

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física Teórica II



**COSMOLOGÍA CUÁNTICA INHOMOGENÉA : TEORÍA
CUÁNTICA DE CAMPOS Y GRAVEDAD DE LAZOS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR**

Daniel Martín de Blas

Bajo la dirección del doctor

Guillermo Antonio Mena Marugán

Madrid, 2014

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA II
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN FÍSICA

**Cosmología cuántica inhomogénea:
teoría cuántica de campos y gravedad
de lazos**

Daniel Martín de Blas

INSTITUTO DE ESTRUCTURA DE LA MATERIA
CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS



Director Tesis:
Dr. Guillermo A. Mena Marugán

Madrid, 2013

Agradecimientos

Muchas gracias Guillermo. Muchas gracias por haberme dado la oportunidad de haber realizado esta tesis doctoral, por introducirme en la investigación y por enseñarme a desenvolverme en este complicado mundo. También por darme tu apoyo y amistad durante todos estos años. Gracias también a Luis, por haber confiado en mí y haberme guiado hasta aquí.

Les estoy tremendamente agradecido a mis padres, Pilar y Javier, que siempre me han permitido tomar mis propias decisiones, apoyándome en ellas en todo momento. También a mis hermanos, Francisco y Juan, con los que he disfrutado creciendo, aprendiendo y compartiendo consejos. Gracias a mi prima María, a mis abuelas y al resto de mi querida y numerosa familia.

A Mikel, Laura y Ana que me han tenido que soportar en el instituto durante este difícil último año y que han hecho que las horas de trabajo sean mucho más placenteras. ¡Muchas gracias por vuestra compañía! A Javi y a Merce, que me han ido mostrando el camino a seguir y que siempre están ahí para echarme un mano. También a Tomek, Gil, Mariam, Prado, Salva, Luis, Raúl y el resto de compañeros con los que he pasado buenos momentos en el consejo y en el JARRAMPLAS.

A Zé y a Teresa que hicieron que mi breve estancia en Portugal fuera maravillosa. A Arnau por las buenas conversaciones que compartimos en Canadá. También a Jerónimo y a todos con los que he disfrutado investigando.

A los estupendos amigos que la universidad me ha llevado a conocer. A Víctor, Chuchi, Pérez, Miri y Fabio, que son mi familia en Madrid. A Marta, que me ha dado los años más felices de mi vida.

A María, Gonzalo, Hugo y Natalia, que son las personas que más admiro en el mundo y de las cuales me enorgullezco de ser su amigo. A Marta y Tania, que sin saberlo me han aportado la fuerza que necesitaba. También a Jorge, Quero, Chichas y al resto de mis amigos de Aranda.

La financiación para la preparación de esta tesis doctoral y la investigación contenida en ella proviene de la beca-contrato JAEPre_09_01796 del Programa “Junta para la Ampliación de Estudios” del CSIC junto con el Fondo Social Europeo.

Índice general

Introducción	5
1. Introducción a la cosmología cuántica de lazos	11
1.1. Descripción clásica de gravedad cuántica de lazos	11
1.2. Cosmología cuántica de lazos: modelo de FRW	13
1.3. Modelo de Bianchi I en cosmología cuántica de lazos	21
2. Introducción a la cuantización híbrida	31
2.1. Criterios de unicidad en teoría cuántica de campos	31
2.2. Cuantización híbrida y modelos de Gowdy	38
Objetivos y estructura de la tesis	43
I Resultados de unicidad para la cuantización de Fock	47
3. Criterios de unicidad: topología del tres-toro	49
3.1. El modelo de Klein–Gordon	50
3.2. Evolución unitaria	53
3.3. Unicidad de la representación de Fock	55
3.4. Unicidad de la descripción de campo	59
3.5. Discusión	63
4. Evolución unitaria en <i>de Sitter</i>	65
4.1. Campo escalar en <i>de Sitter</i>	66
4.2. Cuantización con evolución unitaria	70

4.3. Equivalencia unitaria de vacíos	77
4.4. Equivalencia con estados adiabáticos	81
4.5. Discusión de resultados	83
5. Unicidad bajo transformaciones no locales	87
5.1. Campo de Klein–Gordon	88
5.2. Transformaciones dependientes del modo	90
5.3. Implementación unitaria	93
5.4. Discusión	101
II Cosmología cuántica de lazos inhomogénea: cuantización híbrida y métodos aproximados	105
6. Cuantización híbrida: Gowdy con materia	107
6.1. Descripción clásica del modelo	108
6.2. Cuantización híbrida	116
6.3. Espacio de Hilbert físico	124
6.4. <i>Proyección</i> al modelo con simetría rotacional local	126
6.5. Discusión	128
7. Métodos aproximados	131
7.1. Gowdy con simetría rotacional local	132
7.2. Método de aproximación	135
7.3. Soluciones aproximadas al modelo de Gowdy	149
7.4. Discusión	152
Conclusiones	157
Apéndices	165
A. Estructuras complejas invariantes: modos complejos	165
B. Transformaciones no locales	167

C. Aproximaciones en Gowdy	171
Publicaciones	175
Summary	177
Bibliografía	188

Introducción

Desde su formulación por Albert Einstein, hace prácticamente un siglo, la teoría de la relatividad general ha explicado la interacción gravitatoria de una forma altamente satisfactoria. Actualmente no existe ninguna evidencia experimental que contradiga la validez de esta teoría, y, de hecho, los más recientes experimentos realizados para ponerla a prueba han servido para corroborarla. La teoría de la relatividad general explica la interacción gravitatoria de una forma geométrica. Así, el espaciotiempo donde vivimos, y sobre el cual se propagan los campos materiales, es un objeto dinámico y se curva debido a la presencia de materia y energía. Éste, a su vez, dicta a esta materia y a esta energía como propagarse en él, a saber, siguiendo en caída libre las *geodésicas* del espaciotiempo. La forma en cómo los campos alteran el espaciotiempo y a su vez éste influye en la propagación de las partículas está dada por las renombradas ecuaciones de Einstein. No obstante, la teoría de la relatividad general presenta una serie de problemas que hacen pensar que no es una teoría fundamental, sino que más bien es una teoría efectiva proveniente de otra fundamental. Por una parte, cabe resaltar la incompatibilidad de ésta con las teorías cuánticas que describen toda la materia que nos rodea y el resto de interacciones. Como ya se ha mencionado, las ecuaciones de Einstein relacionan a un nivel clásico cómo se curva el espaciotiempo con el contenido material del mismo. No obstante, este contenido material debe describirse de forma cuántica mientras que el espaciotiempo se describe de forma clásica. Este problema, aunque ha tratado de resolverse mediante otro tipo de procedimientos, sugiere que es necesaria una descripción cuántica de la relatividad general. Por otra parte, la teoría de la relatividad general nos muestra su propia incompletitud asegurando la existencia de *singularidades*, donde la propia teoría pierde su validez y por lo tanto su capacidad de predicción. Las singularidades son lugares del espaciotiempo donde la curvatura u otras cantidades físicas divergen. Su presencia en la teoría está garantizada por los Teoremas de Singularidad desarrollados principalmente por Hawking y Penrose [1]. No obstante, las regiones espaciotemporales donde tienen lugar estas singularidades son precisamente aquéllas en las que es esperable que los efectos

cuánticos tengan gran importancia. Por lo tanto, es razonable pensar que estas singularidades van a desaparecer al introducir una teoría cuántica de la gravedad.

Actualmente, la gravedad cuántica de lazos [2–5] es uno de los candidatos más prometedores a ser una teoría cuántica de la gravedad completa. La gravedad cuántica de lazos es una teoría no perturbativa, es decir, no parte de una linealización de la teoría clásica. Además, es independiente de estructuras métricas de fondo [5]. Su objetivo es obtener una teoría cuántica para la *gravedad einsteiniana* en cuatro dimensiones. Por lo tanto, ésta conserva aún la perspectiva geométrica de la gravitación, donde ahora cantidades geométricas como el área y el volumen están descritas cuánticamente. La gravedad cuántica de lazos canónica sigue el programa de cuantización desarrollado por Dirac para sistemas sujetos a ligaduras [6]. La relatividad general, en su formulación hamiltoniana, es un sistema completamente ligado, a saber, su densidad hamiltoniana está compuesta únicamente por ligaduras [7]. El conjunto de estas ligaduras está formado por tres ligaduras, denominadas ligaduras de momento, que generan las transformaciones de difeomorfismos espaciales, y la ligadura hamiltoniana, que genera las transformaciones de reparametrizaciones temporales *on shell*, es decir, cuando el resto de ligaduras y las ecuaciones del movimiento se verifican. Al cuantizar el sistema, el álgebra formada por las variables clásicas iniciales es representada mediante operadores sobre un espacio de Hilbert [8]. En este primer paso se ignora la existencia de ligaduras. Posteriormente, se procede a la construcción de los operadores que representan a las ligaduras clásicas. Cabe resaltar que, en general, la construcción de dichos operadores no es única sino que se dispone de cierta libertad (o ambigüedad) a la hora de elegir una ordenación de factores. De acuerdo con el programa de cuantización de Dirac, los *estados físicos* de la teoría son aquellos estados que son aniquilados por el conjunto de operadores que representan a las ligaduras. Finalmente, el espacio formado por los estados físicos generalmente ha de ser convertido en un espacio de Hilbert dotándolo de un producto interno.

La gravedad cuántica de lazos canónica parte de la formulación hamiltoniana de la relatividad general en términos de las denominadas variables de Ashtekar-Barbero [9], las cuales están compuestas por una tríada densitizada, a partir de la cual se puede definir la métrica espacial, y una *conexión* gauge. El uso de estas variables para describir la relatividad general es análogo al uso del campo eléctrico y el potencial vector, respectivamente, en la descripción de la interacción electromagnética. La utilización de estas variables en vez de las habituales dadas por las componentes de la métrica espacial (y sus momentos conjugados) hace que, por una parte, se simplifique considerablemente la forma que adoptan las ligaduras, y por otra que se introduzca en la teoría un nuevo conjunto de ligaduras, denomi-

nadas ligaduras de Gauss. Las variables básicas para la cuantización en gravedad cuántica de lazos están dadas por *holonomías* de la conexión a lo largo de caminos, o más concretamente por funciones de dichas holonomías denominadas *funciones cilíndricas*, y por flujos de la tríada densitizada a través de superficies.

A pesar de que la gravedad cuántica de lazos ha conseguido muchos avances hacia la culminación de una teoría cuántica de la gravedad einsteniana, como la construcción de operadores geométricos bien definidos o la obtención de una representación cuántica única, el programa de cuantización no ha podido ser completado debido principalmente a que no se ha podido resolver de forma satisfactoria la ligadura hamiltoniana, y, por lo tanto, dotar de dinámica a la teoría¹. Debido a esto, durante los últimos años ha tomado una gran importancia la aplicación de las técnicas y métodos utilizados en la gravedad cuántica de lazos a sistemas cosmológicos homogéneos, denominada cosmología cuántica de lazos [12–14]. Para estos sistemas, después de una reducción por simetría a nivel clásico, se obtiene un espacio de fases finito, y la única ligadura que queda por ser impuesta en el nivel cuántico es la hamiltoniana. Dos son las principales motivaciones para su estudio. Por una parte, es de esperar que el estudio de estas técnicas en modelos mucho más sencillos, en los cuales puede ser completado el programa de cuantización, muestren pistas sobre cómo proceder en la teoría general, para alcanzar así la teoría cuántica completa. Por otra parte, aunque es sabido que la cosmología cuántica de lazos no se corresponde completamente con una reducción por simetría de la teoría cuántica general, es de esperar que capture los efectos más importantes de la geometría cuántica (debidos a la gravedad cuántica de lazos) y que permita así explorar sus consecuencias en sistemas con gran relevancia física, como lo son los modelos que describen el universo en el que vivimos. De hecho, el estudio de las consecuencias físicas de la cosmología cuántica de lazos es uno de los caminos más prometedores para confrontar las teorías de gravedad cuántica con las observaciones.

Los primeros trabajos realizados en cosmología cuántica de lazos son debidos a Bojowald [15–18]. Estos trabajos presentan los primeros intentos de adaptar las técnicas e ideas de la gravedad cuántica de lazos centrándose en su aplicación a modelos cosmológicos simples y con especial énfasis en el modelo homogéneo, isótropo y con secciones espaciales planas, también denominado modelo de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) plano. Posteriormente, se estudiaron de forma más rigurosa y detallada los aspectos cinemáticos de la teoría para este modelo [19], mostrando la posibilidad de resolver su singularidad inicial. Finalmente, se consiguió completar el programa de cuantización para el modelo de FRW plano con

¹No obstante, existen casos en los que, al suponer la existencia de cierto contenido material específico, se ha podido completar la cuantización [10, 11].

un campo escalar homogéneo sin masa mínimamente acoplado [20, 21]. Para este modelo se logró caracterizar de forma completa el espacio de Hilbert físico, así como un conjunto completo de observables físicos. Esto permitió estudiar la dinámica de estados cuánticos usando el campo escalar homogéneo como tiempo interno. No obstante, fue preciso modificar el proceso de cuantización introduciendo una prescripción de *dinámica mejorada* para que los efectos cuánticos de la geometría obtenidos únicamente fueran importantes en la escala de Planck [22]. El estudio de la dinámica cuántica de estados semiclásicos mostró la existencia de una nueva fenomenología para tales densidades de Planck. Ésta llevaba a la resolución dinámica de la singularidad cosmológica inicial de la Gran Explosión (o *Big Bang* en inglés) mediante un rebote cuántico (o *Big Bounce*). Dicho Big Bounce unía de forma determinista dos ramas del universo, una en contracción y otra en expansión, las cuales rápidamente retomaban una trayectoria clásica bien definida tras el rebote [22].

Estudios posteriores, utilizando prescripciones de cuantización ligeramente distintas, que incluían simplificaciones y/o un orden de factores más conveniente, permitieron estudiar más detalladamente el mecanismo del rebote cuántico [23, 24]. De esta forma, se demostró la generalidad y robustez del Big Bounce para este modelo de FRW, apareciendo independientemente de los estados físicos y la discretización de la geometría considerados [24]. También, para este modelo, se pudo estudiar de una forma rigurosa la trayectoria dinámica seguida por los picos de ciertos estados semiclásicos, obteniendo así la *dinámica efectiva* proveniente de la cosmología cuántica de lazos [25].

Mediante la aplicación de las técnicas de la cosmología cuántica de lazos se ha conseguido la cuantización completa y satisfactoria de un gran número modelos cosmológicos homogéneos e isótropos, incluyendo cosmologías con curvatura positiva (universos cerrados) [26, 27], con curvatura negativa (universos abiertos) [28, 29], y con constante cosmológica [30, 31]. También se ha obtenido la cuantización de modelos más generales que incluyen anisotropías, como los modelos espacialmente planos de Bianchi I [32, 33] o los modelos de Bianchi II [34] y Bianchi IX [35], cuyas secciones espaciales son curvas. No obstante, la complejidad de estos modelos anisótropos, aumentada por la consideración de la prescripción de *dinámica mejorada* para ellos, hace que no hayan podido ser estudiados con tanto detalle como los modelos isótropos. Sin embargo, se ha probado que la singularidad puede ser eliminada de la teoría cuántica en un nivel cinemático, y su estudio a través de la *dinámica efectiva* muestra cómo las singularidades se evitan también de forma dinámica [36].

Debido al gran éxito obtenido por la cosmología cuántica de lazos en modelos

homogéneos, y en la resolución de singularidades cosmológicas para los mismos, se abordó su aplicación a sistemas cosmológicos más generales y con una mayor riqueza física, como lo son los modelos inhomogéneos. Para ello, se consideraron los denominados *midisuperespacios* cosmológicos, que son sistemas reducidos por simetría pero que aún contienen campos, dando lugar a inhomogeneidades. La motivación para el estudio de estos modelos en cosmología cuántica de lazos fue diversa. Por una parte, estos modelos contienen, al igual que la teoría completa, infinitos grados de libertad y, por lo tanto, es de esperar que su estudio pueda servir como guía para completar el programa de cuantización de la teoría general. Por otra parte, este tipo de modelos puede describir situaciones más cercanas a escenarios realistas, por lo que su estudio puede llevar a la obtención de predicciones físicas que podrían ser contrastadas con las observaciones, permitiendo así verificar si la cuantización de lazos conduce a una teoría adecuada para describir la realidad. Por último, el estudio de estos sistemas también permite estudiar la robustez de los mecanismos de resolución de singularidades clásicas obtenidos para situaciones homogéneas.

Con el propósito de estudiar sistemas inhomogéneos en el marco de la cosmología cuántica de lazos, se desarrollaron técnicas de *cuantización híbrida* que combinan la cuantización de lazos con las herramientas usuales de la cuantización de Fock [33,37–39]. Por una parte, la cuantización de las variables que parametrizan las soluciones homogéneas a través de la cuantización polimérica² empleada en cosmología cuántica de lazos permite incluir los efectos más importantes de la geometría cuántica. Por otra parte, la cuantización de Fock de los (infinitos) grados de libertad restantes permite lidiar con la complejidad proveniente de los campos. El primer modelo estudiado y para el cual se desarrollaron estas técnicas híbridas fue el más sencillo de los modelos de Gowdy en vacío: el modelo con la topología del tres-toro y polarización lineal. De esta forma se consiguió la cuantización completa de un modelo cosmológico inhomogéneo, obteniendo unos operadores de ligadura bien definidos, donde los estados análogos a la singularidad clásica se desacoplan de la teoría y se recupera la descripción estándar de teoría cuántica de campos para las ondas gravitatorias. Sin embargo, es importante mencionar que este modelo sencillo dista de describir situaciones realistas, dado que no contiene un subconjunto de soluciones homogéneas e isótropas del tipo FRW, ni ninguna solución interpretable como próxima a ellas.

Con este contexto previo, el principal objetivo abordado en esta tesis es el de extender la aplicación de las técnicas de cuantización híbrida a modelos cosmológicos

²El tipo de cuantización empleada en el contexto de gravedad cuántica de lazos es denominada *polimérica* debido a que los grados de libertad están codificados a lo largo de aristas unidimensionales.

inhomogéneos más realistas y proporcionar parte de las bases necesarias que permitan la obtención de predicciones físicas fiables en ellos. Para esto, por una parte es necesario eliminar la ambigüedad existente en ciertas elecciones realizadas en el proceso de cuantización, en particular en la elección de una representación de Fock para las inhomogeneidades. Dicha ambigüedad lleva a obtener teorías cuánticas inequivalentes, lo que afecta a la fiabilidad de las predicciones extraídas. Para la cuantización híbrida, esta cuantización de Fock de las inhomogeneidades puede elegirse de forma única si se dispone de criterios adecuados en el contexto de la teoría cuántica de campos en espaciotiempos cosmológicos. Debido a esto, en esta tesis se ha estudiado una propuesta de criterios de unicidad, para seleccionar una única cuantización de Fock para campo escalares que se propagan en espaciotiempos no estacionarios. La aplicación de estos criterios de unicidad permite eliminar las ambigüedades presentes en el proceso de cuantización. Es importante mencionar que estos estudios tienen relevancia más allá de su uso en la cuantización híbrida, y permiten así obtener predicciones físicas robustas para sistemas cosmológicos inhomogéneos formulados mediante teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos.

En esta tesis, se estudiará además la extensión de las técnicas de cuantización híbrida para incluir un campo escalar sin masa homogéneo mínimamente acoplado al modelo de Gowdy mencionado. Con la introducción de un campo, aparte de permitir inhomogeneidades de tipo material, el modelo conseguido sí que admite soluciones homogéneas e isotropas de tipo FRW. Sobre este modelo cuantizado completamente a través de las técnicas híbridas, se estudiarán métodos aproximados para poder obtener soluciones que permitan posteriormente la extracción de predicciones físicas.

En los dos siguientes capítulos, a modo de introducción, se resumirán los procedimientos de la cosmología cuántica de lazos, se discutirán los criterios de unicidad en teoría cuántica de campos, y se comentarán las técnicas de cuantización híbrida.

Capítulo 1

Introducción a la cosmología cuántica de lazos

Como ya se ha mencionado, la cosmología cuántica de lazos estudia la cuantización de modelos cosmológicos con alto grado de simetría, tratando de mimetizar las ideas y técnicas de la gravedad cuántica de lazos en su formalismo canónico. En este capítulo se realizará una breve introducción a las técnicas empleadas en cosmología cuántica de lazos a través de la cuantización completa del modelo cosmológico más simple y mejor estudiado: el modelo de FRW plano con un campo escalar homogéneo. Además, por simplicidad y conveniencia, se considerarán secciones espaciales compactas, con la topología del tres-toro. Posteriormente se resumirá la cuantización de lazos para el modelo de Bianchi I, dado que se hará uso de la misma a lo largo de esta tesis.

1.1. Descripción clásica de gravedad cuántica de lazos

La teoría de la relatividad general en su formalismo hamiltoniano estudia espaciotiempos globalmente hiperbólicos que permiten una exfoliación en secciones espaciales Σ a partir de una elección de una función de tiempo [7]. De esta forma, la métrica espaciotemporal se puede escribir en términos de una función lapso N , un vector espacial (shift) N^a y la tres-métrica espacial h_{ab} definida sobre las secciones espaciales Σ . Al pasar a la formulación hamiltoniana se obtiene una teoría completamente ligada, donde los grados de libertad físicos están dados por la métrica espacial h_{ab} . Tanto el lapso como el shift resultan ser multiplicadores de Lagrange que acompañan respectivamente a la *ligadura hamiltoniana o escalar* C y a la *ligadura de difeomorfismos o de momentos* C_a . El momento canónicamente conjugado a la tres-

métrica se obtiene a partir de la curvatura extrínseca de las secciones espaciales K_{ab} , definida esencialmente como la derivada de Lie de h_{ab} a lo largo del vector unitario normal a las superficie espaciales.

Para la formulación de la gravedad cuántica de lazos, la relatividad general se describe como una teoría gauge a través de las variables de Ashtekar–Barbero, es decir, a partir de una conexión gauge $su(2)$ A_a^i y una tríada densitizada E_i^a que contiene la información de la métrica espacial. Para definir estas variables, primeramente se introduce una co-tríada e_a^i , definida en relación a la métrica espacial de la forma $h_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}$, donde δ_{ij} denota la delta de Kronecker en tres dimensiones [forma de Killing–Cartan de $SU(2)$]. La tríada e_a^i se define como la inversa de la co-tríada, $e_a^i e_j^b = \delta_j^b \delta_a^i$, y la tríada densitizada como $E_i^a = \sqrt{h} e_i^a$, donde h denota el determinante de la tres-métrica espacial. Por otra parte, la conexión de Ashtekar–Barbero [9] se construye a partir de la conexión de espín compatible con la tríada densitizada Γ_a^i , y la curvatura en forma triádica $K_i^a = K_{ab} e_i^b$. La conexión de espín está definida a partir de la tríada densitizada de la forma $2\Gamma_a^i = -\epsilon^{ijk} E_{jb} \mathcal{D}_a E_k^b$, donde ϵ^{ijk} representa el símbolo completamente antisimétrico y \mathcal{D}_a denota la derivada covariante inducida en las secciones espaciales Σ . Así, la conexión gauge se define como $A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma E_a^i$, donde γ es un parámetro real positivo denominado *parámetro de Immirzi* [40, 41]. Sus corchetes de Poisson con la tríada densitizada están dados por $\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = 8\pi G \delta_a^b \delta_j^i \delta(x-y)$, donde G es la constante de Newton y $\delta(x-y)$ es la distribución delta de Dirac definida en Σ .

En función de las variables de Ashtekar–Barbero las ligaduras (en vacío) toman la expresión [2]

$$C_a = F_{ab}^i E_i^b, \quad C = \frac{1}{\sqrt{|E|}} \epsilon_{ijk} \left[F_{ab}^i - (1 + \gamma^2) \epsilon_{mn}^i K_a^m K_b^n \right] E^{aj} E^{bk}, \quad (1.1)$$

donde $F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k$ es el tensor de curvatura de la conexión de Ashtekar–Barbero y E representa el determinante de la tríada densitizada.

Por otra parte, al describir la relatividad general en función de las variables de Ashtekar–Barbero se ha ampliado el espacio de fases original, introduciendo grados de libertad $SU(2)$ adicionales, y, como contrapartida, introduciendo además una nueva ligadura $\mathcal{G}_i = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} \Gamma_a^j E^{ak} = 0$, denominada *ligadura de Gauss*, que proporciona la invariancia de la teoría bajo transformaciones $SU(2)$.

Las variables básicas de partida para la cuantización de lazos están dadas por holonomías de la conexión, como variables de configuración básicas, y flujos de la tríada densitizada, como sus momentos. La holonomía de la conexión a lo largo de

la arista e se define como

$$h_e(A) = \mathcal{P} \exp \left\{ \int_e dx^a A_a^i(x) \tau_i \right\}, \quad (1.2)$$

donde \mathcal{P} representa el operador ordenación de camino y τ_i son generadores del grupo $SU(2)$, que satisfacen $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk} \tau^k$. Por otra parte, el flujo de la tríada densitizada a través de una superficie S , suavizado a partir de funciones f^i con valores en $su(2)$, se define como

$$E(S, f) = \int_S f^i E_i^a \epsilon_{abc} dx^b dx^c. \quad (1.3)$$

La elección de estas variables para describir el espacio de fases es debida a que, por una parte, tienen mejores propiedades bajo transformaciones gauge, mientras que, por otra parte, son objetos invariantes bajo difeomorfismos y su definición no depende de estructuras de fondo.

1.2. Cosmología cuántica de lazos: modelo de FRW

1.2.1. Descripción clásica del modelo

Como ya se ha indicado, se presentará la cuantización de lazos del modelo de FRW plano con un campo escalar homogéneo. Al considerar secciones espaciales planas compactas, el modelo tiene una celda fiducial \mathcal{V} finita natural, cuyos lados tienen longitud coordenada 2π , y donde se define una métrica fiducial diagonal ${}^\circ h_{ab}$. Primeramente, se describe el sector gravitatorio del espacio de fases en función de las variables de Ashtekar–Barbero. Debido a la isotropía y homogeneidad de las secciones espaciales del modelo, tanto la conexión como la tríada densitizada están determinadas por una única variable, c y p , respectivamente, de la forma

$$A_a^i = \frac{c}{2\pi} {}^\circ e_a^i, \quad E_i^a = \frac{p}{4\pi^2} \sqrt{{}^\circ h} {}^\circ e_i^a, \quad (1.4)$$

donde se usa una co-tríada fiducial diagonal ${}^\circ e_a^i = \delta_a^i$. La variable p que describe la tríada es proporcional al cuadrado del factor de escala del universo de FRW, de forma que $|p|^{3/2} = V$ es el volumen físico. Estas variables satisfacen unos corchetes de Poisson $\{c, p\} = 8\pi G\gamma/3$.

El contenido material del modelo está dado por el par canónico proporcionado por el campo escalar (homogéneo) sin masa ϕ y su momento canónicamente conjugado P_ϕ , que verifican los corchetes de Poisson $\{\phi, P_\phi\} = 1$.

Debido a la homogeneidad del modelo y el gauge diagonal elegido, la ligadura de Gauss y la ligadura de difeomorfismos se verifican automáticamente. Por otra parte, dado que la conexión de espín para el modelo de FRW plano se anula, la parte gravitatoria de la ligadura Hamiltoniana (salvo constantes) está dada por

$$C_{\text{grav}}^{\text{FRW}} = -\frac{1}{16\pi G\gamma^2} \int_{\mathbb{T}^3} dx^3 \frac{\epsilon_{ijk} F_{ab}^i E^{aj} E^{bk}}{\sqrt{|E|}}, \quad (1.5)$$

por lo que la ligadura hamiltoniana completa toma la expresión en estas variables

$$C^{\text{FRW}} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} c^2 \sqrt{|p|} + \frac{P_\phi^2}{2V} = 0. \quad (1.6)$$

Para definir las holonomías de las conexiones, debido a la homogeneidad del modelo, es suficiente con considerar aristas rectas orientadas de longitud (fiducial) $2\pi\mu \in \mathbb{R}$ a lo largo de las tres direcciones fiduciales. De esta forma, la holonomía en la dirección i -ésima está definida como

$$h_i^\mu(c) = e^{\mu c \tau_i} = \cos\left(\frac{\mu c}{2}\right) \mathbb{1} + 2 \sin\left(\frac{\mu c}{2}\right) \tau_i, \quad (1.7)$$

donde $\mathbb{1}$ representa la identidad $[SU(2)]$. Así, las holonomías están completamente determinadas por sus elementos de matriz, y éstas por las funciones $\mathcal{N}_\mu(c) = e^{i\mu c/2}$. Éstas últimas generan el álgebra de configuración, que por tanto viene dada por el álgebra de *funciones cuasiperiódicas* de la conexión.

Por otra parte, los flujos de las tríadas densitizadas están dados por

$$E(S, f) = \frac{p}{4\pi^2} A_{S,f}, \quad (1.8)$$

donde $A_{S,f}$ corresponde al área fiducial de S , suavizada con las funciones de prueba f^i . Así pues, la información físicamente relevante de los flujos está determinada por p . De esta forma, el espacio de fases gravitatorio para FRW en cosmología cuántica de lazos se describe en función de las variables $\mathcal{N}_\mu(c)$ y p , las cuales satisfacen los corchetes de Poisson,

$$\{\mathcal{N}_\mu(c), p\} = i \frac{4\pi G\gamma}{3} \mu \mathcal{N}_\mu(c). \quad (1.9)$$

Para describir la parte gravitatoria de la ligadura hamiltoniana (1.5) en función de las variables de holonomía se hace uso de la expresión clásica para el tensor de curvatura F_{ab}^i dado a través de ciclos de holonomía en el límite en el que éstos encierran un área fiducial nula:

$$F_{ab}^i = -2 \lim_{A_\square \rightarrow 0} \text{tr} \left(\frac{h_{\square}^\mu - \mathbb{1}}{A_\square} \tau^i \right) \circ e_a^j \circ e_b^k. \quad (1.10)$$

Aquí, $i \neq j \neq k$, y $h_{\square_{jk}}^\mu = h_j^\mu h_k^\mu (h_j^\mu)^{-1} (h_k^\mu)^{-1}$ representa un ciclo cerrado de holonomías en el plano j - k que encierra un área fiducial $A_\square = 4\pi^2\mu^2$. Utilizando esta expresión para F_{ab}^i en la ecuación (1.5), la ligadura hamiltoniana del modelo se puede escribir de la siguiente manera¹

$$C^{\text{FRW}} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2 V} \left[\frac{\text{sen}(\mu c)}{\mu} \text{sgn}(p) \right]^2 p^2 + \frac{P_\phi^2}{2V}, \quad (1.11)$$

donde $\text{sgn}(\cdot)$ representa la función signo, $\text{sen}(\mu c) = (\mathcal{N}_{2\mu}(c) - \mathcal{N}_{-2\mu}(c))/(2i)$, y en principio se habría de tomar el límite $\mu \rightarrow 0$.

1.2.2. Representación

Una vez se han definido las variables elementales para describir el modelo, se busca una representación del álgebra que satisfacen. Para el contenido material es habitual utilizar una representación de Schrödinger estándar². De esta forma, el operador representante del campo $\hat{\phi}$ actúa por multiplicación, mientras que el operador del momento, $\hat{P}_\phi = -i\hbar\partial_\phi$, actúa por derivación sobre el espacio de Hilbert dado por las funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida de Lebesgue, $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$.

Para representar el álgebra de holonomías y flujos del sector gravitatorio del espacio de fases, se utiliza una *representación polimérica* con propiedades análogas a la representación utilizada para la gravedad cuántica de lazos [43–48]. En particular, la representación no tiene un operador bien definido para la conexión c . De hecho, la construcción de esta representación puede realizarse, aunque no en su forma más convencional, siguiendo los procedimientos de la gravedad cuántica de lazos [49]. El álgebra de configuración está formada por el espacio lineal de las funciones complejas continuas y acotadas de la conexión, $f(c) = \sum_j f_j \mathcal{N}_\mu(c)$, dada como la suma finita de elementos de matriz de las holonomías. Completando esta álgebra con respecto a la norma del supremo se obtiene el álgebra C^* de Bohr dada por las funciones cuasiperiódicas [49]. El álgebra de Bohr puede identificarse con el álgebra de funciones continuas $C(\mathbb{R}_B)$ sobre la compactificación de Bohr de la recta real \mathbb{R}_B . Es importante mencionar que la compactificación de Bohr puede verse como el grupo (compacto y conmutativo) de homomorfismos que lleva (del grupo aditivo) de la recta real a(l grupo multiplicativo de) los números complejos de módulo unidad.

¹ Siguiendo estrictamente las técnicas de la gravedad cuántica de lazos, $\epsilon_{ijk} E^{aj} E^{bk} / \sqrt{|E|}$ también se ha de expresar a través de holonomías y su corchetes de Poisson con el volumen.

² También se ha estudiado este modelo utilizando una representación polimérica para el campo material [42].

De esta forma, la representación polimérica está definida sobre el espacio de funciones de cuadrado integrable $L^2(\mathbb{R}_B, d\mu_B)$ definidas en \mathbb{R}_B con respecto a la única medida de Haar $d\mu_B$ invariante bajo el grupo \mathbb{R}_B .

En cosmología cuántica de lazos es habitual utilizar la representación sobre el espacio de momentos. Para construirla, una base conveniente del espacio de Hilbert (no separable) está formada por los autoestados ortonormales del operador de tríada densitizada $|p\rangle$, $p \in \mathbb{R}$, con respecto al producto interno discreto $\langle p'|p\rangle = \delta_{p'p}$. Así, la actuación del operador de tríada densitizada \hat{p} sobre la base del espacio de Hilbert $\{|p\rangle, p \in \mathbb{R}\}$ actúa de forma diagonal, $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, mientras que la actuación de los operadores de holonomía $\hat{N}_\mu(c)$ está dada por

$$\hat{N}_\mu(c)|p\rangle = |p + p'(\mu)\rangle, \quad p'(\mu) = \frac{4\pi\ell_{\text{Pl}}^2\gamma}{3}\mu, \quad (1.12)$$

donde $\ell_{\text{Pl}} = \sqrt{G\hbar}$ es la longitud de Planck. Es decir, el operador de holonomía produce desplazamientos finitos.

Es importante mencionar que, debido al producto interno discreto, esta representación no es continua en μ . Por lo tanto, no existe un representante cuántico bien definido para la conexión, y la representación no es unitariamente equivalente a la utilizada en la cuantización de Wheeler–DeWitt (WDW) [50, 51], donde se usa una representación estándar de tipo Schrödinger.

1.2.3. Operador de ligadura hamiltoniana y dinámica mejorada

Una vez se ha introducido una representación, el siguiente paso consiste en obtener un representante cuántico para la ligadura hamiltoniana. No obstante, para obtener un operador bien definido es necesario tratar ciertas dificultades. Primeramente, para representar el tensor de curvatura F_{ab}^i , el límite introducido en (1.10) no está bien definido, dado que la representación es discontinua en μ . No obstante, en gravedad cuántica de lazos, el operador geométrico de área tiene un espectro discreto, con un mínimo no nulo para los autovalores posibles [52, 53]. Se denominará Δ a dicho mínimo. De esta forma, el operador de curvatura se define a través de ciclos de holonomías de longitud $\bar{\mu}$ que encierran un área física igual a este mínimo Δ , es decir, que cumplen $|p|\bar{\mu}^2 = \Delta$. Así se obtiene una longitud mínima $\bar{\mu}$ para computar las holonomías que depende del estado, dado que el área física depende él:

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \sqrt{\frac{|p|}{\Delta}}. \quad (1.13)$$

Esta prescripción para la elección de la longitud $\bar{\mu}$ en las holonomías se denomina habitualmente *dinámica mejorada* [22]. Debido a la dependencia de $\bar{\mu}$ con el estado, la actuación de los operadores de holonomía $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}$ ya no produce desplazamientos constantes en la base de estados etiquetados como $|p\rangle$. Por ello, es conveniente reetiquetar estos estados a través de un parámetro afín v para las traslaciones generadas por $\bar{\mu}c/2$ [22]. Así, se obtiene que $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}|v\rangle = |v+1\rangle$. Este parámetro v es proporcional al volumen físico: $v = \text{sng}(p)|p|^{3/2}/2\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\sqrt{\Delta}$. Es importante mencionar que el valor de $\bar{\mu}$ decrece cuando v (o p) crece, y, por lo tanto, toma valores pequeños para volúmenes grandes, recuperando así un límite clásico.

Por otra parte, dado que el operador \hat{p} tiene un espectro discreto en el que está contenido el cero, no es posible definir ninguna potencia negativa a través del teorema espectral. Por lo tanto, para definir el operador inverso de volumen $V^{-1} = |p|^{-3/2}$ es necesario definir una versión regularizada haciendo uso de la identidad clásica [19,54,55]

$$\frac{\text{sng}(p)}{|p|^{1-s}} = \frac{1}{4s\pi\gamma G \mu} \frac{1}{\mu} \text{tr} \left(\sum_i \tau^i h_i^\mu(c) \{ [h_i^\mu(c)]^{-1}, |p|^s \} \right), \quad (1.14)$$

donde s representa un número real tal que $0 < s < 1$. Fijando por simplicidad $s = 1/2$, tomando la longitud para las holonomías μ igual a la determinada por la dinámica mejorada y promoviendo esta identidad a operador se obtiene

$$\left[\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right] = \frac{3}{4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\sqrt{\Delta}} \widehat{\text{sgn}(p)} \widehat{\sqrt{|p|}} \left(\widehat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \widehat{\sqrt{|p|}} \widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} \widehat{\sqrt{|p|}} \widehat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \right). \quad (1.15)$$

Este operador actúa de forma diagonal en la base de estados $|v\rangle$ y su espectro converge rápidamente a $p^{-1/2}$ para estados con $p \gg 1$. Además, aniquila el estado $|v=0\rangle$. De esta forma, se define el operador inverso de volumen regularizado como

$$\left[\frac{1}{V} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{|p|}} \right]^3. \quad (1.16)$$

Teniendo en cuenta esto, para representar la ligadura hamiltoniana (1.11) únicamente falta por escoger una ordenación de operadores simétrica adecuada para la parte gravitatoria. Distintos tipos de prescripciones de ordenación se han estudiado en la literatura [22–24,56–58]. Aunque se ha mostrado con cálculos numéricos que, para distintas prescripciones, se obtienen predicciones físicas compatibles si se consideran estados semiclásicos [57], la estructura matemática a la que conducen es distinta. Aquí, se tomará la ordenación que lleva a la estructura más sencilla, deno-

minada *prescripción MMO simplificada*³ [24, 57]. En esta prescripción, se construye el representante cuántico del término $\text{sgn}(p) \text{sen}(\bar{\mu}c)V / \sqrt{\Delta}$, que se denominará como $\hat{\Omega}$, de manera tal que los factores $\text{sen}(\bar{\mu}c)\text{sgn}(p)$ se simetrizan de la forma

$$\frac{1}{2} \left[\widehat{\text{sen}(\bar{\mu}c)\text{sgn}(p)} + \widehat{\text{sgn}(p)\text{sen}(\bar{\mu}c)} \right], \quad (1.17)$$

donde $\widehat{\text{sen}(\bar{\mu}c)} = i(\hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}})/2$. Por otra parte, las potencias del operador de volumen se distribuyen de forma simétrica a izquierda y derecha. Así se obtiene

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \widehat{\sqrt{V}} \left[(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}) \widehat{\text{sgn}(p)} + \widehat{\text{sgn}(p)} (\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}}) \right] \widehat{\sqrt{V}}. \quad (1.18)$$

Igualmente, las potencias del operador inverso de volumen regularizado se distribuyen a la izquierda y derecha del operador de ligadura hamiltoniana, obteniéndose:

$$\hat{C}^{\text{FRW}} = \left[\frac{1}{V} \right]^{1/2} \left(-\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \hat{\Omega}^2 + \frac{\hat{P}_\phi^2}{2} \right) \left[\frac{1}{V} \right]^{1/2}. \quad (1.19)$$

La elección de esta simetrización para la representación del operador de ligadura hamiltoniana resulta ser muy conveniente debido a que la actuación de este operador aniquila los estados de volumen cero $|v=0\rangle$ y deja invariante su complemento ortogonal. Por lo tanto, los estados análogos a la singularidad clásica se desacoplan de la teoría de forma natural. Así, se puede restringir el estudio al espacio de Hilbert donde ya se ha eliminado el estado de volumen cero.

En la práctica, es más conveniente utilizar el operador *ligadura hamiltoniana densitizada*, el cual está definido como

$$\hat{C}^{\text{FRW}} = -\frac{3}{8\pi G\gamma^2} \hat{\Omega}^2 + \frac{\hat{P}_\phi^2}{2}. \quad (1.20)$$

De esta forma los operadores $\hat{\Omega}^2$ y \hat{P}_ϕ^2 son observables de Dirac que conmutan con el operador de ligadura (densitizada). Los dos operadores de ligadura, en su versión original y en su versión densitizada, conducen a resultados equivalentes y su relación, así como la relación entre sus soluciones, está bien definida a través de un proceso de densitización [24].

Por otra parte, la actuación del operador geométrico $\hat{\Omega}^2$ sobre la base de estados $|v\rangle$ es de la forma

$$\hat{\Omega}^2|v\rangle = -\kappa^2 \left[x_+(v)|v+4\rangle - (x_0^+(v) + x_0^-(v))|v\rangle + x_-(v)|v-4\rangle \right], \quad (1.21)$$

³Las siglas MMO corresponden a las iniciales de los autores que la introdujeron: Martín-Benito-Mena Marugán-Olmedo.

donde $\kappa = \pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2$, y los coeficientes introducidos están dados por

$$x_-(v) = \frac{1}{2}\sqrt{|v||v-4|}|v-2| [\text{sgn}(v) + \text{sgn}(v-4)], \quad x_+(v) = x_-(v+4), \quad (1.22)$$

$$x_0^-(v) = \frac{1}{2}|v||v-2| [\text{sgn}(v) + \text{sgn}(v-2)], \quad x_0^+(v) = x_0^-(v+2). \quad (1.23)$$

Debido al orden de factores simétrico escogido, las funciones $x_+(v)$ y $x_-(v)$ tienen la propiedad de anularse respectivamente en los intervalos $[-4, 0]$ y $[0, 4]$ [24]. De esta forma, este operador únicamente relaciona estados $|v\rangle$ contenidos en alguna de las semiredes de paso cuatro $\mathcal{L}_\epsilon^\pm = \{v = \pm(\epsilon + 4n); n \in \mathbb{N}\}$, con $\epsilon \in (0, 4]$. Por lo tanto, puede restringirse la discusión a cualquiera de estos subespacios (separables) del espacio de Hilbert gravitatorio, denominados *sectores de superselección*. Por conveniencia, se restringirá el estudio a sectores con $v > 0$. De esta forma, el espacio de Hilbert cinemático (separable) para el sector gravitatorio \mathcal{H}_ϵ será el generado a partir de los estados $|v\rangle$ con $v \in \mathcal{L}_\epsilon^+$.

Puede demostrarse que el operador en diferencias finitas $\hat{\Omega}^2$ es un operador esencialmente autoadjunto [24, 59]. De hecho, para cada uno de estos sectores de superselección, el operador $\hat{\Omega}^2$ tiene un espectro no degenerado y absolutamente continuo igual a la recta real positiva [24, 60]. Sus autoestados generalizados $|e_\lambda^\epsilon\rangle = \sum_{v \in \mathcal{L}_\epsilon^+} e_\lambda^\epsilon(v)|v\rangle$, con autovalor $\lambda \in [0, \infty)$, están determinados completamente por la ecuación de autovalores a partir del dato inicial $e_\lambda^\epsilon(\epsilon)$. Para cada autofunción, este dato inicial, por conveniencia, se escoge como el número real positivo tal que el conjunto de autofunciones $|e_\lambda^\epsilon\rangle$ está normalizado a la delta de Dirac, es decir $\langle e_\lambda^\epsilon | e_{\lambda'}^\epsilon \rangle = \delta(\lambda - \lambda')$. De esta manera, todas estas autofunciones, que forman una base del espacio de Hilbert considerado, son reales. El comportamiento de las autofunciones $e_\lambda^\epsilon(v)$ en el límite $v \rightarrow \infty$ está dado como [24, 61]

$$e_\lambda^\epsilon(v) \xrightarrow{v \gg 1} 2 \left[e^{i\phi_\omega^\epsilon} e_\omega(v) + e^{-i\phi_\omega^\epsilon} e_{-\omega}(v) \right], \quad (1.24)$$

donde $e_{\pm\omega}(v)$, con $\omega^2 = \lambda$, representan las autofunciones del operador análogo a $\hat{\Omega}^2$ en la cuantización WDW

$$e_{\pm\omega}(v) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\kappa v}} \exp\left(\mp i\omega \frac{\log v}{4\kappa}\right). \quad (1.25)$$

Por otra parte, ϕ_ω^ϵ es una fase que se comporta como

$$\phi_\omega^\epsilon = T(|\omega|) + c_\epsilon + R_\epsilon(|\omega|), \quad (1.26)$$

donde $\lim_{\omega \rightarrow \infty} R_\epsilon(|\omega|) = 0$.

Finalmente, el operador \hat{P}_ϕ^2 es un operador esencialmente autoadjunto con un espectro doblemente degenerado y absolutamente continuo igual a la semirecta real

positiva. Sus autofunciones generalizadas con autovalor $(\hbar\nu)^2$ están dadas por las ondas planas $e_{\pm\nu}(\phi) = e^{\pm i|\nu|\phi} / \sqrt{2\pi}$.

1.2.4. Estructura física y rebote cuántico

Una vez se ha obtenido una base del espacio de Hilbert cinemático en la que la actuación del operador de ligadura hamiltonina (desitizada) es diagonal, se puede realizar un proceso de *promedio sobre grupos* [62–66], donde el grupo (uniparamétrico) considerado es el generado por el operador de ligadura. Este procedimiento se basa en el hecho de que los promedios son invariantes con respecto a la acción del grupo considerado, y, por lo tanto, proporcionan estados físicos. Como resultado se obtiene que las soluciones físicas son de la forma

$$\Psi(\nu, \phi) = \int_0^\infty e_\lambda^\epsilon(\nu) \left[\tilde{\psi}_+(\lambda) e^{i\nu(\lambda)\phi} + \tilde{\psi}_-(\lambda) e^{-i\nu(\lambda)\phi} \right], \quad (1.27)$$

donde ν y λ están relacionados como $\nu(\lambda) = [3\lambda/(4\hbar\gamma\kappa)]^{1/2}$. El procedimiento de promedio sobre grupos también permite obtener un producto interno natural para dotar al espacio de soluciones con una estructura de espacio de Hilbert. Este producto interno está dado por

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_0^\infty d\lambda \left[\tilde{\psi}_{1+}^*(\lambda) \tilde{\psi}_{2+}(\lambda) + \tilde{\psi}_{1-}^*(\lambda) \tilde{\psi}_{2-}(\lambda) \right]. \quad (1.28)$$

Alternativamente, se puede considerar el campo escalar ϕ como un tiempo interno emergente [20, 21]. De esta forma, se pueden identificar los estados físicos con las soluciones de frecuencia positiva $\tilde{\psi}_+(\lambda)$ [o negativa $\tilde{\psi}_-(\lambda)$], que son de cuadrado integrable con respecto al parámetro espectral $\lambda \in \mathbb{R}^+$ [24]. Un conjunto completo de observables de Dirac está formado por \hat{P}_ϕ y $\hat{v}|_{\phi_0}$, donde éste último se define mediante la acción del operador de volumen cuando el campo es igual a ϕ_0 . Estos observables son operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert físico.

Una vez completada la cuantización del modelo de FRW plano con un campo escalar homogéneo sin masa, se pueden estudiar las predicciones físicas de la teoría cuántica. Para ello, inicialmente se consideró la evolución de estados cuánticos de frecuencias positivas con un comportamiento semiclásico [20–22]. Estos estados semiclásicos corresponden a estados fuertemente picados a los largo de trayectorias clásicas para tiempos (esto es, valores de ϕ) suficientemente grandes. Los estados semiclásicos primeramente considerados fueron perfiles gaussianos picados en valores grandes para los observables \hat{P}_ϕ y $\hat{v}|_{\phi_0}$. El análisis numérico de la evolución de este tipo de estados mostró un nuevo fenómeno cuántico que llevaba a la resolución dinámica de la singularidad inicial (*Big Bang*), reemplazándola por un *rebote*

cuántico que conectaba dos ramas del universo que recuperaban rápidamente una evolución picada en soluciones clásicas [20–22]. Además, los estados semiclásicos considerados se mantenían picados sobre una trayectoria bien definida durante toda la evolución mostrando así que la resolución dinámica de la singularidad era un proceso determinista.

Posteriormente, utilizando la prescripción de ordenación de factores expuesta en esta sección, se mostró que el mecanismo del rebote cuántico aparece de forma general para todo tipo de estados cuánticos. Este resultado se obtiene a partir de la consideración de dos propiedades. Por una parte, los autoestados $e_\lambda(v)$ convergen para $v \gg 1$ de forma exacta a la combinación lineal de autoestados de la teoría de WDW dada en la expresión (1.24), que corresponde a una onda estacionaria. Por otra parte, los autoestados $e_\lambda(v)$ solo tienen soporte en un semieje de v , y que no contiene el valor $v = 0$, análogo a la singularidad clásica. De esta forma, independientemente de la forma de los estados considerados, la componente de onda entrante de la onda estacionaria debe evolucionar a la componente saliente, y viceversa, debido a que el flujo no puede escapar a través de $v = 0$. Por lo tanto, estas componentes entrante y saliente, que están asociadas respectivamente a ramas del universo en contracción y expansión, han de corresponderse necesariamente mediante un rebote cuántico.

