio para observar, representar e interpretar lo que ocurre a su alrededor (NCTM, 2003).

Las conexiones entre los contenidos matemáticos, los procesos matemáticos y entre ambos, facilitan la aplicabilidad de conceptos y destrezas. "Comprender las conexiones elimina las barreras que separan las matemáticas aprendidas en la escuela de las aprendidas en otra parte (NCTM, 2003, p. 136).

Una de las competencias que deben desarrollar los estudiantes a lo largo de educación primaria es la comunicación lingüística "que permite expresar pensamientos, generar ideas, estructurar el conocimiento, dar coherencia y conexión al discurso y a las propias acciones y tareas… disfrutar escuchando" (MEC, 2006, p. 43058). Se debe animar a los niños a *comunicar* sus estrategias para descubrir por ellos mismos posibles errores y para ayudales a articular su pensamiento. "La *comunicación* de ideas es una manera de que los niños articulen, aclaren, organicen y consoliden su pensamiento" (NCTM, 2003, p. 132). "Los niños expresan sus ideas con ayuda de dibujos y materiales, intentar organizar y esclarecer sus ideas para poder expresar lo más claramente posible su pensamiento" (NCTM, 2003, p. 133). Además escuchan las ideas de otros compañeros que pueden darles otra perspectiva que no habían contemplado, y reflexionan sobre ello. Utilizar el lenguaje oral y/o escrito en la resolución de problemas con materiales permite el desarrollo del pensamiento matemático pues articulan lo que quieren expresar y reflexionan sobre lo escuchado, y eso gradualmente mejorará el lenguaje y el razonamiento (NCTM, 2003, p. 133). La articulación de nuestras ideas supone la comunicación de conocimientos propios, tanto verbalmente, como por dibujos u otro tipo de representación, haciéndonos reflexionar y forzándonos a identificar puntos críticos (Carpenter y Lehrer, 1999).

Una característica importante de la comprensión, desde un enfoque cognitivo, comprender supone la construcción de nuestro conocimientos. Somos autores de nuestro propio aprendizaje, de modo que siempre hay una contribución personal (Carpenter y Lehrer, 1999).

En el informe *Scaling Up* mencionado anteriormente (Carpenter, Blanton, Cobb, Franke, Kaput y McClain, 2004) se plantea que para llegar a conseguir el aprendizaje con comprensión, la práctica del aula debe cambiar ya que las prácticas innovadoras que funcionan no llegan a extenderse de una manera amplia dentro del ámbito educativo. Carpenter y Lehrer (1999) indican tres dimensiones de la enseñanza que se deberían considerar: las tareas, los instrumentos y las prácticas normativas. Las tareas deben estar diseñadas y secuenciadas con el objetivo de mejorar la comprensión. Las trayectorias de aprendizaje-enseñanza pueden facilitar el diseño de estas tareas atendiendo a la progresión del desarrollo del pensamiento de los niños (NAEYC Y NCTM, 2013). Las tareas proporcionan oportunidades a los niños para desarrollar estrategias cada vez más evolucionadas.

Los instrumentos se utilizan para representar conceptos y situaciones problemáticas de matemáticas, como los materiales manipulativos, lápiz y papel, calculadoras. Los profesores deben fomentar la reflexión explícita sobre las características de las representaciones que sirvan para comunicar y comprender las ideas matemáticas (Carpenter y Lehrer, 1999). Estas representaciones permiten analizar, junto con las explicaciones de los niños, el desarrollo del pensamiento matemático, y además proporcionan información para guiar el aprendizaje. “Los profesores pueden encontrar, en la forma en que un niño interpreta las situaciones matemáticas, claves para analizar su comprensión (NCTM, 2003, p 139)”. Las notaciones y representaciones suministran información sobre el pensamiento de los niños, y les permite articular sus pensamientos. Un ejemplo de representación son los utilizados para los algoritmos de la suma y la resta.

Como prácticas normativas, las tendencias de investigación sobre resolución de problemas nos aportan las normas en el aula que hay que imponer: plantear problemas, donde los niños pueden utilizar sus conocimientos previos y construir sus propias estrategias; pueden utilizar los instrumentos como ellos consideren; las aulas son comunidades de discurso, donde todos deben comunicar sus estrategias y considerar las distintas alternativas de resolución (Carpenter y Lehrer, 1999; Santos-Trigo, 2008).

El marco teórico en que baso la tesis, la CGI, indica que la enseñanza a través de la resolución de problemas aritméticos verbales da un contexto adecuado para la comprensión de la aritmética, en contra, de la idea habitual de que hay que enseñar primero los procedimientos antes de plantear los problemas. Si los niños desarrollan estrategias informales al resolver problemas y es importante que se relacionen con los conceptos y procedimientos formales del currículo (Carpenter y Lehrer, 1999). Esta idea es primordial en la tesis, ya que utilizo talleres de resolución de problemas donde la práctica normativa sigue este enfoque, paralelamente al resto de las clases donde trabajan los contenidos formales.

4.2. Niveles de comprensión de la decena

En el apartado anterior hemos descrito la evolución de las estrategias al resolver problemas aritméticos verbales. La CGI describe la evolución de las estrategias de los problemas de suma y resta con números de una cifra, la evolución de las estrategias de los problemas de agrupamiento y reparto, y dentro de este tipo, la evolución de las estrategias con grupos de10, proporcionando bloques de base 10; y finalmente, la evolución de las estrategias de problemas de todas operaciones con números de dos cifras, proporcionando igualmente bloques de base 10. Esta evolución nos permite establecer niveles de comprensión de las operaciones aritméticas a través de la resolución de problemas.

El interés central de esta tesis es la comprensión del valor posicional del sistema decimal de numeración en primero de primaria, centrándome en la comprensión de la decena. La evolución de las estrategias de los problemas de agrupamiento y reparto pueden dar una orientación de cómo es esta comprensión. Voy a utilizar el modelo de Wright y otros (2006), que también caracteriza la comprensión según el tipo de estrategias utilizadas al resolver estos problemas y que consideran que dichas estrategias corresponden a los tres niveles diferentes siguientes: (a) Concepto *inicial* de decena, que se da cuando los niños forman grupos de diez, pero no consideran a la vez la decena y la unidad como unidades diferentes; (b) Concepto de decena *intermedio*, en el que los niños toman la decena como unidad, compuesta por diez unidades y pueden hacer sumas y restas con el apoyo de materiales manipulativos que reflejan la distinción entre ambos tipos de unidades; y (c) Concepto de decena *fluido* (*facile*), en el que los niños son capaces de realizar el algoritmo de la suma y la resta operando con unidades y decenas, sin ayuda de materiales manipulativos (p. 21). De acuerdo con este modelo, a través de la observación de las estrategias infantiles, podemos valorar diferentes niveles de comprensión del concepto de decena.

Estos niveles de comprensión se pueden relacionar con las distintas estrategias utilizadas por los niños en los trabajos del CGI. Como hemos visto, Carpenter, Franke y otros (1997) utilizan problemas verbales de agrupamiento para valorar la comprensión del sistema de numeración, y Carpenter, Fennema y otros (1999) indican la evolución de las estrategias utilizadas por los niños para resolver estos problemas. En la Tabla 2.12, se puede observar la relación entre los niveles de comprensión de Wright y otros (2006) y las estrategias observables en la resolución de los niños en los problemas de agrupamiento observadas por Carpenter, Fennema y otros (1999). En las revisiones de trabajos en el capítulo 1, se recoge también las concepciones de los alumnos sobre los números de dos cifras de Fuson (1992).

Tabla 2.12. *Relación entre las estrategias observadas en problemas de agrupamiento con grupos de 10 (Carpenter, Fennema y otros, 1999) y niveles de comprensión de la decena de Wright y otros (2006)*

<table>
<tr><td rowspan="2">Carpenter, Franke y otros (1997) y Carpenter, Fennema y otros (1999)</td><td colspan="2">Contar de uno en uno</td><td colspan="2">Contar de 10 en 10</td><td rowspan="2">Valor posicional</td></tr>
<tr><td>Con contadores individuales</td><td>Con bloques de base 10</td><td>Con bloques de base 10</td><td>Sin Material</td></tr>
<tr><td>Wright y otros (2006)</td><td>Inicial</td><td colspan="2">Intermedio</td><td colspan="2">Fluido</td></tr>
<tr><td>Fuson (1992)</td><td>Unitaria</td><td>Decena y unidades</td><td colspan="2">Secuencia</td><td>Separar e Integrar</td></tr>
</table>

En el análisis de las estrategias, se utilizarán estos niveles para valorar la comprensión de la decena de los niños al resolver problemas aritméticos de agrupamiento con grupos de 10.

5. Conocimientos informales y formales

Los conocimientos matemáticos que los niños desarrollan a lo largo de la vida no dependen solo de lo que han aprendido en la escuela. El *Principio de Aprendizaje* del NCTM afirma que los niños desarrollan ideas matemáticas de forma natural a través de sus experiencias cotidianas. Los profesores deben aprovechar estos conocimientos para construir los contenidos matemáticos implícitos en ellos (NCTM, 2003, p. 22). Las conexiones entre contenidos matemáticos diferentes, entre distintos campos, incluso entre las matemáticas y la realidad, se apoyan en la relación entre experiencias informales y las matemáticas formales, y son las que dan sentido a estos conocimientos.

> La conexión más importante en los primeros aprendizaje matemáticos es la existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela (NCTM, 2003, p. 136).

El interés de este trabajo pasa por respetar el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje de los niños en su vida diaria, desde sus ideas intuitivas, ayudándoles a establecer conexiones entre el conocimiento informal y el conocimiento formal. Una de las finalidades de la adquisición de las competencias básicas es integrar diferentes aprendizajes, tanto formales como informales (MEC, 2006). Desde la educación matemática interesa buscar tareas que desarrollen en los niños el pensamiento matemático, relacionando el conocimiento informal con los conocimientos formales (MEC, 2007).

La *Educación Matemática Realista* (RME) sigue un enfoque en el que se utilizan situaciones del mundo real o problemas contextualizados, como inicio del aprendizaje de las matemáticas, y se sigue un proceso de *matematización* para llegar a estructuras formales matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Se apoya en modelos concretos que sirven de mediadores entre lo concreto y lo abstracto. En la RME es muy importante la *reinvención guiada* donde se anima a los niños a reinventar las matemáticas guiados por el profesor utilizando materiales instruccionales, permitiendo así el desarrollo de la comprensión conceptual (Van Reeuwijf, 2001). Gradualmente, se debería dar la oportunidad a los niños de construir sus representaciones libremente y pasar de estrategias informales, intuitivas con representaciones concretas a estrategias más formales y abstractas de resolución con una instrucción guiada, que permita una *matematización progresiva* (Freudenthal, 1991). Freudenthal propone dar la oportunidad a los niños de reinventar las matemáticas, ayudándoles a utilizar herramientas o modelos asociados a la actividad matemática. El punto de partida son las situaciones significativas realistas, entendidas como realizables o que el niño pueda imaginar, planteadas en un grupo de trabajo heterogéneo (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Por ejemplo, Van Reeuwijf (2001) comprobó en el caso de resolución de ecuaciones, que empezando con métodos de resolución informales construidos por los alumnos y a través de estrategias pre-formales, se les puede ayudar a llegar a la resolución formal de las ecuaciones, desarrollando una comprensión conceptual sobre ellas. La *formalización progresiva* en ambientes de aprendizaje en los que los niños reinventan las matemáticas guiados por sus profesores y siguiendo una instrucción con materiales, contribuye al aprendizaje con comprensión (Van Reeuwijf, 2001).

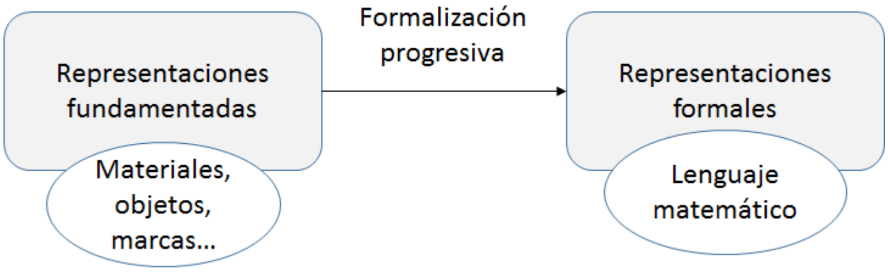


Figura 2.6. Formalización progresiva (Braithwaite y Goldstone, 2013).

El paso de las *representaciones fundamentadas*[25] a las representaciones formales ha sido denominado *formalización progresiva* (ver Figura 2.6) que describe la instrucción basada en representaciones concretas, como representaciones perceptivas o de contextos reales con

[25] Traducción de *Grounded Representations.*

objetos u otros materiales, para introducir conceptos que más tarde se tratarán con representaciones formales, que pertenecen a sistemas con reglas explícitas como pueden ser los números naturales (Braithwaite y Goldstone, 2013). Una instrucción basada en ambas representaciones, empezando con las representaciones concretas y realizando una transición gradual hacia representaciones formales, podría favorecer el aprendizaje con comprensión de los niños.

En los Estándares del NCTM se indica que “el uso de los símbolos matemáticos debería seguir, no preceder, a otras formas de comunicar ideas matemáticas…. Los profesores ayudan a sus jóvenes alumnos a relacionar su lenguaje ordinario con el lenguaje y los símbolos matemáticos, de manera significativa (NCTM, 2003, p. 135)”, y a “darse cuenta de las semejanzas en las formas de representar situaciones diferentes es un paso importante hacia la abstracción (NCTM, 2003, p. 142)”. Por lo tanto, es importante presentar los contenidos matemáticos con representaciones concretas e intuitivas, antes de su formalización.

En el currículo de la LOMCE (MEC, 2014b, p. 34062) se remarca “la importancia del trabajo práctico y contextualizado, introduciendo la utilización de nociones simbólicas cuando el alumnado muestre una comprensión de los conceptos matemáticos. Se pretende ir de lo práctico y concreto, hasta lo abstracto y formal”. Así mismo, se recomienda el uso de materiales manipulativos para un aprendizaje significativo para trabajar inicialmente los conceptos y procedimientos matemáticos.

En vista de las recomendaciones curriculares, presento teorías de la educación matemáticas que pueden explicar cómo es el desarrollo del pensamiento matemático.

Tall (2013) explica el desarrollo del pensamiento matemático, partiendo de marcos teóricos como Piaget, Bruner, Fischbein, en *tres mundos matemáticos*. El desarrollo del pensamiento matemático evoluciona a lo largo de etapas de larga duración, comenzando con el inicio del pensamiento matemático basado en la percepción y en la acción, como se puede ver en la Figura 2.7, y evolucionando al desarrollo del lenguaje simbólico, en este caso el lenguaje matemático formal y el razonamiento matemático deductivo.

Tall (2013) parte del concepto de *concepción encarnada*[26] para describir la primera etapa intuitiva, y basada en acciones y la percepción, estableciendo paralelismos con otros autores como se puede ver en la Figura 2.7. Este concepto parte de la idea que todo pensamiento humano se encarna en nuestra experiencia sensorio-motora. El conocimiento matemático comienza con la percepción de las propiedades de los objetos, el conteo y la partición de colecciones, llegando en un nivel de desarrollo estructural más alto, como por ejemplo en propiedades geométricas o el desarrollo operacional más avanzado en la aritmética. Tall (2013) utiliza el término de *encarnación conceptual*[27] para referirse a imágenes mentales que surgen de la interacción de las personas con el mundo que le rodea, y que van convirtiéndose en parte de la imaginación humana.

[26] Traducción de *embodied concept.*
[27] Traducción de *conceptual embodiment*.

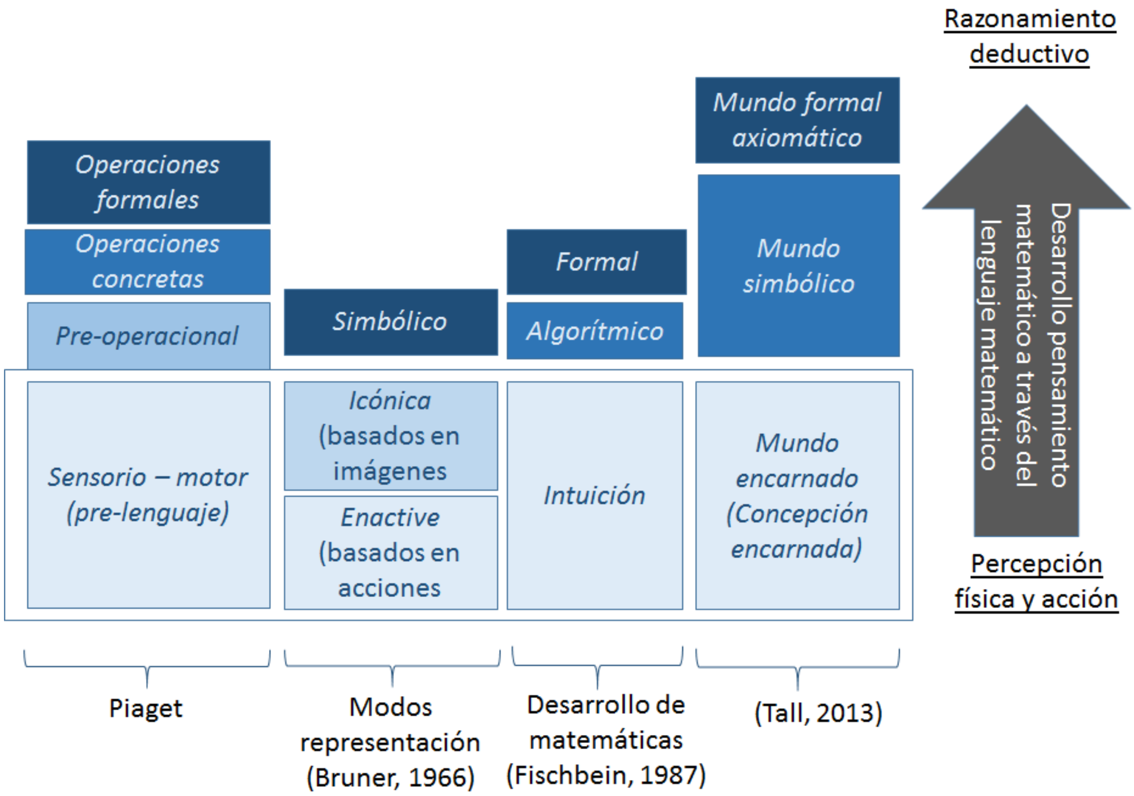


Figura 2.7. Relación de distintas trabajos del desarrollo del pensamiento matemático (adaptado de Tall, 2013, pp. 6-8).

Tall (2009) da tres formas principales en la que el pensamiento matemático se desarrolla, lo que denomina tres mundos de pensamiento de las matemáticas:

- Un mundo de la realización (conceptual) que comienza con la interacción con objetos del mundo real. El *mundo encarnado* se basa en la reflexión sobre la percepción y la acción del mundo que nos rodea.
- Un *mundo simbólico*, que se desarrolla a partir de las acciones humanas encarnadas en formas simbólicas, construyendo lo que Tall demonima *proceptos*, donde se relacionan procedimientos con conceptos. Tall (2013) explica que los símbolos matemáticos pueden reconocerse como operaciones a realizar y a la vez como conceptos numéricos mentales que se pueden manipular en la mente.
- Un *mundo formal axiomático*, de las definiciones y la prueba que conduce a la construcción de teorías axiomáticas.

Estos mundos se desarrollan en secuencia, empezando en el mundo encarnado, basado en el desarrollo del pensamiento a través de la percepción física y la acción. La geometría comienza con el juego de los niños con los objetos, reconociendo sus propiedades con los sentidos y describiéndolos, poco a poco con el lenguaje, que se van volviendo más precisas, relacionándolas con el marco formal de la geometría euclidiana ("encarnado formal" en la Figura 2.8). Más tarde, la geometría se generaliza a diferentes formas de la geometría como la no euclidiana, diferencial o topológica (Tall, 2013).

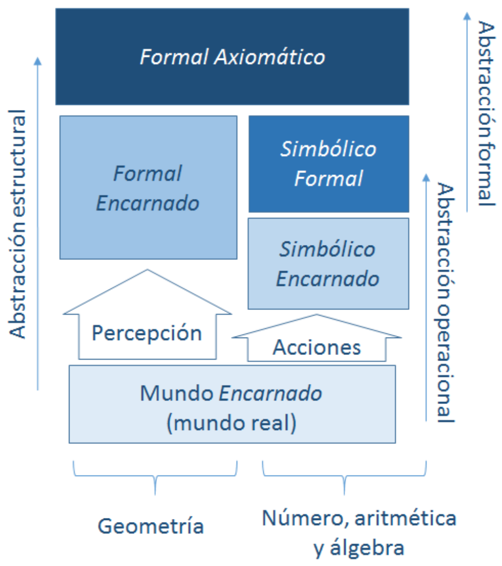


Figura 2.8. Desarrollo de los mundos de las matemáticas (adaptado de Tall, 2013, pp. 6-8).

El aprendizaje de la aritmética no comienza con las propiedades de los objetos físicos, sino con las acciones realizadas sobre ellos, como el conteo, la agrupación y la partición. Se incluye el uso de material, no solo de objetos en contexto, sino también materiales estructurados como pueden ser los bloques de base 10 para representar los números y las operaciones. En el mundo simbólico o proceptual, a partir de las acciones incorporadas tales como contar, sumar, agrupar y compartir, el niño construye formas simbólicas para el número, suma, producto, división y así sucesivamente, hasta completar la estructura conceptual mental del número y la aritmética (simbólico encarnado en la figura 2.8). A medida que el niño crece, estos dos mundos están disponibles. El mundo encarnado da manifestaciones físicas de conceptos como el número de objetos en una colección o la recta numérica (Tall, 2013). Las propiedades y relaciones observadas en los objetos del mundo encarnado y los proceptos del mundo simbólico-proceptual forman una base para el cambio a la definición axiomática del mundo formal. De hecho, cada una de los tres mundos se centra esencialmente en diferentes elementos, el mundo encarnado se centra en objetos y sus propiedades, el mundo simbólico-proceptual sobre los procesos representados por símbolos (proceptos), el mundo formal sobre propiedades y relaciones deductivas entre ellos, donde todas las propiedades distintas a aquellas asumidas en los axiomas y definiciones deben ser deducidas lógicamente de los axiomas y definiciones en una secuencia de teoremas, que a su vez se pueden juntar para deducir nuevos teoremas (mundo axiomático formal).

En el enfoque de la RME la aritmética comienza trabajándose con situaciones realistas, utilizando el conteo de objetos. Más tarde se introducen materiales estructurados como el rekenrek, agrupaciones de 10 o la banda numérica para realizar las operaciones. Finalmente se llega al cálculo formal, donde los niños recuperan hechos numéricos básicos y realizan los algoritmos de las operaciones numérica (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Treffers y Buys, 2001). Así, antes de llegar al cálculo que denominan formal, utilizan el contexto o materiales estructurados, al igual que en mundo encarnado de Tall (2013) o la representaciones concretas de la formalización progresiva (Braithwaite y Goldstone, 2013). En estos marcos teóricos, los niños matematizan, y/o empiezan a usar la matemática formal cuando usan el lenguaje matemático, con su simbología y manipulación. Como he comentado en el capítulo 1, en la revisión de investigaciones del aprendizaje de la aritmética, los niños utilizan estrategias de modelización directa y conteo con ayuda de representaciones con objetos, marcas o secuencias numéricas. Estas representaciones de las cantidades forman parte de estrategias informales para resolver situaciones aritméticas, que deben servir de base para los conocimientos aritméticos formales que los niños aprenderán en la escuela como los algoritmos (Carpenter y otros, 1997). Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) remarcan la importancia de tener en cuenta los conocimientos informales de los niños y actividades de representación para conseguir un aprendizaje significativo.

Ginsburg y Baroody (2007; adaptación Núñez y Lozano) categorizan el conocimiento matemático en informal o formal. El *conocimiento matemático informal* se define como aquellas nociones y procedimientos adquiridos a partir de la intuición. Los niños más pequeños poseen algún tipo de sentido numérico que les permite elaborar un conocimiento matemático intuitivo, que favorece el desarrollo del conocimiento informal gracias a sus interacciones, observaciones y reflexiones de su experiencia en el entorno (Baroody, 1997). En este punto indican que el conocimiento informal de Ginsburg y Baroody (2007) se relaciona con el mundo encarnado de Tall (2013) al basarse en la intuición del niño, y considerarse como el desarrollo de esa intuición a través de las interacciones, observaciones y reflexiones de su experiencia en el mundo real.

Inicialmente, los niños utilizan la percepción inmediata de cantidades y, cada vez, los niños van utilizando instrumentos más complejos en situaciones numéricas, como el conteo; son capaces de etiquetar un conjunto con una palabra numeral por la cantidad de elementos que tiene. El conocimiento informal representa una gran elaboración de las matemáticas, pero tiene sus limitaciones prácticas, ya que los procedimientos informales pueden llegar a ser ineficientes (Baroody, 1997). Un ejemplo de esto ocurre en la aritmética, ya que los niños pueden resolver situaciones aritméticas con cantidades pequeñas con estrategias de modelización directa y conteo, pero al aumentar las cantidades, los números empiezan a tener varias cifras y representar cantidades muy grandes que se vuelven difíciles de manejar mediante sus estrategias informales.

El *conocimiento matemático formal* son los conceptos y procedimientos que el niño aprende en la escuela. Destaca la simbología del lenguaje matemático, convenciones como los hechos numéricos, los algoritmos, los agrupamientos para formas la decena y las propiedades de las operaciones. La investigación apoya que el conocimiento matemático de los niños se desarrolla en función de sus experiencia tanto informales como formales, y más concretamente, el conocimiento formal se construye a partir del conocimiento informal (Ginsburg y Baroody, 2007). La matemática informal, es el paso intermedio entre la matemática intuitiva, limitada e imprecisa el conocimiento intuitivo, y la matemática formal de los símbolos que se trabaja en la escuela (Baroody, 1997).

Ginsburg y Baroody (2007; adaptación Núñez y Lozano) han diseñado un test que evalúa la competencia numérica temprana en los primeros años de escolaridad. Estos autores desglosan en tres etapas las fases del pensamiento matemático numérico. Una primera fase de *preconteo*, en la que los niños no utilizan palabras, y quizás se basen en imágenes mentales. En esta etapa los niños son capaces de recordar y reproducir una colección de hasta 4 objetos, así como construir el resultado de añadir o quitar una cantidad a otra que han visto previamente, es decir, resuelven problemas sencillos no verbales de suma y resta. Después los niños comienzan una fase en la que utilizan el *conteo*, procedimiento que van desarrollando y permite trabajar con colecciones más grandes de cuatro elementos y realizan operaciones con ellas. Por último, los niños asimilan representaciones escritas, los símbolos, y las relacionan con sus conocimientos no verbales y basadas en el conteo. En este momento comienza el mundo simbólico-proceptual de Tall (2013).

El test de competencia numérica contiene ítems que evalúan el conocimiento informal e ítems que evalúan el conocimiento formal. Tiene un formato evolutivo por lo que hasta los 7 años hay más ítems de conocimientos informales, y después, aumentan los ítems de valoran el conocimiento formal. En la Tabla 2.13 muestro los conocimientos que se consideran informales y los formales.

Tabla 2.13. *Descripción general de los tipos de ítems del TEMA3 (Núñez y Lozano, 2009)*

Conocimiento informal	*Conocimiento formal*
Numeración: Subitización, usos de configuraciones como los dedos para representar cantidades, utilizar el conteo. Secuencia de numerales, hasta 5, 10, completan uniendo decenas y unidades "veintiuno", de 10 en 10, decena siguiente, recitar la secuencia desde cualquier numeral, y hacia atrás.	*Leer y escribir números:* relacionar los numerales-palabra con numerales escritos. Identificar y leer numerales escritos. Decodificar el valor posicional de los números
Comparación de números: desde estrategias perceptivas, por conteo o por el orden de la secuencia numérica. Ampliar a números de varias cifras apoyándose en bandas numéricas.	*Hechos numéricos:* recuperación y derivados, uso de propiedades
Cálculo: cálculo no verbal, estrategias apoyadas en el conteo, primero con materiales, después sin ellos.	*Cálculo:* uso de algoritmos y cálculo mental, como sumar y restar 10, y operar con múltiplos de 10.
Conceptos: regla de cardinalidad, relación parte-todo	*Conceptos:* Comprender sistema de numeración decimales, agrupamiento de 10 y conteo de unidades de distinto orden, algoritmos con llevadas, símbolos escritos y expresiones numéricas de situaciones; propiedades.

En este trabajo pretendo plantear un taller de resolución de problemas aritméticos verbales donde los niños pueden elegir y/o construir el procedimiento de resolución. En los estudios previos, dentro del enfoque de la resolución de problemas, los niños desarrollan estrategias basadas en la modelización directa con objetos y el conteo (Carpenter, Fennema y otros, 1999). Las representaciones que utilizan los niños para resolver los problemas comienzan desde representaciones con materiales manipulativos, objetos, marcas en un papel, hasta llegar a una formalización del lenguaje matemático. En los trabajos de la RME, se propone empezar a resolver situaciones aritméticas con objetos en el contexto, y en un segundo momento, con material estructurado como el rekenrek y la banda numérica (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Treffers y Buys, 2001). En la formalización progresiva se comienza representando los problemas con *Grounded Representations* con objetos, materiales o marcas en papel (Braithwaite y Goldstone, 2013). Tall (2013) utiliza el *mundo encarnado* para tener representaciones significativas en contexto de los conceptos y procedimientos matemáticos.

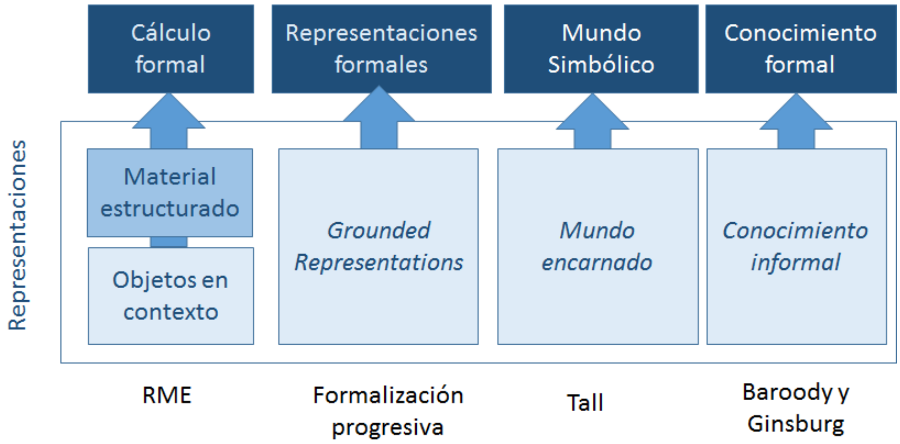


Figura 2.9. Las representaciones en los distintos trabajos previos comentados.

Por lo tanto, es importante tener en consideración las representaciones iniciales, concretas e intuitivas de los niños para presentar los contenidos, antes de su formalización. En este sentido, Llach y Alsina (2012) indican que la sintaxis de un sistema representacional, como puede ser el lenguaje matemático, implica gran complejidad y debe ser posterior en el aprendizaje y el desarrollo. Por ejemplo, el aprendizaje de la notación escrita de los numerales conlleva comprender que un signo, dado convencionalmente por la sociedad, representa el cardinal de una colección, lo que conlleva gran dificultad. Y más, cuando las primeras situaciones de cardinalidad se resuelven por correspondencia uno a uno, donde cada objeto se representa por la misma marca. Estos autores aconsejan flexibilidad en las representaciones que utilizan los niños, porque aunque al principio son sistemas figurativos (como dibujos o marcas) se van sustituyendo por representaciones más arbitrarias. Llach y Alsina indican que además, las prácticas informales en el aula, basadas en conteo, correspondencia uno a uno, suma y resta con cantidades pequeñas en situaciones cotidianas, deben utilizarse también en el aula para enlazarlas con las prácticas formales que contribuyen al aprendizaje de la representación formal del sistema de numeración. Las representaciones utilizadas en el conocimiento informal son de tipo manipulativo o gráfico, como colecciones de objetos, configuraciones como pueden ser los dedos de las manos, marcas en un papel, o incluso un material más estructurado como los bloques de base 10. En cambio, las representaciones utilizadas en el conocimiento formal son más simbólicas, utilizando numerales escritos y los signos de las operaciones. La evolución de estas representaciones refleja también la evolución del conocimiento informal al conocimiento formal. En esta tesis, voy a describir las representaciones que utilizan los niños a lo largo de primero de primaria en el taller de resolución de problemas, y su evolución.

Schwartz (1996) representa las cantidades discretas con una terna {x, u, a} donde el *x* es el número de la medida, *u* es la unidad con la que se ha medido, y *a* el atributo que se mide. Puig y Cerdán representan las cantidades como un par ordenado (x, u) en el que *x* es un número y *u* una unidad de una magnitud: por ejemplo, 4 canicas, 3,5 kg, 120 km/h" (1988, p. 125). En el caso particular de cantidades discretas, que serán las que utilice en el taller de resolución de problemas, cada cantidad está formada por un número y un tipo de objeto. En algunos trabajos previos, en los que se estudia la representación infantil de cantidades discretas (Alvarado, 2005; El Bouazzaoui, 1982; Hughes, 1987), no se da apenas importancia a este doble aspecto de la cantidad. De Castro y Bosch (en prensa) describe distintos tipos de representaciones de cantidades discretas, considerando las cantidades como un par ordenado {x, o} donde *x* el número de objetos y *o* el objeto representado.

En la Tabla 2.14 puede observarse en las columnas la representación del número, que comienzan con marcas simples, una por cada objeto. Después empiezan a utilizar los numerales pero no con el significado que cada numeral como símbolo indica una cantidad, sino que cada numeral representa a un objeto. Finalmente, utilizan el numeral como etiqueta de la cardinalidad o la palaba-numeral. En las filas, aparece la representación del objeto, que puede no darse, o puede aparecer con un icono o con el sustantivo que describe los objetos.

Tabla 2.14. *Tipos de representaciones de cantidades discretas (De Castro, en prensa)*

	Representación del número			
Representación del objeto	1. Icónica	2. Con aspectos icónicos y simbólicos	3. Simbólico (con cifras)	4. Simbólico (con palabras)
1.Sin representación	I I I I	1 2 3 4	4	cuatro
2. Icónica		1 2 3 4	4	cuatro
3. Simbólica	I I I I perros	1 2 3 4 perros	4 perros	cuatro perros

Carruthers y Worthington (2008) muestran las representaciones de las cantidades en niños de dos años, pero en este trabajo voy a tener en cuenta solo las representaciones funcionales, que sirvan para comunicar cantidades con exactitud. Hughes (1987) clasifica las representaciones de cantidades en *idiosincrásicas* (que tienen sentido para el niño, pero no tienen gran valor para comunicar cantidades o para resolver problemas, y no considero en este trabajo), *pictográficas* (cuando contienen aspectos relacionados con el objetos como la forma, posición, color u orientación), *icónicas* (símbolos creados por los niños que representan cada uno una unidad) y *simbólicas* (símbolos convencionales e incluyen "representaciones simbólicas creativas" donde cada numeral representa un objeto). En la siguiente Figura 2.10 puede observarse en la figura de la izquierda una representación del tipo 3.3, y en la figura de la derecha una representación del tipo 1.1 de la Tabla 2.14.

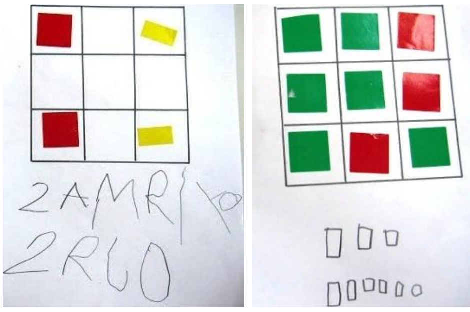


Figura 2.10. Representación del tipo 3.3 y 1.1 (recuperado de Hernández, 2012, pp. 199-210).

Schulman y Eston (1999) muestra representaciones de los niños del tipo 2.3, donde el tipo de representante del número es simbólica y la del objeto, icónica, utilizadas por los niños en problemas de descomposición aditiva de cantidades (p. 210). En la Figura 2.11 se puede ver un ejemplo de esta representación del trabajo de Hernández (2012).

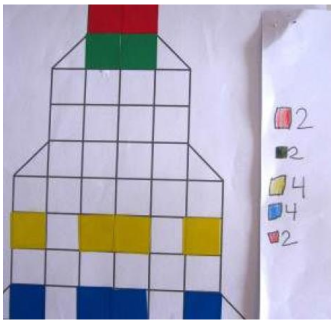


Figura 2.11. Representación de tipo 2.3 tomada de Hernández (2012, p. 33).

En la Tabla 2.14, se recoge la combinación de los distintos tipos de representación del número y los distintos tipos de representación del objeto que utilizaré de base para clasificar las representaciones de las cantidades de este trabajo, en base al trabajo de De Castro y Bosch (en prensa).

En este estudio, utilizaré como base esta tipografía para describir las representaciones utilizadas por los niños al resolver los problemas. El uso de materiales manipulativos también implica representaciones de cantidades por lo que pretendo extender esta tipografía a las utilizadas en las estrategias de los niños.

6. Trayectorias de aprendizaje-enseñanza

Los *Principios de Enseñanza y Curricular* remarcan la importancia de basar la enseñanza de las matemáticas en un conjunto de ideas importantes, bien articuladas a lo largo de la escolaridad y bien conectadas entre sí (NCTM, 2003). El desarrollo del currículo marca las expectativas de aprendizaje de los estudiantes desde objetivos generales de etapa, pasando por los objetivos del curso y llegando a objetivos vinculados a contenidos concretos. Los objetivos más generales marcar capacidades genéricas y los objetivos del curso detallan las capacidades que contribuyen al desarrollo de procesos cognitivos concretos, aportando criterios, normalmente de evaluación, para seleccionar las tareas. Los profesores son los que concretan los objetivos específicos para su práctica diaria en el aula (Rico y Lupiáñez, 2010).

Para diseñar las tareas que se van a plantear a los niños se debe conocer los conocimientos previos de éstos, saber cómo estimularlos para alcanzar ese conjunto de ideas importantes y cómo deben presentarse esas ideas de manera eficaz. Los profesores deberían entender las grandes ideas matemáticas y conocer cómo las aprenden los niños para presentarlas de forma coherente y articulada (NCTM, 2003). El Principio de Evaluación remarca la importancia de aprovechar las tareas para evaluar cómo piensan los niños al hacerlas y así poder conocer su progresión (NCTM, 2003, p. 25). La importancia de saber cómo es el pensamiento y el conocimiento de los niños, cómo aprenden un contenido en concreto para la planificación de las tareas instruccionales del profesor va tomando importancia en las investigaciones enfocadas al desarrollo del currículo (Gómez, 2007).

En el marco curricular de este trabajo, entidades como el NRC (2001 y 2009) y NAYEC y NCTM (2013) proponen conocer por parte del profesor las posibles *trayectorias de aprendizaje-enseñanza* para una mejor instrucción en el aula que aporta la investigación en educación matemática (NRC, 2001 y 2009; NAYEC y NCTM, 2013). A continuación, voy a describir la evolución del término trayectorias hipotéticas de aprendizaje por la importancia que ha tomado en los estudios para el desarrollo del currículo.

6.1. Revisión del término trayectorias de aprendizaje-enseñanza

Simon (1995), desde una perspectiva pedagógica constructivista social, remarca que los profesores deberían comprender el aprendizaje de sus alumnos como un proceso de construcción individual y social, y que sus prácticas de enseñanza han de ajustarse a los caminos de aprendizaje de éstos. Este autor plantea la enseñanza de las matemáticas siguiendo, lo que denomina *trayectorias hipotéticas de aprendizaje*, donde el profesor considera un objetivo de aprendizaje, y a partir de la hipótesis que éste tiene sobre la construcción de conocimiento de los alumnos sobre este objetivo, plantea unas actividades de aprendizaje. Este autor muestra un Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas que comienza con un objetivo de aprendizaje para los alumnos, el conocimiento matemático del profesor sobre este objetivo, y la hipótesis del profesor de cómo es la construcción de la comprensión de ese contenido matemático de los alumnos. A partir de esta hipótesis, el profesor construye un plan de actividades y las plantea en el aula.

Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje constan de tres elementos: los objetivos para el aprendizaje de los alumnos, las tareas que se utilizarán para promover este aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995). Este autor pone énfasis en trayectoria *hipotética* por no poderse conocer de antemano lo que va a ocurrir en el aula, ya que la ejecución de cualquier tarea puede verse afectada por variables particulares de cada alumno o del grupo de clase.

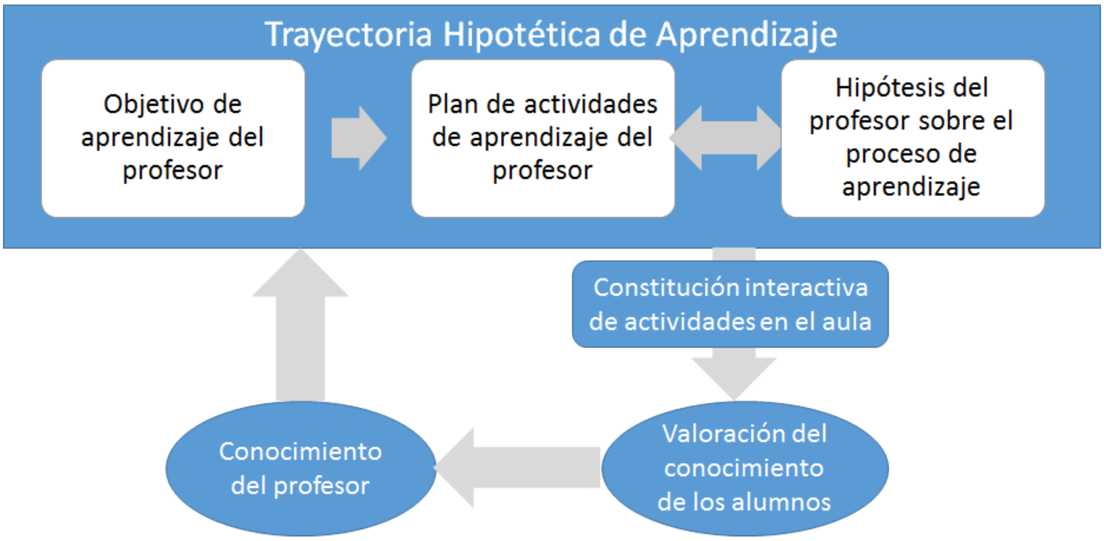


Figura 2.12. Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas (Simon, 1995, p. 136).

El aprendizaje de los alumnos suele seguir caminos similares y muchos de ellos se pueden beneficiar de una misma tarea. Esta tarea es un diseño instruccional particular que elige el profesor a partir de su conocimiento y de sus hipótesis sobre la construcción de conocimiento de los alumnos, y que influirá sobre el desarrollo conceptual de los estudiantes (Simon, 1995). En este sentido, este autor indica que el programa de la Instrucción Cognitivamente Guiada, marco fundamental de mi trabajo, obtienen buenos resultados en la formación de los profesores sobre el desarrollo del pensamiento de los niños, ya que permite desarrollar la habilidad de anticiparse a los procesos de aprendizaje de los niños y diseñar trayectorias hipotéticas cada vez más ajustadas al pensamiento de los niños.

El resultado de la interacción al proponer la tarea en el aula, servirá de conocimiento al profesor sobre sus hipótesis de aprendizaje de los alumnos de ese contenido particular, sobre las actividades y representaciones a utilizar en la planificación de la instrucción, así como su percepción de la enseñanza y aprendizaje, y continuamente podrá crear una nueva trayectoria hipotética de aprendizaje para ese concepto o modificarla (Simon, 1995). Gravemeijer (2004) asemeja el Ciclo de la Enseñanza de las Matemáticas que propone Simon (1995) con los procesos cíclicos acumulativos que se realizan en los experimentos de enseñanza dentro de la investigación de diseño, ya que las actividades instruccionales se diseñan, se intentan, se revisan, y se vuelven a rediseñar con la información que aporta el análisis retrospectivo en cada ciclo (Molina, Castro, Molina, y Castro, 2011). Así, el trabajo con este término implica diseñar, probar, evaluar y revisar la trayectoria hipotética de aprendizaje en una serie iterativa de ciclos de enseñanza. Esto puede servir de marco de referencia y ejemplo de secuencias instruccionales para los profesores, siendo ellos mismo quienes lo adaptan a sus grupos de aula, ya que como indica Baroody, Cibulski, Lai y Li (2004) no tienen por qué funcionar igualmente en circunstancias diferentes.

A partir de la propuesta de Simon (1995), las investigaciones sobre trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) han mostrado diferentes interpretaciones o aplicaciones (Clements y Sarama, 2004; Gómez y Lupiáñez, 2006; Gómez, 2007). La publicación en 2004 de la revista *Mathematics Thinking and Learning* (6(2)) de un monográfico sobre las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (THA) muestra la diversidad de aplicaciones y significados de este término. Gómez y Lupiáñez (2006) distinguen dos usos diferentes del término, unos como herramienta para el trabajo de planificación del profesor y otros para la investigación. Según estos autores, una diferencia del uso de las THA es el nivel de concreción del objetivo de aprendizaje, que suponen desde la planificación de varias sesiones en una visión amplia para conseguir un objetivo general, a un objetivo específico concreto de una parte de una clase, o una tarea.

Desde un nivel alto de concreción, Simon y Tzur (2004) utilizan las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como vehículos para planificar el aprendizaje de unos contenidos concretos, siendo las tareas que proporciona el profesor, las que permiten promover el aprendizaje de los alumnos. Las THA pueden llegar a un nivel de concreción *micro-conceptual* como los denominan Baroody, Cibulski, Lai y Li (2004).

Hay una línea de trabajo, que surge de las THA, desarrollada por Gómez y Lupiáñez (2006) y Gómez (2007), en la que surge la idea del *camino de aprendizaje para una tarea*. Gómez (2007) entiende, siguiendo a Simon y Tzur (2004), que los objetivos de aprendizaje que puede manejar un profesor son los marcados en las unidades didácticas, ya que los objetivos de aprendizaje marcados por las instituciones internacionales, las estatales e incluso del propio centro de trabajo, ya están establecidos. Gómez (2007) basa su trabajo en el Análisis Didáctico como una herramienta para los profesores que sirve para planificar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica. Para ello establece varias fases entre las que se encuentra el análisis de contenido en el que, concretando los significados de referencia del profesor sobre un objetivo de aprendizaje matemático concreto, lo caracteriza por capacidades y competencias, teniendo que identificar y formular qué capacidades implican ese objetivo y que competencias se ven implicadas.

Rico y Lupiáñez (2008) describen las *expectativas de aprendizaje* para estudiar el significado y la concreción de las intenciones curriculares como “aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares, mediante las matemáticas” (p. 66). Las expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas tienen en cuenta conocimientos declarativos, organizados y estructurados conceptualmente y con una componente procedimental, así, la caracterización cognitiva del conocimiento matemático se ha desglosado en dos campos, conocimiento conceptual y conocimiento procedimental. El conocimiento conceptual consiste en hechos, conceptos y estructura conceptuales. El *conocimiento procedimental son los p*rocesos y modos de actuación o ejecución de tareas matemáticas, como las destrezas, razonamientos y estrategias.

Las expectativas de aprendizaje se pueden desglosar en dos niveles: objetivos específicos y competencias matemáticas. Los objetivos específicos, que expresan qué se espera que haga un sujeto de cierta edad y nivel educativo en situaciones que requieran el uso de unas herramientas matemáticas determinadas. Estos objetivos se enuncian como capacidades que se muestran como conductas observables de los escolares en tareas vinculadas al currículo (Rico y Lupiáñez, 2008). Los objetivos específicos para estos autores se sustentan sobre la terna de capacidades (acciones o conductas que expresan la capacidad de un sujeto), conocimientos específicos (sobre unos contenidos concretos) en la resolución de problemas en contexto (que se ponen en juego al abordar tareas en situaciones concretas). Se pueden establecer a nivel de resultados generales de una etapa educativa, resultados esperados de un curso o programa, o los que afectan a una unidad didáctica o tema concreto, así los objetivos conectan contenidos y tareas. En este trabajo interesa el término capacidades como el nivel inferior de las expectativas de aprendizaje, que está relacionado con las actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan procedimientos rutinarios en un tema concreto (González y Gómez, 2015). Estos autores definen una capacidad como “una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante respecto a cierto tipo de tarea de tipo rutinario asociada a un tema matemático” (p. 21). Las capacidades son acciones y conductas que muestra un individuo al nivel de concreción mínimo, que un individuo debe mostrar al tratar un contenido concreto al resolver una tarea en una situación concreta. Gómez y Lupiáñez (2006) consideran las capacidades como los conocimientos, experiencias y habilidades de un individuo necesarias para desarrollar una tarea con un contenido concreto. Así una capacidad está vinculada a un tipo de tarea y puede involucrar otras capacidades. Un ejemplo de grafo de los caminos de aprendizaje para una tarea es la que se puede ver en el siguiente Figura 2.13, donde se ven distintos secuencias de capacidades, con los posibles errores que pueden cometer los alumnos, hasta llegar a la resolución de la tarea (González y Gómez, 2015).

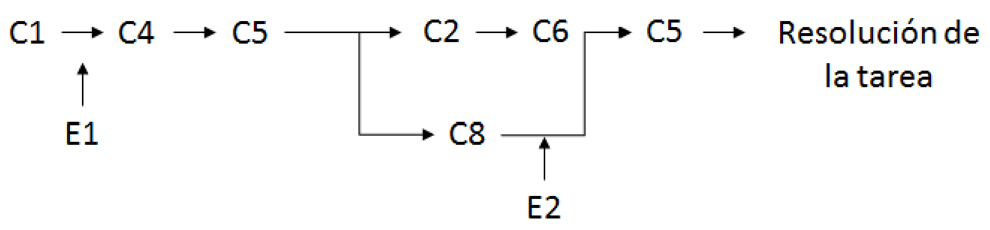


Figura 2.13. Ejemplo de un grafo de los caminos de aprendizaje para una tarea (adaptado de González y Gómez, 2015, p.29).

Cuando el alumno resuelve una tarea matemática, necesita una serie de capacidades que le permitirá terminar la tarea con éxito. En el análisis cognitivo, el profesor puede prever y hacer hipótesis sobre el proceso de resolución y los errores o dificultades que puedan encontrar (Gómez, 2007). En estas investigaciones, se define *camino de aprendizaje para una tarea* a una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus alumnos activen al resolver la tarea, junto a los errores y dificultades que puedan incurrir (Gómez, González y Romero, 2013, p. 3).

Desde un análisis más amplio, a lo largo de un curso o varias sesiones, el objetivo matemático será un concepto o estructura a nivel de recomendaciones curriculares que puede incluso suponer varias sesiones, un curso escolar, incluso una o varias etapas.

En este sentido, uno de las recomendaciones que se plantean dentro de la comunidad educativa en matemáticas es que se debería mantener coherencia entre la investigación en la educación matemática y el desarrollo del currículo matemático (NCTM, 2003; Clements y Sarama, 2004). El currículo debería contemplar las metodologías que ofrece las investigaciones en esta área, ser integrado en todo sus niveles y conectar las tareas con el pensamiento de los niños, por lo que Clements y Sarama (2004) ponen de manifiesto que la interconexión de las investigaciones sobre las progresiones de desarrollo del aprendizaje y las investigaciones de secuencias instruccionales puede resolver estos problemas de coherencia. Trabajos como los de Steffe (2004), Clements, Wilson y Sarama (2004), Clemens y Sarama (2009) y Lesh y Yoon (2004) investigan en las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de distintos contenidos matemáticos que permiten la conexión de estos dos elementos. Clements y Sarama (2004) definen las trayectorias de aprendizaje como:

> … descripciones del pensamiento y aprendizaje de los niños en un dominio específico matemático y una ruta relacionada y conjeturada a través de un conjunto de tareas instruccionales diseñadas para engendrar esos procesos mentales o acciones hipotéticas para mover a los niños a través de un desarrollo progresivo de niveles de pensamiento, creados con la intención de apoyar los logros de los niños de unos objetivos específicos en ese dominio matemático (p. 83).

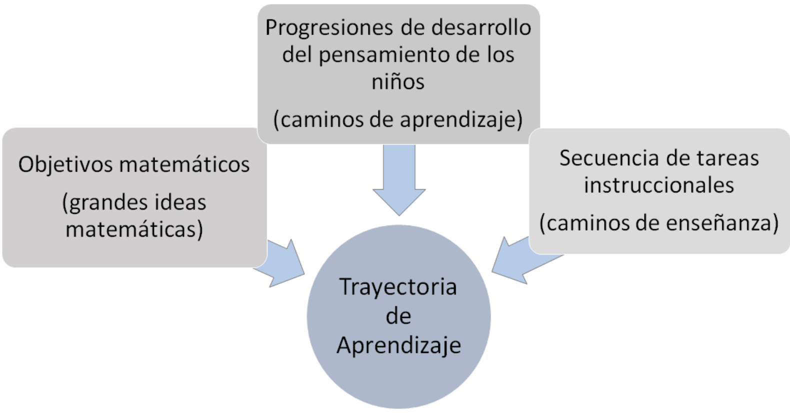


Figura 2.14. Trayectorias de aprendizaje según (Clemens y Sarama, 2009).

Por lo tanto hay dos aspectos importantes a considerar. Primero un modelo de aprendizaje específico, bien fundamentado teórica y empíricamente del pensamiento, aprendizaje y desarrollo de los niños. Segundo, una secuencia instruccional de tareas claves diseñadas para promover ese aprendizaje en un nivel conceptual concreto dentro de una progresión de desarrollo. Así una trayectoria de aprendizaje hipotética incluye tres aspectos: el objetivo de aprendizaje, las progresiones de desarrollo del pensamiento y aprendizaje, y las secuencias de tareas instruccionales (Clements y Sarama, 2004, p. 84; Clements y Sarama, 2009, p. 2).

Siguiendo a Clements y Sarama (2009), los objetivos matemáticos de aprendizaje se refieren a las ideas matemáticas importantes, es decir, los conceptos y destrezas matemáticas centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños y que son generativas de futuros aprendizajes. Las progresiones de desarrollo o caminos de aprendizaje son los niveles de pensamiento, cada uno más sofisticado que el anterior, que conducen o guían a alcanzar los objetivos matemáticos. Estas progresiones de desarrollo describen el camino típico que siguen los niños en la comprensión de un contenido matemático concreto (Clements y Sarama, 2009).

Los diseños instruccionales son los caminos de enseñanza que se componen de un conjunto de tareas en cada uno de los niveles de pensamiento de los caminos de aprendizaje, diseñadas con el fin de que los niños aprendan las ideas y destrezas necesarias para lograr ese nivel de pensamiento y promueven el paso al siguiente nivel (Clements y Sarama, 2009).

Clements y Sarama (2009) describen una trayectoria de aprendizaje de la suma y la resta. Estos autores identifican los objetivos de aprendizaje según las ideas matemáticas importantes de los Curriculum Focal Points (NCTM, 2006). Los Curriculum Focal Points relacionados con la adición y sustracción, y lo relacionado con el aprendizaje del valor posicional de sistema de numeración decimal, se puede ver en la Tabla Anexo1.1. Clements y Sarama (2009) desglosan el aprendizaje de la adición y sustracción en las siguientes "ideas" matemáticas:

a) Definición de la suma en términos del conteo, donde se define la suma a + b de dos números naturales a y b, como el resultado de sumar b números empezando en a.
b) Las propiedades conmutativa y asociativa.
c) Las resta como inversa de la adición, y que también se puede definir en términos de conteo como a – b, el resultado de contar hacia atrás desde a, una cantidad de b números.
d) Estructuras de los problemas de adición y sustracción, considerando los problemas de cambio creciente, cambio decreciente, combinación (dos partes que forman un todo) y comparación.
e) Combinaciones aritméticas: Composición y descomposición de números, donde la subitización conceptual es una destreza que juega un gran papel en su desarrollo.
f) Agrupamiento y valor posicional, como parte de la comprensión del sistema de numeración decimal. El agrupamiento en decenas para resolver problemas de adición y sustracción, y desarrollar el concepto de valor posicional.
g) Adición y sustracción con números de varios dígitos, donde el conocimiento conceptual del valor posicional del sistema de numeración decimal es crucial para la comprensión y el uso de los algoritmos.

Una vez marcados los objetivos de aprendizaje, describo los caminos de aprendizaje para la suma y resta de Clements y Sarama (2009). Estos autores dividen en dos trayectorias de aprendizaje para la adición y sustracción en la etapa que afecta este trabajo, desde infantil a segundo de primaria. Así, muestran la progresión del desarrollo del pensamiento de los niños, que comienza con una trayectoria de aprendizaje para la adición y sustracción basada en estrategias de conteo. Describen una trayectoria de aprendizaje paralela a la primera sobre la descomposición y composición numérica que permite a los niños desarrollar estrategias basadas en hechos numéricos y llegar a la descomposición de los números de dos cifras en decenas y unidades.

En la Tabla 2.15 describo los niveles de la progresión del desarrollo del pensamiento de la suma y la resta basada en estrategias de conteos, y en paralelo el camino de aprendizaje de la descomposición y composición numérica.

Tabla 2.15. *Camino de aprendizaje de la suma y resta basado en el conteo y la descomposición/composición propuesto por Clements y Sarama (2009) y Sarama y Clements (2004)*

Edad	*Niveles de Progresión del desarrollo de la adición y sustracción*	*Composición*
3	1. Suma y resta no verbal con cantidades muy pequeñas: identifican el resultado de 3 bolas, al juntar 2 bolas y 1 bola.	Reconocen partes de un todo sin exactitud de la cantidad
4	2. Suma y resta con pequeños números: Encuentran el resultado de problemas de cambio con la estrategia de modelización directa "juntar todo".	
	3. Encontrar el resultado de suma y resta: encuentran el resultado de problemas de cambio creciente o decreciente con final desconocido o combinación con total desconocido con modelización directa "juntar todo" o "quitar" 4. Hacer un número N: Añaden objetos a un número desde otro, sin necesidad de contar desde 1	Conocen descomposicione s de números hasta 5
5	5. Encontrar la cantidad de cambio en problemas de cambio creciente y decreciente utilizando modelización directa "añadir hasta" y "quitar hasta". Resuelven situaciones de comparación sencilla mediante "correspondencia uno a uno"	Conocen descomposicione s de números hasta 7
6	6. Estrategias de conteo: Resuelven problemas de cambio creciente con la cantidad final o de cambio desconocida o combinación con los dedos o utilizando estrategias de conteo "contar a partir de" o "contar hasta"	Conocen descomposicione s de números hasta 10
	7. Tienen comprensión inicial de la relación parte-todo y comienzan a usar flexiblemente estrategias de modelización y conteo. Empiezan a reconocer hechos numéricos como los dobles. A veces utilizan ensayo y error para problemas de cambio con la cantidad inicial desconocida	
7	8. Reconocen cuando un número es parte de un todo y mantienen las dos cantidades en la mente. Resuelven problemas con cantidad inicial desconocida con estrategias de conteo 9. Usan estrategias flexibles y hechos numéricos derivados para resolver todo tipo de problemas. Resuelven casos sencillos de adición o sustracción con números de varios dígitos por incremento de decenas y/o unidades	Comprenden los números de dos dígitos en decenas y unidades.
	10. Resuelven todo tipo de problemas con estrategias flexibles y combinaciones conocidas. Suman con varios dígitos utilizando estrategias de incremento o combinación de decenas y unidades.	
8	11. Suma y resta con varias cifras: Resuelven problemas de suma y resta de varias cifras usando composición de decenas y todas las estrategias anteriores.	

Después de describir los caminos de aprendizaje, Clements y Sarama (2009) describen el camino de enseñanza, proponiendo las tareas para ayudar a desarrollar los niveles de pensamiento matemático de los niños. Los niños pueden aprender aritmética desde los 3 años en situaciones sencillas y muchos profesores no creen que puedan pensar aritméticamente, por lo que les limita sus experiencias aritméticas y la calidad en la enseñanza (Clements y Sarama, 2009; Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez, 2013). Los libros de texto tampoco ayudan mucho en este sentido, ya que la mayoría de los problemas presentados son de cambio con la cantidad final resultado desconocida (Clements y Sarama, 2009).

Clements dirige el proyecto *Building Blocks* fundado por la *National Science Foundation* (NSF) Este proyecto se creó para diseñar materiales, que sirvan de ejemplo, para aprender matemáticas desarrollando los Principios y Estándares del NCTM (2000). Clements y Sarama (2009) indican que planteando una gran variedad de problemas verbales con distintas categorías semánticas, los niños pueden desarrollar las estrategias basadas en el conteo dotándoles de una buena competencia aritmética. Además, incluyen actividades, que aparecen en el proyecto *Building Blocks* para ayudar a los niños a desarrollar estrategias y pasar de un nivel a otro más evolucionado. Así mismo, estos autores exponen características importantes para la enseñanza de la aritmética provenientes de la investigación tales como "conectar el aprendizaje de los niños de destrezas, hechos, conceptos, y la resolución de problemas, los niños deben inventar, usar, compartir y explicar sus estrategias porque la comprensión del mayor número diferente de estrategias, que afectará al aprendizaje posterior (p. 66)". De hecho, indican que si los niños por sí mismo no desarrollan estrategias como "contar a partir de un sumando", "contar hasta" o "contar hacia atrás hasta" deberían recibir instrucción directa, ya que son importantes para la comprensión de la relación parte-todo. Se debe animar a los niños a inventar sus estrategias, explicándolas y debatiéndolas, y alentarles a buscar la estrategia más sofisticada y eficiente. El uso de materiales manipulativos o los dedos son necesarios a ciertos niveles de pensamiento y negarles su uso puede provocar falta de comprensión en el aprendizaje (Clements y Sarama, 2009).

En la Tabla 2.16 incluyo el camino de enseñanza propuesto por estos autores. El recorrido hecho conlleva al uso de hechos numéricos y la suma y resta con números de varios dígitos.

Tabla 2.16. *Camino de enseñanza de la suma y resta propuesto por Clements y Sarama (2009)*

Nivel	*Tareas (camino de enseñanza)*
1	Situación de cambio con final desconocida con números pequeños (hasta 3) donde se muestran una cantidad, se oculta y se realiza una acción de añadir o quitar, y se le pide al niño el resultado.
2	Problemas de cambio (creciente o decreciente) con cantidad final desconocida con número menores de 5. Resolver los problemas con objetos o con dedos. Utilizar marcos de 10 para juntar cantidades.
3	Problemas de cambio creciente con la cantidad final desconocida y problemas de combinación con total desconocido con materiales o dedos. Problema de cambio decreciente con cantidad final desconocido con materiales y dedos. Plantear pares de números, conmutándolos para trabajar la propiedad conmutativa. Mostrarles la estrategia "contar todo" para ayudar a la transición a estrategias de conteo. Utilizar marcos de 10 para representar dos cantidades y que busque el total de las dos. Utilizar la recta numérica para ir de un numeral a otro. Situaciones de comparación de números en el que se representan las dos cantidades y tienen que averiguar cuál es más grande y cuánto más para desarrollar la correspondencia uno a uno. Hacer la cantidad de 5 dada una cantidad menor. Situaciones con los dedos mostrando inicialmente, unos dedos de una mano, y luego mostrar una cantidad menor y pedir los que faltan. O bajar una cantidad de dedos y pedirles los dedos que están extendidos y los que están cerrados. Completar trenes con bloques dando uno como modelo (hasta 5).
4	Hacer un número dado (hasta 10), rellenando marcos de 10, dando una cantidad inicial. Añadir ingredientes a una pizza, requiriendo una cantidad concreta. En una tabla 100 identificar la cantidad de numerales que hay de un número a otro. Las mismas actividades con los dedos anteriores y trenes pero hasta 7.
5	Problemas de cambio creciente y decreciente con cantidad de cambio desconocida. Problemas de combinación con parte desconocida Problemas de comparación con diferencia desconocida donde el emparejamiento de las dos cantidades está explícito.

Tabla 2.16 (continuación). *Camino de enseñanza de la suma y resta propuesto por Clements y Sarama (2009)*

Nivel	*Tareas (camino de enseñanza)*
6	Juegos donde se muestra una cantidad que se oculta en una caja o similar, y añaden o quitan una cantidad x reiteradamente (empezando con 1 y luego aumentando), teniendo los niños que averiguar cuántas hay entonces en la caja. Juegos de comparación de cantidades representadas en tarjetas animándoles a utilizar estrategias sofisticadas de conteo, como "contar a partir de un sumando". Resolver problemas de cambio creciente con cantidad final desconocida y combinación con total desconocido, animándoles a utilizar estrategias de "contar a partir de un sumando" poniendo uno de los sumando muy pequeño. Enseñar directamente la destreza de "contar a partir de un sumando" marcando el numeral del que se parte en una tarjeta. Realizar con los dedos u otras configuraciones distintas composiciones de un número hasta 10. Juegos basados en la recta numérica donde tienen que contar un número de numerales, incluso teniendo que contar desde el mayor. Situaciones con los dedos mostrando inicialmente, unos dedos de las manos, y luego mostrar una cantidad menor y pedir los que faltan. O bajar una cantidad de dedos y pedirles los dedos que están extendidos y los que están cerrados. Completar trenes con bloques dando uno como modelo (hasta 10). Juegos de descarte de carta que sumen 10. Buscar la carta que sume 10, o construir trenes con bloques que lleguen a 10.
7	Plantear todo tipo de problemas. Animar a los niños a utilizar estrategias "contar hacia atrás" y "contar hasta" en problemas de cambio decreciente con cantidad final desconocida, problemas cambio creciente con cantidad de cambio desconocida, combinación con parte desconocida o comparación con diferencia desconocida. Plantear actividades en las que se da representado el conjunto total y una de las partes, y pedirles la otra parte. O decirles una cantidad que está oculta (una parte), darles representada la otra parte, y pedirles el total. Utilizar marcos de 10 para representar números hasta 20
8	Problemas con la cantidad inicial desconocida. Juegos de cartas en los que se pueden descartar una carta cuyo numeral sea la suma de dos dados. Adivinar qué operación se hace dando un número inicial y otro final. Utilizar marcos de 10 para representar números más grandes de 20.
9	Presentar cantidades de dos dígitos en marcos de 10 y que identifiquen la cantidad. Plantear todo tipo de problemas. Sumar y restar decenas. Sumar un número menor que 10 a decenas (70+3) Sumar y restar decenas a una decena (80-30) Sumar y restar una cantidad menor que 10 a otra de dos cifras.
10	Plantear todo tipo de problemas. Presentar cantidades de dos dígitos en marcos de 10 y que identifiquen la cantidad. Sumar y restar cantidades para pasar de decena (73 + 8). Utilizar la Tabla 100 para llevar el conteo. Sumar y restar decenas y unidades con materiales Sumar y restar decenas con la recta numérica vacía. Después sumar y restar decenas y unidades en la recta numérica vacía.
11	Ocultar dos cantidades de dos cifras representadas con grupos agrupamiento de 10 y pedirles qué cantidad forman juntas. Representar las operaciones en la recta numérica vacía.

Desde la corriente didáctica de la Educación Matemática Realista se presenta una trayectoria de aprendizaje-enseñanza que tiene como objetivo el cálculo de los números naturales en educación primaria (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Un objetivo como el indicado, que tiene cierta amplitud se desglosa en objetivos intermedios que sirven de referencia para orientar las prácticas de enseñanza de los profesores. Van den Heuvel-Panhuizen (2001), respeta los tres elementos principales de una trayectoria de aprendizaje-enseñanza. Una trayectoria de aprendizaje, que describe una visión general del proceso de aprendizaje de los niños; una trayectoria de enseñanza que consiste en la descripción didáctica para estimular en el niño el aprendizaje; y un contenido, que son los elementos centrales del currículo de matemáticas de deben enseñarse. Las trayectorias de aprendizaje-enseñanza están compuestas de niveles de comprensión de un mismo contenido, por lo que se puede trabajar sobre un mismo tema y tener niños que se encuentren en distinto nivel de comprensión. Esto permite crear situaciones que pueden ser aprovechadas en el aula para aclarar una estrategia más compleja a un niño de un nivel más bajo. Los niveles se consideran dinámicos, de tal forma que los niños pueden responder ante ciertos contenidos o parte de ellos en diferentes niveles. En la Figura 2.15 se puede observar los niveles de cálculo, comenzando con cálculo por conteo, cálculo por estructuración y cálculo formal. Van den Heuvel-Panhuizen (2001) y Treffers y Buys (2001) utilizan estos 3 niveles dentro de la numeración y cálculo de números hasta 10, luego hasta 20 y más tarde hasta 100. En los distintos niveles de cada una de las etapas de aprendizaje se utilizan tareas más centradas en situaciones significativas primeramente, seguidas de tareas con material estructurado, por último, en la práctica del cálculo mental, abandonando esos materiales.

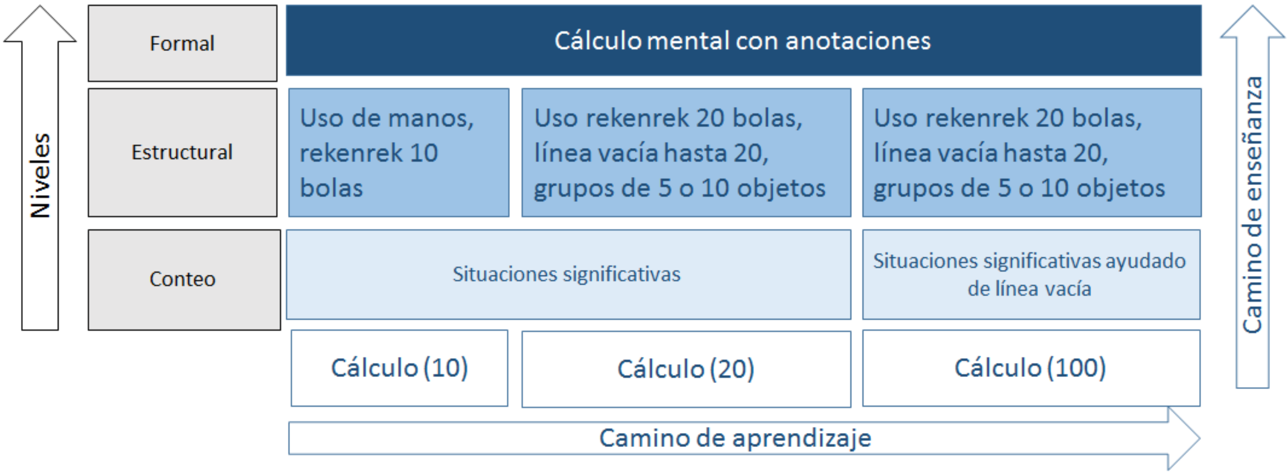


Figura 2.15. Trayectorias de aprendizaje con objetivos intermedios (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Treffers y Buys, 2001).

Para guiar el trabajo del docente, el objetivo de esta trayectoria de aprendizaje-enseñanza se desglosa en objetivos intermedios. Estos objetivos intermedios sirven para guiar el marco de enseñanza y para la evaluación por parte del docente de los alumnos, comprobando que la progresión de éstos es la adecuada (Treffers y Buys, 2001).

6.2. Descripción de trayectorias de aprendizaje-enseñanza en el presente estudio

En este trabajo voy a utilizar las trayectorias de aprendizaje desde dos perspectivas distintas. Desde una visión más amplia, en la que los objetivos de aprendizaje suponen grandes ideas matemáticas como plantean Clements y Sarama (2009) y en la que me voy a centrar en el desarrollo de conocimientos sobre el valor posicional de los números a lo largo de primero de educación primaria. En un nivel de concreción máxima, utilizaré los caminos de aprendizaje para una tarea, de una manera similar a la planteada por González y Gómez (2015).

Comienzo describiendo las trayectorias de aprendizaje-enseñanza desde la visión más amplia. En este trabajo voy a considerar la *trayectoria de aprendizaje-enseñanza* para un objetivo de aprendizaje concreto, tal como lo hacen Clements y Sarama (2009). Estará compuesto por los tres elementos:

- *Objetivo de aprendizaje*, que puede llegar a ser un objetivo de etapa, como puede ser el aprendizaje del valor posicional en educación primaria, o un objetivo más concreto, como el aprendizaje del agrupamiento de 10 y la decena en primero de educación primaria.
- *Camino de aprendizaje*, entendida como la progresión del desarrollo del conocimiento de los niños hacia ese objetivo de aprendizaje, que podrá desglosarse en niveles de comprensión del contenido matemático.
- *Camino de enseñanza*, como la secuencia de tareas diseñadas para estimular a los niños a desarrollar ese pensamiento.

El objetivo de aprendizaje de esta investigación es la comprensión del valor posicional en primer curso de primaria. El desarrollo de este conocimiento no es aislado, depende de otras ideas matemáticas como el desarrollo de la comprensión de la suma y la resta y la fluidez de cálculo con números de varias cifras. Los documentos curriculares comentados en el Capítulo 1 (NCTM, 2003; NCTM, 2006; CCSSI, 2010; MEC, 2014b) proponen la articulación y la conexión de los objetivos de aprendizaje a lo largo de los cursos, relacionándolos con el desarrollo del pensamiento de los niños lo que permite llevar a cabo una enseñanza adecuada.

Para esta investigación, los contenidos implicados están relacionados con el bloque del número y operaciones. En la Figura 1.14 indiqué los focos curriculares del NCTM sobre este bloque que me ayudarán a organizar los objetivos de aprendizaje en el curso. La tesis se concreta en primer curso de educación primaria, curso de transición entre educación infantil y educación primaria, por lo que en la Figura 1.14 represento las ideas matemáticas importantes que señalan los focos curriculares desde educación infantil a segundo curso de primaria, para tener una perspectiva más amplia de la articulación de los contenidos en los cursos anteriores y posteriores.

Dado que el estudio se realiza a lo largo de un curso con niños que provienen de educación infantil, interesa tener de referencia la trayectoria de aprendizaje-enseñanza a lo largo de una etapa como han realizado Clements y Sarama (2009). Las trayectorias de aprendizaje-enseñanza que elaboro a continuación para la iniciación a la aritmética y el sistema de numeración decimal a través de resolución de los problemas verbales aritméticos, son el resultado de considerar el modelo teórico elegido de la CGI (Carpenter, Ansell y otros, 1993; Carpenter, Franke y otros, 1997; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Ambrose, Baek y Carpenter, 2003). En los apartados anteriores he revisado el modelo teórico donde se plantea la progresión de las estrategias que desarrollan los niños al resolver problemas aritméticos verbales. Voy a plasmar estos resultados en trayectorias de aprendizaje-enseñanza con el objetivo de aprendizaje de cada una de ellas, que se corresponderá con un foco curricular del NCTM, con los diferentes niveles de desarrollo de ese conocimiento y las tareas que se plantean, todo ello basándome en los estudios de la CGI. Los resultados de esta investigación serán comparados con las trayectorias de aprendizaje-enseñanza deducidas de los trabajos previos, lo que me permitirá identificar implicaciones de mi estudio.

Comienzo con el *objetivo de aprendizaje* de la aritmética con números de una cifra. En la Figura 2.16, se puede observar los focos curriculares articulados desde educación infantil hasta segundo de primaria referidos al número. La flecha indica los objetivos de cada curso referentes al aprendizaje de la suma y la resta con números de una cifra. El objetivo de aprendizaje final es la recuperación de hechos numéricos de suma y resta, pero antes hay unos objetivos intermedios en cursos anteriores.

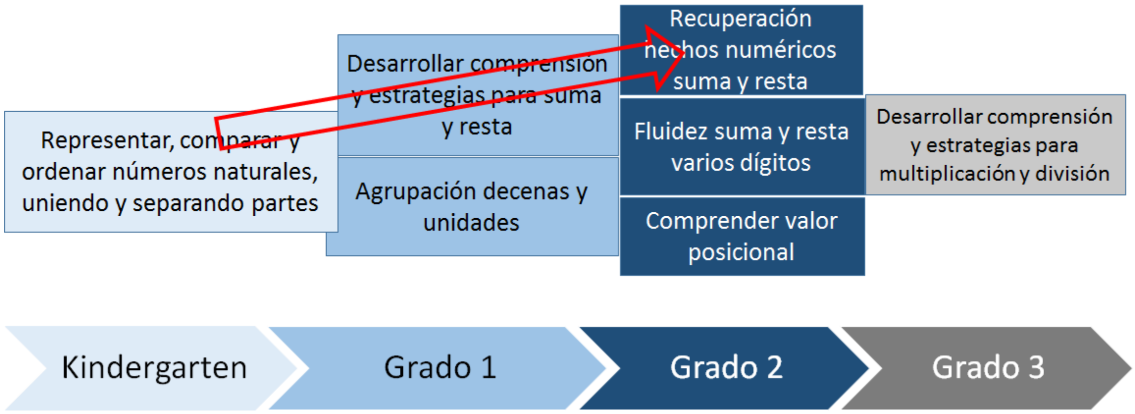


Figura 2.16. Focos curriculares desde Kindergarten a Grado 2 sobre la suma y la resta con números de una cifra (NCTM, 2006)

El enfoque CGI muestra una progresión del pensamiento de los niños a través de las estrategias utilizadas al plantearles problemas aritméticos verbales de estructura aditiva con números de una cifra. En la Figura 2.17 he relacionado esta progresión del pensamiento de los niños con el *camino de aprendizaje*, cuyos niveles quedan reflejados en el gráfico. Los primeros niveles consisten en estrategias de modelización directa, después estrategias de conteo, el uso flexible de estrategias y por último, el uso de hechos numéricos básicos y derivados. Estos niveles se deducen de la evolución de las estrategias explicadas en las Tablas 2.3 y 2.4. Las tareas que motivan este desarrollo conforman un *camino de enseñanza* basado en el planteamiento de problemas verbales aritméticos de estructura aditiva. En mi trabajo utilizo tareas de este tipo para promover el aprendizaje siguiendo la misma progresión que el modelo teórico del CGI.

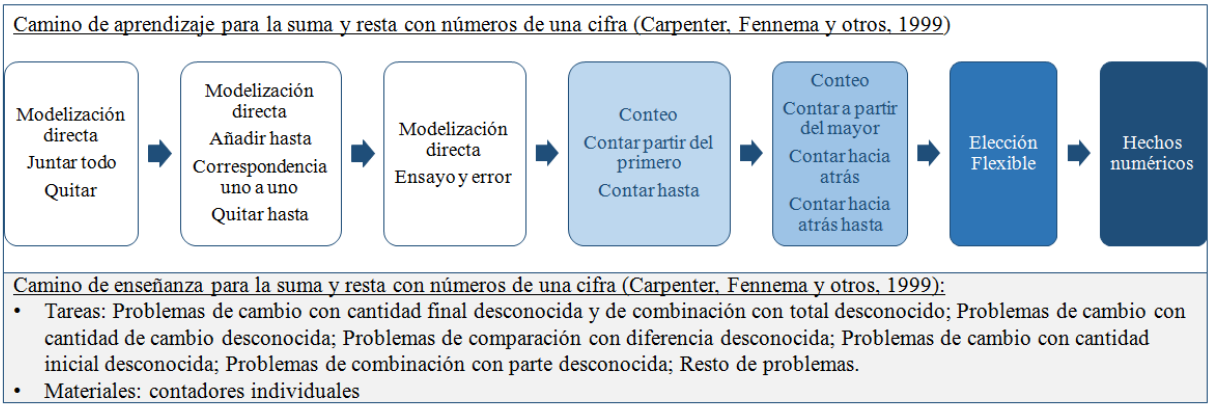


Figura 2.17. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la suma y resta con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI)

Los focos curriculares tienen el inicio al desarrollo de la comprensión de la multiplicación y división en Grado 2. Desde la CGI se propone el planteamiento de problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa desde mucho antes de su instrucción formal en el aula. Carpenter, Ansell y otros (1993) proporcionan una progresión del desarrollo del pensamiento de los niños a través del planteamiento de problemas de agrupamiento y reparto. A partir de este estudio, puedo identificar los *caminos de aprendizaje* para resolver problemas de multiplicación, división medida y división partitiva, donde la evolución de las estrategias de los niños pasa por una etapa de modelización directa, seguida de estrategias de conteo a saltos que son menos utilizadas, hasta el uso de hechos numéricos. En la Figura 2.18, se puede ver la trayectoria de aprendizaje para la multiplicación con números de una cifra deducida de Carpenter, Fennema y otros (1999).

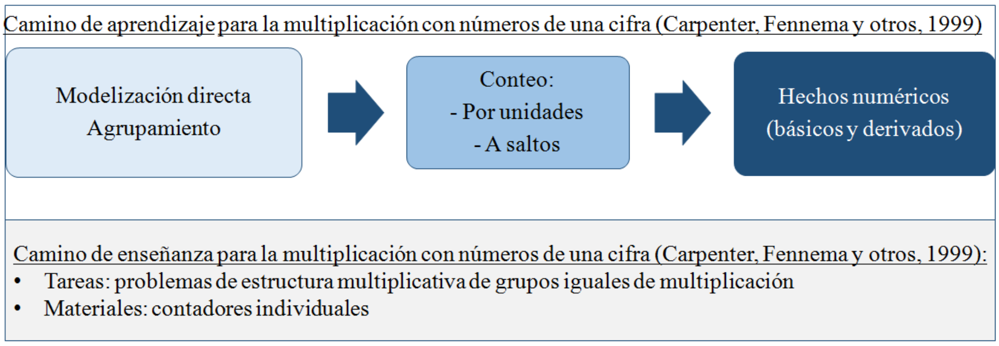


Figura 2.18. Trayectoria de aprendizaje para la multiplicación con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI)

En la Figura 2.19 muestro el camino de aprendizaje para la resolución de problemas de división partitiva deducida de la CGI. Igual que en los problemas anteriores las primeras estrategias se basan en la modelización directa, más tarde se utilizan las estrategias de conteo, en las que se observa dos subniveles (contar por unidades cada grupo o contar a saltos). Por último, las estrategias más formales están basadas en el uso de hechos numéricos.

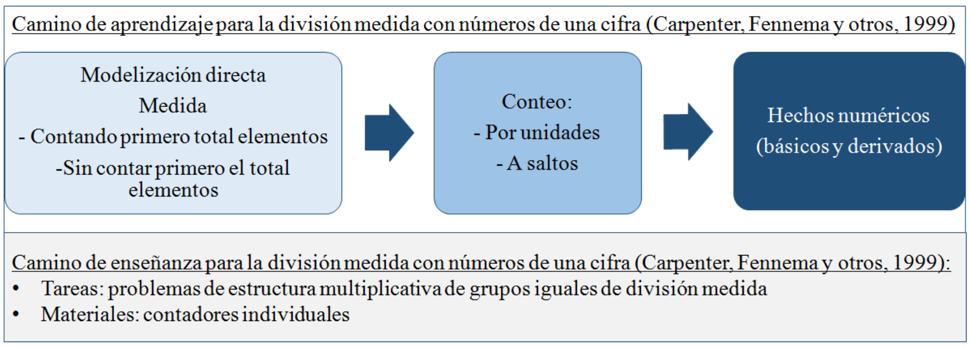


Figura 2.19. Trayectoria de aprendizaje para la división medida con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI)

Para terminar con la multiplicación y división con números de una cifra, en la Figura 2.20 muestro el camino de aprendizaje para la resolución de problemas de división partitiva con números de una cifra, adaptada de los trabajos de la CGI, donde la evolución del pensamiento para por distintos niveles de estrategias como ocurre en problemas anteriores.

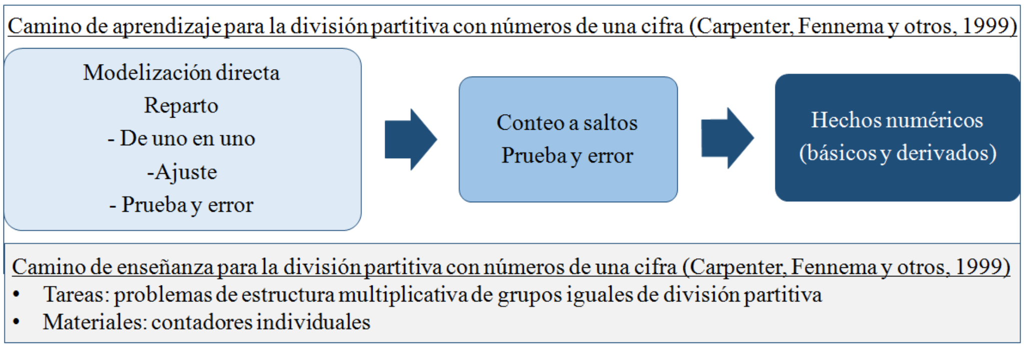


Figura 2.20. Trayectoria de aprendizaje para la división partitiva con números de una cifra (deducida de los trabajos de la CGI)

El objetivo de aprendizaje central para este estudio es la comprensión del valor posicional, que en primero de primaria se concreta en la comprensión del agrupamiento de 10 y la decena. Los objetivos intermedios que marcan los focos curriculares del NCTM (2006) a los largo de educación infantil y primeros cursos de primaria se pueden ver en la Figura 2.21, marcados con una flecha.

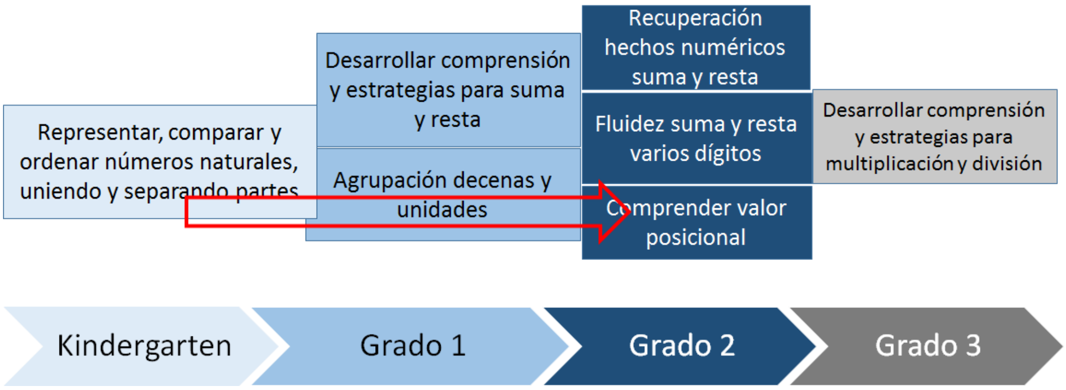


Figura 2.21. Focos curriculares desde Kindergarten a Grado 2 sobre la comprensión del valor posicional (NCTM, 2006)

En el marco teórico de referencia de la CGI también se han descrito la evolución de las estrategias ante el planteamiento de problemas de estructura multiplicativa con agrupamientos de 10. Carpenter, Fennema y otros (1999), plantean utilizar estos problemas para que los niños vayan conociendo la estructura de cantidades distribuidas en grupos de 10 y unidades sueltas. En un principio, se le proporciona a los niños contadores individuales o barras de 10 hechas con 10 cubos encajados. Para los problemas de multiplicación con agrupamiento de 10, los niños utilizan inicialmente las estrategias de agrupamiento en la que hacen montones de 10 contadores, que cuentan de uno en uno. A los niños se les anima a coger las barras de 10 cubos encajados para que comprueben que hay 10 objetos, e intenten resolver el problema. Los niños inicialmente cuentan los cubos de estas barras de uno en uno, y más tarde lo harán de 10 en 10. Después, pasan por una fase de estrategia de conteo, de 10 en 10 sin material, en la que cuentan tantas veces de 10 en 10 como grupos hay. Y finalmente, reconocen los grupos de 10 como la posición de las decenas, y los objetos sueltos, como la posición de las unidades. En Carpenter, Franke, y otros (1997), se utiliza esta tarea con bloques de base 10 para evaluar la comprensión del valor posicional. En Carpenter, Fennema y otros (1999) se propone utilizar estas tareas, dando a los niños cantidades representadas con bloques de base 10 para la resolución, para poder valorar el desarrollo de la comprensión del valor posicional. Teniendo en cuenta la evolución de las estrategias de estructura multiplicativa anterior, puedo representar la trayectoria de aprendizaje como se ve en la Figura 2.23. Igual que en los caminos de aprendizaje y enseñanza anteriores, según se va oscureciendo el diagrama, las estrategias muestran un nivel más alto de comprensión de la decena. Las tareas son problemas del mismo tipo pero en el camino de enseñanza, Carpenter, Fennema y otros (1999) describen las estrategias incluyendo contadores individuales y barras hechas con cubos encajados. Por lo tanto, incorporo las estrategias que estos autores han observado que se utilizan, para un problema de estructura multiplicativa con objetos para modelizar, incluyendo barras de 10 cubos encajados que explican animan a los niños a comprobar que hay 10.

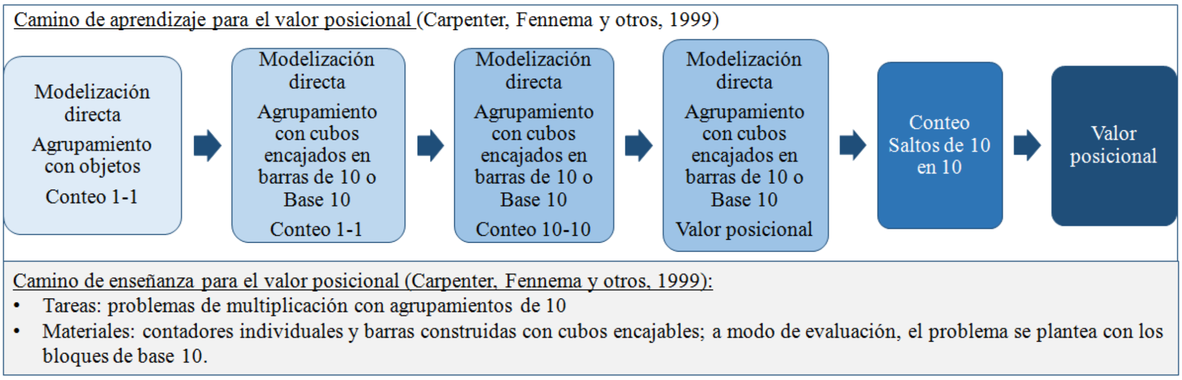


Figura 2.22. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para el valor posicional con problemas de multiplicación (deducida de los trabajos de la CGI)

La trayectoria de aprendizaje para el valor posicional, utilizando como tareas problemas de división medida con agrupamientos de 10, se muestra en la Figura 2.24. En este caso no se diferencia entre conteo de uno en uno o de 10 en 10, porque hay que contar el número de grupos.

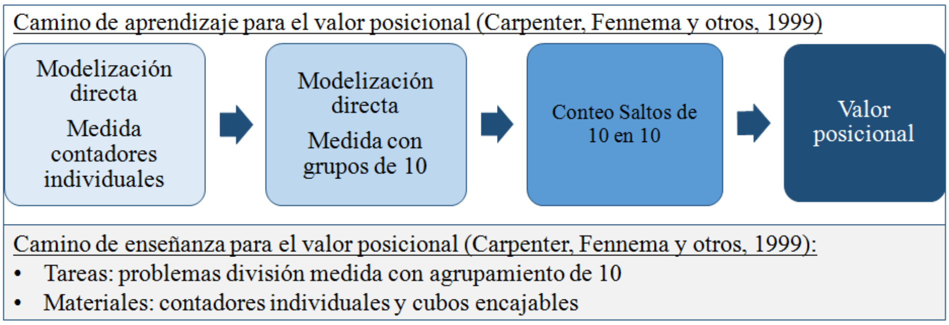


Figura 2.23. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para el valor posicional con problemas de división medida (deducida de los trabajos de la CGI)

Para valorar el nivel de comprensión del valor posicional, y más concretamente, la comprensión de la decena, tengo como referencia las concepciones de Fuson de cantidades hasta 99 (1992), los niveles de comprensión de la decena de Wright y otros (2006) y la evolución de las estrategias de los problemas de grupos de 10 de Carpenter, Fennema y otros (1999). En la Figura 2.24 muestra los tres caminos de aprendizaje sobre la comprensión del valor posicional de los números de dos cifras, siendo más oscuro cuanto más cerca está el desarrollo de la comprensión de la decena del conocimiento más formal. Los caminos de aprendizaje mostrados para la comprensión de la decena y el valor posicional abarcan varios cursos por lo que dicho camino tiene una panorámica amplia del desarrollo de la comprensión de la decena.

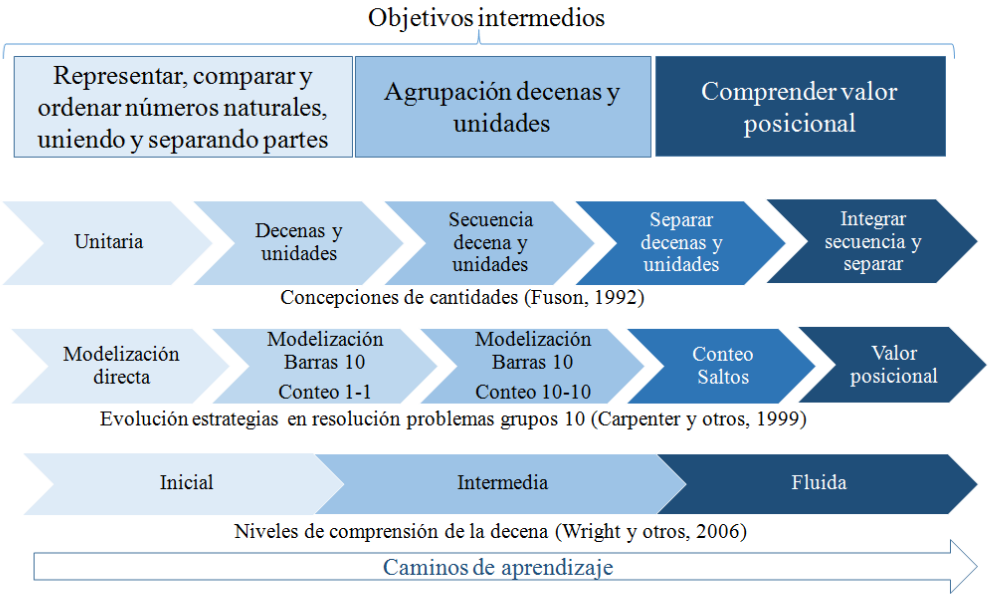


Figura 2.24. Caminos de aprendizaje para la comprensión de la decena de los tres trabajos de referencia (Fuson, 1992; Wright y otros, 2006; Carpenter, Fennema, y otros, 1999).

El aprendizaje de la suma y la resta con números de dos cifras es un foco curricular implicado también en la comprensión del valor posicional. En la Figura 2.25 se muestra la flecha que relaciono todo ello.

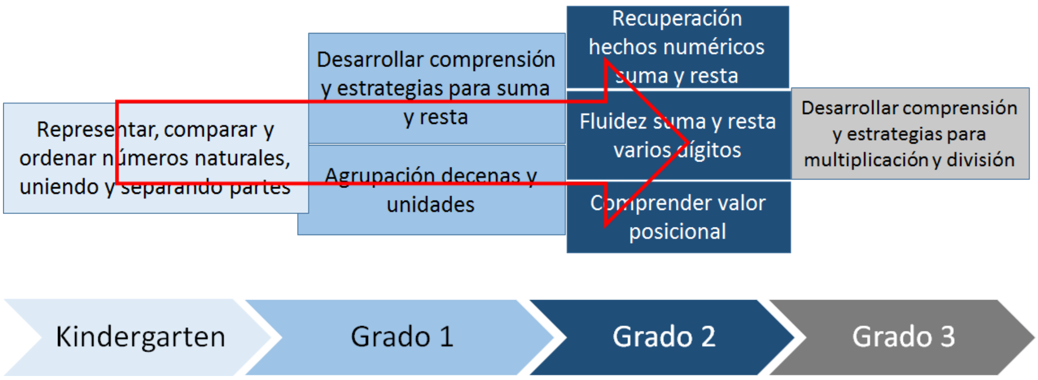


Figura 2.25. Focos curriculares desde Kindergarten a Grado 2 sobre la comprensión de la suma resta con números de dos cifras (NCTM, 2006)

La CGI muestra la evolución de las estrategias de resolución de problemas de estructura aditiva con dos cifras, inicialmente proporcionando objetos individuales, y más tarde, proporcionando materiales con estructura de base 10 como son los bloques de base 10 a los niños. En la tablas 2.9 y 2.10 describo los distintos niveles de desarrollo de estrategias para estos problemas, incidiendo en el conocimiento del valor posicional. En la Figura 2.26 muestro el camino de aprendizaje de la suma y resta de dos cifras, que se puede relacionar con los distintos niveles de comprensión de la decena.

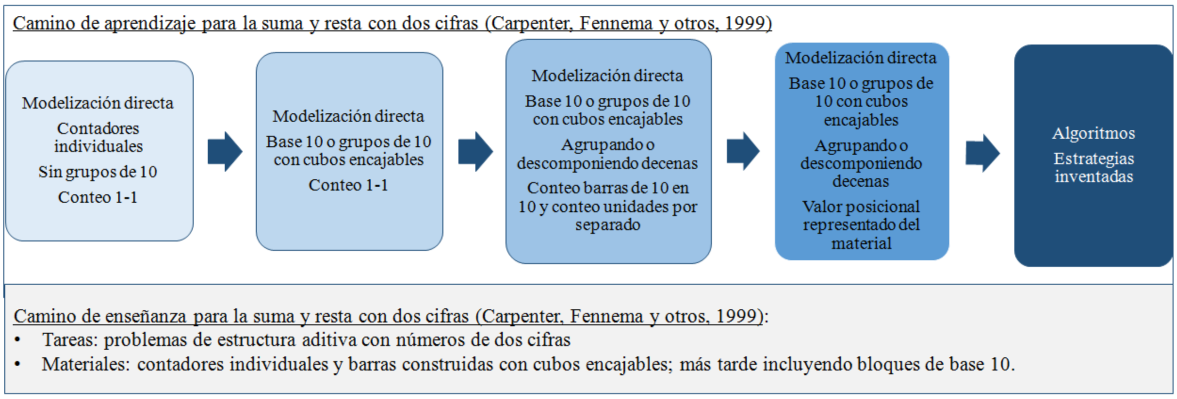


Figura 2.26. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para problemas aditivos con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI)

La CGI también tiene trabajos que han estudiado las estrategias con problemas de estructura multiplicativa con números de dos y tres cifras, proporcionando a los alumnos bloques de base 10 (Ambrose, Baek y Carpenter, 2003). Así, puedo deducir la trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la multiplicación de dos cifras como se puede ver en la Figura 2.27.

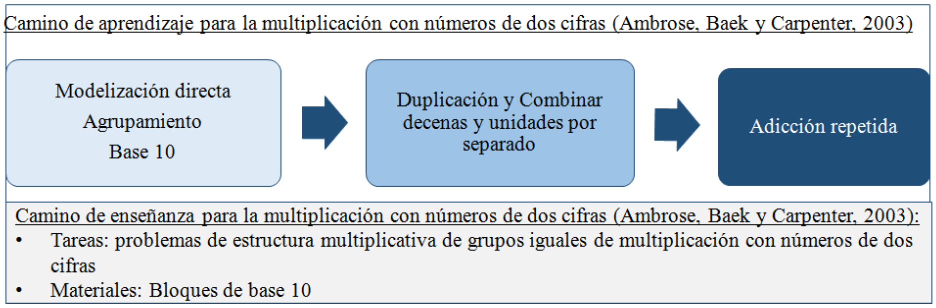


Figura 2.27. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la multiplicación con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI)

La trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la división medida con números de dos cifras se puede observar en la Figura 2.28.

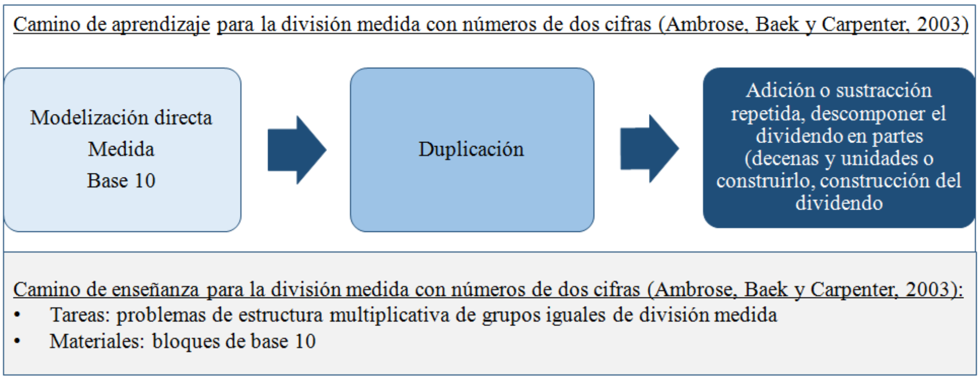


Figura 2.28. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza para la división medida con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI)

Y por último, la trayectoria de aprendizaje para la división partitiva o reparto con números de dos cifras, se puede observar en la Figura 2.30.

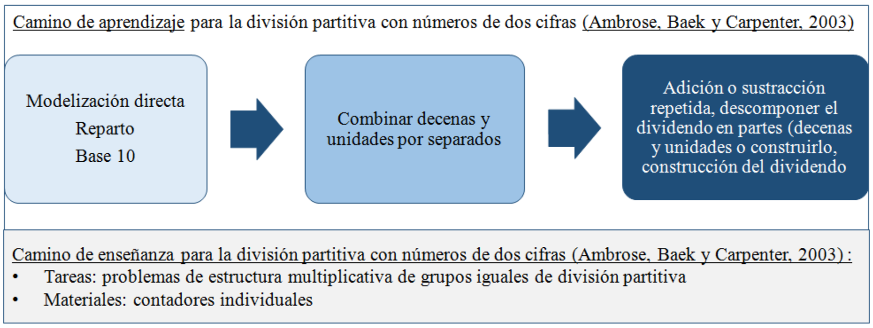


Figura 2.29. Trayectoria de aprendizaje para la división partitiva con números de dos cifras (deducida de los trabajos de la CGI)

Las tres trayectorias tienen una primera fase de modelización directa con bloques de base 10, y después pasan por una fase de estrategias inventadas, llegando al uso de sumas y resta reiteradas.

Las trayectorias de aprendizaje-enseñanza anteriores tienen como objetivos focos curriculares del NCTM (2003) que se pueden definir a lo largo de una etapa o curso. Los caminos de aprendizaje se describen a través de las estrategias de resolución de problemas aritméticos verbales marcados por el camino de enseñanza. En este estudio se pretende utilizar la resolución de problemas aritméticos verbales adecuados para primero de educación primaria para desarrollar conocimientos informales sobre el valor posicional y las operaciones aritméticas. Las trayectorias de aprendizaje-enseñanza que acabo de describir partiendo de los estudios previos me servirán de referencia para el análisis de las estrategias de la intervención que voy a proponer.

Desde una visión más concreta, voy a partir de la interpretación de los *caminos de aprendizaje para una tarea* de los trabajos de Gómez y Lupiáñez (2006), Gómez (2007) y González y Gómez (2015) donde el objetivo específico de esta tarea se desglosa en capacidades necesarias para su resolución y se identifican los posibles errores y dificultades de los alumnos. Los caminos de aprendizaje para una tarea se utilizan como herramienta para hacer un análisis cognitivo dentro del análisis didáctico de un contenido matemático (Gómez, 2007). Este análisis puede ser previo al planteamiento de la tarea y se puede hacer un grafo inicial basándose en las hipótesis del profesor sobre las capacidades y dificultades de sus alumnos al resolver la tarea. Tras la interacción en el aula, se puede rediseñar el grafo con la información obtenida de la evaluación de la puesta en práctica de la tarea.

Para describir el camino de aprendizaje para una tarea, puedo describir inicialmente las capacidades necesarias para su resolución, y los posibles errores, basándome en los estudios previos. Como indican Rico y Lupiáñez (2010), hay que definir primero las capacidades en las que se desglosa la expectativa de aprendizaje que, en este caso, partirán de objetivo específico de un tema muy concreto y que el alumno desarrollará para la resolución de la tarea. Una de los objetivos de este trabajo es definir las capacidades y errores de cada uno de los problemas del taller que conformará la intervención, y construir el grafo de las distintas secuencias de capacidades que utilizan los niños para resolver esas tareas. Este grafo permitirá ver el nivel de desarrollo de la comprensión de los distintos contenidos implicados en la tesis, como es la decena, y la comprensión de la suma y la resta en problemas aritméticos de estructura aditiva con números de dos cifras. En este trabajo, voy a construir el grafo tras cada sesión para completar la información del marco teórico sobre la resolución de los problemas con la observada en la puesta en práctica del taller de problemas aritméticos en el aula.

6.3. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

En este trabajo, se pretende analizar las estrategias utilizadas por los niños, llegando a identificar la secuencia de capacidades necesarias para desarrollar dichos procedimientos, y los posibles errores que incurran en su ejecución. Dentro del análisis didáctico, el análisis cognitivo consiste en identificar lo que los niños son capaces de hacer, y los errores que puedan tener en la resolución de la tarea (González y Gómez, 2015). Como he comentado antes, las capacidades son acciones o conductas observables que permiten a los alumnos resolver una tarea concreta en un nivel de concreción mínimo (Rico y Lupiáñez, 2010). También hay que tener en cuenta, las dificultades que pueden impedir que un alumno resuelva la tarea propuesta. Los errores en esta línea, son las manifestaciones visibles de estas dificultades.

Los errores son procesos mentales incompletos o equivocados, no se producen al azar, son sistemáticos, resistentes y muestran una falta de comprensión del significado del contenido matemático. González y Gómez (2015) indican que el listado de errores que se puede construir, depende del nivel educativo, incluso del grupo de individuos concretos de estudio. Las dificultades identificadas en un tema en concreto, deben relacionarse con el listado de errores y asociarse a la dificultad, como las manifestaciones observables de ésta (González y Gómez, 2015).

En el grafo de los caminos de aprendizaje de una tarea se puede observar las capacidades necesarias para resolverlos y los errores que pueden incurrir en su resolución. El conocimiento del profesor sobre las dificultades al resolver una tarea, permite predecir los errores que pueden cometer los niños, y proponer tareas complementarias para aborden esas dificultades (González y Gómez, 2015).

7. Síntesis

En este capítulo he planteado el marco teórico de referencia para la tesis. Primero se ha profundizado en el contenido matemático implicado en este estudio. Tal como indican Rico y Lupiáñez (2008), para plantearse la enseñanza de un contenido matemático hay que realiza un análisis del mismo, revisando la estructura conceptual, sus sistemas de representación y sus uso y contextos, por lo que he descrito la estructura conceptual de los números naturales, centrándome en foco curricular del sistema decimal de numeración. En ese primer apartado se puede observar los conceptos y procedimientos relacionado con este foco curricular, y también su relación con otros focos curriculares. En este análisis, identifico el principio de agrupamiento y la decena primordiales en mi trabajo, y relaciono todos los demás conceptos y procedimientos de los números naturales.

Tras plantear los distintos enfoques de enseñanza de las matemáticas propuestos por Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004), el enfoque que quiero utilizar en la intervención en el aula se aproxima al enfoque *investigativo*, ya que a través del planteamiento de problemas aritméticos verbales, los niños van a poder construir sus propias estrategias, y se va a debatir sobre su validez con los demás compañeros y el tutor del grupo, prestando atención al desarrollo de las competencias matemáticas de PISA (OCDE, 2005 y 2013) como los estándares de procesos del NCTM (2003).

Desde un enfoque cognitivo, la CGI ocupa un lugar importante en este trabajo por la metodología de enseñanza basada en el planteamiento de resolución de problemas como medio para desarrollar el pensamiento de los niños, sobre aritmética y algunos aspectos del sistema de numeración decimal. Desde este enfoque se ha estudiado la clasificación semántica de problemas aritméticos verbales, que utilizaré en la intervención en el aula, y se ha observado las estrategias que desarrollan los niños al resolverlos, que tomaré de punto de partido para la descripción de las tareas utilizadas en mi estudio.

La formación de maestros que incluye el programa de la CGI no será objeto de la investigación, pero sí se lleva a cabo con las tutoras de los grupos implicados.

El objetivo principal de mi tesis es estudiar el desarrollo de la comprensión del valor posicional y en concreto de la decena, en primer curso de primaria. En este sentido, la CGI ha utilizado problemas con agrupamientos de 10 para valorar la comprensión de la decena de los niños. En esta tesis, voy a plantearlos, no solo para valorar, sino para ayudarles a desarrollar esa comprensión, en un taller de resolución de problemas, donde ellos construyen sus procedimientos. También tomo como referencia los niveles de comprensión de la decena de Wright y otros (2006), basados en estrategias de resolución de problemas aritméticos aditivos y las concepciones de las cantidades de dos cifras de Fuson (1992).

El curso en el que voy a centrar mi investigación es primero de educación primaria, curso de transición este educación infantil, donde domina el desarrollo de los conocimientos informales, y educación primaria, donde empiezan a introducirse los conocimientos formales. Introduzco la definición de conocimientos informales, siguiendo a Ginsburg y Baroody (2007), como aquellos que se adquieren en la actividad diaria de los niños, no introducidos por los maestros dentro de un ambiente escolar tradicional en el aula. Las estrategias informales serán aquellos procedimientos construidos por los niños ante una tarea, siguiendo sus conocimientos intuitivos. Los conocimientos formales son los adquiridos en el aula, en el enfoque tradicional de enseñanza donde el profesor explica los conceptos y los procedimientos válidos. La intervención que llevo a cabo en este estudio prestará especial atención al desarrollo del conocimiento informal.

El conocimiento informal proporciona la oportunidad a los niños de construir sus propias estrategias, ayudándose de representaciones propias, tanto como marcas escritas como con materiales manipulativos. En el caso de las tareas que propongo en mi intervención, los niños deben construir representaciones de cantidades discretas. La formalización progresiva de estas representaciones informales, llevarán a la comprensión de conceptos matemáticos y su representación más formal a través del lenguaje matemático (Braithwaite y Goldstone, 2013). La descripción de las representaciones utilizadas por los niños, puede describir cómo evolucionan esas estrategias informales a estrategias más formales. Para ello parto de la tipografía de representación de cantidades discretas de De Castro (2010).

La descripción del desarrollo de las estrategias aportadas por la CGI, el trabajo de Wright y otros (2006) y Fuson (1992), me permiten construir los caminos de aprendizaje con objetivos generales como la comprensión del valor posicional y la fluidez de cálculo con números de dos cifras. Los caminos de enseñanza en mi trabajo se concretan en problemas aritméticos escolares verbales descritos en el capítulo 1, al igual que los hacen en la CGI.

Un análisis más profundo de los problemas y las estrategias utilizadas por los niños, permitirá construir los grafos de los caminos de aprendizaje para estas tareas y describir el desarrollo del pensamiento de los niños.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo presento el diseño de la investigación, empezando por su caracterización y la descripción de los participantes. A continuación, muestro todo lo relacionado con la intervención realizada en el aula, donde describo el taller de resolución de problemas, desde el enfoque utilizado en las sesiones del taller, hasta el diseño de sus tareas, su temporalidad y materiales utilizados. También incluyo la descripción de las clases habituales de los grupos participantes, por su influencia en el aprendizaje de los niños.

La intervención está basada en una metodología de investigación en el aula, donde se relaciona el interés por el análisis cognitivo del desarrollo del pensamiento de los niños con la influencia en el proceso de aprendizaje, en un contexto social y cultural complejo. Teniendo en cuenta esta situación, describo cómo se lleva a cabo la recogida de datos.

1. Caracterización de la investigación

La presente investigación tiene lugar durante un curso escolar. Se ha llevado a cabo una intervención a través del diseño de un taller de resolución de problemas aritméticos, con el objetivo de desarrollar en los niños los conocimientos informales sobre la decena. Se realiza un estudio cualitativo sobre las estrategias observadas en los niños en la resolución de problemas aritméticos verbales, así como el análisis de las representaciones de cantidades discretas utilizadas en sus procedimientos, y la evolución de ambas a lo largo de un curso.

El taller de resolución de problemas verbales contiene problemas de estructura aditiva y multiplicativa, y los niños tienen libertad de elegir el procedimiento de resolución. El enfoque seguido en la intervención favorece el desarrollo de los contenidos matemáticos mediante el uso de estrategias informales de los niños. Las sesiones de resolución de problemas se introducen como complemento a la enseñanza formal, que se lleva a cabo en el aula.

La categorización de las estrategias realizada tiene un doble carácter inductivo y deductivo. El carácter deductivo se debe a que la categorización de las estrategias utiliza como base categorías ya existentes, según lo planteado en el marco teórico. El carácter inductivo, se debe a la intención de definir categorías más detalladas incluyendo distintos materiales, para completar los modelos teóricos utilizados. La categorización de las representaciones se basará en el esquema de clasificación propuesto por De Castro y Bosch (en prensa).

2. Participantes

La investigación se desarrolla en dos aulas de primer curso de educación primaria, en el CEIP Virgen de Peña Sacra de Manzanares el Real (Madrid). Es un colegio situado en la sierra de Madrid, donde el nivel económico de la población es medio-alto. La edad media al iniciar el curso es de 6 años y 2 meses, con una desviación típica de 0,24 años. En el aula de 1ºA había 28 alumnos, 16 niños y 12 niñas, de los cuales hay 3 alumnos de origen latinoamericano y 2 alumnas marroquíes. Además, hay 3 alumnos con dificultades de aprendizaje o déficit de atención. En el aula de 1ºB había 26 alumnos (14 niños y 12 niñas). Cinco son de origen latinoamericano y una china. Hay 5 alumnos con dificultades de aprendizaje.

Este trabajo es la continuación de estudios previos realizados en educación infantil, con los mismos niños, cuanto tenían 4 años (De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010) y con 5 años (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009). Al llegar a primaria, estos niños cuentan con una experiencia previa de dos años en el tipo de talleres de resolución de problemas que constituye la intervención en el presente estudio y, en general, tienen interiorizadas las normas del taller.

Entre los objetivos principales de nuestro trabajo no está la formación de maestros. Sin embargo el modelo de la *Instrucción Guiada Cognitivamente*, que adoptamos como referente teórico fundamental, da una gran importancia a la misma. Por ello, consideramos importante dejar constancia del trabajo realizado en este aspecto. En las sesiones de los talleres, actúan maestros de educación primaria con distintos niveles de formación:

- Las *tutoras de los grupos*, empleadas públicas de la Comunidad de Madrid, de edades entre 29 y 35 años, con experiencia en la educación de entre 4 y 10 años y cuya metodología se basa en la práctica tradicional utilizando el libro de texto como guía, desde un enfoque intermedio entre el de destrezas y el conceptual (según Baroody y otros, 2004).
- *Beatriz Escorial* es maestra de educación infantil con experiencia en la Instrucción Guiada Cognitivamente en ese nivel educativo y que además trabajó con los participantes en esta investigación con este mismo enfoque durante el curso anterior. Beatriz es maestra en el mismo centro de Educación Infantil, y lleva trabajando con el mismo enfoque de talleres de resolución de problemas aritméticos en Educación infantil, en diversas investigaciones y experiencias didácticas, desde el curso 2006-2007 (De Castro y Escorial, 2007; De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009; De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012).
- *Alumnos en prácticas*, que han estudiado el enfoque de la Instrucción Cognitivamente Guiada (CGI) en su formación inicial, y han participado en un proyecto de 3 meses con el mismo (Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010).

Al inicio del curso escolar, se realizan dos reuniones en las que participan la investigadora, la maestra con experiencia en CGI y las maestras tutoras de los grupos con los que va a trabajar, para dar una formación inicial teórica del CGI. En esta reunión se habla y se debate sobre la postura que deben adoptar durante el taller, la forma de intervenir con los alumnos, los materiales que deben proporcionar, las fases de las que se compone un taller, la distribución de los alumnos y otros detalles.

El resto de la formación se produce en la práctica de cada sesión en las que ellas mismas descubren como los niños desarrollan sus estrategias, y las tutoras aprenden a entender su pensamiento.

La maestra con experiencia CGI asiste a las 8 primeras sesiones para dar apoyo a las tutoras. En las siguientes sesiones, y hasta la sesión 16, participan los alumnos en prácticas. En las últimas sesiones, las tutoras del grupo dirigen el taller sin ayuda, con la presencia de la investigadora, que se encarga de recoger la información.

3. Las sesiones del taller de resolución de problemas

En esta investigación se ha realizado una intervención en el aula a través de un taller de resolución de problemas aritméticos verbales. La intervención consta de 25 sesiones, una por semana, que se desarrollan de octubre a mayo. Las sesiones del taller comienzan a finales de octubre, una vez superado el periodo de adaptación inicial al primer curso de educación primaria. Los dos grupos de participantes tienen 5 sesiones semanales para la asignatura de matemáticas, con una duración de 45 minutos cada una. Para entender bien el contexto de la intervención, es importante indicar que, a lo largo del curso escolar, se dan dos planteamientos de la enseñanza de las matemáticas diferentes:

- Cuatro clases por semana con las tutoras, desde un enfoque intermedio entre el de destrezas y conceptual (Baroody y otros, 2004), donde se desarrollan conocimientos formales, con un enfoque “aplicacionista” de la resolución de problemas, en el que primero se enseñan las operaciones y después se plantean problemas aritméticos para aplicar las operaciones recién aprendidas.
- Una clase por semana, correspondiente a la intervención, desde un enfoque próximo al investigativo (Baroody y otros, 2004, De Castro y Escorial, 2007), en el que se incide en los conocimientos informales, con una orientación al aprendizaje con comprensión. El horario disponible para la intervención es los miércoles por la tarde, de 14:30 a 16:00, sustituyendo la clase de matemáticas habitual de la mañana.

En la Figura 3.1 se puede observar la organización semanal de las clases de matemáticas y el enfoque seguido en cada una de ellas. Los conocimientos desarrollados son de tipos diferentes: formales en el caso de las clases habituales con las tutoras, e informales, en el taller implementado.

Por tanto, los conocimientos de los niños están influidos por los dos enfoques y no se pueden aislar, ni atribuir todo el aprendizaje de las matemáticas de los participantes a sus clases de matemáticas habituales o a la intervención.

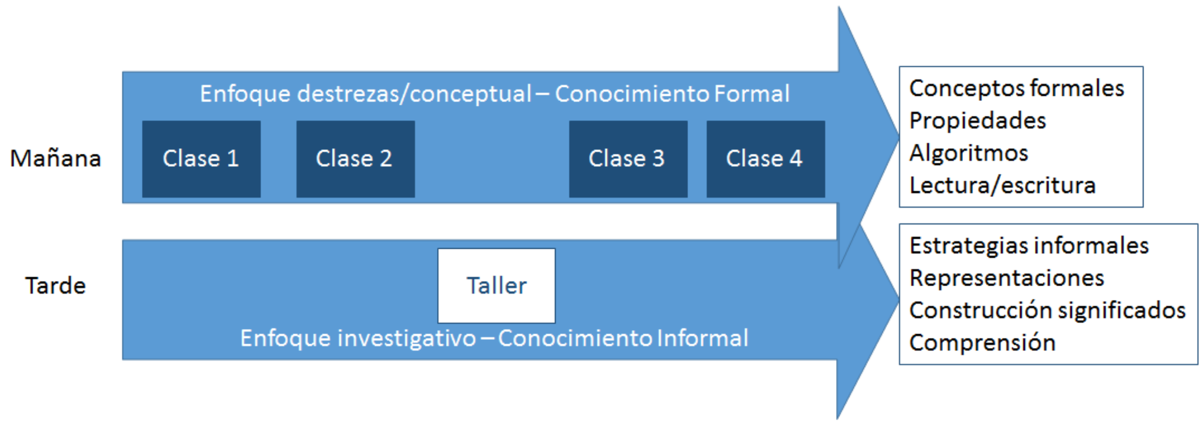


Figura 3.1. Organización semanal de las clases de matemáticas.

3.1. Un taller de resolución de problemas aritméticos verbales

La intervención realizada consiste en un taller de resolución de problemas aritméticos escolares verbales, con el que pretendo favorecer el desarrollo de conocimientos informales sobre el valor posicional y con una metodología que permita desarrollar la competencia matemática de los niños, según planteo en el marco curricular. Considero de especial importancia incidir en los conocimientos informales, y su evolución hacia la adquisición de conocimientos formales, consiguiendo así el aprendizaje con comprensión de la decena. Primero voy a describir el planteamiento de las sesiones, para adaptarme a la metodología de la CGI y crear un entorno en el aula donde los niños desarrollen sus competencias matemáticas. A continuación, se presenta el diseño de las tareas utilizadas.

Las ideas principales que han dirigido el diseño de esta intervención son las siguientes:

- El planteamiento de problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10 puede promover la aplicación de estrategias informales que ayuden a los alumnos a evolucionar en su comprensión de las decenas. La valoración de la comprensión se hace según el modelo de Wright y otros (2006).

- El planteamiento de problemas de estructura multiplicativa con anterioridad a la introducción formal de la multiplicación y división, permitirá a los niños desarrollar conocimientos informales sobre la estructura multiplicativa, que serán la base de los conocimientos formales posteriores.
- En un entorno en el que los niños están habituados a utilizar estrategias construidas por ellos mismos, utilizando sus conocimientos informales, en caso de inclinarse espontáneamente a utilizar procedimientos formales para resolver problemas aritméticos, como los algoritmos, este uso se considera un indicio de un aprendizaje con comprensión.
- La utilización de estrategias propias permitirá a los niños desarrollar el conocimiento informal en mayor medida que una enseñanza basada únicamente en un enfoque tradicional.

3.1.1. Descripción general del taller

El entorno de trabajo creado para las sesiones de los talleres está basado en principios didácticos descritos en capítulos anteriores. El *Principio de Enseñanza* propone que los profesores deben crear un entorno que favorezca el aprendizaje "animando a los alumnos a pensar, preguntar, resolver problemas y discutir sus ideas, estrategias y soluciones" (NCTM, 2003, p. 19). Además, las tareas deben ser motivadoras y que inviten a los niños a investigar. El Estándar de Resolución de Problemas (NCTM, 2003) indica que un buen contexto para los problemas pueden ser los cuentos. Así, el contexto elegido para los problemas está basado en la literatura infantil, que supone la presencia de situaciones familiares para los niños. Esto encaja en la propuesta de Puig (1996), en su definición de problema, cuando este autor sostiene que los problemas deben ser significativos para los niños. La elección de un contexto cercano y comprensible para los niños (OCDE, 2005), así como la elección de los problemas a plantear, es un trabajo fundamental en el diseño del taller de resolución de problemas. Para ello, se eligieron cuentos en los que apareciesen situaciones con acciones y relaciones, y colecciones de objetos o personajes. Cada cuento infantil sirve de contexto para dos sesiones. Los cuentos utilizados figuran en el Anexo 4.

Los niños deben tener la oportunidad de crear sus propias estrategias, de articularlas para compartirlas con sus compañeros y poder debatir sobre ellas. Las normas que rigen el taller de resolución de problemas son bastantes diferentes a las de la clase diaria de matemáticas, con el fin de conseguir un aprendizaje con comprensión. En las sesiones, se intenta que los niños sean conscientes de que deben inventar y utilizar estrategias propias con los instrumentos que se les proporcionan y pueden elegir. Además, deben comunicar y transmitir claramente la estrategia decidida como la mejor por escrito a una persona externa del aula.

Todas las sesiones tenían la misma estructura. Los talleres siguen las siguientes etapas (Ramírez y De Castro, 2012):

1. *Lectura del cuento.* Antes de cada sesión, se lee dos o tres veces un cuento en distintos momentos de la semana. Este cuento sirve de contexto para los problemas de las dos sesiones siguientes del taller. El objetivo es proporcionar un contexto conocido y cercano a los niños para el problema que van a resolver, y así facilitar la compresión de la situación. Al iniciar la sesión, el cuento se vuelve a contar para asegurarnos de que los niños recuerdan la situación en la que se basa el enunciado del problema.
2. *Lectura de la carta*. Tras la lectura del cuento, utilizamos una motivación externa. Una persona, conocida por todos, pide ayuda para resolver el problema de la sesión. Una maestra en prácticas del curso anterior (Clara) es la persona que escribe a los niños

semanalmente para pedirles ayuda con la resolución de los problemas. Al inicio del curso acude al centro a saludarles, les explica que se va un año fuera con una beca Erasmus (a Suecia) y les comenta que pronto tendrán noticias suyas. El mensaje que semanalmente reciben los niños varía desde el formato tradicional de carta, a un email o incluso en alguna sesión reciben un telegrama o un video. El objetivo es conseguir que los niños vean el problema como un verdadero problema, más que como una tarea escolar. Además, el problema queda inmerso dentro de una situación de comunicación escrita.

3. *Trabajo individual.* Cada niño tiene que intentar resolver el problema utilizando la estrategia y los materiales que considere adecuado. Si acaban pronto, pueden probar a hacerlo con algún otro material, con un dibujo o ayudar a algún compañero (sólo si la ayuda es solicitada).
4. *Puesta en común y consenso sobre el resultado y la estrategia.* En esta parte los niños deben dar una explicación sobre cómo han resuelto el problema. La tutora ayuda a razonar sobre la validez de la estrategia debatiendo con el grupo. Es un momento en que destaca el trabajo de las competencias de comunicación y argumentación. El objetivo es que los niños argumenten y demuestren las soluciones que han dado al problema ayudándose de representaciones, compartiendo y debatiendo sobre las estrategias para desarrollar la comunicación entre ellos.

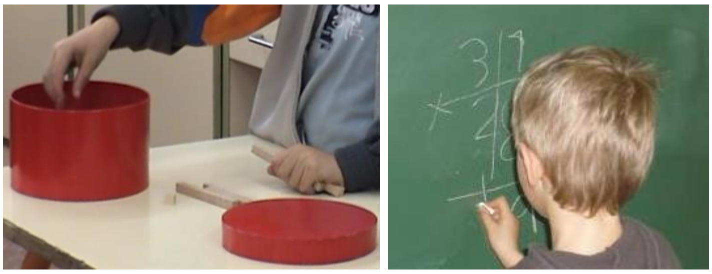


Figura 3.2. Explicación de estrategias en la puesta común de la sesión 13

5. *Escritura de la carta de respuesta.* Dado que el problema está planteado en un contexto de comunicación, en el que se recibe una carta o correo electrónico pidiendo la ayuda para la resolución del problema, se debe contestar con un mensaje escrito al final del taller. El objetivo es que los niños utilicen el lenguaje escrito para comunicar su estrategia a la persona que les ha pedido ayuda. La escritura de la carta supone una situación de articulación del pensamiento propio y de reflexión metacognitiva sobre la estrategia utilizada.

Figura 3.3. Carta con resolución a Clara en el grupo B en la sesión 21

Si se dispone de tiempo, cuando los niños reciben un correo electrónico, la respuesta se hace por el mismo medio. En este caso, se trabajan dos de las competencias básicas como la tecnológica y la lingüística. Esto cumple lo planteado por el *Principio tecnológico* del NCTM (2003).

Figura 3.4. Uso de nuevas tecnologías en la recepción y envío de la carta

Las sesiones tienen un enfoque investigativo de la enseñanza de las matemáticas (Baroody y otros, 2004; De Castro y Escorial, 2007) y están orientadas a promover un aprendizaje con comprensión. En la resolución de problemas, se invita a los niños a construir sus estrategias, pero éstas deben ser debatidas con el grupo y el profesor para decidir su validez. Es fundamental para la creación de normas en el aula que favorezcan este tipo de trabajo. Todo ello permite desarrollar los distintos procesos del NCTM (2003) o competencias de PISA (OCDE, 2005), tal como proponía en el capítulo 1 (ver Figura 1.23). De igual forma, desde la metodología de la CGI, se anima a los niños a utilizar sus estrategias y a explicarlas, para conocer el pensamiento matemático de los niños y basar en este conocimiento el diseño de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El enfoque cognitivo de la CGI adoptado en este trabajo, da mucha importancia a los instrumentos proporcionados a los niños para desarrollar sus procedimientos de resolución. En las sesiones del taller proporcionamos a los niños materiales que pueden utilizar como quieran para la resolución de los problemas. Al comienzo de cada sesión del taller, las tutoras reparten en las mesas los siguientes materiales:

- Hoja de trabajo: folios con el enunciado verbal del problema escrito al inicio.
- Objetos para emplear como contadores: bloques multicubos y centicubos, que son materiales escolares, formados por cubos individuales que pueden encajarse unos con otros. Los niños también utilizan otros materiales del aula como los “pinchitos” o la plastilina, que la moldean para realizar sus propias representaciones.
- Banda numérica o Tabla 100: en cada mesa los niños tienen disponible la tabla 100 “pegada”, con los números ordenados en filas de 10 numerales. Además, hay hojas de tamaño folio con la tabla 100 sobre las mesas.

Figura 3.5. Tabla 100 expuesta en el aula.

- La rejilla aritmética o *rekenrek*: un ábaco holandés que se utiliza como modelo visual para la iniciación al cálculo mental (Blanke, 2008). Es importante remarcar que los niños no han recibido ninguna instrucción de cómo se utiliza este material.
- Material con estructura de grupos de 10: En la quinta sesión del taller, en las clases habituales, comienzan a trabajar las decenas. Es en ese momento cuando se introducen materiales con grupos de 10.
  - Bloques de base 10 de Dienes: material estructurado escolar que contiene barras con diez unidades visibles, y unidades sueltas.
  - Hueveras: se pide a los padres que traigan cartones de huevos de decena, para introducir un material cotidiano con estructura de diez. Este material es específico del taller y no se utiliza en las clases.

3.1.2. Diseño de las tareas del taller

El taller de problemas está pensado para que los niños desarrollen conocimientos informales sobre el valor posicional de los números en primero de educación primaria. La elección de las tareas tiene como punto de partida tres propuesta de la CGI. La primera indica que el planteamiento de problemas de multiplicación y división medida con grupos de 10 permite desarrollar conocimientos sobre el agrupamiento de 10 y el valor posicional. Por otro lado, las estrategias utilizadas por los niños en problemas de estructura aditiva con números de dos cifras revelan distintos niveles de comprensión de estos conocimientos. Por último, los niños desarrollan estrategias informales desde educación infantil al resolver problemas de estructura multiplicativa. Teniendo en cuenta estas tres consideraciones, los problemas que se plantean son:

- Problemas de multiplicación y división con grupos de 10 para trabajar el agrupamiento de diez. Así se les ofrecerá la oportunidad de contar distintas unidades, como decenas y unidades, características importantes del sistema de numeración decimal (Ramírez y De Castro, 2012; Ramírez y De Castro, 2014c).
- Problemas aditivos con números de dos cifras para que los niños puedan construir estrategias en las que la comprensión del valor posicional de los números facilite su resolución. Además podrán relacionar el algoritmo de la suma y resta, que van a aprender en las clases habituales, con las estrategias desarrolladas en el taller (Ramírez y De Castro, 2014d).
- Problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación y división, para que construyan sus primeros significados sobre estas operaciones (Ramírez y De Castro, 2013, 2014a y 2014b).

Como he comentado, los participantes han realizado antes talleres similares al planteado aquí, por lo que ya han resuelto problemas de estructura aditiva y algunos de estructura multiplicativa. De este modo, han podido desarrollar sus primeras estrategias de modelización directa y conteo. Por ese motivo se alternan los tipos de problemas para que no utilicen estrategias de manera rutinaria. Este es un criterio fundamental que se sigue en el diseño del taller. Para elaborar los problemas propuestos en las sesiones del taller de este primer curso de primaria, me he basado en las trayectorias de aprendizaje-enseñanza, enmarcadas en el CGI, descritas en el Capítulo 2.

En la Figura 3.6 se muestra la evolución esperada de las estrategias para resolver los problemas aritméticos verbales.

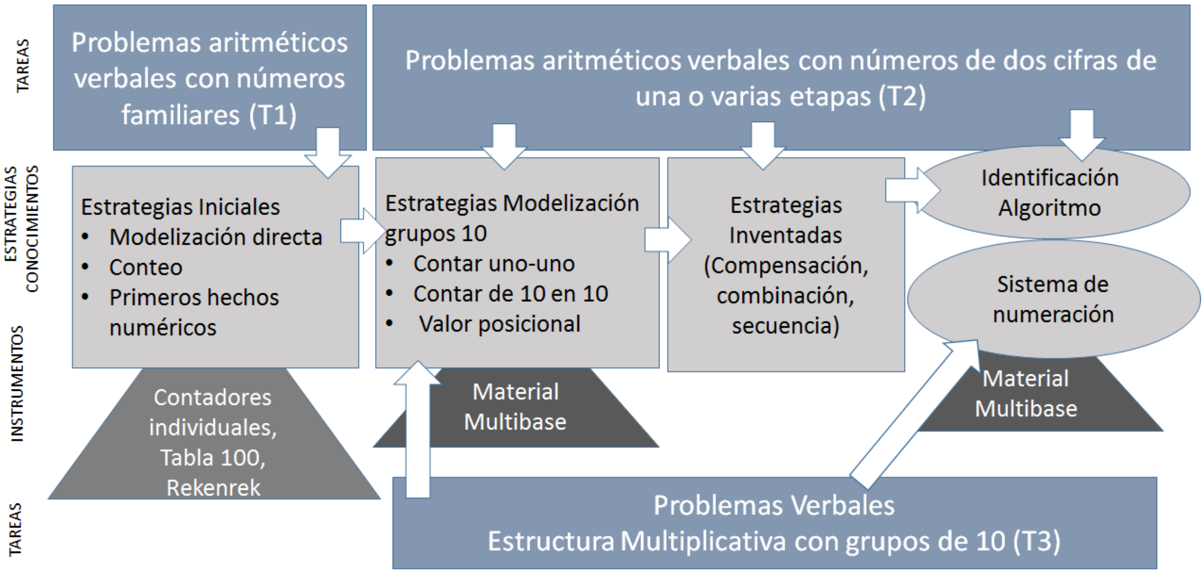


Figura 3.6. Evolución de las estrategias según CGI.

En las seis primeras sesiones, se plantean problemas aritméticos de estructura aditiva o multiplicativa con números que no superaron 18 (tareas T1), como extensión del trabajo que ya venían haciendo los alumnos en el último curso de educación infantil (Tabla 3.1). Los alumnos disponen de materiales que pueden utilizar como contadores individuales (multicubos, centicubos, pinchitos), la tabla 100 y rekenrek. Inicialmente, está previsto que solucionen los problemas con estrategias de modelización directa y conteo, representando las cantidades con objetos, con una comprensión unitaria de las cantidades.

Tabla 3.1. *Problemas planteados en las seis primeras sesiones*

Sesión	*Problema*	*Tipo*
1	Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?	Cambio decreciente (cantidad final)
2	Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?	Cambio decreciente (cantidad cambio)
3	Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?	3 etapas de esquema jerárquico con 3 Combinaciones (total desconocido)
4	El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?	Multiplicación, grupos iguales
5	Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?	División partitiva.
6	En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?	Cambio decreciente (cantidad cambio)

A partir de la sesión 7, y hasta la sesión 15, se introducen problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10 (Tareas T3), intercalando 2 problemas de combinación y uno de cambio creciente, siguiendo el criterio de variar el tipo de problemas de una sesión a la siguiente.

Los problemas de estructura multiplicativa de grupos iguales con grupos de 10 se introducen en este taller para ayudar a desarrollar la noción de agrupación de 10, y el conocimiento básico para la comprensión del valor posicional y de la decena, que se ajustan a las trayectorias de aprendizaje-enseñanza representadas en las Figuras 2.23 y 2.24. Fuson, Wearne y otros (1997) utilizaron estos problemas para evaluar la comprensión del valor posicional de números de dos cifras, y Carpenter, Fennema y otros (1999) los proponen para desarrollar este contenido. En concreto, en el taller incluyo:

- Problemas de dos etapas compuesto por una multiplicación con grupos de 10 y una segunda etapa de combinación con total desconocido. Estos problemas tienen grupos de 10 y unidades sueltas, y se ajustan a la sentencia a = 10 × b + c, donde b y c son datos, y la incógnita es a. Como se puede observar en la Figura 3.7, es un problema de dos etapas con estructura jerárquica. Por ejemplo, "Hay 4 cajas con 10 patitos en cada una, y 5 patitos sueltos. ¿Cuántos patitos hay en total?".

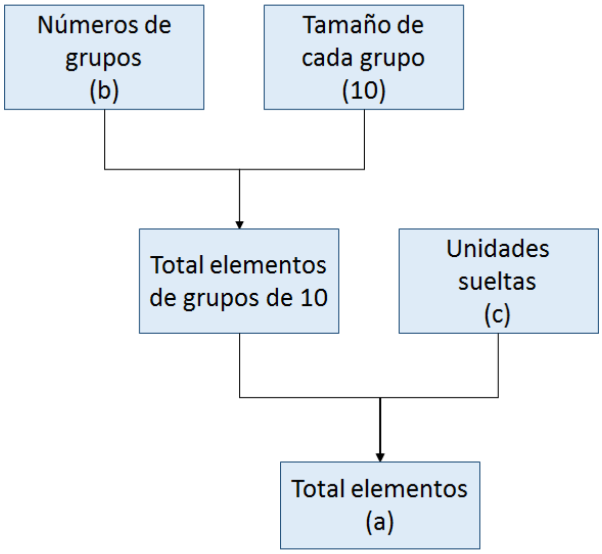


Figura 3.7. Estructura de los problemas multiplicativos de grupos de 10.

- Problemas de división medida con resto. Por ejemplo, "Hay 45 patitos y queremos guardarlos en cajas de 10, ¿cuántos cajas podemos llenar? ¿Cuántos patitos quedan sueltos?".

Estos problemas solo tiene sentido plantearlos a niños que no tienen adquirido el concepto de decena con fluidez. Estas tareas no son un problema para un estudiante que haya alcanzado un nivel de comprensión *fluido* de la decena (Wright y otros, 2006), o un nivel de *separar decenas y unidades* de los números de dos cifras (Fuson, 1992). Sin embargo, sí es un problema para un niño de primero de educación primaria, donde se está empezando a presentar el contenido de la decena y el valor posicional, y en el que los niños tienen un nivel de comprensión *fácil* de la decena (Wright y otros, 2006) o *unitario* de las cantidades de dos cifras (Fuson, 1992). Al ser un objetivo de primer curso de educación primaria adquirir el concepto de decena, es adecuado plantear este tipo de problemas para desarrollar un conocimiento informal sobre la estructura multiplicativa y sobre el agrupamiento de 10. Al no ser la multiplicación objeto de estudio en primero de primaria, los niños abordarán el proceso de resolución a través de estrategias informales de modelización directa, como el agrupamiento y la estrategia de medida, y de conteo. Estos problemas se plantean en las sesiones 7, 8, 8b[28], 11, 12 y 15 (ver Tabla 3.2). Los niños ya disponen de barras y unidades de los bloques de base 10 y otros materiales con grupos de 10, como cartones de decenas de huevos. Se pretende que los niños vayan adquiriendo la idea de que los números se distribuyen en grupos de 10 y unidades sueltas, y cómo se puede contar por separado cada tipo de unidad.

[28] Las sesiones 8 y 8b mantienen la numeración porque se plantea el mismo tipo de problema.

Tabla 3.2. *Problemas planteados en el taller con grupos de 10*

Sesión	*Problema*	*Tipo*
7	Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total?	Dos etapas jerárquico (multiplicación de grupo iguales y combinación con total desconocido)
8a	Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y Cuántos patitos quedan sin guardar?	División medida con resto
8b	Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?	División medida con resto
11	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran?	División medida con resto
12	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?	Dos etapas jerárquico (multiplicación de grupo iguales y combinación con total desconocido)
15	Cuando había 45 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?	División medida con resto

Según avanza el segundo trimestre del curso, los problemas aritméticos verbales van incorporando números de dos cifras (tareas T2). En este caso, los materiales con agrupaciones de 10, como los bloques de base 10 y los cartones de decenas de huevos, pueden facilitar el desarrollo de estrategias utilizando dichas agrupaciones de 10. Estas tareas siguen las trayectorias de aprendizaje-enseñanza de operaciones con dos cifras de las Figuras 2.27, 2.28, 2.29 y 2.30. En las siguientes sesiones se plantean problemas de estructura aditiva (sesiones 9, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 22 y 23) y multiplicativa (14, 21 y 24) con números de dos cifras. En los problemas aditivos, se espera que las estrategias inventadas por los niños evolucionen y que los niños pasen a emplear estrategias basadas en el valor posicional, llegando incluso a relacionar la situación del problema con el algoritmo como procedimiento de resolución formal.

En las sesiones 12, 16, 17, 18, 19 y 23, los enunciados de los problemas incluyen el término “decena” para operar con cantidades de dos cifras que mezclan unidades sueltas y unidades de grupos de 10. Se espera que los niños se den cuenta de los dos tipos de unidades que hay a la hora de representarlas y operar con ellas.

Tabla 3.3. *Problemas planteados en el taller con dos cifras*

Sesión	*Problema*	
9	Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?	Problema de 3 etapas con esquema jerárquico con 3 Combinaciones (total desconocido)
10	Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?	Combinación (Total)
13	Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?	Cambio creciente (cantidad final)
14	Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?	División partitiva
16	La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá?	Dos etapas jerárquico (Multiplicación repetidos y cambio decreciente con el final desconocido)
17	Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?	Jerárquico de 3 etapas con 3Combinaciones (total desconocido)
18	Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total?	Dos etapas jerárquico (Multiplicación y Cambio creciente (cantidad final)
19	Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?	Dos etapas jerárquico (Multiplicación y Cambio creciente (cantidad cambio)
20	Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta, ¿Cuántos euros has conseguido al final?	Combinación (total desconocido)
21	Si entras en un supermercado encima de un toro y rompes 5 cajas de galletas con 12 galletas cada una, ¿Cuántas galletas aplastas en total?	Multiplicación, grupos iguales
22	Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?	Combinación (parte desconocida)
23	Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?	Dos etapas jerárquico (multiplicación y comparación con diferencia desconocida)
24	Para dar de comer a sus peces, Bruno echaba 24 guisantes en la pecera. ¿Cuántos guisantes se comía cada pez?	División partitiva, división con resto.

3.2. Breve descripción de las clases habituales fuera del taller

Los dos grupos tienen 5 clases a la semana de la asignatura de matemáticas con una duración de 45 minutos (puede verse el horario en el Anexo 3). Para el taller de problemas se dispone de una sesión semanal, realizando las cuatro clases restantes con la metodología habitual de las tutoras, por lo que es conveniente describir las tareas que se realizan en el resto de clases semanales.

El trabajo del resto de las clases semanales de matemáticas se basa en el seguimiento de las tareas del libro de texto del aula[29]. Además, los alumnos disponen de un cuadernillo de resolución de problemas[30] que apenas utilizan, debido a la incorporación de las sesiones del taller de la investigación. Para dar a conocer las tareas que realizan los alumnos fuera de las sesiones de la investigación, describimos a continuación brevemente el libro de texto.

El libro de texto está organizado en 12 temas. Los contenidos de los temas correspondían a los bloques de Números y Operaciones, Geometría, y, Azar y Probabilidad (Tabla 3.5).

Tabla 3.5. *Contenido del libro de texto del aula*

Tema	*Título*	*Números y operaciones*	*Geometría*	*Medida*	*Azar y Probabilidad*
1	Juguetes del mundo	X	X	X	
2	La familia y los números	X	X	X	
3	¡Podemos contar con el cuerpo!	X	X	X	X
4	El cumpleaños	X	X	X	X
5	Mi calle	X	X	X	X
6	Mi casa	X	X	X	
7	Un día en la feria	X	X	X	
8	¿Qué ponen en la televisión?	X	X	X	
9	¿Qué tiempo hace?	X			
10	Vamos al mercado	X	X		
11	El zoo	X	X	X	X
12	Miramos el cielo	X	X		X

3.2.1. Cronología de los temas y las sesiones

En la Tabla 3.6 se presenta la cronología de los temas que se trataban en las clases habituales, comparando con las sesiones del taller de resolución de problemas aritméticos, para poder identificar qué contenidos relacionados con la aritmética o el sistema de numeración se estaban aprendiendo de manera formal en las clases de matemáticas, fuera de las sesiones del taller. Además, en el Anexo 4 describo los contenidos relacionados con el número y la aritmética en cada tema tratado con la tutora fuera de las sesiones del taller. Durante el periodo de adaptación, trabajaron el tema 1 e iniciaron el tema 2. Durante el resto de curso,

[29] Garriga, C., Giol, M. y Sánchez, N. (2007). *Matemáticas 1 Primer ciclo, Proyecto Tren*. Barcelona: La Galera.
[30] González, N. y Anglada, R. (Eds.) (2009). *Mategrup. Cuaderno de estrategias para resolver problemas naranja*. Barcelona: La Galera.

hasta final de mayo, las sesiones se realizaban todos los miércoles excepto 2 de ellos (10 de febrero y 21 de abril) que había eventos en el centro escolar y no se pudieron realizar.

Tabla 3.6. *Relación de Sesiones del taller y las clases habituales del primer trimestre*

<table>
<tr><td rowspan="2">Tema 2:
• Números del 7 al 9.
• Conteo hasta 9 objetos.
• Adición como juntar o añadir
• Hechos numéricos</td><td rowspan="6">Tarea tipo T1</td><td>Sesión 1
28 de Octubre</td><td>Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?</td></tr>
<tr><td>Sesión 2
04 de Noviembre</td><td>Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tema 3:
• Número 10. Decena
• Algoritmo horizontal de suma.
• Hechos numéricos que suman 10
• Problema de combinación con total desconocido</td><td>Sesión 3
11 de Noviembre</td><td>Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?</td></tr>
<tr><td>Sesión 4
18 de Noviembre</td><td>El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?</td></tr>
<tr><td>Sesión 5
25 de Noviembre</td><td>Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tema 4:
• Números ordinales
• Algoritmo vertical suma (unidades)
• Hechos numéricos
• Problema de combinación con total desconocido</td><td>Sesión 6
2 de Diciembre</td><td>En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tarea tipo T3</td><td>Sesión 7
9 de Diciembre</td><td>Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total?</td></tr>
<tr><td>Sesión 8a
16 de Diciembre</td><td>Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y Cuántos patitos quedan sin guardar?</td></tr>
</table>

En la Tabla 3.7 se presenta la secuencia de los problemas del taller relacionados cronológicamente con el tema del libro que estaban trabajando los niños en las clases habituales de matemáticas fuera del taller en el segundo trimestre.

Tabla 3.7. *Relación de Sesiones del taller y las clases habituales del segundo trimestre*

Tema 5: • Números del 10 al 19. • Algoritmo de la suma con números de dos cifras. • Conteo de 2 en 2 • Combinaciones aditivas hasta 19 • Problema de cambio creciente con cantidad final desconocida.	Tarea T3	Sesión 8b 13 de Enero	Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?
	Tarea T2	Sesión 9 20 de Enero	Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?
		Sesión 10 27 de Enero	Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?
Tema 6: • Números del 20 al 49. • Suma llevando • Parejas de números que suman 20 • Problema de cambio creciente con cantidad final desconocida.	Tarea T3	Sesión 11 3 de Febrero	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran?
		Sesión 12 17 de Febrero	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?
Tema 7: • Números del 50 al 69. • Propiedad conmutativa • Suma llevando con números de dos cifras • Combinaciones de números de dos cifras y una cifra hasta 69. • Problema combinación y división medida con grupos de 10.	Tarea T2	Sesión 13 24 de Febrero	Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?
		Sesión 14 3 de Marzo	Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?
	Tarea T3	Sesión 15 10 de Marzo	Cuando había 45 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?
Tema 8: • Números del 70 al 99. • Conteo de 5 en 5 • Número anterior y posterior. • Problema combinación	Tarea T2	Sesión 16 17 de Marzo	La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá?
		Sesión 17 24 de Marzo	Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?
		Sesión 18 07 de Abril	Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total?

En la Tabla 3.8 presento la secuencia de los problemas del taller relacionados cronológicamente con el tema del libro que estaban trabajando los niños en las clases habituales de matemáticas, fuera del taller, en el tercer trimestre.

Tabla 3.8. *Relación de Sesiones del taller y las clases habituales del tercer trimestre*

Tema 9: • Número 100. Centena • Sustracción como quitar • Algoritmo horizontal de la resta • Euro y céntimo: equivalencias • Problemas de combinación y cambio creciente	Tarea T2	Sesión 19 14 de Abril	Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?
		Sesión 20 28 de Abril	Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta, ¿Cuántos euros has conseguido al final?
Tema 10: • Sustracción • Algoritmo vertical de la resta • Complemento de un número para la decena siguiente • Problema de cambio creciente cantidad cambio desconocida		Sesión 21 5 de Mayo	Si entras en un supermercado encima de un toro y rompes 5 cajas de galletas con 12 galletas cada una, ¿Cuántas galletas aplastas en total?
		Sesión 22 12 de Mayo	Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?
		Sesión 23 19 de Mayo	Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?
Tema 11: • Repaso decena • Conteo 10 en 10 • Combinación y cambio decreciente.		Sesión 24 26 de Mayo	Para dar de comer a sus peces, Bruno echaba 24 guisantes en la pecera. ¿Cuántos guisantes se comía cada pez?

4. Recogida de información

En la Tabla 3.9 se muestran los distintos instrumentos utilizados en la recogida de datos. Dado que hay varias etapas en el taller, indico en qué momento de éste se utiliza cada instrumento.

Las entrevistas individuales siguen el modelo de entrevista flexible en el aula como plantean Ginsburg, Jacobs y López (1998), adaptación de las entrevistas clínicas al entorno habitual de los niños, en el que se propone un problema a los niños y se intenta averiguar cómo lo han resuelto los niños. En estas entrevistas se recogen el nombre de los niños, los materiales que utiliza y la descripción de la estrategia. En cada una de las etapas podían variar los instrumentos de recogida de información. En la tabla 3.10 se recoge en qué momentos se daban los diferentes registros. El análisis de las estrategias observadas y anotadas se realizará teniendo en cuenta los distintos tipos de información registrada.

Tabla 3.9. *Relación de los instrumentos de recogida de datos y fases del taller*

Instrumento	*Fase del taller*
Hoja de registro	Resolución individual
Entrevista individuales video	Resolución individual, puesta en común
Grabaciones en video observación	Resolución individual, puesta en común, escritura de la carta, lectura de la carta y planteamiento del problema
Fotografías	Resolución individual, puesta común, escritura de la carta
Hoja de trabajo	Resolución individual
Cartas	Resolución individual, escritura de la carta
Grabaciones de las puesta en común	Puesta en común
Narraciones a posterior	Todas las fases

MacLeod (1999) se pregunta acerca de la veracidad de los informes verbales en situaciones de cálculo. Las investigaciones precedentes distinguen entre informes verbales concurrentes, donde el alumno explica el procedimiento mientras resuelve la tarea; e informes verbales retrospectivos, donde una vez concluida la tarea, el alumno explica la estrategia seguida. En el caso de tareas breves, esta autora indica que los informes retrospectivos pueden ser más veraces, por perderse menos información en el informe verbal y se corre menos riesgo de que el alumno indique acciones que realmente no ha realizado.

Los informes verbales retrospectivos tienen un gran valor en la enseñanza de las matemáticas. El currículo de educación primaria indica que los niños deben "explicar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema (MEC, 2014, p. 34063)". Como ya he comentado en el marco teórico, esto ayuda al desarrollo de la competencia matemática, desarrollando procesos implicados como la comunicación, la argumentación y la representación (NCTM, 2003). Además, permite que los demás alumnos reflexionen y razonen sobre la validez de las estrategias, procesos que conforman el aprendizaje con comprensión (Carpenter y Lehrer, 1999).

En este trabajo, las entrevistas realizadas se hacen de manera retrospectiva, registrando las explicaciones de los niños en grabaciones de video y hojas de registro. Al tratarse de una investigación en el aula, donde las entrevistas se realizan en un entorno social, en que los niños comparten espacio y materiales al resolver las tareas, asumo las interacciones que se dan entre ellos, además de las limitaciones en el sentido de tener estrategias que no sean copiadas de los compañeros o no poder en ocasiones entrevistar a todos los participantes en cada sesión. Dado el número de alumnos, y la duración del taller, las entrevistas se realizan en un intervalo muy pequeño de tiempo, en el que hay niños que según acaban son entrevistados, y en otros casos, transcurren algunos minutos hasta que se les pregunta.

Capítulo 4. Resultados

En este capítulo recojo los resultados obtenidos en el análisis de la intervención en el aula. El desarrollo detallado de todas las sesiones se encuentra en el Anexo 1, donde muestro en cada sesión sus características generales, el resumen de la resolución de los alumnos, la descripción detallada de las estrategias observadas, las dificultades y errores que incurrieron en la resolución del problema y las representaciones utilizadas para las cantidades discretas. Por último, la identificación de capacidades necesarias observadas para cada estrategia, que permite elaborar el grafo de los caminos de aprendizaje para cada tipo de problema del taller.

Los resultados referidos a las estrategias y su evolución están presentados por tipo de problema. Se incluyen la descripción de las estrategias utilizadas para cada tipo de problema y los caminos de aprendizaje para cada una de ellas. Después, muestro la evolución a lo largo del taller, agrupando las estrategias por aspectos que permiten describir el desarrollo del conocimiento sobre el valor posicional. Esta agrupación es similar a la utilizada en los estudios previos y permite identificar los niveles del conocimiento sobre el valor posicional a través de las estrategias de resolución de los problemas planteados. Así mismo, las estrategias observadas se relacionan con los niveles indicados en las trayectorias de aprendizaje-enseñanza deducidas del marco teórico.

El siguiente apartado consiste en la descripción del desarrollo de los conocimientos informales observados en las estrategias infantiles. En su mayoría, y debido al entorno creado en la intervención, han sido de modelización directa, consideradas estrategias informales. Estas estrategias van incorporando aspectos formales que indican una evolución de estrategias informales a estrategias formales.

A continuación, la agrupación de estrategias utilizada en el estudio de su evolución, permiten relacionar cada tipo de estrategia con niveles de la comprensión de la decena. Por último, incluyo la descripción de las representaciones de cantidades discretas y su evolución.

Comienzo con la categorización de estrategias de partida. A continuación, muestro la clasificación inicial para las representaciones de cantidades discretas.

1. Categorización de las estrategias

La categorización de las estrategias observadas en el aula será deductiva-inductiva, ya que parto de las estrategias aportadas en el marco teórico. A lo largo del análisis de las estrategias del taller han surgido diferentes modalidades de aplicación, dependiendo del material utilizado y el detalle de la ejecución de los procedimientos, como el agrupamiento de 10 en las representaciones de las cantidades y su conteo.

Voy a distinguir, dentro de la estructura aditiva, situaciones aditivas y situaciones sustractivas. En los dos casos, las estrategias van evolucionando desde la modelización directa, pasando por el conteo, hasta la recuperación de hechos numéricos básicos, en términos de los trabajos de la CGI (Carpenter y otros, 1993; Carpenter y otros, 1999). Otro trabajo de referencia que utilizo es Fuson (1992), donde la autora destaca estas etapas según tres niveles, totalmente relacionados con las etapas descritas por la CGI. También utilizo la revisión de Verschaffel y otros (2007), para concluir la categorización de partida.

Comienzo por la categorización de estrategias iniciales para resolver situaciones aditivas. La estrategia de modelización directa que considero en esta etapa es *juntar todo* (JT). Como se puede observar en la Tabla 4.1, en los trabajos de Fuson (1992), esta estrategia se desglosa en *añadir a* y *poner juntos*, donde la diferencia consiste que, en la primera de ellas, las colecciones se añaden a una única colección, y en la segunda de ellas se representan por separado, y después se consideran juntas. En este trabajo considero *juntar todo*, para ambos casos y las diferencias de ejecución implicarán diferentes modalidades de aplicación.

La siguiente etapa recoge las estrategias de conteo (CGI) o *nivel 2* (Fuson, 1992), donde los niños comienzan a utilizar *contar desde uno de los sumandos*, que puede ser *desde el primero* (CP) o *desde el mayor* (CM).

Tabla 4.1. *Categorización inicial de estrategias en situaciones aditivas*

Etapa	*Estrategia*	*Variantes*	*En este trabajo*
Modelización directa (CGI); *Nivel 1* (Fuson, 1992)	*Counting all* (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Verschaffel, 2007)	*Add to* y *Put together* (Fuson, 1992)	*Juntar todo* (JT)
Etapa intermedia	*Counting all without materials* (Verschaffel, 2007)		*Contar todo sin material* (CT)
	Object count on (Fuson, 1992)		*Contar a partir del primero con material* (CP)
			Contar a partir del mayor con material (CM)
Conteo (CGI); *Nivel 2* (Fuson, 1992)	*Sequence count on* (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999)	*Counting on from* (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Verschaffel, 2007)	*Contar a partir del primero* (CP)
		Counting on from larger (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Verschaffel, 2007)	*Contar a partir del mayor* (CM)
Hechos numéricos (CGI); *Nivel 3* (Fuson, 1992)	*Basic number facts* (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Verschaffel, 2007)		*Hecho numérico básico* (HN)
	Derived Facts (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Verschaffel, 2007)		*Hecho numérico derivado* (HN)

Como se puede ver en la Tabla 4.1, Fuson (1992) y Verschaffel (2007) describen estrategias intermedias entre las estrategias de modelización directa y las estrategias de conteo. Verschaffel y otros (2007) incluyen *contar todo sin materiales*, y Fuson (1992) incluye la estrategia *contar a partir del sumando con objetos*, utilizando una cantidad representada con objetos o marcas para llevar el rastro de los numerales enunciados. La evolución de estas estrategias depende del nivel de elaboración de la secuencia de numerales (Fuson, 1992). Esta autora distingue tres significados para la secuencia numérica, *secuencia*, *conteo* y *cardinal*. Cuando los niños tienen adquirido el significado de *secuencia*, están en un *nivel hilera* en el que no pueden aplicar el conteo a una colección por no distinguir los numerales. Olive (2001) lo denomina *secuencia de conteo prenumérica*. En el *nivel irrompible*, en una primera fase en la que se da un significado de *conteo* (Fuson, 1992), los niños pueden *unitizar* los numerales y ver los objetos como contables, por lo que pueden aplicar el conteo a colecciones, utilizando el Principio de Cardinalidad, para determinar el cardinal de la colección con el último numeral enunciado. En una segunda fase, los niños son capaces de utilizar el significado *cardinal* de un numeral y recordarlo para formar una colección, utilizando la secuencia de numerales hasta ese numeral. Formar colecciones con una cantidad dada y determinar el cardinal de una colección con el conteo, son capacidades necesarias para realizar la estrategia juntar todo. Olive (2001) denomina esta etapa *conteo perceptual o figurativo*, donde el conteo figurativo, conteo de objetos no presentes físicamente sino imaginados, se corresponde con la estrategia *juntar todo sin material* de Verschaffel y otros (2007). Esta estrategia necesita de una capacidad en la que los niños sean capaces de formar una colección figurativa de elementos.

Tabla 4.2. *Capacidades y estrategias dependiendo de la secuencia de numerales*

Fuson (1992)	*Olive (2001)*	*Capacidad - Estrategia*
Nivel Hilera *(Secuencia)*	Secuencia conteo prenumérica	No pueden aplicar el conteo a una colección
Nivel irrompible *(Conteo)*	Conteo perceptual o figurativo	Principio de Cardinalidad Determina cardinal de una colección representada con material Determinar cardinal de una colección figurativa
Nivel irrompible *(Cardinal)*		Forman colecciones con material o figurativas. *Juntar todo*
Nivel rompible	Secuencia numérica inicial	Contar a partir de un numeral llevando el rastro con objetos *Contar a partir de un sumando con objetos*
Nivel numerable	Secuencia numérica tácitamente anidada	Contar a partir de un numeral llevando el rastro sin objetos *Contar a partir de un sumando*
Nivel Bidireccional	Secuencia numérica explícitamente anidada	Cada numeral recoge todos los anteriores, y está incluido en el siguiente; además, se puede descomponer en dos más pequeños Relación parte-todo *Hechos numéricos*

La capacidad de poder enunciar la secuencia de numerales a partir de un numeral, que implica una cantidad de objetos, continuando la secuencia mientras se cuenta una cantidad representada con material, se puede realizar cuando se ha alcanzado el *nivel de cadena rompible* de la secuencia numérica (Fuson, 1992). Olive (2001) denomina a esta etapa *secuencia numérica inicial*. Cuando el niño es capaz de llevar el rastro de los numerales enunciados con una colección figurativa, o utilizando una configuración como los dedos de las manos, es señal de haber alcanzado el nivel de cadena numerable (Fuson, 1992) o secuencia numérica tácitamente anidada (Olive, 2001). En *nivel bidireccional*, cada numeral representa todos los anteriores, y está incluido en el siguiente, cualquier numeral puede descomponerse en dos numerales más pequeños, lo que permite ver la relación entre la suma y la resta (Fuson, 1992). Esta capacidad conduce a utilizar hechos numéricos básicos y derivados. Olive (2001) denomina a esta etapa *secuencia numérica explícitamente anidada* (ver Tabla 4.2).

Tabla 4.3. *Categorización inicial de estrategias en situaciones sustractivas*

Etapa	*Estrategia*	*En este trabajo*
Modelización directa (CGI); *Nivel 1* (Fuson, 1992)	*Take away, separate to* (Fuson 1992) *Remove, separate from* (Carpenter y otros, 1993, 1999)	*Quitar* (Q)
	Add on up to (Fuson, 1992) *Put together up to* (Fuson, 1992) *Adding on up until* (Carpenter y otros , 1993) *Joining to* (Carpenter, Fennema y otros, 1999)	*Añadir Hasta* (AH)
	Separate to (Carpenter y otros, 1993, 1999)	*Quitar hasta* (QH)
	Match (Fuson, 1992); *One-to-one correspondence, Match* (Carpenter y otros , 1993, 1999)	*Correspondencia uno a uno* (E)
	*Trial and error (*Carpenter, Fennema y otros, 1999)	*Ensayo y error* (EE)
Intermedia	*Object count up to (Fuson, 1992)*	*Contar hasta con material* (CH)
	Object count down (Fuson, 1992)	*Contar hacia atrás con material* (CA)
	Object count down to (Fuson, 1992)	*Contar hacia atrás hasta con material* (CAH)
Conteo (CGI); *Nivel 2* (Fuson, 1992)	*Sequence count up to* (Fuson, 1992); *Count up from to* (Carpenter y otros , 1993; Carpenter, Fennema y otros, 1999)	*Contar hasta* (CH)
	Sequence count down (Fuson, 1992) *Count back from, count down* (Carpenter y otros , 1993; Carpenter, Fennema y otros, 1999)	*Contar hacia atrás* (CA)
	Sequence count down to (Fuson, 1992); *Count back from to, count down to* (Carpenter y otros , 1993; Carpenter, Fennema y otros, 1999)	*Contar hacia atrás hasta* (CAH)
	*Trial and error (*Carpenter, Fennema y otros, 1999)	*Ensayo y error*(EE)
Hechos numéricos (CGI); *Nivel 3* (Fuson, 1992)	*Basic number facts* (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Verschaffel, 2007)	*Hecho numérico básico* (HN)
	Derived Facts (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999; Verschaffel, 2007)	*Hecho numérico derivado* (HN)

Para los problemas sustractivos, las estrategias de modelización directa de las que parto son *Quitar* (Q), *Añadir hasta* (AH), *Quitar hasta* (QH), *Correspondencia uno a uno* (E) y *Ensayo* *y error* (EE). Al ser estrategias de modelización directa, describiré posibles modalidades de aplicación dependiendo del material utilizado y de la forma de representar las cantidades, las acciones y relaciones entre las ellas y su conteo. Al igual que las estrategias para situaciones aditivas, estas estrategias evolucionan hacia estrategias de conteo. En este transcurso, Fuson (1992) también ha observado estrategias intermedias dependiendo del nivel de la secuencia numérica. Cuando los niños alcanzan el nivel de cadena rompible, estos son capaces de utilizar estrategias de conteo como *contar hasta* (CH), *contar hacia atrás* (CA) y *contar hacia atrás hasta* (CAH), llevando el rastro de los numerales enunciados con una colección representada con materiales. Después, cuando alcanzan el nivel de cadena numerable, utilizan patrones como cantidades representadas con los dedos de las manos o colecciones figurativas para llevar ese mismo rastro en dichas estrategias (ver Tabla 4.3). Finalmente, utilizan los *hechos numéricos* (HN).

Para los problemas de estructura multiplicativa, las estrategias de modelización directa son *agrupamiento* (A), estrategia de *medida* (M) y *reparto* (R). Las estrategias de conteo están basadas en el conteo a saltos (CS). Olive (2001) indica que cuando los niños poseen la *secuencia numérica inicial* ya son capaces de enunciar la secuencia a saltos, pero son incapaces de llevar el rastro de dos unidades distintas, grupos y elementos por grupo. Esto ocurre en el nivel de *secuencia numérica tácitamente anidada*, donde son capaces de llevar el rastro de los numerales enunciados en la secuencia a saltos, y pueden utilizar estrategias de conteo para la estructura multiplicativa. Finalmente, al igual que en la estructura aditiva, la utilización de hechos numéricos se divide en el uso de hechos numéricos derivados y la recuperación de los hechos numéricos básicos (HN). Para estas estrategias, los niños deben haber alcanzado la *secuencia numérica explícitamente anidada* (ver Tabla 4.4).

Tabla 4.4. *Capacidades y estrategias dependiendo de la secuencia de numerales*

Olive (2001)	*Capacidad – Estrategia en mi trabajo*
Conteo perceptual o figurativo	Forman colecciones
	Agrupamiento (A), *Medida* (M) y *Reparto* (R)
Secuencia numérica inicial	Secuencia a saltos
Secuencia numérica tácitamente anidada	Contar a saltos llevando el rastro
	Estrategia de conteo a saltos (CS)
Secuencia numérica explícitamente anidada	*Hechos numéricos*

Los problemas de estructura multiplicativa con agrupamientos de 10 de multiplicación han sido analizados como problemas de dos etapas, donde la primera consiste en una situación de grupos iguales y la segunda una combinación con total desconocido. Por lo tanto, las estrategias estarán compuestas por una modalidad de aplicación de estrategias para multiplicación y por una modalidad de estrategias de suma. Estas modalidades de aplicación dependerán de la forma de representar los grupos de 10 y su conteo, esencialmente.

Una estrategia a tener en cuenta en los dos tipos de problemas de estructura multiplicativa con agrupamientos de 10 planteados es el uso del valor posicional (VP), que con los problemas con cantidades de una cifra no se utiliza. Al incorporar este tipo de problemas con cantidades organizadas en grupos de 10 y elementos sueltos, surge la capacidad de reconocer la posición de las decenas como grupos de 10, y las unidades como los objetos sueltos.

Para problemas de estructura aditiva con números de dos cifras en los que se utiliza bloques de base 10 para modelizar, la CGI describe estrategias de modelización directa para suma y resta similares a las estrategias mostradas en las Tablas 4.1 y 4.3. De esta manera, van a surgir modalidades de aplicación de estrategias como juntar todo (JT) o quitar (Q), por el uso de materiales con estructura decimal para representar las cantidades y, además, es importante describir la forma de contarlas.

El grupo más avanzado de estrategias corresponde a las *estrategias inventadas* (EI) (Carpenter, Fennema y otros, 1999). Estas estrategias se basan en el valor posicional de las cifras y consisten en operar números de dos cifras, aprovechando las propiedades de los números, la posición de las cifras y las propiedades de las operaciones. En la Tabla 2.10, describo algunas estrategias inventadas que admiten diferentes modalidades de aplicación, dependiendo del uso de cada niño y de la situación, como la *secuencial*, *combinar decenas y unidades* y la *compensación*.

Estas estrategias utilizan el valor posicional de las cifras, y además, pueden ser el resultado de varias estrategias. Por ejemplo, recuperación de hechos numéricos con uso del valor posicional de las cifras, conteo a saltos o de uno en uno, etc. Dentro de estas estrategias, voy a describir al detalle en cada sesión las que hayan sido utilizadas por los niños.

Partiendo de esta categorización, detallaré las estrategias utilizadas por los niños en el taller, concretando con el material utilizado, y categorizando las posibles modalidades de uso encontradas. Esto implica un nivel de afinación mayor al describir modalidades de uso de las estrategias de partida, tal como lo hace Gómez (1995) en su descripción de estrategias de cálculo mental.

La codificación de las estrategias de partida son los caracteres correspondientes a las siglas que se acaban de comentar en este mismo punto. Por ejemplo, JT para estrategias de *juntar todo,* o CS, para una secuencia de *conteo a saltos*.

La categorización inicial será numerada en orden (por ejemplo, JT1, JT2, etc.), según aparezcan modalidades de uso en las sesiones, dependiendo del material utilizado. Voy a distinguir entre: *cubos encajables*, formando barras, que permite comparar cantidades por longitud de barras, o por formas realizadas con ellos; *objetos*, donde incluyo los cubos encajables amontonados (sin formar barras o figuras comparables por la forma o longitud), como cualquier otro tipo de objetos como bolas de plastilina, rotuladores como contadores, "pinchitos"; representaciones gráficas, que pueden ser simples *marcas*, o *dibujos* icónicos, y serán los representantes que utilizan los niños en papel para cada uno de los elementos implicados en el problema; *bloques de base 10*, material multibase de Base 10 de Dienes; *hueveras*, cartones de decenas de huevos, que se pide a los niños que traigan de casa; *rekenrek,* o rejilla aritmética; *dedos de la mano*; y la *Tabla 100*.

Otra característica importante para detallar modalidades de uso de las estrategias de partida, es la forma de establecer relaciones entre las cantidades, la existencia de agrupación al representar cantidades, y si el recuento se realiza de uno en uno, o a saltos.

1.1. Las estrategias como secuencias de capacidades

En el análisis de las estrategias pretendo formar secuencias de capacidades para formar los caminos de aprendizaje de una tarea. A continuación, describo las capacidades que se espera que los niños utilicen en sus procedimientos.

En el taller se plantean problemas aritméticos verbales, de forma oral y escrita, y por lo tanto, los alumnos deben ser capaces de leer un numeral escrito. Además, deben también ser capaces de dar por escrito la solución. Los primeros problemas planteados en el taller contienen cantidades menores que 20; más tarde, se incluyen cantidades de hasta 100. Al final de primero de educación primaria, los niños deberían ser capaces de leer un número escrito con cifras hasta 100, escribir números con cifras hasta 100, o escribir números con palabras hasta 100 (Clements, 2004).

En Clements (2004) indica que, con 5-6 años, los niños son capaces de aplicar el conteo para determinar el número de elementos de una colección de hasta 20 objetos y con 6-7 años, hasta 100. Por lo tanto, los niños utilizarán el conteo para, o bien formar colecciones de hasta 100 elementos, o determinar el cardinal de una colección de hasta 100 elementos. También los niños son capaces de utilizar la *subitización* de hasta 6 objetos sin configuración y hasta 10 con configuración.

Cuando comiencen a trabajar con números de dos cifras y se introduzca la decena, se van a incluir materiales con estructuras de grupos de 10 y unidades sueltas como los bloques de base 10, que podrán utilizar en las representaciones de las cantidades, lo que implicará organizar cantidades en decenas y unidades separadas. Con la Tabla 100, pueden representar cantidades con la secuencia numérica o simplemente llevar el rastro de los numerales enunciados en una secuencia de conteo. El rekenrek lo tendrán disponible desde la primera sesión y contiene 20 bolas agrupadas en dos filas de 10, dentro de las cuales, hay una configuración de 5 + 5. Por lo tanto, a lo largo de la sesiones, aparecerán distintas maneras de “formar una colección de hasta 100 elementos” dependiendo de los materiales utilizados.

Los niños que alcancen un nivel de cadena numerable de la secuencia numérica, pueden utilizar estrategias de conteo (Fuson, 1992; Carpenter, Fennema y otros, 1999). Para estas estrategias, los niños deben enunciar la secuencia de numerales hacia delante y hacia atrás, llevando el rastro de los numerales enunciados. Sobre los 5-6 años, son capaces de contar hacia atrás desde 10 y con 6-7 años desde 20 (Clements, 2004), lo que permite utilizar la estrategia de contar hacia atrás (Carpenter, Ansell y otros, 1993). Enunciar la secuencia numérica de un número a otro, hacia delante y hacia atrás, llevando el rastro de los numerales enunciados, permite utilizar estrategias como contar hacia atrás hasta y contar hasta. Partiendo de estas capacidades, pueden surgir otras en la forma de llevar el rastro de los numerales enunciados.

Enunciar la secuencia de numerales a saltos se puede realizar de 10 en 10, desde los 5-6 años, y de dos en dos o de cinco en cinco desde los 6-7 años (Clements, 2004).

Para realizar las estrategias de modelización directa los niños tienen que representar las acciones y relaciones entre las cantidades en los distintos problemas aritméticos verbales. Por lo tanto, planteo las capacidades que representan acciones o relaciones entre cantidades que se suman, como juntar varias colecciones o añadir una colección a otra. También se dan capacidades para representar acciones o relaciones entre cantidades que se restan, como quitar una colección a otra en la que está incluida; tachar, separar o redondear una colección que está incluida en otra; colocar en correspondencia uno a uno dos colecciones de objetos o marcas para ver cuánto más grande es una de la otra.

Para problemas de grupos iguales que se plantean en el taller, los niños deben reconocer que la cantidad de “objetos por cada grupo” debe ser representada varias veces, una vez por cada grupo, para modelizar el problema. En estos problemas, las dos cantidades, grupos y elementos por grupo, son dos cantidades diferentes, y debe distinguirse en su representación. Además, se establece una relación de uno a muchos, un grupo con todos sus elementos, que se debe ser capaz de representar.

En los problemas de división partitiva, los niños tienen que utilizar distintas capacidades para representar acciones o relaciones entre cantidades de reparto.

El reconocimiento de la relación parte-todo, permite descomponer cantidades en dos más pequeñas. En la trayectoria de aprendizaje-enseñanza de Clements y Sarama (2009), se observa como los niños van descomponiendo cantidad de hasta 5, 7, 10, y más tarde, descomposiciones de números de dos cifras en las decenas y unidades (por ejemplo, 54 es 50 y 4). Así, los niños van utilizando capacidades que muestran conocer estas descomposiciones u otras, como conocer la suma de una década cualquiera más 10, por ejemplo, 30 + 10 = 40, o conocer la suma de una década cualquiera más una cantidad de unidades menor que 10, por ejemplo, 20 más 4, 24; incluso conocer la suma de dos décadas cualquiera, cuya suma es menor que 100, por ejemplo, 30 + 40, 70. En este trabajo tiene importancia la comprensión del valor posicional de las cifras en los números de dos dígitos. Por ello defino algunas capacidades necesarias para resolver algunas de las situaciones del taller, como reconocer que una decena es igual que 10 unidades, reconocer que un grupo de 10 es una decena, reconocer que varias decenas son una "década"[31], es decir, 4 decenas son 40, o reconocer que una década son varias decenas, es decir, 50 son 5 decenas; reconocer que en una cantidad organizada en varios grupos de 10 y una cantidad de objetos menor que 10, el número de grupos es la cifra de las decenas y la cantidad de objetos menor que 10 corresponden a la cifra de las unidades, en un número de dos cifras.

Clements (2004) indica que comprender la relación entre la suma y la resta, permite resolver situaciones de cambio con la cantidad de cambio desconocida, como por ejemplo "5 - ¿? = 2", relacionándolo con "2 + 3 = 5".

En el Anexo 1, se puede observar como a lo largo de las sesiones, se han incorporado las capacidades que son necesarias para ejecutar las estrategias observadas en cada sesión. Las capacidades serán numeradas según se vaya analizando las estrategias utilizadas cronológicamente, codificándolas con una "C" delante del número. Con ellas, se construirá los distintos caminos de aprendizaje de la tarea, donde se pueden ver las distintas capacidades que necesita un niño para utilizar una estrategia concreta. En el Anexo 8 se adjuntan dos listados de las capacidades identificadas en las estrategias.

2. Categorización de las representaciones

La categorización que utilizaré para las representaciones de las cantidades discretas corresponde al trabajo de De Castro y Bosch (en prensa) descrita en la Tabla 4.8, que consiste en un par ordenado (*representación del número, representación del tipo de objeto*).

De Castro y Bosch (en prensa) inicialmente categoriza representaciones gráficas, y quiero remarcar que en mi trabajo incluyo las representaciones hechas con materiales y objetos por lo que la codificación queda de la siguiente forma. Para la componente *representación del número* voy a considerar las siguientes subcategorías, numeradas del 1 al 4:

1. *Icónica*. Se incluye la representación gráfica (marcas o dibujos), con objetos u otros materiales, donde cada unidad está representada por un objeto o marca/dibujo.
2. *Con aspectos icónicos y simbólicos*. Cada unidad se ve representada por un numeral de la secuencia de conteo. Por ejemplo, para representar 4 objetos se escribe la secuencia numérica hasta el 4, "1, 2, 3, 4" siendo cada numeral representante de una unidad de la cantidad. En mi trabajo, la Tabla 100 contiene numerales que los niños utilizan como representantes de unidades.

[31] Me refiero a década como 10, 20, 30, es decir, 3 decenas son 30, según Fuson (1992).

3. *Simbólica (con cifras).* Se escribe el cardinal del conjunto con el numeral que representa el cardinal del conjunto (“4”).
4. *Simbólico (con palabras*). Se escribe el cardinal del conjunto con el numeral como palabra (“cuatro”).

Para la componente de la *representación de los objetos* considero las siguientes subcategorías, denotadas de la A a la C:

A. *Sin representación*. No se representa el tipo de objeto.
B. *Icónica*. Se utiliza una representación del objeto icónica (dibujo), en la que hay un parecido entre la representación y el objeto representado, que puede ser mayor o menor, desde tener el mismo color, la misma forma o tamaño, a ser un dibujo o un modelado del objeto más o menos fiel.
C. *Simbólica*. Se utiliza la palabra del nombre del objeto.

En la Tabla 4.5 se muestra un ejemplo de cada una de las representaciones, cruzando la tipografía de las dos componentes. Se puede observar la notación de la categorización que utilizaré para describir las representaciones.

Tabla 4.5. *Categorización de las representaciones (adaptada de De Castro y Bosch, en prensa)*

	Representación del número			
Representación del tipo de objeto	*Icónica **(1)***	*Con aspectos icónicos y simbólicos **(2)***	*Simbólica (con cifras) **(3)***	*Simbólica (con palabras) **(4)***
Sin representación (A)	|||| u objetos **(A1)**	1 2 3 4 o Tabla 100 como unidades o |||| o 1234 **(A2)**	4 **(A3)**	Cuatro **(A4)**
*Icónica **(B)***	 **(B1)**	1 2 3 4  **(B2)**	4  **(B3)**	cuatro  **(B4)**
*Simbólica **(C)***	|||| perros **(C1)**	1 2 3 4 perros **(C2)**	4 perros **(C3)**	cuatro perros **(C4)**

Para el análisis voy a utilizar la Tabla 4.6 con la siguiente estructura. El eje vertical contiene los tipos de representación según las dos componentes. La representación del número se considera principal y se ordena de la más icónica a la más simbólica, las primeras filas son para la categoría 1 (icónica), y las últimas para las más simbólicas, 3 y 4. Dentro de cada una de ellas, distinguiré la categoría de la representación del tipo de objeto, desde la A, sin representación, hasta la C, simbólica.

Tabla 4.6. *Tabla para el análisis de las representaciones*

Representación número	*Representación objeto*		*Resolución*	*Solución*	*Carta*
1 (Icónica)	A (Sin representación)	A1			
	B (Icónica)	B1			
	C (Simbólica)	C1			
2 (*Con aspectos icónicos y simbólicos)*	A (Sin representación)	A2			
	B (Icónica)	B2			
	C (Simbólica)	C2			
3 (*Simbólica con cifras)*	A (Sin representación)	A3			
	B (Icónica)	B3			
	C (Simbólica)	C3			
4 (*Simbólica con palabras)*	A (Sin representación)	A4			
	B (Icónica)	B4			
	C (Simbólica)	C4			

En el eje horizontal colocaré el momento al que corresponden a representación. Distingo tres momentos: el primero, el de la *resolución*, la representación que el niño utiliza para explicar cómo ha resuelto el problemas; el segundo, la *solución*, como da por escrito la cantidad resultado; el tercer momento, la *carta*, donde los niños explican la resolución que creen adecuada, donde también expresan cantidades.

En el Anexo 1 pueden verse las representaciones utilizadas en cada sesión con ejemplos de cada de los tipos recogidos. Dentro de la categoría A1, *icónica de número y sin representación del tipo de objeto*, esta componente, voy a distinguir entre el uso de cubos encajables (Oc), otros objetos (Oo), bloques de base 10 (B10), Hueveras (H), dedos de la mano (D), marcas en el papel (Gm). En la categoría B1, *icónica de número y tipo de objeto*, voy a distinguir entre dibujos iguales (B1I) y dibujos diferentes (B1D) en una misma cantidad, es decir, si se representan 7 niñas, todas las niñas pueden ser iguales (B1I), o pueden ser diferentes (B1D).

3. Resultados generales de las sesiones

En este apartado se muestran los resultados referentes a la resolución de los problemas de todas las sesiones. En el Anexo 1, en cada sesión se incluye la resolución del problema de esa semana. En este apartado incluyo el resumen de todo el taller. Se presenta los porcentajes de:

- El número de alumnos que resolvieron el problema con una estrategia adecuada, aunque en principio utilizasen una inadecuada, y además dieron la solución correcta.
- El número de alumnos que utilizaron una estrategia adecuada en la sesión y no consiguieron dar la solución correcta.
- El número de alumnos que utilizaron estrategias inadecuadas.
- El número de alumnos que no resuelven el problema, o que dicen respuestas al azar sin intentarlo, o abandonan. Esto lo permite el enfoque abierto del taller en el que se invita a los niños a resolver la tarea sin presionarles.
- El número de alumnos que no ha sido posible identificar la estrategia con los datos recogidos, o no hay registro. El registro de las estrategias utilizadas por los niños se realizó con entrevistas en el aula. En el tiempo y los recursos humanos disponibles, no daba tiempo a recoger suficiente información de todos los alumnos.
- El número de ausentes en clase.

En la Figura 4.1 se puede observar el porcentaje de estos ítems. En todas las sesiones, una media del 65,93% de los niños ha elegido una estrategia adecuada. Una media de 8,67% elegía estrategias inadecuadas y 9,31% abandonaban o decían respuestas al azar. En todo el taller, no se consiguieron suficientes datos para identificar la estrategia utilizada o ni siquiera había registro, de una media del 9,63% de los alumnos.

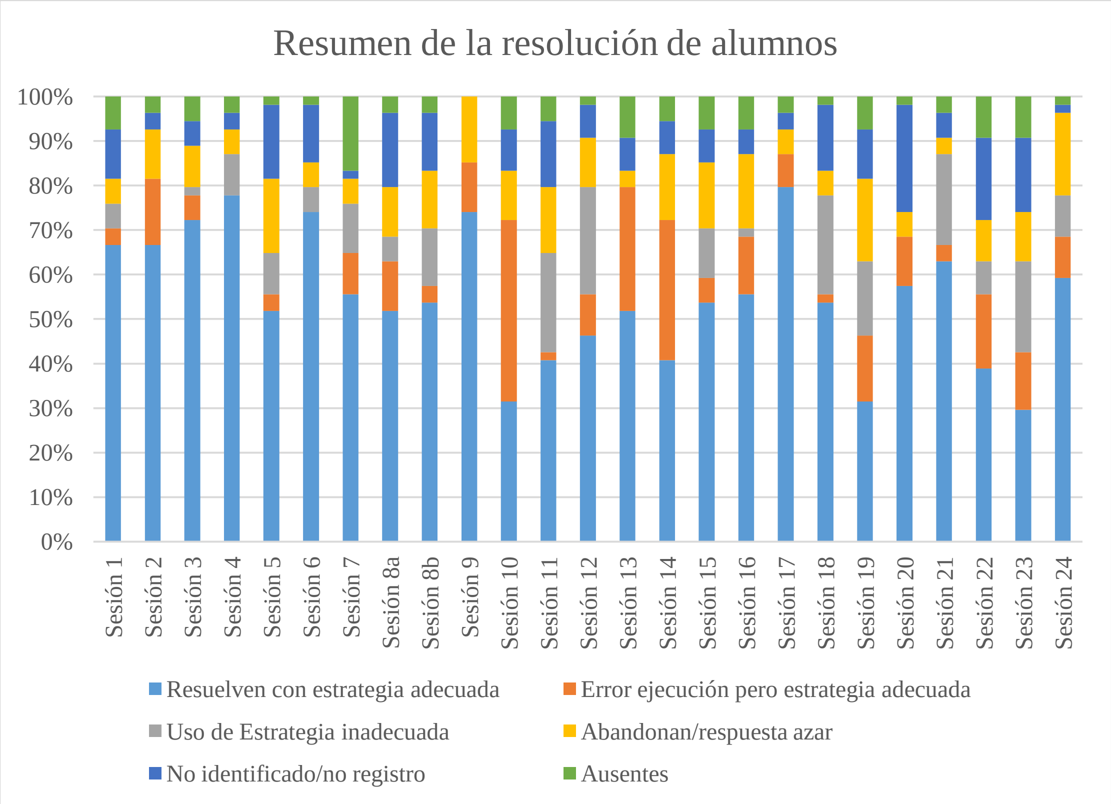


Figura 4.1. Resumen de la resolución de alumnos de todas las sesiones

Hay 3 sesiones en la que la elección de una estrategia adecuada es menor del 50% que son las sesiones 11, 19 y 23.

4. Análisis y evolución de las estrategias

En este apartado voy a mostrar los resultados del análisis de las estrategias y su evolución por tipo de problema. El Anexo 1 contiene el análisis de las estrategias de resolución observadas sesión por sesión. En cada una de las sesiones, analizo las estrategias y les asigno una modalidad de aplicación de las incluidas en la categorización de la que parto. Estas modalidades han surgido al distinguir el material con el que los niños realizan sus procedimientos. Además, hay dos aspectos del proceso de ejecución de las estrategias de modelización directa que he tenido en cuenta en el análisis: la representación de las cantidades con ausencia de grupos de 10 o separando decenas y unidades, y la forma de contar estos agrupamientos. En este apartado incluyo la síntesis de este análisis, describiendo las modalidades de aplicación de las estrategias que marcan los estudios previos.

En cada sesión del Anexo 1 identifico las capacidades necesarias para cada modalidad de aplicación de las estrategias y los errores que han incurrido en su ejecución. Con todo, construyo el grafo de los caminos de aprendizaje para cada problema. En este apartado, muestro el grafo de caminos de aprendizaje de cada tipo de problema, donde se puede observar cada estrategia utilizada en el taller como secuencia de capacidades.

Una vez realizado el análisis de las estrategias recogidas en el taller, describo la evolución de las estrategias a lo largo del curso. El centro de atención de este trabajo es el desarrollo del conocimiento sobre el valor posicional. Teniendo en cuenta los dos aspectos de las estrategias de resolución comentados anteriormente, sobre la representación de las cantidades y su conteo, voy a agrupar las estrategias y describir cómo evolucionan a lo largo del curso.

Los materiales proporcionados han promovido modalidades de aplicación de estrategias que he descrito en el apartado *Uso de materiales*.

Una vez completado el análisis de las estrategias y su evolución relaciono los tipos de estrategias agrupadas según el criterio utilizado para observar el desarrollo del conocimiento del valor posicional con las trayectorias de aprendizaje-enseñanza deducidas de los estudios previos que desarrollé al final del Capítulo 2.

4.1. Problemas multiplicativos con agrupamientos de 10

Los problemas de estructura multiplicativa con agrupamientos de 10 que se han utilizado en este trabajo son de dos tipos: problemas de grupos iguales de multiplicación con agrupamientos de 10 que se combinan con una cantidad menor que 10, y problemas de grupos iguales con agrupamientos de 10 de división medida con resto. A continuación, realizo el análisis por separado de estos dos tipos de problemas.

4.1.1. Problemas de multiplicación

Los problemas de grupos iguales de multiplicación con agrupamientos de 10 seguidos de una combinación con una cantidad menor que 10 de unidades han sido planteados en la sesiones 7 y 12. En la Tabla 4.7 muestro los enunciados de estos problemas.

Tabla 4.7. *Problemas de multiplicación con agrupamientos de 10*

Sesión	*Problema*
7	Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total?
12	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?

Para obtener más detalle del análisis, remito al lector al Anexo 1, que contiene el desarrollo de las dos sesiones, así como el análisis de las estrategias y representaciones.

4.1.1.1. Análisis de estrategias

Las estrategias de este tipo de problema han sido desglosadas en las dos etapas que lo conforman. Las estrategias observadas para la primera etapa han sido de agrupamiento (A), conteo a saltos (CS), uso del valor posicional (VP) y estrategias inventadas (EI). Las estrategias observadas en la segunda etapa han sido juntar todo (JT), contar a partir del primero con objetos y sin objetos (C), estrategias inventadas (EI), uso del algoritmo de la suma (AL) y por último, el uso del valor posicional (VP). En el Anexo 1, los apartados de las sesiones 7 y 12 contienen el análisis por separado de las dos etapas, describiendo las modalidades de aplicación de estas estrategias dependiendo de los materiales elegidos, la forma de representar los grupos y el recuento total de elementos.

Voy a describir a continuación las estrategias observadas, incluyendo la resolución de ambas etapas concatenadas. La estrategia más utilizada ha sido *agrupamiento-juntar todo* (A-JT), como se puede ver en la Tabla 4.8. Esta estrategia consiste en hacer tantos grupos de 10 como indica el problema, representar la cantidad de objetos sueltos y realizar el recuento de todo. Los grupos se pueden representar poniendo un elemento como representante de grupo o simplemente poniendo los elementos que contiene cada grupo. Además, los grupos se pueden ir añadiendo a una única colección o dejarlos separados para el recuento final. Este último conteo se puede hacer de uno en uno, o de 10 en 10 si la representación de la cantidad final contiene grupos de 10. Con estas variaciones y dependiendo del material utilizado, diferencio las modalidades de uso de esta estrategia.

La modalidad en la que no se pone ningún representante de grupo, los grupos se dejan separados, los elementos sueltos se representan dejándolos separados y se realiza el conteo de uno en uno, se ha usado con cubos encajables (A1-JT13), objetos (A20-JT15), dibujos (A23-JT18) y marcas (A3-JT17).

Figura 4.2. Representaciones de A1-JT13 y A3-JT17

La modalidad similar a la anterior en la que se pone un elemento como representante de grupo, los grupos se dejan separados, los elementos sueltos se representan dejándolos separados y se realiza el conteo de uno en uno, se ha ejecutado con cubos encajables (A7-JT13), dibujos (A9-JT18) y marcas (A10-JT16).

Figura 4.3. Representación de A7-JT13 y A9-JT18

Es importante resaltar que todas las modalidades de la estrategia agrupamiento-juntar todo descritas hasta ahora suponen tener la cantidad total organizada en decenas y unidades, sin embargo, el recuento final se realiza de uno en uno. Si el recuento final se realiza contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades sueltas, entonces distingo las modalidades con cubos encajables (A19-JT14), con objetos (A21-JT16), y con marcas y representante de grupo (A26-JT20), similares a A1-JT13, A20-JT15 y A10-JT16, con la única diferencia que el recuento final se hace de 10 en 10.

Un niño realiza una variación de estas modalidades utilizando A10 en la primera etapa, representado los grupos por separado, repartiendo los elementos sueltos en los grupos de la primera etapa y contando todo de uno en uno (A10-R7-JT6). En este caso, la modalidad de uso de juntar todo (JT6), la cantidad total no queda organizada en grupos de 10 y no es posible el conteo de 10 en 10.

Una forma de realizar la estrategia agrupamiento-juntar todo es añadir a una única colección los grupos de 10 de la primera etapa, los elementos sueltos se representan dejándolos separados y se realiza el conteo de uno en uno, se ha realizado con cubos encajables (A2-JT1), objetos (A22-JT3) y marcas (A28-JT6). En este caso, las modalidades de juntar todo son diferentes a las anteriores ya que la representación final no queda organizada en grupos de 10, y no permite el recuento de 10 en 10, solo puede ser de uno en uno.

Figura 4.4. Representación para el recuento final de A22-JT3

La utilización de los bloques de base 10 para representar las cantidades genera nuevas modalidades de uso de agrupamiento-juntar todo. Los grupos de 10 de la primera etapa se representan con barras de 10 y los elementos sueltos con unidades. Realizando el recuento final de uno en uno, se distinguen dos modalidades, una en la que los niños han puesto un representante por grupo (A27-JT19), y otra en la que no se pone representante de grupo (A25-JT19).

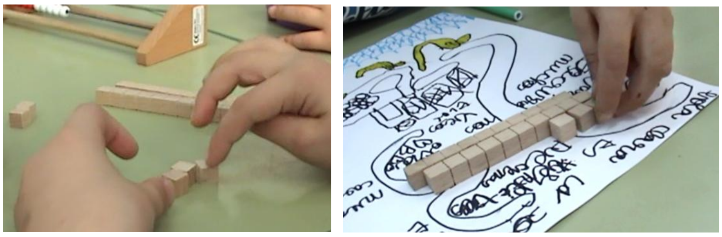


Figura 4.5. Representaciones de A27-JT19 y A25-JT19

Las modalidades con bloques de base 10 que acabo de describir, permiten realizar el conteo de la cantidad final de 10 en 10 señalando los barras, y de uno en uno las unidades que quedan sueltas. Esta modalidad la he denominado A29-JT26.

Hay un caso excepcional que consiste en representar un único grupo que se cuenta reiteradamente. El niño que realiza esta modalidad de agrupamiento utiliza un cartón de decena de huevos, contando los huecos tantas veces como grupos de 10 indica el problema, y contando de uno en uno tantos huecos como elementos sueltos hay (A30-JT29). Con este caso termino de describir las modalidades de uso de agrupamiento-juntar todo.

Un niño muestra las dos manos por cada grupo de 10 contando de 10 en 10 cada vez, llegando a la década resultado de la primera etapa y la combina con los elementos sueltos de la segunda etapa, utilizando la estrategia inventada combinar decenas y unidades. Este procedimiento es una modalidad de uso de a*grupamiento-estrategia inventada* que he denotado como A24-EI2.

La estrategia *conteo a saltos-conteo a partir del primero* consiste en contar de 10 en 10 tantas veces como grupos de 10 indica el problema y después, contar a partir de la década resultado de la primera etapa tantas unidades como marcan los elementos sueltos.

Como *estrategia inventada* en las dos etapas se ha identificado la utilizar la modalidad de sumar 10 a una década (EI1) en la primera etapa y después, en la segunda etapa, combinar decenas y unidades (EI2).

Tabla 4.8. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades de problemas de multiplicación con agrupamientos de 10*

Primera etapa			Segunda etapa			
Es	Modalidad de uso		Es	Modalidad de uso		Fr.
A	A1	Cubos encajables, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	JT	JT13	Cubos encajables, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	8
	A20	Objetos, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1		JT15	Objetos, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	2
	A23	Dibujos, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1		JT18	Dibujos, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	2
	A3	Marcas, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1		JT17	Marcas, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	3
	A7	Cubos encajables, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1		JT13	Cubos encajables, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	2
	A9	Dibujos, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1		JT18	Dibujos, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	5
	A10	Marcas, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1		JT17	Marcas, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	11
	A10	Marcas, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1		R7-JT6	Marcas, reparto-juntar todos, cantidades separadas, conteo 1-1	1
	A2	Cubos encajables, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1		JT1	Cubos encajables, cantidades separadas, conteo 1-1	1
	A22	Objetos, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1		JT3	Objetos, cantidades separadas, conteo de 1-1	1
	A28	Marcas, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1		JT6	Marcas, cantidades separadas, conteo de 1-1	1
	A25	Base 10, conteo 1-1		JT19	Base 10, conteo 1-1	2
	A27	Base 10, con representante grupo, conteo 1-1		JT19	Base 10, conteo 1-1	1
	A30	Una huevera, conteo reiterado 1-1		JT29	Una huevera, conteo a partir del primero	1
	A19	Cubos encajables, sin representante grupo, grupos separados, conteo 10-10		JT14	Cubos encajables, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 10-10	1
	A21	Objetos, sin representante grupo, grupos separados, conteo 10-10		JT16	Objetos, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 10-10	1
	A26	Marcas, con representante grupo, grupos separados, conteo 10-10		JT20	Marcas, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo 10-10	3
	A29	Base 10, conteo 10-10		JT26	Base 10, conteo 10-10	1
	A24	Configuración dedos	EI	EI2	Combinar decenas y unidades	2
CS	CS1	Conteo a saltos de 10-10	C	CP1	Contar a partir del primero	2
EI	EI1	Sumar un múltiplo de 10 a una década	EI	EI2	Combinar decenas y unidades	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	JT	JT27	Marcas, cantidades separadas, conteo a partir del primero	1
				JT28	Marcas, con grupos de 10, cantidades separadas, conteo a partir del primero	1
				JT23	Base 10, segundo sumando unidades, conteo a partir del primero	2
			C	CP1	Contar a partir del primero	3
			EI	EI2	Combinar decenas y unidades	2
			AL	AL1	Algoritmo de la suma	1
	VP3	Posición; decenas como grupos de 10 y unidades, como objetos sueltos				4

En la primera etapa he observado dos modalidades de uso de *valor posicional*. Una de ellas es reconocer que un número de grupos de 10 o decenas se corresponden con una década (VP2), que se combina con varias modalidades de juntar todo. Se puede representar la cantidad de la década resultado del problema de grupos iguales en una colección de marcas sin agrupar en decenas (JT27), o agrupando en decenas (JT28) (ver Figura 4.6), o con bloques de base 10

(JT23), y en todas ellas se cuenta a partir del primer sumando. También se combina con contar a partir del primero (CP1), combinar decenas y unidades (EI2), incluso con el algoritmo de la suma (AL1).

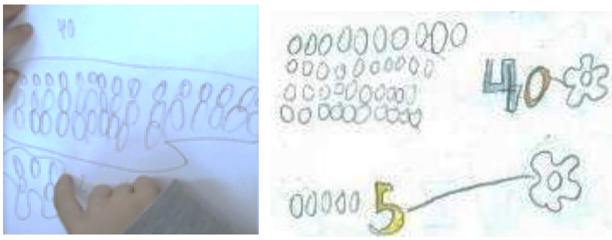


Figura 4.6. Representaciones para VP2-JT27 y VP2-JT28

La estrategia valor posicional en su modalidad VP3 consiste en identificar que una cantidad organizada en grupos de 10 y unidades sueltas, se representa con un número de dos cifras cuya posición de las decenas son el número de grupos de 10, y la posición de las unidades, los elementos sueltos.

Las estrategias observadas con sus modalidades han sido analizadas, desglosándolas en capacidades necesarias para su realización. En el último apartado de cada sesión en el Anexo 1, voy identificando a lo largo del taller las capacidades necesarias para la ejecución de las distintas estrategias. En la Figura 4.7 muestro la secuencia de capacidades identificadas para realizar la estrategia con más frecuencia en este tipo de problema, la modalidad A10-JT17. Además detallo los errores que se han observado al ejecutarla.

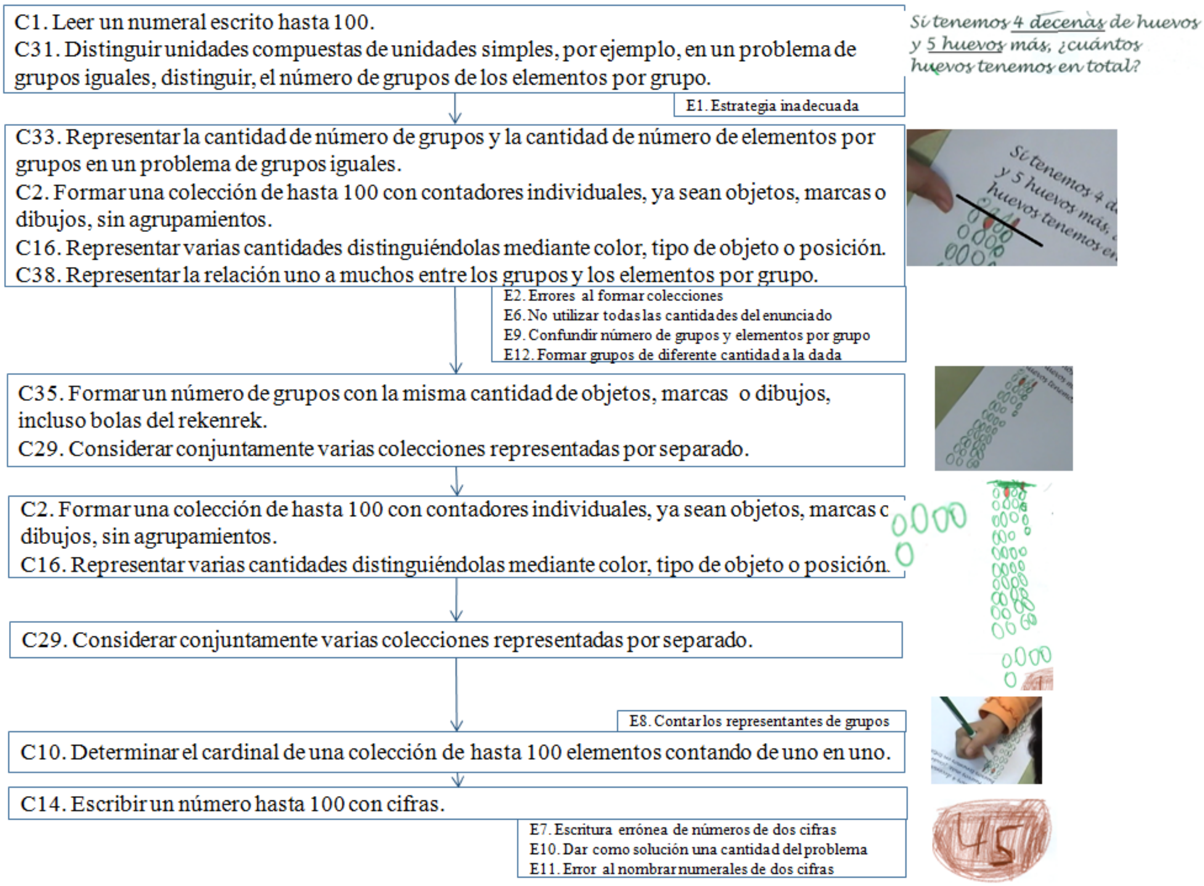


Figura 4.7. Secuencia de capacidades para la estrategia A10-JT17

Con cada una de las estrategias observadas realizo el mismo proceso de descomposición en capacidades. El grafo de los caminos de aprendizaje de este tipo de problemas, que recoge todas las secuencias de capacidades necesarias para las modalidades de estrategias recogidas se muestra en la Figura 4.8. La línea en color negro más gruesa corresponde a la estrategia que acabo de desglosar.

En el Anexo 8 hay un listado de capacidades clasificadas por expectativas de aprendizaje y otro listado ordenado por el código. Para el ver el proceso de cómo he ido generando todas las capacidades y los grafos de los caminos de aprendizaje de los problemas, se puede consultar el Anexo 1, los apartados de dificultades y errores y caminos de aprendizaje de la tarea de todas las sesiones.

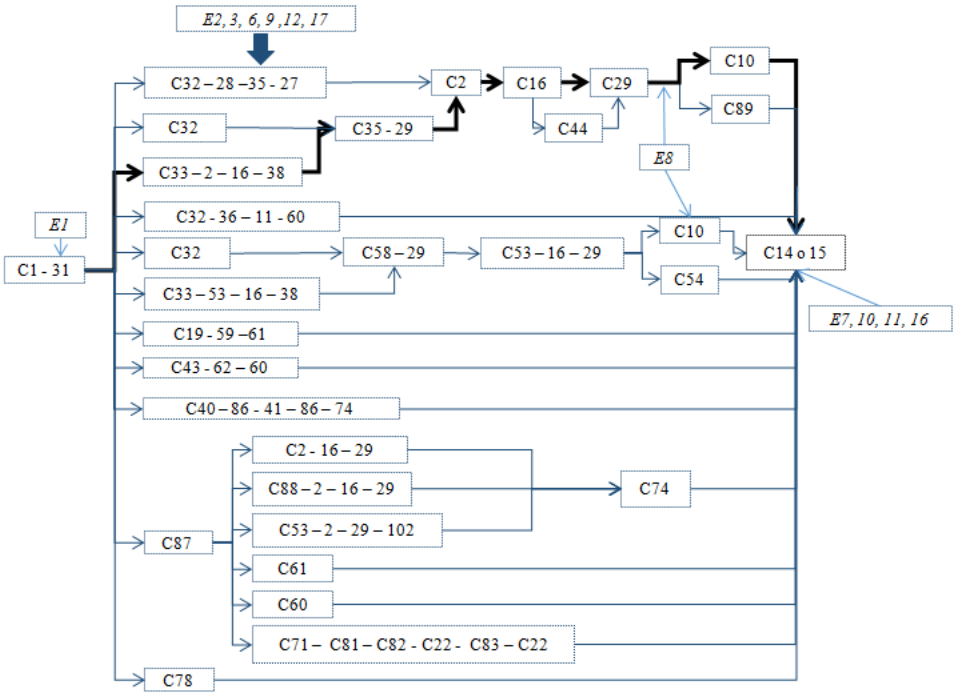


Figura 4.8. Caminos de aprendizaje para problemas grupos iguales agrupamientos 10

4.1.1.2. Evolución de las estrategias

La evolución de las estrategias de los niños al resolver problemas de este tipo, siguiendo los estudios previos, se refleja en la agrupación de las cantidades en grupos de 10, y el recuento final de éstas, ya sea con conteo de uno en uno o de 10 en 10. Por lo tanto, voy a agrupar las estrategias por la forma de representar los grupos de 10 y la forma de contarlos, y así podré describir el desarrollo del conocimiento sobre el agrupamiento de 10.

En el taller, los materiales proporcionados a los alumnos para construir sus representaciones, son puestos a disposición de los alumnos para su libre elección, por lo que ellos mismos diseñan las representaciones de las cantidades. Los cubos encajables u otros objetos permiten representar las cantidades de forma *unitaria*, o separando decenas y unidades. El conteo de estos grupos de uno en uno, o de 10 en 10, es indicador de la evolución en la adquisición del valor posicional (Carpenter, Franke, y otros, 1997). Los bloques de base 10 y las hueveras tienen estructura de grupos de 10 y pueden ser elegidos por los niños para representar las cantidades, e igualmente, se puede realizar el recuento total contando de uno en uno, o de 10 en 10. Señalar que en estos problemas también disponían de la Tabla 100, pero ninguno de los niños llegó a utilizarla espontáneamente.

Partiendo de estas consideraciones del marco teórico, y los materiales puestos a disposición de los niños, voy a agrupar las estrategias de modelización directa según la representación de las cantidades sin grupos de 10, con grupos de 10, con base 10 o huevera, y su forma de conteo, ya sea de uno en uno, o de 10 en 10. Comenzando por la primera etapa de estos problemas que consiste en un problema de grupos iguales de multiplicación con grupos de 10, las estrategias quedan agrupadas según la Tabla 4.9. Las estrategias que no son de modelización directa, simplemente detallo si son estrategias de conteo, estrategias inventadas o basadas en el valor posicional.

Tabla 4.9. *Agrupación de estrategias observadas en la primera etapa de las sesiones 7 y 12 por representación y conteo*

Representación / Conteo	Estrategias
Modelización directa sin grupos 10 - Conteo 1 en 1	A2, A22, A28
Modelización directa con grupos 10 - Conteo 1 en 1	A1, A3, A7, A9, A10, A20, A23
Modelización directa con base 10 - Conteo 1 en 1	A25, A27
Modelización directa en grupos 10 - Conteo 10 en 10	A19, A21, A24, A26
Modelización directa con base 10 - Conteo 10 en 10	A29
Modelización directa en hueveras - Conteo 1 en 1	A30
Conteo	CS1
Estrategia inventada	EI1
Valor posicional	VP2, VP3

Las estrategias de *modelización directa sin grupos de 10, contando de uno en uno*, consisten en representar los grupos de 10 acumulando objetos o marcas en una única colección, donde el único conteo posible es de uno en uno. Las estrategias de *modelización directa con grupos de 10, contando de uno en uno*, mantienen los grupos de 10 separados y se cuentan de uno en uno todos los objetos o marcas. Las estrategias de *modelización directa con bloques de base 10, contando de uno en uno*, o *modelización directa con hueveras, contando de uno en uno*, suponen representar las cantidades del problema con materiales con estructura decimal, y realizar el conteo del total de unidades de uno en uno. Las estrategias con grupos de 10, bloques de base 10 o hueveras permiten el conteo de 10 en 10 de los grupos (*modelización directa con grupos de 10 o base, contando de 10 en 10*).

En la gráfica de la Figura 4.9 se puede observar que, en la sesión 7, las estrategias de modelización directa son las más utilizadas por los niños. En concreto, las estrategias donde las cantidades quedan representadas en grupos de 10 y el recuento final se hace de uno en uno, son las más frecuentes en esta sesión. Los bloques de base 10 son utilizados por solo tres niños, y señalar que los cartones de decenas de huevos todavía no se habían traído al aula. Se da un caso de *conteo* y otro de *estrategia inventada*. En la sesión 12, la estrategia más utilizada en esta etapa es el *valor posicional*, seguida de la modelización directa con representaciones con grupos de 10 y conteo de uno en uno. Como se puede observar la frecuencia absoluta del uso de estrategias basadas en el valor posicional ha aumentado de la sesión 7 a las sesión 12.

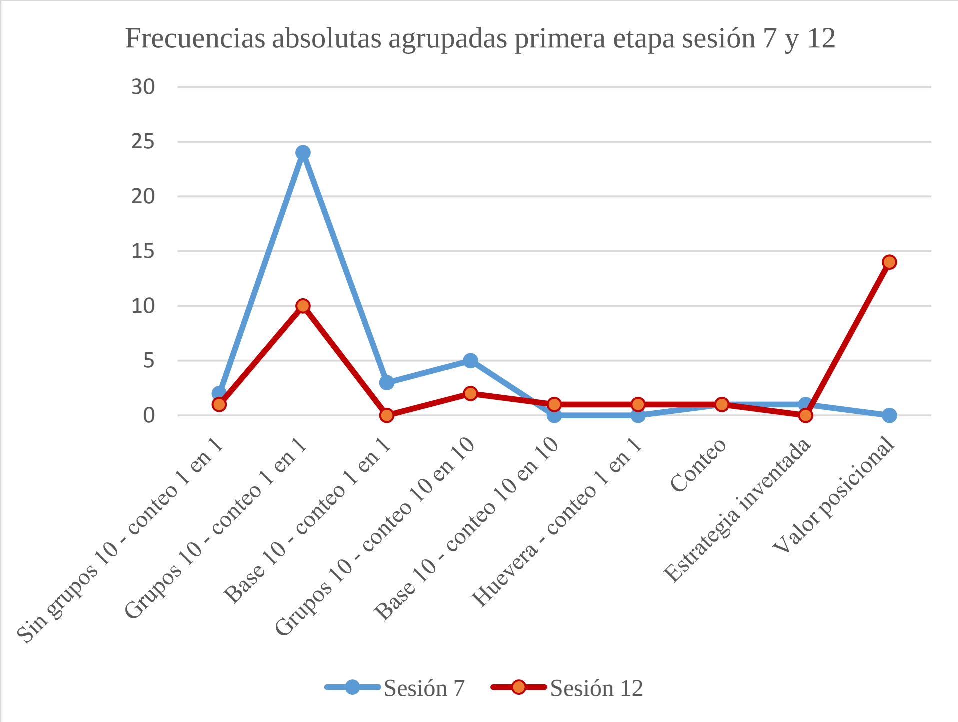


Figura 4.9. Evolución de estrategias de la primera etapa de la sesión 7 a la sesión 12

La segunda etapa de estos problemas consiste en una combinación con total desconocido, por lo que las estrategias observadas son aditivas. Igual que en el caso anterior, agrupo las estrategias de *modelización directa* por la representación de las cantidades de dos cifras en grupos de 10 y su conteo. En este tipo de problemas, la representación de la primera etapa influye en la segunda etapa, ya que si en la primera se han acumulado los grupos de 10 en una única colección, en la segunda etapa no habrá posibilidad de conteo de 10 en 10. Si, por el contrario, se han dejado los grupos de 10 separados, en la segunda etapa pueden mantenerse o acumularse. Solo hay un caso en el que, en la primera etapa, se construyen grupos de 10, y en la segunda etapa se pierden al repartir la cantidad del segundo sumando en los grupos de 10 iniciales para su recuento final (estrategia R7-JT6).

En esta segunda etapa, se han observado estrategias donde se representan los dos sumandos del problema, ya sea sin agrupar las decenas, con grupos de 10, con base 10 o incluso con los cartones de decena de huevos, y luego realizan un conteo a partir del primero. Al resolver inicialmente la primera etapa, recuerdan el resultado de ésta, y en la segunda etapa representan los dos sumandos, señalando la representación del primero a la vez que enuncian la cantidad que representa, y a continuación, cuentan de uno en uno a partir de este sumando la representación del segundo.

En la Tabla 4.10 se puede observar la agrupación de las estrategias de la segunda etapa. Además de las estrategias de modelización directa, se contempla estrategias de conteo, estrategias inventadas, algoritmo y valor posicional.

En la siguiente Figura 4.10, muestro las frecuencias absolutas de las estrategias agrupadas por modelización directa con unidades sueltas, con bloques de base 10, estrategias de conteo y valor posicional, indicando en su caso, si el recuento de las cantidades se hace de uno en uno, de 10 en 10, o a partir del primero (ver Anexo 7 la tabla de frecuencias de todas las sesiones). En la sesión 12 baja el uso de estrategias de modelización directa y aumenta el uso de estrategias más avanzadas como el conteo, el uso del valor posicional y levemente el uso de algoritmos con respecto a la sesión 7.

Tabla 4.10. *Agrupación de estrategias observadas en la segunda etapa de las sesiones 7 y 12 por representación y conteo*

Representación - Conteo	Estrategias
Modelización directa sin grupos 10 - Conteo 1 en 1	JT1, JT3, JT6, R7JT6
Modelización directa con grupos 10 - Conteo 1 en 1	JT13, JT15, JT17, JT18
Modelización directa con Base 10 - Conteo 1 en 1	JT19
Modelización directa con grupos 10 - Conteo 10 en 10	JT14, JT16, JT20
Modelización directa con Base 10 - Conteo 10 en 10	JT26
Modelización directa sin grupos 10 - Conteo a partir 1º	JT27
Modelización directa con grupos 10 – Conteo a partir 1º	JT28
Modelización directa con Base 10 - Conteo a partir 1º	JT23
Modelización directa en hueveras - Conteo a partir 1º	JT29
Conteo	CP1
Estrategia inventada	EI2
Algoritmo	AL1
Valor posicional	VP3

En esta etapa, la modelización directa con representaciones con grupos de 10 y conteo de uno en uno, es el tipo de estrategia más utilizada en las dos sesiones, siendo mayor en la sesión 7. El uso de bloques de base 10 es muy poco frecuente, utilizándose en la sesión 7 con recuento de uno en uno, y en la sesión 12 con recuento de 10 en 10. Las estrategias en las que se representan los dos sumandos y se cuenta a partir del primero se observan solo en la sesión 12.

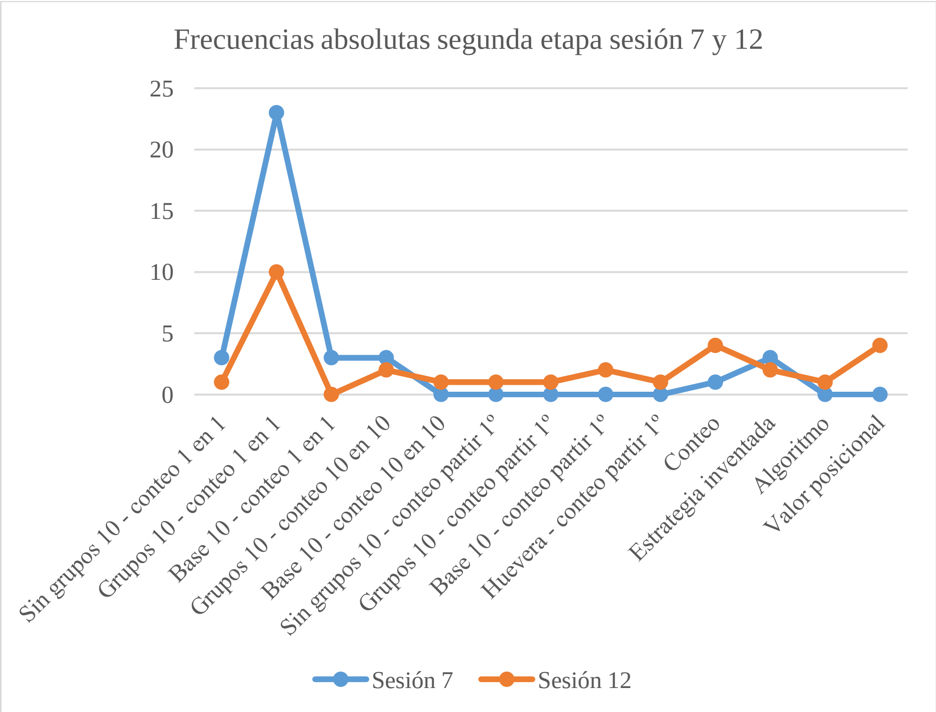


Figura 4.10. Evolución por la agrupación de estrategias de la segunda etapa de la sesión 7 a sesión 12

Con el fin de comparar con los resultados de los estudios previos desde la CGI, he añadido en la tabla del Anexo 7 las estrategias utilizadas en las sesiones 7 y 12. En el gráfico de la Figura 4.11 se puede observar que las estrategias hacia la izquierda son de modelización directa y hacia a la derecha de conteo, basadas en valor posicional y algoritmo, estrategias más avanzadas según la CGI. Se puede observar la evolución de los tipos de estrategia, las estrategias de modelización directa disminuyen y las estrategias de conteo con y sin objetos, de uso de valor posicional, estrategias inventadas y algoritmos aumentan levemente.

Las estrategias utilizadas en la sesión 7, en color azul, se ven situadas hacia la izquierda del gráfico, y las estrategias utilizadas en la sesión 12, en color naranja, predominan más hacia la derecha del gráfico. Se debe destacar que, aunque la frecuencia de las estrategias de modelización directa desciende de la sesión 7 a la 12, su uso en la última sesión es todavía considerable. La estrategia de modelización con bloques de base 10, contando de uno en uno (A25-JT19) se da en la sesión 7, y contando de 10 en 10 (A29-JT26), se utiliza en la sesión 12, siendo coherente según la CGI.

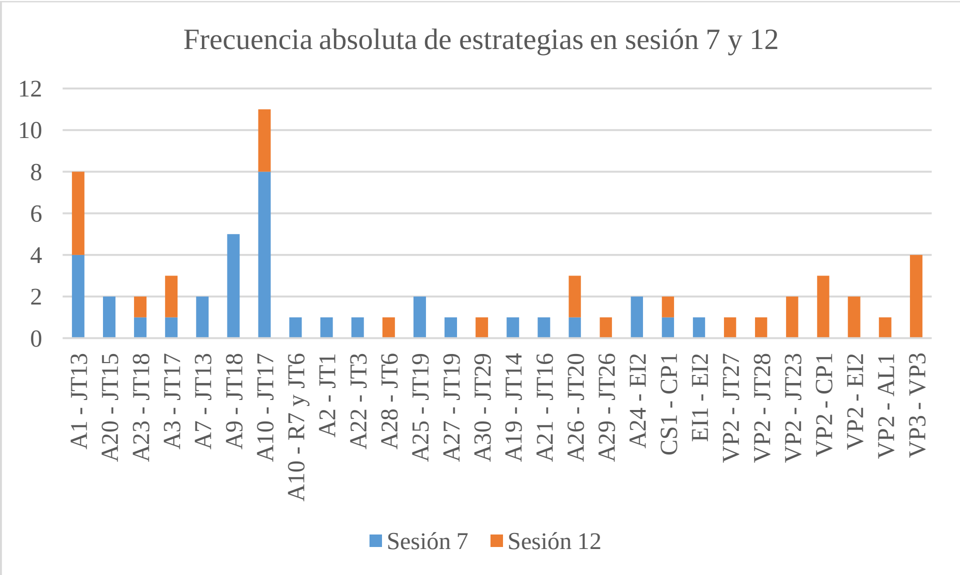


Figura 4.11. Evolución de las variantes observadas de la sesión 7 y la sesión 12

Para terminar de ver la evolución de las estrategias de este tipo de problema, realizo el mismo agrupamiento que he considerado en las dos etapas por separado, con las combinaciones de ambas observadas en el taller al resolver los problemas de la sesión 7 y 12. Las modalidades de aplicación de las estrategias analizadas quedan agrupadas según la Tabla 4.11. En el caso de solo poner un tipo de estrategia, es que las dos etapas coinciden; si indico dos tipos de estrategias separadas con un guion, la primera corresponde a la primera etapa y el segundo tipo, a la segunda. En el primer tipo de estrategias, los grupos de 10 se añaden a una única colección, al igual que las unidades sueltas, por lo que la única forma de contarlo es de uno en uno (modelización directa sin grupos de 10, conteo 1 en 1). El segundo tipo de estrategia consiste en representar las cantidades con grupos de 10 con contadores individuales y hacer el recuento de 1 en 1 (modelización directa con grupos de 10, conteo 1 en 1). En el tercer grupo de estrategias se utiliza los bloques de base 10, y el recuento de 1 en 1 (modelización con base 10, conteo de 1 en 1). En el cuarto tipo, aunque en la primera etapa se representa con grupos de 10, en la segunda etapa se reparte una cantidad entre los dos grupos, por lo que los grupos de 10 desaparecen, y el conteo se hace de uno en uno. El quinto tipo, se representan las cantidades con grupos de 10, y se cuentan de 10 en 10, haciéndolo de uno en uno para las unidades sueltas (modelización directa con grupos de 10, conteo 10 en 10). Para mantener el orden en el que han aparecido las estrategias, el siguiente grupo consiste en contar a saltos de

10 en 10 en la primera etapa, y *a partir del primero*, en la segunda etapa. El siguiente grupo consiste en la modelización con bloques base 10, conteo de 10 en 10. La modelización con hueveras se ha utilizado en la primera etapa contando de uno en uno, y para la segunda etapa, se cuenta a partir del primero. Un tipo de estrategia intermedio, que no aparece en estudios previos es la identificación de la década de un número de decenas en la primera etapa, por ejemplo, “4 decenas, son 40”, cantidad que se representa junto con el segundo sumando, y una vez representados los dos sumando, se realiza el conteo a partir del primero (*valor posicional – modelización directa contando desde el primero*).

Si en la primera etapa indico estrategia inventada, se refiere a la estrategia EI1 que consiste sumar 10 o un múltiplo de 10 a una década. Si en la segunda etapa en ambos casos, se puede dar la estrategia inventada EI2, en la que se combinan las decenas y las unidades por separado.

La estrategia más avanzada es utilizar valor posicional en las dos etapas, simplemente identificado que los grupos de 10 son la posición de las decenas, y la cantidad menor que 10, la posición de las unidades, de un número de dos cifras.

Tabla 4.11. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones 7 y 12 por representación y conteo*

Tipo de estrategia, agrupamientos en la representación y conteo	**Estrategias observadas**
Modelización directa sin grupos de 10, conteo 1 en 1	A2 - JT1; A22 - JT3; A28 - JT6
Modelización directa con grupos de 10, conteo 1 en 1	A1 - JT13; A20 - JT15; A23 - JT18; A3 - JT17; A7 - JT13; A9 - JT18; A10 - JT17
Modelización con base 10, conteo de 1 en 1	A25 - JT19; A27 - JT19
Modelización directa con grupos 10 y conteo de 1 en 1 – Modelización directa (reparto y combinación) sin grupos 10 y conteo 1 en 1	A10 - R7 y JT6
Modelización directa con grupos de 10, conteo 10 en 10	A19 - JT14; A21 - JT16; A26 - JT20; A24 - EI2
Conteo a saltos/partir del primero	CS1 - CP1
Modelización directa con base 10, conteo 10 en 10	A29 - JT26
Modelización huevera, conteo partir primero	A30 - JT29
Valor Posicional - Modelización directa sin grupos de 10, conteo partir primero	VP2 - JT27
Valor Posicional - Modelización directa con grupos de 10, conteo partir primero	VP2 - JT28
Valor Posicional - Modelización directa base 10, conteo partir primero	VP2 - JT23
Valor posicional - Conteo partir primero	VP2 - CP1
Estrategia inventada	EI1 - EI2; VP2 - EI2
Valor posicional - Algoritmo	VP2 - AL1
Valor posicional	VP3 - VP3

En la Figura 4.12, se pueden observar las frecuencias de cada agrupación en ambas sesiones. La estrategia más utilizada en ambas es la modelización directa con grupos de 10 contando de uno en uno, siendo más alta la frecuencia absoluta en la sesión 7 que en la sesión 12. En la sesión 7, las estrategias de modelización directa con contadores individuales, ya sea con grupos de 10 o sin ellos, como con base 10, realizando el conteo de uno en uno son las más frecuentes. Hay cuatro casos que los grupos se cuentan de 10 en 10. Además, hay una estrategia de conteo a saltos y a partir del primero, y dos estrategias inventadas. En la sesión 12, hay menos uso de las estrategias de modelización directa con conteo de uno en uno, y aparecen la modelización con bloques de base 10 contando de 10 en 10, así como utilizar el valor posicional para la primera etapa y utilizar una variedad de estrategias como contar a partir del primer sumando en la segunda etapa, que indica que los niños ya han adquirido un significado cardinal de los numerales (Fuson, 1992). La frecuencia de las estrategias inventadas se mantiene de una sesión a otra. Sin embargo, en la sesión 12 aparece el uso del algoritmo de la suma, y el valor posicional.

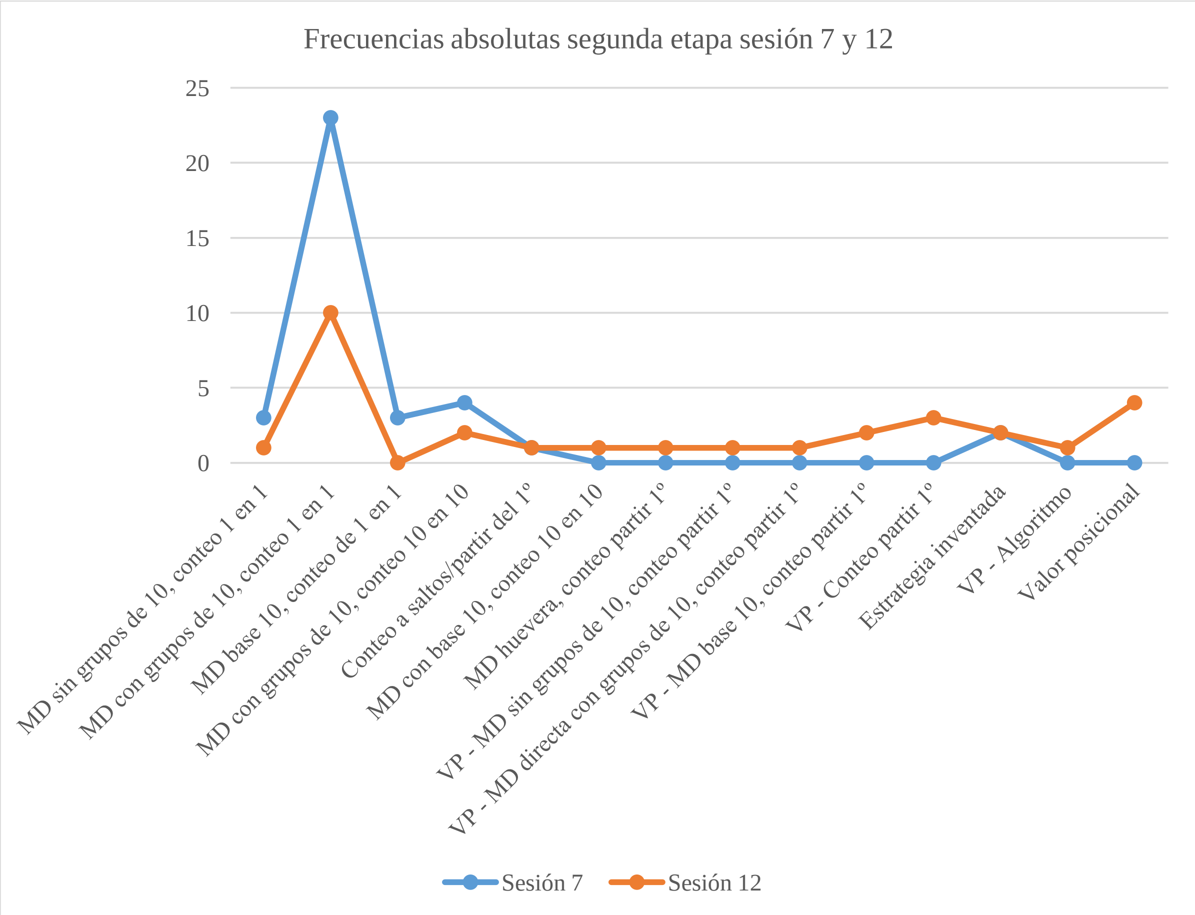


Figura 4.12. Evolución por la agrupación de las dos etapas de la sesión 7 y la sesión 12

En la Figura 4.12 se puede ver como la línea poligonal de la sesión 7, en azul, tienen más frecuencia en las estrategias de la izquierda que abarcan las estrategias de modelización directa contando de uno en uno, en su mayoría, y la línea poligonal naranja de la sesión 12, en esta zona está por debajo. Según se avanza hacia la derecha del gráfico, la línea poligonal de la sesión 12 se eleva levemente por encima de la línea poligonal de la sesión 7, donde las estrategias son más avanzadas, según el marco teórico de la CGI.

4.1.1.3. Trayectorias de aprendizaje

La evolución de las estrategias en estas dos sesiones, me permite comparar el progreso de las estrategias observadas con la trayectoria de aprendizaje-enseñanza del valor posicional a través de la resolución de este tipo de problemas deducida de los estudios previos en la Figura 2.22, basada en los trabajos de la CGI.

El *camino de enseñanza* en este trabajo se basa en el planteamiento de problemas de estructura multiplicativa con grupos iguales de 10, cantidad que se puede dar en el enunciado con grupos de 10 o "decenas" de elementos, combinándolo con una cantidad menor que 10. En los estudios previos, los niños utilizan disponen de barras construidas con cubos encajables (Carpenter, Fennema y otros, 1999). Carpenter, Franke y otros (1997) utilizan estos problemas mostrando las cantidades con bloques de base 10 para evaluar el conocimiento sobre el valor posicional. En el taller de este trabajo, a diferencia de los estudios previos, los niños pueden elegir el material que ellos quieran, tanto contadores individuales, como bloques de base 10 y cartones de decenas de huevos (en la sesión 12), incluso Tabla 100. La variedad de estrategias por lo tanto, ha aumentado, por el uso de distintos materiales, y el análisis más profundo de las dos etapas que componen estos problemas.

En la Figura 4.13 se puede observar el *camino de aprendizaje* basado en las estrategias observadas en estas dos sesiones, y partiendo de los estudios previos. Los *caminos de aprendizaje para cada tipo de problema*, realizados en el Anexo 1 en cada sesión para desglosar cada estrategia en una secuencia de capacidades, tal como hacen González y Gómez (2015), me permiten detallar las capacidades necesarias para cada nivel de desarrollo del conocimiento. Estas capacidades están marcadas en los cuadros de fondo gris.

Las estrategias que corresponden al primer nivel de modelización sin grupos de 10, contando de uno en no se desglosan en capacidades como: identificar dos cantidades de distinto orden, grupos y elementos en cada grupos (C31); no poner un representante del grupo (C32) ni distinguir por color, posición o forma varias colecciones representadas (C28); formar varios grupos con el mismo número de marcas, objetos o cubos encajables (C35) y añadirlos a una única colección (C27); representar una colección de hasta 100 objetos (C2) diferenciada de la anterior (C16); considerarlo todo junto (C29) y hacer el recuento de uno en uno (C10).

Del primer grupo al segundo grupo, los niños no juntan en única colección los grupos de 10 (C38) para considerarlos todos juntos (C29). Hay niños que eligen las hueveras y las barras de base 10 para representar los grupos de 10 (C86 y C58) y las unidades de base 10 para las unidades sueltas (C53). En este nivel, hay niños que ponen un representante por cada grupo (C33).

El siguiente grupo de estrategias necesita la capacidad de determinar el cardinal de una colección distribuida en grupos de 10 elementos, contando de 10 en 10 los grupos de 10 o barras de base 10 (C89, C54). En la trayectoria de aprendizaje separo la modelización con cartones de decenas de huevos porque ser un material propio de este trabajo.

También se ha observado la modalidad de agrupamiento en la que un solo se representa un grupo (C40) con cartones de decenas de huevos (C86) y se cuenta reiteradamente (C41). Una vez resuelta la primera etapa se utiliza contar a partir del primero para la segunda etapa (C74).

Las estrategias en la que se representan las cantidades con bloques de base 10 y se reconoce la cantidad representada identificando el número de barras con la posición de las decenas y las unidades sueltas con la posición de las unidades de un número de dos cifras, se ha denotado como reconocer la cantidad usando el valor posicional (C102).

La estrategia *conteo a saltos*, necesita realizar un conteo a saltos de 10 en 10 mientras se lleva el rastro mentalmente o con los dedos, de la cantidad de grupos que van contando (C59) y lo mismo, contando de uno en uno (C61). Además, se necesita formar una colección simplemente enunciando su cardinal (C19).

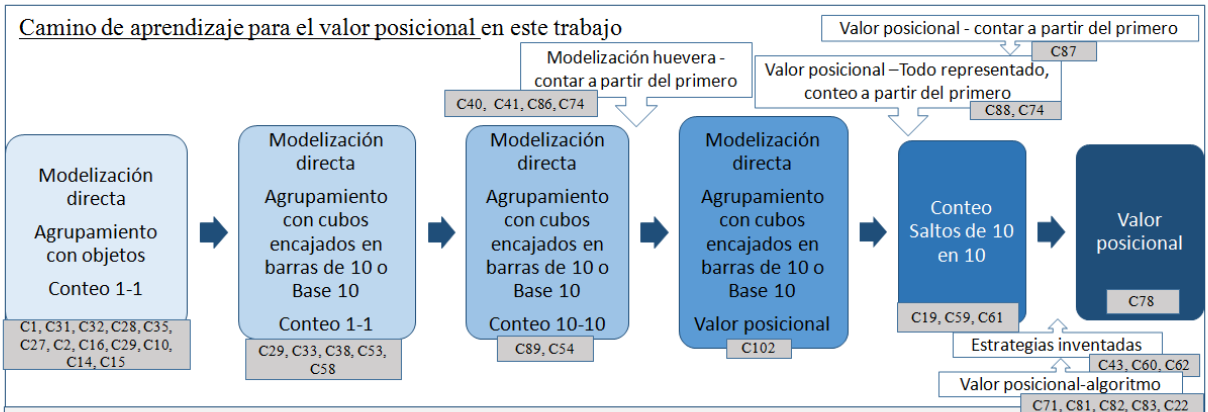
Respecto al *camino de aprendizaje* del marco teórico de referencia, se han observado modalidades de aplicación de estrategias en las que la primera etapa se reconoce la década a la que corresponde el número de grupos (C87), y a continuación, se utiliza modelización directa de la etapa de combinación con cantidades representadas con agrupamientos de 10 (C88) o con base 10 (C53). Una vez representados los dos sumandos, se enuncia la cantidad del resultado de la primera etapa y se cuenta a partir del primero con objetos (C74).

Otra estrategia observada es utilizar el valor posicional reconociendo la década que corresponden al número de grupos de 10 y contar a partir del primero que necesita simplemente las capacidades C87 y C74. También ha habido niños que tras reconocer el resultado de la primera etapa con el uso del valor posicional, han terminado la segunda etapa realizando el algoritmo de la suma (C71, C81, C82, C83, C22).

Para las estrategias inventadas utilizadas, se necesitan capacidad de entender la etapa de grupos iguales como suma reiterada, 10 a una década y combinar una década y unidades para obtener un número de dos cifras (C43, C60, C62).

El *uso de valor posicional* sin material necesita de la capacidad C78, donde se identifica grupos de 10 con la posición de las decenas y objetos sueltos con la posición de las unidades.

Para ver las capacidades necesarias en cada etapa, en el Anexo 8 se encuentra el listado de las capacidades observadas en todas las sesiones.



Camino de enseñanza para el valor posicional para este trabajo:

- Tarea: Problema de dos etapas con una primera etapa de grupos iguales (con grupos de 10 o "decenas"), y segunda etapa, combinación del resultado anterior con una cantidad menor que 10
- Materiales: Elección libre de materiales: cubos encajables, contadores individuales, bloques de base 10, hueveras y Tabla 100

Figura 4.13. Trayectoria de aprendizaje para el valor posicional en este trabajo de las sesiones 7 y 12

La frecuencia absoluta de cada uno de los niveles reflejados se puede deducir de la Figura anterior 4.12. Las estrategias más frecuentes han sido las correspondientes al segundo nivel de modelización directa con grupos de 10 o barras de base 10 realizando el conteo de uno en uno.

4.1.2. Problemas de división medida con resto

Los problemas de grupos iguales de división medida con agrupamientos de 10 y resto han sido planteados en la sesiones 8, 8b, 11 y 15.

Tabla 4.12. *Problemas de división medida con agrupamientos de 10*

Sesión	*Problema*
8	Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y Cuántos patitos quedan sin guardar?
8b	Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?
11	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran?
15	Cuando había 45 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?

Al igual que la sesión anterior, en el Anexo 1 describo detalladamente el desarrollo de estas sesiones.

4.1.2.1. Análisis de estrategias

Las estrategias que se han observado al resolver los problemas de división medida con resto son estrategias de *medida* (M), *conteo a saltos* (CS) y *uso de valor posicional* (VP). Según indican los estudios previos, la estrategia de medida consiste básicamente en hacer grupos de 10 con el total de elementos, y para saber la solución, se cuentan el número de grupos por un lado, y el número de elementos sueltos por otro. El conteo a saltos consiste en contar de 10 en 10 hasta la década del total de elementos llevando el rastro de los numerales enunciados, que nos indicará el número de grupos que hay, y las unidades restantes serán el resto. El uso de valor posicional en estos problemas es simplemente identificar que la posición de las decenas son los grupos de 10, y la posición de las unidades son los elementos sueltos.

La estrategia de modelización directa de medida ha sido la más utilizada en estas sesiones. El uso de diferentes materiales y la forma de la agrupación permite describir modalidades de uso creadas por los niños. Una manera de ejecutarla es formando primero la colección total de elementos, y después se distribuye en grupos de 10 hasta agotarla. Por último, se cuenta el número de grupos que han surgido y los elementos sueltos que quedan. Esta modalidad se ha utilizado con marcas (M1), con objetos (M3) y con cubos encajables (M4). En la Figura 4.14 una niña forma primero una barra con la cantidad total de elementos y a continuación, va retirando grupos de 10 hasta agotarla.

Figura 4.14. Modalidad de uso de medida M4

Una forma de agrupar representaciones gráficas (marcas, M5, o dibujos, M6) se realiza uniendo con líneas cada elemento a un representante de grupo. Los grupos se van representando según se van completando. En la Figura 4.15 se puede observar cómo se relaciona 10 patitos con cada una de las cajas. Puede ser normal confundirse luego en el conteo de los que quedan sin meter en cajas.

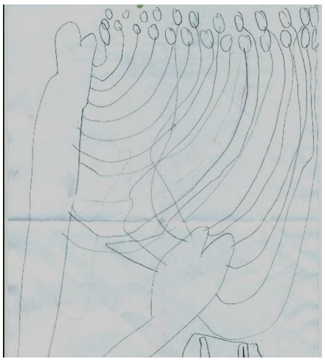


Figura 4.15. Representación de M5

Otra forma de realizar la estrategia de medida es ir añadiendo grupos de 10 hasta completar el total de elementos. La solución se consigue contando el número de grupos construidos por un lado, y el número de elementos que no han completado un grupo de 10 por otro. Las modalidades aumentan prestando atención al material, con marcas (M2), con dibujos (M7) y con cubos encajables (M17). Hubo niños que además iban añadiendo un representante por cada grupo que formaban, utilizando objetos (M9). En la Figura 4.16, la imagen de la izquierda muestra la representación de la modalidad M5 donde un niño va formando grupos de 10, hasta que completa la cantidad de 34. En la imagen de la derecha, el niño va formando una figura de 4 cubos encajables por cada grupo de 10 objetos que consigue.

Figura 4.16. Representaciones de M5 y M9

Resolver el problema con la Tabla 100 genera una nueva modalidad de uso de la estrategia de medida (M10). Se identifica en la Tabla 100 el numeral que representa la cantidad total de elementos. Se cuenta el número de filas completas hasta dicho numeral, que serán los grupos de 10. Los numerales que queden hasta el total de elementos serán el resto.

Figura 4.17. Estrategia M10

La utilización de los bloques de base 10 hace aparecer una nueva forma de la estrategia de medida (M11), que consiste en representar la cantidad total de elementos con barras para las decenas y unidades sueltas. Después se identifica el número de barras con el número de grupos y las unidades sueltas con el resto. En el problema de la sesión 11 donde el contexto habla de cajas de huevos, los niños utilizan las hueveras (cartones de decenas de huevos) y relacionan cada barra de 10 con una huevera entera (M13).

La mayoría de los niños hallaban la solución contando el número de grupos formados y las unidades sueltas. En tres casos los niños han decidido incluir un grupo más para tener todos los elementos en grupos, aun sabiendo que un grupo no quedaba completo. Estas modalidades de uso se han dado con marcas (M8) y con bloques de base 10 (M12).

Tabla 4.13. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades de problemas de división medida con agrupamientos de 10*

Estrategia	*Modalidades*		*Fr.*
	M1	Marcas, total primero, agrupando después	40
	M2	Marcas, agrupando hasta conseguir total	17
	M3	Objetos, total primero, agrupando después	13
	M4	Cubos encajables, total primero, agrupando después	22
	M5	Marcas, total primero, unir a representante de grupo tantos elementos por hasta agotar total.	1
	M6	Dibujos, total primero, unir a representante de grupo tantos elementos por hasta agotar total.	1
	M7	Dibujos, agrupando hasta conseguir total	1
Medida	M8	Marcas, agrupando hasta conseguir total, proponiendo un grupo más no completo	2
	M9	Objetos, agrupando hasta conseguir total, poniendo un representante de grupo	3
	M10	Medida con Tabla 100	1
	M11	Base 10, identificando las barras con los grupos y los cubitos sueltos como el resto	3
	M12	Base 10, identificando las barras con los grupos, proponiendo un grupo más no completo	1
	M13	Base 10, apoyando cada barra en una huevera.	1
	M17	Cubos encajables, agrupando hasta conseguir total	1
	M18	Dedos, quitando reiteradamente grupos de 10	1
Reparto	R30	Marcas, ajustando por ensayo y error el número de grupos, hasta formar grupos con el número de elementos de la cantidad dada.	1
Conteo a saltos	MCS1	Conteo a saltos para Medida	6
Valor posicional	VP1	Identificar las decenas como grupos de 10 y las unidades como unidades sueltas	9

Un alumno explicó su procedimiento representando el total de elementos con las manos mostrando varias veces hasta completar la cantidad total. Después fue quitando de 10 en 10 (dos manos) hasta que quedó una cantidad menor que 10. El número de grupos era las veces que había podido quitar 10, y los dedos que le quedaron en las manos, era el resto. Este procedimiento puede considerarse como una estrategia de medida en él se representa primero el total de elementos y se va quitando reiteradamente grupos de 10 (M18).

Aunque la estrategia que corresponde con la estructura semántica del problema es la de medida, una alumna utilizó la estrategia de reparto proponiendo un número de grupos, repartiendo el total de elementos y comprobando que en cada grupos hubiese 10 elementos (R30). En la Tabla 4.13 puede verse el listado de estrategia y modalidades de uso con las frecuencias acumuladas de las sesiones 8, 8b, 11 y 15.

Las estrategias observadas necesitan de una serie de capacidades para su ejecución. En un análisis más profundo he identificado las capacidades necesarias para cada una de ellas. Ya que la estrategia más utilizada ha sido la M1, muestro a continuación las capacidades necesarias para desarrollarla.

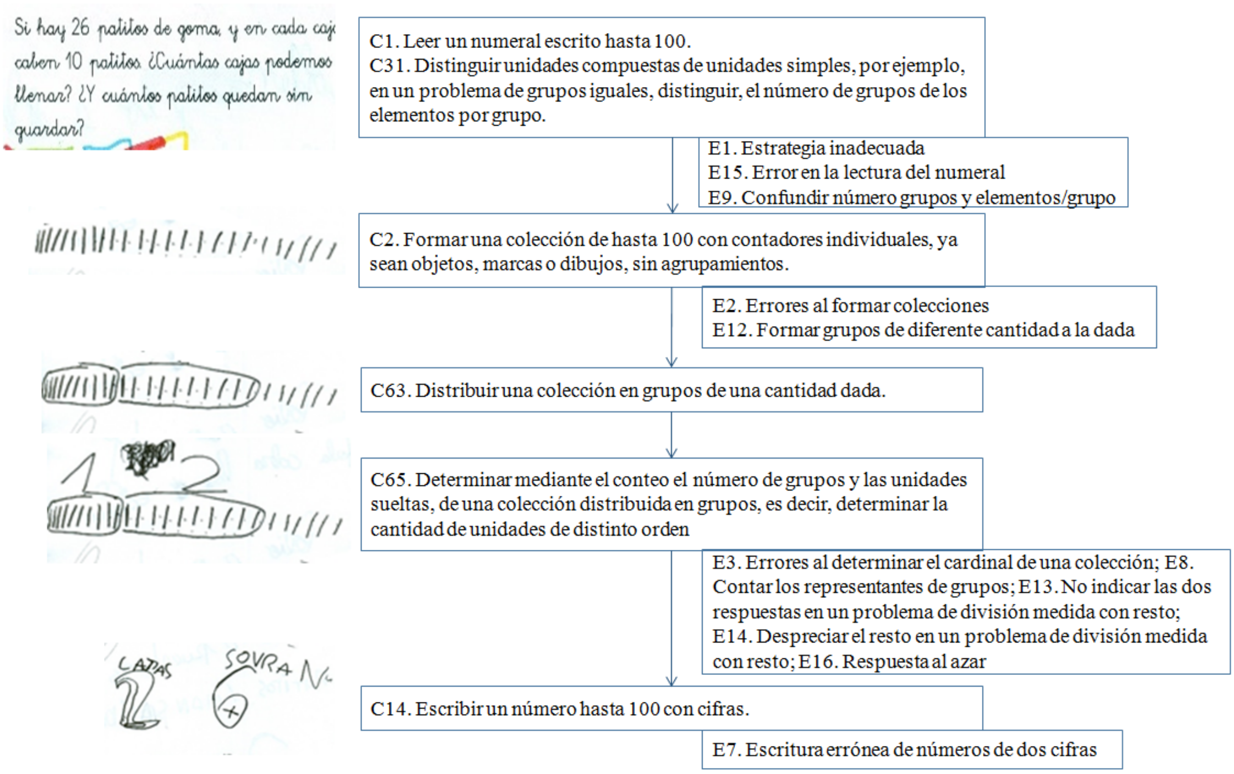


Figura 4.18. Secuencia de capacidades para la estrategia M1

El grafo de los caminos de aprendizaje de este tipo de problemas, que recoge todas las secuencias de capacidades necesarias para las modalidades de estrategias recogidas se muestra en la Figura 4.19. La línea en color negro más gruesa corresponde a la estrategia que acabo de desglosar.

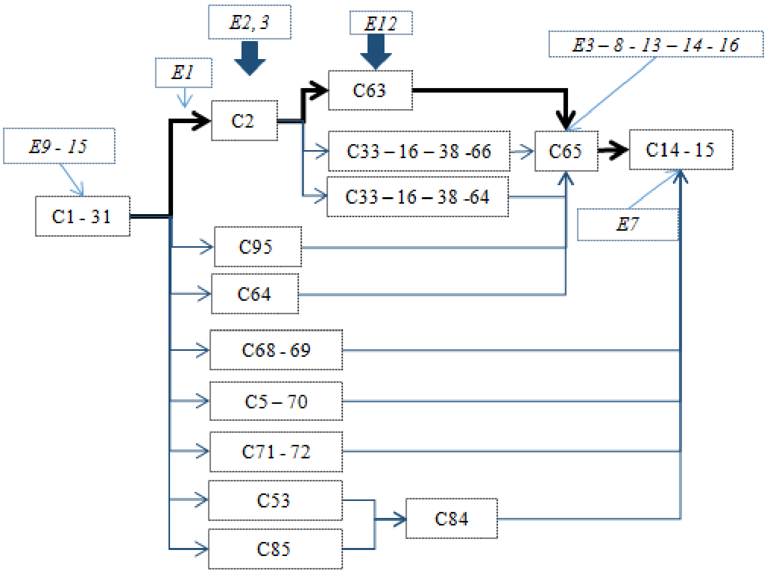


Figura 4.19. Caminos de aprendizaje para problemas división medida con agrupamientos 10

4.1.2.2. Evolución de las estrategias

Las estrategias observadas han sido analizadas en las sesiones 8, 8b, 11 y 15. En el Anexo 7 incluyo una tabla con las frecuencias absolutas en las 4 sesiones en las que se ha planteado un problema de este tipo. La mayoría de las estrategias registradas en estas sesiones son variantes de la estrategia de *modelización directa de medida* (M). Se ha observado un caso excepcional que es el *reparto por ensayo y error* (R30). Finalmente, se ha utilizado el *valor posicional* de las cifras para concluir el problema, estrategia que aparece en la segunda sesión de este tipo de problemas (8b) y aumenta levemente en las sesiones 11 y 15. En la Figura 4.20 se puede observar gráficamente las frecuencias absolutas de las estrategias registradas.

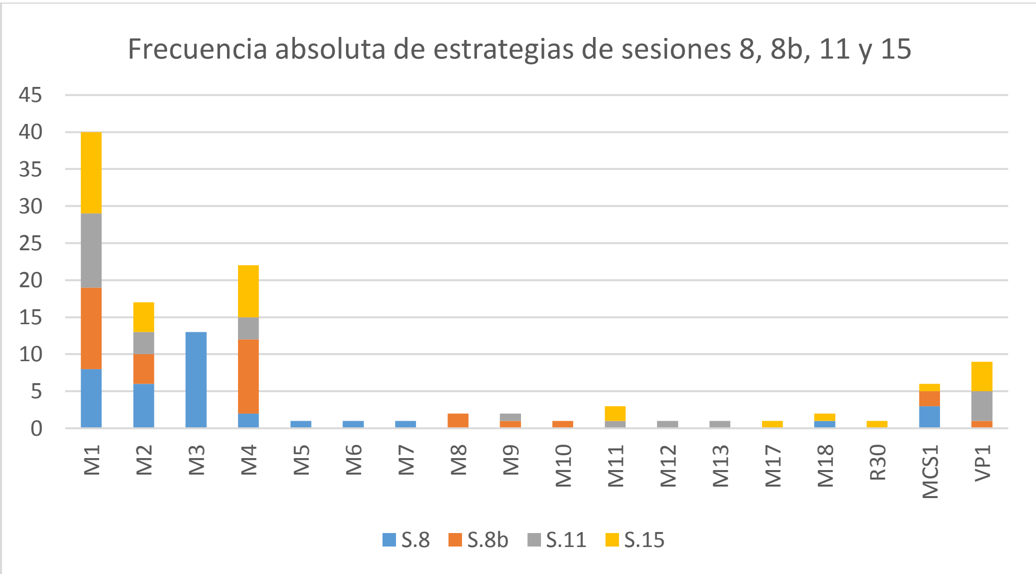


Figura 4.20. Frecuencias absolutas de las modalidades observadas en las sesiones 8, 8b, 11 y 15

En este tipo de problemas, se debe realizar el conteo del número de grupos que la misma estrategia de medida implica formar. En este caso, la agrupación que realizo dentro de las estrategias de modelización directa atiende al material utilizado para hacer los grupos de 10.

Como se puede ver en la Tabla 4.14, las variantes con contadores individuales, como los cubos encajables u otros objetos, son más numerosas.

Tabla 4.14. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones 8, 8b, 11 y 15 por representación y conteo*

Tipo de Estrategia	Estrategias
Modelización directa contadores	M1; M2; M3; M4; M5; M6; M7; M8; M9; M17, M18, R30
Modelización base 10	M11; M12
Modelización con huevera	M13
Modelización con Tabla 100	M10
Conteo a saltos	*MCS1*
Valor posicional	*VP1*

Para poder analizar la evolución de las estrategias por este agrupamiento, muestro la Tabla 4.15, donde se puede ver que las estrategias de *Modelización directa con contadores individuales* han sido las más frecuentes. En la sesión 8, la primera, es donde más se ha utilizado, seguida de la 8b. En la sesión 11 desciende su uso, y vuelve a aumentar en la sesión 15. El uso del resto de estrategias en todas las sesiones es muy leve, solo resaltar el uso de conteo a saltos en todas las sesiones menos la 11, con una frecuencia máxima de 4 alumnos, y el aumento leve, del valor posicional en las dos últimas sesiones.

En la sesión 8b, se utiliza la Tabla 100, donde se identifica cada fila de 10 con un grupo de 10. Esta sesión es la única donde un niño utiliza espontáneamente la Tabla 100 para resolver el problema, dentro de los problemas con agrupamientos de 10.

Tabla 4.15. *Frecuencia absoluta de las estrategias observadas en las sesiones 8, 8b, 11 y 15*

Tipo de estrategia	Sesión 8	Sesión 8b	Sesión 11	Sesión 15
Modelización directa	33	28	17	25
Modelización base 10			2	2
Modelización con huevera			1	
Modelización con Tabla 100		1		
Conteo a saltos	3	2		1
Valor posicional		1	4	4
Total estrategias observadas	36	32	24	32

4.1.2.3. Uso de materiales

La Tabla 100 y los cartones de decenas de huevos no han sido utilizados con mucha frecuencia. En la puesta en común, un niño explica con ayuda de la tutora, cómo resolver el problema con la Tabla 100. El niño identifica el número 37 en la Tabla 100, con ayuda de la tutora identifica las decenas como cada una de las filas. Cada fila es una caja, y la última fila que no se completa son los que sobran. Esta estrategia se considera *Medida con Tabla 100* (M10).

Figura 4.21. Estrategia M10 en la sesión 11

Tras esta puesta en común, en sesiones posteriores con problemas de número de dos cifras de estructura aditiva, los niños se animan a utilizar con más frecuencia.

La tutora ayuda a una niña, que había intentado utilizar sin éxito los cartones de decenas de huevos, a realizar la estrategia que denomino M13. Es una estrategia de modelización directa en la que se cogen tantos objetos como indica la cantidad total del problema y se colocan en hueveras haciendo así grupos de 10. Se cuentan las hueveras completas, y por otro, los objetos sueltos. En la Figura 4.22 se puede ver como un niño resuelve el problema 11 cogiendo 37 cubos multicubos y va rellenando hueveras (decenas) hasta que no puede completar más. Esta estrategia no aparece en recuento, por no haber sido utilizada de manera espontánea por los niños.

Figura 4.22. Representación de estrategia de Medida con huevera y objetos en la sesión 11

4.1.2.4. Trayectorias de aprendizaje

La evolución de las estrategias en estas dos sesiones, me permite comparar el progreso de las estrategias observadas con la trayectoria de aprendizaje-enseñanza del valor posicional a través de la resolución de este tipo de problemas deducida de los estudios previos en la Figura 2.23, basada en los trabajos de la CGI.

El *camino de enseñanza* en este trabajo se basa en el planteamiento de problemas de estructura multiplicativa con grupos iguales de 10, de división medida con resto. A diferencia de los estudios previos, los niños pueden elegir el material que ellos quieran, tanto contadores individuales, como bloques de base 10, hueveras, y Tabla 100. Las modalidades de aplicación de las estrategias de medida han aumentado por el uso de distintos materiales, como se ha descrito en el análisis detallado del Anexo 1.

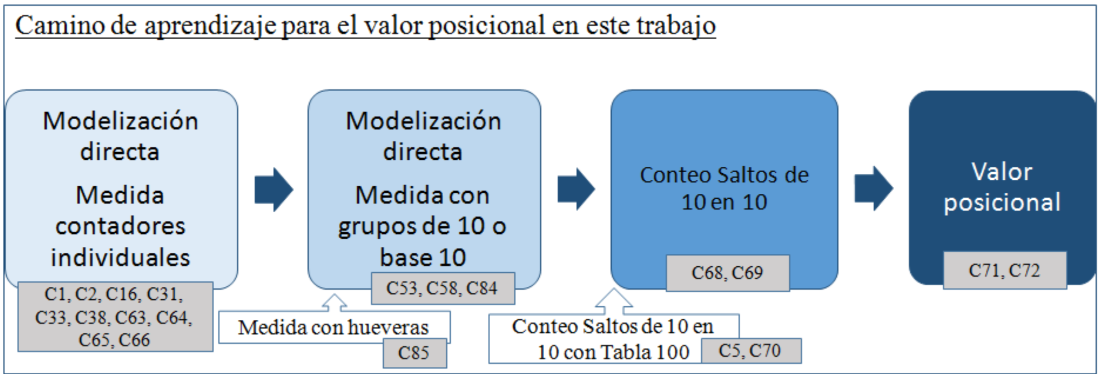
En la Figura 4.23 se puede observar el *camino de aprendizaje* basado en las estrategias observadas en estas sesiones. El primer nivel de desarrollo corresponde a las estrategias basadas en la modelización directa, más concretamente en la estrategia de medida. La primera capacidad que se necesita para resolver estos problemas es identificar que hay dos unidades de distintos tipos (C31). Después debe formarse una colección de hasta 100 elementos (C2) y distribuirlos uniformemente en varios grupos (C63). La solución necesita distinguir dos cantidades, número de grupos y número de elementos que sobran (C65). Si no se forma la cantidad total de elementos inicialmente, lo que se hace es ir construyendo colecciones de 10 elementos hasta completar la cantidad total (C64). Cuando se pone un representante por cada grupo (C33) se necesita distinguir las colecciones representadas (C16) y establecer la relación uno a muchos (C38). En este caso puede utilizarse la modalidad de medida uniendo con líneas un número de marcas o dibujos dado con cada grupo hasta agotar el conjunto total (C66).

El segundo nivel de desarrollo según la trayectoria basada en los estudios previos, implica representar los grupos con material con estructura de 10. En el taller se utiliza la estrategia de medida con bloques de base 10, en la que se representa la cantidad con este material (C53) y se determina el número de grupos por el número de barras de 10 y los elementos sueltos por el número de unidades sueltas (C84). En el aula se ha introducido las hueveras que también han permitido relacionar este material con un elemento cotidiano con esa estructura (C85).

Aparece el uso de *Tabla 100 como modelización de grupos de 10* por cada una de las filas, pudiendo contar de 10 en 10 fijándose en el último numeral de éstas (C5, C70). La estrategia conteo a saltos sin material supone las capacidades de identificar la década y las unidades de un número de dos cifras (C68) y contar de 10 en 10 hasta la década para ver cuántos dieces hay (C69).

Finalmente se utiliza el uso del valor posicional, donde se debe identificar las decenas y unidades en un número de dos cifras (C71), y conocer que las decenas son grupos de 10 y las unidades, objetos sueltos (C72).

La trayectoria de enseñanza-aprendizaje para el valor posicional utilizando este tipo de tareas queda reflejada en la Figura 4.23. El paso de un nivel de desarrollo del conocimiento del valor posicional a otro supone el desarrollo de las capacidades indicadas en cada nivel.



Camino de enseñanza para el valor posicional en este trabajo :

- Tarea: problemas división medida con agrupamientos de 10; con "decenas y unidades" en el enunciado
- Materiales: Elección libre de materiales: cubos encajables, contadores individuales, bloques de base 10, hueveras y Tabla 100

Figura 4.23. Trayectoria de aprendizaje para el valor posicional en este trabajo de las sesiones 8, 8b, 11 y 15

Las frecuencias absolutas de cada uno de estos niveles aparecen en la Tabla anterior 4.16. Las estrategias de medida con contadores individuales contando de uno en uno son las más utilizadas en primero de primaria para resolver problemas de este tipo. Los niños han utilizado con muy poca frecuencia los bloques de base 10 y las hueveras, sin embargo, han preferido construir los grupos o barras de 10 con cubos encajables.

4.2. Problemas de estructura aditiva

Los problemas de estructura aditiva se pueden desglosar en problemas de suma y resta. Voy a analizar las estrategias y su evolución por separado. La descripción de las trayectorias de aprendizaje-enseñanza se realiza conjuntamente para compararlo con el marco teórico.

El análisis de las estrategias de los problemas de estructura aditiva de suma se ha realizado, en las sesiones 3, 9, 10, 13, 17, 18 y 20; los problemas de resta, en las sesiones 1, 2, 6, 16, 19, 22 y 23 (ver Anexo 1).

4.2.1. Problemas de estructura aditiva (suma)

Los problemas de suma planteados en el taller pueden desglosarse en: problemas con dos sumandos de números de dos cifras, en las sesiones 10, 13, 18 y 20, y problemas con 4 sumandos, en las sesiones 3, 9 y 17. Además, hay un problema en cada uno de estos dos grupos, que contiene en el enunciado una cantidad dada en decenas, "una decena" en el problema de la sesión 17, y "4 decenas" en la sesión 18.

Tabla 4.16. *Problemas de suma*

Sesión	*Problema*
3	Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?
9	Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?
10	Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?
13	Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?
17	Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?
18	Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total?
20	Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta, ¿Cuántos euros has conseguido al final?

Estas características son importantes a la hora de realizar el análisis de las estrategias y sus modalidades de uso, ya que los problemas con varios sumandos pueden necesitar de la concatenación de varias estrategias, y los problemas con decenas y unidades en el enunciado, pueden necesitar un desglose de las estrategias utilizadas en las dos etapas que conforman el problema, al igual que en los problemas de multiplicación con agrupamientos de 10 anteriores. Comenzaré el análisis de manera global para todos los problemas de suma ya que los alumnos han utilizado las estrategias de forma similar para dos o cuatro sumandos. Solo el problema de la sesión 18 presenta alguna estrategia por tener dos etapas. Las descripciones necesarias particulares de estos problemas serán introducidas a lo largo del texto.

4.2.1.1. Análisis de estrategias

La estrategia más utilizada para resolver los problemas de suma ha sido la estrategia de modelización directa juntar todo (JT), que consiste en representar las cantidades de los sumandos, juntarlas en una única colección o considerar juntas, y contar todo.

Los procedimientos observados en todas las sesiones de suma dejan un gran número de modalidades de uso de juntar todo por la elección de distintos materiales, la forma de combinar las colecciones representadas, y las posibles agrupaciones de las representaciones de las cantidades de números de dos cifras.

La modalidad de juntar todo más utilizada consiste en representar las cantidades de los sumandos sin mostrar agrupaciones en decenas y unidades, considerarlas todas juntas sin desplazarlas y realizar el recuento de uno en uno de todos los elementos. Esta modalidad se ha realizado con cubos encajables (JT1), con objetos (JT3), con marcas (JT6), con dibujos (JT7) y con el rekenrek (JT10). En los problemas con cuatro sumandos, hay una variación además, en la que se ordenan las cantidad de menor a mayor antes de realiza el recuento final, con cubos encajables (JT21) y con dibujos (JT22). Aparece la modalidad (JT27) si además de ordenar de mayor a menor, el recuento final se hace contando a partir del mayor sumando.

Figura 4.24. Modalidad JT1 en la sesión 10

Otra modalidad consiste en representar las cantidades de los sumandos añadiéndolas a una única colección mientras se van representando, y realizar el recuento de todos los elementos. Esta modalidad se ha realizado con cubos encajables (JT2), con marcas iguales para todos los sumandos (JT5), con marcas diferentes para cada sumando (JT4), con dibujos (JT8), con los dedos de las manos (JT9) y con el rekenrek (JT11).

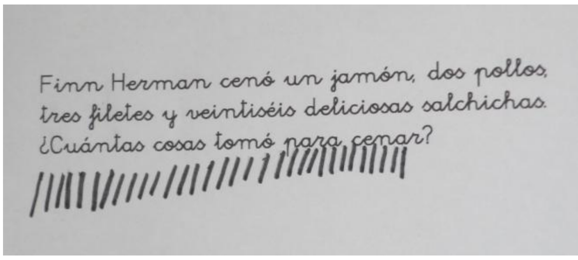


Figura 4.25. Modalidad JT5 en la sesión 9

El uso de la Tabla 100 para representar los sumandos del problema supone otra modalidad de aplicación de la estrategia juntar todo que consiste en representar el primer sumando con todos los numerales que hay hasta el numeral del primer sumando y a partir de ahí contar tantos numerales más como indica el segundo sumando. Si el niño necesita contar todas las etiquetas para el primer sumando y el segundo sumando, denoto la modalidad JT12. Si por el contrario, el niño señala el numeral del primer sumando, y a partir de ahí cuenta tantos numerales como indica el segundo sumando, considero la modalidad JT32. Si el problema tuviese más de dos sumandos se hace manera consecutiva. En la Figura 4.26, se puede observar como la niña busca el número 38 en la tabla 100 y partir de ahí, cuenta 30 numerales, llegando así a la solución del problema, 68 (en la sesión 10). En el siguiente apartado profundizo en el uso de la Tabla 100 en los problemas de suma.

Figura 4.26. Modalidad JT32 en la sesión 10

Aunque en menos ocasiones, los niños han representado las cantidades con bloques de base 10. Con este material se han podido observar también varias formas de ejecutar este procedimiento. La primera variación que describo consiste en representar los sumandos con bloques de base 10, y hacer el recuento de todo de uno en uno, incluso contando de uno en uno las unidades que forman las decenas (JT19). Se ha observado también niños que identificaron la cantidad que representan las barras de la primera cantidad, como una década concreta, y el resto de material, ya sea barras o unidades, se ha contado de uno en uno (JT24).

Hay niños que han representado la primera cantidad con bloques de base 10 y el segundo sumando solo con unidades sueltas, realizando el conteo a partir del primer sumando, es decir, contando solo las unidades (JT23). Cabría pensar que esta modalidad se diese en la sesión 18 donde una cantidad se da en decenas y otra en unidades, pero no se utilizó solo en esa sesión.

Figura 4.27. Estrategia A29 – JT23 en la sesión 18

Los niños fueron utilizando de manera más avanzada los bloques de base 10, agrupando decenas tras representar todos los sumandos. Se dieron distintas modalidades según si el conteo se realizaba de uno en uno (JT25), de 10 en 10 (JT33), o simplemente se identifica el número de dos cifras representado con bloques de base 10 (JT34).

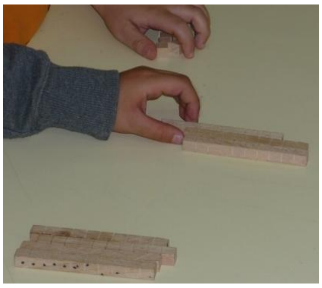


Figura 4.28. Modalidad JT25 en la sesión 18

Hemos proporcionado las hueveras con estructura de decena que han provocado modalidades de juntar todo, colocando las cantidades en hueveras quedando así organizadas en decenas, pero los niños que han utilizado este material han realizado el conteo de uno en uno (JT31).

Antes de pasar a las estrategias de conteo, se ha dado el caso de representar los sumandos del problema como dos secuencias numéricas independientes, realizando el recuento final contando cada uno de los numerales escritos (JT30).

Las estrategias de contar a partir del primero y contar a partir del mayor suponen no representar las cantidades, sino enunciar la secuencia de numerales a partir de uno de los sumandos, ya sea el primero o el mayor, llevando el rastro de numerales que se enuncian. El conteo termina cuando se hayan enunciado tantos numerales como indica el segundo sumando o el menor (CP1 y CM1).

Una modalidad de la estrategia contar a partir del primero surge al utilizar la Tabla 100 (CP2) para ayudarse a llevar el rastro de la cantidad de numerales que indica el segundo sumando. En la sesión 10 una alumna utilizó la Tabla 100 para contar 30 numerales a partir de 38. Más avanzado el apartado describo estas estrategias con materiales.

En los problemas con cuatro sumandos se ha podido observar estrategias combinadas. Dos de ellas consisten en combinar la estrategia de juntar todo con dedos o marcas (JT9 o JT5) y una vez se tiene el resultado de la estrategia anterior, realizar un conteo a partir del mayor, llevando el rastro con una colección de dedos previamente formada (JT9-CM3), o una colección de marcas (JT5-CM2). También se han utilizado estrategias combinadas de contar a partir del primero y recuperación de hechos numéricos (CP1-HN3-CP1), modalidad que implica contar a partir del primero para los dos primeros sumandos, recuperar el hecho numérico que implica los otros dos sumandos, y finalmente, contar a partir del primer resultado, la cantidad obtenida del hecho numérico.

En los problemas de suma se han utilizado cuatro estrategias inventadas diferentes. La más frecuenta es la estrategia de combinar por separado decenas y unidades, y finalmente combinar el resultado de ambos (EI2). Inlcuyo como una modalidad de combinar decenas y unidades la aplicación utilizadas con cuatro sumandos en las que se ordenan las cantidades para ir combinando de la forma más sencilla las decenas y las unidades (EI3).

Hemos registrado estrategias inventadas que combinan conteos a saltos para averiguar la suma de las decenas, luego se combina las unidades, y por último, se combina el total del conteo a saltos y las unidades (EI4).

Por último, he observado la estrategia inventada secuencial o incremento, en la que se combina primero las decenas, después se añade las unidades de una de las cantidades, y por último las unidades de la otra cantidad (EI7).

Finalmente, en las última sesiones predominó el algoritmo de la suma. En la Tabla 4.17 presento la frecuencia acumulada de todas las sesiones de suma de las estrategias y modalidades descritas.

Tabla 4.17. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades en problemas aditivos (suma)*

Estrategia	Modalidades		Fr.
Juntar todo	JT1	Cubos encajables, sin grupos de 10, cantidades separadas, conteo 1-1	51
	JT2	Cubos encajables, única colección contadores iguales, conteo 1-1	15
	JT3	Objetos, sin grupos de 10, cantidades separadas, conteo de 1-1	11
	JT4	Marcas, única colección contadores diferentes, conteo 1-1	5
	JT5	Marcas, única colección contadores iguales, conteo 1-1	11
	JT6	Marcas, sin grupos de 10, cantidades separadas, conteo de 1-1	45
	JT7	Dibujos, sin grupos de 10, cantidades separadas, conteo de 1-1	30
	JT8	Dibujos, única colección contadores iguales, conteo 1-1	10
	JT9	Dedos	4
	JT10	Rekenrek, sin grupos de 10, cantidades separadas sin aprovechar la configuración	4
	JT11	Rekenrek, sin grupos de 10, única colección, sin aprovechar la configuración	5
	JT12	Tabla 100, conteo 1-1	5
	JT19	Base 10, conteo 1-1	5
	JT21	Cubos encajables, sin grupos de 10, cantidades separadas ordenadas, conteo 1-1	4
	JT22	Dibujos, sin grupos de 10, cantidades separadas ordenadas, conteo 1-1	1
	JT23	Base 10, segundo sumando solo con unidades y conteo partir primero	2
	JT24	Base 10, conteo partir de las decenas del primer sumando	1
	JT25	Base 10, agrupando en decenas, conteo 1-1	2
	JT27	Marcas, sin grupos de 10, cantidades separadas ordenadas, conteo partir primero	3
	JT30	Secuencias numéricas escritas para cada sumando, sin grupos de 10, conteo 1-1	2
	JT31	Objetos, grupos de 10 con hueveras, conteo 1-1	3
	JT32	Tabla 100, conteo partir primero	1
	JT33	Base 10, agrupando en decenas, conteo 10-10	1
	JT34	Base 10, agrupando decenas, identificando número (barras-decenas, unidades-cubitos)	4
Conteo	CP1	Contar a partir del primero	4
	CP2	Contar a partir del primero con Tabla 100	3
	CM1	Contar a partir del mayor	4
Conteo con objetos	JT5 - CM2	Contar a partir del mayor, rastro con una colección de marcas	1
	JT9 - CM3	Contar a partir del mayor, rastro con una colección de dedos	1
Conteo y HN	CP1-HN3-CP1	Estrategia combinada 4 sumandos, conteo partir primero y hechos numéricos	1
Inventada	EI2	Combinar decenas y unidades	16
	EI3	Combinar decenas y unidades, variando el orden de los sumandos	3
	EI4	Descomponer en décadas y unidades, conteo a saltos, combinar decenas y unidades	1
	EI7	Secuencial o incremento	1
Algoritmo	AL1	Algoritmo de la suma	40

Las estrategias observadas necesitan de una serie de capacidades para su ejecución. En un análisis más profundo he identificado las capacidades necesarias para cada una de ellas. Ya que la estrategia más utilizada ha sido la JT1, muestro a continuación las capacidades necesarias para desarrollarla.

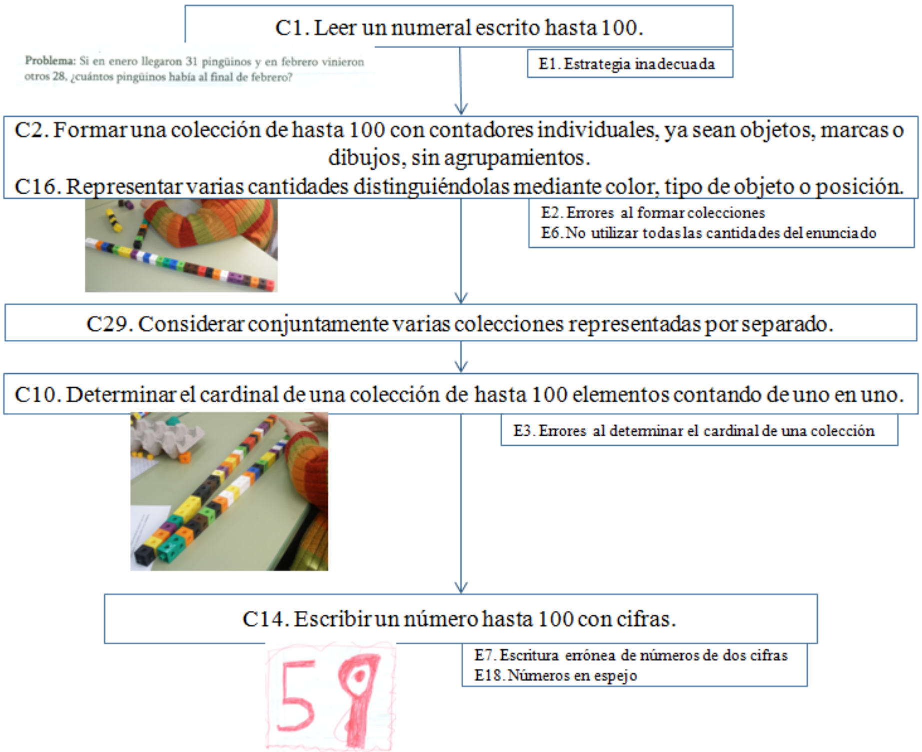


Figura 4.29. Secuencia de capacidades para la estrategia JT1

En estos problemas voy a mostrar dos grafos de caminos de aprendizaje. El primero recoge las estrategias de las sesiones menos la 18. A parte, presentaré el grafo de la sesión 18 ya que al tener una primera etapa de agrupamiento se necesita de algunas capacidades más, como la capacidad C31 con la que se identifica que hay dos tipos de unidades en el enunciado, decenas y unidades.

El grafo de los caminos de aprendizaje de los problemas aditivos de las sesiones 3, 9, 10, 13, 17 y 20, que recoge todas las secuencias de capacidades necesarias para las modalidades de estrategias recogidas se muestra en la Figura 4.30. La línea en color negro más gruesa corresponde a la estrategia que acabo de desglosar.

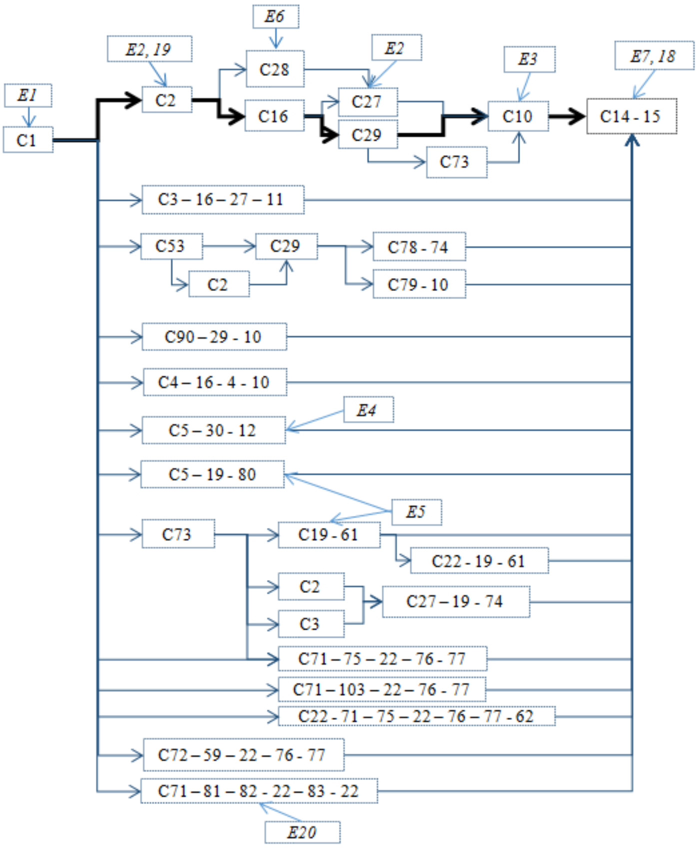


Figura 4.30. Caminos de aprendizaje para problemas de suma

He querido separar el grafo de la sesión 18, ya que este problema contiene una primera etapa en la que se debe resolver una situación de agrupamiento con varios grupos iguales de 10. La estrategia más utilizada en esta sesión fue el algoritmo de la suma, que desgloso en capacidades en la Figura 4.31.

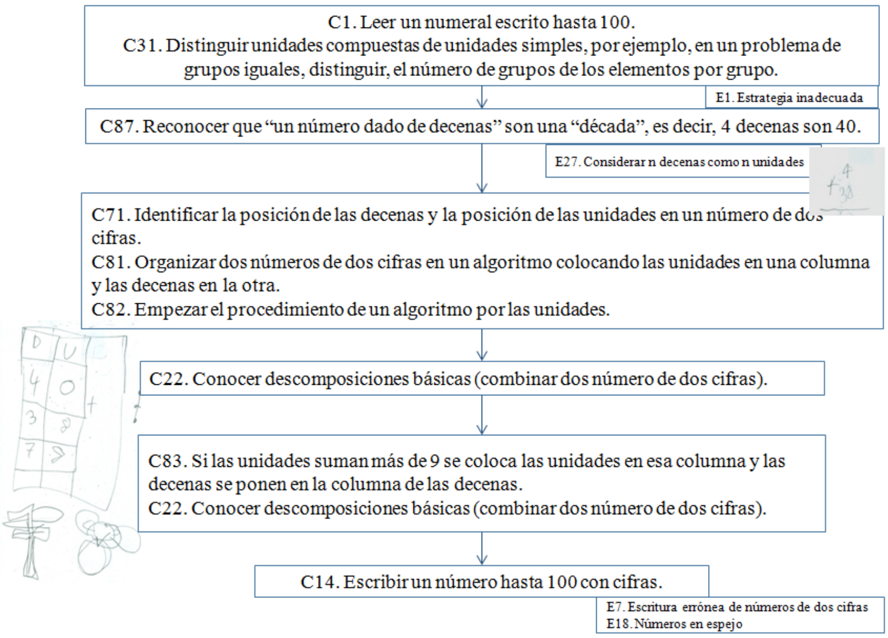


Figura 4.31. Secuencia de capacidades para el algoritmo de la suma

El grafo de los caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 18 comienza con capacidades que ya se han representado en los problemas multiplicativos con agrupamientos de 10. El resto de capacidades son similares al grafo anterior (ver Figura 4.32).

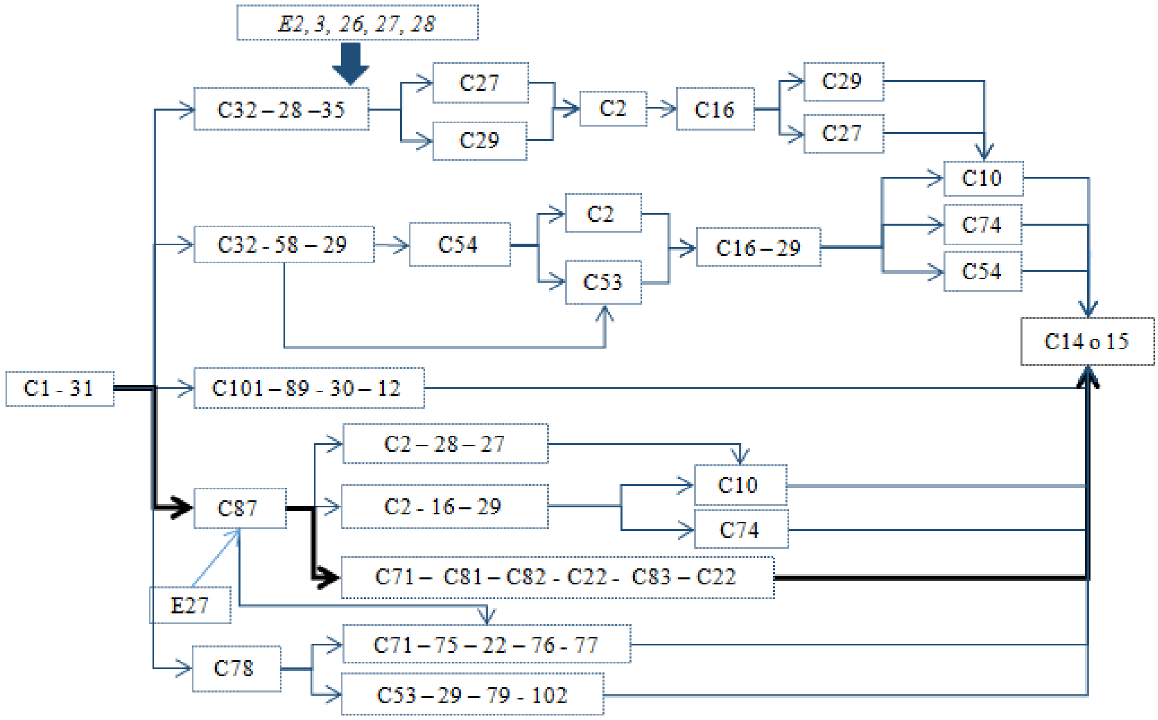


Figura 4.32. Caminos de aprendizaje para problemas de suma con dos etapas

4.2.1.2. Evolución de las estrategias

En el Anexo 7, he adjuntado la tabla de frecuencias de las estrategias observadas en los 7 problemas de suma, indicando en el caso de la sesión 18, la estrategia utilizada en la etapa de combinación. En el gráfico de la Figura 4.33, se puede observar las frecuencias absolutas de las estrategias observadas en cada una de las sesiones acumuladas en las barras de cada estrategia. En general, las estrategias de modelización directa basadas en la estrategia de juntar todo son las más frecuentes. Las estrategias de conteo son pocos frecuentes, siendo levemente mayor el uso de estrategias inventadas. En la última sesión aumenta considerablemente el uso del algoritmo, siendo utilizado por 29 niños.

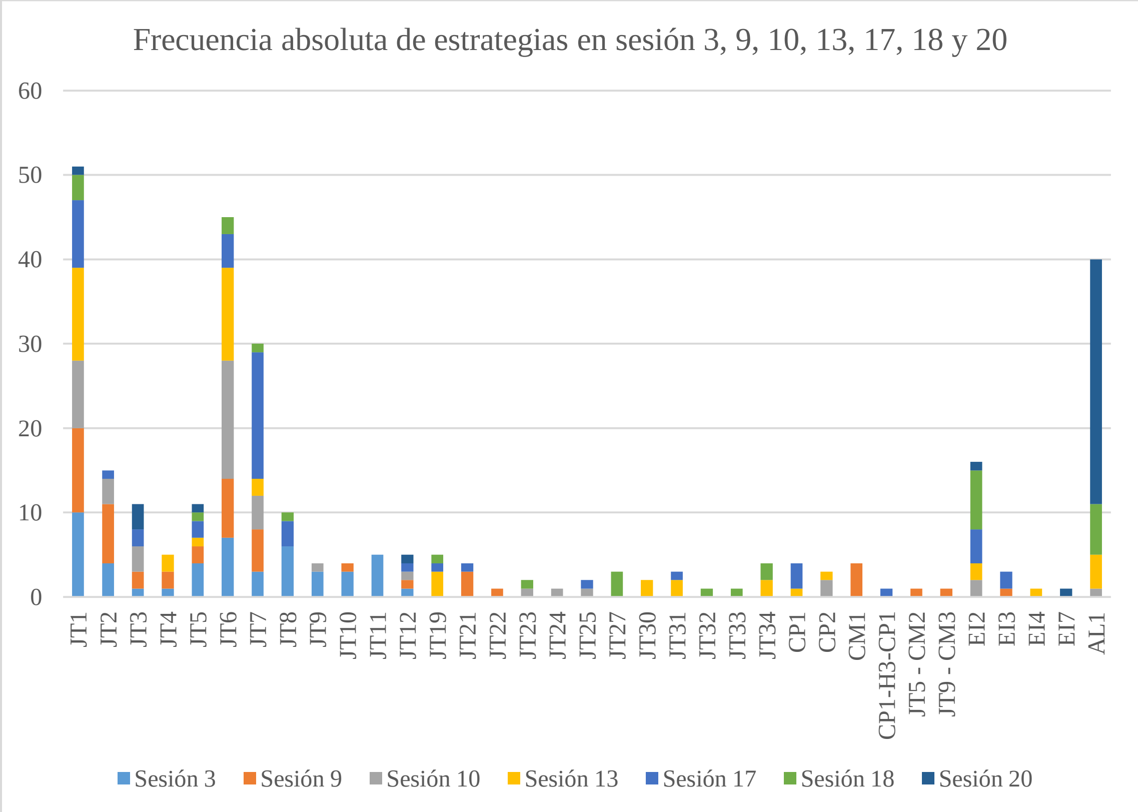


Figura 4.33. Evolución de las variantes observadas de la sesión 3 a la sesión 20 de suma

Como en los problemas anteriores, voy a agrupar las estrategias según, si la representación de las cantidades queda agrupada o no en grupos de 10 y como se realiza el conteo de estas cantidades. En la Tabla 4.18, muestro la agrupación realizada, con las estrategias que corresponden a estas características. Cada grupo puede contener varias estrategias variando el material y la forma de establecer otras relaciones entre las cantidades. En la Tabla 4.18 están ordenadas por el tipo de estrategia, según sean de modelización directa, de conteo, estrategia inventada y algoritmo, siguiendo la evolución que indican los trabajos de referencia de la CGI.

La modelización directa con objetos, puede hacerse sin grupos de 10, con lo que el conteo será de 1 en 1 (modelización directa sin grupos de 10, conteo de uno en uno). Se ha observado en cuatro ocasiones el uso de las manos para representar las cantidades, y los niños han contado de 10 en 10 los pares de manos hasta llegar al par de manos no completo. Esta modalidad de juntar todo (JT9) la he incluido en modelización directa con grupos de 10, conteo de 10 en 10.

La modelización con bloques de base 10 con las hueveras implica tener las cantidades organizadas en grupos de 10. El conteo de estos grupos se puede realizar de uno en uno directamente, sin manipular, sin agrupar decenas (modelización base 10, conteo de uno en uno, modelización directa huevera, conteo de uno en uno). Si se organizan las decenas por un lado y las unidades por otro y se sigue contando de uno en uno, agrupamos estas estrategias en modelización base 10, agrupando decenas, conteo de uno en uno. Si los grupos o barras se cuentan de 10 en 10, la modalidad se categoriza en modelización base 10, agrupando decenas, conteo de 10 en 10.

Los niños que utilizan bloques de base 10 para representar las cantidades, pueden representar el segundo sumando también como bloques de base 10 o con otros objetos. Se ha observado que los niños han reconocido el primer sumando usando la relación de los bloques de base con el valor posicional de los números, y después, han contado de uno en uno a partir de este cantidad, la cantidad representada del segundo sumando (modelización base 10, sin agrupar decenas, VP-conteo a partir del primero).

Por último, los niños han representado las cantidades con bloques de base 10, han agrupado las decenas por un lado y las unidades por otra, y han concluido el resultado por la relación entre el material y el valor posicional de las cifras.

El uso de la Tabla 100, puede permitir el conteo de 10 en 10, por la distribución en filas de 10 de los numerales. Con este material, se han observado estrategias contando de uno en uno (modelización Tabla 100, conteo de uno en uno), y una variante utilizada en la sesión 18, donde el primer sumando se da en decenas y se cuenta de 10 en 10 sobre la Tabla 100, y el segundo sumando se cuenta a partir del primero de uno en uno modelización Tabla 100, conteo 10 en 10 - conteo partir del primero).

Tabla 4.18. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones de suma por representación y conteo*

Agrupación de las estrategias	Estrategias
Modelización directa sin grupos de 10, conteo de 1 en 1	JT1; JT2; JT3; JT4; JT5; JT6; JT7; JT8; JT10; JT11; JT21; JT22; JT30
Modelización base 10, conteo de uno en uno	JT19
Modelización directa huevera, conteo de 1 en 1	JT31
Modelización base 10, agrupando decenas, conteo de uno en uno	JT25
Modelización directa con grupos de 10, conteo de 10 en10	JT9
Modelización base 10, agrupando decenas, conteo de 10 en 10	JT33
Modelización base 10, sin agrupar decenas, VP-conteo a partir del primero	JT23; JT24
Modelización base 10, agrupando decenas, VP	JT34
Modelización Tabla 100, conteo de 1 en 1	JT12
Modelización Tabla 100, conteo 10 en 10 - conteo a partir del primero	JT32
Modelización sin grupos 10, conteo a partir del primero	JT27
Conteo con objetos	JT5 - CM2; JT9 - CM3
Conteo Tabla 100	CP2
Conteo	CP1; CM1; CP1-H3-CP1
Estrategia inventada	EI2; EI3; EI4; EI7
Algoritmo	AL1

Aparece un grupo en el que se realiza modelización directa sin grupos 10, representando ambos sumandos, y el recuento final, se realiza contando a partir del primero, el segundo sumando representado (modelización sin grupos 10, conteo a partir del primero).

Las estrategias de conteo se han observado con apoyo de contadores y Tabla 100 para llevar el conteo del segundo sumando (conteo objetos y conteo con Tabla 100), y sin ningún material. También se han registrado una variedad de estrategias inventadas. Y por último, el uso espontáneo de algoritmo.

Una vez agrupadas las estrategias observadas a lo largo del taller en los problemas de suma, muestro un gráfico en el que se puede observar las frecuencias por el tipo de estrategias por esta agrupación que se utiliza en cada sesión, para poder describir la evolución ocurrida en el taller en este tipo de problemas. En la Figura 4.34, se puede ver como en las cinco primeras sesiones, el tipo de estrategia que se utiliza con más frecuencia es la modelización directa sin agrupamientos de 10 y conteo de uno en uno. Esta estrategia también se utiliza en las sesiones 18 y 20, las últimas con problemas de suma en el taller, en menor cantidad ya que se utilizan otro tipo de estrategias.

En la sesión 1, se utiliza en su mayoría la estrategia de modelización directa sin grupos de 10, contando de uno en uno, dándose 3 casos de modelización con grupos de 10 contando de 10 en 10 (representando cantidades con las manos) y un uso de Tabla 100, contando de uno en uno. En la sesión 9, sigue dominando la modelización sin grupos de 10 y conteo de uno en uno, pero aparecen cuatro casos de conteo con ayuda de material y sin él, incluso un alumno utiliza una estrategia inventada.

En la sesión 10, todavía la modelización directa sin grupos de 10 y conteo de uno en uno predomina, y aparecen el uso de bloques de base 10, con estrategias de conteo de uno en uno. También se utiliza la Tabla 100 como apoyo para utilizar la estrategia contar a partir del primero.

En la sesión 13, aparece el uso de modelización con bloques de base 10 y su conteo de 10 en 10, y el uso de la huevera, contando de uno en uno. También aumenta levemente, el uso de estrategias inventadas y el algoritmo de la suma.

La sesión 17 es un problema de 4 sumandos, la modelización directa sin grupos de 10, contando de uno en uno vuelve a aumentar, no se utiliza el algoritmo, y las estrategias de conteo y modelización con base 10 bajan en su utilización. Posiblemente se debe a que el problema tenga un nivel de dificultad más alto por incluir 4 sumandos y que uno de ellos sea una “decena”.

En la sesión 18, se utilizan levemente estrategias con base 10, contando de uno en uno, de diez en diez, estrategias de modelización con Tabla 100 o con objetos, en las que se realiza un conteo uno en uno a partir del primer sumando, estrategias inventadas y, en seis ocasiones el algoritmo de la suma. En la sesión 20, hay 5 niños con la estrategia de modelización directa sin grupos de 10 y conteo de uno en uno, 6 que utilizan estrategias inventadas, y 29 que utilizan el algoritmo.

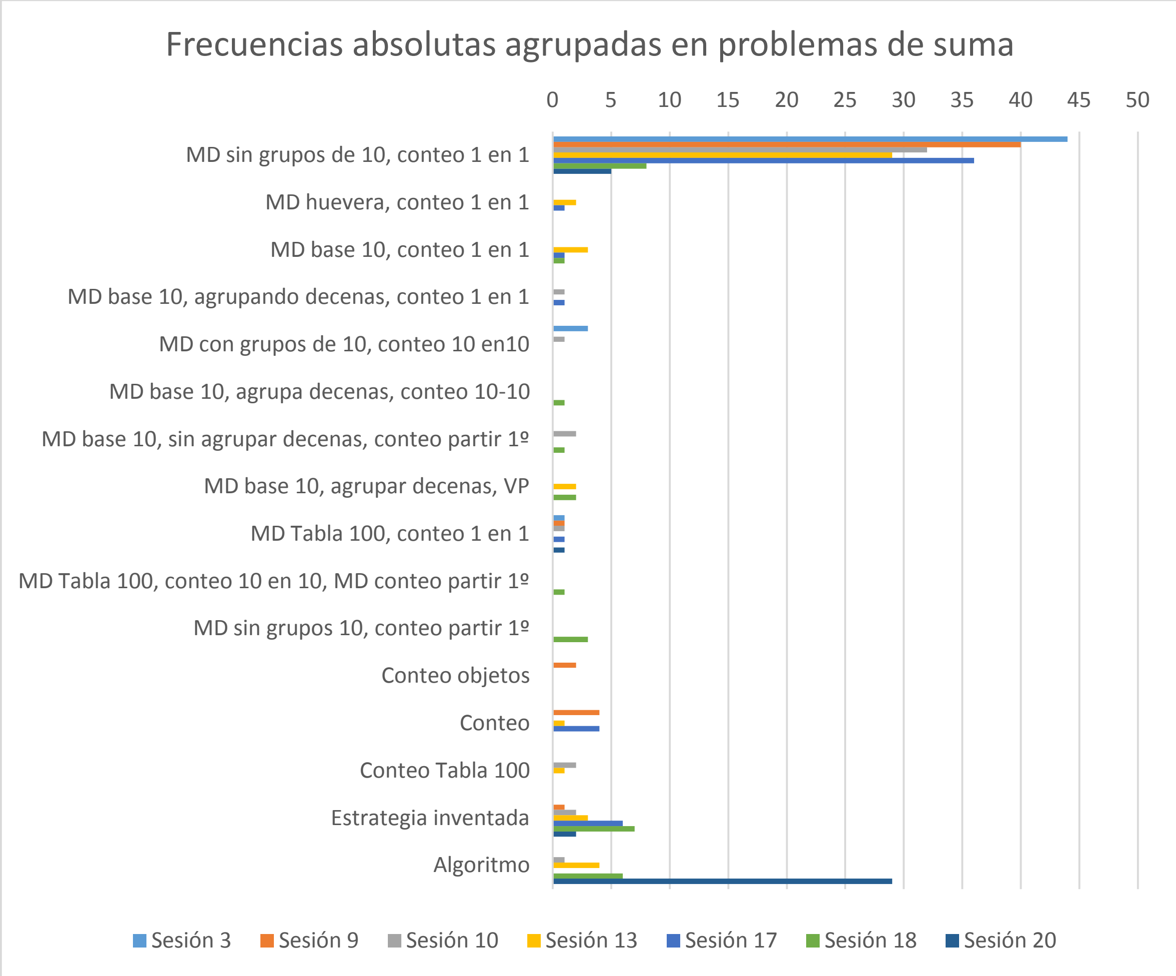


Figura 4.34. Frecuencias absolutas de estrategias agrupadas de los problemas de suma

4.2.1.3. Uso de materiales

Según el marco teórico, las estrategias que utilizan los niños se consideran más avanzadas, si comienzan a utilizar los bloques de base 10 y pasan a utilizar el conteo a saltos de 10 e 10 o estrategias inventadas basadas en el valor posicional. Como ya he explicado anteriormente, en el taller realizado los niños, pueden utilizar el material que ellos elijan para resolver el problema, y no se fuerza la elección de los bloques de base 10, solo se propone. Se incluye otro material como las hueveras, cartones de decenas de huevos para modelizar los problemas, aprovechando el "Cuento para contar mientras se come un huevo frito". A pesar de ello, los niños prefieren utilizar representaciones gráficas como dibujos o marcas, los cubos encajables u otros objetos para resolver el problema. Esto supone utilizar materiales que no incluyen una estructura de grupos de 10. En las sesiones en las que se plantean problemas de grupos iguales con grupos de 10, los niños modelizan las cantidades de dos cifras agrupadas por decenas porque el problema implica esta representación. Pero en los problemas que el enunciado no plantea grupos de 10, los niños representan las cantidades de dos cifras, mostrando una concepción unitaria (Fuson, 1992). Solo los niños que utilizan los bloques de base 10 y las hueveras, tienen la oportunidad de ver las agrupaciones en decenas de los números de dos cifras.

En los problemas de suma, la palabra decena aparecen en el enunciado para dar una cantidad, en la sesión 17, donde los niños tienen cantidades implicadas dadas en dos unidades de orden diferente, y una de ellas es un grupo 10. En la sesión 18 se incluye una cantidad mayor, 4 decenas, combinadas con 38 unidades, que también implica unidades de distinto orden. Los niños comienzan así a ordenar las cantidades en grupos de 10, observándose varias formas de representación:

- Construyendo dos colecciones de objetos o marcas, una con 40 unidades y otra con 38 unidades. Dentro de estas representaciones, hay niños que reconocen o escuchan que 4 decenas son 40. Otros niños, van formando grupos de 10 y los van juntando en una única colección.
- La cantidad dada en decenas se representa con 4 grupos de 10 de marcas u objetos. La cantidad dada en unidades, se representa sin grupos de 10.
- Las dos cantidades se representan con grupos de 10 o con base 10.

En el primer caso, el recuento se realiza de uno en uno, ya que la representación no contiene grupos de 10. En el segundo caso, solo se puede contar de 10 en 10 la cantidad dada en decenas. Aun así, hay niños que necesitan contar las 4 decenas de unidad en unidad. Como la segunda cantidad no está representada con grupos de 10, se cuenta de uno en uno en ambos casos.

Por último, cuando las dos cantidades están representadas con grupos de 10, se pueden contar de 10 en 10, aunque hay niños que prefieren contar todas las unidades. En la Figura 4.35, incluyo representaciones observadas en las sesiones 10, 13 y 18. En la sesión 10, las dos cantidades se dan en unidades, 38 y 30. Al representar las cantidades sin grupos de 10, supone contar de uno en uno todos los objetos. En la sesión 13 se introduce los cartones de decena de huevos, que sirven de soporte para representar las cantidades en grupos de 10. En la sesión 18, una cantidad se da en decenas, 4 decenas de escalones y la otra en unidades, 38 escalones. Hay niños que van haciendo grupos de 10 y los añaden a los anteriores, quedando la cantidad sin grupos de 10. Hay otros niños que saben que 4 decenas son 40, y representan los 40 escalones en una colección sin grupos de 10. En los dos casos, para el recuento final, tienen que contar de uno en uno. El incluir la palabra decena en el enunciado de la sesión 18, provoca que los niños hagan representaciones de esa cantidad con grupos de 10 que permite contar de 10 en 10 esos grupos, aunque inicialmente los niños lo cuentan de uno en uno.

Figura 4.35. Evolución de la modelización directa para suma de la sesión 10 a la sesión 18

En la Figura 4.35 se puede observar cómo, tanto en la sesión 10 como 18, dos niños representan una cantidad con barras y unidades, y la otra cantidad solo con unidades o contadores individuales. El niño de la sesión 18 puede estar guiado por el enunciado de problema que marca 4 decenas, que no ocurre en la sesión 10. Los dos niños cuentan de 10 en 10 las barras y el resto de uno en uno. La siguiente estrategia más evolucionada que se presenta, es representar las dos cantidades con bloques de base 10, incluso sin utilizar "decena" en el enunciado, como se puede ver en la última estrategia de la sesión 10, pero el recuento final se realiza de uno en uno. En este caso en concreto, el niño no agrupa las decenas, cuenta de 10 en 10 las 3 primeras decenas, y a partir de ahí cuenta de uno en uno, el resto de unidades sueltas y las unidades de la otras tres barras. La última estrategia de la sesión 18, consiste en agrupar las decenas, contarlas de 10 en 10, y luego de uno en uno las unidades.

La estrategia más avanzada con modelización directa es, una vez representada las dos cantidades en barras y unidades, decidir que si hay 7 barras y 8 unidades, se forma el número 78, estrategia que se ha utilizado en la sesión 18.

El uso de la Tabla 100 en los problemas de estructura aditiva de suma no ha sido utilizado por muchos niños. Cuando hay que sumar dos o más cantidades, la Tabla 100 puede servir de soporte para resolver la situación, utilizando la secuencia de numerales escrita para representar las cantidades del problema. En la sesión 9, hay un intento de usar la Tabla 100 en por el alumno A38, pero resulta una estrategia mal ejecutada que no permite resolver el problema. En la Figura 4.36, se ve la secuencia de imágenes, en la que señala el 1, para el jamón, el 2, por los dos pollos, el 3, por los tres filetes, y el 26, por las salchichas, pero el niño no acumula las cantidades.

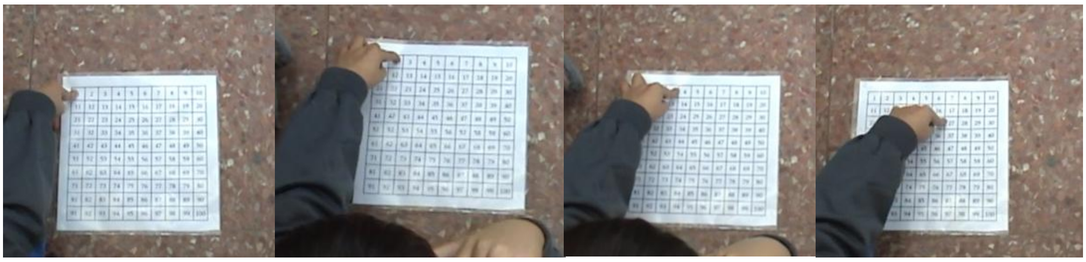


Figura 4.36. Intento de resolución con Tabla 100 en la sesión 9.

Otra niña utiliza, la estrategia que he denotado como juntar todo con la tabla 100 (JT12), que consiste en apoyarse en la secuencia de numerales para modelizar las cantidades, siendo cada numeral un ítem para contar. En la secuencia de imágenes de la Figura 4.37, la niña explica en la puesta en común como hacerlo. Primero ha señalado el 26, luego ha señalado el siguiente numeral, el 27, para el jamón; después los numerales 28 y 29 para los dos pollos; y finalmente los numerales 30, 31 y 32 para los 3 filetes. Como el último numeral señalado es el 32, la solución es 32.

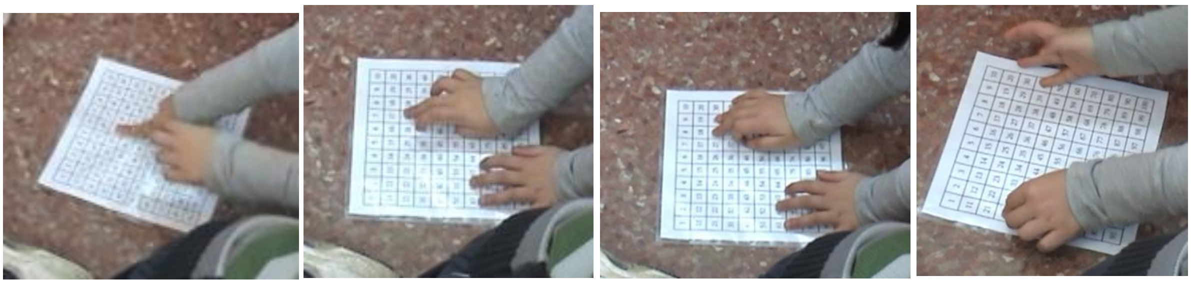


Figura 4.37. Representación para la estrategia JT12 en la sesión 9

En la sesión 10 aparece la estrategia contar a partir del primero con Tabla 100 (CP2), para suma 38 más 30. En este caso la niña inicialmente señala el 38, pero luego no lo utiliza y empieza a enunciar la secuencia de numerales desde el 39, llevando el rastro de los 30 primeros numerales de la Tabla 100.

Figura 4.38. Representación para la estrategia CP2 en la sesión 10

La diferencia entre las estrategias juntar todo con Tabla 100 y contar a partir del primero con Tabla 100, está en que en la primera todas las cantidades están representadas, como ocurre en la modelización directa, de ahí que la denote como la estrategia de modelización directa juntar todo. La segunda estrategia, utiliza la Tabla 100 para llevar el rastro de los numerales que se enuncian a partir de la primera cantidad, de ahí que la categorice como estrategia de conteo.

En el gráfico de la Figura 4.39 muestro la frecuencia absoluta de utilización de la Tabla 100 en los problemas que suponen sumar las cantidades. La estrategia juntar todo con Tabla 100 se ha utilizado en más sesiones que la estrategia contar a partir de primero.

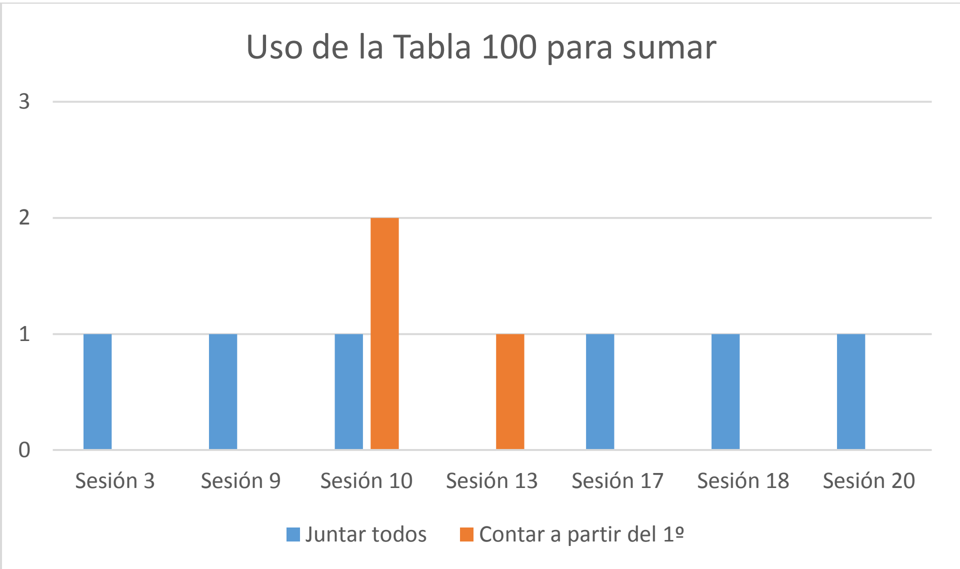


Figura 4.39. Frecuencias absolutas de uso de la Tabla 100 en problema de sumar

Analizando la evolución de los niños que han utilizado estas estrategias en las siete sesiones que supone sumar, se puede observar varias cosas. El estudiante A32 que utiliza en la sesión 3 la Tabla 100 para explicar la resolución, en las sesiones sucesivas utiliza estrategias inventadas, mostrando una comprensión fluida del valor posicional.

La alumna A52, en la primera sesión utiliza juntar todo con marcas, y en las dos siguientes sesiones utiliza juntar todo con Tabla 100. A partir de ahí utiliza los bloques de base 10, llegando a identificar decenas y unidades con las barras y cubitos de los bloques de base 10 para formar el número de dos cifras. Finalmente, utiliza el algoritmo.

Tabla 4.19. *Progresión de estrategias de alumnos que eligen Tabla 100 para sumar*

Alumno	Sesión 3	Sesión 9	Sesión 10	Sesión 13	Sesión 17	Sesión 18	Sesión 20
A32	JT T100	EI	EI	EI	EI	EI	EI
A52	JTmarcas	JT T100	JT T100	JT B10	JT B10	JT B10	ALG
A47	JTmarcas	CM	CP T100	JTmarcas	CP	JT B10	No identif.
A50	JT reken	CM	CP T100	EI	EI	JT B10	EI
A9	JT reken	CM	No identif.	CP T100	No identif	EI	ALG
A44	JTmarcas	JTmarcas	JTmarcas	JTNumerales	JT T100	JT T100	JT T100

Los estudiantes A47, A50 y A9 utilizan primero una estrategia de modelización directa con marcas o rekenrek y en la segunda sesión utilizan la estrategia contar a partir del mayor. Esto supone una estrategia más avanzada al pasar de una estrategia de modelización directa a una estrategia de conteo. Al llegar a la sesión 10, las cantidades han aumentado considerablemente, contar 30 numerales a partir de 38 se convierte en una tarea con más riesgo de error. El uso de la Tabla 100, les da soporte para llevar el rastro de enunciar 30 numerales a partir de 38. El estudiante A9 no tiene identificada la estrategia en la sesión 10, pero sí en la sesión 13, donde la situación era similar, y se apoya en la Tabla 100. Las estrategias que utilizan en las últimas sesiones, son estrategias de modelización directa con base 10, estrategias inventadas y algoritmo de la suma.

Por último comentar el caso de la estudiante A44, que utiliza en las primeras sesiones estrategias de modelización directa con marcas. En la sesión 13, escribe los meses de Enero y Febrero con todos sus días y cuenta, todos los numerales. A partir de la sesión 17, comienza a utilizar la Tabla 100 para resolver varias sesiones seguidas, no solo los problemas de suma, sino todos los problemas de estructura aditiva.

Estos casos muestran que niños que utilizan estrategias de conteo para resolver problemas aditivos con cantidades no mayores de 20, pueden encontrar un soporte para extender estas estrategias a problemas con cantidades mayores, y tras esta evolución, pueden utilizar estrategias que utilizan materiales con grupos de 10, incluso estrategias basadas en el valor posicional. También muestran que niños que utilizan de manera sistemática estrategias de modelización directa y evolucionan más despacio, el uso de la Tabla 100 les puede llevar a tener una ayuda para poder evolucionar a estrategias de conteo.

4.2.1.4. Estrategias inventadas

En este trabajo distingo entre el uso de hechos numéricos, que considero combinaciones de números de una cifra, y estrategias inventadas, en las que se ven involucrados números de dos cifras, y por lo tanto, el recuperar composiciones de estos números, implica tener conocimiento sobre el valor posicional (Carpenter, Fennema y otros, 1999). En las sesiones con problemas de suma, he observado variantes de la estrategia inventada combinar decenas y unidades y secuencial. Las estrategias inventadas observadas comienzan en la sesión 9, en un problema que hay que combinar 4 cantidades, siendo una de ellas un número de dos cifras. En esta ocasión hay que sumar, 26 salchichas, un jamón, dos pollos y tres filetes. Un estudiante comienza eligiendo la cantidad mayor, 26 y sumarle el resto de forma consecutiva "32, porque sumando, he pensado 26 más 1, 27 más 2, 29 más 3, 32". Para realizar este procedimiento el niño tiene que identificar la cifra de las unidades del número de dos cifras para después recuperar combinaciones básicas de una cifra. En el último paso, debe sumar 3 a 29, lo que supone pasar de década (EI3). Otra variante de combinar decenas y unidades, consiste en realizar una secuencia de conteo de 10 en 10 para sumar las decenas, recuperar con un hecho numérico las unidades, y finalmente, combinar los dos resultados (EI4).

Tabla 4.20. *Variantes de Estrategias inventadas en problemas de suma*

Código	Descripción estrategia	Marco teórico
EI2	Combinar decenas y unidades	Combinar decenas y unidades
EI3	Combinar decenas y unidades, variando el orden de los sumandos	
EI4	Descomponer en décadas y unidades, conteo a saltos para las decenas, Combinar decenas y unidades con el resultado de anterior y la combinación de las unidades.	
EI7	Secuencia: A partir de un sumando se suma las decenas del otro, y después las unidades.	Incrementar

4.2.2. Problemas de estructura aditiva (resta)

Los problemas de resta han sido planteados en las sesiones 1, 2, 6, 16, 19, 22, y 23. Los problemas de las sesiones 16, 19 y 23 son problemas que incluyen en su enunciado unidades de dos tipos, decenas y unidades, por lo que, ante los participantes de esta investigación que no hayan adquirido un nivel suficiente de comprensión de la decena, los problemas contienen una primera etapa multiplicativa con agrupamientos de 10 y la segunda etapa de resta.

Tabla 4.21. *Problemas de resta*

Sesión	*Problema*
1	Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?
2	Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?
6	En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?
16	La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá?
19	Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?
22	Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?
23	Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?

El análisis de estos problemas se ha realizado desglosado por fases y se puede ver en el Anexo 1, en las sesiones 16, 19 y 23. En este apartado voy a comenzar describiendo las estrategias analizadas en todos los problemas de resta, incluyendo la segunda etapa de los problemas de las sesiones 16, 19 y 23, indicando los detalles necesarios para explicar su combinación con la estrategia de la primera etapa.

4.2.2.1. Análisis de estrategias

En la Tabla 4.22 muestro las estrategias y modalidades observadas con la frecuencia acumulada de todas las sesiones con problemas de resta. Las modalidades que aparecen sombreadas solo se utilizaron en las sesiones de dos etapas. Primero voy a describir las estrategias y modalidades que se utilizan en todas las sesiones, y a continuación, haré lo mismo con solo las estrategias de los problemas de dos etapas.

Las estrategias de modelización directa que se utilizaron en estos problemas son las estrategias de *quitar* (Q), *quitar hasta* (QH), *añadir hasta* (AH) y *correspondencia uno a uno* (E). Los niños utilizaron la estrategia quitar, en varias modalidades que describo a continuación, con más frecuencia que las demás. Esta estrategia se utilizó tanto en problemas de cambio decreciente con final desconocido, como en problemas del mismo tipo con la incógnita en la cantidad de cambio, combinación con parte desconocida y comparación, lo que indica un uso flexible de dicha estrategia.

La estrategia quitar consiste en representar la cantidad mayor del problema y quitar, tachar o separar la cantidad de elementos que marca la cantidad mayor del problema. Finalmente, se cuenta lo elementos que quedan. Los niños han realizado esta estrategia con diferentes materiales como cubos encajables (Q1), objetos (Q2), marcas (Q3), dibujos (Q4), las cuentas del rekenrek sin aprovechar su configuración (Q5) y con los dedos sin usar la configuración (Q7).

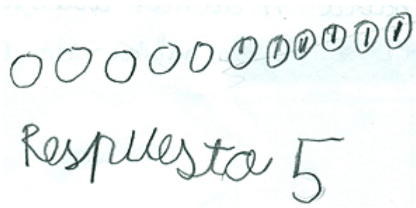


Figura 4.40. Modalidad Q3

La disposición de las cuentas del rekenrek presenta grupos de 5 bolas en filas de 10 bolas. Este material permite reconocer cantidades de manera inmediata. En los problemas de resta se observó el aprovechamiento de esta configuración con la estrategia quitar, en la que los niños representaban la cantidad mayor del problema, e identificaban cantidades en las que se puede descomponer esa cantidad ayudándose de la configuración (ver la descripción de estas modalidades de la estrategia quitar en el Anexo 1, sesiones 1 y 2, por ejemplo). La modalidad de uso de la estrategia quitar con el rekenrek, identificando cantidades por la configuración de sus cuentas es Q6 (Figura 4.41). El uso de las manos en los problemas de resta también permitió identificar descomposiciones de cantidades al representar la cantidad mayor con los dedos de las manos, y separándolos en dos grupos de configuración reconocible (Q12).

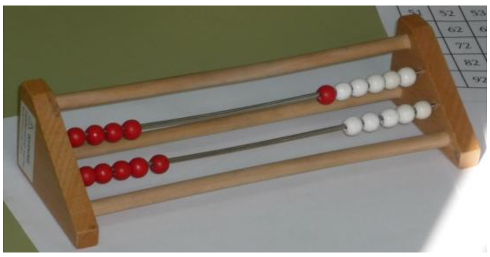


Figura 4.41. Modalidad Q6 con el rekenrek

La Tabla 100 se utilizó para resolver el problema con una modalidad de la estrategia quitar. Los niños identificaban la cantidad mayor del problema con su numeral en la Tabla 100, considerando todas las etiquetas anteriores, y a continuación contaban desde el 1 tantas casillas como elementos tenían que quitar, contando por último, las casillas que quedaban hasta el numeral mayor inicialmente señalado (Q8). Los niños también realizaron esta estrategia empezando a contar desde el numeral mayor hacia atrás las casillas que tenían que quitar, así podían saber el resultado considerando el numeral de la casilla anterior a la última que habían quitado (Q9). En el siguiente apartado describo con más detalle los diferentes usos de la Tabla 100 en los problemas de resta.

En el taller se registró un caso en el que en vez de utilizar la Tabla 100, el alumno escribe la secuencia numérica escrita hasta el numeral mayor del problema. A continuación tacha tantos numerales como indica la cantidad menor del problema empezando por el último numeral escrito, y finalmente, cuenta los numerales no tachados (Q10).

La estrategia *quitar hasta* ha sido utilizada en su totalidad, a excepción de un caso, en las sesiones 2 y 6, en las que el tipo de problema fue de cambio decreciente con la cantidad de cambio desconocida. La estrategia de quitar hasta consiste en representar la cantidad mayor del problema e ir quitando o tachando elementos hasta que queda la cantidad de menor del problema. Para terminar se cuenta el número de elementos que se han quitado o tachado. Para saber cuántos elementos quedan los niños utilizaron dos procedimientos, unos niños comprobaban varias veces contando cuántas quedaban mientras iban quitando o tachado elementos, y otros niños paraban de quitar cuando por *subitización* percibían que la cantidad que quedaba era la cantidad menor. Considerando estos aspectos han surgido modalidades de quitar hasta contando los elementos que deben quedar con marcas (QH1), dibujos (QH2), con objetos (QH3), con cubos encajables (QH7) y con el rekenrek (QH9), y modalidades en las que se *subitiza* la cantidad que debe quedar con rekenrek (QH4), con marcas (QH5), con dibujos (QH6) y con cubos encajables (QH8).

La representación de las cantidades con los dedos de las manos permite, como he comentado ya en las modalidades de uso de la estrategia quitar, identificar descomposiciones aditivas. En el caso de la estrategia quitar hasta con los dedos de las manos, los alumnos representan la cantidad con las manos, e identifican, los dedos que deben dejar y los que deben quitar, reconociendo finalmente la cantidad de los que hay que quitar por la configuración de las manos (QH10).

La Tabla 100 permite contar los numerales que hay entre dos dados. La estrategia quitar hasta con este material consiste en contar desde el dato mayor del problema al dato menor del problema, el número de casillas que hay (QH13). Si se escribe la secuencia numérica y se va tachando los numerales desde el último hasta que queda la cantidad menor del problema. Por último, se cuenta los numerales tachados (QH12).

Figura 4.42. Modalidad QH12

Solo observamos un alumno utilizar los bloques de base 10 para la estrategia quitar hasta, en la sesión 6. El niño representó la cantidad mayor con barras y unidades de base 10, apartó la barra y algunas unidades hasta que quedó la cantidad menor del problema y contó lo que quedaba, señalando la barra como 10 y siguiendo contando de uno en uno las unidades (QH11).

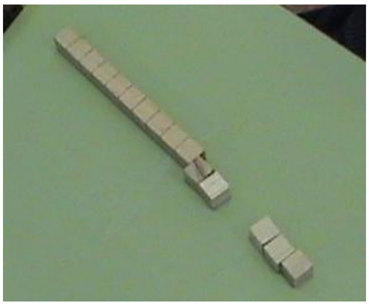


Figura 4.43. Modalidad QH11 en la sesión 6

La estrategia añadir hasta consiste en representar primero la cantidad menor del problema, completando esa colección después hasta obtener la cantidad mayor. En este proceso los elementos que se van añadiendo deben distinguirse de los inicialmente representados, ya que la solución del problema se consigue contando la cantidad de elementos añadida. Esta estrategia ha sido utilizada con dibujos (AH1), con los dedos de la mano que con su configuración permite distinguir los añadidos (AH2) y con cubos encajables (AH6).

Para terminar las estrategias de modelización directa, la estrategia de correspondencia uno a uno consiste en representar las dos cantidades de problema, emparejando todos los elementos de una colección con los elementos de la otra colección. Si las cantidades son diferentes, habrá elementos que se queden sin pareja y la solución se consigue contando estos últimos. En las estrategias observadas se ha utilizado marcas (E1), objetos (E2), dibujos (E3) y cubos encajables (E4).

Figura 4.44. Estrategia E4 en la sesión 22

Las estrategias de conteo que se han podido observar son *conteo hacia atrás* (CA), *contar hasta* (CH) y *conteo hacia atrás hasta* (CAH). El conteo hacia atrás consiste en enunciar la secuencia de numerales desde el numeral mayor hacia atrás, tantos numerales como indica la cantidad menor del problema, llevando el rastro mentalmente o con los dedos. De esta estrategia no se han dado modalidades.

La estrategia contar hasta consiste en enunciar la secuencia de numerales hacia delante desde la cantidad menor a la cantidad mayor, llevando el rastro de los numerales enunciados mentalmente o con los dedos de la manos (CH2). Una modalidad de esta estrategia es utilizar una colección de marcas para ayudarse a llevar el rastro de los numerales enunciados (CH1).

Tabla 4.22. *Frecuencia acumulada de estrategias de modelización directa y modalidades en problemas aditivos (resta)*

Estrategia	Modalidades		Fr.
Quitar	Q1	Cubos encajables, conteo 1-1	35
	Q2	Objetos, conteo 1-1	18
	Q3	Marcas, conteo 1-1	48
	Q4	Dibujos, conteo 1-1	10
	Q5	Rekenrek, sin usar su configuración	20
	Q6	Rekenrek usando su configuración	4
	Q7	Dedos sin usar su configuración	3
	Q8	Tabla 100 empezando por el 1	7
	Q9	Tabla 100 empezando por el numeral mayor	5
	Q10	Secuencia escrita empezando por el último	1
	Q11	Rekenrek sin utilizar configuración, identificando cantidad por subitización	6
	Q12	Dedos usando la configuración de las manos	1
	Q13	Quitar con hueveras rellenas con objetos	2
	Q14	Quitar con marcas, representado en grupos de 10, contando de uno en uno	2
	Q15	Quitar con base 10 contando de uno en uno	3
	Q16	Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, conteo 1-1	1
	Q17	Quitar con base 10 contando de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades	2
Quitar hasta	QH1	Marcas, contando las marcas que deben quedar	21
	QH2	Dibujos contando los dibujos que deben quedar	4
	QH3	Objetos, contando los objetos que deben quedar	4
	QH4	Rekenrek, sin usar configuración, subitización cantidad que debe quedar	3
	QH5	Marcas, subitización las marcas que deben quedar	2
	QH6	Dibujos, subitización los dibujos que deben quedar	1
	QH7	Cubos encajables	1
	QH8	Cubos encajables, subitización la cantidad que debe quedar	1
	QH9	Rekenrek, sin usar su configuración, contando la cantidad que debe quedar	3
	QH10	Quitar hasta con los dedos, utilizando la configuración	1
	QH11	Quitar hasta con bloques de base 10, contando de 10 en 10 la cantidad inicial y la final	1
	QH12	Secuencia numérica escrita, tachando todo menos la cantidad menor del problema	1
	QH13	Tabla 100, contando los numerales que hay desde el numeral mayor al menor	3
Añadir hasta	AH1	Dibujos	3
	AH2	Con los dedos de las manos	1
	AH3	Cubos encajables, contando de 10 en 10	2
	AH4	Tabla 100 conteo 1-1	6
	AH5	Base 10 conteo 1-1	2
	AH6	Cubos encajables	2
	AH7	Marcas	2
Correspondencia uno a uno	E1	Marcas	3
	E2	Objetos	1
	E3	Dibujos	1
	E4	Cubos encajables	3

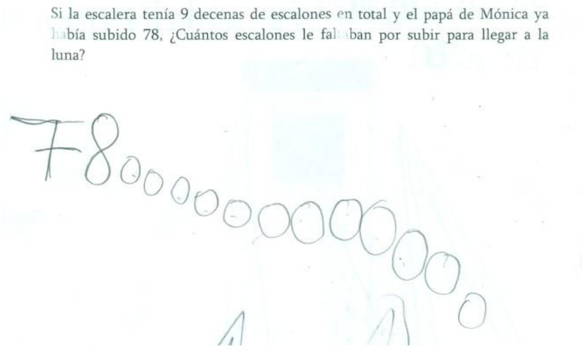


Figura 4.45. Estrategia CH1 en la sesión 19

La estrategia contar hacia atrás hasta consiste en enunciar la secuencia numérica desde la cantidad mayor a la cantidad menor, llevando el rastro de los numerales enunciados mentalmente o con los dedos de la mano (CAH1).