1.3. Modelo de Bianchi I en cosmología cuántica de lazos

Una vez se han introducido las técnicas de la cosmología cuántica de lazos a través de la cuantización completa del modelo más sencillo, el modelo de FRW plano con un campo escalar sin masa homogéneo, se estudiará la aplicación de estas técnicas al modelo anisótropo de Bianchi I [67]. En particular, se centrará el estudio en el caso con secciones espaciales compactas con la topología del tres-toro, \mathbb{T}^3 . Las cosmologías de Bianchi I representan el modelo más sencillo de espaciotiempos homogéneos y anisótropos, y clásicamente están descritos a partir de tres factores de escala. Los primeros intentos en el contexto de cosmología cuántica de lazos de definir un espacio de Hilbert cinemático y la construcción del operador de ligadura Hamiltoniana se realizaron en la referencia [68]. Posteriormente se obtuvo su cuantización completa incorporando la dinámica mejorada [32, 33, 39, 60, 69] mediante dos prescripciones distintas. Dado que la discusión para este modelo es análoga a la realizada para el caso isótropo, únicamente se pondrá énfasis en las diferencias

clave entre ambos modelos.

1.3.1. Descripción clásica del modelo

Al igual que en el caso de FRW, consideraremos secciones espaciales compactas con la topología del tres-toro, y por lo tanto se considerará la celda fiducial naturalmente asociada. Para describir el sistema a través de variables de Ashtekar-Barbero, se introduce la tríada diagonal plana ${}^\circ e_a^i = \delta_a^i$, como ya se hizo en el caso isótropo. De esta forma, tanto la conexión como la tríada densitizada están caracterizadas por tres variables cada una

$$A_a^j = \frac{c^j}{2\pi} \delta_a^j, \quad E_j^a = \frac{p_j}{4\pi^2} \delta_j^a \sqrt{h}, \quad (1.29)$$

con $j = \theta, \sigma, \delta$. Es importante mencionar que los índices, tanto en c^j como en p_j , únicamente designan las variables asociadas a cada una de las direcciones, pero no representan un índice ni interno $[SU(2)]$, ni métrico, por lo que sobre ellas no se aplica el convenio de sumación de Einstein. Los corchetes de Poisson que verifican estas variables están dados por $\{c^i, p_j\} = 8\pi G \gamma \delta_j^i$. En función de las mismas, el elemento de línea para Bianchi I se escribe como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}{4\pi^2} \left(\frac{d\theta^2}{p_\theta^2} + \frac{d\sigma^2}{p_\sigma^2} + \frac{d\delta^2}{p_\delta^2} \right). \quad (1.30)$$

Por otra parte, dado que las secciones espaciales son planas, y la conexión de espín Γ_a^i se anula, la ligadura hamiltoniana, C^{BI} , está dada también por la expresión (1.5). Por lo tanto, en función de las variables introducidas, la ligadura hamiltoniana para el modelo de Bianchi I toma la forma

$$C^{\text{BI}} = -\frac{1}{8\pi G \gamma^2 V} \left(c^\theta p_\theta c^\sigma p_\sigma + c^\sigma p_\sigma c^\delta p_\delta + c^\delta p_\delta c^\theta p_\theta \right), \quad (1.31)$$

donde $V = \sqrt{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}$ representa el volumen físico del universo.

Como anteriormente, el espacio de fases gravitatorio se describe en función de holonomías de la conexión y flujos de las tríadas densitizadas [70], que serán las variables básicas para cuantizar. Basta con considerar holonomías sobre aristas orientadas de longitud fiducial $2\pi\mu_j \in \mathbb{R}$ a lo largo de las tres direcciones fiduciales: $h_j^{\mu_j}(c^j) = e^{\mu_j c^j \tau_j}$. Por otra parte, la información física de los flujos está contenida en las variables p_j .

1.3.2. Representación para Bianchi I

El álgebra de configuración para Bianchi I está compuesta por el producto tensorial de tres copias (una por cada dirección) de la que se obtiene para la parte gravitatoria del modelo de FRW. Por ello, el espacio de Hilbert cinemático es también el producto tensorial de tres copias: $\mathcal{H}^{\text{BI}} = \otimes_j \mathcal{H}^j$, donde $\mathcal{H}^j \equiv \mathcal{H}_{\text{grav}}^{\text{FRW}}$. Por lo tanto, una base de estados para el espacio de Hilbert cinemático está dada por los autoestados de los operadores de tríada densitizada $|p_\theta, p_\sigma, p_\delta\rangle$, con $p_j \in \mathbb{R}$, los cuales son ortonormales con respecto al producto interno discreto

$$\langle p_\theta, p_\sigma, p_\delta | p'_\theta, p'_\sigma, p'_\delta \rangle = \delta_{p_\theta p'_\theta} \delta_{p_\sigma p'_\sigma} \delta_{p_\delta p'_\delta}. \quad (1.32)$$

Sobre esta base de estados, la actuación de los operadores que representan los elementos de matriz de holonomía, para cada una de las direcciones $j = \theta, \sigma$ y δ , desplazan únicamente la etiqueta p_j :

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu_j} |p_j\rangle = |p_j + p'_j(\mu_j)\rangle, \quad p'_j(\mu_j) = 4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2 \mu_j. \quad (1.33)$$

1.3.3. Dinámica mejorada

Al igual que en caso isótropo, debido a la discontinuidad de la representación en la conexión, para obtener un representante cuántico bien definido del operador de curvatura F_{ab}^i a través de la expresión (1.10), es necesaria la introducción de unas longitudes mínimas para computar las holonomías. En el caso de Bianchi I es necesario definir tres longitudes mínimas $\bar{\mu}_j$. En los primeros intentos de incorporar la dinámica mejorada para Bianchi I [60,69,70] se consideró la generalización más sencilla de la prescripción de dinámica mejorada para FRW, obtenida considerando la relación (1.13) para cada una de las direcciones. El operador de ligadura hamiltoniana resultante se componía de operadores con una acción análoga a la del operador $\hat{\Omega}$ dado en (1.18), actuando cada uno de estos operadores en una de las direcciones por separado. Dado que los operadores así obtenidos conmutan entre sí, el operador de ligadura (densitizada) se pudo diagonalizar a partir de los autoestados de dichos operadores. Además, se pudo determinar el espacio de Hilbert físico del sistema [60] de forma análoga a la realizada para el modelo de FRW. Sin embargo, para esta prescripción de dinámica mejorada, los resultados físicos obtenidos dependían de elecciones fiduciales al considerar topologías no compactas [71]. Por otra parte, esta elección de longitudes fiduciales mínimas no se sigue en realidad de la deducción heurística realizada para el modelo de FRW [22,70]. Por ello, posteriormente

se consideró como alternativa la siguiente prescripción de dinámica mejorada [32]

$$\frac{1}{\bar{\mu}_j} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\left| \frac{p_k p_l}{p_j} \right|}, \quad (1.34)$$

con $j \neq k \neq l$. Esta elección de longitudes mínimas es precisamente la alcanzada tras realizar la misma deducción heurística que en FRW para el modelo de Bianchi I, de manera que el área física encerrada por los ciclos de holonomía sea igual a Δ [32]. Adicionalmente, esta prescripción de dinámica mejorada resulta ser la única en la que, para todas las direcciones fiduciales, los exponentes $\bar{\mu}_j c^j$ de los elementos de matriz de holonomía $\mathcal{N}_{\bar{\mu}_j}(c^j)$ tienen un corchete de Poisson constante con la variable

$$v = \text{sgn}(p_\theta p_\sigma p_\delta) \frac{\sqrt{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}}{2\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\sqrt{\Delta}}. \quad (1.35)$$

Esta variable v es proporcional al volumen físico, y coincide con la variable v definida en el caso isótropo al identificar las tres direcciones fiduciales.

Dada la definición de las longitudes mínimas $\bar{\mu}_j$, que depende del estado en las tres direcciones, la acción de los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j}$ es muy complicada. Para simplificarla, es preferible etiquetar los estados mediante de los parámetros

$$\lambda_j = \frac{\text{sgn}(p_j)\sqrt{|p_j|}}{(4\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\sqrt{\Delta})^{1/3}}, \quad (1.36)$$

sobre los cuales $\bar{\mu}_j c_j$ produce traslaciones en λ_j que no dependen explícitamente de este parámetro, aunque sí de los parámetros en las otras direcciones [32]. De esta forma la acción de los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j}$ sobre la base de estados $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle$ está dada por

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta} |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \left| \lambda_\theta \pm \frac{1}{2|\lambda_\sigma\lambda_\delta|}, \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle, \quad (1.37)$$

y de manera análoga para $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\sigma}$ y $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\delta}$. Para simplificar aún más la actuación de estos operadores, es conveniente hacer uso de la variable $v = 2\lambda_\theta\lambda_\sigma\lambda_\delta$, que se corresponde con la introducida en (1.35), y etiquetar los estados de la base como $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle$. Con ello, $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j}$ produce un desplazamiento unidad en v , mientras que en λ_j produce un escalado (contracción o dilatación) que únicamente depende de v y de su propio signo [32]. Es importante señalar que, dada la complicada dependencia de las longitudes mínimas $\bar{\mu}_j$ con el estado, los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j}$ para las distintas direcciones ya no conmutan entre sí.

1.3.4. Operador de ligadura hamiltoniana

Para construir el operador de ligadura hamiltoniana, al igual que en el caso isótropo, es necesario considerar la expresión del tensor de curvatura en función de las holonomías (1.10) y la existencia de una longitudes mínimas $\bar{\mu}_j$ dadas por la prescripción de dinámica mejorada (1.34). Esta consideración, al igual que ocurría en FRW, hace que los pares $c^j p_j$ en la expresión (1.31) se sustituyan por

$$c^j p_j \rightarrow \frac{\text{sen}(\bar{\mu}_j c_j)}{\bar{\mu}_j} p_j = \text{sgn}(p_j) \text{sen}(\bar{\mu}_j c_j) \frac{V}{\sqrt{\Delta}}, \quad (1.38)$$

donde se ha hecho uso de la expresión de $\bar{\mu}_j$ y $\text{sen}(\bar{\mu}_j c_j) = i(\mathcal{N}_{-2\bar{\mu}_j} - \mathcal{N}_{2\bar{\mu}_j})/2$. Para la construcción de los operadores que representan estas cantidades, se toma la misma ordenación que en el caso isótropo, escogiéndose una simetrización adecuada para $\widehat{\text{sgn}(p_j)} \widehat{\text{sen}(\bar{\mu}_j c_j)}$ y distribuyendo las potencias de \hat{V} de forma simétrica a izquierda y derecha. Como resultado, los operadores obtenidos toman la forma [39]

$$\hat{\Theta}_j = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \widehat{\sqrt{V}} \left[(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_j} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_j}) \widehat{\text{sgn}(p_j)} + \widehat{\text{sgn}(p_j)} (\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_j} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_j}) \right] \widehat{\sqrt{V}}, \quad (1.39)$$

que es análoga a la proporcionada en (1.18) para el operador $\hat{\Omega}$ en el caso isótropo. No obstante, debido a la prescripción de dinámica mejorada, los operadores $\hat{\Theta}_j$ para las distintas direcciones no conmutan entre sí dado que tampoco lo hacen los operadores de holonomía, y por lo tanto será necesaria la simetrización de sus productos al construir el operador de ligadura hamiltoniana.

Por último, para representar la ligadura hamiltoniana, queda por definir un operador de inverso de volumen regularizado en la prescripción de dinámica mejorada utilizada. Para ello se hace uso de la expresión clásica análoga a (1.14) en cada una de las direcciones fiduciales, y se promueve a operador tomando la expresión de $\bar{\mu}_j$. No obstante, ahora no se puede tomar $s = 1/2$ debido a que, dada la expresión de $\bar{\mu}_j$, no se obtendría una regularización de una potencia inversa de $|p_j|$. Por lo tanto, por simplicidad se escoge $s = 1/4$, con lo que [72]

$$\left[\frac{1}{|p_\theta|^{1/4}} \right] = \frac{\widehat{\text{sgn}(p_\theta)}}{2\pi\gamma\ell_{\text{pl}}^2\sqrt{\Delta}} \sqrt{\widehat{|p_\sigma p_\delta|}} \left[\hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}_\theta} \widehat{|p_\theta|}^{1/4} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_\theta} - \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_\theta} \widehat{|p_\theta|}^{1/4} \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}_\theta} \right], \quad (1.40)$$

y análogamente para los correspondientes operadores en las direcciones σ y δ . A partir de estos operadores, se define el operador inverso de volumen regularizado como

$$\left[\frac{1}{V} \right] = \otimes_j \left[\frac{1}{|p_j|^{1/4}} \right]^2, \quad (1.41)$$

La actuación sobre los estados de la base del espacio de Hilbert cinemático gravitatorio está dada por

$$\left[\frac{1}{V} \right] |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle = \frac{D^3(v)}{2\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2\sqrt{\Delta|v|}} |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle, \quad (1.42)$$

donde $D(v) = |v| \left| \sqrt{|v+1|} - \sqrt{|v-1|} \right|^2$.

Con todo esto, el operador de ligadura hamiltoniana resulta ser [39]

$$\hat{C}^{\text{BI}} = \left[\frac{1}{V} \right]^{1/2} \hat{C}^{\text{BI}} \left[\frac{1}{V} \right]^{1/2}, \quad (1.43)$$

donde \hat{C}^{BI} es la versión densitizada del operador de ligadura hamiltoniana:

$$\hat{C}^{\text{BI}} = -\frac{1}{16\pi G\gamma^2} (\hat{\Theta}_\theta \hat{\Theta}_\sigma + \hat{\Theta}_\sigma \hat{\Theta}_\theta + \hat{\Theta}_\sigma \hat{\Theta}_\delta + \hat{\Theta}_\delta \hat{\Theta}_\sigma + \hat{\Theta}_\delta \hat{\Theta}_\theta + \hat{\Theta}_\theta \hat{\Theta}_\delta). \quad (1.44)$$

Al igual que ocurría en el caso isótropo, la elección realizada en el orden de factores al construir el operador de ligadura hamiltoniana hace que, por una parte, se desacoplen los estados de volumen cero, y, por otra parte, su acción no relacione estados $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle$ con distinto signo en sus etiquetas. Consecuentemente, se puede restringir el estudio, por ejemplo, al subespacio de Hilbert generado por los estados cuyas etiquetas son todas estrictamente positivas. Una vez hecha esa restricción, es conveniente introducir las variables $\Lambda_j = \log(\lambda_j) \in \mathbb{R}$ y etiquetar los estados de la base como $|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle$, de forma que la acción de los operadores de holonomía al actuar sobre ellos es

$$\begin{aligned} \hat{N}_{\pm\bar{\mu}_\theta} |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle &= |\Lambda_\theta + w_v(\pm 1), \Lambda_\sigma, v \pm 1\rangle, \\ \hat{N}_{\pm\bar{\mu}_\sigma} |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle &= |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm 1), v \pm 1\rangle, \\ \hat{N}_{\pm\bar{\mu}_\delta} |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle &= |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde $w_v(m)$ únicamente depende de v y está dado por

$$w_v(m) = \log \left(1 + \frac{m}{v} \right), \quad (1.46)$$

con $m \in \mathbb{Z}$.

1.3.5. Sectores de superselección

La actuación de la parte gravitatoria del operador de ligadura hamiltoniana densitizada sobre la base de estados introducida está dada por

$$\begin{aligned} \hat{C}_{\text{grav}}^{\text{BI}} |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle &= \frac{\pi\hbar\ell_{\text{Pl}}^2}{16} [x_-(v) |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v-4\rangle_- - x_0^-(v) |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle_- \\ &\quad - x_0^+(v) |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle_+ + x^+(v) |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v+4\rangle_+]. \end{aligned} \quad (1.47)$$

En esta expresión, los coeficientes multiplicativos son los introducidos en (1.22) y (1.23), y se han definido las combinaciones de estados

$$\begin{aligned}
 |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm n\rangle_\pm &= |\Lambda_\theta + w_v(\pm n) - w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma + w_v(\pm 2), v \pm n\rangle \\
 &+ |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm n) - w_v(\pm 2), v \pm n\rangle + |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm 2), v \pm n\rangle \\
 &+ |\Lambda_\theta + w_v(\pm n) - w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma, v \pm n\rangle + |\Lambda_\theta + w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma, v \pm n\rangle \\
 &+ |\Lambda_\theta + w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma + w_v(\pm n) - w_v(\pm 2), v \pm n\rangle. \tag{1.48}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la acción no relaciona todos los estados del espacio de Hilbert, y aparecen sectores de supeselección. Para la etiqueta v , al igual que en el caso isótropo, los sectores de superselección son semiredes de paso cuatro contenidas en la semirecta real positiva, $\mathcal{L}_\epsilon = \{v = \epsilon + 4n, n \in \mathbb{N}\}$, donde $\epsilon \in (0, 4]$ es el valor mínimo de v en cada sector. Para las etiquetas Λ_θ y Λ_σ , los sectores de superselección son mucho más complejos. Cada uno de ellos está determinado completamente a partir de un valor inicial Λ_a^* ($a = \theta, \sigma$) y el valor del parámetro ϵ . La acción iterativa del operador de ligadura hamiltoniana únicamente relaciona estados cuyas etiquetas sean de la forma $\Lambda_a = \Lambda_a^* + w_\epsilon$, donde w_ϵ es cualquier número real perteneciente al conjunto

$$\mathcal{W}_\epsilon = \left\{ zw_\epsilon(-2) + \sum_k p_k [w_\epsilon(2m_k) - w_\epsilon(2n_k)] \right\}, \tag{1.49}$$

donde m_k y n_k son números enteros no negativos tales que $m_k \geq n_k$, y los números p_k son enteros. Además, z es cualquier número entero, salvo cuando $\epsilon \leq 2$, en cuyo caso $z = 0$. El conjunto infinito \mathcal{W}_ϵ está determinado totalmente por el parámetro ϵ , y puede probarse que es un conjunto numerable y denso en la recta real [33, 39].

Así pues, el operador de ligadura hamiltoniana densitizada mantiene invariantes estos sectores de superselección, a saber, los subespacios de Hilbert separables generados por el conjunto de estados

$$\{|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle; v \in \mathcal{L}_\epsilon, \Lambda_a = \Lambda_a^* + w_\epsilon, w_\epsilon \in \mathcal{W}_\epsilon, \Lambda_a^* \in \mathbb{R}\}. \tag{1.50}$$

Los espacios de Hilbert obtenidos a partir de la completación de dichos conjuntos con respecto a la medida discreta se denotarán por $\mathcal{H}_{\Lambda_\theta^*, \Lambda_\sigma^*, \epsilon} \equiv \mathcal{H}_{\Lambda_\theta^*}^{(\epsilon)} \otimes \mathcal{H}_{\Lambda_\sigma^*}^{(\epsilon)} \otimes \mathcal{H}_\epsilon$. En los sucesivos, se limitará la discusión a uno cualquiera de estos sectores.

1.3.6. Espacio de Hilbert físico

Debido a la complejidad introducida por la prescripción de dinámica mejorada, la acción de operador de ligadura hamiltoniana es muy complicada. En particular,

la acción de los operadores $\hat{\Theta}_j$ que la componen no puede factorizarse. Esto hace que sus propiedades espectrales no hayan sido determinadas aún y la ligadura no haya podido ser diagonalizada. Por lo tanto, para determinar sus soluciones no es posible proceder como se hizo en el caso isótropo.

Para estudiar las soluciones físicas, puede imponerse el operador de ligadura hamiltoniana sobre estados generalizados (ψ) (en general, se puede pensar en estados pertenecientes al espacio dual de su dominio). Estos estados pueden descomponerse formalmente en la base de estados como

$$(\psi| = \sum_{\bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma, \bar{v}} \psi(\bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma, \bar{v}) \langle \bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma, \bar{v}|, \quad (1.51)$$

donde $\bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma$ y \bar{v} toman valores en los correspondientes sectores de superselección. Imponiendo $(\psi|\hat{\mathcal{C}}^{\text{BI}^+} = 0$, se obtiene la ecuación

$$\psi_+(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v+4) = \frac{1}{x_+(v)} [x_0^-(v)\psi_-(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v) + x_0^+(v)\psi_+(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v) - x_-(v)\psi_-(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v-4)], \quad (1.52)$$

donde se han definido las proyecciones $\psi_\pm(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm 4) = (\psi|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm n)_\pm$, y $|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm n)_\pm$ son los estados introducidos en (1.48). Teniendo en cuenta que $x_-(\epsilon) = 0$, se ve que los términos $\psi_+(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, \epsilon + 4)$ quedan completamente determinados por los datos iniciales en la sección $v = \epsilon$. Además, se puede demostrar que a partir de las combinaciones $\psi_+(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, \epsilon + 4)$ se pueden obtener todos los términos individuales $\psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, \epsilon + 4)$ [39], y de manera análoga para todas las secciones de $v \in \mathcal{L}_\epsilon$. Por lo tanto, las soluciones físicas del operador de ligadura hamiltoniana quedan completamente determinadas por el conjunto (infinito pero numerable) de datos iniciales en la sección de volumen mínimo, pudiéndose identificar el espacio de Hilbert físico con el espacio de Hilbert de datos iniciales. El espacio de datos iniciales puede dotarse de una estructura de Hilbert considerando un conjunto completo de observables clásicos que formen un álgebra cerrada y que se relacionen entre sí mediante relaciones de conjugación compleja. Se puede definir entonces un producto interno imponiendo que las relaciones de conjugación se conviertan en relaciones de adjunción entre los operadores que los representan cuánticamente. Un conjunto (sobre)completo de observables que actúan sobre los datos iniciales, $\tilde{\psi}(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma) := \psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, \epsilon)$ está dado por los siguientes operadores $\widehat{e^{i\Lambda_a}}$ y $\widehat{U}_\epsilon^{w_\epsilon^a}$ (con $a = \theta, \sigma$ y $w_\epsilon^a \in \mathcal{W}_\epsilon$) [39]

$$\widehat{e^{i\Lambda_\theta}}\tilde{\psi}(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma) = e^{i\Lambda_\theta}\tilde{\psi}(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma), \quad \widehat{U}_\epsilon^{w_\epsilon^\theta}\tilde{\psi}(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma) = \tilde{\psi}(\Lambda_\theta + w_\epsilon^\theta, \Lambda_\sigma). \quad (1.53)$$

De manera análoga se definen $\widehat{e^{i\Lambda_\sigma}}$ y $\widehat{U}_\epsilon^{w_\epsilon^\sigma}$. De acuerdo con las condiciones de realidad, estos operadores son unitarios en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\Lambda_\theta^*, \Lambda_\sigma^*}^{(\epsilon)}$ generado por la

1.3. MODELO DE BIANCHI I EN COSMOLOGÍA CUÁNTICA DE LAZOS

base de estados $\{|\Lambda_\theta^* + w_\epsilon^\theta, \Lambda_\sigma^* + w_\epsilon^\sigma\rangle; w_\epsilon^\theta, w_\epsilon^\sigma \in \mathcal{W}_\epsilon\}$. Por tanto, dicho espacio proporciona el espacio de Hilbert físico con las propiedades deseadas para el modelo de Bianchi I en vacío, $\mathcal{H}_{\text{fís}}^{\text{BI}}$ [39].

Capítulo 2

Introducción a la cuantización híbrida en cosmología

Con el propósito de considerar sistemas físicamente más realistas, se pasa ahora a estudiar modelos cosmológicos con inhomogeneidades, y por tanto con infinitos grados de libertad, en el contexto de la cosmología cuántica de lazos. Para ello, se hace uso de técnicas de cuantización híbrida donde los grados de libertad homogéneos del sistema considerado son cuantizados mediante las técnicas poliméricas de la cosmología cuántica de lazos mientras que las inhomogeneidades se cuantizan como campos a través de una cuantización de Fock estándar. Es bien sabido que en la cuantización de campos en espaciotiempos curvos se realizan elecciones en distintos pasos del proceso que introducen ambigüedades en la teoría. Por ello, en este capítulo introductorio, primeramente se discutirán brevemente las ambigüedades presentes en la cuantización de campos en espaciotiempos cosmológicos y se comentarán distintos criterios de unicidad para eliminar dichas ambigüedades. Posteriormente se introducirán las técnicas de cuantización híbrida.

2.1. Criterios de unicidad en teoría cuántica de campos

La cuantización de sistemas que contienen campos, y por lo tanto tienen número infinito de grados de libertad, resulta ser mucho más compleja que la de sistemas con grados de libertad finitos. Esta complejidad se acentúa considerablemente al considerar la propagación de los campos en espaciotiempos curvos, en los cuales por lo general no se dispone de un alto contenido en simetría. La teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos, a falta de una teoría completa de gravedad cuántica, estudia la cuantización de campos, tanto materiales como gravitatio-

rios, propagándose en fondos espaciotemporales que son tratados de forma clásica [73,74]. De esta forma se trata de estudiar sistemas en los que son relevantes tanto los efectos cuánticos asociados a los campos como los efectos de la curvatura y no estacionariedad del espaciotiempo. Por supuesto, es esperable que esta teoría tenga únicamente un rango de aplicabilidad limitado, dado que para situaciones donde la curvatura se acerca a las escalas de Planck es esperable encontrar efectos cuánticos gravitatorios, siendo necesario describir también el fondo espaciotemporal cuánticamente. No obstante, este campo ha sido objeto de estudio intensivo, obteniéndose resultados de gran interés físico, como el efecto Unruh [75] y la radiación de Hawking [76] en el estudio de agujeros negros, y ha sido, y sigue siendo, de gran utilidad en el estudio de perturbaciones cosmológicas en el universo primitivo [77–79].

Es bien sabido que la construcción de una teoría cuántica que describa un sistema totalmente caracterizado de forma clásica es un proceso que contiene, en sus diversos pasos, múltiples elecciones ambiguas. La presencia de estas ambigüedades en el proceso de cuantización hace que, al tomar distintas elecciones, se obtengan teorías cuánticas inequivalentes y por lo tanto cada una de ellas lleve a obtener diferentes predicciones físicas. Este problema es especialmente relevante cuando se considera la cuantización de campos en espaciotiempos cosmológicos, como los que se van a estudiar a lo largo de esta tesis. Esto es debido a que, por una parte, las ventanas disponibles en cosmología para la detección de fenómenos cuánticos son muy pequeñas y, por otra parte, no es posible realizar un número ilimitado de mediciones sobre sistemas convenientemente preparados, sino que únicamente podemos realizar observaciones en el único sistema disponible, el universo en el que vivimos. Incluso si para el sistema clásico ya se ha identificado un conjunto determinado de variables elementales en el espacio de fases, y, con ello, un álgebra de funciones, aun así existen en general (infinitas) representaciones no equivalentes de dicha álgebra. Para sistemas suficientemente sencillos existen criterios que permiten seleccionar una representación de forma única, exigiendo ciertos requerimientos a la representación. Habitualmente, estos requerimientos están relacionados con las simetrías que posee el sistema clásico o con la imposición de ciertas propiedades físicamente (o matemáticamente) deseables.

Para las situaciones estudiadas en mecánica cuántica, donde los sistemas clásicos tienen un número finito de grados de libertad y un espacio de fases con una estructura lineal, es posible eliminar la ambigüedad en la elección de la representación. Para ello se construye el álgebra de Weyl a partir de la exponenciación (compleja) de las variables naturales de posición y momento. Posteriormente se impone que la representación de dicha álgebra sea irreducible, unitaria y fuertemente continua. Al imponer estas propiedades a la representación, el Teorema de Stone–Von

Neumann [80,81] garantiza la selección de una única clase de representaciones unitariamente equivalentes, y, por lo tanto, la descripción cuántica obtenida a partir de ellas es la misma desde el punto de vista físico. Es importante mencionar que la representación polimérica de la cosmología cuántica de lazos, dado que es una representación que no es fuertemente continua, no es unitariamente equivalente a la obtenida mediante el criterio comentado [49].

Para sistemas que contienen campos, la existencia de infinitos grados de libertad hace que la situación sea mucho más complicada, dejando de ser aplicable el teorema de Stone–Von Neumann [73]. Esto sucede incluso para sistemas en los que los campos satisfacen ecuaciones de evolución lineales, para los cuales, después de escribir las relaciones de conmutación canónicas de una forma similar al álgebra de Weyl, puede adoptarse una representación de tipo Fock [73]. En una cuantización de Fock, los campos se describen en términos de operadores de destrucción y creación y se dispone de una noción de vacío y de partículas (aunque no necesariamente con interpretación física bien definida). Toda la información relevante para la selección de una representación de Fock de las relaciones de conmutación canónicas está capturada en la elección de una *estructura compleja* J . La estructura compleja es una aplicación lineal en el espacio de fases cuyo cuadrado es igual a menos la identidad ($J^2 = -\mathbb{1}$) y que deja invariante la *estructura simpléctica*, es decir, es un simplectomorfismo. La estructura simpléctica $\Omega(\cdot, \cdot)$ es una aplicación bilineal en el espacio de fases que determina las relaciones de conmutación canónicas. Para la construcción de la representación de Fock se requiere también que la estructura compleja J sea compatible con la estructura simpléctica, en el sentido de que la aplicación bilineal obtenida a partir de ellas como $\Omega(J\cdot, \cdot)$ ha de ser definida positiva. Esta condición permite introducir un producto interno en el espacio de fases a partir de $[\Omega(J\cdot, \cdot) - i\Omega(\cdot, \cdot)] / 2$. Tomando el sector de frecuencias positivas de este espacio [esto es, el sector que se obtiene con el proyector $(1 - iJ)/2$] y completándolo mediante el producto interno introducido, se obtiene el espacio de Hilbert de una partícula de la teoría. El espacio de Fock se alcanza como la suma directa de los productos tensoriales simetrizados del espacio de Hilbert de una partícula.

Alternativamente, diferentes representaciones de Fock pueden interpretarse como diferentes elecciones de vacío, lo que implica distintas identificaciones de los operadores de destrucción y creación. También, estas representaciones pueden verse como distintas elecciones de bases de soluciones para las ecuaciones de evolución del campo, con diferentes caracterizaciones del campo en función de los coeficientes de la expansión en cada base. Las posibles elecciones de estas bases, que cumplen ciertas condiciones de ortonormalización, están relacionadas entre sí a través de transformaciones canónicas lineales. Estas transformaciones canónicas se denomi-

nan habitualmente *transformaciones de Bogoliubov*, y efectivamente cambian los conjuntos de variables de destrucción y creación. La diferencia esencial entre una teoría cuántica de campos lineal y la mecánica cuántica es que éstas transformaciones no siempre pueden implementarse de forma unitaria en la teoría cuántica.

Una transformación canónica lineal T admite una implementación unitaria en la representación de Fock determinada por una estructura compleja J si y solo si la parte antilineal de la transformación T_a , definida como $T_a = (T + JTJ)/2$, es un operador de tipo Hilbert–Schmidt [82, 83], es decir, si la traza de $T_a^\dagger T_a$, donde T_a^\dagger representa el operador adjunto, es finita. Esta condición es equivalente a exigir que el conjunto de coeficientes antilineales de la transformación de Bogoliubov (también denominados coeficientes beta de Bogoliubov) sea de cuadrado sumable. Desde un punto de vista físico la sumabilidad (de los cuadrados) de los coeficientes beta de Bogoliubov implica la condición de que la producción de partículas bajo la transformación analizada sea finita, esto es, que el vacío transformado tenga un número finito de partículas si se emplea el concepto de partícula asociado al vacío original.

De forma general, existen infinitas representaciones de Fock de las relaciones de conmutación canónicas que no son unitariamente equivalentes, es decir, la transformación que las relaciona no es implementable de forma unitaria en la teoría cuántica [73]. En estas situaciones, es necesario imponer criterios adicionales para seleccionar una representación de Fock de manera única (o más bien una clase única de representaciones unitariamente equivalentes). Habitualmente, estos criterios adicionales hacen uso de las simetrías clásicas del espaciotiempo en el que los campos se propagan, imponiendo que la representación de Fock sea invariante bajo estos grupos de simetrías. Para espaciotiempos altamente simétricos, esta imposición llega a seleccionar una única representación de Fock. Éste es el caso para campos propagándose en el espaciotiempo de Minkowski, donde la imposición de invariancia de la representación bajo su grupo de simetrías (el grupo de transformaciones de Poincaré) es suficiente para seleccionarla de forma única [73]. No obstante, en situaciones de menor simetría es necesario complementar este criterio de simetría con requerimientos adicionales.

Otro ejemplo para el cual se dispone de criterios que permiten seleccionar una representación única es el caso de campos escalares de masa no nula que se propagan en un espaciotiempo de tipo *de Sitter* [84], que es un espaciotiempo máximamente simétrico cuyo grupo de simetrías está dado por el grupo de Lorentz $O(1, 4)$. Para esta situación es posible demostrar que únicamente existe una representación de Fock (salvo equivalencia unitaria) cuyo vacío, denominado vacío euclídeo o vacío de Bunch–Davies [85], es invariante bajo el grupo de simetrías en de Sit-

ter [86]. Además el vacío de Bunch–Davies es un estado de tipo Hadamard, es decir, su función de dos puntos únicamente contiene singularidades de tipo Hadamard, que van como el inverso y el logaritmo de la distancia geodésica [87]. La restricción al estudio de estados de vacío que cumplen la condición de Hadamard es muy habitual en teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos ya que garantiza la regularización del tensor de energía-momento, permitiendo así obtener valores esperados bien definidos del mismo [88,89]. Además, para espaciotiempos con secciones espaciales compactas todos los estados de vacío de tipo Hadamard definen representaciones unitariamente equivalentes [73]. Volviendo de nuevo al espaciotiempo de tipo de Sitter, es importante mencionar que el vacío de Bunch–Davies no está bien definido para campos escalares sin masa; no obstante, es posible definir una familia de vacíos invariantes bajo sus simetrías espaciales y que cumplan la condición de Hadamard [90]. A estos estados de vacío se los denomina vacíos de Allen–Folacci. También, para campos escalares definidos en espaciotiempos de tipo de Sitter en dimensión $1 + 1$ es posible asegurar la existencia de una única solución invariante gaussiana a una ecuación de Schrödinger regularizada [91], lo que sirve para definir un vacío único.

Por otra parte, para el caso de campos escalares propagándose en espaciotiempos con un menor grado de simetría pero estacionarios, es decir, que poseen un campo vectorial de Killing temporal, es posible seleccionar una única cuantización de Fock privilegiada [92–94] haciendo uso de un producto interno definido a través del tensor de energía-momento y el campo de Killing temporal.

Cuando se considera la cuantización de campos escalares lineales propagándose en escenarios cosmológicos (no estacionarios) existe otra ambigüedad previa a la obtenida al elegir una representación de Fock. Esta ambigüedad está relacionada con la elección de un par canónico inicial para la descripción del campo y aparece de manera natural en sistemas definidos en situaciones no estacionarias. De hecho, es habitual en cosmología realizar escalados del campo de configuración a través de funciones dependientes del tiempo que absorben parte de la dependencia temporal del espaciotiempo en el que el campo se propaga. Esto sucede independientemente de que el espaciotiempo en el que se propaga el campo sea un espaciotiempo de fondo físico, efectivo (que incluye, por ejemplo, correcciones cuánticas, como en cosmología cuántica de lazos efectiva), o auxiliar (como en el caso de espaciotiempos reducidos por simetría, en los que la reducción lleva a una formulación de las ecuaciones de campo en menos dimensiones). Escalados de este tipo se usan habitualmente en el tratamiento de campos de Klein–Gordon en espaciotiempos de FRW, para transformar las ecuaciones de campo en otras sobre un espaciotiempo (auxiliar) estático. También son utilizados en el tratamiento de perturbaciones

cosmológicas escalares (y tensoriales) en torno a fondos de FRW, como para la introducción de las variables de Mukhanov–Sasaki [95,96]. Estos escalados del campo de configuración pueden completarse como transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo. Tales transformaciones dependientes del tiempo llevan a un nuevo par canónico de variables de campo que, en general, verifican unas ecuaciones dinámicas lineales distintas a las iniciales, lo cual afecta, por ejemplo, a la implementabilidad de la evolución de forma unitaria. De esta manera, en general, distintas elecciones de pares canónicos para el campo, relacionadas mediante transformaciones lineales dependientes del tiempo, conducen a cuantizaciones de Fock unitariamente inequivalentes.

Para situaciones cosmológicas (homogéneas e isotropas) con secciones espaciales compactas, donde los campos se propagan en espaciotiempos no estacionarios, se ha propuesto recientemente un criterio para seleccionar una única clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes, en el caso de campos de Klein–Gordon. Este criterio, por una parte, hace uso de las simetrías espaciales del sistema imponiendo que el estado de vacío que determina la representación sea invariante bajo ellas. Por otra parte, dado que no se dispone de simetrías temporales y no es posible imponer una invariancia temporal, este criterio exige el requerimiento más débil de que la evolución admita una implementación unitaria. Este último requisito es crucial para no renunciar a la interpretación probabilística estándar de la teoría cuántica, incluyendo la evolución de los observables correspondientes. Este criterio se propuso por primera vez para la cuantización de ondas gravitatorias en cosmologías de Gowdy [97–103]. Para estos modelos inhomogéneos, las ondas gravitatorias admiten una descripción alternativa en un espaciotiempo auxiliar reducido dimensionalmente, en el que satisfacen una ecuación de tipo Klein–Gordon con una masa efectiva que varía con el tiempo. Dependiendo de la topología del modelo de Gowdy considerado, las secciones espaciales del espaciotiempo auxiliar en las que estas ondas se propagan puede ser isomorfas al círculo o a la dos-esfera. Posteriormente, la aplicabilidad de este criterio de unicidad para la cuantización de Fock fue probada para campos escalares con funciones de masa dependientes del tiempo (casi) genéricas propagándose en espaciotiempos con secciones espaciales esféricas de tres o menos dimensiones [104,105]. La aplicabilidad del criterio para el caso físicamente más relevante de espaciotiempos cosmológicos con secciones espaciales tridimensionales planas y compactas (isomorfas al tres-toro) será abordado a lo largo de esta tesis [106,107]. Además, recientemente se ha conseguido generalizar este criterio para abordar cualquier espaciotiempo con secciones espaciales compactas de tres dimensiones o menos [108]. El criterio expuesto no solamente elimina la ambigüedad en la elección de una representación de Fock, seleccionando una única

2.1. CRITERIOS DE UNICIDAD EN TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

clase de representaciones unitariamente equivalentes, sino que también elimina la ambigüedad existente en la elección de una descripción canónica del campo entre todas las relacionadas mediante transformaciones canónicas lineales que incluyen el escalado del campo y una redefinición del momento del mismo a través de funciones dependientes del tiempo [109–111]. Más concretamente, el criterio selecciona un único escalado dependiente del tiempo para el campo: aquél que permite obtener una ecuación de Klein–Gordon para el campo escalado sobre un espaciotiempo auxiliar estático con una masa dependiente del tiempo. Y además, para espaciotiempos con secciones espaciales (compactas) en dos o tres dimensiones, el momento del campo también queda seleccionado de forma única. Para espaciotiempos con secciones espaciales en una dimensión, es posible realizar redefiniciones del momento del campo, las cuales, sin embargo, llevan a cuantizaciones unitariamente equivalentes [111].

Es más, hace poco tiempo, este criterio ha sido ligeramente generalizado para su aplicación en el estudio de perturbaciones cosmológicas. Más concretamente, se ha estudiado la cuantización de las perturbaciones de un campo escalar masivo mínimamente acoplado a un universo de FRW [112]. Para este modelo inflacionario, después de una fijación de gauge adecuada y una descomposición de los campos en modos adaptados a la dinámica, las perturbaciones del campo escalado adecuadamente satisfacen una ecuación de Klein–Gordon con una masa dependiente del tiempo que incluye correcciones subdominantes en el régimen ultravioleta. Estas correcciones dependientes del modo incluyen, por una parte, correcciones a la masa dependiente del tiempo y, por otra, un término de amortiguamiento. La presencia de estas correcciones no impide la aplicabilidad del criterio de evolución unitaria e invariancia bajo simetrías espaciales para seleccionar una única representación de Fock y eliminar la posibilidad de escalar el campo o realizar una redefinición del momento a través de funciones dependientes del tiempo [112]. No obstante, en este contexto de perturbaciones cosmológicas, aparecen de forma natural transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo y de los modos, que son transformaciones no locales. Por ejemplo, el término de amortiguamiento puede ser absorbido a través de una transformación canónica no local. Más importante aún, en el estudio de perturbaciones cosmológicas es habitual describir el sistema mediante cantidades invariantes de gauge, como los potenciales de Bardeen [113]. Es posible describir las perturbaciones de este modelo a través de un par canónico construido con los potenciales de Bardeen (por ejemplo, la densidad de la energía y la velocidad de las perturbaciones materiales). La relación entre estas variables invariantes de gauge y la descripción original está dada por una transformación dependiente del tiempo no local. Estas variables invariantes de gauge satisfacen una ecuación de

Klein–Gordon con masa dependiente del tiempo sin correcciones subdominantes. Por lo tanto, es posible aplicar, también para esta última descripción, el criterio de evolución unitaria para obtener una única representación de Fock. Por lo tanto, una nueva (posible) ambigüedad aparece al considerar estas transformaciones dependientes del tiempo y del modo, ya que pueden relacionar distintas descripciones del sistema en las que el criterio de evolución unitaria y simetría es aplicable de forma independiente, con lo que no está asegurado en principio que se seleccionen representaciones de Fock unitariamente equivalentes en tales descripciones. Dicho de otra forma, no está garantizado que estas transformaciones canónicas no locales sean implementables de forma unitaria en las representaciones de Fock seleccionadas por el criterio. Este problema será abordado en esta tesis en el capítulo 5.

2.2. Cuantización híbrida y modelos de Gowdy

Como ya se ha mencionado la aplicación de las técnicas de la cosmología cuántica de lazos a la cuantización de sistemas cosmológicos homogéneos resultó ser ampliamente satisfactoria, obteniéndose la cuantización completa de una gran variedad de sistemas y poniendo de manifiesto una nueva fenomenología física asociada a la geometría cuántica que conduce a la resolución de la singularidad de la Gran Explosión a través de un rebote cuántico determinista [20–22].

Debido a esto, se abordó con gran interés la extensión de estas técnicas al estudio de sistemas cosmológicos más complejos y, por tanto, con capacidad de describir situaciones más realistas, como lo son las cosmologías inhomogéneas. Las motivaciones para el estudio de sistemas cosmológicos inhomogéneos en el contexto de la cosmología cuántica de lazos son varias. Por una parte, permite comprobar la robustez en los resultados sobre resolución de singularidades cosmológicas obtenidos en la cosmología cuántica de lazos homogénea. Por otra parte, en este tipo de sistemas se pueden discutir las implicaciones físicas de la geometría cuántica de lazos en la propagación de las inhomogeneidades o perturbaciones. Por lo tanto, el estudio de estos modelos se presenta como una de las ventanas más prometedoras para obtener predicciones físicas en cosmología cuántica de lazos que puedan ser eventualmente contrastadas con las observaciones.

Con el objetivo de analizar este tipo de sistemas cosmológicos inhomogéneos en el marco de la cosmología cuántica de lazos, se introdujo recientemente un método de *cuantización híbrida* [33, 37–39]. Esta cuantización híbrida combina la cuantización polimérica de la cosmología cuántica de lazos con la cuantización de Fock de los campos que describen las inhomogeneidades. Para ello el espacio de fases de

sistema se divide en dos sectores, por una parte el *sector homogéneo*, que parametriza el subconjunto de soluciones homogéneas y por otra parte el *sector inhomogéneo*, que está formado por el resto de grados de libertad. De esta forma, el sector inhomogéneo se representa a través de las técnicas de Fock, lo cual permite tratar con métodos bien conocidos la complejidad proveniente de considerar infinitos grados de libertad. Por otra parte, el sector homogéneo se representa poliméricamente siguiendo las técnicas de la cosmología cuántica de lazos. Así, la cuantización híbrida asume como hipótesis que existe una jerarquía para la fenomenología proveniente de la geometría cuántica de lazos, de manera que los efectos más importantes son aquéllos que afectan a los grados de libertad homogéneos. En particular, se espera que la cuantización híbrida conduzca a modelos cuánticos que no contengan análogos a las singularidades cosmológicas clásicas de tipo Gran Explosión.

El primer modelo que se estudió a través de la cuantización híbrida, y para el cual se desarrolló este método de cuantización, fue el modelo de Gowdy con polarización lineal y secciones espaciales con la topología del tres-toro. Los modelos de Gowdy [114,115] son las cosmologías inhomogéneas más simples, y por lo tanto mejor estudiadas. Estas cosmologías son soluciones a las ecuaciones de Einstein, en principio en vacío, y representan espaciotiempos globalmente hiperbólicos, con dos campos vectoriales de Killing espaciales que conmutan. Las secciones espaciales de estos espaciotiempos son compactas y, además de la topología del tres-toro (\mathbb{T}^3), admiten como posibles topologías la de la tres-asa ($S^1 \times S^2$) y la de la tres-esfera (S^3). De todos los modelos de Gowdy, el más sencillo es el modelo con la topología del tres-toro y linealmente polarizado, en el cual se supone la ortogonalidad de los dos campos de Killing. Debido a su sencillez, este modelo ha sido estudiado de forma extensiva, tanto desde un punto de vista clásico [116–118]—conociéndose de forma exacta sus soluciones, que representan ondas gravitatorias en universos en expansión (o contracción)—, como desde el punto de vista de su cuantización mediante técnicas estándar [97, 119–126]. También se estudió para este modelo la obtención una cuantización de Fock en la que la dinámica sea implementable de forma unitaria [98,99] y se demostró posteriormente que dicha cuantización es única [100,101].

Para el estudio de este modelo a través de su cuantización híbrida, primeramente se realiza una reducción por simetría y posteriormente una fijación parcial de gauge adecuada. De esta forma, las únicas ligaduras que quedan por imponer cuánticamente son dos ligaduras globales: una ligadura de momentos y la ligadura hamiltoniana promediada en una sección espacial. El espacio de fases reducido de este modelo puede verse como cosmologías de Bianchi I [67, 127] con la topología del tres-toro, las cuales componen el sector homogéneo del modelo, y ondas gravitatorias linealmente polarizadas que únicamente dependen espacialmente de una

coordenada cíclica. Su cuantización híbrida se realiza utilizando una representación polimérica para Bianchi I [32] y una representación de Fock para las ondas gravitatorias. La cuantización de Fock que se escoge queda determinada de forma única al exigir la recuperación de la única cuantización de Fock estándar de este modelo con evolución implementable de forma unitaria [101] (e invariancia bajo la simetría espacial de gauge remanente en el sistema reducido) cuando la geometría homogénea de Bianchi I puede describirse como un fondo efectivo. Se obtuvo así una cuantización *completa* del modelo, incluida la construcción de operadores bien definidos para representar las ligaduras globales en un espacio de Hilbert cinemático. Es importante señalar que esta cuantización no es trivial, dado que los sectores homogéneo e inhomogéneo están acoplados a través de la ligadura hamiltoniana. Por otra parte, el estudio de los operadores de ligadura muestra cómo, por una parte, es posible desacoplar totalmente los estados análogos a la singularidad cosmológica clásica, por lo que la singularidad queda resuelta incluso a un nivel cinemático. Además, se demostró que las soluciones a los operadores de ligadura, es decir, los estados físicos, quedan unívocamente determinadas a partir de un conjunto de datos iniciales en la sección de volumen mínimo, pudiendo caracterizar el espacio de Hilbert físico como el espacio de Hilbert de datos iniciales. El espacio de Hilbert físico resultante es el producto tensorial del espacio de Hilbert físico para el modelo de Bianchi I y del espacio de Fock obtenido para la cuantización de Fock estándar con evolución unitaria y simetría espacial, recuperando con ello la descripción estándar de ondas gravitatorias que se propagan sobre un fondo de Bianchi I.

No obstante, este modelo dista de ser un modelo realista. En particular, dado que el sector homogéneo está dado por cosmologías de Bianchi I en vacío, el subespacio de soluciones homogéneas únicamente contiene soluciones anisótropas del tipo Kasner [128]. Por lo tanto, el subespacio de soluciones homogéneas no contiene soluciones isótropas de tipo FRW, próximas a gran escala al universo en el que vivimos. Con la motivación de estudiar modelos cosmológicos más realistas, se incluyó en este modelo un campo escalar sin masa mínimamente acoplado y con las mismas simetrías que el espaciotiempo. Este modelo no solamente permite soluciones clásicas homogéneas e isótropas del tipo de FRW, sino que también contiene inhomogeneidades materiales. Su cuantización híbrida [129] será objeto de estudio en esta tesis y se tomará como base para el estudio de técnicas aproximadas en el contexto de la cosmología cuántica de lazos con el objetivo de obtener predicciones físicas.

Por último, recientemente ha tomado gran interés el estudio de la cuantización híbrida de modelos inflacionarios, que consideran perturbaciones cosmológicas alrededor de espaciotiempos de FRW con un campo masivo mínimamente acoplado.

2.2. CUANTIZACIÓN HÍBRIDA Y MODELOS DE GOWDY

La cuantización híbrida de este tipo de modelos ha sido considerada para el caso de secciones espaciales cerradas [130], para el caso de topología plana [131–134], y ya se han empezado a estudiar sus implicaciones físicas. Es conveniente mencionar que el estudio de estos modelos inflacionarios a partir de estas técnicas de cuantización híbridas proporciona escenarios prometedores para la obtención de predicciones físicas que incluyan las correcciones de la cosmología cuántica de lazos y puedan llegar a ser contrastadas con las observaciones.

Objetivos y estructura de la tesis

El objetivo general de esta tesis es proporcionar las bases y herramientas necesarias para la obtención de predicciones físicas fiables en modelos cosmológicos inhomogéneos cuantizados a través de métodos híbridos en cosmología cuántica de lazos. Para ello, primeramente se estudiará la aplicabilidad de los criterios de unicidad para eliminar las ambigüedades presentes en la cuantización de Fock al considerar campos que se propagan en espaciotiempos cosmológicos de interés físico. Posteriormente se estudiará la extensión de las técnicas de cuantización híbrida para modelos cercanos a situaciones realistas, a partir de la inclusión de un campo material sin masa al modelo de Gowdy. Por último, sobre este modelo cuantizado completamente, se estudiarán técnicas aproximadas cuya aplicabilidad pueda extenderse a la cosmología cuántica de lazos y la cuantización híbrida, y que permitan extraer soluciones físicas aproximadas.

A parte de la introducción ya presentada, esta tesis está estructurada en dos partes y contiene un total de cinco capítulos. Además, se han añadido tres apéndices donde se detallan cuestiones complementarias a los resultados presentados. Los tres primeros capítulos se dedicarán al estudio de la cuantización de Fock de campos escalares en escenarios cosmológicos y, en particular, al estudio de la aplicabilidad de criterios de unicidad para eliminar las ambigüedades presentes. Los dos últimos capítulos están dedicados al estudio de la cuantización híbrida y al desarrollo de métodos aproximados a través de los cuales puedan obtenerse soluciones físicas aproximadas en este contexto.

- Parte 1: Resultados de unicidad para la cuantización de Fock.
 - En el capítulo 3 se estudiará la cuantización de Fock para un campo escalar con una masa dependiente del tiempo definido en un espaciotiempo (ultraestático) con secciones espaciales compactas y planas, con la topología del tres-toro. En particular, se estudiará la aplicabilidad para estos escenarios del criterio para seleccionar una representación de Fock única consistente en imponer la implementación unitaria de la evolución

además de la invariancia del vacío bajo las simetrías espaciales. Se estudiará también la aplicación de este criterio para eliminar la ambigüedad en la elección de un par canónico de variables para la descripción del campo. En particular, se mostrará que el criterio selecciona una única descripción canónica entre todas las relacionadas a través de transformaciones canónicas lineales que incluyen el escalado del campo y la redefinición su de momento con funciones dependientes del tiempo.

- En el capítulo 4 se estudiará la posibilidad de obtener una evolución unitaria para un campo escalar (tanto masivo como sin masa) propagándose en un espaciotiempo de tipo de Sitter. Se construirá una representación de Fock invariante bajo las simetrías espaciales para la cual se mostrará explícitamente que la evolución es implementable de forma unitaria. De esta forma, el criterio de evolución unitaria e invariancia bajo las simetrías espaciales seleccionará de manera única tanto la representación de Fock como la descripción de campo utilizada. Posteriormente se estudiará la relación entre el vacío seleccionado así de forma única y otros vacíos ampliamente utilizados en la literatura, como el vacío de Bunch–Davies para campos escalares de masa no nula o la familia de vacíos de Allen–Folacci para el caso de un campo escalar sin masa. Adicionalmente, se estudiará la equivalencia entre el vacío seleccionado y los estados de vacío adiabáticos de orden cero.
 - En el capítulo 5 se estudiará una nueva ambigüedad que aparece de forma natural en el estudio de modelos inflacionarios con perturbaciones cosmológicas escalares. Esta ambigüedad surge por la posibilidad de realizar transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo y *no locales* que relacionan distintas descripciones del sistema que admiten la implementabilidad de la evolución de forma unitaria. Primeramente se estudiará la forma más general para estas transformaciones, suponiendo que no mezclan modos desacoplados de forma dinámica y que admiten una expansión asintótica en serie de Laurent en las frecuencias de los modos. Finalmente se mostrará que todas estas transformaciones son unitariamente implementables en las respectivas cuantizaciones de Fock seleccionadas por el criterio de evolución unitaria e invariancia bajo la simetría espacial.
- Parte 2: Cosmología cuántica de lazos inhomogénea: cuantización híbrida y métodos aproximados.
 - En el capítulo 6 se estudiará la extensión de las técnicas de la cuanti-

zación híbrida introducidas para el modelo de Gowdy con polarización lineal y topología del tres-toro al modelo similar que incluye un campo escalar sin masa mínimamente acoplado como contenido material. Se mostrará cómo las inhomogeneidades materiales pueden describirse de forma idéntica a las ondas gravitatorias, pudiendo así aplicar casi inmediatamente las técnicas desarrolladas para el modelo en vacío. En consecuencia, al igual que en el modelo de vacío, se obtendrá la resolución a nivel cinemático de la singularidad cosmológica clásica y se podrá construir el espacio de Hilbert físico a partir del espacio de datos iniciales. Se obtendrá así la cuantización completa de un modelo más cercano a situaciones realistas que el de Gowdy en vacío, ya que ahora sí serán posibles soluciones homogéneas e isotrópicas de tipo FRW. También en este capítulo se estudiará la *proyección* a nivel cuántico al submodelo de Gowdy con simetría rotacional local.

- En el capítulo 7 se considerará el modelo cuántico de Gowdy con materia estudiado en el capítulo 6 y se analizarán y desarrollarán métodos aproximados que permitan la construcción de soluciones físicas aproximadas con interés físico, es decir, soluciones cercanas a FRW con pequeños efectos de anisotropía y bajo contenido en inhomogeneidades. Más concretamente, por simplicidad, se estudiarán estos métodos aproximados para el submodelo con simetría rotacional local. Se mostrará cómo usando las propiedades espectrales del operador geométrico de FRW, así como el comportamiento de sus autoestados, es posible sustituir los operadores de actuación más complicada, presentes en el operador de ligadura hamiltoniana, por otros operadores aproximados con un comportamiento más sencillo. Además, se estudiará la validez de estas aproximaciones a través de la comparación numérica de los elementos de matriz para los operadores originales y los operadores aproximados. Posteriormente se estudiará la construcción de soluciones aproximadas para el modelo de Gowdy a partir de la consideración de perfiles de anisotropía adecuados que permitirán desprestigiar las contribuciones de anisotropía y de autointeracción de las inhomogeneidades.

Los principales resultados alcanzados con estos análisis serán presentados las conclusiones.

Resumiendo, en esta tesis se pretende estudiar la validez y aplicabilidad de criterios de unicidad para eliminar las ambigüedades presentes en la cuantización de Fock de inhomogeneidades escalares, con el objeto de dotar de robustez a las

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A LA CUANTIZACIÓN HÍBRIDA

predicciones físicas extraídas en cosmologías cuánticas inhomogéneas dentro de los marcos de la teoría cuántica de campos y la cuantización híbrida. Además, se persigue extender dichas técnicas híbridas a modelos más cercanos a situaciones realistas, así como desarrollar métodos aproximados para el tratamiento de estos modelos y la obtención de predicciones.

Parte I

Resultados de unicidad para la cuantización de Fock

Capítulo 3

Criterios de unicidad para la cuantización de Fock en la topología del tres-toro

En este capítulo se estudiará la cuantización de Fock para un campo escalar con una masa dependiente del tiempo en escenarios cosmológicos con secciones espaciales planas y compactas, isomorfas al tres-toro. Este estudio tiene importantes aplicaciones en cosmología dado que cubre, por ejemplo, la descripción de campos de Klein–Gordon y de perturbaciones cosmológicas en espaciotiempos de FRW con secciones espaciales planas, los cuales están favorecidos por los datos observacionales actuales. Más concretamente, se analizarán dos tipos de ambigüedades que tienen lugar en la cuantización. Por una parte, la ambigüedad infinita existente en la elección de una representación de Fock para las relaciones canónicas de conmutación, entendible como la libertad en la elección de vacíos inequivalentes. Por otra parte, se analizará también la ambigüedad presente en la elección de un par de variables de campo canónicas entre todas las relacionadas mediante escalados del campo y redefiniciones del momento del campo a partir de funciones dependientes del tiempo. En particular, se estudiará la aplicabilidad del criterio para eliminar estas ambigüedades consistente en imponer a la representación de Fock que su vacío sea invariante bajo las traslaciones en el tres-toro y que admita una implementación unitaria de la evolución.

3.1. El modelo de Klein–Gordon

3.1.1. Descripción clásica

El sistema que se va a estudiar está formado por un campo escalar real φ definido en un espaciotiempo globalmente hiperbólico estático cuyas secciones espaciales son isomorfas al tres-toro y están equipadas con una métrica espacial h_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Se tomará el dominio temporal como cualquier intervalo real conexo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. En particular, no se impone que \mathbb{I} sea un intervalo no acotado, ni que tenga ninguna forma específica. Esta consideración es importante si se quieren aplicar los resultados presentados en este capítulo a casos de espaciotiempos efectivos los cuales habitualmente pueden ser tratados clásicamente (al menos imponiendo ciertas aproximaciones) únicamente para intervalos temporales restringidos (como ocurre en descripciones efectivas derivadas de la cosmología cuántica de lazos [13]). El campo escalar considerado satisface una ecuación de tipo Klein–Gordon, con un potencial cuadrático de la forma $V(\varphi) = s(t)\varphi^2/2$, que puede ser interpretado como un término de masa dependiente del tiempo. En un principio, se permitirá que $s(t)$ sea una función del tiempo arbitraria, aunque posteriormente se necesitará imponer que sus derivadas satisfagan ciertas condiciones poco restrictivas.

El espacio de fases canónico Γ asociado al campo escalar se obtiene a partir de los datos de Cauchy $(\varphi, P_\varphi) = (\varphi|_{t_0}, \sqrt{h}\dot{\varphi}|_{t_0})$ dados a un tiempo de referencia $t_0 \in \mathbb{I}$. Aquí el punto representa la derivada temporal y h denota el determinante de la métrica espacial. Este espacio de fases está dotado con una estructura simpléctica Ω que determina los corchetes de Poisson canónicos $\{\varphi(x), P_\varphi(y)\} = \delta(x - y)$, donde $\delta(x)$ representa la distribución delta de Dirac definida en el tres-toro. Es conveniente señalar que los corchetes de Poisson, y por lo tanto la estructura simpléctica, son independientes de la elección del tiempo de referencia t_0 .

Las ecuaciones de campo hamiltonianas están dadas por

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{h}}P_\varphi, \quad \dot{P}_\varphi = \sqrt{h}[\Delta\varphi - s(t)\varphi], \quad (3.1)$$

donde Δ representa el operador de Laplace–Beltrami estándar correspondiente a la métrica del tres-toro h_{ij} . Estas ecuaciones implican que el campo escalar satisface la ecuación de campo

$$\ddot{\varphi} - \Delta\varphi + s(t)\varphi = 0. \quad (3.2)$$

Es importante mencionar que este tipo de ecuaciones se pueden obtener en una gran variedad de modelos cosmológicos al considerar transformaciones canónicas que involucran escalados del campo mediante funciones dependientes del tiempo

[110] (y con la adopción de una variable temporal adecuada). Estas ecuaciones de campo son invariantes bajo el grupo de isometrías del tres-toro. Dichas isometrías se obtienen a partir de la composición de rotaciones rígidas en cada una de las direcciones espaciales periódicas θ_i (que diagonalizan la métrica del tres-toro),

$$T_{\alpha_i} : \theta_i \rightarrow \theta_i + \alpha_i, \quad (3.3)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{S}^1$ es un parámetro angular que da la rotación en la dirección i . Se denotará como $T_{\vec{\alpha}}$, con $\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, la transformación obtenida mediante la composición de las correspondientes transformaciones para cada una de las direcciones, es decir $T_{\vec{\alpha}} \equiv T_{\alpha_1} \circ T_{\alpha_2} \circ T_{\alpha_3}$.

Se descompone el campo real considerado (y su momento) en una expansión en serie adaptada a las simetrías del tres-toro usando las autofunciones del operador de Laplace–Beltrami. Estas autofunciones proporcionan una base ortonormal del espacio de funciones de cuadrado integrable en el tres-toro con el elemento de volumen determinado por h_{ij} . Esta expansión en serie puede realizarse utilizando autofunciones complejas (es decir, a partir de una base de Fourier de ondas planas):

$$\varphi(t, \vec{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\vec{m}} q_{\vec{m}}(t) \exp[i(\vec{m} \cdot \vec{\theta})]. \quad (3.4)$$

Aquí, \vec{m} representa la tripleta de números enteros (m_1, m_2, m_3) , y $\vec{m} \cdot \vec{\theta} = \sum_{i=1}^3 m_i \theta_i$. Debido a que el campo considerado es real, es necesario imponer las condiciones de realidad $q_{-\vec{m}}(t) = (q_{\vec{m}}(t))^*$, donde el símbolo $*$ denota la conjugación compleja. Esta descomposición compleja es útil ya que cada tripleta \vec{m} proporciona una representación irreducible del grupo de isometría. El problema es que hay que tener siempre presentes las condiciones de realidad.

El campo también puede descomponerse empleando una base de autofunciones reales (es decir, en una expansión de Fourier de senos y cosenos):

$$\varphi(t, \vec{\theta}) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \sum_{j=0}^3 \sum_{\vec{n}_j} \left[q_{\vec{n}_j}(t) \cos(\vec{n}_j \cdot \vec{\theta}) + x_{\vec{n}_j}(t) \sin(\vec{n}_j \cdot \vec{\theta}) \right]. \quad (3.5)$$

Aquí, se ha definido la tripleta $\vec{n}_0 = (n_1, n_2, n_3)$, con $n_i \in \mathbb{N}$, mientras que el resto de tripletas \vec{n}_j se definen a partir de \vec{n}_0 cambiando el signo del número n_j . Es importante mencionar que, cuando la tripleta \vec{n}_0 contiene uno o más ceros, no todos los modos $\{q_{\vec{n}_j}, x_{\vec{n}_j}\}$ son independientes para todos los posibles valores de j , sino que en realidad pueden representar el mismo modo. Se asumirá de ahora en adelante que éstos están considerados únicamente una vez en la suma superior sin cambiar ni complicar la notación introducida.

Se descompone el momento del campo de la misma manera. De esta forma, los coeficientes para sus modos reales satisfacen $p_{\vec{n}_j} = \dot{q}_{\vec{n}_j}$, y $y_{\vec{n}_j} = \dot{x}_{\vec{n}_j}$ (para las contribuciones de coseno y seno respectivamente). En términos de los coeficientes de Fourier de configuración y momento, los corchetes de Poisson no nulos están dados por $\{q_{\vec{n}_j}, p_{\vec{n}'_j}\} = \{x_{\vec{n}_j}, y_{\vec{n}'_j}\} = \delta_{\vec{n}_j, \vec{n}'_j}$.

Las ecuaciones de campo dadas en (3.2) implican que los modos están desacoplados dinámicamente, obteniéndose unas ecuaciones del movimiento para sus coeficientes de la forma

$$\ddot{q}_{\vec{n}_j} + [\omega_n^2 + s(t)] q_{\vec{n}_j} = 0, \quad \ddot{x}_{\vec{n}_j} + [\omega_n^2 + s(t)] x_{\vec{n}_j} = 0. \quad (3.6)$$

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento para los modos únicamente dependen del correspondiente autovalor del operador de Laplace–Beltrami $-\omega_n^2$, el cual está dado por $\omega_n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. De ahora en adelante, se utilizará una notación tal que el subíndice n será un número natural que ordenará el conjunto de estos autovalores de forma que $\omega_n^2 < \omega_{n'}^2$, si $n < n'$. Cada uno de estos autoespacios tiene una degeneración g_n dada por el número de modos independientes con un mismo autovalor $-\omega_n^2$. En el caso de la topología del tres-toro, la degeneración presenta una dependencia complicada en la etiqueta n debido a la existencia de *degeneración accidental*, dada por el hecho de que pueden existir distintas tripletas \vec{n}_j que lleven al mismo autovalor.

3.1.2. Cuantización de Fock

Como ya se ha comentado en la introducción de esta tesis, una cuantización de Fock queda determinada por la elección de una estructura compleja J . Con el fin de analizar la cuantización de Fock de este sistema, se introduce una estructura compleja inicial J_0 que servirá como punto de partida. La estructura compleja inicial que se tomará corresponde a la estructura que está naturalmente asociada al caso de un campo de Klein–Gordon libre y sin masa. La estructura compleja J_0 está completamente determinada por la métrica del tres-toro y puede definirse en términos del operador de Laplace–Beltrami como

$$J_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ P_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-h\Delta)^{-1/2} \\ (-h\Delta)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ P_\varphi \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Por construcción, J_0 es invariante bajo el grupo de isometrías del tres-toro.

Volviendo a la descripción del sistema a partir de los modos, es conveniente

introducir las variables de destrucción

$$a_{\vec{n}_j} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(\omega_n q_{\vec{n}_j} + ip_{\vec{n}_j}), \quad \tilde{a}_{\vec{n}_j} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(\omega_n x_{\vec{n}_j} + iy_{\vec{n}_j}), \quad (3.8)$$

así como las correspondientes variables de creación, que están dadas por las variables complejas conjugadas de las de destrucción, $a_{\vec{n}_j}^*$ y $\tilde{a}_{\vec{n}_j}^*$. De aquí en adelante, se excluirá de la discusión el modo cero (es decir, el modo con $\omega_n = 0$). Nótese que, pese a la exclusión de este modo, que puede ser cuantizado de forma independiente, el sistema conserva las mismas propiedades originales en tanto en cuanto éste sigue conteniendo infinitos grados de libertad. La acción de J_0 sobre la base del espacio de fases dada por estas variables de destrucción y creación es diagonal, y toma la forma $J_0(a_{\vec{n}_j}) = ia_{\vec{n}_j}$, $J_0(a_{\vec{n}_j}^*) = -ia_{\vec{n}_j}^*$, y de forma análoga para $\tilde{a}_{\vec{n}_j}$ y $\tilde{a}_{\vec{n}_j}^*$. Por lo tanto, las variables introducidas son aquellas que van a ser promovidas a operadores de destrucción y creación en la representación de Fock dada por J_0 .

La evolución de las variables de destrucción y creación desde un tiempo fijo t_0 hasta cualquier otro tiempo $t \in \mathbb{I}$ está dada una transformación lineal $\mathcal{U}(t, t_0)$ que es diagonal por bloques, con bloques 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{n}_j}(t) \\ a_{\vec{n}_j}^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n(t, t_0) & \beta_n(t, t_0) \\ \beta_n^*(t, t_0) & \alpha_n^*(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{n}_j}(t_0) \\ a_{\vec{n}_j}^*(t_0) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

y de forma similar para $(\tilde{a}_{\vec{n}_j}, \tilde{a}_{\vec{n}_j}^*)$. Debido a que las ecuaciones del movimiento (3.6) dependen únicamente del valor de ω_n^2 , las funciones $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$ son las mismas para todas las variables de destrucción y creación contenidas en el mismo autoespacio del operador de Laplace–Beltrami. Además, como la evolución es una transformación simpléctica, las funciones alfa y beta pueden interpretarse como coeficientes de Bogoliubov. Por tanto, estos coeficientes cumplen, para todo tiempo y modo, la relación $|\alpha_n(t, t_0)|^2 - |\beta_n(t, t_0)|^2 = 1$.

3.2. Evolución unitaria

En esta sección se mostrará que, para la representación de Fock determinada por la estructura compleja J_0 , la transformación de evolución es implementable de forma unitaria.

Recuérdese que una transformación canónica lineal T puede ser implementada como una transformación cuántica unitaria en la representación determinada por una estructura compleja J si y solo si el conjunto de los coeficientes beta de Bogoliubov

liubov son de cuadrado sumable, es decir:

$$\sum_{j=0}^3 \sum_{\vec{n}_j} 2|\beta_{\vec{n}_j}(t, t_0)|^2 = \sum_n \mathfrak{g}_n |\beta_n(t, t_0)|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{I}. \quad (3.10)$$

Aquí, se ha tenido en cuenta que existen dos modos (los asociados al seno y al coseno) para cada tripleta \vec{n}_j . Estudiando las ecuaciones del movimiento (3.6) se obtiene que el comportamiento asintótico para autovalores ω_n^2 grandes (o equivalentemente para n grandes) de los coeficientes alfa y beta está dado por [105]

$$\alpha_n(t, t_0) = e^{-i\omega_n(t-t_0)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_n}\right), \quad \beta_n(t, t_0) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right), \quad (3.11)$$

donde el símbolo \mathcal{O} indica el orden asintótico. Para deducir estos comportamientos asintóticos, la única condición que tiene que ser impuesta es que la primera derivada de la función de masa $s(t)$ sea integrable en todo subintervalo cerrado de \mathbb{I} . Haciendo uso de este resultado es inmediato ver que la condición (3.10) se satisface si la secuencia $\{\mathfrak{g}_n/\omega_n^4\}$ es sumable (sobre n). Para comprobar la sumabilidad de esta secuencia es necesario estudiar el comportamiento asintótico de la degeneración \mathfrak{g}_n para valores grandes de n . De la expresión de los autovalores es inmediato ver que el conjunto de números enteros positivos $\{m; m \in \mathbb{N}^+\}$ es un subconjunto de los posibles autovalores. Teniendo en cuenta que $1/\omega_n^4$ es una función decreciente de ω_n y que la degeneración \mathfrak{g}_n es estrictamente positiva, se puede ver de forma sencilla que la condición de sumabilidad de la secuencia $\{\mathfrak{g}_n/\omega_n^4\}$ se satisface si la secuencia $\{D_m/m^4\}$ es sumable, donde D_m es el número de autoestados cuyo autovalor está contenido en el intervalo $(m, m+1]$. El comportamiento asintótico de D_m se puede obtener haciendo un análisis análogo al realizado en el estudio de la radiación espectral clásica del cuerpo negro y que conduce a la ley de Rayleigh-Jeans [135]. Cada tripleta (m_1, m_2, m_3) , con $m_i \in \mathbb{Z}$, determina de forma única un autoestado con autovalor $\omega_n^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$. Estas tripletas forman una red cúbica de paso uno en \mathbb{R}^3 . Por lo tanto la "densidad media de autoestados", definida en \mathbb{R}^3 es igual a la unidad. De esta forma, el número de autoestados contenidos en una esfera de radio m , que se denominará N_m , se aproxima asintóticamente para valores grandes de m al volumen de la esfera, es decir $N_m \simeq 4\pi m^3/3$. Por otra parte $D_m = N_{m+1} - N_m$, y por lo tanto se obtiene que $D_m \propto m^2$ cuando $m \rightarrow \infty$. Como resultado, la secuencia $\{D_m/m^4\}$ es sumable, la condición (3.10) se satisface y, en consecuencia, la evolución del sistema es implementable de forma unitaria en la representación de Fock determinada por J_0 .

3.3. Unicidad de la representación de Fock

En esta sección se mostrará que todas las representaciones de Fock con un vacío invariante bajo el grupo de isometrías del tres-toro y en las cuales la evolución es implementable de forma unitaria son representaciones unitariamente equivalentes a la obtenida a partir de la estructura compleja J_0 .

3.3.1. Caracterización de las representaciones invariantes

Primeramente se caracterizarán las estructuras complejas invariantes bajo el grupo de simetrías del tres-toro, formado por las transformaciones $T_{\vec{\alpha}}$. Aquí se mostrará la caracterización de las estructuras complejas invariantes utilizando la descomposición del campo en modos reales. El análisis similar empleando la descomposición en el modos complejos, así como la transformación que relaciona los modos complejos y reales, se presenta en el apéndice A. Una aplicación lineal en el espacio de fases, como lo es la estructura compleja J , es invariante bajo una transformación $T_{\vec{\alpha}}$ si y solo si $T_{\vec{\alpha}}^{-1}JT_{\vec{\alpha}} = J$. Por otra parte, la acción de las transformaciones $T_{\vec{\alpha}}$ sobre los modos del campo puede obtenerse de forma sencilla a partir de la transformación (activa) del campo y de la expresión (3.5). Se ve así que

$$q'_{\vec{n}_j} = \cos(\vec{n}_j \cdot \vec{\alpha})q_{\vec{n}_j} - \sin(\vec{n}_j \cdot \vec{\alpha})x_{\vec{n}_j}, \quad x'_{\vec{n}_j} = \sin(\vec{n}_j \cdot \vec{\alpha})q_{\vec{n}_j} + \cos(\vec{n}_j \cdot \vec{\alpha})x_{\vec{n}_j}, \quad (3.12)$$

obteniéndose un resultado análogo para la transformación de los modos del momento del campo, $(p_{\vec{n}_j}, y_{\vec{n}_j})$. Como se puede observar, estas transformaciones no mezclan todos los modos, ni siquiera todos los contenidos en un mismo autoespacio del operador de Laplace–Beltrami, sino que únicamente mezclan los pares de modos con la misma etiqueta \vec{n}_j . Por lo tanto, los subespacios invariantes bajo estas transformaciones son bidimensionales, que, de hecho, es la dimensionalidad mínima posible para una representación real unitaria (no trivial) de un grupo Abelian compacto [136].

No es difícil identificar a partir de la expresión (3.12) que la acción de la transformación $T_{\vec{\alpha}}$ actúa sobre las variables $\{(q_{\vec{n}_j}, x_{\vec{n}_j})\}$ y $\{(p_{\vec{n}_j}, y_{\vec{n}_j})\}$ como el producto de tres copias de matrices $SO(2)$, una para cada dirección. De hecho, para cada tripla \vec{n}_j se obtiene una representación real diferente para este grupo. Por lo tanto, todas las estructuras complejas invariantes han de ser diagonales por bloques, con bloques 4×4 , que se denotarán como $J_{\vec{n}_j}$. Además, cada bloque $J_{\vec{n}_j}$ estará compuesto por cuatro bloques 2×2 : $J_{\vec{n}_j}^{qq}$, $J_{\vec{n}_j}^{pq}$, $J_{\vec{n}_j}^{qp}$ y $J_{\vec{n}_j}^{pp}$, los cuales, debido a la condición de invariancia $T_{\vec{\alpha}}^{-1}JT_{\vec{\alpha}} = J$, han de ser matrices reales cuya matriz simétrica asociada

es proporcional a la identidad. Estos bloques 2×2 definen los respectivos mapeos entre las variables de configuración (q) y las de momento (p) para cada etiqueta \vec{n}_j , como se indica en la notación utilizada.

Una vez impuestas las condiciones de invariancia, aún quedan por imponer las condiciones que J ha de cumplir para ser una estructura compleja, es decir, que su cuadrado sea igual a menos la identidad, que preserve la estructura simpléctica y que sea compatible con ella, en el sentido de que la composición de ambas proporcione una aplicación bilineal definida positiva. Primeramente se impondrá la condición de que la aplicación bilineal $\Omega(J \cdot, \cdot)$ sea definida positiva. Esta condición se traduce en que $J_{\vec{n}_j}^T \Omega_{\vec{n}_j}$ ha de ser una matriz simétrica definida positiva, para todos los valores de \vec{n}_j . Aquí, $J_{\vec{n}_j}^T$ denota la matriz transpuesta a $J_{\vec{n}_j}$, mientras que los bloques $\Omega_{\vec{n}_j}$ de la estructura simpléctica [en la base $\{(q_{\vec{n}_j}, x_{\vec{n}_j}, p_{\vec{n}_j}, y_{\vec{n}_j})\}$] están dados por

$$\Omega_{\vec{n}_j} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

donde $\mathbf{0}_{2 \times 2}$ y $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ son matrices 2×2 que representan, respectivamente, la matriz nula y la matriz identidad. Esta condición de positividad implica que los bloques $J_{\vec{n}_j}^{pq}$ y $-J_{\vec{n}_j}^{qp}$ han de ser matrices simétricas definidas positivas, y que $J_{\vec{n}_j}^{qq} = -J_{\vec{n}_j}^{pp}$. Por lo tanto, uniendo esta condición a la anterior de invariancia, se obtiene que $J_{\vec{n}_j}^{pq} = c_{\vec{n}_j}^{(1)} \mathbf{I}_{2 \times 2}$ y $J_{\vec{n}_j}^{qp} = -c_{\vec{n}_j}^{(2)} \mathbf{I}_{2 \times 2}$, donde $c_{\vec{n}_j}^{(1)}$ y $c_{\vec{n}_j}^{(2)}$ son números reales positivos.

Finalmente, las condiciones que quedan por imponer a J para obtener una estructura compleja invariante se traducen en las siguientes condiciones para los bloques: $J_{\vec{n}_j}^T \Omega_{\vec{n}_j} J_{\vec{n}_j} = \Omega_{\vec{n}_j}$, para que J sea una transformación simpléctica, y $J_{\vec{n}_j}^2 = -\mathbf{I}_{4 \times 4}$, para que su cuadrado sea menos la identidad. Estas últimas condiciones, teniendo en cuenta también las condiciones previas, llevan a que $J_{\vec{n}_j}^{qq} = -J_{\vec{n}_j}^{pp} = \pm c_{\vec{n}_j}^{(3)} \mathbf{I}_{2 \times 2}$, con $c_{\vec{n}_j}^{(3)} = \sqrt{c_{\vec{n}_j}^{(1)} c_{\vec{n}_j}^{(2)} - 1} \geq 0$, por lo que, en particular se ha de cumplir que $c_{\vec{n}_j}^{(1)} c_{\vec{n}_j}^{(2)} \geq 1$.

Como resultado final, se obtiene que toda estructura compleja invariante ha de ser diagonal por bloques en la base de modos reales, con bloques 4×4 de la forma

$$J_{\vec{n}_j} = \begin{pmatrix} \pm c_{\vec{n}_j}^{(3)} \mathbf{I}_{2 \times 2} & -c_{\vec{n}_j}^{(2)} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ c_{\vec{n}_j}^{(1)} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mp c_{\vec{n}_j}^{(3)} \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

donde $c_{\vec{n}_j}^{(1)}$ y $c_{\vec{n}_j}^{(2)}$ son números positivos tales $c_{\vec{n}_j}^{(1)} c_{\vec{n}_j}^{(2)} \geq 1$, y $c_{\vec{n}_j}^{(3)} = \sqrt{c_{\vec{n}_j}^{(1)} c_{\vec{n}_j}^{(2)} - 1}$.

Con el propósito de comparar de forma sencilla toda estructura compleja invariante J con la estructura compleja tomada inicialmente, J_0 , se introduce un cambio

de base a la base formada por las variables de destrucción y creación seleccionadas por J_0 , $\{(a_{\vec{n}_j}, a_{\vec{n}_j}^*, \tilde{a}_{\vec{n}_j}, \tilde{a}_{\vec{n}_j}^*)\}$, para las cuales los bloques 4×4 de J_0 son diagonales. Como resultado, se obtiene que toda estructura compleja invariante ha de ser diagonal por bloques, con bloques 2×2 que coinciden por pares, es decir

$$J_{\vec{n}_j} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{\vec{n}_j} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathcal{J}_{\vec{n}_j} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

con

$$\mathcal{J}_{\vec{n}_j} = i \begin{pmatrix} c_{\vec{n}_j}^{(2)} + c_{\vec{n}_j}^{(1)} \omega_n^2 & c_{\vec{n}_j}^{(2)} - c_{\vec{n}_j}^{(1)} \omega_n^2 \pm ic_{\vec{n}_j}^{(3)} \omega_n \\ -c_{\vec{n}_j}^{(2)} + c_{\vec{n}_j}^{(1)} \omega_n^2 \pm ic_{\vec{n}_j}^{(3)} \omega_n & -c_{\vec{n}_j}^{(2)} - c_{\vec{n}_j}^{(1)} \omega_n^2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

De hecho, toda estructura compleja invariante J se puede obtener a partir de J_0 como $J = KJ_0K^{-1}$, donde K es una transformación simpléctica [100]. Debido a que J_0 adopta la forma diagonal $(J_0)_{\vec{n}_j} = \text{diag}\{i, -i, i, -i\}$, la transformación simpléctica K también tomará una forma diagonal por bloques, con bloques 4×4 de la forma:

$$K_{\vec{n}_j} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{\vec{n}_j} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathcal{K}_{\vec{n}_j} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_{\vec{n}_j} = \begin{pmatrix} \kappa_{\vec{n}_j} & \lambda_{\vec{n}_j} \\ \lambda_{\vec{n}_j}^* & \kappa_{\vec{n}_j}^* \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

donde $\kappa_{\vec{n}_j}$ y $\lambda_{\vec{n}_j}$ son números complejos, que corresponden a los coeficientes alfa y beta de la transformación de Bogoliubov dada por K . Por tanto $|\kappa_{\vec{n}_j}|^2 - |\lambda_{\vec{n}_j}|^2 = 1$, $\forall \vec{n}_j$. Su relación con las constantes $c_{\vec{n}_j}^{(i)}$ está dada por las ecuaciones

$$2|\kappa_{\vec{n}_j}|^2 = 1 + c_{\vec{n}_j}^{(2)} + c_{\vec{n}_j}^{(1)} \omega_n^2, \quad 2\kappa_{\vec{n}_j} \lambda_{\vec{n}_j} = -c_{\vec{n}_j}^{(2)} + c_{\vec{n}_j}^{(1)} \omega_n^2 \mp ic_{\vec{n}_j}^{(3)} \omega_n. \quad (3.18)$$

En particular, la fase para $\kappa_{\vec{n}_j}$ puede escogerse libremente. Por ejemplo, puede escogerse tal que este coeficiente de Bogoliubov sea no negativo. Esta libertad de elección no afecta en los resultados posteriores.

3.3.2. Equivalencia de representaciones invariantes con evolución unitaria

Una vez caracterizadas las estructuras complejas invariantes bajo el grupo de simetría del tres-toro, se demostrará que todas aquéllas que permiten una implementación unitaria de la evolución dan lugar a representaciones unitariamente equivalentes a la obtenida a partir de J_0 . Ya se ha visto que una estructura compleja invariante J está relacionada con J_0 a través de un simplectomorfismo K (que puede interpretarse como un cambio de base de variables de destrucción y creación). Como

consecuencia, se tiene que una transformación simpléctica R podrá implementarse de forma unitaria con respecto a la estructura compleja J si y solo si la transformación $K^{-1}RK$ es implementable de forma unitaria con respecto a J_0 [100]. Para el caso de la transformación dinámica (3.9), se obtiene así una “nueva” transformación $K^{-1}UK$ que puede interpretarse como la evolución de las nuevas variables de destrucción y creación correspondientes a la estructura compleja J (pero expresada en la base asociada a J_0). Los nuevos coeficientes beta, que se denotarán como $\beta_{\vec{n}_j}^J$, pueden expresarse en función de los coeficientes de Bogoliubov originales como

$$\beta_{\vec{n}_j}^J(t, t_0) = (\kappa_{\vec{n}_j}^*)^2 \beta_n(t, t_0) - (\lambda_{\vec{n}_j})^2 \beta_n^*(t, t_0) + 2i\kappa_{\vec{n}_j}^* \lambda_{\vec{n}_j} \mathcal{I}[\alpha_n(t, t_0)], \quad (3.19)$$

donde $\mathcal{I}[\cdot]$ representa la parte imaginaria. Ahora, los nuevos coeficientes beta dependen de la etiqueta \vec{n}_j y no únicamente del autoespacio del operador de Laplace-Beltrami.

Al igual que antes, la condición para la implementación unitaria es que el conjunto de estos nuevos coeficientes beta de Bogoliubov sea de cuadrado sumable. Teniendo en cuenta que, por una parte, el conjunto $\{\beta_n(t, t_0)\}$ (incluyendo degeneración) es de cuadrado sumable y, por otra parte, $|\kappa_{\vec{n}_j}| \geq 1 \forall \vec{n}_j$, no es difícil llegar a la conclusión de que, si el conjunto $\{\beta_{\vec{n}_j}^J(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable, entonces necesariamente lo es también el conjunto $\{z_{\vec{n}_j} \mathcal{I}[\alpha_n(t, t_0)]\}$, con $z_{\vec{n}_j} = \lambda_{\vec{n}_j} / \kappa_{\vec{n}_j}^*$. Recordando la forma del comportamiento asintótico de los coeficientes $\alpha_n(t, t_0)$ para n grande [105], esta condición implica que el conjunto

$$\left\{ z_{\vec{n}_j} \operatorname{sen} \left[\omega_n(t - t_0) + \int_{t_0}^t d\bar{t} \frac{s(\bar{t})}{2\omega_n} \right] \right\} \quad (3.20)$$

ha de ser de cuadrado sumable. Para obtener este último resultado, se ha supuesto (como condición suficiente) que la segunda derivada de la función de masa $s(t)$ es integrable en todo subintervalo compacto del dominio temporal \mathbb{I} . Realizando una integración temporal sobre cualquiera de estos subintervalos para las sumas parciales del conjunto anterior, y aplicando convenientemente el teorema de Luzin [137] (lo cual es posible debido a que los elementos del conjunto analizado son funciones medibles) se llega a la conclusión de que, para que el conjunto (3.20) sea de cuadrado sumable, es necesario que el conjunto $\{z_{\vec{n}_j} = \lambda_{\vec{n}_j} / \kappa_{\vec{n}_j}^*\}$ también lo sea. Con esto, y teniendo en cuenta que $|\kappa_{\vec{n}_j}|^2 = 1 + |\lambda_{\vec{n}_j}|^2$, se sigue que $\{\lambda_{\vec{n}_j}\}$ es de cuadrado sumable [105]. Sin embargo, la sumabilidad de los cuadrados de este último conjunto es precisamente la condición para que la transformación simpléctica K sea implementable de forma unitaria y, por lo tanto, la condición para la equivalencia unitaria de las dos representaciones de Fock obtenidas a partir de J y J_0 . Así pues, como conclusión, toda representación de Fock invariante bajo el grupo de simetrías del tres-toro

y que admite la implementación unitaria de la evolución es una representación de Fock equivalente a la obtenida a partir de J_0 .

3.4. Unicidad de la descripción de campo

En esta sección se estudiará la ambigüedad introducida por la posibilidad de escoger distintas descripciones iniciales para el par de variables canónicas para el campo, relacionadas mediante transformaciones canónicas dependientes del tiempo en las que se realiza un escalado del campo. Como ya se ha comentado, esta ambigüedad aparece de forma natural en contextos cosmológicos, donde es habitual realizar escalados dependientes del tiempo de los campos para absorber variaciones debidas al fondo espaciotemporal (ya sea físico, efectivo o auxiliar) en el que se propaga. A pesar de que este tipo de transformaciones canónicas conducen descripciones a clásicas equivalentes, esto no es cierto en general desde el punto de vista cuántico. Esto se debe a que no todas las transformaciones canónicas lineales pueden implementarse de forma unitaria en la teoría cuántica, y además éstas afectan a la evolución de los campos, y por lo tanto a su posible implementación unitaria. Aquí se mostrará que el criterio de imponer invariancia bajo las simetrías del trestoro e implementación unitaria de la evolución no solo selecciona una única clase de equivalencia unitaria de representaciones de Fock para un campo que satisface las ecuaciones (3.1), sino que también selecciona una única descripción canónica de los campos.

3.4.1. Transformaciones canónicas dependientes del tiempo

Se considerará la familia de transformaciones lineales canónicas dependientes del tiempo más general en la que el campo es escalado mediante una función dependiente del tiempo, es decir, transformaciones de la forma:

$$\phi = F(t)\varphi, \quad P_\phi = \frac{P_\varphi}{F(t)} + G(t)\sqrt{\hbar}\varphi. \quad (3.21)$$

Nótese que estas transformaciones también contienen una redefinición del momento del campo, dada por una contribución dependiente del tiempo proporcional a la configuración del campo. Aquí, las funciones $F(t)$ y $G(t)$ son funciones reales que son (al menos) dos veces diferenciables, para así preservar la formulación diferencial de la teoría de campos. Además, para evitar la introducción de (nuevas) singularidades, la función $F(t)$ no debe anularse para ningún tiempo. Por otra parte, se asumirá sin pérdida de generalidad que $F(t_0) = 1$ y $G(t_0) = 0$. Cualquier

otra condición inicial para estas funciones puede obtenerse mediante una transformación de la forma (3.21) pero con coeficientes constantes, en vez de funciones dependientes del tiempo. Las representaciones de Fock asociadas a un nuevo par canónico obtenido mediante una transformación con coeficientes constantes se pueden construir por linealidad a partir de las de los campos originales y, por lo tanto, son representaciones que pueden considerarse idénticas. Esto también se aplica al imponer el criterio de invariancia y evolución unitaria, ya que estas propiedades son estables bajo transformaciones lineales canónicas independientes del tiempo.

Primeramente se introducirá la misma representación de Fock para el nuevo par canónico (ϕ, P_ϕ) que la que se introdujo para el par original (φ, P_φ) , es decir, la representación determinada por la estructura compleja J_0 . Los nuevos coeficientes de Bogoliubov $(\bar{\alpha}_n(t, t_0), \bar{\beta}_n(t, t_0))$ que describen la evolución para las variables de destrucción y creación obtenidas a partir del nuevo par canónico pueden escribirse en función de los coeficientes originales, de la forma [105]

$$\bar{\alpha}_n(t, t_0) = F_+(t)\alpha_n(t, t_0) + F_-(t)\beta_n^*(t, t_0) + i\frac{G(t)}{2\omega_n}[\alpha_n(t, t_0) + \beta_n^*(t, t_0)], \quad (3.22)$$

$$\bar{\beta}_n(t, t_0) = F_+(t)\beta_n(t, t_0) + F_-(t)\alpha_n^*(t, t_0) + i\frac{G(t)}{2\omega_n}[\beta_n(t, t_0) + \alpha_n^*(t, t_0)], \quad (3.23)$$

donde se ha definido $2F_\pm(t) = F(t) \pm 1/F(t)$. Por otra parte, como se vio en la sección previa para el par original, toda estructura compleja invariante J que proporciona una representación de Fock invariante para el nuevo par de campos puede obtenerse a partir de J_0 a través de una transformación simpléctica K de la forma dada en la expresión (3.17). Por lo tanto, con respecto a una estructura compleja invariante arbitraria J , los coeficientes beta asociados con el nuevo par canónico están dados por

$$\bar{\beta}_{\vec{n}_j}^J(t, t_0) = (\kappa_{\vec{n}_j}^*)^2 \bar{\beta}_n(t, t_0) - (\lambda_{\vec{n}_j})^2 \bar{\beta}_n^*(t, t_0) + 2i\kappa_{\vec{n}_j}^* \lambda_{\vec{n}_j} \Im[\bar{\alpha}_n(t, t_0)]. \quad (3.24)$$

De la misma manera que antes, la evolución será unitariamente implementable si y solo si el conjunto $\{\bar{\beta}_{\vec{n}_j}^J(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable para todos los tiempos en el intervalo \mathbb{I} .

En este punto, con el propósito de hacer más transparente el resto de los razonamientos, es conveniente cambiar la notación utilizada y reetiquetar los coeficientes alfa y beta, así como los coeficientes kappa y lambda, de la forma $\{\bar{\beta}_{nl_n}(t, t_0)\}$, donde n , como antes, etiqueta el autoespacio del operador de Laplace–Beltrami, mientras que $l_n = 1, \dots, g_n$ etiqueta los distintos estados pertenecientes al mismo autoespacio, es decir, los distintos valores de \vec{n}_j contenidos en dicho autoespacio, e incluyendo además la doble degeneración original dada por la presencia de los modos para el seno y el coseno.

A continuación, se demostrará que la implementación unitaria de la dinámica es posible únicamente si $F(t) = 1$ y $G(t) = 0$ para todo tiempo, es decir, únicamente es posible para el par canónico original.

3.4.2. Unicidad en el escalado del campo

Se comenzará demostrando que, para obtener una evolución unitaria, se tiene que cumplir $F(t) = 1$ para todo tiempo, es decir, que no se puede realizar un escalado dependiente del tiempo en el campo original. Para ello se considerarán las secuencias (en n) $\{\bar{\beta}_{nL_n}^J(t, t_0)\}$, obtenidas a partir del conjunto $\{\bar{\beta}_{nl_n}^J(t, t_0)\}$ mediante la elección para cada n de un único elemento arbitrario $L_n \in \{l_n\}$. Es claro que si el conjunto $\{\bar{\beta}_{nl_n}^J(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable para todo tiempo, necesariamente lo tiene que ser la secuencia $\{\bar{\beta}_{nL_n}^J(t, t_0)\}$. Utilizando el comportamiento asintótico de $\alpha_n(t, t_0)$ y $\beta_n(t, t_0)$ dado en la expresión (3.24), teniendo en cuenta las ecuaciones (3.22) y (3.23), y empleando que $|\kappa_{nl_n}| \geq 1$ ($\forall nl_n$), se deduce fácilmente que una condición necesaria para que la secuencia estudiada sea de cuadrado sumable es que los términos

$$\left[e^{i\omega_n(t-t_0)} - z_{nL_n}^2 e^{-i\omega_n(t-t_0)} \right] F_-(t) - 2iz_{nL_n} \text{sen}[\omega_n(t-t_0)] F_+(t) \quad (3.25)$$

se anulen para todo tiempo en el límite de n grande. Recuérdese que $z_{nl_n} = \lambda_{nl_n} / \kappa_{nl_n}^*$.

Por otra parte, dado un autovalor fijo arbitrario $\omega_n^2 = \tilde{\omega}^2$ del operador de Laplace–Beltrami, todo número $m^2 \tilde{\omega}^2$, con $m \in \mathbb{N}^+$, es también un autovalor, obtenido a partir de escalado en cada dirección por el mismo factor m . Debido a que los términos dados en la expresión (3.25) han de tender a cero cuando $\omega_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), la secuencia construida restringiendo ω_n al subconjunto $m\tilde{\omega}$ también debe anularse en el límite $m \rightarrow \infty$. Ahora, considerando un conjunto específico de tiempos $t = t_0 + 2\pi r / \tilde{\omega}$, donde r puede ser cualquier entero positivo que satisfaga que $t \in \mathbb{I}$, y llamando z_m al valor de z_{nL_n} cuando $\omega_n = m\tilde{\omega}$, se tiene que tanto la parte real como la imaginaria de los términos (3.25), dadas respectivamente por

$$\left(1 - \Re \left[z_m^2 \right] \right) F_-\left(t_0 + \frac{2\pi r}{\tilde{\omega}}\right), \quad \Im \left[z_m^2 \right] F_-\left(t_0 + \frac{2\pi r}{\tilde{\omega}}\right), \quad (3.26)$$

han de tender a cero cuando m tiende a infinito para todos los posibles valores de r y de $\tilde{\omega}$. Aquí $\Re[\cdot]$ denota la parte real. Por otra parte, puede demostrarse que [102, 105] si los términos (3.25) tienden a cero, entonces es imposible que las secuencias $\{1 + \Re[z_m^2]\}$ y $\{\Im[z_m^2]\}$ tiendan a cero simultáneamente en el límite de m grande. Por tanto, la única posibilidad es que $F_-(t_0 + 2\pi r / \tilde{\omega})$ se anule para todo r

y $\tilde{\omega}$. Teniendo en cuenta que la función $F(t)$ es una función continua y que el subconjunto de tiempos $\{t_0 + 2\pi r/\tilde{\omega}\}$ ($r \in \mathbb{N}^+$ y $\tilde{\omega} \in \{\omega_n\}$) es denso en \mathbb{I} , entonces se concluye que $F(t)$ es necesariamente la función unidad para todo el intervalo temporal considerado.

3.4.3. Unicidad en la definición del momento

Una vez se ha mostrado que no es posible realizar un escalado dependiente del tiempo del campo original si se quiere obtener una evolución unitaria, ahora se probará que tampoco es posible realizar una redefinición (dependiente del tiempo) del momento del campo mediante de la función $G(t)$. Es decir, para obtener una evolución unitaria la función $G(t)$ debe anularse para todo el intervalo temporal. Para ello, se considerará de nuevo la condición de sumabilidad (del modulo al cuadrado) del conjunto $\{\tilde{\beta}_{nl_n}^J(t, t_0)\}$ para todo tiempo, que es condición necesaria y suficiente para que la evolución sea implementable de forma unitaria. Dado que ya se ha demostrado que $F(t)$ ha de ser la función unidad, se hará uso explícitamente de este resultado en lo que sigue. Al igual que antes, como $|\kappa_{nl_n}| \geq 1 \forall n, \forall l_n$, si el conjunto $\{\tilde{\beta}_{nl_n}^J(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable, necesariamente lo será el conjunto $\{\tilde{\beta}_{nl_n}^J(t, t_0)/(\kappa_{nl_n}^*)^2\}$. Recordando que la secuencia $\{\sqrt{g_n}\beta_n(t, t_0)\}$ es de cuadrado sumable (ya que la dinámica es unitaria con respecto a J_0), y utilizando el comportamiento asintótico de $\alpha_n(t, t_0)$ y que $|z_{nl_n}| \leq 1$, no es difícil comprobar que entonces el conjunto $\{A_{nl_n}(t, t_0)\}$ ha de ser de cuadrado sumable para todo tiempo, donde

$$A_{nl_n} = 2|z_{nl_n}| \Im[\alpha_n] + \frac{G(t)}{2\omega_n} \left[e^{i(\omega_n\tau - \delta_{nl_n})} + |z_{nl_n}|^2 e^{-i(\omega_n\tau - \delta_{nl_n})} + 2|z_{nl_n}| \cos(\omega_n\tau) \right]. \quad (3.27)$$

Aquí, se ha definido $z_{nl_n} = |z_{nl_n}|e^{\delta_{nl_n}}$ y $\tau = t - t_0$. Considérese ahora el conjunto $\{A_{nl_n}(t, t_0)/\omega_n\}$, el cual también ha de ser de cuadrado sumable, pues $\omega_n \rightarrow \infty$. De esta forma, utilizando el hecho ya demostrado de que la secuencia $\{g_n/\omega_n^4\}$ es sumable, se sigue que el conjunto $\{|z_{nl_n}| \Im[\alpha_n(t, t_0)]/\omega_n\}$ ha de ser de cuadrado sumable. Esto implica que lo mismo tiene que cumplirse para el conjunto $\{|z_{nl_n}|/\omega_n\}$, como puede demostrarse mediante una integración temporal sobre un intervalo conveniente y la aplicación del teorema de Luzin, de forma similar a la comentada en la sección 3.3.2.