Las estrategias más formales utilizadas en los problemas de resta han sido la recuperación de hechos numéricos (HN1), que en la resta necesita usar un hecho numérico de la suma y entender la relación de la suma y la resta, y la realización del algoritmo de la resta (AL2).

Tabla 4.23. *Frecuencia acumulada de estrategias de conteo, inventadas y formales en problemas aditivos (resta)*

Contar hacia atrás	CA1	Contar hacia atrás llevando el rastro mentalmente	2
Contar hasta	CH1	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con marcas	2
	CH2	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con las manos o mentalmente	8
Contar hacia atrás hasta	CAH1	Contar hacia atrás hasta	1
	CAH2	Contar hacia atrás hasta llevando el rastro con marcas	1
Hecho numérico	HN1	Hecho numérico básico suma, usado para la resta	1
Inventada	EI6	Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas	3
	EI11	Para restar, completa a la década la cantidad a restar, se restan las decenas de ambos números, luego restan las unidades a lo que le queda, y en su caso, suma las unidades de la cantidad a la que había que restar.	1
	EI12	Añadir unidades hasta completar la década, añade las decenas que le faltan, y en el caso, las unidades.	1
	EI13	Resta las decenas, luego las unidades a quitar.	1
Algoritmo	AL2	Algoritmo de la resta	17

Para completar la descripción de las estrategias utilizadas en los problemas de resta, voy a describir las combinaciones utilizadas en los problemas que suponen dos etapas de las sesiones 16, 19 y 23. Para ver con mucho detalle las estrategias con sus modalidades que se han registrado en este tipo de problemas, remito a lector al Anexo 1.

En la Tabla 4.24 muestro las combinaciones de las estrategias utilizadas en la primera etapa con las de la segunda etapa. Las primeras combinaciones consisten en la estrategia *agrupamiento-quitar*.

La modalidad de agrupamiento en la que se dejan por separado los grupos sin representante de grupo combinada con la estrategia quitar se ha presentado en dos modalidades por el uso de distintos materiales, con cubos encajables (A1-Q1) y con objetos (A20-Q2). La combinación de agrupamiento añadiendo los grupos a única colección y la estrategia quitar ha sido utilizada con más variedad de materiales, con cubos encajables (A2-Q1), con objetos (A22-Q2), con dibujos (A32-Q4) y con marcas (A28-Q3). En la Figura 4.46 se puede observar la representación con los grupos de 10 separados que al quitar los elementos queda un grupo de 10 con unidades sueltas, en la imagen izquierda. En la imagen de la derecha, inicialmente se había hecho una barra única con todos los grupos, se ha retirado una barra con la cantidad a quitar, y la cantidad final queda en una barra en la que no hay grupos de 10.

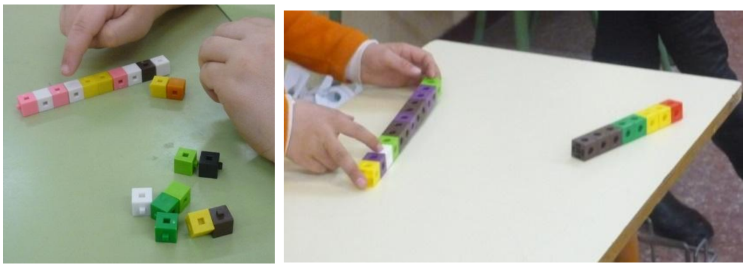


Figura 4.46. Modalidades A1-Q1 y A2-Q1 de la sesión 16

Un alumno utilizó las manos mostrándolas varias veces para representar los grupos de 10. Utilizando la configuración de las manos quitó tantos dedos como indicaba la cantidad del problema, y después consideró las unidades que quedaban más las otras tandas de manos completas que le quedaban (A4-Q12).

Los cartones de decena de huevos rellenas con cubos encajables han servido para representar grupos de 10 (A31) y ha surgido una modalidad de quitar, retirando los cubos encajables de las hueveras que indica la cantidad del problema, y contando los cubos encajables que quedan en la huevera de uno en uno (Q13). Así tenemos una nueva modalidad de agrupamiento-quitar.

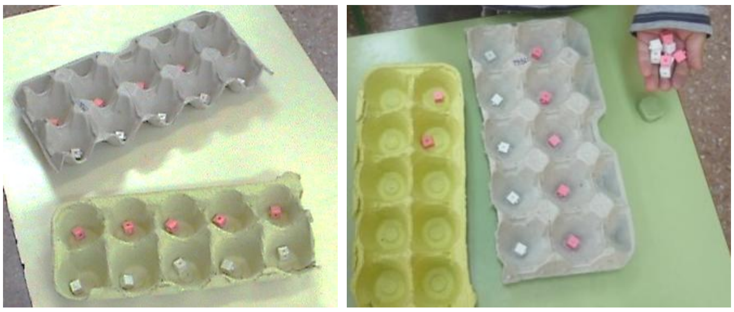


Figura 4.47. Modalidad A31-Q13 de la sesión 16

El agrupamiento con bloques de base 10 contando de uno en uno (A25) y de 10 en 10 (A29) ya lo he explicado en los problemas de multiplicación con grupos de 10. Tener organizada la cantidad mayor de un problema de resta con bloques de base 10, ha provocado distintas modalidades de la estrategia quitar con este material. Se puede quitar unidades de uno en uno o contar de uno en uno unidades de las barras para ver cuáles no se consideran y cuáles quedan (Q15). Se puede cambiar barras por unidades para poder quitar las unidades (Q16), y si la cantidad que queda es mayor de que 10 se puede realizar el recuento final de 10 en 10 (Q17). En el taller se ha observado las modalidades de la estrategia agrupamiento-quitar con bloques de base 10 A25-Q15 y A29-Q17.

Los bloques de base 10 se han utilizado también en la estrategia uso del valor posicional-quitar. En este caso los niños representan los grupos de la primera etapa directamente con las barras de 10 sin tener la necesidad de realizar el recuento final, simplemente representan el número de grupos de 10 o decenas que indica el problema poniendo una barra de 10 por cada una de ellas, no necesitan el recuento final, reconocen la década a la que corresponde esa representación. Esta primera etapa es una modalidad de uso del valor posicional (VP3), que se ha combinado con las tres estrategias de quitar con bloques de base 10 que acabo de describir, es decir, surgen las modalidades VP3-Q15, VP2-Q16 y VP3-Q17.

Antes de terminar con las estrategias que han utilizado los bloques de base 10, describo la combinación VP3-AH5. Los niños reconocen la cantidad mayor del problema que viene dada en decenas, y representan primero la cantidad menor del problema con bloques de base 10, completando después hasta las barras que supone la cantidad mayor del problema. En la Figura 4.48 se puede ver a la izquierda la representación de la cantidad menor del problema y a la derecha lo que se añade para completar la cantidad mayor del problema, que ese problema eran 9 decenas.

Figura 4.48. Modalidad VP3-AH5 de la sesión 19

Como se puede ver en la Tabla 4.24, hay muchos casos en los que se en la primera etapa se identifica que un número de grupos de 10 o decenas corresponde a una década, es decir, 4 decenas son 40 o 3 grupos de 10 son 30. Los alumnos que utilizan este conocimiento se puede decir que el problema consiste en una única etapa de resta. Así se puede observar que hay una variedad de estrategias de modelización directa como quitar, quitar hasta, añadir hasta, correspondencia uno a uno, estrategias de conteo, inventadas incluso uso del algoritmo. Describo a continuación las modalidades de estas estrategias que no lo haya hecho antes.

La estrategia quitar con marcas, en la que se representa las cantidades del problema separando decenas y unidades, y luego se tacha de uno en uno los elementos (Q14) es una modalidad distinta a Q3, ya que la forma de representación de cantidades es más avanzada y toma importancia en este trabajo. En la Figura 4.49, imagen izquierda, se puede ver que la cantidad mayor dada en decenas se presenta en una única colección sin distinguir la decenas. En la imagen de la derecha, la alumna explicó que 9 decenas eran 90 y se dispuso a pintar las 90 marcas en filas de 10.

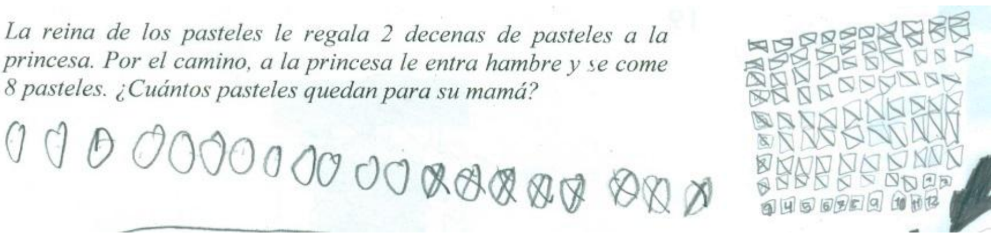


Figura 4.49. Representaciones de Q3 y Q14

Tabla 4.24. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades en problemas aditivos (resta) con agrupamientos de 10*

Primera etapa			Segunda etapa			
Es	Modalidades		Es	Modalidades		Fr.
A	A1	Cubos encajables, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	Q	Q1	Cubos encajables, conteo 1-1	6
A	A2	Cubos encajables, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1	Q	Q1	Cubos encajables, conteo 1-1	2
A	A20	Objetos, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	Q	Q2	Objetos, conteo 1-1	1
A	A22	Objetos, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1	Q	Q2	Objetos, conteo 1-1	1
A	A32	Dibujos, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1	Q	Q4	Dibujos, conteo 1-1	1
A	A28	Marcas, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1	Q	Q3	Marcas, conteo 1-1	4
A	A4	Dedos, usando su configuración	Q	Q12	Dedos usando la configuración de las manos	1
A	A31	Hueveras, rellenas cubos encajables, conteo 1-1	Q	Q13	Quitar con hueveras rellenas con objetos	2
A	A25	Base 10, conteo 1-1	Q	Q15	Base 10, conteo 1-1	1
A	A29	Base 10, conteo 10-10	Q	Q17	Base 10, cambiando decenas por unidades, conteo 10-10	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q	Q3	Marcas, conteo 1-1	12
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q	Q14	Marcas, con grupos de 10, contando 1-1	2
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q	Q1	Cubos encajables, conteo 1-1	5
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q	Q6	Rekenrek usando su configuración	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q	Q9	Tabla 100 empezando por el numeral mayor	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	QH	QH13	Tabla 100	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	AH	AH3	Cubos encajables, conteo 10-10	2
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	AH	AH7	Marcas	2
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	AH	AH6	Cubos encajables	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	AH	AH4	Tabla 100 conteo 1-1	6
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	E	E4	Cubos encajables	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	E	E1	Marcas	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	CA	CA1	Contar hacia atrás	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	CH	CH2	Contar hasta,	7
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	CH	CH1	Contar hasta, llevando el rastro con marcas	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	CAH	CAH2	Contar hacia atrás hasta, rastro con marcas	1
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	EI	EI6	Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas.	3
VP	VP2	Equivalencia de decenas en unidades	AL	AL2	Algoritmo de la resta	6
VP	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10	AH	AH5	Base 10, conteo 1-1	2
VP	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10	Q	Q15	Base 10, conteo 1-1	2
VP	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10	Q	Q16	Base 10, cambiando decenas por unidades, conteo 1-1	1
VP	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10	Q	Q17	Base 10, cambiando decenas por unidades, conteo 10-10	1
VP	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10	EI	EI11	Completa a la década la cantidad a resta, se restan las decenas, resta a 10 las unidades que había que quitar y o suma al resultado anterior	1
VP	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10	EI	EI12	Añadir unidades hasta completar la década, y luego al total.	1
VP	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10	EI	EI13	Resta las decenas, luego las unidades a quitar.	1

La estrategia añadir hasta se ha utilizado con la Tabla 100, que consiste en contar desde el numeral menor hasta el numeral mayor del problema con ayuda de la Tabla 100 (AH4). Más avanzado el apartado detallo las estrategias con Tabla 100. Realizar añadir hasta con marcas o cubos encajables contando de uno en uno, consiste en formar una colección de marcar o cubos encajables con la cantidad menor del problema, y añadir distinguiendo de la anterior colección, tantas marcas o cubos como sea necesario para completar la cantidad mayor del problema (AH7 y AH6). Si la cantidad mayor se representa en grupos de 10, se puede contar de 10 en 10 las cantidades iniciales y finales, lo que genera una nueva modalidad, que en el taller se dio con los cubos encajables (AH3).

Figura 4.50. Estrategia VP2-AH3 en la sesión 19

La estrategia de conteo contar hacia atrás hasta (CAH) cuenta con una nueva modalidad en la que el alumno necesita ir poniendo un punto por cada numeral que cuenta hacia atrás, desde la cantidad mayor hasta la cantidad menor (CAH2).

Las estrategias inventadas (EI) utilizadas en problemas de resta solo se han dado en las sesiones que he considerado de dos etapas, la mayoría en la penúltima sesión del taller. La primera estrategia inventada que se utilizó consiste en descomponer en decenas la cantidad mayor del problema, restar las unidades a una decena, y el resto de unidades sumarlas a las otras decenas (EI6). Otra modalidad consistió en completar a la década siguiente la cantidad que hay que resta (por ejemplo, para 40 – 26, se considera 30), se restan las decenas de ambos números (40-30=10), luego restan las unidades a 10 (10-6=4), y lo que queda se suma al resultado anterior (10+4=14) (EI11). Otra forma de hacerlo es completar a la década siguiente (30, que añado 4), y sumar esta cantidad a las decenas que falta para llegar al número mayor (4+10=14) (EI12). Y por último, restar las decenas y unidades por separado (4 – 2 son 2 decenas, que son 20 unidades, menos 6, 14) (EI13). Por último, el algoritmo de la resta fue elegido por 6 niños en este tipo de problemas, con poco éxito al ser una resta con llevada.

La estrategia que se más se ha utilizado en ambos tipos de problemas, de una etapa o con una etapa previa de agrupamiento por incluir decenas en el enunciado, es Q3. En los problemas que tienen dos etapas, esta estrategia va precedida de un uso del valor posicional. En la Figura 4.51 muestro las capacidades necesarias para ejecutar ambas estrategias. Hay dos capacidades que son solo para el camino de aprendizaje de la tarea de dos etapas, la C31 y C87, que consisten en identificar que los datos están dados en dos unidades de diferente orden y que 9 decenas son 90 unidades. El resto del camino de aprendizaje es común para las dos estrategias.

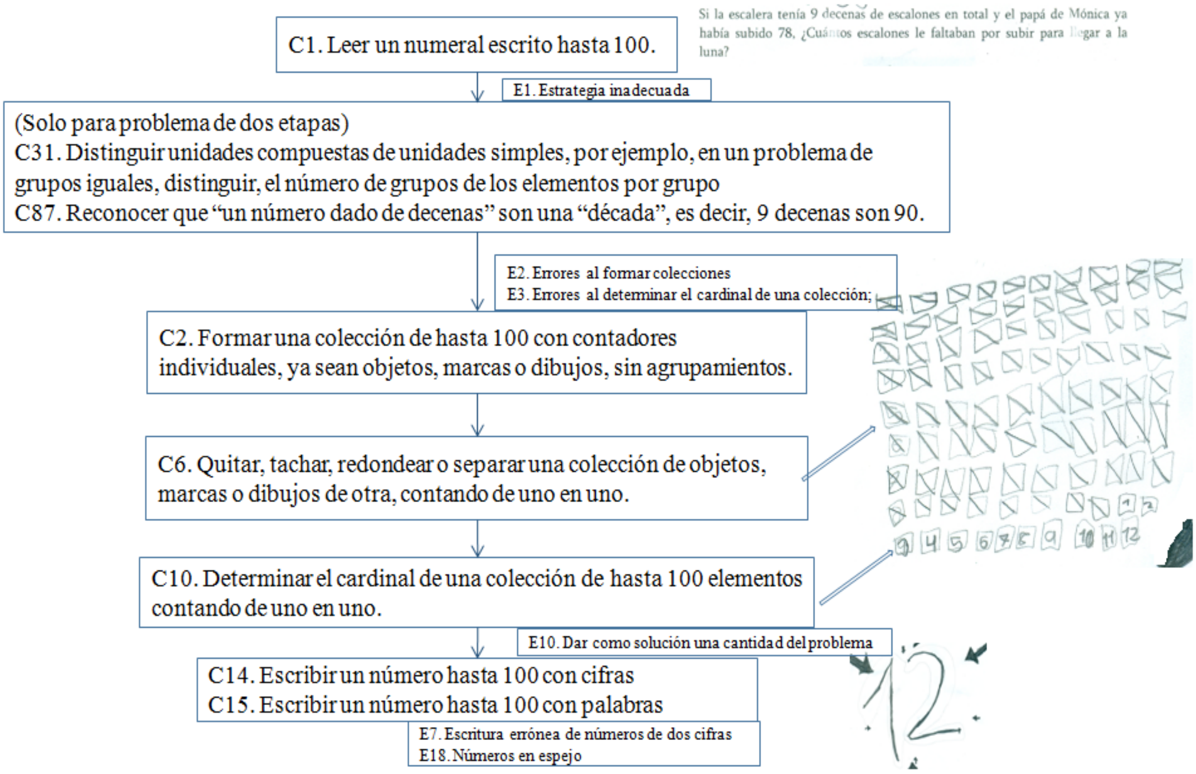


Figura 4.51. Secuencia de capacidades para la estrategia VP2-Q3 o Q3

El análisis de todas las estrategias, me ha permitido identificar las capacidades necesarias para todas de ellas y construir los caminos de aprendizaje para las dos tareas. La Figura 4.52 contiene todas las secuencias de capacidades para las estrategias de problemas de resta sin una primera etapa de agrupamiento. El camino de aprendizaje marcado en negro se corresponde con la estrategia Q3.

En la Figura 4.53, se muestran los caminos de aprendizaje para los problemas de dos etapas, siendo la primera de agrupamiento y segunda de resta. El camino de aprendizaje marcado en negro se corresponde con la estrategia VP2-Q3.

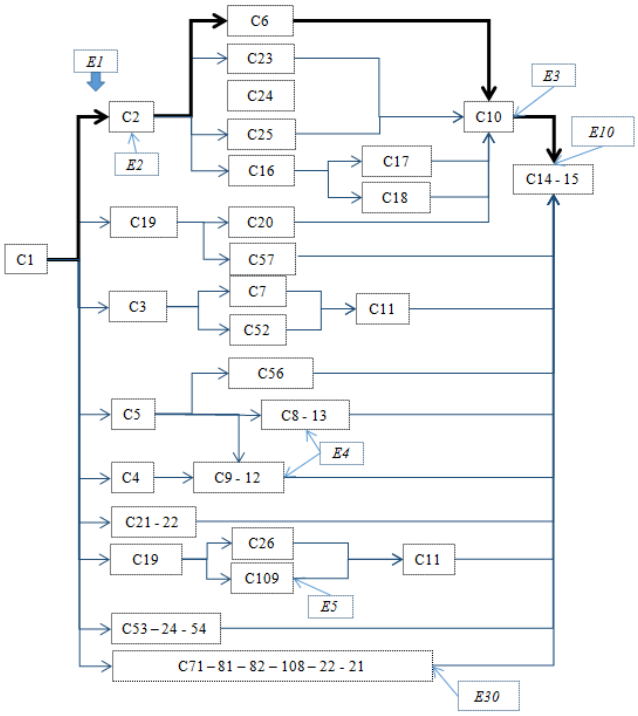


Figura 4.52. Caminos de aprendizaje para problemas de resta de las sesiones 1, 2, 6 y 22

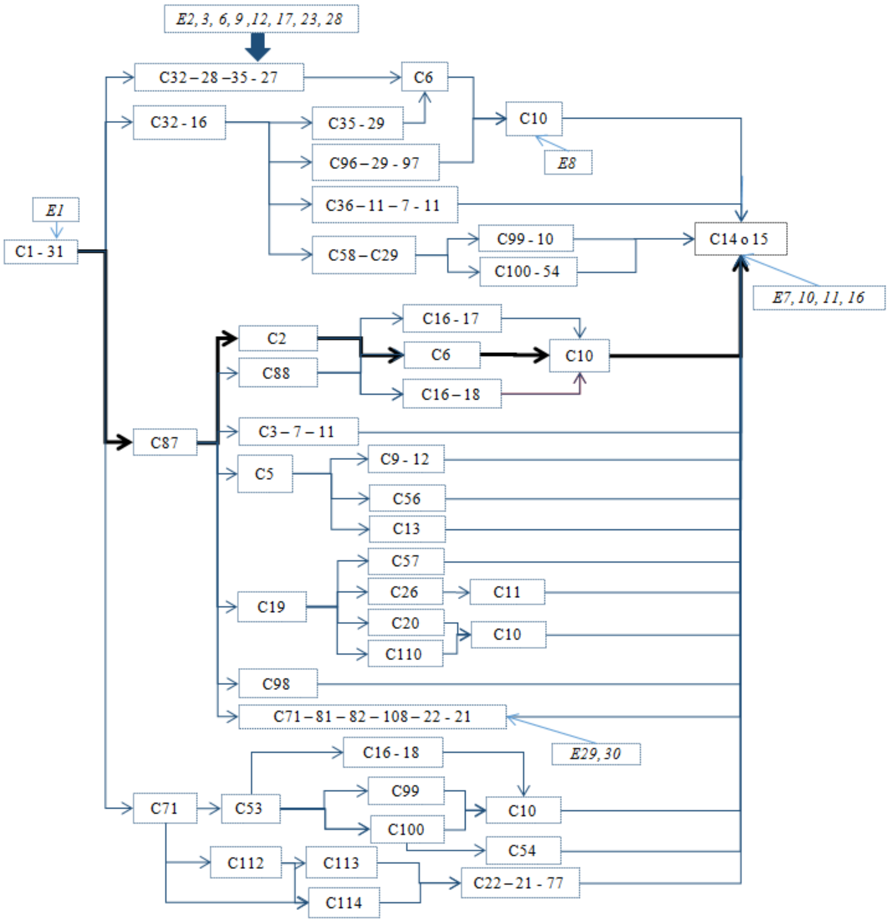


Figura 4.53. Caminos de aprendizaje para problemas de resta con agrupamientos de 10 en la primera etapa de las sesiones, 16, 19 y 23

4.2.2.2. Evolución de las estrategias

Hay siete sesiones en las que se plantean problemas de este tipo, que son la sesiones 1, 2, 6, 16, 19, 22 y 23. Las estrategias que han utilizado los niños en los problemas de estructura aditiva que implican una resta se ajustan a los resultados de los estudios previos. Los niños utilizan estrategias de modelización directa, inicialmente ajustándose a la estructura semántica del problema, y más tarde hacen un uso flexible de ellas. En la sesión 1, se plantea un problema de cambio decreciente con la cantidad final desconocida, donde los niños utilizan generalmente la estrategia de quitar (ver Figura 4.54). En la sesión 2, se plantea un problema de cambio decreciente con la cantidad de cambio, aumentando el uso de la estrategia de quitar hasta, y descendiendo el uso de quitar. En esta segunda sesión aparece también la correspondencia uno a uno que se mantiene en la sesión 6. En sesiones más avanzadas, la estrategia de quitar desciende, y se utilizan de forma flexible más estrategias de modelización como añadir hasta, ya sea un problema de cambio decreciente con la cantidad de cambio desconocida o la cantidad final desconocida. Con menos frecuencia, utilizan estrategias como añadir hasta y correspondencia uno a uno. Las estrategias de conteo que, desde la sesión 2 se utilizan por un alumno en cada una de ellas, en la sesión 19 aumentan hasta siete casos, luego vuelve a descender su uso. En las sesiones 16 y 23 aparece levemente el uso de estrategias inventadas. La utilización del algoritmo de la resta aumenta en las sesiones 19 y 22 progresivamente, y en la sesión 23, que se plantea un problema de comparación con diferencia desconocida, que implica resta con llevada, desciende de nuevo.

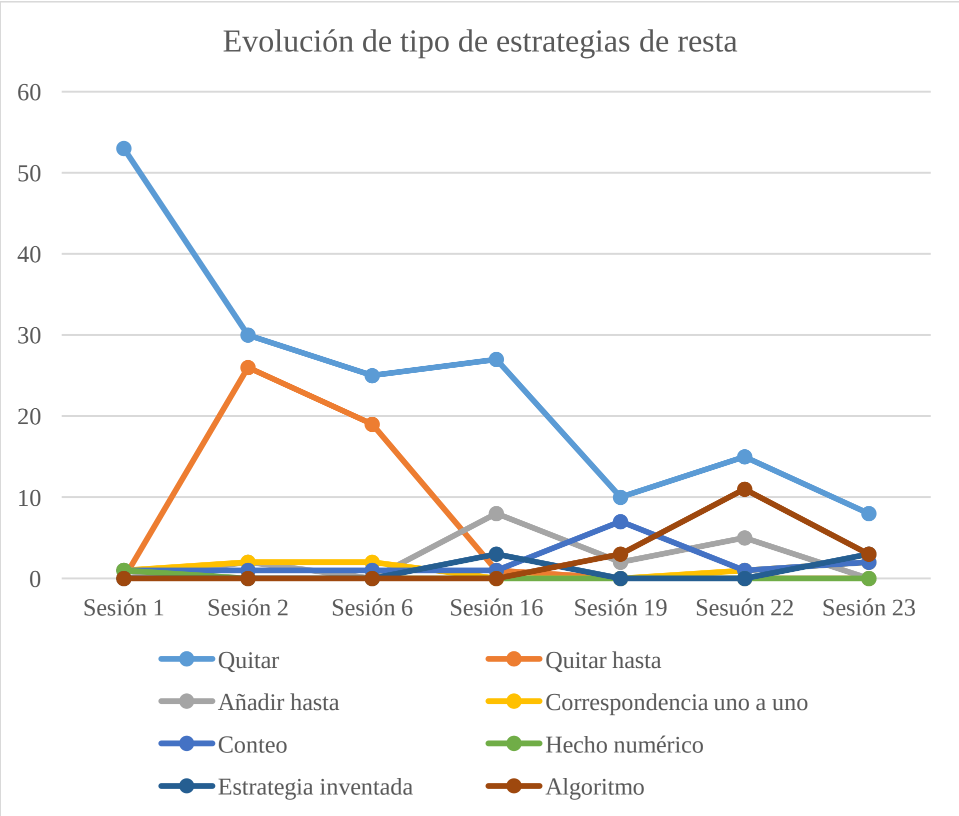


Figura 4.54. Frecuencias absolutas de estrategias de resta

Como en los problemas anteriores, el interés central de este trabajo consiste en el estudio de aspectos del sistema de numeración decimal, como el agrupamiento de 10. Voy a clasificar las estrategias según se representan las cantidades con grupos de 10 o con otros materiales que tengan estructura de grupo de 10, y como se realiza su conteo. En la Tabla 4.25 presento los grupos, similares en los problemas anteriores, y las estrategias que se ajustan a ese criterio. Como hay tres problemas en los que hay una cantidad dada en decenas, aparecen estrategias con dos etapas, aspecto que hay que contemplar, porque en la primera etapa pueden dejar separados los grupos de 10 o no. El grupo *modelización directa sin grupos de 10, conteo de uno en uno* presenta las cantidades sin grupos de 10, y al formarlas o al realizar la acción que implica la estrategia, se cuenta de uno en uno. Los grupos *modelización directa, con grupos de 10, conteo de 1 en 1* y *modelización directa, con grupos de 10, conteo de 10 en 10* tienen las cantidades representadas con grupos de 10, y se pueden contar de uno en uno, o de 10 en 10. Estos grupos abarcan todas las estrategias con objetos, cubos encajables, dedos, rekenrek y representaciones gráficas.

La Tabla 100 se ha utilizado en casi todas las sesiones y he incluido estas estrategias en *modelización Tabla 100, conteo de 1 en 1*. En estas estrategias se busca el numeral de la cantidad mayor, y luego se cuenta de uno en uno los numerales que hay que quitar, o los numerales que hay de un número a otro, el conteo observado en las estrategias fue siempre de uno en uno.

Al igual que en problemas anteriores, el conteo en las estrategias incluidas en *modelización con bloques de base 10* se puede realizar de uno en uno, o de 10 de 10. En el caso de la resta hay niños que al tener que quitar cantidades diferentes a una década, cambian las barras por unidades para poder realizar la acción. Así aparecen dos nuevos grupos, *modelización base 10, conteo 1 en 1, cambiar decenas* y *modelización base 10, conteo de 10 en 10, cambiar decenas*.

Tabla 4.25. *Agrupación de estrategias observadas de las sesiones de resta por representación y conteo*

Agrupamiento	Estrategias
Modelización directa sin grupos de 10, conteo de 1 en 1	Q1; Q2; Q3; Q4; Q5; Q6; Q7; Q10; Q11; QH1; QH2; QH3; QH4; QH5; QH6; QH7; QH8; QH9; QH10; QH12; AH1; AH2; AH6; AH7; E1; E2; E3; E4; A2-Q1; A22-Q2; A32-Q4; A28-Q3
Modelización directa, con grupos de 10, conteo de 1 en 1	Q14; Q6; A1-Q1; A20-Q2
Modelización hueveras, conteo de 1 en 1	A31-Q13
Modelización base 10, conteo 1 en 1	Q15; A25-Q15; VP3-AH5
Modelización base 10, conteo 1 en 1, descomponer decenas	VP3-Q16
Modelización directa con grupos de 10, conteo de 10 en 10	A4-Q12; VP2-AH3
Modelización base 10, conteo 10 en 10	Q17; QH11
Modelización base 10, conteo 10 en 10, descomponer decenas	A29-Q17;
Modelización Tabla 100, conteo de 1 en 1	Q8; Q9; QH13; AH4
Conteo objetos	CH1; CAH2
Conteo	CA1; CH2; CAH1
Hecho numérico	HN1
Estrategias inventadas	EI6; EI11; EI12; EI13
Algoritmo	AL2

Las estrategias de conteo están divididas en dos grupos, las que necesitan de objetos o marcas para llevar el rastro de la secuencia de conteo *(conteo objetos)*, y las que llevan el rastro mentalmente o con las manos *(conteo)*.

Las cuatro variantes de *estrategias inventadas* han sido incluidas en un grupo con el mismo nombre. Y finalmente, el uso de *algoritmos*, que en este caso corresponde el algoritmo de la resta.

Para ver la evolución por esta agrupación adjunto el gráfico de barras de la Figura 4.55. Una vez más las estrategias de *modelización directa sin grupos de 10 y contando de uno en uno*. El uso de la Tabla 100 ha sido utilizadas en todas la sesiones, a excepción de la segunda. En la sesión 16 disminuye la frecuencia de uso de este tipo de estrategias, y se utilizan estrategias de modelización con estructuras de 10 contando de uno en uno, con algún caso de 10 en 10, y el primer uso de *estrategias inventadas* en problemas de resta. Es en esta sesión donde se plantea el primer problema con una cantidad dada en decenas. En la siguiente sesión (19), desciende más el uso de modelización directa sin grupos de 10 y se utiliza por primera vez, la modelización con base 10 cambiando decenas por unidades y el algoritmo de la resta, cuyo uso aumenta en la sesión 22, y vuelve a descender en la última sesión que se plantea un problema de comparación con diferencia desconocida.

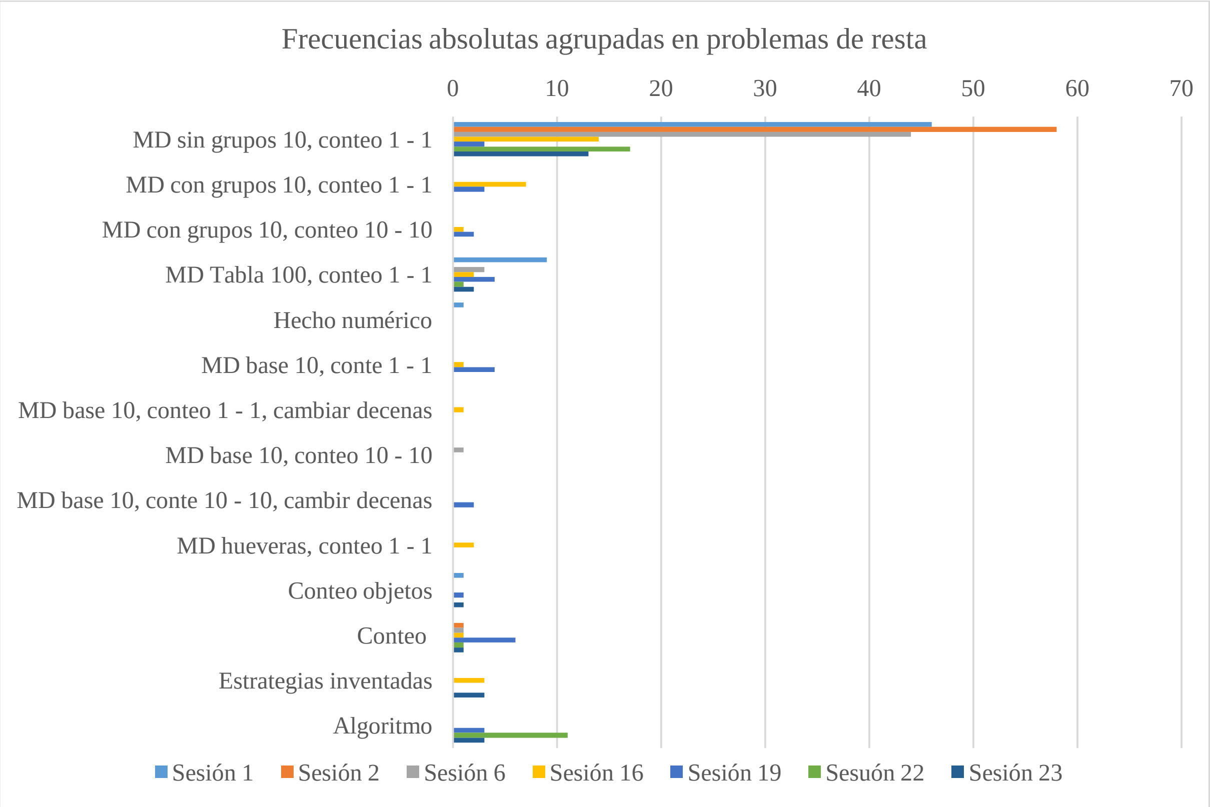


Figura 4.55. Frecuencias absolutas de grupos de estrategias en problema de restar

Las estrategias de modelización directa sin grupos de 10 y contando de uno en uno son las más frecuentes en todas las sesiones. Según avanza el taller, el uso de estas estrategias disminuye ya que aumenta el uso de estrategias más avanzadas aunque moderadamente.

4.2.2.3. Uso de materiales

En las primeras sesiones, en las que las cantidades eran menores que 20, el uso del rekenrek ha sido bastante frecuente. Este material tiene una estructura de dos filas de 10 bolas, y en cada fila, las bolas se agrupan de 5 en 5 por el color. Este material tiene una forma predeterminada de uso, y en el taller no se ha formado a los niños, simplemente lo han manipulado como ellos creían. En las sesiones se han observado estrategias donde los niños lo utilizaban, tomando las bolas como contadores, sin utilizar su configuración. Sin embargo, hay niños que identificaban las cantidades por color y por filas, y han utilizado espontáneamente sus patrones. En la Figura 4.56 se puede observar a la derecha del rekenrek, la descomposición de 11, en 5 y 6, representación que soluciona el problema de la sesión 1.

Figura 4.56. Estrategia con el rekenrek usando su configuración en la sesión 1

En esta investigación es de gran interés las estrategias que utilizan los niños al resolver problemas con números de dos cifras. Al igual que he mostrado en los problemas aditivos que se resuelven con una suma, en este apartado describo la evolución de las estrategias observadas. En la sesión 16, la cantidad mayor del problema es 20, y es en esta misma sesión donde se introduce la cantidad inicial de un problema de cambio decreciente con cantidad final desconocido con el término *decena*, "2 decenas".

En la sesión 16, 19 y 23, se presenta la cantidad mayor del problema en *decenas*, lo que supone una primera etapa en la resolución. En las primeras sesiones (1, 2 y 6) y en la sesión 22, las cantidades se dan en unidades y los niños no hacen grupos de 10 en sus representaciones. Solo en la Sesión 6 hay un niño que representa la cantidad de 15 globos con una barra de base 10 y 5 unidades. Esto le permite deducir rápidamente la solución, al dejar 3 globos y tener una barra y dos unidades. En la siguiente sesión, la 16, en el enunciado se introduce la cantidad mayor en decenas. Los niños que modelizan esta primera etapa, pueden hacer dos grupos de 10 por separado, lo que da la posibilidad a contar de 10 en 10. Otros niños acumulan los grupos de una colección y solo pueden contar de uno en uno, como ocurre en la sesión 6.

Los niños empiezan a conocer que 2 decenas son 20, y usan estrategias de modelización que representan 20 objetos o marcas sin agrupamiento de 10. Esto no permite contar de 10 en 10. Sin embargo, introduciendo materiales como las hueveras (cartones de decena de huevos), que permiten la posibilidad de evolucionar en la representación de las cantidades, separando decenas y unidades, y en la forma de contarlas. En la Figura 4.57 puede observarse ejemplos de esta evolución.

Los bloques de base 10, tal como indica el marco teórico, permiten representar las cantidades en decenas y unidades, incluso desglosarla en acciones como la de quitar, como se puede ver en la Figura 4.57.

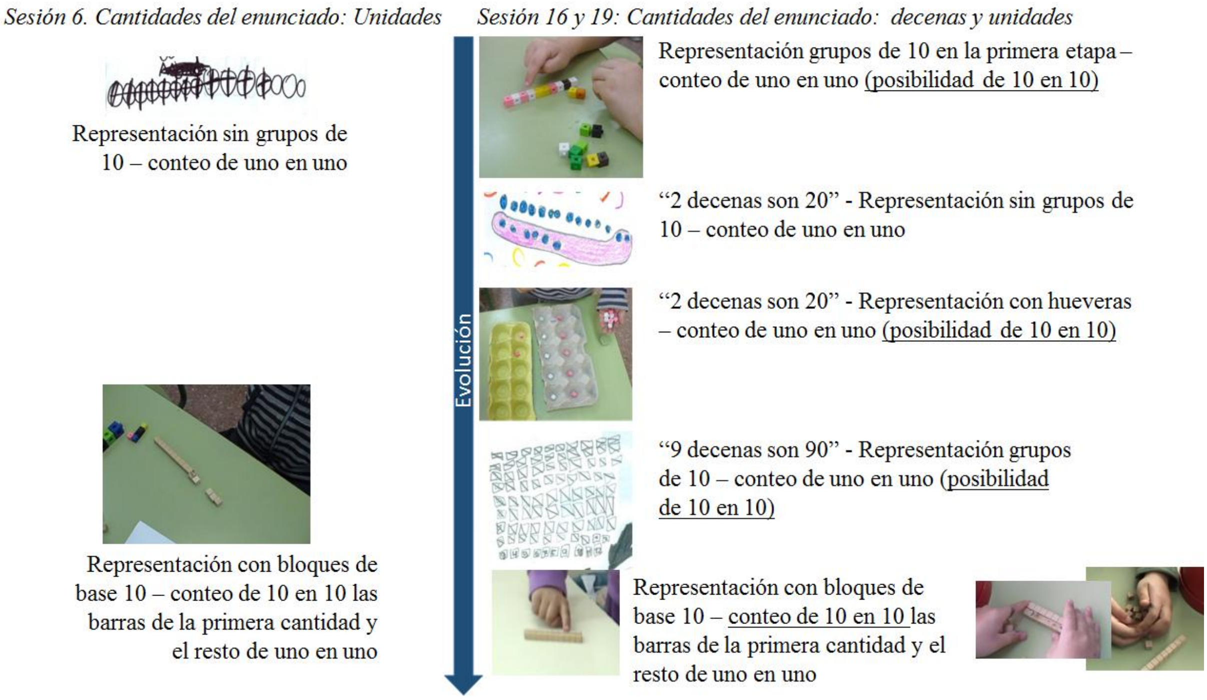


Figura 4.57. Evolución de la modelización directa para resta de la sesión 6 a la sesión 19

Las estrategias de resta con Tabla 100 tienen distintos variaciones de ejecución. La estrategia quitar se puede realizar de dos formas diferentes. La primera consiste en considerar todos los numerales hasta la cantidad mayor, quitar los numerales que hay desde el 1 hasta el numeral la cantidad que hay que quitar, y contar los numerales que quedan hasta el numeral mayor. En la Figura 4.58 un alumno considera 11 damas atrevidas en la primera imagen. En la segunda imagen considera las 6 que quitan, que son los numerales del 1 al 6. Por último, cuenta los numerales del 7 al 11 para saber la solución.

Figura 4.58. Estrategia quitar los primeros con Tabla 100

La siguiente estrategia es una modalidad de aplicación de las estrategia quitar similar a la anterior pero se quita los últimos numerales en la Tabla 100. Una alumna considera las dos primeras filas de la Tabla 100, 20, y tiene que quitar 8. Para ello cuenta desde el 20, 8 numerales hacia atrás, quedando al final 12 numerales sin quitar (Figura 4.59).

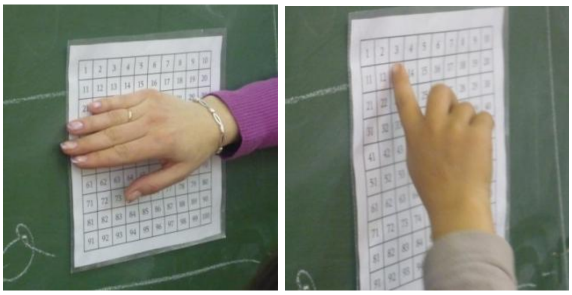


Figura 4.59. Estrategia quitar los últimos con Tabla 100

También se ha utilizado la estrategia quitar hasta con la Tabla 100. En la Figura 4.60 una niña señala el 20, la cantidad mayor, y el 8, la cantidad menor del problema. Después realiza un conteo desde el 20 hasta el 8 para saber cuántos numerales hay.

Figura 4.60. Estrategia quitar hasta con Tabla 100

La estrategia añadir hasta con Tabla 100 se puede observar en la Figura 4.61 donde una niña cuenta desde el 78 hasta el 90 para saber cuántos numerales hay.

Figura 4.61. Estrategia añadir hasta con Tabla 100

En el gráfico de la Figura 4.62 muestro la frecuencia de utilización de la Tabla 100 en los problemas que suponen restar las cantidades. La estrategia quitar los primeros numerales de la Tabla 100 se ha utilizado en la primera sesión, y después se ha utilizado en todas las demás quitar los últimos numerales, estrategia con una estructura más semejante a contar hacia atrás, por ir quitando los últimos numerales hacia atrás.

La estrategia *quitar hasta* se ha utilizado en las sesiones 6 y 16; en la primera corresponde con su estructura semántica y en la segunda se utiliza de forma flexible. El uso mayor se dio en la sesión 19, ya que el problema planteado suponía ver cuántos escalones faltaban por subir, si llevaba 78 y había 90. En la última sesión es el problema de comparación, donde hay que ver cuántos más hay un lugar que otro.

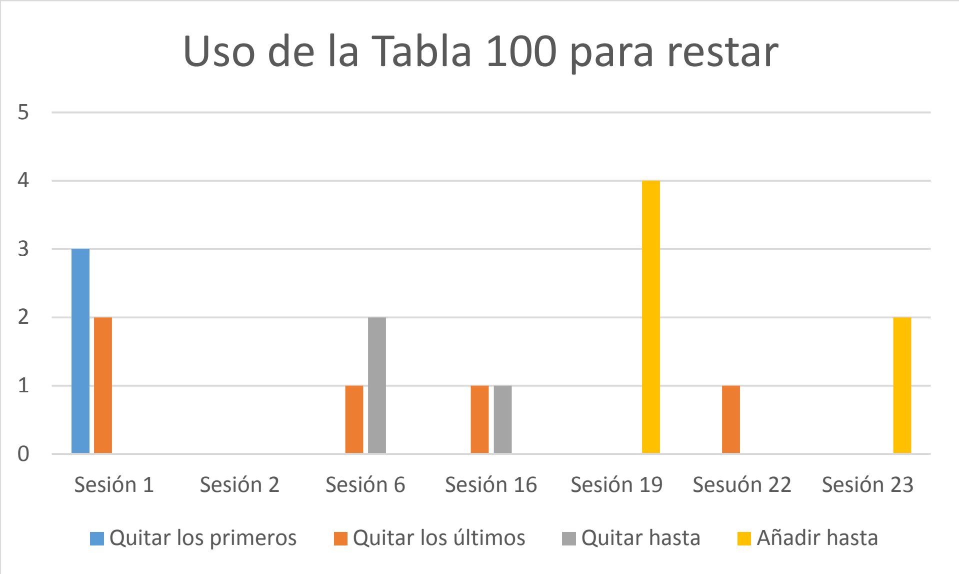


Figura 4.62. Frecuencias absolutas de uso de la Tabla 100 en problema de resta

Comparando los estudiantes que han utilizado la Tabla 100 en los problemas de suma, coinciden con los alumnos que utilizan la Tabla 100 para restar menos uno. Los alumnos A32 y A50, que utilizan la Tabla 100 en la primera sesión, en otras sesiones a lo largo del curso, utilizan estrategias de conteo, y más estrategias avanzadas que el conteo, para resolver los problemas. Lo mismo ocurre con el alumno A52, empezando con la Tabla 100 en la sesión 6. Por último, el alumno A44, toma confianza con la Tabla 100 y resuelve una serie de sesiones el problema con Tabla 100, como ya comenté en el apartado anterior de suma.

Tabla 4.26. *Progresión de estrategias de alumnos que eligen Tabla 100 para restar*

Estudiante	Sesión1	Sesión 2	Sesión 6	Sesión 16	Sesión 19	Sesión 22	Sesión 23
A32	Q T100P	Qoc	CA	EI	CHG	A	EI
E52	Q marcas	QHGm	QHT100	QHT100	CH	QGmC1	EI
E50	QT100U	QD	QHOcSu	EI	CH	CAH	CH
E9	QT100	QR	QT100U	ni	ni	ni	ni
E44	Qoc	C1-1Oc	QG	QT100U	AHT100	QT100U	QGm

4.2.2.4. Estrategias inventadas

Al igual que en la suma, en la resta se han observado cuatro variantes de las estrategias inventadas, cuya descripción muestro en la siguiente Tabla 4.27. Estas estrategias suponen la descomposición de los números en decenas y unidades, completar decenas, operar tanto con decenas y unidades, lo que muestra la adquisición de los conocimientos del valor posicional y la decena del sistema de numeración decimal.

Tabla 4.27. *Variantes de estrategias inventadas en problemas de resta*

Código	Descripción
EI6	Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas.
EI11	Para restar, completa a la década la cantidad a restar, se restan las decenas de ambos números, luego restan las unidades a lo que le queda, y en su caso, suma las unidades de la cantidad a la que había que restar.
EI12	Añadir unidades hasta completar la década, añade las decenas que le faltan, y en el caso, las unidades.
EI13	Resta las decenas, luego las unidades a quitar.

4.2.3. Trayectorias de aprendizaje

Tras la puesta en práctica del taller, el análisis de la evolución de las estrategias me permite incluir aspectos observados en las trayectorias de aprendizaje-enseñanza señaladas en el marco teórico. En el capítulo 2 formé dos trayectorias de enseñanza-aprendizaje para la estructura aditiva, una para números de una cifra o combinaciones básicas (Figura 2.17), y otra para números de dos cifras (Figura 2.26).

Comienzo comparando los resultados del análisis de estrategias de este trabajo con la trayectoria para el aprendizaje de las combinaciones básicas. Los niños primero son capaces de desarrollar las estrategias de juntar todo y quitar. Para ellos se necesita representar colecciones de objetos o marcas (C2), incluso secuencias numéricas escritas (C4). Con estas representaciones establecen las relaciones de quitar o tachar (C6, C25 y C55), añadir a una colección (C27) o considerar juntar dos colecciones sin unirlas físicamente (C29). Para saber el resultado deben ser capaces de determinar el cardinal de una colección mediante conteo (C10) y finalmente dar la solución por escrito (C14 y C15).

Las siguientes estrategias que los niños son capaces de usar generalmente son añadir hasta, quitar hasta y correspondencia uno a uno. Para las estrategias de añadir hasta y correspondencia uno a uno hay que tener la capacidad de representar varias cantidades distinguiéndolas por color, forma o posición (C16). Para la correspondencia uno a uno se necesita disponer dos colecciones emparejadas (C17) y para añadir hasta se debe saber completar una colección hasta completa una cantidad, distinguiendo los elementos añadidos (C18). Para la estrategia quitar hasta se necesita quitar elementos de una colección hasta que queda una cantidad controlada por conteo (C23) o si la cantidad es pequeña por subitización (C24).

En el taller no se han planteado problemas de cambio con la cantidad inicial desconocida y puede ser la causa de no haber registrado ninguna estrategia de ensayo y error.

Antes de pasar a las estrategias de conteo sin material, tal como indica Fuson (1992) se han observado estrategias en las que se utilizan objetos o marcas para llevar el rastro de los numerales que hay que contar o se han contado. Una modalidad de contar hasta con objetos consiste en enunciar hacia delante desde un numeral hasta otro, formando una colección de marcas u objetos equipotente a los numerales enunciados (C20). La modalidad para contar a partir del primero con objetos, supone enunciar la secuencia de numerales hacia adelante tantos numerales como objetos o marcas tenga una colección antes representada (C74). Y por último, una modalidad de contar hacia atrás hasta con objetos consiste en enunciar la secuencia hacia atrás desde un número hasta otro, formando una colección de marcas u objetos equipotente a los numerales enunciados (C110).

El uso de la Tabla 100 ha mostrado modalidades de aplicación de juntar todo y contar a partir del primero. Primero se forma una colección señalando el numeral en la Tabla 100 que corresponde con su cardinal (C5). Para la modalidad de uso de juntar todo, añadir una colección a otra en la Tabla 100 supone contar a partir de un numeral, tantos numerales como indica la otra cantidad (C30). Para determinar el resultado se puede contar de uno en uno todos los numerales hasta la casilla resultado (C13) o simplemente determinar el resultado por el último numeral señalado (C12). Para la modalidad de contar a partir de un sumando, la Tabla 100 se utiliza para llevar el rastro de los numerales que se deben enunciar, partiendo de ese primer sumando (C80). Para la modalidad de quitar, tras representar una cantidad con todas las casillas hasta el numeral que indica el cardinal (C5), se pueden quitar los primero numerales (C8) o los últimos (C9). Para la modalidad de quitar hasta, se cuenta el número de casillas que hay entre dos numerales empezando desde el mayor hacia atrás hasta el menor (C56).

Tanto el conteo con objetos como las estrategias con Tabla 100 son estrategias de transición entre la modelización directa y el conteo.

Las estrategias de conteo necesitan formar una colección con el numeral de su cardinal (C19). Contar a partir del primero suponen enunciar la secuencia de numerales hacia delante una cantidad de numerales llevando el rastro mentalmente o con los dedos (C61). En la estrategia contar hasta se enuncia la secuencia de un numeral hasta otro hacia delante llevando el rastro de los numerales enunciados con los dedos o mentalmente (C26).

Las estrategias de conteo hacia atrás y hacia atrás suponen capacidades similares a C61 y C26, realizando el conteo hacia atrás (C57 y C109). Para utilizar la estrategia contar a partir del mayor debe establecerse un orden en las cantidades del problema (C73).

El siguiente nivel recoge la elección flexible de estrategias que para elegir las estrategias de esta forma debe conocerse la relación entre la suma y la resta (C21).

Por último, la recuperación de hechos numéricos básicos y derivados supone la memorización de las combinaciones básicas de la suma (C22).

En la Figura 4.63 muestro la trayectoria de enseñanza-aprendizaje para problemas de estructura aditiva con números de una cifra con los resultados observados en el taller. En cada uno de los niveles de desarrollo de este contenido añado las capacidades identificadas para desarrollar esas estrategias.

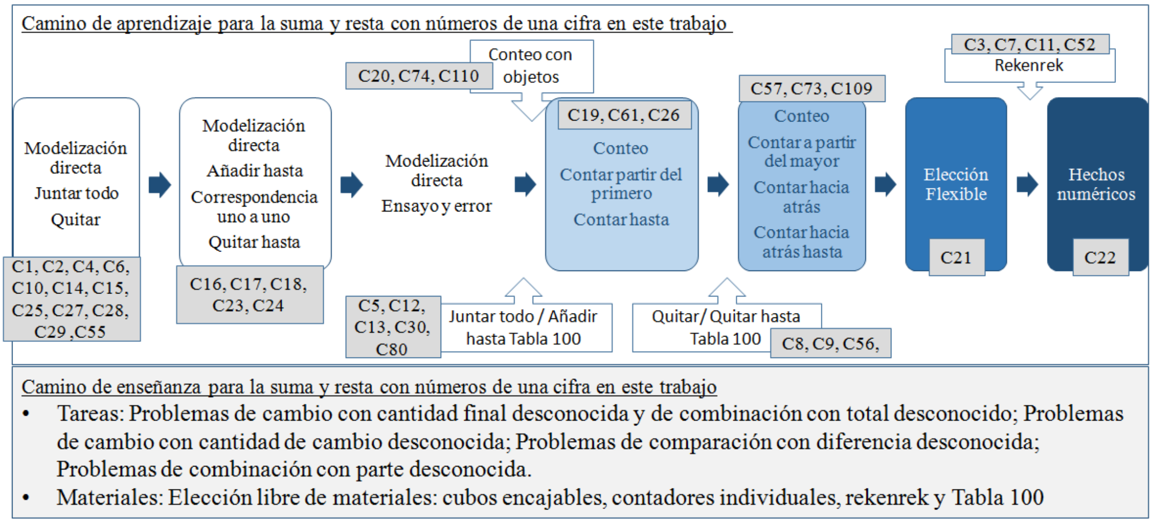


Figura 4.63. Trayectoria de Aprendizaje para la suma y resta con números de una cifra en este trabajo

Tras describir la trayectoria para número de una cifra, voy a ampliar el foco de atención a la trayectoria de problemas de estructura aditiva con números de dos cifras. La Figura 2.27 anterior, muestra la trayectoria de enseñanza-aprendizaje para la suma y resta de dos cifras según el marco teórico de la CGI. El detalle de las capacidades necesarias para ejecutar las estrategias de modelización directa, conteo y recuperación de hechos numéricos se han incluido en la trayectoria con números de una cifra. En la trayectoria con número de dos cifras voy a remarcar las capacidades necesarias para cada grupo definido en el apartado de evolución de estrategias. Esta agrupación describe dos aspectos de las estrategias, las representaciones con grupos de 10 y su conteo.

En la Figura 4.64 se puede observar la trayectoria de aprendizaje para la resolución de problemas de suma y resta de dos cifras en este trabajo. El *camino de enseñanza* consiste en problemas de suma y resta, donde incluimos problemas de dos y cuatro sumando, y restas con números de una y dos cifras. Además, se incluyen varios problemas de suma y resta donde los datos aparecen en decenas y unidades. Al igual que los problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10, los niños pueden elegir libremente el material para resolver el problema, cubos encajables, objetos, bloques de base 10, hueveras Tabla 100 y hojas de papel.

Las representaciones de cantidades donde se ven separadas las decenas y unidades muestran un nivel de conocimiento mayor que las estrategias del primer nivel, vistas en la trayectoria anterior. La capacidad de representar cantidades agrupadas en decenas y unidades (C88 y C54), según Fuson (1992), implica tener un nivel de adquisición mayor de la estructura del sistema de numeración. Inicialmente los niños cuentan estos grupos de 10 señalando una por una las unidades que lo forman.

La propuesta de incluir material estructurado en grupos de 10 no didáctico, como las hueveras, ha provocado representaciones de los números de dos cifras en grupos de 10, siendo cada unidad un hueco (C86). También se han rellenado las hueveras con objetos colocando un objeto en cada hueco (C90). A continuación se ha operado con dicha representación, quitando objetos de los huecos (C97).

Cuando tienen que quitar una cantidad de una colección representada con bloques de base 10, los niños suelen señalar las unidades que quieren quitar sin poder retirarlas (C99). Más tarde, cuando juntan varias colecciones representadas con bloques de base 10 o tienen que quitar una cantidad, se agrupan las decenas y las unidades o se descompone alguna decena para poder quitar unidades (C79). Cuando los grupos se cuentan de 10 en 10 entonces se utilizan las capacidades C89 para grupos de objetos y C54 para barras de bloques de base 10.

El marco teórico distingue entre representar las cantidades con bloques de base 10 contando de uno en uno (C10), contar de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades (C54) o identificar esa cantidad relacionando barras con decenas y cubitos con unidades (C102). El análisis de este trabajo ha mostrado que hay varias modalidades de las estrategias juntar todo y quitar con los bloques de base 10. En la suma, pueden representar un sumando con bloques de base 10 y el otro con objetos. Esto permite contar de 10 en 10 la primera cantidad (C54) o identificar esa cantidad relacionando barras con decenas y cubitos con unidades (C102), y a partir de ahí contar la segunda cantidad (C74). Esta misma forma de hacer el recuento final puede ocurrir representando las dos cantidades con bloques de base 10.

Si se representan los dos sumando con bloques de base 10, los niños pueden agrupar las decenas por un lado y las unidades por otro (C79), lo que facilita la identificación del total (C102). Esta agrupación o desglose de decenas en unidades también se utiliza en la resta, al tener que descomponer decenas en unidades para poder quitar una cantidad menor que 10 (C100).

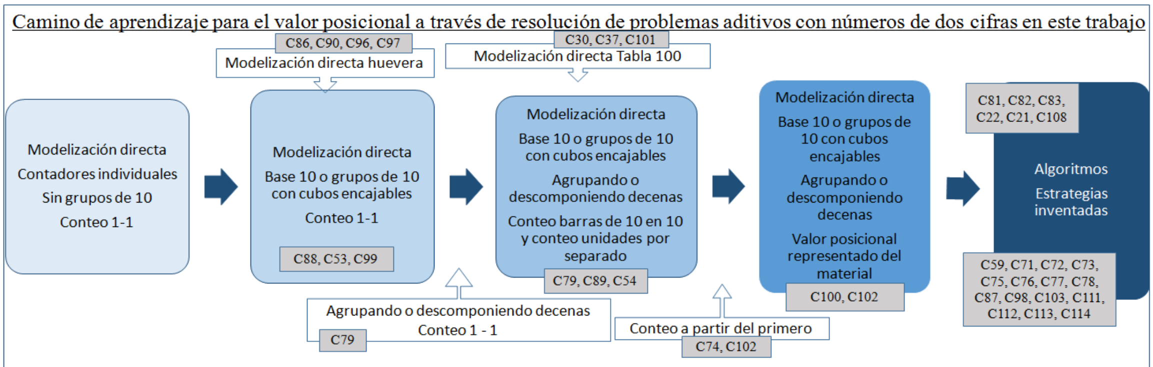
También aparecen estrategias de modelización directa, ya sea sin grupos de 10, con bloques de base 10, hueveras y Tabla 100, en las que el conteo se realiza a partir del primer sumando, antes de llegar a utilizar estrategias inventadas. Los niños cuentan a partir de la primera cantidad (C74).

Incluyo en esta trayectoria el uso de la Tabla 100 con números de dos cifras. En este caso los niños identifican cantidades contando de 10 en 10 (C101), y al añadir la segunda cantidad han contado de uno en uno la segunda cantidad (C30). Si la estrategia pertenece a la resolución de problemas de dos etapas, donde la primera es un agrupamiento con grupos de 10, se necesita formar una colección de grupos de 10 en la Tabla 100, identificando cada grupo con una fila (C37).

Las estrategias avanzadas suponen varias capacidades, todas ellas basadas en un conocimiento más profundo del valor posicional y el uso de hechos numéricos básicos: identificar la posición de las decenas y la posición de las unidades en un número de dos cifras (C71), reconocer que en un número de dos cifras, las decenas son grupos de 10, y la cifra de las unidades son elementos sueltos que no completan un grupo 10 (C72), sumar las unidades y las decenas por separado (C75), reconocer que al descomponer dos números en decenas y unidades, si al sumar las unidades, se obtiene una cantidad mayor que 9, hay que suma la decena a las iniciales (C76), identificar el número de dos cifras, compuesto por un número de decenas y un número de unidades (C77), reconocer que en una cantidad organizada en varios grupos de 10 y una cantidad de objetos menor que 10, el número de grupos es la cifra de las decenas y la cantidad de objetos menor que 10 corresponden a la cifra de las unidades, en un número de dos cifras (C78), reconocer que un número de decenas corresponde a una década (C87), restar decenas y unidades por separado (C111), sumar a un número de dos cifras las unidades necesarias para llegar a la siguiente década (C112), calcular el número de decenas que hay de una década a otra (C113), resta en secuencia primero la decenas y luego las unidades (C114) y descomponer una década en otras dos décadas menores (C116). Al sumar y restar posiciones se necesita recuperar hechos numéricos (C22).

Para los algoritmos se necesita además colocar las cifras de los dos valores posicionales en su lugar (C81), comenzar el algoritmo por las unidades (C82), realizar la llevada si es necesario en la suma (C83) y pedir prestado en la resta (C108).

En la Figura 4.64, se puede observar las capacidades necesarias en los distintos niveles de progresión del desarrollo del conocimiento para la resolución de problemas de estructura aditiva con números de dos cifras.



Camino de enseñanza para el valor posicional a través de resolución de problemas aditivos con números de dos cifras en este trabajo

- Tarea: Problema de estructura aditiva de suma con dos sumandos con números de dos cifras, de cuatro sumandos con números de 1 y 2 cifras, incluyendo en un problema de cada datos en decenas y unidades. Problema de estructura aditiva de resta, (variando el tipo problema), incluyendo en algunos problemas datos en decenas y unidades.
- Materiales: Elección libre de materiales: cubos encajables, contadores individuales, bloques de base 10, huevera (a partir de la sesión 13) y Tabla 100

Figura 4.64. Trayectoria de Aprendizaje para la suma y resta con números de dos cifras en este trabajo

4.3. Problemas de estructura multiplicativa sin grupos de 10

El taller contiene 5 problemas de grupos iguales sin agrupamientos de 10, dos de ellos de multiplicación en las sesiones 4 y 21, y el resto de división partitiva en las sesiones 5, 14 y 24.

4.3.1. Problemas de multiplicación

En la Tabla 4.28 muestro los enunciados de los problemas de multiplicación planteados en el taller.

Tabla 4.28. *Problemas de multiplicación*

Sesión	*Problema*
4	El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?
21	Si entras en un supermercado encima de un toro y rompes 5 cajas de galletas con 12 galletas cada una, ¿Cuántas galletas aplastas en total?

4.3.1.1. Análisis de estrategias

Las estrategias de los problemas de grupos iguales observadas en las sesiones 4 y 21 presentan distintas modalidades de *agrupamiento* (A) en función de los materiales y cómo se realiza las relaciones de las cantidades.

La estrategia de modelización directa de agrupamiento consiste en formar un número de grupos iguales dados y realizar el recuento de todos los elementos. El análisis de las estrategias me ha permitido distinguir modalidades según algunos aspectos en su ejecución y el material utilizado. Hay alumnos que han representado primero la cantidad *número de grupos* del problema, de tal manera que la formación de grupos iguales se realiza poniendo los *elementos de cada uno de estos* grupos al lado de su representante de grupo. Otro aspecto que se ha tenido en cuenta en el análisis de las estrategias es la forma de considerar todos los grupos juntos para el recuento final, ya que los grupos iguales se pueden añadir a única colección o dejarlos separados y considerarles juntos.

Comienzo indicando las modalidades en las que no se ponen representantes de grupo y se dejan separados los grupos, realizando el recuento final de uno en uno, con cubos encajables (A1) o con marcas (A3). En el rekenrek también se pueden formar los grupos dejándolos separados y realizar el recuento de uno en uno considerando todas las cuentas juntas (A5). La representación con los dedos de los grupos añadiendo consecutivamente el número de dedos que representa el número de elementos por grupos, es una modalidad que también deja separadas las colecciones por la configuración de los dedos. Se puede identificar que dedos son los dos primeros, los dos siguientes, etc. (A4). Por último, señalar tantos numerales a la vez como elementos por grupos indica el problema en la Tabla 100, varias veces consecutivas, nos permite concluir el resultado final de un agrupamiento con ayuda de la secuencia numérica (A6). Más avanzado el apartado describo el uso de la Tabla 100 en este tipo de problemas.

Con cubos encajables, se ha utilizado la modalidad en la que los grupos se van añadiendo a una colección única (A2).

Las modalidades en la que se ponen representante de cada grupo, han sido representadas con cubos encajables (A7), con objetos (A8), con dibujos (A9) y con marcas (A10). En la Figura 4.65 se puede distinguir el agrupamiento sin representante de grupo en la modalidad A1 y con representante de grupo en la modalidad A7.

Figura 4.65. Representaciones de A1 y A7 en la sesión 4

Una variación de la modalidad A10, agrupamiento con representante de grupo con marcas se utilizó en la sesión 21, donde la cantidad total llegaba a 60. Al realizar el conteo de todos los grupos, para no perder la cuenta de las que llevaba, los niños anotan la cantidad que llevan contada al lado de cada grupo (A35).

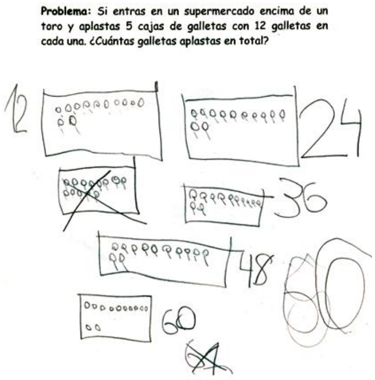


Figura 4.66. A35 en la sesión 21

En la primera sesión de multiplicación, se dieron 5 casos en los que se representa la cantidad número de grupos del problema y no se representan los elementos de los grupos iguales. El recuento final se hace realizando un conteo figurativo de los elementos por grupo señalando tantas veces cada representante de grupo como elementos tiene. Esta modalidad se utilizó con cubos encajables (A11), con objetos (A12) y con el rekenrek (A13). En la Figura 4.67 una niña señala a ambos lados de cada bola de plastilina para hacer el recuento de los elementos totales que hay en sete grupos con dos elementos en cada grupo. En esta primera sesión, como los grupos eran personas, un niño represento un solo grupo, su propio cuerpo, y contó sus manos tantas veces como grupos había en el problema (A14).

Figura 4.67. Estrategia A12 en la sesión 4 con plastilina

Para terminar la estrategia de modelización directa de agrupamiento, surge una modalidad en la sesión 4 en la que las representaciones de los niños reflejan una inversión del papel que juega el número de grupos y el número de elementos por grupos. Esta modalidad se ha realizado con cubos encajables (A15), con objetos (A16), con el rekenrek (A17) y Tabla 100 (A18).

Tabla 4.29. *Frecuencia acumulada de estrategias y modalidades en problemas grupos iguales*

Estrategia	Modalidades		FA
Agrupamiento	A1	Cubos encajables, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	6
	A2	Cubos encajables, sin representante grupo, única colección, conteo 1-1	2
	A3	Marcas, sin representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	3
	A4	Usando la configuración de las manos	2
	A5	Rekenrek, sin representante grupo, contando de uno en uno	2
	A6	Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa grupo	3
	A7	Cubos encajables, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	4
	A8	Objetos, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	2
	A9	Dibujos, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	11
	A10	Marcas, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1	30
	A11	Cubos encajables, con representante grupo, conteo figurativo elementos grupo	2
	A12	Objetos, con representante grupo, conteo figurativo elementos grupo	1
	A13	Rekenrek, con representante grupo, conteo figurativo elementos grupo	2
	A14	Con su propio cuerpo un grupo, y conteo reiterado	1
	A15	Invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con cubos encajables.	1
	A16	Invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con objetos.	1
	A17	Invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con rekenrek.	1
	A18	Invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con Tabla 100	1
	A35	Marcas, con representante grupo, grupos separados, conteo 1-1, anotando las sumas parciales acumuladas en cada grupo	1
Conteo a saltos	CS2	Conteo a saltos de un número distinto de 10	1
Hecho numérico	HN2	Hecho numérico, invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, como suma reiterada	1
Inventada	EI8	Combinar un número de veces las decenas, combinar un número de veces las unidades, y combinar las decenas con las unidades, en una multiplicación	2
	EI9	Combinar decenas y unidades, duplicando hasta completar el número de grupos que hay en un problema de grupos iguales.	1
	EI10	Combina decenas y unidades con sumando iguales, y cuando no está seguro cuenta a partir del último sumando, en un problema de grupos iguales.	1
Algoritmo	AL3	Sumas reiteradas para multiplicación	2
	AL4	Sumas parciales, para multiplicación	1

La mayoría de las estrategias utilizadas en este tipo de problemas con de modelización directa. Solo se ha observado un caso de la estrategia de conteo a saltos, que supone ir enunciando la secuencia numérica a saltos según el número de elementos que tiene cada grupo, se lleva el rastro mentalmente del número de numerales que se enuncia que debe coincidir con el número de grupos que indica el problema. El resultado es el último numeral enunciado (CS2).

Los hechos numéricos propios de la estructura multiplicativa son los correspondientes a las tablas de multiplicar. El único hecho numérico que se ha utilizado es una combinación aditiva con sumandos iguales, interpretando así la multiplicación como suma reiterada (HN2). Identificar la situación de grupos iguales como suma reiterada también se ha observado en la última sesión, donde tres niños realizaron algoritmos de la suma reiterados (AL3) o algoritmos parciales (AL4) como se puede ver en la Figura 4.68.

Figura 4.68. Estrategias AL3 y AL4 en la sesión 21

En la última sesión se han utilizados varias *estrategias inventadas* (EI). Estas estrategias consisten en utilizar procedimientos basados en valor posicional y otras estrategias como la recuperación de hechos numéricos. Las tres estrategias observadas parten de que los niños entienden la situación como una suma reiterada. La primera combina todas las decenas, por un lado, todas las unidades por otro, y por último, combina los resultados de ambos (EI8).

Otra modalidad de combinar decenas y unidades es ir duplicando hasta completar el número de grupos que hay en un problema de grupos iguales (EI9). La tercera modalidad es similar a EI9 pero cuando no ese es capaz de combinar las decenas y unidades, se utiliza conteo a partir del último sumando (EI10).

Las estrategias observadas necesitan de una serie de capacidades para su ejecución. En un análisis más profundo he identificado las capacidades necesarias para cada una de ellas. Ya que la estrategia más utilizada ha sido la A10, muestro a continuación las capacidades necesarias para desarrollarla.

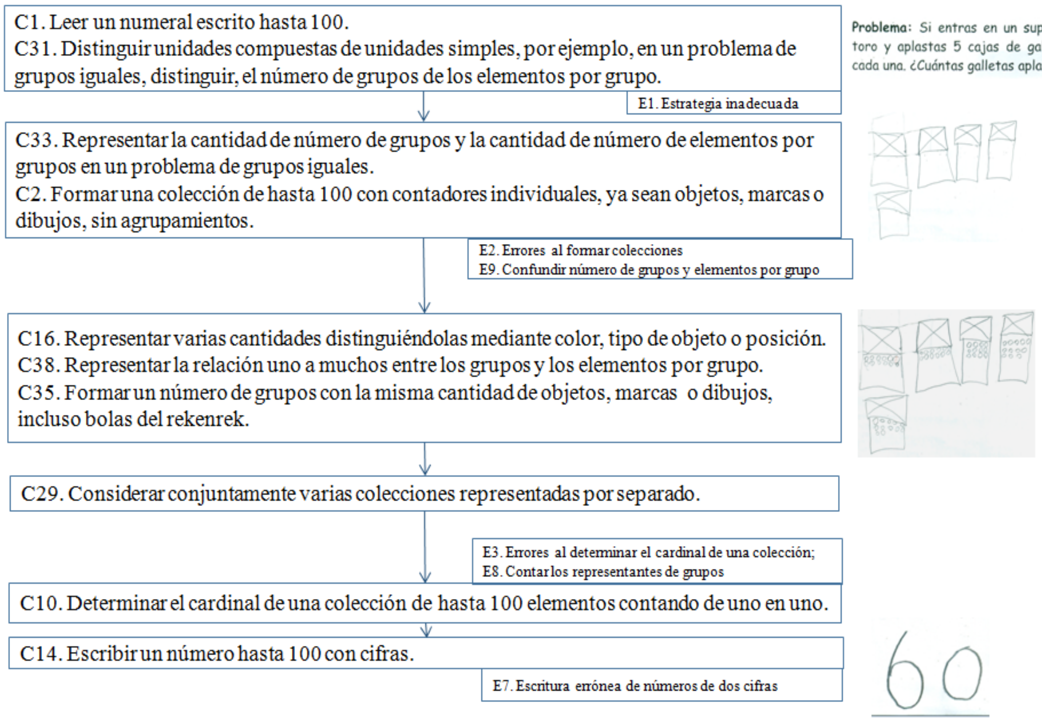


Figura 4.69. Secuencia de capacidades para la estrategia A10

El grafo de los caminos de aprendizaje de este tipo de problemas, que recoge todas las secuencias de capacidades necesarias para las modalidades de estrategias recogidas se muestra en la Figura 4.70. La línea en color negro más gruesa corresponde a la estrategia que acabo de desglosar.

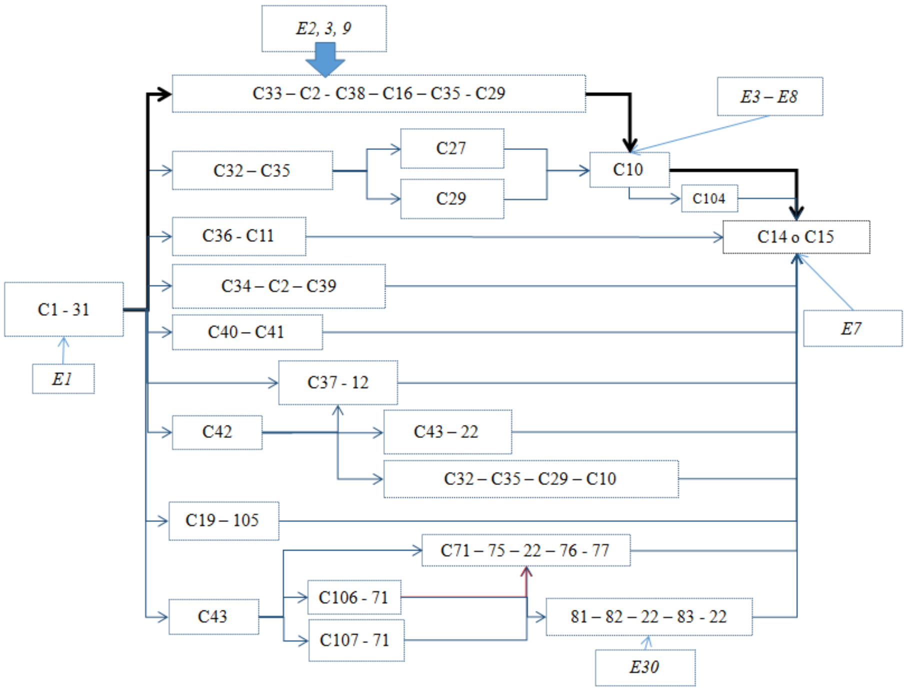


Figura 4.70. Caminos de aprendizaje para problemas de multiplicación

4.3.1.2. Evolución de las estrategias

Los problemas de grupos iguales de multiplicación sin grupos de 10 han sido planteados en las sesiones 4 y 21. En el Anexo 7 está la tabla de frecuencias de las estrategias observadas en las dos sesiones. Para ver la evolución de las estrategias adjunto el gráfico de la Figura 4.71, en el que aparecen las frecuencias absolutas acumuladas de las dos sesiones. Las frecuencias de las estrategias de la sesión 4, en color azul son todas *de* modelización directa de agrupamiento a excepción de una recuperación de un hecho numérico. En la sesión 21, la estrategia más frecuente es también de modelización directa, y también se utilizan estrategias de conteo, estrategias inventadas y algoritmos.

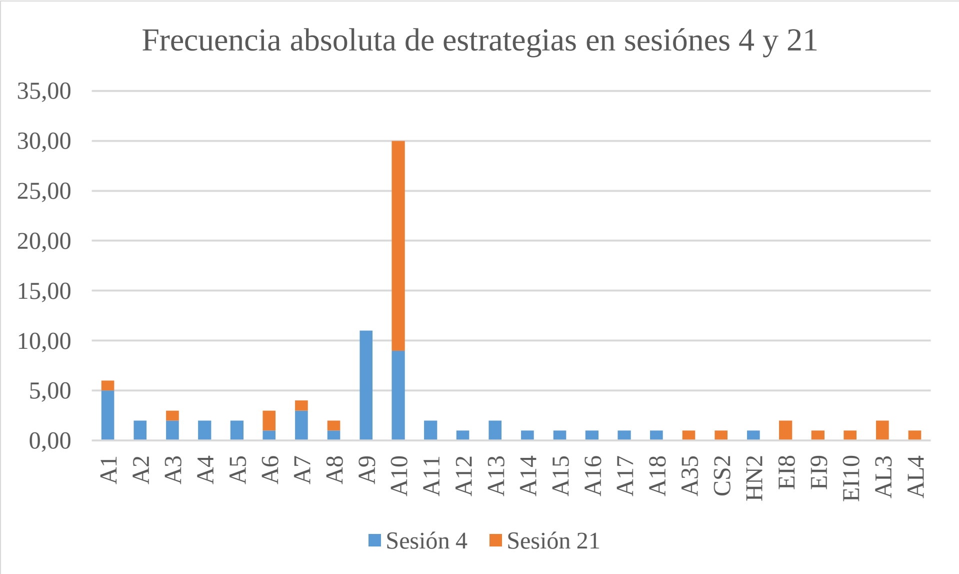


Figura 4.71. Evolución de las variantes observadas de la sesión 4 a la sesión 21

Para profundizar en la evolución de las estrategias observadas en las sesiones, realizo una agrupación por características de las variantes. En la Tabla 4.30 muestro las distintas categorías en las que he agrupado las estrategias. Los problemas de estructura multiplicativa presentan unidades de dos órdenes diferentes, el número de grupos y el número de elementos por grupo. Los niños pueden o no representar la cantidad número de grupos, además de ir construyendo grupos con el número de elementos por grupo correspondiente. Cuando ponen un representante por grupo, hay cantidades que representan órdenes diferentes. La modelización directa queda desglosada, dependiendo de, si se representan los grupos que son unidades de orden mayor (*modelización con representante de grupo*), o si no se representa (*modelización sin representante de grupo*). Se ha observado estrategias en la que solo se representa la cantidad número de grupos y se hace un conteo figurativo (*modelización solo representando la cantidad de grupos*), y también representar un solo grupo y contarlo varias veces (*modelización con un solo grupo*). También se ha observado una modelización con representante de grupo anotando la cantidad acumulada en cada grupo al contar *(modelización con representante de grupo, anotando parciales).* En la primera sesión también invierten las dos cantidades del problema, invirtiendo el papel del número de grupos, y el número de elementos por grupo, que no ocurre en la segunda sesión. Ningún niño utiliza los bloques de base 10 en ninguna de las sesiones para modelizar estos problemas de multiplicación. La Tabla 100 se utiliza, realizando un conteo reiterado de la cantidad de elementos por grupo, o del número de grupos, es decir, invirtiendo las cantidades. Solo se da un *hecho numérico* en la sesión 4, (7+7), donde solo hay dos grupos y una alumna lo interpreta como suma reiterada.

El *conteo a saltos*, las *estrategias inventadas* y los *algoritmos* se dan en la sesión 21, donde los niños utilizan estrategias basadas en la suma reiterada de los grupos para calcular el resultado.

Tabla 4.30. *Estrategias agrupadas de las sesiones 4 y 21*

Agrupación por Representación - Conteo	Estrategias
Modelización sin representante de grupo, única colección	A2
Modelización sin representante de grupo, grupos separados	A1; A3; A4; A5
Modelización con representante de grupo, grupos separados	A7, A8; A9; A10
Modelización representando solo cantidad grupos	A11; A12; A13
Modelización con representante de grupo, anotando parciales	A35
Modelización un solo grupo	A14
Modelización invirtiendo cantidades	A15; A16; A17
Modelización con Tabla 100	A6, A18
Hecho numérico	HN2
Conteo a saltos	CS2
Estrategia inventada	EI8; EI9; EI10
Algoritmos	AL3; AL4

En la Figura 4.72 muestro la frecuencia de las estrategias agrupadas, se puede observar la evolución, donde las estrategias de modelización directa, en este caso de agrupamiento, son las más frecuentes en las dos sesiones, destacando la modelización con representante de grupo, sin juntar los elementos por grupo en una única colección. Las estrategias de conteo, hechos numéricos, estrategias inventadas o uso de algoritmos se ven aumentadas levemente en la sesión 21.

La modelización directa, representando primero la cantidad número de grupos, y después los elementos por grupos, manteniéndolos separados, es la estrategia que se ha utilizado con más frecuencia, mayoritariamente en las dos sesiones. En la sesión 4, se ha dado estrategias de modelización sin representante de los grupos, dos casos modelización con Tabla 100, y la estrategia más avanzada, la recuperación de un hecho numérico como suma reiterada. En la sesión 21, hay la misma frecuencia de la estrategia de modelización directa, con representante de grupo con grupos separados, y se utilizan estrategias más avanzadas, con mucha menos frecuencia, como conteo a saltos, estrategias inventadas y algoritmos de suma reiterada.

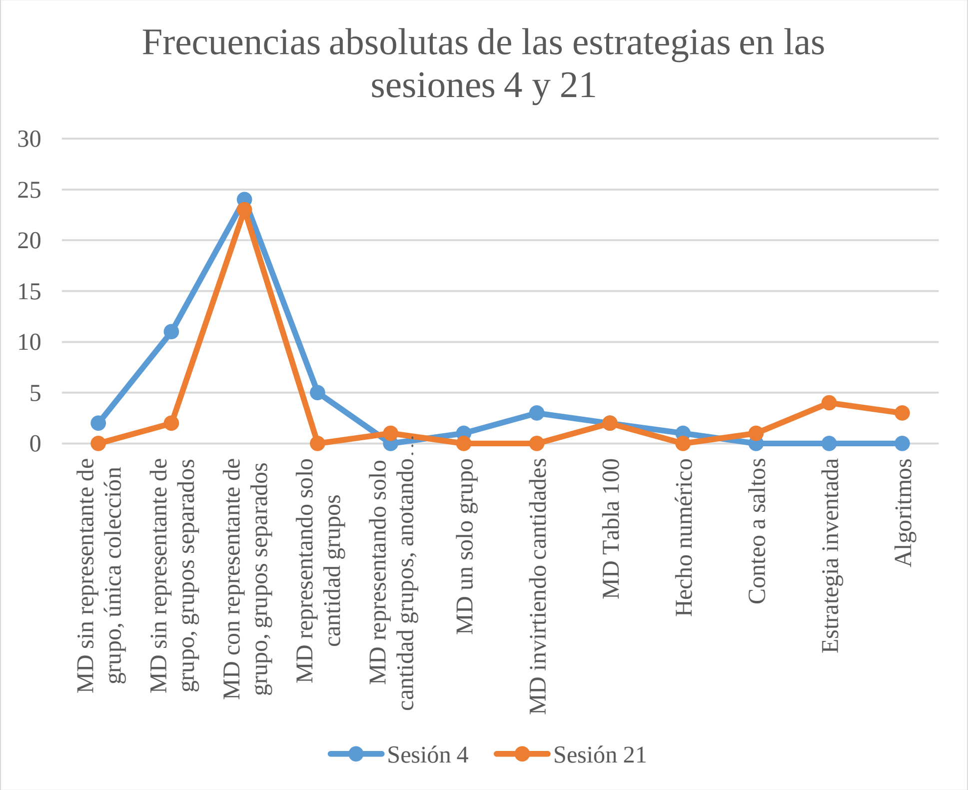


Figura 4.72. Evolución del tipo de estrategia de la segunda etapa de la sesión 4 a la sesión 21

4.3.1.3. Uso de la Tabla 100

Un niño intenta la estrategia *agrupamiento con Tabla 100* (A6), aunque no llega a terminar. Se puede observar esta estrategia utilizando la tabla 100 en la Figura 4.73, por cada niña se señalan dos numerales hasta llegar a contar 7 grupos de dos numerales. En la figura solo se ve hasta las 3 primeras niñas.

Figura 4.73. Estrategia A6 en la sesión 4

4.3.1.4. Trayectorias de aprendizaje

La trayectoria de enseñanza-aprendizaje deducida de los estudios previos que muestro en la Figura 4.74 es la combinación de la trayectoria para el aprendizaje de la multiplicación con números de una cifra de la Figura 2.18 y la trayectoria para el aprendizaje de la multiplicación con números de varias cifras de la Figura 2.27.

Como he mostrado anteriormente, la mayoría de los niños del taller utilizaron estrategias de modelización directa con diferentes modalidades de aplicación de agrupamiento. En la sesión 4 hubo dos casos de agrupamiento con Tabla 100, y 3 casos en las que invierten el papel de las cantidades número de grupos y número de elementos por grupo. En la sesión 21 sigue dominando la modelización directa, y se dan 4 casos de uso de estrategias inventadas y algoritmos. Como en casos anteriores, para pasar de un nivel a otro es necesario adquirir las capacidades que han surgido al analizar las estrategias como secuencias de capacidades en el Anexo 1.

En el primer nivel de desarrollo del conocimiento sobre la multiplicación se incluyen todas modalidades de agrupamiento observadas. Para esta estrategia los niños deben distinguir dos tipos de unidades, número de grupos y número de elementos por grupo (C31). Si no ponen un representante por cada grupo (C32), se forman varios grupos con el mismo número de elementos (C35), que se pueden añadir a una única colección (C27) o dejar separados (C29) para el recuento total (C10). Si los grupos se representan con los dedos de las manos (C36), el total se puede conseguir reconociendo la cantidad representada con las manos (C11). Si se pone un representante por grupo (C33) hay que formar primero la colección para número de grupos (C2), diferenciándola de los grupos (C16) y estableciendo la relación uno a muchos entre ellas (C38). Se ha dado el caso de anotar los totales parciales al lado de cada grupo al hacer recuento final (C104).

El agrupamiento también se ha realizado con ayuda de la Tabla 100, formando grupos iguales señalando tantos numerales como elementos tiene cada grupo reiteradamente (C37). El último numeral que se señala es el total de elementos (C12).

En las sesiones se han observado modalidades de agrupamiento en la que solo se representa la cantidad número de grupos (C34) y se realiza un conteo figurativo en cada grupo del número de elementos que tiene (C39). También se ha representado un solo grupos (C40) y se ha contado reiteradamente (C41).

La estrategia de agrupamiento se ha utilizado también intercambiando los papeles de las cantidades número de grupos y número de elementos de cada grupo (C42).

La estrategia de conteo a saltos necesita partir del numeral que representa uno de los grupos (C19) e ir contando a saltos tantas veces como grupos hay (C105).

El uso de hecho numérico utilizado ha sido una combinación aditiva (C22), para lo que hay que interpretar la situación de grupos iguales como suma reiterada (C43).

Con números de dos cifras no he observado el uso de los bloques de base 10. Los niños han utilizado estrategias inventadas, interpretando los grupos iguales como suma reiterada. Generalmente han realizado estas estrategias combinando las decenas de todos los grupos y luego las unidades, combinándolo al final (C71, C75, C76, C77); o duplicando las cantidades hasta completar los grupos (C107), modalidad que necesita también de las capacidades para combinar decenas y unidades por separado, una que cada duplicación implica la suma de dos números de dos cifras; o realizando una combinación de decenas y unidades reiterada (C106).

La resolución de los problemas a través de sumas reiteradas o parciales usando el algoritmo se utilizó de forma espontánea por 3 niños en la última sesión de multiplicación, lo que necesita de capacidades para colocar los números de dos cifras en un algoritmo (C81, C82, C83).

Con los resultados observados, se puede concluir que los niños en primero de educación primaria utilizan en su mayoría estrategias de modelización directa de agrupamiento, y empiezan a aparecer casos en los que se utilizan estrategias más avanzadas, tanto con números de una cifra como con dos cifras. No se ha observado ningún caso en el que los niños elijan los bloques de base 10 para resolver el problema.

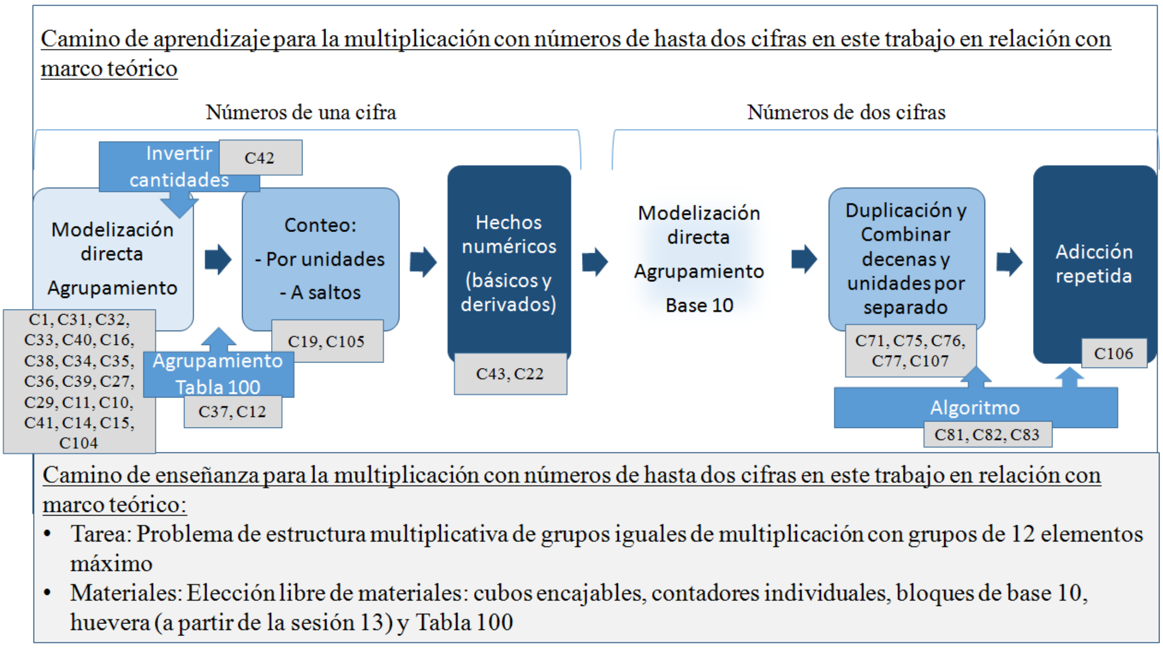


Figura 4.74. Trayectoria de aprendizaje-enseñanza observada para la multiplicación en este trabajo

4.3.2. Problemas de división partitiva

Los problemas de división partitiva se plantearon en las sesiones 5, 14 y 24. En el Anexo 1 puede consultarse el desarrollo de las sesiones más detallado. En la Tabla 4.31 muestro los enunciados planteados.

Tabla 4.31. *Problemas de división partitiva*

Sesión	*Problema*
5	Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?
14	Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?
24	Para dar de comer a sus peces, Bruno echaba 24 guisantes en la pecera. ¿Cuántos guisantes se comía cada pez?

4.3.2.1. Análisis de estrategias

La estrategia de modelización directa de *reparto* (R) ha sido la más utilizada en este tipo de problemas. El análisis de las estrategias observadas me ha llevado a describir las modalidades que aparecen en la Tabla 4.32, dependiendo de si se incluye representantes de grupos para realizar el reparto, si se forma la colección del total de elementos primero o se van haciendo grupos hasta completar la cantidad total, como se establece la relación uno a muchos, los materiales utilizados, etc.

Primero muestro la descripción de las modalidades de reparto en las que no se representa la cantidad número de grupos para realizar el reparto.

La modalidad en la que se forma primero el total de elementos sin representar grupos y se reparte de uno en uno, ha sido utilizada con objetos (R2). Modelizar esta estrategia con marcas resulta complicado ya que las marcas no se pueden desplazar. Esta estrategia se utilizó en la sesión 5, donde había que realizar un reparto en dos grupos. Para ello se representa el total de elementos en el papel, y se van señalando un elemento para cada grupo empezando por ambos lados de la representación, el señalado por la izquierda para un grupo, y el señalado por la derecha para el otro grupo. Cuando se agotan los elementos, se cuenta los de un lado para dar la solución (R8). Hay niños que van numerando repetidamente las marcas, a un elemento de la derecha y otro de la izquierda le asignan el 1, a los dos siguientes, el 2, etc. (R7).

Figura 4.75. Representación utilizada para R8 y R7 en la sesión 5

Realizando el reparto en bloques, de varios en varios, aparecen las variantes con objetos (R3 y R21) y cubos encajables (R20), estas dos últimas se repartían primero barras de 10 y luego el resto de dos en dos, y de uno en uno. También se ha observado una modalidad en la que se reparten a la vez, en dos grupos, dos objetos que cogen al mismo tiempo (R4).

Figura 4.76. Reparto R4 en la sesión 5

El reparto en grupos iguales supone dividir la colección formada del total de elementos en un número de grupos. En el primer problema se tenía que dividir en dos partes, por lo que los niños aproximaban más o menos la mitad de su colección representada y luego comprobaban que en las dos partes había el mismo número de elementos, ajustándolo si era necesario (R1, R5, R9, R10). En el segundo problema había que dividir en cuatro partes iguales y el mismo procedimiento pero con la intención de dejar cuatro grupos iguales ha sido utilizado con objetos (R22). El último problema implicaba hacer 5 grupos iguales y los niños intentaron el mismo procedimiento. Más generalmente le he denominado reparto por ensayo y error con cubos encajables (R24), con marcas (R25), con dibujos (R26). Esta estrategia también se utilizó con los dedos de las manos, donde el niño propone una cantidad y va añadiéndola a los dedos de las manos representados hasta completar el número de grupos. Si el resultado final no coincide con la cantidad total del problema, vuelve a proponer otra cantidad de elementos por grupo y repite el proceso (R27).

El reparto sin contar inicialmente la cantidad total, sino que se van repartiendo en el número de grupos indicados los elementos y se va comprobando el total de elementos hasta completarlo, se ha observado en dos ocasiones con objetos (R6), sin utilizar representantes de los grupos.

En la sesión 5 donde el problema proponía repartir en dos grupos se utilizó los dedos de las manos para realizar el reparto en dos ocasiones. Primero se forma la cantidad total de elementos con las manos y se intenta buscar una descomposición en dos partes iguales, contando de uno en uno los dedos de cada parte (R11), o percibiendo la cantidad por la configuración de las manos (R12).

Si se representa la cantidad número de grupos para realizar el reparto aparecen más modalidades. Formando el total primero y repartiendo de uno en uno surgen modalidades similares a las anteriores con objetos (R13) y con cubos encajados (R28).

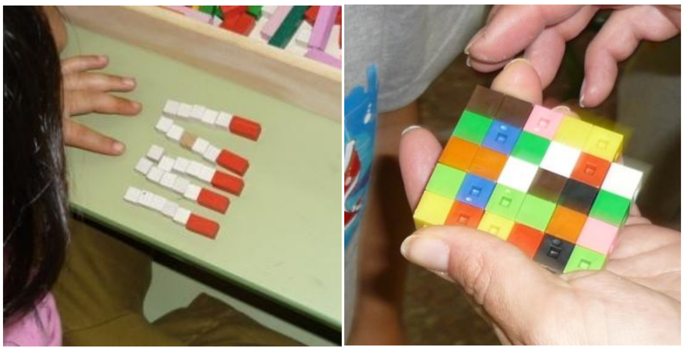


Figura 4.77. Representación utilizada para R13 y R28 en la sesión 25

Si en vez de formar primero el total de elementos, se representa la cantidad número de grupos y se va repartiendo elementos hasta completa el total de elementos, surge otra modalidad con marcas (R14) y con dibujos (R29).

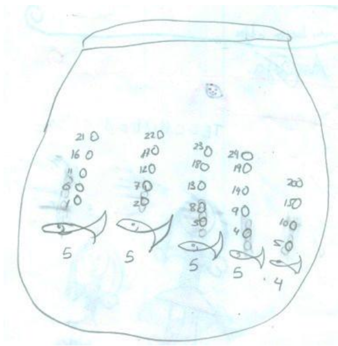


Figura 4.78. Representación utilizada R29

Una forma de relacionar los grupos con los elementos pro grupos en papel, ya sea con marcas (R15) o con dibujos (R16) es mediante la unión con líneas.

Figura 4.79. Representación para R16

Tabla 4.32. *Frecuencia acumulada de modalidades en problemas de división partitiva*

Estrategia	Modalidades		Fr.
Reparto	R1	Cubos encajables, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	4
	R2	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno	10
	R3	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo en bloques	1
	R4	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, cogiendo un elemento para cada grupo a la vez	1
	R5	Reparto con objetos formando barras, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	2
	R6	Reparto con objetos, repartiendo de uno en uno, hasta completar la cantidad total	2
	R7	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (numerando los elementos).	1
	R8	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, señalando a la vez un elemento para cada grupo, hasta agotarse los elementos.	2
	R9	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	4
	R10	Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	1
	R11	Reparto con los dedos sin usar su configuración, contando de uno en uno	1
	R12	Reparto con los dedos usando la configuración	1
	R13	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno y representando la cantidad número de grupos	4
	R14	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos	12
	R15	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos	11
	R16	Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos	5
	R17	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, repartiendo en bloques los elementos en el número de grupos.	1
	R18	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad	1
	R19	Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad	1
	R20	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno	1
	R21	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno	1
	R22	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, aproximando en cuatro partes	1
	R23	Reparto con base 10, repartiendo primero barras, y después cambiando barras por unidades para continuar el reparto	1
	R24	Reparto por ensayo y error con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos	1
	R25	Reparto por ensayo y error con marcas, formando primero el total de elementos	13
	R26	Reparto por ensayo y error con dibujos, formando primero el total de elementos	3
	R27	Reparto por ensayo y error con los dedos de las manos, hasta completar el total de elementos	1
	R28	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, repartiendo de uno en uno formando barras con el mismo número de cubos	1
	R29	Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos	2
Medida	M14	Medida con cubos encajables, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	6
	M15	Medida con marcas, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	14
	M16	Medida con dibujos, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	1
Inventada	EI5	(Reparto) Conteo a saltos de 10 en 10 sin pasarse del total de elementos y completar un grupos de 10 para cada grupo. Después conteo a saltos de 5 en 5 lo mismo. Se suma 10 + 5.	1

Con marcas en el papel también se pueden ir haciendo repartos en bloques (R17). En la Figura 4.80, una alumna intenta primero relacionar los grupos con los objetos con líneas. Después dibuja el total de marcas y va haciendo grupos repetidos de 3 numerados, hace dos grupos de tres con los elementos numerados de 1 al 3, otros dos grupos de tres con los elementos numerados del 4 al 6, hasta agotar el total de elementos.

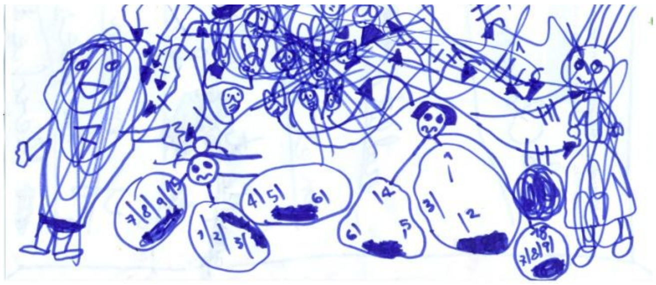


Figura 4.80. Representación para R17 en la sesión 5

Las modalidades de reparto sin representante de grupo en las que se aproximan la mitad del total de elementos, también se han dado poniendo el representante del número de grupos, tanto con marcas (R18) como con dibujos (R19).

Las estrategias observadas necesitan de una serie de capacidades para su ejecución. En un análisis más profundo he identificado las capacidades necesarias para cada una de ellas. En esta ocasión describo la secuencia de capacidades identificadas para la estrategia R14, ya que la estrategia de medida que aparece como más frecuente, ya ha sido descrita en la sesión anterior.

C1. Leer un numeral escrito hasta 100.
C31. Distinguir unidades compuestas de unidades simples, por ejemplo, en un problema de grupos iguales, distinguir, el número de grupos de los elementos por grupo.

E1. Estrategia inadecuada

C33. Representar la cantidad de número de grupos y la cantidad de número de elementos por grupos en un problema de grupos iguales.
C2. Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales, ya sean objetos, marcas o dibujos, sin agrupamientos.

E2. Errores al formar colecciones
E3. Errores al determinar el cardinal de una colección;
E12. Formar grupos de diferente cantidad a la dada

C16. Representar varias cantidades distinguiéndolas mediante color, tipo de objeto o posición.
C38. Representar la relación uno a muchos entre los grupos y los elementos por grupo.
C50. Repartir objetos o marcas en un número de grupos hasta completar una colección

C51. Identificar la solución de un reparto de grupos iguales como el número de elementos de uno de los grupos.

E8. Contar los representantes de grupos
E21. Invertir el papel de grupos y número de grupos, y dar la respuesta en número de grupos
E22. Dar un resto en un problema de división partitiva que no tiene resto

C10. Determinar el cardinal de una colección de hasta 100 elementos contando de uno en uno.

C14. Escribir un número hasta 100 con cifras
C15. Escribir un número hasta 100 con palabras

E7. Escritura errónea de números de dos cifras
E18. Números en espejo

Figura 4.81. Secuencia de capacidades para la estrategia R14

El grafo de los caminos de aprendizaje de este tipo de problemas, que recoge todas las secuencias de capacidades necesarias para las modalidades de estrategias recogidas se muestra en la Figura 4.82. La línea en color negro más gruesa corresponde a la estrategia que acabo de desglosar.

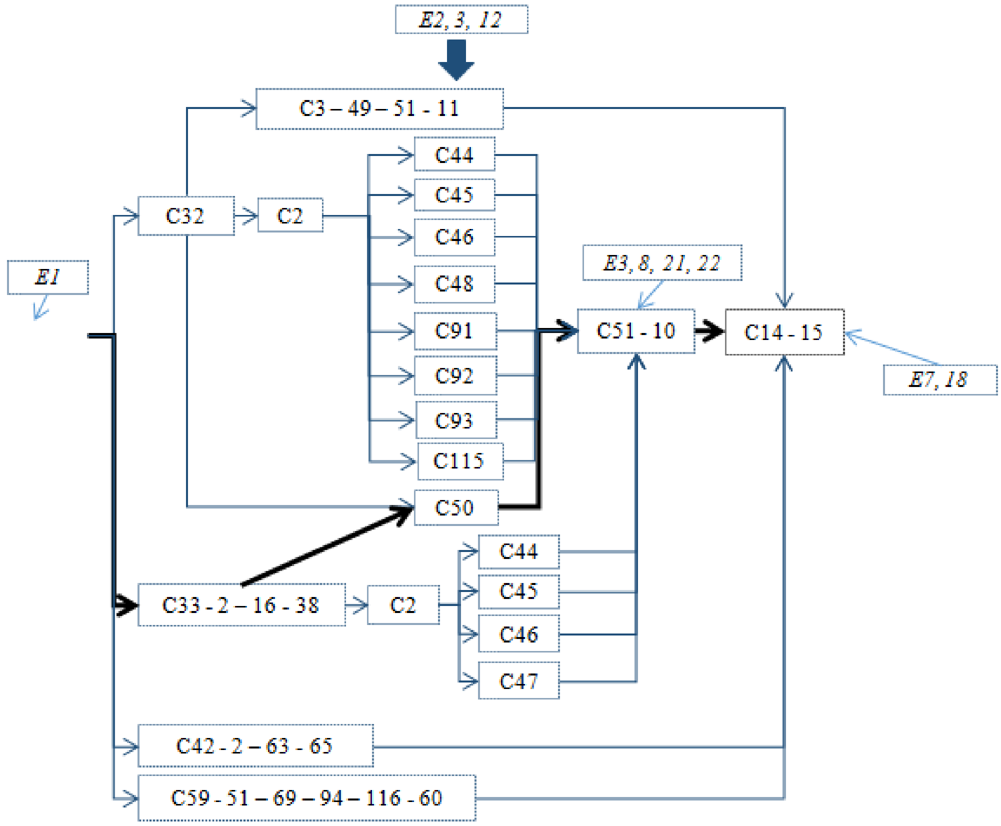


Figura 4.82. Caminos de aprendizaje para problemas de división partitiva

4.3.2.2. Evolución de las estrategias

El listado de estrategias observadas en las sesiones 5, 14 y 24 está en el Anexo 6. La mayoría de las estrategias utilizadas han siso estrategias de *Modelización directa* de *Reparto*, con distintas variantes. En la Figura 4.83 se puede observar que en la sesión 14, los niños utilizan estrategias de Medida, al intercambiar el papel del número de grupos y número de elementos por grupo, del problema de grupos iguales.

En este tipo de problemas solo ha habido un caso de estrategia inventada, como procedimiento más avanzado.

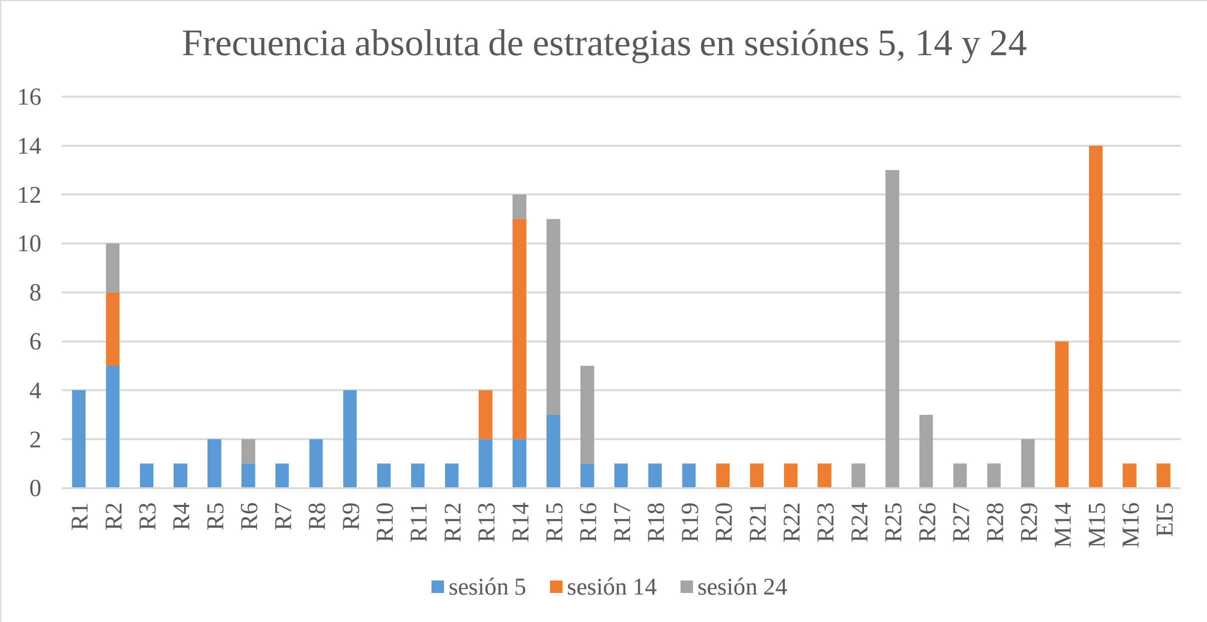


Figura 4.83. Evolución de las variantes observadas de las sesiones 5, 14 y 24

Al igual que en los problemas de multiplicación sin grupos de 10, voy a desglosar la estrategia de Reparto en acciones y relaciones al realizar el procedimiento, por lo que la diferencia por materiales solo se quedará en contadores individuales o base 10, ya que la Tabla 100 y las hueveras no se han utilizado.

Como se puede ver solo ha habido un caso en el que se ha utiliza los bloques de base 10, todos los demás casos se han utilizado contadores individuales, ya sean objetos, cubos encajables o marcas en el papel.

Tabla 4.33. *Estrategias agrupadas de las sesiones 5, 14 y 24*

Agrupamiento	Estrategias
Reparto 1-1, formando total, sin representante grupo	R2, R7, R12
Reparto mitad, cuartos, ensayo y error, formando total, sin representante grupo	R1, R5, R9, R10, R11, R22, R24; R25; R26; R27
Reparto bloques, formando total, sin representante grupo	R3, R20, R21
Reparto a la vez, formando total, sin representante grupo	R4, R8
Reparto 1-1, sin formar total, sin representante grupo	R6
Reparto 1-1, formando total, con representante grupo	R13, R28
Reparto líneas, formando total, con representante grupo	R15, R16
Reparto mitad, formando total, con representante grupo	R18, R19
Reparto 1-1, sin formar total, con representante grupo	R14, R29
Reparto bloques, sin formar total, con representante grupo	R17
Medida	M14; M15; 16
Reparto base 10	R23
Estrategia inventada	EI5

En la Figura 4.84 muestro un gráfico con las frecuencias de las estrategias agrupadas. Tanto en la sesión 5 como en la sesión 24, una de las estrategias que más se utiliza es la aproximación en el número de grupos y ajustas. En la primera sesión los niños buscaban la mitad y luego comprobaban que había los mismos y ajustaban. En la sesión 14, se dio algún caso en el que buscaban dividirlos en 4 partes aproximadamente igual y luego ajustaban. Por último, en la sesión 24, también se utilizó haciendo un reparto en 5 partes (a los 5 peces), y después se ajustaba. En esta última sesión, era una división con resto, lo que pudo suponer que se probase varias veces el reparto.

Ll ama la atención que en la sesión 14 se utilizase en muchos casos la estrategia de *Medida*. Quizás puede influir la resolución de las sesiones 11 y 12 próximas con grupos de 10, y que en el enunciado aparece "cuatro grupos". En esta sesión una niña utiliza la única *Estrategia inventada* utilizada en este tipo de problemas.

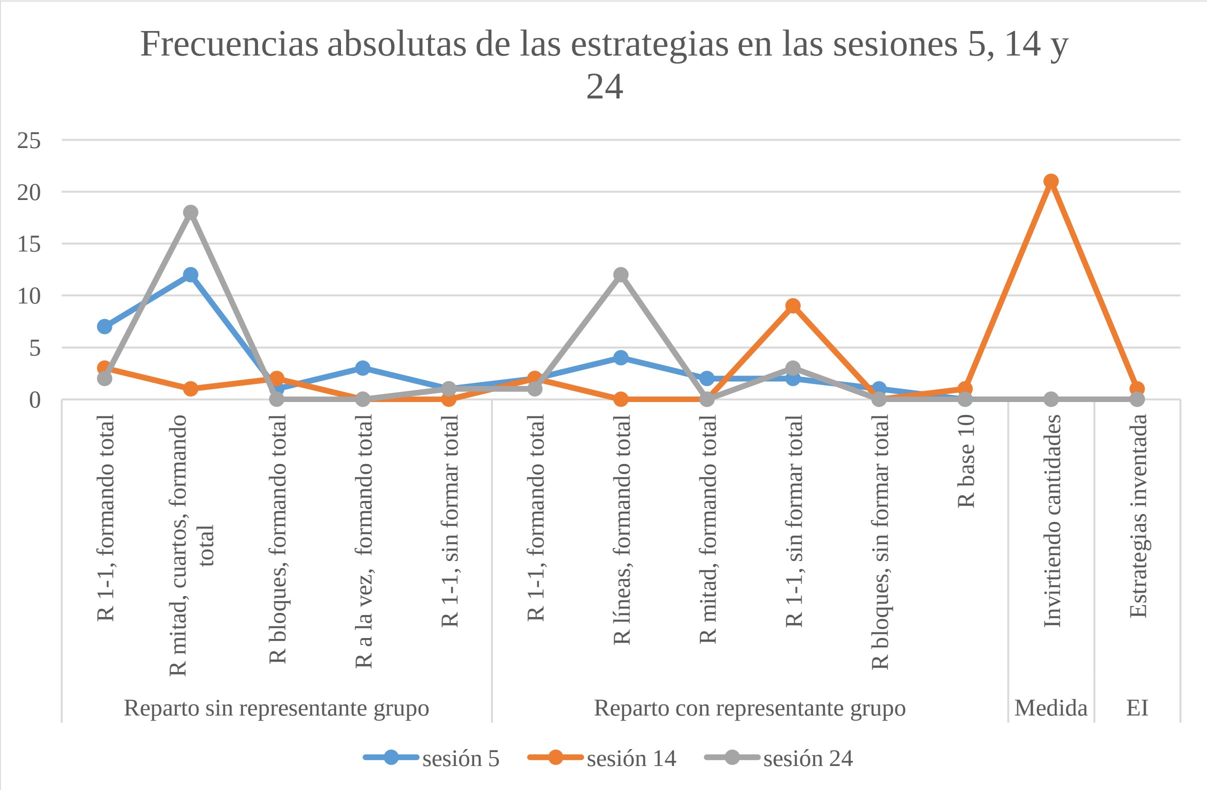


Figura 4.84. Evolución de las estrategias agrupadas observadas de las sesiones 5, 14 y 24

En general, se puede decir que en primero de educación primaria, los niños resuelven los problemas con variantes de la estrategia de *Reparto*, incluso de *Medida* si intercambian el papel de las cantidades, todas ellas de *Modelización directa*. Solo hay un caso de *Reparto con bloques de base 10* y un caso de *Estrategia inventada*.

4.3.2.3. Trayectorias de aprendizaje

La trayectoria de enseñanza-aprendizaje para la división reparto con número de una y dos cifras, deducida de los trabajos previos, está esbozada al final del capítulo 2 (Figuras 2.20 y 2.29). En la Figura 4.85 muestro esta trayectoria con seis niveles de progreso del conocimiento sobre la división partitiva. Excepto dos casos en las tres sesiones, todas las estrategias han consistido en estrategias de modelización directa, correspondientes al primer nivel. Solo un caso corresponden a modelización con bloques de base 10, y otro caso consiste en una estrategia inventada. De los demás niveles no se ha registrado ninguna estrategia, por lo que en la imagen se ve difuminado. Las capacidades necesarias para cada nivel están incluidas en los recuadros de fondo gris.

Al igual que en los otros problemas de estructura multiplicativa los niños necesitan identificar dos tipos de unidades en el enunciado, número de grupos y número de elementos por grupo (C31). Hay muchas modalidades dependiendo de si se pone un representante de cada grupo o no, y la forma de realizar el reparto. Si no se pone representante de grupos (C32), el reparto de una colección total formada inicialmente (C2) se puede hacer de uno en uno (C44), de varios en varios (C45), cogiendo objetos a la vez (C48), buscar la mitad en una colección sin configuración (C46) o con configuración (C49). En el caso de no formar el total inicialmente, se puede repartir objetos o marcas en un número de grupos hasta completar la colección total (C50).

Si se pone un representante por cada grupo (C33), hay que distinguir colecciones representadas por forma, situación o color (C16) y establecer la relación uno a muchos con los elementos por grupo (C38). En este caso, el reparto se puede hacer de la misma forma que los anteriores. En este caso aparece el reparto con líneas uniendo marcas de representante de grupos con sus elementos de cada grupo (C47).

El reparto primero en bloques y luego de uno en uno se ha utilizado, repartiendo primero bloques de 10 y luego las unidades sueltas (C91). También se ha utilizado el ensayo y error haciendo un reparto perceptivo aproximado y luego ajustando las cantidades, en cuatro partes (C92) o en más (C115).

Solo en una ocasión un niño realiza un reparto con bloques de base 10, en el que necesita cambiar las barras por las unidades para seguir repartiendo (C93).

En todas estas estrategias, la solución del problema consiste en contar el número de elementos que tiene cada grupo (C51).

Añado una etiqueta en la modelización directa para las modalidades de aplicación de las estrategias de medida utilizadas por los niños, que supone utilizar la capacidad C43, de invertir el papel de las cantidades de un problema de grupos iguales, que permite utilizar esta estrategia de forma flexible.

La estrategia inventada utilizada necesita tener adquiridas las capacidades de separar la década y las unidades de un número de dos cifras (C60), proponer una cantidad adecuada de elementos de cada grupo para realizar un conteo a saltos (C94), enunciar la secuencia numérica de 10 en 10 hasta una década (C69), descomponer una década en otras dos (C116).

En la Figura 4.69 se puede observar las capacidades necesarias en cada nivel de desarrollo.

Ante esta situación, se puede concluir que los niños, en primero de educación primaria, resuelven los problemas de división partitiva con una gran variedad de modalidades de aplicación de las estrategias de modelización directa de reparto y medida, ésta última de forma flexible.

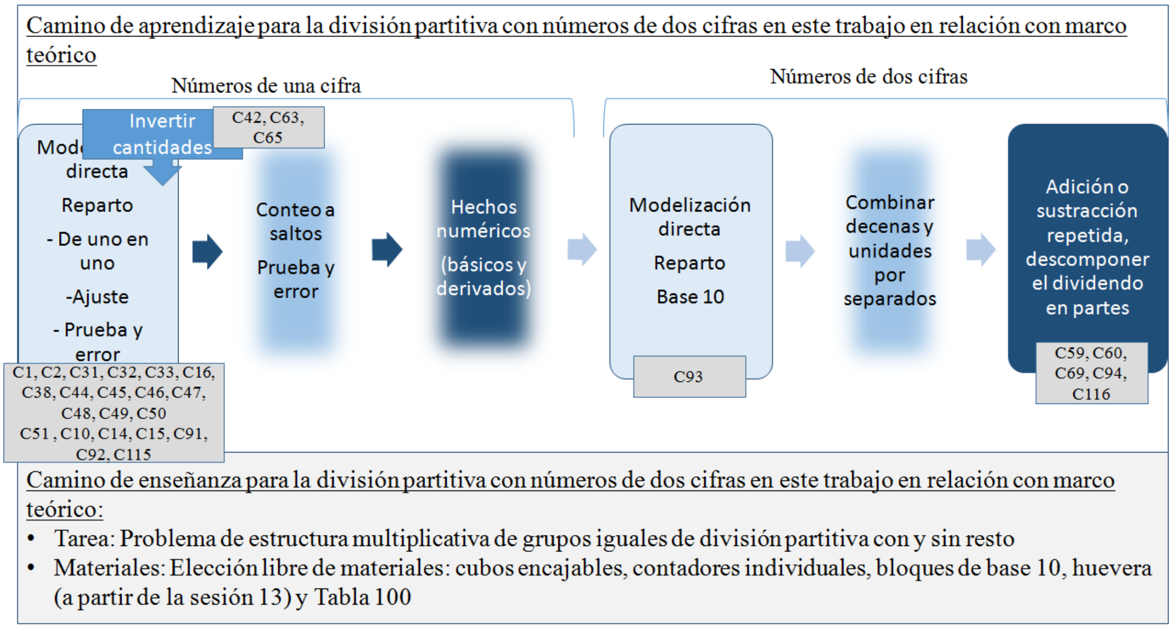


Figura 4.85. Trayectoria de aprendizaje para la división partitiva en este trabajo

4.4. Evolución del conocimiento informal y formal

En este apartado pretendo describir el desarrollo de los conocimientos informales relacionados con el agrupamiento de 10 y el valor posicional a través de las estrategias observadas, basándome en la evolución descrita anteriormente. En el capítulo 2, mostré las definiciones de conocimiento informal y conocimiento formal para este trabajo.

Tanto la CGI como Ginsburg y Baroody (2007) consideran las estrategias de cálculo basadas en el conteo, primero con materiales y después sin ellos, dentro del conocimiento informal. Así, la variedad de estrategias de modelización directa y de conteo observadas son estrategias informales. Hay determinados aspectos de estas estrategias que permiten describir un desarrollo del pensamiento sobre la estructura conceptual del número. El análisis de las estrategias como caminos de aprendizaje me ha permitido conocer las capacidades necesarias para su ejecución. Estas capacidades se pueden clasificar en conocimientos informales y conocimientos formales, utilizando como referencia los trabajos indicados en el marco teórico.

Las capacidades que consisten en formar colecciones de objetos o marcas mediante el conteo, la subitización o las configuraciones se consideran conocimientos informales. La capacidad de enunciar la secuencia numérica hacia delante, hacia atrás o a saltos también se considera dentro del conocimiento informal según Ginsburg y Baroody (2007). Estos autores indican que el uso de bandas numéricas para extender el dominio de la secuencia de numerales a números más grandes, también forma parte del conocimiento informal.

Las capacidades de lectura y escritura de numerales son consideradas como conocimientos formales. La recuperación de hechos numéricos y el uso de los algoritmos se identifican como conocimientos formales. En el cálculo mental, capacidades como la suma o la resta 10 o un múltiplo de 10, son conocimientos formales (Ginsburg y Baroody, 2007). Estos autores también consideran conocimientos formales la comprensión de aspectos del sistema de numeración decimal como el agrupamiento de 10 y la capacidad de contar unidades de distinto orden.

Las estrategias de modelización directa que sus cantidades están representadas con grupos de 10 contienen un componente de formalidad. Así, cuando los niños han utilizado los bloques de base 10 o los cartones de decena de huevos para modelizar el problema, sus estrategias no pueden considerar puramente informales. El análisis realizado ha prestado atención a la forma de contar estas cantidades. Este aspecto permite identificar distintos grados de formalidad. Contar de uno en uno los grupos de o barras de 10 supone la ausencia de un conocimiento completo de la decena. El procedimiento en el que se cuenta de 10 en 10 cada barra y de uno en uno las unidades muestra un grado más avanzado de formalidad. Identificar que el número de barras es la cifra de las decenas y el número de cubitos corresponde con la cifra de las unidades implica un conocimiento formal, ya que se cuentan por separado unidades de distintos orden. Todas estas modalidades de aplicación de las estrategias de modelización directa incluyen progresivamente aspectos formales en los procedimientos. Así podemos hablar de desarrollo de estrategias informales hacia estrategia formales. Existe una variedad de estrategias de transición entre las estrategias puramente informales y las estrategias formales.

Decodificar el valor posicional de los números es un conocimiento formal que se ha utilizado en las estrategias inventadas donde los niños identifican la posición de las decenas y las unidades y operan con ellas. Estas capacidades se utilizan en las estrategias inventadas de esta investigación por lo que tienen consideración de estrategias formales.

Voy a describir la evolución del conocimiento informal a través de los aspectos formales que van incluyendo los niños en sus procedimientos. Las secuencias de capacidades de cada una de las estrategias me permiten identificar esos conocimientos formales. A continuación, presento el desarrollo de los conocimientos informales por tipo de problema.

En la Tabla 4.34 aparecen los grupos de estrategias utilizadas en el análisis de la evolución de los problemas de multiplicación con agrupamientos de 10 y unidades sueltas. Las estrategias que se encuentran en filas con el fondo de color blanco, las primeras, son de modelización directa basadas en conocimientos informales. Las estrategias que se encuentran en filas con el fondo de color oscuro, las últimas filas, están basadas en conocimientos formales por consistir en los conocimientos del sistema de numeración (C71, C60) y procedimientos de cálculo (C62), como los algoritmos (C81, C82, C83 Y C22) y el cálculo mental.

Entre las estrategias de las primeras filas y las últimas, se han observado una serie de estrategias, que muestran pinceladas de conocimientos formales. La diferencia entre la modelización directa sin grupos de 10 y con grupos de 10, contando de uno en uno, en estos problemas no supone la capacidad de representar colecciones separando decenas y unidades. La agrupación viene dada por la resolución de la primera etapa en la que se realizan los agrupamientos de 10 por ser un problema de grupos iguales.

Cuando los niños tienen la capacidad de representar cantidades con bloques de base 10 (C53 y C58) o con las hueveras (C86) supone conocer que una decena es un grupo de 10. Es un conocimiento formal sobre la decena. Este conocimiento no es muy completo cuando los niños cuentan de uno en uno las unidades que forman los grupos de 10.

Si los grupos de 10, las hueveras o las barras de los bloques de base 10 se cuentan de 10 en 10 (C54 y C89) y las unidades sueltas de uno en uno, supone una diferencia entre unidades de distinto orden.

Contar a partir del primero con las dos cantidades representadas con objetos o marcas (C74), supone una evolución del conocimiento del número. Los niños necesitan la capacidad de identificar que una colección dispuesta en grupos de 10 se identifica con una década (20, 30, 40). Según lo comentado antes, esto supone un conocimiento formal, que al estar dentro de la ejecución de una estrategia de modelización, la consideramos estrategia de transición entre el conocimiento informal y formal.

Conocer que un número de decenas se corresponde con una década (C87) también muestra un progreso en el conocimiento sobre el sistema de numeración. Esta capacidad se ha utilizado en la primera etapa que he considerado uso del valor posicional.

Realizar la estrategia de conteo a saltos sin material, supone un nivel más avanzado en la secuencia numérica al enunciar la secuencia numérica de 10 en 10 un número de veces dado (C59), y las unidades sueltas de uno en uno (C61), todo ello sin material.

Como se puede observar, desde las estrategias basadas en el conocimiento informal como las dos primeras, hasta la estrategia basada en el conocimiento formal como es el valor posicional, que necesita de la capacidad C78, los niños van incorporando características formales a sus procedimientos. Estas estrategias de transición muestran el desarrollo de los conocimientos informales a los conocimientos formales sobre el valor posicional de los números.

Tabla 4.34. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas de las sesiones 7 y 12*

Tipo de estrategia	**Conocimiento**
Modelización directa sin grupos de 10, conteo 1 en 1	INFORMAL
Modelización directa con grupos de 10, conteo 1 en 1	
Modelización con base 10, conteo de 1 en 1	
Modelización directa con grupos de 10, conteo 10 en 10	
Modelización directa con base 10, conteo 10 en 10	
Modelización huevera, conteo partir primero	
Conteo a saltos/partir del primero	
Valor Posicional - Modelización directa sin grupos de 10, conteo partir primero	
Valor Posicional - Modelización directa con grupos de 10, conteo partir primero	
Valor Posicional - Modelización directa base 10, conteo partir primero	
Valor posicional - Conteo partir primero	
Estrategia inventada	
Valor posicional - Algoritmo	FORMAL
Valor posicional	

Las estrategias en los problemas de división medida también evolucionan de estrategias informales de modelización directa, a estrategias más formales, al ir incluyendo en sus procedimientos indicadores de conocimientos formales.

Formar una colección con bloques de base 10 (C53), con la huevera (C85) muestra una evolución de la estructura de los números de dos cifras al separar decenas y unidades. Si se representa con la Tabla 100, es señal de avance en el dominio de la secuencia numérica (C5 y C70).

La estrategia de conteo a saltos supone descomponer el número década y unidades (C68), y enunciar la secuencia de 10 en 10 hasta esa década llevando el rastro de las veces que se ha pronunciado un numeral (C69). Esto también indica una evolución en el dominio de la secuencia numérica y del sistema de numeración, por lo que se utilizan conocimientos formales dentro de una estrategia considerada informal por ser de conteo.

Por último, el reconocer la posición de las decenas como grupos de 10 y la posición de las unidades como elementos sueltos (C71 y C72) supone un conocimiento formal sobre el sistema de numeración (Tabla 4.35).

El análisis de cada estrategia como una secuencia de capacidades, permite observar que, dentro de las estrategias informales, se introducen conocimientos formales. Estas estrategias las consideramos de transición entre el conocimiento informal y formal del valor posicional al resolver problemas de división medida.

Tabla 4.35. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas de las 8, 8b, 11 y 15*

Tipo de Estrategia	**Conocimiento**
Modelización directa contadores	INFORMAL
Modelización base 10	
Modelización con huevera	
Modelización con Tabla 100	
Conteo a saltos	
Valor posicional	FORMAL

Las estrategias utilizadas en los problemas de estructura aditiva con números de una cifra se han agrupado como se puede ver en la Tabla 4.36. Las estrategias informales de modelización directa están en las filas con el fondo más claro. La estrategia formal, el uso hechos numéricos, se sitúa en al final de abajo con el fondo más oscuro. Igual que en los casos anteriores, existe una variedad de estrategias que van incorporando capacidades con aspectos formales, que son procedimientos de transición entre las estrategias informales y las estrategias formales.

Las capacidades necesarias para ejecutar las estrategias de juntar todo y quitar están basadas en la formación de colecciones por medio del conteo, representar acciones de juntar y quitar determinar el cardinal de una colección por conteo. Todos estos conocimientos se consideran informales según Ginsburg y Baroody (2007).

La capacidad de planificar la construcción dos colecciones que se puedan distinguir una de otra (C16), permite utilizar las estrategias de añadir hasta y correspondencia uno a uno. En la primera se completa una colección hasta alcanzar una cantidad (C18) y en la segunda se comparan dos cantidades por correspondencia uno a uno (C17). Estas capacidades se corresponden con el conocimiento informal según Ginsburg y Baroody (2007), pero suponen una evolución del pensamiento. También hay que ser capaz de enunciar la secuencia numérica hacia delante o hacia atrás desde un numeral hasta otro, formando una colección de marcas u objetos equipotente a los numerales enunciados. Estos aspectos son conocimientos informales también pero muestran una evolución de las primeras estrategias a las siguientes.

El uso de configuraciones para identificar cantidades, como el rekenrek o las manos permite identificar cantidades de un golpe de vista. Si además se reconoce la relación parte-todo (C21) de la estructura aditiva, las configuraciones ayudan a recordar combinación básicas. El uso del rekenrek puede ser una estrategia de transición entre la modelización directa y la recuperación de hechos numéricos. Así, reconocer descomposiciones apoyadas en configuraciones son estrategias de transición entre la modelización directa con patrones al uso de hechos numéricos.

El uso de la Tabla 100 ha mostrado modalidades de aplicación de juntar todo y contar a partir del primero. Estas estrategias implican emplear los numerales como elementos para representar las cantidades de los problemas, lo que muestra una evolución en la comprensión de la secuencia numérica, aunque los estudios previos manifiesten que son conocimientos informales. En un principio los numerales representan elementos, después se utilizan como ítems contables para llevar el rastro de las estrategias de conteo. Igualmente son estrategias informales pero presentan un progreso en la elaboración de la secuencia numérica.

Las estrategias de conteo necesitan formar una colección con el numeral de su cardinal y enunciar la secuencia de numerales hacia delante una cantidad de numerales llevando el rastro mentalmente o con los dedos. Las estrategias de conteo hacia atrás y hacia atrás suponen capacidades similares, realizando el conteo hacia atrás. Para utilizar la estrategia contar a partir del mayor debe establecerse un orden en las cantidades del problema. Todas estas capacidades suponen un aumento del dominio de la estructura de la secuencia de numerales.

El siguiente nivel recoge la elección flexible de estrategias que para elegir las estrategias de esta forma debe conocerse la relación entre la suma y la resta. Este conocimiento ya es formal según los estudios previos, aunque las estrategias sigan basándose en la modelización directa y el conteo.

Por último, la recuperación de hechos numéricos básicos y derivados supone la memorización de las combinaciones básicas de la suma, que son conocimientos puramente formales.

Como se puede observar cada fila de la Tabla 4.30 contiene estrategias que necesitan de capacidades más elaboradas, por lo que se puede observar cómo evoluciona el conocimiento informal hasta la estrategia de uso de hechos numéricos que es la más formal, identificando las capacidades necesarias en cada tipo de estrategia.

Tabla 4.36. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemas de suma y resta de números de una cifra*

Agrupamiento	**Conocimiento**
Modelización directa (juntar todo – quitar)	INFORMAL
Modelización directa (añadir hasta, correspondencia uno a uno, quitar hasta)	
Modelización rekenrek	
Modelización Tabla 100	
Conteo con objetos	
Conteo Tabla 100	
Conteo a partir del primero, contar hasta	
Contar a partir del mayo, contar hacia atrás, contar hacia atrás hasta	
Elección flexible	
Uso de hechos numéricos	FORMAL

Las estrategias utilizadas en los problemas de estructura aditiva con números de dos cifras se han agrupado como se puede ver en la Tabla 4.37. Las estrategias informales de modelización directa están en las filas con el fondo más claro. Las estrategias formales consisten en el uso de algoritmos y estrategias inventadas. Igual que en los casos anteriores, existe una variedad de estrategias que van incorporando capacidades con aspectos formales, que son procedimientos de transición entre las estrategias informales y las estrategias formales.

Las representaciones de cantidades donde se ven separadas las decenas y unidades muestran un nivel de conocimiento mayor que las estrategias del primer nivel, vistas en la trayectoria anterior. La capacidad de representar cantidades agrupadas en decenas y unidades Los materiales estructurados en grupos de 10, ya sea bloques de base 10 o los cartones de decena de huevos, han permitido a los niños representar la cantidades separando decenas y unidades (C88, C53, C86 y C90), según Fuson (1992), implica tener un nivel de adquisición mayor de la estructura del sistema de numeración. Si además los niños operan con ellos agrupando o descomponiendo decenas si es necesario (C79), muestran un nivel mayor de comprensión sobre la decena, lo que implica incluir, cada vez más, conocimientos formales en estrategias de modelización directa que están consideradas como conocimientos informales.

Una evolución en los conocimientos sobre el sistema de numeración como es el valor posicional es el conteo de los grupos de 10, barras o cartones de 10 en 10 (C89 y C54).

Identificar el número de dos cifras que corresponden a una cantidad representada separando decenas y (C102) supone un conocimiento formal sobre el valor posicional y las estrategias que necesitan de esta capacidad se puede decir que contienen un grado más de formalidad que las anteriores.

También aparecen estrategias de modelización directa, ya sea sin grupos de 10, con bloques de base 10, hueveras y Tabla 100, en las que el conteo se realiza a partir del primer sumando, antes de llegar a utilizar estrategias inventadas. Los niños cuentan a partir de la primera cantidad (C74). En estas estrategias, el primer sumando suele ser el resultado de una primera etapa de agrupamiento, de los problemas de dos etapas, donde hemos incluido “decenas” en el enunciado. En esa primera etapa han obtenido como resultado el primer sumando y a partir de ese numeral cuentan la segunda colección de uno en uno.

Las estrategias avanzadas suponen varias capacidades, todas ellas basadas en un conocimiento más formal del valor posicional y el uso de hechos numéricos básicos: identificar la posición de las decenas y la posición de las unidades en un número de dos cifras (C71), reconocer que en un número de dos cifras, las decenas son grupos de 10, y la cifra de las unidades son elementos sueltos que no completan un grupo 10 (C72), sumar las unidades y las decenas por separado (C75), reconocer que al descomponer dos números en decenas y unidades, si al sumar las unidades, se obtiene una cantidad mayor que 9, hay que suma la decena a las iniciales (C76), identificar el número de dos cifras, compuesto por un número de decenas y un número de unidades (C77), reconocer que en una cantidad organizada en varios grupos de 10 y una cantidad de objetos menor que 10, el número de grupos es la cifra de las decenas y la cantidad de objetos menor que 10 corresponden a la cifra de las unidades, en un número de dos cifras (C78), reconocer que un número de decenas corresponde a una década (C87), restar decenas y unidades por separado (C111), sumar a un número de dos cifras las unidades necesarias para llegar a la siguiente década (C112), calcular el número de decenas que hay de una década a otra (C113), resta en secuencia primero la decenas y luego las unidades (C114) y descomponer una década en otras dos décadas menores (C116). Al sumar y restar posiciones se necesita recuperar hechos numéricos (C22).

Para los algoritmos se necesita además colocar las cifras de los dos valores posicionales en su lugar (C81), comenzar el algoritmo por las unidades (C82), realizar la llevada si es necesario en la suma (C83) y pedir prestado en la resta (C108).

Todas estas capacidades identificadas en las estrategias inventadas y los algoritmos con conocimientos formales sobre el sistema de numeración decimal y sus operaciones, y según los estudios previos, son estrategias formales.

Tabla 4.37. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemas de suma y resta con números de dos cifras*

Agrupamiento	**Conocimiento**
Modelización directa sin grupos de 10, conteo de 1 en 1	INFORMAL
Modelización directa, con grupos de 10, conteo de 1 en 1	
Modelización base 10, conteo 1 en 1	
Modelización hueveras, conteo de 1 en 1	
Modelización base 10, conteo 1 en 1, cambiar decenas	
Modelización directa con grupos de 10, conteo de 10 en 10	
Modelización base 10, agrupando decenas, conteo de 10 en 10	
Modelización base 10, agrupando decenas, valor posicional	
Modelización Tabla 100, conteo 10 en 10 - conteo a partir del primero	
Modelización directa, conteo a partir del primero	
Estrategias inventadas	
Algoritmo	FORMAL

Las estrategias de modelización directa están basadas en el conocimiento informal, cuyo fondo es blanco en la Tabla 4.38. Las estrategias inventadas basadas en el conocimiento del valor posicional, y los algoritmos son estrategias formales, con el color más oscuro en el fondo. Las estrategias que hay entre ambas, son estrategias de transición entre el conocimiento informal y el conocimiento formal. La estrategia de Modelización directa con Tabla 100 supone una evolución en la elaboración de la secuencia numérica. La estrategia de Modelización en la que se invierte el papel de las cantidades número de grupos y números de elementos por grupo, presenta un uso flexible de las estrategias, que permite pensar en una evolución del pensamiento.

El uso de hechos numéricos está basado también en conocimiento formal, de ahí el color oscuro del fondo. El conteo a saltos realizado ha sido en la sesión 21, donde un niño cuenta de 12 en 12, posiblemente utilizando la combinación de las decenas y unidades, hasta que suma 48, y después cuenta de uno en uno, muestra en su ejecución, conocimientos del sistema de numeración por lo que es otra estrategia de transición con conocimientos formales ya adquiridos en la escuela.

A la vista de estos resultados, se puede observar que los alumnos en primero de educación primaria, utilizan para resolver problemas de grupos iguales de multiplicación estrategias informales, utilizando estrategias más formales en ocasiones, basados sobre todo en el cono miento de la multiplicación como suma reiterada, y el dominio de propiedades del sistema de numeración decimal. Este desarrollo del pensamiento permite utilizar algoritmos de la suma, recuperación de hechos numéricos como suma reiterada y estrategias inventadas.

Tabla 4.38. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemasde multiplicación*

Agrupación por Representación - Conteo	Conocimiento
Modelización sin representante de grupo, única colección	INFORMAL
Modelización sin representante de grupo, grupos separados	
Modelización con representante de grupo, grupos separados	
Modelización representando solo cantidad grupos	
Modelización con representante de grupo, anotando parciales	
Modelización un solo grupo	
Modelización invirtiendo cantidades	
Modelización con Tabla 100	
Conteo a saltos	
Hecho numérico	
Estrategia inventada	
Algoritmos	FORMAL

Respecto a las estrategias utilizadas en los problemas de división partitiva (Tabla 4.39), consisten la mayoría en estrategias de modelización directa que son informales según el marco teórico. La estrategia de Medida, es también de modelización directa, pero necesita de la capacidad de utilizar de forma flexibles esta estrategia, por lo que supone un conocimiento más avanzado sobre la estructura de grupos iguales.

Tabla 4.39. *Evolución del conocimiento informal por la agrupación de estrategias observadas en problemas de división partitiva*

Agrupamiento	Conocimiento
Reparto 1-1, formando total, sin representante grupo	INFORMAL
Reparto mitad, cuartos, ensayo y error, formando total, sin representante grupo	
Reparto bloques, formando total, sin representante grupo	
Reparto a la vez, formando total, sin representante grupo	
Reparto 1-1, sin formar total, sin representante grupo	
Reparto 1-1, formando total, con representante grupo	
Reparto líneas, formando total, con representante grupo	
Reparto mitad, formando total, con representante grupo	
Reparto 1-1, sin formar total, con representante grupo	
Reparto bloques, sin formar total, con representante grupo	
Medida	
Reparto base 10	
Estrategia inventada	FORMAL

El uso de bloques de base 10, supone representar cantidades en decenas y unidades, y al repartir, desglosar barras en cubitos. Estos conocimientos van evolucionando de una estrategia puramente informal, basada en ideas intuitivas, a conocimientos que van adquiriendo en la escuela. Por último, la estrategia inventada en la que se descompone el dividendo, es la estrategia que muestra un dominio del sistema de numeración más avanzado, y es la única estrategia formal que se ha utilizado en este tipo de problemas.

Con estos resultados se puede concluir que los niños de primero de educación primaria, resuelven los problemas de división partitiva, en su mayoría, con estrategias informales.

4.5. Comprensión de la decena

En primero de educación primaria, se introducen contenidos formales que los niños van incorporando en las estrategias elegidas al resolver problemas, en una situación de libre elección del procedimiento de resolución. Las estrategias permiten identificar niveles de comprensión de la decena, según he planteado en el marco teórico, en los trabajos de Fuson (1992) y Wright y otros (2006).

Las estrategias observadas a lo largo del taller en los problemas con agrupamientos de 10 se pueden asociarse a distintos niveles de la comprensión de la decena, como se ha hecho ya en trabajos de Carpenter, Fennema y otros (1999) y Wright y otros (2006). En el marco teórico, Fuson (1992) propone unos niveles de adquisición de la estructura de los números de varias cifras que también voy a relacionar con las estrategias utilizadas, poniendo el foco en las representaciones de las cantidades.

En la Tabla 4.40 muestro la relación entre la agrupación de estrategias que estoy utilizando, basada en los estudios previos y ampliada en mi trabajo, con los niveles de comprensión de la decena De Wright y otros (2006) y niveles de adquisición de la estructura conceptual de los números de dos cifras de Fuson (1992).

Las estrategias de modelización directa sin grupos de 10 implican representar las cantidades en una única colección sin separar grupos de 10. Este nivel se corresponde con la *concepción unitaria* de Fuson (1992). También pueden asociarse a un nivel inicial de Wright y otros (2006), donde no hay ninguna muestra de distinguir decenas y unidades. La estrategia en la que en la primera etapa se añaden los grupos a una única colección, y los objetos sueltos se dejan separados, deja ver una representación correspondiente a la separación en década y unidades de Fuson (1992).

En el siguiente grupo de estrategias, los niños dejan separados los grupos de 10 o barras de la primera etapa de los objetos, y se cuentan de uno en uno todas las unidades de los grupos. Esta representación no se corresponde con la *separación de décadas y unidades* de esta autora, sino a una nivel intermedio entre la concepción separar decenas y unidades, por dejar separados los grupos de 10, y la concepción unitaria, por no considerar esos grupos de 10 como unidades de distinto orden al realizar el conteo. En el modelo de Wright y otros (2006), puede encuadrarse en un nivel de transición entre *Inicial e Intermedio*, porque ya comienzan a llamar decenas a los grupos 10 como unidades de distinto orden, aunque todavía cuentan de uno en uno la cantidad total, no identifican unidades de distinto orden.

Las estrategias de *modelización directa con grupos de 10 o base 10, con conteo de 10 en 10* corresponden a una concepción de *secuencia de decenas y unidades* de Fuson (1992), ya que las decenas se distinguen como unidades de distinto orden y se cuentan de 10 en 10. Respecto al modelo de Wright y otros (2006), la distinción de las decenas y las unidades y la resolución con los materiales se corresponde con un nivel *Intermedio* de comprensión de la decena.

La modelización con cartones de decenas de huevos permite representar las cantidades como separando decenas y unidades y operar con ellas. Esto se corresponde con el nivel intermedio de Wright y otros (2006).

Las estrategias en las que se reconoce la década de *n* decenas o grupos de 10, y en la segunda etapa se realiza una modelización directa de la estrategia juntar todo, realizando el conteo a partir del primero, suponen utilizar los materiales para representar la combinación, pero los niños muestran una comprensión de *separar decenas y unidades* (Fuson, 1992), al determinar el valor de las decenas por un lado, y contar de uno en uno las unidades obtenidas. El material no lo necesitan para resolver la situación de agrupamiento de 10, por lo que la comprensión de la decena está próxima al nivel *Fluido* de Wright y otros (2006).

Tabla 4.40. *Comprensión de la decena observable en problemas multiplicativos con grupos de 10*

Estrategias en mi trabajo, partiendo de la CGI	Niveles estructura número (Fuson, 1992)	Niveles comprensión decena (Wright y otros, 2006)
Modelización directa sin grupos de 10, conteo 1 en 1	Unitaria –décadas y unidades	Inicial
Modelización directa con grupos de 10, conteo 1 en 1	Unitaria – secuencia decenas y unidades	Inicial - Intermedia
Modelización con base 10, conteo de 1 en 1		
Modelización directa con grupos de 10, conteo 10 en 10	Secuencia de decenas y unidades	Intermedia
Modelización directa con base 10, conteo 10 en 10		
Modelización huevera - conteo partir primero	Separar decenas y unidades	
Valor Posicional - Modelización directa sin/con grupos de 10, base 10, conteo partir primero		Intermedia-Fluida
Conteo a saltos de 10 en 10 - partir del primero	Integrada	Fluida
Estrategias inventadas, Valor posicional		

El *Conteo a saltos* puede relacionarse con el nivel de *secuencia de decenas y unidades* por el conteo de 10 en 10 (Fuson, 1992), por cada decena que se enuncia llevando el rastro mentalmente o con los dedos, que al no estar representado con materiales, implicar separar las decenas y unidades, contando un número de decenas de 10 en 10, por lo que corresponden una *concepción integrada* del número de dos cifras. Respecto a los niveles de Wright y otros (2006), el no utilizar los materiales de base 10, puede considerarse como la transición hacia un nivel *fluido* de la decena.

El uso directo del valor posicional y las estrategias inventadas corresponden de lleno al nivel *Fluido* de Wright y otros (2006) y a la *integración de separar decenas y unidades, con secuencia de decenas y unidades* de Fuson (1992).

Las estrategias utilizadas por los niños pueden así relacionarse con un nivel de comprensión de la decena, según el modelo de Wright y otros (2006), o de desarrollo de la estructura de los números de dos cifras de Fuson (1992).

Las estrategias observadas en los problemas aditivos muestran aspectos que me permiten relacionarlas con niveles de comprensión de la estructura conceptual de los números de dos cifras (Fuson, 1992), y con los niveles de comprensión de la decena de Wright y otros (2006). En la evolución de las estrategias he utilizado la agrupación de las estrategias de modelización directa según la forma de representar las cantidades, con agrupaciones de 10, y su conteo, el conteo a saltos y estrategias basadas en valor posicional, tomada de los trabajos de referencia (Carpenter, Fennema y otros, 1999).

Para relacionar las estrategias observadas con el nivel de comprensión de la estructura conceptual de número de dos cifras de Fuson (1992), analizo las representaciones de las cantidades utilizadas. El primer nivel de *concepción unitaria* supone representar las cantidades sin grupos de 10, contando de uno en uno todas las unidades. Esto se ha observado en las estrategias de modelización directa sin grupos de 10, contando de uno en uno. El uso de la Tabla 100 en la modelización directa contando de uno en uno también incluyo por no hacer uso de las filas de 10 numerales como decenas.

El segundo nivel corresponde a la representación por separado de las décadas y las unidades. En los problemas de estructura aditiva no se han observado este tipo de la modelización de los problemas. El tercer nivel supone realizar una secuencia de dieces y unidades. Las estrategias en las que los niños utilizan la secuencia de a saltos de 10 en 10, para contar grupos de 10, son Modelización directa con grupos de 10, bloques de base 10, Tabla 100 o hueveras, contando las decenas de 10 en 10 y las unidades de uno en uno. Entre el primer y tercer nivel de Fuson (1992), a pesar de que no hay ningún caso de separación en décadas y unidades correspondientes al segundo nivel que marca esta autora, se ha observado representaciones con grupos de 10, realizando el conteo de uno en uno, al igual que en los estudios de la CGI, por lo que este nivel de comprensión de los números de dos cifras se puede introducir como intermedio entre el primer y tercer nivel de Fuson (1992).

Tabla 4.41. *Comprensión de la decena observable en problemas aditivos*

Niveles de comprensión de números dos cifras (Fuson, 1992)	Comprensión de la decena observable en este trabajo, adaptado de la CGI	Nivel de comprensión de la decena (Wright y otros, 2006)
Concepción unitaria	Modelización directa sin grupos de 10, con Tabla 100, conteo de 1 en 1; Estrategia de conteo con objetos; Estrategias de conteo sin material	Inicial
Intermedia entre Concepción unitaria - secuencia decenas y unidades	Modelización directa, con grupos de 10, base 10, hueveras, contando de 1 en 1	Inicial – Intermedia
Concepción secuencia decenas y unidades	Modelización directa con grupos de 10, barras de 10, Tabla 100, hueveras, conteo de 10 en 10;	Intermedia
Intermedia entre Concepción secuencia decenas y unidades; Concepción separar decenas y unidades	Modelización directa con grupos de 10, barras de 10, Tabla 100, hueveras, reconociendo las cantidades representadas en decenas y unidades en una cantidad, y contando la otra a partir del 1º	Intermedia
Concepción separar decenas y unidades	Modelización directa agrupando decenas, reconociendo las cantidades representadas en decenas y unidades	Intermedia
Concepción integrada	Conteo a Saltos	Fluida
	Estrategias inventadas	

En una fase más avanzada, *separar decenas y unidades*, los niños comprenden que hay dos clases de unidades a contar, grupos de 10, decenas y unidades. En este nivel, se han observado dos niveles. El primer subnivel consiste en representar cantidades separadas en decenas y unidades, reconociendo la cantidad contando el número de decenas y el número de unidades, pero no todas las cantidades involucradas en el problema, de tal manera que los niños reconocen cantidades representadas separando decenas y unidades, y al realizar las acciones que implique el problema, ya sea juntar o quitar, los niños cuentan de uno en uno la cantidad implicada en la acción. Este primer subnivel lo considero intermedio entre secuencia y separar decenas y unidades porque no han adquirido totalmente el nivel más avanzado. El segundo subnivel, las cantidades son representadas separadas en decenas y unidades, y al operar con ellas de agrupan en decenas y unidades para identificar la cantidad por el valor posicional. Este subnivel se considerar ya un nivel de separación de decenas y unidades tal como lo describe Fuson (1992).

Hay una fase más completa *que integra las secuencia y la separación* de decenas y unidades que se puede relacionar con el uso de estrategias inventadas donde los niños utilizar procedimientos basados en el valor posicional, conteo a saltos, recuperación de hechos numéricos de manera flexible (Fuson, Smith y otros, 1997; Fuson, Wearne y otros, 1997).

Respecto a los niveles de comprensión de la decena de Wright, supone un nivel inicial cuando los niños al operar con cantidades no presentan ningún tipo de agrupación de 10, por lo que el primer grupo de estrategias basadas en la Modelización directa sin grupos de 10 y contando de uno en uno.

El segundo nivel de comprensión de Wright y otros (2006) corresponde al uso de materiales con grupos de 10. En las estrategias observadas en el taller hay un primer momento en el que los niños representan las cantidades con grupos de 10 y siguen contando de uno en uno, si operar estas representaciones como dos unidades de distinto orden. Este nivel le he marcado como intermedio entre la comprensión inicial e intermedia de la decena según estos autores. He relacionado las estrategias con el nivel intermedio de este modelo, cuando han operado con los grupos de 10, contándolos de 10 en 10, o considerando el número de grupos de 10 como las decenas de un número de dos cifras. En este nivel incluyo todas las estrategias que se modeliza con grupos de 10, base 10, hueveras, Tabla 100 y se consideran por separados grupos de 10 y unidades, contando o considerando el valor posicional que ocupan.

Una vez los niños no utilizan material y comienzan a utilizar estrategias inventadas, Wright y otros (2006) identifican un nivel de comprensión de la decena fluido.

Las estrategias observadas en los problemas de grupos iguales de multiplicación y división partitiva sin agrupamientos de 10 son, en su mayoría, estrategias de Modelización directa, donde no representan las cantidades separando decenas y unidades. Esto no permite asociar más que un nivel *Inicial* de comprensión de la decena de Wright y otros (2006), y una concepción *Unitaria* de los números de dos cifras (Fuson, 1992).

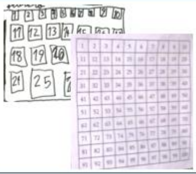
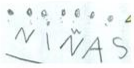
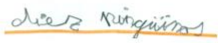
En los problemas de división partitiva, aparece un caso de Modelización directa con bloques de base 10, que puede relacionarse con el nivel *Intermedio* de comprensión de la decena de Wright y otros (2006), y en una concepción de *Separar decenas y unidades* de números de dos cifras de Fuson (1992).

El uso de estrategias inventadas y algoritmos permite asociar estas estrategias a un nivel *Fluido* de Wright y otros (2006), y una concepción *Integrada* de Fuson (1992).

5. Análisis y evolución de las representaciones

La Tabla 4.42 contiene ejemplos de las representaciones que han utilizado los niños en distintos momentos del taller, tanto en la resolución del problema, como la escritura de la solución o la carta. Las representaciones que no han aparecido en el taller son la B4, número con palabras e icónica de tipo de objeto, y la C2, con aspectos icónicos y simbólicos de número y simbólica de tipo de objetos.

Tabla 4.42. Ejemplos de representaciones del taller

	Representación del número			
Representación del tipo de objeto	*Icónica **(1)***	*Con aspectos icónicos y simbólicos **(2)***	*Simbólica (con cifras) **(3)***	*Simbólica (con palabras) **(4)***
*Sin representación **(A)***				
*Icónica **(B)***				
*Simbólica **(C)***				

Las representaciones utilizadas por los niños han sido analizadas en tres momentos diferentes, la explicación de la resolución, la solución dada por escrito en la hoja de trabajo y la carta donde explican el procedimiento de resolución. El tipo de representación elegido para cada momento ha resultado diferente. En la Tabla 4.43 se muestra las representaciones en la cuadrícula utilizada a lo largo del Anexo 1, acumulando todas las sesiones.

Para el momento de la explicación del procedimiento de *resolución*, la representación *icónica de número, sin representación de tipo de objeto* (A1) es la más habitual, seguida de la *icónica de número y tipo de objeto* (B1). Estas estrategias se utilizan en las modalidades de uso de modelización directa, que como muestran los resultados, son las más elegidas por los niños, y se consideran informales, de hecho, estas representaciones son informales.

Tabla 4.43. *Tabla de las frecuencias acumuladas de representaciones del taller*

Representación número	*Representación objeto*		*Resolución*	*Solución*	*Carta*
1 Icónica	A (Sin representación)	A1	838	34	0
	B (Icónica)	B1	108	29	0
	C (Simbólica)	C1	5	0	1
2 *Con aspectos icónicos y simbólicos*	A (Sin representación)	A2	69	9	0
	B (Icónica)	B2	3	0	0
	C (Simbólica)	C2	0	0	0
3 *Simbólica (con cifras)*	A (Sin representación)	A3	98	640	366
	B (Icónica)	B3	0	3	5
	C (Simbólica)	C3	2	23	299
4 *Simbólica (con palabras)*	A (Sin representación)	A4	0	36	74
	B (Icónica)	B4	0	0	0
	C (Simbólica)	C4	0	2	31

Estas dos representaciones han sido desglosadas, dependiendo del material utilizado en A1, y de la igualdad entre los iconos (B1). En la Figura 4.86 se puede observar que la representación A1 más utilizada consiste en hacer marcas en papel, seguida de cubos encajables formando barras o formas comparables, y en tercer lugar, los objetos de cualquier tipo que sirven de contadores individuales. El rekenrek se utiliza en las 6 primeras sesiones, cuando las cantidades no superaban el número 20, y luego su uso fue ocasional. Los bloques de base 10 y las hueveras se han elegido en mucho menor medida con los contadores individuales.

Respecto a las representaciones B1, los dibujos idénticos se ha observado con más frecuencia que con dibujos preferentes. Los niños representan las cantidades implicadas en el problema, que provienen del cuento y dan sentido a la tarea.

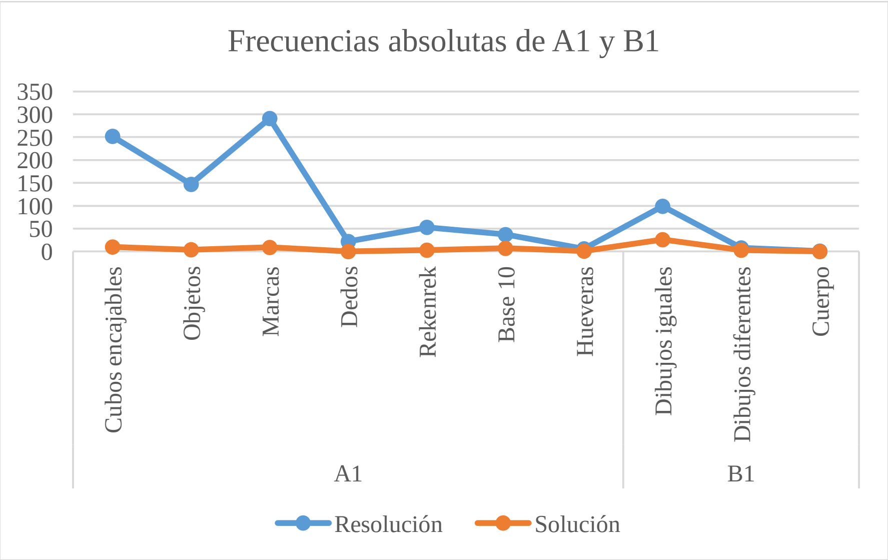


Figura 4.86. Frecuencias absolutas de las representaciones A1 y B1

En la resolución destaca también el uso de la representación A2, con *aspectos icónicos y simbólicos de número y sin representación del tipo de objeto*, que corresponden a las estrategias realizadas con Tabla 100, o una secuencia numérica escrita por los niños, tanto para hacer un recuento como para utilizarla como marcas. La representación A3 se utiliza para indicar cardinales de colecciones representadas y en los algoritmos. La escritura de los numerales supone un conocimiento formal, por lo que estas representaciones, que evolucionan a simbólicas, se consideran más formales.

Las representaciones utilizadas en la solución escrita por los niños son la estrategia A3, que consiste en poner el numeral con cifras de la solución o la C3, que al numeral le acompaña la palabra que describe al objeto. También ha ocurrido que los niños realizaban representaciones con marcas y dibujos para dar la solución del problema, por lo que, las representaciones A1 y B1 han sido utilizadas en este momento de registro, como se puede ver en la Tabla 4.43. Los niños también han dado la solución con el numeral-palabra A4.

Finalmente, para escribir la carta, las representaciones más frecuentes son la escritura del número con cifra o palabra (A3, A4) y también, acompañado del nombre del objeto. Estas estrategias se incluyen en el texto de una carta, por lo que, la forma de comunicación del procedimiento tiene un marco formal. Ha habido cinco casos que incluyen algún aspecto icónico del tipo de objetos (B3).

La evolución de la componente numérica del tipo de representación indica la evolución de representaciones informales con componente icónica del número (A1 y B1, por ejemplo), a representaciones formales con la componente del número en cifras o palabras (A3, A4, C3 y C4, por ejemplo), pasando por una intermedia que tiene aspectos simbólicos e icónicos (A2).

En las representaciones de la resolución se aprecia un descenso de las representaciones B1 que tienen un alto componente icónico y por lo tanto, son poco simbólicas y formales (ver Figura 4.87).

Las representaciones utilizadas en el momento de la explicación del procedimiento de la resolución, han sido A1, icónica de número y sin representante de tipo de objeto en su mayoría. Como se puede ver a lo largo del taller van descendiendo, aunque manteniéndose como las más habituales. Las representaciones icónicas de número y tipo de objeto (B1) se utilizan con menos frecuencia a los largo del taller, presentándose en las once primeras sesiones. Más tarde son utilizadas en problemas donde el contexto de los cuentos resulta atractivo para los niños y sencillo de dibujar. Tanto las representaciones A1 como B1 contienen los aspectos más icónicos y conjuntamente, son las más utilizadas, descendiendo B1 en la segunda mitad del taller.

En las sesiones que las representaciones A1 y B1 tienen una frecuencia menor, se debe al aumento de la representación A3, que corresponde a cifras para el número sin representante de tipo de objeto, aumentando en las sesiones cercanas al final del taller. Esta representación es la escritura de un numeral y se considera formal. Se utiliza en estrategias como el uso de un algoritmo que empieza a aumentar en las últimas sesiones del curso.

La representación A2 con aspectos simbólicos e icónicos del número sin representante del tipo de objeto, se utiliza levemente a lo largo de todo el taller. Este tipo de representación se utiliza con la Tabla 100 o secuencia numéricas escritas por los niños. En los apartados anteriores, se comentó que había 5 alumnos que mostraron preferencia con este material y lo utilizaron varias veces a lo largo de todo el curso.

El resto de representaciones han sido utilizadas de forma esporádica en la explicación del proceso de resolución.

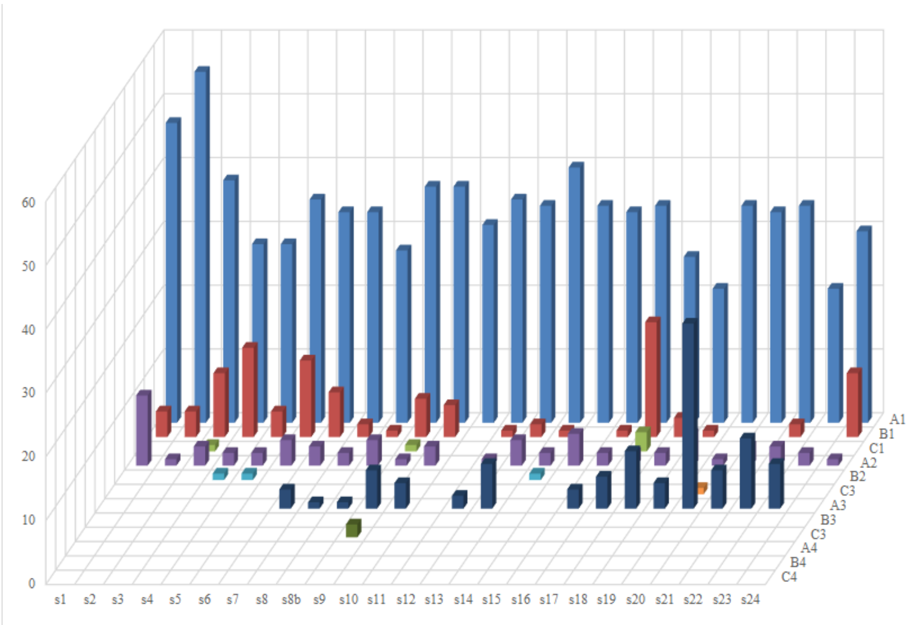


Figura 4.87. Representaciones en la resolución a lo largo del taller

La representación utilizada para dar la solución y que ha predominado a lo largo de todo el taller es la A3, el numeral con cifras sin representante de tipo de objeto (ver Figura 4.88). La variabilidad de la altura de las barras se debe al número de estrategias registradas en cada sesión. Para dar por escrito una solución numérica los niños prefieren este tipo de representación, ya de carácter simbólico y por lo tanto formal. Como se puede ver en la Figura 4.88 hay sesiones donde los niños dan la solución haciendo un dibujo, utilizando así la representación B1. También se ha utilizado la representación A4 que consiste en escribir el número con palabras sin representante del tipo de objeto.