Teniendo en cuenta este resultado y la expresión de los términos $A_{nl_n}(t, t_0)$, se llega a que el conjunto formado por los términos

$$B_{nl_n}(t, t_0) = 2|z_{nl_n}| \Im[\alpha_n(t, t_0)] + \frac{G(t)}{2\omega_n} e^{i(\omega_n\tau - \delta_{nl_n})}, \quad (3.28)$$

tiene que ser de cuadrado sumable. Tomando ahora las partes reales e imaginarias de estas cantidades, las cuales han de ser por su parte de cuadrado sumable, se concluye que, o bien la función $G(t)$ se anula para todo tiempo, o bien la secuencia $\{g_n/\omega_n^2\}$ es sumable. Para concluir esto basta con realizar una integración temporal adecuada sobre cualquier subintervalo donde la función continua $G(t)$ difiera de cero [111]. Sin embargo, la suma de la secuencia $\{g_n/\omega_n^2\}$ diverge. Esto puede verse acotando inferiormente esta suma por la suma sobre los enteros positivos dada por $D_m/(m+1)^2$, la cual diverge ya que, como se demostró, el comportamiento asintótico de D_m es de la forma $D_m \propto m^2$. Como conclusión, la función $G(t)$ ha de ser la función nula para poder obtener evolución unitaria.

En resumen, se ha mostrado que una representación de Fock con un vacío invariante bajo las isometrías del tres-toro y con evolución unitaria únicamente puede obtenerse a partir del par canónico original, el cual satisface las ecuaciones del movimiento (3.1), no siendo posibles ni escalados del campo ni redefiniciones del momento a través de funciones dependientes del tiempo.

3.5. Discusión

En este capítulo se han estudiado dos tipos de ambigüedades que afectan a la cuantización de Fock para un campo escalar en escenarios cosmológicos y que llevan a teorías cuánticas unitariamente inequivalentes, imposibilitando así que se obtengan predicciones físicas robustas. Una de estas ambigüedades está relacionada con la elección inicial de un par canónico para el campo entre todos los pares relacionados por transformaciones canónicas dependientes del tiempo que contienen un escalado del campo y permiten la inclusión de una contribución lineal dependiente del tiempo proporcional al campo de configuración en el nuevo momento. El otro tipo de ambigüedad que se ha analizado corresponde a la selección de una representación de Fock para las relaciones canónicas de conmutación del par canónico elegido, entre las infinitas posibilidades unitariamente inequivalentes.

Más específicamente, se ha estudiado la cuantización de Fock de un campo escalar que, después del posible escalado, satisface unas ecuaciones de tipo Klein-Gordon con una masa dependiente del tiempo en un espaciotiempo (físico, auxiliar o efectivo) estático con secciones espaciales con la topología del tres-toro. Se ha mostrado que las dos clases de ambigüedades consideradas se eliminan al utilizar un criterio que impone dos requisitos a la cuantización de Fock. Como primer requisito, se ha impuesto que el vacío que define la representación de Fock (y por lo tanto la estructura compleja asociada) sea invariante bajo las simetrías del tres-

toro. Como segundo requisito se exige la implementación unitaria de la dinámica del campo. Estos requisitos corresponden a imponer propiedades físicamente muy razonables y deseables en la teoría cuántica obtenida. En particular, la renuncia a la evolución unitaria da lugar a problemas con la interpretación convencional probabilística de la mecánica cuántica. Como resultado de imponer este criterio, por una parte, se selecciona una única clase de equivalencia unitaria de representaciones de Fock, en la cual está contenida aquella naturalmente asociada a un campo escalar libre sin masa. Por otra parte, el par canónico que se va a cuantizar queda completamente determinado como el que cumple las ecuaciones de Hamilton dadas en (3.1), no siendo posible ni un escalado del campo ni una redefinición del momento mediante funciones dependientes del tiempo. Es importante mencionar que, para obtener estos resultados, únicamente es necesario que la función de masa dependiente del tiempo cumpla (como condición suficiente) que su segunda derivada sea integrable en todo subintervalo de tiempo compacto. Esta conclusión se aplica para todo posible dominio temporal para la evolución del campo siempre y cuando sea un intervalo de la recta real, y en particular puede ser acotado.

La importancia de los resultados presentados en este capítulo reside en su aplicación a sistemas cosmológicos con relevancia física. De hecho, las observaciones actuales indican que nuestro universo es a gran escala (aproximadamente) homogéneo e isótropo, y favorecen espaciotiempos cosmológicos con secciones espaciales planas [138–141]. Por otra parte, el hecho de considerar secciones espaciales compactas no supone una restricción seria, ya que, más allá de cierta escala cosmológica relacionada con el radio de Hubble, las interacciones físicas no deben de tener efectos relevantes. De esta forma, la física no debe alterarse de manera importante al considerar una escala de compactificación mayor que la escala cosmológica. Así pues, estos resultados se aplican, por ejemplo, al estudio de la cuantización de campos materiales propagándose en espaciotiempos de FRW planos, que describen a gran escala el universo. Un ejemplo aún más importante de aplicación de estos resultados es en el estudio de perturbaciones cosmológicas en el contexto de modelos inflacionarios proporcionados por un campo escalar masivo mínimamente acoplado a un fondo de FRW plano. De hecho, para la descripción de las perturbaciones escalares en este tipo de modelos mediante la variable de Mukhanov–Sasaki [95, 96], se obtienen unas ecuaciones de campo como las estudiadas en este capítulo. Aplicando los resultados expuestos, se puede determinar una única descripción cuántica de Fock para estos sistemas de gran interés físico, alcanzando así una teoría cuántica cuyas predicciones sean sólidas y robustas.

Capítulo 4

Campo escalar en *de Sitter*: Evolución unitaria y equivalencias entre vacíos

En este capítulo se estudiará la cuantización de Fock para un campo escalar, tanto masivo como sin masa, mínimamente acoplado, definido en un espaciotiempo de tipo de Sitter. En particular, se estudiará la posibilidad de obtener una cuantización de Fock en la cual la evolución del campo sea implementable de forma unitaria. Se mostrará que, al contrario de lo que se había afirmado anteriormente en la literatura [142], se puede obtener una evolución unitaria mediante el escalado del campo a través del factor conforme y una redefinición adecuada del momento del campo. Con ello, la cuantización con evolución implementable de forma unitaria queda seleccionada de forma única (salvo equivalencia unitaria) al imponer también su invariancia bajo las simetrías espaciales en de Sitter.

Por otra parte, se estudiará la relación entre el vacío seleccionado de esta manera y otros estados de vacío frecuentemente utilizados para el campo escalar en de Sitter. En concreto, se estudiará la equivalencia de este vacío con estados de vacío seleccionados a partir del criterio de Hadamard. En particular, para el caso de un campo escalar masivo, se estudiará su equivalencia con el vacío de Bunch–Davies (o vacío euclídeo). Además, para un campo escalar sin masa, se discutirá su equivalencia con la familia de vacíos unitariamente equivalentes de Allen–Folacci.

Por último, también se estudiará explícitamente la equivalencia unitaria del estado de vacío seleccionado mediante el criterio de evolución unitaria e invariancia bajo simetría espacial con los estados de vacío adiabáticos [143].

4.1. El modelo: campo escalar libre en un espaciotiempo de tipo de Sitter

El espaciotiempo conocido como de Sitter un espaciotiempo máximamente simétrico con curvatura constante positiva. Tiene una topología $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ (donde \mathbb{S}^3 denota la tres-esfera) y puede ser visto como un hiperboloide

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = H^{-2} \quad (4.1)$$

embebido en un espacio plano de cinco dimensiones (véase, por ejemplo, [84, 90]). La constante H está relacionada con la curvatura del espaciotiempo a través de la relación $r = 12H^2$.

Un sistema de coordenadas $(t, \chi, \theta, \sigma)$ que cubren completamente el espaciotiempo considerado puede definirse como

$$x_0 = H^{-1} \sinh(Ht), \quad -\infty < t < \infty, \quad (4.2)$$

$$x_1 = H^{-1} \cosh(Ht) \cos(\chi), \quad 0 \leq \chi \leq \pi, \quad (4.3)$$

$$x_2 = H^{-1} \cosh(Ht) \sin(\chi) \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (4.4)$$

$$x_3 = H^{-1} \cosh(Ht) \sin(\chi) \sin(\theta) \cos(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < 2\pi, \quad (4.5)$$

$$x_4 = H^{-1} \cosh(Ht) \sin(\chi) \sin(\theta) \sin(\sigma). \quad (4.6)$$

Para las coordenadas introducidas, la métrica para este espaciotiempo toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + H^{-2} \cosh^2(Ht) \{d\chi^2 + \sin^2(\chi)[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\sigma^2]\}. \quad (4.7)$$

Por otra parte, el espaciotiempo de Sitter es conforme al espaciotiempo estático con topología $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Para ver esto, basta con introducir el tiempo conforme, el cual está dado a partir del tiempo propio por

$$\eta = 2 \arctan \left(e^{Ht} \right), \quad \eta \in (0, \pi). \quad (4.8)$$

En estas nuevas coordenadas, la métrica toma la forma

$$ds^2 = a^2(\eta) \{-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2(\chi)[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\sigma^2]\}, \quad (4.9)$$

donde se reconoce la métrica del universo estático multiplicada por el factor conforme dependiente del tiempo,

$$a(\eta) = \frac{1}{H \sin \eta}. \quad (4.10)$$

Se considerará la propagación de un campo escalar real ϕ , mínimamente acoplado y con una masa m . Este campo escalar estará sujeto a la ecuación dinámica de campo

$$\left(\square - m^2\right) \phi = 0, \quad (4.11)$$

donde \square representa el d'Alambertiano asociado a la métrica espaciotemporal. En las coordenadas consideradas inicialmente $(t, \chi, \theta, \sigma)$, esta ecuación de campo toma la forma

$$\partial_t^2 \phi + 3H \tanh(Ht) \partial_t \phi + \left(-\frac{\Delta}{a^2} + m^2\right) \phi = 0, \quad (4.12)$$

donde Δ denota el operador de Laplace–Beltrami definido en la tres-esfera. En esta situación, realizando un escalado del campo de la forma

$$\varphi = a\phi \quad (4.13)$$

y utilizando el tiempo conforme, se obtiene la siguiente ecuación dinámica para el campo escalado

$$\ddot{\varphi} + \left[-\Delta + (m^2 - 2H^2)a^2 + 1\right] \varphi = 0. \quad (4.14)$$

En este capítulo, el punto denota la derivada con respecto al tiempo conforme η . Es importante mencionar que esta última ecuación no contiene términos de amortiguamiento, es decir, términos con primeras derivadas temporales del campo escalado.

La densidad lagrangiana correspondiente al campo φ , que se obtiene a partir de la estándar para el campo original, y que lleva a las ecuaciones (4.14), está dada (salvo derivadas totales del tiempo) por

$$L = \frac{1}{2} \left[(\dot{\varphi})^2 - (\nabla \varphi)^2 - \left(m^2 a^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \varphi^2 \right], \quad (4.15)$$

donde ∇ representa el gradiente en la tres-esfera. Así pues, el momento canónicamente conjugado al campo φ puede tomarse como

$$P_\varphi = \dot{\varphi}. \quad (4.16)$$

De forma alternativa, se podría haber empezado por una formulación hamiltoniana a partir del par de campos canónicos $(\varphi, P_\varphi = a^3 \partial_t \phi)$ y realizar la transformación canónica dependiente del tiempo dada por

$$\varphi = a\phi, \quad P_\varphi = \frac{P_\phi}{a} + \dot{a}\phi. \quad (4.17)$$

El campo φ (así como su momento P_φ) se puede descomponer en términos de los autoestados del operador de Laplace–Beltrami para la tres-esfera:

$$\varphi = \sum_{k,\ell,m} q_{k\ell m} Y_{k\ell m}, \quad (4.18)$$

donde $Y_{k\ell m}$ son los armónicos hiperesféricos para la tres-esfera, los cuales satisfacen la ecuación de autovalores

$$\Delta Y_{k\ell m} = -k(k+2)Y_{k\ell m}. \quad (4.19)$$

El conjunto de armónicos hiperesféricos proporciona una base ortonormal para el espacio de funciones de cuadrado integrable definidas en la tres-esfera. En estas últimas expresiones, k es un número entero que toma valores entre 0 y ∞ , ℓ varía entre 0 y k , y m toma valores desde $-\ell$ hasta ℓ (véase, por ejemplo, [144, 145]). En lo sucesivo, se utilizará la notación $q_{\mathbf{k}}$ para denotar de forma colectiva todos los modos $q_{k\ell m}$ que corresponden al mismo valor de k .

Sustituyendo en la ecuación (4.14) la descomposición del campo introducida y haciendo uso de las condiciones de ortonormalidad de los armónicos hiperesféricos, se llega a las siguientes ecuaciones de movimiento para cada modo:

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}} + \left[(k+1)^2 + \frac{\tilde{m}^2 - 2}{\text{sen}^2 \eta} \right] q_{\mathbf{k}} = 0, \quad (4.20)$$

donde se ha definido $\tilde{m} = m/H$. Estas ecuaciones del movimiento únicamente dependen de la etiqueta k de los modos, por lo que todos los modos pertenecientes al mismo autoespacio del operador de Laplace–Beltrami tienen la misma dinámica. Por otra parte, a partir de la definición del momento (4.16), y utilizando una descomposición análoga a la realizada para el campo de configuración, se obtiene que los momentos canónicamente conjugados $p_{\mathbf{k}}$ de las variables de los modos $q_{\mathbf{k}}$ satisfacen la ecuación $p_{\mathbf{k}} = \dot{q}_{\mathbf{k}}$.

La solución general de las ecuaciones del movimiento (4.20) es bien conocida. De hecho, utilizando el cambio de variables $q_{\mathbf{k}} = (\text{sen } \eta)^{1/2} f(-\cos \eta)$, esta ecuación se transforma en

$$\left(1 - y^2\right) \frac{d^2 f}{dy^2} - 2y \frac{df}{dy} + \left[(k+1)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{9}{4} - \tilde{m}^2 \right) \right] f(y) = 0, \quad (4.21)$$

donde $y = -\cos \eta$. Esta nueva ecuación corresponde a una ecuación de Legendre de grado $\nu = k + 1/2$ y orden $\mu = (9/4 - \tilde{m}^2)^{1/2}$. Sus soluciones linealmente independientes están dadas por las funciones del Legendre asociadas P_{ν}^{μ} y Q_{ν}^{μ} (véase, por ejemplo, [146, 147]). La solución general de las ecuaciones del movimiento (4.20) adopta pues la expresión

$$q_{\mathbf{k}}(\eta) = A_{\mathbf{k}} \sqrt{\text{sen } \eta} P_{\nu}^{\mu}(-\cos \eta) + B_{\mathbf{k}} \sqrt{\text{sen } \eta} Q_{\nu}^{\mu}(-\cos \eta), \quad (4.22)$$

donde $A_{\mathbf{k}}$ y $B_{\mathbf{k}}$ son constantes complejas arbitrarias.

En el formalismo canónico, la solución general de las correspondientes ecuaciones hamiltonianas,

$$\dot{q}_{\mathbf{k}} = p_{\mathbf{k}}, \quad \dot{p}_{\mathbf{k}} = - \left[(k+1)^2 + (\tilde{m}^2 - 2) \text{sen}^{-2} \eta \right] q_{\mathbf{k}}, \quad (4.23)$$

puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} q_{\mathbf{k}} \\ p_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = M_k(\eta) \begin{pmatrix} A_{\mathbf{k}} \\ B_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad M_k(\eta) = \begin{pmatrix} R_v^\mu(-\cos \eta) & S_v^\mu(-\cos \eta) \\ \dot{R}_v^\mu(-\cos \eta) & \dot{S}_v^\mu(-\cos \eta) \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

donde las funciones R_v^μ y S_v^μ están definidas a partir de las funciones asociadas de Legendre de la forma

$$R_v^\mu(-\cos \eta) = \sqrt{\text{sen} \eta} P_v^\mu(-\cos \eta), \quad S_v^\mu(-\cos \eta) = \sqrt{\text{sen} \eta} Q_v^\mu(-\cos \eta). \quad (4.25)$$

Haciendo uso de las relaciones de recurrencia para las derivadas de las funciones de Legendre asociadas,

$$\frac{dP_v^\mu(y)}{dy} = \frac{1}{y^2 - 1} [vyP_v^\mu(y) - (\nu + \mu)P_{v-1}^\mu(y)], \quad (4.26)$$

y equivalentemente para Q_v^μ [146, 147], se pueden expresar las derivadas temporales, $\dot{R}_v^\mu(-\cos \eta)$ y $\dot{S}_v^\mu(-\cos \eta)$, como

$$\dot{R}_v^\mu(-\cos \eta) = \frac{1}{\sqrt{\text{sen} \eta}} \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \cos \eta P_v^\mu(-\cos \eta) + (\nu + \mu) P_{v-1}^\mu(-\cos \eta) \right], \quad (4.27)$$

$$\dot{S}_v^\mu(-\cos \eta) = \frac{1}{\sqrt{\text{sen} \eta}} \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \cos \eta Q_v^\mu(-\cos \eta) + (\nu + \mu) Q_{v-1}^\mu(-\cos \eta) \right]. \quad (4.28)$$

Por otra parte, se pueden escribir todos los elementos de la matriz $M_k(\eta)$ en términos de funciones con argumento $\cos \eta$ en vez de $-\cos \eta$ haciendo uso de las relaciones [147]

$$P_v^\mu(-x) = \cos[(\nu + \mu)\pi] P_v^\mu(x) - \frac{2}{\pi} \text{sen}[(\nu + \mu)\pi] Q_v^\mu(x), \quad (4.29)$$

$$Q_v^\mu(-x) = -\cos[(\nu + \mu)\pi] Q_v^\mu(x) - \frac{\pi}{2} \text{sen}[(\nu + \mu)\pi] P_v^\mu(x). \quad (4.30)$$

Estas relaciones, dada la definición de R_v^μ y S_v^μ , también son válidas reemplazando $P_v^\mu(\pm x)$ por $R_v^\mu(\pm x)$ y $Q_v^\mu(\pm x)$ por $S_v^\mu(\pm x)$.

La evolución temporal desde un tiempo de referencia arbitrario η_0 a cualquier otro tiempo η está dada por la transformación canónica

$$\begin{pmatrix} q_{\mathbf{k}}(\eta) \\ p_{\mathbf{k}}(\eta) \end{pmatrix} = U_k(\eta_0, \eta) \begin{pmatrix} q_{\mathbf{k}}(\eta_0) \\ p_{\mathbf{k}}(\eta_0) \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

donde $U_k(\eta_0, \eta) = M_k(\eta) M_k^{-1}(\eta_0)$.

4.2. Cuantización con evolución unitaria

En esta sección se mostrará que es posible encontrar una cuantización de Fock que permite la implementación unitaria de la dinámica del campo φ , es decir, la implementación unitaria de todas las transformaciones de la forma (4.31), para valores arbitrarios de η y η_0 .

4.2.1. Cuantización de Fock

Como ya se ha mencionado, una cuantización de Fock está definida mediante la elección de una estructura compleja en el espacio de fases, que a su vez determina el conjunto de variables de destrucción y creación (salvo cambios irrelevantes que no mezclan ambos conjuntos). En el caso considerado, se introducen las siguientes variables (complejas) clásicas de destrucción y creación

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} + i p_{\mathbf{k}}), \quad a_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} - i p_{\mathbf{k}}), \quad (4.32)$$

donde la frecuencia $\omega_{\mathbf{k}}$ se escoge de forma que coincide con la parte independiente del tiempo en las ecuaciones (4.20), es decir $\omega_{\mathbf{k}} = k + 1$. Como es habitual, estas variables de destrucción y creación satisfacen los corchetes de Poisson canónicos $\{a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^*\} = i\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$.

Declarando ahora que las variables $a_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}^*$ han de ser cuantizadas como operadores de destrucción y creación, respectivamente, se selecciona una cuantización de Fock particular. Expresado de otra forma, la estructura compleja J que determina la cuantización de Fock específica está definida de forma que $J(a_{\mathbf{k}}) = ia_{\mathbf{k}}$ y $J(a_{\mathbf{k}}^*) = -ia_{\mathbf{k}}^*$. A partir de la estructura compleja J se puede obtener la cuantización del sistema [73] de la manera explicada en la sección 2.1.

La evolución clásica del sistema, escrita en términos de la variables $a_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}^*$, toma la expresión

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}(\eta) \\ a_{\mathbf{k}}^*(\eta) \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\mathbf{k}}(\eta_0, \eta) \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}(\eta_0) \\ a_{\mathbf{k}}^*(\eta_0) \end{pmatrix} = T_{\mathbf{k}} \mathcal{U}_{\mathbf{k}}(\eta_0, \eta) T_{\mathbf{k}}^{-1} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}(\eta_0) \\ a_{\mathbf{k}}^*(\eta_0) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

donde $T_{\mathbf{k}}$ es la matriz correspondiente al cambio de variables (4.32) y está dada por

$$T_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} & i \\ \omega_{\mathbf{k}} & -i \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Debido a que las transformaciones de evolución $\mathcal{U}_k(\eta_0, \eta)$ son transformaciones canónicas lineales, éstas necesariamente consisten en una transformación de Bogoliubov, por lo que pueden escribirse como

$$\mathcal{U}_k(\eta_0, \eta) = \begin{pmatrix} \alpha_k(\eta_0, \eta) & \beta_k(\eta_0, \eta) \\ \beta_k^*(\eta_0, \eta) & \alpha_k^*(\eta_0, \eta) \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

donde los coeficientes lineales y antilineales de la transformación, denotados como $\alpha_k(\eta_0, \eta)$ y $\beta_k(\eta_0, \eta)$ respectivamente, cumplen la relación

$$|\alpha_k(\eta_0, \eta)|^2 - |\beta_k(\eta_0, \eta)|^2 = 1, \quad (4.36)$$

independientemente de los valores específicos de k , η_0 y η .

4.2.2. Evolución unitaria

Como ya se mencionó, la condición necesaria y suficiente para que la transformación dinámica sea implementable de forma unitaria en la representación de Fock escogida es que el conjunto de sus coeficientes antilineales de Bogoliubov sea de cuadrado sumable [82, 83]. Por lo tanto, para todos los tiempos η_0 y η , se ha de cumplir que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\beta_k(\eta_0, \eta)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 |\beta_k(\eta_0, \eta)|^2 < \infty, \quad (4.37)$$

donde el factor de degeneración $(k+1)^2$ da cuenta de todos los grados de libertad que tienen la misma dinámica. Recordando que la expresión de la transformación de evolución para las variables de destrucción y creación está dada por

$$\mathcal{U}_k(\eta_0, \eta) = T_k \mathcal{U}_k(\eta_0, \eta) T_k^{-1} = T_k M_k(\eta) M_k^{-1}(\eta_0) T_k^{-1}, \quad (4.38)$$

y usando las definiciones de las matrices M_k y T_k , proporcionadas respectivamente en las fórmulas (4.24) y (4.34), se consigue la siguiente expresión para los coeficientes antilineales de Bogoliubov

$$\beta_{\mathbf{k}}(\eta_0, \eta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}{2^{2\mu+1} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)} \times \left[\Delta R_v^\mu \dot{S}_v^\mu - \Delta S_v^\mu \dot{R}_v^\mu + i \frac{\Delta \dot{R}_v^\mu \dot{S}_v^\mu}{\omega_k} + i \omega_k \Delta S_v^\mu R_v^\mu \right], \quad (4.39)$$

donde se ha introducido la notación

$$\Delta F_v^\mu G_v^\mu = F_v^\mu(-\cos \eta) G_v^\mu(-\cos \eta_0) - G_v^\mu(-\cos \eta) F_v^\mu(-\cos \eta_0), \quad (4.40)$$

y F_v^μ y G_v^μ denotan cualquiera de las funciones $\{R_v^\mu, S_v^\mu, \dot{R}_v^\mu, \dot{S}_v^\mu\}$. Además, para obtener esta expresión para los coeficientes beta, y en particular para el cálculo de la matriz inversa M_k^{-1} , se ha utilizado que

$$\det M_k(\eta) = \sin^2 \eta \mathcal{W}\{P_v^\mu(-\cos \eta), Q_v^\mu(-\cos \eta)\} = \frac{2^{2\mu} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}, \quad (4.41)$$

donde $\mathcal{W}\{\cdot, \cdot\}$ denota el Wronskiano. Considerando las propiedades de transformación de las funciones asociadas de Legendre bajo el cambio de signo del argumento, dadas en las expresiones (4.29) y (4.30), se ve que

$$\Delta R_v^\mu \dot{S}_v^\mu = \dot{S}_v^\mu(\cos \eta) R_v^\mu(\cos \eta_0) - R_v^\mu(\cos \eta) \dot{S}_v^\mu(\cos \eta_0), \quad (4.42)$$

y de forma análoga para $\Delta R_v^\mu \dot{S}_v^\mu$, $\Delta \dot{R}_v^\mu \dot{S}_v^\mu$ y $\Delta R_v^\mu S_v^\mu$; es decir, un cambio de signo en el argumento de estas expresiones lleva simplemente a un cambio de signo global.

El cumplimiento de la condición de sumabilidad (4.37) depende del comportamiento asintótico de las funciones $\beta_k(\eta_0, \eta)$ para valores grandes de k . A su vez, este comportamiento depende del de las funciones R_v^μ y S_v^μ para valores grandes de $\nu = k + 1/2$, y que está dado por el comportamiento ultravioleta de las funciones asociadas de Legendre P_v^μ y Q_v^μ . Las funciones asociadas de Legendre pueden expandirse como [147]:

$$P_v^\mu(\cos \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\sqrt{\sin \eta}} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu + j + 1/2) \cos\left[(\nu + j + 1/2)\eta + \frac{\pi}{4}(2j - 1) + \frac{\mu\pi}{2}\right]}{\Gamma(\mu - j + 1/2) \Gamma(j + 1) \Gamma(\nu + j + 3/2) (2 \sin \eta)^j}, \quad (4.43)$$

$$Q_v^\mu(\cos \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\sqrt{\sin \eta}} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu + j + 1/2) \cos\left[(\nu + j + 1/2)\eta - \frac{\pi}{4}(2j - 1) + \frac{\mu\pi}{2}\right]}{(-1)^j \Gamma(\mu - j + 1/2) \Gamma(j + 1) \Gamma(\nu + j + 3/2) (2 \sin \eta)^j}. \quad (4.44)$$

Estas expresiones proporcionan expansiones asintóticas para $\nu \rightarrow \infty$ (hasta un orden arbitrario) válidas no solo para valores reales del parámetro μ , sino también para valores complejos. De esta forma, el rango de validez de estas expansiones

asintóticas cubre todos el conjunto de valores posibles de la masa del campo m , incluyendo por supuesto el caso sin masa ($\mu = 3/2$).

Como ya se ha indicado, tanto las funciones R_ν^μ y S_ν^μ como sus derivadas temporales están determinadas por las funciones asociadas de Legendre, por lo que, empleando las expresiones asintóticas para éstas, se pueden obtener expresiones asintóticas para los términos de la forma $\Delta F_\nu^\mu G_\nu^\mu$ y, por tanto, una expresión asintótica para los coeficientes beta de Bogoliubov. Como resultado se llega a

$$\beta_{\mathbf{k}}(\eta, \eta_0) = -\frac{\Gamma\left(\frac{2k-2\mu+5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2k-2\mu+3}{4}\right)}{2^{2\mu+1}\Gamma\left(\frac{2k+2\mu+5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2k+2\mu+3}{4}\right)}\frac{\Gamma^2(k+\mu+3/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}\sum_{j=0}^{\infty}\mathfrak{B}_j(\eta, \eta_0), \quad (4.45)$$

donde se ha usado que $\nu = k + 1/2$. Aquí, las funciones $\mathfrak{B}_j(\eta, \eta_0)$ tienen un comportamiento asintótico de la forma $\mathcal{O}(\omega_k^{-j})$. Utilizando la formula de Stirling para el comportamiento asintótico de la función Gamma [146],

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi z} (z/e)^z, \quad (4.46)$$

se obtiene que el coeficiente independiente del tiempo que multiplica a las funciones $\mathfrak{B}_j(\eta, \eta_0)$ en la expresión (4.45) tiene un comportamiento asintótico de la forma $\mathcal{O}(1)$. Por lo tanto, las funciones beta tendrán el mismo comportamiento ultravioleta que la primera de las funciones $\mathfrak{B}_j(\eta, \eta_0)$ que no se anule. Ahora bien, se puede demostrar que las funciones $\mathfrak{B}_0(\eta, \eta_0)$ y $\mathfrak{B}_1(\eta, \eta_0)$ se anulan, por lo que las funciones beta tiene un comportamiento asintótico de (al menos) $\mathcal{O}(\omega_k^{-2}) \sim \mathcal{O}(k^{-2})$.

La función $\mathfrak{B}_0(\eta, \eta_0)$ se obtiene utilizando la ecuación (4.39) y considerando únicamente las respectivas contribuciones asintóticas dominantes de los términos de la forma $\Delta F_\nu^\mu G_\nu^\mu$, las cuales se consiguen a su vez considerando las contribuciones asintóticas dominantes de las funciones R_ν^μ y S_ν^μ y de sus derivadas temporales. Teniendo en cuenta esto, y haciendo uso de relaciones trigonométricas, se ve que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0(\eta, \eta_0) &= -\text{sen}[(k+1)(\eta+\eta_0) + \mu\pi] + \text{sen}[(k+1)(\eta+\eta_0) + \mu\pi] \\ &\quad + i \cos[(k+1)(\eta+\eta_0) + \mu\pi] - i \cos[(k+1)(\eta+\eta_0) + \mu\pi] = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Por otra parte, la expresión para la función $\mathfrak{B}_1(\eta, \eta_0)$ puede obtenerse de la misma manera pero considerando las respectivas primeras contribuciones asintóticas subdominantes de los términos de la forma $\Delta F_\nu^\mu G_\nu^\mu$, las cuales se deducen a partir de los productos cruzados entre las respectivas contribuciones dominantes y primeras contribuciones subdominantes de las funciones R_ν^μ , S_ν^μ y sus derivadas temporales. Al igual que antes, desarrollando y haciendo uso de relaciones trigonométricas, se

alcanza la expresión

$$\begin{aligned}
 & \frac{8(k+1)}{4\mu^2-1} \mathfrak{B}_1(\eta, \eta_0) \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sen} \eta} \{ \cos [(k+2)\eta + (k+1)\eta_0 + \mu\pi] - \cos [(k+2)\eta + (k+1)\eta_0 + \mu\pi] \\
 &\quad - i \operatorname{sen} [(k+2)\eta + (k+1)\eta_0 + \mu\pi] + i \operatorname{sen} [(k+2)\eta + (k+1)\eta_0 + \mu\pi] \} \\
 &\quad + \frac{1}{\operatorname{sen} \eta_0} \{ \cos [(k+1)\eta + (k+2)\eta_0 + \mu\pi] - \cos [(k+1)\eta + (k+2)\eta_0 + \mu\pi] \\
 &\quad - i \operatorname{sen} [(k+1)\eta + (k+2)\eta_0 + \mu\pi] + i \operatorname{sen} [(k+1)\eta + (k+2)\eta_0 + \mu\pi] \} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Así pues, ambas funciones $\mathfrak{B}_0(\eta, \eta_0)$ y $\mathfrak{B}_1(\eta, \eta_0)$ se anulan como ya se había anticipado, y el comportamiento asintótico de las funciones beta está dado por la función $\mathfrak{B}_2(\eta, \eta_0)$ (asumiendo que ésta no se anula). Por tanto, las funciones $\beta_k(\eta, \eta_0)$ tienen un orden asintótico $\mathcal{O}(k^{-2})$ para k grande, para todos los tiempos η y η_0 . Como resultado, la condición de sumabilidad (4.37) se satisface y, por ende, la evolución dinámica es implementable de forma unitaria en la representación de Fock definida por la estructura compleja considerada J . Es importante resaltar que, dado que J únicamente depende del operador de Laplace–Beltrami, ésta es invariante con respecto a las simetrías espaciales en de Sitter, dadas por el grupo $O(4)$. Consecuentemente, el vacío de la representación de Fock considerada es invariante bajo este grupo.

El resultado aquí obtenido está en completo acuerdo con los resultados más generales de las referencias [105, 108], en las que se estudia el criterio introducido en el capítulo anterior para seleccionar una única clase de equivalencia unitaria de cuantizaciones de Fock para campos escalares en espaciotiempos con secciones espaciales isomorfas a la tres-esfera. Además, este criterio, al igual que para el caso de secciones espaciales tres-toroidales, selecciona una única descripción canónica para el campo lineal entre todas aquéllas relacionadas a través de una transformación canónica que incluye un escalado del campo dependiente del tiempo y una redefinición del momento. Por otra parte, hay que hacer notar que este resultado contradice afirmaciones existentes en la literatura, y en particular la conclusión de la referencia [142], donde se afirma que no es posible obtener una evolución cuántica unitaria (para cuantizaciones de Fock) para un campo escalar sin masa que se propaga en un espaciotiempo de tipo de Sitter, independientemente de la redefinición del campo $\phi \rightarrow F(t)\phi$.

La discrepancia entre el resultado aquí expuesto y el de la referencia [142] es debida a que, en esta última la referencia, únicamente se consideran momentos del campos obtenidos con un escalado dependiente del tiempo inverso al realizado so-

bre la configuración del campo, eliminando así otras posibles elecciones del momento que incluyan un término lineal dependiente del tiempo proporcional a la variable de configuración. Como ya se vio en el capítulo 3, la elección adecuada del momento es crucial para obtener una evolución unitaria. En este caso, la elección del momento canónico que lleva a una implementación unitaria de la dinámica está caracterizada por proporcionar como momento la derivada del campo escalado con respecto al tiempo conforme (sobre soluciones). Debido a esto, es particularmente conveniente describir el sistema usando el tiempo conforme. Sin embargo, en la referencia [142] esta naturaleza conforme no fue explorada, salvo para dar un argumento heurístico en contra de la implementación unitaria de la evolución. El argumento es el siguiente: considerando el escalado del campo dado en (4.13) y usando el tiempo conforme η , se obtiene la siguiente ecuación para un campo escalar sin masa

$$\ddot{\varphi} - \Delta\varphi + \left[1 - \frac{2}{\text{sen}^2 \eta}\right] \varphi = 0. \quad (4.49)$$

La masa dependiente del tiempo, $s(\eta) = 1 - 2/\text{sen}^2 \eta$, no solamente es estrictamente negativa sino que diverge cuando $\eta \rightarrow 0, \pi$ (que corresponde a $t \rightarrow \pm\infty$). Debido a esto, en la referencia [142] se argumenta que la frecuencias dependientes del tiempo (al cuadrado) de los modos armónicos, iguales a $(k+1)^2 - 2/\text{sen}^2 \eta$, son todas negativas en el límite $t \rightarrow \pm\infty$, lo cual introduce un comportamiento no oscilatorio en dicho límite que debe redundar en la no implementabilidad unitaria de la evolución.

Sin embargo, este argumento no plantea en realidad ninguna obstrucción a la implementación unitaria de la dinámica. Más bien muestra que el límite ultravioleta, en el cual un número infinito de modos del sistema toman parte, y el límite de tiempo infinito son radicalmente diferentes. De hecho, dinámica unitaria significa la implementación unitaria de todas las transformaciones (4.31) entre dos tiempos cualesquiera *finitos*. Así, cuando se considera el régimen ultravioleta de la evolución entre dos instantes de tiempo finitos, η_0 y η , se deben considerar los valores de $(k+1)^2 - 2/\text{sen}^2 \eta$ en el límite de k grande, y no en el límite de tiempos grande, porque la transformación dinámica es sensible solo a los valores en el intervalo $[\eta_0, \eta]$, debido a que las ecuaciones del movimiento son locales en el tiempo. Lo que ocurre es que, para todo los valores de k mayores que un determinado k_0 , los valores de las frecuencias (al cuadrado) son positivas para todo intervalo temporal considerado. Es cierto que, para un número finito de modos, la evolución está dada con una frecuencia (al cuadrado) negativa. Sin embargo, esto no afecta a la posible implementación unitaria de la dinámica de una forma fundamental, dado que la dinámica lineal en finitas dimensiones puede ser siempre implementada de forma

unitaria, como garantiza el teorema de unicidad de Stone–Von Neumann [81].

Evolución unitaria en sistemas con masa negativa

Para clarificar aún más la situación, se ha estudiado el caso donde el término dependiente del tiempo en la ecuación de campo dado por $2/\text{sen}^2 \eta$ es sustituido simplemente por el término $2/\eta^2$. Esta sustitución está estrechamente relacionada con lo que ocurre en el límite $t \rightarrow \pm\infty$ para el factor de escala (4.10) y por lo tanto es relevante físicamente. La ecuación de campo obtenida mediante esta sustitución,

$$\ddot{\varphi} - \Delta\varphi + \left[1 - \frac{2}{\eta}\right] \varphi = 0, \quad (4.50)$$

conserva precisamente las propiedades de la ecuación original (4.49) en lo que se refiere al argumento sobre el comportamiento de la frecuencia de los modos para las regiones con $|t|$ grandes. La ventaja de considerar esta ecuación es que puede resolverse explícitamente en términos de funciones elementales, haciendo de esta forma la discusión completamente transparente. De hecho, las ecuaciones del movimiento que se obtienen para los modos armónicos están dadas por

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}} + \left[(k+1)^2 - \frac{2}{\eta^2}\right] q_{\mathbf{k}} = 0, \quad (4.51)$$

cuya solución más general es de la forma

$$q_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}} \left[\frac{\text{sen}(\omega_k \eta)}{\omega_k \eta} - \cos(\omega_k \eta) \right] + B_{\mathbf{k}} \left[-\frac{\cos(\omega_k \eta)}{\omega_k \eta} - \text{sen}(\omega_k \eta) \right], \quad (4.52)$$

donde $A_{\mathbf{k}}$ y $B_{\mathbf{k}}$ son constantes complejas arbitrarias y $\omega_k = k+1$. Siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente se deducen los correspondientes coeficientes $\beta_k(\eta_0, \eta)$ para la transformación de Bogoliubov de la evolución,

$$\begin{aligned} \beta_k(\eta, \eta_0) = & \frac{1}{2\omega_k^2} \left[\frac{1}{\eta_0^2} - \frac{1}{\eta^2} + \frac{i\tau}{\omega_k \eta_0^2 \eta^2} \right] \cos(\omega_k \tau) \\ & + \frac{i}{2\omega_k^2} \left[\frac{1}{\eta_0^2} + \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\omega_k^2 \eta_0^2 \eta^2} - \frac{i(\eta + \eta_0)}{\omega_k \eta_0^2 \eta^2} \right] \text{sen}(\omega_k \tau), \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde se ha definido $\tau = \eta - \eta_0$. Como puede verse, el comportamiento dominante es de orden $\mathcal{O}(\omega_k^{-2}) \sim \mathcal{O}(k^{-2})$, de lo que se sigue que se satisface la condición de sumabilidad (4.37) y, por tanto, la evolución es implementable de forma unitaria. Con ello, se pone de manifiesto que el signo de la masa dependiente del tiempo, incluso si diverge en ciertos límites, es irrelevante en lo que se refiere a la obtención de una dinámica unitaria.

4.3. Equivalencia unitaria de vacíos

Como se ha visto, la imposición a la cuantización de Fock de que la evolución sea implementable de forma unitaria y que el vacío de la representación sea invariante bajo las simetrías espaciales selecciona una única representación de Fock (salvo equivalencia unitaria). En la clase de equivalencia de esta representación está contenida la introducida en la sección anterior, obtenida a partir de la estructura compleja J , y tomando la descripción canónica para los campos alcanzada tras la transformación canónica dependiente del tiempo definida en (4.17).

Así, se ha conseguido una representación de Fock invariante $O(4)$ para un campo escalar definido en un espaciotiempo de tipo de Sitter con evolución unitaria (independientemente de la masa del campo). No obstante, como ya hemos mencionado, para la cuantización de Fock de un campo escalar en de Sitter existen otras elecciones de vacío ampliamente utilizadas en la literatura, como el vacío de Bunch–Davies. El vacío de Bunch–Davies (o vacío euclídeo) se caracteriza por ser el único vacío invariante $O(1,4)$ que satisface la condición de Hadamard, es decir, que su función de dos puntos tiene un “buen comportamiento” a distancias cortas [73]. Es bien sabido que, para el caso de un campo sin masa, el vacío euclídeo no está bien definido [86]. Sin embargo, puede recurrirse a una familia de vacíos unitariamente equivalentes de tipo Hadamard e invariantes $O(4)$, que se denominan vacíos de Allen–Folacci [90]. En esta sección se estudiará la relación entre las cuantización de Fock obtenidas a partir de estos vacíos con la de la sección anterior.

4.3.1. Vacíos de Bunch–Davies y de Allen–Folacci

Una forma alternativa de definir una cuantización de Fock consiste en seleccionar un conjunto completo particular de soluciones complejas $\{u_{\mathbf{k}}\}$ a las ecuaciones del movimiento (4.20). Estas soluciones se normalizan de forma que satisfagan la condición

$$u_{\mathbf{k}}\dot{u}_{\mathbf{k}}^* - u_{\mathbf{k}}^*\dot{u}_{\mathbf{k}} = i \quad (4.54)$$

en una superficie de Cauchy dada, $\eta = \eta_0$. Una vez se ha elegido este conjunto de soluciones, la solución general de las ecuaciones de campo (4.14) viene dada por

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}Y_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^*u_{\mathbf{k}}^*Y_{\mathbf{k}}^*), \quad (4.55)$$

donde, al igual que antes, $Y_{\mathbf{k}}$ denotan los armónicos para la tres-esfera. En esta situación, la cuantización de Fock se realiza declarando las variables $b_{\mathbf{k}}$ y $b_{\mathbf{k}}^*$ como aquéllas que van a ser promovidas a operadores de destrucción y creación de la

representación de Fock [148]. En esta descripción, la cuantización de Fock introducida en la sección previa corresponde a la elección del conjunto de soluciones determinado por las condiciones iniciales

$$u_{\mathbf{k}}(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}, \quad \dot{u}_{\mathbf{k}}(\eta_0) = -i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}}. \quad (4.56)$$

De ahora en adelante se denominara al vacío que determina esta cuantización de Fock como vacío unitario.

Para campos libres masivos que se propagan en un espaciotiempo de tipo de Sitter, la cuantización de Fock que habitualmente se utiliza es la determinada por la única solución que es invariante bajo todo el grupo de simetrías en de Sitter, es decir, que es invariante bajo el grupo $O(1,4)$, y que satisface el criterio de Hadamard. El correspondiente conjunto de soluciones para los modos es de la forma dada en (4.22) con unas constantes [86,90]

$$B_{\mathbf{k}} = -\frac{2}{\pi}iA_{\mathbf{k}}, \quad A_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\pi \Gamma(k - \mu + 3/2)}{4 \Gamma(k + \mu + 3/2)}} e^{i\pi\mu/2}. \quad (4.57)$$

El vacío de la correspondiente representación de Fock es conocido como el vacío de Bunch–Davies, o vacío euclídeo. De manera explícita, las soluciones para los modos que determinan la cuantización euclídea pueden escribirse como

$$\tilde{u}_{\mathbf{k}}(\eta) = A_{\mathbf{k}} e^{i(v+\mu)\pi} \left[R_v^\mu(\cos \eta) + \frac{2}{\pi} i S_v^\mu(\cos \eta) \right]. \quad (4.58)$$

Para para llegar a esta expresión, se han tenido en cuenta las propiedades de transformación de las funciones asociadas de Legendre bajo un cambio de signo del argumento (4.29) y (4.30). Dada una superficie de Cauchy de referencia, $\eta = \eta_0$, el momento canónicamente conjugado a $\tilde{u}_{\mathbf{k}}(\eta_0)$ está determinado por

$$\dot{\tilde{u}}_{\mathbf{k}}(\eta_0) = A_{\mathbf{k}} e^{i(v+\mu)\pi} \left[\dot{R}_v^\mu(\cos \eta) + \frac{2}{\pi} i \dot{S}_v^\mu(\cos \eta) \right] \Big|_{\eta_0}. \quad (4.59)$$

Para el caso de un campo escalar libre con masa cero, se sabe que el vacío euclídeo no está bien definido, es decir, no existe un vacío de Hadamard invariante $O(1,4)$ [86]. Esto es debido únicamente a la dinámica del modo cero [86,90]. Este hecho se puede comprobar fácilmente tomando $m = 0$, y por lo tanto $\mu = 3/2$, en las expresiones para las soluciones de los modos euclídeas, y en particular fijándose en la definición de la constante $A_{\mathbf{k}}$. Para $\mathbf{k} \neq 0$, estas soluciones están bien determinadas, mientras que para $\mathbf{k} = 0$ la definición carece de sentido. No obstante, para lograr un conjunto completo de soluciones para los modos que esté bien definido, y

por lo tanto una cuantización, simplemente se necesita obtener unas soluciones adecuadas para los modos cero (o simplemente cuantizar los modos cero mediante otro tipo de técnicas que sean consistentes). Soluciones independientes para las ecuaciones del movimiento para los modos cero con $m = 0$ vienen dadas por $1/\sin \eta$ y $(\eta/\sin \eta) - \cos \eta$. Usando estas soluciones, Allen y Folacci obtuvieron una familia uniparamétrica de soluciones para el modo cero a partir de las cuales, y junto a las soluciones euclídeas para $\mathbf{k} \neq 0$, se consigue una familia de vacíos invariantes $O(4)$ y que cumplen el criterio de Hadamard [90]. Estos vacíos de Hadamard invariantes $O(4)$ se conocen como vacíos de Allen–Folacci.

4.3.2. Equivalencia unitaria

La pregunta natural que surge inmediatamente es si la cuantización de Fock determinada por el vacío unitario es o no unitariamente equivalente a la cuantización obtenida mediante el vacío de Hadamard invariante $O(1,4)$ de Bunch–Davies, para el caso masivo, o la obtenida mediante los vacíos de Hadamard invariantes $O(4)$ de Allen–Folacci, para el caso sin masa. La equivalencia unitaria entre las distintas representaciones dependerá únicamente del comportamiento ultravioleta de los estados, es decir, del comportamiento para valores grandes de k . Por tanto, la cuantización particular del modo cero es irrelevante (siempre y cuando se realice, por ejemplo, una cuantización estándar para este modo que satisfaga las condiciones del teorema de Stone–Von Neumann y no una cuantización inequivalente como la polimérica).

Dados dos conjuntos de soluciones para los modos $\{u_{\mathbf{k}}\}$ y $\{\tilde{u}_{\mathbf{k}}\}$, determinados de forma respectiva por los conjuntos de condiciones iniciales $\{(u_{\mathbf{k}}, \dot{u}_{\mathbf{k}})\}_{|\eta_0}$ y $\{(\tilde{u}_{\mathbf{k}}, \dot{\tilde{u}}_{\mathbf{k}})\}_{|\eta_0}$, las dos representaciones de Fock correspondientes son unitariamente equivalentes si y solo si el conjunto de coeficientes beta $\{\bar{\beta}_{\mathbf{k}}\}$, dados por

$$\bar{\beta}_{\mathbf{k}} = i [\dot{\tilde{u}}_{\mathbf{k}}(\eta_0)u_{\mathbf{k}}(\eta_0) - \dot{u}_{\mathbf{k}}(\eta_0)\tilde{u}_{\mathbf{k}}(\eta_0)], \quad (4.60)$$

es de cuadrado sumable [148]. Al igual que antes, para los conjuntos de soluciones que se consideran, los coeficientes $\bar{\beta}_{\mathbf{k}}$ dependen únicamente de la etiqueta k y no de todo el conjunto de etiquetas \mathbf{k} . Así pues, la condición de sumabilidad es de la forma dada en (4.37), con un factor de degeneración $(k+1)^2$.