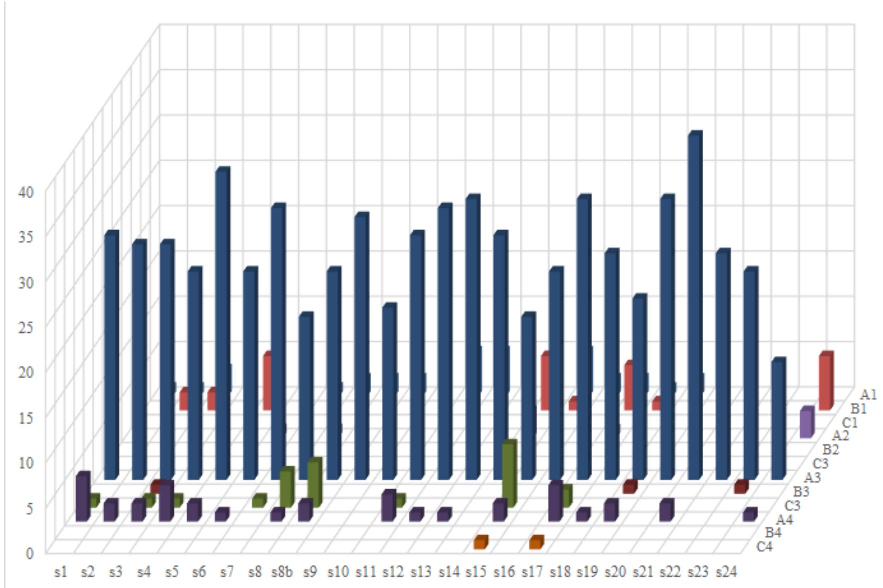


Figura 4.88. Representaciones en la solución a lo largo del taller

Las representaciones utilizadas en la carta han variado desde escribir el numeral con cifras o con palabras (ver Figura 4.89). En las últimas sesiones del curso, aumenta la preferencia de representación C3, en la que se escribe con una cifra el número y con palabra el tipo de objeto. Este aumento es debido a la mejora de la elaboración de la explicación escrita en la carta.

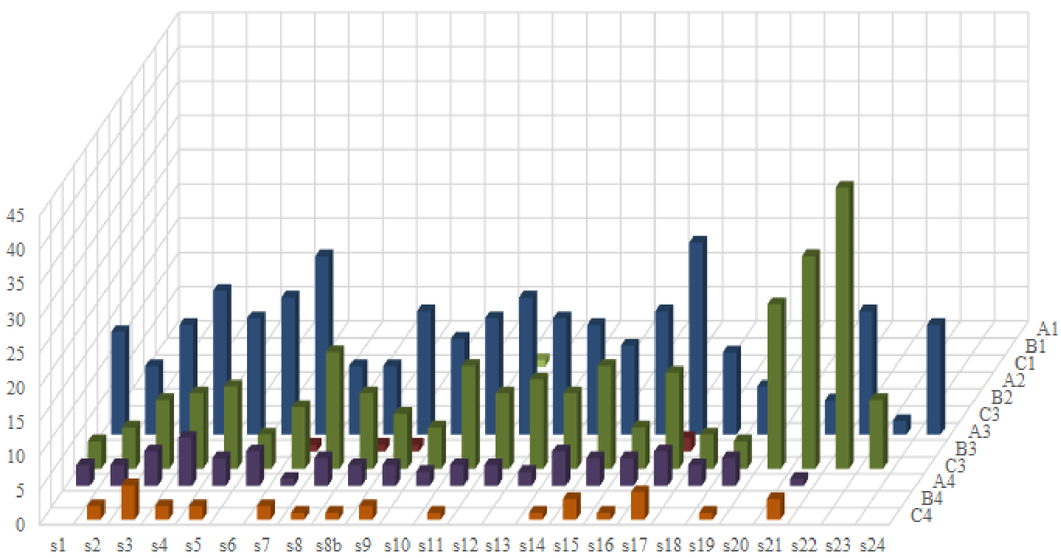


Figura 4.89. Representaciones en la carta a lo largo del taller

Capítulo 5. Discusión, conclusiones e implicaciones

Este capítulo está dedicado a la discusión, conclusiones e implicaciones de la investigación. La parte de discusión y conclusiones relativa a las estrategias y su evolución se presenta organizada según los tipos de problemas, de manera coherente a la exposición de los resultados. Después, incluiré las implicaciones para la investigación y enseñanza de las matemáticas.

1. Discusión y conclusiones

1.1. Sobre el diseño de las tareas del taller

En este estudio se han planteado problemas aritméticos de estructura multiplicativa en primero de educación primaria, curso en el que el currículo no incluye la multiplicación y división. Los problemas planteados han sido de dos tipos: problemas con agrupamientos de 10, con el objetivo de que los niños aprendan un aspecto fundamental del sistema de numeración, como es la decena, y problemas de multiplicación y división partitiva, sin agrupamientos de 10, para que desarrollen conocimientos informales sobre la multiplicación y división. El marco teórico del CGI apoya la idea de que los niños, desde la educación infantil, pueden utilizar estrategias informales para resolver problemas de estructura multiplicativa. Siguiendo esta línea, se han propuesto problemas de grupos iguales a lo largo de todo el taller, con números de hasta dos cifras, esperando el uso de estrategias informales, ya que en las clases de matemáticas habituales no se han enseñado formalmente estos contenidos.

El taller contiene problemas de estructura aditiva con números de dos cifras, con los datos dados en unidades o combinando decenas y unidades. Incluir cantidades dadas en decenas en los enunciados supone resolver primero una situación de agrupamiento, y después una suma o resta. La primera etapa no resulta un problema para los alumnos que tengan adquirido el significado completo de la decena. Sin embargo, los niños de primero de educación primaria se encuentran en un momento en el que se está introduciendo este concepto y pueden no tener una comprensión completa sobre el mismo.

El taller plantea problemas aritméticos variando de estructura aditiva a multiplicativa continuamente a lo largo de todo el curso. Los tipos de problema no dependen de lo que formalmente se está enseñando en el resto de clases de matemáticas. El propósito es evitar lecturas locales de los enunciados, fijándose en palabras clave, como indican Puig y Cerdán (1988). Si observamos el rendimiento de los alumnos, la sesión 11 es una de las que obtuvo menor rendimiento. Una razón puede ser que en las dos anteriores sesiones se proponía un problema del mismo tipo y en esta tercera sesión los niños utilizaron estrategias adecuadas para las dos sesiones anteriores.

Los materiales que se han facilitado a los niños, para que elijan el que estimen más adecuado para la resolución de los problemas, han sido muy variados, y se han ofrecido sin dar ninguna pauta de cómo utilizarlos. Carpenter, Fennema y otros (1999) describen estrategias que utilizan los niños en problemas aritméticos proporcionando contadores individuales y, más tarde, los bloques de base 10. En la intervención de esta investigación, los alumnos han podido elegir el material con el que representar las cantidades. Esto ha supuesto encontrar diferencias en los resultados del análisis de las estrategias con respecto a trabajos previos.

Los niños construyen estrategias propias de modelización directa y conteo, e incluso estrategias inventadas basadas el uso de los hechos numéricos y el conocimiento del valor posicional. Estas últimas incluyen características formales, pero son estrategias de cálculo propias de los niños. Las estrategias de modelización directa y conteo son construcciones de los niños hechas a partir de ideas intuitivas, son estrategias propias. Todas ellas implican una apropiación de conocimiento matemático, considerada como actividad mental para la comprensión en los estudios previos (Carpenter y otros, 1999).

1.2. Sobre las estrategias, sus modalidades de aplicación, y su evolución

En mi trabajo hay dos aspectos esenciales que han influido en la forma de analizar las estrategias. Uno consiste en la distinción entre la fase de representación de las cantidades y la fase de ejecución, en la que destaca la forma de contar las cantidades. El otro aspecto viene provocado por la variedad de material que se pone a disposición de los niños para resolver los problemas. Estos dos cambios han hecho que surjan modalidades de aplicación, de estrategias indicadas en estudios previos, que permiten estudiar transiciones de un tipo de estrategias a otras y tienen implicaciones didácticas sobre el uso de materiales en el aula.

La incorporación de distintos materiales como el *rekenrek*, cajas de decenas de huevos y Tabla 100, que no habían sido empleados en la literatura citada, ha posibilitado detectar nuevas modalidades de aplicación de las estrategias descritas en el marco teórico, que permiten ver un aspecto característico de cada uno de los materiales.

El *rekenrek* ha sido utilizado en las primeras sesiones, cuando las cantidades implicadas en los problemas eran inferiores a 20. Los niños no recibieron ninguna instrucción sobre su uso, y han utilizado las bolas del rekenrek como contadores individuales, aunque también, aprovechando las descomposiciones aditivas con el cinco que presenta la configuración de este material, para resolver problemas de resta. Reconociendo (subitizando) las cantidades, por la disposición de las cuentas, y las descomposiciones de unas cantidades en otras dos, los niños pueden apoyarse en este material para recuperar hechos numéricos básicos y derivados. El uso del *rekenrek* disminuye en cuanto las cantidades pasan de las dos decenas, ya que no pueden entonces representarse en dicho material.

La resolución de los problemas utilizando la Tabla 100 ha permitido observar modalidades de estrategias de modelización directa y conteo, que pueden considerarse de transición entre un tipo de estrategias y el otro. Los numerales de la Tabla 100 pueden utilizarse para representar las cantidades del problema de dos formas, contando de uno en uno el número de casillas que indica la cantidad, o señalando el numeral que representa el cardinal y haciendo un gesto rasante desde el 1 hasta ese numeral. Una modalidad de estrategia de modelización directa es representar las cantidades del problema con casillas de la Tabla 100, como si cada numeral representase un objeto. Esto permite, en unos casos, determinar la solución del problema con el último numeral señalado en el recuento final, o en otros, contando los numerales que hay entre dos de ellos. La Tabla 100 se ha utilizado también como apoyo para llevar el rastro de los elementos a contar desde un número a otro, en una secuencia de conteo. Estas acciones permiten alcanzar un nivel de elaboración de “cadena numerable” de la secuencia numérica, que Fuson (1992) indica necesario para evolucionar de estrategias de modelización directa a estrategias de conteo. Dado que he introducido números de dos cifras en los enunciados de los problemas, las estrategias exigían un dominio mayor de la secuencia oral de numerales hasta

100. La Tabla 100 ha permitido a estudiantes que comienzan a utilizar estrategias de conteo con cantidades menores que 20, extender su uso con cantidades hasta 100, apoyándose en la estructura del material como soporte para llevar el rastro del conteo. Otros niños, que no han utilizado estrategias de conteo antes de llegar a situaciones aritméticas con números de dos cifras hasta 100, utilizan la Tabla 100 inicialmente para representar todas las cantidades del problema con la secuencia de numerales escrita, lo que les permitirá evolucionar en el nivel de domino de la secuencia y llegar a utilizar estrategias de conteo. La Tabla 100 presenta los numerales agrupados por decenas, por lo que permite contar las filas de 10 en 10. El paso de contar los grupos de 10 de uno en uno, a contar de 10 en 10, es un indicio de evolución en la comprensión del agrupamiento, que también se ha podido observar con la representación de cantidades en este material.

En este trabajo, he incorporado materiales no comerciales con estructura de grupos de 10, como los cartones de decenas de huevos. Estos permiten a los niños representar cantidades en grupos de 10, enfatizando el principio de agrupamiento del sistema de numeración decimal. Estas representaciones en grupos de 10 facilitan a los niños la evolución hacia estrategias de recuento del material de 10 en 10, tal como marcan los estudios previos.

La incorporación de los cartones de decenas de huevos se hizo para que los alumnos pudieran representar cantidades *separando decenas y unidades* (Fuson, 1992) con materiales de la vida cotidiana. Tanto este material como los bloques de base 10 se dispusieron en las mesas para poder ser elegidos por los niños, en contraste con los estudios previos de Carpenter, Franke, y otros (1997) y Carpenter, Fennema y otros (1999), en los que solo se ofrecen contadores encajables y bloques de base 10 por separado. Los niños han mostrado preferencia en construir ellos mismos los grupos de 10, tanto con cubos encajables u otros objetos, como con grupos de marcas en papel. A diferencia de Carpenter, Fennema y otros (1999), las estrategias descritas en este trabajo tienen en consideración la elección libre del material para modelizar el problema. Estos materiales incluyen grupos de 10 en su estructura, y el paso de contar los grupos de 10 de uno en uno, a contarlos de 10 en 10, ha servido de indicador en la evolución del conocimiento del valor posicional a través de las estrategias, aplicando el marco para la comprensión de la decena de (Wright y otros, 2006).

El uso de los bloques de base 10 ha dependido también del tipo del problema. En la sesión 17, cuando ya se había empezado a utilizar este material en sesiones anteriores, hay un descenso en su uso, debido posiblemente a que el problema contenía 4 sumandos con cantidades menores que 20. Sin embargo, en la sesión 18, con cantidades mayores, vuelve a aumentar el uso de este material. Los niños, ante situaciones más complejas, prefieren utilizar la modelización directa con contadores individuales.

Uno de los aspectos más importantes de cara al análisis de las estrategias ha sido la presencia de agrupamientos de 10 en las representaciones de las cantidades. El uso de la Tabla 100, los cartones de decenas de huevos y los bloques de base 10 implican tener separadas las decenas y las unidades. En este estudio, gran parte de los niños prefirieron utilizar contadores individuales para construir las agrupaciones de 10. Considerando las representaciones con decenas y unidades, el otro aspecto del análisis de las estrategias consiste en describir cómo se opera y se realiza el conteo de estas representaciones. Como el estudio plantea problemas con agrupamientos de 10, problemas de estructura aditiva con números de dos cifras, y problemas de estructura multiplicativa sin grupos de 10, voy a enfatizar algunos resultados importantes de cada uno de estos tipos, comparándolos con resultados de estudios anteriores.

Los problemas de multiplicación con agrupamientos de 10 y unidades sueltas han sido analizados en dos etapas a diferencia de los estudios previos. La primera etapa consiste en un problema de multiplicación de grupos iguales con 10 elementos cada uno. La segunda etapa consiste en combinar el resultado anterior con las unidades sueltas que indica el problema. En la primera etapa, los niños han mostrado preferencia por la estrategia de modelización directa de agrupamiento usando contadores individuales para construir grupos de 10, y realizando el conteo de uno en uno. Esta estrategia ha sido mucho más frecuente que las demás. Sin embargo, a lo largo del taller, el uso de estrategias basadas en el valor posicional aumenta de manera significativa. En la segunda etapa, inicialmente han utilizado la estrategia de juntar todo, también contando de uno en uno todos los elementos. No obstante, el aumento del uso de estrategias de valor posicional a lo largo del taller no ha sido tan llamativo, ya que, tras utilizar esta estrategia en la primera etapa, ha habido niños que han representado las dos cantidades de la combinación, y han utilizado el conteo a partir del primer sumando para realizar el recuento. Esta estrategia no se describe en los trabajos de Carpenter, Fennema y otros (1999). Esto puede ser debido a que los niños se sientan más cómodos utilizando la modelización directa para explicar sus estrategias que intentando explicar estrategias más avanzadas como el conteo a partir del primero o el uso del valor posicional.

En los problemas de división medida con agrupamientos de 10 y resto, también se ha observado una disminución en las estrategias de modelización directa a lo largo del taller, tal como ocurre en los trabajos previos, aunque al presentar los problemas algún tipo de dificultad, como el aumento de las cantidades, los niños vuelven a utilizar la modelización directa. Esta conexión entre una estrategia informal y otra formal es un rasgo del aprendizaje con comprensión indicado por Carpenter y otros (1999). En esta situación de elección de material, el uso del conteo de 10 en 10 y el uso de los bloques de base 10 ha aumentado levemente. Esto corresponde con el desarrollo de estrategias planteadas por Carpenter, Fennema y otros (1999), con la diferencia de que los niños en estos estudios previos solo tienen delante los bloques de base 10 para resolver el problema, y los niños de este estudio pueden elegirlos espontáneamente entre otros. La norma en el aula de tener que explicar el procedimiento de resolución ha dejado ver que los bloques de base 10 son elegidos más frecuentemente para explicar sus procedimientos por los niños que utilizan las estrategias basadas en el valor posicional.

El análisis de las estrategias en los problemas de estructura aditiva, prestando atención a la representación de las cantidades y la forma de operar con ellas, focalizado en el recuento de cantidades, ha permitido observar estrategias que no se describen en el marco teórico. La modalidad de aplicación intermedia de la estrategia juntar todo y contar con objetos, en la que se representan las dos sumandos de un problema de suma y, a continuación, se cuenta a partir del primer sumando los elementos de la representación del segundo sumando, no está descrita en los trabajos previos. Las representaciones en decenas y unidades, ya sea con barras construidas por los niños, con bloques de base diez, o hueveras, han permitido observar distintos niveles de operatividad con ellas. Hay niños que representan un solo sumando en decenas y unidades y, para realizar el recuento final, cuentan a partir del primer sumando. Otros niños representan las dos cantidades con grupos de 10 pero, al no agrupar las decenas por un lado y las unidades por otro, tienen que realizar también un conteo de uno en uno a partir del primer sumando de la representación del segundo sumando. Por último, los niños que agrupan las decenas por un lado y las unidades por otro, pueden contar de uno en uno, si no están muy seguros de la cantidad final con un recuento más avanzado de 10 en 10, o reconocer el número de dos cifras que corresponde con una representación en decenas y unidades. Desde un punto de vista general, las estrategias para resolver problemas de estructura aditiva han evolucionado desde estrategias de modelización directa, estrategias de conteo, hasta estrategias inventadas y uso del algoritmo, tal como indicaban los estudios previos. Carpenter, Franke y otros (1997) observaron que los niños no tienen por qué utilizar estrategias inventadas y pueden pasar directamente a usar los algoritmos. Sin embargo, los niños que utilizan estrategias inventadas tardan más en utilizarlos. Aunque el uso de estrategias inventadas no ha sido muy frecuente, los niños que las utilizaban no llegaron a utilizar el algoritmo en ninguna sesión, incluso llegaron a utilizarlas en problemas de división partitiva.

En los problemas de resta, la estrategia de modelización directa de "quitar" ha sido la más frecuente en todo el taller. El detalle más significativo es que se han observado estrategias inventadas que reflejan un dominio del sistema de numeración avanzado. Han sido muy pocos los niños que las han utilizado, pero muestran conocimientos sobre descomposición de números de dos cifras en décadas y unidades, descomposición de décadas en decenas, operaciones con decenas por separado, y combinación entre decenas y unidades. Las capacidades detectadas en estas estrategias suponen un nivel de comprensión alto del valor posicional.

El análisis de las estrategias de los problemas de estructura multiplicativa sin agrupamientos de 10 muestra muchas modalidades de aplicación de las estrategias de agrupamiento y reparto, dependiendo de la representación de la cantidad "número de grupos" y la forma de hacer el reparto o el agrupamiento. La mayoría han sido resueltos con estrategias de modelización directa sin grupos de 10 y contando de uno en uno, excepto 9 casos de las 203 estrategias registradas, que se observaron en la sesión 14, donde la cantidad total del problema es 60 y los grupos contienen 15 elementos, y pueden utilizarse representaciones de cantidades en decenas y unidades, y observar cómo se realiza el recuento. Por lo tanto, el aumento progresivo de las cantidades, cuando en los grupos hay una cantidad mayor de 10 elementos, puede permitir observar estrategias más avanzadas respecto al agrupamiento de 10 y el valor posicional. En este trabajo solo se pudo observar en uno de los problemas.

Los caminos de aprendizaje de cada uno de los problemas permiten ver las capacidades necesarias para utilizar una estrategia en concreto. En este trabajo, he identificado cada estrategia con un camino de aprendizaje. La secuencia de capacidades necesarias para utilizar cada estrategia, me permite identificar qué capacidades necesita desarrollar el niño para ejecutar estrategias más formales. De hecho, si nos situamos en un nivel más alto de análisis, en las trayectorias de aprendizaje que describen los niveles del progreso del aprendizaje de un contenido matemático, se pueden identificar las capacidades necesarias en cada uno de los niveles.

El análisis de las estrategias muestra evidencias de aprendizaje con comprensión según Carpenter y Lehrer (1999). El taller discurre paralelamente a las clases habituales, y los niños aprenden a lo largo del curso los algoritmos de suma y resta. A lo largo del taller, en un contexto en el que pueden elegir la estrategia para resolver el problema, los niños utilizan modelización directa, y al final del taller, utilizan el algoritmo para resolver los problemas. La aplicabilidad de los algoritmos en una situación de resolución de problemas donde pueden construir sus propias estrategias, es un rasgo de aprendizaje con comprensión de la suma y la resta, según el estudio previo de referencia. La integración de las situaciones de los problemas planteados, con las estrategias de modelización directa y la aplicabilidad del algoritmo, conforma conexiones adecuadas entre estrategias informales y formales. Además, como ocurrió en el taller, en un momento de duda sobre la ejecución correcta del algoritmo, los niños vuelven a utilizar la modelización directa para asegurar la resolución del problema (Carpenter y Lehrer, 1999).

El uso de hechos numéricos se considera una estrategia formal que implica la recuperación de combinaciones de números de una cifra. Cuando los números tienen más de una cifra, el valor posicional de cada una de las cifras juega un papel importante en la recuperación del resultado. Una década combinada con un número menor que 10 ya implica saber la posición de la cifra de las decenas y la posición donde se colocan las unidades. Este tipo de estrategias en las que se combina el uso de hechos numéricos básicos y derivados con decenas son denominadas por los estudios previos “estrategias inventadas”, y son estrategias construidas por los niños, lo que supone una apropiación del conocimiento que permite desarrollar distintos procedimientos para operar con números de dos cifras. Esta apropiación de los conocimientos también es un rasgo del aprendizaje con comprensión (Carpenter y Lehrer, 1999). Las estrategias inventadas observadas en el taller han sido variadas, como se puede ver en la Tabla del Anexo 6. Los niños han utilizado este tipo de estrategias basadas en el conocimiento del valor posicional, en todos los tipos del problema.

Otra estrategia que muestra esta apropiación del conocimiento es el uso del algoritmo de la suma para realizar sumas parciales o reiteradas en un problema de multiplicación de grupos iguales, donde los niños integran la idea de la suma reiterada aplicada a grupos iguales, con el algoritmo de la suma como ocurrió en la sesión 21.

El uso de estrategias con representaciones simbólicas, sin comprensión, produce no llegar al éxito de la tarea. En las últimas sesiones del taller, cuando los alumnos ya habían aprendido a hacer el algoritmo de la suma y de la resta, se dieron casos de utilizar estos procedimientos formales cuando no se podían aplicar a la situación, incluso en situaciones multiplicativas. Ellos mismos no se sentían seguros con la estrategia elegida y buscaban otra más informal con la que pudiesen explicar sus ideas.

1.3. Sobre las representaciones y su evolución

La categorización de representaciones de la que parto contiene dos componentes, el tipo de representación del número y el tipo de objeto. Puig y Cerdán (1988) representan las cantidades como un par ordenado (x, u) en el que *x* es un número y *u* una unidad de una magnitud. Con el objetivo de adaptar este formato a representaciones infantiles de cantidades discretas, De Castro y Bosch (en prensa) describen distintos tipos de representaciones de cantidades discretas, considerando las cantidades como el mismo par ordenado {x, o} donde *x* es el número de objetos y *o* el objeto representado. En trabajos previos en los que se estudia la representación infantil de cantidades discretas (Alvarado, 2005; El Bouazzaoui, 1982; Hughes, 1987), no se da tanta importancia a este doble aspecto de la cantidad. Esta combinación amplía la categorización de Hughes (1987), que basándose solo en la representación del número, utiliza las categorías idiosincrásica, pictográfica, icónica y simbólica del número. Las representaciones idiosincrásicas de Hughes no han sido consideradas en este trabajo, por no ser representaciones eficientes que sirvan para resolver problemas. Las representaciones pictográficas pueden relacionarse con las representaciones icónicas de número y objeto (B1) de mi trabajo. Las representaciones icónicas pueden hacer referencia a las icónicas de número, sin representante de objeto (A1). Por último, las representaciones simbólicas pueden identificarse con las que mezclan aspectos icónicos y simbólicos del número y las simbólicas con cifras y palabras, todas ellas sin representante del tipo de objeto (A2, A3, A4).

Las representaciones observadas entran en el esquema propuesto por De Castro y Bosch (en prensa), incluyendo en este trabajo, en la categoría icónica de número sin representante de tipo de objetos (A1), todas las representaciones realizadas con los materiales, donde cada elemento del problema se veía representado por un objeto del material didáctico utilizado.

Las representaciones utilizadas en taller han sido recogidas en tres momentos diferentes de las sesiones: en la resolución del problema, en la anotación por escrito del resultado y en la comunicación de la estrategia en carta o email. En cada una de las fases, el uso de las representaciones tiene un fin diferente. En la resolución del problema ayuda a modelizar la situación, en la escritura de la solución se necesita dar por escrito una cantidad, y en la carta, las cantidades se incluyen dentro de un texto. Estas diferencias han provocado que en cada una de ellas predominen representaciones diferentes.

En la fase de resolución del problema, los niños han presentado una preferencia a lo largo del taller por representaciones icónicas de número sin representante del tipo de objeto, para resolver el problema. En su mayoría han sido cantidades representadas con objetos, cubos encajables, marcas y en menor medida, dibujos. Estas representaciones se utilizan en la mayoría de las estrategias de modelización directa que, como he comentado antes, fueron las más utilizadas. Estas representaciones se pueden considerar *concretas fundamentadas* tal como lo hacen Braithwaite y Goldstone (2013). A lo largo del curso de primero de educación primaria, se introducen conocimientos formales como la escritura de los numerales y procedimientos de cálculo como los algoritmos. Los niños comienzan a utilizar progresivamente la representación A3, de número con cifras y sin representante de tipo de objeto, adaptándose a un lenguaje simbólico matemático, tal como se hace en los procesos de formalización progresiva.

Las representaciones más utilizadas para el momento de dar por escrito la solución han sido las simbólicas del número, con cifras y palabras, y sin representante de tipo de objeto (A3 y A4). En el texto de las cartas, se incluye con más frecuencia la componente del tipo de objeto, utilizándose además representaciones del tipo de objeto con palabras (C3 y C4).

1.4. El uso y evolución de conocimientos informales y comprensión de la decena

A pesar de que en el primer curso de educación primaria se presta mucha atención al simbolismo aritmético y a la iniciación en los algoritmos de las operaciones con números de dos cifras, las modalidades de aplicación de las diferentes estrategias de modelización directa han sido las más frecuentes en todos los problemas. Dentro de un ambiente regido por normas que permitan la libre elección de instrumentos y estrategias, los niños han utilizado estrategias de modelización directa prácticamente en todas las resoluciones, y han ido incorporando en menor medida estrategias basadas en conocimientos formales, aprendidos en el resto de clases de la asignatura. La propuesta de dejar a los niños que elijan procedimientos de resolución en tareas realistas, permite la utilización de *conceptos corpóreos* (Lakoff y Núñez, 2000), que tras procesos de abstracción matemática se van convirtiendo en conceptos matemáticos abstractos.

Los niños en el primer curso de primaria resuelven problemas de multiplicación y división a través de conocimientos informales. Las estrategias utilizadas en problemas de multiplicación de grupos iguales han sido, en su mayoría, estrategias de modelización directa basadas en conocimientos informales. Con estos resultados, se puede concluir que los niños de primero de educación primaria resuelven los problemas de estructura multiplicativa utilizando estrategias informales, resultado razonable desde el punto de vista curricular, ya que no se introduce la multiplicación y división hasta cursos posteriores.

El análisis de las estrategias realizado permite detectar capacidades que implican conocimientos formales en lo que todavía se considera estrategias informales, por lo que existen una gran variedad de estrategias de transición de un conocimiento a otro. Los caminos de aprendizaje muestran las estrategias como secuencias de capacidades necesarias para su utilización, y ponen de manifiesto que las estrategias van incluyendo progresivamente conocimientos formales aprendidos en el aula. El marco teórico indica que las estrategias de modelización directa y conteo son estrategias informales, y estrategias como la recuperación de hechos numéricos, estrategias inventadas, uso del valor posicional y los algoritmos son estrategias formales. Las capacidades detectadas en las modalidades de uso de estos tipos de estrategias dejan vislumbrar aspectos basados en conocimientos formales que hacen que algunas de las modalidades de aplicación de estrategias puedan considerarse estrategias de transición de un conocimiento informal a otro formal.

Las relaciones entre las estrategias informales y formales evidencian un aprendizaje con comprensión, tal como indican Carpenter y otros (1999). Estas conexiones entre el conocimiento informal y formal son las referidas por el NCTM (2003) en sus Estándares para la Educación Matemática para los primeros años de escolaridad.

En este trabajo, el desarrollo de la comprensión de la decena se analiza a través de las evidencias que aparecen en la resolución de problemas aritméticos. Los problemas de estructura multiplicativa con agrupamientos de 10 y de estructura aditiva con números de dos cifras permiten observar indicios del nivel de comprensión de la decena, por la forma de representar las cantidades, la forma de manipularlas y la forma de contarlas.

La clasificación de las estrategias de problemas de estructura multiplicativa con grupos de 10 y en los problemas aditivos, según la agrupación en decenas de las cantidades y su conteo, así como en estrategias de conteo, estrategias inventadas y uso de algoritmos, me ha permitido ver la evolución de las estrategias a lo largo del curso, mostrando como es el desarrollo de la adquisición del conocimiento del valor posicional y su operatividad en la resolución de problemas.

La identificación del nivel de comprensión de la decena (Wright y otros, 2006) o la concepción de los números de dos cifras (Fuson, 1992) a través de la observación de las estrategias utilizadas por los niños al resolver problemas aritméticos, permite describir distintos niveles y concepciones dependiendo del tipo de problema.

La resolución de los problemas multiplicativos con agrupamientos de 10 permite a los niños construir representaciones de las cantidades distintas a la unitaria. Estas representaciones están dirigidas por la estructura del problema. Las estrategias utilizadas en los problemas con agrupamientos de 10 pueden relacionarse con los niveles de comprensión de Wright y otros (2006), considerando la agrupación al representar cantidades en las estrategias de modelización directa, y la forma de ser contadas. Los niveles observados se han podido relacionar con los modelos referentes, y además se han observados algunas estrategias intermedias entre dos niveles.

Las estrategias en las que no se dejan grupos de 10, suponen un nivel de comprensión *inicial* de la decena (Wright y otros, 2006), y *concepción unitaria* de Fuson (1992). En este tipo de estrategias los niños han representado separadas las unidades sueltas del problema dejando ver una representación que corresponde a la *separación en décadas y unidades* (Fuson, 1992).

Cuando las estrategias de modelización directa utilizadas suponen grupos de 10 separados, la representación de la cantidad resultado refleja el nivel de *separar decenas y unidades* de Fuson (1992). Si el recuento final se realiza contando de uno en uno, identificamos estrategias de transición, nivel considerado intermedio entre los dos primeros niveles de Wright y otros (2006). También en el modelo de Fuson (1992), relaciono este tipo de estrategias como un nivel intermedio entre *secuencia decenas y unidades*, y niveles anteriores. Si se realiza el conteo de 10 en 10, se puede relacionar con un nivel *intermedio* de la decena de Wright y otros (2006), y respecto al modelo de Fuson, estas estrategias muestran una concepción de *secuencia de decenas y unidades*.

Las estrategias en las que los niños utilizan la estrategia de reconocer la década a la que corresponde un número de grupos y luego modelizan la situación de combinación, realizando el conteo del resultado a partir del primero, suponen un nivel entre el *intermedio* y el *fluido* de Wright y otros (2006) y *separar decenas y unidades* de Fuson (1992). Finalmente, el uso de conteo a saltos y valor posicional sin material, suponen un nivel *fluido* de la comprensión de la decena en el modelo de Wright y otros (2006) e *integrado* de Fuson (1992).

Los problemas de estructura aditiva, sin la inclusión en el enunciado de cantidades dadas en "decenas", permiten observar la representación de las cantidades y asociarlas a los niveles de desarrollo de la comprensión de los trabajos de referencia. Los problemas que incluyen datos en "decenas", conducen a los niños a interpretar este concepto y representarlo con el conocimiento que tengan sobre ello. En este caso, las representaciones de las cantidades utilizadas por los niños están afectadas por la forma de los datos del problema y pueden forzar a representar las cantidades presentando una concepción más avanzada de la concepción de la estructura de los números de dos cifras (Fuson, 1992), lo que permite el desarrollo del pensamiento. El uso de estas representaciones, al ejecutar sus procedimientos de resolución, permite asociar la estrategia a un nivel de comprensión de la decena de Wright y otros (2006), donde la diferencia de un nivel a otro se observa en el manejo de las cantidades distinguiendo decenas y unidades, y en el uso de materiales estructurados en base 10 para su representación y en el establecimiento de relaciones entre ellas.

Respecto a los niveles de Fuson (1992), no se han observado representaciones del segundo nivel, correspondiente a *separar décadas y unidades*. Se han recogido estrategias entre el primer nivel (*concepción unitaria*) y el tercero (*secuencia decenas y unidades*), donde los niños representan cantidades con grupos de 10, pero siguen contando de uno en uno todas las unidades. Puede pensarse que la representación en grupos de 10 puede venir provocada por la introducción de los datos en decenas en los problemas, pero en la sesión 20, donde no se daban datos en grupos de 10, también hubo niños que representaron cantidades con grupos de 10.

Se han observado también dos usos de la concepción *separar decenas y unidades* al operar con las cantidades: uno, en el que reconocen la cantidad del primer dato, representado separando las decenas y unidades como posiciones de las dos cifras de un número, pero al realizar la acción o relación de la operación aritmética utilizan un nivel inferior; otro, en el que los niños operan con las cantidades separadas en decenas y unidades.

Respecto a los niveles de comprensión de Wright y otros (2006), se han encontrado estrategias que presentan un nivel intermedio entre el nivel *fácil* y el nivel *intermedio*, ya que los niños empiezan a representar grupos de 10, pero siguen contando de uno en uno; no operan con ellos como unidades de distinto orden.

Las estrategias utilizadas en los problemas de estructura multiplicativa sin agrupamientos de 10 solo han permitido identificar niveles iniciales de comprensión de la decena. Solo en 10 de las 203 estrategias recogidas, tienen un nivel *intermedio* o *fluido* en el modelo de Wright y otros (2006), y de concepción *separar decenas y unidades*, como mínimo, de Fuson (1992). Ocho de esos casos son de problemas de multiplicación, y dos de división partitiva. Las cantidades involucradas en los problemas solo han tenido un tamaño que permita que cada grupo de la situación tenga más de 10 objetos, en la sesión 21, de multiplicación, y en la sesión 14, de división partitiva. Es justo en estas sesiones donde se han observado estrategias que se pueden asociar a los niveles avanzados de los modelos de referencia. Por lo tanto, valorar la comprensión de la decena y de la estructura de los números de dos cifras con este tipo de problema en primero de educación primaria, donde se introducen números de tamaño menor, no es aconsejable, por no permitirlo el tamaño de las cantidades utilizadas en los enunciados.

2. Implicaciones

2.1. Implicaciones para la investigación

2.1.1. Trayectorias de enseñanza-aprendizaje y caminos de aprendizaje para una tarea

Hay dos ideas fundamentales que se utilizan como instrumento de análisis en la didáctica de la matemática actual, a las que he dado usos diferentes al de los trabajos de referencia. Como ya indiqué en el marco teórico, el término trayectoria de aprendizaje ha recibido distintas interpretaciones (Clements y Sarama, 2004; Gómez y Lupiáñez, 2006). En este trabajo, he tomado dos ideas relacionadas con este término de trabajos precedentes: las trayectorias de aprendizaje de Clements y Sarama (2004 y 2009) y los caminos de aprendizaje para una tarea de González y Gómez (2015). En concreto, los estudios previos de los que parto, le han dado usos muy diferentes. Sin embargo, he articulado ambas, para tratar a dos niveles diferentes la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático.

En este trabajo, las trayectorias de enseñanza-aprendizaje para un contenido concreto y los caminos de aprendizaje para una tarea han servido como herramientas para desarrollar el currículo. Partiendo de la interpretación de Clements y Sarama (2009), utilizo las trayectorias de enseñanza-aprendizaje para estudiar la progresión del conocimiento de un contenido concreto que abarca un periodo de tiempo amplio, como puede ser un curso o etapa, sirviendo de base para el diseño curricular. Desde una perspectiva menos amplia, más puntual, parto de la idea de caminos de aprendizaje para una tarea, que permite organizar la planificación en el aula de matemáticas (González y Gómez, 2015).

Las trayectorias de aprendizaje tienen como objetivo el aprendizaje de un contenido matemático, para el que se describe el camino de aprendizaje hasta adquirirlo, y el camino de enseñanza para conseguirlo. Esta visión se corresponde al planteamiento de las trayectorias de aprendizaje de Clements y Sarama (2009). En mi trabajo, el interés se centra en la comprensión del valor posicional de nuestro sistema de numeración y para ello, la trayectoria de aprendizaje más general que me aportan los estudios del marco teórico, me permite tener una visión de cómo es el desarrollo de este contenido a lo largo de varios cursos. El aprendizaje del valor posicional no es un conocimiento aislado, ya que está relacionado con otros contenidos, tal como presenté en el Capítulo 2 al hablar de la estructura conceptual de número natural. Por esta razón, he considerado varias trayectorias de aprendizaje, como expuse al final del capítulo 2, para poder identificar el nivel de desarrollo del conocimiento sobre el valor posicional. Esta consideración favorece las recomendaciones curriculares de organismos como el NCTM (2003) y NAEYC y NCTM (2013) sobre la articulación de los contenidos en el currículo para su enseñanza.

Esta perspectiva da una panorámica amplia en la que podemos elegir un curso o nivel. Al centrarme en el contenido concreto de la comprensión de la decena, la visión se reduce a un curso, en primero de educación primaria, donde se trabaja este concepto, para el que los estudios previos me permiten realizar una trayectoria de aprendizaje sobre este contenido más concreto. En el capítulo 4 de resultados, he podido identificar, en cada una de las trayectorias de aprendizaje implicadas, el nivel de desarrollo del conocimiento de la decena a través de las estrategias al resolver problemas aritméticos.

El camino de enseñanza de las trayectorias de aprendizaje utilizado en este trabajo, se basa fundamentalmente en los trabajos de la CGI, donde se utiliza la resolución de problemas aritméticos verbales para el desarrollo de conocimientos sobre el sistema de numeración y la aritmética.

2.1.2. Las estrategias como caminos de aprendizaje

Para el análisis de las estrategias utilizadas en el taller, he utilizado los caminos de aprendizaje para una tarea, de una forma diferente a González y Gómez (2015). En los trabajos de referencia, se utilizan para el diseño de tareas, para evaluar el aprendizaje de los alumnos, e identificar objetivos de aprendizaje. En este trabajo, he utilizado los caminos de aprendizaje para describir las estrategias como secuencias de capacidades necesarias para resolver el problema. Se trata de una ampliación en el rango de uso de un instrumento teórico. Además, las capacidades son expectativas de aprendizaje situadas en el nivel mínimo de concreción, que permiten detallar los aprendizajes que deben desarrollar los niños para resolver las tareas planteadas.

En el Anexo 8, presento un listado de las capacidades agrupadas por expectativas de aprendizaje más generales, para el desarrollo del conocimiento del valor posicional y la aritmética en primero de primaria, con las capacidades observadas en el análisis de estrategias de este trabajo de investigación. He utilizado el término capacidad tomado de los trabajos de González y Gómez (2015), que considero muy interesante desde el punto de vista teórico, ya que es la unidad mínima de expectativa de aprendizaje. Este nivel de concreción no se considera como tal en algunos documentos curriculares y, sin embargo, tiene una gran relevancia en los *Common Core State Standars for Mathematics* (CCSSI, 2010), y otros estudios como Clements (2004).

Es interesante relacionar el análisis puntual de una estrategia, trazando su camino de aprendizaje como secuencia de capacidades para una tarea, con la localización desde una perspectiva más amplia en el tiempo, del nivel de desarrollo del conocimiento al que pertenece, en la trayectoria de aprendizaje de un contenido en concreto. Las capacidades son ingredientes básicos para explicar los caminos de aprendizaje de un problema, y también los cambios que se producen en las trayectorias de aprendizaje de un nivel de desarrollo a otro, permitiendo conocer qué capacidades se deben desarrollar en cada nivel.

La propuesta de mi trabajo es el planteamiento de problemas aritméticos verbales con agrupamientos de 10 para desarrollar la comprensión de la decena. Partiendo en las capacidades indicadas en documentos curriculares como los *Common Core State Standars for Mathematics* (NGA y CCSSO, 2010) y Clements (2004), y tras el análisis de las estrategias utilizadas por los niños, junto con los errores y dificultades que han incurrido, he podido perfilar los caminos de aprendizaje para esta tarea. Cada camino de aprendizaje precisa de una serie de capacidades, que permiten adscribir cada uno de ellos, es decir, cada estrategia, a un nivel de comprensión de la decena. Este nivel de conocimiento me permite localizar en una visión más amplia, el momento de desarrollo al que corresponden en la trayectoria de enseñanza-aprendizaje del valor posicional.

Por todo esto, considero que el término trayectoria de aprendizaje es una noción que integra perspectivas distintas y es muy potente en la didáctica de la matemática, ya que permite organizar los contenidos de forma articulada, desde un nivel curricular por cursos o etapa, hasta la organización de tareas en la planificación del aula. Desde el punto de vista de la investigación, es una noción muy potente, como instrumento de soporte para la organización de contenidos, expectativas de aprendizaje y diseños instruccionales fundamentados en las teorías de aprendizaje sobre contenidos matemáticos.

Así, una aportación teórica que me parece interesante de mi trabajo es la utilización de los caminos de aprendizaje para una tarea, como la descomposición de las estrategias de resolución en secuencias de capacidades, porque hasta ahora los caminos de aprendizaje se habían utilizado para determinar expectativas de aprendizaje y tener dos niveles de concreción para redactar objetivos (González y Gómez, 2015). Aquí lo he utilizado para describir y analizar estrategias.

2.1.3. Aspectos metodológicos de la intervención en el aula

Una aportación importante de este trabajo es la metodología utilizada en la intervención, que sigue un enfoque investigativo, mientas que en general, en España el enfoque más habitual es uno intermedio entre el de destrezas y conceptual (Baroody y otros, 2004). En mi investigación, solo he trabajado con un grupo en un único centro con esta metodología, y no se pueden generalizar los resultados obtenidos, pero en Estados Unidos se está utilizando este enfoque de la enseñanza de las matemáticas a gran escala y se están obteniendo buenos resultados desde el punto de vista del aprendizaje con comprensión (Carpenter y otros, 2004).

En el enfoque elegido, los niños resuelven problemas inventando estrategias propias, que debaten con el resto del aula, admitiendo varias soluciones válidas y donde se desarrolla la competencia matemática en el sentido de que los niños desarrollan los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento, comunicación, establecimiento de conexiones y representación (Baroody, Cibulskis, Lai y Li, 2004).

Un aspecto importante de la metodología introducida en el taller es la libre elección del material para la construcción de estrategias. Con el enfoque investigativo, los niños del taller han mostrado preferencia por las estrategias informales, más que las formales, que no corresponden a su forma natural de pensar y están impuestas por el currículo. Sin embargo, desde un enfoque conceptual, se anima a los niños a utilizar estrategias formales, tratando de favorecer un aprendizaje de las mismas con comprensión a través del uso de materiales manipulativos estructurados, como los bloques de base diez.

Como línea de investigación futura, se propone estudiar la articulación de los conocimientos informales y formales, elaborando trayectorias de enseñanza-aprendizaje para contenidos concretos que faciliten las conexiones entre ambos tipos de conocimiento. Las trayectorias describen cómo es la progresión del aprendizaje de un contenido y contienen tareas para adquirirlo. Analizar las estrategias utilizadas para resolver estas tareas, identificando las secuencias de capacidades necesarias para ejecutarlas, ayudaría a dirigir la planificación de aula en la práctica educativa.

2.1.4. Limitaciones

En este apartado, voy a hablar de tres tipos de limitaciones: las relativas a la recogida de datos, a la extensión de la experimentación y al posible interés de haber estudiado otros aspectos, como el aprendizaje de hechos numéricos y su integración con las estrategias inventadas basadas en el valor posicional.

En cuanto al método, la recogida de datos consistió en entrevistas en las que los alumnos daban informes retrospectivos de su actividad, en un contexto de aula. En las entrevistas, se iba recogiendo el informe verbal que los niños daban sobre sus procedimientos, a medida que estos avisaban de que habían finalizado el proceso de resolución del problema. Dado que el problema se planteaba en el aula a todo el grupo, algunos niños finalizaban al mismo tiempo, por lo que la información de las entrevistas puede ser inmediata a la resolución, o recogerse cuando ya había pasado un rato. Así, el registro en el aula solo puede realizarse a un número de alumnos. Esto implica que las investigaciones basadas en contexto de aula necesitan de una forma de recogida de datos más eficaz, con más personas, o algún de medio que permita disponer de toda la información. Quizás sea necesario, en este tipo de estudios, plantearse otras formas de registro que permita ampliar la información a mayor número de alumnos en tiempos limitados. La entrevista en el aula es una situación natural escolar, donde el niño se encuentra inmerso en su entorno y puede ser entrevistado por su maestro. En cambio, la entrevista clínica es individual, en un entorno más artificial y realizada por el investigador (Ginsburg, Jacobs y López, 1998). Ambos tipos de entrevistas tienen sus ventajas e inconvenientes, por lo que quizás habría que combinar entrevistas clínicas con entrevistas en el aula para obtener mayor detalle de las estrategias utilizadas por los niños en diferentes situaciones.

Tendría valor ampliar el presente estudio a más cursos para poder elaborar trayectorias de enseñanza más amplias. Al abarcar la investigación un solo curso, los niños se encontraban en un punto concreto de la trayectoria de aprendizaje, la mayoría localizados en el uso de estrategias de modelización directa. Los resultados de este trabajo encajan bien en la trayectoria descrita en el marco teórico, pero estaría bien continuar a lo largo de más cursos, proponiendo tareas (en la misma línea del presente trabajo) adecuadas a los niveles sucesivos de desarrollo, identificando caminos de aprendizaje para las nuevas tareas, capacidades necesarias para su ejecución y estudiando con más detalle cómo se produce la transición a niveles superiores de pensamiento.

Por otro lado, sería deseable poder realizar un taller con más sesiones a la semana, donde se planteen más problemas de cada uno de los tipos, y poder describir mucho mejor esas trayectorias de aprendizaje. La descripción de las trayectorias y caminos de aprendizaje realizada obedece a las estrategias observadas en las sesiones de cada tipo de problema. Los problemas de grupos iguales, sin agrupamiento de 10, tanto de multiplicación o división partitiva, son planteados en dos y tres sesiones, respectivamente, mientras que los problemas aditivos son planteados en siete sesiones cada uno. De esta forma, las trayectorias de aprendizaje de los problemas aditivos se sustentan sobre mayor cantidad de información y pueden ser más fiables que las correspondientes a los problemas de estructura multiplicativa sin agrupamientos de 10.

En primero de primaria se dan muchas transiciones de un conocimiento informal a otro formal para investigar de cara al diseño e implementación curricular. Con el fin de acotar los objetivos de la investigación, me he centrado en una problemática ligada al conocimiento del valor posicional, que es importante, y novedosa para los niños en primer curso de educación primaria, y he podido identificar capacidades necesarias para adquirir un nivel de comprensión avanzado a través de las estrategias de resolución de problemas aritméticos. Otros trabajos, como De Castro y Hernández (2013), estudian el paso de estrategias como contar todo a contar a partir de un sumando, como transición del pensamiento preaditivo a aditivo. Transiciones de estrategias de conteo a un conocimiento formal, como la recuperación de hechos numéricos básicos y derivados, que constituyen una iniciación al cálculo mental, no están tan claras. También debe prestarse atención a la articulación del conocimiento de hechos numéricos con el trabajo del cálculo mental con unidades de distinto orden. En este trabajo, aunque el uso de estrategias inventadas no ha sido muy frecuente, se ha podido observar que el dominio de las combinaciones básicas en síntesis con la comprensión del valor posicional de las cifras de números de dos dígitos, permite el desarrollo de estrategias inventadas. Los niños han utilizado este tipo de estrategias en todos los tipos de problemas, y una línea de investigación futura puede ser profundizar en la articulación de los hechos numéricos, la comprensión del valor posicional y las estrategias inventadas, extendiendo la investigación a participantes de mayor edad y poder observar su evolución a lo largo de más cursos.

2.2. Implicaciones para la enseñanza

2.2.1. El papel de las estrategias informales en el currículo

Curricularmente, se propone incluir tareas informales en la planificación del aula, adelantando experiencias en que los niños puedan construir ideas sobre conceptos o procedimientos antes de su enseñanza formal como situaciones de estructura multiplicativa. El uso de estrategias de agrupamiento y reparto para problemas de estructura multiplicativa de los niños, antes de recibir instrucción formal sobre estas operaciones, permite que los niños construyan significados sobre la estructura multiplicativa, que constituyen la base para la comprensión en este ámbito matemático. En concreto, en este estudio los niños resuelven problemas de estructura multiplicativa con agrupamientos de 10 en primer curso de primaria, para mejorar la comprensión sobre la decena. Dentro de un aula en el que se favorezca el uso de conocimientos informales, este tipo de problemas de estructura multiplicativa tienen sentido para favorecer el desarrollo de la comprensión de la decena, como se puede observar en la evolución de las estrategias en este tipo de problema.

Se plantea la resolución de problemas como vía de construcción de significados y no de aplicación de contenidos. En los talleres realizados se ha observado que la mayoría de los niños resuelven problemas de multiplicación y división utilizando estrategias propias sin tener ningún conocimiento formal sobre dichas operaciones aritméticas. A través de la resolución de problemas hemos conseguido que los niños razonen y modelicen situaciones aritméticas, articulen sus ideas para comunicarlas al resto de la clase, pudiendo establecer así relaciones entre los conocimientos que tienen con los de los compañeros. Este implicará aprendizaje con comprensión de estos contenidos matemáticos y por lo tanto competencia matemática.

Introducir la resolución de problemas antes de la instrucción formal, implica romper con el uso de la resolución de problemas para aplicar conocimientos nuevos, sino como vía para desarrollar la comprensión de los contenidos matemáticos. Por eso, adelantar la memorización de las tablas a primer curso no se ajusta bien a esta consideración del aprendizaje con comprensión, ya que el simple almacenamiento de información no implica aprendizaje con comprensión.

Desde mi punto de vista, apoyo la opción consistente en proponer experiencias que ayuden a desarrollar los conocimientos informales, más que adelantar conocimientos formales. Más que pasar la memorización de algunas tablas de multiplicar a primero de Educación Primaria, abogamos por introducir situaciones en las de los niños puedan construir significados para la multiplicación y la división para su comprensión.

El uso de materiales manipulativos estructurados en el aula impone una forma de representar las cantidades a los alumnos. En el taller de este trabajo, los niños eligen el material con el que modelizar el problema, construyendo ellos mismos la estructura. De hecho, han mostrado preferencia por elaborar ellos las barras de 10 cubos encajables, que utilizar los bloques de base 10 o las hueveras. Propongo desde aquí otro formato de uso de los materiales, más libre, donde los niños pueden evidenciar la comprensión adquirida de los contenidos.

La introducción de instrumentos como las cajas de decenas de huevos, o la tabla 100, que no habían sido empleados en los estudios del marco teórico, ha permitido detectar nuevas modalidades de aplicación de estrategias descritas en la literatura. Interpretamos que estos instrumentos pueden jugar un papel de catalizadores en la transición de estrategias de modelización directa al conteo, o del conteo por unidades al conteo de diez en diez, lo cual tiene importantes implicaciones para el diseño de instrucción en estas edades.

Las normas de utilización del material en el taller tienen implicaciones didácticas sobre el uso de materiales manipulativos en el aula. Los materiales estructurados se utilizan en el enfoque conceptual intentando que los niños aprendan por analogía contenidos con la misma estructura. Se intenta que los niños adapten su pensamiento a la estructura de material suministrado. En el taller de este trabajo, los niños eligen los materiales y construyen ellos mismos las representaciones, en este caso de decenas y unidades. Los niños pueden elegir el material y han utilizado modalidades de aplicación de estrategias que explican la transición de unas estrategias a otras. No eligen material estructurado con las barras de 10 formadas, sino que prefieren construir por sí mismos las decenas.

El taller se realiza en paralelo con las clases habituales que tienen un enfoque de destrezas y/o conceptual. Como he planteado en las implicaciones metodológicas para el aula, la educación matemática debería evolucionar y conseguir integrar un enfoque como el de la intervención en las clases habituales. El modelo CGI, en el que se basan los talleres, ha sido utilizado con éxito a gran escala en Estados Unidos (Carpenter, Blanton, y otros, 2004) y se está apoyando la extensión de su uso. No es algo utópico. Se está utilizando en muchos sitios con buenos resultados.

Para poder hacer estos cambios en la educación, es necesario formar a los maestros en estas formas de enseñanza. Para los maestros en ejercicio, el programa CGI tiene una función formativa para que ellos aprendan a enseñar con otro modelo. Hay disponible una traducción al español de Carpenter, Fennema y otros (1999) en Internet[32] en que, tras muchos años de investigación sobre problemas aritméticos verbales, los conocimientos sobre el pensamiento matemático infantil se aplican a la formación de maestros. En esta línea, hay materiales curriculares de 4 a 6 años que ya aplican esta metodología al aula de educación infantil, como De Castro y Hernández (2014).

2.2.2. El desarrollo de la competencia matemática

El taller de resolución de problemas ha sido diseñado para desarrollar las competencias matemáticas recomendadas por los documentos curriculares que presenté en el Capítulo 1. En este trabajo apoyo la idea de que a través de la resolución de problemas, en una ambiente social donde los niños deben compartir sus estrategias, se desarrollan todos los procesos. Las fases del taller están pensadas para promover los cinco *Estándares de Procesos* del NCTM (2003). La resolución de problemas tiene un papel central en este trabajo y consideramos que el resto de competencias se ven involucradas en la resolución de problemas, gracias a la metodología utilizada en el aula. El estándar de resolución de problemas indica que se pueden construir conocimientos nuevos a través de la resolución de problemas con contextos cercanos al niño, permitiendo varias soluciones y reflexionando sobre ellas (NCTM, 2003). Se plantean problemas basados en cuentos adecuadas para la edad de los niños y se les proporciona una gran variedad de materiales para que cada niño utilice el que más se adapte a su forma de pensar. Estas dos características están incluidas en el *Principio de igualdad* (NCTM, 2003).

[32] Una traducción de este libro al castellano está disponible en la dirección: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CarpenterT99-2642.PDF.

Los niños construyen estrategias informales partiendo de sus ideas intuitivas, lo que les permite desarrollar el proceso de razonamiento y demostración cuando conjeturan cuál puede ser la estrategia adecuada y prueban su validez, hasta que consiguen encontrar una estrategia válida. Los alumnos forman colecciones con los materiales que consideran y modelizan las situaciones planteadas utilizando así los procesos de representación y modelización del NCTM (2003) y de la OCDE (2013).

Los niños han establecido relaciones entre estrategias informales como la modelización directa y los algoritmos, establecen conexiones entre los conocimientos informales que van adquiriendo en el taller y los conocimientos formales que paralelamente trabajan en el resto de clases de matemáticas.

Los niños saben que tienen que explicar las estrategias en varios momentos diferentes. En la entrevista individual, en la puesta en común y en la escritura de la carta. Para ello, necesitan articular sus ideas, reflexionando sobre ellas, para comunicar sus procedimientos de resolución.

La puesta en común favorece que los niños reflexionen sobre las estrategias propias y las de los demás niños, establecen relaciones entre sus procedimientos y los de sus compañeros, y se ha observado que los niños intentan utilizar estrategias que otros compañeros han explicado en sesiones anteriores.

Para finalizar, dos de las competencias básicas son la tecnológica y la lingüística. La competencia matemática se puede articular con la lingüística y la tecnológica para recibir y enviar la carta en la que se comunica la estrategia utilizada por correo electrónico, como hemos hecho varias veces en el taller. Este aspecto no estaba presente en De Castro y otros (2012) y acerca nuestro enfoque a lo que sugiere el *Principio tecnológico* del NCTM (2003).

2.2.3. Ideas sobre el aprendizaje con comprensión

En esta investigación entiendo el aprendizaje con comprensión desde un enfoque cognitivo. Gallardo, González y Quispe (2008) indican que, desde esta perspectiva, la interpretación de la comprensión se realiza a través de la observación de las realizaciones de los niños. Así, el análisis de las estrategias observadas y su evolución, me ha permitido interpretar distintos niveles de la comprensión de la decena.

Las estrategias más avanzadas, como las estrategias inventadas y el uso de algoritmos, aumentaron progresivamente a lo largo del taller, aunque dependiendo de la operación y las cantidades implicadas. En bastantes ocasiones, los niños que usaban estas estrategias más eficientes volvieron a la modelización directa al experimentar dificultades. Esto indica una construcción de buenas conexiones entre las estrategias informales y procedimientos más eficientes (como las estrategias inventadas) y más formales (como los algoritmos), lo cual es un buen indicador de un aprendizaje con comprensión (Carpenter y Lehrer, 1999).

Los materiales manipulativos se utilizan de forma analógica, se espera que los niños establezcan relaciones entre la estructura de base 10 y del sistema de numeración. El niño tiene que construir esta relación. Los niños no muestran una preferencia clara de los bloques de base 10, por lo que no queda tan claro que los niños establezcan fácilmente esta relación. Los niños utilizan otro tipo de material no estructurado para resolver las tareas.

Mientras que en la enseñanza tradicional, se favorece una lectura puntual de los enunciados, basándose en palabras clave, en los talleres se ha tratado de evitar un razonamiento “dicotómico”, en el que solo hay que elegir entre suma y resta. Alternar continuamente problemas de suma, resta, multiplicación y división, desde primero de primaria, hace que la resolución de problemas se sitúe en una perspectiva más amplia, en la que el trabajo está orientado al desarrollo de la competencia matemática (De Castro y otros, 2012).

En el taller se incluyen situaciones de comunicación oral de estrategias y, lo que resulta más novedoso, de comunicación escrita. El currículo de educación primaria indica que los niños deben "iniciarse en la comunicación verbal de forma razonada del proceso seguido en la resolución de un problema (MEC, 2014, p. 34063)". En el aula no es habitual que los niños expliquen sus estrategias de cálculo. La propuesta del programa CGI incorpora situaciones donde los niños articulan sus pensamientos para explicar oralmente sus estrategias. Además de esto, en el taller los niños comunican por escrito en una carta (o email) la estrategia utilizada, reflexionando sobre el procedimiento seguido para poder explicar con claridad a otra persona cómo resolver el problema. Estas situaciones han provocado que los alumnos reflexionen y articulen sus ideas, lo que incide en el aprendizaje con comprensión (Carpenter y otros, 1999).

En este trabajo se han observado aspectos didácticos relevantes sobre la utilización de materiales para el aprendizaje del sistema de numeración con comprensión. Desde un enfoque conceptual de la enseñanza de las matemáticas, se pone énfasis en materiales como los bloques de base 10, para que los niños relacionen características de su estructura con aspectos del sistema de numeración. En este estudio, los niños, al tener la opción de elegir el material con el que representar las cantidades, han mostrado preferencia en construir las decenas con cubos encajables o cartones de decenas de huevos. Las conexiones que deben establecerse entre los conceptos matemáticos y los materiales no tienen por qué centrarse en el material, sino en la relación del niño con la tarea, eligiendo la forma de construir las cantidades, a través de sus propias representaciones.

En el futuro, debería fomentarse una mayor reflexión sobre el uso de materiales manipulativos. Actualmente, se sigue un enfoque intermedio entre el de destrezas y el conceptual, pero hay formas de usar los materiales manipulativos más afines a un enfoque de resolución de problemas o a uno investigativo. Algo en la línea del programa CGI, o de la intervención de la presente investigación.

La inclusión en el taller de situaciones que permiten desarrollar conocimientos informales, favorece el desarrollo simultáneo, aunque no del todo integrado, de estrategias informales en el taller y estrategias formales en el resto de las clases. Carpenter y Lehrer (1999) ponen de manifiesto la necesidad de articular el aprendizaje de conocimientos informales de fuera del aula, y formales en el aula. Si incluimos en el aula situaciones en las que los niños construyen y eligen sus propias estrategias, fomentamos una mayor interrelación de conocimientos informales y formales, favoreciendo el aprendizaje con comprensión.

Los conocimientos informales y formales deben integrarse en redes de conocimientos que permitan su aplicabilidad. Una señal de las relaciones entre ambos conocimientos es la relación de estrategias informales y formales posibles que puede aplicar un niño en un problema dado. Los niños que en las últimas sesiones intentaban utilizar el algoritmo, y no estaban seguros de su ejecución, volvían a utilizar estrategias de modelización directa para terminar de solucionar el problema.

El rango de problemas planteados incluyendo de suma, resta, multiplicación y división ha permitido descartar la elección dicotómica que ocurre habitualmente en primero de primaria, donde se aprende los algoritmos de la suma y la resta. Incluir problemas de multiplicación y división en primero de primaria que no incluyen sus correspondientes algoritmos curricularmente, supone que no en todos los casos se puede aplicar un algoritmo conocido, e identificar en que situaciones se usa la suma, en cuáles resta o en cuáles ninguno de los dos es también un indicio de aprendizaje con comprensión.

Los problemas de estructura multiplicativa planteados antes de desarrollar las habilidades y destrezas básicas en las clases formales, permiten desarrollar las ideas intuitivas en conocimientos informales, vinculando estas estrategias a sus aplicaciones, lo que conforma una enseñanza para la comprensión. Crear situaciones donde se construyan ideas intuitivas sobre conceptos matemáticos supone aprendizaje con comprensión de estos contenidos.

2.2.4. Limitaciones sobre el taller

El enfoque de enseñanza utilizado en el taller permite a los niños que decidan sus propias estrategias, sin presionarles e invitándoles a solucionar el problema. Hay alumnos en todas las sesiones que terminaban abandonando o distrayéndose. Es importante señalar que, en general, no eran siempre los mismos alumnos, lo que significa que no se dio ningún caso en el que no se intentase resolver en ninguna sesión.

El centro nos permitía realizar un taller una vez a la semana, los miércoles por la tarde. Las sesiones se alargaban por la recogida de datos. Quizás disponer de más tiempo en el aula para realizar los talleres, permitiría proponer más problemas semanalmente, y equilibrar en número de sesiones dedicadas a desarrollar conocimientos informales con las sesiones orientadas al paso del conocimiento informal al formal.

Referencias

Alvarado, M. (2005). La representación gráfica de cantidades discretas. Entre las posibilidades infantiles y las restricciones de la tarea. En M. Alvarado y B. M. Brizuela (comps.), *Haciendo números: Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 81-108). México, DF: Paidós.

Ambrose, R., Baek, J.M. y Carpenter, T.P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody y A. Dowker (eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Valencia: Servicios de Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 49-66.

Arnau, D. y Puig, L. (2005). Análisis de las actuaciones de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática* (pp. 153-162). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Ayala, C.L., Galve, J.L., Mozas, L. y Trallero, M. (1997). *La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales: Manual del programa de estrategias de resolución de problemas y refuerzo de las operaciones básicas "Pues… ¡Claro!"*. Madrid: CEPE.

Ayllón, M.F. (2012). *Invención-Resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada. Recuperado el 15 de mayo de 2014 de: http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7474/descargar/

Ayllón, M.F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por un apareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M.M. Moreno, A. Estrada, L. Carrillo y T.A. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). Lleida: SEIEM. Recuperado el 15 de mayo de 2014 de: http://funes.uniandes.edu.co/1580/

Baroody, A.J. (1997). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial* (3ª ed.). Madrid: Visor.

Baroody, A.J. y Coslick, R.T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A.J., Cibulskis, M., Lai, M.-L. y Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 227-260.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987a). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. *Enseñanza de las Ciencias, Extra*, 332-333.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40*, 71-81.

Bermejo, V. y Lago, M.O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje, 44*, 109-121.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1992). Conceptualización de la operación aditiva y estrategias de solución. *Investigaciones Psicológicas II*, 21-45.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva, 6*(2), 159-174.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuencias de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *51*(3-4), 533-552.

Blanke, B. (2008). *Using the rekenrek as a visual model for strategic reasoning in mathematics*. Salem, OR: The Math Learning Center. Recuperado el 29 de septiembre de 2011 de: http://bridges1.mathlearningcenter.org/media/Rekenrek_0308.pdf

Braithwaite, D.W. y Goldstone, R.L. (2013). Integrating formal and grounded representations in combinatorics learning. *Journal of Educational Psychology*, *105*(3), 666-682.

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de Educación Infantil*. Tesis doctoral. Madrid: UCM. Recuperado el 12 de marzo de 2013 de: http://biblioteca.ucm.es/tesis/psi/ucm-t28929.pdf

Cañadas, M.C. y Castro-Rodríguez, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 75-98). Madrid: Pirámide.

Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Romberg, T.A. (1982). *Addition and subtraction: A cognitive Perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 7-44). New York: Academic Press.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179-202.

Carpenter, T.P., Moser, J.M. y Harriett, C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(4), 345-357.

Carpenter, T.P., Ansell, E., Franke, M.L., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: Study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 428-441.

Carpenter, T.P., Franke, M.L., Jacobs, V., Fennema, E. y Empson, S.B. (1997). A longitudinal study of intervention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-30.

Carpenter, T.P., y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema y T.A. Romberg (eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). *Las matemáticas que hacen los niños. La enseñanza de las matemáticas desde un enfoque cognitivo*. Portsmouth, NH: Heinemann. Traducción de Carlos de Castro Hernández y Marta Linares Alonso. Recuperado el 15 de julio de 2013 de: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CarpenterT99-2642.PDF

Carpenter, T.P., Franke, M.L. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic y Algebra in Elementary School*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T.P., Blanton, M.L., Cobb, P., Franke, M.L., Kaput, J. y McClain, K. (2004). *Scaling Up Innovative Practices in Mathematics and Science*. Madison, WI: University of Wisconsin-Madison. Recuperado el 4 de junio de 2013 de: http://ncisla.wceruw.org/publications/reports/NCISLAReport1.pdf

Carruthers, E. y Worthington, M. (2008). *Children's mathematics: Making marks, making meaning* (2nd ed.). London: Sage.

Castro, E. (1991). *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Editorial Comares.

Castro, E., Rico, L., Batanero, C. y Castro, E. (1991). Dificultad en problemas de comparación multiplicativa. En F. Furingheti (ed.), *Proceedings of the Fifteenth PME Conference* (Vol. 1, pp. 192-198). Assisi, Italia: PME.

Castro, E., Cañadas, M.C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en el Infancia*, *2*(2), 1-11. Recuperado el 22 de noviembre de 2014 de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/32/43

Castro, E. y Frías, A. (2013). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 379-406. Recuperado el 30 de agosto de 2014 de: http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/15-Castro-Frias_pp379_406.pdf

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., González, E., Morcillo, N. y Fernández, F. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (ed.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 63-76). Zamora: SEIEM. Recuperado 1 de marzo de 2013 de: https://dl.dropboxusercontent.com/u/104572257/Actas/Actas01SEIEM.pdf

Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (2004). Aprendiendo a multiplicar y dividir. En V. Bermejo (coord.), *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor* (pp. 93-115). Madrid: CCS.

Castro, E. (2004). La resolución de problemas desde la investigación en educación matemática. En J.M. Cardeñoso, E. Castro, A.J. Moreno y M. Peñas (eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: Resolución de problemas* (pp. 11-28). Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM. Recuperado el 4 de julio de 2013 de: http://funes.uniandes.edu.co/1191/

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1988). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L., Castro, E. y Gutiérrez, J. (1994). Two-Step addition arithmetic problems. En N., Malara y L., Rico (Eds.), *Proceedings of the First Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 139-146). Módena, Italia: Universidad de Módena.

Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10* (3), 243-253.

Castro, E. y Molina, M. (2011). Números naturales y sistemas de numeración. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 99-121). Madrid: Pirámide.

Castro, E., y Ruiz, J.F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 99-121). Madrid: Pirámide.

Cázares, J.A. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Cázares, J.A. (2007). El desarrollo de la competencia aritmética en estudiantes de primaria en la formulación de problemas. En E. Castro y J.L. Lupiáñez (eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 29-49). Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. En D.H. Clements, J. Sarama y A.M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, H.D. y Sarama J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2007). Early childhood. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (461-556). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Clements, D.H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.

Cockcroft, W.H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Recuperado el 1 de mayo de 2013 de: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

De Castro, C. y Bosch, M.A. (En prensa). *Representaciones gráficas de cantidades discretas en contextos de comunicación y resolución de problemas en educación infantil*.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IX*, 23-48.

De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C. y Hernández, E. (2015). *¡A contar! Matemáticas para pensar*. Madrid: Santillana.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números, 80*, 53-70.

De Castro, C., Pastor, C., Pina, L.C., Rojas, M.I. y Escorial, B. (2009). Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática 18*, 105-128.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon, 73*(3), 33-42.

Díaz, J.J. (2005). *El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano*. Tesis Doctoral. Madrid: UCM.

Díaz, J.J. y Bermejo, V. (2007). Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(3), 335-364.

Dopico, C., (2001). *Adquisición y desarrollo del concepto de división en la educación Primaria: sentencias numéricas y problemas verbales*. Tesis doctoral. Madrid: UCM.

El Bouazzaoui, H. (1982). *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération: Relations entre divers caractères des ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions*. Bordeaux: Université de Bordeaux.

English, L.D. y Watters, J.J. (2004). Mathematical Modelling with Young Children. En Chick, H. L. y Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 335-342). Melbourne: PME.

English, L.D. y Watters, J.J. (2005). Mathematical modelling with 9 years-olds. En H.L. Chick y J.L. Vincent (eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, pp. 297-304. Melbourne: PME.

Escudero, A. (2013). *Conteos erróneos y conteos inusuales: Un análisis longitudinal de la comprensión de la habilidad de contar*. Tesis doctoral. Madrid: UCM. Recuperado el 15 de diciembre de 2014 de: http://eprints.ucm.es/20000/1/T34305

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Fuson, K.C., Smith, S. y Lo Cicero, A. (1997). Supporting Latino first graders' ten-structured thinking in urban classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 738-760.

Fuson, K.C., Clements, D.H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA/Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics & Naeyc.

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008). Rastros de comprensión en la acción matemática: la dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (eds.), *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*

(SEIEM) (pp. 283-293). Badajoz, España: Sociedad Extremeña de Educación Matemática y SEIEM.

Ginsburg, H.P. y Baroody, A.J. (2007). *Test de Competencia Numérica Básica* (Adaptación española de M.C. Núñez y I. Lozano). Madrid: TEA.

Gómez, B. (1989). *Numeración y cálculo*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gómez, B. (1995). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores.* Granada: Comares.

Gómez, P. y Lupiánez, J. L. (2006). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, *1*(2), 79-98.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria: tesis doctoral*. Editorial de la Universidad de Granada.

González, M.J. y Gómez, P. (2015). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD 3.* Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado el 15 de mayo de 2015 de: http://funes.uniandes.edu.co/6454/1/ApuntesModulo3MAD3.pdf

González-Calero, J.A. (2014). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente*. Tesis doctoral. Valencia: Universidad de Valencia. Recuperado el 28 de febrero de 2015 de: http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/37611/Tesis.pdf

González-Calero, J.A., Arnau, D. y Puig, L. (2013). Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao: SEIEM.

González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2014). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*, Recuperado el 28 de febrero de 2015 de: http://dx.doi.org/10.1111/bjet.12183

González Marí, J.L. (1998). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras global, numérica y semántica global. En M. Sierra, L. Rico (eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 77-105). Zamora: SEIEM. Recuperado el 8 de septiembre de 2014 de: https://dl.dropboxusercontent.com/u/104572257/Actas/Actas01SEIEM.pdf

Heller, J.I. y Greeno, J.G. (1978, mayo). Semantic processing in arithmetic word problem solving. Paper presented at the Annual Meeting of the Midwestern Psychological Association, Chicago.

Hernández, E. (2012). El cohete: escritura de cardinales y ubicación en la cuadrícula con niños de 5 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *1*(2), 23-41. Recuperado el 18 de noviembre de 2014 de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/12/25

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hughes, M. (1987). *Los niños y los números: Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Planeta.

Jiménez, L. (2008). *La activación del conocimiento real en la resolución de problemas: un estudio evolutivo sobre los problemas no-rutinarios de adición*. Tesis doctoral. Madrid: Editorial de la Universidad Complutense de Madrid.

Kilpatrick, J. Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academies Press.

Lago, M.O., Rodríguez, P. y Caballero, S. (1999, septiembre). La resolución de problemas verbales de multiplicación y división en niños de educación infantil. Comunicación presentada en el III Congreso Internacional de Psicología y Educación: “Orientación e Intervención”. Santiago de Compostela (La Coruña), del 8 al 11 de septiembre.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Zamora, A. y Madroño, L. (1999). Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la multiplicación y la división. *Anuario de Psicología, 30*(3), 71- 89.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, M.J. (2001). La reformulación de los enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación. *Suma, 37,* 55-62.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Enesco, I., Jiménez, L. y Dopico, C. (2008). “Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellos”. *Anales de Psicología, 24*(2), 201-212.

Lakoff, G. y Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lesh, R., y Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. En Frank K. Lester (ed.) Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics (763-804). Charlotte, NC: Information Age Pub.

López de los Mozos, A. (2001). *Desarrollo de las operaciones de sumar y restar en la comprensión de los problemas verbales*. Tesis doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 17 de abril de 2013 de: http://biblioteca.ucm.es/tesis/psi/ucm-t25308.pdf

MacLeod, K. (1999). *Verbal report validity and children’s subtraction*. Doctoral dissertation. University of Alberta.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado el 8 de enero de 2010 en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88. Recuperado el 22 de junio de 2013 de: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/243824/353427

Ministerio de Educación y Ciencia (2002, 24 de diciembre). LEY ORGÁNICA 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. *BOE, 307*, 45188-45220. Recuperado el 15 de julio de 2013 de: http://www.boe.es/boe/dias/2002/12/24/pdfs/A45188-45220.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (2014a, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo de Educación Primaria. *BOE, 52*, 19349-19420. Recuperado el 15 de abril de 2014 de: http://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (2014b, 1 de mayo). Orden ECD/686/2014, de 23 de ABRIL, por la que se establece el currículo de Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa. *BOE, 106*, 33827-34369. Recuperado el 15 de mayo de 2014 de: https://www.boe.es/boe/dias/2014/05/01/pdfs/BOE-A-2014-4626.pdf

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 1-23. Recuperado el 17 de agosto de 2014 de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/30/34

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NCTM (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: Author

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theorical approaches and empirical findings. En J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-41). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1991). Two-step problems - Research findings. In F. Furinghetti (ed.), *Proceedings PME-XV*, Assissi, Italia, Vol. III, pp. 65-71.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: NGA Center & CCSSO. Recuperado el 24 de julio de 2014 en: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford y B. Findell (eds.), Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

National Research Council (2009). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity*. C.T. Cross, T.A. Woods y H. Schweingruber (eds.), Committee on Early Chilhood Mathematics, National Research Council.

Núñez, C., De Castro, C., Del Pozo, A., Mendoza, C. y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM. Recuperado el 10 de octubre de 2012 de: http://eprints.ucm.es/12784/

Núñez, M.C. y Lozano, I. (2009). Evaluación de progreso en competencia matemática básica. Estudio de casos a través del TEMA-3: Alumnos con y sin discapacidad psíquica. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, 139-160.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana. Recuperado el 15 de junio de 2012 de: http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MEC-INEE. Recuperado el 23 de julio de 2014 de: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Olive, J. (2001). Children's Number Sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator, 11*(1), 4-9. Recuperado el 26 de Julio de 2014 de: http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/article/download/95/86

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje*, *26*(4), 451-468.

Orrantia, J., González, L. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, *28*(4), 429-451

Orrantia, J. y Vicente, S. (2006). La resolución de problema en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J.I. Navarro y M. Aguilar (Eds.), *Aprender matemática a temprana edad. Libro de Actas del Simposio Internacional sobre Matemática Temprana* (pp. 81-104). Cádiz, España: Universidad de Cádiz.

Polya, G. (1957). *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press (Traducción española, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas: México, 1965).

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 93-112). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado el 5 de agosto de 2014 de: http://funes.uniandes.edu.co/1190/1/Puig2008Presencia_SEIEM_93.pdf

Puig Adam, P. (1985). Un punto de vista cibernético sobre el problema de los problemas. *Nueva revista de Enseñanzas Medias, 7,* 38-41.

Ramírez, M. y Rodríguez, P. (2011). Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. *Unión*, *26*, 41-56. Disponible desde 25 de septiembre de 2014 en: http://eprints.ucm.es/25467/

Ramírez, M. y De Castro, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J.L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática–2012* (pp-109). Valencia: Universitat de València y SEIEM. Disponible desde 25 de septiembre de 2014 en: http://eprints.ucm.es/25470/1/Ramirez_DeCastro_Valencia2012.pdf

Ramírez, M., y De Castro, C. (2013). Dos aspectos de la enseñanza de la aritmética mediante la resolución de problemas en la transición de Educación Infantil a Primaria. En A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones* *de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 225-235). Baeza: SEIEM. Disponible desde 25 de septiembre de 2014 en: http://eprints.ucm.es/25471/1/Ramirez_DeCastro_Baeza2013.pdf

Ramírez, M. y Castro, C. (2014a). Comprensión de las decenas y aplicabilidad de las operaciones en problemas aritméticos verbales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 533-542). Salamanca: SEIEM. Disponible desde 25 de septiembre de 2014 en: http://eprints.ucm.es/26631/1/Ramirez-DeCastro-SEIEM2014.pdf

Ramírez, M., y De Castro, C. (2014b). Descubrimiento del valor posicional a través de la resolución de problemas. *Didácticas Específicas, 11* (pp. 40-66). Disponible desde 25 de enero de 2015 en: https://revistas.uam.es/didacticasespecificas/article/download/135/131

Ramírez, M., y De Castro, C. (2014c). Problemas de multiplicación y división en primer curso de educación primaria. En F. España (Ed.), *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. El sentido de las matemáticas: Matemáticas con sentido* (pp. 286-296). Baeza: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ramírez, M., y De Castro, C. (2014d). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, *31*(3), 41-56.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid: Pirámide.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L. y Lupiáñez, J.L. (2010). Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 54*, 14-30.

Riley, M.S., Greeno, J.G. y Heller, J.L. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H.P. Ginsburg (ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Rodríguez, P. y Bermejo, V. (1987). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. *Enseñanza de las ciencias, 5*(Extra 1), 332-333.

Rodríguez, P., Lago, M.O., Caballero, S., Dopico, C., Jiménez, L. y Solbes, I. (2008). El desarrollo de las estrategias infantiles: un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo. *Anales de psicología, 24*(2), 240-252.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39,* 5-6, 523-536.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Sarama J. y Clements, H.D. (2004). Building Blocks for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly 19*, 181-189.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grows (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory practice and politics. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*, 5-6, 523-536.

Socas, M., Hernández, J.A. y Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En M. Sierra y L. Rico (eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 46-62). Zamora: Universidad de Granada. Recuperado el 19 de julio de 2013 de: http://funes.uniandes.edu.co/1466/1/Socas1998Clasificacion_SEIEM_46.pdf

Steffe, L.P. (1994). Children's multiplying schemes. En G. Harel y J. Confrey (eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics* (pp. 3-39). New York: SUNY Pres.

Schwartz, J.L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In M. Behr y J. Hiebert (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council Teachers of Mathematics.

Schwartz, J. (1996). Semantic aspects of quantity. *Unpublished manuscript. Cambridge, MA: MIT and Harvard Graduate School of Education*.

Tall, D. (2009). Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, vol. 2, pp. 220-225. Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Tortosa, A. y Castro, E. (1997). Invención de problemas a través de situaciones ambientales. En J. Gutiérrez, J. Perales, J. Benayas y S. Calvo (eds.), *Líneas de investigación en Educación Ambiental* (pp. 70-75). Granada: Proyecto Sur.

Treffers, A. y Buys, K. (2001). Part I-Lower Grades Primary School. En M. Van den Heuvel-Panhuizen, (Ed.), *Children Learn Mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 25-92). Utrecht, the Netherlands: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.) (2001). *Children Learn Mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht, the Netherlands: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Primera parte. *Correo del Maestro, 160*. Recuperado el 25 de septiembre de 2014 de: http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2009/septiembre/incert160.htm

Van Reeuwijk, M. (2001). From Informal to Formal, Progressive Formalization: An Example on Solving Systems of Equations. En *Proceeding of the 12th International Commission* *on Mathematical Instruction (ICMI) Study Conference The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 2, pp. 613-620).

Van Reeuwijk, M. (2001). From informal to formal, progressive formalization an example on “solving systems of equations”. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (eds.), *The future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study conference* (Vol. 2, pp. 613–620). Melbourne, Australia. Recuperado el 25 de septiembre de 2014 de: https://minerva-access.unimelb.edu.au/handle/11343/35000

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 557-628). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Wright, R.J., Martland, J. y Stafford, A.K. (2006). *Early numeracy: Assessment for teaching & intervention*. London: Paul Chapman Publishing.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*, 749-750.

Anexo 1. Desarrollo de las sesiones

En este Anexo voy a describir el desarrollo de las sesiones. Primero, voy a describir el desarrollo de las sesiones del taller. Comienzo describiendo el tipo problema planteado y las características generales de la sesión. Después relataré aspectos que suceden en el desarrollo de la sesión que puedan afectar al desarrollo del taller. Incluyo, en este momento, un diagrama que recoge los resultados generales de la resolución del problema,

El siguiente apartado incluye la descripción de las estrategias utilizadas, basada en la interpretación de las observaciones de todos los tipos de registros, grabaciones en video, hojas de registro y trabajo, fotografías. En el caso de no tener información suficiente para categorizar una estrategia se clasificará como no identificada, y si no hay ningún tipo de registro, se clasificará como no hay registro.

He analizado la información recogida siguiendo un proceso de categorización mixto de las estrategias (deductivo-inductivo). Basándome en el esquema de categorías procedente de anteriores trabajos descrito anteriormente, elaboro la categorización expuesta en cada sesión, que incluye un análisis más fino de las estrategias tomando en cuenta el material empleado (estructurado o no) y el modo de realizar el conteo (por unidades o a saltos de diez), como aspecto más importantes.

Después, incluyo una descripción de las dificultades y errores observados en cada sesión. Las estrategias observadas que no resuelven el problema son clasificadas como estrategias inadecuadas, y las describiré de igual modo que las anteriores. Algunos niños utilizan estrategias de forma no adecuada. Esto no quiere decir que las estrategias sean erróneas, sino que son estrategias que no resuelven el problema, no corresponden con la estructura semántica del problema y no pueden resolver el problema.

A continuación, describiré las representaciones utilizadas por los niños. Incluyo una tabla de frecuencias de las representaciones utilizadas, y muestro algunas representaciones de cada tipo observadas en la sesión.

Por último, dibujo el grafo de los caminos de aprendizaje de la tarea, utilizando como base las estrategias utilizadas por los niños, para detectar que capacidades son necesarias para desarrollarlas. Analizo cada una de las estrategias utilizadas por los niños, identifico las capacidades necesarias para llevar a cabo esa estrategia, y con toda la información de la sesión, realizo el grafo de los distintos caminos de aprendizaje. Dentro de cada tipo de problema, iré añadiendo los nuevos caminos de aprendizaje observados en cada sesión, es decir, el grafo de cada sesión contiene un acumulado de las estrategias que se han utilizado en ese tipo de problemas hasta ese momento.

1.1. Sesión 1

La primera sesión se realiza a finales de octubre tras la aplicación inicial del TEMA 3, y tras el periodo de adaptación de comienzo de Educación Primaria. Uno de los objetivos de las primeras sesiones es, que las tutoras empiecen a familiarizarse con la forma de trabajo del CGI, y vayan comprendiendo la dinámica de los talleres. Una maestra del centro con experiencia en el modelo CGI, Beatriz Escorial (en adelante, Beatriz), da apoyo a los tutoras en los dos aulas. Otro de los objetivos era que los niños se acostumbren también a las sesiones de talleres de resolución de problema, objetivo alcanzable ya que la mayoría de ellos habían realizado talleres con la misma metodología en educación infantil.

El problema planteado es un problema de cambio decreciente con la cantidad final desconocida, cuya cantidad mayor involucrada es 11. Un aspecto que puede dificultar su resolución es que la cantidad cambio aparece en el enunciado tras preguntar por la incógnita. Es importante indicar que el cuento refuerza la idea del conteo hacia atrás ya que las 11 damas van desapareciendo de una a una, dando cada vez el resultado de las damas que quedan.

En esta sesión participan las tutoras de cada grupo, que dirigen el taller con ayuda de Beatriz, mientras que yo recojo grabaciones en video y audio de las explicaciones de las estrategias realizadas por los niños. Beatriz también recoge las estrategias explicadas por los niños en hojas de registro. Las grabaciones de video recogen explicaciones individuales de los alumnos y gran parte de la puesta en común.

Tabla A1.10. *Características principales de la primera sesión*

Problema	Al principio había 11 damas atrevidas, ¿cuántas quedaban cuando se habían ido 6?
Tipo de problema	Problema de cambio decreciente con cantidad final desconocida.
Cantidades	Menores que 20
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores
Fecha	24 de octubre
Cuento	Once damas atrevidas
Asistentes	26 (de 28 de 1ºA) y 24 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, maestra con experiencia CGI (Beatriz) y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora, audio.

1.1.1. Desarrollo de la sesión

Antes de empezar el taller, las tutoras organizan el aula en dos grandes mesas. La sesión comienza con la lectura del cuento “Once damas atrevidas” por parte de la tutora, en los dos grupos. A continuación, la tutora abre la carta manuscrita de Clara, donde les pide ayuda para resolver el problema, y una alumna lee la carta.

Para comenzar la resolución individual de los niños se colocan en el centro de las mesas materiales como los cubos encajables, plastilina, rekenrek, tabla 100 y las hojas de trabajo en las que aparece el enunciado escrito. Beatriz explica a los niños que pueden utilizar los materiales que ellos quieran.

Mientras los niños resuelven el problema, la tutora está atenta a cualquier problema que tengan los niños. Durante la resolución individual, tanto las maestras del centro como yo recorremos las mesas escuchando y preguntando a los alumnos cómo han resuelto el problema. Beatriz recoge las estrategias explicadas por los niños en entrevistas individuales en la hoja de registro, y yo realizo grabaciones en video y audio. Tras unos veinte minutos, en el grupo B se realiza la puesta en común en la que los niños explican, desde su sitio la estrategia utilizada. Después en grupos de 4 escriben una carta a Clara para explicarles la solución del problema.

En el grupo A se realizó de la misma manera, excepto que la tutora decidió no hacer puesta en común, explicando que tenía una sensación de descontrol, y los niños se agruparon directamente a escribir la carta a Clara.

En ambos grupos se recogen las hojas de registro, hojas de trabajo de los alumnos y las cartas a Clara, y se procede al escaneado. Las grabaciones y las hojas de registro muestran el momento en que nos acercamos a los niños que habían terminado y nos explican cómo lo han hecho. En resumen, la información se recoge en modo de video, audio, hojas de registro y hojas de trabajo los niños. En la Figura A1.1.1 aparece el número de alumnos que resuelven el problema con una estrategia adecuada, siendo 38 eligen estrategias adecuadas, pero dos de ellos no dieron la solución debido a dificultades en el conteo, como muestro más adelante. Los alumnos que utilizaron una estrategia inadecua han sido 3. También aparece el número de alumnos que no resuelven o dan respuestas al azar cuando se les pregunta. En esta sesión, hay 6 alumnos que no he sido capaz de identificar las estrategias utilizadas, ya que la información registrada no lo permite, por lo que es algo a tener en cuenta para la próxima sesión.

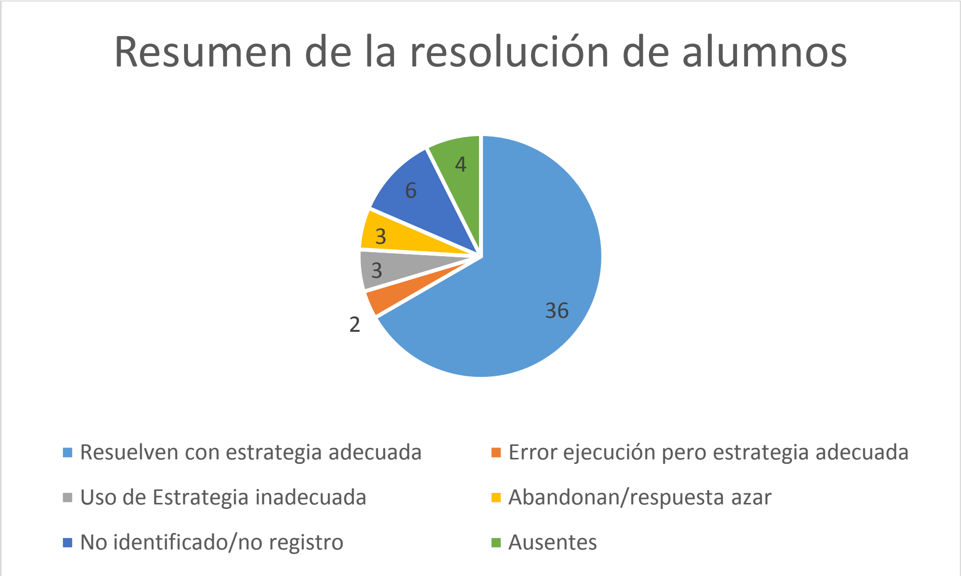


Figura A1.1.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 1.

La mayoría de las cartas que se recogieron para dar la contestación a Clara (ver Figura A1.1.2), no explican nada de la estrategia. Para conseguir que los niños articulen sus ideas y sepan comunicar por escrito sus estrategias, la próxima sesión se les remarcará que deben contarle a Clara como lo hacen para que ella también lo pueda resolver.

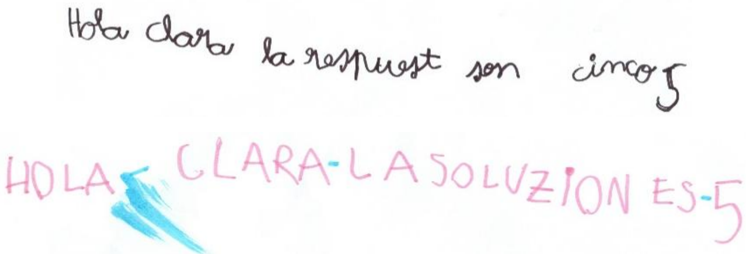


Figura A1.1.2. Cartas de contestación a Clara con la solución de la sesión 1

1.1.2. Estrategias observadas

Las estrategias que resuelven este problema por su estructura semántica, según hemos visto en el marco teórico, son la estrategia de modelización directa *Quitar* o la estrategia de conteo *Contar hacia atrás*. Además puede utilizarse hechos numéricos o estrategias aplicadas de forma flexible de modelización y conteo. Es importante indicar que el cuento refuerza la idea del conteo hacia atrás ya que las 11 damas van desapareciendo de una a una, dando cada vez el resultado de las damas que quedan.

Las estrategias observadas están relacionadas con la categoría de *Quitar (Q)* de los estudios previos, que es una estrategia de modelización directa, donde los niños representan la cantidad mayor del problema, y quitan, separan o tachan la cantidad de objetos o marcas que indica la cantidad más pequeña. Por último, se cuenta la cantidad que queda. A continuación, describo las estrategias encontradas de este tipo, detalladas por el material utilizado. Primero describo las estrategias en las que utilizan objetos. He diferenciado entre utilizar materiales como los centicubos o los cubos encajables, con los que los niños pueden hacer barras y comparar físicamente las cantidades por estar organizadas en barras o formas, y utilizar otros objetos como plastilina rotuladores u otros materiales que tienen en el aula, o los mismos cubos encajables pero sin construir barras comparables por su longitud.

La variante *Quitar con cubos encajables, formando barras, contando de uno en uno* (Q1), es una estrategia de modelización directa donde se representa la cantidad mayor con centicubos o cubos encajables formando una barra, se quitan el número que de objetos que indica la cantidad menor, y se cuenta los que quedan. En este problema, los niños construyen una figura que contenga 11 cubos y luego se ha observado dos formas de quitar los 6 multicubos que indica la cantidad de cambio del problema. Cuentan en la construcción 6 multicubos y los quitan dividiendo la figura en dos; o van quitando de uno en uno los cubos, hasta que han quitado 6. En la Figura A1.1.3 vemos el resultado de las dos variantes.

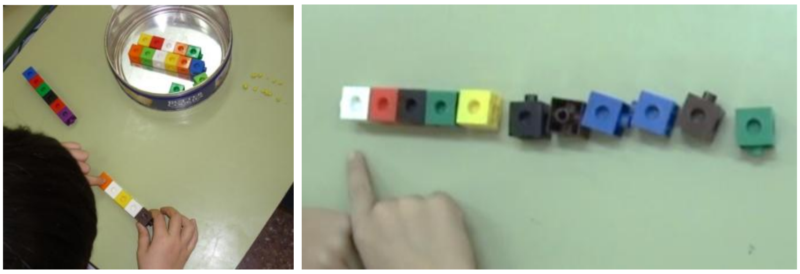


Figura A1.1.3. Estrategia Q1 en la sesión 1

En general, los niños pueden utilizar otros objetos, o incluso, bolas de plastilina realizadas por ellos mismo, como elementos que sirven de contadores individuales para representar una unidad. Así, considero una variante de *Quitar con objetos, contando de uno en uno* (Q2), que al igual que la anterior, se representa la cantidad mayor del problema con los objetos elegidos, a continuación se quita la cantidad menor que indica el problema. Se cuenta los objetos que quedan. En este problema, los niños construyen 11 bolitas, quitan 6 y cuentan las que quedan (véase Figura A1.1.4).

Figura A1.1.4. Estrategia Q2 con bolas de plastilina en la sesión 1

Las variantes con gráficos pueden realizarse con simples marcas en el papel o con dibujos más icónicos de los elementos implicados en el enunciado del problema. La variante de *Quitar con representaciones gráficas* presenta dos subvariantes debido al tipo de representaciones. *Quitar con marcas, contando de uno en uno* (Q3) consiste en dibujar marcas en el papel que indica el dato mayor del problema, y tachar o separar la cantidad de marcas que indica el dato menor del problema. Finalmente, se cuenta el resto de marcas (imagen de la izquierda de la Figura A1.1.5). La otra variante es *Quitar con dibujos, contando de uno en uno* (Q4) supone el mismo procedimiento, pero las representaciones de las colecciones del enunciado del problema son icónicas (imagen de la derecha de la Figura A1.1.5).

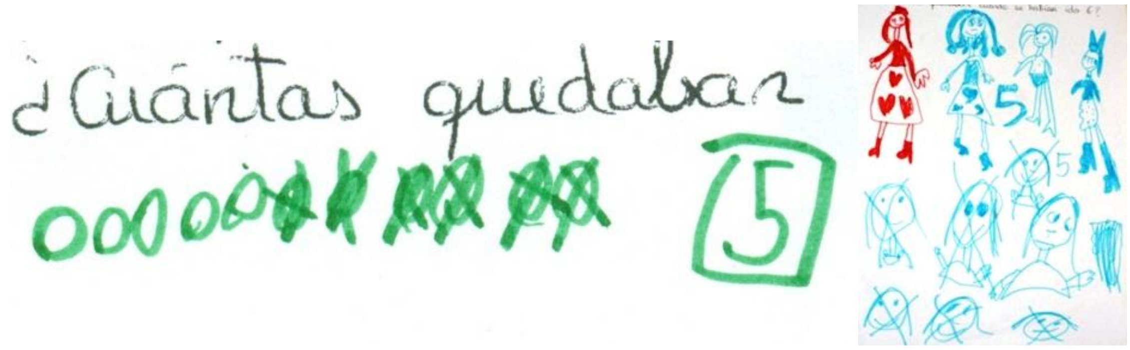


Figura A1.1.5. Representaciones de Q3 y Q4 la sesión 1

Un material que han elegido 18 niños para la resolución es el rekenrek. Al ser un material con una estructura predeterminada voy a separar en otra variante *Quitar con el rekenrek* (Q5). En el rekenrek se consideran el número de bolas de la cantidad mayor del problema y se retiran o separan el número de bolas de la cantidad menor del problema. Se cuentan las bolas que quedan. El rekenrek posee 20 bolas con una configuración de dos grupos de 10 y dentro de cada uno, cinco bolas rojas y cinco bolas blancas. Los niños no han recibido ninguna instrucción de cómo se utiliza este material y representan las cantidades como ellos consideran. Hay niños que no utilizan estas configuraciones para realizar la estrategia, y niños que sí la utilizan, realizando un aprovechamiento mayor del material, por lo que distingo dos subvariantes. La primera de ellas es *Quitar con rekenrek sin aprovechamiento de su configuración* (Q5), que consiste en representar la cantidad mayor del problema y se retiran el número de bolas que indica la cantidad menor sin utilizar la configuración del material, contando de uno en uno las colecciones. En la Figura A1.1.6, un niño utiliza el rekenrek colocando a la derecha en la fila de arriba diez bolas y en la fila de abajo 1 bola. Retira 6 bolas de la fila de arriba hacia la izquierda y cuenta las bolas que le quedan a la derecha, 4 bolas en la fila de arriba y 1 bola abajo. En esta variante, el niño necesita contar el número de bolas que quedan sin aprovechar la configuración de grupos de 5.

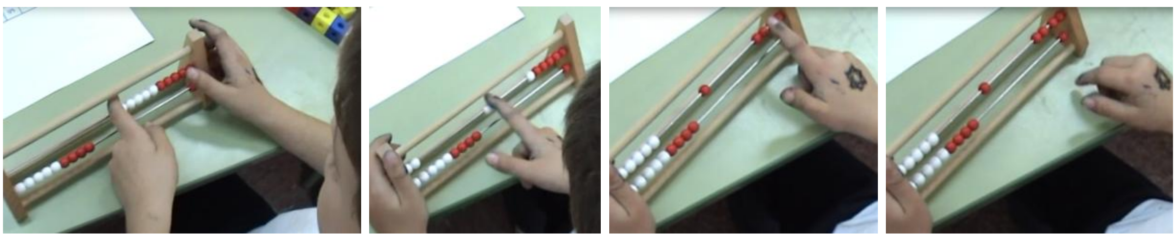


Figura A1.1.6. Estrategia Q5 en la sesión 1

La subvariante en la que los niños utilizan la configuración para no tener que contar cantidades la denoto como *Quitar con rekenrek aprovechando la configuración del material* (Q6), que consiste en representa la cantidad mayor del problema y se retiran el número de bolas que indica la cantidad menor utilizando la configuración del material. En la Figura A1.1.7 se puede ver como una niña coloca las 11 bolitas a la izquierda y utiliza la configuración que forman las bolitas blancas que son 6, para ver el resultado final, que son las rojas y las retira a la derecha, que son 5 sin contarlas.

Figura A1.1.7. Estrategia Q6 en la sesión 1 con 10 bolas en una fila y una en la otra

Otra configuración utilizada para resolver el problema fue la que se observa en la Figura A1.1.8 en la que se observa a la derecha 6 bolar arriba y 5 abajo, y la niña que la utiliza, retira hacia la izquierda la 6 bolas de arriba.

Figura A1.1.8. Estrategia Q6 en la sesión 1 con 6 bolas en una fila y 5 en la otra

Se ha registrado una variante de *Quitar con dedos*. En la secuencia de imágenes de la Figura A1.1.9, un niño levanta un dedo marcando la dama 11, y explica que empieza a quitar bajando ese dedo, a continuación levanta los 10 dedos y sigue quitando, de uno en uno, los 6 que tiene que quitar. Al final le queda solo una mano con los dedos levantados que son 5. Como el niño ha ido bajando de uno en uno los dedos mientras ha contado hasta 6, al quitar no reconoce esa cantidad en las manos, por lo que considero la estrategia *Quitar con dedos sin usar su configuración* (Q7), a pesar de que luego reconozca que los que quedan son 5 por su configuración. En el caso de que el niño reconozca las cantidades de las dos manos, como 10, y de una mano, como 5, y descomponga las dos manos más uno, en una mano y seis dedos, detallo esta estrategia como *Quitar con dedos usando configuración*, ya que no tiene que quitar de uno en uno los dedos. En esta sesión no se ha registrado esta última estrategia.

Figura A1.1.9. Estrategia Q7 en la sesión 1

En esta sesión ha habido niños que han utilizado la Tabla 100, o que han representado las cantidades con la secuencia numérica. En las mesas, los niños tienen a su disposición la Tabla 100, en el que vienen los numerales del 1 al 100 estructurados por decenas. En esta sesión, ha habido niños que han utilizado este material para resolver el problema. La variante *Quitar con la Tabla 100* consiste en una estrategia de modelización directa en la que se consideran todos los numerales que hay desde el 1 hasta la cantidad mayor del problema, en este caso, la cantidad inicial 11, y se quitan los numerales de esta secuencia que indica la cantidad más pequeña del problema, en este caso, la cantidad de cambio del problema, se cuenta el resto de numerales para saber la solución. Con este material también se han dado dos variantes, dependiendo de cómo se quiten el número de elementos que dice la cantidad pequeña del problema. La primera es *Quitar con la Tabla 100, empezando a quitar desde el 1 hacia delante* (Q8), en la que se consideran todos los numerales que hay hasta el numeral que indica la cantidad mayor del problema, se quitan los numerales que indica la cantidad menor del problema empezando desde el “1”. Se cuentan los numerales que hay hasta la cantidad mayor. En la Figura A1.1.10 un niño considera los numerales del 1 al 6 como las damas que se han ido, las que se quitan, y cuentan los numerales del 7 al 11 como las damas que quedan.

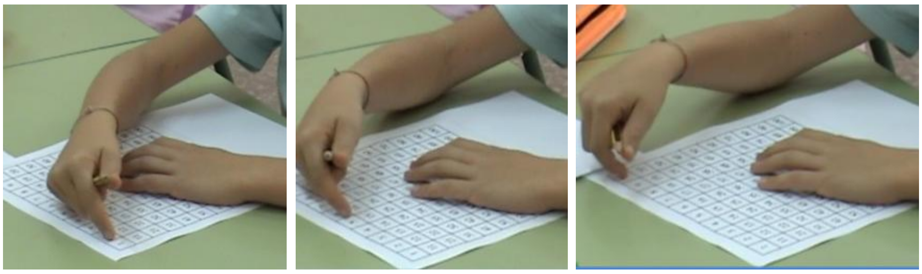


Figura A1.1.10. Estrategia Q8 en la sesión 1

La variante *Quitar Tabla 100, empezando a quitar hacia atrás desde el numeral mayor* (Q9) consiste en considerar todos los numerales que hay hasta el numeral que indica la cantidad mayor del problema. Se quitan los numerales que indica la cantidad menor del problema empezando desde el numeral mayor hacia atrás. Se sitúa en el numeral anterior al último quitado y esa es la solución, o se cuenta de ahí hasta el “1”. En este caso los numerales que se quitan son los seis últimos. Es decir, se considera los once primeros numerales, y se van descontando los numerales que dice la cantidad menor del problema, en este caso seis. Así llegamos a quedan los cinco primeros numerales, que basta con fijarse en el último numeral no quitado, el 5. Esta estrategia está más próxima al desarrollo de la estrategia *Contar hacia atrás*, que he comentado en el marco teórico.

En el segundo caso, voy a incluir una variante *Quitar usando numerales como marcas*, en la que los niños representan la cantidad mayor con la secuencia numérica hasta el cardinal de la colección, luego tachan o redondean la cantidad menor de numerales que indica el problema, y cuentan los numerales que quedan. Una variante es *Quitar usando numerales escritos, empezado a quitar hacia atrás desde el numeral mayor* (Q10), donde los niños dibujan marcas con los numerales de cantidad mayor, y quitan los numerales que indica el problema desde el numeral mayor. Así, la solución de problema es el numeral mayor que queda sin tachar. En la Figura A1.1.11, una niña dibuja 11 bolas, numeradas y tacha las bolas desde el 11 hasta 6. La solución del problema es 5, que es el último numeral que queda sin tachar.

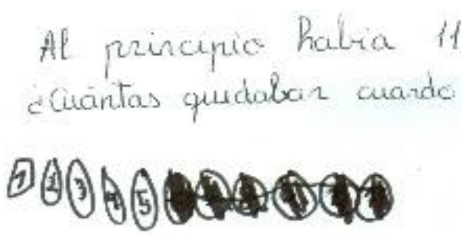


Figura A1.1.11. Estrategia Quitar Q10 en la sesión 1

La estrategia *Añadir hasta* (AH), aparece en este problema como uso flexible ya que es una estrategia para problemas de cambio creciente con cantidad de cambio, pero su utilización de forma flexible permite resolver una situación de cambio decreciente con cantidad final desconocida, lo que muestra una comprensión de la relación parte-todo en los problemas de estructura aditiva. Esta estrategia de modelización directa consiste en representar la cantidad menor del problema y luego se van añadiendo unidades hasta llegar a la cantidad mayor del problema, contando la cantidad añadida para finalizar. En esta sesión, un alumno utiliza esta estrategia con ayuda de dibujos en el papel, por lo que denoto esta variante como *Añadir hasta con dibujos, contando de uno en uno* (AH1). Los niños realizan dibujos de la cantidad menor del problema, y a continuación siguen añadiendo marcas hasta llegar a la cantidad mayor del problema, teniendo cuidado de separar la primera cantidad representada con las que han añadido después. Por último, cuentan la cantidad añadida. En la Figura A1.1.12, un niño dibuja en una primera fila las 6 damas que se han perdido, y en una segunda fila dibuja más damas hasta que tiene un total de 11. Luego cuenta las damas de abajo.

Figura A1.1.12. Estrategia AH1 en la sesión 1

Al igual que la estrategia anterior, *Correspondencia uno a uno (E),* se utiliza de forma flexible en un caso en esta sesión. Esta estrategia consiste en representar las dos cantidades en paralelo, haciendo corresponder una cantidad de la cantidad mayor con una de la cantidad menor, hasta que se agote la cantidad menor. Se cuenta cuántos quedan sin pareja de la cantidad mayor. La variante es *Correspondencia uno a uno con marcas* (E1). En la Figura A1.1.13 una niña representa once damas que eran al principio y el paralelo, haciendo corresponder una a una cada representante de dama, coloca las seis que se han ido. Tacha las seis que se corresponden en la fila de once y cuenta las que quedan.

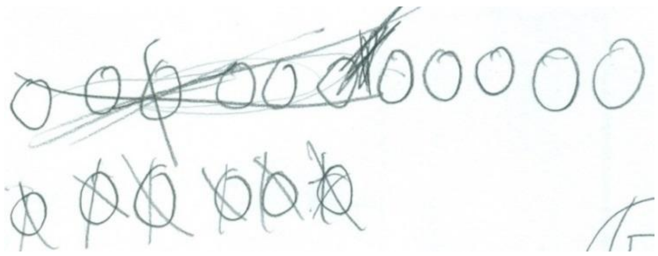


Figura A1.1.13. Estrategia E1 en la sesión 1

En esta sesión aparece una estrategia de conteo, *Contar hasta* (CH), en la que se parte de la cantidad menor y se enuncia la secuencia de numerales hasta la cantidad mayor. Se debe llevar el rastro de los numerales que se van pronunciando, porque esa cantidad de numerales es la solución del problema. Un niño realiza el rastro poniendo puntitos en el papel por cada numeral que enuncia en la secuencia de conteo. Finalmente cuenta, los puntitos dibujados. Esta estrategia es *Contar hasta con marcas, llevando el rastro de los elementos contados con marcas* (CH1), ya que se ayuda de marcas en el papel para llevar el conteo de los numerales enunciados.

Por último, la estrategia más avanzada utilizada en esta sesión, es la *recuperación de un hecho numérico básico de suma utilizado para la resta* (HN1). Recordar un hecho numérico básico a + b = c y conociendo a y c, se puede concluir b. Conocen que 5 + 6 = 11 y como se van 6, quedan 5.

En la Tabla A1.11 se puede ver el número de veces que se utiliza cada una de estas estrategias en la sesión 1. Dado que a los niños se les invita a resolverlo con otro material se han terminado pronto, hay trece niños en esta sesión de los que se recoge más de una estrategia. Las estrategias en estos casos, son del mismo nivel de comprensión, por ejemplo, puede utilizar primero Q*uitar con marcas* en el papel, y más tarde *Quitar con cubos encajados*.

Tabla A1.11. *Estrategias adecuadas recogidas en la sesión 1*

Estrategias	*Materiales*	*Variantes*	*F.A.*
Quitar (Q)	Con cubos encajables (Q1)		8
	Con otros objetos (Q2)		9
	Con marcas (Q3)		7
	Con dibujos (Q4)		2
	Con rekenrek (Q5)		8
		Sin usar configuración (Q5)	6
		Usando su configuración (Q6)	2
	Con los dedos	Sin usar la configuración (Q7)	1
	Con numerales	Quitando los últimos (Q10)	1
	Con la Tabla 100 (Q8)		4
		Quitando los primeros (Q8)	3
		Quitando los últimos (Q9)	2
Añadir hasta (AH)	Con dibujos (AH1)		1
Correspondencia uno a uno (E)	Con marcas (E1)		1
Contar hasta (CH)	Con marcas (CH1)		1
Hecho numérico (HN1)			1

1.1.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

En esta sesión, he observado el uso de una estrategia inadecuada, en el sentido de que no resolvía el problema, no tenía su estructura, era una estrategia de suma. Cuatro niños utilizan la estrategia *Juntar todo*, estrategia de modelización directa que consiste en representar las dos cantidades dadas en el problema, juntarlas, y contar todo. Esta estrategia también se puede utilizar con distintos materiales y variantes al ejecutarla, por ejemplo, *Juntar todo con marcas, representando por separado las cantidades y después juntándolas*. Consiste en representar las dos cantidades con marcas, considerarlas todas juntas y contarlas. En la Figura A1.1.14, una niña dibuja seis bolas, luego once bolas, y las cuentan todas. También se ha utilizado la estrategia *Juntar todos con dibujos, representando por separado las cantidades y después juntándolas*.

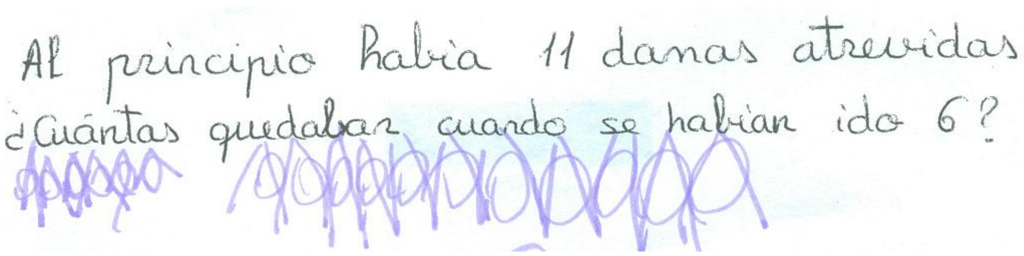


Figura A1.1.14. Estrategia JT en la sesión 1 utilizada inadecuadamente

Otra variante es *Juntar todo con cubos encajables, representando por separado las cantidades y después juntándolas*. Se representa las dos cantidades con objetos, se juntan y se cuenta todo. En la Figura A1.1.15, una niña representa once damas con una barra de once multicubos y seis damas con una barra de seis multicubos. Después se cuenta todo.

Figura A1.1.15. Estrategia JT en la sesión 1 utilizada inadecuadamente

También se ha utilizado la estrategia *Juntar todos con los dedos, añadiendo la segunda cantidad a la primera al representarlas* (JT). Se representa la primera cantidad con los dedos, y se sigue añadiendo dedos con la segunda cantidad. Se consideran todos los dedos que se han contado. En este caso consideran las once damas, las dos manos y un dedo de una de las manos, y se van contando dedos hasta llegar a seis más. Deben ser conscientes de que llevan ya dos manos contadas a parte de los dedos que han contado en esta segunda ronda.

Como estrategias erróneas, que además de no resolver el problema, no tienen sentido, se ha dado un *Uso de la Tabla 100 inadecuadamente para restar.* El niño busca el numeral mayor, luego el menor, señalándolos, sin ninguna indicación más. Luego cuenta los que hay desde el menor hasta el "1". Es el caso del niño A31, que utiliza la tabla 100 identificando el 11 como las damas atrevidas que eran, luego señala todas las casillas que hay hasta el 6 como que son las que se van, pero señalando el 6 por aparecer en el enunciado, no porque desde el 11 hasta el 6 inclusive haya 6 casillas, y finalmente las casillas que van del 5 al 1 son las que se quedan. En la siguiente Figura A1.1.16 se puede observar el momento en el que después de haber marcado el 11 con la mano izquierda con la mano derecha ha ido diciendo de todos esos hasta el 6 se han ido, sin marcar de uno en uno. Al final concluye que las casillas del 5 al 1 son las que quedan y las cuenta para saber las que hay. En este problema, si da la cantidad correcta, pero si el problema hubiera sido, "hay 11 damas atrevidas, ¿cuántas quedan cuando se han ido 8?", el resultado de ir al 11, y luego señalar el 8, y ver cuántos numerales hasta el 1, no resolvería el problema.

Figura A1.1.16. Uso erróneo de la Tabla 100

El alumno A31, intenta resolver el problema con otro material, y nos explica la estrategia *Quitar el sustraendo tras representar todo* (JT-Q). Representan las dos cantidades en un problema de resta y luego quitan la cantidad que hay que quitar, con lo que queda la cantidad mayor del problema. Por ejemplo, en este problema se representan las once damas que hay, se representan las seis damas que se van, y se quitan seis. A final quedan once.

Todas estas estrategias inadecuadas son debidas a la *dificultad de comprensión de la situación* (E1). Otra dificultad observada en tres niños a la hora de llevar a cabo sus propias estrategias fue el *conteo mal realizado* (E2), *al contar o representar* una cantidad, confundiéndose en poner alguna unidad de más o de menos, ya sea por saltarse algún numeral en la secuencia de conteo, como añadirlo.

En la Tabla A1.12 se puede observar la frecuencia registrada de estas dificultades relacionadas con los errores observados. De hecho, una niña utiliza *Juntar todo* con distintos materiales, por lo que, de esta dificultad solo hay dos estudiantes. Y el alumno A31, que utiliza el *uso inadecuado de la Tabla 100* y, *primero juntar todo y después quitar*, también aparece en la tabla en las dos estrategias.

Tabla A1.12. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 1*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99 (cadena numerable)	No usar bien la Tabla 100 (E4)

1.1.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones que han utilizado los niños para resolver el problema en esta sesión se recogen en la Tabla A1.13. La representación más común para la resolución es la A1, representación icónica del número y sin representación del objeto. Esta categoría la desgloso en representaciones con cubos encajables (A1Oc), con otros objetos (A1Oo), con marcas en el papel (A1Gm), con los dedos (A1D), con el rekenrek (A1R).

Tabla A1.13. *Representaciones encontradas en la sesión 1*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R)	47 (9, 9, 10, 2, 17)	1 (0, 1, 0, 0, 0)	
1	B1 (I, D)	4 (1, 3)	0	
	C1			
	A2	11		
2	B2			
	C2			
	A3		27	15
3	B3			
	C3		1	4
	A4		5	3
4	B4			
	C4			

En la Figura A1.1.17, aparecen tres representaciones con los cubos encajables en los que utiliza distinta construcción para cada cantidad. Todas ellas son representaciones icónicas de número sin representación del tipo de objeto con los materiales proporcionados (AOc).

Figura A1.1.17. Representaciones A1Oc en la sesión 1

En la Figura A1.1.18, aparece otra representación de este tipo pero construida por los niños con plastilina. En este caso, la estrategia la denoto A1Oo, ay que es con otros objetos que no son cubos encajables.

Figura A1.1.18. Representación A1Oo con plastilina en la sesión 1

Este tipo de representación se ha utilizado con materiales más estructurados como el rekenrek como muestra la Figura A1.1.19. Los niños representan las once damas atrevidas utilizando las bolas del rekenrek de forma diferente ya que no se les ha instruido en su manejo.

Figura A1.1.19. Representaciones distintas A1R con el rekenrek en la sesión 1

Esta tipo de representación también se puede observar con representaciones gráficas, con marcas en el papel, como se ve en la Figura A1.1.20.

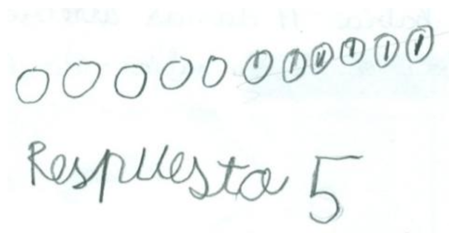


Figura A1.1.20. Representaciones A1Gm con marcas en la sesión 1

Otro tipo de representación que se ha observado es cuando el objeto se representa con dibujos o iconos, y el número de forma icónica (B1). En la Figura A1.1.21, aparecen representadas las once damas atrevidas de forma más icónica respecto al tipo de objeto que el caso anterior. Es importante destacar, que los representantes gráficos que hacen los niños pueden ser de dos formas: todas las marcas iguales, como ocurre en la imagen de la izquierda (B1I); o pueden utilizar representantes de cada unidad diferentes como ocurre en la imagen de la derecha (B1D).

Figura A1.1.21. Representación B1I y B1D con dibujos iguales y diferentes en la sesión 1

Los niños utilizan también una representación en la que ya aparecen las cifras de los numerales como es la representación con aspectos icónicos y simbólicos de número y sin representación del tipo de objeto (A2). En la Figura A1.1.22, aparecen representadas las once damas atrevidas con bolitas numeradas desde el 1 hasta el 11.

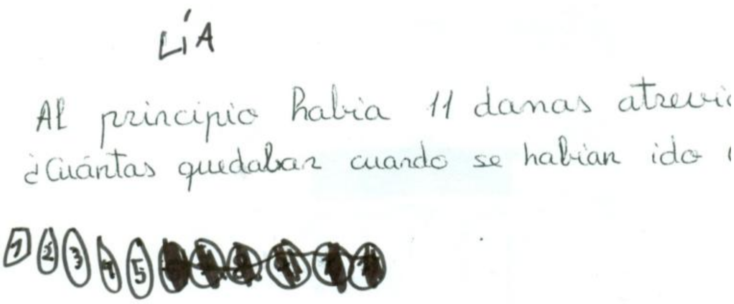
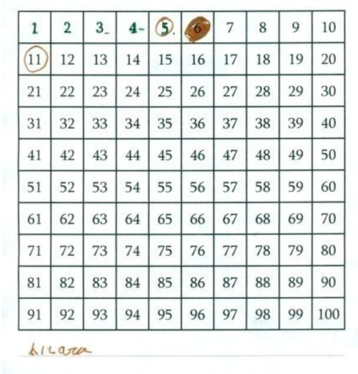


Figura A1.1.22. Representación A2 en la sesión 1

También aparece esta representación utilizando la Tabla 100 como se muestra en la Figura A1.1.23, en la que una niña marca las cantidades en ella.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura A1.1.23. Representación A2 con la Tabla 100 en la sesión 1

La representación A3, simbólica con cifra de número y sin representación del tipo de objeto, se utiliza en las cartas para explicar la solución. Es la más utilizadas para dar la solución. En la Figura A1.1.24, aparece el numeral 5 representando la solución. Esta representación se ha utilizado sobre todo para dar la solución al problema.

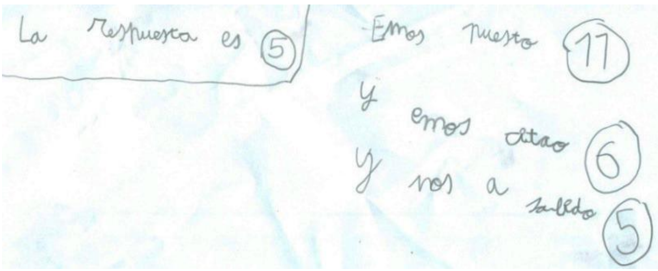


Figura A1.1.24. Representación A3 en la carta en la sesión 1

Otros niños, utilizan la representación simbólica con palabras de número y sin representación del tipo de objeto (A4), para dar la solución. En la Figura A1.1.25, aparece el numeral "cinco" representando la solución. Al igual que en el caso anterior, esta representación se ha utilizado sobre todo para dar la solución al problema. En esta figura también se observa la representación simbólica con palabras.

Figura A1.1.25. Representación A3 y A4 para dar la solución en la sesión 1

Por último, la representación simbólica con palabras de número y tipo de objeto (C3), se da muy poco, solo en las cartas. En la Figura A1.1.26 se muestra un ejemplo para decir "11 damas".

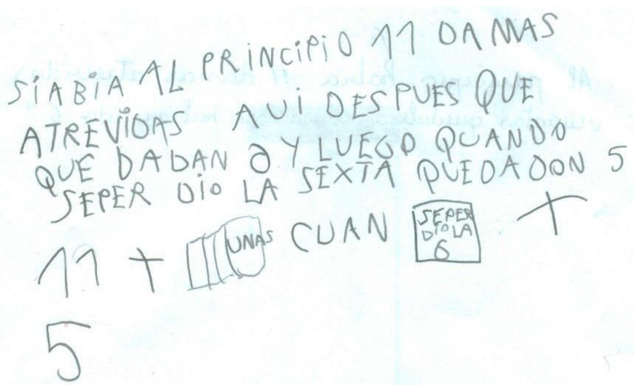


Figura A1.1.26. Representación C3 en la carta en la sesión 1

Un niño utiliza espontáneamente el símbolo "+", aunque de manera inadecuada, utilizándole como igual (ver Figura A1.1.26).

1.1.5. Caminos de aprendizaje para la tarea

Para realizar la tarea, realizo un análisis de las estrategias observadas. Lo primero que debe hacer el niño es leer el enunciado del problema que se entrega por escrito en una hoja de trabajo.

C1. Leer un numeral escrito hasta 100.

Para ejecutar la estrategia *Quitar* con los distintos materiales, los niños deben representar la cantidad inicial del problema. Al utilizar materiales que tienes distintas características, debo diferenciar varias capacidades. La primera está relacionada con utilizar contadores individuales de cualquier tipo, sin realizar ningún tipo de agrupamiento, contando de uno en uno, y en el caso de ser material con alguna configuración, no utilizarla:

C2. Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales, ya sean objetos, marcas o dibujos, sin agrupamientos.

El uso del rekenrek y las manos aprovechando su configuración, presenta la capacidad de reconocer patrones para formar cantidades, por lo que, formar colecciones de esta forma lo considero en otra capacidad.

C3. Formar una colección de hasta 100 utilizando patrones como los dedos o el rekenrek.

Utilizar una secuencia numérica escrita por el propio alumno para representar cada uno de los objetos, puede mostrar el nivel de elaboración de la secuencia de numerales.

C4. Formar una colección de hasta 100 con la secuencia de numerales escrita desde el 1 hasta el cardinal.

La Tabla 100 es un material agrupado en filas de 10, con la secuencia numérica, que permite utilizar la secuencia de numerales para resolver problemas. Su uso tiene interés en este trabajo para poder describir la evolución de unas estrategias a otras.

C5. Formar una colección de hasta 100 con el numeral de su cardinal.

Una vez representada la cantidad, se debe representar la acción de quitar, tachar o separar de esa cantidad la cantidad de cambio. Al tener diferentes materiales, surgen estas capacidades:

C6. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos de otra, contando de uno en uno.

C7. Quitar o separar una colección de objetos o marcas de patrones como las manos o el rekenrek.

C8. Quitar los primeros numerales, contando desde el uno hasta la cantidad a quitar en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

C9. Quitar los últimos numerales, contando desde el último numeral seleccionado, tanto numerales como haya que restar, en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

Una vez hecha quitada la cantidad de cambio hay que determinar la cantidad que ha quedado. Dependiendo del material igualmente se presentan distintas capacidades.

C10. Determinar el cardinal de una colección de hasta 100 elementos contando de uno en uno.

C11. Determinar la cantidad representada con patrones como manos o rekenrek.

C12. Determinar el cardinal de una colección de numerales en una secuencia numérica escrita por el alumno o la Tabla 100, desde el 1 hasta el último numeral, como ese último numeral.

C13. Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita, desde un numeral hasta otro, contando de uno en uno hacia delante.

Por último, hay que dar la solución por escrito.

C14. Escribir un número hasta 100 con cifras.

C15. Escribir un número hasta 100 con palabras.

La estrategia *Correspondencia uno a uno con marcas* (E1), necesita de emparejar dos cantidades representadas por separado, en vez que quitar o tachar elementos de una única colección. Así los niños:

C16. Representar varias cantidades distinguiéndolas mediante color, tipo de objeto o posición.

C17. Representar en correspondencia uno a uno dos colecciones de objetos o marcas para ver su diferencia.

La estrategia *Añadir hasta con dibujos* (AH1), a diferencia de las anteriores, implica añadir elementos a una cantidad inicial hasta llegar a otra cantidad final, distinguiendo las que se han añadido.

C18. Completar una colección de elementos, distinguiendo los elementos añadidos hasta completar una cantidad.

Para la estrategia de conteo *Contar hasta con marcas* (CH1), es una estrategia de conteo, más avanzada que *Añadir hasta* y no es necesario representar la cantidad primera. En este caso hay que enunciar simplemente la secuencia desde un número hasta otro, formando una colección de marcas, para luego determinar su cardinal por conteo.

C19. Formar una colección con el numeral de su cardinal.

C20. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia delante hasta otro, formando una colección de marcas u objetos.

Para la estrategia *recuperación de un hecho numérico básico* (HN1), se necesita, conocer la descomposición del número 11 como 5 + 6, y reconocer la relación entre la suma y la resta.

C21. Reconocer la relación de la suma y la resta.

C22. Conocer descomposiciones básicas (combinar dos número de dos cifras).

Con estas capacidades necesarias para la resolución de la tarea que muestran las estrategias observadas, y las dificultades que muestran los errores observados, el grafo de los caminos de aprendizaje para este problema en esta sesión se puede ver en la Figura A1.1.27.

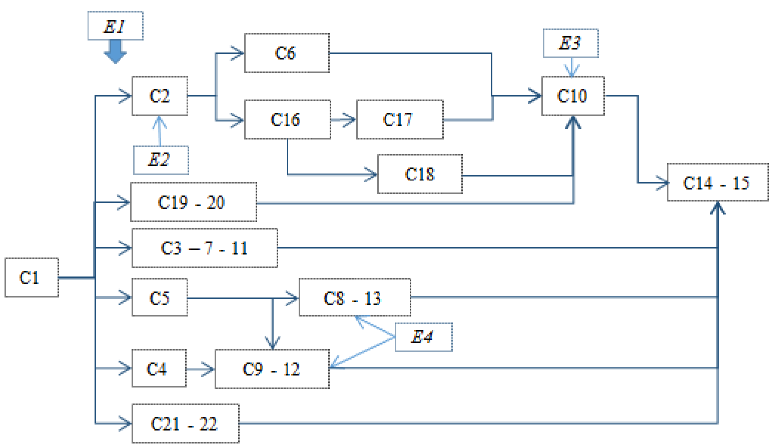


Figura A1.1.27. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 1

Cada uno de los caminos que indican las fechas, muestra las capacidades necesarias para ejecutar una estrategia recogida en esta sesión. Por ejemplo, la estrategia *Quitar con marcas* (Q3), *Quitar con dibujos* (Q4), *Quitar con cubos encajados* (Q1), *Quitar con objetos* (Q1) y *Quitar con el rekenrek sin usar la configuración* (Q5), necesita de las capacidades, C1 - C2 - C6 - C10 - (C14 o C15). La estrategia *Quitar con rekenrek usando su configuración* (Q6), necesita de las capacidades C1-C3-C7-C11-(C14 o C15). La estrategia *Contar hasta con marcas* (CH1), es el camino C1 – C19 – C20 – C10 - (C14 - C15), es una estrategia más avanzada que *Añadir hasta* (AH1), que tiene por camino de aprenzaje C1 – C2 – C16 – C18 – C10 - (C14 - C15). A diferencia está en que no es necesario representar la cantidad inicial (C2), y representar una cantidad diferenciándola (C16) de la que se representa mientras se continúa la secuencia (C18). Las estrategias realizadas con la Tabla 100 comienzan las capacidades C1 – C5, y dependiendo de si se quitan los primeros numerales y se cuentan el resto (C8-C13), o se quitan los últimos y se determina la cantidad que quedan con el último numeral no quitado (C9-C12), se siguen un camino u otro.

1.2. Sesión 2

El problema de la segunda sesión es un problema de cambio decreciente igual que la sesión anterior, pero en esta ocasión la incógnita es la cantidad de cambio. Dado que se utiliza el cuento de Once Damas Atrevidas, se aprovechó la situación de "descuento de damas" para plantear otro problema de cambio decreciente. El hecho de que la incógnita sea la cantidad de cambio aumenta la dificultad de la resolución respecto al anterior.

Tabla A1.14. *Características principales de la segunda sesión*

Problema	Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?
Tipo de problema	Problema de cambio decreciente con cantidad de cambio desconocida
Cantidades	Menores que 20
Materiales	Tabla 100, Rekenrek, multicubos, centicubos, ábaco, plastilina, rotuladores, folios.
Fecha	4 de Noviembre
Cuento	Once damas atrevidas
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 24 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutora del grupo A, Maestra con experiencia CGI y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.2.1. Desarrollo de la sesión

La segunda sesión se realiza una semana después de la primera sesión. Se continúa con el objetivo de que las tutoras se familiaricen con la metodología CGI, respetando las fases de los talleres, por lo que se repasa con las tutoras, antes de iniciar la sesión, las fases de los talleres y su papel durante la resolución individual y la puesta en común. Para poder evaluar mejor la forma de comunicar y argumentar la explicación de las estrategias de los niños, en la carta de Clara, se añadió "por favor, cómo tengo que hacer para resolverlo", sustituyendo así la petición de la solución, sino el procedimiento.

En el grupo B la tutora finalmente no puede asistir y es la maestra con experiencia en CGI, Beatriz, la que ocupa su lugar. Los niños se distribuyen en dos mesas grandes de trabajo y tras la lectura del cuento y la carta de Clara, comienza la resolución individual. Para la recogida de datos decidimos poner una cámara fija en una mesa y recoger entre Beatriz y yo, las explicaciones de los niños en las hojas de registro. Esperaba que con la cámara fija recogiendo toda la mesa, podría observar cómo cada niño de esa mesa va construyendo su estrategia. Después, se hizo una puesta en común en la que varios niños explicaron sus estrategia, y dando tiempo a escribir la corta a Clara.

En el grupo A, la tutora cambia la distribución de las mesas en grupos de cuatro con respecto a la sesión anterior. Igualmente se lee el cuento y la carta de Clara, y se procede a la recogida de estrategias. Igual que en el grupo B, se coloca una cámara fija, y la tutora y yo recogemos las estrategias en las hojas de registros. Se realiza la puesta en común en la que los niños empiezan a participar más en la explicación de las estrategias de sus compañeros, ayudando o corrigiendo al que explica. En este grupo escriben cartas para Clara en grupos de 4 y la tutora la expone en la pizarra, leyéndolas una por una, y resaltando las cartas en las que explican algo de cómo o con qué lo han resuelto.

Tras la sesión, reunida con las tutoras de los dos grupos, decidimos que para la siguiente sesión dejaremos copias de la carta de Clara encima de las mesas para que los niños puedan leerlas. Respecto a la forma de grabar en video, volvería a llevar la cámara conmigo e ir entrevistando a cada uno de los niños porque no se recogió tanta información como se esperaba. Respecto a la formación de las tutoras, les indicamos que se debe pedir a los niños en las explicaciones de sus estrategias que sean más “claros”, hacerlas sensibles a la estructura semántica del problema.

En la Figura A1.2.1 se puede observar que de los 44 estudiantes que eligen una estrategia adecuada, 36 dan una respuesta correcta al problema. No se han dado estrategias inadecuadas pero si ha habido 6 estudiantes que no supieron terminar el procedimiento de resolución.

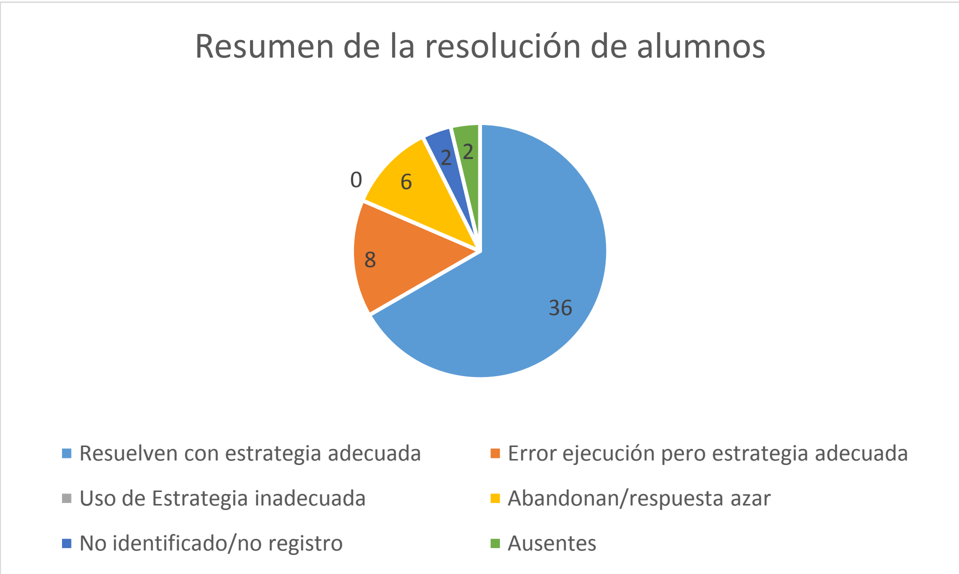


Figura A1.2.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 2

Ha habido niños que no recordaban las cantidades del problema al solucionarlo y, para la próxima sesión, vamos a proporcionar hojas de trabajo con el enunciado del problema para que ellos mismos puedan leer el problema.

1.2.2. Estrategias observadas

Un problema de cambio decreciente con cantidad de cambio desconocida, según el marco teórico, debería ser resuelto por la estrategia de modelización *Quitar hasta* o estrategia de conteo como *Contar hacia atrás hasta*. También, de una forma más flexible, podría ser resuelto con la estrategia de modelización directa *Quitar* o la estrategia de *Contar hacia atrás*. Como variantes de la estrategia *Quitar hasta* (QH), los niños han utilizado este procedimiento utilizando marcas o dibujos en el papel, materiales como los cubos encajables formando barras o figuras, u otros como plastilina y el ábaco, incluso con el rekenrek. En este problema, la cantidad final es perceptible por subitización, y la estrategia de *Quitar hasta* supone representar la cantidad inicial del problema, 11, y quitar hasta que queden 3. Cuando los estudiantes explican sus estrategias, no siempre he podido asegurar que la cantidad 3 fuese percibida por subitización o contada de uno en uno.

La estrategia más utilizada como se puede ver en la Tabla A1.15 es *Quitar hasta con marcas* (QH1). Es una estrategia de modelización directa, en la que se representa la cantidad mayor del problema, en este caso es la cantidad inicial, con una colección de marcas en el papel, y se van tachando o retirando de alguna forma gráfica, como puede ser redondeando marcas, hasta que queda la cantidad final. Se cuenta las marcas que se han tachado o redondeado para saber el resultado. En este caso se ponen 11 marcas, se van tachando o redondeando marcas, hasta que quedan 3, y se cuentan las marcas tachadas o redondeadas. En la Figura A1.2.2 se muestra como la niña de la izquierda ha dibujado 11 bolas, ha ido tachando desde la derecha según va contando las que tacha hasta que le quedan 3, tal como lo explica. La niña del dibujo de la derecha ha ido redondeando bolas hasta que le quedaban 3 y luego ha contado las que ha redondeado. En la explicación del procedimiento de los estudiantes no me ha sido posible identificar si las 3 marcas que dejan sin tachar o redondear las perciben por subitización o las cuenta, ya que ya está realizado el dibujo cuando lo explican.

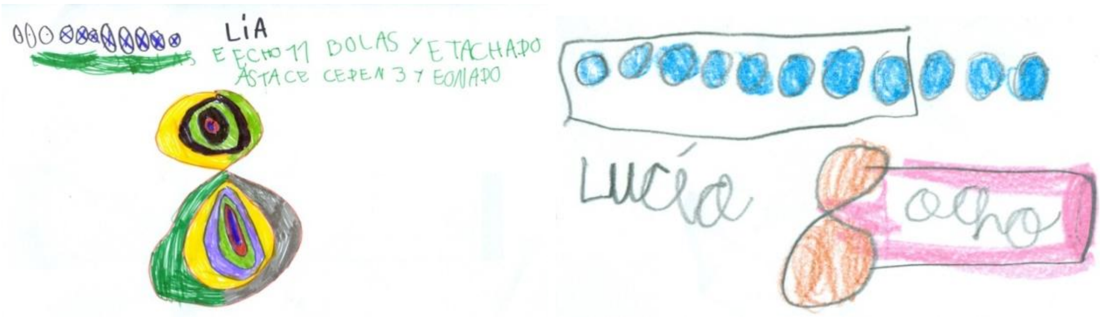


Figura A1.2.2. Representación de QH1 con representación A1Gm

Otra forma de representar QH1 es como aparece en la Figura A1.2.3 donde los niños, redondean las 3 primeras marcas, que son las que quedan, y después tachan el resto, contándolas para saber la solución.

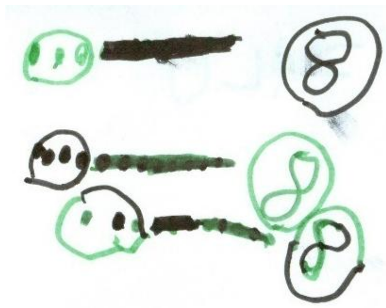


Figura A1.2.3. Representación de QH1 en la sesión 2

En la Figura A1.2.4 se muestra la imagen de una representación de la estrategia *Quitar hasta con dibujos* (QH2) donde el estudiante ha dibujado las 11 damas y va redondeando damas hasta que le quedan 3. En este caso las damas no son simples marcas, sino que tiene una representación icónica (B1) como veremos en el apartado de representaciones.

Figura A1.2.4. QH2 con representación B1I en la sesión 2

La estrategia *Quitar hasta con objetos* (QH3), ha sido utilizada por tres estudiantes. Esta estrategia de modelización consiste en representar una colección con objetos, y quitar objetos hasta que queden una cantidad de ellos, dada en el problema. La incógnita se consigue contando los objetos quitados. En este caso, tres niñas explican la estrategia de quitar hasta con el ábaco. Colocan grupos de 11 bolas en cada varilla, como se ve en la Figura A1.2.5. A continuación, dejando 3 bolas abajo suben el resto de bolas y las cuentan. El ábaco es una material que no han utilizado todavía con la tutora y el uso que hacen no sigue la estructura que el material representa.

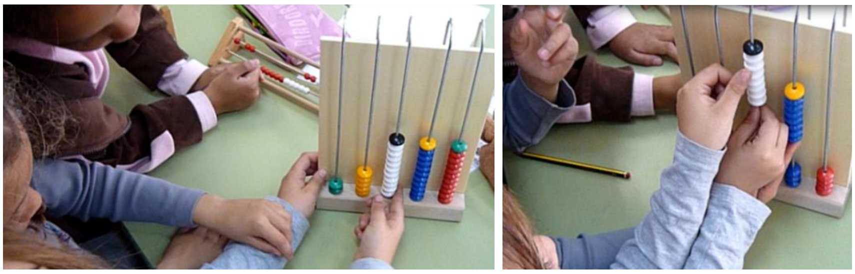


Figura A1.2.5. Aplicación de la estrategia de QH3 con el ábaco en la sesión 2

La estrategia *Quitar hasta con el rekenrek*, es similar a la anterior pero utilizando las cuentas del rekenrek como objetos. Como variantes podría ocurrir que los niños utilizasen la configuración de las cuentas del rekenrek para evitar conteos por lo que identifico dos variantes, una en la que los niños no utilizan la configuración y otra en la que la utilizan para no realizar conteos. En esta sesión, solo se ha dado la que no utilizan la configuración, que describo a continuación.

Dos estudiantes han elegido el rekenrek para realizar la estrategia *Quitar hasta con rekenrek sin ayuda de configuración* (QH4). Esta estrategia de modelización directa consiste en representar una cantidad en el rekenrek contando de uno en uno, quitar un número de bolas del rekenek, hasta que queden un número de bolas dado. Después se cuenta el número de bolas retiradas. En esta sesión, el niño de la Figura A1.2.6 coloca once bolas en la izquierda del rekenrek, y después, retira bolas hacia la derecha, dejando tres bolas en la izquierda. Se cuenta las bolas retiradas. Incluyo la variante, *Quitar hasta con rekenrek sin ayuda de configuración del rekenrek, identificando cantidades por subitización* (QH4). Esta estrategia se refiere, a que, aunque no se utilice la configuración de las cuentas del rekenrek para formar colecciones y determinar el número de bolas que quedan, pueden identificarse cantidades menores que 5 por subitización al retirar todas menos 3. En este problema, las cuentas que hay que dejar sin quitar son tres, por lo que los dos niños que utilizan esta estrategia, no cuentan 3 bolas, sino que directamente empiezan a quitar el resto dejando las 3 cuentas en un lado.

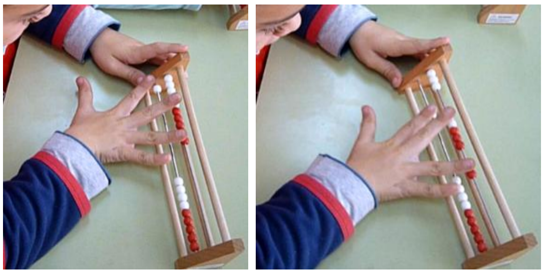


Figura A1.2.6. Aplicación de la estrategia de QH4 en la sesión 2

La estrategia de modelización directa *Quitar* (Q), no representa las acciones entre las cantidades de este problema, tal como se indica en Carpenter, Fennema y otros (1999), pero se utiliza de forma flexible, quitando la cantidad final dada en el problema, en vez de la cantidad de cambio. En esta sesión se han dado estrategias como *Quitar con marcas* (Q3), *Quitar con dibujos* (Q4), *Quitar con cubos encajables, formando barras* (Q1), *Quitar con objetos* (Q2), *Quitar con los dedos* (Q7) o *quitar con el rekenrek* (Q8), utilizada de forma flexible. No voy a detallar la descripción de estas estrategias ya que en la sesión 1 ya han sido utilizadas, pero si voy a mostrar detalles sobre su uso en esta sesión 2.

Las estrategias con representaciones gráficas *Quitar con marcas* (Q3) y *Quitar con dibujos* (Q4) aparecen con una frecuencia de 8 y 1, respectivamente. En la Figura A1.2.7 se puede ver como un estudiante tacha las 3 primeras bolas, contando como resultado el resto.

Figura A1.2.7. Representación de Q3 en la sesión 2

La estrategia *Quitar con objetos*, se ha utilizado tanto *con cubos encajables* (Q1), como *con otros objetos como bolas hechas de plastilina* (Q2). Para este problema, se representan los objetos de la cantidad inicial, se quita los objetos que indica la cantidad final y se cuenta los que quedan. Esta estrategia no es la que corresponden con la estructura semántica de los niños, pero resuelve el problema. En la Figura A1.2.8 podemos ver un ejemplo en el que una niña construye once bolas de plastilina, retira 3, y cuenta las que le quedan. Y en la imagen de la derecha una niña quita 3 bloques de una barra de once cubos encajables.

Figura A1.2.8. Representaciones de Q2 y Q1 en la sesión 2

La estrategia *Quitar con el rekenrek* ha sido utilizadas por 8 niños. En concreto, 6 de ellos han usado *Quitar con el rekenrek sin utilizar la configuración* (Q5). En la Figura A1.2.9 se puede observar esta estrategia utilizando el rekenrek. En la primera imagen la niña ha colocado 10 bolas arriba y una abajo en la izquierda del rekenrek, después ha retirado 3 a la derecha y ha contado las que quedan. Esta estrategia ha sido utilizada por 6 niños, pero 5 de ellos no mostraron contar las 3 cuentas que retiraban. Por lo que incluyo otra variante *Quitar con el rekenrek sin utilizar la configuración, identificando cantidades por subitización* (Q11). En este caso 5 de los 6 niños desplazaban el grupo de 3 bolas sin contarlas. No incluyo a la sexta niña por no tener la información recogida suficiente, para concluir si tampoco contaba las 3 cuentas.

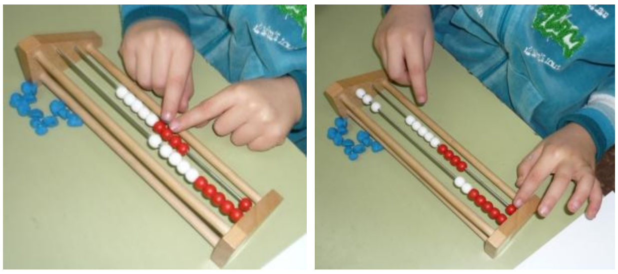


Figura A1.2.9. Estrategia de Q11 en la sesión 2

Al igual que en la sesión 1, la estrategia Q*uitar con los dedos* se utiliza, en este caso de forma flexible, poniendo las dos manos abiertas, y teniendo en cuenta uno más, quitar ese dedo de más, y otros dos de dos de las manos abiertas, y cuentan el resto de dedos, *Quitar con los dedos sin usar su configuración* (Q7).

Respecto a otras estrategias de modelización directa, ha habido niños que han utilizado la *Correspondencia uno a uno* (E), dos niños lo han utilizado con marcas, se ya se dio en la sesión 1, y una niña ha utilizado esta estrategia con bolas de plastilina, variante que denoto como *Correspondencia uno a uno con objetos* (E2). En este caso los niños colocan una hilera con una colección de objetos con el mismo cardinal que la cantidad inicial del problema. En correspondencia biunívoca se coloca una colección de objetos con el mismo cardinal que la cantidad final, y se cuenta, los objetos que no están emparejados con ningún objeto.

La estrategia de correspondencia uno a uno se ha utilizado también con marcas en el papel, *Correspondencia uno a uno con marcas* (E1). Esta estrategia es similar a la anterior, con objetos (E2), pero los niños representan las dos colecciones con marcas en el papel, cuentan las marcas que no están emparejadas. En la Figura A1.2.10 se puede ver como se han alineados dos colecciones de 11 y 3 objetos, se han tachado los 3 objetos de la colección más grande y el niño, a continuación, contará las marcas no tachadas, que son las que no tienen pareja en la otra colección.

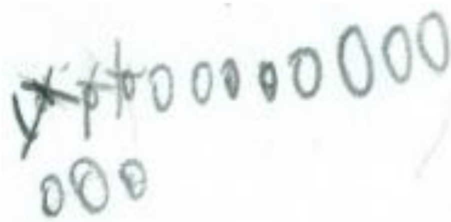


Figura A1.2.10. Estrategia E1 en la sesión 2

En esta sesión, un niño utiliza la estrategia *Contar hasta* (CH), en la que llevaba el rastro con los dedos de los numerales que iba contando, pero no la ejecuta bien, porque cuenta el numeral del que parte, el 3. Al no sentirse seguro, realiza una estrategia de modelización directa para resolverlo.

Contar hasta (CH). Es una estrategia de conteo que comienzan a contar desde el 3, y llevan el conteo de numerales que dicen hasta llegar al 11. En esta sesión, un niño la utiliza pero incorrectamente, ya que comienza a contar incluyendo el 3 en la secuencia. En dificultades lo detallo.

Tabla A1.15. *Estrategias adecuadas en la sesión 2*

Estrategia	*Material*	*Variantes*	*F.A.*
Quitar hasta (QH)	Con marcas (QH1)		20
	Con dibujos (QH2)		1
	Con objetos (QH3)		3
	Con rekenrek (QH4)	Sin usar configuración, reconociendo cantidades por Subitización (QH4)	2
Quitar (Q)	Con gráficos - marcas (Q3)		8
	Con gráficos –dibujos (Q4)		1
	Con cubos encajables (Q1)		7
	Con otros objetos (Q2)		4
	Con el rekenrek (Q5)		2
		Sin usar configuración (Q5)	1
		Sin usar configuración, reconociendo cantidades por Subitización (Q11)	5
	Con los dedos (Q7)		2
Correspondencia uno a uno (E)	Con gráficos – marcas (E1)		1
	Con otros objetos (E2)		1
Contar hasta (CH2)			1

1.2.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

En esta sesión, las dificultades y errores que se observan se pueden ver en la Tabla A1.16. Un niño intenta utilizar la estrategia *Contar hasta* de manera incorrecta. Esta estrategia consiste en contar el número de numerales que hay desde el numeral más pequeño en el problema, hasta el numeral más grande. En este problema sería contar a partir de “tres” hasta “once”, es decir, “tres,… cuatro (uno), cinco (dos), seis (tres), siete (cuatro), ocho (cinco), nueve (seis), diez (siete), once (ocho), son ocho”. Pero el niño A38 la utiliza comenzando el conteo de numerales en el tres, por lo que, le sale 9.

En esta sesión hubo dos niños, al menos, que olvidaron las cantidades implicadas en el problema, y aunque aplicaron bien la estrategia elegida, no dieron el resultado correcto por no utilizar las cantidades implicadas. Para las siguientes sesiones, se entregará una hoja de trabajo con el enunciado del problema. Hubo 3 niños que tacharon damas sin saber dónde parar, y posiblemente puede deberse también a esta dificultad. También han aparecido casos de errores al contar colecciones.

Tabla A1.16. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 2*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones o determinar el cardinal de una dada (E2)
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99 (cadena numerable)	Contar un numeral de más o menos en estrategias de conteo (E5)

1.2.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones que han utilizado para resolver el problema se pueden observar en la Tabla A1.17, donde recojo el número de veces que aparecen en la recogida de datos. En la solución puede haber menos representaciones recogidas porque en el grupo B no se les pidió a los niños que explicaran por escrito la estrategia.

Tabla A1.17. *Representaciones encontradas en la sesión 2*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R)	55 (8, 8, 27, 2,10)	1 (0,0,0,0, 1)	
1	B1 (I)	4 (4)	2 (2)	
	C1			
	A2	1		
2	B2			
	C2			
	A3		26	10
3	B3			
	C3			6
	A4		2	3
4	B4			
	C4			2

La representación *Icónica de número sin representación del tipo de objeto* (A1), con los materiales proporcionados ha sido la más frecuente para la resolución. En la Figura A1.2.11, aparece dos representaciones con los cubos encajables (A1Oc) en los que utiliza distinta construcción para cada cantidad.

Figura A1.2.11. Distintas representaciones A1Oc en la sesión 2

Al igual que en la sesión anterior se utilizan desde materiales con una estructura que los niños utilizan libremente y sin formalismos hasta plastilina que construyen ellos mismos las cantidades, como se puede observar en la Figura A1.2.12. El rekenrek es un material estructurado con una forma de utilización, pero los niños del estudio no han recibido nunca instrucción sobre el uso del rekenrek. Ellos lo utilizan libremente.

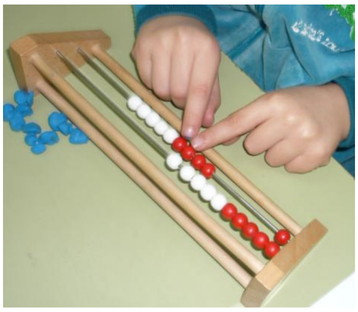


Figura A1.2.12. Representaciones con rekenrek (A1R) y plastilina (A1Oo) en la sesión 2

La mayoría de los niños en esta sesión ha utilizado para la resolución marcas en el papel como muestra en la imagen de la Figura A1.2.13. Estas son las representaciones que simbolizo como A1Gm. Tanto A1Oc, como A1Gm son las más utilizadas para la resolución del problema.

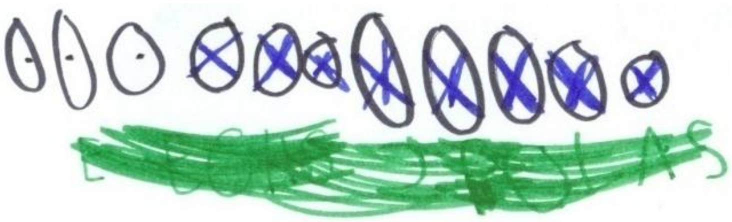


Figura A1.2.13. Representaciones A1Gm en la sesión 2

La representación de tipo icónica de número y de tipo de objeto (B1), se utiliza para resolver el problema y para dar la solución. Dentro de estas representaciones podemos distinguir las que todos los objetos representados son iguales y los que los representan con cualidades diferentes. En estas sesiones solo se utiliza la B1I, donde los iconos con todos iguales. En la Figura A1.2.14 podemos ver dos representaciones de este tipo, la imagen de la izquierda se utiliza para resolver el problema, y la imagen de la derecha se utiliza para dar la solución.

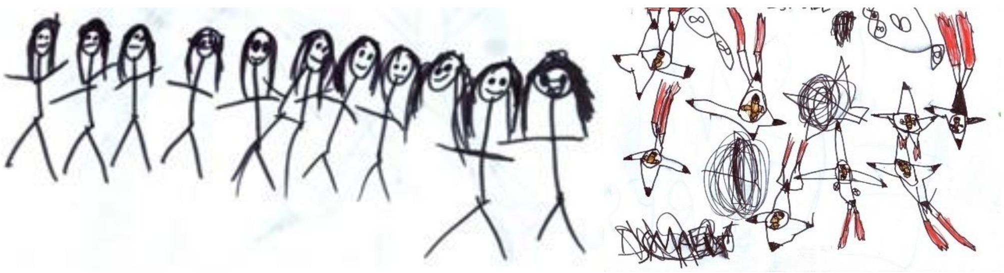


Figura A1.2.14. Representaciones B1 en la sesión 2

Las representaciones con aspectos icónicos y simbólicos de número y sin representación del tipo de objeto (A2) aparecen menos en esta sesión que en la sesión 1, ya que no se ha utilizado la tabla 100. En la Figura A1.2.15, una niña ha dibujado 11 estrellas numeradas. Además parece el 8 como representación simbólica con cifras del número pero sin representación del tipo de objeto.

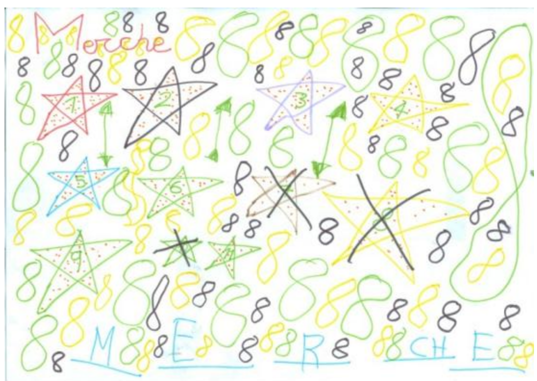


Figura A1.2.15. Representación A2 para resolver y A3 para dar la solución en la sesión 2

Es muy habitual que en las hojas de trabajo aparezcan varias representaciones. En la Figura A1.2.16, aparecen representadas las once damas atrevidas de forma icónica del número y sin representación del tipo de objeto (A1Gm) que es utilizada para resolver el problema, las bolas rojas. Además en esta imagen también aparece una representación icónica de número y objeto para dar la solución (B1I), las ocho damas verdes de la derecha abajo. Además aparecen representaciones simbólicas con cifras del número sin representación del tipo de objeto (A3) posiblemente para dar la solución del problema.

Figura A1.2.16. Representación A1Gm para resolver, B1I y A3 para dar solución en la sesión 2

En la Figura A1.2.17, ha utilizado una representación icónica de número sin representación del tipo de objeto para resolver el problema (A1Gm). Para dar la solución y escribir la carta ha utilizado una representación simbólica con palabras y cifras de número sin representación del tipo de objeto, “8” y “ocho” (A3 y A4).

Figura A1.2.17. Representación A1Gm, A3 y A4 en la sesión 2

En la Figura A1.2.18 aparece representación simbólica de número sin representante del tipo de objeto (8, 3), y también aparece representación simbólica con cifras del número y simbólica de objeto (11 damas) y simbólica con palabras de número y objeto “onze damas”.

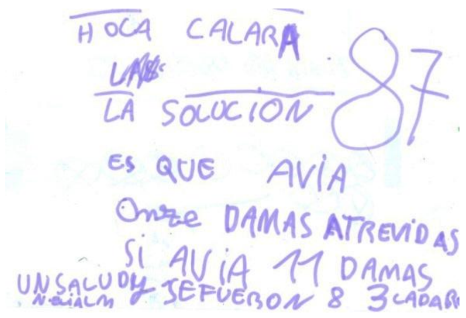


Figura A1.2.18. Representación A3, C3 y C4 en carta de la sesión 2

1.2.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión se han observado estrategias que ya se han utilizado en la sesión 1 y ya se han descrito las capacidades para ellas. Añadiré en esta nueva sesión, las capacidades para las que han aparecido nuevas.

La estrategia *Quitar hasta con marcas o dibujos* (QH1 o QH2), *con objetos* (QH3), *con rekenrek sin aprovechamiento de la configuración* (QH4), consiste en representar la cantidad mayor del problema con el material elegido sin usar su configuración, y se tachan, quitan, redondean o separan elementos hasta que queden el número más pequeño que indica el problema. Para esta estrategia, los niños deben tener la capacidad de llevar el control de las que quedan. Esta cantidad se va comprobando por conteo. En esta sesión, la cantidad que debe quedar es 3 que es perceptible por subitización. Aunque no ha sido posible distinguir esta percepción inmediata en las entrevistas, voy a incluir esta capacidad.

> C23. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos hasta que queda una cantidad comprobada por conteo.

> C24. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos hasta que queda una cantidad comprobada por subitización.

Para la estrategia *Quitar con el rekenrek una cantidad percibida por subitización* (Q11), es necesario definir la capacidad siguiente que no se definió en la sesión 1.

> C25. Quitar una colección percibida por subitización.

La estrategia de *Correspondencia uno a uno con objetos* (E2), necesita de emparejar los colecciones de objetos con un cardinal dado, que ya se ha definido en la sesión 1 para la estrategia de *Correspondencia uno a uno con marcas* (E3).

Por último, la estrategia *Contar hasta* (CH2), consiste en contar desde el numeral más pequeño hasta el numeral más grande implicados en el problema, llevando el rastro de los numerales enunciados en el conteo. Identifico una nueva capacidad:

> C26. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hasta otro hacia delante, llevando el rastro con una colección representada con los dedos o figurativa.

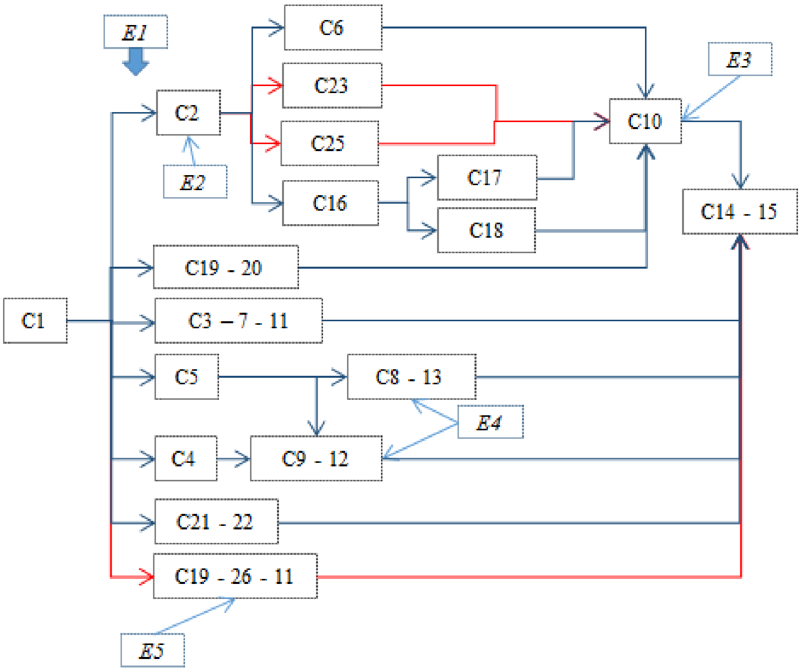


Figura A1.2.19. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 2

Los caminos C1 – C2 – C23 – C10 – (C14 o C15) y C1 – C2 – C24 – C10 – (C14 o C15) corresponden a las estrategias de *Quitar hasta* con los distintos materiales sin usar la configuración, con la diferencia que la primera se cuenta de uno en uno la cantidad que debe quedar (C21), y en la segunda se percibe por subitización (C22).

Los caminos C1 – C2 – C2 – C10 – (C14 o C15) y C1 – C2 – C25 – C10 – (C14 o C15) corresponden a las estrategias de *Quitar* con los distintos materiales sin usar la configuración, con la diferencia que la primera se cuenta de uno en uno la cantidad que se quita o tacha (C6), y en la segunda se percibe por subitización (C23).

La estrategia *Contar hasta* corresponde al camino de aprendizaje C19 - C26 – C11, donde los niños deben saber enunciar la secuencia numérica de un número a otro, llevando el rastro de los numerales enunciados.

1.3. Sesión 3

El problema de la tercera sesión (11 de noviembre) es un problema en el que se combinan cuatro cantidades. Si lo clasifico como un problema de varias etapas, puede considerarse un problema de tres etapas de esquema jerárquico, donde los problemas que lo componen son de combinación con total desconocido (Nesher, 1991). Los sumandos son cantidades menores de 10, incluso dos de los sumando son “1” por lo que la dificultad se identifica en tener cuatro sumandos.

Tabla A1.18. *Características principales de la tercera sesión*

Problema	Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?
Tipo de problema	Problema de 3 pasos, de esquema jerárquico, donde cada uno de los problemas de una etapa que lo componen es un problema de estructura aditiva de combinación con total desconocido (o problema de combinación con cuatro partes).
Cantidades	Menores que 20
Materiales	Tabla 100, Rekenrek, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, folios.
Fecha	11 de Noviembre
Cuento	El Gato Tragón
Asistentes	26 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, maestra con experiencia CGI (Beatriz) y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotos y narración de la investigadora.

1.3.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión se reparte copias de la carta de Clara en las mesas, para que los niños puedan leer el problema tantas veces como necesiten. En el grupo B, tras leer el cuento, los niños leen en parejas la carta de Clara. La tutora remarca la importancia de explicar la estrategia que utilizan para que Clara lo comprenda.

Tras la lectura de la carta los niños comienzan la resolución individual con los materiales que ellos eligen. La tutora del grupo, Beatriz y yo vamos entrevistando a los niños según van terminando. Las tutoras y Beatriz anotan las estrategias que explican los niños en hojas de registro, y yo realizo grabaciones con video. Así recogemos las explicaciones de los niños.

Las tutoras vuelven a remarcar la importancia de explicar sus estrategias a Clara, tal como lo hace a los compañeros en la puesta en común. En la siguiente Figura A1.3.1 puede observarse que 39 de los 51 niños que asistieron resolvieron y dieron una respuesta correcta al problema, y 3 niños más eligieron correctamente una estrategia pero mostraron algún tipo de dificultad que no les permitió dar la respuesta correcta. Solo una niña utilizó una estrategia inadecuada.

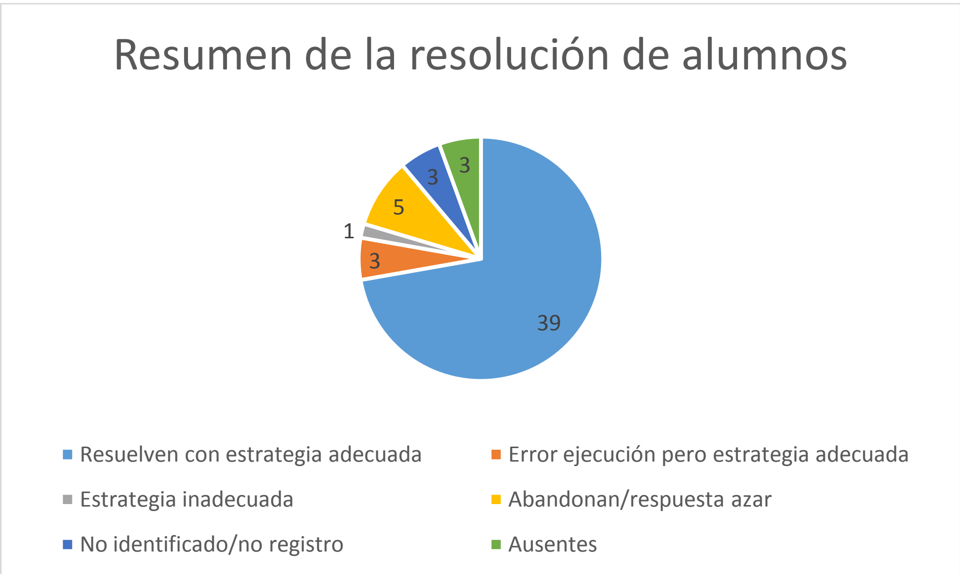


Figura A1.3.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 3

1.3.2. Estrategias observadas

El problema consta de 3 etapas al tener que combinar 4 cantidades. Podía esperarse analizar las tres estrategias consecutivas de cada una de las etapas. Como muestro a continuación, en las estrategias de modelización directa los niños han representado primero todas las cantidades y, después, han realizado el recuento final. Los niños que han utilizado estrategias de conteo, van añadiendo consecutivamente las cantidades, hasta completar las cuatro cantidades. Otra característica del problema es que las dos primeras cantidades enunciadas son "uno", y los niños pueden ordenar las cantidades para facilitar su procedimiento, pero esto no ocurre, los niños van representando los personajes según recordaban el enunciado del problema o lo van repasando en la carta.

La estrategia *Juntar todos* (JT) es una estrategia de modelización directa en la que los niños representan cada una de las cantidades (dedos, marcas, dibujos, objetos), los juntan o consideran juntos, y los cuentan todos. En los estudios previos también incluye la estrategia *Juntar a*, que consiste en representar primero una cantidad, después añadir la segunda cantidad a la primera formando una única colección, contando finalmente la colección resultado (Fuson, 1992). En la estrategia *Juntar todo* se representan primero todas las cantidades y luego se relacionan juntándolas o considerando todas las cantidades a la vez. En el marco teórico de la CGI, las dos estrategias se consideran de la estrategia más general *Juntar todos*, por lo que consideraré dos variantes de dicha estrategia, *Juntar todo, representando primero las cantidades y, considerándolas juntas después*, y *Juntar todo, añadiendo una cantidad a la otra según se van representando formando así una única colección*. Esta distinción es importante en el análisis de las estrategias porque cuando se resuelvan problemas con cantidades de dos cifras y los niños puedan agrupar en decenas las cantidades, las cantidades que se añaden formando una sola colección no pueden contarse de 10 en 10, como veremos más avanzado el análisis.

Voy a describir las variantes que se han observado en esta sesión dependiendo de los materiales utilizados. Comienzo con las estrategias en las que se utilizan cubos encajables o centicubos formando barras, u objetos, como cubos no encajados o bolas de plastilina, pinchos, pinturas.

Comienzo con la estrategia *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT1). En esta variante, los niños primero representan las cantidades en barras hechas con cubos encajables o centicubos, después las consideran juntas, y finalmente cuentan el total de cubos. Hay niños que representan la unión de las colecciones y otros, simplemente las cuentan todas sin juntarlas. En la Figura A1.3.2, vemos la variante de la estrategia implementada con centicubos donde el niño ha representado una barra con dos centicubos que son el hombre y el burro, otra con 5 centicubos que son los pajaritos, y otra barra de siete centicubos que son las siete niñas. Después, el niño los cuenta todos, pero no ha necesitado juntarlas.

Figura A1.3.2. Estrategia de JT1 en la sesión 3

Más avanzadas las sesiones, esta estrategia mostrará dos variantes. Los niños pueden empezar a contar por la colección más grande o la más pequeña, o incluso no realizar el conteo de una de ellas. En estas sesión, los niños seguían el enunciado e iban colocando los personajes según la aparecían, y no se ha observado ninguna intención en ninguno de ellos de colocar las cantidades de mayor a menor para contarlas de una manera más efectiva. En la imagen anterior, el niño tiene colocadas las 7 niñas primero, pero ha sido causal al juntas todas las barras que tenían sobre la mesa, porque sí que represento primero el señor y el burro, lo único que iba dejando las barras encima de la mesa sin ningún orden.

La estrategia *Juntar todo con cubos encajables formando barras, añadiendo cada colección con contadores iguales a una única, contando de uno en uno* (JT2), consiste en ir añadiendo las cantidades a la anterior, según se van representando. En la Figura A1.3.3 podemos ver como un niño une en una sola barra todos los objetos. En este caso el niño pone primero el hombre, luego añade otro cubo para el burro, luego añade 5 más de los pájaros y finalmente, 7 de las niñas, de tal manera que al final le queda una barra con los 14 bloques. Finalmente, los niños cuentan todo. En esta estrategia, a pesar de ir juntando todas las colecciones en una, puede representarse cada cantidad del problema con objetos diferentes para diferenciarlas. Así, aparecen dos variantes: en la primera no se diferencian las cantidades representadas, los representantes son iguales (JT2); y en la segunda, se representan las cantidades con objetos que tengan alguna diferencia entre ellos. En esta sesión solo aparece estrategias sin diferenciar las colecciones que se van añadiendo. Esto implica que los niños tengan que contar toda la colección, sin poder partir de ningún número.

Figura A1.3.3. Estrategia de JT2 en la sesión 3

La estrategia *Juntar todos con objetos*, es utilizada por un niño para explicar su procedimiento. En este caso, el niño ha representado las cantidades del problema y luego las considera todas juntas y las cuenta, por lo que la clasifico como *Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT3).

Figura A1.3.4. Aplicación de la estrategia JT3 en la sesión 3

Respecto a las variantes de *Juntar todo con representaciones gráficas*, se ha utilizado las que describo a continuación. *Juntar todos con marcas, añadiendo las cantidades a una única colección* implica ir añadiendo a una colección todas las cantidades que aparecen en el problema. Esto se puede hacer distinguiendo dichas colecciones, por el color o forma de la marca, *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección diferenciada a una única,* *contando de uno en uno* (JT4), o poniendo marcas iguales, *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno* (JT5). En la Figura A1.3.5 una niña representa todas las cantidades con corazones, pero encima de los corazones que corresponden al hombre, el burro y los 5 pajaritos ha colocado un icono para distinguirlos. En este caso, el niño representa las cantidades según el orden indicado en el problema, por lo que comienza a contar el total desde la primera cantidad.

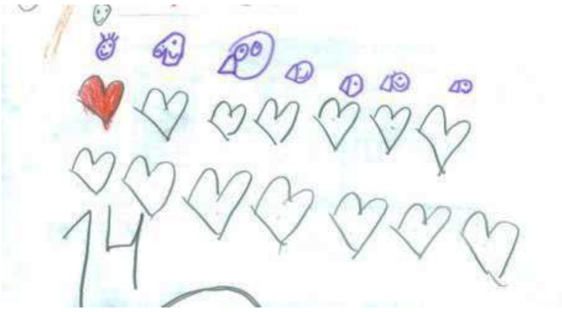


Figura A1.3.5. Estrategia JT4 en la sesión 3

Al diferenciar las cantidades, permite al niño realizar el conteo final desde la cantidad mayor del problema para luego contar a partir de ella las cantidades pequeñas, pero no se ha observado en esta sesión esta variante. Si el niño utiliza en la estrategia *Juntar todos con marcas, añadiendo las cantidades, con marcas iguales* (JT5), no se puede diferenciar cada una de las cantidades y para realizar el conteo final contará todas, independientemente de qué marcas representen a una cantidad u otra. Una representación de esta estrategia se puede observar en la Figura A1.3.6, donde el niño va añadiendo rayas según va leyendo los datos del problema. Las dos imágenes representan el momento en el que nos explica lo que es cada marca, y ordenadamente, nos señala la primera como el hombre, la segunda marca como el burro, las 5 siguientes marcas como los pajaritos y las últimas que quedan, las niñas.

Figura A1.3.6. Estrategia JT5 en la sesión 3

Otra variante de *Juntar todos con marcas* consiste en *representar todas las cantidades de problema por separado*, y finalmente, se consideran en conjunto para contarlas y saber el total de elementos, es decir, *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT6). Se pueden dar dos variantes de esta estrategia, cuando los niños empiezan *a contar desde la primera cantidad de problema* o empiezan a *contar desde la cantidad mayor*, pero en esta sesión, sólo se ha utilizado la variante en la que se empieza a contar desde la primera cantidad del problema, sin establecer un orden previo. Una representación utilizada para esta variante es la que se muestra en la Figura A1.3.7. El resto de estrategias de este tipo no seguían un orden en la representación y conteo de las cantidades.

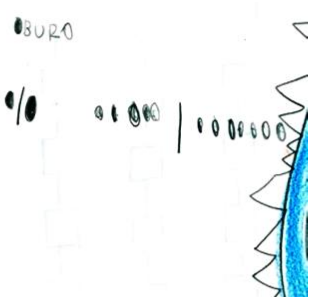


Figura A1.3.7. Representación para la estrategia JT6 en la sesión 3

Hay niños que las representaciones gráficas que utilizan son dibujos de los objetos implicados en el problema, por eso voy a distinguir la variable *Juntar todos con dibujos*. En esta estrategia los niños dibujan las cantidades de objetos utilizando representaciones icónicas de objeto y número (B1) y luego las cuentan todas para saber el resultado. Al igual que las variantes anteriores de las estrategia *Juntar todo*, los niños pueden ir añadiendo las cantidades del problema a una colección única, es decir, *Juntar todo con dibujos, añadiendo cada colección a una única, contando de uno en uno* (JT8); o pueden dibujarlas por separado, y finalmente considerarlas todas juntas para contarlas, es decir, *Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT7). En esta sesión se han dado las dos variantes. La variante JT8 ha sido utilizadas por los niños y en todas ellas han representado y contado las cantidades según el orden del problema. En la Figura A1.3.8, una niña va añadiendo en una fila las cantidades dadas por el problema en el mismo orden.

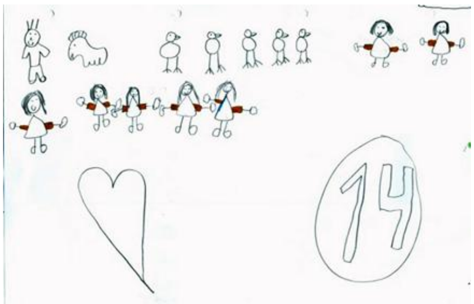


Figura A1.3.8. Representación para la estrategia JT8 en la sesión 3

La variante *Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT7), ha sido utilizada por dos niños en los que dibujaban las colecciones por separado y después realizan el recuento final.

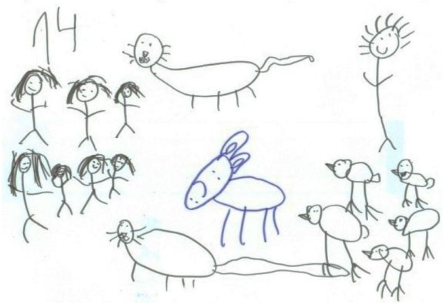


Figura A1.3.9. Representación para la estrategia JT7 en la sesión 9

La variante *Juntar todo con dedos* (JT9), consiste en ir representando las cantidades con los dedos de la mano, y finalmente, contar todos los dedos levantados. En la Figura A1.3.10 un niño pone primero dos dedos como el hombre y el burro, luego añade 5 dedos más de los pajaritos, como lo que tienes siete dedos levantados. Finalmente, añade las 7 niñas. En la tercera imagen se ve como completa la segunda mano y en la última imagen se ve cómo va contando dedos de la primera mano hasta completar las siete niñas. En esta sesión, los niños van levantando dedos siguiendo el orden de las manos, es decir, primero completan una mano y luego otra. Si la cantidad es mayor de 10, consideran que llevan 10 y luego, vuelven a empezar con las dos manos. Suelen identificar la cantidad reconociendo la configuración de sus manos.

Figura A1.3.10. Aplicación de la estrategia de JT9 en la sesión 3

Usando el rekenrek he observado la estrategia que denomino *Juntar todo con el rekenrek, añadiendo cantidades según se representan a una colección única, sin aprovechar la configuración* (JT11). Las cantidades se van representando y añadiendo a la inicial en el rekenrek, y se cuentan todas las bolas seleccionadas. En la Figura A1.3.11, se puede observar como la niña va pasando grupos de cuentas de izquierda a derecha, con el cardinal de las cantidades del problema. En la primera imagen se ve como ha colocado el hombre y el burro a la derecha arriba. La segunda imagen ha colocado 5 bolitas más arriba de los cinco pajaritos y en la última imagen se ven añadidos las 7 niñas y está contando el total. En este caso, las cantidades se han ido añadiendo según se han ido representando por lo que considero que es una variante de juntar a todo, añadiendo las cantidades según se representan.

Figura A1.3.11. Estrategia de JT11 en la sesión 3

Juntar todo con el rekenrek, representando las colecciones separadas sin ayuda de la configuración, considerando juntas las cantidades tras ser representadas sin aprovechar la configuración (JT10). Hay niños que no juntan las cantidades en un solo grupo según las representan, como se puede ver en la Figura A1.3.12, la niña hace los grupos de 2, 5 y 7, pero no los va acumulando según va representando las cantidades. En este problema las dos únicas cantidades que acumulan son el hombre y el burro, pero quizás por ser dos unidades. Para el recuento final, considera todas juntas sin desplazarlas, y también puede ocurrir que una vez representadas las cantidades por separado, se junten y se cuenten. Esta estrategia se ha registrado en 3 casos.

Figura A1.3.12. Estrategia de JT10 en la sesión 3

En esta sesión, un niño utiliza la Tabla 100 para resolver el problema. El uso de este material implica el contar numerales al igual que se hace con objetos o marcas. La estrategia utilizada por el niño es *Juntar todos con Tabla 100* (JT12). En la tabla 100 cuenta desde el “1”, el número de numerales que indica una de las cantidades dadas en el problema. A partir del numeral señalado, se cuenta el número de numerales que indica la otra cantidad del problema. El resultado es el último numeral señalado. En este problema, hay 4 cantidades y el niño que utiliza esta estrategia señala el “1” como la primera cantidad, el hombre; luego señala el “2” porque hay un burro y solo tiene que contar una casilla; a continuación cuenta cinco numerales más, desde el 2, para contar los pájaros, y llega a la casilla “7”; luego cuenta siete numerales más para contar las niñas, y llega a la casilla “14”. En este problema cuentan sucesivamente las cuatro cantidades involucradas en el problema utilizando como ítems a contar, los numerales de la Tabla 100 (ver Figura A1.3.13).

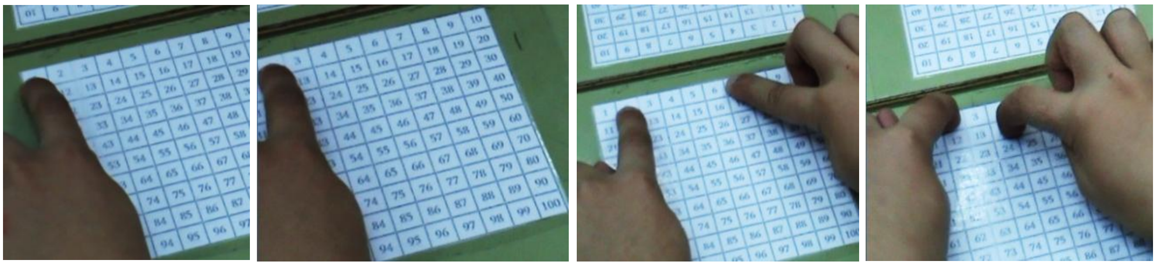


Figura A1.3.13. Estrategia JT12 en la sesión 3

Las frecuencias absolutas de las estrategias adecuadas utilizadas en esta sesión se pueden observar en la Tabla A1.19. De las estrategias identificadas como adecuadas, se encontraron que la gran mayoría de los niños utilizaron la estrategia de modelización directa *Juntar todo* y un solo alumno utilizó la tabla 100 para resolver el problema.

Tabla A1.19. *Estrategias observadas en la sesión 3*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Juntar todos (JT)	Con cubos encajables (JT1)			2
		Añadiendo única colección	Iguales (JT2)	4
		Considerando juntas tras representar (JT1)		8
	Con otros objetos	Considerando juntas tras representar (JT3)		1
	Con marcas	Añadiendo única colección	Diferenciando cantidades (JT4)	1
			Iguales (JT5)	4
		Considerando juntas tras representar (JT6)		7
	Con dibujos (JT7)			1
		Considerando juntas tras representar (JT7)		2
		Añadiendo única colección (JT8)		6
	Con los dedos (JT9)			3
	Con el rekenrek	Considerando juntas tras representar	Sin usar configuración (JT10)	3
		Añadiendo única colección	Sin usar configuración (JT11)	5
	Con Tabla 100 (JT12)			1

1.3.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Estrategias inadecuadas solo hubo un caso que se utilizó la estrategia de modelización *Quitar con objetos*, quizás porque en las dos sesiones anteriores resolvía el problema. Otra dificultad que se ha observado en 3 niños es, no tener en cuenta todas las cantidades. En esta sesión hubo tres casos en los que los niños juntaban los 5 pájaros y las 7 niñas, pero no tenían en cuenta el hombre y el burro.

Figura A1.3.14. Representación de parte de las cantidades en la sesión 3

En todas las sesiones aparecen niños que no resuelven, ya sea porque se distraen o porque no terminan de representar el problema, abandonan. En esta sesión han sido cinco, y cuatro de ellos representan en la hoja de trabajo la solución que escuchan a los compañeros. Esto es importante de cara a las representaciones de la sesión que detallo en el apartado siguiente. El otro niño contestó con el operador de cuantificación "muchos".

Tabla A1.20. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 3*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1) No utilizar todas las cantidades del enunciado (E6)

1.3.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones de esta sesión han destacado por la representación de los personajes involucrados en el cuento. En la Tabla A1.21 se puede observar la frecuencia de cada uno de los tipos. En esta sesión han aparecido dos tipos de representaciones que hasta ahora no se habían usado, la B3 y la C1.

Tabla A1.21. *Representaciones encontradas en la sesión 3*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R)	38 (17, 1, 9, 3, 8)	3 (0 ,0, 1, 0, 2)	
	B1 (I, D)	9 (9,0)	2(0, 2)	
	C1	1		
2	A2	3		
	B2			
	C2			
3	A3		26	16
	B3		1	
	C3		1	10
4	A4		2	5
	B4			
	C4			5

Los niños utilizan mucho los materiales que se dejan encima de las mesas para que ellos elijan y una de las representaciones más habituales es la icónica de número sin representación del tipo de objeto (A1) con los materiales proporcionados, unos con cubos encajables (A1Oc) u otros objetos (A1Oo), y otros con marcas en el papel (A1Gm). En la Figura A1.3.15, aparecen representaciones con distintos materiales utilizados por los niños, que considero la representación A1Oc en caso de los cubos encajables, y A1R, en caso de utilizar el rekenrek.

Figura A1.3.15. Representaciones A1Oc y A1R en la sesión 3

En la Figura A1.3.16 se observa una representación del número icónica sin representación de los objetos (A1) en los puntos azules, que considero A1Gm. También se puede observar una representación simbólica con cifras del número sin representación de los objetos, el “14” (A3).

Figura A1.3.16. Representación A1Gm en las marcas moradas de abajo y A3 en la sesión 3

Sobre los dibujos de los niños que lo hacen en papel, se observa que hay muchos niños que utilizan iconos más que marcas y bolitas para representar a las niñas y pajaritos, son icónica de número y tipo de objeto (B1). También aparece simbólica con cifras sin representación del tipo de objeto para dar la solución. En esta sesión hay distintos tipos de objetos por lo que es lógico que los niños utilicen distintos representantes para cada personaje implicado en el problema (ver Figura A1.3.17). Dentro de cada cantidad, todos los representantes son iguales, por lo que denoto la representación como B1I.

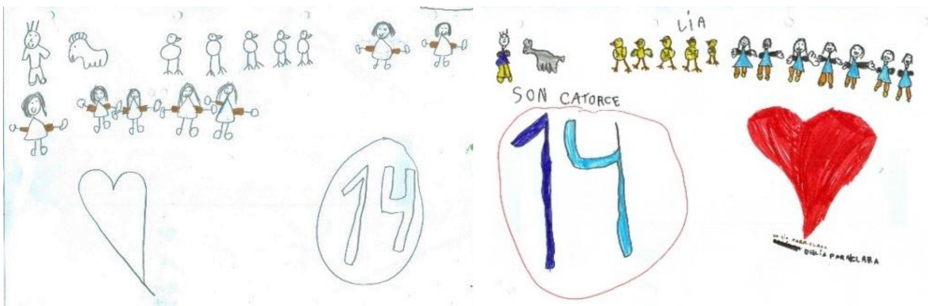


Figura A1.3.17. Representaciones B1I y A3 en la sesión 3

Una niña utiliza puntos como representación icónica del número y simbólica para el tipo de objetos (C1) para resolver el problema en la Figura A1.3.18. Esta representación es la primera vez que se da en el taller. Además utiliza una simbólica con cifras sin representación del tipo de objeto para dar la solución (A3).

Figura A1.3.18. Representaciones C1 Y A3 en la sesión 3

En la siguiente Figura A1.3.19 aparece la hoja de trabajo un niño que utiliza una representación con aspectos simbólicos e icónicos del número sin representación del objeto A2 (las marcas numeradas). También utiliza una representación simbólica con cifras para dar cantidades de los elementos del problema A3 (5, 1, 1, 7) y por último, simbólica con palabras para dar la solución A4 (catorce), además de con cifras A3 (14).

Figura A1.3.19. Representaciones A2, A3, A4 en la sesión 3

En la Figura A1.3.20 se observa otra variante de representación del número con aspectos icónicos y simbólicos sin representación del número (A2) en la que no se ponen marcas, y una representación del número simbólica con cifras sin representación de objetos (A3).

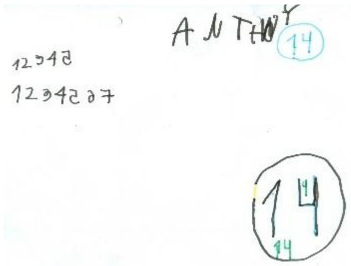


Figura A1.3.20. Representaciones A2, A3 en la sesión 3

En la Figura A1.3.21, aparecen representaciones del número simbólicas con cifras del número y simbólicas de los objetos (C3).

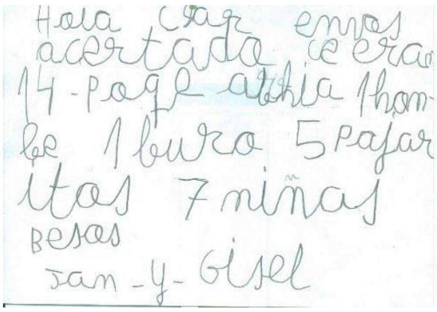


Figura A1.3.21. Representación C3 en una carta en la sesión 3

En la Figura A1.3.22 se observa representación del número simbólica con palabras y simbólica de los objetos (C4).

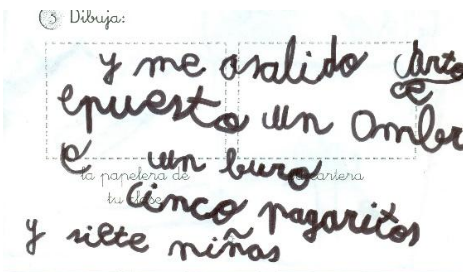


Figura A1.3.22. Representación C4 en una carta en la sesión 3

En la Figura A1.3.23 aparecen representaciones del número simbólicas con cifras del número y simbólicas de los objetos (C3). Representación simbólica con cifras del número e icónica de los objetos (B3) que es la primera vez que aparece en el taller, además de una representación simbólica con cifras del número sin representación de los objetos (A4).

Figura A1.3.23. Representación C3, B3 y A4

1.3.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión analizo las capacidades de las primeras estrategias observadas que suman. Las distintas variantes de la estrategia de *Juntar todo*. Como he comentado anteriormente, distingo dos variantes de esta estrategia, dependiendo si al formar varias colecciones, se van añadiendo a una única colección, o se forman separadas, considerándolas juntas para el recuento final.

Si considero la estrategia Juntar todo en la que voy añadiendo cada colección a una única colección, los niños estarán utilizando la capacidad:

> C27. Añadir una colección de marcas, dibujos, objetos o dedos a una anterior ya representada, formando una única colección, incluso varias veces.

Si las colecciones utilizadas se representan con elementos de distinto color, forma o tipo, pueden distinguirse dentro de esa colección. Esta subvariante se ha denominado *Juntar todo añadiendo a una colección anterior*, otra representada con elementos diferentes para poder distinguirla. Para poder hacer ya hemos numerado la capacidad C16 (Representar varias cantidades distinguiéndolas mediante el color, tipo o posición). Si las colecciones se representan sin distinguirse por alguna característica, todos los elementos estarán en una única colección, sin saber cuál es de cada una de las colecciones representadas. Los niños utilizan la siguiente capacidad.

> C28. Representar varias colecciones sin distinguirlas mediante el color, tipo de objeto o posición.

Esta capacidad toma importancia en procedimientos en los que se tiene que sumar varias cantidades, y para ello se junten en una única colección. Si los niños utilizan la capacidad C28, no pueden distinguir las colecciones iniciales (como JT2). Si los niños utilizan la capacidad C16, podrán distinguirlas, incluso verán grupos que permitan conteo más eficaces como es el conteo a saltos.

En la variante *Juntar todo, considerando juntas las colecciones sin desplazarlas* (como JT1), los niños utilizan la ya mencionada capacidad C16, y a continuación, utilizan la siguiente capacidad:

> C29. Considerar conjuntamente varias colecciones representadas por separado.

Para la estrategia *Juntar a con Tabla 100* (JT12), en la que se van acumulando numerales desde el 1 hasta que se consideran las cuatro cantidades del problema. Los niños necesitan una capacidad en la que vayan añadiendo colecciones de numerales de la Tabla 100 a una anterior.

> C30. Añadir una colección de numerales en la Tabla 100, contando a partir de cualquier numeral, tantos como cardinal tiene esa colección, incluso varias veces.

El grafo de capacidades de los caminos de aprendizaje para la tarea de la sesión 3 se puede ver en la Figura A1.3.24.

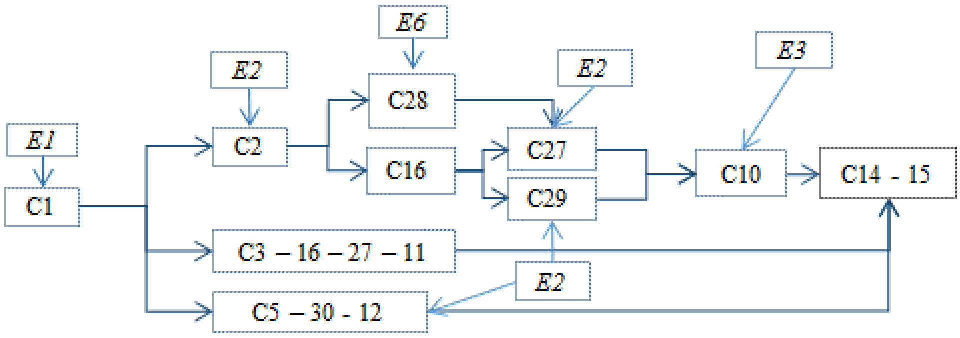


Figura A1.3.24. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 3

La estrategia *Juntar todo con distintos materiales representando colecciones iguales y añadiéndolas a una única colección*, siguen el camino de aprendizaje C1 – C2 – C28 – C25 – C10 – (C14 o C15). Si las colecciones *se representan de tal manera que se distinguen entre ellas, pueden añadirse a una colección* (C1 – C2 – C16 – C27 – C10 – (C14 o C15)), o pueden dejarse *separadas y considerarse juntas para el recuento final* (C1 – C2 – C16 – C29 – C10 – (C14 o C15)).

La estrategia Juntar con los dedos usando su configuración siguen el camino C1-C3 – C16 – C25 – C11 – (C14 o C15), que se diferencia de los anterior en formas las colecciones con patrones (C3), y determinar la cantidad total utilizando también el patrón de las manos (C11), pero las distintas colecciones se representan con grupos de dedos diferenciados por su posición (C16), y se van añadiendo a los dedos ya representados (C25).

La estrategia Juntar todo con Tabla 100 sigue el caminos C1 – C5 – C30 – C12 – (C14 o C15).

1.4. Sesión 4

El problema de la cuarta sesión (18 de noviembre) es el primer problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales con la incógnita en el total de elementos, y tanto el número de grupos como el número de elementos por grupo, son menores que 10. Al ser un problema de multiplicación planteando en un nivel que curricularmente no corresponde, la observación de las estrategias de resolución de los niños es primordial.

Tabla A1.22. *Características principales de la cuarta sesión*

Problema	El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?
Tipo de problema	Problema de estructura multiplicativa de grupos iguales con el total de elementos desconocido.
Cantidades	Menores que 20
Materiales	Tabla 100, Rekenrek, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, folios.
Fecha	18 de Noviembre
Cuento	El Gato Tragón
Asistentes	28 (de 28 de 1º A) y 24 (de 26 de 1º B)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, Maestra con experiencia CGI y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotos y narración de la investigadora.

1.4.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión seguimos con la misma dinámica que la anterior sin grandes cambios. Cada niño recibe la carta de Clara fotocopiada que lee individualmente. La carta que les entregamos es manuscrita y vemos que les cuesta entender la letra, por lo que decidimos, las tutoras, Beatriz y yo, entregar para la próxima sesión un folio con el enunciado con una letra cursiva impresa por ordenador. Tras la lectura de la carta de forma individual, varios alumnos leen la carta en alto. Las tutoras insisten que deben esforzarse en explicar a Clara cómo lo resolvemos para que lo pueda entender.

Realizamos el registro igual que la sesión anterior, y seguimos intentado que los niños expliquen mejor sus estrategias en la entrevista individual, en la puesta en común y en la carta de respuesta a Clara. En el grupo B, la tutora y Beatriz recogen datos en las hojas de registro, y yo grabo en video las entrevistas.

En esta sesión, los niños han comenzado a preguntarse unos a otros en la puesta en común, mostrando interés por estrategias diferentes a las propias.

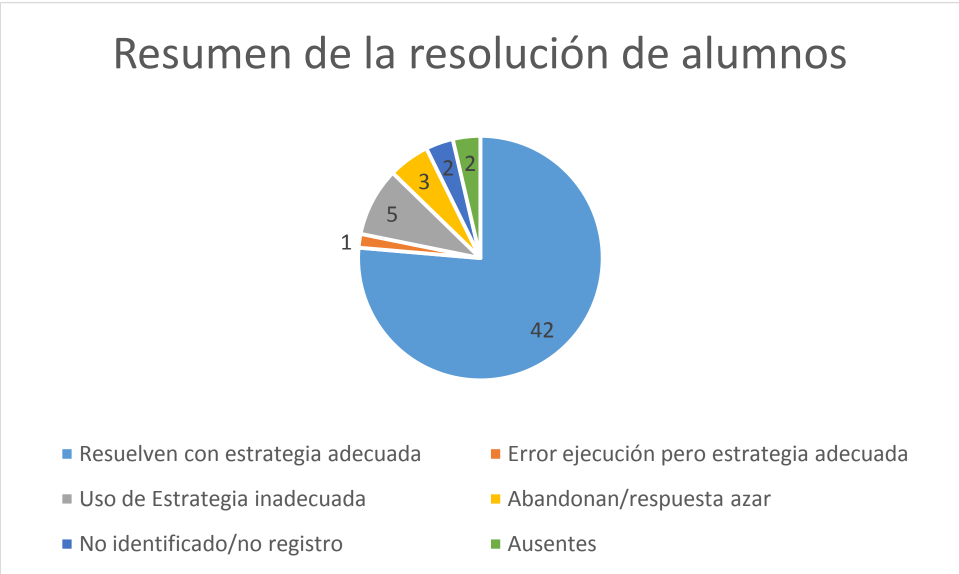


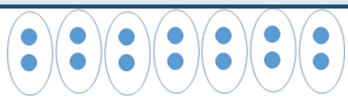
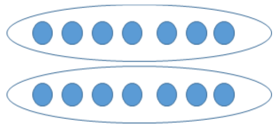
Figura A1.4.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 4

A pesar de ser el primer problema de estructura multiplicativa, los niños han dado sentido al problema y han sido capaces de resolverlo en su gran mayoría. De los 52 asistentes, 41 alumnos han dado una respuesta correcta al problema. Ha habido 5 estudiantes que han utilizado estrategias que suman el número de grupos y el número de elementos por grupo, y uno de ellos utiliza después una estrategia adecuada, dando finalmente la solución correcta.

1.4.2. Estrategias observadas

El problema de esta sesión es un problema de estructura multiplicativa de grupos iguales. Para afrontar el análisis de las estrategias es importante remarcar que en los problemas de multiplicación de agrupamiento, hay dos tipos de cantidades, una cantidad se refiere al número de grupos, y otra cantidad es el número de elementos que hay en cada uno de los grupos. Se espera que los niños utilicen variantes de la estrategia de *Agrupamiento* (A), según lo visto en el marco teórico. La representación que corresponde a la estructura semántica de este problema corresponde a hacer tantos grupos como indica la cantidad número de grupos, y cada grupo debe tener tantos elementos como indica la cantidad elementos por grupo. La mayoría de los alumnos han utilizado esta agrupación. Sin embargo, ha habido 4 casos que han agrupado de forma diferente. Han hecho tantos grupos como indica la cantidad de elementos por grupos, y cada grupo tiene tanto elementos como la cantidad de número de grupos indica. En la Tabla A1.23, reflejo la diferencia de agrupamiento, en un problema que tiene n grupos con m elementos en cada grupo.

Tabla A1.23. *Tipos de Agrupamiento n grupos con m elementos en cada grupo*

Estrategia	*Descripción*	*Representación en este problema*
Agrupamiento haciendo n grupos	Se representan n grupos, con m elementos en cada uno, tal como indica la situación	
Agrupamiento haciendo m grupos	Se invierte el papel del número de grupos por los elementos por grupo: se representan m grupos, con n elementos en cada uno	

Las estrategias observadas basadas en *Agrupamiento haciendo n grupos*, han mostrado que la cantidad número de grupos puede ser o no representada, al igual que los elementos por grupo. Por ello, detallo variantes de esta estrategia con *Agrupamiento sin representante de la cantidad número de grupos*, *Agrupamiento representando la cantidad número de grupos*, y *Agrupamiento representando la cantidad número de grupos, pero sin representar los elementos de cada grupo*. A continuación voy a describirlas, incluyendo las variantes con los distintos materiales.

Comienzo con las estrategias de *Agrupamiento sin representante de grupo*. Los niños pueden utilizar cubos encajables para representa los grupos, estrategia que denomino *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A1). Es una estrategia de modelización directa en la que los niños representan los grupos solamente con el número de elementos por grupo que viene en el enunciado, no hay representante del grupo en sí. Es decir, en este problema que hay 7 grupos (niñas) con 2 elementos en cada grupos (brazos), los niños hacen 7 grupos con 2 elementos en cada grupo. Finalmente, se realiza el recuento de todos los objetos. En la Figura A1.4.2 se puede observar como un niño realiza 7 grupos de 2 contadores cada uno y luego los cuenta todos.

Figura A1.4.2. Agrupamiento A1 en la sesión 4

Al utilizar esta estrategia, hay estudiantes que acumulan en una barra todos los cubos encajables. A esta variante la denoto como *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno* (A2). En la Figura A1.4.3 se puede ver a una niña realizado esta variante.

Figura A1.4.3. Agrupamiento A2 en la sesión 4

Las variantes de esta estrategia de *Agrupamiento sin representar los grupos* que se utilizan representaciones gráficas para su resolución, solo se han dado utilizando marcas, *Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A3), los estudiantes no han dibujado iconos de brazos sin sus niñas. Esta estrategia de modelización es similar a la anterior (A1), pero se utilizan marcas en el papel para representar cada uno de los grupos con sus elementos por grupo. En la Figura A1.4.4, un niño dibuja 7 grupos de dos brazos con dos rayitas “/ \” y luego los cuentan todos.

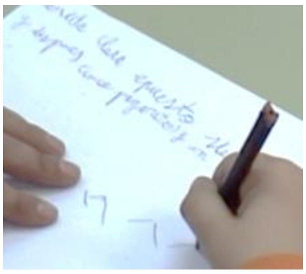


Figura A1.4.4. Agrupamiento con marcas A3 en la sesión 4

También se utiliza los dedos de las manos para modelizar este problema con la variante *Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración* (A4). Hay niños que utilizan los dedos para ir construyendo los grupos añadiendo el número de elementos por grupo cada vez que se considera un grupo. En la Figura A1.4.5, un niño va añadiendo 2 dedos cada vez que cuenta una niña hasta completar las siete niñas.

Figura A1.4.5. Agrupamiento con dedos A4 en la sesión 4

La variante con el rekenrek, *Agrupamiento con el rekenrek, sin representar la cantidad número de grupos, contando de uno en uno* (A5), es una estrategia de modelización similar a A1, pero se utilizan las bolas del rekenrek para representar cada uno de los grupos con sus elementos por grupo. En esta sesión una niña coloca, a lo largo de las dos filas del rekenrek, siete grupos con dos bolas en cada uno, y cuenta el total de bolas.

Un niño intenta la estrategia *Agrupamiento con Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa un grupo* (A6), aunque no llega a terminar. Se puede observar esta estrategia utilizando la Tabla 100 en la Figura A1.4.6, por cada niña se señalan dos numerales hasta llegar a contar 7 grupos de dos numerales. En la figura solo se ve hasta las 3 primeras niñas.

Figura A1.4.6. Estrategia A6 en la sesión 4

Quiero señalar que si en este procedimiento, el niño solo utiliza la Tabla 100 para llevar el registro de los 7 grupos que tiene que contar, entonces voy a considerarla más próxima a una estrategia de conteo. El niño iría señalando el 1, y enunciando “2 brazos”; señala el 2, 4 brazos; señala el 3, 6 brazos; señala el 4, ocho brazos; señala el 5, 10 brazos; señala el 6, 12 brazos; señala el 7, 14 brazos. Esta estrategia la denominaré *Conteo a saltos utilizando la Tabla 100*. Esta estrategia no se ha dado en esta sesión.

Hasta ahora, las estrategias descritas no incluyen representante de la cantidad de número de grupos, ya que quedan representados al poner grupitos con el número de elementos por grupo. Las estrategias que muestro a continuación sí contienen un representante de la cantidad número de grupos, y luego los representantes de cada grupo, repetidas tantas veces como grupos hay. Son variantes de la estrategia *Agrupamiento haciendo n grupos, representando los grupos*. La utilización de cubos encajables con esta representación origina la estrategia *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A7). Es una estrategia de modelización directa en la que se representa primero la cantidad de número de grupos, y después se representan grupitos repetidos, uno por cada grupo, con el número de elementos por grupo que indica el problema. En la Figura A1.4.7, una niña coloca 7 objetos como representante de las 7 niñas del problema, y por cada uno de ellos dos contadores que son los brazos. Para saber la solución del problema hay que contar solo los representantes de los brazos, de los elementos por grupo.

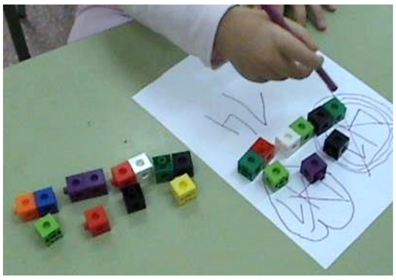


Figura A1.4.7. Estrategia A7 en la sesión 4

Los alumnos pueden hacer grupos con cubos encajables pero no formando barras, y otros materiales, como la plastilina, que pueden ellos mismos fabricar sus contadores. Las estrategias que utilizan objetos que no son los cubos encajados, las estoy denominando *con otros objetos*. En este caso, *Agrupamiento con objetos, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A8). El alumno A51 hace 7 bolas de plastilina como representantes de las 7 niñas, por lo que considero que las 7 niñas están representadas, es decir, los grupos. A continuación, divide en dos cada bola que plastilina que representa la niña, y así consigue los dos brazos de cada niña. Aunque no están representados a la vez las niñas y los brazos, sí la he considerado dentro de esta categoría.

Las estrategias realizadas con representaciones gráficas han sido las más utilizadas (ver Tabla A1.24). Tanto con marcas, *Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno* (A10), como *con dibujos* de niñas, es decir, *Agrupamiento con dibujos, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno* (A9). Estas estrategia son similares a la anterior, pero utilizando marcas o dibujos. En la Figura A1.4.8, un niño representa con numerales las niñas y luego va dibujando y contando dos puntos al lado de cada numeral. En el apartado de representaciones, describiré las distintas representaciones que han utilizado los niños en esta estrategia. En la imagen de la derecha, un niño utiliza una representación icónica de las niñas y escribe la secuencia de numerales sobre los brazos.

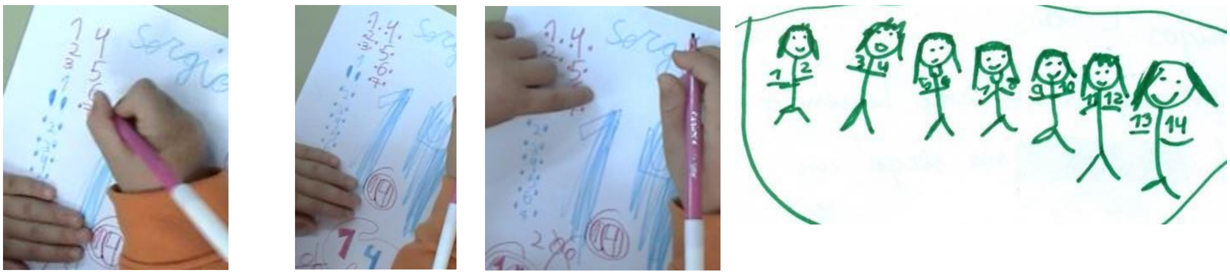


Figura A1.4.8. Estrategia A9 y A10 en la sesión 4

Un caso curioso es que, un niño utiliza sus dos manos para resolver el problema, como si fueran las dos manos de las niñas, y el niño lo que resuelve el problema, contando 7 veces sus dos manos. Esta estrategia la voy a denominar *Agrupamiento representado con su propio cuerpo un grupo, y contarlo reiteradamente, tantas veces como grupos hay* (A14).

En esta sesión se ha observado una estrategia en la que se representan la cantidad de número de grupos, en este caso 7 niñas, y cada representante se cuenta dos veces. La estrategia la denoto como *Agrupamiento representando la colección número de grupos, pero sin representar los elementos de cada grupo,* y consiste en representar con un objeto o dibujo cada grupo, y realizar un conteo figurativo de los elementos por grupos en cada grupo. Esta estrategia se ha dado utilizando objetos, como la plastilina, centicubos o multicubos, y con el rekenrek. En las siguientes Figuras 4.4.9 y 4.4.10, se observa que las niñas solo representan el número de grupos (7) y cuentan cada uno de ellos dos veces. En la Figura A1.4.9, una niña cuenta a la derecha y a la izquierda de cada bola de plastilina. En este caso la estrategia la categorizo como *Agrupamiento con objetos, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno* (A12). Esta estrategia también ha sido utilizada con los cubos encajados, es decir, *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno* (A11), donde un estudiante contaba dos agujeros de los cubos encajables en cada uno de los siete cubos que representan a las niñas.

Figura A1.4.9. Estrategia A12 en la sesión 4 con plastilina

En la Figura A1.4.10, otra niña cuenta cada una de las 7 bolas del rekenrek, dos veces. A esta variante la voy a denotar *Agrupamiento con rekenrek, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno* (A13).

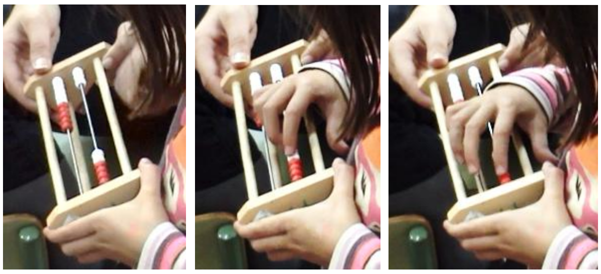


Figura A1.4.10. Estrategia A13 en la sesión 4

Una forma diferente de representar el agrupamiento ha sido invirtiendo el papel de número de grupos y elementos por grupo, la variante que he denominado anteriormente, *Agrupamiento haciendo m grupos*. En este caso, al tener 7 grupos con 2 elementos cada uno, el agrupamiento se hace haciendo 2 grupos con 7 elementos en cada uno. Esta estrategia ha sido poco frecuente, como se puede ver en la Tabla A1.18, pero describo las estrategias observadas. Se ha utilizado tanto con cubos encajables, *Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con cubos encajables* (A15), como *Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con objetos.* (A16), como bolas de plastilina. Son estrategias de modelización directa en la que los niños representan un grupo de objetos por cada elemento que contiene un grupo de la estructura multiplicativa, con tantos objetos como número de grupos hay. Es decir, en este problema hay 7 grupos (las niñas) con 2 elementos en cada grupo (brazos), por lo que se representa un grupo de 7 objetos por un brazo de cada niña y otro grupo de 7 por del otro brazo. Los niños hacen 2 grupos de 7 elementos. En la Figura A1.4.11 un niño hace dos filas de 7 con bolitas de plastilina.

Figura A1.4.11. Estrategia A16 en la sesión 4 con plastilina

Un alumno utiliza, con ayuda de la tutora del grupo, *Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con rekenrek* (A17). Similar a la estrategia anterior A16, pero utilizando el rekenrek. En la Figura A1.4.12, un niño pone en el rekenrek 7 bolas en cada fila, representando los siete brazos izquierdos y, los 7 brazos derechos de las niñas.

Figura A1.4.12. Agrupamiento A17 con el rekenrek en la sesión 4

En la puesta en común, una alumna explica el *Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa un grupo* (A18). Se cuenta primero siete numerales y luego otros siete: Dice "hay siete niñas, ¿no?... y cuento otras siete… porque cada niña tiene dos brazos" (Figura A1.4.13).

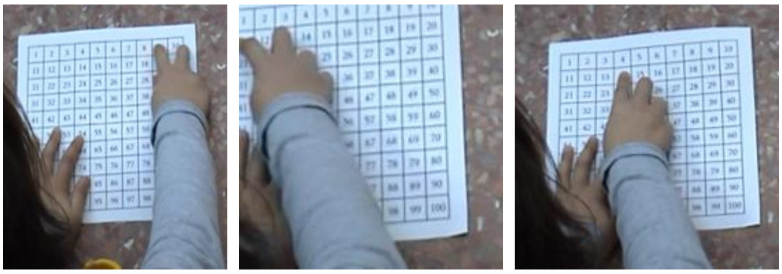


Figura A1.4.13. Agrupamiento A18 en la sesión 4

Al igual que el uso anterior de la Tabla 100, si en esta estrategia, el niño señala directamente el "1" y dice, "siete"; y luego señala el "2", y dice "catorce", el procedimiento estaría más cerca de la estrategia de contar a saltos, donde el rastro de los grupos lo permite los numerales de la Tabla 100 y la denominaría *Conteo a saltos por el número de elementos por grupos con Tabla 100*. Esta estrategia no se ha utilizado en esta sesión.

En esta sesión, hay un registro de un niño que ha hecho 7 + 7. Esta estrategia es la recuperación de un *Hecho numérico, invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, como suma reiterada* (HN2). Al ser un problema de multiplicación, el hecho numérico básico correspondiente es 7 × 2, que implica un conocimiento formal de la multiplicación.

En la siguiente Tabla A1.24 se puede observar la frecuencia absoluta de las estrategias observadas en esta sesión. Las estrategias de *Agrupamiento con gráficos sin representante de grupos* (A9 y A10) han sido las más frecuentes, en la que los niños representaban a las 7 niñas con sus brazos, incluso han representado los personajes implicados, incluso el Gato Tragón.

Tabla A1.24. *Estrategias adecuadas en la sesión 4*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Agrupamiento sin representante de grupo	Con cubos encajados (A1)			5
		Añadiendo a una única colección	Colecciones iguales (A2)	2
	Con marcas (A3)			2
	Con rekenrek (A5)			2
	Con los dedos (A4)			2
	Con Tabla 100 (A6)			1
Agrupamiento con representante de grupo	Con cubos encajados (A7)			3
	Con objetos (A8)			1
	Con dibujos (A9)			11
	Con marcas (A10)			9
Agrupamiento sin elementos por grupo	Con cubos encajados (A11)			2
	Con objetos (A12)			1
	Con el rekenrek (A13)			2
Agrupamiento representando solo un grupo (A14)				1
Agrupamiento por los elementos por grupo	Con cubos encajados (A15)			1
	Con objetos (A16)			1
	Con rekenrek (A17)			1
	Con Tabla 100 (A18)			1
Hechos numéricos		Suma reitera nº grupos, tantas veces como elementos tienen (HN2)		1

1.4.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

La estrategia de modelización directa *Juntar todos con cubos encajables* (JT1) aparece como estrategia inadecuada. En la Figura A1.4.15, una niña representa las siete niñas con una barra de centicubos y dos brazos con otra barra de centicubos, después justa las dos barras, y cuenta todos los centicubos. Esta estrategia la utilizaron 4 niños, aunque uno de ellos más tarde, utilizó una estrategia adecuada.

Figura A1.4.15. Estrategia JT1 inadecuada en la sesión 4

También se ha dado la estrategia *Juntar todo con la Tabla 100* (JT12), donde un estudiante cuenta los 7 primeros numerales, luego cuenta dos numerales más, y finalmente cuenta los numerales desde el 1 hasta el 9. En la Figura A1.4.16 se puede observar el niño explicándola en la puesta en común.

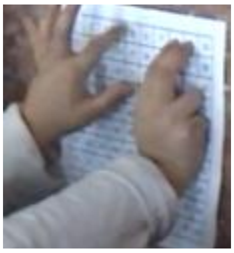


Figura A1.4.16. Estrategia JT12 inadecuada para este problema

También hay un caso al escribir el numeral con cifras resultado en el que se escribe “41” en vez de “14” (ver Figura A1.4.17).

Figura A1.4.17. Dificultad en la escritura del numeral con cifras en la sesión 4

En este problema aparecen cantidades de distinto orden, los grupos, y el número de elementos por grupos. Si no se entiende bien la diferencia, los niños pueden contar los representantes de los grupos como el total de elementos (E8), o intercambiar el papel de las dos cantidades (E9).

En la siguiente Tabla A1.25 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.25. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 4*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
Dificultad en la escritura de los numerales	Escritura errónea de números de dos cifras (E7)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Contar el número de grupos (E8)
	Confundir número de grupos y elementos por grupo (E9)

1.4.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

En este problema hay dos cantidades a representar, las niñas y los brazos, y existen como hemos visto, distintas estrategias para modelizar el problema, prescindiendo de una o de otra. En la Tabla A1.26 muestro las frecuencias de las representaciones observadas en la sesión, para representar los grupos y para representar los elementos por grupo, ya que en las representaciones de resolución, aparecen las frecuencias de las representaciones utilizadas para los grupos, si es que han sido representados, y de las representaciones utilizadas para los elementos de los grupos.

Tabla A1.26. *Representaciones encontradas en la sesión 4*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R, B10)	10 (2, 2, 4, 0,2)	28 (14, 2, 7, 2,3)	0	
	B1 (I, D, C)	14 (10,4,1)	14 (10,4,1)	0	
	C1				
2	A2	1	2		
	B2		1		
	C2				
3	A3			23	21
	B3				
	C3			1	11
4	A4			4	7
	B4				
	C4				2

Como representaciones icónicas de número sin representación de tipo de objeto (A1) con objetos, hemos visto que los niños han representado las cantidades de tres formas diferentes, solo los brazos, las niñas con sus dos brazos, y solo las niñas figurándose los brazos en cada una de las niñas (Figura A1.4.18). En la imagen de la izquierda solo aparece representación de los elementos, en la imagen del centro se categoriza representación de grupos y de los elementos. En la imagen de la derecha, solo se representan los grupos. En las dos primera imágenes, las representaciones de los elementos por grupos y de los grupos están realizadas con cubos encajables (A1Oc). En la estrategia de la izquierda, al representarse solo los elementos por grupos de todos los grupos, solo contabiliza en la columna "Resolución (elementos)". En la imagen del centro, al estar representados los grupos y los elementos con cubos encajables, esta representación contabilidad en las dos columnas "Resolución (grupos)" y "Resolución (elementos)". En la imagen de la derecha, solo se representan grupos con plastilina, por lo que contabiliza en la columna de "Resolución (grupos)" como A1Oo.

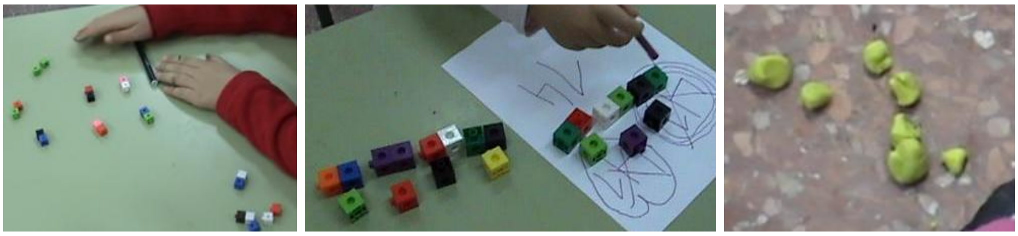


Figura A1.4.18. Diferentes representaciones A1Oc y A1Oo en la sesión 4

Representaciones A1 con marcas (A1Gm) son las que se pueden ver en la Figura A1.4.19, en la imagen de la izquierda no se dibuja las niñas, los grupos, solo se dibujan los brazos. En la imagen de la derecha, las bolas son las niñas, y lo que parecen alas, son las manos.

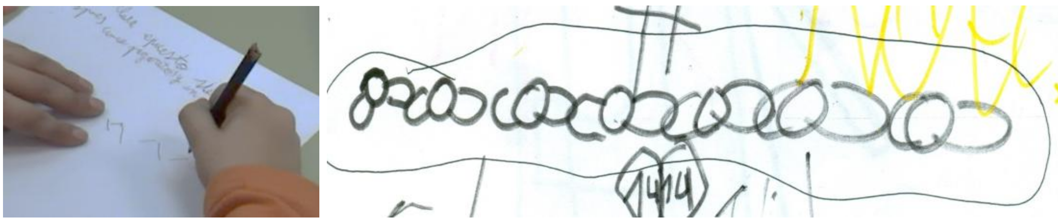


Figura A1.4.19. Representaciones A1Gm en la sesión 4

En esta sesión muchos niños dibujaron las siete niñas o incluso los 7 brazos para poder contarlos. Esta representación la categorizo como icónica de número y de tipo de objeto (B1). En la Figura A1.4.20 se puede observar este tipo de representaciones. En la imagen de la izquierda, las niñas se dibujan junto con sus brazos, y en la imagen de la derecha, una niña representa las 7 niñas sin los brazos y los va colocando debajo para después contarlos. En ambas, las representaciones son iguales (B1I). Además, en la imagen de la derecha, hay también una representación simbólica con cifras del número su simbólica del tipo de objeto (C3).

Figura A1.4.20. Representaciones B1I en la sesión 4

Una variante que ya hemos comentado de esta representación es representar cada unidad de diferente forma como muestra la Figura A1.4.21 (B1D). Se dieron 5 casos en los que los niños dibujan cada niña diferente.

Figura A1.4.21. Representaciones B1D con dibujos distintos en la sesión 4

En el tipo de representación icónica de número y tipo de objeto, he incluido la representación de un estudiante que toma como su propio cuerpo como representante de una niña, y cuenta reiteradamente, 7 veces, sus dos manos (B1C).

En la siguiente Figura A1.4.22, la cantidad de niñas están representadas de forma icónica de número y tipo de objeto (B1), y los brazos están representados con aspectos simbólicos e icónicos del número pero también están representado el tipo de objeto de forma simbólica (B2).

Figura A1.4.22. Representaciones B1I de las niñas y B2 los brazos en la sesión 4

Otra representación a destacar es la que se ve en la Figura A1.4.23. En este caso las niñas se representan con aspectos icónicos y simbólicos (1, 2, 3, 4…) sin representación del tipo de objeto (A2), y los brazos es una representación icónica del número sin representación del objeto (A1Gm). Además aparecen representación simbólica con palabras (catorce) y representación simbólica con cifras (14) sin representación del tipo de objeto.

Figura A1.4.23. Representaciones A1Gm para los brazos, A2, para las niñas, A3 y A4 para la solución en la sesión 4

Algunos niños representaron hasta el Gato Tragón (Figura A1.4.24), ya sea con objetos como con dibujos hechos en las hojas de trabajo.

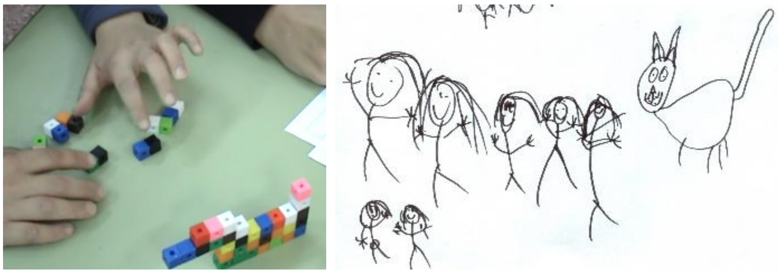


Figura A1.4.24. Representaciones de los personajes en las sesión 4

1.4.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Para utilizar las estrategias vistas los niños tienen que utilizar las capacidades que, a continuación describo.

Para la estrategia de *Agrupamiento* de modelización directa, hay dos cantidades como datos que son el número de grupos y el número de elementos por grupo, son dos cantidades de diferente naturaleza y hay niños que no necesitan representarlas todas. Por lo tanto, en una situación de grupos iguales, aparecen las siguientes capacidades.

C31. Distinguir unidades compuestas de unidades simples, por ejemplo, en un problema de grupos iguales, distinguir, el número de grupos de los elementos por grupo.

C32. No representar la cantidad de número de grupos en un problema de grupos iguales.

C33. Representar la cantidad de número de grupos y la cantidad de número de elementos por grupos en un problema de grupos iguales.

C34. Representar solo el número de grupos en un problema de grupos iguales.

Ahora hay que construir los grupos iguales. Dependiendo del material, distingo si utilizan contadores individuales por separado, ya sea representaciones gráficas, cubos encajables, otros objetos o incluso, bolas en el rekenrek colocadas en grupos separados.

C35. Formar un número de grupos con la misma cantidad de objetos, marcas o dibujos, incluso bolas del rekenrek.

C36. Formar un número de grupos con la misma cantidad de dedos o bolas del rekenrek, o cualquier patrón, añadiéndose a la anterior, según se representan.

C37. Formar un número de grupos con la misma cantidad de numerales en la Tabla 100, añadiendo al anterior, según se representan.

Estos grupos se pueden representar separados o juntos en una misma colección. Para representarlos separados se debe utilizar la capacidad C16, donde la posición de los grupos hace que estén diferenciados. Puede ocurrir que se añadan unos grupos a una única colección. Si se ha mostrado la capacidad C16, cada grupo se podrá diferenciar aun estando en la misma colección. Pero si se utiliza la capacidad C28, donde los grupos serían iguales, al añadirlos no se van a poder distinguir. Esto tiene implicaciones en la evolución de las estrategias, ya que si los grupos se pueden distinguir al considerarlos todos juntos, las estrategias pueden evolucionar a utilizar conteo a saltos.

Si se representa la cantidad de número de grupos, hay que establecer una relación entre el representante de cada grupo, con la colección que representa el número de elementos de ese grupo. Se necesita la capacidad:

C38. Representar la relación uno a muchos entre los grupos y los elementos por grupo.

También se puede representar el número de grupos, sin los elementos por grupo, y contar la colección que representa el número de grupos, tantas veces como elementos por grupo hay.

C39. Determinar la cantidad total de elementos de n grupos, representada sola la cantidad de número de grupos, realizando un conteo figurativo de los elementos que hay en cada grupo.

Un niño ha representado un grupo y ha contado tantas veces el grupo como número de grupos hay.

C40. Representar un solo grupo.

C41. Determinar la cantidad total de elementos de n grupos, contando n veces la representación de un solo grupo, en un problema de grupos iguales con n grupos y m elementos por grupo.

Una estrategia que se ha utilizado es hacer grupos pero no con el número de elementos que indica el problema, sino con el número de grupos. La propiedad conmutativa de la multiplicación permite realizar este cambio de papel de los cantidades, pero en este caso los niños, que siguen estrategias de modelización directa, no están interpretando bien cuál es la cantidad de grupos. Aún así, la he incluido en estrategias adecuadas ya que se puede pensar como la cantidad de brazos izquierdos y la cantidad de brazos derechos.

C42. Intercambiar el papel de número de grupos y elementos por grupo.

Para la estrategia *Recuperación de hecho numérico básico aditivo*. 7 + 7 = 14, los niños han tenido que usar la capacidad C42, y además:

C43. Interpretar la situación de grupos iguales como suma de todos los grupos.

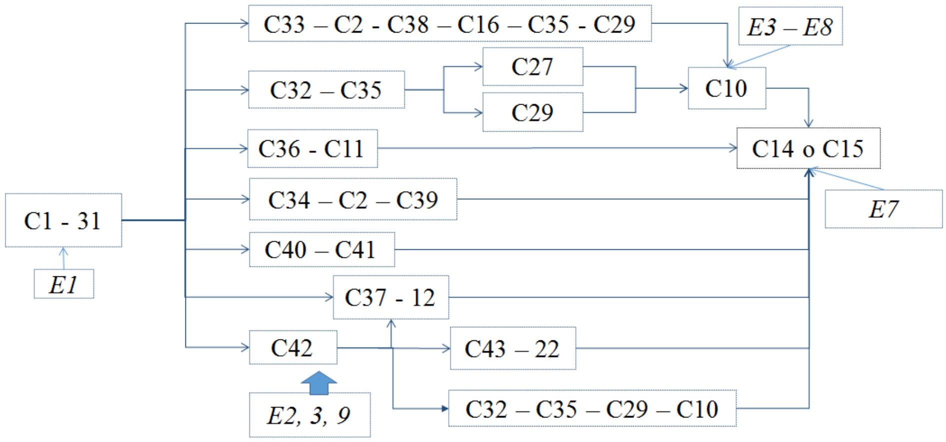


Figura A1.4.25. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 4

La complejidad del grafo va en aumento, según la estructura del problema. La estrategia en la que se representa la cantidad número de grupos, los elementos por grupo de cada agrupo y se asocia a la primera cantidad y se cuenta todo, necesita las capacidades C1 – C31 - C33 – C2 - C38 –C16 – C35 –C29 – C10 - (C14 o C15).

Las estrategias donde no se representa la cantidad número de grupos, pueden representar las cantidades por separado con contadores individuales considerando todas juntas para contar, que necesita de las capacidades C1 – C31 - C32 - C16 – C35 –C29 – C10 - (C14 o C15); pueden ir añadiéndose a una colección y contarse toda, C1 – C31 – C32 - C28 – C35 – C27 – C10 - (C14 o C15); añadiendo dedos según se representan y reconociendo la cantidad por su configuración, C1 – C31 – C32 - C16 – C36 – C11 - (C14 o C15); o utilizando la Tabla 100, C1 – C31 – C32 - C16 – C37 – C12 - (C14 o C15).

La estrategia en la que se representan solo la cantidad de grupos y se hace un recuento final figurativo de los elementos por grupo de todos los grupos, necesita de las capacidades C1 – C31 - C34– C2 - C37 - (C14 o C15).

La capacidad C40 implica intercambian el papel de los grupos por elementos por grupo. Partiendo de este paso, ha habido niños que han seguido ejecutando la estrategia de agrupamiento sin representante de grupo con distintos materiales, C1 – C31 – C42 – C32 – C16 – C35 –C29 – C10 - (C14 o C15); con Tabla 100, C1 – C31 - C42 – C32 - C16 – C37 – C12 - (C14 o C15), y finalmente, la recuperación del hechos numérico 7 + 7, donde se debe dar la capacidad C41 de ver la situación de grupos iguales como suma reiterada, C1 – C31 – C42 – C43 – C22 - (C14 o C15).

Finalmente, el caminos de aprendizaje que muestra las capacidades para representar un solo grupo, y contarlo tantas veces como grupos hay es C1 – C40 – C41 - (C14 o C15).

1.5. Sesión 5

El problema de esta sesión se plantea como el primer problema de estructura multiplicativa de grupos iguales de división partitiva. Hay algo importante a destacar y es que en el enunciado no se ha indicado que el reparto deba ser equitativo, por lo que puede darse dos interpretaciones del tipo de situación. La primera, como acabo de indicar, es que se trata de un problema de división partitiva si se considera que los dos niños (del problema) deben tocar al mismo número de buñuelos. Cabe la posibilidad de que el reparto de los pasteles no sea equitativo, solución que debería ser igualmente buena porque el enunciado no contiene ninguna expresión en la que se indique un reparto equitativo. Esta segunda interpretación implica un problema de estructura aditiva, de combinación con ambas partes desconocidas dado el total, los estudiantes pueden resolverlo dando diferentes descomposiciones. De nuevo las estrategias de los niños serán de gran interés.

Tabla A1.27. *Características principales de la quinta sesión*

Problema	Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?
Tipo de problema	Dos posibilidades • Estructura multiplicativa, grupos iguales de división partitiva • Estructura aditiva, combinación con las dos partes desconocidas
Cantidades	Menores que 20
Materiales	Tabla 100, Rekenrek, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, folios, y barras y unidades de los bloques de base 10 de Dienes.
Fecha	25 de Noviembre
Cuento	Un regalo diferente
Asistentes	28 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, Maestra con experiencia CGI y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.5.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión no se recibe carta sino un video de Clara en el que agradece a los niños su ayuda y les envía un cuento nuevo “Un regalo diferente”, y les plantea un nuevo problema. Hoy se incluyen, entre los materiales, las unidades y decenas de los bloques de base 10 de Dienes, que se reciben como regalo de Clara.

Tras ver el video de Clara, la tutora abre el regalo de Clara, los bloques de base 10, y recuerda que en clase han presentado lo que era la decena como un grupo de 10 unidades. El material se incorpora a las mesas de trabajo como un material más.

En la resolución, los niños comienzan cogiendo el material nuevo pero al no conseguir como representar el problema con las decenas, terminan utilizando solo las unidades. La tutora del grupo B ha ayudado a algunos alumnos utilizando un dibujo de los 18 pasteles y marcando la mitad, que se ve reflejado en algunas hojas de trabajo. Los niños han tendido a hacer dos grupos iguales, seguramente por la ayuda de las tutoras.

En el grupo A, se dedica mucho tiempo a la resolución individual y no da tiempo hacer la carta final, por lo que se le pide a los niños que van resolviendo que la escriban. De este grupo no habrá cartas escritas en grupo.

Las tutoras van desenvolviéndose mejor en los talleres y para la próxima sesión decidimos liberar a las maestra CGI.

En las Figura A1.5.1 se recoge las frecuencias absolutas de la resolución de los niños. Ha habido 30 estudiantes que han elegido una estrategia adecuada, y dos de ellos no han dado la solución correcta por no terminar de repartir los buñuelos, algo complicado porque coincide que han utilizado reparto con gráficos. De los nueve estudiantes que han elegido una estrategia inadecua, cuatro cambiaron su estrategia y utilizaron una adecuada. Ha habido 9 alumnos que han abandonado.

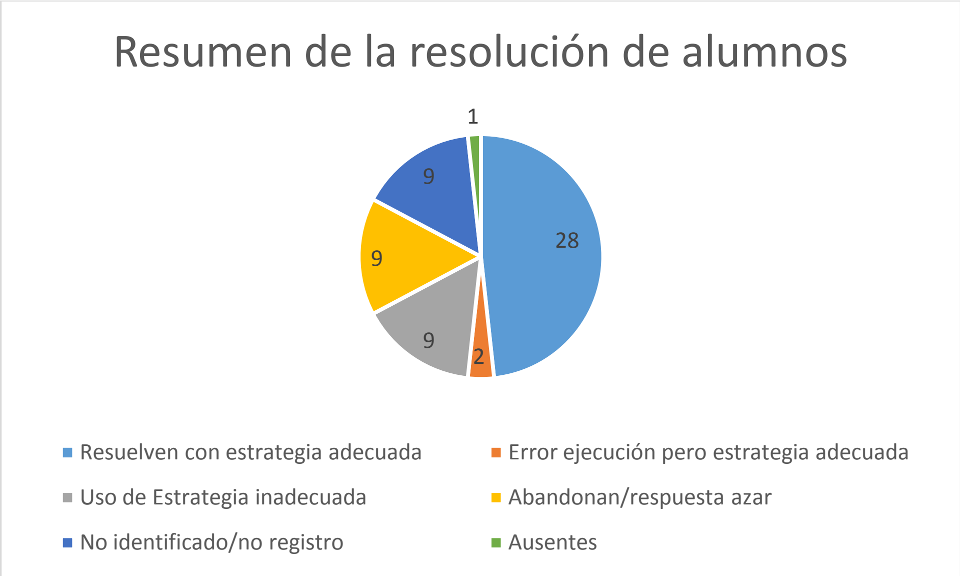


Figura A1.5.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 5

1.5.2. Estrategias observadas

Según el marco teórico, las estrategias observadas en este tipo de problemas se basan en el *Reparto* de objetos (R). Una observación importante es que todos los niños intentaron repartir de forma equitativa los buñuelos aún sin que el enunciado indicase de ninguna forma que los dos comían el mismo número de buñuelos. He creado variantes de la estrategia de *Reparto*, dependiendo de las que no se representan los grupos, es decir, la cantidad de número de grupos, de las que se representan. Surgen variantes dependiendo si se forma primero la colección total de elementos del problema, o si van repartiendo y comprobando el total de elementos. La forma de repartir genera más variedad en las estrategias, ya que unos niños reparten de uno en uno, otros en bloques, otros buscan una aproximación a la mitad, incluso hay niños que reparten de uno en uno poniendo un elemento en cada grupo a la vez.

Voy a describir las estrategias según los materiales utilizados, ya sean cubos encajables, otros objetos, con representación gráficas en papel, incluso con los dedos de la mano. Comenzando con las estrategias de *Reparto sin representante de grupo*, las estrategias las denomino inicialmente como *Reparto con marcas o dibujos, reparto con cubos encajados*, u *objetos*, y *reparto con los dedos*.

Del *Reparto con cubos encajables,* distingo la variante *Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos.* Esta estrategia de modelización directa consiste en formar una barra de cubos encajables con tantos objetos como indica la cantidad total del problema, y repartirlos en el número de grupos del enunciado. Al hacer la barra los niños no han utilizado el reparto de los cubos de uno en uno, y la única subvariante que se ha observado es *Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el* *total de elementos*, *aproximando la mitad* (R1). Al ser un problema en el que se debe dividir en dos grupos, muchos niños buscaron la mitad de los objetos representados. En la Figura A1.5.2, un niño construye una barra con 18 centicubos y estima con los dedos donde está la mitad y parte la barra por ahí. Después comprueba si hay los mismos en las dos barras resultantes.

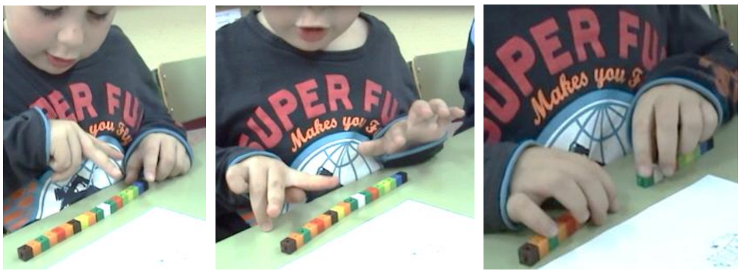


Figura A1.5.2. Reparto por la mitad con cubos encajables R1 en la sesión 5 con centicubos

El uso de cubos encajables, no formando barras se incluye en las estrategias con otros objetos, en este caso *Reparto con objetos,* ya que no formar barras, no permite comparar cantidades por aspectos físicos como la longitud y a forma. La variante más utilizada de esta estrategia es distingo la variante *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno* (R2). En la Figura A1.5.3 se puede observar como un niño coge primero 18 contadores y luego los reparte de uno en uno en dos grupos. Finalmente comprueba los objetos que hay en cada grupo.

Figura A1.5.3. Reparto R2 en la sesión 5

Como subvariantes de esta estrategia, se han observado distintas formas de repartir. Una de ellas es la que acabamos de ver en la que se reparte de uno en uno en dos montones. Otra subvariante es cuando los cubos encajables se reparte en bloques de 2, o de 3, o más objetos. La estrategia *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo en bloques* (R3), consiste en formar una colección con el total de elementos y después repartirlos de 2 en 2, o de 3 en 3, o de más en más, en los montones que marque el número de grupo, contando por último, cuántos objetos hay en cada grupo. En la Figura A1.5.4 un niño coge primero 18 objetos y luego los va repartiendo de 3 en 3. Finalmente comprueba los objetos que hay en cada grupo para saber cuántos hay en cada grupo.

Figura A1.5.4. Reparto R3 en la sesión 5

Una forma diferente de reparto a las que ya he comentado es la que utiliza una niña. En la Figura A1.5.5, una niña reparte de uno en uno los objetos en los grupos cogiéndolos a la vez, así sabe que los dos tienen lo mismo. Esta estrategia es similar a la anterior, con la diferencia que al repartir a la vez los objetos, la niña se asegura de que los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos y solo tiene que contar uno. Esta variante la denoto como *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, cogiendo un elemento para cada grupo a la vez* (R4).

Figura A1.5.5. Reparto R4 en la sesión 5

Otras subvariantes vuelven a aparecer con objetos. En la Figura A1.5.6, un niño coge 18 rotuladores y estima por donde puede separar los rotuladores para que hacer dos partes con el mismo número de rotuladores. Una vez separados comprueba que en las dos partes haya el mismo número de objetos y si no es así, se ajusta el reparto hasta conseguirlo, *Reparto con objetos formando barras, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad* (R5).

Figura A1.5.6. Reparto por la mitad con objetos R5 en la sesión 5 con rotuladores

Otra variante es *Reparto con objetos, repartiendo de uno en uno, hasta completar la cantidad total* (R6). Esta estrategia de modelización directa consiste en el reparto de objetos de uno en uno sin contar inicialmente la cantidad total, por lo que se coge un montón de objetos y se van repartiendo en dos grupos, comprobando el total de elementos repartidos. Cuando se ha repartido el total de elementos que indica el problema, se cuenta los objetos que hay en cada grupo. En la Figura 4.5.7, un niño coge un montón de unidades y las reparte en dos grupos de uno en uno hasta que entre los dos grupos suman 18 objetos. Esta estrategia la utiliza inicialmente para resolver el problema, pero este mismo niño explica la estrategia en la puesta en común y en esa ocasión cuenta 18 objetos antes de repartir, que es la estrategia que describo a continuación.

Figura A1.5.7. Reparto de objetos de uno en uno sin contar inicialmente la cantidad total (R6)

El *Reparto con representaciones gráficas* es una estrategia más difícil de representar, ya que las marcas y dibujos que realizan los niños en el papel no se pueden desplazar, y de alguna manera tienen que representarlo. La estrategia *Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (se van tachando las marcas y colocando en los grupos)* (R7), consiste en dibujar el total de elementos antes de realizar el reparto, y después se van repartiendo en los grupos indicados, tachando las marcas iniciales. Una variante que se ha dado de esta estrategia es *Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, señalando a la vez un elemento para cada grupo, hasta agotarse los elementos* (R8). Esta estrategia de modelización directa consiste en dibujar el total de elementos ordenados de tal forma que, después se pueda ir contando, señalando dos elementos a la vez hasta que se agoten los elementos. En la imagen de la izquierda de la Figura A1.5.8, una niña ha dibujado 18 bolas, que después las numera. Para saber cuántos buñuelos corresponden a cada Marcel y Tristán, empieza a contar señalando con una mano la bola 1, y con la otra mano la bola 18. Según va contando, va señalando una bola desde la izquierda (desde el 1), hacia la derecha, y desde la derecha (desde el 18) hacia la izquierda. Cuando enuncia el numeral 9 de la secuencia de conteo, se encuentra señalando la bola 9 con la mano izquierda y la bola 10 con la mano derecha. Ahí pone una marca para indicar que las nueve bolas de la izquierda son para uno y las nueve bolas de la derecha son para otro.

En la imagen de la derecha de la Figura A1.5.8, un niño dibuja 18 bolas, y las va numerando de dos en dos con el mismo numeral. Primero marca dos con el "1", después marca dos con el "2", así hasta que completa las 18 bolas.

Figura A1.5.8. Estrategia R8 en la sesión 5

Otra estrategia, es *Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad* (R9). En esta estrategia se dibuja todos los elementos y se intenta hacer una raya que separe en dos partes iguales toda la colección. Luego, se comprueba que en las dos partes hay los mismos, y si es necesario, se ajustan los dos grupos. En la Figura A1.5.9 una niña pone una raya en la mitad de su colección, consiguiendo dividirla en dos partes iguales.

Figura A1.5.9. Estrategia R9 en la sesión 5

Si las representaciones gráficas son icónicas, distingo otra variante *Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad* (R10). En la Figura A1.5.10 se puede ver la los buñuelos representados de formas icónica.

Figura A1.5.10. Estrategia R10 en la sesión 5

Dada la configuración de las manos, para representar 18, la cantidad total de elementos, se necesita poner una vez las manos enteras, y otra vez las dos manos con ocho dedos. Repartir en dos grupos 18 elementos representados con los dedos no es evidente. En la sesión, según se enuncia el problema, un niño intenta resolver el problema con los dedos representando 18, abriendo primero las dos manos, y luego vuelve a poner las dos manos con ocho, pero no sabe cómo seguir. Más tarde, dos alumnos resuelven el problema con los dedos. Uno de ellos, cuenta varias veces dos grupos de dedos hasta que consigue dos grupos iguales, estrategia que he denominado *Reparto con los dedos* (R11), un alumno encuentra la descomposición en dos partes iguales. En concreto, la variante *Reparto con los dedos usando la configuración* (R12), es representada por una niña que muestra las dos manos una vez, y luego vuelve a mostrarlas pero solo con ocho dedos. Esta niña se da cuenta que esos ocho dedos y uno de las dos manos completa son 9, justo igual que los 9 que le quedan de quitar un dedo a las dos manos. Concluye que un niño toca a 9 pasteles y el otro también.

La cantidad de número de grupos puede ser representada por los niños antes de hacer el reparto con objetos. Esta estrategia es una variante de reparto con objetos a la que denomino R*eparto con objetos con representante de los grupos*. En esta estrategia se representan los grupos, y los niños los utilizan para el reparto como indicadores de dónde deben ir repartiendo el total de elementos. En la Figura A1.5.11 se puede observar como una niña forma una barra de 18 multicubos y otra con 2 multicubos. A continuación separa los dos multicubos y reparte los 18 multicubos de la otra barra entre los dos grupos. A esta estrategia la denomino *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno y representando la cantidad número de grupos* (R13).

Figura A1.5.11. Reparto R13 en la sesión 5

La estrategia *Reparto con marcas o dibujos* puede darse también con representantes de los grupos. Una variante de esta estrategia es *Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos* (R14). En esta estrategia se representa los grupos, y se van repartiendo marcas en los dos grupos hasta completar 18 elementos. Después se cuenta el número de marcas que tiene cada grupo.

Otra variante es *Reparto con marcas con representante de grupos y contando inicialmente el total de elementos*. Esta estrategia es difícil de representar en papel. Una forma de hacerlo es mediante líneas, *Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos* (R15) que unen cada grupo con sus elementos. En la Figura A1.5.12 muestro la hoja de trabajo en la que dos niños intentan repartir por medio de un dibujo uniendo por líneas los buñuelos con cada personaje. De los 4 niños que han utilizado esta estrategia, tres terminan utilizando otra para asegurarse del resultado. La imagen de la derecha, utiliza dibujo en vez de marcas, *Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos* (R16) y no consiguió terminarlo.

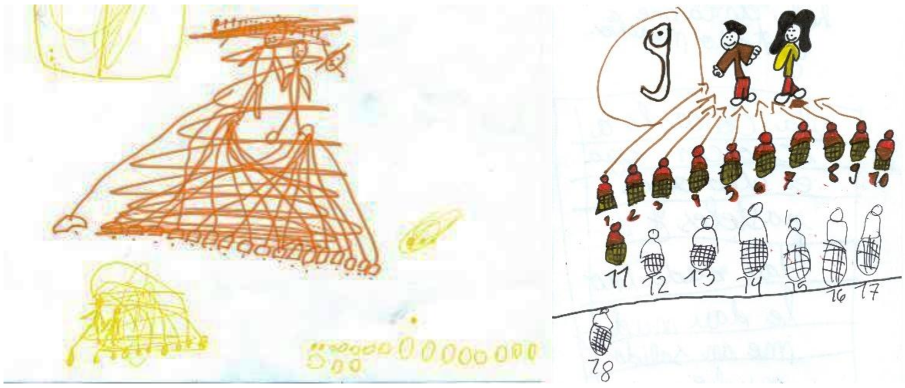


Figura A1.5.12. Reparto R15 y R16 en la sesión 5

Una niña intenta esta estrategia, pero luego vuelve a intentarlo repartiendo marcas de 3 en 3. En la Figura A1.5.13 la parte de arriba corresponden al reparto con líneas. Sin embargo, la parte de abajo realizar 18 marcas y va repartiéndolas de 3 en 3 a los dos personajes, ayudándose de la numeración, por lo que denoto esta estrategia como *Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, repartiendo en bloques los elementos en el número de grupos* (R17).

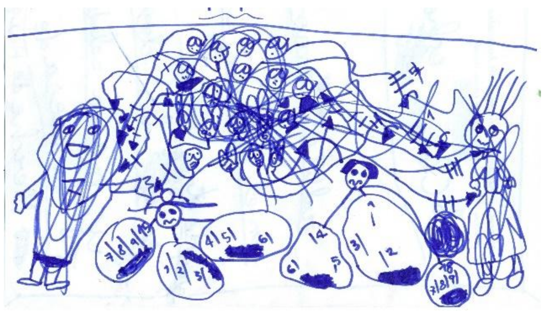


Figura A1.5.13. Reparto R16 y R17 en la sesión 5

El reparto, buscando la mitad del total de pasteles también se utiliza teniendo los dos representantes de los grupos, *Reparto con marcas, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad* (R18). Y utilizando dibujos, aparece la variante *Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad* (R19). En la Figura A1.5.14 se puede ver como se divide la colección de pasteles por la mitad para cada representante del grupo.

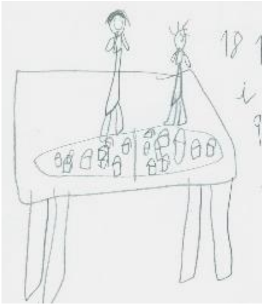


Figura A1.5.14. Reparto R19 en la sesión 5

En la Tabla A1.28 puede observarse un esquema de las estrategias con todas sus variantes observadas en esta sesión.

Tabla A1.28. *Estrategias adecuadas en la sesión 5*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Reparto sin representación del grupo	Con cubos encajables		Dividiendo por la mitad (R1)	4
	Con otros objetos (R2)			2
		Contando primero la cantidad total de elementos (R2)		3
			Repartiendo en bloques (R3)	1
			Dividiendo por la mitad (R5)	2
			Repartiendo a la vez (R4)	1
		Sin contar primero la cantidad total de elementos (R6)		1
	Con marcas	Contando primero la cantidad total de elementos (R7)		1
			Repartiendo a la vez (R8)	2
			Haiendo por la mitad (R9)	4
	Con dibujos	Contando primero la cantidad total de elementos	Dividiendo por la mitad (R10)	1
	Con los dedos (R11)			1
		Usar su configuración (R12)		1
Reparto con representación del grupo	Con objetos (R13)			1
		Contando primero la cantidad total de elementos (R13)		1
	Con marcas	Sin contar primero la cantidad total de elementos (R14)		2
	Con marcas	Contando primero la cantidad total de elementos	Con líneas (R15)	3
	Con dibujos	Sin contar primero la cantidad total de elementos	Repartiendo en bloques (R17)	1
		Contando primero la cantidad total de elementos	Dividiendo por la mitad (R18)	1
			Con líneas (R16)	1
		Contando primero la cantidad total de elementos	Dividiendo por la mitad (R19)	1

1.5.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

En la Tabla A1.29 puede observarse la frecuencia absoluta de las estrategias inadecuadas. Hay estrategias que suman cantidades y otras que restan.

Tabla A1.29. *Estrategias inadecuadas en la sesión 5*

Estrategia	*Frecuencia*
Agrupamiento	6
Quitar	3
Juntar todo	2

Se han dado 5 casos en los que los niños han utilizados estrategias de agrupamiento tratando el número total de elementos, los 18 buñuelos, como el número de elementos por grupo. Así, han representado dos grupos de 18 elementos, y los has contado todos. Ha habido 3 niños que han utilizados la estrategia de *Agrupamiento con marcas*, un niño A*grupamiento con objetos* y otro *Agrupamiento con bloques de base 10*, en las que han representado dos grupos de 18 y para saber el resultado final, han contado todo, siendo su respuesta, 36. En la Figura A1.5.15 puede observarse la estrategia A3.

Figura A1.5.15. Estrategia inadecuada A3 en la sesión 5

También 3 niños utilizan la estrategia de *Quitar con marcas* o *con el rekenrek*, representando los 18 buñuelos y tachando o quitando 9. Seguramente tachan 9 porque escuchan la respuesta 9. Además, los tres niños que utilizan estas estrategias se sentaban juntos.

Tabla A1.30. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 5*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones o determinar el cardinal de una dada (E2)

1.5.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

En las representaciones gráficas utilizadas por los niños hay que diferenciar lo que utilizan para resolver el problema, lo que utilizan para dar la solución y cómo expresan las cantidades en la carta. En la Tabla A1.31 se puede observar la frecuencia de las representaciones utilizadas por los niños. He separado también las representaciones de los grupos y de los elementos por grupos, aunque como acabo de comentar, las representaciones de los grupos se añaden al dibujo una vez resuelto el problema para dar la solución.

Tabla A1.31. *Representaciones encontradas en la sesión 5*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R, B10)	4 (1, 3, 0, 0,0,0)	38 (8, 11, 15, 2,1,1)	0	
	B1 (I, D)	8 (5,3)	4 (4,0)	6 (6,0)	
	C1				
2	A2	1	2		
	B2		1		
	C2				
3	A3			34	17
	B3				
	C3				12
4	A4			2	4
	B4				
	C4				2

En la Figura A1.5.16 el niño representa 18 bolas como buñuelos, lo que se puede clasificar como una representación A1Gm. La numeración de cada bola es utilizada para el conteo de las bolas porque se utilice para representar las cantidades, sino para controlar que se han dibujado 18 bolas. Esta estrategia ha sido clasificada como *Reparto con marcas contando primero los elementos*, sin representación de los grupos. Aunque se puede ver en la imagen de la derecha, que hay dos niños representados, esos niños no han sido utilizados para la resolución del problema, sino para dar la solución, por lo que en la clasificación de estas representaciones de cantidades, la forma de dar la solución es B1I, ya que los objetos se representa con iconos.

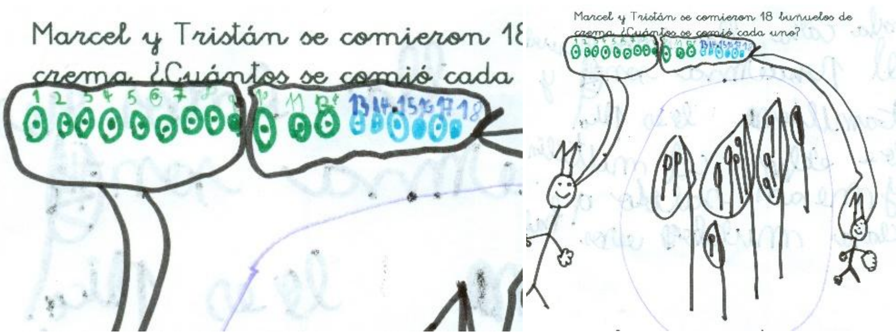


Figura A1.5.16. Representaciones de resolución y para dar la solución en la sesión 5

1.5.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta situación de reparto los niños han mostrado capacidades de reparto de colecciones. Si los niños forman una colección, después pueden repartir de uno en uno, en bloques, aproximar la mitad.

C44. Repartir de uno en uno, una colección de objetos o marcas en un número de grupos dado.

C45. Repartir de varios en varios, una colección de objetos o marcas en un número de grupos dado.

C46. Dividir aproximadamente una colección de objetos o marcas por la mitad.

C47. Repartir una colección en de marcas en grupos utilizando líneas.

C48.Repartir una colección en dos partes, señalando dos objetos a la vez, y repartiéndolos en los dos grupos a la vez.

C49. Dividir una colección representada con un patrón, ya sea los dedos o el rekenrek, en dos partes iguales, ayudándose de la configuración de las manos.

Los niños han llegado a repartir un montón de objetos o marcas, comprobando que el total de elementos sea la cantidad indicada en el problema. Es decir, no forman primero la colección total sino que van cogiendo objetos o dibujando marcas en los grupos indicados, y comprobando que, en total, tienen el total de elementos.

C50. Repartir objetos o marcas en un número de grupos hasta completar una colección.

Para repartir, los niños pueden representar la cantidad de número de grupos (C41) o no representarla (C40). Finalmente, determinarán la cantidad de elementos de cada grupo (C17), comprobando que es la misma cantidad.

C51. Identificar la solución de un reparto de grupos iguales como el número de elementos de uno de los grupos.

El grafo de esta tarea muestra dos ramas dependiendo si se representa la cantidad número de grupos (C33) o no (C31). Si no se representa, las capacidades consisten en formar la colección total de elementos (C2 o C3) y realizar el reparto de uno en uno (C44), en bloques (C45), dividir por la mitad (C46), repartiendo elementos a la vez (C48). Si se representa la cantidad número de grupos, debe representar el total de elementos (C2) y distinguiéndola de esta cantidad (C16), el número de grupos. Después hay que establecer la relación uno a muchos entre el representante de cada grupo y sus elementos (C38), mientras se reparte de distintas formas (C44, C45, C46, C47). Finalmente, hay que interpretar que la solución es la cantidad que hay en cada uno de los grupos (C51), y contarlo (C10).

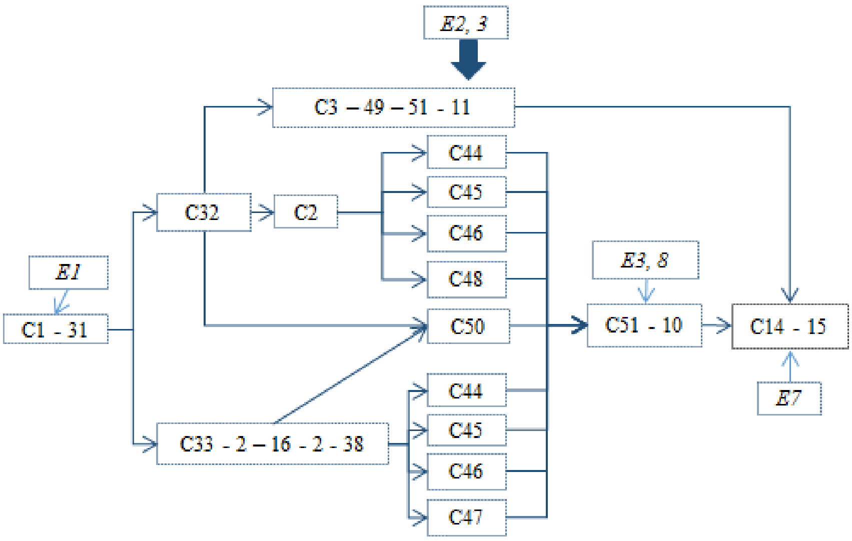


Figura A1.5.17. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 5

1.6. Sesión 6

En esta sesión volvemos a la estructura aditiva planteando un problema de cambio decreciente con cantidad de cambio desconocido con la dificultad añadida que la cantidad inicial y final se cambian de orden en el enunciado. Primero se enuncia la cantidad final, luego la cantidad inicial.

Tabla A1.32. *Características principales de la sexta sesión*

Problema	En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?
Tipo de problema	Cambio decreciente con la cantidad de cambio desconocida
Cantidades	Menores que 20
Materiales	Tabla 100, Rekenrek, multicubos, centicubos, plastilina, rotuladores, folios, y barras y unidades de los bloques de base 10 de Dienes.
Fecha	2 de diciembre
Cuento	Un regalo diferente
Asistentes	28 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.6.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión seguimos con la misma dinámica que la anterior sin grandes cambios. La única diferencia es que los niños reciben un email en vez de carta, y utilizan el ordenador para leerlo.

La maestra con experiencia CGI, Beatriz, ya no nos acompaña en las sesiones ya que en las últimas sesiones las tutoras de los dos grupos muestran más haber comprendido el funcionamiento del taller. El registro de los videos de las entrevistas individuales según van terminando de resolver y la puesta en común la realizo yo mientas que las tutoras anotan las estrategias en las hojas de registro. La carta en el grupo B se realiza por parejas.

En la siguiente Figura A1.6.1 se puede observar las frecuencias absolutas referentes a la resolución del problema. De los 53 asistentes, 40 estudiantes consiguen dar una respuesta correcta al problema. Uno de ellos intenta primero una estrategia de modelización con la Tabla 100, pero al no sentirse seguro y conforme con la solución, trabaja con plastilina. Este estudiante es el que aparece en estrategias adecuadas pero sin dar la solución correcta, y luego aparece también, entre los 40 estudiantes que sí dan la respuesta correcta, ya que es él mismo el que decide elegir otra estrategia.

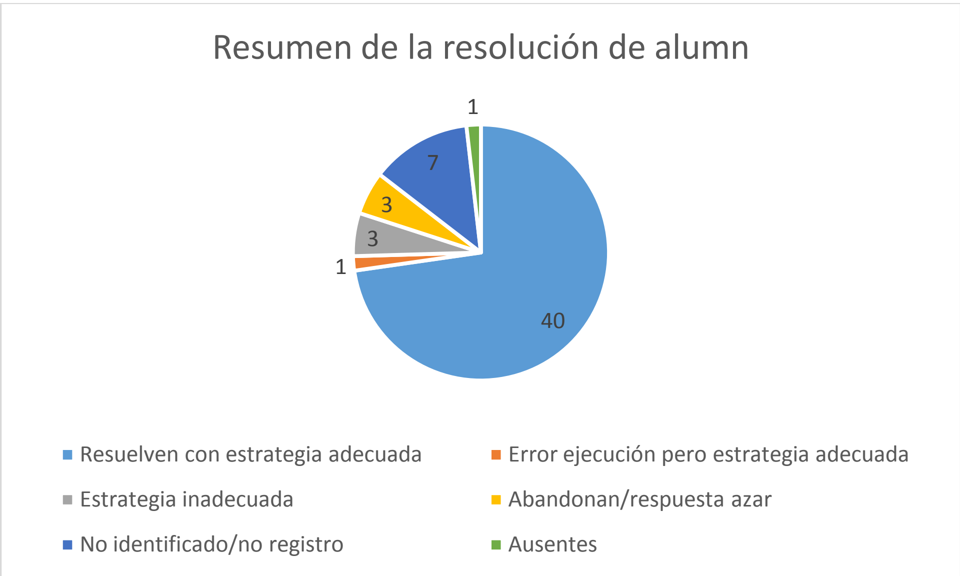


Figura A1.6.1. Resumen de la resolución de la sesión 6

1.6.2. Estrategias observadas

Las estrategias observadas en esta sesión se basan en las estrategias de *Quitar* (Q) y *Quitar hasta* (QH). Por el tipo de problema, cambio decreciente con la cantidad de cambio desconocida, la estrategia que más se ajusta a su estructura semántica es la estrategia *Quitar hasta* (QH), pero es cierto que los niños pueden utilizar la estrategia de quitar de forma flexible. De hecho, en esta sesión la estrategia más utilizada ha sido *Quitar tanto con marcas*, como *con dibujos*. Estas dos estrategias, junto con la estrategia *Quitar con cubos encajables*, han tenido la frecuencia de uso más alta. Las estrategias observadas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.25, y como se puede observar, muchas de ellas ya se utilizaron y fueron descritas en las sesiones 1 y 2.

En la Figura A1.6.2 muestro dos representaciones de la estrategia *Quitar con dibujos contando de uno en uno*, a la izquierda (Q4), y la otra con marcas, *Quitar con marcas contando de uno en uno* (Q3). En ambas, los estudiantes dibujan 15 marcas o dibujos, tachan 3 y cuentan el resto.

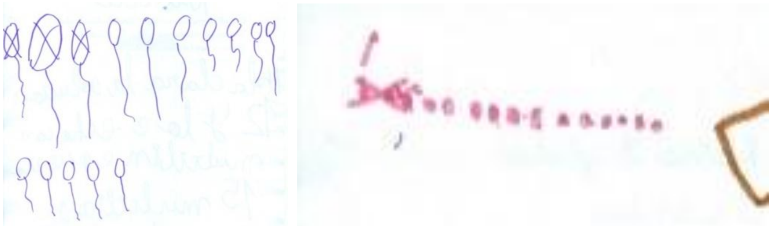


Figura A1.6.2. Estrategias Q4 y Q3 en la sesión 6

La estrategia *Quitar con cubos encajables formando barras, contando de uno en uno* (Q1), consiste en coger 15 cubos encajables, quitar 3 y contar las que quedan. En la Figura A1.6.3, un estudianes monta una figura de 15 centicubos, quitar 3, y cuenta el resto.

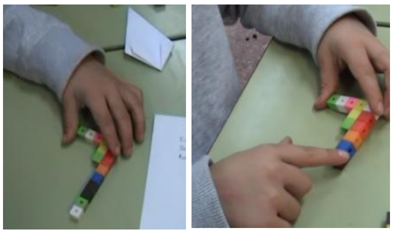


Figura A1.6.3. Estrategias Q1 en la sesión 6

La construcción de figuras con los cubos encajables puede llevar la intención de poder distinguir las cantidades que componen la cantidad más grande del problema. En la Figura A1.6.4, se puede observar la representación de una estudiante en la que se distingue una barra de 12 centicubos con un añadido de 3 centicubos. El uso de este material permite comparaciones de cantidades que no pueden realizarse con otros objetos.

Figura A1.6.4. Representación para Q1 en la sesión 6

Al ser la cantidad a quitar o tachar una colección de 3 elementos, ha surgido de nuevo el reconocimiento de esa cantidad por subitización. En la estrategia *Quitar con dibujos*, no he podido distinguir en las explicaciones de los niños si la cantidad que tachan es una cantidad percibida por subitización, por ser las entrevistas retrospectivas, y tachadas ya. Pero las estrategias de *Quitar con cubos encajables u objetos, o con el rekenrek*, se puede observar como los niños seleccionan 3 objetos o cuentas del rekenrek, sin contarlas, cuando las van a retirar. El caso que más claramente puedo observar que perciben la cantidad de una colección es con el rekenrek, una variante que he denotado *Quitar con rekenrek sin utilizar configuración, identificando cantidad por subitización* (Q11). Al categorizar estas estrategias, solo he incluido en el recuento las que la información recogida me permite que los niños no cuenten los objetos. De no estar segura, las he clasificado en *Quitar con rekenrek sin usar su configuración* (Q5).

La estrategia *Quitar con el rekenrek usando su configuración* (Q6), aparece en un caso que un estudiante coloca 10 bolas arriba y 5 abajo, quitar 3 de abajo y concluye, que 10 de arriba y dos de abajo, doce. Una variante de la estrategia de *Quitar* que se ha podido observar en esta sesión, es *Quitar con Tabla 100,* estrategia en la que se utilizan los numerales de la Tabla 100 como ítems a contar. Esta estrategia ya se ha dado en la sesión 1, donde diferencia dos variantes, en una se quitaban numerales empezando desde el 1, *Quitar con Tabla 100, empezando a quitar desde el 1 hacia delante* (Q8), y en otra desde el numeral mayor, *Quitar con Tabla 100 empezando a quitar hacia atrás desde el numeral mayor* (Q9). En esta ocasión, una niña utiliza Q9, señalando el 15 en la tabla 100 y contando 3 numerales hacia atrás, con lo que llega al 12, diciendo: "… He contado hasta aquí (señala el 15), he quitado 3 (señala, 15, 14 y 13) y luego los he contado (señalando del 12 hacia atrás)".

Figura A1.6.5. Estrategias Q9 en la sesión 6

Este procedimiento lo considero todavía dentro de modelización directa, ya que todos los elementos del enunciado están representados uno a uno, y sobre ellos se establecen las relaciones que ocurren en el problema. La Tabla 100 se puede utilizar también como apoyo para llevar un conteo hacia atrás de numerales, como la estrategia *Contar hacia atrás*. Si el estudiante enuncia la secuencia de numerales hacia atrás, llevando el rastro de los 3 numerales que tiene retroceder con ayuda de los numerales 1, 2, y 3 de la Tabla 100, la habría clasificado como de *Conteo hacia atrás con Tabla 100*, en la que no hace falta contar los numerales en la cantidad inicial, ni de la cantidad final. Esta última estrategia no se ha utilizado en esta sesión.

Respecto a las variantes de la estrategia *Quitar hasta* (QH), al igual que en la sesión 2 se han utilizado *Quitar hasta tanto con marcas* como *con* dibujos (QH1 y QH2), *Quitar hasta con cubos encajables*, *rekenrek* o *con los dedos de las manos.* En este problema, la estrategia consiste en representar una colección de 15 objetos, marcas o dedos, y quitar hasta que quedan 3. Como he comentado antes, los niños pueden percibir por subitización esta cantidad y no necesitar comprobar que quedan 3 mientras van quitando. En los casos que el registro de la estrategia me ha permitido observarlo, por lo que he añadido subvariantes donde los niños perciben cantidades por subitización.

La variante *Quitar hasta con marcas percibiendo por subitización las marcas que deben quedar* (QH5) o *Quitar hasta con dibujos percibiendo por subitización los dibujos que deben quedar* (QH6) es una estrategia de modelización directa que consiste en tachar una cantidad de gráficos, o una acción similar, hasta que queda un número reconocible por subitización. Para saber la respuesta hay que contar los elementos que se tachan. En la Figura A1.6.6 se puede ver la representación de una niña que va tachando marcas hasta que quedan 3. En las grabaciones de video se puede ver como no comprueba continuamente cuántas le quedan, simplemente reconoce la cantidad de 3 marcas por subitización y para de tachar.

Figura A1.6.6. Estrategias QH5 en la sesión 6

Las variantes de la estrategia *Quitar hasta con cubos encajables o con el rekenrek* sean usado en 7 ocasiones, detectando claramente en 3 de ellas la percepción por subitización de los 3 elementos que hay que dejar sin quitar. Por ejemplo, la variante *Quitar hasta con el rekenrek, sin usar su configuración, percibiendo por subitización la cantidad que debe quedar* (QH4), ya descrita en la sesión 2, se puede observar en la Figura A1.6.7, donde el estudiante coloca los dedos sobre las bolas para desplazarlas hacia la derecha y dejar solo 3.

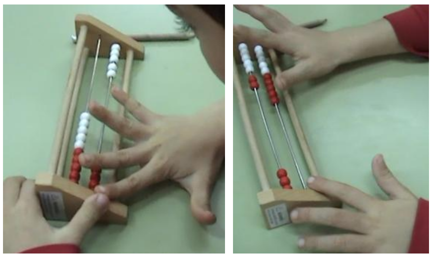


Figura A1.6.7. Estrategia QH4 en la sesión 6

Un estudiante utiliza los dedos para ejecutar la estrategia *Quitar hasta*, por lo que incluyo una nueva variante *Quitar hasta con los dedos*. En esta estrategia se modeliza con los dedos. Si no se tiene suficiente con las dos manos, se cierran y se vuelven a abrir. Se representa la cantidad mayor del problema, y se van cerrando los dedos según se van contando hasta llegar a la cantidad menor del problema representado con los dedos. En la Figura A1.6.8 se muestra como un niño representa 15 con una mano abierta, la cierra y dice 5, luego vuelve a abrir las dos manos. Y sigue contando los dedos de una de las manos, y la otra mano, hasta que se para, cuando le quedan 3 dedos. Como el niño reconoce cantidades como que una mano son 5, o cuando le quedan 3, voy a considerar que reconoce la configuración de las manos y denomino *Quitar hasta con los dedos, utilizando la configuración para reconocer las cantidades de cambio y final* (QH10).

Figura A1.6.8. Estrategia QH10 en la sesión 6

Una nueva variante de *Quitar hasta* (QH) es la que utiliza un niño con los bloques de base 10. *Quitar hasta con bloques de base 10, contando de 10 en 10 la cantidad inicial y la final* (QH11), consiste en representar la cantidad mayor del problema con bloques de Base 10, y se quita unidades y/o decenas necesarias para dejar la cantidad menor del problema. Después se cuenta, la cantidad retirada. En la Figura A1.6.9 se ve como el niño forma la cantidad de 15 con una decena y 5 unidades, y deja todo menos 3 unidades. Luego va a contar la barra y las unidades. En esta ocasión, el niño cuenta la barra como “10”, y las dos unidades, “11” y “12”.

Figura A1.6.9. Estrategia QHB11 en la sesión 6

Respecto a la estrategia de *Quitar hasta* (QH), aparece una variante utilizando la Tabla 100, *Quitar hasta con la Tabla 100, contando los numerales que hay desde el numeral mayor al menor* (QH13). En esta estrategia se busca el numeral mayor y el numeral menor del problema en la Tabla 100, y se cuenta desde el mayor al menor cuántos numerales hay. En esta estrategia, la niña busca el 15, luego el 3, y cuenta los numerales desde el 15 hasta el 3.

Figura A1.6.10. Estrategia QH13 en la sesión 6

Esta estrategia la he considerado dentro de las estrategias de modelización directa y no de conteo porque la niña representa todas las cantidades con los numerales de la Tabla 100. Para considerarla una estrategia de conteo, como *Contar hacia atrás hasta* se utilizarían los numerales para llevar el rastro de la cantidad de numerales que se cuentan desde el 15 hasta el 3, señalando por cada numeral enunciado, un numeral escrito de la Tabla 100.

El uso de la secuencia de numerales no solo se utiliza en la Tabla 100. En este punto voy a aclarar distintas formas de utilizarlo. En la Figura A1.6.11, la imagen de la izquierda contiene una representación de 15 bolas, y están numeradas las bolas que forman parte de la incógnita del problema. En esta imagen los numerales han sido utilizados para contar el número de bolas que quedan tras dejar las 3 que indica el problema. En este caso la estrategia es clasificada como *Quitar con marcas*. Sin embargo, en la imagen de la derecha, los mismos numerales, son los que se tachan. El niño ha escrito la secuencia de numerales hasta el 15, y dejando los 3 primeros numerales tacha los demás, mientras los cuenta. Esta estrategia la denomino *Quitar hasta con la secuencia numérica escrita, dejando sin tachar tanto numerales como indica la cantidad menor del problema, tachando el resto, y contando los tachados.* (QH12). Esta estrategia está muy próxima a *Quitar hasta con Tabla 100* que acabo de describir, con la diferencia que en una se tachan los ítems como en cualquier estrategia basada en modelización.

Figura A1.6.11. Diferenciar usos de la secuencia de numerales en la sesión 6

En la siguiente Figura A1.6.12, el niño explica que ha redondeado los últimos 3, y luego ha contado el resto. Esta estrategia la he clasificado como *Quitar con marcas* (Q3), ya comentada anteriormente. Los numerales solo le han podido servir para señalar los 3 que ha quitado, porque el resto lo ha tenido que contar de uno en uno.

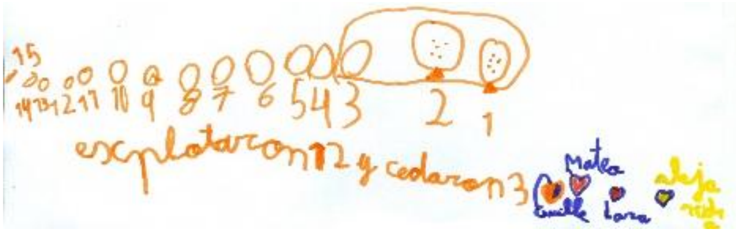


Figura A1.6.12. Diferenciar usos de la secuencia de numerales 2 en la sesión 6

Otras estrategias utilizadas de modelización directa son *Añadir hasta* (AH) y *Correspondencia uno a uno* (E). La estrategia de *Correspondencia uno a uno* (E) se observa en un caso con *cubos encajables* (E4) y otro *con dibujos* (E3). En la sesión 1 ya se observó *Añadir hasta con dibujos* (AH1), y en esta sesión una niña explica: "… He puesto 3. Luego he puesto hasta el total y he separado los 3 primeros con 1 rayita. Luego no he contado estos tres. He contado a partir de aquí". Otro alumno pone tres de dos en la mano, y luego considera dos manos y una tercera, para los 15 globos iniciales. Después cuenta desde el cuarto dedo de una mano hasta que ha completado 3 manos. Esta estrategia la clasifico como *Añadir hasta con los dedos* (AH2).

En la Figura A1.6.13 se puede ver la representación a la izquierda de *Añadir hasta con dibujos* (AH1). A la derecha se observa la representación de la estrategia *Correspondencia uno a uno con dibujos* (E3), donde hay una fila con 3 globos, y debajo una fila con 15 globos, donde los que no tienen parejas están tachados y son la solución al problema.

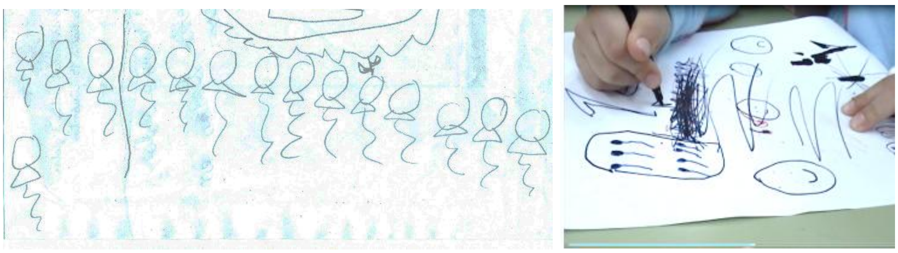


Figura A1.6.13. Estrategia AH1 y E3 en la sesión 6

La única estrategia de conteo utilizadas en esta sesión ha sido *Contar hacia atrás llevando el rastro mentalmente* (CA1). El alumno que utiliza CA1 se explica así: "…Ah, quince… mira, mira, mira, 15 menos 3,… catorce, trece…. ¡doce!". En la siguiente Tabla A1.33, recojo las frecuencias absolutas de las estrategias observadas en esta sesión.

Tabla A1.33. *Estrategias adecuadas en la sesión 6*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Quitar (Q)	Con marcas (Q3)		6
	Con dibujos (Q4)		6
	Con cubos encajados (Q1)		6
	Con otros objetos (Q2)		1
	Con rekenrek (Q5)		3
		Con subitización (Q11)	1
		Con configuración (Q6)	1
	Con Tabla 100	Quitando desde el último (Q9)	1
Quitar hasta (QH)	Con marcas (QH1)		1
		Con subitización (QH5)	2
	Con dibujos (QH2)		3
		Con subitización (QH6)	1
	Con cubos encajados (QH7)		1
		Con subitización (QH8)	1
	Con rekenrek (QH9)		3
		Con subitización (QH4)	2
	Con dedos	Usando su configuración (QH10)	1
	Con bloques de base 10	Contando de 10 en 10 (QH11)	1
	Con secuencia numérica (QH12)		1
	Con Tabla 100 (QH13)		2
Añadir hasta (AH)	Con dibujos (AH1)		1
	Con los dedos (AH2)		1
Correspondencia uno a uno (E)	Con dibujos (E3)		1
	Con cubos encajados (E4)		1
Contar hacia atrás (CA1)			1

1.6.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Las estrategias inadecuadas observadas se basan en la suma de las dos cantidades, o en la incomprensión del enunciado al tener las cantidades colocadas en orden inverso al temporal, es decir, primero se dicen los que quedan y luego, los que había al principio. Hay un caso en el que el niño responde con la cantidad mayor del problema.

A continuación muestro lo que ocurre en la puesta en común, cuando el niño que utiliza *Juntar todo con cubos encajables, juntando una vez representadas las cantidades*, explica cómo lo hace, y otros niños le explican por qué está mal.

A19: Aquí pongo 3 y voy a poner 18 [Monta una barra de 3 centicubos y otra de 15]. He puesto 15, uno, dos, tres, cuatro, cinco,… quince, y después voy a poner los 3.
Tutora: ¿Y para qué pones 3?
A19: Para que salgan los que son correctos, uno, dos, tres,…. dieciocho.
Tutora: [La estudiante A27 está negando con la cabeza]. A27, ¿estás de acuerdo?
A27: No, porque no hay que ponerle.
Tutora: ¿Por qué no hay que ponerle?
A27: Si le pone, porque no hay que ponerle porque si le pones más…, porque si había 15 pues, no puedes ponerle más.
Tutora: No puedes ponerle más porque, ¿qué le pasó a los globos?
A27: Se explotaron.
Tutora: A19, si se explotaron los globos, ¿quedan más o quedan menos?

Varios: Quedan menos.
Tutora: ¿Qué hay que hacer entonces, quitar o poner?
Varios: Quitar.

En la Figura A1.6.14 se puede ver como una niña utiliza *Contar a partir del primero con Tabla 100*, señalando el 15, contando 3 más y señalando finalmente, el 18.

Figura A1.6.14. Estrategia CP con Tabla 100 en la sesión 6

No se han observado errores en el conteo. Un alumno hace un intento al imitar a una compañera de utilizar la estrategia *Quitar hasta con Tabla 100* (QH13), pero cuenta el numeral 3 de la Tabla 100 y la respuesta no le coincide con su compañera, e intenta una estrategia de Quitar con plastilina.

En la siguiente Tabla A1.34 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.34. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 6*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
	Dar como solución una cantidad del problema (E10)
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99 (cadena numerable)	No usar bien la Tabla 100 (E3)

1.6.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones más habituales para la resolución siguen siendo las icónicas de número sin representación del objeto (A1), tanto con marcas (A1Gm) como distintos materiales como cubos encajables (A1Oc), bolas de plastilina u otros objetos (A1Oo), Rekenrek (A1R), con los dedos de la manos (A1R). Un niño utiliza los bloques de base 10 para representar la cantidad de 15 con una barra y cinco unidades. En esta sesión, los objetos al ser globos fáciles de dibujar, han aumentado las representaciones icónicas de objeto y de número. Incluso se han representado globos que vuelan como se puede ver en la Figura A1.6.16.

Figura A1.6.15. Representación B1I en la sesión 6

Las representaciones A2 con aspecto icónicos y simbólicos de número sin representación de objeto, se refiere a las estrategias que utilizan la Tabla 100 o la secuencia de numerales que he comentado en el apartado anterior. Para dar la solución sigue utilizándose en su mayoría, la cifra del numeral. En la Tabla A1.35 se puede observar las representaciones recogidas.

Tabla A1.35. *Representaciones encontradas en la sesión 6*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R, B10)	35 (11, 2, 9, 2,10,1)	0	
	B1 (I)	12	0	
	C1			
2	A2	4	1	
	B2			
	C2			
3	A3		23	20
	B3			
	C3			5
4	A4		1	5
	B4			
	C4			

En las cartas (ver Figura A1.6.16), que van evolucionando en calidad de explicación de estrategias, se utilizan sobre todo las representaciones sin representación de objeto con cifras y palabras (A3 y A4), dándose algunos casos representación con números con cifras y simbólica de objetos (C3) “15 globos”.

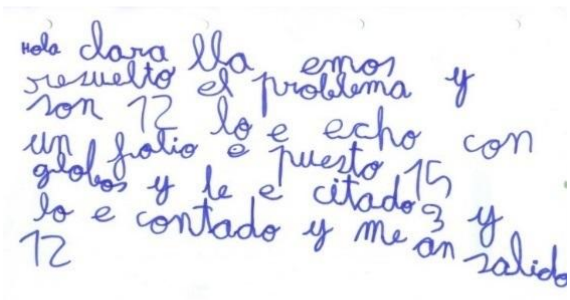


Figura A1.6.16. Carta con representación A3 y C3 en la sesión 6

1.6.5. Caminos de aprendizaje para la tarea

Describo las capacidades implicadas en los procedimientos que se ha utilizado en esta sesión, y no en sesiones anteriores. A diferencia de las sesión 1 y 2, se ha utilizado la estrategia *Quitar hasta usando la configuración de los dedos* (QH10), por lo que se necesita utilizar la capacidad:

> C52. Quitar o separar una colección de objetos o marcas de patrones como las manos o el rekenrek, hasta que queda una cantidad percibida por subitización o reconocida por su configuración.

En esta sesión un niño utiliza por primera vez las barras de base 10 para formar una colección.

> C53. Formar una colección hasta 100 con bloques de base 10, poniendo barras para cada decena grupo de 10, y unidades para las cantidades que no completan una decena.

Además, se ha utilizado el conteo de 10 en 10 para la barras y de uno en uno para las unidades.

> C54. Determinar el cardinal de una colección hasta 100, contando de 10 en 10 las barras de bloques de base 10, y de uno en uno las unidades sueltas.

La estrategia *Quitar hasta* se utiliza con la Tabla 100 y una secuencia numérica escrita por los niños. Se necesita la capacidad que describa como desde el número mayor del problema, cuento los numerales que hay hasta la cantidad menor del problema, en una secuencia numérica.

> C55. Tachar o señalar numerales, empezando desde el último numeral seleccionado hasta otro dado menor, hacia atrás, en una secuencia numérica escrita.

En la Estrategia de *Quitar hasta con la secuencia escrita*, habrá que contar después la colección tachada o señalada (C10). En la Tabla 100, simplemente se cuenta los numerales que hay de un numeral a otro.

> C56. Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 entre dos numerales, contando de uno en uno, empezando desde el mayor hacia atrás.

Un posible error en esta estrategia, es considerar el numeral menor dentro de la secuencia de conteo (E12).

Por último, la estrategia *Contar hacia atrás* (CA1) necesita la capacidad:

> C57. Enunciar la secuencia de numerales hacia atrás, una cantidad de números dada, desde cualquier numeral, contando de uno en uno, llevando el rastro con una colección figurativa o con ayuda de los dedos.

En el grafo de la Figura A1.6.17 se puede observar las capacidades necesarias para las estrategias utilizadas. La estrategias Quitar hasta con objetos o marcas contando lo que queda necesita de las capacidades C1 – C2 – C23 - C10 – (C14 o C15); quitando hasta que queda una cantidad por subitización, C1 – C2 – C24 – C10 – (C14 o C15). Cada estrategia se corresponde con un camino del siguiente grafo.

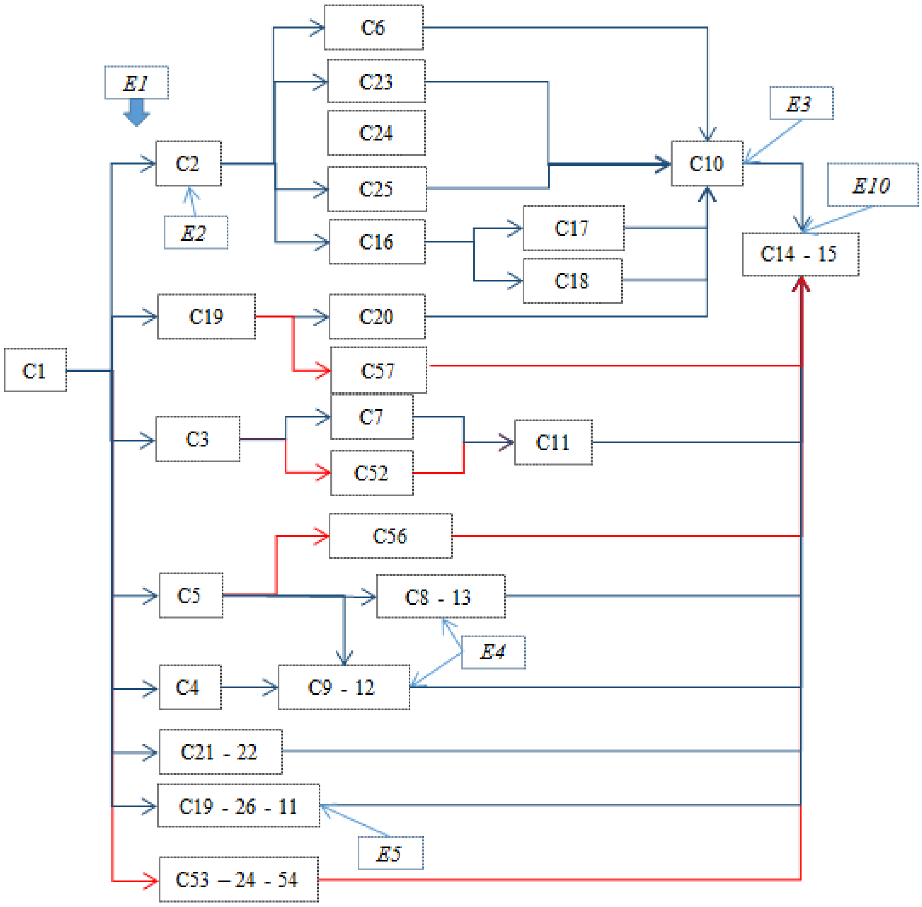


Figura A1.6.17. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 6

1.7. Sesión 7

En esta sesión se plantea el primer problema de estructura multiplicativa de grupos iguales con grupos de 10 para empezar a trabajar el agrupamiento de 10 el sistema de numeración en problemas multiplicativos. Además, forma parte de un problema de dos etapas en el que compone junto con una combinación con total desconocido donde la otra cantidad a combinar es menor que 10.

Tabla A1.36. *Características principales de la séptima sesión*

Problema	Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿cuántos patitos tenemos en total?
Tipo de problema	Dos etapas jerárquico (multiplicación de grupos iguales y combinación con total desconocido)
Cantidades	Cantidad mayor es 23
Materiales	Tabla 100, Rekenrek, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, folios, y, barras y unidades de los bloques de base 10 de Dienes.
Fecha	9 de diciembre
Cuento	Diez patitos de goma
Asistentes	25 (de 28 de 1ºA) y 20 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.7.1. Desarrollo de la sesión

Las tutoras realizan la lectura de la carta, que esta vez viene acompañada de fotos de Clara en la nieve, que se muestran a los niños y se cuelgan en el tablón del aula.

En esta sesión, los niños del grupo A estaban distribuidos en mesas de 4, y en el grupo B estaban divididos en dos mesas grandes. En el centro de la mesas se deja los materiales para que cada niño seleccione el material con el que desea resolver el problema.

Surge una dificultad en la comprensión del enunciado, ya que los niños consideran inicialmente que los 3 patitos sueltos del enunciado se caían de las dos cajas, como ocurre en el cuento, que se van cayendo al mar, por lo que se les explica que no se caen al mar, sino que siguen en el barco, pero fuera de las cajas. De los 45 asistentes, 35 eligen una estrategia adecuada, pero 5 de ellos no son capaces de dar la solución correcta. Los niños que utilizaron una estrategia inadecuada fueron 14, pero tras la explicación de que los patitos no se caen al mar, 8 de ellos utilizaron una estrategia adecuada, dando 4 la solución correcta finalmente.

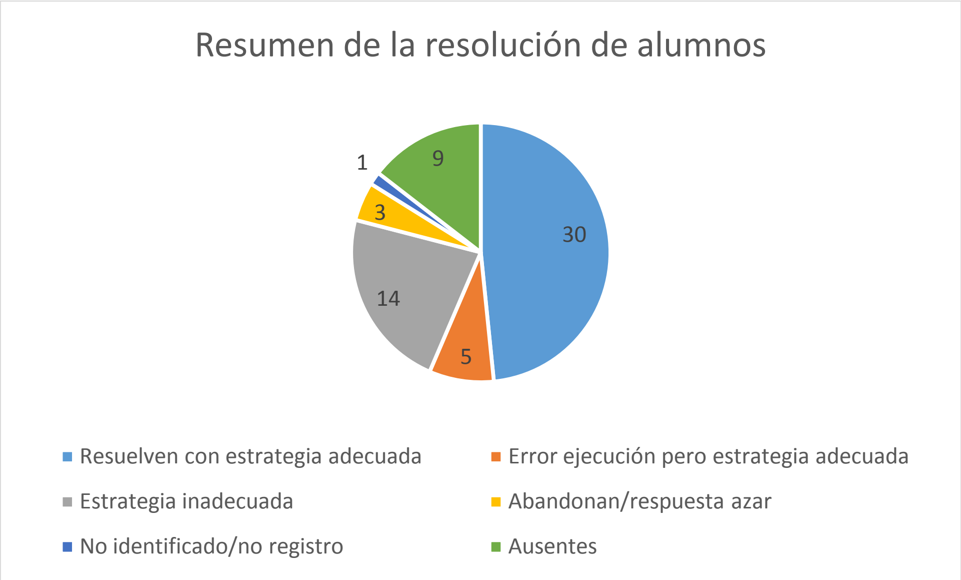


Figura A1.7.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 7

1.7.2. Estrategias observadas

Para describir las estrategias de este problema, hay que tener en cuenta que es un problema de dos etapas para un alumno de primero de educación primaria. Hay una primera etapa que es de estructura multiplicativa, de agrupamiento de multiplicación, con grupos de 10; y una segunda etapa, de estructura aditiva, de combinación, con el total desconocido.

Las estrategias observadas en esta sesión para la primera etapa son estrategias basadas en el *Agrupamiento* (A). En la sesión 4, aparecen ya variantes de esta estrategia dependiendo de la representación de los grupos o no, siendo *Agrupamiento sin representante de grupo* y *con representante de los grupos*. Voy a ir describiendo las estrategias de esta sesión, partiendo de lo ya observado en la sesión 4, incluyendo variantes por el uso de diferentes materiales y acciones que se representan. Los problemas con grupos de 10 permiten observar en las estrategias de resolución, diferentes niveles de comprensión de la decena, tal como indican los estudios previos, a lo que dedicaré un apartado en el próximo capítulo. Una de las características que permiten valorar esta comprensión es el conteo de los grupos de 10, ya sea de uno en uno, de 10 en 10 o simplemente concluir que 2 decenas son 20. Por esta razón, indicaré en subvariantes que distinguen este conteo.

Comienzo con las estrategias con las estrategias sin representante de grupos. Respecto al material, los niños utilizan representaciones gráficas, que las separo en simples marcas en el papel, que conllevan un nivel de simbolización mayor, y dibujos, que son representaciones más icónicas. La estrategia *Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A3) es una estrategia de modelización directa en la que se representa cada grupo mediante una colección de 10 marcas en el papel y se cuentan todas las marcas de una en una. En la Figura A1.7.2 se puede observar la representación de los dos grupos de 10 con dos líneas de 10 puntos. Es importante señalar que en esta estrategia, los grupos se distinguen, lo que puede permitir contar de 10 en 10. La estrategia con dibujos es *Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A23), que también ha sido utilizada en esta sesión.

Figura A1.7.2. Representación de la estrategia A3 en la sesión 7

El uso de cubos encajables conlleva al *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A1), estrategia de modelización directa en la que se representa cada grupo mediante una colección de 10 objetos y se cuentan todos los objetos de uno en uno. En la Figura A1.7.3 se puede observar la representación de los dos grupos de 10 con dos líneas de 10 puntos.

Figura A1.7.3. Representación de la estrategia A1 en la sesión 7

En el caso de contar los grupos de 10 en 10 surge la variante *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos de 10 separados, contando de 10 en 10* (A19), estrategia de modelización directa en la que se representa cada grupo mediante una colección de 10 objetos y se cuentan todos los objetos de 10 en 10, señalando cada grupo a la vez que se realiza el conteo.

Los niños utilizan otros materiales como pueden ser rotuladores o bolas de plastilina hechas por ellos para representar las cantidades, incluso con cubos encajables sin formar barras. Así, las variantes que acabo de describir con cubos encajados también se pueden dar con objetos, como *Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos de 10 separados, contando de uno en uno* (A20). En la Figura A1.7.4 un niño representa las cantidades con bolas de plastilina. Fijándonos en la primera etapa se trata de un *Agrupamiento sin representante de grupo con objetos*. En concreto, este niño realiza el conteo de 10 en 10 de los dos grupos de 10, por lo que su primera etapa es *Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10* (A21).

Figura A1.7.4. Representación de la estrategia A21 en la sesión 7

El *Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno* (A22) es una estrategia de modelización en la que se representan un grupos de 10 en un montón y luego van uniendo otros 10, formando así una colección única que se cuenta de uno en uno. En la Figura A1.7.5 un niño junta los dos grupos de 10, pero sin formar una barra, por eso no lo considero con cubos encajables formando barras, y además, no quedan los grupos separados para permitir conteos más evolucionados como de 10 en 10.

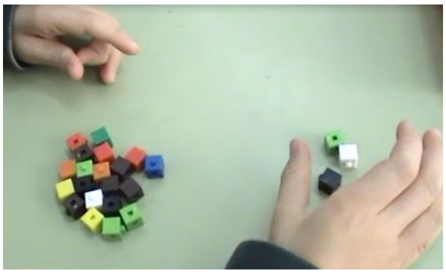


Figura A1.7.5. Representación de la estrategia A22 en la sesión 7

La estrategia de *Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración, contando de 10 en 10* (A24), es una estrategia de modelización directa, ya que se representa los dos grupos de 10 mostrando dos veces consecutivas las dos manos, y el recuento se hace de 10 en 10.

Los niños también utilizan los bloques de base 10 para representar las cantidades del problema. La estrategia *Agrupamiento con bloques de base 10 contando de uno en uno* (A25) es una estrategia de modelización directa en la que los grupos de 10 se representan con las barras (decenas) de los bloques de base 10. El recuento final, se hace contando de uno en uno cada una de las unidades de la barra.

Si el recuento de las barras se hace de 10 en 10, entonces se trata de la estrategia *Agrupamiento con bloques de base 10 contando de 10 en 10*, que es una estrategia de modelización directa en la que los grupos de 10 se representan con las barras (decenas) de los bloques de base 10. El recuento final, se hace contando de 10 en 10 a la vez que se va señalando cada una de las barras. En esta sesión no se ha observado ningún caso de esta variante.

Las estrategias observadas de *Agrupamiento con representante para los grupos* en esta sesión, las describo a continuación. Comienzo con las estrategias con representaciones gráficas, que como hasta ahora diferencio entre representación *con marcas* y *con dibujos*. Las estrategias *Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno* (A10) o *Agrupamiento con dibujos, representando la cantidad* *número de grupos, contando de uno en uno* (A9) son de modelización directa donde se representan con marcas o dibujos en el papel los dos grupos con sus elementos, pero no solo se representan los elementos por grupo, sino que también se representa los grupos con algún tipo de marca. He considerado que los niños que reflejaban la caja, poniendo algún tipo de línea cerrada y dentro los elementos, o poniendo una caja con los patos al lado o dentro de ellas, están dentro de esta estrategia. En la Figura A1.7.6 Se puede ver que los cuadrados representan las cajas, y los elementos de cada grupo, en la imagen de la izquierda están hechas con marcas (A10) y los patitos de la derecha con dibujos (A9). Para saber el total de elementos, se cuentan las marcas o dibujos que representan los elementos de cada grupo. Si los grupos se cuentan de 10 en 10, entonces se trata de la estrategia *Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de 10 en 10* (A26).

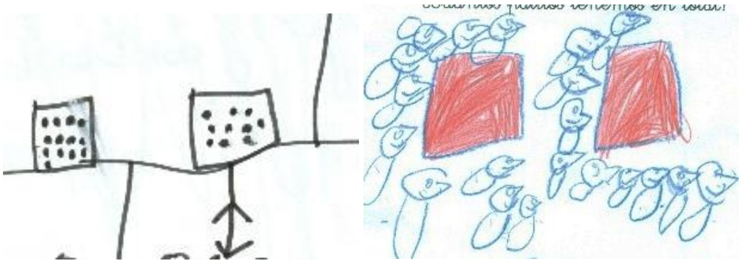


Figura A1.7.6. Representación de A10 y A9 en la sesión 7

El uso de cubos u otros objetos conllevan a otras estrategias al igual que con representaciones gráficas. *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A7) es una estrategia de modelización igual que la anterior, con la diferencia de que los representantes de los grupos y de los elementos de grupos se hacen con cubos encajados. En la Figura A1.7.7 se puede ver que los dos cubos encajables sueltos representan las cajas, y las dos barras de 10 de cubos encajables, los patitos de cada grupo.

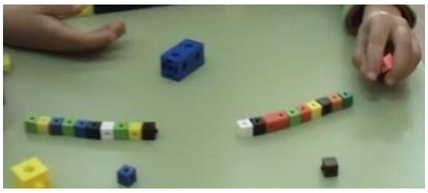


Figura A1.7.7. Representación de A7 en la sesión 7

Si las cantidades se presentan con los bloques de base 10, entonces tenemos la estrategia *Agrupamiento con base 10, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno* (A27). Esta estrategia es una variante de la anterior en la que se ponen dos objetos, que pueden ser las unidades de los bloques de base 10, como representantes de las cajas. En la Figura A1.7.8, las dos unidades que tiene el niño al lado de la mano izquierda, son las dos cajas del problema, además, el niño representa la cantidad 20 con dos barras de 10 y para el recuento final, cuenta de uno en uno cada una de las unidades de las barras.

Figura A1.7.8. Recuento en la estrategia A27 en la sesión 7

Cuando los niños ya no necesitan representar con objetos o gráficos los grupos, y realizan conteos a saltos, aparece la estrategia *Conteo a Saltos de 10 en 10* (CS1). No se representa las cantidades con material y cuentan de 10 en 10 el número de grupos que indica el problema y el resultado es la última decena citada. El siguiente comentario de A32 corresponde a esta estrategia: "He contado de 10 en 10, primero he contado 10 y luego 10 y me han salido 20". La estrategia observada más avanzada en esta sesión es la que corresponde a la siguiente transcripción: "10 más 10, más 3, 23". En la Figura A1.7.9 aparece la hoja de trabajo de este alumno. Al sumar dos números de dos cifras, considero que es una estrategia en la que toma importancia el uso del valor posicional para realizar sumas de números de dos cifras, por lo que están dentro de las *Estrategias inventadas* (EI) de los estudios previos. En este caso, implica la *Sumar un múltiplo de 10 a una década* (EI2).

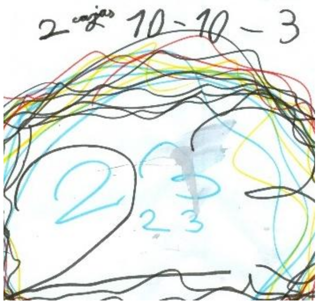


Figura A1.7.9. Hoja de trabajo de un estudiante que aplica EI2 en la sesión 7

El resumen de las estrategias observadas en esta primera etapa de esta sesión se muestra en la Tabla A1.37. No todas las variantes explicadas anteriormente han sido utilizadas por los niños. Es importante destacar, de cara al análisis de la comprensión de la decena, que las variantes según la forma de contar los grupos de 10, en su mayoría son utilizando conteo uno a uno de las unidades que forman las dos decenas. Con cubos encajables u otros objetos solo hay dos niños que cuentan de 10 en 10 los grupos (A19 y A21), con representaciones gráficas, un niño (A26) y con las manos, 2 niños (A25). El resto de niños que utilizan modelización, cuentan de uno en uno, a pesar incluso, de utilizar las barras de 10 para representar las decenas.

Tabla A1.37. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 7*

Estrategia	Material	Variante	Subvariante	F.A.
Agrupamiento sin representante de grupo (A)	Con cubos encajables	Contando de uno en uno (A1)		4
			Añadiendo cantidades según se representan (A2)	1
		Contando de 10 en 10 (A19)		1
	Con otros objetos	Contando de uno en uno (A20)		2
		Contando de 10 en 10 (A21)		1
		Añadiendo cantidades según se representan (A22		1
	Con dibujos	Contando de uno en uno (A23)		1
	Con marcas	Contando de uno en uno (A3)		1
	Con los dedos de las manos	Contando de 10 en 10 (A24)		2
	Con bloques de base 10	Contando de uno en uno (A25)		2
Agrupamiento con representante de grupo (A)	Con cubos encajables (A7)			1
		Contando de uno en uno (A7)		1
	Con dibujos (A9)			1
		Contando de uno en uno (A9)		4
	Con marcas (A10)			1
		Contando de uno en uno (A10)		8
		Contando de 10 en 10 (A26)		1
	Con bloques base 10	Contando de uno en uno (A27)		1
Conteo a Saltos (CS)		Contando de 10 en 10 (CS1)		1
Estrategia inventada (EI)		Década más múltiplo de 10 (EI2)		1

Para la segunda etapa, que es una etapa en la que se deben combinar la cantidad obtenida en la etapa anterior y las unidades sueltas, las estrategias observadas son variantes de *Juntar todos* (JT). Esta estrategia ya se ha utilizado en la sesión 3 con diferentes variantes. Detallo a continuación, las variantes que se han utilizado en esta sesión 7.

El uso de representaciones gráficas, da lugar a *Juntar todos con marcas* o *Juntar todo con dibujos*, que es una estrategia de modelización directa que se representa las dos cantidades con marcas o dibujos en el papel, y se cuentan todas para el resultado final. En la sesión 3, detallaba subvariantes dependiendo de cómo se unían las cantidades para saber el total. Las cantidades se pueden ir *añadiendo a la cantidad anterior*, o se pueden representar por separado y *considerarlas al final juntar para el recuento*. En la variante en la que se añaden unas cantidades a otras, es lógico que el recuento final sea de uno en uno, ya que no se distinguen los grupos. En cambio en la variante en la que no se juntan cuando se representan las cantidades, y finalmente se las considera todas, puede llegar a contarse de 10 en 10 los grupos de 10. Por eso, aparecen subvariante si se cuentan de uno en uno las cantidades, *Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT17), y *Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT18), o si se cuentan de 10 en 10, *Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades* (JT20).

En esta sesión un niño representa los dos grupos de 10 y los 3 patitos sueltos, y después realiza un reparto de los patitos en las cajas para contarlos todos de uno en uno. Esta estrategia consta de un *Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (se van tachando las marcas y colocando en los grupos)*; y un estrategia de *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (R7 y JT6). En la Figura A1.7.10 se puede observar la hoja de trabajo del estudiante A35. Se puede observar que la caja de los 3 patitos se reparte en las dos cajas de 10.

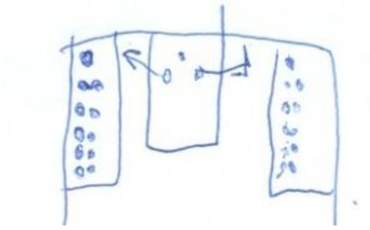


Figura A1.7.10. Reparto de las unidades sueltas del estudiante A35 en la sesión 7

El uso de cubos encajables conlleva a la variante *Juntar todos con cubos encajables.* Al igual que con marcas, las cantidades se pueden ir *añadiendo a las anteriores* o *representarlas por separado y al final considerarlas juntas.* Al representarlas por separado puede distinguirse los grupos de 10 y surge entonces las subvariantes en la que se cuentan de uno en uno, *Juntar todo con cubos encajables formando barras, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT13) o donde lo grupos de 10 se cuentan de 10 en 10, *Juntar todo con cubos encajables formando barras, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades* (JT14). En la Figura A1.7.11, la alumna A16 tiene las dos barras de 10 por separado y las 3 unidades sueltas. La tutora le sujeta las barras mientras cuenta de uno en uno (JT13).

Figura A1.7.11. Estudiante A16 utilizando JT13 en la sesión 7

El uso de los bloques de base 10 genera nuevas estrategias. *Juntar todos con bloques de base 10 contando de uno en uno* (JT19). Estrategia de modelización directa en la que se representan las dos cantidades del problema, utilizando barras de 10 para los 2 grupos de 10, y cubitos para las unidades sueltas, se juntan o consideran todas y cuentan de una en una todas las unidades de la barra y las sueltas.

Figura A1.7.12. Alumno A33 utilizando JT19 en la sesión 7

Si el recuento final se realiza contando de 10 en 10 las barras de la representación, entonces denoto la estrategia *Juntar todos con bloques de base 10 contando de 10 en 10*, que no se ha utilizado en esta sesión, y consiste en representar las dos cantidades del problema utilizando barras de 10 para los 2 grupos de 10, y cubitos para las unidades sueltas, se juntan o consideran todas y se cuentan, de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades.

Las estrategias de conteo son más avanzadas y se ha observado *Contar a partir del primero* (CP1), que consiste en enunciar la secuencia de numerales desde el resultado de la primera etapa, enunciando tanto numerales como indica el segundo dato, en este caso, 3, llevando el rastro mentalmente o con los dedos.

La estrategia más avanzada observada es la continuación de la Estrategia inventada (EI) en la que se suma 10 y 10, y a continuación, 20 y 3, *Combinar decenas y unidades* (EI2).

En la Tabla A1.38 se puede observar el resumen de las estrategias observadas para esta segunda etapa. Las estrategias más frecuentes son las estrategias de modelización con cubos encajables, marcas o dibujos, siendo el recuento final de uno en uno en los tres casos. Más avanzado el apartado se muestra como la concordancia de la forma de contar (de uno en uno, o de diez en diez) entre la primera etapa y la segunda etapa se da en todas ellas.

Tabla A1.38. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 7*

Estrategia	*Material*	*Variantes*	*Subvariantes*	*F.A.*
Juntar todo (JT)	Con cubos encajables	Juntando al final	Sin grupos de 10 y conteo uno en uno (JT1)	1
			Con grupos de 10, conteo uno en uno (JT13)	6
			Con grupos de 10, conteo 10 en 10 (JT14)	1
	Con objetos	Juntando al final	Sin grupos de 10, conteo uno en uno (JT3)	1
			Con grupos de 10, conteo uno en uno (JT15)	2
			Con grupos de 10, conteo 10 en 10 (JT16)	1
	Con marcas	Juntando al final (JT17)		1
			Con grupos de 10, conteo uno en uno (JT17)	8
			Con grupos de 10, conteo 10 en 10 (JT22)	1
			Repartiendo en los grupos las unidades sueltas y contando de uno en uno (R7 y JT6)	1
	Con dibujos	Juntando al final (JT18)		1
			Con grupos de 10, conteo uno en uno (JT18)	5
	Con bloques de Base 10		Contando de uno en uno (JT19)	3
Contar a partir del primero (CP1)				1
Estrategia inventada (EI)		Combinar decenas y unidades (EI2)		3

En esta sesión se han podido observar las estrategias que aparecen en la Tabla A1.39, que son combinaciones de las estrategias de la primera etapa, en la primera columna, y las estrategias de la segunda etapa, en la segunda columna. Finalmente, muestro la frecuencia absoluta en esta sesión 7. La Tabla está dividida en varios bloques. El primero de ellos contiene estrategias en las que se representan los grupos de 10, manteniéndose separados, y las unidades, con distintos materiales, y que el recuento final se realiza de uno en uno. Voy a describir las estrategias combinadas de cada bloque a continuación.

La combinación de las dos etapas A1-JT13, es una estrategia de modelización directa, que se puede observar en la Figura anterior 4.7.3, en la que, en la primera etapa se hace un agrupamiento sin representante de grupo. En este caso, los niños representan dos grupos de 10 con cubos encajables en barras. Para la segunda etapa representan 3 unidades más con cubos encajables. Para saber el total de elementos, se consideran todos los elementos o se juntan, y se realiza un conteo de uno en uno. Esta sesión se ha observado en 4 estudiantes. La longitud de las barras le permite comparar que ha puesto las dos cantidades iguales.

La Figura A1.7.13 es una representación de la estrategia A7-JT13. La única diferencia con A1-JT13, es que en la primera etapa se ponen representante de los grupos. En la imagen se puede ver como delante de las dos barras de 10 centicubos, hay otro cubito que representa a cada una de las cajas.

Figura A1.7.13. Estrategia A7-JT13 en la sesión 7

Tabla A1.39. *Estrategias adecuadas en la sesión 7*

	Estrategia primera etapa		Estrategia segunda etapa	F.A.
A1	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT13	Juntar todo con cubos encajados, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	4
A20	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT15	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	2
A23	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT18	Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A3	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A7	Agrupamiento con cubos encajados, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT13	Juntar todo con cubos encajados, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	2
A9	Agrupamiento con dibujos, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	JT18	Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	5
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	8
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	R7 y JT6	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (se van tachando las marcas y colocando en los grupos); Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A2	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	JT1	Juntar todo con cubos encajados, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A22	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno	JT3	Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A25	Agrupamiento con base 10, contando de uno en uno	JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	2
A27	Agrupamiento con base 10, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	1
A19	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	JT14	Juntar todo con cubos encajados, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1
A21	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	JT16	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1
A26	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de 10 en 10	JT20	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1
A24	Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración	EI2	Combinar decenas y unidades	2
CS1	Conteo a saltos de 10 en 10	CP1	Contar a partir del primero	1
EI1	Sumar un múltiplo de 10 a una década	EI2	Combinar decenas y unidades	1

Cuando los elementos del problema se representan gráficamente, ya sea con marcas o con dibujos, las estrategias que se han observado sin representante de grupo y contando de uno en uno, son A3-JT17 y A23-JT18, respectivamente. En la Figura A1.7.14 se puede ver una representación de cada una de ellas. En la primera, los representante son más simbólicos, y en la segunda, más icónicos.

Figura A1.7.14. Estrategias A3-JT17 y A23-JT18 en la sesión 7

Cuando los niños han utilizado representaciones gráficas, recuadrar o redondear los grupos de 10 lo he considerado como una representación del grupo. Así los niños dibujas 2 cajas con 10 patitos en cada una de ellas (ver Figura A1.7.15). Los patitos pueden ser dibujados de forma icónica, o de manera más simbólica. También añaden 3 patitos más para los elementos que están sueltos. Si el conteo se realiza de uno en uno, estas estrategias son A9-JT18 y A10-JT17, dependiendo si la representación es con dibujos o con marcas.

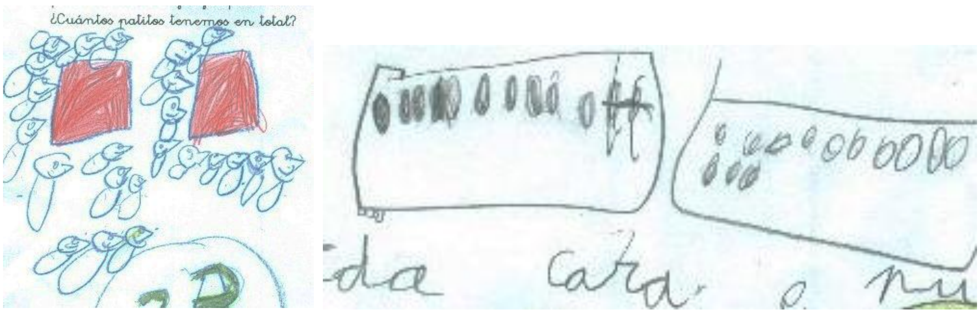


Figura A1.7.15. Estrategias A9-JT18 y A10-JT17 en la sesión 7

Estas dos estrategias has sido las más utilizados, seis niños utilizaron la estrategia con marcas y 4 estudiantes con dibujos.

El bloque siguiente que solo contiene la estrategia A10-R7-JT6, al realizarse el reparto de las 3 unidades en los grupos de 10, no puede contarse de 10 en 10, y el niño cuenta de uno en uno (ver Figura A1.7.10).

El siguiente bloque, el tercero, contiene dos estrategias en las que se añaden a una única colección los grupos que se van creando, por lo que el conteo también se realiza de uno en uno. Un alumno ha representado la primera etapa con cubos encajables, y los 3 elementos que se añaden para la segunda etapa son rotuladores. Ha utilizado distinto tipo de objetos para cada una de las etapas. En concreto, la representación final de la Figura A1.7.16, es la subvariante A2-JT1, donde los cubos encajables de la primera etapa se han añadido a una barra, lo que fuerza a un conteo de uno en uno, no puede contarse de 10 en 10, ya que no se diferencian los dos grupos.

Figura A1.7.16. Estrategia A2-JT1 en la sesión 7

En la siguiente Figura A1.7.17 las dos cantidades están representadas por centicubos pero al no formar barras, considero que el material son objetos. El primer niño si tiene los grupos separados y por lo tanto será A20-JT15. La representación utilizada permite contar los grupos de 10 en 10, y evolucionar a una estrategia más avanzada. El segundo niño tiene la cantidad de la primera etapa agrupada, y ha tenido que contar de uno en uno todos los centicubos, y después ha continuado contando 21, 22 y 23 (A22-JT3). La representación de esta estrategia no permite contar de 10 en 10 los grupos.

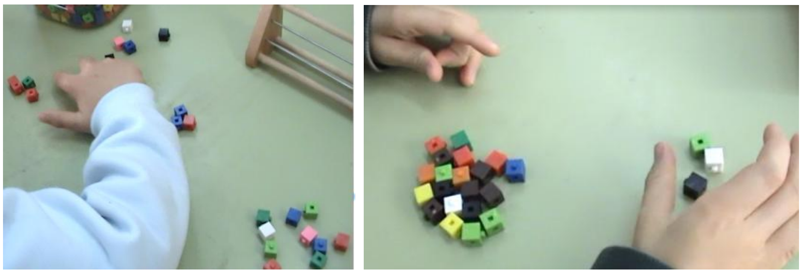


Figura A1.7.17. Estrategias A20-JT15 y A22-JT3 en la sesión 7

El cuarto bloque, contiene dos estrategias en las que se utiliza los bloques de base 10, y el recuento final se realiza de uno en uno. En esta sesión, sólo ha habido dos casos en los que se ha utilizado los bloques de base 10 para representar el problema, usando la estrategia de agrupamiento sin representante de grupo. Estos dos casos los niños han presentado dos barras de 10 y 3 unidades sueltas, y han contado el total de uno en uno, incluyendo las barras de 10. En la Figura A1.7.18 se puede ver la representación de esta estrategia A25-JT19.

Figura A1.7.18. Estrategias A25-JT19 en la sesión 7

Un estudiante realiza una estrategia similar, pero poniendo dos unidades que representan los dos grupos, las dos cajas del problema. Esta variante la denoto como A27-JT19, donde el conteo total de los elementos se realiza de uno en uno. En la Figura A1.7.19 hay una imagen de la ejecución de la estrategia.

Figura A1.7.19. Estrategia A27-JT19 en la sesión 7

Hasta este bloque, todas las estrategias realizan el conteo de uno en uno. El quinto bloque contiene estrategias en las que se realiza el conteo final de 10 en 10, estrategias más evolucionadas. En esta sesión, solo un alumno utiliza la estrategia con cubos encajables haciendo el recuento del total de elementos contando de 10 en 10, los grupos de 10, de uno en uno las unidades (A19-JT14). Otro alumno realiza la estrategia con objetos, contando también de 10 en 10 (A21-JT16). Otro que realiza el recuento de 10 en 10 de las cajas, por lo que tenemos la variante A26-JT20.

Un niño utiliza los diez dedos de las manos para representar cada grupo de 10, estrategia en la que se cuenta de 10 en 10 mostrando las dos manos. Después calcula que 20 más 3 es 23. Esta estrategia la denotado como A24-EI2, ya que representan los dos grupos con las dos manos mientras cuenta de 10 en 10, y luego utiliza el valor posicional para sumar 20 + 3.

Las dos últimas estrategias, ya no necesitan modelizar el problema. Son las estrategias más avanzadas, una de conteo a saltos única con conteo a partir del primero, y finalmente, una estrategia inventada basada en valor posicional de los números.

En la siguiente estrategia se comienza a utilizar las estrategias de conteo. CS1-CP1 consiste en contar de 10 en 10, tantos numerales como grupos hay, y luego cuentan de uno en uno las unidades sueltas. Esta estrategia se desglosa en los siguientes pasos. En este caso, 10 y 10, 20, y después, contar de uno en uno a partir del total anterior, 21, 22 y 23.

Por último, la estrategia más avanzada observada está basada en el valor posicional de las cifras. Así hay un niño que dice “10 + 10, son 20, más 3 unidades más 23”, lo que denomino EI1- EI2.

1.7.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

En este problema ha habido interpretaciones erróneas de lo que ocurría en el problema. Hay niños que interpretan que, de las dos cajas de patitos, se caían 3 patos al mar. En el cuento ocurre así, hay cajas de patitos y de ellas van cayendo patitos al mar. En este caso, los niños utilizaron estrategias para quitar 3 patitos a los 20 de la caja, tanto estrategias de modelización directa como quitar, como de conteo hacia atrás. Las describo a continuación.

A10-Q3: Los niños representan dos grupos de 10 con marcas en el papel y luego tachan, o representan, que quitan 3 marcas. Cuentan de uno en uno lo que queda sin tachar. En la Figura A1.7.20 podemos ver dos formas de quitar los 3 patitos, tachando o relacionándolo con líneas.

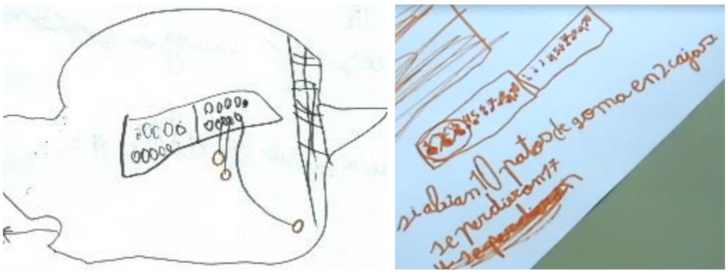


Figura A1.7.20. Estrategia A10-Q3, inadecuada en la sesión 7

También se ha dado esta estrategia utilizando dibujos de patitos en tres ocasiones, estrategia que denoto A9 – Q4.

Una estrategia de modelización directa en la que se ha interpretado que los patitos sueltos había que quitarlos es A5 – Q5, que conlleva el uso del rekenrek. Los niños representan dos grupos de 10 con las bolas del rekenrek, y luego retiran 3. Es importante observar que los niños que han utilizado esta estrategia no han utilizado la configuración del rekenrek, no reconocían las cantidades inmediatamente. Cuentan, de uno en uno, lo que queda.

Un niño utiliza el conteo a salto para saber cuántos patos hay en las dos cajas y luego el conteo hacia atrás para quitar los 3 patos (CS1-CA1). Cuando se le explica que no se caen los patos, enseguida aplica el conteo progresivo y resuelve el problema

Continuando con la comprensión del enunciado en relación al cuento, hay niños que no cuentan los 3 patitos y se quedan solo con las dos cajas. De hecho, hay niños que pintan los patos en el mar. En la Figura A1.7.21, se puede ver como el estudiante A17 pinta los 3 patos en el agua y las dos cajas sobre el barco. Antes de resolver, preguntó si los patos que se caen había que "ponerlos o quitarlos".

Figura A1.7.21. Representación de los patos en el agua del estudiante A17 en la sesión 7

Las estrategias que no han tenido en cuenta los patitos sueltos ni para sumar y para quitar, han consistido en hacer *Agrupamiento con dibujos* (A9), *marcas* (A10) *y cubos encajables* (A7), y no realizar la segunda etapa. En la Figura A1.7.22, el estudiante A13 representa los dos grupos y los 3 sueltos pero solo cuenta los dos grupos. Le salen 21 porque se confunde en el conteo.

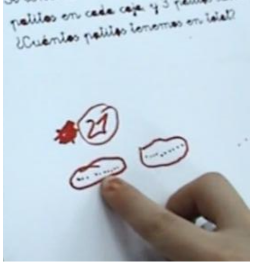


Figura A1.7.22. El estudiante A13 representa utiliza la estrategia A10

Al haber grupos y elementos por grupos, hay niños que representan los grupos con un objeto o marca, y luego, en el recuento final de los elementos por grupos, los incluyen en la colección a contar (*incluir el representante del grupo en el recuento final*). Solo se da en dos estudiantes esta dificultad, que cuando se les aclara, que necesitamos saber los patos que hay, rápidamente no los cuentan. Una dificultad mayor relacionada con distinguir los dos tipos de cantidades que se presentan en estos problemas, es la de un estudiante que en un primer intento dibuja cajas, 23 cajas, pero no entiende que tiene que hacer con los patos en las cajas, él solo dibujo cajas y decía que había “trece” cajas, y no sigue resolviendo (*no distingue las cantidades de un problema de agrupamiento)*.

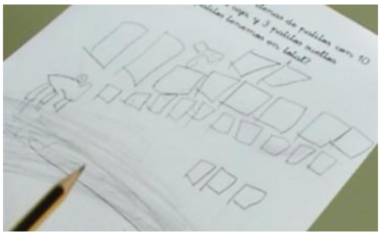


Figura A1.7.23. Representación de cajas del estudiante A30 en la sesión 7

Sobre la escritura de los numerales, y la secuencia, hay niños que confunden el 23 con el 13 al escribirlo, incluso una vez escrito, a leer el 23, dicen trece. Un niño, en la secuencia de numerales, utiliza el “veintitrece”. En procedimientos de conteo, contar a partir de un numeral, un niño incluye ese numeral para llevar el rastro de los numerales que cuentan. Por ejemplo, a partir de 20 contar 3 más, es 20, 21, 22,

Otra dificultad fue al nombrar el numeral correspondiente a la cifras que corresponde a los dos grupos que serían 2 decenas, y las 3 unidades sueltas. Así le ocurrió a A44, que en un principio, dio por respuesta “32”. Esto indica una primera intuición de que los grupos de 10 ocupan una posición en los números de dos cifras, y una colección de menos de 10 unidades ocupan otro otra posición (*Confundir la posición de decenas y unidades al nombrar un numeral*).

El alumno A21 representa dos grupos que contienen 10 y 3 elementos más, por lo que la representación final tiene dos grupos de 13 elementos.

El alumno A47 considerar 2 grupos de 5 en vez de grupos de 10, utilizando una fila del rekenrek, y luego, 3 patitos sueltos representados con 3 bolas de la fila de abajo.

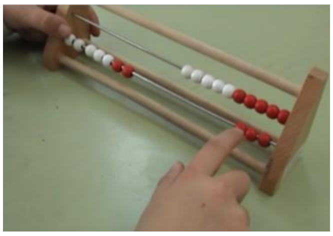


Figura A1.7.24. Estudiante A47 con la estrategia errónea

En una puesta en común, un niño intenta utilizar la Tabla 100, indicando los numerales implicados, pero no reflejando las acciones y relaciones que hay entre ellas. No consigue realizar una estrategia con ellas. En la Tabla A1.40, muestro la frecuencia de las dificultades y estrategias inadecuadas utilizadas.

Tabla A1.40. *Dificultades y estrategias inadecuadas en la sesión 7*

Estrategia o dificultad	*Frecuencia*
Agrupamiento - Quitar	9
Conteo a saltos – Conteo hacia atrás	1
Agrupamiento – ignorar unidades	3
Error al escribir 23 (por 13)	2
Error al nombrar 23 (trece, “veintitrece”)	1
No comprensión cantidades involucradas en un problema de agrupamiento	1
Errores de conteo	2
Incluir el representante del grupo en el recuento final	2
Confundir la posición de decenas y unidades al nombrar un numeral	1
2 grupos d 10+3	1
Formar grupos de 5	1

Los errores observados se deben a dificultades al realizar la tarea, por lo que muestro en la siguiente Tabla A1.41, las dificultades y errores observadas en esta sesión.

Tabla A1.41. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 7*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
	No utilizar todas las cantidades del enunciado (E6)
	Dar como solución una cantidad del problema (E10)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
Dificultad en la escritura de los numerales	Escritura errónea de números de dos cifras (E7)
No adquisición de la secuencia de numerales	Error al nombrar numerales de dos cifras (E11)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Contar el número de grupos (E8).
	Confundir número de grupos y elementos por grupo (E9)
	Formar grupos de diferente cantidad a la dada (E12)

1.7.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones de las cantidades observadas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.42. La representación más común para la resolución es la A1, representación icónica del número y sin representación del objeto. En esta categoría, 14 de las representaciones utilizadas, registradas en las grabaciones y hojas de registro, son con objetos.