Fijando ahora una superficie de Cauchy, $\eta = \eta_0$, se evalúan los coeficientes $\beta_{\mathbf{k}}$ que relacionan los datos iniciales que determinan la representación introducida con evolución unitaria (4.56) con los datos iniciales para la representación determinada por el vacío de Bunch–Davies (o alternativamente para los vacíos de Allen–Folacci

para el caso sin masa, $\mu = 3/2$). Este último conjunto de datos iniciales se obtiene mediante las expresiones (4.58) y (4.59) evaluándolas en η_0 . De esta manera ve que

$$\bar{\beta}_{\mathbf{k}} = -A_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(k+\mu)\pi}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{\pi} S_v^\mu(\cos \eta_0) - \dot{R}_v^\mu(\cos \eta_0) - i \frac{2}{\pi} \dot{S}_v^\mu(\cos \eta_0) - i\omega_{\mathbf{k}} R_v^\mu(\cos \eta_0) \right]. \quad (4.61)$$

Introduciendo los desarrollos asintóticos para las funciones R_v^μ , S_v^μ y sus derivadas temporales, deducidos a partir de los desarrollos asintóticos para las funciones asociadas de Legendre, se concluye que estos coeficientes pueden expresarse como una serie asintótica de la forma

$$\bar{\beta}_{\mathbf{k}} = -\sqrt{\frac{\Gamma(k-\mu+3/2)}{\Gamma(k+\mu+3/2)}} \frac{e^{i(k+3\mu/2)\pi}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{\Gamma(k+\mu+3/2)}{\Gamma(k+1)} \sum_{j=0} \bar{\mathfrak{B}}_j. \quad (4.62)$$

En esta expresión, las funciones $\bar{\mathfrak{B}}_j$ tienen un comportamiento asintótico de orden $\mathcal{O}(\omega_{\mathbf{k}}^{-j}) \sim \mathcal{O}(k^{-j})$. Empleando la formula de Stirling (4.46), se comprueba que el comportamiento asintótico del coeficiente global que multiplica a las funciones $\bar{\mathfrak{B}}_j$ para k grande es del orden $\mathcal{O}(1)$. Consecuentemente, el orden asintótico de los coeficientes beta coincidirá con el orden asintótico de la primera función $\bar{\mathfrak{B}}_j$ que no se anule. En este caso, la función $\bar{\mathfrak{B}}_0$ toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{B}}_0 = & \cos \left[(k+1)\eta_0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right] + \sin \left[(k+1)\eta_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right] \\ & + i \sin \left[(k+1)\eta_0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right] - i \cos \left[(k+1)\eta_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.63)$$

y por lo tanto se anula. Por otra parte, se puede comprobar que la función $\bar{\mathfrak{B}}_1$ viene dada por

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{B}}_1 = & \frac{4\mu^2 - 1}{8(k+2) \sin \eta_0} \left\{ -\cos \left[(k+2)\eta_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right] + \sin \left[(k+2)\eta_0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right] \right. \\ & \left. - i \sin \left[(k+2)\eta_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right] - i \cos \left[(k+2)\eta_0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

anulándose también, independientemente del tiempo de referencia η_0 escogido. Así pues, el comportamiento asintótico de los coeficientes beta coincide con el de la función $\bar{\mathfrak{B}}_2 \sim \mathcal{O}(k^{-2})$ (suponiendo que ésta no se anula). De ello se sigue que el conjunto de coeficientes beta $\{\bar{\beta}_{\mathbf{k}}\}$ es, efectivamente, de cuadrado sumable. Dado que este resultado es válido para todo valor de μ (o equivalentemente para todo valor de la masa m), la representación de Fock determinada por el vacío unitario es equivalente a la obtenida mediante el vacío de Bunch–Davies, o a la obtenida mediante los vacíos de Allen–Folacci para el caso de un campo escalar sin masa.

El hecho de que estos dos puntos de vista—el uso de la condición de Hadamard y el uso de la evolución unitaria—seleccionen la misma clase de equivalencia de

representaciones de Fock (cuando se utilizan el campo escalado ϕ y el momento apropiado P_ϕ) solo puede interpretarse como un resultado tranquilizador que conecta a dos acercamientos en un principio distintos. En la perspectiva de la dinámica unitaria, se impone únicamente la existencia de transformaciones unitarias que implementen la evolución temporal clásica entre dos instantes cualesquiera separados por un intervalo de tiempo finito, sin imponer más requisitos adicionales como, por ejemplo, continuidad o ninguna forma local preasignada para el vacío. La condición de Hadamard parece aparentemente más fuerte, pues fija la estructura local del estado de vacío. Es bien sabido que esta condición es suficientemente “fuerte” como para garantizar la regularización del tensor de energía-momento, lo cual es, de hecho, la motivación original para utilizarlo. Por tanto, a primera vista, no es ni mucho menos claro que ambos puntos de vista lleven a cuantizaciones completamente equivalentes, y por ello este resultado constituye una afirmación interesante por sí misma.

4.4. Equivalencia con estados adiabáticos

En esta sección se analizará la relación entre la cuantización de Fock con evolución unitaria presentada en la sección 4.2 y el uso de estados adiabáticos en un espaciotiempo de tipo de Sitter. Los estados adiabáticos fueron introducidos por Parker a finales de los sesenta [143] para proporcionar la mejor definición posible de *partículas* propagándose en universos en expansión. Para espaciotiempos con secciones espaciales compactas, y específicamente para cosmologías de FRW con curvatura positiva y secciones que topológicamente son tres-esferas, existen dos importantes resultados físico-matemáticos relacionados con los estados adiabáticos: (i) la familia de vacíos adiabáticos es un conjunto de estados unitariamente equivalentes [148], y (ii) los estados adiabáticos son unitariamente equivalentes a los estados de Hadamard (para $m > 0$) [149]. En particular, el vacío de Bunch–Davies (que es un estado de Hadamard) es pues unitariamente equivalente a cualquiera de los estados adiabáticos. Dada la equivalencia demostrada entre el vacío de Bunch–Davies con el vacío unitario, se sigue entonces que este último es unitariamente equivalente a los estados adiabáticos. No obstante, por completitud en la exposición, se mostrará a continuación de manera explícita que el vacío unitario es equivalente a los estados adiabáticos de orden cero.

Para poder comparar apropiadamente los estados adiabáticos de orden cero, que se definen en la descripción para el campo ϕ , con el vacío de Fock unitario, caracterizado en la descripción del campo ϕ , se procederá en tres etapas. Primeramen-

te se tomará la descripción para el campo ϕ como la descripción básica. Después se trasladarán los datos de Cauchy que definen los estados adiabáticos de orden cero a la descripción de ϕ . Finalmente se comparará ese resultado con los datos de Cauchy (4.56) que definen el vacío de Fock con evolución unitaria.

Los estados adiabáticos se pueden definir de la siguiente forma. Se considera la ecuación (4.12) para un campo escalar ϕ propagándose en un espaciotiempo de tipo de Sitter y se realiza una descomposición del campo en armónicos hipersféricos. Así se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden para los coeficientes dependientes del tiempo de los modos, $v_{\mathbf{k}}$,

$$\partial_{\tilde{t}}^2 v_{\mathbf{k}} + 3 \left(\frac{\partial_{\tilde{t}} a(t)}{a(t)} \right) \partial_{\tilde{t}} v_{\mathbf{k}} + w_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}} = 0, \quad w_{\mathbf{k}}^2 = \frac{k(k+2)}{a^2} + m^2, \quad (4.65)$$

donde $a(t) = \cosh(Ht)/H$. Estos modos $v_{\mathbf{k}}$ han de satisfacer también la condición de normalización

$$Q_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}}^* - Q_{\mathbf{k}}^* P_{\mathbf{k}} = i, \quad (4.66)$$

para todo \mathbf{k} , donde $Q_{\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}(t_0)$ y $P_{\mathbf{k}} = a^3 \partial_{\tilde{t}} v_{\mathbf{k}}(t_0)$ son, respectivamente, las variables de configuración y de momento para el campo ϕ en la superficie de Cauchy $t = t_0$.

Para introducir los estados de vacío adiabáticos se consideran soluciones a la ecuación de movimiento para los modos de la forma

$$v_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2a^3 \Theta_{\mathbf{k}}}} \exp \left(-i \int_{\tilde{t}}^t \Theta_{\mathbf{k}}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right), \quad (4.67)$$

donde $\Theta_{\mathbf{k}}$ son funciones positivas que, dadas las ecuaciones del movimiento, han de satisfacer

$$\Theta_{\mathbf{k}}^2 = w_{\mathbf{k}}^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_{\tilde{t}} a}{a} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial_{\tilde{t}}^2 a}{a} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_{\tilde{t}} \Theta_{\mathbf{k}}}{\Theta_{\mathbf{k}}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial_{\tilde{t}}^2 \Theta_{\mathbf{k}}}{\Theta_{\mathbf{k}}}. \quad (4.68)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse de forma iterativa siempre que se consideren un intervalo de tiempo finito y valores de k suficientemente grandes [148]. Así, empezando el proceso iterativo a partir de $\Theta_{\mathbf{k}}^{(0)} = w_{\mathbf{k}}$, la función $(r+1)$ -ésima del proceso iterativo, $\Theta_{\mathbf{k}}^{(r+1)}$, se obtiene como la parte izquierda de la ecuación (4.68) sustituyendo en la parte derecha la función r -ésima precedente $\Theta_{\mathbf{k}}^{(r)}$.

Un estado de vacío adiabático de orden r -ésimo es un estado de Fock construido a partir del conjunto de soluciones $\{v_{\mathbf{k}}\}$ a la ecuación (4.65) con condiciones iniciales $\left\{ \left(v_{\mathbf{k}}^{(r)}(t_0), \partial_{\tilde{t}} v_{\mathbf{k}}^{(r)}(t_0) \right) \right\}$ determinadas por la función r -ésima $\Theta_{\mathbf{k}}^{(r)}$ mediante

$$v_{\mathbf{k}}^{(r)}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2a^3 \Theta_{\mathbf{k}}^{(r)}}} \exp \left(-i \int_{\tilde{t}}^{t_0} \Theta_{\mathbf{k}}^{(r)}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right), \quad (4.69)$$

y su correspondiente derivada temporal. Esta definición es independiente de los valores escogidos de \bar{t} y t_0 . Diferentes elecciones de \bar{t} únicamente introducen fases irrelevantes, mientras que, diferentes elecciones del tiempo inicial de referencia t_0 llevan a estados de vacío equivalentes [148].

Por lo tanto, para los estados adiabáticos de orden cero se utilizan las funciones $\Theta_{\mathbf{k}}^{(0)} = w_{\mathbf{k}} = [k(k+2) + m^2 a^2]^{1/2}/a$, y los datos de Cauchy que corresponden a estos estados de vacío están dados por

$$Q_{\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}^{(0)}, \quad P_{\mathbf{k}} = -a^2 v_{\mathbf{k}}^{(0)} \left[\left(1 + \frac{m^2}{2w_{\mathbf{k}}^2} \right) \partial_t a + i a w_{\mathbf{k}} \right]. \quad (4.70)$$

Trasladando estos datos iniciales de Cauchy a la descripción correspondiente al campo φ , para lo cual basta con usar la transformación canónica dependiente del tiempo proporcionada en (4.17), se obtiene

$$q_{\mathbf{k}} = a v_{\mathbf{k}}^{(0)} \Big|_{\eta_0}, \quad p_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} v_{\mathbf{k}}^{(0)} \left[\dot{a} \frac{m^2}{w_{\mathbf{k}}^2} + 2i a^2 w_{\mathbf{k}} \right] \Big|_{\eta_0}, \quad (4.71)$$

donde $\eta_0 = 2 \arctan(e^{Ht_0})$. Por otra parte, recordando los datos de Cauchy que definen el vacío de Fock unitario [$u_{\mathbf{k}}(\eta_0) = (2\omega_{\mathbf{k}})^{-1/2}$, $\dot{u}_{\mathbf{k}}(\eta_0) = -i(\omega_{\mathbf{k}}/2)^{1/2}$], se ve que la transformación de Bogoliubov que relaciona estos dos conjuntos de datos de Cauchy tiene los siguientes coeficientes antilineales:

$$\tilde{\beta}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} - i p_{\mathbf{k}}) = \frac{e^{-i \int w_{\mathbf{k}}} }{2(1-x_{\mathbf{k}}^2)^{1/4}} \left[i \frac{\partial_t a}{2ma^2} x_{\mathbf{k}}^3 - \left(1 - \sqrt{1-x_{\mathbf{k}}^2} \right) \right], \quad (4.72)$$

donde $x_{\mathbf{k}} = m/w_{\mathbf{k}}$. El vacío de Fock unitario y el vacío adiabático de orden cero serán unitariamente equivalentes si y solo si los coeficientes $\tilde{\beta}_{\mathbf{k}}$ son de cuadrado sumable. De la definición de $x_{\mathbf{k}}$, se tiene que $x_{\mathbf{k}} \ll 1$ en el límite asintótico ($k \rightarrow \infty$), con $x_{\mathbf{k}} \sim \mathcal{O}(k^{-1})$. Como consecuencia, en este límite ultravioleta, el comportamiento de los coeficientes beta es de la forma $\tilde{\beta}_{\mathbf{k}} \sim \mathcal{O}(k^{-2})$. Así pues, resulta que, efectivamente, el vacío de Fock unitario es equivalente al estado de vacío adiabático de orden cero. Puesto que para espaciotiempos de tipo FRW con secciones espaciales compactas los estados de vacío adiabáticos de distintos órdenes son unitariamente equivalentes entre sí [148], se concluye de hecho que el vacío de Fock unitario es equivalente a los estados adiabáticos de cualquier orden.

4.5. Discusión de resultados

En este capítulo se ha mostrado explícitamente que existe una cuantización de Fock para un campo escalar en un espaciotiempo de tipo de Sitter que admite la im-

plemetación unitaria de la evolución, independientemente de que se considere un campo masivo o sin masa. Para que la evolución sea implementable unitariamente, es necesario realizar un escalado del campo dependiente del tiempo, mediante el factor conforme, así como la introducción de un momento canónico apropiado, dado (sobre soluciones) por la derivada con respecto al tiempo conforme del campo escalado. Este resultado contradice resultados previos existentes en la literatura donde se afirmaba que era imposible obtener una cuantización de Fock para un campo escalar sin masa con evolución unitaria a través de escalados del campo dependientes del tiempo. Además de realizar una prueba directa de la implementación unitaria de la dinámica, se ha analizado un modelo simple, soluble de manera exacta con funciones elementales, que clarifica la viabilidad de la evolución unitaria incluso cuando se tienen masas dependientes del tiempo negativas y que divergen para ciertos límites.

Es importante resaltar que resultados más generales [109] permiten asegurar que la representación de Fock introducida en la sección 4.2 es la única (salvo equivalencia unitaria) representación de Fock invariante $O(4)$ que admite la implementación unitaria de la evolución de campos libres en un espaciotiempo de tipo de Sitter. Afortunadamente, no existe tensión entre este resultado, por una parte, y los resultados de unicidad proporcionados por la imposición del criterio de Hadamard por la otra. Recuérdese que para campos escalares libres que se propagan en universos con secciones espaciales compactas, el criterio de Hadamard selecciona de forma única una determinada representación para las relaciones de conmutación canónicas [73]. En particular, para un campo del Klein–Gordon masivo ϕ en el espaciotiempo de Sitter existe un único vacío invariante bajo el grupo $O(1,4)$ y que cumple la condición de Hadamard: el estado de vacío de Bunch–Davies (o vacío euclídeo). Para el caso de un campo escalar sin masa, para el que el vacío de Bunch–Davies no está bien definido, existen en cambio infinitos estados de vacío invariantes $O(4)$ que satisfacen la condición de Hadamard, los cuales se diferencian únicamente en la parametrización particular escogida para el modo cero y que, por lo tanto, forman una familia de estados de vacío unitariamente equivalentes entre sí. Así, para un espaciotiempo de tipo de Sitter, hay una única cuantización de Hadamard invariante $O(1,4)$ para un campo de Klein–Gordon con masa, y una única clase de equivalencia de estados de Hadamard invariantes $O(4)$ para un campo escalar sin masa. Bajo la transformación canónica dependiente del tiempo (4.17), las cuantizaciones únicas determinadas por el criterio de Hadamard para el campo de Klein–Gordon ϕ determinan, en la descripción del sistema en términos del campo φ , una teoría cuántica caracterizada por los datos de Cauchy dados en las expresiones (4.58) y (4.59). Se ha mostrado que, para todo valor (no negativo) de la masa, las

teorías cuánticas obtenidas a partir de estos estados de Hadamard trasladados son unitariamente equivalentes a la teoría cuántica seleccionada por la imposición de que la evolución sea implementable unitariamente. Por tanto, las dos teorías cuánticas correspondientes proporcionan las mismas predicciones físicas. Esta equivalencia elimina completamente todas las posibles tensiones al elegir entre imponer los requerimientos de uno u otro criterio.

Finalmente, se ha mostrado que el vacío unitario es unitariamente equivalente a los estados adiabáticos de orden cero. Debido a que los estados adiabáticos de distintos órdenes son equivalentes entre sí para espaciotiempos de tipo FRW con secciones espaciales compactas, como es el caso de un espaciotiempo de Sitter, todos ellos son unitariamente equivalentes al vacío unitario.

Capítulo 5

Unicidad de la cuantización de Fock bajo transformaciones canónicas dependientes del tiempo no locales

En el contexto de perturbaciones cosmológicas en escenarios inflacionarios ya se ha comentado que aparecen de forma natural transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo que además tienen una dependencia en los modos, siendo así transformaciones no locales. Este tipo de transformaciones aparecen en tales sistemas (tras una fijación conveniente de gauge) a la hora de definir variables invariantes de gauge para describir las perturbaciones cosmológicas escalares [112], ya sea a través de cantidades relacionadas con potenciales invariantes de Bardeen [113] o para la obtención de la variable de Mukhanov–Sasaki [95,96]. En el apéndice B se proporciona un ejemplo de transformaciones de este tipo en el contexto de perturbaciones cosmológicas.

Por otra parte, estas transformaciones no locales pueden relacionar distintas descripciones de campo para las que es posible obtener una cuantización de Fock en la que la dinámica sea implementable de forma unitaria. Por lo tanto, relacionan descripciones para las que es aplicable el criterio estudiado en el capítulo 3 para seleccionar una única representación de Fock (salvo equivalencia unitaria). Estas descripciones incluyen, por una parte, las consideradas en el capítulo 3, que satisfacen el tipo de ecuaciones de campo allí estudiadas. Por otra parte, también incluyen descripciones para las que las ecuaciones del movimiento han sido modificadas con cierto tipo de términos subdominantes. De forma más explícita, tras una expansión de los campos en modos adaptados a la dinámica, las ecuaciones del movimiento obtenidas contienen correcciones que dependen del modo considerado y que de-

caen suficientemente rápido en el régimen ultravioleta. Dichas correcciones afectan por una parte al término de masa dependiente del tiempo y, por otra, introducen un término de amortiguamiento [112].

Ante esta situación, es normal plantearse dos preguntas. Primero, es normal preguntarse cuál es la forma más general que toma una transformación canónica dependiente del tiempo no local que relaciona dos descripciones de campo para las que la evolución es implementable de forma unitaria. Además, dado que el criterio de evolución unitaria selecciona una representación de Fock única para ambas descripciones, es natural cuestionar si las dos cuantizaciones de Fock así obtenidas son unitariamente equivalentes, o, de forma análoga, si las transformaciones canónicas dependientes del tiempo no locales consideradas son implementables de forma unitaria. En este capítulo se realizará este estudio. Para ello, únicamente se admitirán dos suposiciones sobre las transformaciones analizadas: que éstas no mezclen modos desacoplados dinámicamente y que admitan una expansión asintótica en términos de las frecuencias de los modos en forma de serie de Laurent.

5.1. Campo de Klein–Gordon

El punto de partida para este estudio es un campo escalar de Klein–Gordon real φ con una masa dependiente del tiempo, que se propaga en un espaciotiempo ultraestático globalmente hiperbólico, de la forma $\mathbb{I} \times \Sigma$. El dominio temporal \mathbb{I} es un intervalo conexo, y no necesariamente acotado, mientras que Σ es una variedad espacial con una topología compacta tridimensional. En el caso de que \mathbb{I} sea la unión de varias componentes conexas, se podría restringir el estudio a cualquiera de estas componentes. Las secciones espaciales, isomorfas a Σ , están equipadas con una métrica (euclídea) h_{ij} . El campo satisface unas ecuaciones dinámicas como las consideradas en el capítulo 3, es decir,

$$\ddot{\varphi} - \Delta\varphi + s(t)\varphi = 0, \quad (5.1)$$

donde Δ representa el operador de Laplace–Beltrami asociado a h_{ij} . Estas ecuaciones dinámicas se completan con la ecuación de Hamilton que identifica el momento del campo p_φ con su derivada temporal, densitizado por un factor \sqrt{h} , donde h denota el determinante de la métrica h_{ij} . La no estacionariedad de este sistema surge por la presencia de la masa dependiente del tiempo, que puede interpretarse también como un potencial cuadrático que varía con el tiempo. Este tipo de ecuaciones de Klein–Gordon pueden obtenerse, por ejemplo, para campos escalares en espaciotiempos de FRW tras un escalado apropiado del campo mediante funciones

dependientes del tiempo, o, como se ha visto en el capítulo 4, para campos escalares que se propagan en un espaciotiempo de tipo de Sitter.

El espacio de fases del sistema está dado por los datos de Cauchy para un tiempo arbitrario $t_0 \in \mathbb{I}$: $(\varphi, p_\varphi) = (\varphi, \sqrt{\hbar}\dot{\varphi})|_{t_0}$. La estructura simpléctica es la correspondiente a los corchetes de Poisson estándar $\{\varphi(x), p_\varphi(y)\} = \delta(x - y)$, donde $\delta(x)$ es la distribución delta de Dirac definida en la correspondiente sección espacial Σ .

El criterio de imponer a la representación de Fock que su vacío sea invariante bajo las simetrías espaciales de las ecuaciones de campo¹ y que la evolución dinámica sea implementable de forma unitaria selecciona una única clase de representaciones de Fock unitariamente equivalentes [108]. Equivalentemente, este criterio selecciona una única clase de estructuras complejas equivalentes entre sí que determinan estas representaciones de Fock para el campo de Klein–Gordon. Esta clase de estructuras complejas es precisamente la que contiene a la estructura compleja asociada de forma natural a un campo escalar libre sin masa, J_0 , la cual se define como

$$J_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-\hbar\Delta)^{-\frac{1}{2}} \\ (-\hbar\Delta)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Debido a que J_0 se construye únicamente a partir del operador de Laplace–Beltrami asociado a la métrica espacial h_{ij} (y el determinante de dicha métrica) ésta es invariante bajo las simetrías espaciales y por lo tanto lleva a una representación de Fock cuyo vacío también es invariante.

Por conveniencia, tanto el campo de configuración como el momento canónico asociado se descomponen en una expansión en modos usando autofunciones reales del operador de Laplace–Beltrami, las cuales proporcionan una base ortonormal para el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable definidas en Σ con el elemento de volumen determinado por la métrica espacial. Se denominarán q_{nl_n} a los coeficientes (dependientes del tiempo) de los modos reales en la expansión del campo de configuración φ y, p_{nl_n} a los correspondientes coeficientes para el momento. Recordemos que la etiqueta n es un entero positivo que designa los autoespacios del operador de Laplace–Beltrami, cuyos autovalores están dados por $-\omega_n^2$, de forma que ordena de forma creciente la secuencia de números positivos $\{\omega_n\}$, tal que $\omega_n > \omega_{n'}$ si y solo si $n > n'$. Es importante mencionar que la compacidad de la topología de las secciones espaciales garantiza que esta secuencia es discreta y que tiende siempre a infinito cuando $n \rightarrow \infty$. Por otra parte, en lo sucesivo no se considerarán los modos ceros de los campos estudiados y se supondrá que éstos han

¹Este grupo G de simetrías puede tomarse como el formado por el subgrupo maximal del grupo de transformaciones unitarias que conmutan con el operador de Laplace–Beltrami [111].

sido cuantizados mediante otros métodos adecuados. Es importante recordar que esta suposición, al eliminar de la discusión únicamente un número finito de grados de libertad, no modifica ni el comportamiento del sistema de campos ni la posible implementación unitaria de la dinámica, dado que aún se conservan infinitos grados de libertad en el sector ultravioleta (para grandes ω_n). La degeneración g_n de cada uno de los autoespacios del operador de Laplace–Beltrami se tiene en cuenta a través de la etiqueta l_n . Para cada valor fijo de n , la etiqueta l_n puede tomar únicamente un número finito de valores enteros positivos dado por $l_n = 1, \dots, g_n$. Por último, la ecuación de Hamilton para la derivada temporal del campo de configuración se traduce, después de la expansión de los campos, en la ecuación $p_{nl_n} = \dot{q}_{nl_n}$.

Sustituyendo la expansión en modos para el campo en la ecuación (5.1) se obtiene que los modos reales q_{nl_n} satisfacen la ecuaciones del movimiento

$$\ddot{q}_{nl_n} + [\omega_n^2 + s(t)]q_{nl_n} = 0. \quad (5.3)$$

Claramente, estas ecuaciones desacoplan los modos en la dinámica. También es evidente que estas ecuaciones del movimiento son independientes de la etiqueta l_n y, por lo tanto, todos los modos pertenecientes (o asociados) a un mismo autoespacio del operador de Laplace–Beltrami tienen la misma dinámica. Por ello, para simplificar la notación, en lo sucesivo se eliminará la etiqueta l_n de las ecuaciones salvo que ésta sea necesaria para evitar confusión.

5.2. Transformaciones canónicas dependientes del tiempo y de los modos

Como ya se ha mencionado, transformaciones canónicas dependientes del tiempo y de los modos aparecen de forma natural en teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos y, en particular, en sus aplicaciones en perturbaciones cosmológicas [112, 113].

En este capítulo se estudiarán transformaciones canónicas dependientes del tiempo no locales que llevan desde una descripción de los campos dada por los coeficientes de los modos (q_n, p_n) y que verifican ecuaciones del movimiento de la forma (5.3) a otra descripción con modos (Q_n, P_n) tal que se satisfacen ecuaciones del movimiento de la misma forma, salvo que pueden contener contribuciones que dependan del modo considerado pero subdominantes en el régimen ultravioleta, es decir, cuando $\omega_n \rightarrow \infty$. Más específicamente, para la nueva descripción de campo

se satisfarán las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{Q}_n + \left[\omega_n^2 + M_n(t) \right] Q_n = 0, \quad (5.4)$$

con $P_n = \dot{Q}_n$. La nueva función de masa ha de ser de la forma

$$M_n(t) = \tilde{s}(t) + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}), \quad (5.5)$$

donde $\tilde{s}(t)$ es una función del tiempo, independiente de los modos, que proporciona el límite ultravioleta de la nueva masa. El criterio de imponer invariancia bajo las simetrías espaciales y evolución unitaria puede aplicarse también para seleccionar una única clase de representaciones de Fock para campos que satisfacen ecuaciones del movimiento del tipo (5.4) [112].

Primeramente se analizará qué tipo de transformaciones canónicas no locales y dependientes del tiempo permiten pasar de la descripción original, con pares canónicos de modos (q_n, p_n) que satisfacen las ecuaciones del movimiento (5.3) y $p_n = \dot{q}_n$, a un nuevo conjunto de modos canónicos (Q_n, P_n) , que satisfacen las ecuaciones del movimiento (5.4). Únicamente se considerarán transformaciones canónicas que no mezclen modos, lo que parece natural ya que éstos están desacoplados por la dinámica del sistema. Por lo tanto, la transformación más general que se puede considerar es de la forma

$$Q_n = f_n(t)p_n + g_n(t)q_n, \quad P_n = \frac{1}{g_n(t)}[1 - f_n(t)B_n(t)]p_n - B_n(t)q_n, \quad (5.6)$$

donde $f_n(t)$, $g_n(t)$ y $B_n(t)$ son funciones dependientes del tiempo y de los modos. Sin embargo, la función $B_n(t)$ está completamente determinada por las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$, debido a la imposición de la ecuación de Hamilton $P_n = \dot{Q}_n$. Por lo tanto, las transformaciones canónicas están caracterizadas simplemente por las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$. Teniendo en cuenta la forma de las transformaciones, así como las ecuaciones del movimiento que satisfacen los pares canónicos originales se tiene que, para que se verifique la ecuación $P_n = \dot{Q}_n$, la función $B_n(t)$ ha de satisfacer

$$B_n(t) = \left[\omega_n^2 + s(t) \right] f_n(t) - \dot{g}_n(t) = \frac{1 - \dot{f}_n(t)g_n(t) - g_n^2(t)}{f_n(t)}. \quad (5.7)$$

Esta expresión no solamente determina la función $B_n(t)$ en términos de $f_n(t)$ y $g_n(t)$, sino que también impone una condición a estas dos funciones, dada por la segunda igualdad de la misma. Una condición adicional se obtiene al imponer también la forma de las ecuaciones del movimiento para Q_n . De la misma manera que antes, utilizando la expresión de las transformaciones, así como las ecuaciones del

movimiento de los pares originales, se deduce que el único requerimiento no trivial obtenido de esta imposición es el referido a la modificación de la masa, que resulta ser

$$M_n(t) - s(t) = \frac{f_n(t)\dot{s}(t) + 2\dot{f}_n(t)[\omega_n^2 + s(t)] - \ddot{g}_n(t)}{g_n(t)} = -\frac{\ddot{f}_n(t) + 2\dot{g}_n(t)}{f_n(t)}. \quad (5.8)$$

Esta expresión, además de introducir la relación entre la nueva masa dependiente del tiempo, $M_n(t)$, y la original, $s(t)$, también proporciona otra condición que han de cumplir las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$, dada por la segunda igualdad en ella. No obstante, es fácil comprobar que está última condición no es funcionalmente independiente de la obtenida en (5.7): la segunda condición introducida se obtiene derivando con respecto al tiempo la primera. Por lo tanto, en lo sucesivo, únicamente se considerará la primera de dichas condiciones, esto es, la introducida en (5.7), que puede ser reescrita como

$$\dot{f}_n(t)g_n(t) - \dot{g}_n(t)f_n(t) + g_n^2(t) + [\omega_n^2 + s(t)]f_n^2(t) = 1. \quad (5.9)$$

Es conveniente destacar que, para obtener una transformación adecuada, las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ no han de satisfacer únicamente esta condición, sino que además han de ser tales que el nuevo término de masa sea de la forma (5.5), es decir, han de satisfacer que

$$M_n(t) = s(t) - \frac{1}{f_n(t)} [\ddot{f}_n(t) + 2\dot{g}_n(t)] = \tilde{s}(t) + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.10)$$

Como primer resultado, se va a probar que es imposible que una transformación canónica dependiente del tiempo, pero independiente de los modos—y, por lo tanto, local—pueda relacionar dos descripciones del sistema que satisfacen unas ecuaciones dinámicas como las que se están considerando. Para ello, supónganse por un momento que las funciones $f_n(t) = f(t)$ y $g_n(t) = g(t)$ son independientes de los modos. Es fácil comprobar que la única posibilidad para que la condición (5.9) se satisfaga es que $f(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{I}$, debido a que, de cualquier otra manera, la única contribución dependiente de los modos de la ecuación, $\omega_n^2 f^2(t)$, no puede cancelarse. Ahora, si $f(t)$ es la función cero, se sigue de la condición que $g(t) = \pm 1$ para todo tiempo y, por lo tanto, se tiene una transformación canónica trivial que lleva a las ecuaciones de campo originales y al mismo par canónico (salvo un posible cambio de signo global). Así pues, es necesario considerar que las funciones dependientes del tiempo $f_n(t)$ y $g_n(t)$ dependen también del modo analizado. Es importante mencionar que este resultado está en completo acuerdo con los resultados de unicidad para la descripción de campo seleccionada por el criterio de

imponer evolución unitaria e invariancia bajo simetría espacial cuando únicamente son consideradas transformaciones canónicas dependientes del tiempo [111] (que se reducen a escalados en lo referido a la configuración del campo). En la sección 5.3.2 se realizará un estudio más detallado de las condiciones (5.9) y (5.10).

5.3. Implementación unitaria de las transformaciones

En esta sección se estudiará la relación entre las representaciones de Fock determinadas por la estructura compleja J_0 en cada una de las dos descripciones de campo que se analizan: la original, con variables de modo (q_n, p_n) , y la transformada, con una variables del espacio de fases (Q_n, P_n) . También se estudiará la condición para que estas transformaciones canónicas sean implementables de forma unitaria y, por tanto, que ambas cuantizaciones de Fock sean equivalentes. Asumiendo la existencia de expansiones asintóticas para las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ —en forma de series de Laurent—en ω_n cuando esta cantidad se hace arbitrariamente grande, se caracterizarán las transformaciones canónicas admisibles. Es decir, se logrará caracterizar las transformaciones cuyas funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ satisfagan las condiciones (5.9) y (5.10). Además, se mostrará que todas las transformaciones admisibles pueden ser implementadas de forma unitaria. Finalmente, se estudiarán las transformaciones que llevan a una nueva descripción con un término de masa independiente del tiempo.

5.3.1. Coeficientes beta de las transformaciones

Para ambas descripciones de campo, relacionadas a través de una transformación canónica dependiente de los modos, se considera la representación de Fock definida a partir de la estructura compleja J_0 . Esta representación de Fock es seleccionada de forma única (salvo equivalencia unitaria) por el criterio de imponer invariancia bajo las simetrías espaciales y la implementación unitaria de la dinámica. Para la descripción original, esta estructura compleja J_0 proporciona las siguientes variables de destrucción y creación (para las cuales actúa de forma diagonal):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n q_n + i p_n), \quad a_n^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n q_n - i p_n). \quad (5.11)$$

Igualmente, para los modos transformados, la estructura compleja J_0 define las variables de destrucción y creación:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n Q_n + i P_n), \quad b_n^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (\omega_n Q_n - i P_n). \quad (5.12)$$

La relación entre ambos conjuntos de variables de destrucción y creación está dada por una transformación de Bogoliubov que, al no mezclar modos, tiene la forma

$$b_n = \alpha_n a_n + \beta_n a_n^*, \quad b_n^* = \beta_n^* a_n + \alpha_n^* a_n^*. \quad (5.13)$$

Debido a que esta transformación es un simplectomorfismo, es decir, preserva la estructura canónica, las funciones alfa y beta satisfacen la relación $|\alpha_n|^2 - |\beta_n|^2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Como ya se ha mencionado, una transformación lineal canónica admite una implementación unitaria en una representación de Fock dada si y solo si el conjunto de funciones beta de la transformación son de cuadrado sumable. En este caso, la condición que se ha de satisfacer a todo tiempo es

$$\sum_{n, l_n} |\beta_{nl_n}(t)|^2 = \sum_n \mathfrak{g}_n |\beta_n(t)|^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{I}, \quad (5.14)$$

donde se ha tenido en cuenta la degeneración \mathfrak{g}_n de los autoespacios del operador de Laplace–Beltrami. Teniendo en cuenta la forma de las transformaciones canónicas consideradas (5.6), así como la de la función $B_n(t)$ proporcionada por la primera igualdad en (5.7) y las definiciones de ambos conjuntos de variables de destrucción y creación, se deduce inmediatamente la expresión de las funciones beta en términos de la funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$. Como resultado se llega a

$$\beta_n(t) = -\frac{\dot{f}_n(t)}{2} - \frac{i}{2\omega_n} [f_n(t)s(t) - \dot{g}_n(t)]. \quad (5.15)$$

Por otra parte, el comportamiento asintótico de la degeneración \mathfrak{g}_n para valores grandes de n es bien conocido. El número de autoestados cuyo autovalor (cambiado de signo) es menor que un valor positivo dado $\bar{\omega}^2$ crece en d dimensiones como mucho como $\bar{\omega}^d$ [150, 151]. Además, si se asume que las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ (así como sus derivadas) admiten una expansión asintótica en potencias enteras de ω_n cuando esta cantidad tiende a infinito, lo mismo sucede para $\beta_n(t)$. Entonces, la condición de sumabilidad para la implementación unitaria se satisface para todas las dimensiones espaciales d no mayores que tres si y solo si el comportamiento asintótico de las funciones beta es del orden $\beta_n \sim \mathcal{O}(\omega_n^{-2})$. Considerando las partes reales e imaginarias de las funciones beta de forma independiente, se concluye que para lograr una implementación unitaria se tiene que satisfacer

$$\dot{f}_n(t) \sim \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \quad f_n(t)s(t) - \dot{g}_n(t) \sim \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.16)$$

Si estas dos condiciones se verifican, entonces las cuantizaciones de Fock estudiadas, relacionadas mediante las transformaciones canónicas (5.6), serán unitariamente equivalentes.

5.3.2. Implementación unitaria de las transformaciones admisibles

En esta sección se estudiarán las propiedades de las transformaciones canónicas admisibles, es decir, las transformaciones dependientes de los modos (y el tiempo) definidas a partir de las secuencias de funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ que satisfacen la condición (5.9) (de manera que los nuevos modos del momento estén dados por las derivadas temporales de los nuevos modos de configuración) y que llevan a una nueva masa $M_n(t)$ que cumple la condición (5.10). Posteriormente se estudiará si estas transformaciones admisibles satisfacen o no las condiciones para su implementación unitaria, dadas en la expresión (5.16). A lo largo de este análisis se asumirá que tanto $f_n(t)$ como $g_n(t)$ admiten una expansión en serie de Laurent en ω_n en el límite asintótico $\omega_n \rightarrow \infty$.

Analizando la primera condición (5.9), es sencillo ver que el término $\omega_n^2 f_n^2(t)$ de la ecuación no puede compensarse en el límite asintótico para ω_n infinitamente grande a no ser que $f_n(t) \sim \mathcal{O}(\omega_n^{-r})$ con $r \geq 1$. Para verlo más claramente es preferible dividir esta condición por f_n^2 y definir por conveniencia $G_n = g_n/f_n$. De esta forma, la condición puede escribirse como

$$-\dot{G}_n + G_n^2 + \omega_n^2 + s(t) = \frac{1}{f_n^2}. \quad (5.17)$$

Supóngase inicialmente que $r \leq 0$. En esta situación la única posibilidad para compensar el término $G_n^2 + \omega_n^2$ (téngase en cuenta que G_n^2 es una función definida positiva y que ω_n^2 es siempre positivo también) sería que $\dot{G}_n \sim \mathcal{O}(\omega_n^2)$.² Pero, en este caso, G_n^2 tendría un orden asintótico de al menos $\mathcal{O}(\omega_n^4)$ y, por lo tanto, no podría ser compensado por ningún otro término en la ecuación, llegando entonces a una contradicción. Así pues, como ya se anticipó, la única posibilidad es que $f_n \sim \mathcal{O}(\omega_n^{-r})$ con $r \geq 1$.

Una vez se han restringido los posibles órdenes asintóticos de f_n válidos, es inmediato ver a partir del término dominante (para ω_n grande) en la condición (5.17) que $G_n \sim f_n^{-1}$, y, por tanto, $g_n \sim \mathcal{O}(1)$. Además, con los comportamientos asintóticos permitidos para f_n , la segunda de las condiciones para la implementación unitaria de las transformaciones, dadas en (5.16), se reduce a

$$\dot{g}_n(t) \sim \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.18)$$

Teniendo en cuenta los posibles órdenes asintóticos admisibles deducidos para las funciones f_n y g_n , las expresiones asintóticas para estas funciones en serie de

²Si \dot{G}_n fuera de orden asintótico $\mathcal{O}(\omega_n^N)$ con $N > 2$, entonces G_n^2 sería al menos de orden $\mathcal{O}(\omega_n^{2N})$, y, por lo tanto, esta contribución no podría ser compensada. Por otra parte, en el caso $N < 2$, el término ω_n^2 no podría ser compensado.

Laurent (en ω_n) pasan a ser

$$f_n(t) = \frac{c_r(t)}{\omega_n^r} + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{c_k(t)}{\omega_n^k}, \quad g_n(t) = d_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(t)}{\omega_n^k}, \quad (5.19)$$

con $r \geq 1$. Aquí, $c_k(t)$ y $d_k(t)$ son funciones dependientes del tiempo, que no son completamente libres o independientes, sino que han de satisfacer las restricciones impuestas por la condición (5.9). En particular, es sencillo comprobar que las funciones $d_k(t)$ deben anularse para $1 \leq k < r$, debido a que, si no, el término $g_n^2(t)$ daría contribuciones que no podrían ser compensadas en la ecuación. Por otra parte, las condiciones necesarias y suficientes para una implementación unitaria de las transformaciones consideradas (para todas las posibles dimensiones espaciales no mayores que tres), expresadas en (5.16) y (5.18), se traducen en las condiciones $\dot{c}_1(t) = \dot{d}_0(t) = 0$.

A partir de ahora se separará el análisis en dos casos, dependiendo de si la potencia dominante r para $f_n(t)$ es igual a la unidad o no. Primeramente se analizará el caso $r \geq 2$. En este caso, la condición $\dot{c}_1(t) = 0$ se satisface inmediatamente, ya que $c_1(t)$ se anula de forma idéntica. Por otra parte, la restricción (5.9) existente sobre las funciones que definen la transformación implica que $d_0^2(t) = 1$, como puede comprobarse fácilmente. En consecuencia, d_0 es una función constante y se satisface la condición $\dot{d}_0 = 0$. Así pues, cuando $r \geq 2$ las transformaciones canónicas dependientes de los modos consideradas siempre pueden ser implementadas como transformaciones unitarias en la representación de Fock original, determinada por J_0 . Por tanto, esta cuantización es unitariamente equivalente a la obtenida para la nueva descripción de campo.

Ahora se considerará el caso $r = 1$. Sustituyendo las expansiones asintóticas para las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ en la ecuación (5.10), se deduce que el comportamiento asintótico para la nueva masa está dado por

$$M_n(t) \sim s(t) - \frac{2\dot{d}_0(t)}{c_1(t)}\omega_n - \frac{\ddot{c}_1(t) + 2\dot{d}_1(t)}{c_1(t)} + 2\frac{c_2(t)\dot{d}_0(t)}{c_1^2(t)} + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.20)$$

En consecuencia, la restricción de que $M_n(t)$ tenga un límite ultravioleta bien definido (con posibles términos subdominantes) requiere que $\dot{d}_0 = 0$, por lo que d_0 ha de ser una función constante. Además, la restricción (5.9) sobre las funciones de la transformación impone para el orden asintótico dominante la condición $d_0^2 + c_1^2 = 1$. Así pues, c_1 ha de ser también una función constante y por tanto $\dot{c}_1 = 0$. Como resultado, las condiciones (5.16) se satisfacen, y todas las transformaciones canónicas admisibles alcanzan una implementación unitaria en la cuantización de Fock original determinada por J_0 . Al igual que ocurría para el caso $r \geq 2$, las nuevas cuantizaciones de Fock son entonces unitariamente equivalentes a la cuantización original,

y el criterio de imponer invariancia bajo las simetrías espaciales y la implementación unitaria de la dinámica selecciona una única clase de teorías cuánticas de Fock equivalentes para campos de Klein–Gordon.

5.3.3. Caracterización de las transformaciones admisibles

En esta sección se caracterizarán de forma más detallada las transformaciones canónicas admisibles y, en particular, se discutirán sus comportamientos asintóticos. Para ello se definirá la función $A_n(t)$ como

$$A_n(t) = \frac{1}{g_n(t)} [1 - f_n(t)B_n(t)], \quad (5.21)$$

de forma que las transformaciones estudiadas se pueden escribir como

$$Q_n = f_n(t)p_n + g_n(t)q_n, \quad P_n = A_n(t)p_n - B_n(t)q_n. \quad (5.22)$$

Primeramente, para el caso $r = 1$, se identifican dos tipos de comportamientos cualitativamente distintos, dependiendo de si $d_0 = 0$ o no. Para el caso $d_0 \neq 0$, los modos de configuración del nuevo campo son proporcionales a los originales en el régimen ultravioleta. Por lo tanto, ambos conjuntos de modos de configuración tienen un comportamiento similar. En cambio, en lo referido a los modos del momento, la función $A_n(t)$ tiene un límite ultravioleta bien definido, pero $B_n(t)$ es de orden asintótico $\mathcal{O}(\omega_n)$. Por lo tanto, para los nuevos modos del momento la parte proporcional a los modos de configuración originales explota cuando ω_n tiende a infinito. En resumen, para este caso las funciones que definen la transformación están dadas por

$$f_n(t) = \frac{c_1}{\omega_n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k(t)}{\omega_n^k}, \quad g_n(t) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(t)}{\omega_n^k}, \quad (5.23)$$

donde d_0 y c_1 , son dos constantes no nulas que satisfacen $d_0^2 + c_1^2 = 1$. Esto lleva a que las funciones que aparecen en la definición de los nuevos modos del momento tengan el comportamiento

$$A_n(t) = d_0 + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}), \quad B_n(t) = c_1\omega_n + c_2(t) + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.24)$$

En cuanto al caso $r = 1$, con $d_0 = 0$, los nuevos modos de configuración están definidos como combinaciones lineales que tienen un límite ultravioleta que se anula, lo cual puede parecer sorprendente. Esto es compensado por el comportamiento

para los modos del nuevo momento, los cuales están definidos como unas combinaciones lineales que explotan cuando ω_n va a infinito. Una transformación de este tipo tiene lugar de forma natural en el contexto de perturbaciones cosmológicas sobre espaciotiempos de FRW cerrados (véase el apéndice B). En particular, una transformación tal relaciona los pares canónicos que describen las perturbaciones escalares en el gauge longitudinal con los correspondientes pares canónicos de potenciales de Bardeen [112]. Para este tipo de transformación, es fácil comprobar que la condición (5.9) impone que $c_2(t) = 0$. Con esto, las funciones que definen la transformación en este caso adoptan la forma

$$f_n(t) = \pm \frac{1}{\omega_n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c_k(t)}{\omega_n^k}, \quad g_n(t) = \frac{d_1(t)}{\omega_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(t)}{\omega_n^k}, \quad (5.25)$$

mientras que las funciones que aparecen en la definición de los nuevos modos de momento se comportan asintóticamente como

$$A_n(t) \sim \mathcal{O}(\omega_n^{-1}), \quad B_n(t) \sim \pm \omega_n + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.26)$$

Para estos dos primeros casos, con $r = 1$, se tiene que el comportamiento asintótico de la nueva masa es

$$M_n(t) \sim s(t) - 2 \frac{\dot{d}_1(t)}{c_1} + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.27)$$

Se ve que, en general, el límite asintótico para la nueva masa no coincide con el valor de la masa para la descripción original.

Considérese ahora $r \geq 2$. Para esta situación, dado que $d_0 = \pm 1$, el límite asintótico de los modos de configuración nuevos coincide (salvo por un posible cambio de signo) con los modos de configuración originales. Las funciones que determinan la transformación tienen la forma asintótica

$$f_n(t) = \frac{c_r(t)}{\omega_n^r} + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{c_k(t)}{\omega_n^k}, \quad g_n(t) = \pm 1 + \sum_{k=r}^{\infty} \frac{d_k(t)}{\omega_n^k}. \quad (5.28)$$

No obstante, en lo referido a los nuevos modos del momento, se pueden distinguir dos casos con comportamientos cualitativamente distintos según sea $r = 2$ o $r \leq 3$. Para $r = 2$ se obtiene el siguiente comportamiento asintótico para las funciones $A_n(t)$ y $B_n(t)$:

$$A_n(t) \sim \pm 1 + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \quad B_n(t) \sim c_2(t) + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.29)$$

Así pues, el límite asintótico de los nuevos modos del momento es una combinación lineal de los modos de momento y configuración originales, incluso incluyendo funciones dependientes del tiempo. Una transformación de este tipo tiene lugar en la

definición de las variables de Mukhanov–Sasaki para el estudio de perturbaciones cosmológicas sobre espaciotiempos de FRW planos a partir de los pares canónicos de las perturbaciones escalares en el gauge longitudinal [134]. Para $r \leq 3$, el comportamiento asintótico de las funciones que definen los nuevos momentos está dado por

$$A_n(t) \sim \pm 1 + \mathcal{O}\left(\omega^{-2r+2}\right), \quad B_n(t) \sim \frac{c_r(t)}{\omega_n^{r-2}} + \mathcal{O}\left(\omega_n^{-r+1}\right). \quad (5.30)$$

Por lo tanto, para este caso los nuevos modos del momento coinciden con los en el límite asintótico (salvo por un posible cambio de signo). Además, para todos los casos con $r \geq 2$, el límite asintótico para la nueva masa está dado por

$$M_n(t) \sim s(t) - \frac{\ddot{c}_r(t) + 2\dot{d}_r(t)}{c_r(t)} + \mathcal{O}(\omega_n^{-1}). \quad (5.31)$$

Al igual que antes, la nueva función de masa no solo depende en general de los modos, sino que su límite asintótico difiere de la masa original $s(t)$. Para que se recupere la masa original en el límite asintótico es necesario que $d_1(t)$ sea constante para $r = 1$ y que $\ddot{c}_r(t) = -2\dot{d}_r(t)$ en los casos $r \geq 2$.

5.3.4. Transformaciones no locales entre descripciones con masa independiente de los modos

Ahora se estudiará una subclase de transformaciones canónicas dependientes del tiempo y de los modos (de la forma considerada en la sección 5.3.3) que llevan a una nueva descripción de campo con una masa independiente de los modos, es decir, todos los modos del nuevo campo evolucionan con el mismo término de masa, al igual que sucede para los modos originales. Para enfatizar esto se escribirá $M_n(t) = M(t)$. Recordando la expresión que tomaba la nueva función de masa a partir de la antigua y las funciones que determinan la transformación (5.10), se concluye que, para que la nueva masa sea independiente de los modos, la función g_n tiene que satisfacer la restricción

$$g_n(t) = -\frac{1}{2}\dot{f}_n(t) + \frac{1}{2} \int^t S(\bar{t})f_n(\bar{t})d\bar{t}, \quad (5.32)$$

donde $S(t) = s(t) - M(t)$ es la diferencia entre la función de masa original y la nueva función de masa. Además, una constante global de integración ha sido absorbida dejando sin especificar el tiempo inicial de la última integración. De esta forma, la función $g_n(t)$ está completamente determinada (salvo por constantes que

pueden depender del modo) por la función $f_n(t)$ y la diferencia entre las dos funciones de masa consideradas. Utilizando esta expresión para $g_n(t)$, la restricción (5.9) que determina las transformaciones canónicas admisibles se convierte en

$$-\frac{1}{4}[\dot{f}_n(t)]^2 + \frac{1}{2}\ddot{f}_n(t)f_n(t) + \frac{1}{4}\left[\int^t S(\bar{t})f_n(\bar{t})d\bar{t}\right]^2 + [\omega_n^2 + \bar{s}(t)]f_n^2(t) = 1, \quad (5.33)$$

donde se ha definido $\bar{s}(t) = [s(t) + M(t)] / 2$.

Si se sustituye la expansión asintótica para la función $f_n(t)$ en serie de Laurent en ω_n , y se permite el intercambio de orden entre la suma infinita de la expansión y la integral en la expresión (5.33), se obtiene a partir de esta igualdad un conjunto de ecuaciones diferenciales jerárquicas que permiten obtener los coeficientes de la serie para $f_n(t)$ mediante un proceso recursivo, comenzando por la contribución dominante en el límite $\omega_n \rightarrow \infty$ y descendiendo en la secuencia de potencias enteras negativas de ω_n . En cada paso de esta jerarquía aparece una nueva constante de integración, permitiendo así cierta libertad en la elección de los coeficientes de la transformación.

Un caso de especial interés es el de transformaciones que no afectan a la masa dependiente del tiempo, es decir, para las cuales la nueva función de masa no solo no depende de los modos, sino que además coincide con la función de masa original. Para esta situación, la función $S(t)$ se anula, y $\bar{s}(t) = s(t)$. Por tanto, se obtiene que

$$g_n(t) = K_n - \frac{\dot{f}_n(t)}{2}, \quad (5.34)$$

donde K_n es una constante (temporal) que depende del modo. Dado el comportamiento asintótico de las funciones $g_n(t)$ y $f_n(t)$, la constante K_n han de tener la forma

$$K_n = \kappa_0 + \sum_{k=1} \frac{\kappa_k}{\omega_n^k}, \quad (5.35)$$

donde κ_k son números reales. La expresión para la función $f_n(t)$ puede determinarse reemplazándola por su expansión asintótica en términos de serie de Laurent en la ecuación (5.33), particularizando esta ecuación a los valores $S(t) = 0$ y $\bar{s}(t) = s(t)$, y siguiendo el procedimiento explicado anteriormente. Como ya se ha comentado, las soluciones siempre pueden obtenerse mediante un proceso recursivo, al menos a un nivel formal.

5.4. Discusión

En este capítulo se han estudiado una cierta clase de transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo no locales para campos escalares que se propagan en espaciotiempos no estacionarios con secciones espaciales compactas. Estas transformaciones dependientes del tiempo absorben parte de la dinámica del campo debida al fondo no estacionario. De forma más específica, la clase de transformaciones que se han estudiado relaciona distintas descripciones de campo en las cuales las ecuaciones del movimiento toman la forma de una ecuación de Klein–Gordon en un espaciotiempo ultraestático auxiliar pero con un término de masa que depende del tiempo. Se han permitido correcciones subdominantes para estas ecuaciones en el sector ultravioleta, que corresponde a los modos asociados con autovalores grandes (en norma) del operador de Laplace–Beltrami. Las ecuaciones dinámicas se completan con la ecuación hamiltoniana que relaciona la configuración del campo con su momento. Se ha restringido el análisis al caso en el que esta última ecuación iguala la derivada temporal de los modos de configuración con los respectivos modos del momento, para todas las descripciones de campo consideradas. Además, usando la descomposición de los campos a través de las autofunciones del operador de Laplace–Beltrami, las posibles no localidades de las transformaciones canónicas analizadas consisten en su dependencia en el modo considerado, pero respetándose el desacoplo dinámico de los modos.

Para el tipo de ecuaciones del movimiento estudiadas, el criterio de imponer (i) invariancia del vacío bajo las simetrías espaciales de la dinámica y (ii) la existencia de una evolución implementable de forma unitaria, selecciona una única representación de Fock para la relaciones canónicas de conmutación (salvo por equivalencia unitaria) en cada una de las descripciones relacionadas mediante las transformaciones canónicas no locales consideradas. La representación de Fock seleccionada es equivalente a la determinada por la estructura compleja que se asocia de forma natural al caso de un campo libre sin masa [108, 112]. El análisis realizado en este capítulo puede verse como una extensión de estos resultados de unicidad al permitir (a) cambios dependientes del tiempo en la configuración del campo que incluyen contribuciones del momento, y (b) que las transformaciones canónicas dependan de los modos y por lo tanto sean no locales. No obstante, se han impuesto dos restricciones sobre el tipo de transformaciones canónicas consideradas. Por una parte, se ha exigido que éstas sean compatibles con la evolución dinámica, en el sentido de que no mezclen los distintos modos del operador de Laplace–Beltrami, dado que están desacoplados dinámicamente. Debido a esto, además, las transformaciones consideradas tienen la misma forma para cada uno de los autoespacios de este ope-

rador, dado que la dinámica es la misma para todos los modos degenerados. Por otra parte, se ha asumido que las funciones que determinan la transformaciones canónicas admiten una expansión asintótica en el sector ultravioleta en forma de serie de Laurent en ω_n (la raíz cuadrada de la norma de los autovalores de Laplace–Beltrami).

Se ha estudiado primeramente si existen o no esta clase de transformaciones canónicas no locales dependientes del tiempo que relacionan diferentes descripciones con el mismo tipo de ecuaciones dinámicas. Se ha demostrado que en verdad existen y que, de hecho, son necesariamente dependientes de los modos. Por lo tanto, no existen transformaciones canónicas locales que cumplan los requisitos impuestos. Para las dos descripciones relacionadas por cada una de estas transformaciones canónicas, una cuantización de Fock privilegiada es seleccionada por el criterio de unicidad consistente en imponer una evolución unitaria y la invariancia bajo las simetrías espaciales. De esta forma, la pregunta que surge naturalmente es si estas cuantizaciones (las seleccionadas para cada una de las distintas descripciones) son de hecho equivalentes, o si surge un nuevo tipo de ambigüedad que afecta a la física obtenida en la teoría cuántica y que no puede ser eliminada mediante el criterio propuesto. Esta pregunta puede ser reformulada planteándose si las transformaciones canónicas consideradas admiten una implementación unitaria o no. Se ha demostrado que todas y cada una de las transformaciones canónicas no locales estudiadas son de hecho implementables de forma unitaria. Así, se garantiza la unicidad de la teoría cuántica de Fock seleccionada por el criterio empleado. Esto muestra la consistencia de este criterio y proporciona una mayor robustez a la teoría cuántica seleccionada, así como a las predicciones físicas extraídas a partir de ella. Finalmente, se han analizado en más detalle el caso específico en el que se obtienen nuevas masas dependientes del tiempo pero independientes de los modos, es decir, sin correcciones subdominantes. Se ha mostrado que este tipo de transformaciones son generalmente posibles, y se ha formulado la condición que esta subfamilia de transformaciones ha de satisfacer.

Es importante mencionar que este tipo de transformaciones aparece en el estudio de perturbaciones cosmológicas, relacionando la descripción de perturbaciones escalares en torno a espaciotiempos de FRW (tanto cerrados como planos) en el gauge longitudinal y la descripción en términos de cantidades invariantes de gauge, en términos de potenciales invariantes de Bardeen [112] o en términos de la variable de Mukhanov–Sasaki para el caso plano [134]. En el apéndice B se presenta resumidamente la situación para el caso cerrado. Por último, los resultados presentados en este capítulo parecen tener aplicación y poder extenderse al caso de campos fermiónicos, donde este tipo de transformaciones podrían tener espa-

cial importancia. Por ejemplo, en la referencia [152] se analiza un modelo cuántico que contiene campos fermiónicos con una creación finita de partículas en la evolución o, equivalentemente, con una dinámica unitariamente implementable. Para obtener esta dinámica unitaria para tal modelo es necesario definir unas variables de destrucción y creación usando transformaciones canónicas (no locales) dependientes del tiempo y del modo con respecto a la descripción original de los campos fermiónicos. Por ello, el análisis y las conclusiones expuestas en este capítulo pueden ser importantes a la hora de construir una cuantización de Fock para fermiones con las propiedades deseables de simetría y unitariedad, y también para asegurar la unicidad (salvo transformaciones unitarias) de la teoría cuántica.

Parte II

Cosmología cuántica de lazos inhomogénea: cuantización híbrida y métodos aproximados

Capítulo 6

Cuantización híbrida del modelo de Gowdy con materia

Como ya se ha comentado en los capítulos de introducción, el estudio de modelos cosmológicos inhomogéneos en el marco de la cosmología cuántica de lazos se desarrolló considerando el ejemplo del modelo de Gowdy T^3 linealmente polarizado, para el que se introdujeron técnicas de cuantización híbrida que combinan los procedimientos de la cuantización de lazos para los grados de libertad homogéneos con una cuantización de Fock para las inhomogeneidades. No obstante, este modelo de Gowdy en vacío, pese a contener infinitos grados de libertad, está muy alejado de describir situaciones realistas. Esto es debido principalmente a que el sector homogéneo de este modelo corresponde a cosmologías de Bianchi I en vacío, cuyas únicas soluciones isótropas corresponden al espaciotiempo estático de Minkowski.

Con la motivación de extender las técnicas de cuantización híbrida a modelos más realistas, en este capítulo se estudiará dicho modelo de Gowdy con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado y con las mismas simetrías que la geometría. El estudio de la cuantización mediante técnicas híbridas de este modelo permitirá estudiar la inclusión de inhomogeneidades materiales dentro del marco de cosmología cuántica de lazos. Además, debido a la presencia de este contenido material, el modelo que se va a considerar admite cosmologías de tipo FRW plano como un subconjunto de sus soluciones clásicas homogéneas. De esta forma, el modelo, aunque no describa escenarios completamente realistas, ya que las inhomogeneidades que contiene únicamente varían en una dirección espacial, permitirá estudiar, en el marco de la cuantización híbrida, el comportamiento de las inhomogeneidades—tanto materiales como gravitatorias—al propagarse en geometrías que se aproximan bastante bien al universo en el que vivimos.

6.1. Descripción clásica del modelo

En esta sección se realizará el estudio clásico del modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 linealmente polarizado y con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado. Se mostrará el espacio de fases inicial del modelo, para posteriormente realizar una fijación parcial de gauge que eliminará toda la libertad gauge salvo dos ligaduras globales. En este proceso, se introducirá un escalado adecuado de las inhomogeneidades materiales. Posteriormente, se describirá el sistema en unas variables apropiadas para su cuantización.

6.1.1. Espacio de fases inicial

Como ya se ha mencionado, las cosmologías de Gowdy [114, 115] representan espaciotiempos globalmente hiperbólicos con secciones espaciales compactas que son soluciones a las ecuaciones de Einstein en vacío y que contienen dos campos vectoriales espaciales de Killing, que resultan conmutar. Aquí se centrará el estudio en el caso de la topología del tres-toro, que representa el caso más simple y a la vez con mayor interés físico. Además, se considerará el submodelo con polarización lineal de las ondas gravitatorias, lo que equivale a exigir que los dos campos vectoriales de Killing sean ortogonales a hipersuperficies. De ahora en adelante se denominará a este sistema como el modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 linealmente polarizado. Se incluirá en este modelo un campo escalar sin masa mínimamente acoplado, Φ , que posea las mismas simetrías que la geometría. En esta situación, es posible adoptar coordenadas $\{t, \theta, \sigma, \delta\}$ adaptadas a las simetrías, donde t es la coordenada temporal y θ, σ y δ están definidas en el círculo, \mathbb{S}^1 , de manera tal que los campos de Killing se correspondan con ∂_σ y ∂_δ . Así pues, todos los campos que describen el sistema, tanto métricos como materiales, dependerán únicamente de la coordenada temporal t y de la coordenada espacial cíclica $\theta \in \mathbb{S}^1$. En particular, se podrá realizar una expansión de todos los campos en serie de Fourier en la coordenada θ . De esta forma, para un campo real genérico, como por ejemplo $\Phi(t, \theta)$, la descomposición en modos de Fourier y la definición de sus coeficientes vendrán dadas por

$$\Phi(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Phi_m(t) e^{im\theta}, \quad \Phi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint d\theta \Phi(t, \theta) e^{-im\theta}. \quad (6.1)$$

Como los campos considerados son reales, los coeficientes de Fourier han de satisfacer la relación $\Phi_{-m} = \Phi_m^*$, donde el símbolo $*$ denota la conjugación compleja.

Primeramente se realiza una descomposición 3+1 del sistema. La métrica espaciotemporal para el modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 se describe así en términos de la tres-

métrica espacial h_{ab} , inducida en las secciones espaciales es la que hemos exfoliado el espaciotiempo, de la función lapso N y del vector desplazamiento N^a , donde $a, b \in \{\theta, \sigma, \delta\}$. Teniendo en cuenta la simetría generada por los campos de Killing, es posible fijar toda la libertad de gauge asociada a las ligaduras de momento en las direcciones σ y δ mediante las condiciones de que las componentes $h_{\theta\sigma}$ y $h_{\theta\delta}$ de la métrica espacial se anulen. Estas condiciones también requieren, para estar bien definidas y ser estables dinámicamente, que las componentes del vector desplazamiento en dichas direcciones, N^σ y N^δ , se anulen [153]. Por otra parte, la restricción al estudio del caso con polarización lineal implica la condición $h_{\sigma\delta} = 0$. Con esto, tenemos que las únicas componentes de la tres-métrica no nulas son las componentes diagonales. Así, el elemento de línea espaciotemporal se puede escribir como

$$ds^2 = -h\tilde{N}^2 dt^2 + h_{\theta\theta}(d\theta + N^\theta dt)^2 + h_{\sigma\sigma}d\sigma^2 + h_{\delta\delta}d\delta^2. \quad (6.2)$$

Aquí, se ha introducido el lapso densitizado $\tilde{N} = N/\sqrt{h}$, donde h representa el determinante de la métrica espaciotemporal. Las componentes de la métrica pueden ser parametrizadas convenientemente a partir de tres campos métricos adimensionales $\{\tau, \xi, \tilde{\gamma}\}$:

$$h_{\theta\theta} = \tilde{l}^2 \exp\left(\tilde{\gamma} - \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} - \frac{\xi^2}{4\tau}\right), \quad h_{\sigma\sigma} = \tilde{l}^2 \tau^2 \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right), \quad h_{\delta\delta} = \tilde{l}^2 \exp\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right), \quad (6.3)$$

donde \tilde{l} es una constante con dimensiones de longitud $\tilde{l}^2 = 4G/\pi$. Es importante notar que los tres campos usados para parametrizar la métrica tienen una interpretación geométrica clara, ya que, esencialmente, representan cantidades proporcionales al área de las órbitas de isometría generadas por los vectores de Killing, la norma de uno de éstos, y el factor conforme de la métrica inducida en el conjunto de las órbitas de isometría.

El espacio de fases asociado con la geometría está dado por estos tres campos métricos $\{\tau, \xi, \tilde{\gamma}\}$ y por los campos que representan sus respectivos momentos conjugados $\{P_\tau, P_\xi, P_{\tilde{\gamma}}\}$. En cuanto al espacio de fases material, está constituido por el campo escalar sin masa Φ y su momento canónicamente conjugado P_Φ . La acción para el sistema total es la suma de la acción asociada a la geometría [100] y la acción para el campo material, y viene dada por

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \oint d\theta \left[P_\tau \dot{\tau} + P_\xi \dot{\xi} + P_{\tilde{\gamma}} \dot{\tilde{\gamma}} + P_\Phi \dot{\Phi} - \left(\tilde{N} \mathcal{C} + N^\theta C_\theta \right) \right], \quad (6.4)$$

donde el punto denota aquí la derivada con respecto al tiempo t , y \mathcal{C} y C_θ representan respectivamente la ligadura hamiltoniana (o escalar) densitizada y la ligadura

de difeomorfismos (o de momentos) en la dirección θ . Estas ligaduras toman las expresiones:

$$\mathcal{C} = \tilde{l}^2 \left\{ \frac{\tau}{2} P_{\xi}^2 + \frac{\xi^2}{8\tau} P_{\tilde{\gamma}}^2 - \tau P_{\tau} P_{\tilde{\gamma}} + \frac{\tau}{2} \left[4\tau'' - 2\tilde{\gamma}'\tau' - \left(\frac{\xi\tau'}{2\tau} \right)^2 + (\xi')^2 \right] \right\} + \frac{P_{\Phi}^2}{8\pi^2} + 2\pi^2 \tilde{l}^4 \tau^2 (\Phi')^2, \quad (6.5)$$

$$C_{\theta} = P_{\tau}\tau' + P_{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma}' + P_{\xi}\xi' + P_{\Phi}\Phi' - 2P_{\tilde{\gamma}}'. \quad (6.6)$$

La prima denota la derivada con respecto a la coordenada cíclica θ . En la expresión de la ligadura hamiltoniana densitizada, la primera línea corresponde a la contribución debida a la geometría, mientras que la segunda línea corresponde a la contribución dada por el contenido material.

6.1.2. Fijación parcial de gauge y espacio de fases reducido

Llegado este punto, se realiza una reducción parcial de gauge del sistema eliminando prácticamente toda la libertad de gauge en un nivel clásico y dejando únicamente por satisfacer los modos homogéneos de las dos ligaduras consideradas anteriormente. Para ello, se imponen unas condiciones de fijación de gauge análogas a las utilizadas para el modelo de Gowdy en vacío [37], y que están estrechamente relacionadas con las impuestas para deparametrizar completamente el sistema [97]. Estas condiciones son:

$$\chi_1 \equiv P_{\tilde{\gamma}} - \frac{P_{\tilde{\gamma}0}}{\sqrt{2\pi}} = 0, \quad \chi_2 \equiv \tau - \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi}} = 0, \quad (6.7)$$

donde $P_{\tilde{\gamma}0}$ y τ_0 corresponden a los coeficientes de Fourier asociados a los modos cero de los campos $P_{\tilde{\gamma}}$ y τ , respectivamente. Se observa cómo las condiciones de fijación de gauge introducidas corresponden a imponer la homogeneidad del campo correspondiente al generador de las transformaciones conformes de la métrica inducida en el conjunto de las órbitas de isometría, $P_{\tilde{\gamma}}$, y, del área de dichas orbitas, τ .

Para que estas condiciones lleven a una fijación parcial de gauge aceptable, por una parte deben formar, junto a las ligaduras \mathcal{C} y C_{θ} , un sistema de ligaduras de segunda clase (en la terminología de Dirac [6]). Por otra parte, las condiciones de fijación de gauge han de ser compatibles con la dinámica. El primero de estos requisitos impone que, tanto $P_{\tilde{\gamma}}$ como τ , sean funciones que no se anulen para ningún tiempo. El segundo requisitos impone que, tanto el lapso densitizado \underline{N} como la única componente no nula del vector desplazamiento, N^{θ} , sean funciones homogéneas. Así, se

fija toda la libertad de gauge de sistema considerado salvo los modos homogéneos de ambas ligaduras. Las partes inhomogéneas de los campos $\tilde{\gamma}$ y P_τ quedan fijadas de forma que se satisfagan los modos inhomogéneos de ambas ligaduras, por lo que únicamente quedan sin determinar sus modos homogéneos. Después de esta fijación parcial de gauge, el espacio de fases del sistema reducido está descrito por dos pares canónicos de variables homogéneas (tipo “partícula puntual”), (τ_0, P_{τ_0}) y $(\tilde{\gamma}_0, P_{\tilde{\gamma}_0})$, así como por dos pares de campos canónicamente conjugados: un par métrico (ξ, P_ξ) y el otro dado por el campo escalar material (Φ, P_Φ) . Para estos dos pares de campos canónicamente conjugados se separan explícitamente sus modos homogéneos, de manera que se puede escribir

$$\Phi(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi(t) + \tilde{\phi}(t, \theta), \quad P_\Phi(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}P_\phi(t) + P_{\tilde{\phi}}(t, \theta), \quad (6.8)$$

$$\xi(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi_0(t) + \zeta(t, \theta), \quad P_\xi(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}P_{\xi_0}(t) + P_\zeta(t, \theta), \quad (6.9)$$

donde ϕ , P_ϕ , ξ_0 y P_{ξ_0} corresponden respectivamente a los coeficientes asociados al modo cero de la descomposición de Fourier de los campos respectivos Φ , P_Φ , ξ y P_ξ . Dada la definición utilizada se cumple también que

$$\oint d\theta \tilde{\phi}(t, \theta) = 0, \quad (6.10)$$

y de forma análoga para los campos $P_{\tilde{\phi}}$, ζ y P_ζ ; es decir, estos campos no tienen contribución homogénea global. Así, el espacio de fases reducido puede separarse en un *sector homogéneo* y un *sector inhomogéneo*. El sector homogéneo está compuesto por cuatro pares canónicos de variables tipo “partícula puntual”: tres que describen la geometría homogénea del sistema, $\{(\tau_0, P_{\tau_0}), (\tilde{\gamma}_0, P_{\tilde{\gamma}_0}), (\xi_0, P_{\xi_0})\}$, y otro par que da cuenta del contenido material homogéneo, (ϕ, P_ϕ) . El sector *sector inhomogéneo* está compuesto por dos pares de campos canónicamente conjugados con componente homogénea nula: uno que describe las ondas gravitacionales, (ζ, P_ζ) , y otro las inhomogeneidades materiales, $(\tilde{\phi}, P_{\tilde{\phi}})$.

La acción reducida después de la fijación parcial de gauge viene dada por

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[P_{\tau_0} \dot{\tau}_0 + P_{\tilde{\gamma}_0} \dot{\tilde{\gamma}}_0 + P_{\xi_0} \dot{\xi}_0 + P_\phi \dot{\phi} + \oint d\theta \left(P_\zeta \dot{\zeta} + P_{\tilde{\phi}} \dot{\tilde{\phi}} \right) - \left(\tilde{N}C + N^\theta C_\theta \right) \right], \quad (6.11)$$

donde ahora las dos ligaduras que permanecen en el sistema, y que se seguirán denominando como C y C_θ , son las ligaduras globales correspondientes (esencialmente) a los modos cero de las ligaduras originales (6.5) y (6.6). Estas ligaduras

globales, en función de las variables del espacio de fases reducido, adoptan las siguientes expresiones:

$$\mathcal{C} = \frac{\tilde{l}^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\tau_0 P_{\tau_0} P_{\tilde{\gamma}_0} + \frac{P_{\tilde{\gamma}_0}}{8\tau_0} \xi_0^2 + \frac{\tau_0}{2} P_{\xi_0}^2 + \frac{\sqrt{2\pi}}{\tilde{l}^2} \frac{P_{\tilde{\phi}}^2}{8\pi^2} \right. \\ \left. + \oint d\theta \left[\frac{P_{\tilde{\gamma}_0}^2}{8\tau_0} \zeta^2 + \frac{\tau_0}{2} P_{\zeta}^2 + \frac{\tau_0}{2} (\zeta')^2 + \frac{\sqrt{2\pi}}{\tilde{l}^2} \frac{P_{\tilde{\phi}}^2}{8\pi^2} + \sqrt{2\pi^3 \tilde{l}^2 \tau_0^2} (\tilde{\phi}')^2 \right] \right\}, \quad (6.12)$$

$$C_\theta = \oint d\theta \left[P_{\zeta} \zeta' + P_{\tilde{\phi}} \tilde{\phi}' \right]. \quad (6.13)$$

En éstas, se observa cómo la ligadura de difeomorfismos únicamente involucra el sector inhomogéneo del espacio de fases. La ligadura escalar, por su parte, tiene una contribución que únicamente involucra el sector homogéneo, y que corresponde a la primera línea de la formula (6.12), mientras que el resto de contribuciones involucran todo el espacio de fases reducido, acoplando así de manera no trivial ambos sectores del espacio de fases.

6.1.3. Escalado del campo escalar

Considérese ahora la siguiente transformación de contacto que incluye el escalado del campo que describe las inhomogeneidades materiales $\tilde{\phi}$:

$$\varphi = 2\pi\tilde{l}\sqrt{\tau}\tilde{\phi}, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma} + \pi^2\tilde{l}^2 \oint d\theta \tilde{\phi}^2, \quad (6.14)$$

y que se completa a una transformación canónica mediante

$$P_\varphi = \frac{P_{\tilde{\phi}}}{2\pi\tilde{l}\sqrt{\tau}} - \pi\tilde{l} \frac{P_{\tilde{\gamma}}\tilde{\phi}}{\sqrt{\tau}}, \quad \tilde{P}_\tau = P_\tau + \frac{\pi^2\tilde{l}^2}{\tau} \left[\oint d\theta \left(P_{\tilde{\gamma}}\tilde{\phi}^2 - \frac{P_{\tilde{\phi}}\tilde{\phi}}{2\pi^2\tilde{l}^2} \right) \right], \quad P_{\tilde{\gamma}} = P_{\tilde{\gamma}}. \quad (6.15)$$

En estas ecuaciones se ha utilizado una notación simplificada para los grados de libertad homogéneos, de forma que, por ejemplo, $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi}}$, y análogamente para el resto de variables homogéneas involucradas. Después de realizar esta transformación canónica, las ligaduras globales se expresan en función de las nuevas variables como

$$\tilde{\mathcal{C}} = \frac{\tilde{l}^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\tau_0 \tilde{P}_{\tau_0} P_{\tilde{\gamma}_0} + \frac{P_{\tilde{\gamma}_0}}{8\tau_0} \xi_0^2 + \frac{\tau_0}{2} P_{\xi_0}^2 + \frac{\sqrt{2\pi}}{\tilde{l}^2} \frac{P_{\tilde{\phi}}^2}{8\pi^2} \right. \\ \left. + \oint d\theta \left[\frac{P_{\tilde{\gamma}_0}}{8\tau_0} (\zeta^2 + \varphi^2) + \frac{\tau_0}{2} \left(P_{\zeta}^2 + (\zeta')^2 + P_{\varphi}^2 + (\varphi')^2 \right) \right] \right\}, \quad (6.16)$$

$$C_\theta = \oint d\theta (P_\zeta \zeta' + P_\varphi \varphi'). \quad (6.17)$$

Así pues, tras la transformación canónica que incluye el escalado del campo material con la raíz del área de las órbitas de isometría, las contribuciones en ambas ligaduras asociadas al nuevo par de campos canónicos que describen las inhomogeneidades materiales, (φ, P_φ) , son idénticas a las asociadas al par que describe las inhomogeneidades gravitatorias, (ζ, P_ζ) . Por lo tanto, ambos tipos de inhomogeneidades aparecen de la misma forma y podrán ser tratados, matemáticamente hablando, de forma idéntica.

La consideración de la anterior transformación canónica, que incluye el escalado del campo de las inhomogeneidades materiales, no obedece a un criterio puramente estético ni de simplicidad. En realidad, la transformación es necesaria para alcanzar posteriormente una representación de Fock, seleccionada de forma única, que permita una evolución unitaria para las inhomogeneidades materiales (y preserve la invariancia de gauge remanente en los difeomorfismos). Para ver esto en más detalle, considérese por un momento el modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 linealmente polarizado en vacío. En el modelo completamente deparametrizado, obtenido tras imponer unas condiciones de fijación de gauge de la forma (6.7), pero exigiendo que el área de las órbitas de isometría sea una función específica del tiempo, existe una parametrización de la métrica espacial en la que el contenido de ondas gravitatorias se describe exactamente como un campo escalar sin masa que se propaga en un espaciotiempo auxiliar en menos dimensiones [125]. Sin embargo, esta descripción no admite ninguna representación de Fock en la que la evolución pueda ser implementada de forma unitaria [97, 102, 124]. Para lograr una evolución unitaria, es necesario realizar una transformación canónica dependiente del tiempo que incluye el escalado del campo [100, 102] y que precisamente lleva a describir las ondas gravitatorias mediante el campo ζ . Volviendo ya al modelo con contenido material, para alcanzar una descripción de las inhomogeneidades materiales con evolución unitaria en el modelo completamente deparametrizado, es necesario realizar una transformación canónica dependiente del tiempo análoga que conduce a describir las inhomogeneidades materiales justamente por el campo φ . De esta forma, en el modelo completamente deparametrizado, los campos gravitatorios y materiales resultantes, ζ y φ , siguen las ecuaciones del movimiento asociadas a un campo escalar libre con una masa dependiente del tiempo en un espaciotiempo estático de dimensiones 1+1.

6.1.4. Descripción del sector inhomogéneo

Con el objetivo de realizar una cuantización de Fock para el sector inhomogéneo, se describen las variables de este sector del espacio de fases en función de variables de destrucción y creación para ambos tipos de inhomogeneidades: gravitatorias y materiales. Las variables de destrucción y creación utilizadas son las naturalmente asociadas a la cuantización de Fock de un campo escalar libre sin masa (definido en S^1), esto es:

$$a_m^{(\zeta)} = \sqrt{\frac{1}{2|m|}} (|m|\zeta_m + iP_{\zeta m}), \quad a_{-m}^{(\zeta)*} = \sqrt{\frac{1}{2|m|}} (|m|\zeta_m - iP_{\zeta m}), \quad (6.18)$$

donde $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, y de forma análoga se definen $a_m^{(\varphi)}$ y $a_{-m}^{(\varphi)*}$ para las inhomogeneidades materiales. Estas variables de destrucción y creación conducen a una cuantización de Fock para los campos cuya evolución es de hecho implementable de forma unitaria (en el modelo completamente deparametrizado) [98, 99] y cuyo vacío es invariante bajo las traslaciones rígidas en el círculo, que es el grupo de simetría gauge remanente para los campos en el modelo reducido. Además, como ya se ha comentado, estos dos requisitos seleccionan de forma única la representación de Fock obtenida a partir de las variables de destrucción y creación elegidas, salvo equivalencia unitaria [100, 102].

6.1.5. Descripción del sector homogéneo gravitatorio: variables de Ashtekar–Barbero

El sector homogéneo gravitatorio del espacio de fases reducido describe espaciotiempos cosmológicos de Bianchi I [67, 127] con secciones espaciales cuya topología es la del tres-toro. Debido a que, para este sector, se usarán las técnicas de cuantización de la cosmología cuántica de lazos, sus variables correspondientes se describirán en el formalismo de Ashtekar–Barbero, es decir, se describirá este sector en función de las componentes de una conexión $su(2)$, A_a^i , y una tríada densitizada, E_i^a , que contiene la información de la métrica espacial. Para ello, primeramente, se resumirá la descripción de cosmologías de Bianchi I con la topología del tres-toro en variables de Ashtekar–Barbero. Posteriormente se indicará como obtener la transformación canónica para el sistema considerado, que permitirá describir el sector homogéneo gravitatorio en términos de dichas variables.

Como las secciones espaciales tienen la topología del tres-toro, el sistema cuenta con una celda natural, que se denominará celda- \mathbb{T}^3 , y cuyos lados tienen una longitud coordinada de 2π . Al igual que se hizo en la sección 1.2.1 para el modelo de

FRW plano, para describir el modelo de Bianchi I en función de las variables de Ashtekar–Barbero se introducen la tríadas diagonales planas auxiliares ${}^\circ e_a^i = \delta_a^i$. Tanto la conexión como la tríada densitizada están caracterizadas por tres variables cada una, de la forma:

$$A_a^j = \frac{c^j}{2\pi} \delta_a^j, \quad E_j^a = \frac{p_j}{4\pi^2} \delta_j^a \sqrt{{}^\circ h}, \quad (6.19)$$

con $j = \theta, \sigma, \delta$. Como ya se mencionó los índices de las variables c^j y p_j no representan un índice ni interno $[SU(2)]$ ni métrico, por lo que no se aplica el convenio de sumación de Einstein sobre ellas. Los corchetes de Poisson no nulos para variables son $\{c^i, p_j\} = 8\pi G \gamma \delta_j^i$, donde γ es de nuevo el parámetro de Immirzi. En función de estas variables, el elemento de línea para Bianchi I se expresa:

$$ds^2 = \frac{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}{4\pi^2} \left[-\frac{N^2}{(2\pi)^4} dt^2 + \frac{d\theta^2}{p_\theta^2} + \frac{d\sigma^2}{p_\sigma^2} + \frac{d\delta^2}{p_\delta^2} \right]. \quad (6.20)$$

Comparando las componentes obtenidas para la métrica espacial con las que obtuvimos para Gowdy en (6.3), pero eliminando las contribuciones de las inhomogeneidades, se obtienen las siguientes igualdades

$$h_{\theta\theta} = \frac{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}{4\pi^2 p_\theta^2} = \tilde{l}^2 \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\tilde{\gamma}_0 - \frac{\xi_0}{\sqrt{\tau}} - \frac{\xi_0^2}{4\tau_0} \right) \right\}, \quad (6.21)$$

$$h_{\sigma\sigma} = \frac{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}{4\pi^2 p_\sigma^2} = \tilde{l}^2 \tau^2 \exp \left\{ \frac{-\xi_0}{\sqrt{2\pi\tau}} \right\}, \quad (6.22)$$

$$h_{\delta\delta} = \frac{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}{4\pi^2 p_\delta^2} = \tilde{l}^2 \exp \left\{ \frac{\xi_0}{\sqrt{2\pi\tau}} \right\}, \quad (6.23)$$

donde se ha denotado por conveniencia $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi}}$. A partir de estas fórmulas se consigue una transformación de contacto entre las variables homogéneas $\{\tau_0, \xi_0, \tilde{\gamma}_0\}$ y las componentes de la tríada densitizada p_j . Esta transformación de contacto puede ser completada para alcanzar una transformación canónica que relaciona las variables del sector gravitatorio homogéneo con las variables de Ashtekar–Barbero [33].

6.1.6. Ligaduras en función de las nuevas variables

Una vez se han introducido las variables de Ashtekar–Barbero para describir el sector homogéneo gravitatorio del espacio de fases, y las variables de destrucción y creación para describir las inhomogeneidades del sistema, se puede escribir la

expresión de la ligaduras en función de las mismas. Para la ligadura de difeomorfismos se obtiene

$$C_\theta = \sum_{\alpha \in \{\zeta, \varphi\}} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(a_n^{(\alpha)*} a_n^{(\alpha)} - a_{-n}^{(\alpha)*} a_{-n}^{(\alpha)} \right) = 0. \quad (6.24)$$

Por otra parte, la ligadura escalar densitizada tiene la forma

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{hom}} + \mathcal{C}_{\text{inh}} = 0, \quad (6.25)$$

donde \mathcal{C}_{hom} es la parte de la ligadura que únicamente involucra el sector homogéneo, mientras que la parte restante \mathcal{C}_{inh} acopla los sectores homogéneo e inhomogéneo. La parte homogénea de la ligadura \mathcal{C}_{hom} corresponde a la ligadura escalar densitizada para el modelo de Bianchi I con un campo escalar sin masa homogéneo, que viene dada por [32, 70]

$$\mathcal{C}_{\text{hom}} = -\frac{1}{8\pi G \gamma^2} \left[c^\theta p_\theta c^\sigma p_\sigma + c^\sigma p_\sigma c^\delta p_\delta + c^\delta p_\delta c^\theta p_\theta \right] + \frac{P_\phi^2}{2}. \quad (6.26)$$

La otra contribución a la ligadura es

$$\mathcal{C}_{\text{inh}} = 2\pi |p_\theta| \left(H_0^\zeta + H_0^\varphi \right) + \frac{(c^\sigma p_\sigma + c^\delta p_\delta)^2}{16\pi \gamma^2 |p_\theta|} \left(H_{\text{int}}^\zeta + H_{\text{int}}^\varphi \right), \quad (6.27)$$

donde las funciones H_0^α y H_{int}^α ($\alpha = \zeta, \varphi$) dependen únicamente del sector inhomogéneo, y adoptan las siguientes expresiones:

$$H_0^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(a_n^{(\alpha)*} a_n^{(\alpha)} + a_{-n}^{(\alpha)*} a_{-n}^{(\alpha)} \right), \quad (6.28)$$

$$H_{\text{int}}^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(a_n^{(\alpha)*} a_n^{(\alpha)} + a_{-n}^{(\alpha)*} a_{-n}^{(\alpha)} + a_n^{(\alpha)} a_{-n}^{(\alpha)} + a_n^{(\alpha)*} a_{-n}^{(\alpha)*} \right). \quad (6.29)$$

Estas funciones corresponden, respectivamente, a la contribución asociada a un campo escalar sin masa libre y a la autointeracción de los campos. Por este motivo, de ahora en adelante serán denominadas como contribución de campo libre y contribución de autointeracción.

6.2. Cuantización híbrida del modelo

Una vez se ha descrito el sistema de forma clásica a través de unas variables adecuadas, se estudiará su cuantización a partir de las técnicas de cuantización híbrida.

Para realizar la cuantización del sistema, primeramente se introducirá una representación sobre un espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{cin} , de forma que las variables básicas del espacio de fases estén representadas por operadores. Como la cuantización híbrida combina una cuantización de Fock para el sector inhomogéneo con una cuantización polimérica para el sector homogéneo, la representación escogida será tal que el espacio de Hilbert cinemático será el producto tensorial de dos espacios de Hilbert: uno asociado al sector homogéneo, $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{hom}}$, y otro asociado al sector inhomogéneo, $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{inh}}$.

6.2.1. Representación del sector inhomogéneo

El sector inhomogéneo del espacio de fases, como ya se adelantó, se cuantiza utilizando una representación de Fock privilegiada. Para ello, los infinitos grados de libertad de cada uno de los campos $\alpha \in \{\zeta, \varphi\}$ se describieron previamente de manera conveniente mediante unas variables de destrucción y creación apropiadas, $(a_m^{(\alpha)}, a_m^{(\alpha)*})$ con $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, definidas en (6.18). Estas variables se promueven ahora a operadores de destrucción y creación $(\hat{a}_m^{(\alpha)}, \hat{a}_m^{(\alpha)\dagger})$, respectivamente, sobre el espacio de Fock \mathcal{F}^α . Como es habitual, el vacío de la representación es el estado (normalizado) que es aniquilado por todos los operadores de destrucción. Una base ortonormal del espacio de Fock está dada por los estados de n -partículas,

$$|n^\alpha\rangle = |\dots, n_{-2}^\alpha, n_{-1}^\alpha, n_1^\alpha, n_2^\alpha, \dots\rangle, \quad (6.30)$$

con $n_m^\alpha \in \mathbb{N}$ y $\sum_m n_m^\alpha < \infty$. Los números n_m^α corresponden al número de ocupación (o número de partículas) en el modo m -ésimo. El producto interno del espacio está dado por $\langle n' | n \rangle = \delta_{n', n}$. Debido a que el sector inhomogéneo del sistema está compuesto por dos copias idénticas (desde el punto de vista matemático), el espacio de Hilbert cinemático asociado al sector inhomogéneo será el producto tensorial de dos espacios de Fock, $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{inh}} = \mathcal{F}^\zeta \otimes \mathcal{F}^\varphi$.

6.2.2. Operadores inhomogéneos

Una vez se ha introducido la representación del sector inhomogéneo, pueden construirse los operadores que representan cuánticamente a las funciones de las variables inhomogéneas que aparecen en las ligaduras. Estas funciones son toda la ligadura de difeomorfismos C_θ y las funciones H_0^α y H_{int}^α de la ligadura hamiltoniana. Los operadores obtenidos actúan de forma no trivial únicamente sobre el espacio de Hilbert inhomogéneo. Estos operadores se construyen inmediatamente

a partir de su expresión clásica, sustituyendo las variables de destrucción y creación por los respectivos operadores de destrucción y creación y utilizando el orden normal. Como resultado, la ligadura de difeomorfismos es representada de la forma $C_\theta \rightarrow \hbar \hat{C}_\theta$, donde el operador \hat{C}_θ toma la expresión:

$$\hat{C}_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{X}_n^\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{X}_n^\varphi, \quad \hat{X}_n^\alpha = \hat{a}_n^{(\alpha)\dagger} \hat{a}_n^{(\alpha)} - \hat{a}_{-n}^{(\alpha)\dagger} \hat{a}_{-n}^{(\alpha)}. \quad (6.31)$$

Por otra parte, la contribución de campo libre y la contribución de la autointeracción de los campos se representan respectivamente como $H_0 \rightarrow \hbar \hat{H}_0$ y $H_{\text{int}} \rightarrow \hbar \hat{H}_{\text{int}}$, donde los operadores obtenidos son

$$\hat{H}_0^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{N}_n^\alpha, \quad \hat{H}_{\text{int}}^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\hat{N}_n^\alpha + \hat{a}_n^{(\alpha)\dagger} \hat{a}_{-n}^{(\alpha)\dagger} + \hat{a}_n^{(\alpha)} \hat{a}_{-n}^{(\alpha)} \right), \quad (6.32)$$

habiendo definido $\hat{N}_n^\alpha = \hat{a}_n^{(\alpha)\dagger} \hat{a}_n^{(\alpha)} + \hat{a}_{-n}^{(\alpha)\dagger} \hat{a}_{-n}^{(\alpha)}$.

6.2.3. Representación del sector homogéneo

El sector homogéneo del espacio de fases del sistema corresponde a cosmologías de Bianchi I (con secciones espaciales tres-toroidales) y con un campo escalar sin masa homogéneo mínimamente acoplado. Para obtener una representación de este sector, se utilizarán los métodos de la cosmología cuántica de lazos. Así, para representar el contenido material homogéneo, se empleará una representación de Schrödinger estándar, de acuerdo con el procedimiento seguido en la mayor parte de los modelos estudiados en el contexto de cosmología de lazos, y, en particular, con la referencia [32], donde se estudia el modelo de Bianchi I con un campo escalar homogéneo. El espacio de Hilbert asociado así al sector homogéneo material corresponde al espacio de las funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida de Lebesgue, $L^2(\mathbb{R}, d\phi)$, donde el operador $\hat{\phi}$ para el modo cero del campo actúa por multiplicación, mientras que su momento actúa por derivación $\hat{P}_\phi = -i\hbar \partial_\phi$.

Para representar el sector homogéneo gravitatorio, interpretable como cosmologías de Bianchi I, se utilizará la cuantización polimérica de la cosmología cuántica de lazos. Para ello, primeramente se describe el sector en función de holonomías de la conexión y flujos de la tríada densitizada, que serán las variables elementales para la cuantización. En realidad, basta con considerar holonomías sobre aristas de longitud fiducial $2\pi\mu_j \in \mathbb{R}$ orientadas a lo largo de las tres direcciones fiduciales (etiquetadas por el índice j). Estas holonomías toman el valor $h_j^{\mu_j}(c^j) = e^{\mu_j c^j \tau_j}$. Por su parte, la información física de los flujos de las tríadas está contenida en las variables p_j .

El álgebra de configuración del sector gravitatorio homogéneo está generada por los elementos de matriz de las holonomías consideradas, o equivalentemente $\mathcal{N}_{\mu_j}(c^j) = e^{i\mu_j c^j/2}$. Este álgebra se representa de forma análoga a como se hizo para del modelo de FRW en la sección 1.2.2. Similarmente, los operadores \hat{p}_j que se adoptan para representar a los coeficientes no triviales de la tríada, tienen un espectro discreto igual a la recta real, como ocurría para el operador de la tríada en FRW. Sus correspondientes autoestados $|p_\theta, p_\sigma, p_\delta\rangle$ forman un base ortogonal del espacio de Hilbert cinemático asociado a Bianchi I, $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$, que está dotado de un producto interno dado por

$$\langle p_\theta, p_\sigma, p_\delta | p'_\theta, p'_\sigma, p'_\delta \rangle = \delta_{p_\theta p'_\theta} \delta_{p_\sigma p'_\sigma} \delta_{p_\delta p'_\delta}. \quad (6.33)$$

Como este producto interno es discreto, no existe un operador bien definido que represente las componentes de la conexión, sino que únicamente están bien definidos los operadores de los elementos de matriz de las holonomías.

Por otra parte, para estos operadores es necesario emplear la denominada prescripción de *dinámica mejorada*, introducida para el modelo de Bianchi I en la referencia [32]. Esta prescripción de dinámica mejorada asume una longitud fiducial mínima $2\pi\bar{\mu}_j$ para las aristas utilizadas al computar las holonomías en cada una de las direcciones. Esta longitud mínima $2\pi\bar{\mu}_j$ depende del estado considerado, de manera que los ciclos de holonomías cerrados, necesarios para representar el operador de curvatura, encierren un área física igual al mínimo autovalor no nulo permitido para el operador de área en gravedad cuántica de lazos, Δ . Así se concluye que tales longitudes mínimas deben venir dadas por [32]

$$\bar{\mu}_\theta = \sqrt{\left| \frac{\Delta p_\theta}{p_\sigma p_\delta} \right|}, \quad \bar{\mu}_\sigma = \sqrt{\left| \frac{\Delta p_\sigma}{p_\delta p_\theta} \right|}, \quad \bar{\mu}_\delta = \sqrt{\left| \frac{\Delta p_\delta}{p_\theta p_\sigma} \right|}. \quad (6.34)$$

Esto hace que la actuación de los operadores que proporcionan los elementos de matriz de las holonomías, $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j}$, tengan una acción muy complicada sobre los estados $|p_\theta, p_\sigma, p_\delta\rangle$. Como se comentó en la sección 1.3.3, para obtener una acción más manejable, es preferible cambiar las etiquetas a estos estados, pasando a otras de la forma $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle$ con nuevas etiquetas que están definidas a partir de las antiguas mediante

$$\lambda_j = \frac{\text{sgn}(p_j) \sqrt{|p_j|}}{(4\pi\gamma\ell_{\text{pl}}^2 \sqrt{\Delta})^{1/3}}, \quad v = 2\lambda_\theta \lambda_\sigma \lambda_\delta. \quad (6.35)$$

La etiqueta v corresponde a un parámetro afín que es proporcional al volumen (homogéneo) de las secciones espaciales compactas, que viene representado por el operador $\hat{V} = \otimes_j \sqrt{|p_j|}$. Con esto, se tiene que la actuación de los operadores de

holonomía sobre la base de estados elegida toma la expresión:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta}|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle &= \left| \lambda_\theta \pm \left| \frac{\lambda_\theta}{v} \right|, \lambda_\sigma, v \pm \text{sgn}(\lambda_\theta v) \right\rangle, \\
 \hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\sigma}|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle &= \left| \lambda_\theta, \lambda_\sigma \pm \left| \frac{\lambda_\sigma}{v} \right|, v \pm \text{sgn}(\lambda_\sigma v) \right\rangle, \\
 \hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\delta}|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle &= |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v \pm \text{sgn}(\lambda_\theta \lambda_\sigma)\rangle.
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

6.2.4. Operadores geométricos homogéneos

Una vez se ha introducido una representación y un espacio de Hilbert cinemático para el sector homogéneo, y en particular para el sector homogéneo gravitatorio, podemos construir los operadores que representan las funciones que dependen únicamente del sector homogéneo en las ligaduras. En esta subsección se construirá, por una parte, el representante cuántico de los pares clásicos $c^j p_j$, y por otra un *operador inverso de tríada* regularizado. Estos operadores actuarán de forma no trivial únicamente sobre el espacio de Hilbert cinemático asociado al sector homogéneo gravitatorio, $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$.

Primeramente se construirán los operadores asociados a los pares clásicos $c^j p_j$. Como ya se ha mencionado, debido en la representación polimérica utilizada no existen operadores que representan a las componentes de la conexión, sino que solo están bien definidos los operadores de holonomía $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_j}$. Esto hace que, como se vio en la sección 1.2.3 para el modelo de FRW, la expresión de la ligadura hamiltoniana tenga que ser descrita convenientemente a través de holonomías. Esta consideración conduce a las sustituciones (1.38), esto es:

$$c^j p_j \rightarrow \frac{\text{sen}(\bar{\mu}_j c^j)}{\bar{\mu}_j} p_j = \text{sgn}(p_j) \text{sen}(\bar{\mu}_j c^j) \frac{V}{\sqrt{\Delta}}, \tag{6.37}$$

donde $V = \sqrt{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}$. Estas expresiones sí que pueden ser representadas, ya que $\widehat{\text{sen}(\bar{\mu}_j c^j)} = -i(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_j} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_j})/2$. No obstante, llegados a este punto, es necesario realizar una elección de orden de factores. Dada la libertad en la elección de este orden, aquí se escogerá el introducido en la referencia [60], ya que lleva a una representación con una estructura matemática especialmente idónea, como se mostrará posteriormente. Dicho orden de factores simétrico está definido de la siguiente manera. Por una parte, se distribuyen potencias del operador de volumen \hat{V} de forma simétrica a la izquierda y la derecha de cada uno de los términos. Por otra parte, los términos del tipo $\widehat{\text{sgn}(p_j)} \widehat{\text{sen}(\bar{\mu}_j c^j)}$ son simetrizados de la forma

$$\widehat{\text{sgn}(p_j)} \widehat{\text{sen}(\bar{\mu}_j c^j)} \rightarrow \frac{1}{2} \left[\widehat{\text{sen}(\bar{\mu}_j c^j)} \widehat{\text{sgn}(p_j)} + \widehat{\text{sgn}(p_j)} \widehat{\text{sen}(\bar{\mu}_j c^j)} \right]. \tag{6.38}$$

Así, se obtiene que el representante cuántico del par $c^j p_j$, que denotaremos de ahora en adelante como $\hat{\Theta}_j$, es (según se adelantó en (1.39))

$$\hat{\Theta}_j = -\frac{i}{4\sqrt{\Delta}} \widehat{\sqrt{V}} \left[(\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_j} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_j}) \widehat{\text{sgn}(p_j)} + \widehat{\text{sgn}(p_j)} (\hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_j} - \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_j}) \right] \widehat{\sqrt{V}}. \quad (6.39)$$

Los operadores $\hat{\Theta}_j$ tienen una definición análoga a la introducida en (1.18) para el operador $\hat{\Omega}$ en el modelo de FRW.

En cuanto al operador inverso de tríada densitizada regularizado, para definirlo en cosmología cuántica de lazos se siguen procedimientos similares a los empleados en la teoría completa de gravedad cuántica de lazos [68]. Así, se parte de una expresión clásica para $\text{sgn}(p_j)/|p_j|^{1-s}$, con $s > 0$, análoga a la mostrada en (1.14), tomando las longitudes mínimas $\bar{\mu}_j$ dadas en (6.34), y se representa mediante el operador regularizado

$$\left[\frac{1}{|p_j|^{\frac{1}{2}-s}} \right] = \frac{\widehat{\text{sgn}(p_j)}}{8s\pi\gamma\ell_{\text{pl}}^2\sqrt{\Delta}} \sqrt{|p_k p_l|} \left[\hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}_j} \widehat{|p_j|^s} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j} - \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j} \widehat{|p_j|^s} \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}_j} \right], \quad (6.40)$$

donde $j \neq k \neq l$. Cada elección de s proporciona una regularización distinta para el operador inverso de tríada densitizada. En este caso, es habitual escoger $s = 1/4$.