Tabla A1.42. *Representaciones encontradas en la sesión 7*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R, B10)	19 (2, 0, 16, 0,0,1)	33 (10, 4, 12, 2,2,3)	1 (1,0,0,0,0,0)	
1	B1 (I, D, C)	1 (1,0,0)	7 (7,0,0)	0	
	C1				
	A2		3		
2	B2				
	C2				
	A3		3	30	26
3	B3				1
	C3			1	9
	A4				1
4	B4				
	C4				2

En esta sesión aparece un tipo de representación no clasificada en la categorización inicial, en la que aparece el tipo de objeto con una representación icónica, y el número aparece como simbólica e icónica. En la Figura A1.7.25 el estudiante A27, dibuja patitos numerados. Los iconos de los patos junta con la cantidad de los patos, indican que es una representación B1, al ser los patos iguales B1I. Al lleva una secuencia de numerales tiene esa componente simbólica de objeto, icónica de número que corresponde a una representación A2. Esta representación A2 se utiliza para llevar el conteo de los elementos y evitar equivocaciones.

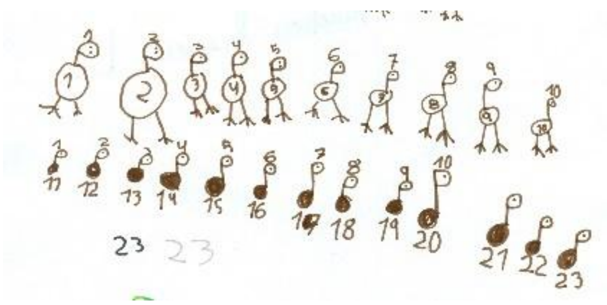


Figura A1.7.25. El estudiante A27 representa los patitos numerados en la sesión 7

Otra representación curiosa en esta sesión es la observada en esta carta donde se utiliza representación simbólica con cifras del número e icónica de objeto (B3). Primero el niño utiliza "diez patitos" que es simbólica de número y objetos (C3), pero después utiliza icónica para indicar que son 10 patos (B3).

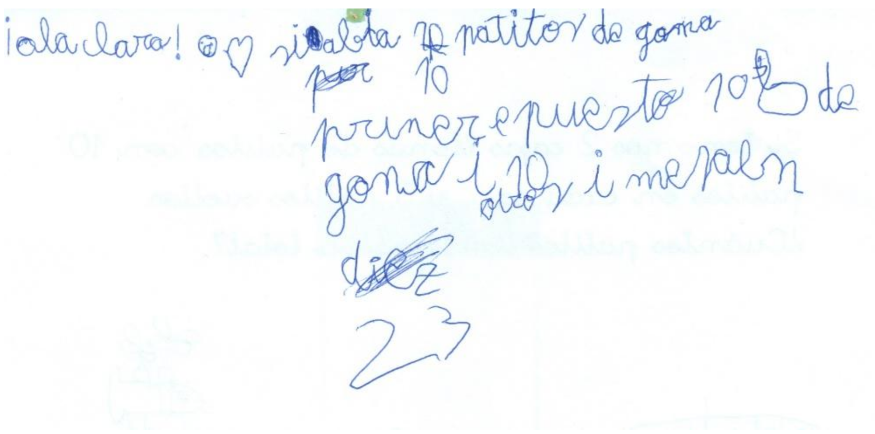


Figura A1.7.26. Representaciones C3 y B3 en una carta en la sesión 7

1.7.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Para poder realizar un camino de aprendizaje de la tarea, realizo un análisis de las estrategias utilizadas por los niños, para identificar las capacidades necesarias para cada una de ellas.

En la sesión 4 en la que se resuelve un problema de agrupamiento, no se utiliza los bloques de base 10, y en esta sesión aparece como una nueva capacidad.

> C58. Formar un número de grupos con bloques de base 10.

Se utiliza la estrategia de conteo a saltos de 10 en 10, por lo que se necesita la capacidad:

> C59. Enunciar la secuencia numérica de 10 en 10, un número de veces dado, llevando el rastro con los dedos o con una representación mental.

En esta sesión hay niños que ya identifican la descomposición en décadas y unidades.

> C60. Identificar el número de dos cifras que corresponde a una descomposición de una década (10, 20, 30,..) y unidades (1, 2, 3,…).

Para la segunda etapa se utiliza Contar a partir del primero que supone utilizar la capacidad:

> C61. Enunciar la secuencia de numerales hacia delante, una cantidad de numerales dado, desde cualquier numeral, contando de uno en uno, llevando el rastro mentalmente, o con ayuda de la configuración de los dedos.

Un niño recupera la suma de 10 + 10 rápidamente, por lo que empieza a utilizarse la capacidad:

> C62. Sumar 10 a una década.

Además, en esta sesión se cuenta de 10 en 10 grupos de contadores individuales construidos por los niños.

> C89. Determinar el cardinal de una colección hasta 100, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno los elementos sueltos.

Con estas capacidades la resolución de la tarea queda reflejada en el grafo de la Figura A1.7.31.

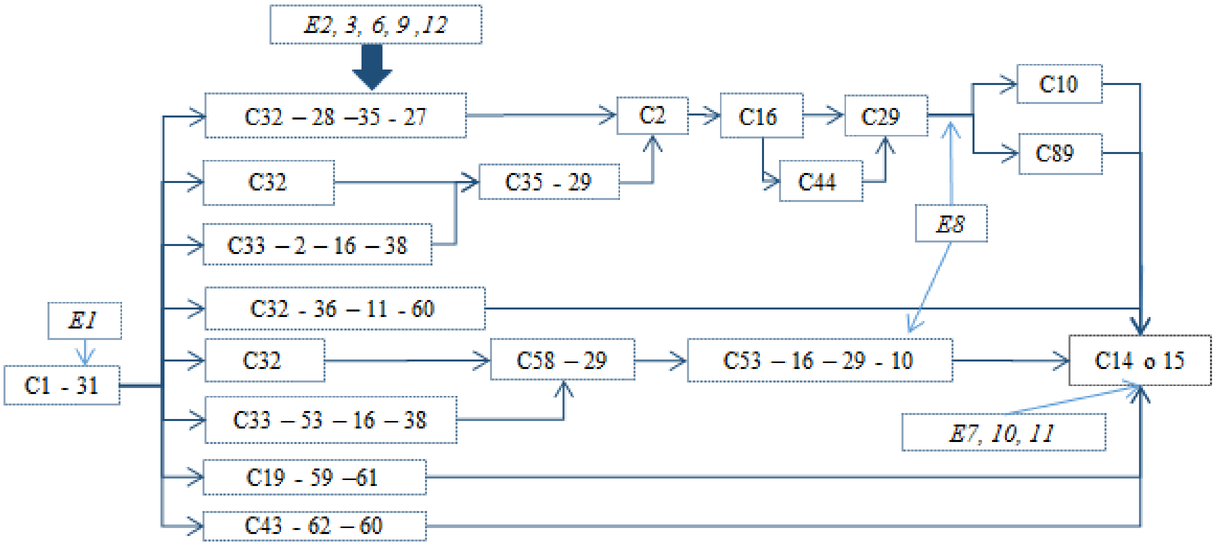


Figura A1.7.27. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 7

Las estrategias A1-JT13, A20-JT15, A23-JT18 y A3-JT17 mantienen separados los grupos sin representante del grupo en la primera etapa, y se consideran junto con las unidades, haciendo el recuento de uno en uno. Por lo tanto siguen la secuencia de capacidades C1 – C31 - C32 – C35 – C29 – C2 – C16 – C29- C10 - (C14 o C15).

Las variantes anteriores, realizando el conteo de 10 en 10 son A26-JT20, A19-JT14 y A21-JT16. La secuencia es similar a excepción del recuento: C1 – C31 - C32 – C35 – C29 – C2 – C16 – C29- C89 - (C14 o C15).

Las estrategias A7-JT13, A9-JT18, A10-JT17 Y A10-(R7-JT10), a diferencia de las anteriores, representan la cantidad número de grupos. Por lo tanto siguen una secuencia de capacidades C1 – C31 - C33– C2 – C36 - C16 – C35 – C29 – C2 – C16 – C29- C10 - (C14 o C15). La estrategia A10-R7-Jt10 solo hay que incluir C44 tras representar las unidades.

Las estrategias A2-JT1 Y A22-JT3, no tienen representante de grupo, y las colecciones de la primera etapa se añaden a una única colección, dejando separadas las unidades en la segunda etapa. Por lo tanto, sigue una secuencia C1 – C31 – C32 - C28 – C35 – C27 – C2 – C16 – C29- C10 - (C14 o C15).

Las estrategias con base 10 son, sin representante de grupo A25-JT19, secuencia C1 – C31 – C32 - C58 –C29 – C53– C16 – C29 – C10 - (C14 o C15), y con representante de grupo A21-JT19, que sigue la secuencia de capacidades: C1 – C31 – C33 – C53 – C16 - C38 - C58 – C29 – C53 –C16 - C29 – C10 - (C14 o C15).

La estrategia A24-EI2 sigue una secuencia de capacidades C1 – C31 – C32 – C36 – C11 - C60 - (C14 o C15). La estrategia de conteo a saltos para la primera etapa, y contar a partir del primero en la segunda, la secuencia es ACSC10-CPC1: C1 – C31 – C19 - C59 - C61 – (C14 o C15).

La estrategia más avanzada donde se utiliza el valor posicional y combinar decenas y unidades es el camino C1 – C31 – C43 – C62 – C60 - (C14 o C15).

1.8. Sesión 8

Esta sesión corresponde a la última sesión del primer trimestre, y no pude asistir. Aun así, prepare la sesión, las hojas de registro y hojas de trabajo para que las tutoras pudieran llevarlo a cabo. En las sesiones estuvieron las tutoras de cada grupo, Beatriz Escorial para darles apoyo, y la directora del Centro que quiso participar en la recogida de las explicaciones de los niños. El problema planteado es el primero de división medida con grupos de 10 y resto, propuesto para desarrollar la comprensión de la decena. La recogida de datos de esta sesión consiste solo en las hojas de trabajo de los niños y las hojas de registro recogidas por las tutoras y Beatriz Escorial.

Tabla A1.43. *Características principales de la octava sesión*

Problema	Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?
Tipo de problema	Problema de grupos iguales, de división medida con grupos de 10 y resto.
Cantidades	Máxima cantidad 26.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, bloques de base 10
Fecha	16 de Diciembre
Cuento	Diez patitos de goma
Asistentes	26 (de 28 de 1ºA) y ¿? (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, maestra con experiencia CGI y la directora del centro.
Recogida de datos	Hojas de registro y hojas de trabajo de los niños.

1.8.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión, los niños reciben una felicitación de Navidad con fotos de Clara vestida de Papá Noel. Solo tengo la información de las tutoras en las hojas de registro y las hojas de trabajo de los niños que procedí a escanear. En la Figura A1.8.1 muestro el resumen de la resolución de los alumnos. De los 52 asistentes, 34 eligen una estrategia adecuada pero solo 28 dan la respuesta correcta. Del grupo B no tengo anotados cuales son ausentes y cuales no registrados, por lo que puede haber sido algo diferente a la realidad.

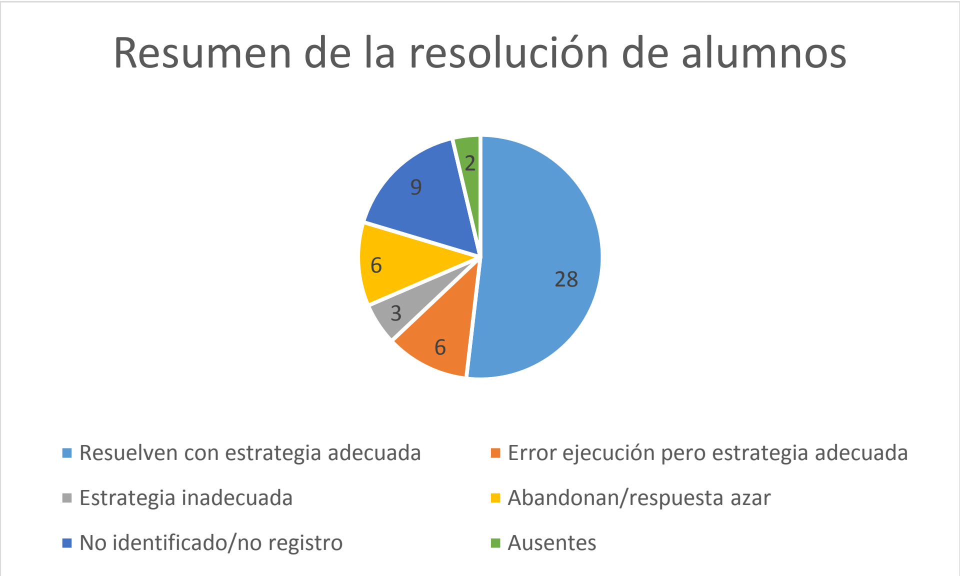


Figura A1.8.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 8

1.8.2. Estrategias observadas

Las estrategias que resuelven los problemas de división medida con resto son estrategias de *Medida* (M), según indican los estudios previos. En estos problemas se conoce el total de elementos y los elementos que hay en cada grupo, y hay que ir haciendo grupos hasta que se complete el total de elementos. Una vez hecho este agrupamiento, se cuenta el número de grupos, y los elementos que no completen un grupo, es el resto.

Comenzando por las representaciones gráficas, distingo entre *Medida con marcas* y *Medida con dibujos*. En la Figura A1.8.2, la imagen de la izquierda tiene representaciones gráficas con marcas, y la imagen de la derecha, representaciones gráficas con dibujos.

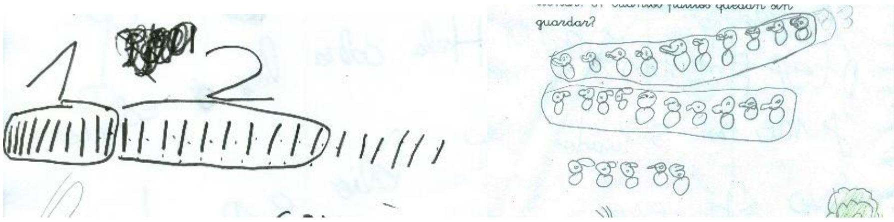


Figura A1.8.2. Representaciones de Medida con marcas y dibujos en la sesión 8

El otro material utilizado en esta sesión son los cubos encajables. Cuando los niños construyen barras con este material que les permite comparar longitudes, denomino esta variante como *Medida con cubos encajables*. Si los cubos no son encajados, las estrategias las incluyo dentro de *Medida con objetos*. En esta sesión, al solo tener hojas de registro y no poder comprobar como representaban las cantidades con los cubos encajables, solo en dos casos se explicita en el detalle que se construyen barras. Los demás casos, los he incluido en la estrategia con objetos.

Dentro de estas estrategias aparecen las dos variantes dependiendo de, si primero se representa la cantidad total de elementos, o si por el contrario, se van haciendo grupos hasta completar el total de elementos. En la variante *Medida con marcas, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto* (M1), primero se forma una colección de marcas con tantos elementos como la cantidad total del problema. Después se hacen grupos de con el número de elementos por grupos que indica el problema, en este caso 10. Finalmente, se cuenta el número de grupos formados por un lado, y por el otro lado el número de elementos sueltos. Esta estrategia se ha observado con cubos encajables, *Medida con cubos encajables formando barras, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto* (M4), y con objetos, *Medida con objetos, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto* (M3).

La imagen de la izquierda de la anterior Figura A1.8.2 corresponde a una representación de esta variante. Si por el contrario se van añadiendo grupos de 10 hasta completar el total de elementos, tenemos la variante *Medida con dibujos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto* (M7), que aparece a la derecha de esa misma Figura A1.8.2. Las representaciones pueden ser con marcas, *Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto* (M2).

En esta sesión aparece una forma de agrupar representaciones gráficas (marcas o dibujos) *por líneas*. Esta variantes son *Medida con marcas, representando total de elementos primero, e ir representando cada grupo al que se le une tantos elementos por grupo como indica el problema, hasta agotar el total* (M5), y *Medida con dibujos, representando total de elementos* *primero, e ir representando cada grupo al que se le une tantos elementos por grupo como indica el problema, hasta agotar el total* (M6). En la Figura A1.8.3 se puede observar cómo se relaciona 10 patitos con cada una de las cajas. Puede ser normal confundirse luego en el conteo de los que quedan sin meter en cajas.

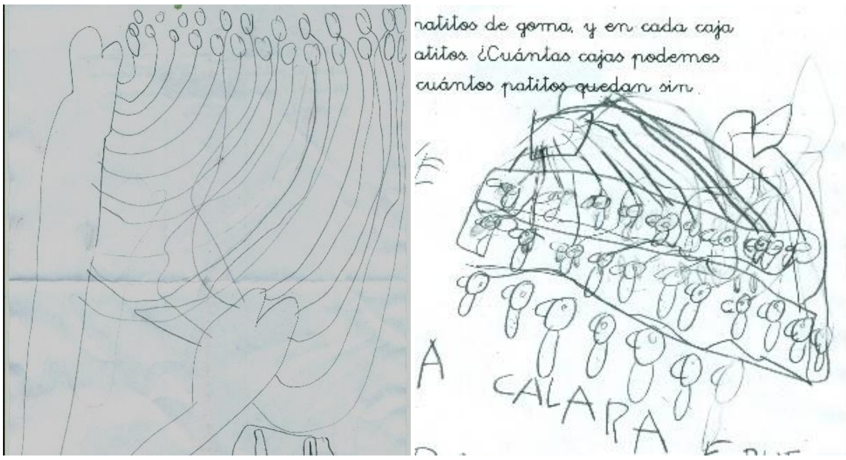


Figura A1.8.3. Representaciones de M5 y M6 en la sesión 8

Un niño utiliza la estrategia de *Medida quitando con los dedos* de manera *reiterada, utilizando la configuración de las manos* (M18). Representa 26 mostrando dos veces las dos manos, y luego 6 dedos más. Quitar 10 y se imagina que le quedan dos manos y 6 dedos. Luego quita otros 10, y solo le quedan 6 dedos. Sobran 6, y las dos veces que ha quitado las manos, 2 cajas.

Por último, en esta sesión tres alumnos utilizan la estrategia de conteo *Contar a saltos para Medida*, contando de 10 en 10 hasta completar la década y lo que le queda son las unidades sueltas. Como es de 10 en 10 la he denotado *Conteo a saltos para medida de 10 en 10* (CS2).

En la Tabla A1.44 muestro las estrategias recogidas por las tutoras en hojas de registro y lo observado en las hojas de trabajo. Las estrategias más frecuentes son las variantes de Medida en la que se forman primero el total de elementos con marcas y con cubos encajables.

Tabla A1.44. *Estrategias adecuadas en la sesión 8*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
	Con marcas (M1)		1
		Representando el total primero (M1)	7
		Añadiendo grupos hasta total (M2)	6
		Relacionando con líneas (M5)	1
Medida (M)	Con dibujos MGd	Relacionando con líneas (M6)	1
		Añadiendo grupos hasta total (M7)	1
	Con cubos encajados (MOc)	Representando el total primero (M4)	2
	Con objetos (M3)		8
		Representando el total primero (M3)	5
	Con los dedos	Quitando reiteradamente (M18)	1
Conteo a saltos para medida (CS)		De 10 en 10 (CS2)	3

1.8.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Las hojas de registro y de trabajo me permiten identificar niños que no entienden la idea de agrupar los elementos en grupos. Un niño contesta que necesita 26 cajas, una para cada pato. Otros dos niños deciden meter a todos los patos en una caja.

Hay tres niños que en vez de dar por respuesta 2 cajas, dicen 20 patitos, entiendo que refiriéndose a los que pueden meter en cajas de 10. Incluso, una niña escribe 20 cajas.

Tabla A1.45. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 8*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Confundir número de grupos y elementos por grupo (E9)
	No indicar las dos respuestas en un problema de división medida con resto (E13)
	Despreciar el resto en un problema de división medida con resto (E14)

1.8.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones recogidas en esta sesión las muestro en la siguiente Tabla A1.46. Al separar la representación de los grupos del total de elementos, describo como los niños representan esas cajas. Solo un niño coloca un cubo encajable por cada caja que va construyendo.

Tabla A1.46. *Representaciones encontradas en la sesión 8b*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm)	18 (0, 1, 17)	33 (2, 12, 19)	2 (1, 0, 1)	
	B1 (I)		2 (2)	0 (0)	
	C1				
2	A2	1	2	1	
	B2				
	C2				
3	A3		1	18	10
	B3				
	C3			4	17
4	A4			1	4
	B4				
	C4				1

Sin embargo, representaciones gráficas (A1Gm) de las cajas aparecen 17, ya que he considerado que los recuadros o redondeos que hacen los niños para marcas las cajas son representaciones de los grupos. En la Figura A1.8.4 las dos imágenes tienen esta representación. En la imagen de la derecha además, los grupos están numerados, posiblemente para contar el número de grupos que hay finalmente, pero he incluido la representación A2, por este caso en concreto.

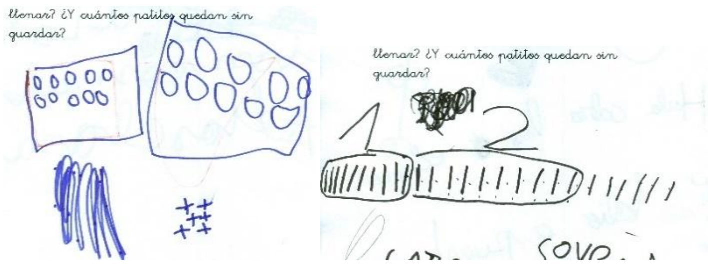


Figura A1.8.4. Representaciones de los grupos en la sesión 8

La representación A2 para el total de elementos se puede ver en la siguiente Figura A1.8.5. Esta representación también les sirve a los niños para no fallar en el conteo al formar las colecciones, cada vez mayores, de elementos, al aparecer marcas, en el recuento de representaciones incluyo las dos. Además se puede ver la representación C3 ("2 cajas" y "6 patitos" para dar la solución.

Figura A1.8.5. Representaciones A2 y C3 en la sesión 8

Por último, muestro una representación icónica de objetos y de número de los patitos (B1I) donde todos los patitos son iguales. Además, en esta resolución, es curiosa la forma de relacionar los objetos de cada grupo.

Figura A1.8.6. Representación B1I en la sesión 8

1.8.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Para resolver el problema, los niños deben ser capaces de distribuir una cantidad total en grupos de una cantidad dada, o ir formando grupos hasta conseguir esa cantidad.

> C63. Distribuir una colección en grupos de una cantidad dada.
>
> C64. Formar grupos de marcas, dibujos u objetos, de una cantidad dada, hasta completar un total de elementos, también dado.

Finalmente, se debe contar el número de grupos que se forman y las unidades sueltas, dos unidades de distinto orden.

> C65. Determinar mediante el conteo el número de grupos y las unidades sueltas, de una colección distribuida en grupos.

En esta sesión, se ha dado el caso de representar el total de elementos con marcas, e ir representando los grupos mientras se unen con líneas los elementos a cada grupo.

> C66. Distribuir una colección de marcas en grupos representados, uniéndolos con líneas.

Este problema se puede resolver considerando el número de grupos, las veces que se le puede quitar 10 a 37. Un niño utiliza esta estrategia con las manos.

C67. Quitar reiteradamente una cantidad a una colección hasta que no se pueda quitar esa cantidad entera, llevando el rastro de las veces que se quita.

Por último, las capacidades utilizadas para ejecutar la estrategia *Conteo a saltos de 10 en 10* en esta sesión, son:

C68. Descomponer un número de dos cifras en década y unidades.

C69. Enunciar la secuencia de numerales de 10 en 10 desde cualquier década hasta otra, llevando el rastro de los numerales enunciados, ya sea con los dedos o con una representación mental, para saber cuántos grupos de 10 hay.

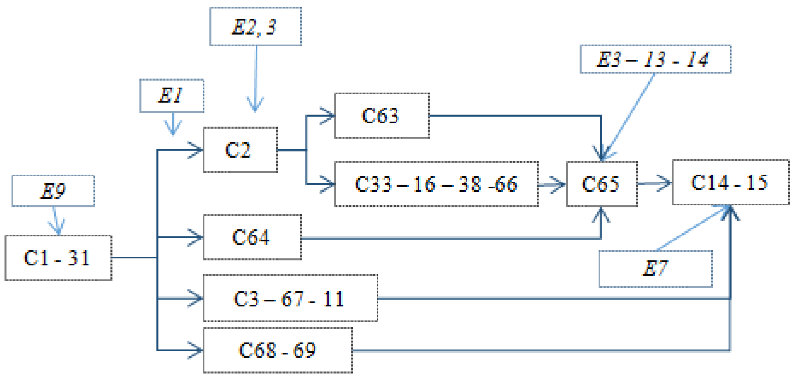


Figura A1.8.7. Camino de aprendizaje para el problema de la sesión 8

La estrategia de *Medida con marca contando primero el total de elementos* (M1) se consigue siguiendo el siguiente camino de aprendizaje, utilizando las siguientes capacidades.

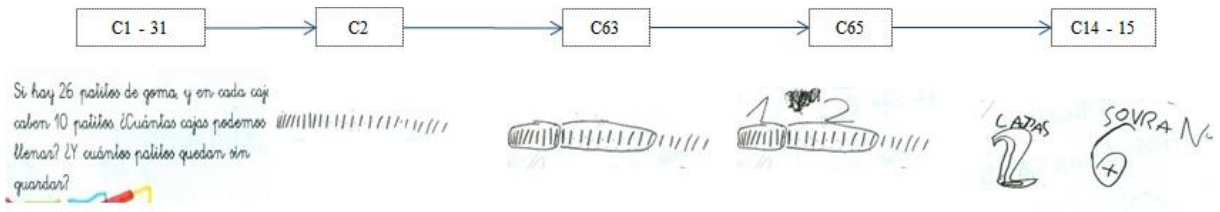


Figura A1.8.8. Capacidades para la estrategia M1 en la sesión 8

1.9. Sesión 8b

Esta sesión es la primera del segundo trimestre, después de las vacaciones de Navidad. Como la sesión anterior no pude asistir, se repitió el tipo de problema para poder recoger con más detalle las estrategias utilizadas por los niños. El tipo de problema vuelve a ser de grupos iguales de división medida con resto y con agrupamientos de 10. Recuerdo que en este tipo de problemas hay que dar dos soluciones, el número de grupos formados y el número de elementos que sobran, el resto.

Tabla A1.47. *Características principales de la "octava b" sesión*

Problema	Si hay 34 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?
Tipo de problema	Problema de grupos iguales, de división medida con grupos de 10 y resto.
Cantidades	Máxima cantidad 34.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, bloques de base 10
Fecha	13 de Enero
Cuento	Diez patitos de goma
Asistentes	26 (de 28 de 1ºA) y 26 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, alumnos de prácticas y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.9.1. Desarrollo de la sesión

Las fases de la sesión se realizaron ya sin dificultad. El registro fue más ágil al ser más personas en cada taller.

En la Figura A1.9.1 se recoge las frecuencias absolutas sobre la resolución del problema. De los 52 asistentes, 31 alumnos eligen una estrategia adecuada, siendo 29 de ellos los que dan la repuesta correcta. Aunque no se vea reflejado en el gráfico, de los 29 que considero que daban la respuesta correcta, 6 solo escribían que la solución era el resto, aunque en su procedimiento se ve cómo construyen las cajas con 10 patitos.

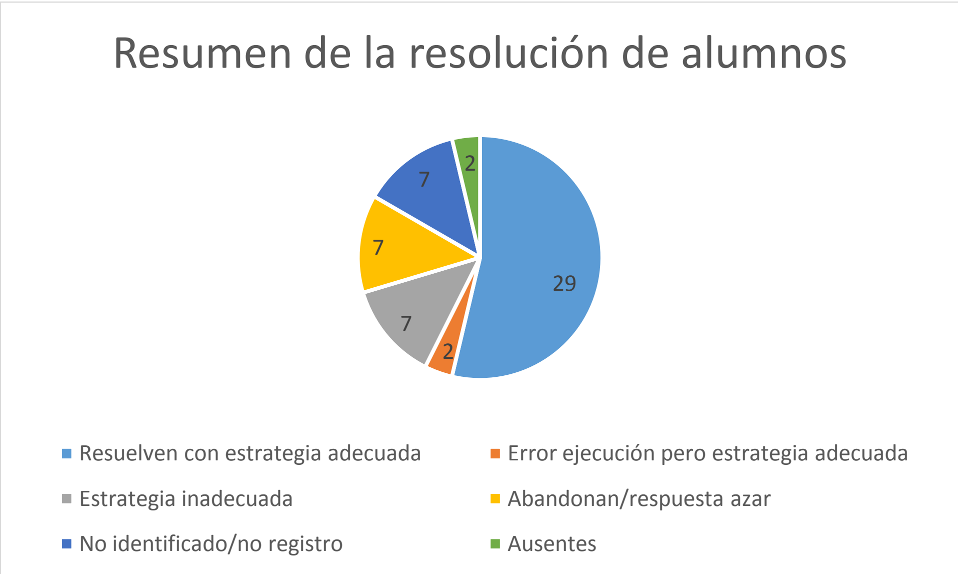


Figura A1.9.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 8b

1.9.2. Estrategias observadas

Las estrategias observadas en esta sesión están basadas en la estrategia de *Medida* (M), tal como la define el marco teórico, y ya se ha visto en la sesión 8. En la sesión pasada, ya he descrito estrategias con representaciones gráficas. En la variante *Medida con marcas, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto* (M1), primero se forma una colección de marcas con tantos elementos como la cantidad total del problema. Después se hacen grupos con el número de elementos por grupos que indica el problema, en este caso 10. Finalmente, se cuenta el número de grupos formados por un lado, y por el otro lado el número de elementos sueltos. En la Figura A1.9.2, en la imagen de la izquierda, una niña dibuja las 34 marcas en el papel y según las va metiendo en cajas de diez, las va tachando y borrando. Comprueba que ha llenado 3 cajas y que le quedan 4 que no llenan una caja entera. En la imagen de la derecha, tras dibujar los 34 patitos, se van redondeando en grupos de 10 hasta que no se puede completar un grupo entero. Entonces se cuenta el número de grupos y los patitos que quedan sueltos.

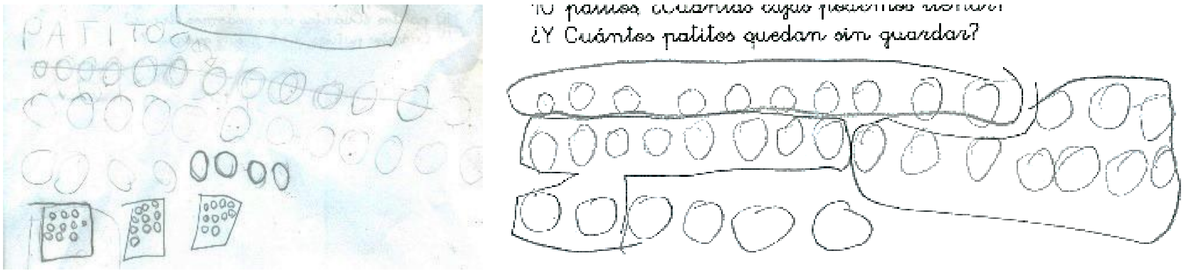


Figura A1.9.2. Estrategia M1 en la sesión 8b

La variante *Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto* (M2) es una estrategia de modelización directa en la que se van haciendo grupos de 10 marcas en el papel, y se comprueba continuamente cuantos objetos se lleva hasta que se consigue la cantidad total de elementos. Se cuentan los grupos de 10 que han salido por un lado, y por otro, los elementos sueltos. En la Figura A1.9.3 se puede observar la representación de un alumno utilizando esta estrategia donde se van construyendo los grupos de 10 por separado, sin haber puesto el total de elementos al principio.

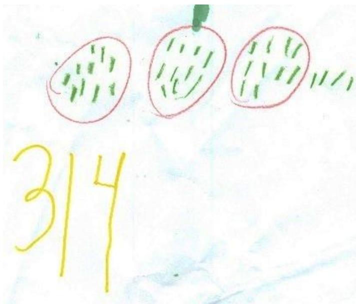


Figura A1.9.3. Estrategia M2 en la sesión 8b

Un caso particular que se ha dado en esta estrategia, es incluir un grupo más para guardar los patos restantes. La variante *Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total, completando el último grupo para tener todo organizado en grupos* (M8). En la Figura A1.9.4 se puede ver dos ejemplos. La imagen de la derecha, la niña incluye una caja más aunque se equivoca en el conteo y pone 5 patitos. En la imagen de la derecha, el niño explica que en la cuarta caja faltarían 6 para completarla.

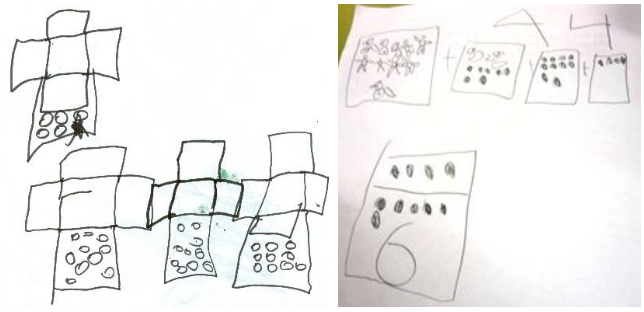


Figura A1.9.4. Estrategia M8 en la sesión 8b

La variante con cubos encajables formando barras o figuras, es *Medida con cubos encajables formando barras, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto* (M4). Esta estrategia consiste en representar el total de los elementos con cubos encajados, e ir agrupando en barras de 10 hasta que no se puedan completar un grupo de 10. Se cuenta el número de grupos completos, y el resto será el número de objetos que sobran. En la Figura A1.9.5, en la primera imagen aparece la niña con una barra de 34 cubos, y está quitando los primeros 10 para hacer el primer grupo. En la segunda imagen quita el segundo grupo. En la tercera imagen, quita otros 10 que son la tercera decena, y en la última imagen la tutora muestra las 3 cajas, las tres barras de 10, y la niña sostiene los 4 que quedan.

Figura A1.9.5. Estrategia M4 en la sesión 8b

En la Figura A1.9.6 muestro la diferencia entre la estrategia *Medida con cubos encajables formando barras*, en la imagen de la izquierda, y *Medida con objetos*, en la imagen de la derecha. Cuando los cubos encajables se utilizan formando barras, su longitud puede ayudar a confirmar que estamos construyendo grupos de igual cantidad. Sin embargo, cuando se realizan montones de cubos, no se pueden comparar por su longitud, y por lo tanto lo incluyo en estrategia con objetos.

En la imagen de la derecha, un alumno va formando grupos de 10 hasta completar los 34 patitos. Esta estrategia es *Medida con objetos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto*. Va formando grupos de 10 con los cubos encajables. Además va construyendo un *representante por grupo*, como se puede ver en la Figura A1.9.6. Los representantes de los grupos son diferentes a los elementos por grupos, lo que les permite diferenciar los que son cajas de lo que son patitos. Por lo tanto, la variante es *Medida con objetos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, poniendo un representante por cada grupo construido, identificando número de grupos y resto* (M9).

Figura A1.9.6. Estrategia M4 y M9 en la sesión 8b

En esta sesión, un estudiante utiliza una estrategia de conteo apoyándose en la Tabla 100. La variante *Medida con la Tabla 100* (M10) es una estrategia que se encuentra entre modelización y conteo a saltos, ya que se apoya en la tabla 100, y se cuenta las filas que hay hasta la cantidad total del problema, que serán el número de cajas, y las unidades (numerales) que hay hasta la cantidad total, el resto. Así, la primera fila son 10, la segunda fila otros 10, que ya son 20, y la tercera fila otros 10, que ya son 30, serán 3 grupos o cajas de patos en este problema. Hasta 34, hay 4 unidades más que son los patitos sueltos.

Dos alumnos utilizan *Conteo a saltos de 10 en 10* (CS2), contando de 10 en 10 hasta la década, de donde cuenta los grupos, y el resto son los que quedan sueltos. El número de dieces contados es el número de grupos, y después se realiza un conteo o recuperación de un hecho numérico hasta la cantidad total.

Uso el valor posicional usando la posición de las cifras (VP-PC). Fijándose en la cantidad total de elementos, extraen las decenas como grupos y unidades como resto. En la siguiente transcripción, se observa como un niño identifica que el 3 del numeral 34, son 3 cajas, 3 grupos de 10.

A38: [Con una barra enorme de multicubos]. Aquí hay 3 cajas… [Coloca 3 centicubos]. Y en cada caja he repartido 10. Y como no caben más, he dejado 4 fuera.
Mónica: Y… ¿por qué has elegido tres cajas?
A38: Porque como un 34 son 3…, deberían ser 3 cajas.

En la siguiente Tabla A1.48 se recoge la frecuencia absoluta de las estrategias recogidas en la sesión 8b.

Tabla A1.48. *Estrategias adecuadas en la sesión 8b*

Estrategia	*Material*	*Variantes*	*Subvariantes*	*F.A.*
Estrategia de Medida (M)	Con marcas (M1)	Representando el total primero (M1)		11
		Añadiendo grupos hasta total (M2)		4
			Un grupo más (M8)	2
	Con cubos encajados (M4)			2
		Representando el total primero (M4)		8
	Con objetos	Añadiendo	Representado el grupo (M9)	1
	Con Tabla 100 (M10)			1
Conteo a Saltos (CS)	De 10 en 10 (CS2)			2
Uso de Valor posicional (VP1)				1

1.9.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Las estrategias inadecuadas observadas han variado desde simplemente no entender qué cantidades corresponden con el número de grupos y cuáles con la cantidad de elementos por grupos, a estrategias no relacionadas con el problema como *Juntar todo* o *Quitar*. Incluso un niño, ha dado como respuesta “Muchos, por lo menos 10” por parecerle una cantidad muy grande de patos a meter en cajas, tras dibujar los 34 puntitos que representan los patos (ver hoja de trabajo en Figura A1.9.7).

Figura A1.9.7. Respuesta “Muchos” en la sesión 8b

Dos estudiantes han elegido estrategias de *Medida* pero no han considerado bien los grupos y los elementos por grupos. Han utilizado *Medida con cubos encajados con agrupamientos erróneos*, y *Medida con marcas con agrupamientos erróneos*. Los niños representan una cantidad total de elementos, pero los agrupamientos realizados no son correctos. En la Figura A1.9.8, una niña, realiza agrupamientos de 5 y no completa la cantidad total de elementos.

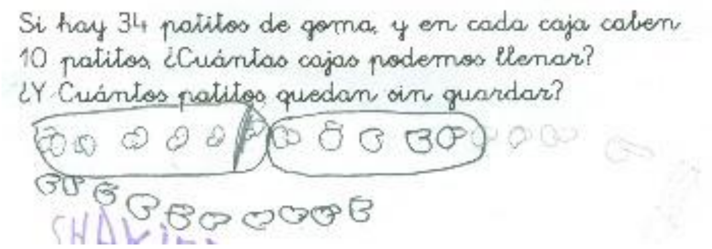


Figura A1.9.8. Estrategia Medida con agrupamientos incorrectos en la sesión 8b

Una estudiante realiza un *Reparto* con objetos en 10 grupos. En la Figura A1.9.9, la imagen corresponde a una niña, que presenta dos dificultades. La primera que ha formado una colección total de 43 elementos, y la segunda que ha hecho 10 grupos de 4.

Figura A1.9.9. Estrategias de Reparto en 10 grupos en la sesión 8b

Un niño utiliza la Tabla 100 para realizar *Juntar Todo con Tabla 100*. En la Figura A1.9.10, se observa como el niño cuenta 34 numerales, hasta el 34. Después cuenta 10 más y termina en el 44.

Figura A1.9.10. Estrategia inadecuada de Juntar todo con Tabla 100 en la sesión 8b

También ha habido dos niños que han utilizado la estrategia de *Quitar*, uno con marcas y otro con objetos. En la Figura A1.9.11 se puede ver como el niño mete 10 patitos en una caja, y el resultado son los que le quedan.

Figura A1.9.11. Estrategia inadecuada *Quitar* en la sesión 8b

En la Tabla A1.49, se puede observar el listado con la frecuencia de dificultades observadas. Solo falta comentar que, uno de los estudiantes que no da la respuesta correcta es debido a un error de conteo.

Tabla A1.49. *Dificultades y estrategias inadecuadas en la sesión 8b*

Dificultad o estrategia inadecuada	*F.A.*
Medida con Agrupación errónea	2
Reparto en 10 grupos	1
"Muchos"	1
Quitar	2
Juntar todo	2
Error de conteo	1
Lectura de numeral	1

Las dificultades y errores necesarias para construir el grafo de los caminos de aprendizaje están en la Tabla A1.50.

Tabla A1.50. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 2*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
	Respuesta al azar (E16)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
No adquisición de la secuencia de numerales	Error en la lectura del numeral (E15)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Formar grupos de diferente cantidad a la dada (E12)

1.9.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

En las representaciones gráficas utilizadas por los niños hay que diferenciar lo que utilizan para resolver el problema, lo que utilizan para dar la solución y cómo expresan las cantidades en la carta.

Tabla A1.51. *Representaciones encontradas en la sesión 8b*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
Icónica de número	A1 (Oc, Gm, Oo)	19 (2, 16, 1)	37 (15, 21, 1)	2 (1,1)	
	B1 (I)	1(1)	1 (1)	0 (0)	
	C1				
Icónicas y simbólicas de número	A2		4		
	B2				
	C2				
Número con cifras	A3		1	23	10
	B3				1
	C3			5	11
Número con palabras	A4			2	3
	B4				
	C4				1

En el apartado de estrategias observadas ya he mostrado representaciones de los niños al resolver el problema tanto con marcas A1Gm y con objetos A1Oc, incluso con Tabla 100 (A2). La representación icónica de número y objeto (B1I) en esta sesión solo la utiliza un niño que empieza a pintar los patitos de la primera caja de forma icónica, pero luego continúa con bolas.

Los dos casos que aparecen A1Gm y A1Oc para dar la solución, son dos niños que utilizan otra estrategia que no necesita de marcas para resolverlo, pero luego pintan en la hoja de trabajo las cajas con los patos, y los patos que quedan sueltos, como es el caso de uno de los niños que utiliza la estrategia inventada.

Una representación que no se utiliza muy frecuentemente, es la B3, icónica de objeto y simbólica de número. En la Figura A1.9.12, se puede observar en una de las cartas de los niños.

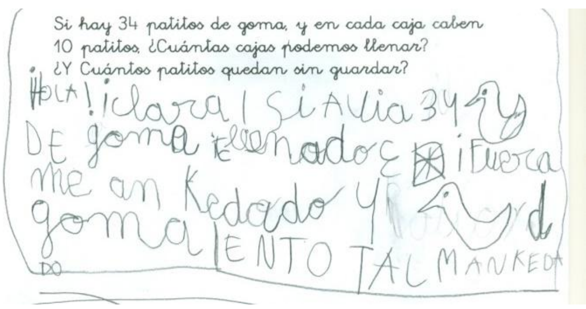


Figura A1.9.12. Representación B3 en la sesión 8b

1.9.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión, se puede utilizar la configuración de la Tabla 100 para saber los grupos de 10, ya que en cada fila hay 10 numerales.

C70. Determinar el número de grupos de 10 de un número de dos cifras representado en la Tabla 100, como el número de filas enteras que hay, y el resto son las unidades sueltas.

El uso de valor posicional implica:

C71. Identificar la posición de las decenas y la posición de las unidades en un número de dos cifras.

C72. Reconocer que en un número de dos cifras, las decenas son grupos de 10, y la cifra de las unidades son elementos sueltos que no completan un grupo 10.

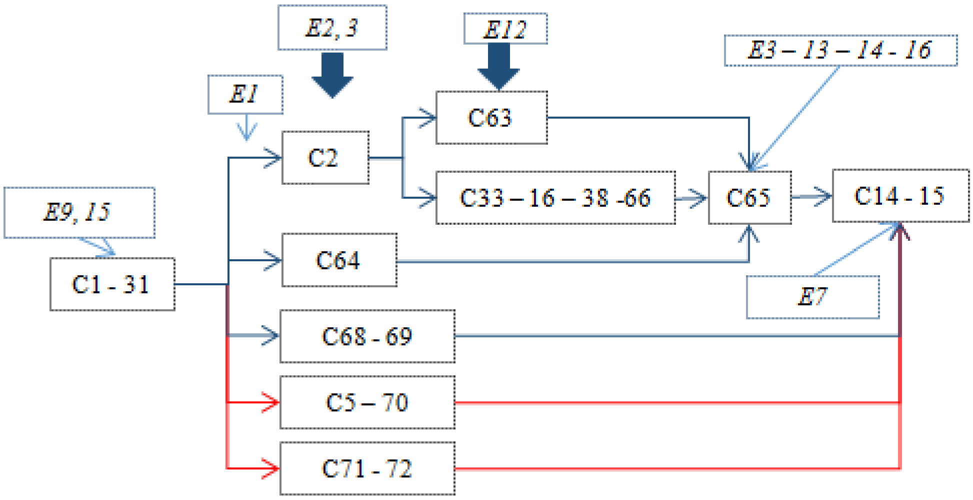


Figura A1.9.13. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 8b

1.10.Sesión 9

El problema de esta sesión es un problema de estructura aditiva donde hay 4 sumandos que dan un total. Al igual que en la sesión 3, y respetando los esquemas de Nesher (1991) se puede clasificar como un problema de 3 etapas, con 3 problemas de combinación con total desconocido.

Tabla A1.52. *Características principales de la novena sesión*

Problema	Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?
Tipo de problema	Problema de tres etapas, jerárquicas, en el que se combinan 4 cantidades.
Cantidades	Máxima cantidad 32
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, multicubos, centicubos, plastilina, rotuladores, bloques de base 10
Fecha	20 de Enero
Cuento	Finn Herman
Asistentes	28 (de 28 de 1ºA) y 26 (de 26 de 1ºB)
Duración	60 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, la investigadora y una alumna de prácticas en cada clase.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.10.1.Desarrollo de la sesión

A pesar de que el problema tiene un esquema de varias etapas, la mayoría de los niños, como muestro en las estrategias observadas en la sesión, utilizan estrategias de modelización directa con los materiales o la hoja de trabajo. Ninguno utilizó los bloques de base 10, a pesar de estar involucradas cantidades mayores que 20. Esto implica que los niños han tenido que contar hasta 68, y han dedicado mucho tiempo al conteo de la representación de los dos datos del problema, y después del resultado final.

En la puesta en común se ha intentado que los niños que han utilizado estrategias como contar a partir del mayor, o hechos numéricos, explicasen sus procedimientos, que son más eficientes que la modelización directa. La tutora del grupo B ayuda a una alumna a contar a partir del 26 para que lo vean todos, y no tener que contar desde el 1. Otro niño, A47, explica que suma primero las cantidades pequeñas y que luego 26 y 6 son 32, siendo una estrategia de las más avanzadas observadas. La tutora propone explicarlo con la tabla 100, y A52 consigue explicarlo contando a partir de 26 las otras cantidades, como describo en el siguiente apartado.

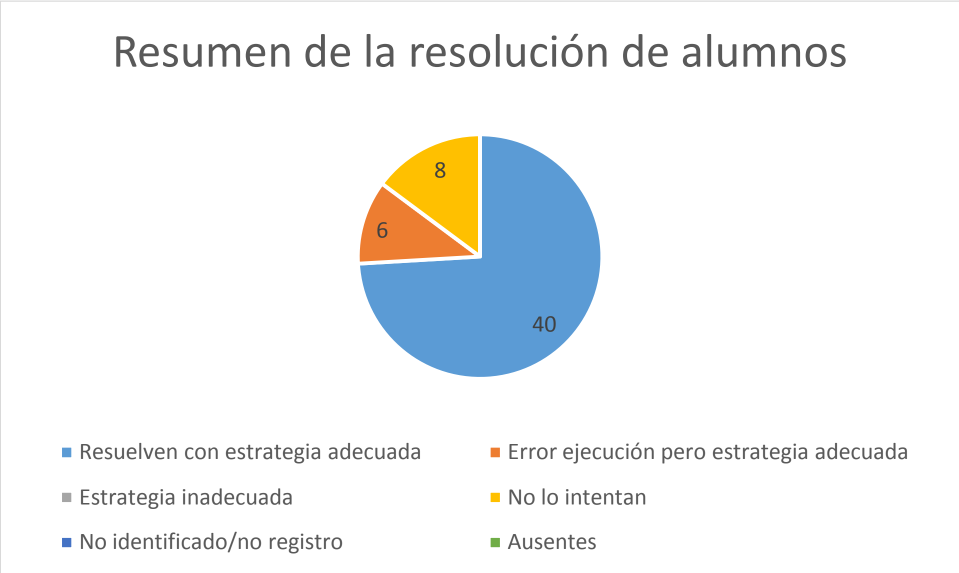


Figura A1.10.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 9

1.10.2.Estrategias observadas

En esta sesión, la estrategia más utilizada va ser *Juntar todos* (JT), estrategia de modelización directa en la que se representan los sumandos y se cuentan todos. Al igual que en la sesión 3, ninguno de los niños que ha utilizado esta estrategia de modelización directa, ha desglosado en problema en 3 etapas, ya que todos ellos representan las cuatro cantidades, y finalmente lo cuentan todo.

La variante *Juntar todo con cubos encajables formando barras, añadiendo cada colección con contadores iguales a una única, contando de uno en uno* (JT2), al añadir a una barra de cubos encajables todas las cantidades, el conteo final no distingue la cantidad mayor o menor, por lo que tienen que contar todos los cubos.

Figura A1.10.2. Estrategia JT2 en la sesión 9

En la estrategia *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT1), se van representando las cantidades por separado, y para el recuento final se consideran juntas todas ellas. Se han dado dos variantes dependiendo de si los niños empiezan a contar desde la primera cantidad del problema, que en este caso es el jamón; o si empiezan contando la cantidad más grande, en este caso la colección que tenga 26, y siguen el conteo con las cantidades más pequeñas del problema, así tenemos la variante *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, ordenándolas de mayor a menor, contando de uno en uno* (JT23). Los dos niños que han empezado por el primero han mostrado dificultades en el conteo de las colecciones, ya que cuentan los últimos los 26 cubos encajables que representan las salchichas, no realizan bien el conteo. En la Figura A1.10.3, el niño comienza contando la cantidad más grande, y termina contando las cantidades más pequeñas.

Figura A1.10.3. Estrategia JT23 en la sesión 9

En esta sesión hay dos niñas que realizan la estrategia *Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT3), utilizando bolas de plastilina. En la Figura A1.10.4 se puede ver la representación de esta estrategia. En los dos casos, las niñas empiezan a contar desde el jamón, desde la cantidad que aparece primero en el enunciado del problema, contando las salchichas lo último.

Figura A1.10.4. Estrategia JT3 en la sesión 9

Respecto a las variantes de *Juntar todo con representaciones gráficas*, se ha utilizado las que describo a continuación. *Juntar todo con marcas, añadiendo las cantidades,* implica ir añadiendo a una colección todas las cantidades que aparecen en el problema. Esto se puede hacer distinguiendo dichas colecciones, por el color o forma de la marca, *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con contadores diferente a una única, contando de uno en uno* (JT4), o poniendo marcas iguales, *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno* (JT5). En la Figura A1.10.5 un niño representa el jamón con un punto de un color, los pollos con dos puntos de otro color diferentes, y lo mismo para los tres filetes y las veintiséis salchichas. En este caso, el niño representa las cantidades según el orden indicado en el problema, por lo que comienza a contar el total desde la primera cantidad.

Figura A1.10.5. Estrategia JT4 en la sesión 9

Al diferenciar las cantidades, puede ocurrir que el niño realice el conteo final desde la cantidad mayor del problema para luego contar a partir de ella las cantidades pequeñas, pero en esta sesión no se ha observado esta variante.

Si el niño utiliza en la estrategia *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno* (JT5), no se puede diferenciar cada una de las cantidades y para realizar el conteo final contará todas, independientemente de qué marcas representen a una cantidad u otra. Una representación de esta estrategia se puede observar en la Figura A1.10.6, donde el niño va añadiendo rayas según va leyendo los datos del problema.

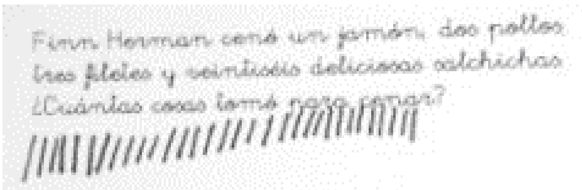


Figura A1.10.6. Estrategia JT5 en la sesión 9

Otra variante de *Juntar todos con marcas* consiste en representar todas las cantidades de problema por separado, y finalmente, se consideran en conjunto para contarlas y saber el total de elementos, *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT6). Una representación utilizada para esta variante es la que se muestra en la Figura A1.10.7.

Figura A1.10.7. Representación para la estrategia JT6 en la sesión 9

Hay niños que utilizan dibujos de los objetos implicados en el problema, por eso voy a distinguir la variable *Juntar todos con dibujos*. En esta estrategia los niños dibujan las cantidades de objetos utilizando representaciones icónicas de objeto y número (B1) y luego las cuentan todas para saber el resultado. Si cuenta empezando por la primera cantidad del problema, considero la variante *Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT7). Sin embargo, si los niños deciden ordenar las cantidades de mayor a menor, tenemos la variante *Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, ordenándolas de mayor a menor, contando de uno en uno* (JT22). En la Figura A1.10.8, se puede observar una representación utilizada para la variante JT7, y para la variante con marcas.

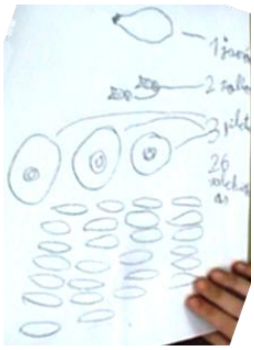


Figura A1.10.8. Representación para la estrategia JT7 y JT5 en la sesión 9

En esta sesión, las cantidades que aparecen, 26 salchichas y el total, 32, son cantidades mayores que 20 y difícilmente se pueden representar en el rekenrek. Un niño intenta realizarla, pero se confunde al no saber cuántas veces tiene que contar las bolas para completar primero las 26 salchichas y luego, las 6 bolas más que suman, el resto de cantidades. En la Figura A1.10.9, aparece la distribución de la bolas que forma el niño, dejando 6 bolas arriba a la izquierda, que la cuenta una vez, y luego explica que tiene que contar todas otra vez. Pero se olvida del resto de cantidades. Esta estrategia es *Juntar todo con el rekenrek, representando las colecciones separadas sin ayuda de la configuración, considerando juntas las cantidades tras ser representadas sin aprovechar la configuración* (JT10).

Figura A1.10.9. Representación para la estrategia JT10 en la sesión 9

La estrategia *Juntar todos con Tabla 100* (JT12). Esta estrategia utiliza la secuencia de numerales de la Tabla 100 para modelizar las cantidades, pero su uso permite ir utilizando los numerales como ítems para contar. En la secuencia de imágenes de la Figura A1.10.10, una niña explica en la puesta en común como hacerlo. Primero ha señalado el 26, luego ha señalado el siguiente numeral, el 27, para el jamón; después los numerales 28 y 29 para los dos pollos; y finalmente los numerales 30, 31 y 32 para los 3 filetes. Como el último numeral señalado es el 32, la solución es 32.

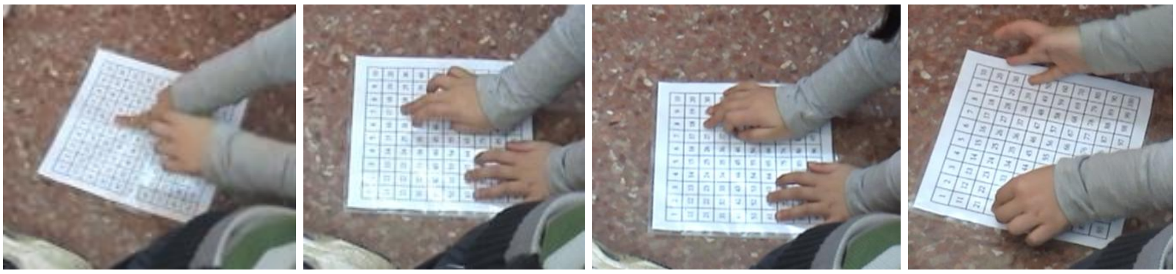


Figura A1.10.10. Representación para la estrategia JT12 en la sesión 9

Sobre las estrategias de conteo, *Conteo a partir del primero* (CP) y *Conteo a partir del mayor* (CM), solo se han observado variantes de la segunda, algo razonable, ya que las cantidades iniciales del problema son muy pequeñas y luego hay una cantidad proporcionalmente mayor. Además ha habido cuatro niños que han utilizado la estrategia *Contar a partir del mayor* (CM) llevando el rastro de los numerales que contaban mentalmente.

La variante *Contar a partir del mayor llevando el rastro de las que hay que contar con una colección de marcas* (CM2) consiste en coger el dato mayor del problema y contar a partir de él tanto numerales como indican las otras cantidades. Para saber cuántos tienen que contar a partir del dato mayor, representan las otras cantidades del problema con marcas, y partiendo del dato mayor, siguen la secuencia de numerales señalando esas marcas. En la Figura A1.10.11, una niña dibuja 6 marcas en el papel, como representantes del jamón, los dos pollos y los tres filetes, y empezando desde 26, va señalando cada una de las marcas según continúa la secuencia, “27, 28, 29, 30, 31 y 32”. Esta estrategia puede descomponerse en dos pasos. Primero la niña realiza una estrategia de *Juntar todo con marcas* (JT5), añadiendo cada cantidad a la anterior, con las cantidades más pequeñas del problema. A continuación, realiza un *conteo a partir del numeral mayor llevando el rastro con marcas* (CM2), no implicado en la primera fase, contando tantos numerales a partir de él, como marcas hay en el papel. A esta estrategia la voy a denotar JT5-CM2.

Figura A1.10.11. Estrategia JT5-CM2 en la sesión 9

Otra variante similar es *Contar a partir del mayor llevando el rastro de las que hay que contar con una colección de dedos de las manos representada antes* (CM3). Esta estrategia consiste primero en representar una colección con los dedos que tenga la suma de las cantidades pequeñas del problema. Por lo tanto hay como una primera etapa en la que el niño suma el jamón, los pollos y los 3 filetes. Una vez identificada la configuración que ocupa los seis dedos para estas cantidades, se realiza el conteo a partir del numeral mayor del problema, que no está implicado en esa primera etapa, contando tantos numerales como dedos han resultado en la primera etapa (JT9-CM3). En la Figura A1.10.12 se puede observar como primero el niño junta con los dedos las cantidades pequeñas, y después realiza el conteo. La solución, al igual que en la estrategia anterior, es el último numeral enunciado.

Figura A1.10.12. Estrategia JT9-CM3 en la sesión 9

Finalmente, un niño utiliza una Estrategia inventada (EI), empezando el dato mayor, 26, y sucesivamente ha ido recuperando los hechos numéricos por añadir el siguiente dato. En la transcripción siguiente se puede observar dicha estrategia que la he denotado *Combinar decenas y unidades, variando el orden de los sumandos* (EI3). El alumno A23 dice: “32, porque sumando, he pensado 26 más 1, 27 más 2, 29 más 3, 32”.

En el grupo A, el estudiante A21, tras resolver el problema con una estrategia de modelización directa, escribe la sentencia “26 + 6 = 32” en su hoja de trabajo, como se puede ver en la Figura A1.10.13. El alumno A47 del grupo B, en la puesta en común, dice espontáneamente “Claro, si sumas los pequeños, son 6, y 26 + 6, son 26”.

Figura A1.10.13. Solución a través de una sentencia numérica en la sesión 9

En la siguiente tabla, se recoge la frecuencia de las estrategias observadas en la sesión 9.

Tabla A1.53. *Estrategias adecuadas en la sesión 9*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Juntar todos (JT)	Con cubos encajables (JT1)			5
		Añadiendo única colección	Iguales (JT2)	7
		Considerando juntas tras representar (JT1)		3
			Contando desde el mayor (JT21)	3
			Contando desde el primero (JT1)	2
	Con otros objetos	Considerando juntas tras representar (JT3)		2
	Con marcas	Añadiendo única colección		1
			Diferenciando cantidades (JT4)	2
			Iguales (JT5)	1
		Considerando juntas tras representar (JT6)		1
			Contar a partir del primero (JT6)	6
	Con dibujos (JT7)	Considerando juntas tras representar (JT7)	Contar a partir del primero (JT7)	5
			Contar a partir del mayor (JT22)	1
	Con el rekenrek	Considerando juntas tras representar	Sin usar configuración (JT10)	1
	Con Tabla 100 (JT12)			1
Contar a partir del mayor (CM1)				4
	Con marcas	Juntando las cantidades pequeñas primero (JT5 - CM2)		1
	Con dedos	Juntando las cantidades pequeñas primero (JT9 - CM3)		1
Estrategia inventada (EI)	Combinar decenas y unidades	Variando el orden de los sumandos (EI3)		1

1.10.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

En esta sesión la mayor dificultad presentada ha sido el conteo de las colecciones, tanto para formarlas, como para saber el resultado del problema. De los 6 niños que no ejecutaron bien una estrategia adecuada, 5 de ellos, ha sido a causa del dificultades con el conteo. El sexto niño que no ha tenido éxito al ejecutar una estrategia adecuada, ha sido debido a que ha intentado representar las cantidades con el rekenrek, y al tener que representar colecciones de más de 20 elementos, tiene que considerar varias veces algunas bolas, y se ha perdido. En la Figura A1.10.9 anterior, se observa como separa 6 bolas arriba a la izquierda, para considerar, pero esas 6 y luego todas otra vez, pero se olvida del resto de cantidades implicadas.

Otra de las dificultades observadas es con la escritura del numeral 32. Se ha dado el caso de niños que preguntaban cómo se escribía, otros niños lo han escrito intercambiando las cifras y otros con efecto espejo. Incluso, un niño que no resuelve y escucha que el resultado es 32, escribe bien el numeral, pero representa la cantidad de 23 marcas. Estas dos última representaciones se pueden observar en la Figura A1.10.14.

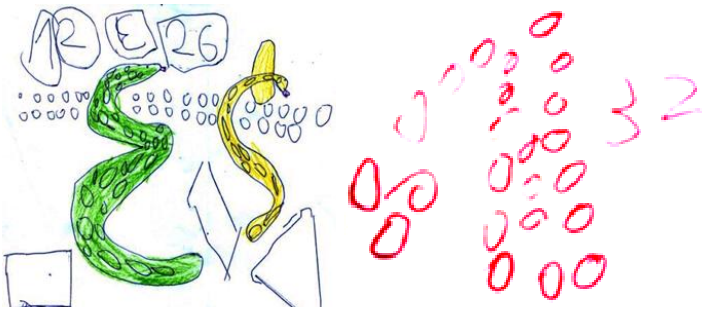


Figura A1.10.14. Dificultades en la sesión 9

En esta sesión, hay un intento de usar la Tabla en el Grupo B por el alumno A38, pero resulta una estrategia inadecuada que no permite resolver el problema. En la Figura A1.10.15, se ve la secuencia de imágenes, en la que señala el 1, para el jamón, el 2, por los dos pollos, el 3, por los tres filetes, y el 26, por las salchichas, pero el niño no es capaz de concluir.

Figura A1.10.15. Intento de resolución con Tabla 100 en la sesión 9

Los errores observados se deben a dificultades al realizar la tarea, por lo que muestro en la siguiente Tabla A1.54, las dificultades y errores observadas en esta sesión.

Tabla A1.54. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 9*

Dificultad	Errores observados
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
Dificultad en la escritura de los numerales	Escritura errónea de números de dos cifras (E7)
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99 (cadena numerable)	No usar bien la Tabla 100 (E4) Contar un numeral de más o menos en estrategias de conteo (E5)

1.10.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones utilizadas en esta sesión de pueden observar en la Tabla A1.55. La representación de tipo icónica de número y sin representación del objeto (A1), es la más frecuente para la resolución, ya sea utilizando cubos encajables (A1Oc), otros objetos como la plastilina (A1Oo), marcas en el papel (A1Gm), o los dedos de las manos (A1D).

Tabla A1.55. *Representaciones encontradas en la sesión 9*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
Icónica de número	A1 (Oc, Oo, Gm, D)	37 (22, 3, 11, 1)	2 (1,0,1,0)	
	B1 (I, D, C)	6 (6,0,0)		
	C1	1		
Icónicas y simbólicas de número	A2	1		
	B2			
	C2			
Número con cifras	A3	6	29	18
	B3			1
	C3	2		8
Número con palabras	A4			3
	B4			
	C4			2

En esta sesión se ha dado la representación icónica de número y objeto con objetos diferentes (B1), donde he considerado que los representantes de cada cantidad eran iguales. Evidentemente, los representantes del conjunto total no son todos iguales, porque son de diferente naturaleza, como se puede ver en la Figura A1.10.16, y se acompañaban de una representación con cifras de número y sin representación de objeto (A3).

Figura A1.10.16. Representación B1I y A3 en la sesión 9

Una representación menos habitual es la icónica de número y simbólica de tipo de objeto (C1), como aparece en la Figura A1.10.17.

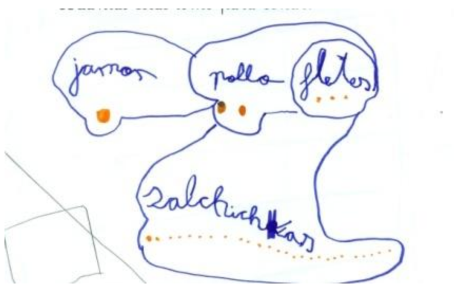


Figura A1.10.17. Representación C1 en la sesión 9

La representación con cifras de número y simbólica de objetos (C3) para la resolución, se utiliza para representar claramente todas las cantidades, como se puede ver en la Figura A1.10.18.

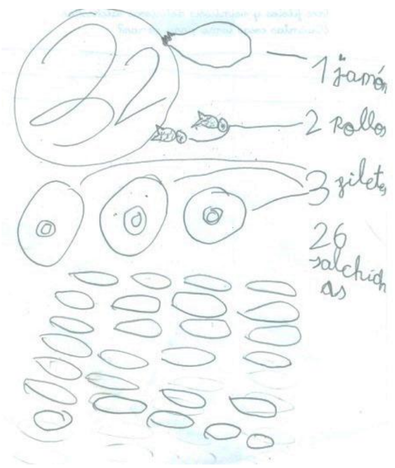


Figura A1.10.18. Representación C3 en la sesión 9

El niño que ha utilizado para dar la solución A1Oc, es un niño que nos muestra cómo ha representado todas las cantidades, pero al pedirle como lo ha contado, realiza la estrategia Contar a partir del mayor (CM). En la Figura A1.10.19 se puede observar al niño que muestra la solución de problema, pero en la segunda imagen está llevando el rastro de los numerales según utiliza la estrategia. Otro de los niños que utiliza A1Gm para dar la solución, es uno de los que no resuelven e intenta dar una cantidad de 32 marcas en el papel.

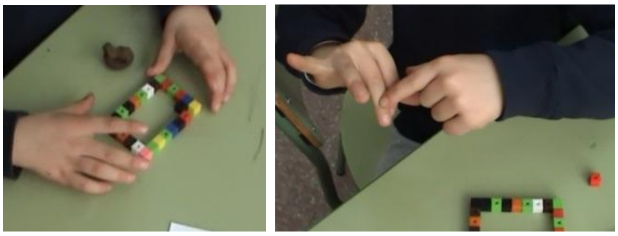


Figura A1.10.19. Representación A1Oc para mostrar las la solución en la sesión 9

Las representaciones para la carta y para dar la solución son la A3, C3, A4 y C4. Además, en esta sesión aparece la representación con cifras para el número e icónica para el objeto (B3), como se puede observar en la Figura A1.10.20.

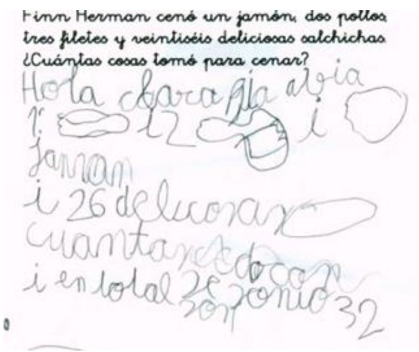


Figura A1.10.20. Representación B3 en la carta en la sesión 9

1.10.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Al haber cantidades de distinto tamaño, puede elegirse el orden para contar, empezando desde la mayor (26), y continuar con las demás, como ocurre en las estrategias JT21 y JT22.

C73. Establecer un orden entre las cantidades.

En esta sesión, ha habido niños que han juntado primero las 3 cantidades pequeñas con estrategia de *Juntar todo con marcas o dedos*, y luego ha contado a partir del 25, con ayuda de esa primera colección construida.

C74. Enunciar la secuencia de numerales a partir de un numeral distinto de 1, llevando el rastro de los numerales enunciados con una colección representada antes de objetos, marcas o dedos.

Para la estrategia en la que se van sumando reiteradamente las cantidades empezando por la mayor, si al descomponer en decenas y unidades, e ir sumando unidades, se alcanza una decena más, esa decena debe sumarse a la posición de las decenas.

C75. Sumar las unidades y las decenas por separado.

C76. Reconocer que al descomponer dos números en decenas y unidades, si al sumar las unidades, se obtiene una cantidad mayor que 9, hay que suma la decena a las iniciales.

Después de sumar por separado unidades y decenas, se forma de nuevo el número.

C77. Identificar el número de dos cifras, compuesto por un número de decenas y un número de unidades.

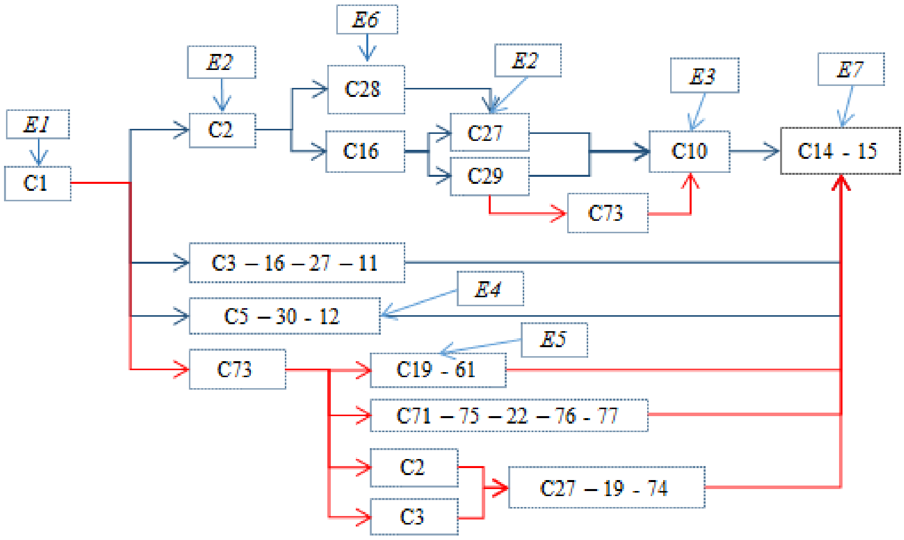


Figura A1.10.21. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 9

1.11. Sesión 10

Esta sesión planteamos de nuevo un problema de estructura aditiva, de combinación con total desconocido. Lo más interesante son las cantidades implicadas, ya que se suma una década, 30, con otro número, 38. La estrategia de modelización directa juntar todos, implica el conteo de una gran cantidad de elementos y, tras las dificultades que se dieron en la sesión 9 con el conteo, se espera que los niños que utilicen estrategia basadas en el valor posicional, o con material de base 10, tengan más posibilidad de éxito en la resolución.

Tabla A1.56. *Características principales de la décima sesión*

Problema	Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?
Tipo de problema	Problema de combinación con total desconocido
Cantidades	Cantidades de números de dos cifras, una de ellas es una década (30) y la cantidad mayor, 68
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, bloques de base 10
Fecha	27 de Enero
Cuento	Finn Herman
Asistentes	26 (de 28 de 1ºA) y 24 (de 26 de 1ºB)
Duración	60 minutos en el grupo A y 40 minutos en el grupos B
Participantes	Tutoras de grupos, maestra con experiencia CGI (Beatriz), la investigadora y alumnas de prácticas.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.11.1. Desarrollo de la sesión

El grupo A tiene nueva tutora por lo que el taller en el grupo A se extiende un poco más de lo normal. Beatriz viene a darla apoyo, y además, sigo contando con alumnos de prácticas para realizar las entrevistas en el aula.

El resumen sobre la frecuencia de alumnos que resuelven el problema se puede ver en la Figura A1.11.1. Aunque 39 estudiantes de los 50 asistentes, encontraron una estrategia adecuada para resolver el problema, no pudieron dar la respuesta correcta por presentar dificultades en el conteo 22 de ellos.

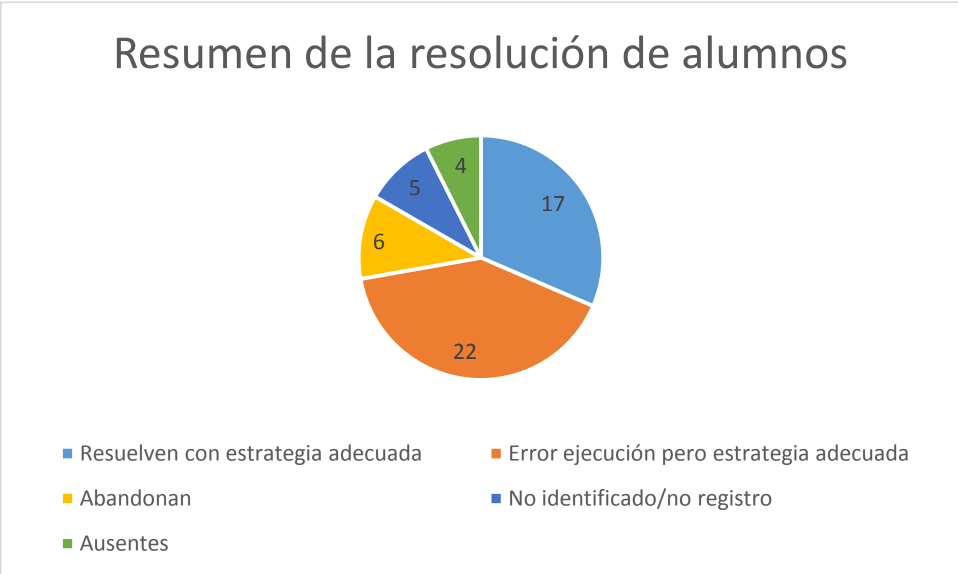


Figura A1.11.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 10

Aparecen estrategias con bloques de base 10, pero me parece que hay material insuficiente. Para la próxima sesión traeré más decenas y unidades de los bloques de base 10. Además el próximo cuento habla de huevos fritos, por lo que le vamos a pedir a las familias que den a los niños decenas de huevos de cartón. Respecto a las sesiones, se realiza una reunión para remarcar de nuevo las fases y que en el registro de las estrategias dejen primero que los niños expliquen lo que piensan sin intentar explicarles cómo se hace.

1.11.2. Estrategias observadas

Las estrategias observadas en esta sesión de modelización directa están basadas en la estrategia *Juntar todo* (JT). Las dos cantidades que se dan como datos en el problema, son 30 y 38, y su modelización directa ha sido bastante costosa por la cantidad de unidades que tenían que representarse. La variante *Juntar todo con cubos encajables formando barras, añadiendo cada colección con contadores iguales a una única, contando de uno en uno* (JT2), al consistir solo en dos sumandos y ser éstos tan grandes, se volvía muy costoso unir dos barras de cubos encajables de tal magnitud.

Figura A1.11.2. Estrategia JT2 en la sesión 10

En la Figura A1.11.2, se ve como el niño monta las dos barras y las junta en una barra para contarlas. Esta estrategia la he incluido en JT2, para diferenciarla de los niños que han utilizado las dos barras sin juntarlas como aparece en la siguiente Figura A1.11.3, que es la variante *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT1).

Figura A1.11.3. Estrategia JT1 en la sesión 10

Además de los cubos encajables, se ha utilizado la plastilina, o incluso la mezcla de los dos, como se puede ver en la Figura A1.11.4. Para clasificar las estrategias de los dos niños que se ven a continuación, las he considerado dentro de *Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT3), ya que hacen el mismo papel los cubos encajables que las bolas de plastilina, distinguiéndose solo los dientes de la mandíbula superior de la inferior.

Figura A1.11.4. Estrategia JT3 en la sesión 10

Las representaciones más utilizadas han sido las gráficas, de hecho la estrategia *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT6) y la estrategia *Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT7), han sido las más frecuentes. En la Figura A1.11.5 adjunto dos representaciones de estas estrategias.

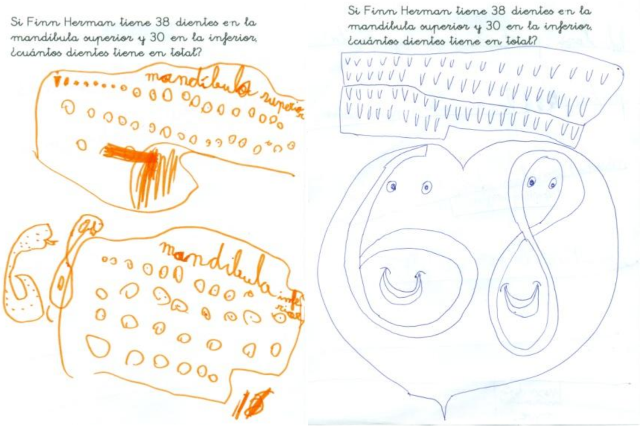


Figura A1.11.5. Estrategia JT6 y JT7 en la sesión 10

La estrategia *Juntar todo con los dedos* (JT9) se intentó usar pero los niños se perdían en el conteo, de la cantidad de dedos que llevaban contados.

En esta sesión, dos niñas utilizan la Tabla 100 para resolver el problema que me hace distinguir las estrategias de *Juntar todo con Tabla 100* (JT12) y *Contar a partir del primero con la Tabla 100* (CP2). En la primera de ellas, la cantidad primera se representa teniendo en cuenta todos los numerales que hay en la Tabla 100 hasta el dato del problema, en este caso 38. A partir de ahí, se cuenta tantos numerales como indica el segundo dato del problema, en este caso 30. En la Figura A1.11.6, se puede observar como la niña busca el número 38 en la tabla 100 y partir de ahí, cuenta los 30 numerales, llegando así a la solución del problema, 68. Se trata de una estrategia más cercana a la modelización directa ya que cada unidad de las cantidades involucradas en el problema está representada por un numeral de la Tabla 100.

Figura A1.11.6. Estrategia JT12 en la sesión 10

Otra niña, utiliza los 30 primera numerales, para llevar el rastro del conteo de 30 numerales, desde el 38. Así ella dice 38, y señalando los numerales del 1 al 30, sigue enunciando “39, 40,… 68”, terminando en el 68, porque estar señalando el numeral 30 en la Tabla 100. En la Figura A1.11.7, la niña señala inicialmente el 38, pero luego se olvida de él y va caminando con los dedos por los numerales del 1 al 30, mientras enuncia desde el 39 al 68. Como solo se utiliza la Tabla 100 para llevar el rastro de los numerales enunciados, las considero más cercana a una estrategia de conteo (CP2).

Figura A1.11.7. Estrategia CP2 en la sesión 10

La estrategia *Juntar todo con bloques de base 10* ha sido utilizada por tres niños de forma diferente. Uno de los niños representa una cantidad con decenas y unidades, el 38, con 3 barras de 10 y 8 unidades sueltas; y el otro dato del problema, 30, lo representa solo con unidades. A la hora de realizar el conteo, señala las 3 decenas y 8 unidades y dice "aquí hay 38", y continua contando de uno en uno el grupo de 30 unidades sueltas. Al contar a partir de 38, 30 unidades más ayudándose del material, la estrategia es *Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando* (23).

Figura A1.11.8. Estrategia JT23 en la sesión 10

En las otras dos estrategias con base 10, las dos cantidades son representadas con decenas y unidades. Hay un aspecto importante al realizar la consideración total de las dos cantidades, relacionado con la unión por separado de unidades de distinto orden. Se distingue entre variantes en las que los niños juntan todo sin considerar las agrupaciones de 10, las decenas. Y otra variante que es agrupar las decenas por un lado y las unidades por otro. Explico los dos casos que se han dado en esta sesión para ver la diferencia. Un niño representa la primera cantidad con 3 barras de 10 y 8 unidades, y la segunda cantidad, 30, con 3 barras. Para llevar el conteo de todo señala las 3 primera barras y dice "aquí hay 30" y partir de ahí cuenta de uno en uno todo lo que queda, empezado con las ocho unidades, y continuando con todas las unidades que forman las otras 3 barras de 10. Esta variante la denomino *Juntar todo con base 10, se cuenta de uno en uno a partir de las decenas de la primera cantidad* (JT24).

Figura A1.11.9. Estrategia JT24 en la sesión 10

Por último, una niña representa las dos cantidades con barras y unidades. En este caso la niña junta primero las barras, cuenta de uno en uno las unidades, y después añade las unidades contándolas, *Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, contando de uno en uno* (JT25). En la Figura A1.11.10 se puede observar como primero junta las decenas, contando las unidades para saber cuántas hay.

Figura A1.11.10. Estrategia JT25 en la sesión 10

El uso del valor posicional consiste en utilizar alguna de las E*strategias inventadas* (EI) que el modelo teórico indica. En esta sesión, dos niños utilizan la estrategia la *Combinación de decenas y unidades* por separado (EI2). Uno de ellos lo explica en la carta que se puede ver en la Figura A1.11.11.

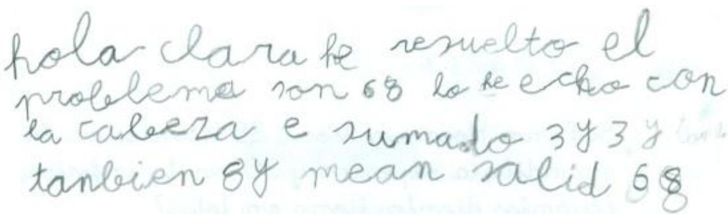

hola clara he resuelto el
problema son 68 lo he echo con
la cabeza e sumado 3 y 3 y
tanbien 8 y mean salid 68

Figura A1.11.11. Estrategia EI2 en la sesión 10

En esta sesión, un niño elige espontáneamente el algoritmo de la suma (AL1) para resolver el problema. Aunque la elección es adecuada su ejecución no es correcta, al tener problema de colocación de los números en el algoritmo. En la Figura A1.11.12 se puede observar como coloca inicialmente los números. En la imagen de la derecha, en su hoja de trabajo, se presenta correctamente porque la tutora le ayuda a hacerlo bien.

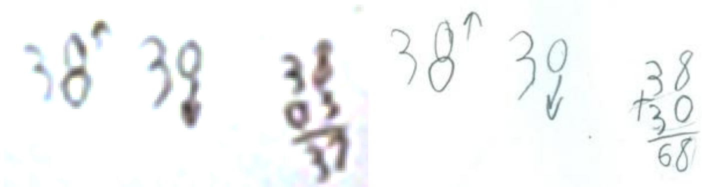


Figura A1.11.12. Algoritmo AL1 en la sesión 10

Las estrategias que se han observado en esta estrategia vienen reflejadas en la Tabla A1.57., donde las estrategias como el valor posiciona, el algoritmo o, simplemente el uso de los bloques de base 10, son estrategias más avanzadas que la modelización directa, según lo visto en el marco teórico.

Tabla A1.57. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 10*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariantes*	*F.A.*
Juntar todos (JT)	Con cubos encajables	Añadiendo (JT2)	Iguales (JT2)	3
		Juntando (JT1)		8
	Con objetos (JT3)			1
		Juntando (JT3)		2
	Con marcas	Juntando (JT6)		14
	Con dibujos	Juntando (JT7)		4
	Con Tabla 100 (JT12)			1
	Con dedos (JT9)			1
	Con base 10	Sin agrupar decenas	Representar el segundo sumando con unidades y contar a partir del primero de uno en uno (JT23)	1
			Contar a partir de las decenas del primero de uno en uno (JT24)	1
		Agrupando decenas primero	Contando de uno en uno (JT25)	1
Contar a partir del primero (CP)	Con Tabla 100 (CP2)			2
Estrategia inventada (EI)		Combinar decenas y unidades (EI2)		2
Algoritmo		Suma (AL1)		1

1.11.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

La dificultad que más se ha observado en esta sesión es el conteo de las colecciones de elementos. Los niños se han confundido, y no han podido darse todas las respuestas correctas que se podrían haber dado, por entender el problema y elegir una estrategia adecuada. De hecho de los, 39 niños que eligieron una estrategia correcta, ejecutando bien las acciones, solo 17 consiguieron dar la respuesta correcta. Los demás se confundieron al contar, 22 niños registrados con estrategia adecuada pero no contando bien. Incluso hay niños que comenzaron a resolverlo pero lo abandonaron por no conseguir contar bien. En la Figura A1.11.13 muestro un intento de dibujas marcas por cada uno de los dientes numeradas para no perderse en el conteo.

Figura A1.11.13. Representación de las marcas numeradas en la sesión 10

Otra dificultad que se ha dado en la escritura de los numerales. Una de ellas aparece en el algoritmo donde se representa “03” en vez de 30, que afecta directamente al resultado. Otras aparecen en la hoja de trabajo o en la carta, como la de la Figura A1.11.14. Esto ocurrió en 4 ocasiones.

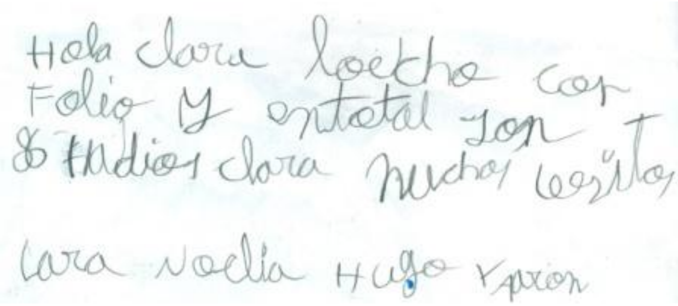


Figura A1.11.14. Orden de la posición de cifras cambiado en la sesión 10

Los errores observados se deben a dificultades al realizar la tarea, por lo que muestro en la siguiente Tabla A1.58, las dificultades y errores observadas en esta sesión.

Tabla A1.58. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 10*

Dificultad	Errores observados
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
Dificultad en la escritura de los numerales	Escritura errónea de números de dos cifras (E7)

1.11.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones utilizadas en esta sesión se muestran en la Tabla A1.59. Las más utilizadas en la resolución son las icónicas de números y sin representante de objeto, con cubos encajables (A1Oc), con otros objetos que no son cubos encajables, como bolas de plastilina (A1Oo) y con marcas en el papel (A1Gm). Para dar la solución y en la carta, la representación más frecuente es la simbólica de número sin representante de objeto, "68".

Tabla A1.59. *Representaciones encontradas en la sesión 10*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, B10)	37 (14,3,17, 1, 2)		
	B1 (I, D, C)	5 (5, 0, 0)		
	C1			
2	A2	3		
	B2			
	C2			
3	A3	4	19	14
	B3			
	C3			6
4	A4			2
	B4			
	C4			

Las representaciones con objetos, ya sean cubos encajables o bolas de plastilina se puede ver en la Figura A1.11.15. El problema de representar las cantidades de problemas con objetos es el dominio del conteo de los estudiantes, que con cantidades tan grandes, no dominan la secuencia de numerales hasta ese numeral.

Figura A1.11.15. Representaciones A1Oc y A1Oo en la sesión 10

Las representaciones gráficas con marcas, como las de la imagen de la derecha de la Figura A1.11.16, han sido las más utilizadas. Cinco de los estudiantes pintaron los dientes de forma más icónica, como la imagen de la izquierda.

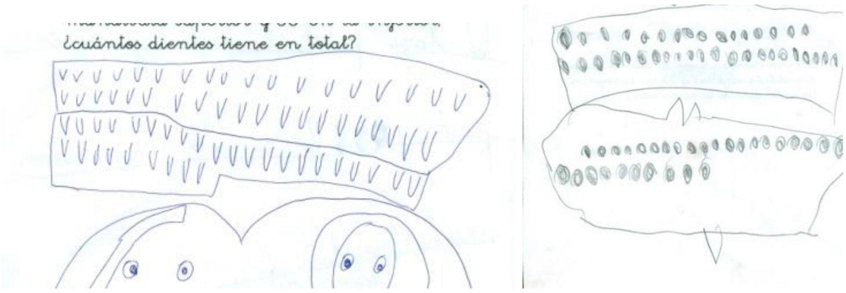


Figura A1.11.16. Representaciones B1I y A1Gm en la sesión 10

Algunas representaciones de los dientes querían ser tan reales que algunos niños intentaron dibujar el cocodrilo con todos los dientes.

Figura A1.11.17. Representaciones B1I con “pez” en la sesión 10

Las representaciones A3, simbólicas de número sin representante de objeto se utilizan junto a las representaciones anteriores. En la Figura A1.11.18 un niño escribe el numeral 38, con el 3 con efecto espejo, y el numeral 30, para indicar la cantidad de dientes que hay en cada representación gráfica.

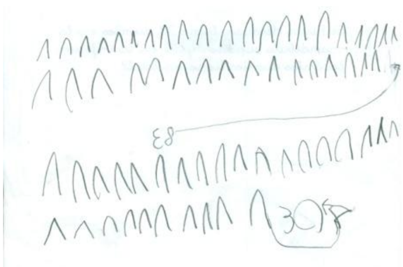


Figura A1.11.18. Representaciones B1I con A3 en la sesión 10

Por último, un niño representa con marcas los dientes, con puntos en la plastilina. Esta representación la he contabilizado dentro de A1Gm (ver Figura A1.11.19).

Figura A1.11.19. Representaciones A1Gm en plastilina en la sesión 10

1.11.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Ya se ha utilizado en la sesión 6, la capacidad C54, que consiste en hacer un recuento de las colecciones representadas con grupos y con elementos sueltos, contando de 10 en 10 los grupos y de uno en uno las unidades. En esta sesión, los niños hacen el recuento contando todo de uno en uno, para la que utilizo la capacidad C10. Hay niños que representan el primer sumando con bloques de base 10 y son capaces, a la hora de hacer el recuento final, enunciar el número al que corresponde esa primera cantidad, y después seguir contando el resto de uno en uno, ya esté representado con base 10 u otro material (C74).

> C78. Reconocer que en una cantidad organizada en varios grupos de 10 y una cantidad de objetos menor que 10, el número de grupos es la cifra de las decenas y la cantidad de objetos menor que 10 corresponden a la cifra de las unidades, en un número de dos cifras.

También, se ha observado la capacidad de agrupar las barras de 10 por un lado, y las unidades por otro.

> C79. Agrupar las barras de 10 por un lado y las unidades por otro, tras considerar juntas varias colecciones representadas con bloques de base 10, cambiando 10 unidades por una decena si es necesario.
>
> C80. Enunciar la secuencia de numerales a partir de un numeral distinto de 1, llevando el rastro del número de numerales enunciados con una colección de numerales de la Tabla 100.

Se ha utilizado el algoritmo de la suma para cuyo procedimiento se necesita a capacidad C71, y además:

> C81. Organizar dos números de dos cifras en un algoritmo colocando las unidades en una columna y las decenas en la otra.
>
> C82. Empezar el procedimiento por las unidades.
>
> C83. Si las unidades suman más de 9, se coloca las unidades en esa columna y las decena se pone en la columna de las decenas.

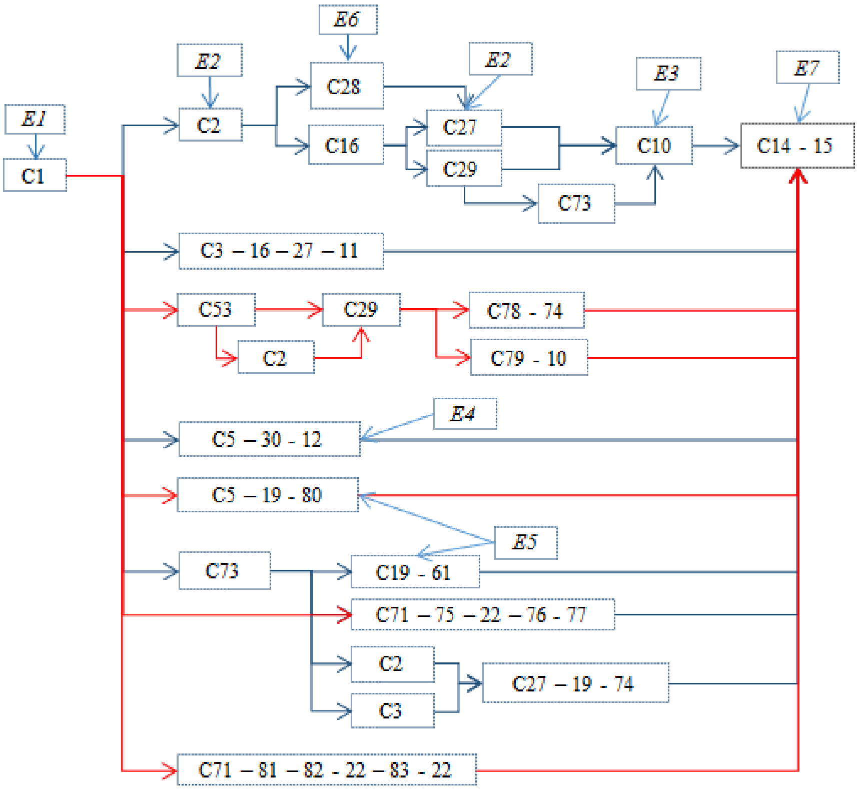


Figura A1.11.20. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 10

1.12. Sesión 11

En esta sesión se plantea el tercer problema de división medida con grupos de 10 con resto. Como en las sesiones 8 y 8b ya se ha planteado este tipo de problemas, completaré la descripción de las estrategias registradas.

Tabla A1.60. *Características principales de la décimo primera sesión*

Problema	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos (decenas) podemos llenar y cuántos huevos sobran?
Tipo de problema	Problema de grupos iguales, de división medida con grupos de 10 y resto.
Cantidades	Cantidad máxima 37
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, bloques de base 10
Fecha	3 de Febrero
Cuento	Cuento para contar mientras se come un huevo frito
Asistentes	26 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	60 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, la investigadora y alumnas de prácticas.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.12.1. Desarrollo de la sesión

Los talleres han comenzado a la vez, y no he podido tomar grabaciones de la resolución individual de las dos clases. En el grupo A, la tutora y una alumna de prácticas han recogida las estrategias de los niños en las hojas de registro.

En esta sesión se utilizan los cartones de decenas de huevos por primera vez. Sobre la solución dada al problema, la mayoría de los niños dicen que son 3 cajas y sobran 7. Pero hay niños que utilizan la inclusión de un grupo más, indicada en los trabajos de la CGI en este tipo de problemas.

En la puesta en común, no se ha planteado en estrategias más elegidas o aplicadas un debate para poder argumentar y razonar las respuestas. Es un momento en el que los niños pueden descubrir y mejorar sus estrategias escuchando las explicaciones de los compañeros y debemos proponer a las tutoras ser más exigentes a la hora de la explicación de los niños y además intentar justificar con buenas estrategias aquellas que muestren mayor comprensión del sistema de numeración con el conteo de 10 en 10, las decenas, el valor posicional.

De los 51 asistentes, 23 estudiantes eligen una estrategia adecuada, aunque uno de ellos no da la respuesta correcta por no formar entera el total de elementos. Las estrategias adecuadas están basadas sobre todo en sumar o resta los datos del problema como muestro en el apartado de dificultades.

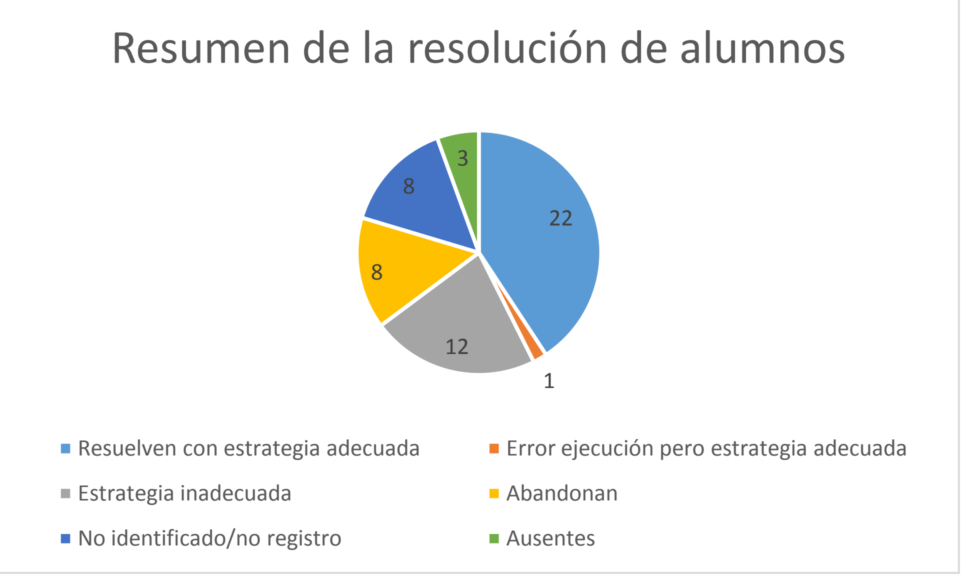


Figura A1.12.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 11

1.12.2. Estrategias observadas

En las sesiones 8 y 8b ya se ha planteado un problema de este tipo, por lo que en esta sesión describiré las estrategias que aparecen en esta sesión y no se han dado en las anteriores.

En esta sesión los alumnos han utilizado los cubos encajables para representar las cantidades. Como vengo indicando, las estrategias van obteniendo distintos variantes según el material. Cuando los cubos encajables son encajados por los niños y les permiten comparar cantidades, las categorizo como estrategias con cubos encajados (Oc). Pero si los cubos no se encajan de tal manera que se permitan comparar las cantidades, estas estrategias son categorizadas con objetos (Oo). En la Figura A1.12.2, la imagen de la izquierda muestra los cubos encajados, que aunque no son barras que se puedan comparar por su longitud, sí que permite por su forma, concluir que hay el mismo número de objetos. Sin embargo, en la figura de la derecha, los cubos amontonados no permiten comparar cantidades. La estrategia de la izquierda se trata de *Medida con cubos encajables formando barras, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto* (M4), y la estrategia de la derecha es *Medida con objetos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, poniendo un representante por cada grupo construido, identificando número de grupos y resto* (M9).

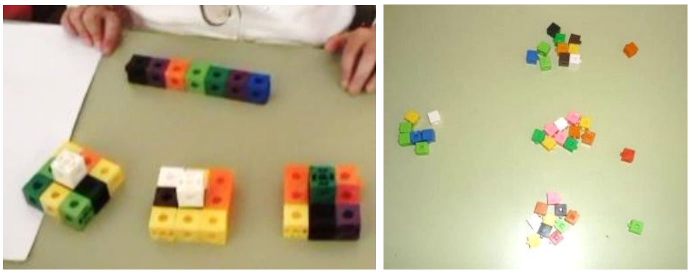


Figura A1.12.2. Representación de M4 y M9 en la sesión 11

En esta sesión, los estudiantes utilizan estrategias que no se han utilizado en la sesión 8b. La utilización de los bloques de base 10 hace aparecer nuevas variantes de la estrategia de *Medida* (M). La estrategia *Medida con bloques de base 10, identificando las barras con los grupos y los cubitos sueltos como el resto* (M11) consiste en representar la cantidad total de elementos con barras para las decenas y unidades sueltas. Después se cuenta el número de barras para saber el número de grupos y las unidades sueltas para saber el resto. En la Figura A1.12.3 se puede observar la modelización del problema con 3 barras de 10 y 7 unidades sueltas.

Figura A1.12.3. Representación de la Estrategia de Medida con bloques de base 10 (M11)

Los niños van cogiendo barras y contando la cantidad que llevan representada hasta que consiguen 37. Hay niños que cogen una cuarta barra, y al ver que no la completan, la cambian por 7 unidades. Un niño considera un grupo más, aun sabiendo que no se completa la caja. En la puesta en común, la tutora le explica que puede coger unidades sueltas para tener los 37 huevos y que así se quedaría suelto. Al estudiante le parece bien, pero su propuesta es poner 4 cajas aunque no se complete la cuarta, variante que describo como *Medida con bloques de base 10, identificando las barras con los grupos, proponiendo una barra que no está completa* (M12).

Figura A1.12.4. Representación en una estrategia M12 en la sesión 11

Una estudiante representa su resolución con las hueveras y con bloques de base 10. La estrategia *Medida con bloques de base 10, apoyando cada barra en una huevera* (M13). Se representa la cantidad total de elementos con barras para las decenas y unidades sueltas, relacionando cada barra con una huevera. Después se cuenta el número de barras/huevera para saber el número de grupos y las unidades sueltas para saber el resto. En la Figura A1.12.5 se puede observar la representación de este problema realizada por una estudiante.

Figura A1.12.5. Representación utilizada para la estrategia M13 en la sesión 11

En la puesta en común, un niño explica con ayuda de la tutora, cómo resolverlo con la Tabla 100. El niño identifica el número 37 en la Tabla 100, con ayuda de la tutora identifica las decenas como cada una de las filas. Cada fila es una caja, y las última fila que no se completa son los que sobran. Esta estrategia la consideramos *Medida con Tabla 100* (M10), todavía de modelización porque están representadas todas las unidades del problema. Aunque la describo aquí, no la he contabilizado en las estrategias realizadas por los niños, ya que no la usa espontáneamente el niño.

Figura A1.12.6. Estrategia M10 en la sesión 11

La estrategia más avanzada está basada en *Uso el valor posicional, utilizando la posición de las cifras* (VP1). Fijándose en la cantidad total de elementos, extraen las decenas como grupos y unidades como resto. En la Figura A1.12.7, un estudiante lo escribe en la hoja de trabajo.

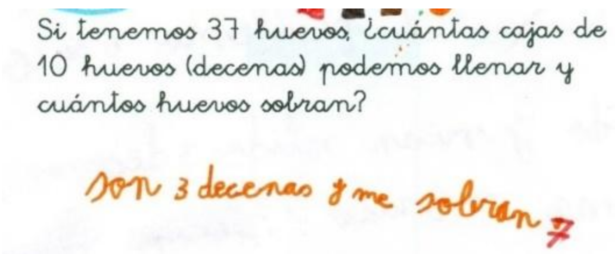


Figura A1.12.7. Estrategia basada en el valor posicional en la sesión 11

La frecuencia de las estrategia registradas utilizadas por los niños aparecen en la Tabla A1.61.

Tabla A1.61. *Estrategias adecuadas en la sesión 11*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
	Con marcas (MGm)	Representando el total primero (M1)		10
		Añadiendo grupos hasta total (M2)		3
	Con cubos encajados	Representando el total primero (M4)		3
Medida (M)	Con objetos	Añadiendo grupos hasta total	Representar los grupos (M9)	1
	Con bloques de base 10 (M11)			1
		Añadir un grupo más (M12)		1
	Con hueveras y bloques base 10	Representando el total primero (M13)		1
Uso del valor posicional (VP1)				4

1.12.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

En esta sesión doce niños utilizan estrategias inadecuadas, además de haberse registrado cinco niños con dificultad en formar el total de elementos al perderse en el conteo. En la Tabla A1.62 la frecuencia de las estrategias inadecuadas en esta sesión que describo a continuación, centrándome en las que no han sido descritas en otras sesiones.

Tabla A1.62. *Estrategias inadecuadas en la sesión 11*

Estrategia	*F.A.*
Juntar todo	6
Quitar	4
Reparto huevera	1
Algoritmo suma	1

Una alumna realiza un Reparto con cubos encajables en una huevera. Coge 37 cubos encajables y los reparte en los huecos. Cuando le quedan 7 para porque no puede poner uno en cada hueco. Responde que solo puede llenar una caja, como se puede ver en la Figura A1.12.8.

Figura A1.12.8. Reparto de cubos encajables en los huecos de la huevera en la sesión 11

La tutora aprovecha para explicarla una estrategia de *Medida sobre hueveras (decenas) con cubos encajables contando primero el total de elementos*. Propone coger más hueveras para poder poner cada huevo en hueco en la huevera. Así completan 3 hueveras y quedan 7 huevos sueltos (ver Figura A1.12.9).

Figura A1.12.9. Estrategia Medida con huevera y cubos encajables en la sesión 11

Uno de los errores que cometen los niños al representar los grupos es contar el representante de los grupos en el recuento total de elementos. En esta sesión, un estudiante lo realiza bien en la resolución individual pero en la puesta en común se confunde. Así la tutora aprovecha para proponer diferencias los cubos encajables que representan los elementos y los grupos (ver Figura A1.12.10).

Figura A1.12.10. Representación de forma diferente los elementos y los grupos en la sesión 11

Los errores observados se deben a dificultades al realizar la tarea, por lo que muestro en la siguiente Tabla A1.63, las dificultades y errores observadas en esta sesión.

Tabla A1.63. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 11*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
	Respuesta al azar (E16)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Contar el número de grupos (E8).
	Confundir número de grupos y elementos por grupo (E9)

1.12.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones sutilizadas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.64. Se han utilizado más frecuentemente las representaciones gráficas con marcas.

Tabla A1.64. *Representaciones encontradas en la sesión 11*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
Icónica de número	A1 (Oc, Oo, Gm, B10, H)	22 (4, 1, 15, 0, 2)	31 (7, 1, 20, 3, 0)	5 (1, 1, 3, 0)	
	B1 (I, D, C)	0 (0,0,0)	0 (0,0,0)	0 (0,0,0)	
	C1				1
Icónicas y simbólicas de número	A2				
	B2				
	C2				
Número con cifras	A3			27	17
	B3				
	C3			1	15
Número con palabras	A4			3	3
	B4				
	C4				1

Como representación novedosa, un niño utiliza en una carta, iónica de número y simbólica de objeto (C1). En la Figura A1.12.11 aparece 37 bolas seguidas de la palabra “huevos”. Además aparecen representaciones C3, como “3 cajas” y A3, como “7”.

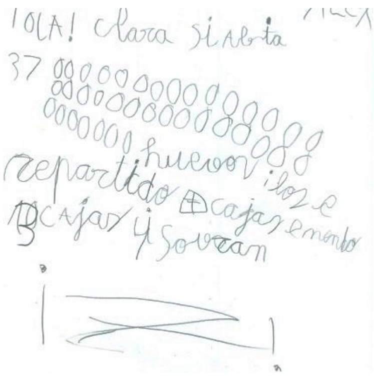


Figura A1.12.11. Representación C1 en la sesión 11

1.12.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Las capacidades que se han utilizado nuevas en esta sesión, han sido observadas en las estrategias con los bloques de base 10 y las hueveras. Para reconocer los grupos de 10 y unidades que sobran en una representación con bloques de base 10, los niños han utilizado:

> C84. Determinar el número de grupos de 10 y las unidades sueltas en una colección representada con barras y unidades de bloques de base 10, identificando los grupos con las barras y las unidades con los cubitos.

En la estrategia que además se utiliza la representación en la que se relaciona cada barra de 10 con una huevera, el niño es capaz:

> C85. Formar una colección de hasta 100 con hueveras relacionando cada decena con una barra de base 10, y los huecos de una huevera con las unidades de base 10.

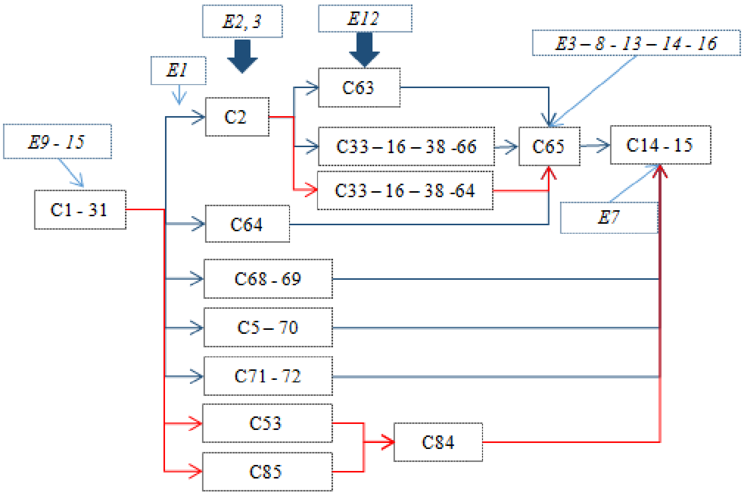


Figura A1.12.12. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 11

1.13. Sesión 12

El problema de esta sesión es el segundo de estructura multiplicativa de grupos iguales, de multiplicación, con grupos de 10 y unidades y sueltas. La descripción de las estrategias será un complemento a lo ocurrido en la sesión 7. Al igual que esa sesión, el problema se compone de dos etapas, una primera de agrupamiento con grupos de 10, y una segunda, consistente en una combinación con total desconocido. En el enunciado no se dice grupos de 10, sino que se utiliza la palabra "decena" en su lugar.

Tabla A1.65. *Características principales de la decimosegunda sesión*

Problema	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?
Tipo de problema	Dos etapas jerárquico (multiplicación de grupos iguales con grupos de 10 y combinación con total desconocido)
Cantidades	Cantidad máxima 45 con grupos de 10
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, bloques de base 10
Fecha	17 de Febrero
Cuento	Cuento para contar mientras se come un huevo frito
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 26 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase
Participantes	Tutoras de grupos, maestra con experiencia CGI, la investigadora y alumnas de prácticas.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.13.1. Desarrollo de la sesión

Esta sesión se realiza 15 días después de la anterior, ya que en el centro tenían un evento que hacía imposible la realización del taller. Los niños han empezado a utilizar más los bloques de base 10 y las hueveras. Recuerdo a las tutoras que dejen explicar a los niños que utilizan estrategias más avanzadas, apoyadas en el valor posicional o conteo de 10 en 10. En la sesión de hoy 30 de los 53 asistentes eligen una estrategia adecuada de resolución, dando una respuesta correcta 25 de ellos. De los 15 niños que eligen una estrategia adecuada, dos de ellos retoman el problema y lo resuelven correctamente, es decir, eligen una estrategia adecuada y llegan a la solución correcta. En la Figura A1.13.1 se puede observar el resumen de la resolución de los alumnos en esta sesión.

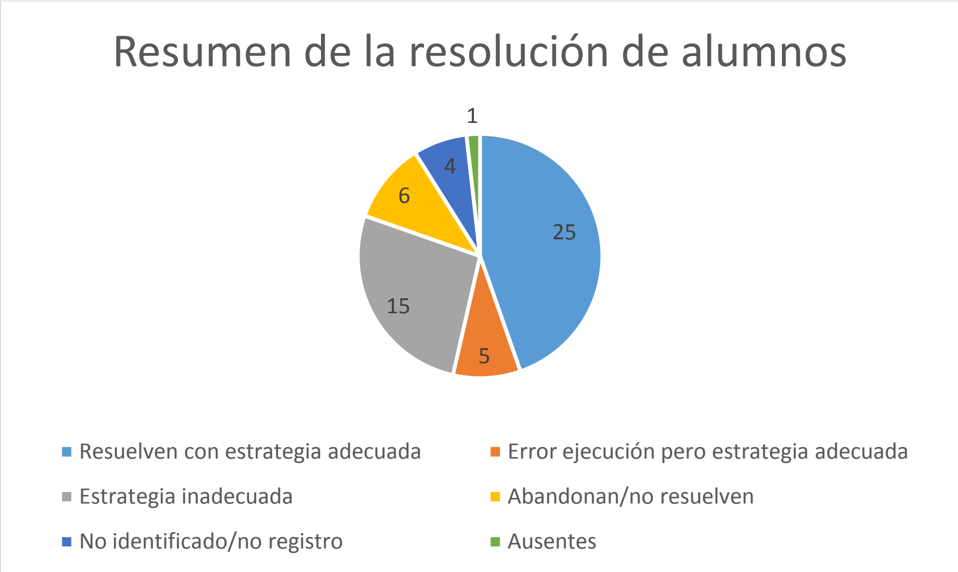


Figura A1.13.1. Resumen de la resolución de alumnos en la sesión 12

1.13.2. Estrategias observadas

En la sesión 7 se plantea anteriormente un problema con la misma estructura que en esta sesión. En la Tabla A1.30 puede verse las estrategias observadas en la sesión 7, que se desglosan en cada una de las dos etapas: una etapa de agrupamiento con grupos de 10 y una etapa de combinación. En esta sesión describo las nuevas estrategias que aparezcan, además de indicar que estrategias de la sesión 7 aparecen. Para la primera etapa aparecen estrategias más avanzadas como uso del valor posicional.

La estrategia *Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno* (A28) es utilizado por un niño que va añadiendo a una fila de marcas los cuatro grupos de 10, y finalmente los cuenta de uno en uno.

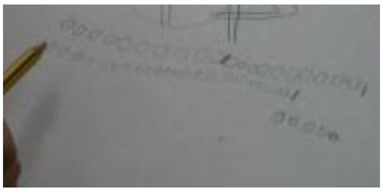


Figura A1.13.2. Representación en una estrategia A28 en la sesión 12

La estrategia *Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de 10 en 10* (A26), ya aparece en la sesión 7, pero la describo por la peculiaridad de la representación que hace la alumna. Esta estrategia consiste en representar con marcas en papel los grupos de 10, poniendo un representante por los grupos. En la imagen 4.13.3 puede verse a la izquierda de papel los 4 grupos de 10 representado por 4 multicubos negros, y debajo de ellos, los grupos de 10 pintados con rectángulos con un círculo en el interior. Para realizar el recuento del total de elementos, se cuenta de 10 en 10, señalando cada una de las cajas.

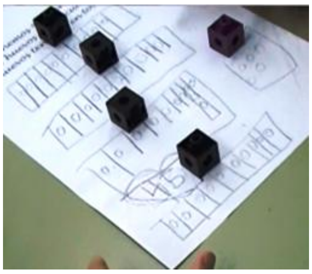


Figura A1.13.3. Representación en una estrategia A26 en la sesión 12

Dentro de agrupamiento con representante de grupo, incluyo la estrategia *Agrupamiento representando un único grupo que se cuenta reiteradamente.* El niño que utiliza esta estrategia lo hace con una huevera, *Representar un grupo de 10 con huevera y contarlos reiteradamente de uno en uno* (A30). En esta estrategia representan un grupo de 10 con una huevera, y cuentan la huevera tantas veces como grupos de 10 indica el problema, contando de uno en uno cada hueco de la huevera. En este caso, el niño de la Figura A1.13.4 cuenta de uno en uno los huecos de la huevera. Cuando acaba ya lleva 10, y vuelve a contarlos otra vez, con lo que lleva 20. Así hasta que ha contado cuatro veces la huevera.

Figura A1.13.4. Estrategia de A30 en la sesión 12

En esta sesión se ha utilizado la estrategia de *Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10* (A29), que no se dio en la sesión 7. En la Figura A1.13.5 se ve como el niño va señalando cada barra según va diciendo 10, 20, etc.

Figura A1.13.5. Estrategia de A29 en la sesión 12

En esta sesión, hay estudiantes que identifican que 4 decenas son 40. Esta estrategia está basada en el *Uso del valor posicional* (VP), y en concreto la voy a denotar *Equivalencia de decenas en unidades, cuando los grupos se dan en decenas* (VP2). En este problema, se utiliza en término decenas, por lo que los niños deben identificar que 4 decenas es un tipo de unidades y equivale a 40. Los niños que utilizan esta estrategia, en esta sesión dicen “Cuatro decenas son 40…”.

Otra estrategia que considero dentro del dominio del *Valor posicional* (VP), es detectar la posición de las cifras, *Identificar la posición de las decenas con grupos de 10 y cantidades* *menor que 10 como la posición de las unidades* (VP3) de un número de dos cantidades dadas que implican unidades de distinto orden. En este problema 4 decenas y 5 unidades permite construir un número simplemente colocando las cifras en la posición que indica su valor. En un número de dos cifras, las decenas son el número de la izquierda, y las unidades el número de la derecha. En la Figura A1.13.6 un estudiante que ha utilizado esta estrategia intenta explican en la carta la posición de cada una de las cantidades.

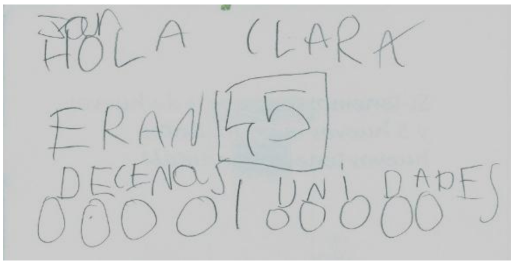


Figura A1.13.6. Explicación de la estrategia de VP3 en la sesión 12

En la Tabla A1.66 muestro las estrategias utilizadas en esta primera etapa. Las estrategias más avanzadas son las basadas en uso del valor posicional.

Tabla A1.66. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 12*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Agrupamiento sin representante de grupo (A)	Con cubos encajables (A1)			1
		Contando de uno en uno (A1)		3
	Con representaciones gráficas con dibujos	Contando de uno en uno (A23)		1
	Con representaciones gráficas con marcas	Contando de uno en uno (A3)		2
			Añadiendo (A28)	1
	Con bloques de base 10	Contando de 10 en 10 (A29)		1
Agrupamiento con representante de grupo (A)	Con representaciones gráficas con marcas (A10)			1
		Contando de uno en uno (A10)		2
		Contando de 10 en 10 (A26)		2
Con un solo grupo que se cuenta reiteradamente (A)	Con una huevera	Contando de uno en uno (A30)		1
Conteo a saltos (CS)		De 10 en 10 (CS1)		1
Uso de valor posicional (VP)	Equivalencia de decenas en unidades (VP2)			10
	Posición de las cifras (VP3)			4

Para completar las estrategias que se han observado en esta sesión 12, y no se han dado en la sesión 7, enlazo con las estrategias de la primera etapa. Para continuar la estrategia que comienza con el agrupamiento con bloques de base contando de 10 en 10 (A26 o A29), esta estrategia finaliza juntando las 4 barras de los bloques de base 10 con 5 unidades sueltas. Se cuenta de 10 en 10 las barras, y las unidades no hay otra forma que contarlas de uno en uno. Esta variante la denomino *Juntar todo con base 10, con grupos de 10, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades* (JT26).

Para la segunda etapa incluyo algunas variantes que están entre la estrategia de *Juntar todo* y la estrategia *Contar a partir del primero*. Si representan las cantidades de los dos sumandos, la considero variante de *Juntar todo*. Si sólo tienen representada con objetos o marcas la segunda cantidad, la considero variante de la estrategia *Contar a partir de un sumando*, como he hecho en sesiones anteriores. Se han utilizado distintos materiales, por lo que, a continuación describo estas variantes.

La variante *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno a partir del primer sumando* (JT27) consiste en representar las dos cantidades con marcas en papel, sin hacer agrupamiento por las decenas (ver imagen izquierda de la Figura A1.13.7), se señala la representación de la primera cantidad diciendo su numeral, y a partir de éste, se cuenta la segunda cantidad. Si las marcas se agrupan en decenas, entonces considero la variante *Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno a partir del primer sumando* (JT28). En la Figura A1.13.7, la imagen de la derecha, explica que 4 decenas son 40 y dibuja 40 bolas en filas de 10, luego añade 5 bolas más, y dice: “40,…, 41, 42, 43, 44 y 45”.

Figura A1.13.7. Representaciones para JT27 y JT28 en la sesión 12

Si se utiliza bloques de base 10, el niño utiliza la variante *Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando* (JT23). En esta estrategia, los niños representan las dos cantidades con bloques de base 10, y partiendo de la cantidad resultado de la etapa anterior, cuentan las unidades de uno en uno. En este caso, la cantidad de la primera etapa son 4 decenas, En la Figura A1.13.8, un niño coge las 4 barras y 5 unidades, y señalando las cuatro barras, dice “40”, y a partir de ahí cuenta de uno en uno, las unidades.

Figura A1.13.8. Estrategia de JT23 en la sesión 12

Juntar todo con los huecos de la huevera, contando de uno en uno a partir del primer sumando (JT29), consiste en hacer un conteo de tantos huecos de la huevera como unidades sueltas hay. Esta variante para combinar las cantidades de las dos etapas, es la continuación de la estrategia A30, en la que se utiliza una única huevera y se cuenta reiteradamente sus huecos.

Un niño intenta en la puesta en común explicar la resolución del problema con la Tabla 100. Su intento me hace describir la estrategia *Conteo a partir de un sumando con Tabla 100*, aunque finalmente no lo termina de hacer, lo explica la tutora. Esta estrategia consiste en contar cinco numeral, a partir de 40, en esta segunda etapa, y a partir de este, se señalan tanto numerales como dedos de la mano se consideran. En esta sesión, un niño utiliza la configuración de una mano, 5 dedos, para señalar 5 numerales en la Tabla 100.

En concordancia a la estrategia de valor posicional, en él se reconoce la *Posición de las cifras* (VP3), para la segunda etapa se reconoce las unidades sueltas como la cifra que debe ir a la derecha en un número de dos cifras. En la primera etapa, se reconoce las decenas como el numeral que debe ir en la posición izquierda de un número de dos cifras.

Un niño utiliza el *Algoritmo* de la suma (AL1) con la cantidad que se obtiene de la etapa anterior y las unidades sueltas. En la Figura A1.13.9 se muestra como un niño intenta utilizar el algoritmo aunque muestra una dificultad al colocar las cifras de la cantidad resultado de la primera etapa, ya que identifica 4 decenas como 44, y además, no tiene bien alineadas las cifras en el algoritmo.

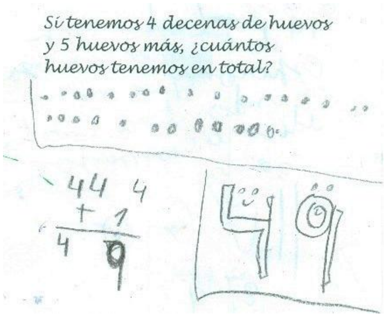


Figura A1.13.9. Estrategia de AL1 en la sesión 12

En la siguiente Tabla A1.67 se puede observar las frecuencias absolutas de la segunda etapa en esta sesión 12.

Tabla A1.67. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 12*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Juntar todo (JT)	Con cubos encajables	Juntando al final	Con grupos de 10, conteo uno en uno (JT13)	4
	Con marcas	Juntando al final	Sin grupos de 10, conteo uno en uno (JT6)	1
			Con grupos de 10, conteo uno en uno (JT17)	5
			Con grupos de 10, conteo de 10 en 10 (JT20)	2
			Sin grupos de 10, conteo de uno en uno a partir del primero (JT27)	1
			Con grupos de 10, conteo de uno en uno a partir del primero (JT28)	1
	Con dibujos	Juntando al final	Con grupos de 10, conteo uno en uno (JT18)	1
	Con bloques de base 10		Contando de 10 en 10 (JT26)	1
			Contando de uno en uno a partir del primero (JT23)	2
	Con hueveras		Contando de uno en uno a partir del primero (JT29)	1
Conteo (C)		Contar a partir del primero (CP1)		4
Estrategia inventada (EI)		Combinar decenas y unidades (EI2)		2
Valor posicional (VP)		Posición de las cifras (VP3)		4
Algoritmo		Suma (AL1)		1

En esta sesión se han podido observar las estrategias que aparecen en la Tabla A1.68 desglosadas en las dos etapas, en una columna aparece el listado de las estrategias de la primera etapa, y en la otra columna las estrategias para la segunda etapa, relacionadas por la última columna con la frecuencia absoluta observada en la sesión 12. Los dos primeros bloques son estrategias ya observadas en la sesión 7 con el mismo tipo de problema, en las que, haya grupos de 10 o no representados, se cuenta de uno en uno.

Tabla A1.68. *Estrategias adecuadas en la sesión 12*

	Estrategia primera etapa		Estrategia segunda etapa	F.A.
A28	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	JT6	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A1	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT13	Juntar todo con cubos encajados, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	4
A23	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT18	Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A3	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	2
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	3
A30	Representar un grupo de 10 con huevera y contarlos reiteradamente de uno en uno	JT29	Juntar todo con los huecos de la huevera, contando de uno en uno a partir del primer sumando	1
A26	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de 10 en 10	JT20	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	2
A29	Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10	JT26	Juntar todo con base 10, con grupos de 10, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades	1
CS1	Conteo a saltos de 10 en 10	CP1	Contar a partir del primero	1
VP2	Equivalencia de decenas en unidades	JT27	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando	1
		JT28	Juntar todo con marcas, representando las cantidades con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno a partir del primer sumando	1
		JT23	Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando	2
		CP1	Contar a partir del primero	3
		EI2	Combinar decenas y unidades	2
		AL1	Algoritmo de la suma	1
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	4

Estrategias que no se han observado en la sesión 7 y aparecen en esta sesión, están incluidas en los siguientes bloques. La estrategia compuesta A30-JT29 que ya he ido describiendo en las etapas por separado, se coge una huevera, que tiene estructura de 10, y cuenta de uno en uno todos sus huecos 4 veces, y luego cuenta cinco huecos más a partir de 40.

El siguiente bloque contiene una estrategia en la que se mantienen los grupos de 10 representados con marcas de la primera etapa, y se cuenta de 10 en 10 (A26-JT20). En el siguiente bloque, un alumno modeliza el problema con bloques de base 10, contando de 10 en 10 las decenas. Esta estrategia completa es A29-JT26.

El siguiente bloque contiene una estrategia de conteo a saltos para los grupos de 10 y de uno en uno para la combinación con las unidades (CS1-CP1).

Los dos siguientes y últimos bloques aparece el uso de valor posicional. El primero contiene las estrategias que en su primera etapa, se reconoce la cantidad de unidades que tienen 4 decenas, y la segunda etapa es muy variada. Hay estrategias que representan la cantidad de 40 en una colección sin agrupar en decenas (JT27), o agrupando en decenas (JT28), o con bloques de base 10 (JT23), y en todas ellas se cuenta a partir del primer sumando. También se combina con *Contar a partir del primero* (CP1), *Combinar decenas y unidades* (EI2), incluso el *Algoritmo de la suma* (AL1).

La estrategia VP3 consiste en identificar el lugar que ocupa en un número de dos cifras las decenas y las unidades del problema. En la Figura A1.13.6 se muestra la explicación de esta estrategia por un niño que la ha utilizado. Se puede ver como separa las decenas y las unidades.

Las estrategias más utilizadas han sido el uso del valor posicional (VP3) y A1-JT13, seguidas de A10-JT17, y la estrategia VP2-CP1, que es una estrategia donde se muestra conocimiento conceptual de la decena y uso de una estrategia de conteo más avanzada que modelización.

1.13.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

A diferencia de la sesión 7 que los niños que realizaron estrategias inadecuadas tendían a restas las unidades a los grupos de 10, en esta sesión las estrategias inadecuadas han tendido a sumar, el número de grupos con las unidades sueltas. Una de las estrategias que se han utilizado de forma inadecuada es *Juntar todos con los dedos*, tomando las 4 decenas y las 5 unidades, como unidades del mismo tipo. Así, los niños suman 4 y 5 como unidades que se pueden combinar. Esta estrategia ha sido utilizada por 2 estudiantes. En la Figura A1.13.10 una niña junta las 4 decenas con las 5 unidades, todo ello representados con los dedos de las manos, como si fuesen unidades del mismo tipo. También se ha observado la estrategia *Juntar todo con marcas contando de uno en uno*, en 5 ocasiones, y *con cubos encajables*, en 4 ocasiones.

Figura A1.13.10. Estrategia de *Juntar todo*, utilizada de forma inadecuada, en la sesión 12

En esta sesión volvió a aparecer la estrategia en la que consideran 4 decenas como 4 grupos de 5. En la Imagen 4.13.11 aparece en la hoja de trabajo dibujado los 4 grupos de 5 con bolas y el resultado final del conteo.

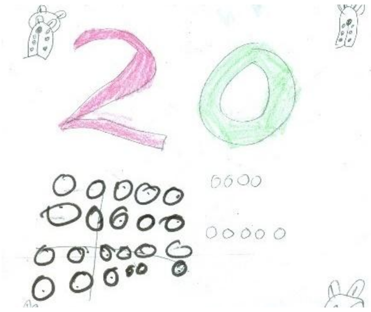


Figura A1.13.11. Estrategia con agrupamiento erróneo, utilizada de forma inadecuada, en la sesión 12

Una estrategia errónea que se ha dado, es entender que hay 5 grupos de 5 y 4 grupos de 4, juntar todo, y suma 41. En la Figura A1.13.12 se puede observar la representación de una niña que utiliza esta estrategia.

Figura A1.13.12. Estrategia de con varios agrupamientos, utilizada de forma inadecuada, en la sesión 12

Una interpretación errónea de las cantidades de problema aparece en la Figura A1.13.13. Como en el enunciado aparece 4 y “decenas de huevos”, hay dos alumnas trabajando juntas que representan “decenas de huevos” con una huevera, y luego colocan 4 multicubos como huevos y luego otros 4 (que deberían corresponder con 5) de los huevos sueltos. Cuentan los multicubos y les sale ocho.

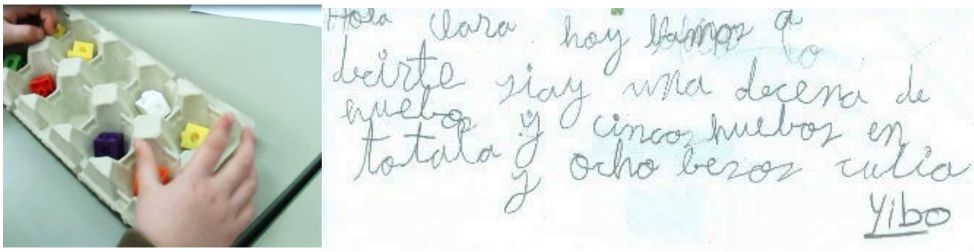


Figura A1.13.13. Identificación incorrecta de las cantidades, en la sesión 12

Dibujar las unidades y las decenas todas como grupos de 10. En dos casos, los estudiantes han construido pos de 10 marcas. En la Figura A1.13.14 se puede ver una representación de este caso, en al que le hacemos al niño ir identificando cuántos grupos de 10 tiene.

Figura A1.13.14. Identificación incorrecta de las cantidades, en la sesión 12

Otra dificultad observada ha sido el uso de un algoritmo de la suma. La colocación de las cantidades no ha sido adecuada. El niño ha colocado un 44 en vez de las 40 unidades que son las 4 decenas.

Tabla A1.69. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 12*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
	Respuesta al azar (E16)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
No conocer cuántas son varias decenas	Hacer grupos distintos de 10 (E17)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Contar el número de grupos (E8)
	Formar grupos de diferente cantidad a la dada (E12)

1.13.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones registradas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.70. Como en todos los problemas de grupos iguales introduzco una columna extra para la resolución para especificar la representación de la cantidad número de grupos, en el caso de utilizar estrategias que lo representen.

Tabla A1.70. *Representaciones encontradas en la sesión 12*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R, B10, H)	17 (3, 0, 9, 2,0,0,3)	35 (9, 0, 19, 2,0,3, 2)	5 (1,0,1,0,0,3,0)	
	B1 (I, D, C)	0 (0,0,0)	1 (1,0,0)	0 (0,0,0)	
	C1				
2	A2		1		
	B2				
	C2				
3	A3	1	2	30	20
	B3				
	C3				11
4	A4			1	3
	B4				
	C4				

Se dan distintas formas de representar las decenas con material, siendo los representantes diferentes, pero todos ellos con 10 unidades. Como se puede en la Figura A1.13.15 los niños construyen grupos de 10 con distintas formas. Si eligen hacerlo en barras les permite comparar la longitud de los grupos representados y comprobar que han puesto en todas ellas 10 cubos encajables.

Figura A1.13.15. Representación con marcas de diferentes unidades, en la sesión 12

Los huevos fritos se representan fácilmente como aparece en la Figura A1.13.16, por lo que la representación icónica del objeto B1, con todos los objetos iguales aparece en un caso. Dado que son muchos huevos fritos, no ha sido una representación muy frecuente.

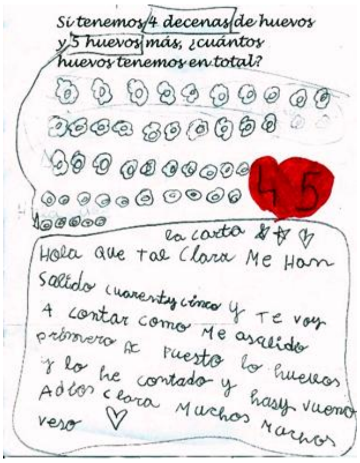


Figura A1.13.16. Representación con marcas de diferentes unidades, en la sesión 12

Una representación curiosa que construye una niña que habitualmente le cuesta resolver es que en dos hueveras coloca exactamente 45 centicubos. Como se puede ver en la Figura A1.13.17, no solo coloca en los huecos, sino también en zonas intermedias. Más tarde esta niña es ayudada por la tutora para modelizar el problema con centicubos haciendo 4 grupos de 10 y 5 sueltos y mostraba dificultad para entenderlo.

Figura A1.13.17. Representación curiosa en la sesión 12

En esta sesión aparecen representaciones de cantidades discretas utilizando unidades de distinto orden. En la Figura A1.13.18 se puede ver como unas marcas son decenas y las otras marcas son unidades, ocupando un lugar diferente unas y otras. Además, aparece la representación icónica de número sin representación de objeto (A1Gm) para dar la solución, dibujando 45 bolas. También aparece la representación simbólica de número sin representación de objeto (A3), escribiendo el numeral “45”.

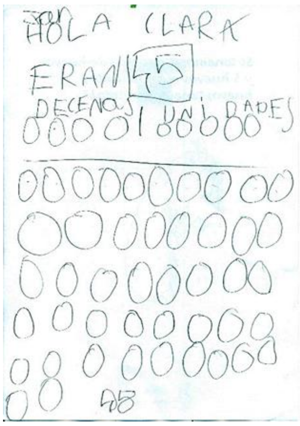


Figura A1.13.18. Hoja de trabajo con distintas representaciones en la sesión 12

1.13.5. Camino de aprendizaje para la tarea

La estrategia A30-JT29, en la que se representa un adecena con una huevera y se cuenta reiteradamente, no apareció en la sesión 12.

C86. Representar una cantidad con hueveras, utilizando sus huecos como unidades.

En esta sesión hay niños que identifican que 4 decenas son 40.

C87. Reconocer que "un número dado de decenas" son una "década", es decir, 4 decenas son 40.

En la estrategia JT28, los niños representan una cantidad de dos cifras agrupada con grupos de 10.

C88. Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales, ya sean objetos, marcas o dibujos, con grupos de 10.

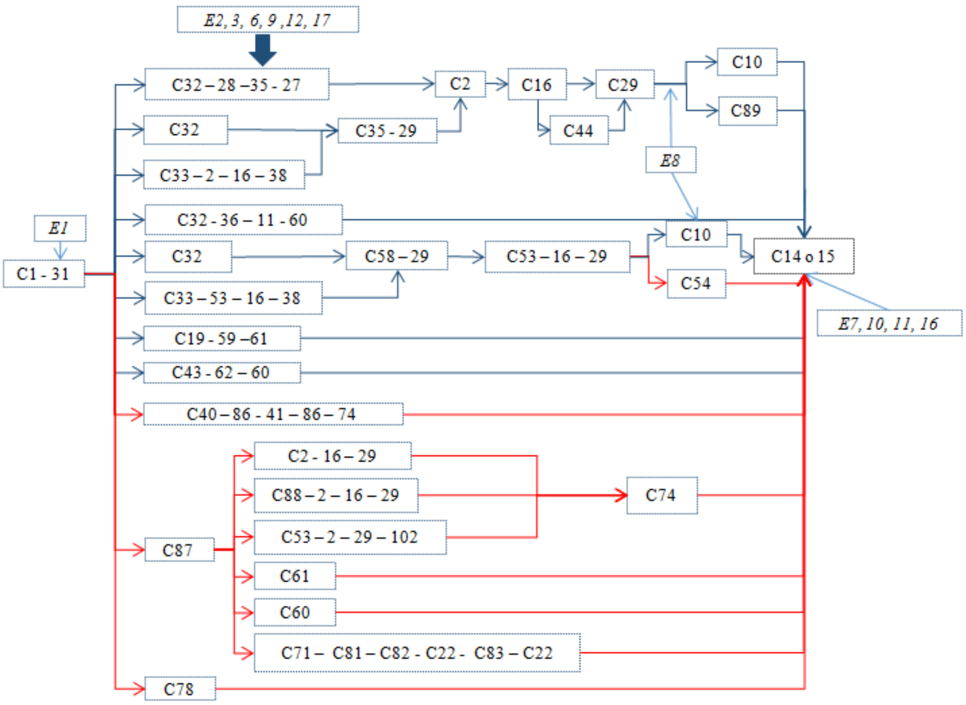


Figura A1.13.19. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 12

Los caminos de aprendizaje en color rojo se han utilizado en esta sesión y no en la sesión 7. Aparece el conteo de los bloques de base 10, de 10 en 10 (C54) y estrategias que en su primera etapa deducen que 4 decena son 40 (C87), y en la segunda etapa se realiza una variedad de estrategias, desde modelización realizando el conteo a partir del primer sumando, como estrategias de conteo, incluso el uso de algoritmo. La estrategia más avanza es el uso de valor posicional (C78).

1.14. Sesión 13

En esta sesión se plantea un problema aditivo donde se deben combinar dos cantidades de dos cifras, que su suma no conlleva llevada, pero que, a diferencia de la sesión 10 en la que también se planteó un problema de este tipo, los dos números tienen distinto de cero, en la posición de las unidades.

Tabla A1.71. *Características principales de la décimo tercera sesión*

Problema	Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?
Tipo de problema	Combinación con total desconocido
Cantidades	Cantidades con dos cifras.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, bloques de base 10
Fecha	24 de Febrero
Cuento	365 pingüinos
Asistentes	26 (de 28 de 1ºA) y 26 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase, a la vez
Participantes	Tutoras de grupos, dos alumnas de prácticas (una en cada clase) y la investigadora.
Recogida de datos	Grabación en video, hojas de registro, hojas de trabajo de los niños, fotografías y narración de la investigadora.

1.14.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión, Clara manda un email con fotos en la nieve y vuelve a plantear un problema basado en el cuento “365 pingüinos”.

Las estrategias avanzadas como uso del valor posicional, modelización con base 10 y algoritmos aumenta muy ligeramente. Intentamos que estos niños salgan a explicar sus estrategias en la puesta en común.

Las frecuencias de resolución de los niños en esta sesión aparecen en la Figura A1.14.1. Los niños que eligieron una estrategia adecuada fueron 43 de los 49 ausentes, aunque solo 28 dieron la respuesta correcta. La razón de que los otros 15 niños no dieran la respuesta correcta fue debido al conteo de las cantidades, tanto al formar las colecciones de los datos del problema, como su recuento total. De hecho hay dos niños que abandona o no resuelven porque al iniciar la representación de la primera cantidad se pierden y lo dejan. En esta sesión hay 4 niños de los que no se obtiene información suficiente para describir su estrategia.

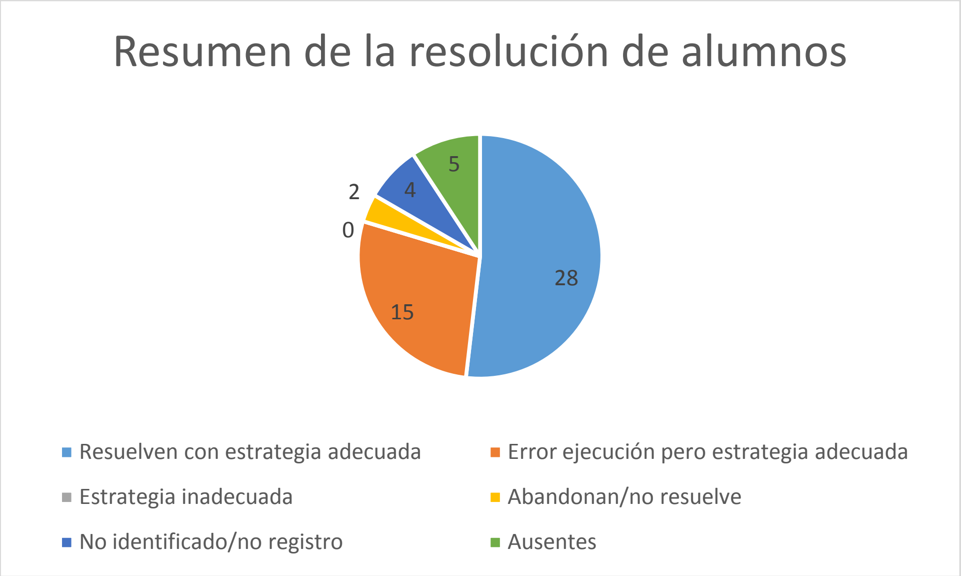


Figura A1.14.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 13

1.14.2. Estrategias observadas

Las estrategias observadas en esta sesión son similares a la de la sesión 10. Se da un ligero aumento de estrategias como el valor posicional y el algoritmo, como muestro a continuación.

Las variantes de la estrategia *Juntar todo con cubos encajables* y *Juntar todo con representaciones gráficas* son las más frecuentes en esta sesión. Estas estrategias suponen el conteo de cantidades de dos cifras, que su total alcanza el 59. Esto ha supuesto que 12 de los niños que han utilizado estas estrategias, mostrasen dificultades en el conteo al no dominar la secuencia numérica hasta un número tan alto.

En la Figura A1.14.2 se puede observar la representación del problema de dos niñas, correspondientes a la estrategia *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT1). En una se ven separadas las dos barras de los datos del problema y en la otra están juntas. Las niñas se perdían una y otra vez al contar todos los cubos que formaban la colección final.

Figura A1.14.2. Estrategia JT1 de la sesión 13

Las variantes de la estrategia *Juntar todos con representaciones gráficas* han sido las más utilizadas. Aparecen la dos variantes ya utilizadas en otras sesiones, *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno* (JT5I), y *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con contadores diferente a una única, contando de uno en uno* (JT4).

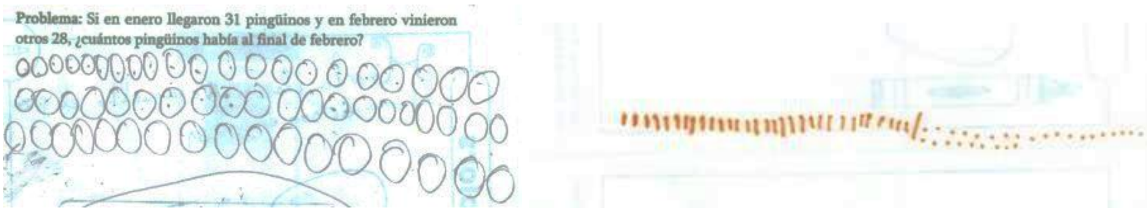


Figura A1.14.3. Estrategias JT5 y JT4 de la sesión 13

La variante que más han utilizados los niños es *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT6). La variante similar, pero utilizando dibujos de las cantidades del problema, *Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT7), se ha dado solo en dos ocasiones.

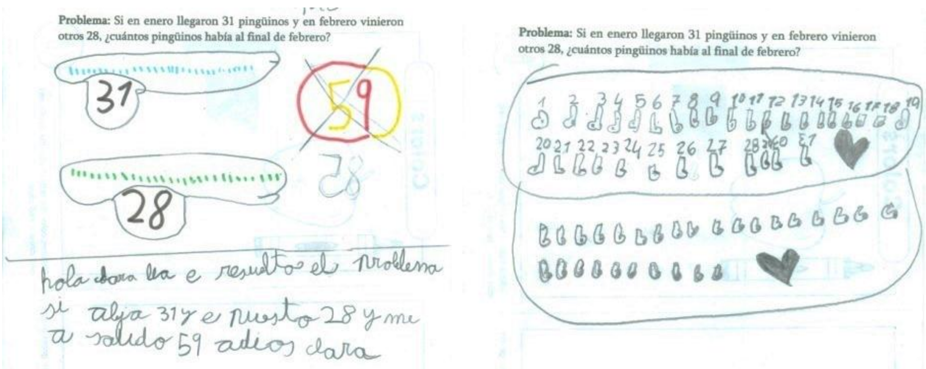


Figura A1.14.4. Estrategias JT6 y JT7 de la sesión 13

Otra forma de representar la estrategia JT6 es utilizar distintos representantes para cada uno de los sumando, como se puede ver en la Figura A1.14.5.

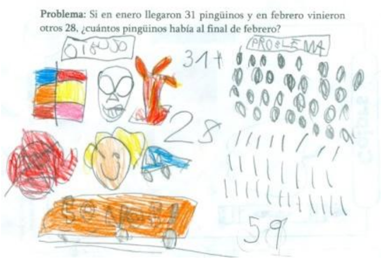


Figura A1.14.5. Estrategias JT6 con diferentes representantes de la sesión 13

En esta sesión no se utiliza la Tabla 100 para una estrategia de modelización directa, pero si hay dos niños que dibujan el mes de enero y el mes de febrero con todos sus días para luego contarlos. Esta variante la denomino *Juntar todo con secuencias numéricas para cada sumando, sin grupos de 10, contando de uno en uno* (JT30). El Figura A1.14.6 se puede observar una de las representaciones, que permite a los niños contar cada uno de los días de los dos meses.

Figura A1.14.6. Estrategias JT30 de la sesión 13

El uso de materiales con estructura de 10 se da con los bloques de 10 y también con cartones de decenas de huevos. Dos niños del aula B rellenan decenas de huevos con cubos encajables, para representar las cantidades, no llegan a concluir el problema, pero han tenido la oportunidad de formar colecciones de objetos sobre estructuras de 10 (Figura A1.14.7). A esta variante la denomina *Juntar todo con objetos, haciendo grupos de 10 con ayuda de las hueveras, contar de uno en uno* (JT31).

Figura A1.14.7. Estrategias JT31 de la sesión 13

Los bloques de base 10 han sido utilizados por 5 niños. Tres de estos niños representan las cantidades con barras y unidades, y luego cuentan todo de uno en uno (Figura A1.14.8). Esta estrategia la denomino *Juntar todo con base 10, contando de uno en uno* (JT19).

Figura A1.14.8. Estrategias JT19 de la sesión 13

Los otros dos niños, agrupan primero las decenas para contarlas, y concluir que si son 5 decenas, son 50. En la Figura A1.14.9, un niño sostiene las 5 barras en las manos mientras cuenta de uno en uno cada unidad que forma las barras, y luego hace lo mismo con las unidades, 51, 52, 53,… Esta estrategia la describo como *Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, contando de uno en uno* (JT25).

Figura A1.14.9. Estrategia JT25 de la sesión 13

No se ha dado ninguna estrategia de conteo sin material, pero sin utilizando la tabla 100. Una niña identifica los 28 primero numerales en la Tabla 100, y en esta ocasión no los cuenta en orden, es decir, no sigue contando a partir de l, “31, 32 (señalando el numeral 1), 33 (señalando el numeral 2), 34 (señalando el numeral 3)…”. Lo que hace es contar a partir del 31 pero señalando por columnas los numerales que hay hasta el 28. Es decir, “32 (señala el 1), 33 (señala el 11), 34 (señala el 21), 35 (señala el 2)…”, así hasta haber señalado los numerales del 1 al 28. Esta estrategia es *Contar a partir del primero con Tabla 100* (CP2).

El uso del valor posicional aumenta también. Se utiliza la *combinación de decenas y unidades por separado* (EI2), en las que se utiliza un hecho numérico para recuperar la suma de las decenas, y pasarlas a unidades; a continuación se utiliza un hecho numérico para recuperar al suma de las unidades, y finalmente se combinan las decenas y unidades. Uno de los niños (E50), ha contado de 10 en 10 las decenas en vez de recuperar el hecho numérico básico, diciendo: “E50: “10, 20, 30, una pausa, 40 y 50, 8 y 1 son 9, 59”. Esta variante la denomino *Descomponer en décadas y unidades, conteo a saltos para las decenas, combinar decenas y unidades con el resultado de las decenas y la combinación de las unidades.* (EI4).

Por último señalar, que 4 niños utilizaron el algoritmo de la suma (AL1), aunque uno de ellos mostró dificultad al ejecutarlo.

Tabla A1.72. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 13*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Juntar todo (JT)	Con cubos encajables (JT1)			1
		Juntando al final (JT1)		10
	Con marcas	Añadiendo	Diferentes (JT4)	2
			Iguales (JT5)	1
		Juntando al final (JT6)		11
	Con dibujos	Juntando al final (JT7)		2
	Con numerales	Juntando al final (JT30)		2
	Con hueveras y cubos encajables (JT31)			2
	Con bloques de base 10	Sin agrupar decenas primero	Conteo de uno en uno (JT19)	3
		Agrupando decenas	Conteo de uno en uno (JT25)	2
Contar a partir del primero (CP1)				1
	Con Tabla 100 (CP2)			1
Estrategias Inventadas	Combinando decenas y unidades (EI2)			2
	Contando de 10 en 10 las decenas y combinación con las unidades (EI4)			1
Algoritmo		Suma (AL1)		4

1.14.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

La dificultad que más frecuentemente se ha podido observar en esta sesión ha sido la falta de dominio de la secuencia de numerales a la hora de formar o determinar colecciones con una cardinal como 31, 28 o 59 como su resultado. De los niños que no consiguen dar la respuesta correcta, trece de ellos son por fallos en la secuencia numérica al aplicar el conteo. Hay dos casos en los que identifican las dos “eles” de la palabra “llegaron” como un once. Los niños están sentado juntos, uno de ellos representan 3 cantidades con marcas y el otro con centicubos.

Figura A1.14.10. Confusión en identificar cantidades en el enunciado de la sesión 13

Uno de los niños que utiliza algoritmo, pone una llevada cuando no debe utilizarlas. Aparece escritura de número en espejos, como se puede observar en la siguiente Figura A1.14.11. El niño justifica que así es como se lo han enseñado en casa y que es un truco que funciona siempre (lo de la llevada).

Figura A1.14.11. Número en espejo de la sesión 13

En la siguiente Tabla A1.73 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.73. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas en la sesión 13*

Dificultad	Errores observados
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
No lectura del problema	Utilizar cantidades erróneas (E19)
No dominio del algoritmo de la suma	Error en la llevada (E20)
Dificultad en la escritura de los numerales	Números en espejo (E18)

1.14.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones observadas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.74.

Tabla A1.74. *Representaciones encontradas en la sesión 13*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Gm, B10, HOc)	34 (14, 14, 4, 2)		
	B1 (I, D, C)	2 (2, 0, 0)		
	C1			
2	A2	4		
	B2			
	C2			
3	A3	7	31	17
	B3			
	C3			13
4	A4		1	2
	B4			
	C4			

Normalmente las representaciones A2 se refieren al uso de la Tabla 100, ya que consisten en la secuencia de numerales. En esta sesión una niña construyen el calendario con lo meses de Enero y Febrero, y cuenta de uno en uno, cada uno de los días de los dos meses.

Figura A1.14.12. Representación A2 en la sesión 13

Las dos representaciones que aparecen como A1HOc son las hueveras que se han utilizado, junto a cubos encajables para representar las cantidades agrupadas en grupos de 10.

Figura A1.14.13. Representación A1HOc en la sesión 13

La representación con bloques de base 10 permite la comprensión del agrupamiento de 10 de nuestro sistema de numeración. Cuatro niños han utilizado este tipo de representación.

Figura A1.14.14. Representación A1B10 en la sesión 13

1.14.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión aparecen tres estrategias nuevas, JT30, JT31 Y EI4. La primera de ellas supone formas dos colecciones con la secuencia numérica (C4), y después contar todos los numerales de uno en uno C10, por lo que no hay capacidades nuevas.

Para la estrategia JT31, los niños deben formar colecciones con ayuda de la huevera, y rellenando los huevos con cubos encajables.

> C90. Formar una colección de hasta 100 elementos, con hueveras, colocando un cubo encajable en cada hueco.

En la nueva estrategia inventada, el alumno descompone el número de décadas y unidades, para calcular la suma de las décadas, realiza un conteo de 10 en 10, contando tantas veces como decenas hay en cada década. Todas estas capacidades ya han sido definidas.

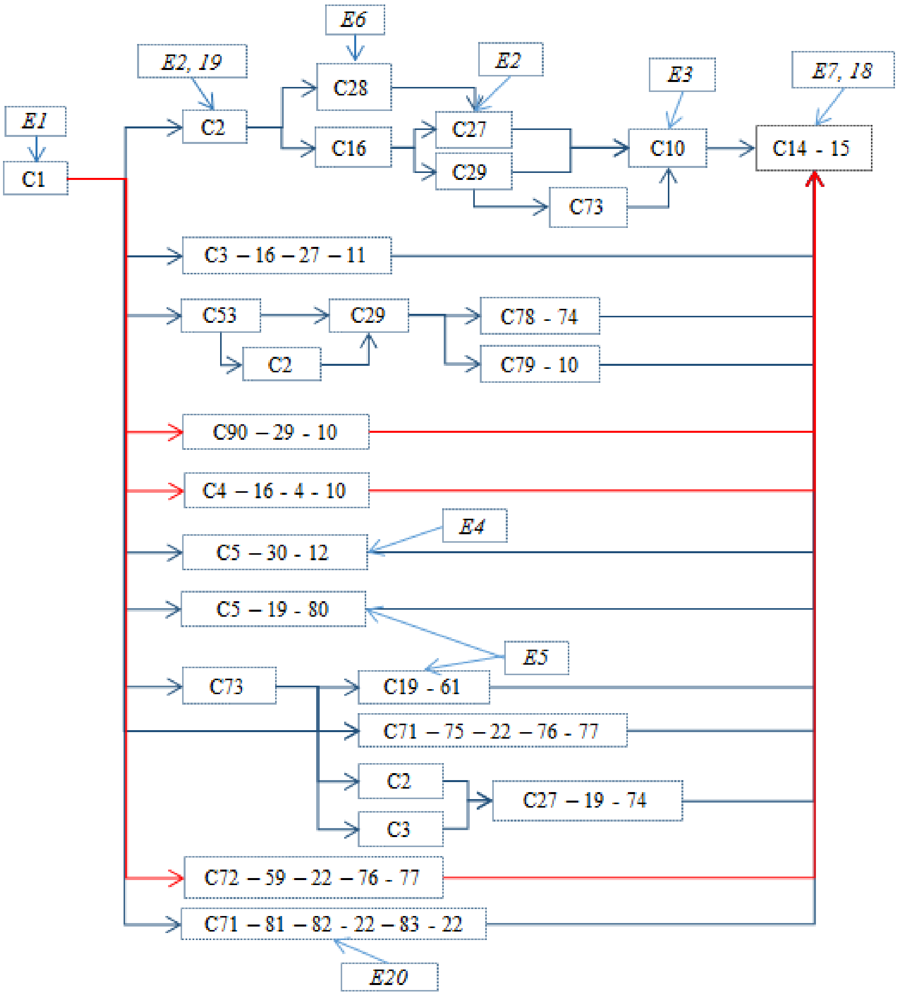


Figura A1.14.15. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 13

1.15. Sesión 14

En esta sesión se plantea el segundo problema de división partitiva, con la cantidad total de elementos 60, lo que implica representar una cantidad de dos cifras, una década, que puede provocar utilizar materiales con grupos de 10.

Tabla A1.75. *Características principales de la décimo cuarta sesión*

Problema	Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?
Tipo de problema	Grupos iguales, división partitiva..
Cantidades	Cantidad mayor: 60.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos, regletas de Cuisenaire.
Fecha	3 de marzo
Cuento	365 pingüinos
Asistentes	28 (de 28 de 1ºA) y 23 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora y 2 alumnos prácticas.
Recogida de datos	Grabación video, Hojas de registro, hojas de trabajo de los niños.

1.15.1. Desarrollo de la sesión

Los talleres en los dos grupos comienzan a la vez. En el grupo A, una alumna de prácticas y la tutora recogen las explicaciones de los niños con video y hojas de registro. En el grupo B, la tutora da apoyo a los estudiantes, una alumna de prácticas recoge las entrevistas en una hoja de registro y yo realizo grabaciones en video.

El problema que se plantea es división partitiva y la estrategia, que según los estudios previos, se corresponde su estructura es el reparto. En el grupo A se extiende entre los niños una estrategia de agrupamiento haciendo grupos con tantos elementos en cada uno de ellos como grupos hay, para finalmente contar el número de grupos. En el siguiente apartado la describo con detalle.

En los dos grupos ha habido niños que han utilizado las regletas de Cuisenaire (que han incorporado las tutoras) pero cada regleta representa una unidad en sus modelizaciones.

Ha habido un total de 39 estudiantes que han elegido una estrategia que resuelve el problema pero solo 22 han sido capaces de ejecutarla completamente bien, dando el resultado correcto. De estos 22 estudiantes, al menos 5 han sido ayudados por las tutoras. Los 17 estudiantes que no han conseguido terminar han mostrado dificultades en comprender las cantidades que formaban grupos y elementos por grupos, y dificultades en el conteo.

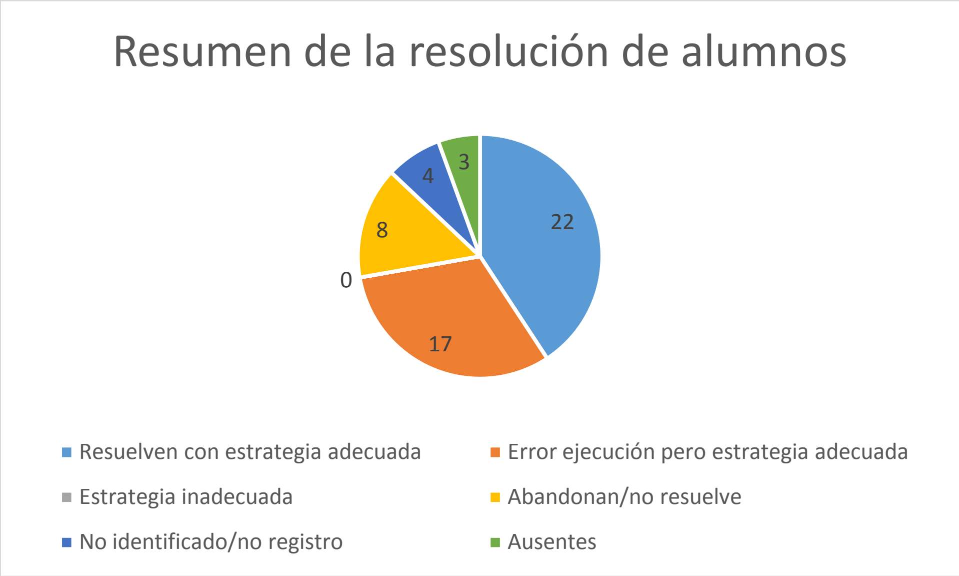


Figura A1.15.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 14

1.15.2. Estrategias observadas

El problema tiene estructura multiplicativa de división partitiva, y la estrategia de modelización directa que corresponde a esta categoría semántica es la estrategia de *Reparto* (R).

Al igual que en la sesión 5, distingo entre estrategias de *Reparto sin representantes de los grupos* y estrategias de *Reparto con representante de los grupos*. Comienzo con las estrategias observadas de reparto sin representante de grupo. El uso de los cubos encajables permite comparar cantidades por su longitud. En esta sesión aparece la variante de Reparto con cubos encajables, *Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno* (R20). En la Figura A1.15.2, una niña hace una barra de 60 centicubos. Después separa 4 barras de 10, y el resto de centicubos los reparte den la s4 barras hasta que todas tienen los mismo centicubos. Este material permite comparar sin contar las cuatro barras.

Figura A1.15.2. Estrategia R20 en la sesión 14

La estrategia de *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno* (R2) consiste en contar 60 cubos encajables y repartirlos de cuatro grupos no marcados. En la Figura A1.15.3, el niño va repartiendo en cuatro grupos, y el niño va comprobando que en todos los grupos hay la misma cantidad de cubos. Otros niños, reparten todo y lo comprueban al final.

Figura A1.15.3. Estrategia R2 en la sesión 14

El uso de las regletas no ha sido el habitual del material. Cada regleta se ha tomado como una unidad, fuese cual fuese su valor. Como variante de estrategia de *Reparto con otros objetos contando primero el total de elementos* (R2), se ha dado haciendo 4 grupos de 10 y el resto se ha repartido de uno en uno, *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno* (R21). En la Figura A1.15.4 se puede observar esta estrategia, pero que no está bien ejecutada, ya que las últimas regletas se han repartido solo en dos de los grupos.

Figura A1.15.4. Estrategia R21 mal ejecutada en la sesión 14

Otra variante es la estrategia de *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, aproximando en cuatro partes* (R22). En la imagen 4.15.5, la niña va buscando los cortes que aproximadamente dejan toda la colección dividida en cuatro partes iguales.

Figura A1.15.5. Estrategia R22 en la sesión 14

En esta sesión, un estudiante decide hacerlo con los bloques de B10. Coge 6 barras y se dispone a repartirlos en grupos. Al principio hace 3 grupos con dos barras en cada uno de ellos, pero le decimos que no son 3 grupos que son 4. Después de un buen rato, decide cambiar barras por unidades y finalmente consigue dividirlo en 4 grupos, como se puede ver en la Figura A1.15.6. Esta estrategia la denoto como *Reparto con base 10, repartiendo primero barras, y después cambiando barras por unidades para continuar el reparto* (R23).

Figura A1.15.6. Estrategia R23 en la sesión 14

Como variantes de las estrategias de *Reparto con representante de grupo*, las más utilizadas ha sido la estrategia de *Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos* (R14) donde se dibujan 4 cuadriláteros y se van poniendo bolas de una en una en cada caja contando a la vez hasta 60. En la Figura A1.15.7 se puede ver en la parte de abajo la representación de esta estrategia. Esta niña primero dibuja los 60 pingüinos pero no sabe cómo redondearlos en cuatro grupos iguales, con alguna indicación de la tutora, realiza la estrategia de reparto.

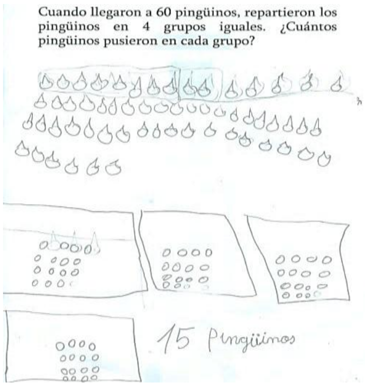


Figura A1.15.7. Estrategia R14 en la sesión 14

La estrategia de *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno y representando la cantidad número de grupos* (R13), ha sido utilizada en dos ocasiones. En la Figura A1.15.8, se representan los 4 grupos con 4 cubos encajables, se forma una colección de 60 cubos y se reparten en los 4 grupos. Este reparto puede ser de uno en uno, o en bloques. En esta sesión los niños reparten de uno en uno con bastante inseguridad.