La actuación de los operadores regularizados los estados de la base de $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$ viene entonces dada por

$$\left[\frac{1}{|p_\theta|^{1/4}} \right] |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle = \frac{1}{(4\pi\gamma\ell_{\text{pl}}^2\sqrt{\Delta})^{1/6}} \sqrt{\frac{D(v)}{|\lambda_\theta|}} |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle, \quad (6.41)$$

donde $D(v) = |v| \left| \sqrt{|v+1|} - \sqrt{|v-1|} \right|^2$, con expresiones similares para los operadores correspondientes a las direcciones σ y δ . Además, se puede definir el operador inverso de volumen a través de los operadores regularizados introducidos como

$$\left[\frac{1}{\widehat{V}} \right] = \otimes_j \left[\frac{1}{|p_j|^{1/4}} \right]^2, \quad (6.42)$$

con lo que se llega a la expresión (1.42).

6.2.5. Operador de ligadura hamiltoniana

Una vez se ha proporcionado una representación sobre un espacio de Hilbert cinemático y se han introducido los operadores necesarios, la construcción del

operador que representa a la ligadura hamiltoniana densitizada es prácticamente inmediata a partir de su expresión clásica, dada en las expresiones (6.25), (6.26) y (6.27). No obstante, es preciso realizar unos comentarios al respecto. El primero de ellos está relacionado con la densitización de la ligadura. En gravedad cuántica de lazos, la ligadura representada cuánticamente es la ligadura hamiltoniana sin densitizar C . En este modelo, ambas ligaduras están relacionadas clásicamente de la forma $\mathcal{C} = VC$. Aunque en el sistema considerado la utilización de una u otra no tiene consecuencias físicas relevantes, ya que el álgebra que satisfacen las ligaduras del modelo sigue siendo el mismo, esto en general no es cierto. Por lo tanto, para seguir de forma estricta los procedimientos de gravedad cuántica de lazos, la ligadura que se debería imponer cuánticamente es la ligadura no densitizada. Sin embargo, el operador que representa a la ligadura hamiltoniana densitizada, $\hat{\mathcal{C}}$, tiene una actuación más sencilla y conveniente sobre el espacio de Hilbert cinemático, para posteriormente estudiar sus soluciones físicas. Debido a ello, será este último el que se representará. En todo caso, ambos operadores y sus soluciones están relacionados a través de un *proceso de densitización* [60]. Por otra parte, es importante comentar que, debido a la complicada actuación de los operadores de holonomía construidos con la prescripción de dinámica mejorada, los operadores $\hat{\Theta}_j$ para las distintas direcciones no conmutan, por lo que se tendrá que simetrizar sus productos adecuadamente al introducir el operador de ligadura hamiltoniana densitizada.

Teniendo esto en cuenta, se tiene que el operador de ligadura toma la forma

$$\hat{\mathcal{C}} = - \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{\hat{\Theta}_i \hat{\Theta}_j}{16\pi G \gamma^2} - \frac{\hbar^2}{2} \partial_\phi^2 + 2\pi\hbar \widehat{|p_\theta|} \hat{H}_0 + \hbar \left[\frac{1}{|p_\theta|^{\frac{1}{4}}} \right]^2 \frac{(\hat{\Theta}_\sigma + \hat{\Theta}_\delta)^2}{16\pi\gamma^2} \left[\frac{1}{|p_\theta|^{\frac{1}{4}}} \right]^2 \hat{H}_{\text{int}}, \quad (6.43)$$

donde se ha definido $\hat{H}_0 = \hat{H}_0^\zeta + \hat{H}_0^\varphi$ y $\hat{H}_{\text{int}} = \hat{H}_{\text{int}}^\zeta + \hat{H}_{\text{int}}^\varphi$. También se han distribuido de forma simétrica las potencias del operador inverso de tríada regularizada en el término que contiene \hat{H}_{int} .

Sectores de superselección y subespacios invariantes

El operador de ligadura hamiltoniana deja invariantes ciertos subespacios del espacio de Hilbert cinemático, lo que permitirá definir unos sectores de superselección en el sector gravitatorio homogéneo. Primeramente se centrará el estudio únicamente en su actuación sobre estados $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle$ de $\mathcal{H}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$. Tanto para la construcción del operador de ligadura, como en la de los operadores $\hat{\Theta}_j$, se ha tomado un orden de factores que conduce a unos sectores de superselección que son particularmente simples y con unas propiedades muy convenientes.

Primeramente, la acción del operador de ligadura hamiltoniana sin densitizar es tal que aniquila los estados con $v = 0$ y deja invariante su complemento ortogonal. De esta forma, los estados análogos a la singularidad, es decir los estados de volumen cero, son desacoplados naturalmente de la teoría. Al pasar a la versión densitizada del operador de ligadura, solamente se consideran los estados en dicho complemento ortogonal de los que tienen volumen v nulo [33].

Por otra parte, los únicos operadores presentes en la ligadura hamiltoniana que no actúan de forma diagonal en los estados $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle$ son los operadores $\hat{\Theta}_j$. Debido a la simetrización efectuada en (6.38), la actuación del operador de ligadura hamiltoniana densitizada no acopla estados cuyas etiquetas tengan signos opuestos. Por lo tanto, la ligadura hamiltoniana deja invariante el subespacio dado por la envolvente lineal de los estados $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v\rangle$ con $\lambda_\theta, \lambda_\sigma, v > 0$. A partir de ahora se restringirá el estudio al espacio de Hilbert cinemático, $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$, obtenido al completar este subespacio con respecto a al producto interno discreto. Por conveniencia, se re-etiquetarán los estados de $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$ de la forma $|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle$, donde $\Lambda_j = \log(\lambda_j) \in \mathbb{R}$. Con ello, $v = 2e^{\Lambda_\theta \Lambda_\sigma \Lambda_\delta}$. La acción de los operadores de holonomía $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_j}$ es bastante más sencilla una vez se ha restringido el estudio al espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{cin}}^{\text{BI}}$, y viene dada por las fórmulas (1.45), que se reproducen aquí por completitud:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta}|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle &= |\Lambda_\theta + w_v(\pm 1), \Lambda_\sigma, v \pm 1\rangle, \\ \hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\sigma}|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle &= |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm 1), v \pm 1\rangle, \\ \hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\delta}|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle &= |\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm 1\rangle.\end{aligned}\tag{6.44}$$

Recuérdese que $w_v(z) = \log(1 + z/v)$, con $z \in \mathbb{Z}$. Además, el operador de ligadura hamiltoniana únicamente relaciona estados cuya etiqueta v pertenece a una semired \mathcal{L}_ϵ de paso cuatro:

$$\mathcal{L}_\epsilon = \{v; v = \epsilon + 4k, k \in \mathbb{N}\}.\tag{6.45}$$

Estas semiredes están etiquetadas a través de un número real $\epsilon \in (0, 4]$, que corresponde al mínimo valor que puede tomar v en la semired considerada. Adicionalmente, el operador de ligadura hamiltoniana densitizada también superselecciona las etiquetas Λ_θ y Λ_σ . De hecho, dado un valor de ϵ , el operador únicamente relaciona estados cuyas etiquetas Λ_a ($a = \theta, \sigma$) son de la forma $\Lambda_a = \Lambda_a^* + w_\epsilon$, donde Λ_a^* son dos números reales fijos cualesquiera y w_ϵ es cualquier número contenido en el conjunto \mathcal{W}_ϵ introducido en (1.49). Como se comentó en los capítulos de introducción, el conjunto \mathcal{W}_ϵ , que únicamente depende de ϵ , es un conjunto numerable y denso en la recta real. Por tanto, en lo que se refiere al sector homogéneo gravitatorio, dados los números ϵ , Λ_θ^* y Λ_σ^* , se puede restringir el estudio al espacio de Hilbert separable obtenido por la completación en cada sector de superselección. Se denominará a este espacio de Hilbert como $\mathcal{H}_{\epsilon, \Lambda_\theta^*, \Lambda_\sigma^*}^{\text{BI}}$.

Con respecto a la acción de los operadores de ligadura sobre el espacio de Hilbert asociado al sector inhomogéneo, $\mathcal{F}^{\zeta} \otimes \mathcal{F}^{\varphi}$, se tiene que, de los operadores que actúan de manera no trivial sobre este espacio, únicamente \hat{H}_{int} no es diagonal en la base de estados de n -partículas. Este operador crea y destruye pares de partículas en todos los modos de forma tal que mantiene invariantes los números cuánticos $X_n^{\alpha} = n_n^{\alpha} - n_{-n}^{\alpha}$. En realidad, estos números son conservados por la acción de las dos ligaduras presentes en el sistema. Por ello, es conveniente reetiquetar los estados de n -partículas como

$$|n^{\alpha}\rangle = |\mathfrak{N}^{\alpha}; \mathfrak{x}^{\alpha}\rangle = |N_1^{\alpha}, N_2^{\alpha}, \dots; X_1^{\alpha}, X_2^{\alpha}, \dots\rangle, \quad (6.46)$$

donde se ha definido $N_n^{\alpha} = n_n^{\alpha} + n_{-n}^{\alpha}$.

6.3. Espacio de Hilbert físico

Una vez se han construido los operadores que representan las ligaduras, se puede pasar a caracterizar los estados físicos, que serán aquéllos aniquilados por las dos ligaduras del modelo. Es importante mencionar que los dos operadores de ligadura considerados conmutan y, por lo tanto, pueden ser impuestos simultáneamente de forma consistente.

6.3.1. Imposición del operador de ligadura de difeomorfismos

Se considerará primeramente la imposición del operador de ligadura de difeomorfismos \hat{C}_{θ} . La actuación de este operador sobre la base del espacio de Hilbert $\mathcal{F}^{\zeta} \otimes \mathcal{F}^{\varphi}$ dada por el producto tensorial de los estados de n -partículas para cada tipo de inhomogeneidades proporciona la siguiente condición, que han que satisfacer los estados físicos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(X_n^{\zeta} + X_n^{\varphi} \right) = 0. \quad (6.47)$$

Los estados que cumplen esta condición forman un subespacio propio de $\mathcal{F}^{\zeta} \otimes \mathcal{F}^{\varphi}$, que se denotará como \mathcal{F}_f .

6.3.2. Imposición del operador de ligadura hamiltoniana

El operador de ligadura hamiltoniana densitizada, en cambio, impone una condición mucho más compleja. Esto es debido principalmente a la acción altamente

no trivial que tienen los operadores $\hat{\Theta}_j$ sobre el sector homogéneo gravitatorio y a la del operador \hat{H}_{int} sobre el sector inhomogéneo. Para poder caracterizar las soluciones y construir el espacio de Hilbert físico, será necesario analizar de forma explícita únicamente la acción del operador de ligadura hamiltoniana sobre el sector homogéneo gravitatorio. Para ello, se expandirá un estado generalizado $(\Psi|$ en la base dual de bras $\langle \Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v |$ para el sector homogéneo gravitatorio:

$$(\Psi| = \sum_{\bar{\Lambda}_\theta} \sum_{\bar{\Lambda}_\sigma} \sum_{\bar{v}} (\Psi(\bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma, \bar{v})| \otimes \langle \bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma, \bar{v} |, \quad (6.48)$$

donde $\bar{\Lambda}_\theta$, $\bar{\Lambda}_\sigma$ y \bar{v} toman valores en sus respectivos sectores de superselección considerados. Es conveniente mencionar que los bras $(\Psi(\bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma, \bar{v})|$ no son realmente coeficientes de la función de onda, sino que son estados (generalizados), debido a que no se ha expandido $(\Psi|$ en una base de todo el espacio de Hilbert cinemático. Además, hay que enfatizar que en analogía con lo que sucede para otros sistemas cosmológicos similares, no es esperable que los estados $(\Psi(\bar{\Lambda}_\theta, \bar{\Lambda}_\sigma, \bar{v})|$, soluciones del operador de ligadura hamiltoniana, sean estados normalizables en $L^2(\mathbb{R}, d\phi) \otimes \mathcal{F}^\zeta \otimes \mathcal{F}^\varphi$, sino que más bien pertenezcan a un espacio más amplio sobre el cual se debe construir el espacio de Hilbert físico de la teoría. Aplicando $\hat{\mathcal{C}}$ mediante actuación adjunta sobre el estado $(\Psi|$ y proyectando sobre $|\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v\rangle$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{\pi G} (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v)| \partial_\phi^2 + \frac{8}{\beta} e^{2\Lambda_\theta} (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v)| \hat{H}_0 \\ & + \sum_{k \in \{0,4\}} [x_k^+(v) (\Psi_k^+(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v+k)| + x_k^-(v) (\Psi_k^-(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v-k)|)] \\ & + 4\beta D(v) e^{-2\Lambda_\theta} \sum_{k \in \{0,4\}} [x_k^+(v) D(v+k) (\Psi_k'^+(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v+k)| \\ & + x_k^-(v) D(v-k) (\Psi_k'^-(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v-k)|] \hat{H}_{\text{int}}^\dagger = 0, \quad (6.49) \end{aligned}$$

donde $\beta = (\ell_{\text{pl}}^2 / 16\pi^2 \gamma^2 \Delta)^{1/3}$, la daga denota el adjunto, y se ha definido

$$x_k^\pm(v) = -\frac{e^{i\pi k/4}}{2} [1 + \text{sgn}(v \pm k)] \sqrt{|v| |v \pm k| |v \pm 2|}. \quad (6.50)$$

Los objetos $(\Psi_k^\pm(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm k)|$, están formados cada uno por seis contribuciones de la forma:

$$\begin{aligned} (\Psi_k^\pm(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm k)| & = (\Psi(\Lambda_\theta + w_v(\pm k) - w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma + w_v(\pm 2), v \pm k)| \\ & + (\Psi(\Lambda_\theta + w_v(\pm k) - w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma, v \pm k)| + (\Psi(\Lambda_\theta + w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma, v \pm k)| \\ & + (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm k) - w_v(\pm 2), v \pm k)| + (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm 2), v \pm k)| \\ & + (\Psi(\Lambda_\theta + w_v(\pm 2), \Lambda_\sigma + w_v(\pm k) - w_v(\pm 2), v \pm k)|, \quad (6.51) \end{aligned}$$

mientras que los objetos $(\Psi'_k{}^\pm(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm k)|$, que contienen cuatro contribuciones, están dados por:

$$\begin{aligned} (\Psi'_k{}^\pm(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm k)| &= (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm k), v \pm k)| + (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v \pm k)| \\ &+ (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm k) - w_v(\pm 2), v \pm k)| + (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma + w_v(\pm 2), v \pm k)|. \end{aligned} \quad (6.52)$$

La condición impuesta por el operador de ligadura hamiltoniana (6.49) es una ecuación en diferencias finitas en la variable v y, por lo tanto, puede ser interpretada como una ecuación de evolución en esta variable. De hecho, puede probarse que, formalmente, dado un conjunto de datos iniciales en la sección de volumen mínimo, $v_{\min} = \epsilon \in (0, 4]$, estos datos iniciales caracterizan completamente una solución de la ligadura hamiltoniana densitizada [33,39]. Esta propiedad permite identificar el espacio de Hilbert físico del sistema, que se denominará $\mathcal{H}_{\text{fís}}$, con el espacio de Hilbert de datos iniciales en esta superficie de volumen mínimo.

De esta manera, se puede determinar el espacio de Hilbert físico del sistema, teniendo en cuenta también la condición impuesta por el operador de ligadura de difeomorfismos (6.47). Se obtiene así que

$$\mathcal{H}_{\text{fís}} = \mathcal{H}_{\text{fís}}^{\text{BI}} \otimes L^2(\mathbb{R}, d\phi) \otimes \mathcal{F}_f, \quad (6.53)$$

donde \mathcal{F}_f es el espacio de Fock introducido anteriormente y $\mathcal{H}_{\text{fís}}^{\text{BI}}$ es el espacio de Hilbert físico para el modelo de Bianchi I hallado en la referencia [39], y cuya construcción se ha resumido en la sección 1.3.6. El producto interno que dota de esta estructura de espacio de Hilbert al espacio de datos iniciales se obtiene mediante el requisito de que las relaciones de conjugación compleja entre un conjunto completo de observables clásicos se conviertan en relaciones de adjunción entre los correspondientes operadores [154,155].

6.4. *Proyección al modelo con simetría rotacional local*

El modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 con polarización lineal es simétrico con respecto al intercambio de las direcciones coordenadas σ y δ . Debido a esto, el modelo admite soluciones clásicas con *simetría rotacional local*, en las que los factores de escala para estas dos direcciones evolucionan de manera idéntica. Por lo tanto, puede restringirse el estudio del modelo de Gowdy, tanto en vacío como con materia, al caso con simetría rotacional local, en el que todas las soluciones son de este tipo. Esta restricción puede ser realizada clásicamente, antes de la cuantización, o partiendo desde el modelo cuántico. En esta sección se abordará únicamente la restricción desde el

modelo cuántico, pasando así del modelo original al modelo con simetría rotacional local. Al inicio del próximo capítulo se esquematizará la cuantización del modelo reducido clásicamente, obteniéndose el mismo resultado.

En analogía con el proceso discutido en la referencia [32], en el que el modelo cuántico de FRW se obtiene a partir del modelo cuántico de Bianchi I, se define el siguiente mapeo entre estados (generalizados) asociados al modelo de Gowdy y los asociados al modelo con simetría rotacional local, denotados por $(\psi(\Lambda_\theta, v)|$:

$$(\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v)| \rightarrow \sum_{\Lambda_\sigma} (\Psi(\Lambda_\theta, \Lambda_\sigma, v)| \equiv (\psi(\Lambda_\theta, v)|, \quad (6.54)$$

donde la suma en Λ_σ se lleva a cabo sobre todos los valores incluidos en el sector de superselección considerado. Utilizando este mapeo en la acción del operador de ligadura hamiltoniana (6.49), se obtiene

$$\begin{aligned} & - \frac{4}{\pi G} (\psi(\Lambda_\theta, v)| \partial_\phi^2 + \frac{4}{\beta} e^{2\Lambda_\theta} (\psi(\Lambda_\theta, v)| \hat{H}_0 \\ & + \sum_{k \in \{0,4\}} [x_k^+(v) (\psi_k^+(\Lambda_\theta, v+k)| + x_k^-(v) (\psi_k^-(\Lambda_\theta, v-k)|] \\ & + 8\beta D(v) e^{-2\Lambda_\theta} [x_4^+(v) D(v+4) (\psi(\Lambda_\theta, v+4)| + (x_0^-(v) + x_0^+(v)) D(v) (\psi(\Lambda_\theta, v)| \\ & \quad + x_4^-(v) D(v-4) (\psi(\Lambda_\theta, v-4)|] \hat{H}_{\text{int}}^\dagger = 0, \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde cada uno de los objetos $(\psi_k^\pm(\Lambda_\theta, v \pm k)|$ contienen tres términos y están dados por

$$\begin{aligned} (\psi_k^\pm(\Lambda_\theta, v \pm k)| & = (\psi(\Lambda_\theta + w_v(\pm 2), v \pm k)| + (\psi(\Lambda_\theta, v \pm k)| \\ & \quad + (\psi(\Lambda_\theta + w_v(\pm k) - w_v(\pm 2), v \pm k)|. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Es importante destacar que el mapeo introducido funciona porque los coeficientes que aparecen en la expresión (6.49) no dependen explícitamente de la variable Λ_σ , sobre la cual se realiza la suma para efectuar la *proyección*. De hecho, este tipo de mapeo únicamente tiene sentido si el modelo clásico admite la imposición de la simetría adicional de manera que se permita su reducción a un submodelo estable dinámicamente. Por eso, una *proyección* similar sumando adicionalmente sobre la etiqueta Λ_θ no es viable, ya que los coeficientes provenientes de contribuciones inhomogéneas al operador de ligadura hamiltoniana densitizada dependen explícitamente de dicha variable, lo que refleja el hecho de que únicamente existan soluciones isótropas cuando las inhomogeneidades se anulan.

6.5. Discusión

En este capítulo se ha estudiado la cuantización híbrida del modelo de Gowdy T^3 con ondas gravitacionales linealmente polarizadas y con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado como contenido material. La descripción adoptada para las inhomogeneidades materiales es tal que éstas pueden tratarse (matemáticamente) de forma idéntica a las inhomogeneidades gravitatorias. Ambos tipos de inhomogeneidades resultan tomar parte en las ligaduras de la misma manera. Gracias a ello, se han podido aplicar los métodos de cuantización híbrida desarrollados en las referencias [33, 37–39] de forma prácticamente inmediata, consiguiendo una cuantización completa para este sistema que contiene infinitos grados de libertad físicos tanto materiales como gravitatorios. Este modelo fue el primer modelo completamente cuantizado con estas propiedades en el marco de la cosmología cuántica de lazos.

Como la estructura de las ligaduras al introducir el campo material es idéntica a la obtenida en el caso en vacío, todos los resultados obtenidos en las referencias [33, 39] para el modelo de Gowdy en vacío se aplican prácticamente de igual forma en el modelo estudiado. En particular, sobre los estados físicos se recupera la descripción estándar de teoría cuántica de campos para ambos tipos de inhomogeneidades, pero ahora éstas se propagan sobre un universo de Bianchi I poliméricamente cuantizado con un campo escalar sin masa homogéneo como contenido material, y no ya en puro vacío. Además, debido a la cuantización polimérica de los grados de libertad gravitatorios homogéneos, se garantiza que los estados cuánticos análogos a la singularidad clásica se desacoplan naturalmente en el modelo cuántico y, por lo tanto, la singularidad inicial se resuelve ya de partida.

Conceptualmente, la cuantización híbrida de esta familia de cosmologías inhomogéneas no introduce ninguna complicación técnica con respecto al modelo en vacío. Sin embargo, la situación es completamente distinta cuando se considera el interés físico del modelo. De hecho, gracias a la inclusión del campo escalar sin masa, el sector homogéneo del modelo estudiado admite soluciones clásicas isótropas y planas del tipo de FRW, mientras que para el modelo en vacío únicamente admitía como solución isótropa la solución estática de Minkowski.

Por otra parte, el estudio de las soluciones clásicas (en vacío) [117] y el estudio de la dinámica efectiva obtenida a partir de su cuantización híbrida (usando una diferente prescripción de la dinámica mejorada) [156, 157] muestran que pequeñas inhomogeneidades no crecen de forma arbitraria a lo largo de la evolución. Así, si se consideran una condiciones iniciales suficientemente cercanas a la

homogeneidad, las soluciones correspondientes se mantendrían aproximadamente homogéneas durante la evolución. En el caso abordado aquí, debido a que ambos tipos de inhomogeneidades, tanto materiales como gravitatorias, evolucionan de la misma manera, esto también sucederá para el modelo con materia. Esto indica que unas condiciones suficientemente cercanas a la isotropía y homogeneidad deben de llevar a unas soluciones aproximadamente isótropas y homogéneas. Gracias a este comportamiento, es natural comparar la dinámica de este modelo con la del modelo de FRW plano (con la topología del tres-toro), para así poder estudiar cómo la presencia de pequeñas anisotropías e inhomogeneidades afectan la evolución de un fondo de FRW plano. Aunque el tipo de inhomogeneidades presentes en el modelo estudiado no son todas aquéllas permitidas en un universo como el que observamos (sino solo la subfamilia que satisface las simetrías de las cosmologías de Gowdy \mathbb{T}^3), este análisis debería mostrar el tipo de efectos cuánticos con impronta en la dinámica, así como las consecuencias de la geometría cuántica en las fluctuaciones primordiales.

Con este propósito, en el próximo capítulo se desarrollarán y estudiarán métodos aproximados que permitirán construir un operador de ligadura hamiltoniana densitizada aproximado, además de delimitar las situaciones donde éste representa una buena aproximación al original. El estudio de este nuevo operador permitirá la construcción de un conjunto de soluciones aproximadas entre las que están contenidas precisamente soluciones de tipo FRW con un efecto pequeño de las anisotropías y con un bajo contenido en inhomogeneidades.

Capítulo 7

Métodos aproximados

En el capítulo anterior se estudió la cuantización híbrida del modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 linealmente polarizado y con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado. La aplicación de las técnicas de la cuantización híbrida permitieron la cuantización completa del modelo, así como la construcción de unos operadores de ligadura bien definidos. También se pudieron caracterizar las soluciones del modelo cuántico mediante conjuntos de datos iniciales en la sección de volumen mínimo, lo que permitió construir el espacio de Hilbert físico. No obstante, esta caracterización no es de gran utilidad para la obtención de soluciones cuánticas de forma que se pueda estudiar su evolución y extraer consecuencias físicas. Por otra parte, la actuación del operador de ligadura de hamiltoniana es muy complicada, debido principalmente a la prescripción de dinámica mejorada y a la autointeracción de las inhomogeneidades. Como consecuencia, no es obvio como diagonalizar el operador de ligadura. Tampoco se han podido utilizar técnicas de promedio sobre grupos para construir sus soluciones. Por ello, es necesario desarrollar métodos aproximados, bien controlados y justificados, que hagan posible introducir una ligadura aproximada cuyas soluciones sí sean deducibles. Éste es el estudio que se abordará en este capítulo, discutiendo métodos de aproximación que habiliten la construcción de una familia de soluciones aproximadas con interés físico, a saber, soluciones aproximadamente isótropas y con un bajo contenido en inhomogeneidades. Para realizar este estudio, por simplicidad, se considerará el submodelo con simetría rotacional local, ya que éste contiene las mismas dificultades conceptuales que están presentes en el modelo original.

7.1. Modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 con materia y simetría rotacional local

En esta sección se presentará de forma resumida la cuantización híbrida para el modelo con simetría rotacional local. Para ello se partirá de la descripción clásica del modelo de Gowdy original (tras la reducción de gauge parcial) en función las variables de Ashtekar–Barbero para el sector homogéneo gravitatorio y las variables de destrucción y creación privilegiadas para ambos tipos de inhomogeneidades, tanto ondas gravitatorias como las inhomogeneidades del campo escalar escalado. Como ya se ha mencionado el capítulo anterior, el modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 linealmente polarizado es simétrico con respecto al intercambio de las direcciones σ y δ . Consecuentemente, el modelo contiene un subconjunto de soluciones clásicas con simetría rotacional local, es decir, soluciones en las cuales el comportamiento en las direcciones σ y δ es idéntico. La reducción clásica al modelo con simetría rotacional local se puede obtener mediante la identificación de las variables de la conexión y de la tríada densitizada en dichas direcciones, esto es, $c^\sigma \equiv c^\delta$ y $p_\sigma \equiv p_\delta$, las cuales, a partir de ahora, se denotarán respectivamente como c^\perp y p_\perp . Así, el sector homogéneo gravitatorio del modelo viene dado por cosmologías de Bianchi I con simetría rotacional local, que se describen en variables de Ashtekar–Barbero a través de dos pares canónicos, (c^θ, p_θ) y (c^\perp, p_\perp) , cuyos corchetes de Poisson no nulos son $\{c^\theta, p^\theta\} = 2\{c^\perp, p_\perp\} = 8\pi G\gamma$. Como el sector inhomogéneo del modelo con simetría rotacional local es idéntico al original, se tienen las mismas expresiones para la ligadura de difeomorfismos C_θ , y los términos H_0^α y H_{int}^α , dadas respectivamente en las ecuaciones (6.24), (6.28) y (6.29). Por su parte, la expresión de la ligadura hamiltoniana (densitizada) se puede conseguir a partir la expresión de la del modelo original, proporcionada en las ecuaciones (6.25), (6.26) y (6.27), mediante la identificación de variables ya mencionada. De esta manera se obtiene

$$\mathcal{C} = -\frac{1}{8\pi G\gamma^2} \left[2c^\theta p_\theta c^\perp p_\perp + (c^\perp p_\perp)^2 \right] + \frac{P_\phi^2}{2} + 2\pi |p_\theta| H_0 + \frac{(c^\perp p_\perp)^2}{4\pi\gamma^2 |p_\theta|} H_{\text{int}}, \quad (7.1)$$

donde los dos primeros términos involucran únicamente el sector homogéneo del espacio de fases, y coinciden con la ligadura hamiltoniana del modelo de Bianchi I con simetría rotacional local y un campo escalar homogéneo sin masa. Los otros dos términos de la ligadura hamiltoniana acoplan ambos sectores del espacio de fases de una forma no trivial.

Para realizar la cuantización híbrida del modelo con simetría rotacional local se introduce una representación de la misma forma que se hizo en la sección 6.2

para el modelo original. La representación de Fock considerada para el sector inhomogéneo y la representación de Schrödinger para el modo homogéneo del campo escalar son idénticas a las consideradas dicha sección. La única diferencia es la relativa al sector homogéneo gravitatorio, donde ahora se emplea la representación polimérica para el modelo de Bianchi I con simetría rotacional local. Como es habitual en cosmología cuántica de lazos, se describe este sector en función de holonomías de la conexión sobre aristas y de flujos de la tríada densitizada sobre superficies. La información física de los flujos está contenida en las variables p_j , mientras que el álgebra de configuración está generada por los elementos de matriz de las holonomías, o de forma equivalente por $\mathcal{N}_{\mu_j}(c^j) = e^{ic^j\mu_j/2}$, con $j = \theta, \perp$. Esta álgebra se representa en un espacio de Hilbert cinemático tal que los operadores de tríada densitizada \hat{p}_j tienen un espectro discreto igual a la recta real. Así, una base de estados de este espacio de Hilbert está dada por los autoestados de estos dos operadores $\{|p_\theta, p_\perp\rangle; p_\theta, p_\perp \in \mathbb{R}\}$, ortonormales con respecto al producto interno discreto: $\langle p_\theta, p_\perp | p'_\theta, p'_\perp \rangle = \delta_{p_\theta p'_\theta} \delta_{p_\perp p'_\perp}$. Por otra parte, al considerar la prescripción de dinámica mejorada para este modelo, las longitudes mínimas $2\pi\bar{\mu}_j$ obtenidas para computar las holonomías vienen dadas por

$$\bar{\mu}_\theta = \sqrt{\frac{\Delta|p_\theta|}{|p_\perp|^2}}, \quad \bar{\mu}_\perp = \sqrt{\frac{\Delta}{|p_\theta|}}. \quad (7.2)$$

Como sucedía para el modelo original, la dependencia con los estados de las longitudes mínimas $2\pi\bar{\mu}_j$ hace que la actuación de los operadores de holonomía $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j}$ sea muy complicada. En particular, estos operadores ya no conmutan para las distintas direcciones. Para simplificar su acción, es preferible, como ya sabemos, volver a etiquetar los estados de la base como $|\lambda_\theta, v\rangle$, donde λ_θ y v tienen la misma definición que en (6.35) (identificado λ_σ y λ_δ). Con ello, la actuación de los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_j}$ sobre estos estados, que se explicitará más adelante, es la siguiente: los operadores $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta}$ producen un escalado de la etiqueta λ_θ y un shift de (más/menos) una unidad en v , mientras que $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\perp}$ únicamente producen un shift de (más/menos) una unidad en v . Para la construcción de los operadores que representan las ligaduras, se utiliza una prescripción de orden de factores idéntica a la adoptada para el modelo original. De esta manera, en lo referente al sector homogéneo gravitatorio, el operador de ligadura hamiltoniana densitizada puede definirse en el complemento ortogonal de los estados de volumen cero, que se desacoplan. Además, este operador de ligadura no mezcla estados con distintos signos en sus etiquetas λ_θ y v , con lo que puede restringirse el estudio, por ejemplo, al espacio de Hilbert generado por los estados con etiquetas positivas. Por conveniencia se re-etiquetarán estos estados como $|\Lambda, v\rangle$, donde $\Lambda = \Lambda_\theta = \log(\lambda_\theta) \in \mathbb{R}$. La acción explícita de los operadores

de holonomía $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_j}$ es

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta}|\Lambda, v\rangle = |\Lambda + w_v(\pm 1), v \pm 1\rangle, \quad \hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\perp}|\Lambda, v\rangle = |\Lambda, v \pm 1\rangle. \quad (7.3)$$

Para construir el operador de ligadura hamiltoniana densitizada basta con tomar su expresión clásica (7.1) y hacer uso de las mismas reglas de cuantización utilizadas para el modelo original, detalladas en la sección 6.2. En particular, los representantes cuánticos de los pares clásicos $c^j p_j$, que se denominarán $\hat{\Theta}_j$, tienen la misma expresión que en (6.39), mientras que la regularización para el operador inverso de tríada $[1/\widehat{|p_\theta|^{1/4}}]$ que se utiliza está dado en la expresión (1.40), identificando p_σ y p_δ . El operador de ligadura hamiltoniana densitizada así obtenido tiene la forma [salvo por un factor constante global $8/(\pi\hbar\ell_{\text{Pl}}^2)$]

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{C}} = & -\frac{1}{\kappa^2} \left[\hat{\Theta}_\theta \hat{\Theta}_\perp + \hat{\Theta}_\perp \hat{\Theta}_\theta + \hat{\Theta}_\perp^2 \right] + \frac{4}{\pi\hbar\ell_{\text{Pl}}^2} \hat{P}_\phi^2 \\ & + \frac{16}{\ell_{\text{Pl}}^2} \widehat{|p_\theta|} \hat{H}_0 + \left[\frac{1}{\widehat{|p_\theta|^{1/4}}} \right]^2 \frac{2\ell_{\text{Pl}}^2 \hat{\Theta}_\perp^2}{\kappa^2} \left[\frac{1}{\widehat{|p_\theta|^{1/4}}} \right]^2 \hat{H}_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde se ha definido $\kappa = \pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2$, y los operadores asociados tanto al sector inhomogéneo como al sector homogéneos material, es decir \hat{H}_0 , \hat{H}_{int} y \hat{P}_ϕ , son los mismos que para el modelo original (véase la sección 6.2). La expresión del operador de ligadura de difeomorfismos $\hat{\mathcal{C}}_\theta$ también es la misma que la dada en (6.31). Es importante resaltar que la actuación del operador $\hat{\Theta}_\perp$ es idéntica a la actuación del operador geométrico para el modelo de FRW $\hat{\Omega}$, proporcionada en (1.21). Como en este capítulo se pretenden obtener soluciones (aproximadas) cercanas a situaciones homogéneas e isótropas, se reescribirá el operador de ligadura hamiltoniana densitizada de una manera conveniente escribiendo $\hat{\Theta}_\perp$ como $\hat{\Omega}$, sumando y restando la contribución $2\hat{\Omega}^2/\kappa^2$, y definiendo el operador $\hat{\Theta} \equiv (\hat{\Theta}_\theta - \hat{\Omega})$. Así se tiene que

$$\hat{\mathcal{C}} = -\frac{3\hat{\Omega}^2}{\kappa^2} + \frac{4}{\pi\hbar\ell_{\text{Pl}}^2} \hat{P}_\phi^2 - \frac{1}{\kappa^2} (\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}) + \frac{16}{\beta} e^{2\Lambda} \hat{H}_0 + \frac{2\beta}{\kappa^2} e^{-2\Lambda} \hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}\hat{H}_{\text{int}}. \quad (7.5)$$

En esta expresión los dos primeros términos corresponden (salvo por una constante global) al operador de ligadura hamiltoniana densitizada para el modelo de FRW, $\hat{\mathcal{C}}^{\text{FRW}}$, dado (1.20). El tercer término del operador de ligadura (7.5), que completa la contribución homogénea del mismo, se denominará término de anisotropía, $\hat{\mathcal{C}}_{\text{ani}}$. En lo referido a los términos de interacción, se ha introducido la constante $\beta = \ell_{\text{Pl}}^2/(4\kappa\sqrt{\Delta})^{2/3}$, y los operadores $e^{\pm 2\Lambda}$ y \hat{D} , cuyas actuaciones sobre la base $\{|\Lambda, v\rangle; \Lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^+\}$ del espacio de Hilbert del sector gravitatorio homogéneo, vienen dadas por

$$e^{\pm 2\Lambda}|\Lambda, v\rangle = e^{\pm 2\Lambda}|\Lambda, v\rangle, \quad (7.6)$$

$$\hat{D}|\Lambda, v\rangle = D(v)|\Lambda, v\rangle, \quad \text{con} \quad D(v) = v \left(\sqrt{v+1} - \sqrt{|v-1|} \right)^2. \quad (7.7)$$

El operador \hat{D} proporciona la contribución obtenida al considerar el operador regularizado para el inverso de la tríada densitizada en el término que contiene la contribución de autointeracción \hat{H}_{int} , término que se denominará \hat{C}_{int} .

Al igual que ocurría en el modelo original, la actuación del operador de ligadura hamiltoniana no relaciona todos los estados del sector gravitatorio homogéneo, $|\Lambda, v\rangle$, sino que únicamente relaciona aquéllos cuyas etiquetas pertenecen al mismo sector de superselección. Para la etiqueta v , estos sectores de superselección son las semiredes de paso cuatro \mathcal{L}_ϵ [véase (6.45)], que están caracterizadas de forma única por el valor mínimo que toma v en cada una de ellas, $v_{\text{mín}} = \epsilon \in (0, 4]$. Para la etiqueta Λ , sus sectores de superselección están determinados a partir de un valor inicial $\Lambda^* \in \mathbb{R}$ y el valor considerado de ϵ . Los valores de la etiqueta de anisotropía contenidos en el mismo sector de superselección son de la forma $\Lambda = \Lambda^* + w_\epsilon$, donde w_ϵ es cualquier número del conjunto numerable y denso en la recta real \mathcal{W}_ϵ , que se definió en (1.49). Por lo tanto, en lo referente al sector gravitatorio homogéneo, se restringirá el estudio a los espacios de Hilbert separables obtenidos mediante la compleción de la envolvente lineal del conjunto de estados

$$\{|\Lambda, v\rangle; v \in \mathcal{L}_\epsilon, \Lambda = \Lambda^* + w_\epsilon, \epsilon \in (0, 4], \Lambda^* \in \mathbb{R}, w_\epsilon \in \mathcal{W}_\epsilon\}, \quad (7.8)$$

con respecto a la medida discreta. Estos espacios de Hilbert se denominarán como $\mathcal{H}_{\Lambda^*\epsilon} \equiv \mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)} \otimes \mathcal{H}_\epsilon$, donde $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}$ es el espacio de Hilbert asociado a la etiqueta de anisotropía Λ , mientras que \mathcal{H}_ϵ es el espacio de Hilbert asociado a la etiqueta v . La actuación de ambos operadores de ligadura está bien definida en un dominio denso del espacio de Hilbert cinemático, dado por $\mathcal{H}_{\Lambda^*\epsilon} \otimes L^2(\mathbb{R}, d\phi) \otimes \mathcal{F}^{\zeta} \otimes \mathcal{F}^{\varphi}$. Finalmente, la acción (adjunta) del operador de ligadura hamiltoniana densitizada sobre estados (generalizados) $(\psi|$, expandidos en la base de estados del sector gravitatorio homogéneo, es equivalente a la obtenida en la expresión (6.55), lográndose pues el mismo resultado al restringir primero el modelo clásicamente para posteriormente cuantizarlo que mediante la *proyección* cuántica aplicada en la sección 6.4.

7.2. Método de aproximación

En esta sección se partirá de la expresión del operador de ligadura hamiltoniana densitizada (7.5), y se desarrollarán métodos aproximados que conduzcan a la obtención de un operador de ligadura aproximada que sea resoluble.

7.2.1. Estrategia de aproximación y términos problemáticos

A la hora de construir soluciones al operador de ligadura hamiltoniana densitizada, los términos problemáticos son esencialmente dos. Por un lado, resulta problemática la actuación del término de anisotropía \hat{C}_{ani} . Esto es debido a que la acción de los operadores que lo componen, y en particular la del operador $\hat{\Theta}$, no puede factorizarse. En vez de actuar únicamente (de forma no trivial) sobre el subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}$, $\hat{\Theta}$ produce desplazamientos en las dos etiquetas, v y Λ . Además, los desplazamientos en la etiqueta Λ dependen explícitamente del valor de v en el estado $|\Lambda, v\rangle$. De forma explícita, los operadores contenidos en el término de anisotropía tienen el siguiente efecto:

$$(\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega})|\Lambda, v\rangle = -\kappa^2 \sum_{k \in \{0,4\}} [x_k^+(v)|\Lambda, v+k\rangle_+ + x_k^-(v)|\Lambda, v+k\rangle_-], \quad (7.9)$$

donde los coeficientes $x_k^\pm(v)$ son los definidos en la expresión (6.50), mientras que los estados $|\Lambda, v \pm k\rangle_\pm$ están cada uno compuesto por tres términos:

$$|\Lambda, v \pm k\rangle_\pm = |\Lambda + w_v(\pm k) - w_v(\pm 2), v\rangle - 2|\Lambda, v\rangle + |\Lambda + w_v(\pm 2), v\rangle. \quad (7.10)$$

Por otro lado, el otro término problemático es el término de autointeracción \hat{C}_{int} . Este término contiene la contribución de la autointeracción de las inhomogeneidades \hat{H}_{int} que crea y destruye infinitos pares de partículas. Además, contiene los operadores \hat{D} , que proporcionan las correcciones introducidas por la regularización del inverso de tríada densitizada, los cuales no conmutan con el operador $\hat{\Omega}^2$.

Para poder tratar con estos términos e introducir unas aproximaciones adecuadas, la estrategia que se tomará es la siguiente. Como principalmente se están buscando soluciones que correspondan a situaciones con pequeños efectos de anisotropía e inhomogeneidad, y las propiedades espectrales del operador geométrico de FRW, $\hat{\Omega}^2$, así como la forma de sus autoestados, son bien conocidas [24, 61], se tomará el conjunto de estos autoestados como base para el subespacio de Hilbert \mathcal{H}_ϵ . Teniendo en cuenta entonces el comportamiento de dichos autoestados, se podrán definir operadores aproximados para las contribuciones problemáticas mencionadas.

7.2.2. Comportamiento de los autoestados del operador $\hat{\Omega}^2$

En esta sección se explicarán las propiedades espectrales del operador $\hat{\Omega}^2$ y se estudiará el comportamiento de sus autofunciones. Tras este estudio, se proporcio-

nará una expresión analítica aproximada para dicho comportamiento, que posteriormente permitirá obtener las aproximaciones adecuadas a los operadores problemáticos.

El operador $\hat{\Omega}^2$ actúa únicamente de forma no trivial en el subespacio de Hilbert \mathcal{H}_ϵ , y se ha demostrado que es un operador esencialmente autoadjunto sobre este espacio [24]. El espectro es no degenerado, absolutamente continuo e igual a la semirecta real no negativa. El conjunto de sus autoestados, $\{|e_\rho\rangle; \rho \in \mathbb{R}^+\}$ (con autovalores dados por ρ^2), forma una base ortonormal del espacio de Hilbert \mathcal{H}_ϵ que se normaliza a la delta de Dirac como $\langle e_{\rho'}|e_\rho\rangle = \delta(\rho' - \rho)$. Definiendo $e_\rho(v) = \langle v|e_\rho\rangle$, el comportamiento de los autoestados cuando $v \gg 1$ toma la siguiente expresión analítica [24, 61]:

$$e_\rho(v) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\kappa v}} \cos\left(\frac{\rho}{4\kappa} \log v + \phi_\rho^\epsilon\right), \quad \text{cuando } v \gg 1, \quad (7.11)$$

que corresponde a la combinación lineal de autoestados del operador análogo para la cuantización WDW dada en la expresión (1.24). El comportamiento de la fase ϕ_ρ^ϵ es el expresado en (1.26), y para el que se ha podido comprobar numéricamente que $c_\epsilon = -\pi\epsilon/4$. Por otra parte, el comportamiento de las autofunciones $e_\rho(v)$ es tal que resultan exponencialmente suprimidas para $v < \tilde{v}(\rho) = \rho/(2\kappa)$. En la figura 7.1 se muestra un ejemplo del comportamiento general de las autofunciones.

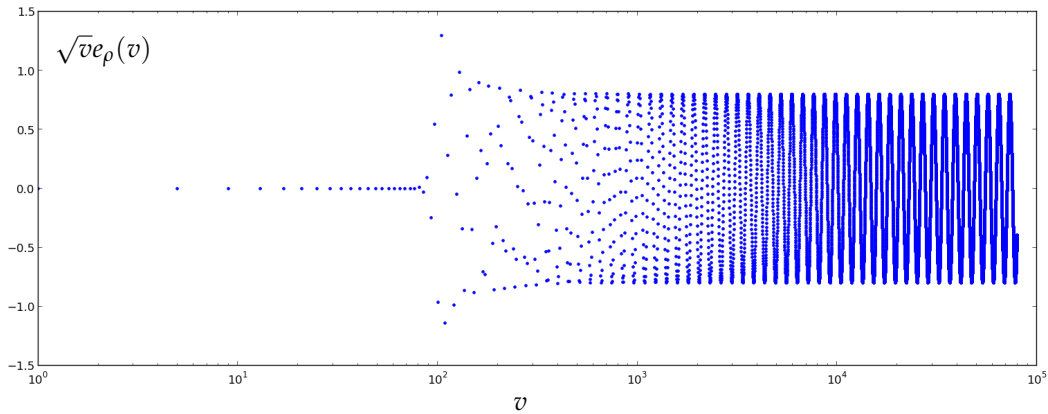


Figura 7.1: Representación del comportamiento de $\sqrt{v}e_\rho(v)$ con $\rho = 200$ ($\rho^2 = 40000$). Se han tomado los parámetros $\epsilon = \kappa = 1$. Representación con escala logarítmica en el eje de abscisas. En la figura se observa como $e_\rho(v)$ está altamente suprimido para $v < \tilde{v}(\rho) = 100$, mientras que para $v \gg \tilde{v}(\rho)$ se obtiene el régimen oscilatorio dado en (7.11).

Así pues, los autoestados del operador $\hat{\Omega}^2$ pueden escribirse de la forma

$$e_\rho(v) = \tilde{e}_\rho(v) + E_\rho(v) \quad (7.12)$$

donde $\tilde{e}_\rho(v)$ da cuenta de su comportamiento para valores de v grandes y pequeños:

$$\tilde{e}_\rho(v) = \begin{cases} 0 & \text{para } v < \tilde{v}(\rho) = \frac{\rho}{2\kappa}, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\kappa v}} \cos\left(\frac{\rho}{4\kappa} \log v + \phi_\rho^\epsilon\right) & \text{para } v \geq \tilde{v}(\rho), \end{cases} ; \quad (7.13)$$

mientras que $E_\rho(v) \equiv e_\rho(v) - \tilde{e}_\rho(v)$ da cuenta de la diferencia entre la forma exacta de los autoestados $e_\rho(v)$ y la expresión analítica aproximada $\tilde{e}_\rho(v)$.

El comportamiento de la función $E_\rho(v)$ puede separarse en tres intervalos con comportamientos cualitativamente distintos, que pueden apreciarse en la figura (7.2):

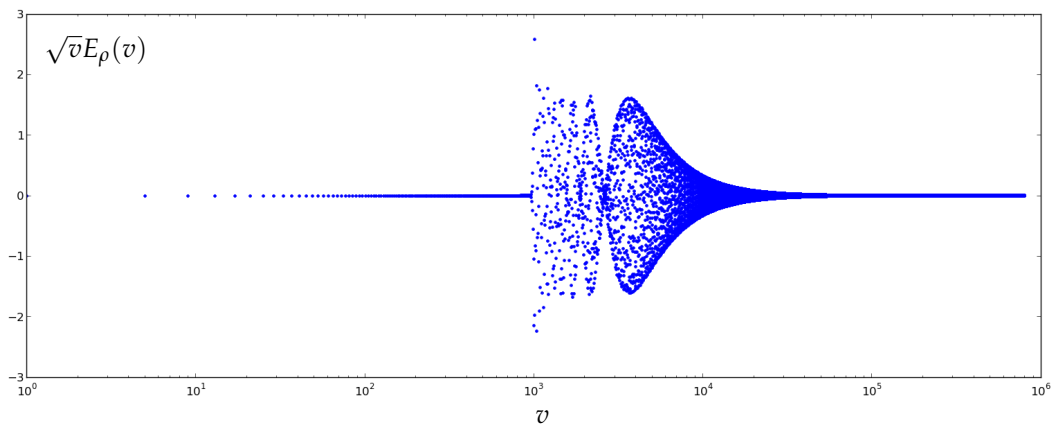


Figura 7.2: Representación del comportamiento de $\sqrt{v}E_\rho(v)$ con $\rho = 2000$ ($\rho^2 = 4000000$). Se han tomado los parámetros $\epsilon = \kappa = 1$. Representación con escala logarítmica en el eje de abscisas. En la figura se observan claramente los tres intervalos de comportamiento distinto para $E_\rho(v)$: (i) Despreciable para $v < \tilde{v}(\rho)$, (ii) oscilaciones para $\tilde{v}(\rho) \leq v \leq v^*(\rho)$ y, (iii) oscilaciones con un decaimiento de $v^{-5/2}$ para $v > v^*(\rho)$.

- Primeramente, para $v < \tilde{v}(\rho)$, el valor de $E_\rho(v)$ es completamente despreciable en todo este intervalo. No obstante, $E_\rho(v)$ va creciendo en valor absoluto rápidamente hasta tomar en $v = \tilde{v}(\rho)$ el valor de $e_\rho(\tilde{v}(\rho))$.
- Para un intervalo $\tilde{v}(\rho) \leq v \leq v^*(\rho)$, y debido a que el autoestado $e_\rho(v)$ oscila más rápidamente que la aproximación $\tilde{e}_\rho(v)$, la función $E_\rho(v)$ es una función

oscilante con una amplitud del mismo orden que la de $e_\rho(v)$. El comportamiento del valor $v^*(\rho)$ se ha podido determinar de forma numérica hallando que $v^*(\rho) = C(\rho/\kappa)^{3/2}$ donde C es una constante del orden de 10^{-1} .