Figura A1.15.8. Representación de las cantidades en la estrategia R13 en la sesión 14

Lo más llamativo de las estrategias observadas en esta sesión es que 21 estudiantes eligieron una estrategia de resolución, que aunque resuelve el problema, no es la que se corresponden con la estructura semántica del problema. Dicha esta estrategia consiste en agrupamientos en grupos de 4 elementos, contando finalmente el número de grupos para dar la solución, hecho que hace ver que los niños no comprenden muy bien el significado del problema ya que muchos contaban 15 grupos de cuatro. Esta estrategia al denoto como *Medida invirtiendo el* *papel de grupos y elementos por grupos*. Distinto entre los materiales que han utilizado, siendo el uso de representación gráficas *con marcas* la más frecuente, *Medida con marcas, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo* (M15). En la Figura A1.15.9 se puede observar como se ha pintado 60 bolas, por lo que se podría hablar de una variante en la que se cuenta primero el total de elementos, y después se han ido agrupando de cuatro en cuatro. El resultado es el número de grupos de cuatro que salen.

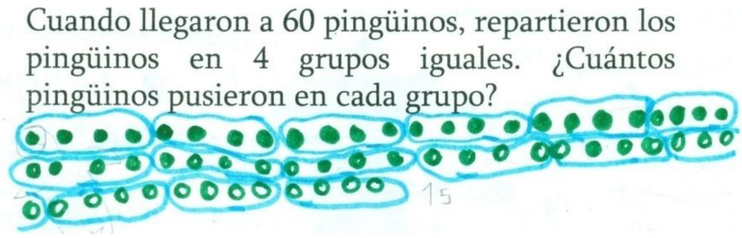


Figura A1.15.9. Representación de la estrategia M15 en la sesión 14

En un caso, un niño va dibujando marcas, incluyéndolas en cajas de 4. En este caso no se forma primero la colección, sino que se van completando grupos de 4. Este niño muestra muchas dificultades en el conteo del total de elementos que tiene que completar (ver Figura A1.15.10).

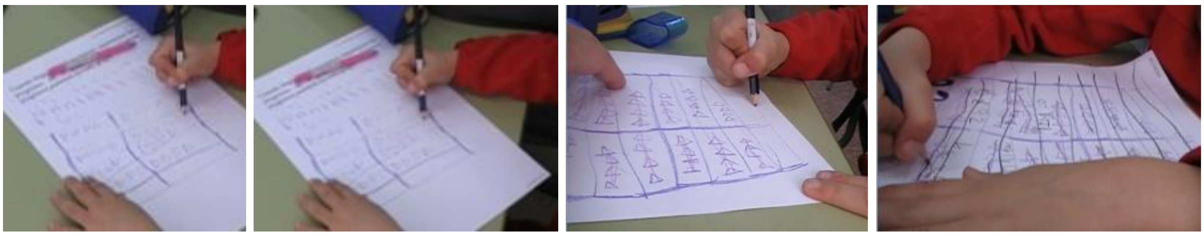


Figura A1.15.10. Representación de la estrategia M15 en la sesión 14

Otra niña va dibujando marcas, diferenciando en color grupos de 4, como se puede ver en la siguiente Figura A1.15.11. Después cuenta el número de grupos de 4 que se diferencian por tener distinto color. Esta estrategia también se ha utilizado con dibujos, *Medida con dibujos, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo* (M16).

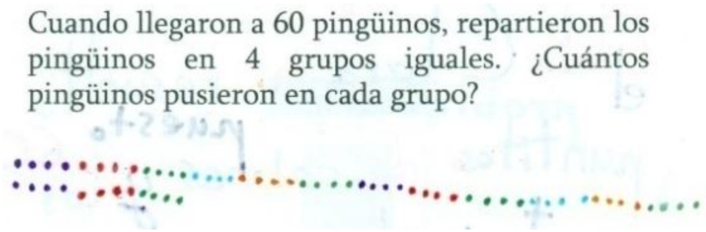


Figura A1.15.11. Representación de la estrategia M15 en la sesión 14

Esta misma estrategia con cubos encajables, *Medida con cubos encajables, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo* (M14) consiste en formar una colección de 60 cubos encajables y después dividirla en grupos de 4. Para saber el resultado se cuentan el número de grupos de 4. En la Figura A1.15.12, una niña construye una barra con 60 centicubos, y después la divide en barras de 4 centicubos, que contará para saber el resultado del problema.

Figura A1.15.12. Estrategia M14 en la sesión 14

La estrategia más avanzada es una Estrategia inventada (EI), descomponiendo 60 en 40 que puede separar en 4 decenas para cada grupos, y los 20 restante, los separa en 5. La niña (E50) lo explica así:

> He puesto…, primero he puesto 40, 10 en una caja, 10 en otra, 10 en otra y 10 en otra. Después he puesto…he puesto… 50, he puesto 5,… y en la otra he puesto 5, en la otra 5 y en la otra otros 5… y los he contado… 10 (saca las dos manos) más 5 más, 10… 11, 12, 13, 14, 15 (contando 5 dedos), 15.

Esta estrategia la describo como *(Reparto) Conteo a saltos de 10 en 10 sin pasarse del total de elementos hasta completar 4 grupos, después conteo a saltos de 5 en 5, que agota el total de elementos, y finalmente, se suma 10 + 5* (EI5).

Las frecuencias de las estrategias utilizadas se pueden ver en la Tabla A1.76, donde llama la atención que un problema se estructura semántica de división partitiva haya sido resuelto por 21 de los asistentes con una estrategia de agrupamiento.

Tabla A1.76. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 14*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Reparto sin representación del grupo	Con cubos encajables	Contando primero la cantidad total de elementos	Repartiendo en grupos de 10, y luego de uno en uno (R20)	1
	Con otros objetos	Contando primero la cantidad total de elementos (R2)		3
			Repartiendo en grupos de 10, y luego de uno en uno (R21)	1
			Dividendo en cuartos (R22)	1
	Con bloques de base 10 (R23)			1
Reparto con representación del grupo	Con objetos	Contando primero la cantidad total de elementos (R13)		2
	Con marcas (R14)			9
Agrupamiento con grupos de 4 elementos	Con cubos encajados (M14)			6
	Con marcas (M15)			14
	Con dibujos (M16)			1
Estrategia Inventada (EI5)	CS10-CS5			1

1.15.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

En esta sesión se utiliza una estrategia de agrupamiento, donde los grupos no se corresponden con los grupos del problema. En el problema hay 4 grupos en los que hay que repartir un total de 60 pingüinos. Con la estrategia de agrupamiento, los niños han hecho grupos de 4 hasta agotar los 60 pingüinos. La estrategia de agrupamiento con grupos de 4 elementos ha generado varias dificultades. Una de ellas está provocada por la falta del dominio de la secuencia numérica hasta el 60 y su aplicación en el conteo. Se han registrado dificultades de conteo en 11 de los niños que han elegido estrategias adecuadas. Para evitar esta dificultad, cuatro niños han numerado las marcas de los pingüinos, como veremos en el apartado de representaciones.

Otra dificultad debida a esta estrategia es la falta de comprensión de la estructura del problema, ya que al hacer grupos, tras agotar el total de elementos, sus respuestas han sido *"hay 15 grupos"*, que no es la solución, hecho realizado por doce niños. Los niños que tienen dificultades en el conteo y no han representado 60 pingüinos, no han completado grupos de 4, y su respuesta era *"tantos grupos y sobran tantos",* que ha ocurrido en seis casos.

En esta sesión, las respuestas dando la solución, se puede ver que los niños no resuelven, porque agrupar de 15 en 15 no es evidente en el problema, de hecho se ve que no sabe cuál es la solución si 60 o 15 (ver Figura A1.15.13).

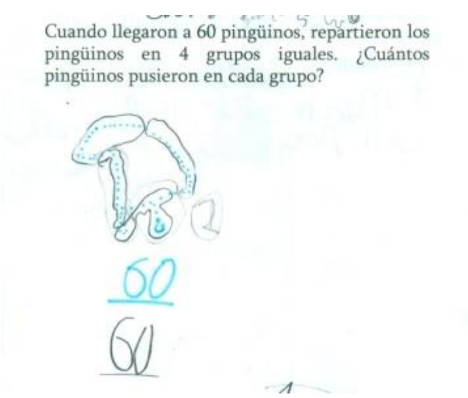
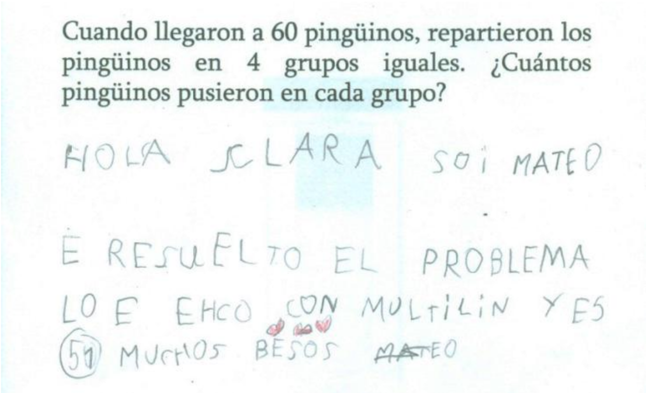


Figura A1.15.13. Dar la solución que se escucha en la sesión 14

Hay niños que representan grupos, pero no representan bien las cantidades de grupos, o elementos por grupo, o total de elementos. En la Figura A1.15.14, la primera imagen muestra una niña que ha utiliza una estrategia de reparto, reparte 10 en cada grupo e inicialmente le salen 6 grupos. La tutora le indica que son cuatro grupos y ajusta dos grupos colocando cada regleta al lado de otra de otros dos grupos. En la imagen del centro, el niño intenta construir una colección de 60 regletas de 3 tipos diferentes (unidades, nueves y dieces), y luego empieza a hacer grupos pero sin concretar el problema. En la imagen de la derecha, una niña empieza a colocar bolitas de plastilina por los huevos y montículos de las hueveras, pero sin controlar el número de bolitas ni hueveras que utiliza. No sabe cuántas hay de ninguna de las cantidades, solamente construye esa representación.

Figura A1.15.14. Agrupar sin conocer cantidades en la sesión 14

En la Figura A1.15.15 se puede ver también la dificultad de escritura de numerales de dos cifras. La carta que escribe el estudiante tiene un "51", en vez de un "15".



Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?

HOLA CLARA SOi MATEO

E RESUELTO EL PROBLEMA

LO E EHCO CON MULTILIN Y ES

51 MUCHOS BESOS MATEO

Figura A1.15.15. Dificultad al escribir el numeral en la sesión 14

En la siguiente Tabla A1.77 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.77. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 14*

Dificultades	Errores observados
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
	Dar un resto en un problema de división partitiva (E22)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Invertir el papel de grupos y número de grupos, y dar la respuesta en número de grupos (E21)
	Hacer grupos con un número de elementos que no corresponde (E12)
Dificultad en la escritura de los numerales	Números en espejo (E18)

1.15.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones de cantidades utilizadas por los niños se pueden observar en la Tabla A1.78. Al haber dos tipos de cantidades, en la resolución he distinguido las representaciones utilizadas en cada una de ellas.

Tabla A1.78. *Representaciones encontradas en la sesión 14*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R, B10, H)	13 (2, 0, 10, 0,0,0, 1)	40 (6, 10, 23, 0,0,1, 0)		
	B1 (I, D, C)	0 (0,0,0)	1 (1,0,0)	6 (6,0,0)	
	C1				
2	A2		2	3	
	B2		1		
	C2				
3	A3			27	16
	B3				
	C3				11
4	A4				5
	B4				
	C4				1

Como en otras sesiones, las representaciones gráficas y con cubos encajables son las más utilizadas en la resolución. Ha habido pocas representaciones icónicas, comprensible ya que dibujas 60 pingüinos es una tarea ardua. Aun así, sí que ha habido un niño que llegó a hacer todos los dibujos de los pingüinos (ver Figura A1.15.16).

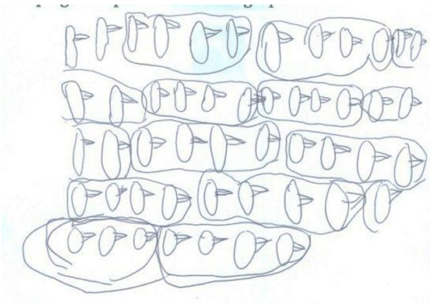


Figura A1.15.16. Representación B1I en la sesión 14

Otros niños han acompañado las marcas con numerales para no perderse en la formación de la colección de 60 pingüinos. Este uso de la secuencia de numerales aparece en la resolución (Ver Figura A1.15.17 imagen izquierda). También ha sido utilizada para dar la solución con el conteo de los grupos de 4 (ver Figura A1.15.17, imagen de la derecha).

Figura A1.15.17. Uso distintos de las representaciones A2 en la sesión 14

El resto de representaciones han sido utilizadas de forma similar a otras sesiones.

1.15.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión, las estrategias R20 y R21 suponen repartir una cantidad de contadores individuales en bloques de 10, y el resto de uno en uno.

> C91. Reparto de una colección de cubos encajables, objetos o marcas, primero en grupos de 10, y luego de uno en uno.

La estrategia R22 consiste en buscar aproximadamente cuatro partes iguales.

> C92. Dividir aproximadamente una colección de cubos encajables, objetos o marcas en cuatro partes iguales (cuartos), y ajustar hasta que los cuatro grupos tengan la misma cantidad.

Además, se realiza un reparto con bloques de base 10 (R23), donde el niño primero reparte las barras, y si no puede seguir repartiendo, cambiar las barras por unidades.

> C93. Reparto con bloques de base 10, repartiendo primero las barras, y si es necesario, cambiar barras por unidades para seguir el reparto.

Para la estrategia inventada, voy a enunciar una capacidad que realice un reparto por ensayo y error y probando por conteo a saltos.

> C94. Proponer una cantidad por grupos en un problemas de división partitiva, y realiza conteo a saltos para probar si es adecuada.
>
> C116. Descomponer una década en otras dos décadas menores.

Para las estrategias M14, M15 y M16 no necesito crear ninguna capacidad, simplemente concatenar la capacidad de invertir el número de grupos por el número de elementos por grupos y utilizar las capacidades de una estrategia de medida.

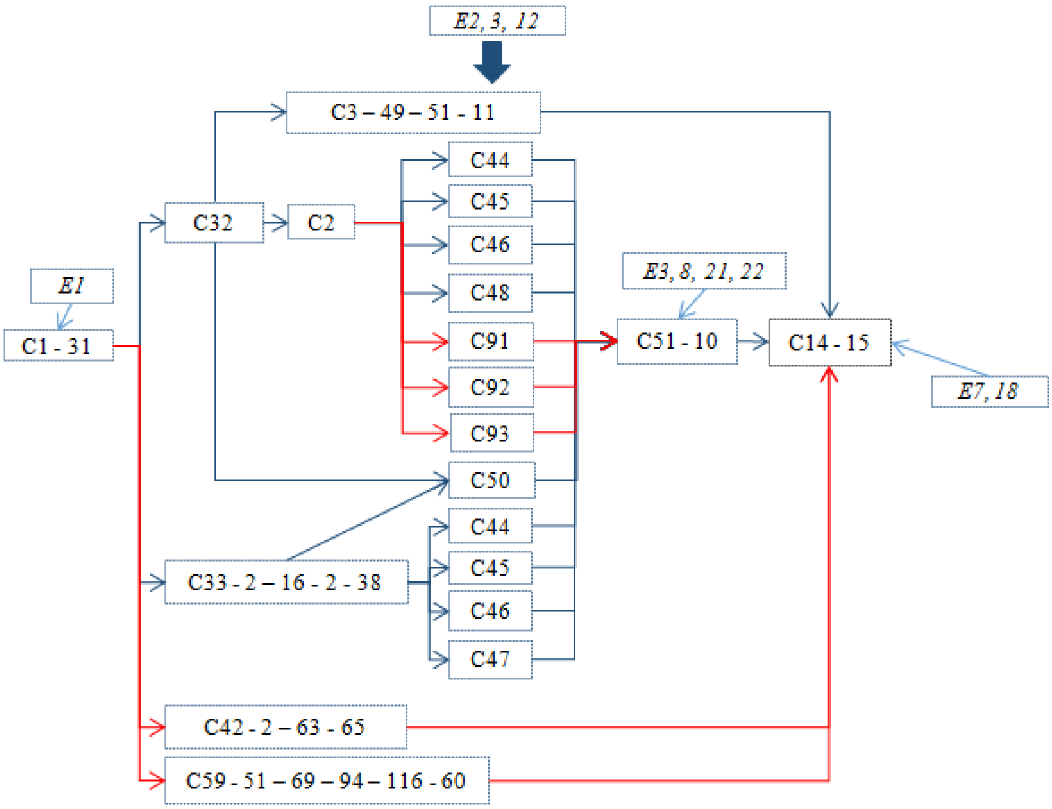


Figura A1.15.18. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 14

1.16. Sesión 15

En esta sesión se platea el cuarto problema de grupos iguales, de división medida con el resto. En las sesión 8, 8b y 11 ya se ha planteado un problema de este tipo. Describiré a continuación las estrategias que no hayan utilizado antes, e incluyo aspectos de otros ya descritas para detallar más en las estrategias observadas por los niños.

Tabla A1.79. *Características principales de la décimo quinta sesión*

Problema	Cuando había 45 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?
Tipo de problema	Problemas de estructura multiplicativa de división medida con resto.
Cantidades	Cantidad mayor: 45.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, Multilink, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), cartones de decenas de huevos.
Fecha	10 de Marzo
Cuento	365 pingüinos
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 23 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Participantes	Tutoras de grupos, investigadora y 2 alumnos prácticas.
Recogida de datos	Grabación video, Hojas de registro, hojas de trabajo de los niños y fotografías.

1.16.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión comienzo grabando en el grupo A, mientras una alumna de práctica graba en el grupo B. las tutoras me ayudan a anotar las estrategias en hojas de registro.

En el grupo B, la mayoría de los niños sigue utilizando modelización, por lo que en la puesta en común intentamos que los niños que utilizan valor posicional lo cuenten para que los demás lo puedan escuchar. Una niña lee la carta a Clara que ha realizado y la tutora remarca lo importante que es explicar las estrategias. Invitamos a los niños a ayudar a resolver a los compañeros con dificultades. En la Figura A1.16.1, un estudiante que en esta sesión utiliza el valor posicional, explica cómo resolver el problema con centicubos a un compañero.

Figura A1.16.1. Ayuda entre los niños en la sesión 15

En el grupo A, parece que más niños empiezan a utilizar el valor posicional señalando las cifras del número, aunque la gran mayoría sigue utilizando modelización. Pocos utilizan los bloques de Base 10.

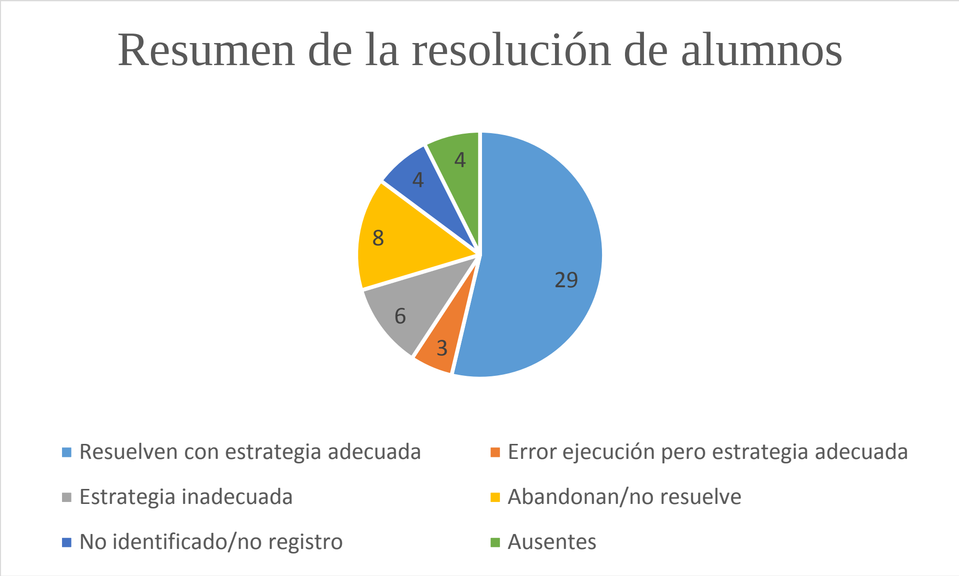


Figura A1.16.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 15

Hay cartas en las dos aulas que explican muy bien las estrategias utilizadas por los niños.

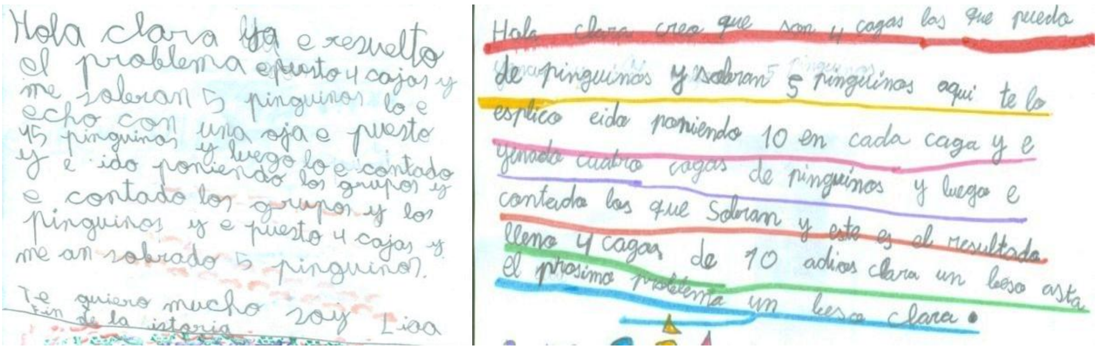


Figura A1.16.3. Cartas en la sesión 15

1.16.2. Estrategias observadas

Las estrategias que ya he descrito en la sesión anterior, de *Medida con marcas, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto* (M1) o *Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto* (M2), mantienen diferencias en sus representaciones. En las primeras, no se muestra la separación de las decenas según se cuenta hasta un numeral de dos cifras, como se puede ver en la imagen izquierda de la Figura A1.16.4. En la segunda, se van construyendo grupos de 10, como se puede ver en la imagen de la derecha.

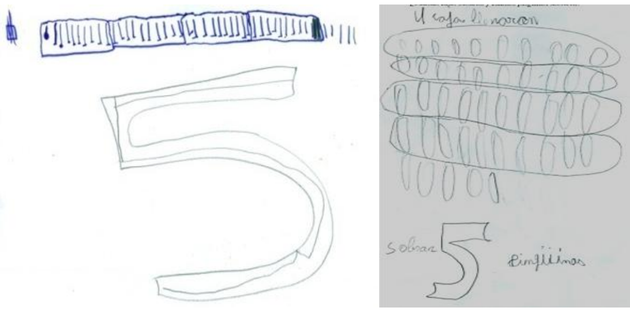


Figura A1.16.4. Representaciones de M1 y M2 en la sesión 15

Una forma de ejecutar la estrategia de *Medida con marcas representando primero el total de elementos* (M1), es la que se muestra en la Figura A1.16.5, una niña representa 45 marcas y luego va tachando de 10 en 10 y las va metiendo en cajas, hasta que no completa una caja de 10 y esas son las que le sobran.

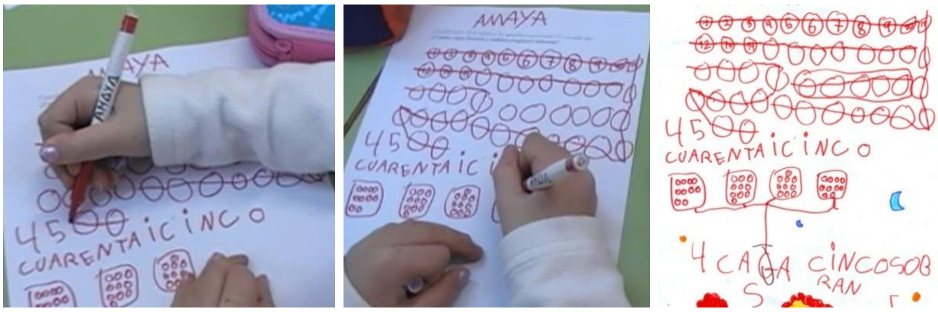


Figura A1.16.5. Estrategia de M1 en la sesión 15

Con cubos encajables se ha observado la variante *Medida con cubos encajables formando barras, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto* (M17), que no se ha utilizado en las otras sesiones.

Una estrategia que no está dentro de las estrategias de medida es *Reparto con marcas en un problema de Medida, ajustando por ensayo y error el número de grupos, repartiendo el total de elementos hasta formar grupos con el número de elementos de la cantidad dada.* (R30). Se eligen un número de grupos y se reparte el total de elementos entre esos grupos. Como el enunciado en un problema de división medida, indica el número de elementos por grupo, si al completar el total de elementos, los grupos no tienen el número de elementos indicado, se ajusta el número de grupos propuesto. En la Figura A1.16.6 aparece la hoja de trabajo de una niña que reparte los 45 objetos en 6 grupos inicialmente. Como no completa grupos de 10 tacha todos los objetos de grupos de la derecha y reparte los objetos en los otros grupos hasta que obtiene grupos de 10 y una cantidad de unidades menores que 10.

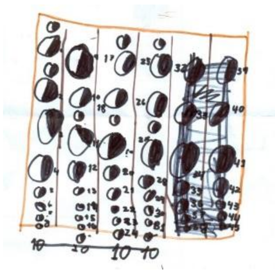


Figura A1.16.6. Representación de la R30 en la sesión 15

Una niña explica: “He puesto 10 en una caja, otras 10 en otra, otras 10 en otra y otras 10 en otra y luego me han sobrado 5”. Esta estrategia la he clasificado como de *conteo a saltos de 10 en 10* (CS2), ya que la niña va contando de 10 en 10, y por cada 10 llena una caja hasta 40.

En esta sesión, una niña explica cómo utilizar el valor posicional de un número de dos cifras. Escribe en la pizarra el 45 e indica las decenas y las unidades, explicando que las decenas son grupos de 10 y las unidades, no son 10.

Figura A1.16.7. Estrategia basada VP1 en la sesión 15

Las estrategias registradas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.80.

Tabla A1.80. *Estrategias adecuadas en la sesión 15*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Medida (M)	Con marcas	Representando el total primero (M1)		11
		Añadiendo grupos hasta total (M2)		4
	Con cubos encajables	Representando el total primero (M4)		7
		Añadiendo grupos hasta total (M17)		1
	Con objetos	Añadiendo grupos hasta total	Con representante de grupo (9)	1
	Con bloques de base	Representando el total primero (M11)		2
Reparto ensayo y error	Con marcas (R30)			1
Conteo a saltos (CS)	De 10 en 10 (CS2)			1
Valor posicional (VP1)				4

1.16.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Describo a continuación algunas estrategias que indican la no comprensión del enunciado. En la Figura A1.16.8 una niña representa una cantidad, que no llega a ser el total de elementos y luego tacha 5.

Figura A1.16.8. Estrategia inadecuada Quitar en la sesión 15

Dos niños realizan grupos de 5. Los dos están sentado juntos y puede ser que hayan empezado a escuchar que una de la solución es 5 y por eso hagan esta agrupación. Inicialmente, una de las niñas estaba utilizando las hueveras y colocando centicubos en sus huecos (ver Figura A1.16.9 en la imagen de la izquierda), pero finalmente, hace agrupamientos de 5.

Figura A1.16.9. Estrategia inadecuada con grupos de 5 en la sesión 15

Otros dos estudiantes suman 45 más 10, uno de ellos realiza la estrategia de modelización *Juntar todo con cubos encajables* y otro niño, *contar a partir del primero*.

El niño que ha sido ayudado por un compañero no consigue explicar bien el problema, en la puesta en común. Explica que se ponen grupos de 10 y sobran 5, pero no sabe los que hay en total, no entiende el procedimiento. En la Figura A1.16.10, sale con una huevera con centicubos repartidos pero no sabe cuántos hay en cada uno.

Figura A1.16.10. Incomprensión de la tarea en la sesión 15

Otros niños han tenido problemas para resolver el problema, no formando el total de los elementos correctamente, agrupando en grupos más pequeños. En la Figura A1.16.11, una niña utiliza una representación A2 (simbólica de objeto e icónica de número). Primero escribe bien hasta 45 y empieza a agrupar de 10 en 10, pero no debe terminar a tiempo y borra numerales para terminar de agrupar antes.

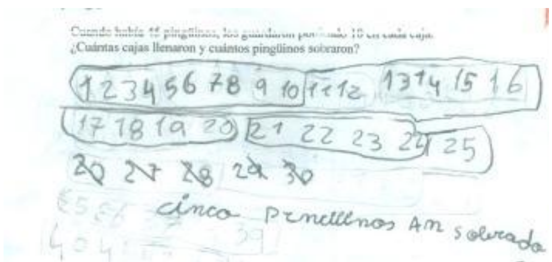


Figura A1.16.11. Estrategia no terminada correctamente en la sesión 15

En la siguiente Tabla A1.81 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.81. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 15*

Dificultades	Errores observados
No distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Hacer grupos con un número de elementos que no corresponde (E12)
No comprender la situación	Aplicación de estrategias inadecuadas (E1)

1.16.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones registradas en esta sesión aparecen en la Tabla A1.82.

Tabla A1.82. *Representaciones encontradas en la sesión 15*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
Icónica de número	A1 (Oc, Gm, B10)	13(12, 1,0)	34 (15, 17, 2)	5 (1,1 ,3)	
	B1 (I, D, C)	1 (1,0,0)	0 (0,0,0)	1 (1,0,0)	
	C1				
Icónicas y simbólicas de número	A2		5		
	B2				
	C2				
Número con cifras	A3			18	13
	B3				
	C3			7	15
Número con palabras	A4			2	4
	B4				
	C4			1	3

En la Figura A1.16.12, se puede ver dos representaciones con cubos encajables. En una de ellas se puede distinguir los grupos de 10 y en la otra no.

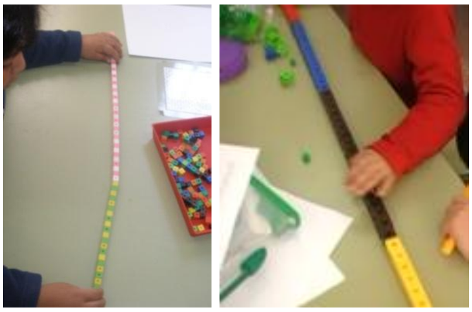


Figura A1.16.12. Representación A1Oc para resolver

En la Figura A1.16.12, contiene una secuencia de numerales A2 aunque el niño no concluyó con esta representación.

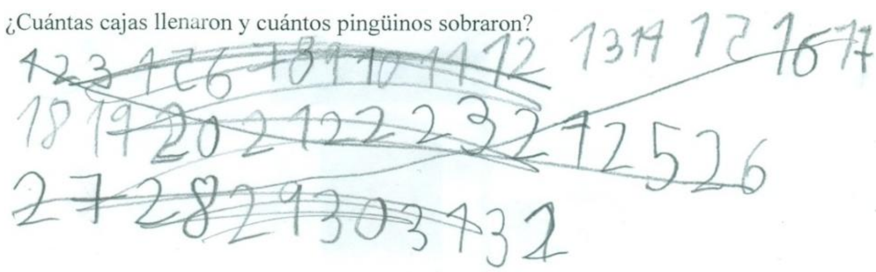


Figura A1.16.13. Representación A2

En la Figura A1.16.14, contiene representaciones de cantidades de distintos tipos. Hay marcas A1Gm, hay secuencia de numerales A2 y también hay cantidades simbólicas con cifras sin representante de tipo de objeto (A3).

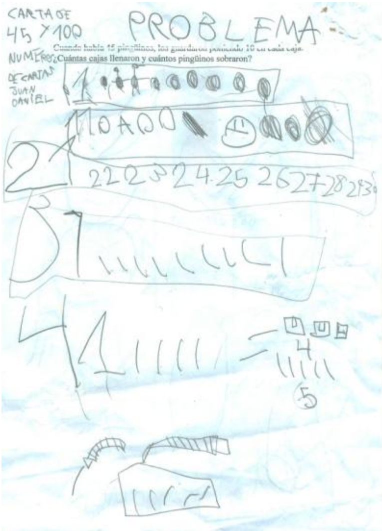


Figura A1.16.14. Representación A1Gm y A2

En la Figura A1.16.15, la imagen de la izquierda contiene una representación B1I para dar la solución, el número de cajas. En la imagen de la derecha, una niña utiliza las hueveras para colocar cubos encajables en los huecos y forman los grupos de 10.

Figura A1.16.15. Representación B1I para dar la solución y con hueveras y centicubos

1.16.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Para realizar la tarea, la única capacidad que no he definido antes está relacionada con el reparto por ensayo y error en un problema de división medida.

> C95. Repartir de uno en uno una colección de objetos o marcas, en un número de grupos por ensayo y error, hasta completar un número de elementos por grupos dados en cada uno de los grupos, en un problema de división medida. Si no es el número de grupos pedido, se vuelve a probar con otro.

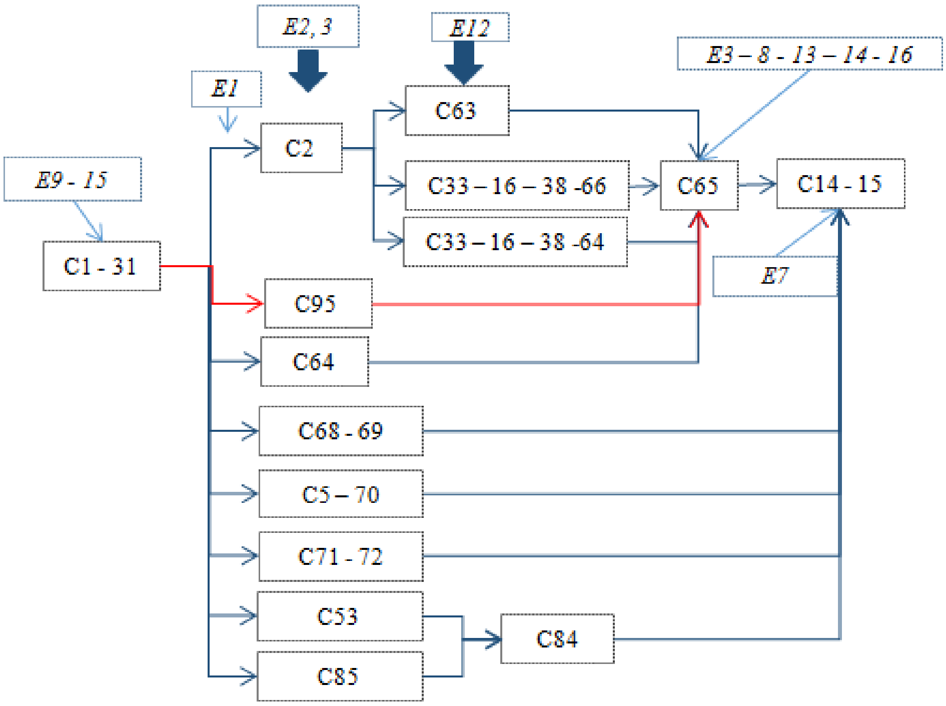


Figura A1.16.16. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 15

1.17. Sesión 16

El problema de esta sesión tiene en su enunciado, datos en dos unidades de diferente orden, decenas y unidades. Es la segunda vez que aparece la palabra “decenas” en el enunciado. El objetivo es seguir uniendo la resolución de problemas con el aprendizaje de los conceptos del sistema de numeración. Considerando que estamos en primero de educación primaria, su estructura de dos etapas. La primera etapa consiste en saber cuántos son 2 decenas, lo implica un problema de grupos iguales con agrupamientos de 10. La segunda etapa consiste en un problema de cambio decreciente con cantidad final desconocida. El dato de la cantidad inicial, es el resultado de la primera etapa.

Tabla A1.83. *Características principales de la décimo sexta sesión*

Problema	La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá?
Tipo de problema	Problemas de 2 etapas: Grupos iguales con grupos de 10; y cambio decreciente con cantidad final desconocida.
Cantidades	Cantidad mayor: 20.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	17 de marzo
Cuento	La reina de los besos.
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 23 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora y 2 alumnos prácticas.
Recogida de datos	Grabación video, hojas de trabajo de los niños.

1.17.1. Desarrollo de la sesión

Esta sesión es la última en la que están los estudiantes de prácticas para tomar registro. Como las grabaciones las realizamos en video, no se han recogido entrevistas en hojas de registro.

La resolución de este problema supone dos etapas, por lo que en la Figura A1.17.1 que 30 alumnos resuelven bien el problema entero, con estrategia adecuada en las dos etapas y dando una solución incorrecta. Hay 7 alumnos que resuelven bien la primera etapa, pero eligen una estrategia inadecuada para la segunda etapa. Hay un alumno que realiza una estrategia inadecuada, y 9 alumnos que no resuelven, por incomprensión de la situación y abandonan, y otros que dan respuesta al azar.

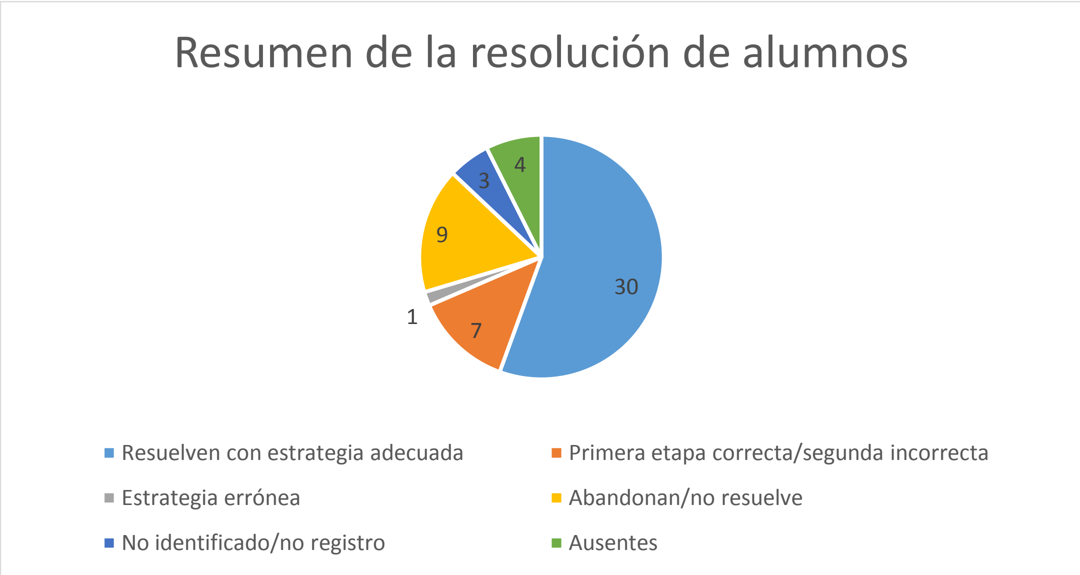


Figura A1.17.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 16

1.17.2. Estrategias observadas

Al igual que en las sesiones 7 y 12, voy a describir por separado las estrategias de resolución de las dos etapas. La primera etapa consiste en resolver la cantidad "2 decenas", que depende del nivel de comprensión de la decena y el valor posicional de las cifras. Para un niño que no tiene desarrollada esta comprensión, esta situación es un problema de grupos iguales con grupos de 10 de multiplicación. Según el marco teórico, los niños utilizan generalmente, estrategia de *Agrupamiento* (A), *Conteo a saltos* (CS) o *Uso de valor posicional* (VP). En la Tabla A1.84 muestro la frecuencia de las estrategias observadas.

Tabla A1.84. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 16*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Agrupamiento sin representante de grupo (A)	Con cubos encajables	Contando de uno en uno (A1)	4
		Añadiendo con cubos iguales (A2)	2
	Con otros objetos	Contando de uno en uno (A20)	1
		Añadiendo con cubos iguales (A22)	1
	Con los dedos de las manos	Contando de 10 en 10 (A4)	1
	Con hueveras y cubos encajables	Contando de uno en uno (A31)	2
Valor Posicional (VP)		Equivalencia decenas - unidades (VP2)	18
		Posición de las cifras (VP3)	2

La estrategia de modelización directa *Agrupamiento* (A) con cubos encajables, puede ejecutarse añadiendo las decenas en una sola barra con objetos iguales, *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno* (A2), lo que supone hacer un recuento de uno en uno para saber cuántos elementos hay en la barra. También se puede realizar dejando los grupos de 10 separados, lo que permite de uno en uno (A1), o el conteo de 10 en 10. En la Figura A1.17.2 muestro las dos representaciones de estas estrategias. En la imagen de la izquierda los niños añaden la segunda decena a la primera y la única forma de saber cuántas hay es contando de uno en uno. Sin embargo, en la imagen de la derecha se puede contar de 10 en 10, que no se ha dado en esta sesión.

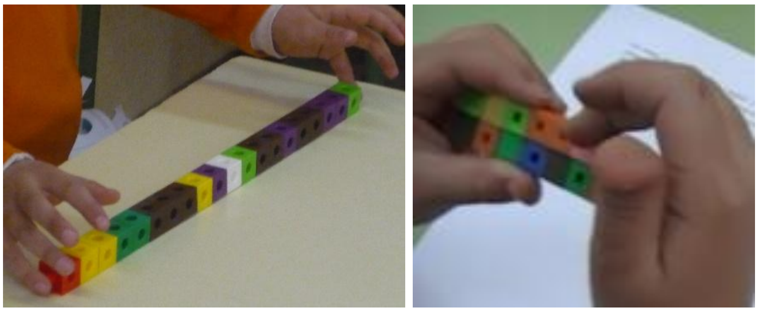


Figura A1.17.2. Estrategias A2 y A1 en la primera etapa de la sesión 16

Estas mismas variantes se han utilizado con otros objetos, con bolas de plastilina. En la Figura A1.17.3, el niño construye primero 10 bolas de plastilina para la primera decena, y luego construye otras 10 bolas de plastilina, añadiéndolas a la primera, variante que denomino *Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno* (A22). Para saber cuántas hay, tiene que contar de uno en uno. En la imagen de la derecha, el niño representa las dos decenas por separado, y puede realizar el conteo de uno en uno, variante *Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos de 10 separados, contando de uno en uno* (A20) como es el caso del niño de la imagen, o se puede realizar el conteo de 10 en 10, ya que se ven os grupos separados, pero no se ha dado en esta sesión.

Figura A1.17.3. Estrategias A22 y A20 en la primera etapa de la sesión 16

Si se utiliza los dedos de las dos manos, contando 10, y luego mostrar otra vez la dos manos, 20, esta estrategia la denoto como *Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración* (A4).

En esta sesión, dos estudiantes cogieron dos cartones de decenas de huevos como decenas y las rellenaron con cubos encajables. Después contaron todos los cubos que habían puesto. Esta estrategia la denoto como *Agrupamiento con hueveras, rellenando con cubos encajables, contando de uno en uno* (A31). En la Figura A1.17.4 muestro a uno de los estudiantes construyendo al representación de las dos decenas.

Figura A1.17.4. Estrategia A31 en la primera etapa de la sesión 16

Las estrategias basadas en el valor posicional para esta primera con el reconocimiento de la *Equivalencia de decenas en unidades, cuando los grupos se dan en decenas* (VP2), cuando los niños dicen “2 decenas son 20”. Hay otros niños que no necesitan pasarlo a unidades para su estrategia y reconocen las dos decenas, su valor posicional, diferente unidad, variante que denomino *Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades* (VP3), y pasan a la segunda etapa.

Las estrategias adecuadas de la segunda etapa se basan en la resta, así para una situación de cambio decreciente con cantidad final desconocida, se espera estrategias de modelización directa basadas en *Quitar* (Q), y con uso más flexible, *Quitar hasta* (QH). Como estrategia de conteo, se utiliza el *Conteo hacia atrás* (CA), y también estrategias basadas en el valor posicional, como pueden son *Estrategias inventadas* (EI.) En la Tabla A1.85 muestro las frecuencias absolutas de las estrategias utilizadas adecuadamente.

Tabla A1.85. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 16*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Quitar (Q)	Con marcas	Contando de uno en uno (Q3)	8
		Agrupando las decenas y contando de uno en uno (Q14)	1
	Con cubos encajables	Contando de uno en uno (Q1)	9
	Con otros objetos	Contando de uno en uno (Q2)	2
	Con el rekenrek	Usando la configuración (Q6)	1
	Con los dedos (Q12)		1
	Con Tabla 100	Desde el último (Q9)	1
	Con bloques de base 10	Contando de uno en uno (Q15)	1
		Cambiando decenas por unidades y contando de uno en uno (Q16)	1
	Con huevera y cubos encajables (Q13)		2
Quitar hasta (QH)	Con Tabla 100 (QH13)		1
Contar hacia atrás (CA1)			1
Estrategia inventada (EI)		Quitar a una decena (EI6)	3

Como las estrategias ya se han dado en sesiones anteriores, voy a describir las combinaciones que se han registrado de las dos etapas, que se pueden ver en la Tabla A1.86. La estrategia que se compone del *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A1) y la estrategia *Quitar con cubos encajables formando barras, contando de uno en uno* (Q1), consiste en hacer dos grupos de cubos encajables, quitar la cantidad de cambio, y contar los cubos que quedan. Si el conteo de la primera etapa es de uno en uno, lo denoto como A1-Q1. En la Figura A1.17.5 se puede observar la representación de esta estrategia. El niño forma primero dos barras de 10, luego quita 8, cuenta las que le quedan de uno en uno, como se puede ver en la imagen de la derecha.

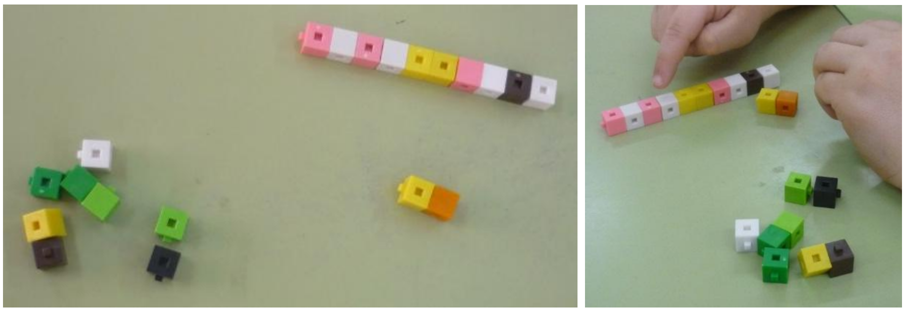


Figura A1.17.5. Estrategias A1-Q1 de la sesión 16

En el caso de utilizar en la primera etapa *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno* (A2), al utilizar la estrategia *Quitar con cubos encajables* (Q1), no hay más medio que contar de uno en uno. En la Figura A1.17.6 se puede ver el resultado de la primera etapa, y el resultado de la segunda etapa, que en los dos casos hay que contar de uno en uno para saber cuántos cubos encajables hay.

Figura A1.17.6. Estrategias A2-Q1 de la sesión 16

Similar a esta acción es lo que se realiza en la estrategia *Quitar con otros objetos, contando de uno en uno* (Q2). En la Figura A1.17.7 se puede ver la continuación de la estrategia A22, explicada más arriba, donde se han quitado 8 bolas de las 20 iniciales.

Figura A1.17.7. Estrategias A22-Q2 de la sesión 16

La estrategia *Quitar con los dedos usando la configuración de las manos* (Q12) en este problema, consiste considerar dos veces las dos manos. Un niño extiende dos veces las dos manos y quita 8 dedos, 5 de una mano y 3 de otra, va bajando dedos según los va contando, y cuenta lo que queda en esa mano y dos manos más. En la Figura A1.17.8 se encuentra la carta que escribe un niño que utiliza esta estrategia con su explicación.

Tabla A1.86. *Estrategias adecuadas en la sesión 16*

Estrategia primera etapa		Estrategia segunda etapa		F.A.
A1	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	Q1	Quitar con cubos encajados contando de uno en uno	4
A2	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	Q1	Quitar con cubos encajados contando de uno en uno	2
A20	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	Q2	Quitar con objetos contando de uno en uno	1
A22	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	Q2	Quitar con objetos contando de uno en uno	1
A31	Agrupamiento con hueveras, rellenando con cubos encajables, contando de uno en uno	Q13	Quitar con hueveras rellenas con objetos	2
A4	Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración	Q12	Quitar con los dedos usando la configuración de las manos	1
VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q3	Quitar con marcas contando de uno en uno	8
		Q14	Quitar con marcas, representado en grupos de 10, contando de uno en uno	1
		Q1	Quitar con cubos encajados contando de uno en uno	3
		Q6	Quitar con rekenrek usando su configuración	1
		Q9	Quitar con Tabla 100 empezando por el numeral mayor	1
		QH13	Quitar hasta con la Tabla 100, contando los numerales que hay desde el numeral mayor al menor.	1
		CA1	Contar hacia atrás llevando el rastro mentalmente	1
		EI6	Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas.	3
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	Q15	Quitar con base 10, sin cambiar decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno	1
		Q16	Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno	1

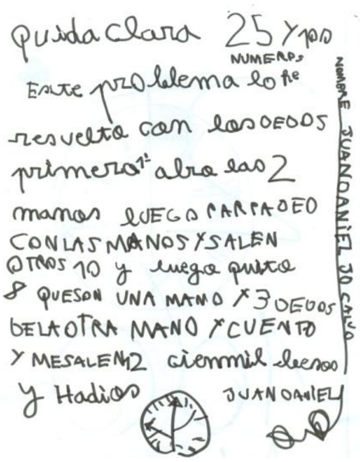


Figura A1.17.8. Estrategias A4-Q12 de la sesión 16

La estrategia *Quitar con marcas contando de uno en uno* (Q3) consiste en dibujar 20 marcas, tachar 8, y contar las que quedan. Las representaciones iniciales de los alumnos de las 2 decenas, pueden facilitar el conteo de 10 en 10 si se utiliza *Quitar con marcas, representado en grupos de 10, contando de uno en uno* (Q14). En la Figura A1.17.9, muestro dos representaciones diferentes, en una se añade la segunda decena a la primera, por lo que hay que contar de uno en uno sus elementos, y en la segunda imagen están separadas, por lo que podría facilitar el conteo de 10 en 10. En los casos concretos, se cuenta de uno en uno.

Figura A1.17.9. Estrategias VP2-Q3 y VP2-Q14 de la sesión 16

En esta sesión un niño a utilizado el rekenrek, *Quitar con el rekenrek, usando configuración* (Q6). En las últimas sesiones cada vez se utiliza menos por ser las cantidades mayores que 20.

La Tabla 100 se ha utilizado con la estrategia de *Quitar con Tabla 100 empezando a quitar hacia atrás desde el numeral mayor* (Q9), empezando desde el último, y contando hacia atrás tantos numerales como indica la cantidad de cambio del problema, en este caso 8. En la Figura A1.17.10, se puede ver como la niña señala el 20 y cuenta hacía atrás 8 numerales, hasta la casilla de 13, por lo tanto la solución es 12.

Figura A1.17.10. Estrategias VP2 – Q9 de la sesión 16

La estrategia *Quitar hasta con la Tabla 100, contando los numerales que hay desde el numeral mayor al menor* (QH13), no corresponde con la estructura semántica del problema, según los estudios previos, pero ha sido utilizada. En la Figura A1.17.11, una niña explica en la pizarra que cuenta desde el 20 hasta el 8.

Figura A1.17.11. Estrategias VP2-QH13 de la sesión 16

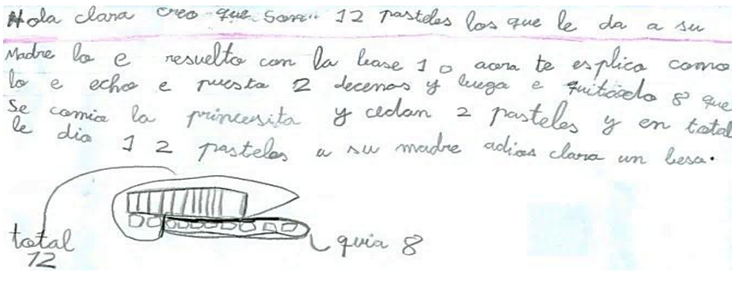
Los estudiantes que utilizan las hueveras para representar la primera etapa, en la segunda etapa utilizan *Quitar con hueveras rellenas con objetos* (Q13). En la Figura A1.17.12 se puede ver la estrategia completa A31-Q13.

Figura A1.17.12. Estrategias A31-Q13 de la sesión 16

Una niña que reconoce el tipo de unidad que son las decenas (VP3), en la segunda etapa utiliza los bloques de Base 10 y pone directamente 2 decenas. A continuación explica que tiene que quitar 8, con lo que cambia una decena por 10 unidades, quita 8, y cuenta las que le quedan de uno en uno, por lo menos para la explicación. La segunda etapa es *Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno* (Q16) y se puede ver la secuencia en la Figura A1.17.13.

Figura A1.17.13. Estrategia VP3 – Q16 de la sesión 16

Esta niña explica, en la carta a Clara, el estrategia utilizada de forma verbal y de forma gráfica (ver Figura A1.17.14).



Hola clara creo que son 12 pastelas los que le da a su
Madre lo e resuelto con la base 1 0 aora te esplico como
lo e echo e puesta 2 decenas y luego e quitado 8 que
Se comia la princesita y cedan 2 pasteles y en total
le dio 1 2 pastelas a su madre adios clara un besa.

Figura A1.17.14. Carta con explicación de estrategia de la sesión 16

Una niña representa las dos decenas con dos barras, pero no cambia una decena por unidades. Cuenta desde la segunda decena hacia atrás, 8 unidades, y el resultado es una barra y las dos unidades que faltan por completar de la segunda barra. Al explicarlo cuenta de uno en uno las doce unidades. Denoto la estrategia de esta segunda etapa como *Quitar con base 10, sin cambiar decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno* (Q15).

Figura A1.17.15. Estrategia VP3 – Q15 de la sesión 16

Dentro de las estrategias de conteo, se ha utilizado el *Conteo hacia atrás* (CA1), que es la más adecuada en esta situación de cambio decreciente con la cantidad final desconocida. Un niño explica: “Mira, son 20 pasteles, se comió 8, y los he contado, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13… son 12”. El niño cuenta hacia atrás, desde el 20, 8 numerales utilizando los dedos para llevar el rastro de los numerales enunciados.

Figura A1.17.16. Estrategia VP2 – CA1 de la sesión 16

Como *Estrategia inventada* (EI), tres niños han explicado, con algo de dificultad, que al ser dos decenas, a una que son 10 le quitan 8 y quedan 2, que junto con la otra decena, hacen 12 (*Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas*, EI6).

1.17.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Las dificultades observadas en esta sesión están relacionadas con la comprensión de la decena y el enunciado del problema.

Una niña representa 8 cubos encajables y 2 decenas como unidades, utiliza *Juntar todo*. Esta niña presenta las dos dificultades, por un lado no resuelve la situación de las “2 decenas” y por otro lado, no entiende la situación de cambio decreciente.

Figura A1.17.17. Estrategia *Juntar todo* con decenas como unidades de la sesión 16

Otra niña reconoce que 2 decenas son 20 unidades, y utiliza Contar a partir de primero (CP) para sumar 8. Su explicación es la siguiente:

> E12: he puesto 20 en la cabeza y luego he ido contando 8 y me han salido 28.

Un niño que utiliza los bloques de base 10, representa las 2 decenas y las 8 unidades y las cuenta todas. Otro niño utiliza el algoritmo de la suma para resolver el problema, como se puede ver en la Figura A1.17.18.

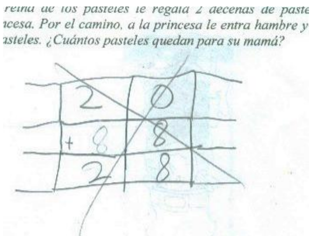


Figura A1.17.18. Estrategia algoritmo de la suma como estrategia inadecuada de la sesión 16

Una niña dibuja 20 pasteles numerados. Debajo pinta otros 7 pasteles. Tacha 8 pasteles de los de arriba y cuenta todos los que quedan, los de arriba y los de abajo. Le salen 19 (ver Figura A1.17.19).

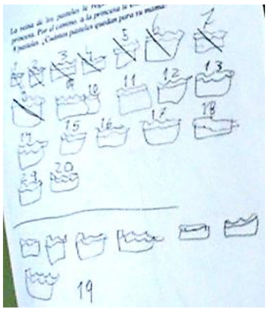


Figura A1.17.19. Estrategia inadecuada de la sesión 16

Al menos cuatro niños presentan incomprensión ante el enunciado, no sabiendo decir que son dos decenas. Una niña que no sabe cómo resolver, intenta representar la solución, 12, con bloques de base 10. En la Figura A1.17.20 se ve como tiene representada 2 decenas, con dos barras, y luego intenta representa las solución, 12. Representa las diez unidades de la solución con barras de 10, al igual que ha representado las decenas del enunciado.

Figura A1.17.20. Dificultad en la comprensión de la decena de la sesión 16

Otros dos niños resuelven la primera etapa, uno agrupando con marcas y otro utilizando la recuperación de “10 + 10”, pero no continúan el problema. En las estrategias de conteo, en este caso, un niño que utiliza contar hacia atrás, incluyen, en el rastro de los numerales que va enunciando el 12, y le sale como resultado 13 pasteles.

En la siguiente Tabla A1.87 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.87. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 16*

Dificultades	Errores observados
No distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema (decenas y unidades)	Representación de las cantidades inadecuadas (E23)
No comprender la situación del problema	Aplicación de estrategias inadecuadas (E1)
Dominio de la secuencia numerable	Incluir un numeral más en estrategia de conteo (E5)

1.17.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones observadas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.88. Al tener una primera etapa de agrupamiento, incluyo la columna de representaciones para los grupos. Para los grupos, hay dos representaciones con hueveras de las estrategias descritas anteriormente. La otra representación con objetos, es la que utiliza una niña para Juntar dos (grupos) con 8 pasteles.

Tabla A1.88. *Representaciones encontradas en la sesión 16*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D, R, B10, H)	3 (1,0,0,0,0,0,2)	33 (15,2,10,1,2,3,0)	2 (0,0,1,0,0,1,0)	
	B1 (I, D, C)	0 (0,0,0)	1 (1,0,0)	0 (0,0,0)	
	C1				
2	A2		2		
	B2				
	C2				
3	A3		3	23	18
	B3				
	C3				6
4	A4				4
	B4				
	C4				1

1.17.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Para realizar la tarea, hay un Agrupamiento novedoso, con hueveras, rellenando los huecos con cubos encajables.

C96. Formar un número de grupos con hueveras rellenas de cubos encajables.

De los grupos representados con hueveras y cubos encajables, hay que quitar una cantidad de cubos encajables.

C97. Quitar una cantidad de cubos encajables u objetos colocados en hueveras.

Para la estrategia inventada EI2, se debe tener la siguiente capacidad.

C98. Restar las unidades a una decena, y sumar lo que queda, al resto de decenas, cuando se tiene que quitar una cantidad menor que 10 a una década.

Para las estrategias de Quitar con Base 10, se necesitan las siguientes capacidades.

C99. Quitar de uno en uno, una cantidad de otra representada con base 10, señalando los cubitos de las barras y/o sueltos considerados.

C100. Quitar de uno en uno, una cantidad de otra representada con base 10, cambiando las decenas por unidades, separando las unidades que se quitan.

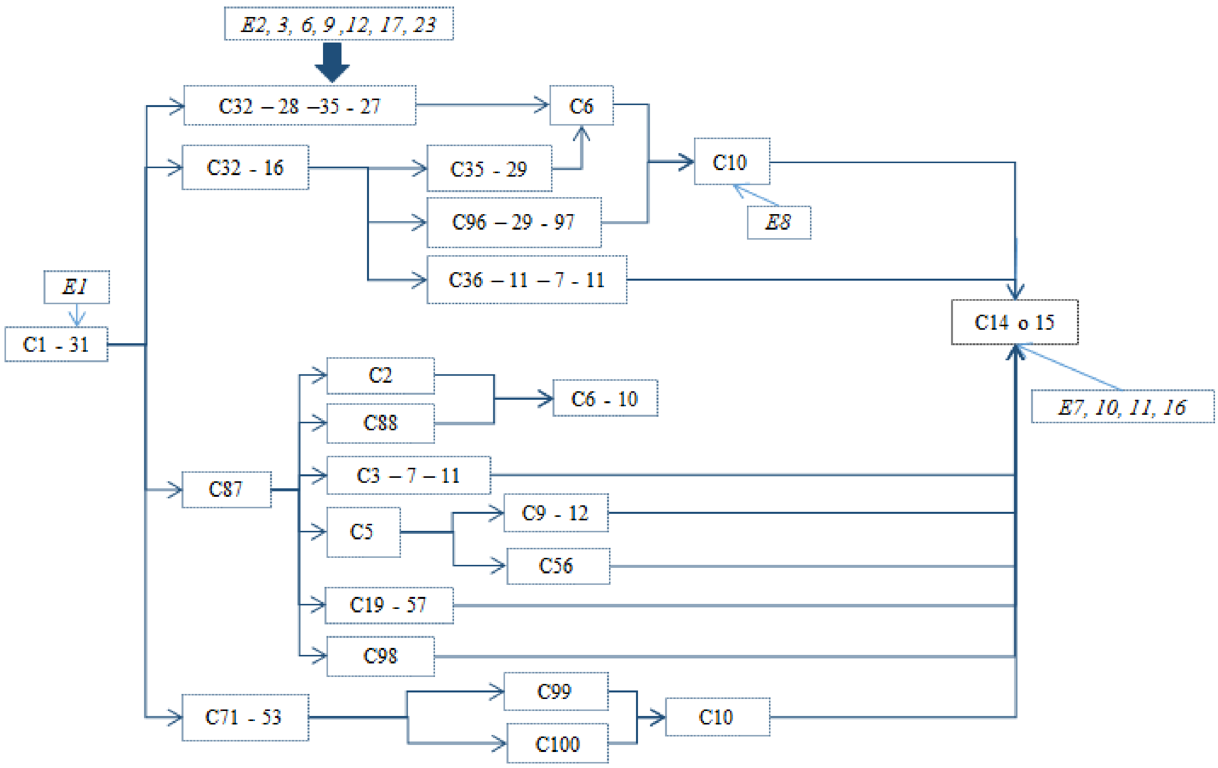


Figura A1.17.21. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 16

1.18. Sesión 17

En esta sesión se plantea un problema de 3 etapas de estructura jerárquica compuesto por tres problemas de combinación aditiva con total desconocido. De las cuatro cantidades que se dan, tres de ellas se dan en unidades y una de ellas en decenas.

Tabla A1.89. *Características principales de la décimo séptima sesión*

Problema	Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?
Tipo de problema	Problema de tres etapas de esquema jerárquico con 3 combinaciones con total desconocido.
Cantidades	Cantidad mayor: 24.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, Multilink, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos, regletas de Cuisenaire.
Fecha	24 de marzo
Cuento	La reina de los besos.
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora y 2 alumnos prácticas.
Recogida de datos	Grabación video, Hojas de registro, hojas de trabajo de los niños.

1.18.1. Desarrollo de la sesión

La tutora del grupo A recuerda a los niños un procedimiento que trabajan en clase para contar a partir de un número. Hace recordar la primera cantidad y representar la segunda cantidad con los dedos, para contarlos a partir del número que tienen recordado.

Bea: A ver, Merche, cómo lo ha explicado aquí. Has dicho 'pongo 12 en la cabeza' y qué más. Como lo ponemos, 12…
Todos: En la cabeza.
Bea: Y diez
Todos: En las manos,
Bea: Después del doce…
Todos: Trece, catorce, quince,… veintidós.
Bea: Veintidós más un gato.
Todos: Veintitrés.
Bea: Más un balón.
Todos: Veinticuatro.
Nuria: También se puede decir 'si 2 más 2 son 4 y han tenido 22, otros dos 4, 24'.

Las frecuencias de la resolución de los alumnos en esta sesión se pueden observar en la Figura A1.18.1. De los 52 niños que asistieron al aula 43 resolvieron el problemas con una estrategia adecuada y dando la solución correcta. Cuatro niños no llegaron a dar la solución correcta, aun eligiendo una estrategia adecuada. El motivo de no llegar a la solución correcta de dos de ellos ha sido que no han tomado la decena como 10 unidades. En el momento que se les pregunta si saben lo que es una decena, rápidamente cambiaron la estrategia y lo resolvieron bien. Los otros dos niños muestran confusiones en el conteo de la cantidad total.

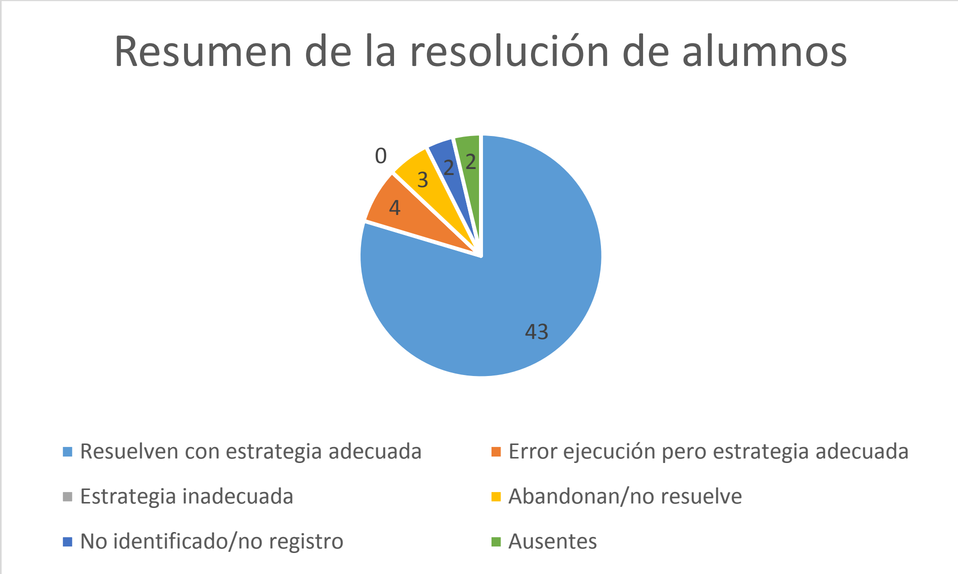


Figura A1.18.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 17

1.18.2. Estrategias observadas

El problema que se plantea en esta sesión en un problema aditivo con 4 sumandos, que según los esquemas de Nesher es de tres etapas, al igual que los problemas de la sesión 3 y la sesión 9. Las estrategias utilizadas por los niños de modelización directa no muestran esta estructura de varias etapas, ya que los niños representan las cuatro cantidades y hacen un recuento final. En las estrategias de conteo, hechos numéricos y valor posicional si aparecen varios procedimientos consecutivos que van dando resultados parciales.

Las variantes de *Juntar todos con cubos encajables*, tanto la variante *Juntar todo con cubos encajables formando barras, añadiendo cada colección con contadores iguales a una única, contando de uno en uno* (JT2), como *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT1) se utilizan en un total de 10 resoluciones. En la Figura A1.18.2 se muestra la variante JT2, donde el niño va construyendo las colecciones con los cubos encajables uniéndolos en una sola figura de cubos que cuenta al final.

Figura A1.18.2. Estrategia JT2 de la sesión 17

La variante JT1 ha sido utilizada por ocho niños, y uno de esos niños realizó el recuento final contando a partir del doce, señalando la colección de doce cubos encajables, y a partir de ahí, siguió contando las demás, por lo que cuenta a partir de la colección mayor, variante que denomino *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, ordenándolas de mayor a menor, contando de uno en uno* (JT21).

Figura A1.18.3. Representación de la estrategia JT1 y JT21 de la sesión 17

Dos niños utilizaron la estrategia *Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT3). Las variantes con representaciones gráficas han sido las más utilizadas con una total de 24 resoluciones con estas estrategias. La variante *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno* (JT5) en dos ocasiones, y *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT6) en cuatro ocasiones.

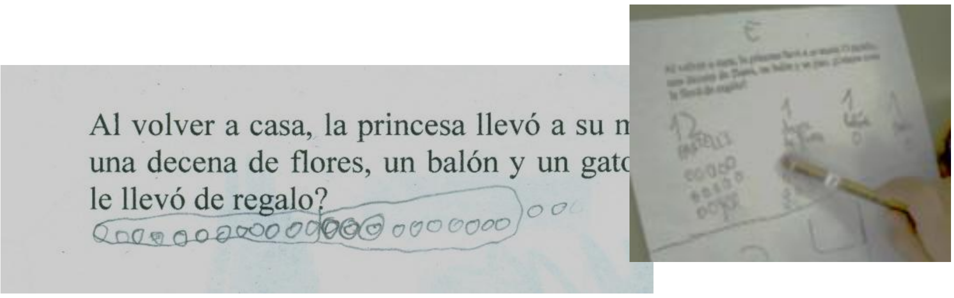


Figura A1.18.4. Representaciones de las estrategias JT5 y JT6 de la sesión 17

Las variantes más frecuentes has sido *Juntar todo con dibujos, añadiendo cada colección a una única, contando de uno en uno* (JT8), donde la misma representación hace que cada colección sea diferente, ya que son dibujos de las cantidades; como la variante *Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT7).

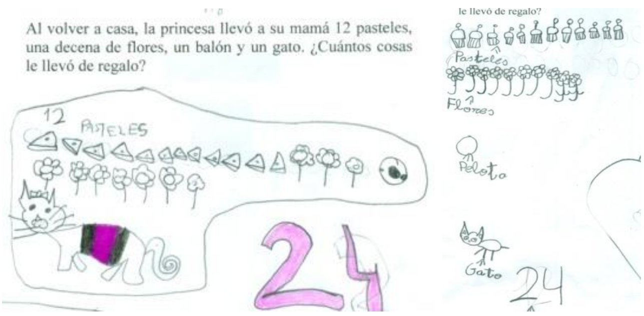


Figura A1.18.5. Representaciones de las estrategias JT8 y J7 de la sesión 17

Solo se ha registrado un uso de la Tabla 100, en la variante *Juntar todo con Tabla 100* (JT12) donde una niña señala el 12 en la tabla 100, luego cuenta 10 numerales más, con lo que se posiciona en el numeral 22, cuenta otro numeral más del gato y otra de la pelota, llegando al 24 (Figura A1.18.6).

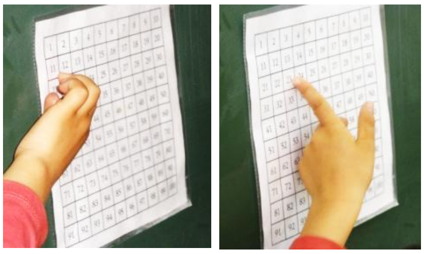


Figura A1.18.6. Estrategia JT12 de la sesión 17

Un niño ha utilizado los cartones de decenas de huevos, que la denoto como *Juntar todo con objetos, haciendo grupos de 10 con ayuda de las hueveras, contar de uno en uno* (JT31), ya que utiliza las hueveras y los cubos encajables para colocarlas en los huecos. El niño explica: "He puesto aquí 10 (en una huevera) y aquí 2 (en otra huevera) que son los 12 pastelitos. Luego he puesto 10, luego 2 más y… 24".

Los bloques de base 10 han sido utilizados por dos niños. Los dos han representado el doce con una barra de 10 y dos unidades, la decena con una barra y, el gato y la pelota, con otras dos unidades. En la Figura A1.18.7, en la imagen de la izquierda el niño hace el recuento final de uno en uno en el mismo orden que ha representado las cantidades, por lo tanto se trata de la variante *Juntar todo con base 10, contando de uno en uno* (JT19), y el niño de la derecha, junta primero las dos barras y después cuenta todo, variante a la que he denotado como *Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, contando de uno en uno* (JT25).

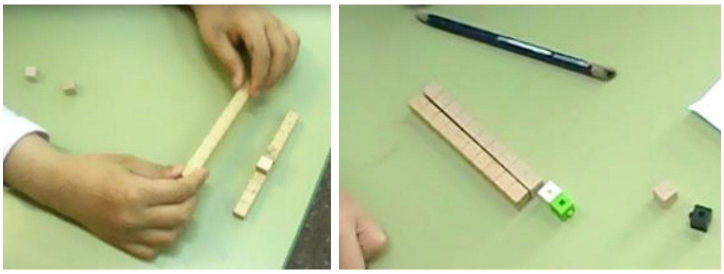


Figura A1.18.7. Representaciones de las estrategias JT19 y JT25 de la sesión 17

Las estrategias que acabo de describir son estrategias de modelización directa y en un problema en el que se combinan varias cantidades como el de esta sesión, los niños han representado todas las partes a combinar primero y finalmente han hecho el recuento.

En las estrategias de conteo o más avanzadas, se puede observar más el desglose en varias etapas. La estrategia *Contar a partir del primero* (CP1) ha sido utilizado por tres niños, empezando a contar desde 12, diez numerales más, llegando a 22. Después un balón, 23 y una gato, 24. He incluido una variante observada en un niño en la que primero utiliza contar a partir del primero para realizar 12 más 10, luego explica que el gato y el balón son dos, y después cuenta dos a partir de 22 (CP1-HNB-CP1).

Los niños que han explicado la combinación de las cantidades remarcando el valor posicional de las cifras, he considerado que han utilizado una estrategia de valor posicional (VP). Al tratarse de una suma con cuatro sumandos, lo he desglosado en las diferentes combinaciones que han hecho. En la siguiente conversación, el niño E20, indica que suma una decena al 12, y luego suma las unidades, una por una, variante que se compone de combinar decenas y unidades tres veces, (EI2: 12+10, 22+1, 23+1). La niña E17 ha sumado primero la decena (12+10), luego las dos unidades (1+1), y por último, ha sumado las unidades del 22 con las del 2, 2 más 2, 4, 24 EI2 (EI1(+10), HN(1+1); EI2(+2)).

E20: Pues mira, 12 y una decena son 22, un balón y un gato son 24.
E17: O también lo puedes decir así 22 más dos, 2 más 2 son 4, pues son 24.
Lidia: ¿Cómo sabes que 12 más 10 son 22?
E20: Pues mira, 12 y 10 siempre tiene que ser 20 porque 10 más 10 son 20.

En la siguiente explicación cambia el orden de las combinaciones de las unidades y las decenas. Primero ha recuperado 1 más 1, y luego ha combinado las unidades de 12 con este resultado, y las decenas EI3 (HN (1+1), EI2 (12+2), EI1 (+10)). E38 dice: "Los he sumado, lo primero 2 más 2, 4 y los otros que me quedaban, como eran 12, 12 más 10 más 2, 24".

Las cuatro variantes que aparecen en la Tabla A1.90 se basan en el dominio del valor posicional de las cifras, donde combinando decenas y unidades por separado llegan a completar el resultado. Los niños no han utilizado algoritmos de la suma o sentencias numéricas para resolver, sólo para dar la solución.

Tabla A1.90. *Estrategias adecuadas recogidas en la sesión 17*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Juntar todo (JT)	Con cubos encajables (JT1)			1
		Añadiendo según representa	Iguales (JT2)	1
		Considerando juntos al final (JT1)		7
			Comenzando desde el mayor (JT21)	1
	Con otros objetos	Considerando juntos al final (JT3)		2
	Con marcas	Añadiendo según representa	Iguales (JT5)	2
		Considerando juntos al final (JT6)		4
	Con dibujos (JT7)			1
		Considerando juntos al final (JT7)		14
		Añadiendo según representa (JT8)		3
	Con Tabla 100 (JT12)			1
	Con hueveras y cubos encajables (JT31)			1
	Con bloques de base 10	Agrupando decenas	Conteo uno en uno (JT25)	1
		Sin agrupar decenas	Conteo uno en uno (JT19)	1
Contar a partir del primero (CP1)				3
Contar a partir del primero – Hecho numérico – Contar a partir del primero (CP1-HN-CP1)				1
Estrategia inventada (EI)	EI3: (HN (1+1), EI2 (12+2), EI1 (+10))			1
	EI2: 12+10, 22+1, 23+1			3
	EI3: (HB+1; HB+1; EI1 (+10))			1
	EI2: (EI1(+10), HN(1+1); EI2(+2))			1

Un niño ha utilizado las hueveras para dar la solución. El niño no resuelve el problema, pero sabiendo que tiene que dar una explicación, escucha el resultado del problema y coloca 24 cubos encajables en cartones de decenas de huevos. No es una estrategia de resolución, pero le ha permitido agrupar una cantidad en grupos de 10 y a al preguntarle sobre las cantidades del problema, ha identificado grupos de 10, grupos que ocupan más de 10.

Figura A1.18.8. Representaciones de la solución con hueveras de la sesión 17

1.18.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Una de las dificultades observadas es no identificar una decena como un grupo de 10. Los niños que han presentado esta dificultad, una vez se les hacía reflexionar sobre qué era una decena, rectifican su procedimiento e incluyen 10 objetos en lugar de uno, y terminan resolviendo.

Se han observado al menos cuatro niños con dificultades en el conteo de la cantidad total, y una niña en la lectoescritura del número 24. En la siguiente Tabla A1.91 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.91. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 17*

Dificultades	Errores observados
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99	Errores en el conteo al determinar el cardinal de una colección (E3)
No distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Considerar una decena como una unidad (E24)
Dificultad en la escritura de los numerales	Escribir mal la posición de un número de dos cifras (E25)

1.18.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

En la Tabla A1.92 muestro la frecuencia de las representaciones de recogidas en esta sesión.

Tabla A1.92. *Representaciones encontradas en la sesión 17*

		Resolución	Solución	Carta
1	A1 (Oc, Oo, Gm, B10, D, H)	25 (10, 2, 8, 2, 1, 2)	1 (1,0,0,0,0,1)	
	B1 (I, D)	18 (17, 1)	5(4, 1)	
	C1	3		
2	A2	2	1	
	B2			
	C2			
3	A3	5	31	28
	B3			2
	C3		2	14
4	A4		4	5
	B4			
	C4		1	4

Las representaciones en esta sesión han sido variadas en el sentido de haberse utilizado desde muy icónicas a simbólicas, incluso mezcla de ellas en una misma representación, como en la Figura A1.18.9, donde aparecen representaciones de tipo A1 y B1I.

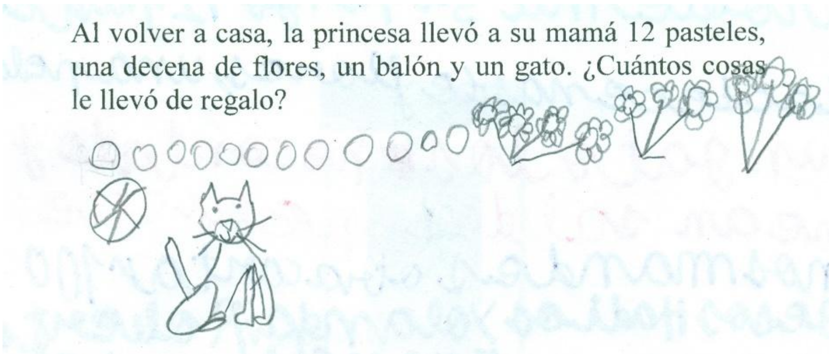


Figura A1.18.9. Representaciones de varios tipos (A1 y B1I)

En esta sesión también se ha dados representación B1 iguales acompañadas de representaciones C1 por tener los nombres, como se puede ver en la Figura A1.18.10.

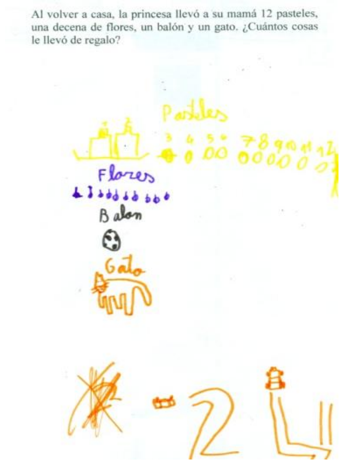


Figura A1.18.10. Representaciones B1 y C1 en la sesión 17

Una representación que no ha aparecido mucho a lo largo del taller es la B3. En esta sesión se ha dado en la escritura de la carta como se puede ver en la Figura A1.18.11.

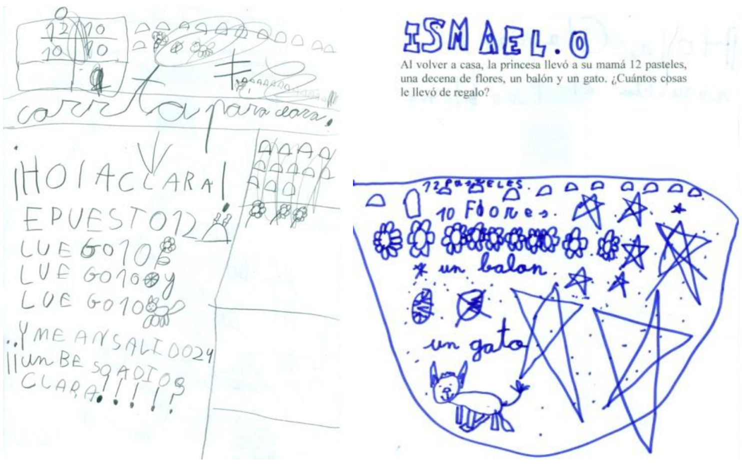


Figura A1.18.11. Representaciones

1.18.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión no es necesario enunciar capacidades, ya que las estrategias novedosas son combinaciones de anteriores. Así, los caminos de aprendizaje se pueden observar en la Figura A1.18.12.

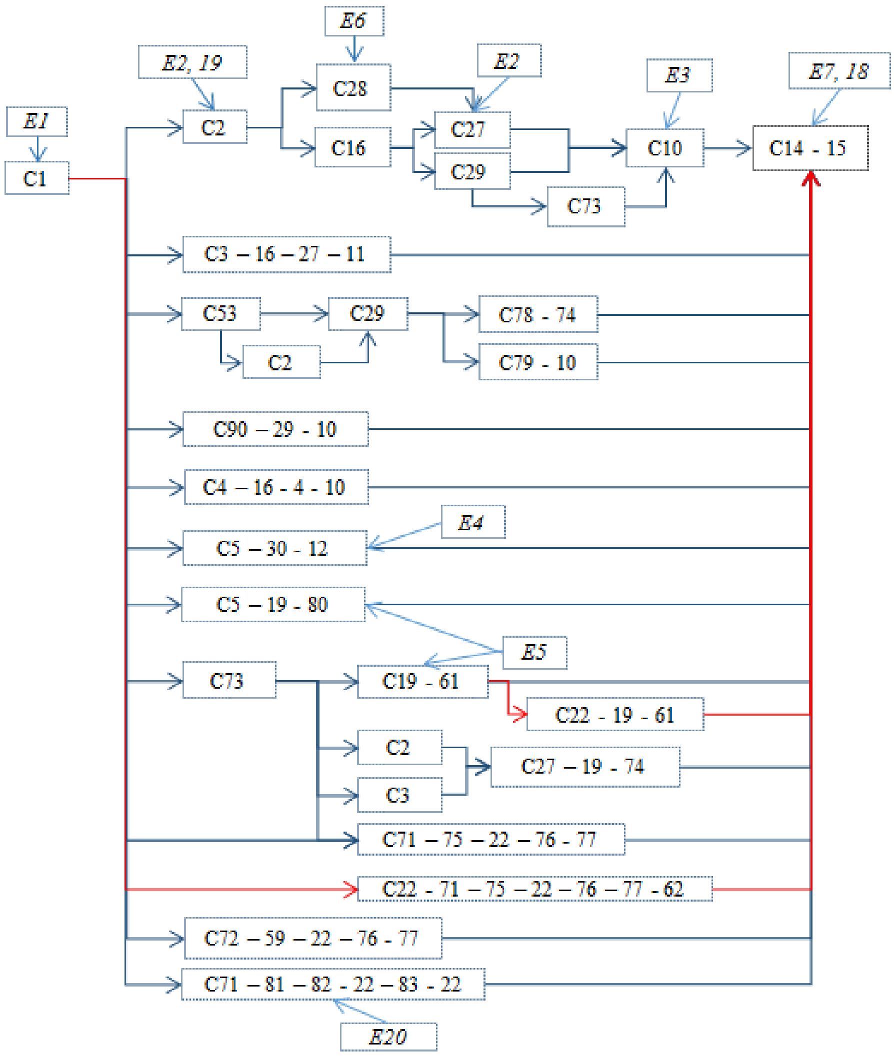


Figura A1.18.12. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 17

Los caminos de aprendizaje en color rojo son estrategias que se han utilizado en esta sesión y no antes, como combinar *Contar a partir del primero con hechos numéricos*, y *Estrategias inventadas combinadas con hechos numéricos*, que lógicamente aparecen en esta sesión al tener 4 sumandos.

1.19. Sesión 18

El problema de esta sesión puede considerarse de cambio creciente con final desconocido para estudiantes de cursos más avanzados que tengan adquirido el concepto de decena y valor posicional. Sin embargo, este problema en primero de educación primaria, supone además, una primera etapa en la que los niños tienen que resolver qué cantidad es 4 decenas de escalones.

Tabla A1.93. *Características principales de la décimo-octava sesión*

Problema	Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total?
Tipo de problema	Problema de dos etapas de esquema jerárquico, con un problema de grupos iguales de multiplicación y un cambio creciente con la cantidad final desconocida
Cantidades	Cantidad mayor: 78
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloques de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	7 de abril
Cuento	Papá, por favor, consígueme la luna
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 26 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora.
Recogida de datos	Grabación video, Hojas de registro, hojas de trabajo de los niños.

1.19.1. Desarrollo de la sesión

En el grupo A se han recogido los datos en hojas de registro. Lo más llamativo en este grupo es que 10 niños utilizaron el algoritmo de la suma para resolver el problema. Del grupo B tenemos grabaciones de video y las hojas de registro. Aparecen más niños que utilizan el valor posicional y los bloques de base 10, incluso que cuentan de 10 en 10 y son los que resuelven más fácilmente el problema, porque los que intentan representar 40 y luego 38 y luego contar se pierden en el conteo. En las puesta común, la tutora pide a los niños que lo expliquen con los bloques de base 10 y utilizando el conteo de 10 en 10 para que todos puedan ver estrategias más avanzadas. También se pide a una alumna que lo ha hecho con la tabla 100 contando 38 a partir de 40. Un niño lo quiere explicar con los centicubos y le decimos que mucho trabajo que es mejor con las barras y las unidades. También sale un niño que lo ha hecho utilizando el valor posicional. Vamos a seguir con el trabajo de las decenas y unidades en los enunciados pidiendo a los niños con estrategias más avanzadas que las expliquen a los compañeros.

En la Figura A1.19.1 muestro las frecuencias de la resolución de los estudiantes. Hay 30 niños que realizan bien las dos etapas, de los que 29 resuelven con éxito el problema. El único estudiante que no lo logra es por una dificultad en la formación de la segunda colección, al equivocarse al contar hasta 38. Después hay 12 niños que no tratan las 4 decenas con grupos de 10, y por lo tanto la primera etapa es errónea, aunque la estrategia para la segunda etapa es adecuada. Aun así, no es correcta la solución que aportan.

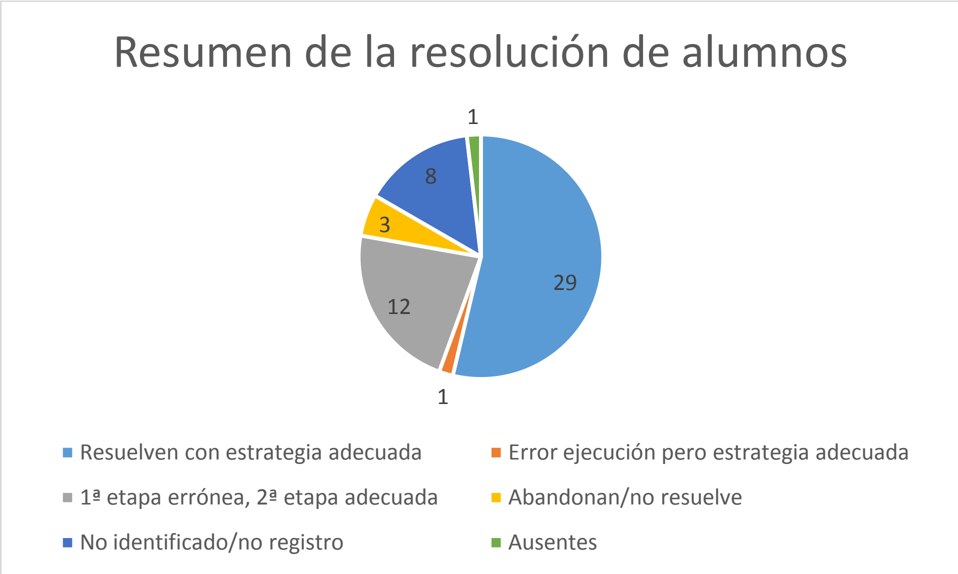


Figura A1.19.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 18

1.19.2. Estrategias observadas

Voy a mostrar primero las frecuencias absolutas de las estrategias observadas separadas en dos etapas. Después relacionaré las dos etapas para mostrar las combinaciones de las dos etapas que se han dado en el taller, y describirlas a continuación. Las estrategias que han utilizado los niños ya han sido descritas en sesiones como la 7 y la 12, que se plantean problemas de grupos de 10 y unidades sueltas. En esta sesión las unidades sueltas es una cantidad mayor de 10. Para sumar las dos cantidades, el resultado de la primera etapa, y la cantidad de cambio de la segunda etapa, se han utilizado estrategias ya descritas en las sesiones 10 y 13.

Para resolver la primera etapa, los niños han utilizado las estrategias que se muestran en la Tabla A1.70. En este apartado solo recojo las estrategias adecuadas. Las estrategias inadecuadas serán descritas en el apartado de dificultades.

La estrategia de modelización directa para resolver la primera etapa *Agrupamiento* (A) ha sido utilizada con marcas y dibujos añadiendo a una única colección, tanto contando de uno en uno, como de 10 en 10. De este tipo, la variante *Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno* (A32), es la primera vez que aparece. De las variantes en la que se consideran juntas tras representar, se ha observado *Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10* (A33). También se ha utilizado con los bloques de base 10 y con Tabla 100, contando de 10 en 10, lo que supone la variante *Agrupamiento con Tabla 100, contando de 10 en 10, cada fila, señalándola de manera rasante* (JT34). Las estrategias basadas en el valor posicional han sido más frecuentes para esta primera etapa como se puede ver en la Tabla A1.94.

Tabla A1.94. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 18*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Agrupamiento sin representante de grupo (A)	Con dibujos	Añadiendo dibujos iguales	Contando de uno en uno (A32)	2
	Con marcas	Considerando juntos	Contando de 10 en 10 (A33)	2
		Añadiendo marcas iguales	Contando de 1 en 1 (A28)	1
	Con bloques de Base 10 (A25)			1
		Contando de 10 en 10 (A29)		2
	Con tabla 100	Contando de 10 en 10 (A34)		1
Valor posicional (VP)	Equivalencia de decenas en unidades (VP2)			15
	Posición de las cifras (VP3)			6

La segunda etapa consiste en un problema de cambio creciente, donde la cantidad inicial es el resultado de la etapa anterior, y el dato de la cantidad de cambio es un número de dos cifras que, a diferencia de la cantidad inicial, se da en unidades. Para hallar la cantidad final, se utilizan estrategias que suman, como puede ser *Juntar todo* (JT) de modelización directa, *Contar a partir de un sumando* (CP o CM), *Algoritmo de la suma* (AL), o *Estrategias inventadas* (EI) basadas en el valor posicional. En esta segunda etapa, los niños han utilizado las estrategias de la Tabla A1.95 para resolver la situación de cambio creciente con cantidad de final desconocida.

Tabla A1.95. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 18*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Juntar todo (JT)	Con cubos encajables (JT1)			1
		Considerando juntos	Conteo de uno en uno (JT1)	2
	Con marcas	Añadiendo	Marcas iguales (JT5)	1
		Considerando juntos (JT6)		2
			Conteo de uno en uno (JT6)	2
			Conteo a partir del primero (JT27)	1
	Con dibujos	Considerando juntos	Conteo uno en uno (JT7)	1
		Añadiendo con marcas iguales	Conteo uno en uno (JT8)	1
	Con bloques de base 10 (JT19)			1
		Agrupando decenas	Contando de 10 en 10 (JT33)	1
			Reconocer posición (JT34)	2
		Segundo sumando con unidades	Conteo de uno en uno a partir del primero (JT23)	1
	Con tabla 100	Contar a partir del primero (JT32)		1
Estrategia inventada (EI)		Combinar Decenas y Unidades (EI2)		7
Algoritmo		Suma (AL1)		6

Para describir las estrategias, muestro en la siguiente Tabla A1.96 la combinación de las estrategias de la primera etapa y la segunda. Las dos primeras estrategias, en la primera etapa se van acumulando las decenas, lo que no va a permitir contar la decenas de 10 en 10. Esta variante es *Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno* (A32).

Estas estrategias suponen contar de uno en uno los escalones totales de esta primera etapa, y después cuando se realiza la segunda etapa, la cantidad de cambio del problema, pude seguir añadiéndose a esa cantidad, lo que supone la estrategia *Juntar todo con dibujos, añadiendo cada colección con dibujos iguales a una única, contando de uno en uno* (JT8). Esta estrategia se puede ver en la imagen de la izquierda de la Figura A1.19.2 con dibujos. También puede ocurrir que se *Junte todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT7), como se puede ver en la imagen de la derecha. Los niños contaron varias veces hasta que se quedaron conformes con su resultado.

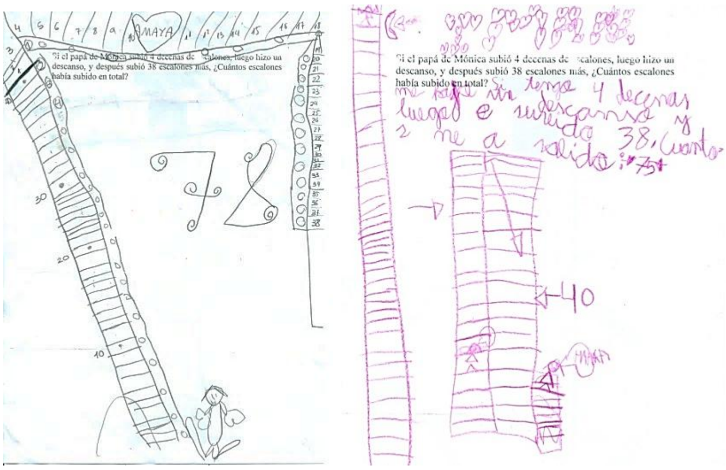


Figura A1.19.2. Representaciones de A32- JT8 y A32- JT7 en la sesión 18

La tercera estrategia utiliza en la primera etapa *Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno* (A28), y en la segunda etapa Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno (JT6), estrategia similar a la primera pero con marcas.

Las tres primeras estrategias no permiten contar de 10 en 10 porque los grupos de 10 no están separados. La siguiente esta estrategia consiste en *Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10* (A33), y en la segunda etapa *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando* (JT27). En la representación de esta estrategia, en la Figura A1.19.3 se puede ver como las decenas se pueden contar de 10 en 10, pero las unidades del segundo dato del problema se representan sin separar en decenas, por lo que no pueden contarse de 10 en 10. El alumno cuenta a partir de 40 las 38 marcas de uno en uno.

Tabla A1.96. *Estrategias adecuadas en la sesión 18*

	Descripción		Descripción	F.A
A32	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	JT8	Juntar todo con dibujos, añadiendo cada colección con dibujos iguales a una única, contando de uno en uno	1
		JT7	Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A28	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	JT6	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
A33	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	JT27	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando	2
A25	Agrupamiento con base 10, contando de uno en uno	JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	1
A29	Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10	JT23	Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando	1
A29	Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10	JT33	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumandos, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades	1
A34	Agrupamiento con Tabla 100, contando de 10 en 10, cada fila, señalándola de manera rasante	JT32	Juntar todo con Tabla 100, contando de uno en uno a partir del primer sumando	1
VP2	Equivalencia de decenas en unidades	JT1	Juntar todo con cubos encajados, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	3
		JT6	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1
		JT5	Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno	1
		JT27	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando	1
		EI2	Combinar decenas y unidades	3
		AL1	Algoritmo de la suma	6
VP3	Identificar la posición de las decenas con grupos de 10 y cantidades menor que 10 como unidades	JT34	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, reconociendo los grupos de 10 como las decenas y los cubitos sueltos como las unidades	2
		EI2	Combinar decenas y unidades	4

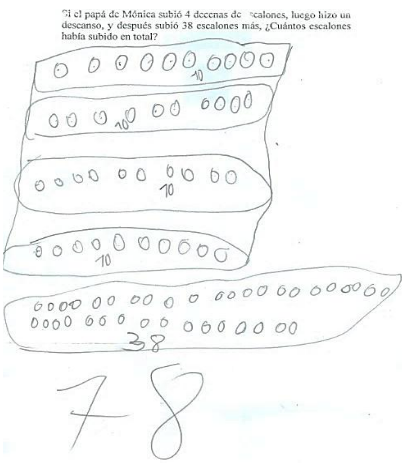


Figura A1.19.3. Representaciones de A33- JT27 en la sesión 18

Los bloques de base 10 se han utilizado en cinco estrategias. En la primera etapa se utiliza un *Agrupamiento con bloques de base 10*. Aparecen distintas variantes de esta estrategia si nos fijamos en el conteo o la forma de saber el total de elementos que se tienen. Hay niños que cogen 4 barras como 4 decenas y necesitan contar de uno en uno todos las unidades de las barras, *Agrupamiento con base 10, contando de uno en uno* (A25). Esta estrategia continúa con *Juntar todo con base 10, contando de uno en uno* (JT19).

En esta sesión dos niños cuentan de 10 en 10 las barras para concluir que son 40, estrategia que denoto como *Agrupamiento con bloques de base 10, contando de 10 en 10* (A29). Uno de ellos continúa con *Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumandos, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades* (JT33).

El otro niño que utiliza A29 en la primera etapa, representa la cantidad de cambio con 38 centicubos que coloca en una barra. El recuento final lo realiza señalando las 4 barras de 10 y diciendo: "aquí hay 40, y ahora, 41, 42,….". Cuenta de uno en uno todos los centicubos. La estrategia de la segunda etapa la he denominado *Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando* (JT23). En la Figura A1.19.4 se puede observar la resolución del niño que ha utilizado esta estrategia.

Figura A1.19.4. Estrategia A29 – JT23 en la sesión 18

También, destacar que dos niños cogen directamente las 4 barras como 4 decenas que saben que son 40. En este caso los niños conocen el valor posicional de las decenas, *Identificar la posición de las decenas con grupos de 10 y cantidades menor que 10 como unidades* (VP3). Para continuar su estrategia representan 38 escalones más con 3 barras de 10 y 8 unidades, agrupan las decenas por un lado y las unidades por otro. Como hay 7 barras que son decenas y 8 unidades, la cantidad final es 78, colocando las cifras en su posición en un número de dos cifras. Esta estrategia la denoto como *Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras* *representar los sumando, reconociendo los grupos de 10 como las decenas y los cubitos sueltos como las unidades* (JT34). En la Figura A1.19.5 se puede observar esta estrategia.

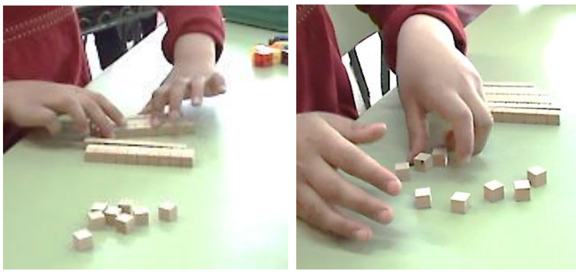


Figura A1.19.5. Estrategia VP3-JT34 en la sesión 18

Una niña utiliza la Tabla 100 para resolver el problema. Para la primera etapa señala las 4 primeras filas de la Tabla 100 como las 4 decenas que dice el problema "10, 20, 30, 40" señalando que son 40, lo que he denominado una *Agrupamiento con Tabla 100, contando de 10 en 10, cada fila, señalándola de manera rasante* (A34). Para resolver la segunda etapa, va directamente al 40 y cuenta a partir de ahí. 38 numerales de la Tabla 100, llegando al 78. Esta estrategia la he denominado *Juntar todo, con Tabla 100, contando de uno en uno a partir del primer sumando* (JT32). En la Figura A1.19.6 cuenta de uno en uno los numerales.

Figura A1.19.6. Estrategia A34-JT32 en la sesión 18

Los niños que traducen que "4 decenas son 40", estrategia que denoto como *Equivalencia de decenas en unidades* (VP2), han utilizado estrategias muy variadas, desde modelización directa hasta estrategias inventadas en la segunda etapa. La estrategia de *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno* (JT5) consiste en representar esos 40 escalones, luego añadir los 38 de la cantidad de cambio y después, se cuentan de uno en uno. Si las dos colecciones, 40 y 38, se dejan separadas, entonces se trata de la variante *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT6). Si en la segunda etapa se utilizan representaciones separadas de las dos cantidades, hay niños que recuerdan que la primera fila son 40, y cuentan a partir de 40 la segunda fila, como en la variante *Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando* (JT27). La Figura A1.19.7 contiene la representación de las estrategias VP2 –JT6, donde a las 40 se la añaden 38 y se cuenta todo de uno en uno; la estrategia VP2–JT1, donde se representan las 4 decenas con 40 centicubos luego 38 centicubos más y se cuentan de uno en uno.

Figura A1.19.7. Estrategia VP2–JT6 y VP2–JT1 en la sesión 18

Hay cuatro niños que utilizan una *Estrategia inventada* (EI) que consiste en identifica que las 4 decenas junto con las 3 decenas del 38 son 7 decenas, y las 8 unidades, 78. A continuación muestro la transcripción de uno de los niños:

E2: Sumo 4 + 3 que son 7, y otros 8 son 78.
Mónica: ¿Y por qué 3 + 4?
E2: Porque 38 tiene un 3 en las decenas.

Esta estrategia la denoto como reconocer el valor posicional de las cifras en la primera etapa VP3 y Combinar decenas y unidades (EI2) en la segunda etapa. Ha habido 3 niños que han utilizado una estrategia muy parecida pero la he querido diferencias. En la primera etapa, traducen que 4 decenas son 40, lo que denomino conocer la E*quivalencia entre decenas y unidades* (VP2). Ahora combinan 40 y 38 (EI2). La diferencia con la anterior es que primero pasan a unidades, como explica una estudiante: “4 decenas son 40 unidades y 38 unidades…”. Las dos se basan en conocimientos del valor posicional de las cifras, y estas estrategias que combinan cantidades de dos cifras la estoy denominando, a un nivel alto de descripción, Estrategias Inventadas (EI), como en el marco teórico de la CGI.

El algoritmo de la suma se ha utilizado en 6 ocasiones, tras deducir en la primera etapa con la estrategia de conocer la equivalencia entre decenas y unidades VP2, la cantidad inicial del problema. En la Figura A1.19.8 se puede observar uno de estos algoritmos.

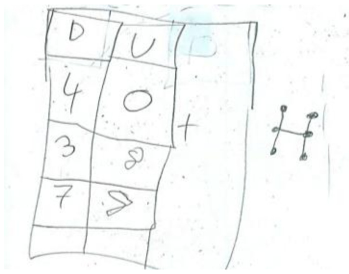


Figura A1.19.8. Estrategia VP2-AL1 en la sesión 18

1.19.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

La dificultad más frecuente que ha evitado que los niños resuelvan bien el problema, ha sido no considerar 4 decenas como 4 grupos de 10, sino como 4 unidades. Esto ha ocurrido en 9 estrategias registradas. Los niños han utilizado estrategias basadas en Juntar todos (JT), seis con cubos encajables u otros objetos, y tres niños con marcas. En la Figura A1.19.9 se puede observar una hoja de trabajo con una estrategia de Juntar todo con marcas, y la representación con cubos encajables.

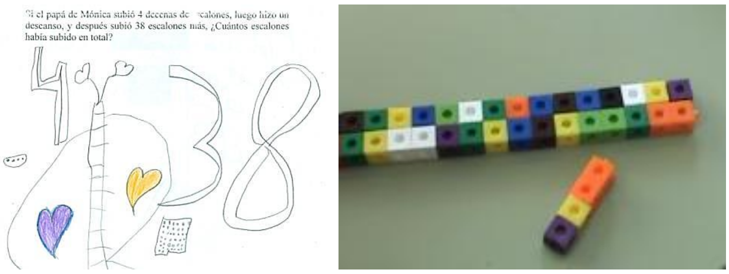


Figura A1.19.9. Dificultad “no identifica decenas como grupos de 10” en la sesión 18

Otra dificultad presentada por otros 3 niños, es formar decenas de 4 o 5 elementos. En la Figura A1.19.10 se muestra la representación de la estrategia de agrupamiento con marcas A y luego se unta con la segunda cantidad, que está mal formada ya que tiene menos elementos. En total es una estrategia de *Agrupamiento-Juntar todo*, pero indica la falta de comprensión de la decena.

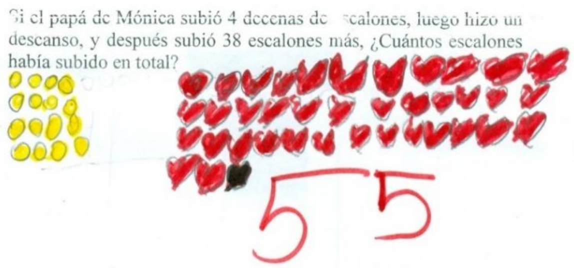


Figura A1.19.10. Dificultad “decenas de 4” en la sesión 18

También se ha observado dificultades en el conteo de cantidades tan grandes. En la Figura A1.19.11 una niña se pierde en conteo y monta dos colecciones con muchos elementos, y lo da por terminado.

Figura A1.19.11. “Formar colecciones grandes” en la sesión 18

En la Figura A1.19.12 muestro una escalera que ha empezado a hacer una estudiante, a la que intentamos convencer de que iba a ser una escalera muy larga.

Figura A1.19.12. Escalera de centicubos en la sesión 18

En la siguiente Tabla A1.97 señalo las dificultades que presentan los niños por los errores observados.

Tabla A1.97. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 17*

Dificultades	Errores observados
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99	Errores en el conteo (E2 y E3) Construir colecciones grandes sin saber su cardinal (E26)
No distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema, decenas y unidades	Considerar *n* decenas como *n* unidades (E27) Decenas como grupos distinto de 10 (E28)

1.19.4. Tipos de representación y modelo utilizados y contextos

Como en otras sesiones en las que se plantean problemas de grupos iguales, las representaciones de la resolución las presento desglosadas en grupos y elementos. En esta ocasión hago lo mismo, pero es curioso que solo he contabilizado una estudiante que redondea de las 4 decenas. No ha habido más representantes de los grupos, quizás porque no hay grupos de escalones, sino una escalera larga. En la Tabla A1.98 muestro la frecuencia de las representaciones de esta sesión.

Tabla A1.98. *Representaciones encontradas en la sesión 18*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm, B10)	1 (0, 0, 1,0)	26 (11, 1, 9, 5)	1 (0, 0, 1, 0)	
	B1 (I, D, C)	0 (0,0,0)	3 (3,0,0)	1 (1,0,0)	
	C1				
2	A2		2		
	B2				
	C2				
3	A3		9	25	12
	B3				
	C3				5
4	A4			1	3
	B4				
	C4				

Las representaciones utilizadas más frecuentes son marcas y objetos, como en otras sesiones. Lo que llama la atención la representación icónica de número y objeto que se han utilizado en 3 ocasiones para resolver, y una para dar la solución. En la Figura A1.19.13 se una imagen con todos los escalones. Los 4 decenas están marcadas de 10 en 10 y los 38 siguientes escalones numerados. La niña que la realiza va escribiendo numerales en el conteo para ayudar a no perderse en el conteo de los escalones.

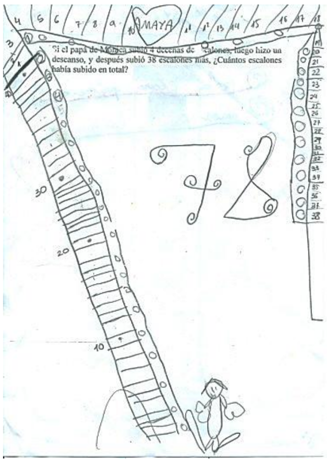


Figura A1.19.13. Representación B1I con A2 en la sesión 18

1.19.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Las nuevas capacidades a definir son para la estrategia A33, donde se realiza un agrupamiento con la Tabla 100, cada grupo representado con una fila.

C101. Formar varios grupos de 10 con la Tabla 100, con una fila para cada grupo 10.

Para la estrategia JT34, se necesita la capacidad:

C102. Determinar el cardinal de una colección representada con barras y unidades de bloques de base 10, identificando el valor de barras como la posición de las decenas y de los cubitos sueltos, como la posición de las unidades.

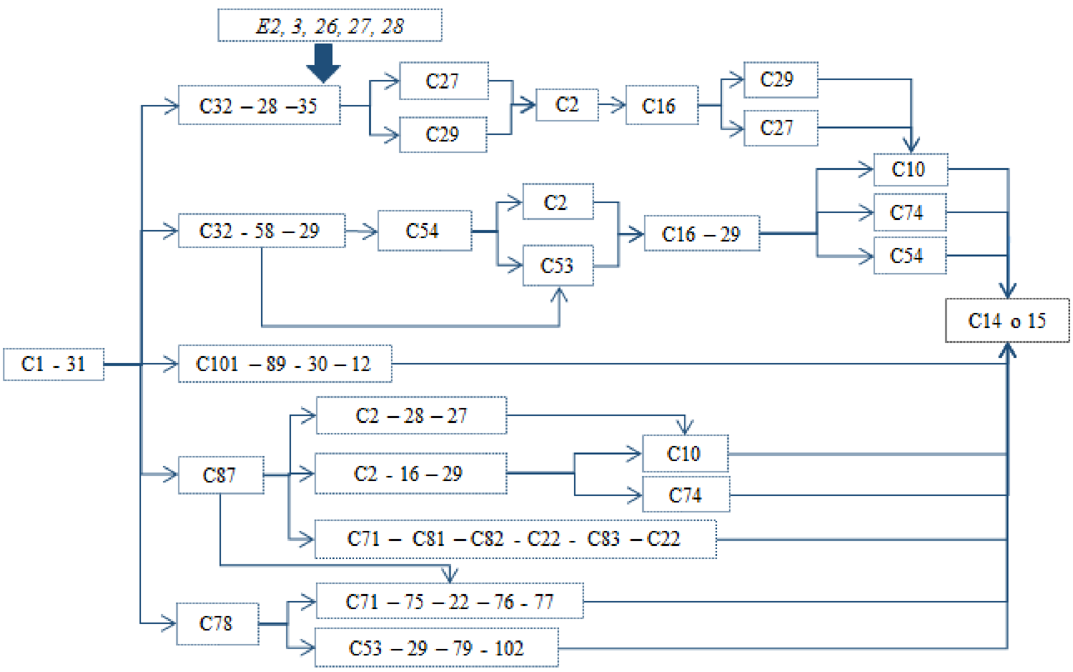


Figura A1.19.14. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 18

1.20. Sesión 19

En esta sesión se plantea un problema que se puede considerar de cambio creciente con la cantidad cambio desconocido si la traducción de 9 decenas a 90 unidades es inmediata. Si no fuese así primero habría que resolver un problema de estructura multiplicativa de grupos iguales y después realizar el cambio creciente.

Tabla A1.99. *Características principales de la décimo novena sesión*

Problema	Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?
Tipo de problema	Problema de dos etapas de esquema jerárquico, con un problema de grupos repetidos de multiplicación y un cambio creciente con la cantidad cambio desconocida
Cantidades	Cantidad mayor: 90.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	14 de abril
Cuento	Papá, por favor, consígueme la luna
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora.
Recogida de datos	Grabación video, Hojas de registro, hojas de trabajo de los niños.

1.20.1. Desarrollo de la sesión

El resumen de las frecuencias absolutas de la resolución de los alumnos se recoge en la siguiente Figura A1.20.1. De los 50 asistentes, la mitad eligieron una estrategia adecuada para las dos etapas del problemas, pero ocho niños no llegaron a la solución correcta por dificultades que comentaré más abajo. También ha ocurrido que ocho niños realizaron bien la primera etapa, representando las 9 decenas de escalones con cubos encajables, marcas e incluso bloques de base 10, pero no consiguieron terminar el problema. La estrategia errónea se refiere a una estudiante que la primera etapa hacer grupos de 6, y no hace nada con la segunda etapa. Otros niños abandonan o no resuelven.

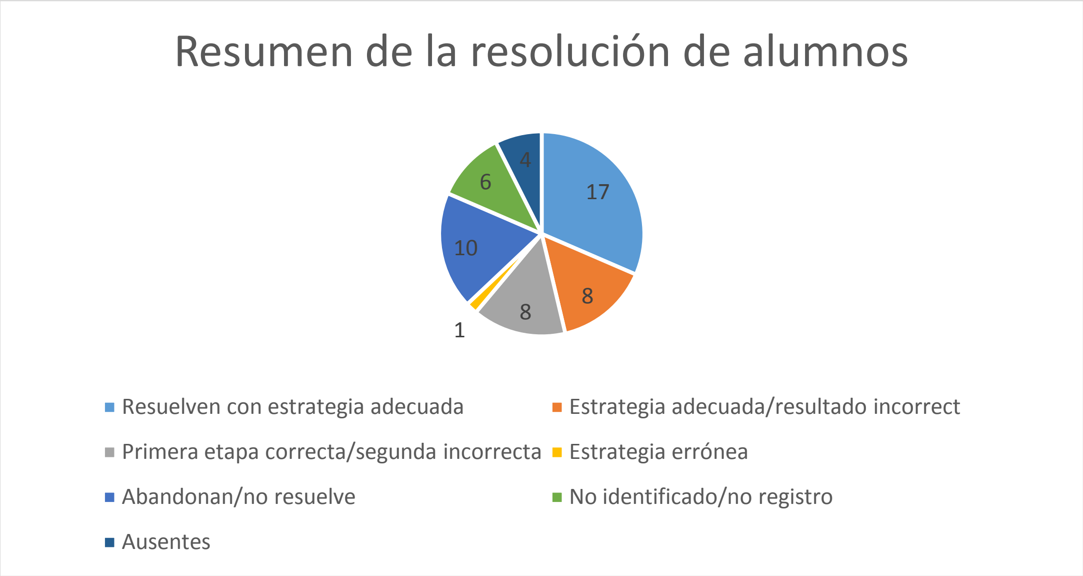


Figura A1.20.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 19

1.20.2. Estrategias observadas

Como en las sesiones anteriores, en las que se introducen grupos de 10 en el enunciado, en este caso 9 decenas, desgloso el análisis de las estrategias en dos etapas. La primera de ellas corresponde a la situación de grupos iguales, "9 decenas de escalones", y la segunda a un cambio creciente con cantidad de cambio desconocida. En la Tabla A1.100 muestro las frecuencias de las estrategias registradas.

Tabla A1.100. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 19*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Agrupamiento sin representante de grupo (A)	Con cubos encajables	Contando de uno en uno (A1)	2
		Contando de 10 en 10 (A19)	2
	Con dibujos	Añadiendo dibujos iguales (A32)	1
	Con marcas	Añadiendo marcas iguales (A28)	2
	Con bloques de base 10	Contando de uno en uno (A25)	1
		Contando de 10 en 10 (A29)	1
Valor posicional (VP)	Equivalencia Decenas- unidades (VP2)		15
	Posición de las cifras (VP3)		4

En esta sesión, 19 niños utilizan estrategias de valor posicional (VP). También hay niños que utilizan la estrategia de modelización directa de *Agrupamiento* (A), ya sea con cubos encajables, representaciones gráficas o bloques de base 10. Con marcas y dibujos, se ha utilizado estrategias donde se añaden los grupos de 10 en una colección única y no se pueden contar de 10 en 10, solo de uno en uno. Con los bloques de base 10, hay una niña que necesita también contar de uno en uno las unidades que forman las barras, como se puede ver en la Figura A1.20.2. En la imagen de la izquierda la niña comprueba que hay 10 unidades en cada barra de base 10. En la imagen de la derecha, una niña ha formado 9 grupos de cubos encajables, y está contando de uno en uno cada cubito (A1).

Figura A1.20.2. Estrategias A25 y A1 de la sesión 19

Las cantidades aumentan y cada vez es más difícil llevar el conteo en estrategias como en la variante *Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno* (A32) (ver Figura A1.20.3), donde el niño cuenta de uno en uno los escalones. Las marcas que marcan las decenas las realiza la tutora con el alumno para ayudarle a llevar el recuento de los escalones. Esta estrategia también se ha utilizado con marcas (A28).

Figura A1.20.3. Estrategias A32 de la sesión 19

Las estrategias más avanzadas de esta primera etapa siguen siendo las basadas en el conocimiento del valor posicional y el principio de agrupamiento del sistema de numeración (VP). Hay niños que necesitan explica que “9 decenas son 90” (VP2), y otros niños utilizan con naturalidad el término “decenas” (VP3), reflejándose en su utilización. Estos niños pueden representar 9 decenas con 9 barras de los bloques de base 10 sin tener que contar de 10 en 10, pueden utilizar estrategia en la siguiente etapa en la que completan decenas. Lo describo más en ese un poco avanzado el apartado.

En la segunda etapa se han registrado las estrategias, cuyas frecuencias se pueden ver en la Tabla A1.101.

Tabla A1.101. *Estrategias adecuadas en la segunda etapa en la sesión 19*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Quitar (Q)	Con marcas	Contando de uno en uno (Q3)		2
		Haciendo grupos de 10	Conteo uno en uno (Q14)	1
	Con dibujos	Conteo uno en uno (Q4)		1
	Con cubos encajables	Conteo uno en uno (Q1)		2
	Con bloques de base 10	Sin cambiar decenas por unidades	Conteo uno en uno (Q15)	2
		Cambiando decenas por unidades	Conteo 10 en 10 (Q17)	2
Añadir hasta (AH)	Con cubos encajables	Contando de 10 en 10 (AH3)		2
	Con Tabla 100	Contando de uno en uno (AH4)		4
	Con bloques de base 10	Contando de uno en uno (AH5)		2
Contar hasta (CH)				6
	Con marcas (CHGm)			1
Algoritmo		Resta (AL2)		3

Las combinaciones que se han utilizado en esta sesión pueden verse en la Tabla A1.102, que describo a continuación.

Las estrategias en las que se representan con marcas o dibujos, añadiendo las decenas a la colección inicial (A32 y A28) en el agrupamiento de la primera etapa, enlazan con la estrategia de quitar con dibujos o marcas de uno en uno (Q3 y Q4), tachando 78 marcas y contando las que quedan. En la Figura A1.20.4 se puede observar que la estudiante intenta hacer el algoritmo, y como no sabe realizarlo con seguridad, utiliza esta estrategia A28-Q3, que luego borra, y coloca el resultado en el algoritmo. Anteriormente, en la Figura A1.20.3 he mostrado la representación de la estrategia A32-Q4 donde el alumno dibuja 90 escalones, cuenta los 78 primeros, y cuenta los que le quedan hasta el 90.

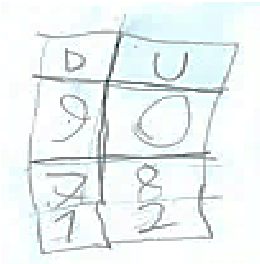


Figura A1.20.4. Algoritmo para dar la solución en la sesión 19

Dos niños construyen 9 barras de 10 con cubos encajables para construir 9 decenas, que después cuentan de uno en uno, (A1), y después quitan 78, contando de uno en uno (Q1), para finalmente, hacer un recuento de lo que queda. Otros dos niños construyen 7 barras de cubos encajables y otra con 8. Después construyen una barra de dos cubos encajables para completar 8 decenas y una barra más hasta 9 decenas, y cuentan las que han añadido (AH3).

Figura A1.20.5. Estrategia VP2-AH3 en la sesión 19

En la Figura A1.20.5 el niño primero ha preparado decenas con cubos encajables, luego cuenta de 10 en 10 hasta conseguir 70, y de una barra cuenta 8. Después completa hasta tener 90, 9 barras, contando las 2 unidades y la barra que le falta.

Tabla A1.102. *Estrategias adecuadas en la sesión 19*

				F.A.
A32	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	Q4	Quitar con dibujos contando de uno en uno	1
A28	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	Q3	Quitar con marcas contando de uno en uno	2
A1	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	Q1	Quitar con cubos encajados contando de uno en uno	2
A25	Agrupamiento con base 10, contando de uno en uno	Q15	Quitar con base 10, sin cambiar decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno	1
A29	Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10	Q17	Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, contando de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades	1
VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q14	Quitar con marcas, representado en grupos de 10, contando de uno en uno	1
		AH3	Añadir hasta con cubos encajados en barras de 10, contando de 10 en 10	2
		AH4	Añadir hasta con Tabla 100 contando de uno en uno	4
		CH2	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con las manos o mentalmente	6
		CH1	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con marcas	1
		AL2	Algoritmo de la resta	3
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	AH5	Añadir hasta con base 10 contando de uno en uno	2
		Q15	Quitar con base 10, sin cambiar decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno	1
		Q17	Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, contando de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades	1

La estrategia que combina el agrupamiento con base 10 y la estrategia de quita consiste primero en representar 9 decenas, cogiendo barras hasta completar 90. Anteriormente he puesto una imagen al que una niña iba contando de uno en uno las unidades de las barras para hacerlo (A25). Finalmente cuenta de esas 90 unidades, 9 barras, 78 unidades que igualmente pueden contar de uno en uno hasta llegar hasta 78. Quitar 7 decenas y te explican que de la octava barra le quedan 2 y siguen contando las unidades de la última barra (Q15). Otra niña hace el agrupamiento contando de 10 en 10 (A29), cuenta de 10 en 10 hasta que cuenta 70 y luego de uno en uno hasta 8 unidades. Cambiar una barra por unidades, quita 8, y cuenta la decena que queda y las dos unidades (Q17).

En la siguiente Figura A1.20.6, una alumna identifica que 9 decenas son 90 (VP2), y dibuja 9 filas de 10 cuadraditos, luego tacha 78 de uno en uno, y cuenta de uno en uno las que quedan (Q14).

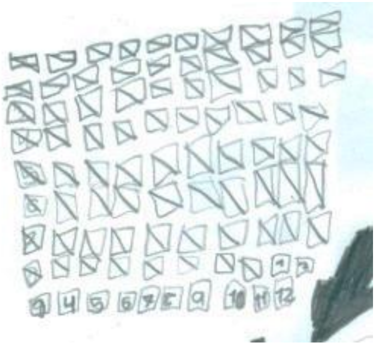


Figura A1.20.6. Estrategia VP2-Q14 en la sesión 19

La estrategia *Añadir hasta con Tabla 100 contando de uno en uno* (AH4) en este problema, consiste en señalar el 78, señalar el 90, e ir contando desde el 79 al 90.

La estrategia *Añadir hasta con bloques de base 10* (AH5), parte de que el estudiante identifica el valor posicional de las decenas VP3, construye 78 con 7 decenas y 8 unidades sueltas, y completa esta representación hasta 9 barras (ver Figura A1.xx). Se puede contar de uno en uno las unidades del resultado, como ocurrió en esta situación (AH5), o de 10 en 10.

Figura A1.20.7. Estrategia VP3– AH5 de la sesión 19

La estrategia de conteo *Contar hasta* (CH), se utiliza contando desde el 78 hasta 90, llevando el rastro de alguna manera para saber cuántos numerales se han enunciado. En la Figura A1.20.8, un niño escribe el algoritmo de la resta, pero al no saber muy bien cómo hacerlo, utiliza contar hasta para resolver el problema.

Figura A1.20.8. CH2 en sustitución del algoritmo de la sesión 19

La estrategia *Contar hasta* suele utilizarse apoyándose en los dedos para el llevar el rastro, como el caso anterior. Hay veces que los niños hacen otro tipo de acciones para llevar este rastro. En la Figura A1.20.9 se puede ver la hoja de trabajo de un niño que ha utilizado *Contar hasta con marcas* (CH1), ya que, para llevar el rastro de los numerales que va enunciando del 78 al 90, va poniendo una marca por cada uno de ellos. Al final, cuenta las marcas que ha hecho.

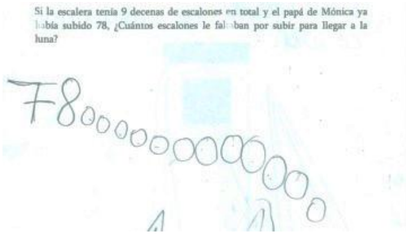


Figura A1.20.8. Estrategia CH1 en la sesión 19

Por último, ha habido intento de algoritmo, en 9 casos, pero la mayoría han utilizado otra estrategia para solucionarlo, excepto 3 niños que no consiguieron realizarlo bien. En el siguiente apartado muestro las soluciones que dan.

1.20.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Las dificultades han sido bastante variadas. Ha habido dificultad en entender cuánto podría ser 9 decenas, y niños que aun sabiendo que son 90, les ha costado representar esa cantidad, ya que se perdían en el conteo. Algunos niños construían las 9 decenas y luego no saben seguir, el esfuerzo para construir las 9 decenas les ha llevado mucho tiempo y trabajo.

Figura A1.20.9. Dificultad tras conseguir las 9 decenas en la sesión 19

Una niña se lo explica a Clara en la carta de la Figura A1.20.10.

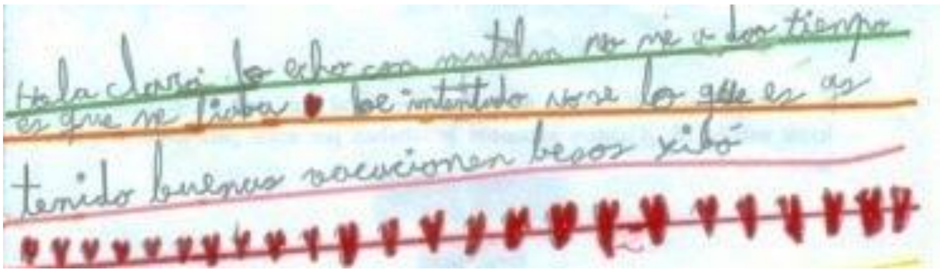


Figura A1.20.10. Carta a Clara en la sesión 19

Dos niñas les ocupa toda la clase intentar representar 9 decenas, primero con cubos encajables, luego se construyen la lista de numerales hasta el 90, pero no son capaces de terminar.

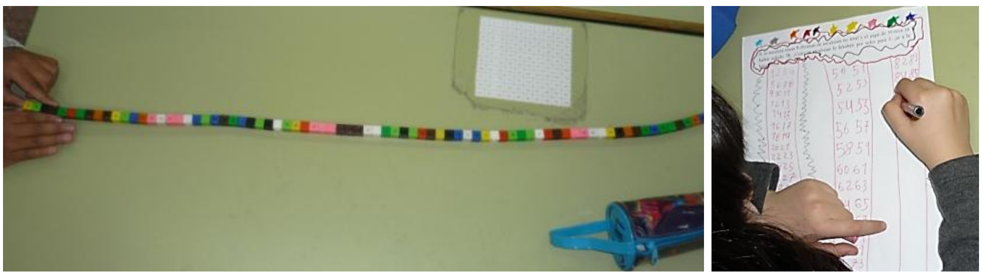


Figura A1.20.11. Representación de la 9 decenas en la sesión 19

Una niña realiza agrupamientos con grupos de 6 elementos, luego no es capaz de llevar el conteo total.

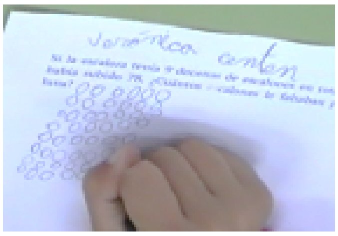


Figura A1.20.12. Agrupamiento con grupos de 6 en la sesión 19

En las estrategias de conteo, en este caso, un niño que utiliza contar hasta, incluyen en el rastro de los numerales que va enunciando el 78, y le sale como resultado 13 escalones.

Aunque la elección del algoritmo es una estrategia adecuada, que ha sido elegida por al menos 9 niños, en la mayoría de los casos los niños no han salido realizar el procedimiento. En la Figura A1.20.13 se puede como dos niños realizan una suma empezando desde la izquierda hacia la derecha. Solo 3 se quedaron con el algoritmo y no buscaron una forma de solucionarlo que les diese mayor confianza.

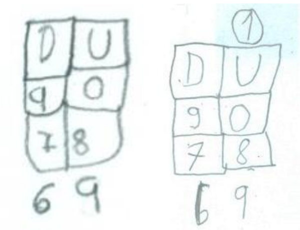


Figura A1.20.13. Algoritmo de la resta con suma de izquierda a derecha en la sesión 19

Un niño explica un algoritmo de la suma que realiza mentalmente, dándole como resultado 168. Cuando se le vuelve a decir el problema, utiliza una estrategia de contar hasta.

E38: “He puesto el 8 y luego he sumado el 9 y el 7 que son 16 son 168”.

Ha habido ocho niños que han realizado bien la primera etapa con estrategias como agrupamiento con cubos encajables, bloques de base 10 y marcas (AOcC1, AB10C1, AGm), incluso reconocen que 9 decenas son 90, pero no terminan el problema.

La tutora ayuda a los niños. Una niña que estaba utilizando el agrupamiento con marcas añadiendo las marcas de las grupos de 10 según las representaba, se perdía en el conteo. La tutora le ayuda a organizar los escalones en grupos de 10, para facilitar el conteo. La tutora también ayuda a otros dos niños a realizar la estrategia haciendo primero un agrupamiento con cubos encajables, y luego quitando 78, y dejando 12.

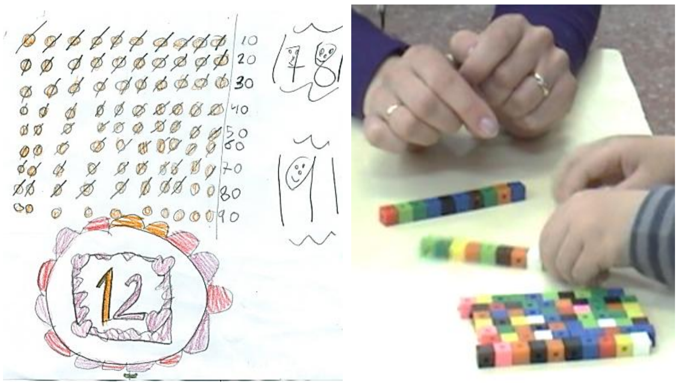


Figura A1.20.14. Ayuda de la tutora en la sesión 19

En la siguiente Tabla A1.103 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.103. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 19*

Dificultades	Errores observados
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99	Errores en el conteo (E2 y E3)
	Contar un numeral de más o menos en estrategias de conteo (E5)
No dominio del algoritmo de resta con llevada	Error en la llevada (E29)
No distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema, decenas y unidades	Decenas como grupos distinto de 10 (E28)

1.20.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las frecuencias absolutas de las representaciones observadas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.104. No ha habido representante de grupos, quizás por haber una sola escalera.

Tabla A1.104. *Representaciones encontradas en la sesión 19*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Gm, B10)	0	21 (8, 6, 7)	2 (2,0,0)	
	B1 (I)	0	1 (1)	0 (0,0,0)	
	C1				
2	A2		5		
	B2				
	C2				
3	A3		4	20	7
	B3			1	
	C3				4
4	A4			2	4
	B4				
	C4				1

Comento algunos detalles de las representaciones. La cantidad a representar es muy grande y los niños han tenido muchas dificultades porque se perdían en el conteo, no tienen el dominio suficiente de la secuencia de numerales. La Figura A1.20.15 es la representación de carácter icónico de número y objeto (B1I), que la tutora propone al niño acompañarla de una secuencia de numerales, de 10 en 10, y el conteo del resultado de uno en uno (representación A2), para ayudarle a contar.

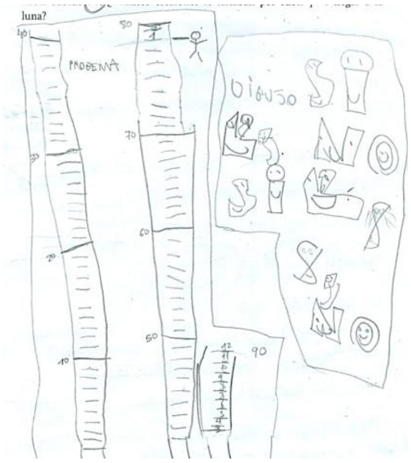


Figura A1.20.15. Representación B1I con A2 en la sesión 19

Para dar la solución, el niño que ha utilizado Contar hasta con marcas, indica la solución con “12 o”. Para la resolución utiliza A1Gm y para marcar que lleva 78 escalones, utiliza una A3.

Figura A1.20.16. Representaciones A3, A1Gm para resolver, B3 para dar la solución en la sesión 19

1.20.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión es necesario crear capacidades para la ejecución del algoritmo de la resta con llevada.

C108. Pedir prestado una decena para poder restas las cifras de una columna en la que el número a restar es mayor que el número del minuendo.

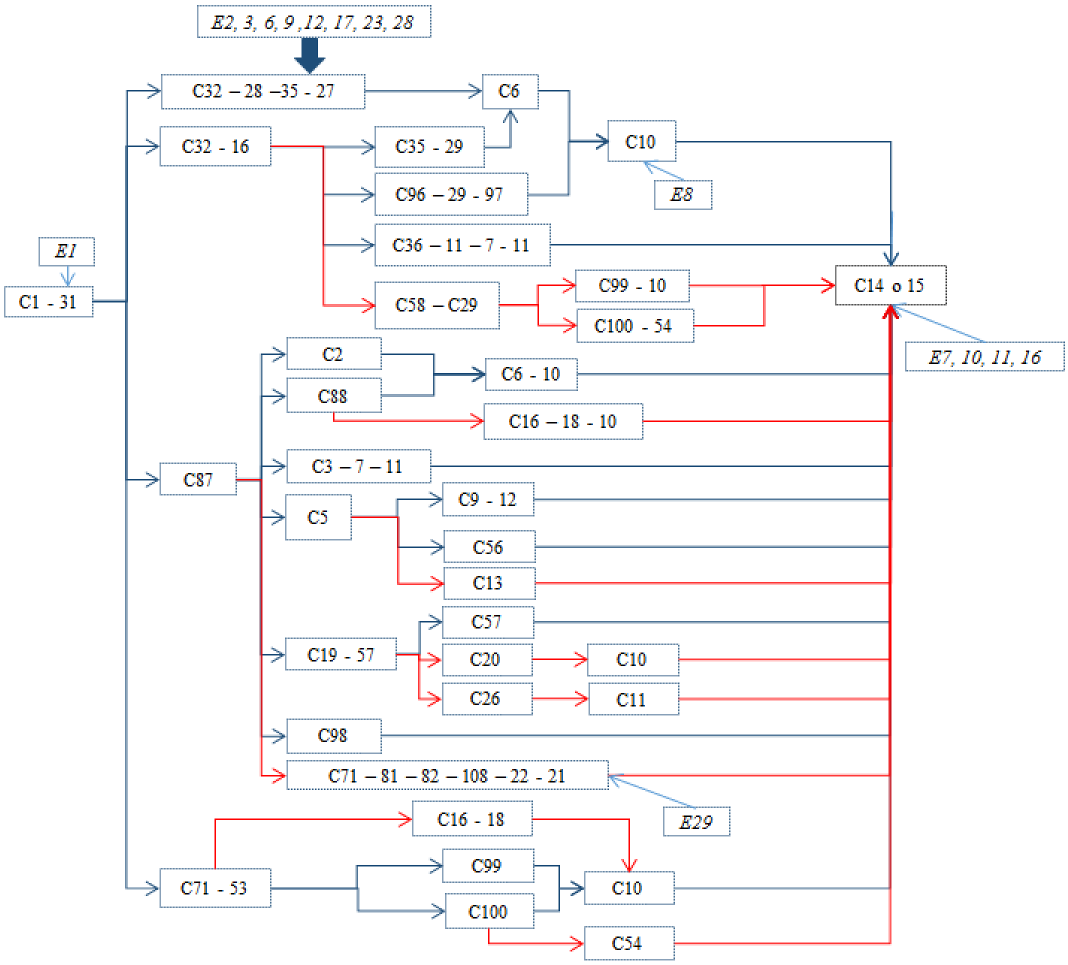


Figura A1.20.17. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 19

1.21. Sesión 20

Pasada la Semana Santa hacemos la vigésima sesión. Planteamos un problema de combinación con total desconocido, con número de dos cifras y que la suma supone llevada.

Tabla A1.105. *Características principales de la vigésima sesión*

Problema	Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta, ¿Cuántos euros has conseguido al final?
Tipo de problema	Combinación con total desconocido
Cantidades	Cantidad mayor: 61.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	28 de abril
Cuento	¿Qué prefieres?
Asistentes	28 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora.
Recogida de datos	Grabación video, Hojas de registro, hojas de trabajo de los niños.

1.21.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión, llaman la atención los 29 alumnos que resuelven el problema utilizando el algoritmo.

La carta se realiza conjuntamente en los dos grupos, siendo las tutoras las que escriben en la pizarra y los niños la copian, por eso la representación utilizada en la carta se utiliza en todas ellas.

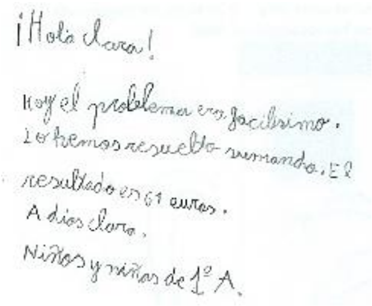

¡Hola Clara!
Hoy el problema era facilísimo.
Lo hemos resuelto sumando. El
resultado es 61 euros.
A dios Clara.
Niños y niñas de 1º A.

Figura A1.21.1. Carta de 1ºA de la sesión 20

Las frecuencias absolutas sobre la resolución de los niños se pueden ver en la Figura A1.21.2. Siete de los 53 niños que asisten eligen una estrategia adecuada, aunque 6 de ellos no dan la respuesta correcta por errores de ejecución del procedimiento. En esta sesión no disponíamos de la ayuda de los alumnos en prácticas para el registro de las estrategias de los niños y hay 13 niños de los que no tengo registro.

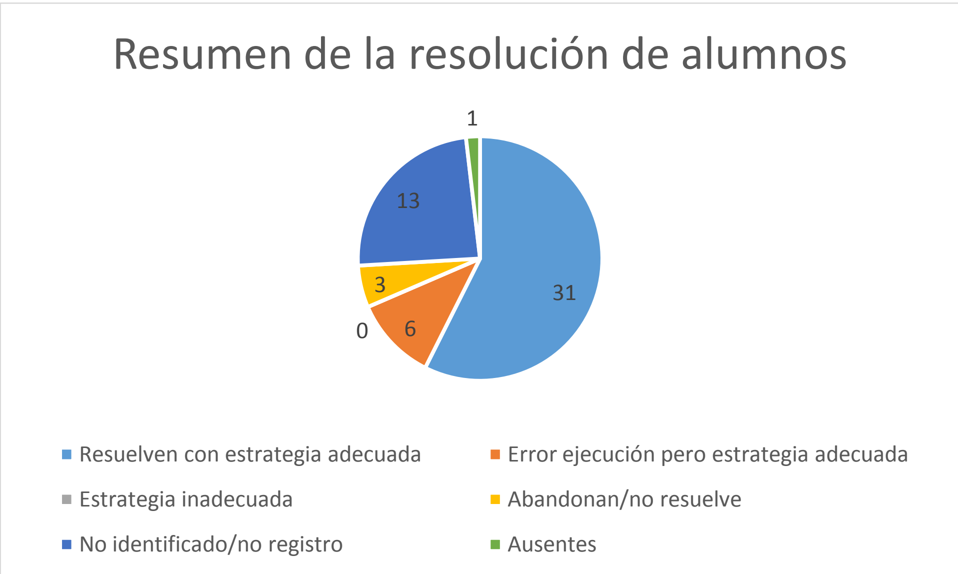


Figura A1.21.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 20

1.21.2. Estrategias observadas

En esta sesión, la resolución con el algoritmo de la suma ha sido lo más frecuente, siendo utilizado en 29 de las 37 estrategias recogidas. Las estrategias con objetos han sido utilizadas en cuatro ocasiones, tanto con cubos encajables, *Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT1), como con plastilina y con bolas ensartables, *Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno* (JT3).

Figura A1.21.3. Representaciones de las estrategias JT1 y JT2 en la sesión 20

Solo una vez se ha utilizado la estrategia *Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno* (JT5). En la Figura A1.21.4 se puede observar la representación realizada por su autor.

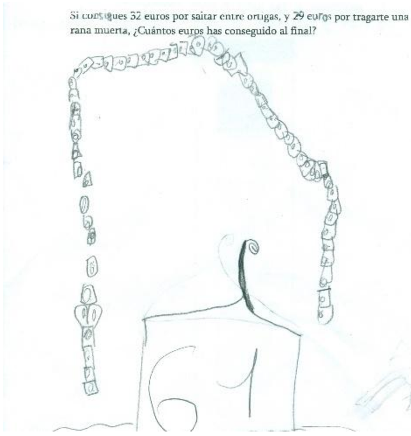


Figura A1.21.4. Representaciones de la estrategia JT5 en la sesión 20

Una niña (A44) utiliza *Juntar todo con Tabla 100* (JT12), explicando de la siguiente manera su procedimiento: “Desde el 32 he contado 29, empezando en el 33, 1, 2, 3,… (Para en el 61) con el 29”.

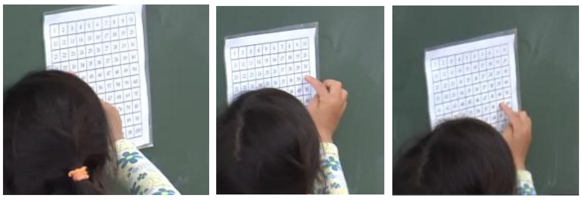


Figura A1.21.5. Representaciones de la estrategia JT12 en la sesión 20

Estrategias inventadas (EI) basadas en valor posicional de los niños han sido utilizadas dos veces. Un niño combina primero las decenas, después añade las unidades de una de las cantidades, y por último las unidades de la otra cantidad. El marco teórico la denomina una estrategia secuencial, la denoto *Secuencia: A partir de un sumando se suma las decenas del otro, y después las unidades* (EI7). El niño que la utiliza (A38) explica: “Primero he sumado las decenas 3 + 2, 5, 50; luego +9, 59, más 2, 61”. Otra niña utiliza la estrategia de combinar por separado decenas y unidades, y finalmente combinar el resultado de ambos (EI2). Por último, las estrategia más utilizada ha sido el algoritmo de la suma.

Tabla A1.106. *Estrategias adecuadas en la sesión 20*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*Subvariante*	*F.A.*
Juntar todos (JT)	Con cubos encajables	Juntando (JT1)		1
	Con otros objetos	Juntando (JT3)		3
	Con marcas	Añadiendo	Iguales (JT5)	1
	Con Tabla 100 (JT12)			1
Estrategia inventada (EI)		Combinación decenas y unidades (EI2)		1
		Secuencia decenas y unidades (EI7)		1
Algoritmo		Suma (AL1)		29

1.21.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Las dificultades observadas en esta sesión han sido motivadas por el uso del algoritmo. De los 4 niños que eligen realizar el algoritmo que se han registrado, tres de ellos muestran dificultades en su ejecución y el otro, en las sumas de las columnas, es decir, son errores de cálculo al no realizar las combinaciones básicas de las columnas correctamente, como se puede ver en la siguiente Figura A1.21.6. La imagen de la izquierda muestra un algoritmo con llevadas en las unidades, y la imagen de la derecha muestra un algoritmo con la columna de las unidades mal sumadas.

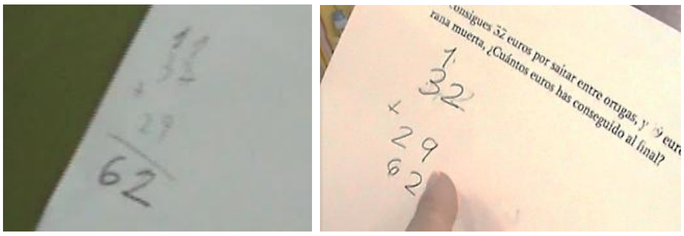


Figura A1.21.6. Dificultades en la ejecución de procedimiento y combinación básica en la sesión 20

Otras dificultades observadas, han sido el conteo de las colecciones en dos de las niñas que utilizaron la modelización directa.

En la siguiente Tabla A1.107 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.107. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 20*

Dificultades	Errores observados
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99	Errores en el conteo (E2 y E3)
No dominar el algoritmo de la suma con llevada	Errores con la llevada (E20)

1.21.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones utilizadas en esta sesión se muestran en la Tabla A1.108. Al haber pocas estrategias de modelización directa, las representaciones de tipo A1, icónica de número y sin representación de objetos se han reducido. En cambio, la representación A3, simbólica de número y sin representante de número se han disparado, por el uso del algoritmo.

Tabla A1.108. *Representaciones encontradas en la sesión 20*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm)	5 (2, 2, 1)		
	B1	0		
	C1			
2	A2	1		
	B2			
	C2			
3	A3	29	31	
	B3			
	C3			24
4	A4			
	B4			
	C4			

La representación que aparece en este algoritmo, no es solo una representación simbólica de número. También aparece una representación icónica del objetos (€).

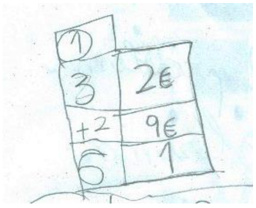


Figura A1.21.7. Representación C2 en la sesión 20

1.21.5. Camino de aprendizaje para la tarea

La estrategia inventada necesita de la capacidad:

C103. Sumar las decenas y después las unidades de un sumando, al otro sumando.

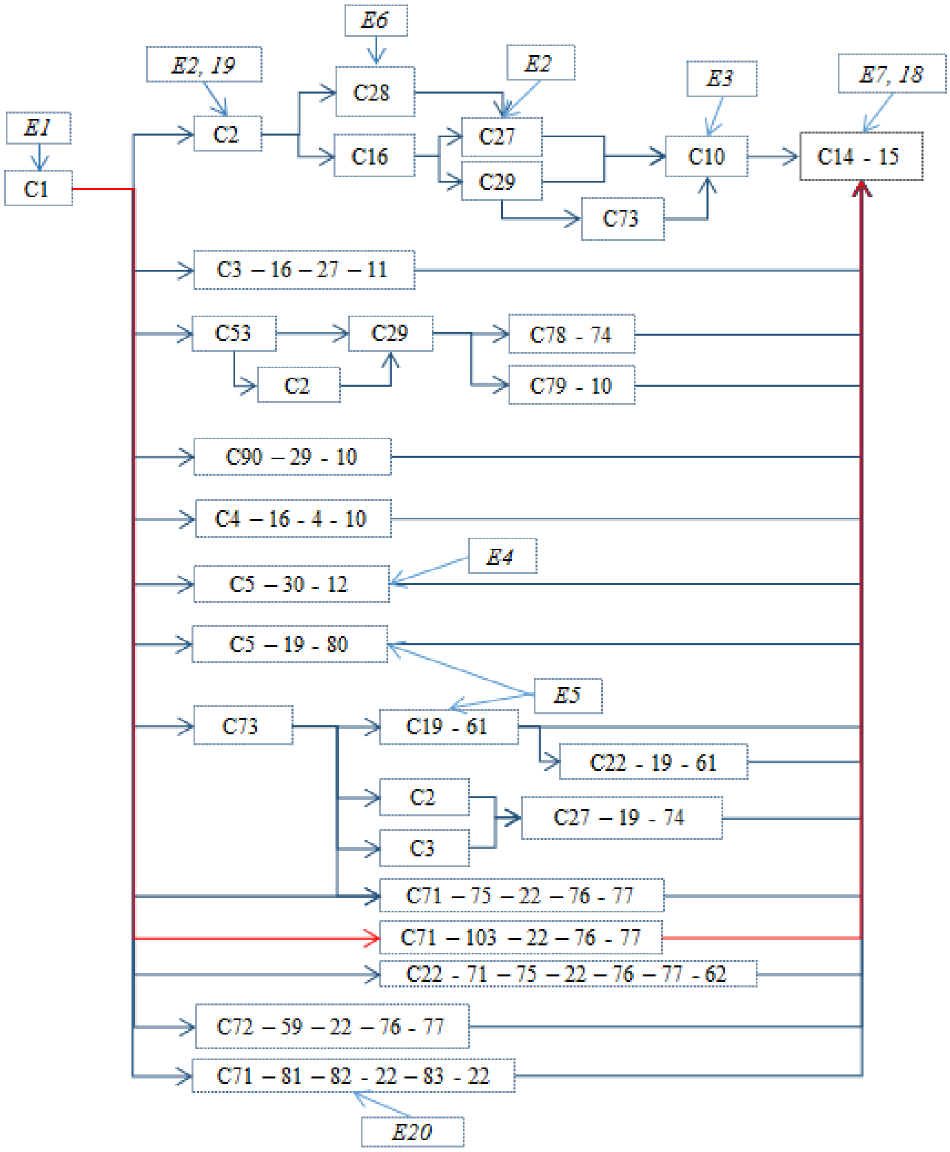


Figura A1.21.8. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 20

1.22. Sesión 21

En esta sesión volvemos a la estructura multiplicativa, un problema de agrupamiento, en el que no aparecen grupos de 10, pero es una cantidad de dos cifras, que al haber 5 grupos, la cantidad mayor es 60.

Tabla A1.109. *Características principales de la vigésima primera sesión*

Problema	Si entras en un supermercado encima de un toro y rompes 5 cajas de galletas con 12 galletas cada una, ¿Cuántas galletas aplastas en total?
Tipo de problema	Grupos iguales de multiplicación
Cantidades	Cantidad mayor: 60.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	5 de mayo
Cuento	¿Qué prefieres?
Asistentes	27 (de 28 de 1ºA) y 26 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutora de grupo A y un profesor suplente en grupo B, investigadora.
Recogida de datos	Grabación video, hojas de trabajo de los niños, fotografías.

1.22.1. Desarrollo de la sesión

En el grupo B falta la tutora de grupo y se encarga de entrar un maestro del colegio ajeno a la investigación. En un momento dado, el maestro suplente en el grupo B escribe en la pizarra la modelización y las sumas de 12+12+12+12+12, como se puede ver en la Figura A1.22.1, con la intención de ayudar a los estudiantes a resolver el problema. En los procedimientos que explican los niños a partir de este momento, valoro la posible influencia en su resolución, por lo que haré constar los alumnos que utilizan estas sugerencias.

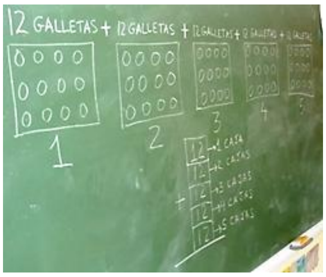


Figura A1.22.1. Indicaciones de un maestro ajeno al taller en la sesión 21

Las cartas en el grupo B se realizaron en grupo, aunque algunos niños explican su estrategia personalmente a Clara.

En el grupo A, la tutora del grupo tomó grabaciones de video de las explicaciones retrospectivas de los alumnos, y grabó también la puesta en común. La carta la escriben con la tutora en la pizarra y después, cada uno la escribe en su hoja de trabajo.

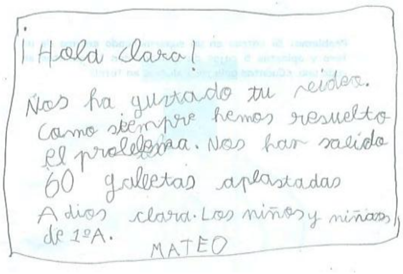


Figura A1.22.2. Carta con resolución a Clara en el grupo A en la sesión 21

La frecuencia absoluta de resolución con estrategias adecuadas ha sido de 36 alumnos de los 52 asistentes. De esos 36 alumnos, dos no han dado el resultado correcto por dificultades en el conteo final del total de elementos. Once de los 52 asistentes utilizan estrategias inadecuadas que suman el número de grupos con el número de elementos por grupo.

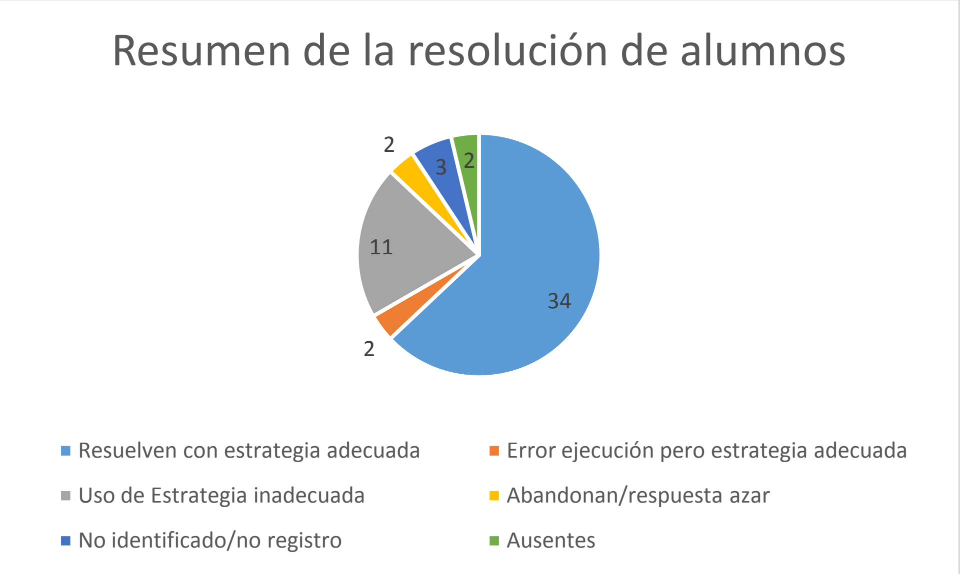


Figura A1.22.3. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 21

1.22.2. Estrategias observadas

El problema de esta sesión es un problema de grupos iguales de multiplicación, por lo que se espera estrategias basadas en el *Agrupamiento*. En la sesión 4 se planteó un problema con la misma estructura, y en las sesiones 7 y 12, la primera etapa del problema también se trata de una estructura de grupos iguales. En esta sesiones ya he distinguido entre *Agrupamiento sin representante de grupos* y *Agrupamiento representando los grupos.*

Comienzo con las variantes de *Agrupamiento sin representante de grupo*, que han sido utilizadas solo por cuatro alumnos. Un alumno ha utilizado *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A1), y otro, *Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A3), y los dos restantes han utilizado *Agrupamiento con Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa un grupo 12* (A6). En la Figura A1.22.4 se puede observar las representaciones de los dos niños que han utilizado los cubos encajables y las marcas.

Figura A1.22.4. Representaciones de A1 y A3 en la sesión 21

Una de los estudiantes que utiliza Agrupamiento con Tabla 100 explica: "He puesto doce y una rayita; luego he contado otros 12, y otra rayita; luego otros doce, otra rayita; doce y otra rayita y así hasta que hecho 5 rayitas de doce… y me ha salido 60". En la Figura A1.22.5 se pueden observar las pequeñas marcas que ha ido haciendo hasta completar 5 grupos de 12.

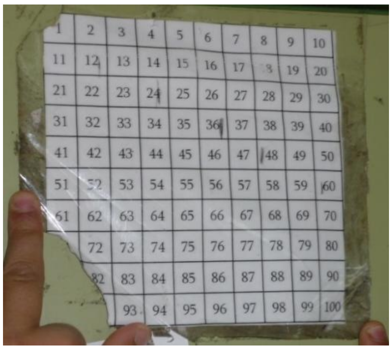


Figura A1.22.5. Estrategia A6 en la sesión 21

Las estrategias que muestro a continuación contienen representantes de la cantidad número de grupos, y luego los representantes de cada grupo. La utilización de cubos encajables con esta representación origina la estrategia *Agrupamiento con cubos encajables formando barras, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A7), y con objetos, *Agrupamiento con objetos, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A8) han sido utilizadas una vez cada una. En la Figura A1.22.6, una estudiante utiliza bolas de plastilina para modelizar el problema.

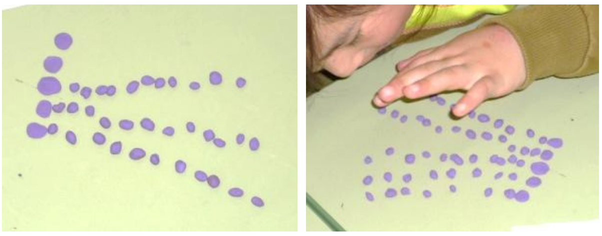


Figura A1.22.6. Estrategia A8 en la sesión 21

Las estrategias realizadas con representaciones gráficas han sido las más utilizadas (ver Tabla A1.81). He considerado todas como marcas, aunque al representar los niños las cajas con cuadrados o rectángulos y las galletas con círculos, es difícil diferenciar lo icónico de lo simbólico. Así, la variante, *Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno* (A10), ha sido utilizada en 22 ocasiones. Como extraordinario en esta sesión uno de los estudiantes que ha utilizado esta estrategia, no conseguía dar el resultado bien por tener dificultades en el conteo de tal cantidad de marcas. Al final decide ir apuntando los resultados parciales de las cajas que va contando. La variante es *Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno, anotando las sumas parciales acumuladas en cada* grupo (A35). En la Figura A1.22.7 se puede ver su representación.

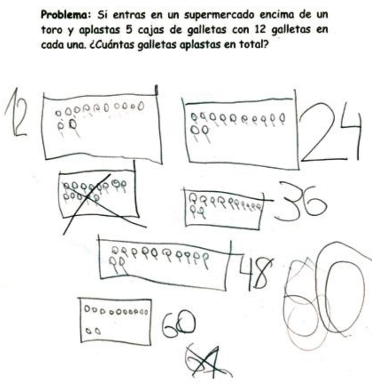


Figura A1.22.7. Estrategia A35 en la sesión 21

En esta sesión, el estudiante A26 explica: "He sumado… he contado de 12 en 12 y me ha salido 60". He categorizado su estrategia como de *Conteo a saltos de un número distinto de 10* (CS2). Tampoco hay más registro y de su explicación y luego tiene escrita a carta Clara.

En esta sesión se han utilizados varias *estrategias inventadas* (EI). Estas estrategias consisten en utilizar procedimientos basados en valor posicional y otras estrategias como la recuperación de hechos numéricos. Las tres estrategias observadas parten de que los niños entienden la situación como una suma reiterada de 12 cinco veces. El estudiante E2 explica: "Primero he contado los dieces, 10 y 10, 20, y 10, 30 y 10, 40 y otros 10, 50. Y luego he contado los *dos*, y me ha salido otro 10, y entonces me ha salido 60". Combina las decenas, por un lado, las unidades por otro, y por último, combina los resultados de ambos. Esta estrategia ha sido utilizada por dos estudiantes, y la denoto como *Combinar un número de veces las decenas, combinar un número de veces las unidades, y combinar las decenas con las unidades, en una multiplicación* (EI8)

Otra estudiante (E50) explica: E50: "como ya se me las sumas, 12+12, 24 + 24, 48 y luego he puesto un más doce y me ha salido 60".

Esta estrategia consiste en *Combinar decenas y unidades, duplicando hasta completar el número de grupos que hay en un problema de grupos iguales* (EI9). En el registro ella indica que se sabe las sumas y no tiene ningún tipo de sumas escritas, por lo que podría ser que las sumas las haya realizado, como en otras sesiones, utilizando la *Combinación de decenas y unidades*).

El tercer y último caso, el estudiante va sumando 12 consecutivamente hasta que llega a sumar 12 a 48, que decide utilizar Contar a partir de 48 (CP). El estudiante (E32) se explica así: "12 más 12, 24; más 12…. 36; más 12… 48 más 12… 50… no [cuenta, desde 48, doce numerales con los dedos], 49, 50…. 60, 60". *Esta estrategia es Combinar decenas y unidades con sumandos iguales, y cuando no está seguro cuenta a partir del último sumando, en un problema de grupos iguales* (EI10)

En esta sesión ha habido 3 niños que han utilizados algoritmos escritos. Dos de ellos han sumado doce, cinco veces consecutivas. En la Figura A1.22.8, una alumna suma 12, más 12. Al resultado le suma 12. Así dos veces más hasta que ha sumado 12 cinco veces. Ha utilizado el *Sumas reiteradas para multiplicación* (AL3).

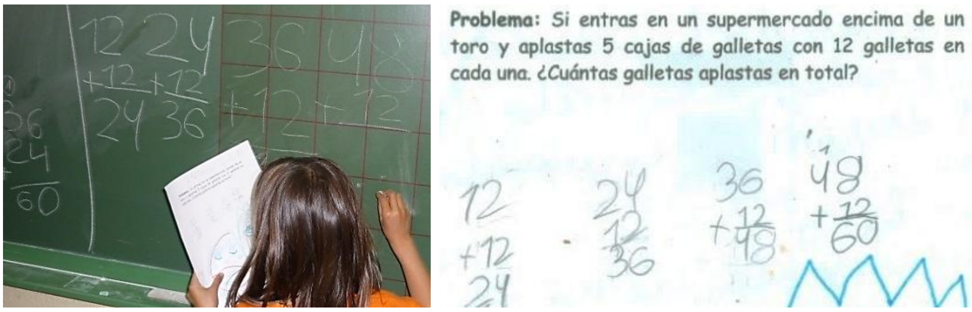


Figura A1.22.8. Estrategia AL3 en la sesión 21

Otro niño ha hecho dos *Sumas parciales, para multiplicación* (AL4). Primero ha sumado 12 más 12, luego 12 más 12 más doce, y los resultados de las dos sumas, los ha vuelto a sumar. En la Figura A1.22.9 se puede observar esta estrategia.

Figura A1.22.9. Estrategia ALSP en la sesión 21

En la Tabla A1.110 se recogen las frecuencias absolutas de las estrategias utilizadas por los niños en esta sesión.

Tabla A1.110. *Estrategias adecuadas en la sesión 21*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Agrupamiento sin representante de grupo (A)	Con cubos encajables (A1)		1
	Con marcas (A3)		1
	Con Tabla 100 (A6)		2
Agrupamiento con representante de grupo (AGR)	Con cubos encajables (A7)		1
	Con otros objetos (A8)		1
	Con marcas (A10)		21
		Sumas parciales (A35)	1
Conteo a Saltos (CS2)			1
Estrategia inventada (EI)	EI8		2
	EI9		1
	EI10		1
Algoritmo (AL)	Sumar parciales (AL4)		1
	Suma reiterada (AL3)		2

1.22.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Los estudiantes que han utilizado una estrategia inadecuada han interpretado el problema como la suma de las 5 cajas y las 12 galletas. Tres de los nueve estudiantes han utilizado el algoritmo de la suma y al dar la respuesta, dicen 17 o, al escuchar a los compañeros que hablan de 60, fuerzan un resultado. En la Figura A1.22.10 una estudiante realiza mal el algoritmo para ajustarlo a las respuestas que escucha alrededor.

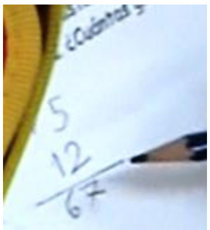


Figura A1.22.10. Algoritmo forzado en la sesión 21

El resto de estudiantes que han interpretado el problema como suma, han utilizado estrategias de modelización directa como Juntar todo con cubos encajables o marcas.

Figura A1.22.11. Juntar todo en la sesión 21

Como he comentado antes, el maestro que sustituye a la tutora del grupo B escribe en la pizarra cómo resolver el problema ya avanzada la sesión. Hay dos estudiantes que copian el algoritmo de la suma con 5 sumando, pero son incapaces de explicarlo. Incluso, uno de los estudiantes que utiliza una estrategia inventada, en la puesta en común intenta explicar el algoritmo con 5 sumando y no es capaz.

Los dos estudiantes que eligen una estrategia adecuada pero no dan la solución correcta, presentan dificultades en el conteo. La cantidad total de elementos el 60 y cometen errores en el procedimiento de conteo final.

En la siguiente Tabla A1.111 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.111. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 21*

Dificultades	Errores observados
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99	Errores en el conteo (E2 y E3)
No distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Uso estrategias inadecuadas (E1)
No comprender los algoritmos	Utilizarlos inadecuadamente (E30)

1.22.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones observadas en esta sesión se pueden ver en la Tabla A1.112. Al ser un problema de agrupamiento, incluyo en la resolución, la representación correspondiente a los grupos y a los elementos por grupo.

Tabla A1.112. *Representaciones encontradas en la sesión 21*

		Resolución (grupos)	*Resolución (elementos)*	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm)	31 (2, 2, 27)	33 (3, 2, 28)		
	B1				
	C1				
2	A2	1	3		
	B2				
	C2				
3	A3		6	38	5
	B3				
	C3				31
4	A4			2	1
	B4				
	C4				3

La mayoría de las representaciones has sido con marcas en papel en la resolución, tanto para grupos como para elementos por grupo. Las representaciones de tipo A2 que se dan en la resolución, son utilizadas en estrategias con Tabla 100 o para numerar las cajas o las galletas. En la Figura A1.22.12, en la imagen de la izquierda, las caja están numeradas, y en la imagen de la derecha, las galletas se numeran para hacer el recuento final.

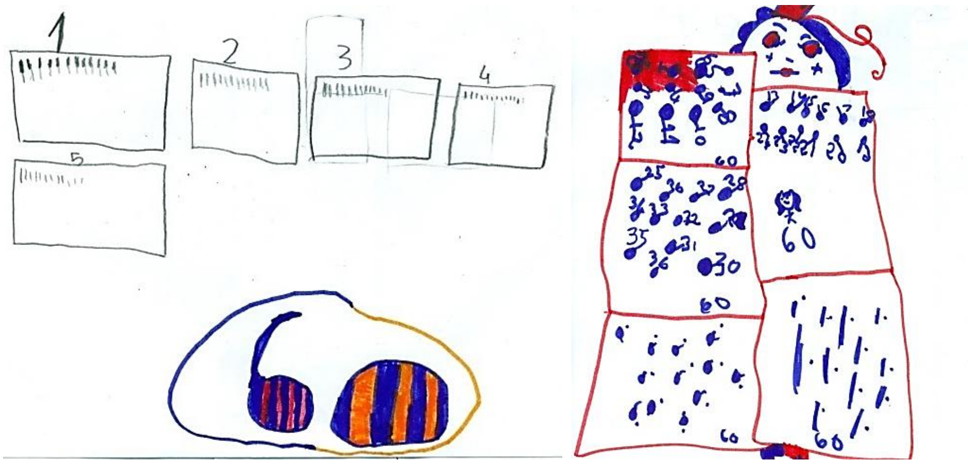


Figura A1.22.12. Representaciones A2 en la sesión 21

En las cartas la representación que más aparece en la C3, por ejemplo, "5 cajas". En la Figura A1.22.13 se puede observar que este problema están claras las unidades de cada cantidad y por eso puede utilizarse más esta representación. En problemas como en la sesión 3 o la sesión 10, en la que se combinan unidades diferentes, es normal que se utilice más la representación A3, donde no se indica el tipo de objeto.

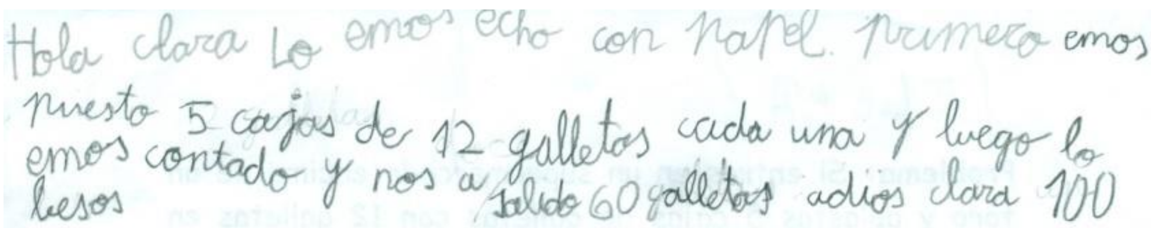

Hola clara Lo emos echo con papel. primero emos
puesto 5 cajas de 12 galletas cada una y luego lo
emos contado y nos a salido 60 galletas adios clara 100
besos

Figura A1.22.13. Carta del grupo B en la sesión 21

1.22.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En la estrategia de *Agrupamiento* (A35), el niño va anotando la cantidad acumulado del conteo.

C104. Anotar el conteo parcial en cada grupo.

En la estrategia de *Conteo a saltos* (CS2) se necesita:

C105. Enunciar la secuencia numérica a saltos distintos de 10, un número de veces dado, llevando el rastro con los dedos o con una representación mental.

Para las estrategias inventadas y los algoritmos, hay dos formas de sumar cinco veces, duplicando, o acumulando.

C106. Sumar reiteradamente una cantidad acumulando al total anterior.

C107. Sumar agrupando en dobles hasta agotar y sumar los resultados anteriores.

Con estas capacidades y los errores comentados en el apartado anterior, el grafo de esta sesión queda como muestra la Figura A1.22.14. Como en ocasiones anteriores, los caminos de aprendizaje rojos son los que se han utilizado en esta sesión y no en la sesión anterior de este tipo de problema, la sesión 4.

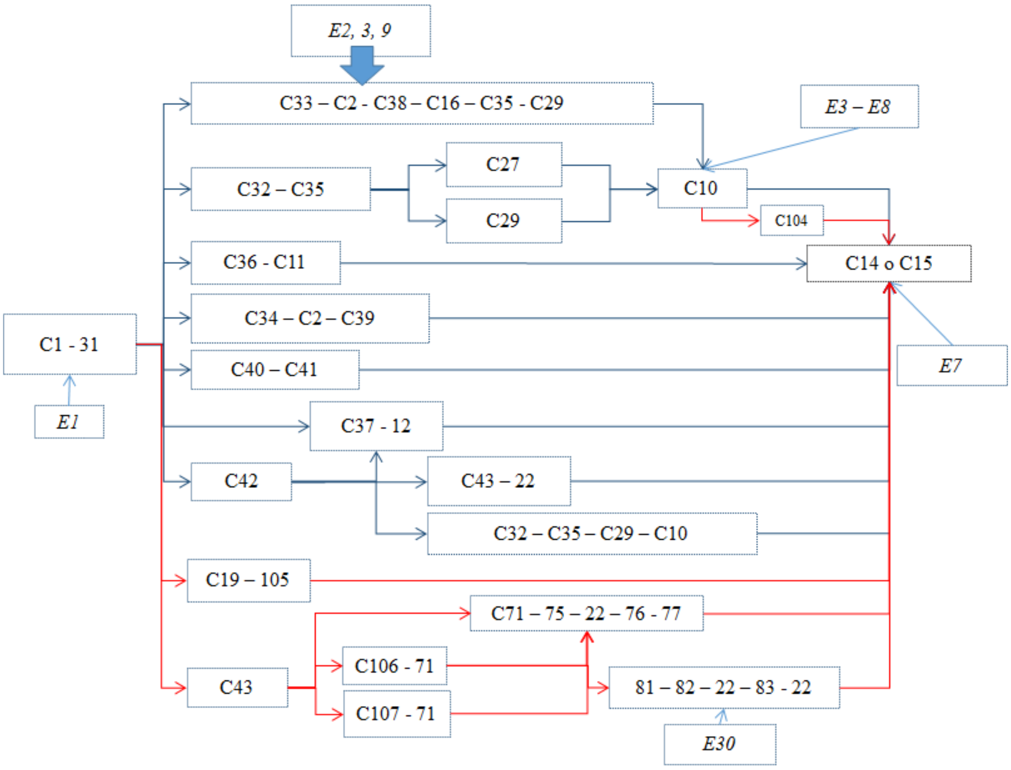


Figura A1.22.14. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 21

1.23. Sesión 22

En esta sesión planteamos un problema de combinación donde la dificultad se encontraba en que la incógnita era una parte.

Tabla A1.113. *Características principales de la vigésima segunda sesión*

Problema	Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo?
Tipo de problema	Combinación con parte desconocida
Cantidades	Cantidad mayor: 35.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, pinchitos, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	12 de mayo
Cuento	Los de arriba y los de abajo.
Asistentes	25 (de 28 de 1ºA) y 24 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora.
Recogida de datos	Grabación video, hojas de trabajo de los niños y fotografías.

1.23.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión, once niños han intentado realizar el algoritmo cometiendo errores en su ejecución ya que no saben hacerlo con llevada. Al final, muchos han utilizado modelización añadir hasta o quitar, y conteo hasta incluso apoyándose en la tabla 100. Los niños que habitualmente utilizan el valor posicional, al no estar seguro de hacerlo bien, también han utilizado contar hasta.

En la Figura A1.23.1 muestro las frecuencias de la resolución de los alumnos en esta sesión. Hay 30 niños de los 50 asistentes que eligen una respuesta adecuada, siendo 21 los que dan la respuesta correcta. Los 9 restante son niños que intentan el algoritmo de la resta y no consiguen hacer correctamente el procedimiento. Los niños que utilizan estrategias inadecuadas interpretan la situación como de suma.

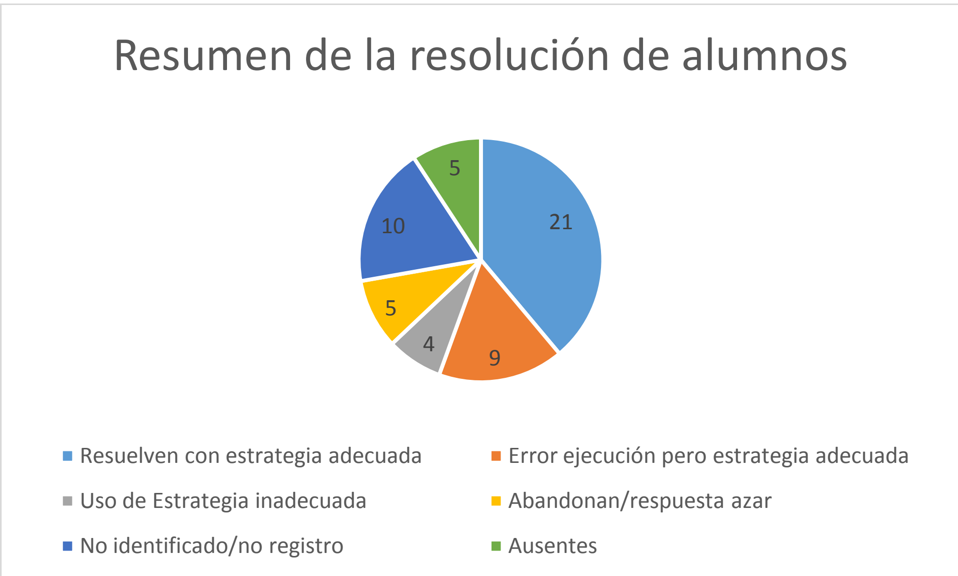


Figura A1.23.1. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 22

Las tutoras ayudan a escribir las cartas de los niños, lo que no favorece que cada uno trabaje la articulación de sus ideas y su comunicación.

Figura A1.23.2. Carta en la pizarra de la sesión 22

En la próxima sesión utilizaremos otro problema de estructura aditiva pero de un tipo diferente de los que hemos usado incluyendo datos en decenas de nuevo, pero facilitaremos el paso a una decena para que sea más sencillo el uso de valor posicional y cojan confianza.

1.23.2. Estrategias observadas

Las estrategias utilizadas en esta sesión se recogen en la Tabla A1.114. El problema de esta sesión es de combinación con parte desconocida. Los estudios previos no indican una estrategia que generalmente utilicen los niños para resolverla. Los datos recogidos indican que los niños prefieren utilizar la estrategia de Quitar (Q), con distintos materiales.

Tabla A1.114. *Estrategias adecuadas en la sesión 22*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Quitar (Q)	Con marcas	Contando de uno en uno (Q3)	11
	Con cubos encajables	Contando de uno en uno (Q1)	1
	Con otros objetos	Contando de uno en uno (Q2)	2
	Con Tabla 100	Desde el último (Q9)	1
Añadir hasta (AH)	Con dibujos	Contando de uno en uno (AH1)	1
	Con cubos encajables	Contando de uno en uno (AH6)	1
Correspondencia uno a uno (E)	Con cubos encajables (E4)		1
Contar hacia atrás hasta (CAH1)			1
Algoritmo (AL)	Resta (AL2)		11

La estrategia de Quitar con marcas (Q3) consiste en dibujar 35 marcas, tachas o redondear 18, y contar las que quedan (Ver Figura A1.23.3).

Figura A1.23.3. Estrategia Q3 en la sesión 22

La estrategia Quitar con cubos encajables (Q1), se puede observar en la secuencia de la Figura A1.23.4, donde un niños construye una barra con 35 centicubos, quitar 18 y cuenta los que quedan. Con otros objetos (Q2) se realiza de la misma forma pero en general, los otros materiales no permiten construir barras y compararlas.

Figura A1.23.4. Estrategia Q1 en la sesión 22

La estrategia *Quitar con la Tabla 100 empezando desde el último, contando de uno en uno* (Q9), consiste en buscar el 35 en la Tabla 100, y contar 18 numerales hacia atrás. El numeral anterior al último señalado, 17, es la cantidad resultado.

Un niño dibuja las personas que hay arriba, y después completa la cantidad de personas hasta el total en el mundo de abajo (ver Figura A1.23.5). Después cuenta las personas que ha añadido abajo. Esta estrategia es *Añadir hasta con dibujos, contando de uno en uno* (AH1)

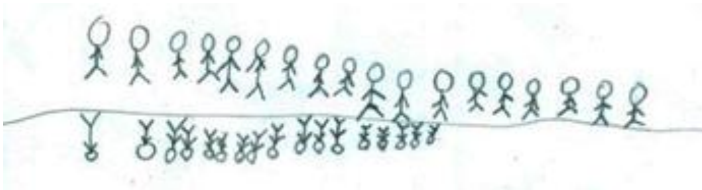


Figura A1.23.5. Estrategia AH1 en la sesión 22

La estrategia *Añadir hasta con cubos encajables formando barras* (AH6) consiste en construir una barra con 18 centicubos, y luego construir otra que complete hasta 35 centicubos. Finalmente se cuenta los cubos de la segunda barra. Distinguir los cubos encajables de otros objetos se debe a que permiten comparar cantidades por la longitud de las barras, como se puede ver en la Figura A1.23.6.

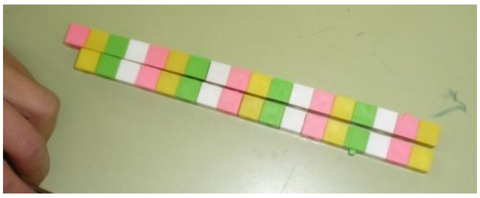


Figura A1.23.6. Estrategia AH6 en la sesión 22

La estrategia *Correspondencia uno a uno con cubos encajables, contando de uno en uno* (E4) consiste en formar dos barras de cubos encajables con las dos cantidades del problema. Después, se colocan haciendo coincidir un extremo, y se quita la parte de la barra que no tiene pareja en la otra barra. Se cuentan los cubos que tiene esta barra (ver Figura A1.23.7).

Figura A1.23.7. Estrategia E4 en la sesión 22

En esta sesión se utiliza por primera vez *Contar hacia atrás hasta* (CAH1), que consiste en contar desde el 35 hasta al 18, llevando el rastro de los numerales enunciados.

Hay 17 niños registrados que eligieron primeramente resolver la situación con el algoritmo de la resta. Al ver que no conocían el procedimiento, 4 de ellos deciden cambiar de estrategia y utilizan estrategias de las anteriores, consiguiendo resolver correctamente el problema.

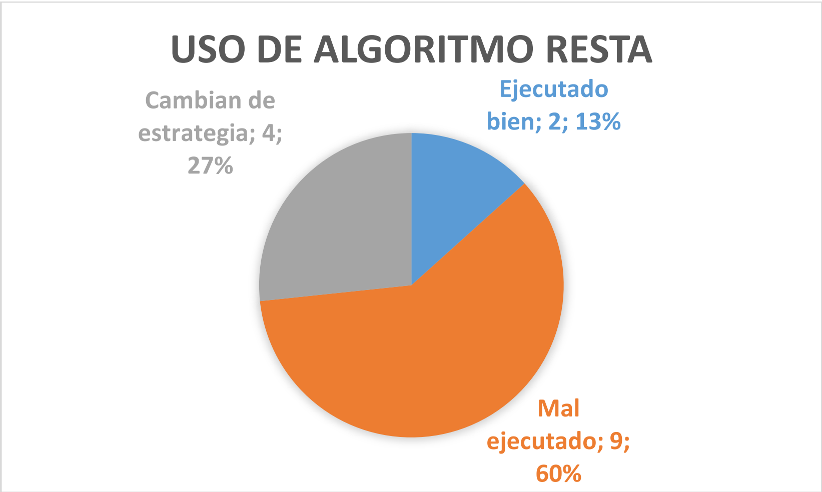


Figura A1.23.8. Estrategia algoritmo en la sesión 22

Los dos alumnos que consiguen resolver el problema usando el algoritmo de la resta, aun siendo con llevada, explican que lo saben hacer "porque se lo ha explicado su padre".

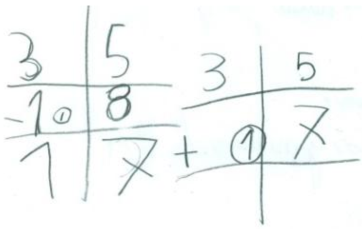


Figura A1.23.9. Resta con llevada bien ejecutada en la sesión 22

1.23.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Las dificultades presentadas en esta sesión han sido la mayoría debidas al intento de resolución de la resta. La dificultad que más ha provocada el poco éxito en la resolución ha sido el intento de ejecución del algoritmo de la resta con llevada. Es un conocimiento formal que no se ha puesto en práctica en el aula y 9 niños no consiguieron ejecutarlo bien. Algunos hacían la suma con llevada, poniendo el signo de la resta. Otros decían que daban 20 y algo porque las decenas las restaban bien, pero con las unidades no sabían que hacer. Otros decían 23 porque al resta 5 al o, les daba 3 en las unidades.

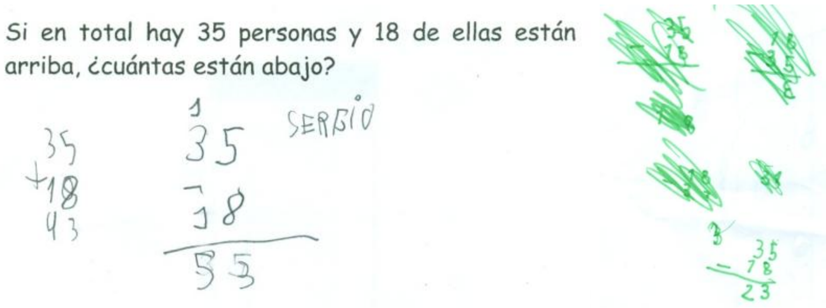


Figura A1.23.10. Resta con llevada mal ejecutadas en la sesión 22

Una niña que habitualmente elabora hojas de trabajo muy decoradas, representa dos “montones de bolas” sin saber cuántas hay en cada una. Presenta algún tipo de dificultad de aprendizaje, ya que, pone interés siempre en elaborar una estrategia pero no da sentido a las cantidades ni sus relaciones.

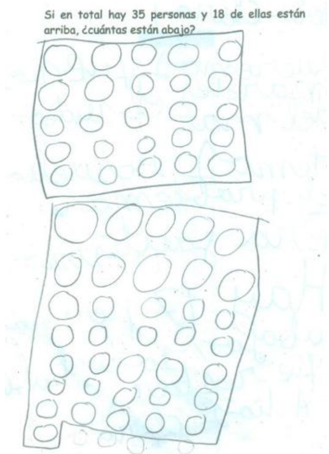


Figura A1.23.11. Dificultad de aprendizaje en la sesión 22

Tres niños eligieron estrategias inadecuadas que sumaban las cantidades, no entendiendo por lo tanto la situación del problema. En la Figura A1.23.12 muestro sus hojas de trabajo.

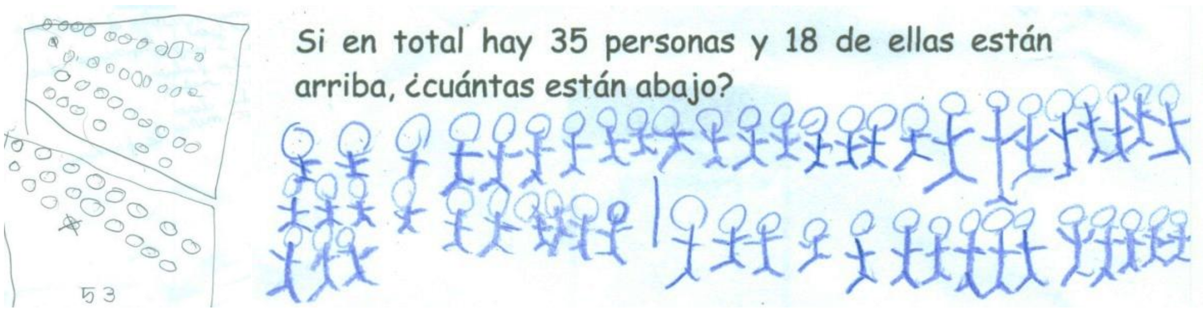


Figura A1.23.12. Estrategias Juntar todo con marcas y dibujos inadecuadas en la sesión 22

En la siguiente Tabla A1.115 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.115. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 22*

Dificultades	Errores observados
No dominio de la secuencia de numerales hasta 99	Errores al formar colecciones con un cardinal dado (E2)
No comprender la situación	Uso estrategias inadecuadas (E1)
No comprender los algoritmos	Utilizarlos inadecuadamente (E30)

1.23.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones recogidas en esta sesión se muestran en la Tabla A1.116. En la resolución aparece representaciones A3, simbólica de número en cifras y sin representante de objeto porque los números de los algoritmos, los contabilizo en este tipo tanto en resolución como en la solución. La representación A2 en la resolución corresponde al uso de la Tabla 100, y a representaciones en las que numeran las marcas.

Tabla A1.116. *Representaciones encontradas en la sesión 22*

		Resolución	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Oo, Gm)	34 (4, 2, 16)		
	B1 (I)	2		
	C1			
2	A2	3		
	B2			
	C2			
3	A3	11	25	18
	B3			
	C3			41
4	A4			
	B4			
	C4			

1.23.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Para la estrategia contar hacia atrás hasta se necesita la capacidad siguiente:

> C109. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia atrás hasta otro llevando el rastro con una colección representada con los dedos o figurativa.

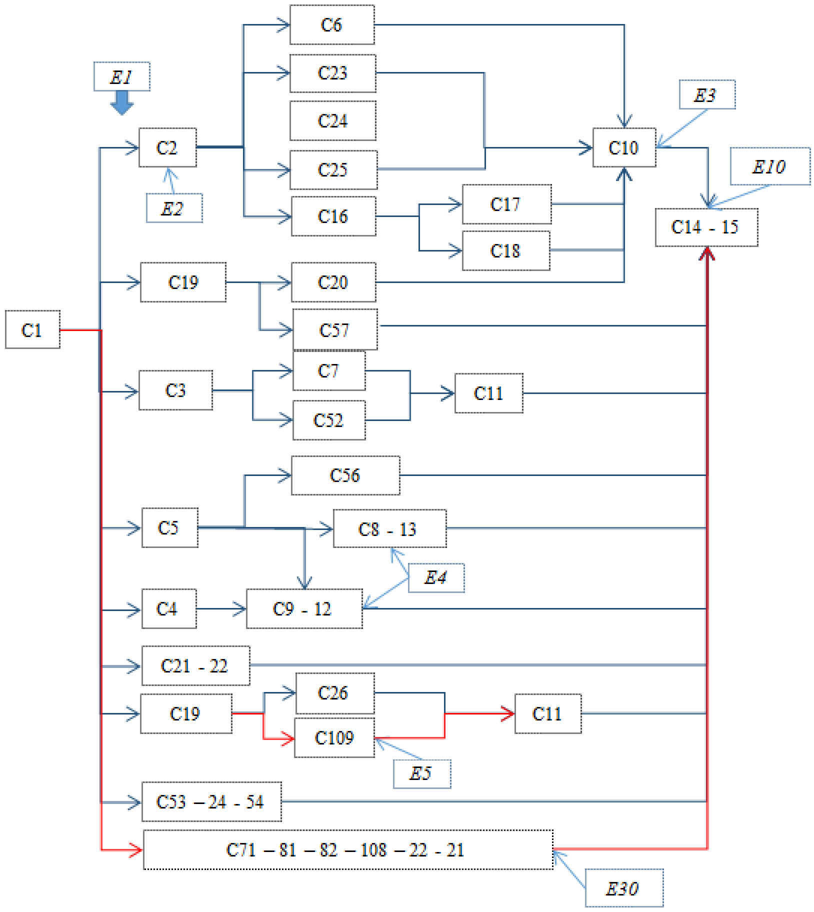


Figura A1.23.13. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 22

1.24. Sesión 23

En esta sesión planteamos un problema de comparación con la diferencia desconocida, donde la dificultad se encuentra en que la cantidad total se utiliza la unidad "decenas". De nuevo el problema tiene dos etapas, primero la solución de grupos iguales de grupos de 10, y la segunda la comparación.

Tabla A1.117. *Características principales de la vigésima tercera sesión*

Problema	Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?
Tipo de problema	Dos etapas de esquema jerárquico, con un problema de grupos repetidos con grupos de 10 y un problema de comparación con la diferencia desconocida
Cantidades	Cantidad mayor: 40.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, cubos encajables, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	19 de mayo
Cuento	Los de arriba y los de abajo.
Asistentes	24 (de 28 de 1ºA) y 25 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora.
Recogida de datos	Grabación video, hojas de trabajo de los niños.

1.24.1. Desarrollo de la sesión

En el grupo b, la tutora intenta ponerles un ejemplo de resolución a los niños, con dos ramas en un árbol, una con 4 pájaros y otra con 8.

Figura A1.24.1. Ayuda de la tutora en grupo B de la sesión 23

En la Figura A1.24.2 muestra las frecuencias relacionadas con la resolución de los niños en esta sesión. Esta sesión 23 niños utilizan una estrategia adecuada, aunque 7 de ellos no consigue dar la respuesta correcta, por dificultades de conteo o intentos de algoritmos de la resta con llevada.

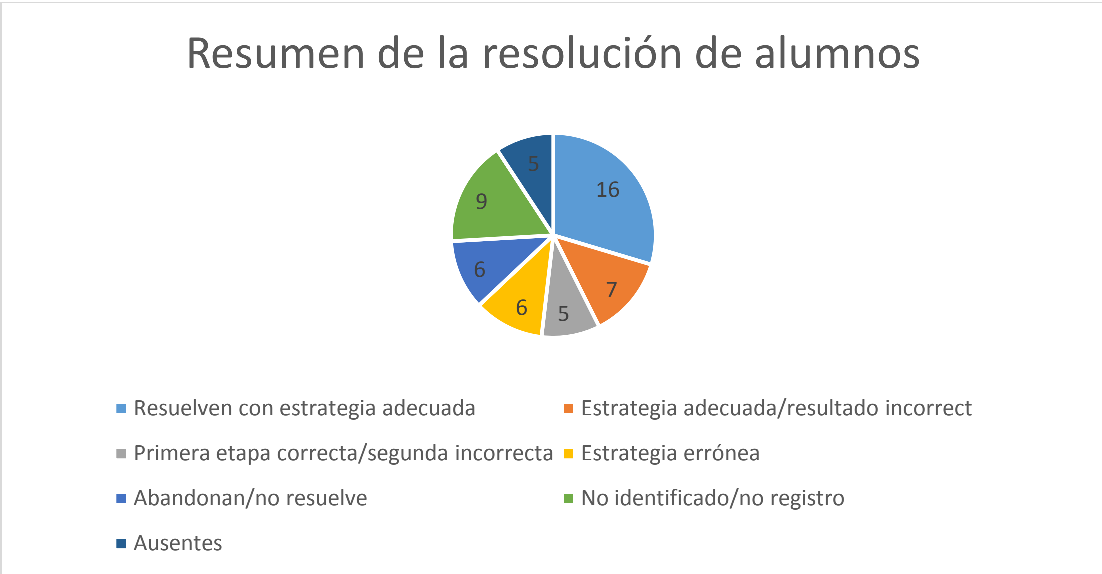


Figura A1.24.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 23

Hay 5 niños que utilizan una estrategia adecuada para la primera etapa, y precisamente estos niños representan la segunda cantidad del problema, pero ninguno de ellos concluye el problema o sabe explicar que hay que hacer. En la Figura A1.xx se puede ver la representación de uno de estos alumnos.

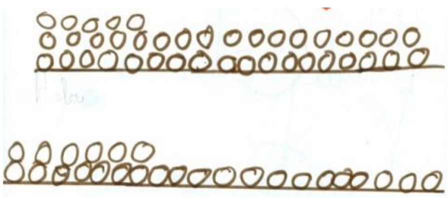


Figura A1.24.3. Representación alumnos que abandonan en la sesión 23

Hay otros 5 niños que utilizan estrategia para sumar, o incluso estrategia adecuadas pero sin tener en cuenta que 4 son decenas y no unidades. También incluyo un niño que da por terminado el problema con saber cuántos son 4 decenas.

De nuevo la tutora del grupo A escribe la carta con los alumnos en la pizarra, y éstos la copian en su hoja de trabajo por lo que las representaciones de la carta serán todas iguales.

Figura A1.24.4. Carta del grupo A en la sesión 23

1.24.2. Estrategias observadas

Las estrategias observadas ya han sido descritas en sesiones anteriores por lo que describiré solo algunos detalles diferentes. Hay un primera etapa en la que hay que resolver la situación "4 decenas". En esta primera etapa se han recogido las estrategias que aparecen en la Tabla A1.118.

Tabla A1.118. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 23*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Agrupamiento sin representante de grupo (A)	Con marcas (AGm)	Contando de uno en uno (AGmC1)	2
Valor posicional (VP)	Equivalencia decenas en unidades (VP2)		18
	Posición de las cifras (VP3)		3

Las estrategias han pasado a ser en su mayoría basadas en el valor posicional de las cifras. En la segunda etapa se han recogido las estrategias que aparecen en la Tabla A1.119.

Tabla A1.119. *Estrategias adecuadas en la primera etapa en la sesión 23*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Quitar (Q)	Con marcas	Contando de uno en uno (Q3)	6
	Con cubos encajables	Contando de uno en uno (Q1)	2
Añadir hasta (AH)	Con marcas	Contando de uno en uno (AH7)	2
	Con cubos encajables (AHOc)	Contando de uno en uno (AH6)	1
	Con Tabla 100 (AHT100)	Contando de uno en uno (AH4)	2
Correspondencia uno a uno (C1-1)	Con marcas (C1-1Gm)		1
	Con cubos encajables (C1-1Oc)		1
Contar hasta (CH)			1
Contar hacia atrás hasta (CHA)	Con marcas (CHA2)		1
Estrategia inventada (EI)	RD-RUa1D		1
	(AU-D).		1
	QHD-QHU		1
Algoritmo	Resta (AL2)		3

Las combinaciones de las dos etapas generan las siguientes estrategias (ver Figura A1.24.5). Como se puede ver, dos niños explican que ha ido añadiendo cuatro grupos de 10 a una colección única, contando de uno en uno el total. Después han tachado 26, y han contado el resto. Esta estrategia es la que corresponde a la primera fila de la tabla (A28-Q3).

Tabla A1.120. *Estrategias adecuadas en la sesión 23*

Estrategia primera etapa		Estrategia segunda etapa		F.A.
A28	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	Q3	Quitar con marcas contando de uno en uno	2
VP2	Equivalencia de decenas en unidades	Q3	Quitar con marcas contando de uno en uno	4
		Q1	Quitar con cubos encajados contando de uno en uno	2
		AH7	Añadir hasta con marcas	2
		AH6	Añadir hasta con cubos encajables formando barras	1
		AH4	Añadir hasta con Tabla 100 contando de uno en uno	2
		E4	Correspondencia uno a uno con cubos encajables	1
		E1	Correspondencia uno a uno con marcas	1
		CH2	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con las manos o mentalmente	1
		CAH2	Contar hacia atrás hasta llevando el rastro con marcas	1
		AL2	Algoritmo de la resta	3
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	EI10	Para restar, completa a la década la cantidad a restar, se restan las decenas de ambos números, luego restan las unidades a lo que le queda, y en su caso, suma las unidades de la cantidad a la que había que restar.	1
		EI11	Añadir unidades hasta completar la década, añade las decenas que le faltan, y en el caso, las unidades.	1
		EI12	Resta las decenas, luego las unidades a quitar.	1

La mayoría de los niños identifican que 4 decenas son 40 (VP2), y a partir de ahí utilizan diferentes estrategias de modelización directa, conteo, estrategias inventadas o incluso algoritmos. La estrategia que en el primera etapa se identifica 4 decenas como 40 unidades, y en la segunda etapa se utiliza la variante de *Quitar con marcas* (Q3), se diferencia de la anterior (A28-Q3), en que no necesita modelizar cuatro grupos de 10 para saber que son 40. DE la misma forma se ejecuta la estrategia en la que se construye una barra de 40 cubos encajables, tras reconocer que 4 decenas son 40, y se quitar 26, para contar el resto (VP2-Q1).

La estrategia *Añadir hasta con marcas* (AH7) es utilizada por un alumno que explica en la carta de la Figura A1.24.5. La estrategia *Añadir hasta con cubos encajables* (AH6) se utiliza construyendo una barra con 26 cubos encajables, y se completa hasta tener 40, contando los cubos añadidos.

Figura A1.24.5. Carta con explicación VP2 – AH7 de la sesión 23

La estrategia Añadir hasta también se ha utilizado con la Tabla 100, contando los numerales que hay desde el número 26 hasta el número 40, lo que supone, traducir 4 decenas a 40 primero (VP2- AH4). En esta sesión también se utiliza la *correspondencia uno a uno*, tanto con marcas como con cubos encajables, como se puede ver en la Figura A1.24.6.

Figura A1.24.6. Estrategia VP2 – E4 de la sesión 23

Las estrategias de conteo *Contar hasta* (CH) y *Contar hacia atrás hasta* (CAH) se han utilizado contando desde el 26 hasta al 40, para la primera, llevando el rastro con ayuda de las manos (CH2); y contando desde el 40 hasta el 26 hacia atrás, en el caso de la segunda, donde el niño necesita ir poniendo un punto por cada numeral que cuenta hacia atrás desde el 40, por lo que la denoto como *Contar hacia atrás hasta con marcas* (CAH2).

Las estrategias inventadas (EI) utilizadas en esta sesión han sido diferentes. Ha habido tres niños que han demostrado un dominio del valor posicional en su forma de calcular. La primera, el niño resta 2 decenas a 4 decenas, de las dos decenas que le quedan, a una le resta 6, y las 4 que quedan con la otra decena son 14 (EI10).

Otro niño añade las unidades que le falta a la decena incompleta, y luego completa decenas hasta 4 decenas (EI11). Y por último, una niña quita una decena a 4 decenas, quedan 3 decenas, así que le quita 4 unidades hasta el 26, por lo tanto 14 (EI12).

En esta sesión, al igual que la anterior, nueve niños intentan hacer el algoritmo. Solo uno lo ejecuta correctamente, tres cambian de estrategia y consiguen solucionar el problema y 5 no dan la respuesta correcta al no saber cómo realizarlo (ver Figura A1.24.7).

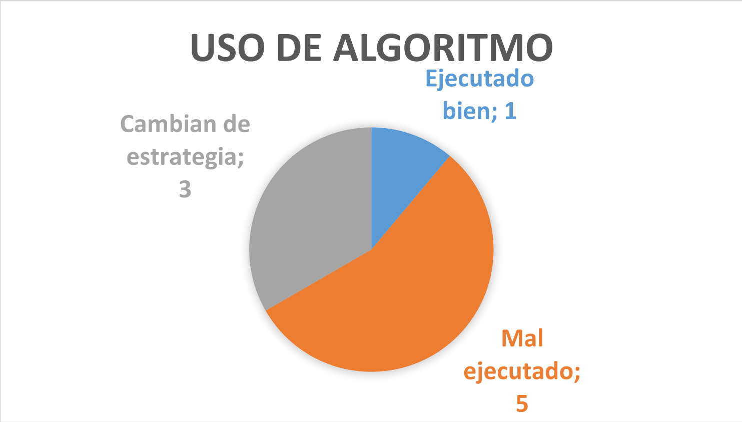


Figura A1.24.7. Estrategia Algoritmo en la sesión 23

1.24.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

De nuevo, la elección del algoritmo de la resta con llevada complica la resolución y como acabamos de ver hay 5 niños que lo ejecutan mal. En la Figura A1.24.8 muestro dos ejemplos. Uno en el que suman las 4 decenas con las 26 unidades, y otros dos que restas la decenas y las unidades dejan un 6.

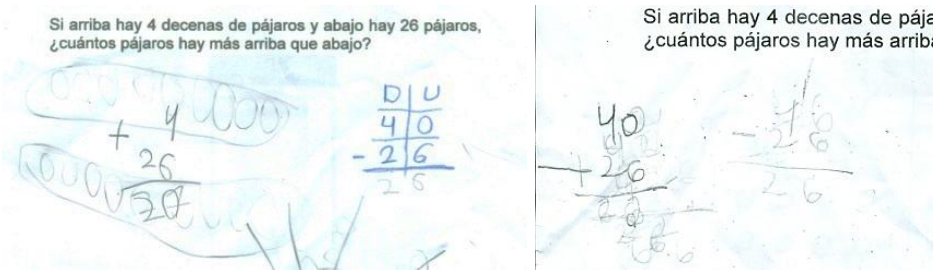


Figura A1.24.8. Algoritmo inadecuado en la sesión 23

Se han registrado 3 casos en los que se ha utilizado las 4 decenas como unidades, y dos casos de no sabían responder a la pregunta ¿cuántos son 4 decenas? Una de las niñas que ha toma 4 unidades, además utiliza la estrategia Juntar todo con marcas.

En el grupo b, la tutora ayuda a dos de estos alumnos con la siguiente representación del problema.

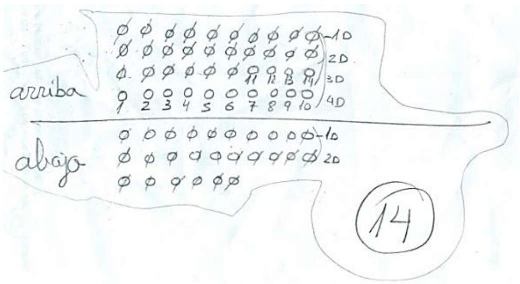


Figura A1.24.9. Ayuda de la tutora en el grupo b en la sesión 23

En la siguiente Tabla A1.121 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.121. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 23*

Dificultades	Errores observados
No conocimientos del concepto de decena	4 decenas como 4 unidades (E27)
No comprender los algoritmos	Utilizarlos inadecuadamente (E30)
	Errores en su ejecución (E29)

1.24.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones que se han utilizado en esta sesión aparecen en la Tabla A1.122.

Tabla A1.122. *Representaciones encontradas en la sesión 23*

		Resolución (elementos)	*Solución*	*Carta*
1	A1 (Oc, Gm)	21 (4, 17)		
	B1			
	C1			
2	A2	2		
	B2			
	C2			
3	A3	10	23	2
	B3	1		
	C3			10
4	A4			
	B4			
	C4			

La representación más peculiar en esta sesión es la que aparece con los datos del problema en la hoja de trabajo de esta alumna, donde parece A3 (numeral cifra) y B3 (con iconos de objetos) y además, indicando las unidades del sistema de numeración.

Figura A1.24.10. Representaciones A3, B3 en la sesión 23

Una niña que utiliza modelización directa, utiliza el algoritmo para dar la solución (ver Figura A1.24.11).

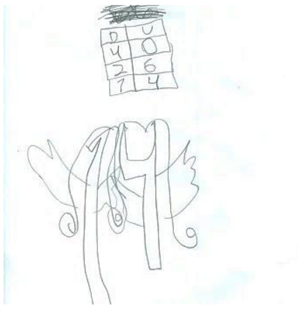


Figura A1.24.11. Algoritmo para dar la solución en la sesión 23

Por último, mostrar representaciones de las cantidades en decenas y de las cantidades en unidades. En la imagen de la izquierda el niño agrupa las 4 decenas en grupos de 10. En la imagen dela izquierda se van añadiendo las decenas a lo ya representado.

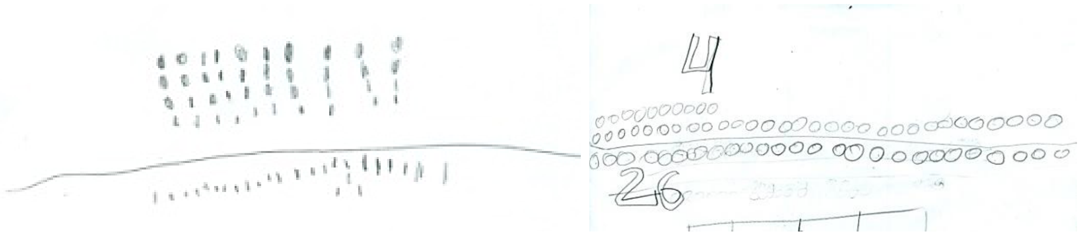


Figura A1.24.12. Representaciones de las decenas en la sesión 23

1.24.5. Camino de aprendizaje para la tarea

Para la estrategia *Contar hacia atrás hasta llevando el rastro* con una colección de marcas u objetos, se necesita la capacidad siguiente:

> C110. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia atrás hasta otro llevando el rastro con una colección representada con marcas u objetos.

Para Las estrategias inventadas, es necesario definir capacidades que completen cantidades a una década, y resten números de dos cifras separando las decenas y unidades.

> C111. Restar decenas y unidades por separado.
>
> C112. Sumar a un número de dos cifras las unidades necesarias para llegar a la siguiente década.
>
> C113. Calcular el número de decenas que hay de una década a otra.
>
> C114. Restar primero la decenas y luego las unidades.

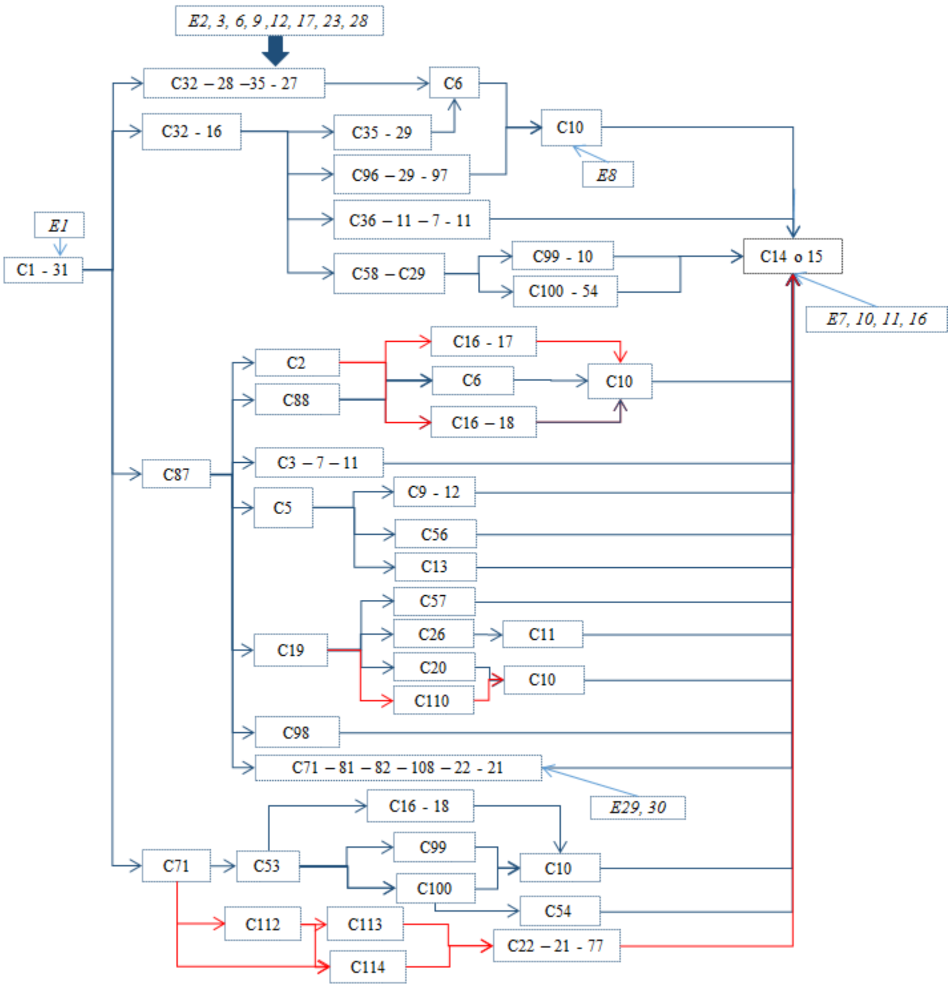


Figura A1.24.13. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 23

1.25. Sesión 24

Esta sesión es la última del taller de problema. En junio, las tutoras disponen de menos horas y debo pasar el TEMA3. En esta sesión planteamos un problema de estructura multiplicativa de división partitiva y con resto, no haciendo ninguna sugerencia de cómo interpretar el resto.

Tabla A1.123. *Características principales de la vigésima cuarta sesión*

Problema	Para dar de comer a sus peces, Bruno echaba 24 guisantes en la pecera. ¿Cuántos guisantes se comía cada pez?
Tipo de problema	Grupos repetidos, división partitiva con resto
Cantidades	Cantidad mayor: 24.
Materiales	Tabla 100, rekenrek, hoja de trabajo, Multilink, centicubos, plastilina, rotuladores, Bloque de base 10 (decena y unidades), decenas de huevos.
Fecha	26 de mayo
Cuento	Ramona la mona
Asistentes	28 (de 28 de 1ºA) y 24 (de 26 de 1ºB)
Duración	45 minutos en cada clase.
Personal	Tutoras de grupos, investigadora.
Recogida de datos	Grabación video, Hojas de registro, hojas de trabajo de los niños.

1.25.1. Desarrollo de la sesión

En esta sesión, los niños reciben un email de Clara con fotografías agradeciéndoles toda su ayuda y les plantea un nuevo problema. En el grupo A, realizamos grabación en video la tutora del grupo y yo. Al ser la última sesión del taller los niños graban un video con la solución de la carta. Así ha sido el diálogo:

Todos: ¡Hola, Clara!
E17: Hemos resuelto el problema.
E13: Son cinco.
Tutora: Todos los peces comen 5.
E13: No, los peces comen 4 y sobran 5.
Tutora: ¿Estáis de acuerdo?
Algunos: No.
E27: Los peces comen 5 pero un pez come 4 guisantes.
Tutora: ¿Es así?
Todos: Sí.
Bea: E15, ¿qué quieres?
E15: Que nos envíe más fotos y todo eso.
E23: El problema de hoy era muy difícil.
Tutora: Pero lo hemos resuelto…
Otro estudiante: Muy fácil.
Todos: Adiós Clara.

En el grupo B, la grabación en video la realizo mientras la tutora da apoyo a los estudiantes. La carta en el grupo B, la escriben con la tutora en la pizarra y la copian los alumnos en las hojas de trabajo.

En el grupo A, la mayoría de los niños esperan que tras repartir todos los guisantes, los peces tengan el mismo número de guisantes. Cuando se fijan en que no todos tienen 4 o 5, dudan en que el resultado esté bien. Considero varias soluciones correctas. La primera de ellas es que cada pez toque a 4 guisantes y sobren cuatro, lo que indica que todos tienen que comer lo mismo. Esta solución la dan 12 de los 32 estudiantes que considero han dado respuestas correctas. La segunda solución supone un reparto no equitativo, por lo que cuatro peces comen 5 y un pez como 4. Esta solución la dan 19 estudiantes de los 32 que considero dan respuestas correctas. Por último, hay una estudiante que desprecia el resto, dando 4 guisantes a cada pez. La he considerado dentro de las respuestas correctas. En el enunciado no indica nada de que debe haber un reparto equitativo, pero hay niños que al repartir los guisantes y ver que no todos tienen lo mismo, no saben bien que responder. En el grupo B, la tutora, en principio, es la que tiene la idea de que tienen que tocar al mismo número de guisantes, pero al ver que hay niños que no lo hacen equitativamente, admite que puede haber dos soluciones. Ella misma se da cuenta de la riqueza de poder debatir sobre las distintas interpretaciones de los niños. Una estudiante incluye un guisante más para que todos coman los mismo, cinco (ver Figura A1.xx).

Figura A1.25.1. Añadir un elemento más para reparto equitativo de la sesión 24

En la Figura A1.25.2 se puede observar que 37 de los 53 asistentes eligen una estrategia adecuada pero 5 de ellos no son capaces de terminar adecuadamente el problema.

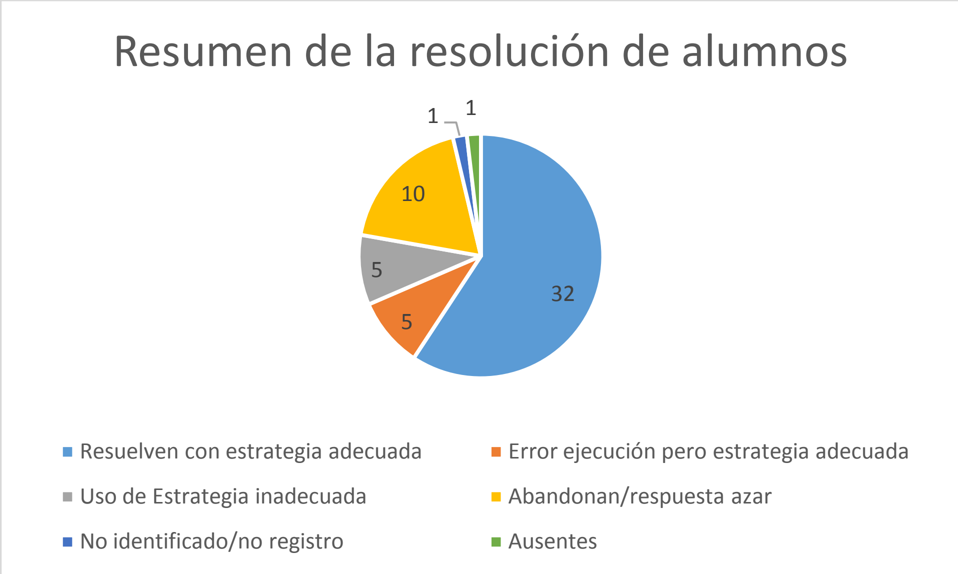


Figura A1.25.2. Resumen de la resolución de alumnos de la sesión 24

Se pensó en otro problema de estructura multiplicativa pero en junio no hubo posibilidad de hacer más talleres. Se pasó a la evaluación del TEMA3.

1.25.2. Estrategias observadas

Las estrategias que resuelven este problema están basadas en el *Reparto* (R). Se han registrado 6 niños que buscan aplicar el algoritmo escrito de las operaciones aritméticas estudiada en clase para solucionar el problema, cinco niños utilizan el algoritmo de la resta y uno de la suma. De hecho este grupo, en los últimos talleres han tendido a utilizar algoritmos aprendidos en clase para solucionar las operaciones. En el grupo A, un niño empieza a plantear la resolución a través del algoritmo escrito, pero no sabe cómo seguir (Figura A1.25.3).

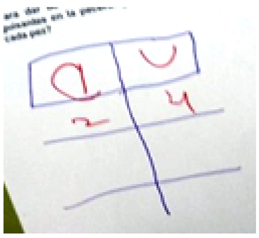


Figura A1.25.3. Intento de algoritmo escrito de la sesión 24

En la Tabla A1.90 muestra las frecuencias absolutas de las estrategias adecuadas para el problema, todas ellas basadas en el *Reparto* (R), unas estrategias en las que no se representan los grupos, y otras, en las que se representan los grupos.

Respecto a las estrategia que no se representan los grupos, para realizar el reparto puede formase inicialmente la colección total de elementos de la estructura multiplicativa y después repartir en el número de grupos indicados, *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno* (R2). En la Figura A1.25.4, un estudiante forma una colección de 24 unidades cubitos, y luego los va repartiendo en 5 lugares diferentes de uno en uno.

Figura A1.25.4. Estrategia R2 la sesión 24

La estrategia *Reparto con objetos, repartiendo de uno en uno, hasta completar la cantidad total* (R6) ha sido utilizado por un estudiante que aprovecha que el ábaco tiene cinco varillas como el número de grupos del problema y va repartiendo y ajustando cuentas hasta que ha repartido 24. Al repartirlas todas, el niños se da cuenta que uno de los peces como un guisante menos.

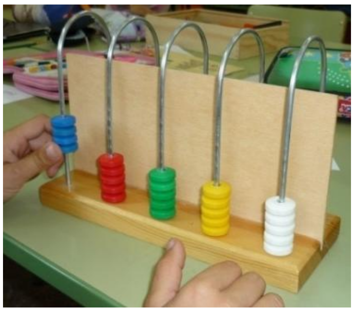


Figura A1.25.5. Representación de la estrategia R6 en la sesión 24

En esta sesión, al ser un problema de reparto, es difícil representar esta acción simplemente representando con marcas o dibujos. He denotado como *Reparto por ensayo y error*, a los procedimientos de los niños que agrupan el total de elementos en grupos con un cierto número de elementos, para ver si queda todo repartido. En el caso de realizarlo con cubos encajables, una estudiante hace una barra de 24 centicubos, y luego prueba a dividirlo en cinco grupos, empezando con cuatro en cada uno. Como ve que los cuatro que quedan no dan para dar otro guisante a los peces, dicen que le sobran cuatro y cada pez toca a cuatro guisantes. Esta estrategia es *Reparto por ensayo y error con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos* (R24). Al realizarla con marcas, denomino a la estrategia *Reparto por ensayo y error con marcas, formando primero el total de elementos* (R25); en el caso de dibujos, *Reparto por ensayo y error con dibujos, formando primero el total de* elementos (R26), se puede observar en la siguiente Figura A1.25.6 como el estudiante ha dibujado primero los 24 guisantes, y después, prueba con unas marcas borradas poniendo cuatro en cada grupo. Luego decide poner cinco en cada grupo. Su respuesta ha sido cuatro peces comen 5 guisantes y un pez come cuatro.

Figura A1.25.6. Representación de la estrategia R26 en la sesión 24

Una niña ha utilizado la configuración de las manos. Considera que dos veces las manos son 20, y utilizando que en cada mano hay 4 dedos más otro dedo más, va contando que en cada mano hay un grupo de cuatro más, el dedo que quedan sin considerar de las cuatro veces que se considera una mano, tiene para dar 4 guisantes a cada vez. Los otros cuatro no los considera. Ella (A50) lo explica así: “He usado las manos. Primero he puesto los cuatro que das a un pez, luego he puesto otros cuatro, luego otros cuatro y luego otros cuatro. Y los que me han sobrado en las anteriores manos… me han salido cuatro y en total han comido cuatro cada pez”.

En la Tabla A1.90 he denotado esta estrategia como *Reparto por ensayo y error con los dedos de las manos, formando primero el total de elementos* (R27), porque entiendo que prueba con la configuración de las manos a repartir los dedos en 5 grupos iguales.

Las estrategias de *Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, repartiendo de uno en uno formando barras con el mismo número de cubos* (R28) o con otros objetos, *Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno y representando la cantidad número de grupos* (R13) han sido las más frecuentes. Lo más habitual es que formen dos colecciones de objetos, una con el número de grupos y otra con el total de elementos, y después repartan el total de elementos en los grupos que marcan la colección de grupos. En la Figura A1.25.7 se pueden observar dos representaciones de estas estrategias. La imagen de la izquierda los grupos y el total de elementos está representado con cubos encajables (R28) y en la imagen de la derecha los grupos están dibujados en el papel y numerados, y el total de elementos está representado con pinchitos (R13).

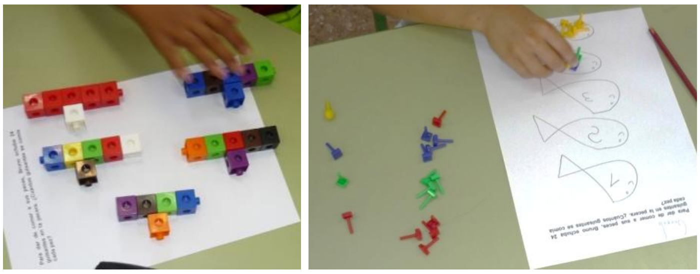


Figura A1.25.7. Representaciones de las estrategias R28 y R13 en la sesión 24

El Reparto con representante de grupos con dibujos se ha utilizado sin formar inicialmente la cantidad total de elementos e ir dibujando un guisante en cada pez según se va contando hasta 24, es decir, *Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos* (R29). En la Figura A1.25.8 se puede ver la representación de una estudiante, que primero dibuja 5 peces y después va dibujando en el interior de cada uno de ellos los guisantes hasta que completa 24. En la imagen está comprobando el número de guisantes que hay en cada pez y el total de guisantes que hay.

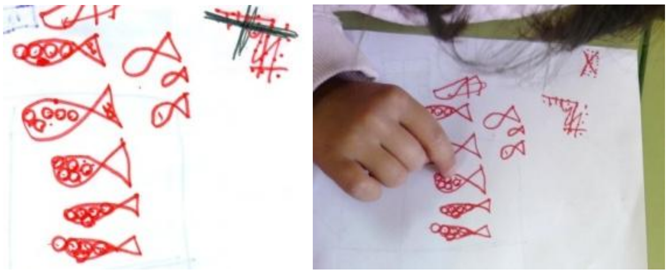


Figura A1.25.8. Estrategia R29 en la sesión 24

Otra forma de *Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos* (R16). La niña ha dibujado los 5 peces y los 24 guisantes y ya uniendo cada vez un pez con un guisante. Al final de la resolución, ella misma indica que es difícil contar todas las líneas que ha hecho. De hecho da como solución 4 cada pez, y se olvida del resto, quizás porque no tenga muy claro cuántos le quedan por unir.

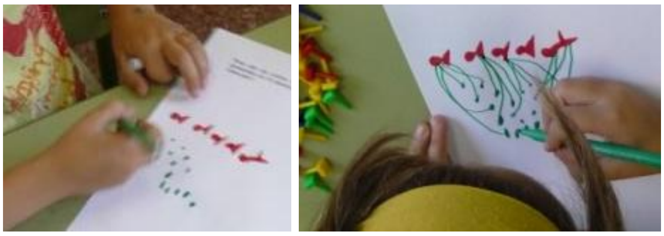


Figura A1.25.9. Estrategia R16 en la sesión 24

La relación de los peces con los guisantes mediante líneas ha sido elegida por 4 niños pero les ha costado llegar a la solución. En la Figura A1.25.10 vemos otra representación de una estudiantes que une con líneas inicialmente los guisantes y los peces, y después va borrando las líneas y poniendo los guisantes al lado de los peces, para que se entienda mejor.

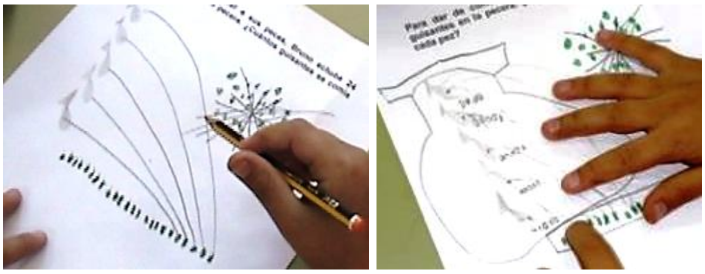


Figura A1.25.10. Solución de la estrategia R16 en la sesión 24

En la Tabla A1.124 se recogen todas las frecuencias absolutas de las estrategias registradas en la sesión 24.

Tabla A1.124. *Estrategias adecuadas en la sesión 24*

Estrategia	*Material*	*Variante*	*F.A.*
Reparto sin representante del grupo	Con otros objetos (R2)		1
		Contando primero el total de elementos (R2)	1
		Sin contar el total de elementos al principio (R6)	1
Reparto sin representante de grupo – Ensayo y error	Con cubos encajables	Contando primero el total de elementos (R24)	1
	Con marcas	Contando primero el total de elementos (R25)	1
	Con dibujos	Contando primero el total de elementos (R26)	3
	Con los dedos de las manos	Contando primero el total de elementos (R27)	1
Reparto con representante de grupo	Con cubos encajables (R28)		1
		Contando primero el total de elementos (R28)	12
	Con otros objetos (R13)		1
		Contando primero el total de elementos (R13)	8
	Con dibujos	Sin contar el total de elementos al principio (R29)	2
		Contando primero el total de elementos y relacionando con líneas (R16)	4

1.25.3. Errores, dificultades y estrategias utilizadas de forma inadecuada

Se han registrado 8 niños que han interpretado que a 24 guisantes hay que quitarle 5. Dos niños han realizado la estrategia *Quitar con marcas* incluso otros 5 niños han utilizado el algoritmo de la resta.

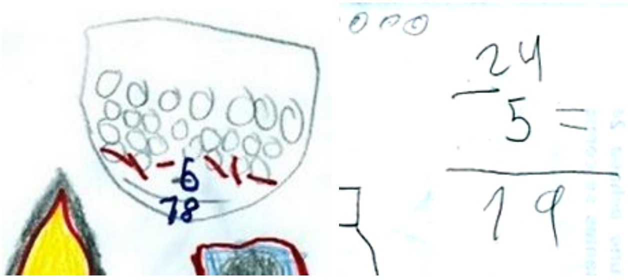


Figura A1.25.11. Estrategias inadecuadas Q3 y Algoritmo de la resta en la sesión 24

El reparto en papel o no utilizar el número de grupos adecuados han sido dificultades que se han observado en el aula en dos casos. En la Figura A1.25.12, un niño dibuja los peces y los guisantes pero abandona el trazado de las líneas. En la imagen de la derecha una niña indica que la primera fila son los peces (4 centicubos) y va colocando los guisantes.

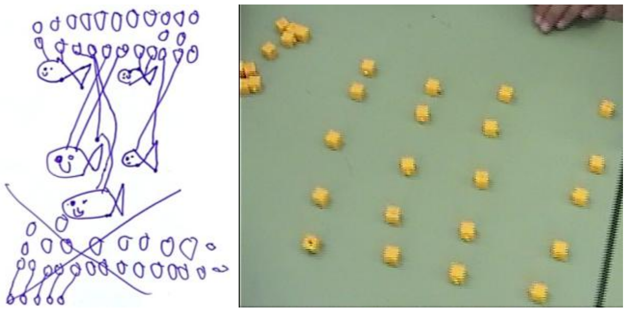


Figura A1.25.12. Dificultades en la sesión 24

En la siguiente Tabla A1.125 señalo las dificultades que presenta los niños por los errores observados.

Tabla A1.125. *Frecuencia absoluta de las estrategias adecuadas en la sesión 24*

Dificultades	Errores observados
No comprender la situación	Estrategia inadecuada (E1)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Confundir número de grupos y elementos por grupo (E9)

1.25.4. Tipos de representación y modelo utilizadas y contextos

Las representaciones de las cantidades en esta sesión están resumidas en la Tabla A1.126. Las representaciones más utilizadas para la representación con las icónicas de número sin representante de objeto, aunque muchos niños sí han dibujado los peces y los guisantes de manera icónica (B1I). Para dar la solución lo más frecuente es dar el numeral (A3), además los niños han llegado a dibujar los peces, la pecera y los guisantes para dar la solución (B1I). La carta del grupo A ha sido grabado en video y la carta del grupo B se escribió en la pizarra entre todos, por lo que la representación C3 que aparece en 16 cartas, son 16 hojas de trabajo que se han recogido de los niños que copiaron la carta de la pizarra.

Tabla A1.126. *Representaciones encontradas en la sesión 24*

		Resolución (grupos)	Resolución (elementos)	Solución	Carta
1	A1 (Oc, Oo, Gm, D)	18 (13, 5, 0, 0)	30 (14, 12, 3, 1)	0	
	B1 (I)	14	10	6	
	C1				
2	A2	3	1	3	
	B2				
	C2				
3	A3			13	16
	B3				
	C3				
4	A4			1	
	B4				
	C4				

Las representaciones que aparecen en la resolución con A2 para los elementos, corresponden a representaciones simbólicas de número y objeto, como se puede ver en la Figura A1.xx. Los guisantes van numerados, con la utilidad de llevar un control del número de guisantes repartido. Esta es una representación de la estrategia de Reparto con representante de grupo con dibujos y sin contar inicialmente los guisantes, ya que se van repartiendo guisantes hasta completar un total de 24. Debajo de cada pez hay un numeral (A3) que indica el número de guisantes que corresponde a cada pez, la solución del problema.

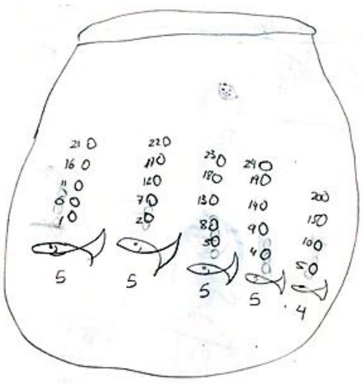


Figura A1.25.13. Representación B1I con A2 para resolver y A3 para solución en la sesión 24

En esta sesión se ha utilizado las regletas de Cuisenaire. Los niños no han utilizado su valor respetando las propiedades del material. Cada regleta ha sido una unidad, fuese cual fuese su valor. Así, en la Figura A1.25.14 cada regleta un guisante, un objeto (A1Oo).

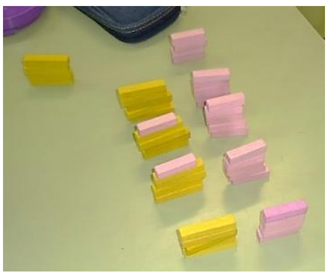


Figura A1.25.14. Representación A1Oo con regletas en la sesión 24

1.25.5. Camino de aprendizaje para la tarea

En esta sesión, las estrategias R24, R25, R26 y R27 utilizan la capacidad:

> C115. Reparto en un número de grupos dados de una cantidad por ensayo y error, hasta ajustar.

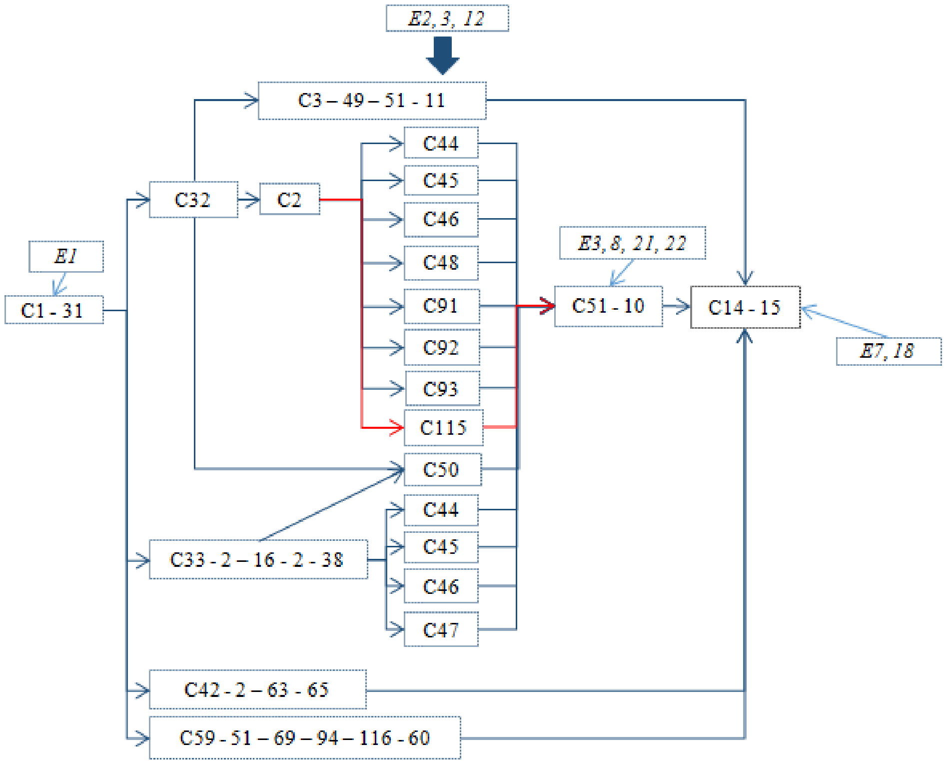


Figura A1.25.15. Caminos de aprendizaje para el problema de la sesión 24

Anexo 2. CFP y CCSSM de Número y operaciones

Tabla 2.1. *Curriculum Focal Points correspondientes a los contenido de número y operaciones (NCTM, 2006)*

Kindergarten	Grado 1	Grado 2
***Número y operaciones: Representar, comparar y ordenar números enteros y juntar y separar conjuntos*.** Los niños usan los números, incluso numerales escritos, para representar cantidades y para resolver problemas cuantitativos como dar la cantidad de un conjunto, formar un conjunto con un cardinal dado, comparar y ordenar conjuntos o numerales usando el significado ordinal y cardinal, y modelizan situaciones de juntar o separar con objetos. Eligen, combinan y aplican estrategias efectivas para responder cuestiones cuantitativas, incluyendo reconocer rápidamente la cantidad de un conjunto pequeño, contar y producir conjuntos de una talla dada, contar conjuntos combinados y contar hacia atrás.	***Número y operaciones y álgebra*: *Desarrollar la comprensión de la suma y la resta y, estrategias de hechos básicos de suma y hechos de resta relacionados.*** Los niños desarrollan estrategias para sumar y restar números enteros sobre la base de su trabajo anterior con pequeñas cantidades. Usan una variedad de modelos, incluidos los objetos discretos, modelos basados en la longitud (por ejemplo, la longitud de la conexión de cubos), y la recta numérica, el modelo de "parte-todo", "añadir hasta", "quitar de" y situaciones de comparación para desarrollar una comprensión de los significados de la suma y resta y estrategias para resolver esos problemas aritméticos. Los niños entienden las conexiones entre el conteo y las operaciones de suma y resta (sumar 2 es como contar desde 2) Usan las propiedades de la suma (conmutativa y asociativa) para sumar números enteros, y crear y utilizar estrategias cada vez más sofisticadas sobre la base de estas propiedades (por ejemplo, "hacer el 10") a resolver problemas de suma y resta con hechos numéricos básicos. Al comparar una variedad de estrategias de resolución, los niños relacionan la suma y la resta como operaciones inversas.	***Número y operaciones y álgebra: Desarrollar recuperación rápida de hechos de suma y los relacionados de resta y fluidez con sumas y resta de varios dígitos.*** Los niños utilizan la comprensión de la suma y resta para recuperar rápidamente los hechos de suma y de resta relacionados. Resuelven problemas aritméticos aplicando su comprensión de modelos de suma y resta (como combinar o quitar objetos o la recta numérica), relaciones y propiedades de los números (como el valor posicional), y propiedades de la suma (como la conmutativa o asociativa). Los niños desarrollan discuten, y usan métodos eficientes, exactos y generalizables para sumar y restar con varios dígitos. Seleccionan y aplican métodos de estimación y cálculo mental para suma y resta, dependiendo de los números. Desarrollan agilidad con procedimientos eficientes, incluidos los algoritmos estándar de suma y resta, comprendiendo cómo funcionan (por el valor posicional de los números y las operaciones de las operaciones) y los usan para resolver problemas.
	Números y operaciones: Desarrollar la comprensión de las relaciones de números enteros, incluida la agrupación en decenas y unidades Los niños comparan y ordenan números enteros (por lo menos hasta 100) para desarrollar su comprensión y resuelven problemas relacionados con los tamaños relativos de estos números. Piensan de los números enteros entre 10 y	***Número y operaciones: Desarrollar comprensión del sistema de numeración de base diez y valor posicional (hasta 1000)*** Esta comprensión incluye ideas contar en unidades y múltiplos de centenas, decenas y unidades, así como comprender las relaciones numéricas, demostrándolo en comparaciones y ordenaciones. Comprenden los números de varias cifras en términos del valor posicional,

	100 en términos de grupos de decenas y unidades (sobre todo el reconocimiento de los números 11 a 19, un grupo de diez y unidades). Comprenden el orden secuencial de los números contables y sus magnitudes relativas y representar los números en una recta numérica.	evaluando la notación posicional como un atajo para escribir sumas de múltiplos de potencias de 10.

Tabla Anexo2.2. *Common Core State Standards relacionados con el número y operaciones de KINDERGARTEN (NGA y CCSSO, 2010, pp. 11-12)*

Conteo y números cardinales	***Conocer el nombre de los números y la secuencia de conteo:*** 1. Cuentan hasta el 100 de uno en uno y de 10 en 10. 2. Cuentan a partir de un número dado. 3. Escriben números de 0 a 20. Representar con un numeral escrito un número de objetos de 0 a 20 (0 ausencia de objetos). *Contar para expresar la cantidad de objetos* 4. Comprenden las relaciones entre los números y cantidades, conectando el conteo con la cardinalidad 5. Cuentan para responder ¿cuántos hay? hasta 20 objetos, ordenados en línea, de forma rectangular o circular, o sobre 10 objetos esparcidos. *Comparar números.* 6. Identifican si el número de objetos de un grupo es mayor, menor o igual que el número de objetos de otro grupo, utilizando el conteo o emparejamiento. 7. Comparan dos números entre el 1 y el 10 representados por numerales escritos.
Operaciones y pensamiento algebraico	***Comprender la adición como juntar o añadir a, y la sustracción como separar o quitar de.*** 1. Representan la adición y sustracción con objetos, dedos, imágenes mentales, dibujos, sonidos, dramatizaciones, explicaciones verbales, expresiones o ecuaciones. 2. Resuelven problemas verbales de adición y sustracción, y suman y restan hasta 10 usando objetos y dibujos para representar el problema. 3. Descomponen números menores o iguales que 10 en pares de más de una forma usando objetos o dibujos, registrándolo con dibujos o ecuaciones. 4. Encuentran un número para hacer 10, dado un número del 1 al 9, usando objetos o dibujos y registrándolo con objetos o ecuaciones. 5. Fluidez en suma y resta hasta 5.
Número y operaciones en base diez	***Trabajar los números del 11 al 19 para adquirir fundamentos del valor posicional*** 1. Componer y descomponer números de 11 a 19 en diez unidades y algunas más usando objetos o dibujos, y representar cada composición o descomposición por medio de dibujos o ecuaciones como 18 = 10 + 8. Comprenden que esos números están compuestos por diez unidades y tantas unidades más.

Tabla Anexo2.3. *Common Core State Standards relacionados con el número y operaciones de GRADO 1 (NGA y CCSSO, 2010, pp. 15-16)*

Operaciones y pensamiento algebraico	***Representan y resuelven problemas relacionados con la suma y la resta*** 1. Utilizan la suma y la resta hasta 20 para resolver problemas verbales relacionados con situaciones de añadir a, quitar de, poner juntos, separar y comparar, con valores desconocidos en todas las posiciones, con objetos, dibujos o ecuaciones con un símbolo para la incógnita. 2. Resuelven problemas verbales de suma y resta con tres números enteros hasta 20, representando el problema con objetos, dibujos o ecuaciones con un símbolo para la incógnita. ***Comprenden y aplican las propiedades de operaciones, así como la relación entre la suma y la resta*** 3. Aplican propiedades de las operaciones como estrategias para sumar y restas (conmutativa o asociativa) 4. Comprenden la resta como un problema de un sumando desconocido. ***Suman y restan hasta 20*** 5. Relacionan el conteo con la suma y la resta (contar de dos en dos para sumar 2) 6. Suman y restan hasta el número 20 con fluidez hasta 20 en suma y hasta 10 en resta. Utilizan estrategias como conteo progresivo, formar el diez, descomponer un número para obtener el diez, utilizar la relación entre la suma y la resta, y crear sumas equivalentes más sencillas. ***Trabajan con ecuaciones de suma y resta*** 7. Entienden el significado del signo igual, y determinan si las ecuaciones de suma o resta son verdaderas o falsas. 8. Determinan el número entero desconocido en una ecuación de suma y resta que relaciona tres números enteros.

<table>
<tr>
<td rowspan="1">Número y operaciones en base diez</td>
<td>
Extienden la secuencia del conteo
1. Cuentan hasta 120, comenzando con cualquier número menor que 120. Dentro de ese rango, leen y escriben numerales que representan una cantidad de objetos con un numeral escrito.
Comprenden el valor posicional
2. Entienden que los dos dígitos de un números de dos dígitos representan cantidades de decenas y unidades
a. 10 puede considerarse como un conjunto de 10 unidades llamado decena
b. Los números entre 11 y 19 se componen de una decena y tantas unidades.
c. Los números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 y 90 se refieren a una, dos tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve decenas
3. Comparan dos números de dos dígitos basándose en el significado de los dígitos en las unidades y decenas, usando en las comparaciones los símbolos >, < y =
Utilizan la comprensión del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar
4. Suman hasta el 100, incluyendo un número de dos dígitos y uno de un dígitos, o un número de dos dígitos y una potencia de 10, utilizando modelos concretos o dibujos o basados en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y las relación entre suma y resta; relacionan la estrategia con un método escrito y explican el razonamiento aplicado. Entienden que al sumar números de dos dígitos, se suman las decenas con decenas, unidades con unidades; y a veces es necesario el componer una decena.
5. Dado un número de dos dígitos, hallan mentalmente 10 más o 10 menos que un número, sin la necesidad de contar de uno en uno; explican el razonamiento.
6. Restan múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90 a partir de múltiplos de 10 en el rango de 10 a 90, utilizando ejemplos concretos o dibujos, y estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta; relacionan la estrategia con un método escrito y explican el razonamiento utilizado.
</td>
</tr>
</table>

Tabla Anexo2.4. *Common Core State Standards relacionados con el número y operaciones de GRADO 2 (NGA y CCSSO, 2010, pp. 19-20)*

Operaciones y pensamiento algebraico	***Representan y resuelven problemas relacionados con la suma y la resta*** 1. Utilizan la suma y la resta hasta 100 para resolver problemas verbales de una o dos etapas relacionados con situaciones en las cuales tienen que sumar, restar, unir, separar y comparar, con valores desconocidos en todas las posiciones, por ejemplo, al representar el problema a través del uso de dibujos y ecuaciones con un símbolo para la incógnita. ***Suman y restan hasta 20*** 2. Suman y restan hasta el número 20 con fluidez hasta 20 con estrategias mentales. Al final del segundo grado, saben de memoria todas las sumas de dos números de un solo dígito. ***Trabajan con grupos equivalentes de objetos para establecer fundamentos para la multiplicación*** 3. Determinan si un grupo de objetos (hasta el 20) tiene un número par o impar de miembros, emparejándolos o al contar de dos en dos; escriben ecuaciones para expresar un número par como el resultado de dos sumando de dos sumandos iguales. 4. Utilizan la suma para encontrar el número total de objetos colocados en forma rectangular con hasta 5 hileras y hasta 5 columnas; escriben una ecuación para expresar el total como la suma de sumandos iguales.
Número y operaciones en base diez	***Comprenden el valor posicional*** 1. Entienden que los tres dígitos de un números de tres dígitos representan cantidades de centenas, decenas y unidades a. 100 puede considerarse como un conjunto de 10 decenas llamado centena b. Los números 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 y 900 se refieren a una, dos tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve centenas 2. Cuentan hasta 1000; cuentan de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10, y de 100 en 100 3. Leen y escriben números y hasta 1000 usando numerales en base diez, los nombres de los números, y en forma desarrollada 4. Comparan dos números de tres dígitos basándose en el significado de los dígitos en las unidades, decenas y centenas, usando en las comparaciones los símbolos >, < y = ***Utilizan la comprensión del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar*** 5. Suman y restan hasta el 100 con fluidez usando estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la relación entre suma y resta. 6. Suman hasta cuatro números de dos dígitos usando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones. 7. Suman y restan hasta 1000, usando modelos concretos o dibujos y estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la relación entre suma y resta; relacionan la estrategia con un método escrito. Comprenden que al sumar o restar números de tres dígitos, se suman o restan centenas con centenas, decenas con decenas, y unidades con unidades; y a veces es necesario componer y descomponer las decenas o centenas. 8. Suman mentalmente 10 o 100 a un número dado del 100 al 900, y restan mentalmente 10 o 100 de un número dado entre 100 y 900. 9. Explican porque las estrategias de suma y resta funcionan, al usar el valor posicional y las propiedades de las operaciones.

Anexo 3. Horario de clase de 1ºA

HORARIO TUTOR/A: BEATRIZ / MARINA

SEP /JUN	OCT -MAYO		L	M	X	J	V
9 – 9:40	9 – 9:45	1º	1ºA LENGUA	1ºA LENGUA	1ºA MATE	1ºA MATE	1ºA MATE
9:40 – 10:20	9:45 – 10:30	2º	1ºA MATE	1ºA MATE	~~APOYO INF 5~~	1ºA LENGUA	APOYO INF 5B
10:20 - 11	10:30- 11:15	3º	1ºA LENGUA	2ºA EST.	2ºB+C EST.	2ºA EST.	6ºA EST.
11 – 11:30	11:15- 11:45						
11:30– 12:15	11:45- 12:30	4º	APOYO INF 5B	1ºA PLÁSTICA	COOR. NIVEL	1ºA LENGUA	APOYO INF 5A
12:15 - 13	14:30 –15:15	5º	~~6ºA EST.~~	~~APOYO INF 5C~~	~~1ºA LENGUA~~	~~APOYO INF 5A~~	~~1ºA LENGUA~~
	15:15 - 16	6º		1ºA EST.	1ºA PLÁSTICA	APOYO INF 5C	1ºA EST.

HORARIO CURSO: 1ºA

	L	M	X	J	V
1º	LENGUA	LENGUA	MATE	MATE	MATE
2º	MATE	MATE	ING /SCI	LENGUA	ING /SCI
3º	LENGUA	ING/SCI	ING /SCI	MÚSICA	EF
4º	EF	PLÁSTICA	EF	LENGUA	ING /SCI
5º	ING/SCI	ING /SCI	LENGUA	ING/SCI	LENGUA
6º	ING /SCI	REL /EST	PLÁSTICA	ING/SCI	REL / EST

En septiembre se elimina la 6º hora y en junio la 5º.

Anexo 4. Cuentos utilizados y problemas planteados

Problema	*Cuento*
Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6? Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?	Thomassen, O. (2002). Once damas atrevidas. Pontevedra: Kalandraka
Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total? El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?	Roselló, D. y Núñez, M. (2005). El gato tragón. Pontevedra: Kalandraka
Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno? En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?	Azcona, M. y Osuna, R. (2005).Un regalo diferente. Kalandraka Ediciones Andalucía.
Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total? Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y Cuántos patitos quedan sin guardar? Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?	Carle, E. (2006). Diez patitos de goma. Kókinos.
Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar? Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?	Letén, M. (2009). Finn Herman. Libros del zorro rojo.
Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran? Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?	Bruno, P. (2004). Cuento para contar mientras se come un huevo frito. Kalandraka.
Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero? Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo? Cuando había 45 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?	Fromental, J.L. (2007). 365 pingüinos. Kokinos.

La reina de los pasteles le regala 2 decenas de pasteles a la princesa. Por el camino, a la princesa le entra hambre y se come 8 pasteles. ¿Cuántos pasteles quedan para su mamá? Al volver a casa, la princesa le llevó a su mamá 12 pasteles, una decena de flores, un balón y un gato. ¿Cuántas cosas le lleva en total de regalo?	Aertssen, K. (2007). La reina de los besos. Corimbo.
Si el papá de Mónica subió 4 decenas de escalones, luego hizo un descanso, y después subió 38 escalones más, ¿Cuántos escalones había subido en total? Si la escalera tenía 9 decenas de escalones en total y el papá de Mónica ya había subido 78, ¿Cuántos escalones le faltaban por subir para llegar a la luna?	Carle, E. (2004). Papá, por favor, consígueme la luna. Kokinos.
Si consigues 32 euros por saltar entre ortigas, y 29 euros por tragarte una rana muerta, ¿Cuántos euros has conseguido al final? Si entras en un supermercado encima de un toro y rompes 5 cajas de galletas con 12 galletas cada una, ¿Cuántas galletas aplastas en total?	Burningham, J. (1994) ¿Qué prefieres? Kokinos.
Si en total hay 35 personas y 18 de ellas están arriba, ¿cuántas están abajo? Si arriba hay 4 decenas de pájaros y abajo hay 26 pájaros, ¿cuántos pájaros hay más arriba que abajo?	Valdivia, P. (2009). Los de arriba y los de abajo. Kalandraka.
Para dar de comer a sus peces, Bruno echaba 24 guisantes en la pecera. ¿Cuántos guisantes se comía cada pez?	Carrasco, A. (2006). Ramona la mona. Fondo de cultura económica de España.

Anexo 5. Contenido del bloque número y operaciones del libro de texto de aula

Primero describo los capítulos de los libros. Todos los temas tienen una estructura similar. Voy a utilizar el tema 1 para mostrar un ejemplo de las distintas secciones. La primera página es la portada del tema en que se muestra el centro de interés con ilustraciones y algunas afirmaciones y preguntas que indican lo que se va a centrar el tema. La siguiente sección es una página de activación de los conocimientos previos llamada *Tú ya lo sabes*, donde se presentan actividades que se resuelven con conceptos o habilidades ya aprendidas. En el tema 1 se presenta dos actividades donde hay que relacionar colecciones de 1 a 3 objetos con su numeral.

La sección principal más extensa, de unas 10 páginas, donde se plantean actividades de los contenidos específicos del tema. Las actividades se presentan de forma gráfica y con enunciados verbales, que guían su realización. En el tema 1 el contenido principal es el aprendizaje comprensivo de los seis primeros números. Las actividades consisten en escribir el numeral, con letras, correspondiente a colecciones de uno a seis objetos, incluso se utilizan configuraciones como las manos o fichas de dominó, para trabajar la subitización con estos primeros números.

En todos los temas hay una actividad en la que se utiliza el ordenador para realizar algún tipo de experiencia, ya sea con algún programa en internet, o incluso con el Paint de Windows. Se incluye dos páginas dedicadas al *razonamiento lógico y problemas* donde aplican los contenidos tratados en el contexto de resolución de problemas pidiendo continuamente justificación y razonamiento sobre las respuestas y estrategias utilizadas. También hay dos páginas de *repaso de los contenidos*, una sección llamada *El Taller* para aplicar los contenidos trabajados en distintos contextos como juegos, situaciones o herramientas cotidianas. Por último, aparece la sección *Ahora sabes más* para comprobar que han adquirido las competencias básicas. Además, cada 4 temas hay actividades de evaluación trimestral que revisa todos los contenidos trabajados.

A continuación, voy a describir los contenidos relacionados con el número y la aritmética en cada tema del libro de texto.

1.1. Tema 1

Siguiendo la programación del curso, el tema 1 se desarrolló durante el mes de Septiembre y primera quincena de Octubre. En este momento las sesiones de problemas no habían comenzado todavía.

Los contenidos en la sección principal fueron:

- Aprendizaje comprensivo de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
- Lectura y escritura con cifras y letras de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
- Cuantificación de hasta 6 objetos.
- Conteo progresivo de 1 en 1.
- Concepto de muchos y pocos.

- Continuación de series numéricas.
- Utilizar el ordenador para ejecutar juegos sencillos de contexto matemático (números).

Los contenidos en la sección de razonamiento lógico y problemas fueron:
- Conteo de objetos y comparación de cantidades.
- Ordenación de secuencias. Progresión numérica

La sección *El Taller* incluyó:
- Resolver una situación problemática a partir de una imagen: contar objetos y comparar cantidades.
- Agrupación objetos según un criterio propio.
- Series numéricas

1.2. Tema 2

El Tema 2 se desarrolló durante la segunda quincena de octubre y primera semana de Noviembre. Las sesiones del taller de problemas comenzaron a la vez que este Tema. Los contenidos de la sección principal fueron:

- Aprendizaje comprensivo de los números 7, 8, 9 y 0.
- Lectura y escritura con cifras y letras los números 7, 8, 9 y 0.
- Cuantificación de hasta 9 objetos.
- Comparación números.
- Representación de los números del 1 al 9 en la recta numérica.
- Comprensión de la adición como efecto de juntar o añadir.
- Ordenación números de mayor a menor.
- Cálculo mental con actividades verbales que se pregunta por ejemplo, 3 y 5 son…, 6 y 2 son…, con números menores de 10 y que su suma es como máximo 9.

Los contenidos en la sección de razonamiento lógico y problemas fueron:

- Representación de cantidades en una tabla. Interpretación de los datos representados.
- Conteo y agrupación de objetos.
- Adición juntando objetos bajo ciertos criterios.

Figura A5.1. Ejemplos de actividades del tema 2 del libro de texto

1.3. Tema 3

El tema 3 se desarrolló a lo largo de lo que resta de Noviembre. Los contenidos tratados fueron:

- Aprendizaje comprensivo del número 10. El tema comienza explicando el número 10 como un grupo de 10. En la imagen 8 se muestra esta página.
- Elaboración de la decena, haciendo grupos de 10 objetos.
- Escritura de los números del 1 al 10.
- Representación de los números del 0 al 10 en la recta numérica.
- El algoritmo horizontal de la adición. En el libro de texto se relaciona la acción de juntar cosas con sumar.
- Reconocer los signos +, = y ≠. Se indica que para sumar se utiliza el signo +, “más”, y el signo = como “igual”.
- Descomposiciones aditivas de dos números que suman 10.
- Comparación cantidades.
- Aproximación resultados.
- Cálculo mental. Se trabaja de forma verbal enunciando “3+2” y escrita utilizando el algoritmo horizontal de la suma, con números hasta 10 cuya suma es como máximo 10.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Identificación de datos de un problema a partir de una imagen.
- Representación de cantidades determinadas.
- Resolución problemas utilizando problemas de combinación con números del 1 al 10.

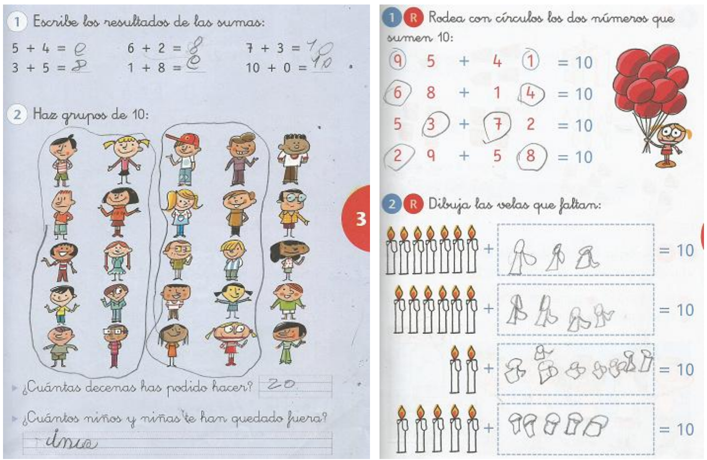


Figura A5.2. Sumas de números de una cifra y descomposiciones aditivas del 10.

1.4. Tema 4

- El tema 4 se desarrolló en el mes de Diciembre. Los contenidos tratados fueron:
- Comparación y ordenación de números.
- Utilización de los signos > y <.
- Lectura y escritura de los números ordinales del 1º al 5º.
- Introducción al algoritmo vertical de la suma solo con unidades.
- Conteo y selección de objetos según un criterio.
- Escritura de los números con el ordenador.
- Cálculo mental. Continúa con hechos numéricos de pares de números con los números del 0 al 10 y que como máximo sumen 10.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Identificación y representación de los datos de un problema.
- Resolución problemas utilizando problemas de combinación con números del 1 al 10.
- Extracción de datos a partir de una tabla y compararlos.

1.5. Tema 5

El tema 5 se desarrolló a lo largo del mes de Enero. Los contenidos de este tema fueron:

- Aprendizaje comprensivo de los números del 10 al 19. Se introducen como una decena y las unidades correspondientes.
- Lectura y escritura con cifras y letras los números del 10 al 19.
- Representación de los números en la recta numérica.
- Conteo progresivo de 2 en 2.
- Algoritmo vertical de la suma con unidades y decenas sin llevar.
- Números pares e impares.
- Cálculo mental. Combinaciones aditivos de pares de números entre 0 a 19 que no suman más de 19.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Resolución de problemas con números naturales del 1 al 19, con problemas de cambio creciente con la cantidad final desconocida.

1.6. Tema 6

- El tema 6 se desarrolló ocupando casi todo el mes de Febrero. Los contenidos fueron:
- Aprendizaje comprensivo de los números del 20 al 49. Se presentan por el número de decenas y el número de unidades.
- Lectura y escritura de los números del 20 al 49.
- Comparación de números. Los signos > y <.
- La suma llevando.
- Cálculo mental. Parejas de números que suman 20.
- Juegos de números con el ordenador.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas.
- Identificación y representación de los datos de un problema.
- Resolución de problemas con números naturales del 1 al 49, con problemas de cambio creciente con la cantidad final desconocida.
- En la sección El taller:
- Iniciación a la calculadora.

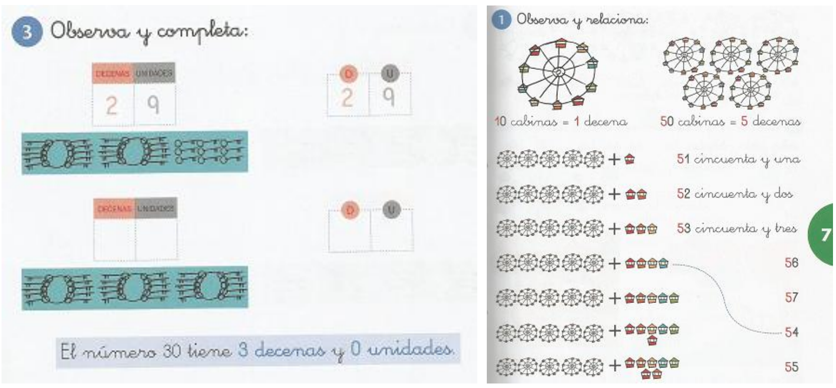


Figura A5.3. Unidades y decenas en los números de dos cifras (tema 6).

1.7. Tema 7

El tema 7 se desarrolló en la última semana de Febrero y primera quincena de Marzo. Los contenidos de este tema fueron:

- Aprendizaje comprensivo de los números del 50 al 69.
- Lectura y escritura de los números hasta el 69.
- Decenas y unidades. Se realiza algunas actividades en las que se muestra un número de grupos de 10, su equivalente en unidades y lo nombra como ese número de decenas. Por ejemplo, se muestran 6 norias con 10 cabinas como 60 cabinas = 6 decenas = 60 (sesenta).
- La propiedad conmutativa de la suma.
- Se sigue trabajando con el algoritmo de la suma con llevada.
- Continuación de series numéricas.
- Cálculo mental. Combinaciones de números hasta 69 en la que uno de los sumando es mayor que 10 y el otro menor que 10. También aparece alguna combinación en la que a un número de dos cifras le suma 10.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Resolución de un problema mediante la compleción de una rejilla.
- Resolución de un problema mediante la suma llevando y las agrupaciones de 10 en 10. Aparece un problema de combinación y luego un problemas de división medida donde los grupos son decenas. También aparece un problema de multiplicación con grupos de dos.

1.8. Tema 8

El tema 8 se desarrolló a lo largo de la segunda quincena de marzo y principios de abril. Los contenidos fueron:

- Los números del 70 al 99.
- Representación de decenas: los números 70, 80 y 90.
- Lectura y escritura de números hasta el 99.
- Los números anterior y posterior.
- Utilización de los signos < y >.
- Conteo progresivo de 5 en 5.
- Continuidad de series numéricas.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Resolución de problemas mediante la suma llevando, con problemas de combinación.

1.9. Tema 9

El tema 9 se desarrolló a lo largo de lo que resta de Abril. Los contenidos de este tema fueron:

- El número 100, como 10 decenas, 1 centena, 100 unidades.
- Representación de la centena.
- Introducción de la sustracción, con problemas de comparación.
- El signo de la resta “-“.
- Se presenta la adición es juntar o añadir y la sustracción es quitar.
- Introducción de los valores del euro y los céntimos de euro.
- Equivalencia entre el euro y los céntimos de euro.
- Los billetes de 5, 10 y 20 euros.
- Estimación de precios.
- Identificación de monedas y billetes y cálculo de valor total.
- Uso de las TIC (Web de juegos) para practicar el seguimiento de series numéricas.

- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Obtención e interpretación de datos a partir de la observación de una imagen con diferentes símbolos. Comparación de datos.
- Identificación de datos en una imagen.
- Aplicación de la suma y la resta en la resolución de problemas de combinación y cambio decreciente.
- En la sección El Taller:
- Uso de la calculadora.

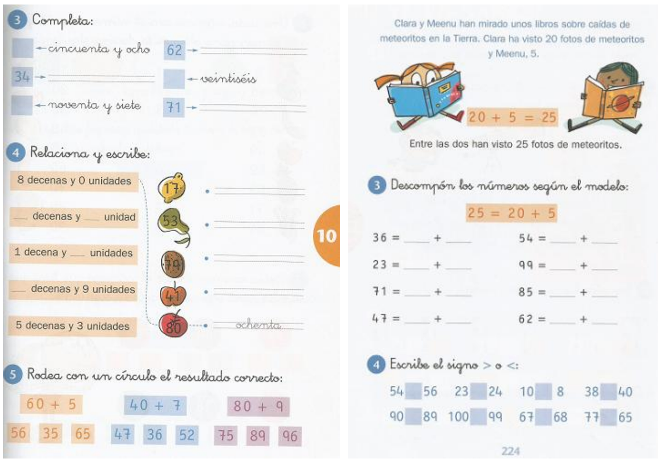


Figura A5.4. Descomposiciones aditivas de números de dos cifras (tema 9).

1.10. Tema 10

El tema 10 se desarrolló durante las 3 primeras semanas de mayo. Los contenidos de este tema fueron:

- Concepto de sustracción como la acción de quitar.
- Algoritmos horizontal y vertical de la resta.
- Resta de números de dos cifras.
- Escritura de los números con letras.
- Cálculo del complemento de un número para obtener la decena siguiente.
- Igualdades entre grupos de billetes y monedas.
- Aplicación de la suma en un contexto real. Repartición: la mitad.
- En la sección de problemas mediante la suma y la resta:
- Resolución de problemas mediante la suma y la resta. Buscar combinaciones de varios números que sumen 50 y 30. Además se trabaja un problema de cambio creciente con la cantidad de cambio desconocida.
- Secuencia numérica: Decenas menos 1.

1.11. Tema 11

El tema 11 se desarrolló a finales de mayo principios de junio. La última sesión del taller se realizó en la última semana de mayo. Contenidos de este tema fueron:

- Ordenación: los números anteriores y posteriores.
- La decena (repaso). Aparece una actividad en la que se da un número de elementos y hay que hacer grupos de 10 para escribir las decenas y las unidades de número.

- Cálculo aproximado, estimación del resultado de un cálculo.
- Conteo progresivo de 10 en 10: deducción de regularidades.
- Cálculo mental. Repaso de hechos numéricos aditivos y combinaciones de una decena más un número menor que 10.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Representación gráfica de los datos de un problema y de la operación que hay que hacer para resolverlo, con problemas de combinación y cambio decreciente con la cantidad final desconocida.

1.12. Tema 12

El tema 12 se intentó desarrollar a lo largo de lo que resta de Junio aunque no se finalizó. Los contenidos fueron:

- Sumas de tres sumandos llevando.
- Ordenación de números.
- Descomposición aditiva de números en sus decenas y unidades.
- Comparación de números.
- Transformación de sumas: algoritmos horizontal y vertical.
- Agrupaciones de 10 en 10.
- Cálculo mental. Combinaciones aditivas con números entre 0 y 9.
- En la sección de razonamiento lógico y problemas:
- Resolución de problemas de combinación y cambio decreciente con la cantidad final desconocida.
- Resolución gráfica de operaciones.

Anexo 6. Listados de estrategias observadas en el desarrollo de las sesiones

Este Anexo contiene los listados de estrategia agrupadas en suma, resta, multiplicación, división medida y división reparto. Dentro de estos grupos, están ordenadas siguiendo el tipo de estrategia: modelización directa, conteo, hechos numéricos, valor posicional, estrategias inventadas y algoritmos. Dentro de cada uno de estos tipos, las estrategias están numeradas en el orden que han ido apareciendo en las sesiones.

Las Tablas tienen 3 columnas: el código y la descripción de la estrategia, y la primera sesión en la que se utiliza. Además, el fondo de las filas se va oscureciendo según el tipo de estrategia indicado anteriormente: modelización directa, conteo, hechos numéricos, valor posicional y estrategias inventadas y algoritmos.

1.1. Listado de las estrategias observadas en problema o etapas de suma

	Descripción de la estrategia	PS
JT1	Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	3
JT2	Juntar todo con cubos encajables formando barras, añadiendo cada colección con contadores iguales a una única, contando de uno en uno	3
JT3	Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	3
JT4	Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con contadores diferente a una única, contando de uno en uno	3
JT5	Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno	3
JT6	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	3
JT7	Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	3
JT8	Juntar todo con dibujos, añadiendo cada colección a una única, contando de uno en uno	3
JT9	Juntar todo con los dedos	3
JT10	*Juntar todo con el rekenrek, representando las colecciones separadas sin ayuda de la configuración, considerando juntas las cantidades tras ser representadas sin aprovechar la configuración*	3
JT11	*Juntar todo con el rekenrek, añadiendo cantidades según se representan a una colección única, sin aprovechar la configuración*	3
JT12	Juntar todo con Tabla 100	3
JT13	Juntar todo con cubos encajables formando barras, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	7
JT14	Juntar todo con cubos encajables formando barras, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	7
JT15	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	7

JT16	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	7
JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	7
JT18	Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	7
JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	7
JT20	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	7
JT21	Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, ordenándolas de mayor a menor, contando de uno en uno	9
JT22	Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, ordenándolas de mayor a menor, contando de uno en uno	9
JT23	Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando	10
JT24	Juntar todo con base 10, se cuenta de uno en uno a partir de las decenas de la primera cantidad	10
JT25	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, contando de uno en uno	10
JT26	Juntar todo con base 10, con grupos de 10, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades	12
JT27	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando	12
JT28	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno a partir del primer sumando	12
JT29	Juntar todo con los huecos de la huevera, contando de uno en uno a partir del primer sumando	12
JT30	Juntar todo con secuencias numéricas para cada sumando, sin grupos de 10, contando de uno en uno	13
JT31	Juntar todo con objetos, haciendo grupos de 10 con ayuda de las hueveras, contar de uno en uno.	13
JT32	Juntar todo con Tabla 100, contando de uno en uno a partir del primer sumando	18
JT33	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumandos, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades	18
JT34	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, reconociendo los grupos de 10 como las decenas y los cubitos sueltos como las unidades	18
CM1	Contar a partir del mayor	9
CM2	Contar a partir del mayor llevando el rastro de las que hay que contar con una colección de marcas	9
CM3	Contar a partir del mayor llevando el rastro de las que hay que contar con una colección de dedos de las manos representada antes	9
CP1	Contar a partir del primero	7
CP2	Contar a partir del primero con Tabla 100	10
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	12
EI2	Combinar decenas y unidades	9
EI3	Combinar decenas y unidades, variando el orden de los sumandos	9
EI4	Descomponer en décadas y unidades, conteo a saltos para las decenas, Combinar decenas y unidades con el resultado de las decenas y la combinación de las unidades.	13
EI7	Secuencia: A partir de un sumando se suma las decenas del otro, y después las unidades.	20
AL1	Algoritmo de la suma	10

1.2. Lista de estrategias observadas en problemas de resta

CODIGO	ESTRATEGIAS DE RESTA	PS
Q1	Quitar con cubos encajables formando barras, contando de uno en uno	1
Q2	Quitar con objetos, contando de uno en uno	1
Q3	Quitar con marcas contando de uno en uno	1
Q4	Quitar con dibujos contando de uno en uno	1
Q5	Quitar con rekenrek sin aprovechamiento de su configuración	1
Q6	Quitar con rekenrek aprovechando la configuración del material	1
Q7	Quitar con los dedos sin usar su configuración	1
Q8	Quitar con Tabla 100, empezando a quitar desde el 1 hacia delante	1
Q9	Quitar con Tabla 100 empezando a quitar hacia atrás desde el numeral mayor	1
Q10	Quitar usando numerales escritos, empezado a quitar hacia atrás desde el numeral mayor	1
Q11	Quitar con rekenrek, sin utilizar configuración, identificando cantidad por subitización	2
Q12	Quitar con los dedos usando la configuración de las manos	16
Q13	Quitar con hueveras rellenas con objetos	16
Q14	Quitar con marcas, representado en grupos de 10, contando de uno en uno	16
Q15	Quitar con base 10, sin cambiar decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno	16
Q16	Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno	16
Q17	Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, contando de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades	19
QH1	Quitar hasta con marcas, contando las marcas que deben quedar	2
QH2	Quitar hasta con dibujos contando los dibujos que deben quedar	2
QH3	Quitar hasta con objetos, contando los objetos que deben quedar	2
QH4	Quitar hasta con el rekenrek, sin usar su configuración, percibiendo por subitización la cantidad que debe quedar	2
QH5	Quitar hasta con marcas percibiendo por subitización las marcas que deben quedar	6
QH6	Quitar hasta con dibujos percibiendo por subitización los dibujos que deben quedar	6
QH7	Quitar hasta con cubos encajables formando barras	6
QH8	Quitar hasta con cubos encajables formando barras percibiendo por subitización la cantidad que debe quedar	6
QH9	Quitar hasta con el rekenrek, sin usar su configuración, contando la cantidad que debe quedar	6
QH10	Quitar hasta con los dedos, utilizando la configuración para reconocer las cantidades de cambio y final	6
QH11	Quitar hasta con bloques de base 10, contando de 10 en 10 la cantidad inicial y la final	6
QH12	Quitar hasta con la secuencia numérica escrita, dejando sin tachar tanto numerales como indica la cantidad menor del problemas, tachando el resto, y contando los tachados.	6
QH13	Quitar hasta con la Tabla 100, contando los numerales que hay desde el numeral mayor al menor.	6
AH1	Añadir hasta con dibujos, contando de uno en uno	1
AH2	Añadir hasta llevando el rastro con los dedos	6
AH3	Añadir hasta con cubos encajados, contando de 10 en 10	19
AH4	Añadir hasta con Tabla 100 contando de uno en uno	19
AH5	Añadir hasta con base 10 contando de uno en uno	19
AH6	Añadir hasta con cubos encajables formando barras	22
AH7	Añadir hasta con marcas	23
E1	Correspondencia uno a uno con marcas	1
E2	Correspondencia uno a uno con objetos	2
E3	Correspondencia uno a uno con dibujos	6

E4	Correspondencia uno a uno con cubos encajables	6
CA1	Contar hacia atrás llevando el rastro mentalmente	6
CAH1	Contar hacia atrás hasta	22
CAH2	Contar hacia atrás hasta llevando el rastro con marcas	23
CH1	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos contados con marcas	1
CH2	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con las manos o mentalmente	2
HN1	Hecho numérico básico suma, usado para la resta	1
EI6	Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas.	16
EI11	Para restar, completa a la década la cantidad a restar, se restan las decenas de ambos números, luego restan las unidades a lo que le queda, y en su caso, suma las unidades de la cantidad a la que había que restar.	23
EI12	Añadir unidades hasta completar la década, añade las decenas que le faltan, y en el caso, las unidades.	23
EI13	Resta las decenas, luego las unidades a quitar.	23
AL2	Algoritmo de la resta	22

1.3. Listado de estrategias observadas en problemas o etapas de multiplicación

	Descripción estrategia	*PS*
A1	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	4
A2	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	4
A3	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	4
A4	Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración	4
A5	Agrupamiento con el rekenrek, sin representar la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	4
A6	Agrupamiento con Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa un grupo	4
A7	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	4
A8	Agrupamiento con objetos, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	4
A9	Agrupamiento con dibujos, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	4
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	4
A11	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno	4
A12	Agrupamiento con objetos, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno	4
A13	Agrupamiento con rekenrek, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno	4
A14	Agrupamiento representado con su propio cuerpo un grupo, y contarlo reiteradamente, tantas veces como grupos hay	4
A15	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con cubos encajables.	4
A16	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con objetos.	4

	Descripción estrategia	*PS*
A17	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con rekenrek.	4
A18	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa un grupo	4
A19	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos de 10 separados, contando de 10 en 10	7
A20	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos de 10 separados, contando de uno en uno	7
A21	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos de 10 separados, contando de 10 en 10	7
A22	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	7
A23	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	7
A24	Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración, contando de 10 en 10	7
A25	Agrupamiento con base 10, contando de uno en uno	7
A26	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de 10 en 10	7
A27	Agrupamiento con base 10, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	7
A28	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	12
A29	Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10	12
A30	Representar un grupo de 10 con huevera y contarlos reiteradamente de uno en uno	12
A31	Agrupamiento con hueveras, rellenando con cubos encajables, contando de uno en uno	12
A32	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	16
A33	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	16
A34	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno, anotando las sumas parciales acumuladas en cada grupo	21
CS1	Conteo a saltos de 10 en 10	7
CS2	Conteo a saltos de un número distinto de 10	21
HN2	Hecho numérico, invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, como suma reiterada	4
VP2	Equivalencia de decenas en unidades, cuando los grupos se dan en decenas	12
VP1	Identificar la posición de las decenas con grupos de 10 y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	12
EI1	Sumar un múltiplo de 10 a una década	7
EI6	Combinar un número de veces las decenas, combinar un número de veces las unidades, y combinar las decenas con las unidades, en una multiplicación	21
EI7	Combinar decenas y unidades, duplicando hasta completar el número de grupos que hay en un problema de grupos iguales.	21
EI8	Combina decenas y unidades con sumando iguales, y cuando no está seguro cuenta a partir del último sumando, en un problema de grupos iguales.	21
AL3	Sumas reiteradas para multiplicación	21
AL4	Sumas parciales, para multiplicación	21

1.4. Listado de estrategias observadas en problemas de división medida

	Descripción de la estrategia	*PS*
M1	Medida con marcas, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto	8
M2	Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto	8
M3	Medida con objetos, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto	8
M4	Medida con cubos encajables formando barras, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto	8
M5	Medida con marcas, representando total de elementos primero, e ir representando cada grupo al que se le une tantos elementos por grupo como indica el problema, hasta agotar el total.	8
M6	Medida con dibujos, representando total de elementos primero, e ir representando cada grupo al que se le une tantos elementos por grupo como indica el problema, hasta agotar el total.	8
M7	Medida con dibujos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto	8
M8	Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total, completando el último grupo para tener todo organizado en grupos	8b
M9	Medida con objetos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, poniendo un representante por cada grupo construido, identificando número de grupos y resto	8b
M10	Medida con Tabla 100	8b
M11	Medida con bloques de base 10, identificando las barras con los grupos y los cubitos sueltos como el resto	11
M12	Medida con bloques de base 10, identificando las barras con los grupos, proponiendo una barra que no está completa.	11
M13	Medida con bloques de base 10, apoyando cada barra en una huevera.	11
M14	Medida con cubos encajables, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	14
M15	Medida con marcas, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	14
M16	Medida con dibujos, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	14
M17	Medida con cubos encajables formando barras, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto	15
M18	Medida con los dedos, representando total de elementos primero, quitando reiteradamente ayudándose de la configuración de las manos	8
R30	Reparto con marcas en un problema de Medida, ajustando por ensayo y error el número de grupos, repartiendo el total de elementos hasta formar grupos con el número de elementos de la cantidad dada.	15
CS2	Conteo a saltos para medida contando de 10 en 10	8
VP1	Identificar la posición de las decenas de un número de dos cifras como grupos de 10 y las unidades como unidades sueltas	8b

1.5. Listado de estrategias observadas en problemas de división partitiva

	Descripción de la estrategia	PS
R1	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	5
R2	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno	5
R3	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo en bloques	5
R4	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, cogiendo un elemento para cada grupo a la vez	5
R5	Reparto con objetos formando barras, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	5
R6	Reparto con objetos, repartiendo de uno en uno, hasta completar la cantidad total	5
R7	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (se van tachando las marcas y colocando en los grupos)	5
R8	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, señalando a la vez un elemento para cada grupo, hasta agotarse los elementos.	5
R9	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	5
R10	Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	5
R11	Reparto con los dedos sin usar su configuración, contando de uno en uno	5
R12	Reparto con los dedos usando la configuración	5
R13	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno y representando la cantidad número de grupos	5
R14	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos	5
R15	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos	5
R16	Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos	5
R17	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, repartiendo en bloques los elementos en el número de grupos.	5
R18	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad	5
R19	Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad	14
R20	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno	14
R21	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno	14
R22	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, aproximando en cuatro partes	14
R23	Reparto con base 10, repartiendo primero barras, y después cambiando barras por unidades para continuar el reparto	14
R24	Reparto por ensayo y error con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos	24
R25	Reparto por ensayo y error con marcas, formando primero el total de elementos	24
R26	Reparto por ensayo y error con dibujos, formando primero el total de elementos	24
R27	Reparto por ensayo y error con los dedos de las manos, formando primero el total de elementos	24
R28	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, repartiendo de uno en uno formando barras con el mismo número de cubos	24
R29	Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos	24
M14	Medida con cubos encajables, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	14
M15	Medida con marcas, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	14
M16	Medida con dibujos, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)	14
EI5	(Reparto) Conteo a saltos de 10 en 10 sin pasarse del total de elementos y completar un grupos de 10 para cada grupo. Después conteo a saltos de 5 en 5 lo mismo. Se suma 10 + 5.	14

1.6. Listado de estrategias inventadas

	Estrategia inventada	*Problema*
EI1	Sumar un múltiplo de 10 a una década	M-G10
EI2	Combinar decenas y unidades	Suma
EI3	Combinar decenas y unidades, variando el orden de los sumandos	Suma
EI4	Descomponer en décadas y unidades; conteo a saltos para las decenas, hecho numérico para las unidades; Combinar decenas y unidades con los dos resultados anteriores.	Suma
EI5	(Reparto) Conteo a saltos de 10 en 10 sin pasarse del total de elementos y completar un grupos de 10 para cada grupo. Después conteo a saltos de 5 en 5 lo mismo. Se suma 10 + 5.	División Reparto
EI6	Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas.	Resta
EI7	Secuencial: A partir de un sumando se suma las decenas del otro, y después las unidades.	Suma
EI8	Combinar un número de veces las decenas, combinar un número de veces las unidades, y combinar las decenas con las unidades, en una multiplicación	Grupos iguales
EI9	Combinar decenas y unidades, duplicando hasta completar el número de grupos que hay en un problema de grupos iguales.	Grupos iguales
EI10	Combinar decenas y unidades con sumando iguales, y cuando no está seguro cuenta a partir del último sumando, en un problema de grupos iguales.	Grupos iguales
EI11	Para restar, completa a la década la cantidad a restar, se restan las decenas de ambos números, luego restan las unidades a lo que le queda, y en su caso, suma las unidades de la cantidad a la que había que restar.	Resta
EI12	Añadir unidades hasta completar la década, añade las decenas que le faltan, y en su caso, las unidades.	Resta
EI13	Resta las decenas, luego las unidades a quitar.	Resta

Anexo 7. Tablas de frecuencias de estrategias observadas por problema

1.1. Tabla de frecuencias absolutas de estrategias en problemas de multiplicación con grupos de 10 a lo largo del taller

1.1.1. Estrategias de la primera etapa

	Estrategias observadas	S.7	S. 12
A1	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	4	4
A2	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	1	
A3	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	1	2
A7	Agrupamiento con cubos encajados, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	2	
A9	Agrupamiento con dibujos, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	5	
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	9	3
A19	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	1	
A20	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	2	
A21	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	1	
A22	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	1	
A23	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	1	1
A24	Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración	2	
A25	Agrupamiento con base 10, contando de uno en uno	2	
A26	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de 10 en 10	1	2
A27	Agrupamiento con base 10, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	1	
A28	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno		1
A29	Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10		1
A30	Representar un grupo de 10 con huevera y contarlos reiteradamente de uno en uno		1
CS1	Conteo a saltos de 10 en 10	1	1
EI1	Sumar un múltiplo de 10 a una década	1	
VP2	Equivalencia de decenas en unidades		10
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades		4

1.1.2. Estrategias de la segunda etapa

	Descripción de la estrategia	S. 7	S.12
JT1	Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	
JT3	Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	
JT6	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno		1
JT13	Juntar todo con cubos encajables formando barras, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	6	4
JT14	Juntar todo con cubos encajables formando barras, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1	
JT15	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	2	
JT16	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1	
JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	9	5
JT18	Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	6	1
JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	3	
JT20	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1	2
JT23	Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando		2
JT26	Juntar todo con base 10, con grupos de 10, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades		1
JT27	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando		1
JT28	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno a partir del primer sumando		1
JT29	Juntar todo con los huecos de la huevera, contando de uno en uno a partir del primer sumando		1
R7 y JT6	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (se van tachando las marcas y colocando en los grupos); Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	
CP1	Contar a partir del primero	1	4
EI2	Combinar decenas y unidades	3	2
AL1	Algoritmo de la suma		1
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades		4

1.1.3. Estrategias del problema completo

	Estrategia primera etapa		Estrategia segunda etapa	7	12
A1	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT13	Juntar todo con cubos encajados, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	4	4
A20	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT15	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	2	
A23	Agrupamiento con dibujos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT18	Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	1
A3	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	2
A7	Agrupamiento con cubos encajados, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	JT13	Juntar todo con cubos encajados, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	2	
A9	Agrupamiento con dibujos, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	JT18	Juntar todo con dibujos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	5	
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	JT17	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	8	3
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	R7 y JT6	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (se van tachando las marcas y colocando en los grupos); Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	
A2	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	JT1	Juntar todo con cubos encajados, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	
A22	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección, contando de uno en uno	JT3	Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	
A28	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	JT6	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno		1
A25	Agrupamiento con base 10, contando de uno en uno	JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	2	
A27	Agrupamiento con base 10, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	1	
A30	Representar un grupo de 10 con huevera y contarlos reiteradamente de uno en uno	JT29	Juntar todo con los huecos de la huevera, contando de uno en uno a partir del primer sumando		1
A19	Agrupamiento con cubos encajados, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	JT14	Juntar todo con cubos encajados, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1	
A21	Agrupamiento con objetos, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de 10 en 10	JT16	Juntar todo con objetos, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1	
A26	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de 10 en 10	JT20	Juntar todo con marcas, con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de 10 en 10 los grupos de 10, y de uno en uno las unidades	1	2
A29	Agrupamiento con base 10, contando de 10 en 10	JT26	Juntar todo con base 10, con grupos de 10, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades		1

A24	Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración	EI2	Combinar decenas y unidades	2	
CS1	Conteo a saltos de 10 en 10	CP1	Contar a partir del primero	1	1
EI1	Sumar un múltiplo de 10 a una década	EI2	Combinar decenas y unidades	1	
VP2	Equivalencia de decenas en unidades	JT27	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando		1
		JT28	Juntar todo con marcas, representando las cantidades con grupos de 10, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno a partir del primer sumando		1
		JT23	Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando		2
		CP1	Contar a partir del primero		3
		EI2	Combinar decenas y unidades		2
		AL1	Algoritmo de la suma		1
VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades	VP3	Identificar el número de dos cifras que corresponde con un número de grupos de 10 (posición de las decenas) y cantidades menor que 10 como la posición de las unidades		4

1.1.4. Tabla de frecuencias absolutas de estrategias en problemas de división medida con grupos de 10 a lo largo del taller

	DESCRIPCIÓN	S.8	S.8b	S.11	S.15
M1	Medida con marcas, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto	8	11	10	11
M2	Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto	6	4	3	4
M3	Medida con objetos, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto	13			
M4	Medida con cubos encajados, representando total de elementos primero, agrupando después, e identificando el número de grupos y resto	2	10	3	7
M5	Medida con marcas, representando total de elementos primero, e ir representando cada grupo al que se le une tantos elementos por grupo como indica el problema, hasta agotar el total.	1			
M6	Medida con dibujos, representando total de elementos primero, e ir representando cada grupo al que se le une tantos elementos por grupo como indica el problema, hasta agotar el total.	1			
M7	Medida con dibujos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto	1			
M8	Medida con marcas, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total, completando el último grupo para tener todo organizado en grupos		2		
M9	Medida con objetos, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, poniendo un representante por cada grupo construido, identificando número de grupos y resto		1	1	1
M10	Medida con Tabla 100		1		
M11	Medida con bloques de base 10, identificando las barras con los grupos y los cubitos sueltos como el resto			1	2
M12	Medida con bloques de base 10, identificando las barras con los grupos, proponiendo una barra que no está completa.			1	
M13	Medida con bloques de base 10, apoyando cada barra en una huevera.			1	
M17	Medida con cubos encajados, haciendo grupos hasta conseguir la cantidad total sin pasarse, identificando número de grupos y resto				1
M18	Medida con los dedos, representando total de elementos primero, quitando reiteradamente ayudándose de la configuración de las manos	1			
R30	Reparto con marcas en un problema de Medida, ajustando por ensayo y error el número de grupos, repartiendo el total de elementos hasta formar grupos con el número de elementos de la cantidad dada.				1
MCS1	Conteo a saltos para Medida	3	2		1
VP1	Identificar las decenas como grupos de 10 y las unidades como unidades sueltas		1	4	4

1.1.5. Tabla de frecuencias absolutas de estrategias en problemas de suma

Código	Descripción	S.3	S.9	S.10	S.13	S.17	S.18	S.20
JT1	Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	10	10	8	11	8	3	1
JT2	Juntar todo con cubos encajables formando barras, añadiendo cada colección con contadores iguales a una única, contando de uno en uno	4	7	3	0	1	0	0
JT3	Juntar todo con objetos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	1	2	3	0	2	0	3
JT4	Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con contadores diferente a una única, contando de uno en uno	1	2	0	2		0	0
JT5	Juntar todo con marcas, añadiendo cada colección con marcas iguales a una única, contando de uno en uno	4	2	0	1	2	1	1
JT6	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	7	7	14	11	4	2	0
JT7	Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando de uno en uno	3	5	4	2	15	1	0
JT8	Juntar todo con dibujos, añadiendo cada colección a una única, contando de uno en uno	6	0	0	0	3	1	0
JT9	Juntar todo con los dedos	3	0	1	0	0	0	0
JT10	Juntar todo con el rekenrek, representando las colecciones separadas sin ayuda de la configuración, considerando juntas las cantidades tras ser representadas sin aprovechar la configuración	3	1	0	0	0	0	0
JT11	Juntar todo con el rekenrek, añadiendo cantidades según se representan a una colección única, sin aprovechar la configuración	5	0	0	0	0	0	0
JT12	Juntar todo con Tabla 100	1	1	1	0	1	0	1
JT19	Juntar todo con base 10, contando de uno en uno	0	0	0	3	1	1	0
JT21	Juntar todo con cubos encajables formando barras, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, ordenándolas de mayor a menor, contando de uno en uno	0	3	0	0	1	0	0
JT22	Juntar todo con dibujos, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, ordenándolas de mayor a menor, contando de uno en uno	0	1	0	0	0	0	0
JT23	Juntar todo con base 10, representado el segundo sumando solo con unidades y se cuenta de uno en uno a partir del primer sumando	0	0	1	0	0	1	0
JT24	Juntar todo con base 10, se cuenta de uno en uno a partir de las decenas de la primera cantidad	0	0	1	0	0	0	0
JT25	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, contando de uno en uno	0	0	1	0	1	0	0
JT27	Juntar todo con marcas, sin agrupar en decenas, representando por separado las colecciones, considerándolas juntas, contando a partir del primer sumando	0	0	0	0	0	3	0
JT30	Juntar todo con secuencias numéricas para cada sumando, sin grupos de 10, contando de uno en uno	0	0	0	2	0	0	0
JT31	Juntar todo con objetos, haciendo grupos de 10 con ayuda de las hueveras, contar de uno en uno.	0	0	0	2	1	0	0
JT32	Juntar todo con Tabla 100, contando de uno en uno a partir del primer sumando	0	0	0	0	0	1	0
JT33	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumandos, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno las unidades	0	0	0	0	0	1	0
JT34	Juntar todo con base 10, agrupando en decenas tras representar los sumando, reconociendo los grupos de 10 como las decenas y los cubitos sueltos como las unidades	0	0	0	2	0	2	0
CP1	Contar a partir del primero	0	0	0	1	3	0	0
CP2	Contar a partir del primero con Tabla 100	0	0	2	1	0	0	0

CM1	Contar a partir del mayor	0	4	0	0	0	0	0
CP1-HN3-CP1	Estrategia combinada para un problema de 4 sumandos, usando conteo a partir del primero y recuperación de hechos numéricos	0	0	0	0	1	0	0
JT5 - CM2	Contar a partir del mayor llevando el rastro de las que hay que contar con una colección de marcas	0	1	0	0	0	0	0
JT9 - CM3	Contar a partir del mayor llevando el rastro de las que hay que contar con una colección de dedos de las manos	0	1	0	0	0	0	0
EI2	Combinar decenas y unidades	0	0	2	2	4	7	1
EI3	Combinar decenas y unidades, variando el orden de los sumandos	0	1	0	0	2	0	0
EI4	Descomponer en décadas y unidades, conteo a saltos para las decenas, Combinar decenas y unidades con el resultado de las decenas y la combinación de las unidades.	0	0	0	1	0	0	0
EI7	Secuencia: A partir de un sumando se suma las decenas del otro, y después las unidades.	0	0	0	0	0	0	1
AL1	Algoritmo de la suma	0	0	1	4	0	6	29

1.1.6. Tabla de frecuencias absolutas de estrategias en problemas de resta

	Descripción de la estrategia	S.1	S.2	S.6	S.16	S.19	S.22	S.23
Q1	Quitar con cubos encajables formando barras, contando de uno en uno	8	7	6	9	2	1	2
Q2	Quitar con objetos contando de uno en uno	9	4	1	2		2	
Q3	Quitar con marcas contando de uno en uno	7	8	6	8	2	11	6
Q4	Quitar con dibujos contando de uno en uno	2	1	6		1		
Q5	Quitar con rekenrek sin usar su configuración	14	3	3				
Q6	Quitar con rekenrek usando su configuración	2		1	1			
Q7	Quitar con los dedos sin usar su configuración	1	2					
Q8	Quitar con Tabla 100 empezando por el 1	7						
Q9	Quitar con Tabla 100 empezando por el numeral mayor	2		1	1		1	
Q10	Quitar con una secuencia escrita empezando por el último	1						
Q11	Quitar con rekenrek sin utilizar configuración, identificando cantidad por subitización		5	1				
Q12	Quitar con los dedos usando la configuración de las manos				1			
Q13	Quitar con hueveras rellenas con objetos				2			
Q14	Quitar con marcas, representado en grupos de 10, contando de uno en uno				1	1		
Q15	Quitar con base 10 contando de uno en uno				1	2		
Q16	Quitar con base 10, cambiando decenas por unidades para quitar, contando de uno en uno				1			
Q17	Quitar con base 10 contando de 10 en 10 las barras y de uno en uno las unidades					2		
QH1	Quitar hasta con marcas, contando las marcas que deben quedar		20	1				
QH2	Quitar hasta con dibujos contando los dibujos que deben quedar		1	3				
QH3	Quitar hasta con objetos, contando los objetos que deben quedar		3	1				
QH4	Quitar hasta con el rekenrek, sin usar su configuración, percibiendo por subitización la cantidad que debe quedar		2	1				
QH5	Quitar hasta con marcas percibiendo por subitización las marcas que deben quedar			2				
QH6	Quitar hasta con dibujos percibiendo por subitización los dibujos que deben quedar			1				
QH7	Quitar hasta con cubos encajados			1				
QH8	Quitar hasta con cubos encajados percibiendo por subitización la cantidad que debe quedar			1				
QH9	Quitar hasta con el rekenrek, sin usar su configuración, contando la cantidad que debe quedar			3				
QH10	Quitar hasta con los dedos, utilizando la configuración para reconocer las cantidades de cambio y final			1				
QH11	Quitar hasta con bloques de base 10, contando de 10 en 10 la cantidad inicial y la final			1				
QH12	Quitar hasta con la secuencia numérica escrita, dejando sin tachar tanto numerales como indica la cantidad menor del problema, tachando el resto, y contando los tachados.			1				
QH13	Quitar hasta con la Tabla 100, contando los numerales que hay desde el numeral mayor al menor.			2	1			
AH1	Añadir hasta con dibujos	1		1			1	
AH2	Añadir hasta llevando el rastro con los dedos			1				
AH3	Añadir hasta con cubos encajados, contando de 10 en 10					2		
AH4	Añadir hasta con Tabla 100 contando de uno en uno					4		2
AH5	Añadir hasta con base 10 contando de uno en uno					2		
AH6	Añadir hasta con cubos encajables formando barras						1	1

AH7	Añadir hasta con marcas							2
E1	Correspondencia uno a uno con marcas	1	1					1
E2	Correspondencia uno a uno con objetos		1					
E3	Correspondencia uno a uno con dibujos			1				
E4	Correspondencia uno a uno con cubos encajables			1			1	1
CA1	Contar hacia atrás llevando el rastro mentalmente			1	1			
CH1	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con marcas	1				1		
CH2	Contar hasta, llevando el rastro de los elementos a contar con las manos o mentalmente	1			6		1	
CAH1	Contar hacia atrás hasta						1	
CAH2	Contar hacia atrás hasta llevando el rastro con marcas							1
HN1	Hecho numérico básico suma, usado para la resta	1						
EI6	Descomponer en decenas, quitar las unidades a una decena, y el resto sumarlo a las otras decenas.				3			
EI11	Para restar, completa a la década la cantidad a restar, se restan las decenas de ambos números, luego restan las unidades a lo que le queda, y en su caso, suma las unidades de la cantidad a la que había que restar.							1
EI12	Añadir unidades hasta completar la década, añade las decenas que le faltan, y en el caso, las unidades.							1
EI13	Resta las decenas, luego las unidades a quitar.							1
AL2	Algoritmo de la resta					3	11	3

1.1.7. Tabla de frecuencias absolutas de problemas de multiplicación sin grupos de 10

	Estrategias observadas	S.4	S. 21
A1	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	5	1
A2	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, sin representar la cantidad número de grupos, añadiendo los grupos no diferenciados a una única colección , contando de uno en uno	2	
A3	Agrupamiento con marcas, sin representar la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	2	1
A4	Agrupamiento con los dedos, sin representar la cantidad número de grupos, usando su configuración	2	
A5	Agrupamiento con el rekenrek, sin representar la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	2	
A6	Agrupamiento con Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa un grupo	1	2
A7	Agrupamiento con cubos encajables formando barras, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	3	1
A8	Agrupamiento con objetos, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	1	1
A9	Agrupamiento con dibujos, representando la cantidad número de grupos, dejando los grupos separados, contando de uno en uno	11	
A10	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno	9	21
A11	Agrupamiento con cubos encajados, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno	2	
A12	Agrupamiento con objetos, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno	1	
A13	Agrupamiento con rekenrek, representado el número de grupos y realizando un conteo figurativo de los elementos por grupos de uno en uno	2	
A14	Agrupamiento representado con su propio cuerpo un grupo, y contarlo reiteradamente, tantas veces como grupos hay	1	
A15	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con cubos encajables.	1	
A16	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con objetos.	1	
A17	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con rekenrek.	1	
A18	Agrupamiento invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, con Tabla 100, contando de uno en uno, con pausas cada vez que se completa un grupo	1	
A35	Agrupamiento con marcas, representando la cantidad número de grupos, contando de uno en uno, anotando las sumas parciales acumuladas en cada grupo		1
CS2	Conteo a saltos de un número distinto de 10		1
HN2	Hecho numérico, invirtiendo el papel de grupos y elementos por grupos, como suma reiterada	1	
EI8	Combinar un número de veces las decenas, combinar un número de veces las unidades, y combinar las decenas con las unidades, en una multiplicación		2
EI9	Combinar decenas y unidades, duplicando hasta completar el número de grupos que hay en un problema de grupos iguales.		1
EI10	Combina decenas y unidades con sumando iguales, y cuando no está seguro cuenta a partir del último sumando, en un problema de grupos iguales.		1
AL3	Sumas reiteradas para multiplicación		2
AL4	Sumas parciales, para multiplicación		1

1.1.8. Tabla de frecuencias absolutas de problemas de división partitiva

	Estrategias observadas	S.5	S.14	S.24
R1	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	4		
R2	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno	5	3	2
R3	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo en bloques	1		
R4	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, cogiendo un elemento para cada grupo a la vez	1		
R5	Reparto con objetos formando barras, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	2		
R6	Reparto con objetos, repartiendo de uno en uno, hasta completar la cantidad total	1		1
R7	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno (se van tachando las marcas y colocando en los grupos)	1		
R8	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, señalando a la vez un elemento para cada grupo, hasta agotarse los elementos.	2		
R9	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	4		
R10	Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos, aproximando la mitad	1		
R11	Reparto con los dedos sin usar su configuración, contando de uno en uno	1		
R12	Reparto con los dedos usando la configuración	1		
R13	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo de uno en uno y representando la cantidad número de grupos	2	2	
R14	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos	2	9	1
R15	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos	3		8
R16	Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, y uniendo con líneas cada elemento a un grupo, hasta agotarlos	1		4
R17	Reparto con marcas, representando la cantidad número de grupos y el total de elementos, repartiendo en bloques los elementos en el número de grupos.	1		
R18	Reparto con marcas, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad	1		
R19	Reparto con dibujos, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, dividiendo el total de elementos aproximadamente por la mitad	1		
R20	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno		1	
R21	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, repartiendo primero en bloques de 10, y luego de uno en uno		1	
R22	Reparto con objetos, formando primero el total de elementos, aproximando en cuatro partes		1	
R23	Reparto con base 10, repartiendo primero barras, y después cambiando barras por unidades para continuar el reparto		1	
R24	Reparto por ensayo y error con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos			1
R25	Reparto por ensayo y error con marcas, formando primero el total de elementos			13
R26	Reparto por ensayo y error con dibujos, formando primero el total de elementos			3
R27	Reparto por ensayo y error con los dedos de las manos, formando primero el total de elementos			1
R28	Reparto con cubos encajables formando barras, formando primero el total de elementos y representando la cantidad número de grupos, repartiendo de uno en uno formando barras con el mismo número de cubos			1
R29	Reparto con dibujos, representando la cantidad número de grupos, y repartiendo de uno en uno marcas en los grupos hasta completar la cantidad total de elementos			2
M14	Medida con cubos encajables, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)		6	
M15	Medida con marcas, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)		14	
M16	Medida con dibujos, invirtiendo el papel del número de grupos y número de elementos por grupo (problemas de división partitiva)		1	
EI5	(Reparto) Conteo a saltos de 10 en 10 sin pasarse del total de elementos y completar un grupos de 10 para cada grupo. Después conteo a saltos de 5 en 5 lo mismo. Se suma 10 + 5.		1	

Anexo 8. Capacidades y errores

1.1. Listado de capacidades por expectativas de aprendizaje

Sobre lectura y escritura de numerales hasta 100
C1. Leer un numeral escrito hasta 100.
C14. Escribir un número hasta 100 con cifras.
C15. Escribir un número hasta 100 con palabras.
Determinar el cardinal de una colección
C10. Determinar el cardinal de una colección de hasta 100 elementos contando de uno en uno.
C11. Determinar la cantidad representada con patrones como manos o rekenrek.
C54. Determinar el cardinal de una colección hasta 100, contando de 10 en 10 las barras de bloques de base 10 y de uno en uno las unidades.
C89. Determinar el cardinal de una colección hasta 100, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno los elementos sueltos.
C102. Determinar el cardinal de una colección representada con barras y unidades de bloques de base 10, identificando el valor de barras como la posición de las decenas y de los cubitos sueltos, como la posición de las unidades.
C12. Determinar el cardinal de una colección de numerales en una secuencia numérica escrita por el alumno o la Tabla 100, desde el 1 hasta el último numeral, con ese último numeral.
C13. Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita desde un numeral hasta otro, contando de uno en uno hacia delante.
C56. Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 entre dos numerales contando de uno en uno empezando desde el mayor hacia atrás.
C65. Determinar mediante el conteo el número de grupos y las unidades sueltas de una colección distribuida en grupos, es decir, determinar la cantidad de unidades de distinto orden.
C70. Determinar el número de grupos de 10 de un número de dos cifras representado en la Tabla 100, como el número de filas enteras que hay y el resto son las unidades sueltas.
C84. Determinar el número de grupos de 10 y las unidades sueltas en una colección representada con barras y unidades de bloques de base 10, identificando los grupos con las barras y las unidades con los cubitos.
Formar colecciones con un cardinal dado
C2. Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales ya sean objetos, marcas o dibujos sin agrupamientos.
C4. Formar una colección de hasta 100 con la secuencia de numerales escrita desde el 1 hasta el numeral que indica su cardinal.
C19. Formar una colección con el numeral de su cardinal.
C3. Formar una colección de hasta 100 utilizando patrones como los dedos o el rekenrek.
C5. Formar una colección de hasta 100 señalando el numeral en la Tabla 100 y considerando todos los anteriores.
C53. Formar una colección hasta 100 con bloques de base 10, poniendo barras para cada decena grupo de 10 y unidades para las cantidades que no completan una decena.
C85. Formar una colección de hasta 100 con hueveras relacionando cada decena con una barra de base 10 y los huecos de una huevera con las unidades de base 10.
C86. Representar una cantidad con hueveras utilizando sus huecos como unidades.
C88. Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales ya sean objetos, marcas o dibujos con grupos de 10.
C90. Formar una colección de hasta 100 elementos con hueveras colocando un cubo encajable en cada hueco.
Sobre la secuencia de numerales oral. Nivel de cadena numerable hasta 100
C20. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia delante hasta otro formando una colección

de marcas u objetos.

C26. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia delante hasta otro llevando el rastro con una colección representada con los dedos o figurativa.

C109. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia atrás hasta otro llevando el rastro con una colección representada con los dedos o figurativa.

C110. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia atrás hasta otro llevando el rastro con una colección representada con marcas u objetos.

C57. Enunciar la secuencia de numerales hacia atrás una cantidad de números dada desde cualquier numeral contando de uno en uno llevando el rastro con una colección figurativa o con ayuda de los dedos.

C61. Enunciar la secuencia de numerales hacia delante una cantidad de numerales dado desde cualquier numeral contando de uno en uno llevando el rastro mentalmente o con ayuda de la configuración de los dedos.

C74. Enunciar la secuencia de numerales a partir de un numeral distinto de 1 llevando el rastro de los numerales enunciados con una colección representada antes de objetos, marcas, dedos o incluso bloques de base 10 o huevera.

C80. Enunciar la secuencia de numerales a partir de un numeral distinto de 1 llevando el rastro del número de numerales enunciados con una colección de numerales de la Tabla 100.

C59. Enunciar la secuencia numérica de 10 en 10 un número de veces dado llevando el rastro con los dedos o con una representación mental.

C69. Enunciar la secuencia de numerales de 10 en 10 desde cualquier década hasta otra llevando el rastro de los numerales enunciados, ya sea con los dedos o con una representación mental, para saber cuántos grupos de 10 hay.

C105. Enunciar la secuencia numérica a saltos distintos de 10 un número de veces dado llevando el rastro con los dedos o con una representación mental.

Representación de acciones y relaciones en las estrategias de modelización directa

C16. Representar varias cantidades distinguiéndolas mediante color, tipo de objeto o posición.

C28. Representar varias colecciones sin distinguirlas mediante el color, tipo de objeto o posición.

C73. Establecer un orden entre las cantidades.

C79. Agrupar las barras de 10 por un lado y las unidades por otro, tras considerar juntas varias colecciones representadas con bloques de base 10, cambiando 10 unidades por una decena si es necesario.

C27. Añadir una colección de marcas, dibujos u objetos a una anterior ya representada formando una única colección.

C29. Considerar conjuntamente varias colecciones representadas por separado.

C30. Añadir una colección de numerales en la Tabla 100 contando a partir de cualquier numeral, tantos como cardinal tiene esa colección.

C6. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos de otra contando de uno en uno.

C7. Quitar o separar una colección de objetos o marcas de patrones como las manos o el rekenrek.

C8. Quitar los primeros numerales contando desde el uno hasta la cantidad a quitar en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

C9. Quitar los últimos numerales contando desde el último numeral seleccionado tantos numerales como haya que restar en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

C17. Representar en correspondencia uno a uno dos colecciones de objetos o marcas para ver su diferencia.

C18. Completar una colección de elementos distinguiendo los elementos añadidos hasta completar una cantidad.

C23. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos hasta que queda una cantidad comprobada por conteo.

C24. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos hasta que queda una cantidad comprobada por subitización.

C25. Quitar una colección percibida por subitización.

C52. Quitar o separar una colección de objetos o marcas de patrones como las manos o el rekenrek hasta que queda una cantidad percibida por subitización o reconocida por su configuración.

C55. Tachar o señalar numerales empezando desde el último numeral seleccionado hasta otro dado menor hacia atrás en una secuencia numérica escrita.

C97. Quitar una cantidad de cubos encajables u objetos colocados en hueveras.

C99. Quitar de uno en uno una cantidad de otra representada con base 10 señalando los cubitos de las barras y/o sueltos considerados.

C100. Quitar de uno en uno una cantidad de otra representada con base 10 cambiando las decenas por unidades y separando las unidades que se quitan.

C31. Distinguir unidades compuestas de unidades simples, por ejemplo, en un problema de grupos iguales distinguir el número de grupos de los elementos por grupo.

C32. No representar la cantidad de número de grupos en un problema de grupos iguales.

C33. Representar la cantidad de número de grupos y la cantidad de número de elementos por grupos en un problema de grupos iguales.

C34. Representar solo el número de grupos en un problema de grupos iguales.

C35. Formar un número de grupos con la misma cantidad de objetos, marcas o dibujos, incluso bolas del rekenrek.

C36. Formar un número de grupos con la misma cantidad de dedos o bolas del rekenrek, o cualquier patrón, añadiéndose a la anterior según se representan.

C37. Formar un número de grupos con la misma cantidad de numerales en la Tabla 100, añadiendo al anterior según se representan.

C38. Representar la relación uno a muchos entre los grupos y los elementos por grupo.

C39. Determinar la cantidad total de elementos de n grupos, representada sola la cantidad de número de grupos, realizando un conteo figurativo de los elementos que hay en cada grupo.

C40. Representar un solo grupo.

C41. Determinar la cantidad total de elementos de n grupos, contando n veces la representación de un solo grupo en un problema de grupos iguales con n grupos y m elementos por grupo.

C42. Intercambiar el papel de número de grupos y elementos por grupo.

C43. Interpretar la situación de grupos iguales como suma de todos los grupos.

C58. Formar un número de grupos con bloques de base 10.

C63. Distribuir una colección en grupos de una cantidad dada.

C64. Formar grupos de marcas, dibujos u objetos de una cantidad dada hasta completar un total de elementos también dado.

C66. Distribuir una colección de marcas en grupos representados uniéndolos con líneas.

C67. Quitar reiteradamente una cantidad a una colección hasta que no se pueda quitar esa cantidad entera llevando el rastro de las veces que se quita.

C96. Formar un número de grupos con hueveras rellenas de cubos encajables.

C104. Anotar el conteo parcial en cada grupo.

C44. Repartir de uno en uno una colección de objetos o marcas en un número de grupos dado.

C45. Repartir de varios en varios una colección de objetos o marcas en un número de grupos dado.

C46. Dividir aproximadamente una colección de objetos o marcas por la mitad.

C47. Repartir una colección en de marcas en grupos utilizando líneas.

C48. Repartir una colección en dos partes señalando dos objetos a la vez y repartiéndolos en los dos grupos a la vez.

C49. Dividir una colección representada con un patrón, ya sea los dedos o el rekenrek, en dos partes iguales ayudándose de la configuración de las manos.

C50. Repartir objetos o marcas en un número de grupos hasta completar una colección.

C51. Identificar la solución de un reparto de grupos iguales como el número de elementos de uno de los grupos.

C91. Reparto de una colección de cubos encajables, objetos o marcas, primero en grupos de 10 y luego de uno en uno.

C92. Dividir aproximadamente una colección de cubos encajables, objetos o marcas en cuatro partes iguales (cuartos) y ajustar hasta que los cuatro grupos tengan la misma cantidad.

C93. Reparto con bloques de base 10 repartiendo primero las barras y si es necesario cambiar barras por unidades para seguir el reparto.

C94. Proponer una cantidad de elementos por grupo en un problemas de división partitiva y realiza conteo a saltos para probar si es adecuada.

C95. Repartir de uno en uno una colección de objetos o marcas en un número de grupos por ensayo y error hasta completar un número de elementos por grupos dados en cada uno de los grupos en un problema de división medida. Si no es el número de grupos pedido se vuelve a probar con otro.

C115. Reparto en un número de grupos dados de una cantidad por ensayo y error hasta ajustar.

Propiedades del número y aritmética, descomposiciones aditivas y estrategias de cálculo basadas en el valor posicional

C21. Reconocer la relación de la suma y la resta, relación parte-todo.

C22. Conocer descomposiciones básicas (combinar dos número de dos cifras).

C60. Identificar el número de dos cifras que corresponde a una descomposición de una década (10, 20, 30,..) y unidades (1, 2, 3,…).

C62. Sumar 10 a una década.

C68. Descomponer un número de dos cifras en una década (10, 20, 30, 40…) y unidades (1, 2, 3, 4…).

C71. Identificar la posición de las decenas y la posición de las unidades en un número de dos cifras.

C72. Reconocer que en un número de dos cifras las decenas son grupos de 10 y la cifra de las unidades son elementos sueltos que no completan un grupo 10.

C75. Sumar las unidades y las decenas por separado.

C76. Reconocer que al descomponer dos números en decenas y unidades, si al sumar las unidades se obtiene una cantidad mayor que 9 hay que sumar la decena a las iniciales.

C77. Identificar el número de dos cifras compuesto por un número de decenas y un número de unidades.

C78. Reconocer que en una cantidad representa con material organizada en varios grupos de 10 y una cantidad de objetos menor que 10, el número de grupos es la cifra de las decenas y la cantidad de objetos menor que 10 corresponden a la cifra de las unidades en un número de dos cifras.

C81. Organizar dos números de dos cifras en un algoritmo colocando las unidades en una columna y las decenas en la otra.

C82. Empezar el procedimiento de un algoritmo tradicional por las unidades.

C83. Si las unidades suman más de 9 se coloca las unidades en esa columna y las decena se pone en la columna de las decenas.

C87. Reconocer que “un número dado de decenas” son una “década”, es decir, 4 decenas son 40.

C98. Restar las unidades a una decena y sumar lo que queda al resto de decenas cuando se tiene que quitar una cantidad menor que 10 a una década.

C103. Sumar las decenas y después las unidades de un sumando al otro sumando.

C106. Sumar reiteradamente una cantidad acumulando al total anterior.

C107. Sumar agrupando en dobles hasta agotar y sumar los resultados anteriores.

C108. Pedir prestado una decena para poder restas las cifras de una columna en la que el número a restar es mayor que el número del minuendo.

C111. Restar decenas y unidades por separado.

C112. Sumar a un número de dos cifras las unidades necesarias para llegar a la siguiente década.

C113. Calcular el número de decenas que hay de una década a otra.

C114. Restar primero la decenas y luego las unidades.

C116. Descomponer una década en otras dos décadas menores.

1.2. Listado de capacidades

C1. Leer un numeral escrito hasta 100.

C2. Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales ya sean objetos, marcas o dibujos sin agrupamientos.

C3. Formar una colección de hasta 100 utilizando patrones como los dedos o el rekenrek.

C4. Formar una colección de hasta 100 con la secuencia de numerales escrita desde el 1 hasta el numeral que indica su cardinal.

C5. Formar una colección de hasta 100 señalando el numeral en la Tabla 100 y considerando todos los anteriores.

C6. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos de otra contando de uno en uno.

C7. Quitar o separar una colección de objetos o marcas de patrones como las manos o el rekenrek.

C8. Quitar los primeros numerales contando desde el uno hasta la cantidad a quitar en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

C9. Quitar los últimos numerales contando desde el último numeral seleccionado tantos numerales como haya que restar en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita.

C10. Determinar el cardinal de una colección de hasta 100 elementos contando de uno en uno.

C11. Determinar la cantidad representada con patrones como manos o rekenrek.

C12. Determinar el cardinal de una colección de numerales en una secuencia numérica escrita por el alumno o la Tabla 100, desde el 1 hasta el último numeral, con ese último numeral.

C13. Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 o una secuencia numérica escrita desde un numeral hasta otro contando de uno en uno hacia delante.

C14. Escribir un número hasta 100 con cifras.

C15. Escribir un número hasta 100 con palabras.

C16. Representar varias cantidades distinguiéndolas mediante color, tipo de objeto o posición.

C17. Representar en correspondencia uno a uno dos colecciones de objetos o marcas para ver su diferencia.

C18. Completar una colección de elementos distinguiendo los elementos añadidos hasta completar una cantidad.

C19. Formar una colección con el numeral de su cardinal.

C20. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia delante hasta otro, formando una colección de marcas u objetos.

C21. Reconocer la relación de la suma y la resta.

C22. Conocer descomposiciones básicas (combinar dos número de dos cifras).

C23. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos hasta que queda una cantidad comprobada por conteo.

C24. Quitar, tachar, redondear o separar una colección de objetos, marcas o dibujos hasta que queda una cantidad comprobada por subitización.

C25. Quitar una colección percibida por subitización.

C26. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia delante hasta otro llevando el rastro con una colección representada con los dedos o figurativa.

C27. Añadir una colección de marcas, dibujos u objetos a una anterior ya representada formando una única colección incluso varias veces.

C28. Representar varias colecciones sin distinguirlas mediante el color, tipo de objeto o posición.

C29. Considerar conjuntamente varias colecciones representadas por separado.

C30. Añadir una colección de numerales en la Tabla 100 contando a partir de cualquier numeral, tantos como cardinal tiene esa colección, incluso varias veces.

C31. Distinguir unidades compuestas de unidades simples, por ejemplo en un problema de grupos iguales, distinguir el número de grupos de los elementos por grupo.

C32. No representar la cantidad de número de grupos en un problema de grupos iguales.

C33. Representar la cantidad de número de grupos y la cantidad de número de elementos por grupos en un problema de grupos iguales.

C34. Representar solo el número de grupos en un problema de grupos iguales.

C35. Formar un número de grupos con la misma cantidad de objetos, marcas o dibujos, incluso bolas del rekenrek.

C36. Formar un número de grupos con la misma cantidad de dedos o bolas del rekenrek, o cualquier patrón añadiéndose a la anterior según se representan.

C37. Formar un número de grupos con la misma cantidad de numerales en la Tabla 100, añadiendo al anterior, según se representan.

C38. Representar la relación uno a muchos entre los grupos y los elementos por grupo.

C39. Determinar la cantidad total de elementos de n grupos representada sola la cantidad de número de grupos, realizando un conteo figurativo de los elementos que hay en cada grupo.

C40. Representar un solo grupo.

C41. Determinar la cantidad total de elementos de n grupos contando n veces la representación de un solo grupo en un problema de grupos iguales con n grupos y m elementos por grupo.

C42. Intercambiar el papel de número de grupos y elementos por grupo.

C43. Interpretar la situación de grupos iguales como suma de todos los grupos.

C44. Repartir de uno en uno una colección de objetos o marcas en un número de grupos dado.

C45. Repartir de varios en varios una colección de objetos o marcas en un número de grupos dado.

C46. Dividir aproximadamente una colección de objetos o marcas por la mitad.

C47. Repartir una colección en de marcas en grupos utilizando líneas.

C48. Repartir una colección en dos partes señalando dos objetos a la vez y repartiéndolos en los dos grupos a la vez.

C49. Dividir una colección representada con un patrón, ya sea los dedos o el rekenrek en dos partes iguales ayudándose de la configuración de las manos.

C50. Repartir objetos o marcas en un número de grupos hasta completar una colección.

C51. Identificar la solución de un reparto de grupos iguales como el número de elementos de uno de los grupos.

C52. Quitar o separar una colección de objetos o marcas de patrones como las manos o el rekenrek, hasta que queda una cantidad percibida por subitización o reconocida por su configuración.

C53. Formar una colección hasta 100 con bloques de base 10 poniendo barras para cada decena grupo de 10 y unidades para las cantidades que no completan una decena.

C54. Determinar el cardinal de una colección hasta 100 contando de 10 en 10 las barras de bloques de base 10 y de uno en uno las unidades.

C55. Tachar o señalar numerales empezando desde el último numeral seleccionado hasta otro dado menor, hacia atrás, en una secuencia numérica escrita.

C56. Determinar el cardinal de una colección de numerales en la Tabla 100 entre dos numerales contando de uno en uno empezando desde el mayor hacia atrás.

C57. Enunciar la secuencia de numerales hacia atrás una cantidad de números dada desde cualquier numeral contando de uno en uno y llevando el rastro con una colección figurativa o con ayuda de los dedos.

C58. Formar un número de grupos con bloques de base 10.

C59. Enunciar la secuencia numérica de 10 en 10 un número de veces dado llevando el rastro con los dedos o con una representación mental.

C60. Identificar el número de dos cifras que corresponde a una descomposición de una década (10, 20, 30,..) y unidades (1, 2, 3,…).

C61. Enunciar la secuencia de numerales hacia delante, una cantidad de numerales dado desde cualquier numeral contando de uno en uno llevando el rastro mentalmente o con ayuda de la configuración de los dedos.

C62. Sumar 10 a una década.

C63. Distribuir una colección en grupos de una cantidad dada.

C64. Formar grupos de marcas, dibujos u objetos de una cantidad dada hasta completar un total de elementos, también dado.

C65. Determinar mediante el conteo el número de grupos y las unidades sueltas de una colección distribuida en grupos, es decir, determinar la cantidad de unidades de distinto orden.

C66. Distribuir una colección de marcas en grupos representados uniéndolos con líneas.

C67. Quitar reiteradamente una cantidad a una colección hasta que no se pueda quitar esa cantidad entera llevando el rastro de las veces que se quita.

C68. Descomponer un número de dos cifras en una década (10, 20, 30, 40…) y unidades (1, 2, 3, 4…).

C69. Enunciar la secuencia de numerales de 10 en 10 desde cualquier década hasta otra, llevando el rastro de los numerales enunciados, ya sea con los dedos o con una representación mental, para saber cuántos grupos de 10 hay.

C70. Determinar el número de grupos de 10 de un número de dos cifras representado en la Tabla 100, como el número de filas enteras que hay, y el resto son las unidades sueltas.

C71. Identificar la posición de las decenas y la posición de las unidades en un número de dos cifras.

C72. Reconocer que en un número de dos cifras, las decenas son grupos de 10 y la cifra de las unidades son elementos sueltos que no completan un grupo 10.

C73. Establecer un orden entre las cantidades.

C74. Enunciar la secuencia de numerales a partir de un numeral distinto de 1, llevando el rastro de los numerales enunciados con una colección de objetos, marcas, dedos o incluso bloques de base 10 o huevera, representada con anterioridad.

C75. Sumar las unidades y las decenas por separado.

C76. Reconocer que al descomponer dos números en decenas y unidades si al sumar las unidades, se obtiene una cantidad mayor que 9, hay que sumar la decena a las iniciales.

C77. Identificar el número de dos cifras compuesto por un número de decenas y un número de unidades.

C78. Reconocer que en una cantidad representada con material organizada en varios grupos de 10 y una cantidad de objetos menor que 10, el número de grupos es la cifra de las decenas y la cantidad de objetos menor que 10 corresponden a la cifra de las unidades, en un número de dos cifras.

C79. Agrupar las barras de 10 por un lado y las unidades por otro, tras considerar juntas varias colecciones representadas con bloques de base 10, cambiando 10 unidades por una decena si es necesario.

C80. Enunciar la secuencia de numerales a partir de un numeral distinto de 1, llevando el rastro del número de numerales enunciados con una colección de numerales de la Tabla 100.

C81. Organizar dos números de dos cifras en un algoritmo colocando las unidades en una columna y las decenas en la otra.

C82. Empezar el procedimiento de un algoritmo por las unidades.

C83. Si las unidades suman más de 9 se coloca las unidades en esa columna y las decenas se ponen en la columna de las decenas.

C84. Determinar el número de grupos de 10 y las unidades sueltas en una colección representada con barras y unidades de bloques de base 10, identificando los grupos con las barras y las unidades con los cubitos.

C85. Formar una colección de hasta 100 con hueveras relacionando cada decena con una barra de base 10 y los huecos de una huevera con las unidades de base 10.

C86. Representar una cantidad con hueveras utilizando sus huecos como unidades.

C87. Reconocer que “un número dado de decenas” son una “década”, es decir, 4 decenas son 40.

C88. Formar una colección de hasta 100 con contadores individuales ya sean objetos, marcas o dibujos con grupos de 10.

C89. Determinar el cardinal de una colección hasta 100, contando de 10 en 10 los grupos de 10 y de uno en uno los elementos sueltos.

C90. Formar una colección de hasta 100 elementos con hueveras, colocando un cubo encajable en cada hueco.

C91. Reparto de una colección de cubos encajables, objetos o marcas primero en grupos de 10 y luego de uno en uno.

C92. Dividir aproximadamente una colección de cubos encajables, objetos o marcas en cuatro partes iguales (cuartos) y ajustar hasta que los cuatro grupos tengan la misma cantidad.

C93. Reparto con bloques de base 10, repartiendo primero las barras y si es necesario, cambiar barras por unidades para seguir el reparto.

C94. Proponer una cantidad de elementos por grupo en un problema de división partitiva y realizar conteo a saltos para probar si es adecuada.

C95. Repartir de uno en uno una colección de objetos o marcas en un número de grupos por ensayo y error, hasta completar un número de elementos por grupos dados en cada uno de los grupos, en un problema de división medida. Si no es el número de grupos pedido, se vuelve a probar con otro.

C96. Formar un número de grupos con hueveras rellenas de cubos encajables.

C97. Quitar una cantidad de cubos encajables u objetos colocados en hueveras.

C98. Restar las unidades a una decena y sumar lo que queda al resto de decenas, cuando se tiene que quitar una cantidad menor que 10 a una década.

C99. Quitar de uno en uno, una cantidad de otra representada con base 10, señalando los cubitos de las barras y/o sueltos considerados.

C100. Quitar de uno en uno una cantidad de otra representada con base 10, cambiando las decenas por unidades, separando las unidades que se quitan.

C101. Formar varios grupos de 10 con la Tabla 100, con una fila para cada grupo 10.

C102. Determinar el cardinal de una colección representada con barras y unidades de bloques de base 10, identificando el valor de barras como la posición de las decenas y de los cubitos sueltos, como la posición de las unidades.

C103. Sumar las decenas y después las unidades de un sumando al otro sumando.

C104. Anotar el conteo parcial en cada grupo.

C105. Enunciar la secuencia numérica a saltos distintos de 10 un número de veces dado, llevando el rastro con los dedos o con una representación mental.

C106. Sumar reiteradamente una cantidad acumulando al total anterior.

C107. Sumar agrupando en dobles hasta agotar y sumar los resultados anteriores.

C108. Pedir prestado una decena para poder restas las cifras de una columna en la que el número a restar es mayor que el número del minuendo.

C109. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia atrás hasta otro llevando el rastro con una colección representada con los dedos o figurativa.

C110. Enunciar la secuencia de numerales desde un número distinto de 1 hacia atrás hasta otro llevando el rastro con una colección representada con marcas u objetos.

C111. Restar decenas y unidades por separado.

C112. Sumar a un número de dos cifras las unidades necesarias para llegar a la siguiente década.

C113. Calcular el número de decenas que hay de una década a otra.

C114. Restar primero la decenas y luego las unidades.

C115. Reparto en un número de grupos dados de una cantidad por ensayo y error hasta ajustar.

C116. Descomponer una década en otras dos décadas menores.

1.3. Dificultades y errores

Tabla A1.15. *Dificultades y errores que incurren al resolver los problemas*

Dificultad	Errores observados
Dificultad en la comprensión de la tarea	Estrategia inadecuada (E1)
	No utilizar todas las cantidades del enunciado (E6)
	Dar como solución una cantidad del problema (E10)
	No indicar las dos respuestas en un problema de división medida con resto (E13)
	Despreciar el resto en un problema de división medida con resto (E14)
	Respuesta al azar (E16)
No dominio del procedimiento del conteo	Errores al formar colecciones (E2) o determinar el cardinal de una dada (E3)
	Dar un resto en un problema de división partitiva que no tiene resto (E22)
Dificultad en la escritura de los numerales	Escritura errónea de números de dos cifras (E7)
	Números en espejo (E18)
	Escribir mal la posición de un número de dos cifras (E25)
Falta de dominio de la secuencia de numerales hasta 99 (cadena numerable)	No usar bien la Tabla 100 (E4)
	Contar un numeral de más o menos en estrategias de conteo (E5)
	Construir colecciones grandes sin saber su cardinal (E26)
No adquisición de la secuencia de numerales	Error al nombrar numerales de dos cifras (E11)
	Error en la lectura del numeral (E15)
No conocer cuántas son varias decenas	Hacer grupos distintos de 10 (E17)
Distinguir las dos cantidades de distinto orden implicadas en el problema	Contar los representantes de grupos (E8)
	Confundir número de grupos y elementos por grupo (E9)
	Formar grupos de diferente cantidad a la dada (E12)
	Representación de las cantidades inadecuadas (E23)
	Invertir el papel de grupos y número de grupos, y dar la respuesta en número de grupos (E21)
	Considerar una decena como una unidad (E24)
	Considerar *n* decenas como *n* unidades (E27)
	Decenas como grupos distintos de 10 (E28)
No lectura del problema	Hacer grupos con un número de elementos que no corresponde
No comprender los algoritmos	Utilizarlos inadecuadamente (E30)
No dominio del algoritmo de la suma	Error en la llevada (E20)
No dominio del algoritmo de resta con llevada	Error en la llevada (E29)