- Finalmente, para $v \geq v^*(\rho)$, como $e_\rho(v)$ comienza a comportarse como $\tilde{e}_\rho(v)$, la función $E_\rho(v)$ oscila con (aproximadamente) la misma frecuencia que $\tilde{e}_\rho(v)$ y con una amplitud que decrece como $v^{-5/2}$. Este comportamiento se obtuvo analíticamente en la referencia [61] y ha sido confirmado numéricamente.

Tómese un operador genérico \hat{F} en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_ϵ . Al calcular sus elementos de matriz $\langle e_{\rho'} | \hat{F} | e_\rho \rangle$, se tendrá en general una expresión de la forma

$$\langle e_{\rho'} | \hat{F} | e_\rho \rangle = \sum_{v' \in \mathcal{L}_\epsilon} \sum_{v \in \mathcal{L}_\epsilon} F(v', v) e_{\rho'}^*(v') e_\rho(v). \quad (7.14)$$

Para este tipo de expresiones, dado el comportamiento que las funciones $E_\rho(v)$, la sustitución de $e_\rho(v)$ por su aproximación $\tilde{e}_\rho(v)$ proporciona una buena aproximación para $v, v' \in \mathcal{L}_\epsilon \setminus I$, donde $I = \{v; \tilde{v}(\rho) \leq v \leq v^*(\rho)\} \subset \mathcal{L}_\epsilon$. Para el intervalo de red I , aunque no está garantizado que esta sustitución lleve a una buena aproximación, es esperable que sea así ya que ambas funciones, $e_\rho(v)$ y $\tilde{e}_\rho(v)$, son funciones oscilantes con una amplitud del mismo orden y en general con interferencia destructiva (además de que el intervalo I únicamente contiene un número finito de puntos). Por lo tanto, en lo sucesivo, se supondrá que esta sustitución es válida y posteriormente se realizarán cálculos numéricos de elementos de matriz para corroborar la validez de las aproximaciones realizadas.

7.2.3. Aproximación a las correcciones de la regularización de inverso de tríada

Primeramente, se estudiará cómo aproximar las contribuciones provenientes de la regularización del operador inverso de tríada densitizada, dadas por el operador \hat{D} . Estas contribuciones aparecen en el operador de ligadura hamiltoniana en el término que contiene la autointeracción de los campos, \hat{C}_{int} . Este término actúa de forma no trivial sobre el subespacio de Hilbert \mathcal{H}_ϵ a través del operador $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}$. Para lograr una buena aproximación a este operador, con una actuación más sencilla, se calcula su acción sobre los autoestados $|e_\rho\rangle$, es decir $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}|e_\rho\rangle$, y se hace uso de la sustitución $e_\rho(v) \rightarrow \tilde{e}_\rho(v)$ (así como de otras aproximaciones controladas). Tras realizar este cálculo, que se explica detalladamente en el apéndice C, el resultado alcanzado es que, si escribimos

$$\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}|e_\rho\rangle = \rho^2|e_\rho\rangle + |\bar{\Psi}\rangle, \quad (7.15)$$

$|\tilde{\Psi}\rangle$ resulta ser un estado normalizable, en contraposición a los autoestados generalizados $|e_\rho\rangle$, que solo lo son como distribuciones a la delta de Dirac. En este sentido se puede despreciar la contribución de $|\tilde{\Psi}\rangle$. Es importante mencionar que, para llegar a este resultado, es necesario suponer que $\rho \gg 8\kappa$. El resultado es en realidad esperable, ya que la actuación del operador \hat{D} sobre la base de estados $|v\rangle$ arroja una contribución $D(v)$ que tiende a la unidad rápidamente para $v \gg 1$, difiriendo de ésta de manera significativa únicamente para valores de v en los cuales $e_\rho(v)$ está suprimido exponencialmente. Por tanto, cuando se cumple la condición $\rho \gg 8\kappa$ se obtiene que el operador $\hat{\Omega}^2$ proporciona una buena aproximación para $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}$.

7.2.4. Aproximación al término de anisotropía

Ahora se estudiará el término de anisotropía \hat{C}_{ani} del operador de ligadura hamiltoniana densitizada para obtener una aproximación que permita lidiar con su complicada actuación en el subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\Lambda^* \epsilon}$. Para ello se estudia la acción del operador $(\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta})$ sobre estados de la forma $\sum_{\bar{\Lambda}} f(\bar{\Lambda})|\bar{\Lambda}\rangle \otimes |e_\rho\rangle$ y se proyecta sobre el estado $\langle\Lambda|$. Realizando este cálculo, que se detalla en el apéndice C, se deduce que la contribución dominante puede aproximarse como

$$\langle\Lambda|(\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}) \sum_{\bar{\Lambda}} f(\bar{\Lambda})|\bar{\Lambda}\rangle \otimes |e_\rho\rangle \approx -i8\kappa\partial_\Lambda f(\Lambda)\hat{\Omega}'|e_\rho\rangle, \quad (7.16)$$

siempre que el perfil de anisotropía sea suficientemente suave (véase el apéndice mencionado), y donde el operador $\hat{\Omega}'$ actúa únicamente sobre el subespacio de Hilbert \mathcal{H}_ϵ . Explícitamente

$$\hat{\Omega}'|v\rangle = -i\frac{\kappa}{2} [y_-(v)|v-4\rangle - y_+(v)|v+4\rangle], \quad (7.17)$$

con coeficientes dados por

$$y_-(v) = \frac{1}{2}\sqrt{v|v-4|} [\text{sgn}(v) + \text{sgn}(v-4)], \quad y_+(v) = y_-(v+4). \quad (7.18)$$

Para llegar a este resultado, ha sido necesario considerar que $\rho \gg 8\kappa$ y que, como se ha adelantado, el perfil $f(\Lambda)$ es una función con una variación suave para todo intervalo $[\Lambda - w_{\bar{v}(\rho)}(2), \Lambda + w_{\bar{v}(\rho)}(2)]$ con $\Lambda \in \mathbb{R}$, en el sentido de que

$$f(\Lambda + \delta\Lambda) \simeq f(\Lambda) + \delta\Lambda\partial_\Lambda f(\Lambda), \quad (7.19)$$

si $\delta\Lambda \leq w_{\bar{v}(\rho)}(2)$.

Es importante mencionar que la definición del operador $\hat{\Omega}'$ es análoga a la definición del operador $\hat{\Omega}$, solo que la actuación del primero está definida en una red

de paso cuatro, mientras que la del segundo está definida en una red de paso dos. De hecho, un nuevo etiquetado de los estados como $|v\rangle \rightarrow |\nu\rangle$, con $2\nu = v$, hace que la acción del operador $\hat{\Omega}'$ sobre los estados $|\nu\rangle$ sea exactamente la misma que la del operador $\hat{\Omega}$ sobre los estados $|v\rangle$. De esta forma, las propiedades del operador $\hat{\Omega}'$ pueden obtenerse a partir de las del operador $\hat{\Omega}$. En particular, ambos operadores son esencialmente autoadjuntos en sus respectivos espacios de Hilbert, con un espectro no degenerado, absolutamente continuo e igual a la recta real [24, 60]. No obstante, el operador $\hat{\Omega}'$ no conmuta con el operador $\hat{\Omega}^2$, lo que causará complicaciones posteriormente.

Volviendo a la aproximación para el término de anisotropía dada en la expresión (7.16), es evidente que el operador diferencial ∂_Λ no es un operador bien definido en el subespacio de Hilbert discreto $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}$, sobre el cual actúa el operador original y el operador de ligadura hamiltoniana. Por lo tanto, para obtener una aproximación consistente, se define un operador en diferencias que corresponda a la derivada discretizada. Para ello se considera el operador $\hat{\Theta}'$ cuya actuación sobre los estados $|\Lambda\rangle$ es:

$$\hat{\Theta}'|\Lambda\rangle = -i\frac{2\kappa}{q_\epsilon} (|\Lambda - q_\epsilon\rangle - |\Lambda + q_\epsilon\rangle), \quad (7.20)$$

donde $q_\epsilon \in \mathbb{R}^+$ es (inicialmente) un paso constante. Para este operador se tiene que su límite continuo viene dado por

$$\langle \Lambda | \hat{\Theta}' \sum_{\bar{\Lambda}} f(\bar{\Lambda}) | \bar{\Lambda} \rangle = -i\frac{2\kappa}{q_\epsilon} [f(\Lambda + q_\epsilon) - f(\Lambda - q_\epsilon)] \approx -i4\kappa\partial_\Lambda f(\Lambda), \quad (7.21)$$

suponiendo que $f(\Lambda)$ es una función suave y q_ϵ es un paso suficientemente pequeño. El operador $\hat{\Theta}'$ es un operador de primera derivada discretizada. De esta forma, para el término de anisotropía, se puede realizar la aproximación

$$\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta} \approx 2\hat{\Omega}'\hat{\Theta}'. \quad (7.22)$$

Para que el operador $\hat{\Theta}'$ tenga una acción bien definida sobre el subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}$, el paso q_ϵ se ha de escoger adecuadamente de manera que $q_\epsilon \in \mathcal{W}_\epsilon$. Por ello, el paso dependerá del parámetro ϵ . Por otra parte, la elección precisa de q_ϵ ha de ser tal que se obtenga una buena aproximación para el término de anisotropía y preferiblemente ha de consistir en una escala característica del sistema considerado. Esta elección se detallará más adelante y por ahora q_ϵ será simplemente un valor constante contenido en el conjunto \mathcal{W}_ϵ . Con ello, la acción del operador $\hat{\Theta}'$ únicamente relaciona estados $|\Lambda\rangle$ cuya etiqueta pertenece a la misma red equiespaciada de paso q_ϵ , que se denotará por $\mathcal{L}_{\Lambda^*}^{q_\epsilon}$. En consecuencia, al considerar esta

aproximación al término de anisotropía y tomar el paso q_ϵ como constante, es posible restringir el estudio al subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{q_\epsilon} \subset \mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}$, generado por dichas redes.

7.2.5. Estudio espectral del operador de anisotropía

En esta sección se realizará el estudio de las propiedades del operador de anisotropía introducido $\hat{\Theta}'$. Primeramente, de la definición de este operador es inmediato ver que es un operador simétrico. Además, es acotado, ya que su norma está dada por

$$\sup_{|\Lambda\rangle \in \mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}} \|\hat{\Theta}'|\Lambda\rangle\| = \frac{2\kappa}{q_\epsilon} (\|\Lambda - q_\epsilon\rangle\| + \|\Lambda + q_\epsilon\rangle\|) = \frac{4\kappa}{q_\epsilon}, \quad (7.23)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interno discreto definido en $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}$. Para realizar un estudio de las propiedades espectrales de este operador, es conveniente realizar el siguiente cambio en el etiquetado de estados:

$$|\Lambda\rangle \rightarrow |\Gamma\rangle, \quad (7.24)$$

y renombrar $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{q_\epsilon} \rightarrow \mathcal{H}_{\Gamma^*}$, donde $\Gamma = \Lambda/q_\epsilon$ y \mathcal{H}_{Γ^*} es el espacio de Hilbert obtenido mediante la completación de la envolvente lineal del conjunto de estados $\{|\Gamma^* + n\rangle; n \in \mathbb{Z}\}$ con respecto al producto interno discreto. El operador $\hat{\Theta}'$ tiene la siguiente acción sobre los estados $|\Gamma\rangle$:

$$\hat{\Theta}'|\Gamma\rangle = -i\frac{2\kappa}{q_\epsilon} (|\Gamma - 1\rangle - |\Gamma + 1\rangle). \quad (7.25)$$

De esta forma, definiendo los operadores $\hat{h}_{\pm 1}|\Gamma\rangle = |\Gamma \pm 1\rangle$ se puede escribir el operador $\hat{\Theta}'$ como

$$\hat{\Theta}' = -i\frac{2\kappa}{q_\epsilon} (\hat{h}_{-1} - \hat{h}_1). \quad (7.26)$$

Considerando ahora la “transformación de Fourier discreta” unitaria \mathfrak{F} entre los espacios de Hilbert \mathcal{H}_{Γ^*} y $L^2((0, 2\pi], dx)$ dada por [59]

$$|\psi\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(\Gamma^* + n)|\Gamma^* + n\rangle \rightarrow (\mathfrak{F}\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(\Gamma^* + n)e^{i(\Gamma^* + n)x}, \quad (7.27)$$

se tiene que la transformada de los operadores $\hat{h}_{\pm 1}$ es

$$\mathfrak{F} : \hat{h}_{\pm 1}|\psi\rangle \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(\Gamma^* + n)e^{i(\Gamma^* + n \pm 1)x} = e^{\pm ix}(\mathfrak{F}\psi)(x). \quad (7.28)$$

Por lo tanto, $\mathfrak{F}\hat{h}_{\pm 1}\mathfrak{F}^{-1} = e^{\pm ix}$ al actuar como operador en el espacio de Hilbert $L^2((0, 2\pi], dx)$. De esta forma, para $\hat{\Theta}'$ se tiene que

$$\mathfrak{F}\hat{\Theta}'\mathfrak{F}^{-1} = -\frac{4\kappa}{q_\epsilon} \text{sen}(x), \quad (7.29)$$

con lo que se obtiene así un operador autoadjunto que actúa por multiplicación sobre el espacio $L^2((0, 2\pi], dx)$. Además, dado que $x \in (0, 2\pi]$, y que los valores de la función $\text{sen}(x)$ se toman para dos x distintos en dicho intervalo, se tiene que el espectro del operador $\hat{\Theta}'$ es absolutamente continuo, doblemente degenerado e igual al intervalo real $[-4\kappa/q_\epsilon, 4\kappa/q_\epsilon]$.

Por otra parte, considerando los siguientes estados en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{Γ^*} :

$$|x\rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(\Gamma^* + n)x} |\Gamma^* + n\rangle, \quad (7.30)$$

se comprueba fácilmente que son autoestados (generalizados) del operador de anisotropía,

$$\hat{\Theta}'|x\rangle = -i\frac{2\kappa}{q_\epsilon} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[e^{i(\Gamma^* + n + 1)x} - e^{i(\Gamma^* + n - 1)x} \right] |\Gamma^* + n\rangle = \frac{4\kappa}{q_\epsilon} \text{sen}(x)|x\rangle. \quad (7.31)$$

Así pues, volviendo ya al operador definido sobre el espacio de Hilbert original $\mathcal{H}_{\Lambda^*}^{(\epsilon)}$, para cada autovalor (generalizado) $p \in [-4\kappa/q_\epsilon, 4\kappa/q_\epsilon]$, los dos autoestados con dicho autovalor vienen dados por

$$\langle \Lambda | e_p^{(1)} \rangle = e_p^{(1)}(\Lambda) = N(p)e^{i\Lambda x/q_\epsilon}, \quad \langle \Lambda | e_p^{(2)} \rangle = e_p^{(2)}(\Lambda) = N(p)e^{i\Lambda(\pi - x)/q_\epsilon}, \quad (7.32)$$

donde $4\kappa \text{sen } x = pq_\epsilon$, y ahora se ha tomado $x \in (-\pi/2, \pi/2]$. En cuanto al factor de normalización $N(p)$, se determina imponiendo que se cumpla la condición $\langle e_{p'}^{(i)} | e_p^{(j)} \rangle = \delta^{ij} \delta(p' - p)$. El factor que se obtiene así es

$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt[4]{\frac{q_\epsilon^2}{(4\kappa)^2 - (pq_\epsilon)^2}}. \quad (7.33)$$

7.2.6. Comprobaciones numéricas de las aproximaciones

Aunque las aproximaciones introducidas en secciones anteriores para los operadores $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}$ y $\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}$ han sido obtenidas con técnicas analíticas mediante aproximaciones relativamente bien controladas, es conveniente comprobar la idoneidad de estas aproximaciones con cálculos numéricos. Para ello se han generado numéricamente los autoestados del operador de FRW para un amplio rango de autovalores

y se han calculado los correspondientes elementos de matriz de los operadores involucrados. Es importante mencionar que el cálculo de estos elemento de matriz conlleva en particular una suma (infinita) para todos los valores de $v \in \mathcal{L}_\epsilon$, la cual necesariamente ha de ser truncada hasta un valor máximo $v_{\text{máx}}$.

Primeramente se considera la aproximación para las contribuciones de la regularización del inverso de la tríada, es decir, la aproximación $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D} \approx \hat{\Omega}^2$. Para ello se han calculado y comparado los elementos de matriz $\langle e_{\rho'} | \hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D} | e_\rho \rangle$ y $\langle e_{\rho'} | \hat{\Omega}^2 | e_\rho \rangle$. Es conveniente recordar que $\langle e_{\rho'} | \hat{\Omega}^2 | e_\rho \rangle = \rho^2 \langle e_{\rho'} | e_\rho \rangle = \rho^2 \delta(\rho' - \rho)$, por definición de los autoestados, por lo que numéricamente aparecen contribuciones de tipo delta que hay que eliminar o interpretar correctamente. Para realizar este estudio numérico se ha tomado, sin pérdida de generalidad, un parámetro $\epsilon = 1$ y se ha fijado la constante $\kappa = 1$. Se han generado los autoestados para un gran número de valores de ρ en el intervalo $[10, 10000]$ y se ha calculado la diferencia absoluta (y relativa) entre los elementos de matriz de ambos operadores. En la figura 7.3 se presentan como ejemplo los resultados obtenidos a partir de once autoestados generados con valores de ρ equiespaciados logarítmicamente en el intervalo $[10, 1000]$, hasta un valor máximo de $v_{\text{máx}} = 800001$. Más concretamente, en la figura 7.3 se representan las sumas acumuladas hasta v para las diferencias absolutas de los elementos de matriz $\langle e_{\rho'} | \hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D} - \hat{\Omega}^2 | e_\rho \rangle$. En la gráfica de la izquierda se muestran los distintos elementos de matriz diagonales $\rho = \rho'$, mientras que en la figura de la derecha se muestran los elementos de matriz no diagonales con $\rho' = 100$ fijo. En la figura de la izquierda se observa cómo esta diferencia absoluta para los elementos de matriz diagonales tiende, para todos los valores de ρ , a un valor constante. Este valor numérico, además, va disminuyendo según aumenta el valor de ρ . En cualquier caso, esta contribución finita es completamente despreciable, no solo con respecto a la contribución de tipo delta obtenida para $\langle e_{\rho'} | \hat{\Omega}^2 | e_\rho \rangle$, sino también con respecto a los correspondientes autovalores ρ^2 cuando $\rho \gg 8\kappa$. De hecho, esta diferencia finita para los elementos de matriz diagonales es completamente compatible con los resultados analíticos obtenidos en la sección 7.2.3, donde se obtuvo que la diferencia de las actuaciones de ambos operadores sobre los autoestados está dada por un estado normalizable. En la figura de la derecha se muestran los elementos de matriz no diagonales. Como se puede apreciar, la mayor diferencia absoluta se presenta precisamente para el valor diagonal, y decae muy rápidamente a cero para valores no diagonales.

Con respecto a la aproximación realizada para el término de anisotropía, es decir, la aproximación $(\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}) \approx 2\hat{\Theta}'\hat{\Omega}'$, se han calculado numéricamente los elementos de matriz haciendo uso de los autoestados del operador $\hat{\Omega}^2$ y los estados $|\Lambda\rangle$ que conjuntamente forman una base del subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\Lambda^* \epsilon}$. Para

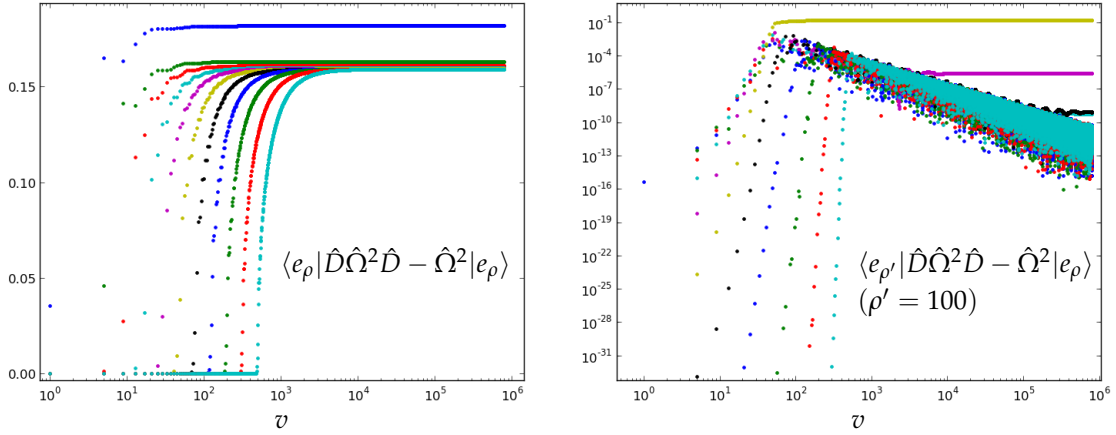


Figura 7.3: Figura izquierda: representación de las sumas acumuladas de la diferencia absoluta entre los elementos de matriz diagonales para ambos operadores. Se ha tomado $\epsilon = \kappa = 1$ y once valores de ρ equiespaciados logarítmicamente en el intervalo $[10, 1000]$. Figura derecha: representación de las sumas acumuladas de la diferencia absoluta entre los elementos de matriz no diagonales para ambos operadores, fijando $\rho' = 100$.

calcular estos elementos de matriz, se han considerado perfiles gaussianos suaves $f(\Lambda)$ de la forma

$$f(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Lambda^2}} \exp \left[-\frac{(\Lambda - \Lambda_0)^2}{2\sigma_\Lambda^2} \right]. \quad (7.34)$$

Se han calculado así, primeramente, los siguientes elementos de matriz:

$$\langle \Lambda' | \otimes \langle e_{\rho'} | (\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}) \sum_{\Lambda} f(\Lambda) | e_{\rho} \rangle \otimes | \Lambda \rangle, \quad (7.35)$$

donde $\langle \Lambda' |$ es un estado fijo perteneciente al sector de superselección considerado sobre el que se proyecta, mientras que Λ toma todos los valores contenidos en dicho sector de superselección. Para calcular estos elementos de matriz, se ha de generar una red en las anisotropías centrada en el valor Λ' en la que estén contenidos todos los valores relacionados por el operador. Esto valores son los obtenidos desplazando el valor central de Λ' con los shifts $\pm w_v(2)$ y $\pm(w_v(4) - w_v(2))$, para todos los valores de v que se van a considerar en el cálculo numérico. Por otra parte, también se han calculado los elementos de matriz

$$\langle \Lambda' | \otimes \langle e_{\rho'} | 2\hat{\Omega}'\hat{\Theta}' \sum_{\Lambda} f(\Lambda) | e_{\rho} \rangle \otimes | \Lambda \rangle, \quad (7.36)$$

donde el paso del operador q_ϵ se ha tomado para estos cálculos numéricos como el valor contenido en \mathcal{W}_ϵ más cercano a $w_{\bar{v}}(2)$ con $\bar{v}(\rho) = \rho/(2\kappa)$ (valor que en reali-

dad está relacionado con el que se tomará finalmente para q_ϵ). Para generar los autoestados del operador $\hat{\Omega}^2$ se ha elegido sin pérdida de generalidad, y al igual que antes, $\epsilon = \kappa = 1$, y se han calculado las diferencias absolutas entre los elementos de matriz de ambos operadores modificando los parámetros del perfil gaussiano considerado. En el ejemplo que se presenta en la figura 7.4, se generaron los autoestados para once valores de ρ equiespaciados logarítmicamente en el intervalo $[10, 1000]$ hasta un valor máximo de v de $v_{\text{máx}} = 800001$, y se estudió los elementos de matriz diagonales en estos autoestados, es decir $\rho' = \rho$. Es importante mencionar que, dada la definición (7.17) del operador $\hat{\Omega}'$, y ser los autoestados $e_\rho(v)$ reales, sus elementos de matriz diagonales se anulan idénticamente. De esta forma, en la figura 7.4 se representan dos ejemplos de las sumas acumuladas de los elementos de matriz diagonales. En la gráfica de la izquierda se han tomado los valores

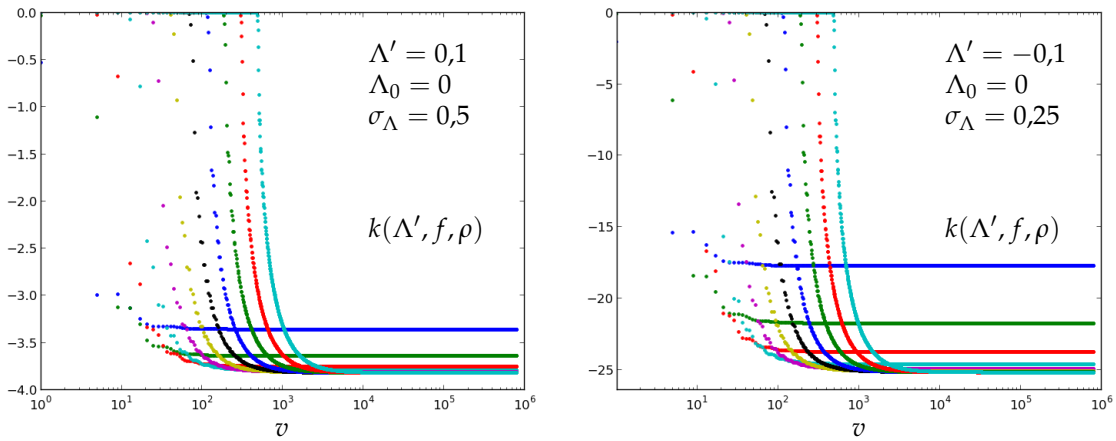


Figura 7.4: Representación de las sumas acumuladas de los elementos de matriz $\langle \Lambda' | \otimes \langle e_\rho | (\hat{\Theta} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \hat{\Theta}) \Sigma_\Lambda f(\Lambda) | e_\rho \rangle \otimes | \Lambda \rangle \equiv k(\Lambda', f, \rho)$ para once valores de ρ equiespaciados logarítmicamente en el intervalo $[10, 1000]$. Gráfica izquierda: los parámetros del perfil gaussiano de anisotropía son $\Lambda' = 0,10$, $\Lambda_0 = 0$ y $\sigma_\Lambda = 0,5$. Gráfica derecha: los parámetros del perfil gaussiano de anisotropía son $\Lambda' = -0,10$, $\Lambda_0 = 0$ y $\sigma_\Lambda = 0,25$.

$\Lambda' = 0,10$, $\Lambda_0 = 0$ y $\sigma_\Lambda = 0,5$, con lo que se obtienen unos valores para la primera y segunda derivada de los perfiles $\partial_\Lambda f(\Lambda') = -0,313$ y $\partial_\Lambda^2 f(\Lambda') = -3,003$. En la gráfica de la derecha se han tomado los valores $\Lambda' = -0,10$, $\Lambda_0 = 0$ y $\sigma_\Lambda = 0,25$, para los cuales se obtiene $\partial_\Lambda f(\Lambda') = 2,357$ y $\partial_\Lambda^2 f(\Lambda') = -19,003$. En ambas gráficas se observa que las contribuciones diagonales obtenidas son finitas y que el valor de éstas no es proporcional al valor de la primera derivada, sino al de la segunda derivada, que son contribuciones despreciadas por la aproximación.

Por otra parte, en la figura 7.5 se presenta un ejemplo de los resultados para los elementos de matriz no diagonales. Aquí, se han generado veintiún autoestados con valores de ρ equiespaciados logarítmicamente, centrados en el valor fijo $\rho' = 1000$ y comprendidos en el intervalo $[995,4, 1004,6]$. Por otra parte, se han tomado como parámetros para el perfil gaussiano de anisotropía $\Lambda' = 0,10$, $\Lambda_0 = 0$ y $\sigma_\Lambda = 0,5$, para los que $\partial_\Lambda f(\Lambda') = -0,313$ y $\partial_\Lambda^2 f(\Lambda') = -3,003$. En la gráfica de la izquierda de la figura 7.5 se comparan los elementos de matriz obtenidos para cada uno de los dos operadores, mientras que en la gráfica de la derecha se muestra la diferencia absoluta entre ambos. El resultado es que, por una parte, los elementos de

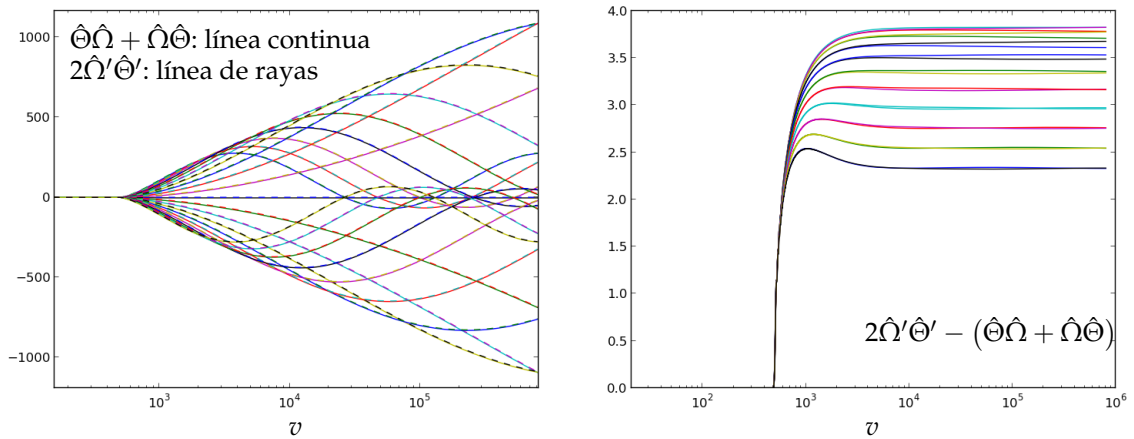


Figura 7.5: Representación de las sumas acumuladas de los elementos de matriz no diagonales para los operadores $2\hat{\Theta}'\hat{\Omega}'$ y $\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}$. Se han tomado veintiún valores de ρ equiespaciados logarítmicamente en el intervalo $[995,4, 1004,6]$ y un valor fijo de $\rho' = 1000$. Gráfica izquierda: comparación entre ambos operadores. Gráfica derecha: diferencia absoluta.

matriz de ambos operadores siguen el mismo comportamiento, en el que aparecen divergencias cuando $\rho' \simeq \rho$, que son proporcionales a $\partial_\Lambda f(\Lambda')$ y a ρ . Por otra parte, la diferencia entre los elementos de matriz no diagonales es siempre finita y disminuye rápidamente cuando aumenta $|\rho' - \rho|$. Además, las diferencias obtenidas, tanto para los elementos de matriz diagonales como para los no diagonales, provienen fundamentalmente de términos proporcionales a la segunda derivada en la anisotropía, que han sido despreciados en la aproximación. Así pues, considerando perfiles para los cuales $\partial_\Lambda^2 f(\Lambda) \ll \partial_\Lambda f(\Lambda)$, y $\rho, \rho' \gg 8\kappa$ el operador $2\hat{\Omega}'\hat{\Theta}'$ es una buena aproximación (en términos relativos) al operador original $\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}$.

7.2.7. Operador de ligadura hamiltoniana aproximada

Dados los cálculos numéricos y analíticos presentados en las secciones anteriores, parece justificado realizar las sustituciones $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D} \rightarrow \hat{\Omega}^2$ y $(\hat{\Theta}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\hat{\Theta}) \rightarrow 2\hat{\Omega}'\hat{\Theta}'$ en el operador de ligadura hamiltoniana densitizada original (7.5) para obtener un nuevo operador de ligadura que proporciona una buena aproximación y tiene una actuación más simple. No obstante, este nuevo operador aún presenta dificultades a la hora de obtener sus soluciones. Estas dificultades están dadas, por un lado, por el término de anisotropía aproximado, debido a que el operador $\hat{\Omega}'$ no conmuta con el operador $\hat{\Omega}^2$ y el operador $\hat{\Theta}'$ no conmuta con los operadores $\widehat{e^{\pm 2\Lambda}}$. Por otro lado, el nuevo operador de ligadura contiene aún el término de autointeracción, y por lo tanto al operador \hat{H}_{int} que crea y destruye infinitos pares de partículas. Sin embargo, como ya se ha comentado, se pretenden estudiar soluciones aproximadas con pequeños efectos de anisotropía. Por tanto, el tipo de estados en los que se está interesado son aquéllos picados en un valor esperado del operador $\hat{\Theta}'$ pequeño, y entonces el término de anisotropía puede despreciarse. Por otra parte, para poder ignorar el término de interacción, se considerarán estados que además estén picados en un valor para el operador $\widehat{e^{-2\Lambda}}$ que también sea despreciable.

Con esta motivación, se consideran estados cuya parte de anisotropía está dada por perfiles de tipo gaussiano de la forma

$$|\psi_{\Lambda}\rangle = \int_{\frac{4x}{q_{\epsilon}}}^{\frac{4\kappa}{q_{\epsilon}}} dp \sqrt{\frac{q_{\epsilon}}{4\kappa\sigma_p\sqrt{\pi}\cos[x(p)]}} \exp\left[-\frac{x^2(p)}{2\sigma_p} - ix(p)\frac{\bar{\Lambda}}{q_{\epsilon}}\right] |e_p^{(1)}\rangle, \quad (7.37)$$

donde es importante recordar que $x(p) = \arcsen(\frac{pq_{\epsilon}}{4\kappa})$. La expresión de estos estados expandidos en la base $|\Lambda\rangle$, y suponiendo que $\sigma_p \ll \pi/2$, puede verse que es, aproximadamente,

$$|\psi_{\Lambda}\rangle \simeq \sqrt{\frac{\sigma_p}{\sqrt{\pi}}} \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_{\Lambda^*}^{q_{\epsilon}}} \exp\left[-\frac{\sigma_p^2}{2q_{\epsilon}^2}(\Lambda - \bar{\Lambda})^2\right] |\Lambda\rangle. \quad (7.38)$$

Estos perfiles están picados en valores de la anisotropía entorno a $\bar{\Lambda}$ y en valores de su momento entorno a $p = 0$. Así pues, se obtiene que el valor esperado del operador $\hat{\Theta}'$ sobre este tipo de estados se anula:

$$\langle\psi_{\Lambda}|\hat{\Theta}'|\psi_{\Lambda}\rangle = \frac{4\kappa}{q_{\epsilon}\sqrt{\pi}\sigma_p} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \sen(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_p^2}\right) = 0. \quad (7.39)$$

Por otra parte, es fácil comprobar que

$$\langle \psi_\Lambda | \widehat{e^{-2n\bar{\Lambda}}} | \psi_\Lambda \rangle \simeq \exp \left(-2n\Lambda + n^2 \frac{q_\epsilon^2}{\sigma_p^2} \right), \quad (7.40)$$

donde n es cualquier número entero. Con esto se tiene que, si $\bar{\Lambda} \gg q_\epsilon^2/\sigma_p^2$, se cumple que $\langle \psi_\Lambda | \widehat{e^{-2\Lambda}} | \psi_\Lambda \rangle \ll 1$ y, de forma similar, para la dispersión de este operador se obtiene:

$$\sqrt{\left| \langle \psi_\Lambda | \widehat{e^{-4\Lambda}} - \left(\langle \psi_\Lambda | \widehat{e^{-2\Lambda}} | \psi_\Lambda \rangle \right)^2 | \psi_\Lambda \right|} = \sqrt{e^{-4\bar{\Lambda} + 4 \frac{q_\epsilon^2}{\sigma_p^2}} \left(1 - e^{-2 \frac{q_\epsilon^2}{\sigma_p^2}} \right)} \ll 1. \quad (7.41)$$

En conclusión, si se consideran estados cuya parte de anisotropía es de la forma (7.37), con una anchura del perfil gaussiano $\sigma_p \ll \pi/2$ y picados en un valor suficientemente grande de la etiqueta de anisotropía $\bar{\Lambda}$, el valor esperado (con respecto a su dependencia con la anisotropía) tanto del término de anisotropía, \hat{C}_{ani} , como del término de interacción, \hat{C}_{int} , en el operador de ligadura hamiltoniana son completamente despreciables. Por lo tanto, asumiendo que el contenido de inhomogeneidades es razonable, se pueden despreciar los dos términos comentados, pasando a considerar el siguiente operador de ligadura:

$$\hat{C}_{\text{ap}} = -\frac{3}{\kappa^2} \hat{\Omega}^2 + \frac{4}{\pi \hbar \ell_{\text{pl}}^2} \hat{p}_\phi^2 + \frac{16}{\beta} e^{2\bar{\Lambda}} \hat{H}_0. \quad (7.42)$$

7.3. Soluciones aproximadas al modelo de Gowdy

En esta sección se construirán las soluciones del operador de ligadura hamiltoniana aproximada \hat{C}_{ap} que se acaba de introducir. Posteriormente, imponiendo ciertas condiciones a estas soluciones, se obtendrán soluciones aproximadas para el operador de ligadura original.

Para construir las soluciones del operador \hat{C}_{ap} , se considerarán los siguiente estados generalizados

$$(\Psi | = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \sum_{v \in \mathcal{L}_\epsilon} \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}_{\Lambda^*}^{q_\epsilon}} \sum_{\mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi} \Psi(\phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) \langle \phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi |, \quad (7.43)$$

donde se ha definido

$$\langle \phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi | = \langle \phi | \otimes \langle v | \otimes \langle \Lambda | \otimes \langle \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi |, \quad (7.44)$$

como el bra que denota al estado en el correspondiente espacio dual. Por otra parte, se puede escribir

$$\Psi(\phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi \int_0^{\infty} d\rho \Psi(p_\phi, \rho, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) e_\rho(v) e_{p_\phi}(\phi), \quad (7.45)$$

donde $e_{p_\phi}(\phi) = \langle \phi | e_{p_\phi} \rangle$, siendo $|e_{p_\phi}\rangle$ los autoestados generalizados del operador del momento del campo homogéneo \hat{P}_ϕ^2 , con autovalor p_ϕ^2 y normalizados de la forma $\langle e_{p'_\phi} | e_{p_\phi} \rangle = \delta(p'_\phi - p_\phi)$. Los estados generalizados introducidos ($\Psi|$ serán soluciones que satisfacen $(\Psi| \hat{C}_{\text{ap}}^\dagger = 0$. Imponiendo $(\Psi| \hat{C}_{\text{ap}}^\dagger | \phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi \rangle = 0$, se llega entonces a la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi \int_0^{\infty} d\rho \Psi(p_\phi, \rho, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) e_\rho(v) e_{p_\phi}(\phi) \left[-\frac{3\rho^2}{\kappa^2} + \frac{4p_\phi^2}{\pi \hbar \ell_{\text{Pl}}^2} + \frac{16e^{2\Lambda}}{\beta} H_0(\mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) \right] = 0, \quad (7.46)$$

donde se ha definido

$$H_0(\mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) = \langle \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi | \hat{H}_0 | \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} m \left(n_m^\zeta + n_{-m}^\zeta + n_m^\varphi + n_{-m}^\varphi \right), \quad (7.47)$$

con n_m^α y n_m^α (para $\alpha = \zeta, \varphi$) los números de ocupación de los correspondientes estados de n -partículas. Por lo tanto, $H_0(\mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi)$ es una función estrictamente positiva. Resolviendo la ecuación para ρ , las soluciones del operador de ligadura son estados con perfiles de la forma

$$\Psi(\phi, v, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi \Psi(p_\phi, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) e_{\rho(p_\phi, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi)}(v) e_{p_\phi}(\phi), \quad (7.48)$$

donde

$$\rho(p_\phi, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) = \sqrt{\frac{4\kappa^2}{3\pi \hbar \ell_{\text{Pl}}^2} p_\phi^2 + \frac{16\kappa^2}{3\beta} e^{2\Lambda} H_0(\mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi)}. \quad (7.49)$$

Es importante mencionar que el término dentro de la raíz es no negativo y por lo tanto la solución para ρ está bien definida.

A partir de estas soluciones, es inmediato construir soluciones aproximadas para el operador de ligadura hamiltoniana original. Para ello, basta con restringir las soluciones ($\Psi|$ de forma que su dependencia en la anisotropía esté dada por los perfiles gaussianos estudiados en la sección anterior, es decir

$$\Psi(p_\phi, \Lambda, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) = \Psi(p_\phi, \mathbf{n}^\zeta, \mathbf{n}^\varphi) \psi(\Lambda), \quad (7.50)$$

donde

$$\psi(\Lambda) = \sqrt{\frac{\sigma_p}{\sqrt{\pi}}} \exp \left[-\frac{\sigma_p^2}{2q_\epsilon^2} (\Lambda - \bar{\Lambda})^2 \right], \quad \sigma_p \ll \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\Lambda} \gg \frac{q_\epsilon^2}{\sigma_p^2}. \quad (7.51)$$

También se ha de asumir que el contenido de inhomogeneidades es suficientemente pequeño, en el sentido de que el término de autointeracción, $\hat{\mathcal{C}}_{\text{int}}$, puede ser ignorado para el tipo de perfiles de anisotropía que se han considerado. Además, debido a que se quiere que todas las aproximaciones introducidas estén bien justificadas, es necesario restringir estos estados a valores de ρ suficientemente grandes, $\rho \gg 8\kappa$. Teniendo en cuenta la forma de $\rho(p_\phi, \Lambda, n^\zeta, n^\varphi)$, dada en la expresión (7.49), y recordando que la contribución de H_0 es no negativa, se puede garantizar que $\rho \gg 8\kappa$ restringiendo el momento del campo escalar de manera que $p_\phi^2 \gg 48\pi\hbar\ell_{\text{Pl}}^2 \approx 150\hbar\ell_{\text{Pl}}^2$. Asimismo, los estados de n -partículas considerados han de satisfacer la ligadura de difeomorfismos, cumpliendo por lo tanto la condición (6.47). En conclusión, los estados en el sector $p_\phi^2 \gg 150\hbar\ell_{\text{Pl}}^2$ con los perfiles de anisotropía (7.51) y un bajo contenido en partículas que satisfagan la condición impuesta por la ligadura de difeomorfismos han de ser soluciones aproximadas para el modelo de Gowdy.

Por último, se concluirá esta sección sugiriendo una elección conveniente para el paso q_ϵ . En principio, existe una gran libertad a la hora de escoger este parámetro. Sin embargo, en vez de realizar una elección arbitraria, se motivará la elección de un valor específico empleando argumentos físicos. La motivación procede del hecho de que el momento del campo escalar homogéneo es una constante del movimiento y proporciona una escala natural para el sistema (para cada uno de sus autoestados generalizados, donde la aproximación de la ligadura hamiltoniana puede llevarse a cabo independientemente). Recordemos que, si la contribución gravitatoria de FRW fuera solamente relevante para $\rho \geq \rho^*$, una buena elección para q_ϵ sería el elemento más pequeño contenido en el conjunto \mathcal{W}_ϵ mayor que $w_{\bar{v}(\rho^*)}(2) = \log(1 + 4\kappa/\rho^*)$. Como se acaba de ver, el momento del campo homogéneo p_ϕ proporciona de hecho una cota inferior para ρ , a través de la ecuación (7.49). Por lo tanto, parece natural realizar la elección $q_\epsilon = \log(1 + 2/\bar{v})$, donde \bar{v} es el valor contenido en la semired \mathcal{L}_ϵ más pequeño y más cercano a la cota inferior de $\rho/(2\kappa)$, es decir

$$\bar{v} = \max \left\{ v \in \mathcal{L}_\epsilon \text{ tal que } v \leq \frac{|p_\phi|}{\sqrt{3\pi\hbar\ell_{\text{Pl}}^2}} \right\}. \quad (7.52)$$

Es importante señalar que, para valores grandes del momento del campo escalar homogéneo, el valor del parámetro q_ϵ seleccionado de esta manera es realmente pequeño.

7.4. Discusión

En este capítulo se han estudiado métodos aproximados en el contexto de la cosmología cuántica de lazos con el propósito de construir soluciones físicas para sistemas que incluyen inhomogeneidades y anisotropías. Estos métodos se han desarrollado y aplicado para el modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 con polarización lineal y con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado, cuantizado a través de los procedimientos de la cuantización híbrida. Más concretamente, el estudio se ha centrado en el submodelo con simetría rotacional local. Primeramente se mostró resumidamente la cuantización híbrida de este submodelo partiendo desde su restricción clásica. De esta forma, se ha podido comparar el modelo cuántico resultante con el obtenido en el capítulo anterior utilizando una *proyección* desde el modelo cuántico completo, verificándose la concordancia entre ambos.

Una de las principales complicaciones presentes a la hora de intentar resolver el operador de ligadura hamiltoniana para este modelo es la presencia del término de anisotropía. Por una parte, este término no conmuta con el operador de ligadura hamiltoniana del modelo de FRW. Por otra parte, su acción sobre la variable de anisotropía es muy complicada, lo cual imposibilita en la práctica un análisis espectral del operador. A través del método de aproximación introducido, basado en las propiedades del operador geométrico de FRW y en el comportamiento de sus autofunciones, se ha conseguido un operador aproximado para el término de anisotropía. Se ha mostrado también que pueden ignorarse las correcciones introducidas por la regularización del inverso de la tríada. El operador aproximado obtenido para el término de anisotropía se factoriza en el producto tensorial de dos operadores, uno que actúa de forma no trivial únicamente sobre la variable de volumen v , y otro que actúa únicamente sobre la etiqueta de anisotropía Λ . Este último es simplemente un operador de derivada discretizada que retiene los efectos de discretización provenientes de la cuantización de lazos de las anisotropías, pero con una acción y un dominio de definición mucho más sencillos que los del operador de anisotropía original. Como consecuencia, el sector de superselección original para la anisotropía se divide en subespacios correspondientes a los estados con soporte en redes equiespaciadas. El espectro de este nuevo operador de derivada discretizada en cada uno de estos subespacios ha sido caracterizado completamente, obteniéndose también una forma analítica para sus autoestados. La validez de estas aproximaciones, obtenidas analíticamente, para los operadores originales ha sido confirmada mediante una comparación numérica de los elementos de matriz correspondientes.

Asimismo, se ha encontrado una familia de estados cuyos perfiles en Λ están suficientemente picados, tanto en la anisotropía como en su momento—dado por la

derivada discretizada introducida—, de forma que permiten despreciar en la ligadura hamiltoniana no solamente el término de anisotropía, sino también el término que contiene la contribución de autointeracción de las inhomogeneidades. Considerando estos perfiles en Λ , se han obtenido soluciones aproximadas que corresponden a estados con un efecto pequeño de las anisotropías y un contenido razonable de inhomogeneidades. Cuanto mayor es el valor del momento del campo escalar homogéneo (que es una constante del movimiento), mejores son estas soluciones aproximadas para el modelo de Gowdy.

También es conveniente mencionar que éste no es el único modelo que ha sido estudiado en el contexto de la cosmología cuántica de lazos que se comporta como un espaciotiempo cuántico de FRW con inhomogeneidades. De hecho, los métodos de cuantización híbrida han sido utilizados para cuantizar modelos de FRW con perturbaciones cosmológicas [130–133]. Es esperable que el tipo de métodos de aproximación presentados en este capítulo puedan ser de utilidad para construir soluciones cuánticas aproximadas en este tipo de modelos más realistas que describen escenarios inflacionarios.

Conclusiones

Conclusiones

El principal objetivo de esta tesis ha sido sentar las bases para la extracción de predicciones físicas robustas en cosmologías cuánticas inhomogéneas realistas, tanto en el contexto de teoría cuántica de campos como en el contexto de la cosmología cuántica de lazos a través de las técnicas de cuantización híbrida. Para ello, se ha estudiado la aplicación de criterios de unicidad para la cuantización de Fock de campos escalares en espaciotiempos cosmológicos no estacionarios de especial relevancia. También se ha estudiado la aplicabilidad de estos criterios de unicidad cuando se permiten transformaciones no locales, que surgen en el estudio de perturbaciones cosmológicas en espaciotiempos inflacionarios. Por otra parte, se han extendido las técnicas de cuantización híbrida para estudiar sistemas más cercanos a situaciones realistas que incluyen inhomogeneidades materiales. Finalmente, se han desarrollado métodos de aproximación controlados para construir soluciones cuánticas que representan situaciones de interés físico.

Resultados

- Se ha estudiado la cuantización de Fock de un campo escalar con una masa dependiente del tiempo definido en espaciotiempos ultraestáticos con secciones espaciales compactas y planas, con la topología del tres-toro. En particular, se ha discutido la aplicabilidad del criterio de unicidad que impone a la representación de Fock la invariancia de su vacío bajo las simetrías espaciales, en este caso las simetrías del tres-toro, y la implementabilidad unitaria de la evolución. Se ha mostrado cómo la imposición de este criterio elimina las dos principales ambigüedades existentes en la cuantización de Fock de campos escalares en espaciotiempos cosmológicos:
 1. El criterio de unicidad elimina la ambigüedad en la elección de la representación de las relaciones canónicas del conmutación seleccionando una única clase de equivalencia unitaria invariante de representaciones

de Fock. Esta clase de equivalencia está determinada por la representación de Fock naturalmente asociada a un campo escalar libre sin masa. Para probar este resultado se han caracterizado las estructuras complejas invariantes bajo las simetrías del tres-toro y se ha estudiado el comportamiento asintótico de la degeneración del operador de Laplace–Beltrami.

2. Se ha mostrado además cómo el criterio de unicidad elimina la ambigüedad en la elección inicial de una descripción canónica para el campo entre todas aquellas relacionadas mediante transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo. Más concretamente, se han estudiado transformaciones que contienen un escalado de los campos e incluyen también la redefinición del momento mediante la adición de un término proporcional a la configuración del campo, ambos con funciones dependientes del tiempo. Se ha demostrado que la implementación unitaria de la evolución únicamente es posible para una elección de par canónico para el que se satisfacen unas ecuaciones de Klein–Gordon sobre un espaciotiempo estático auxiliar con una masa dependiente del tiempo y en el que el momento viene dado por la derivada de la configuración del campo con respecto al tiempo de dicho espaciotiempo estático. De esta forma, se ha mostrado que el criterio de unicidad estudiado no deja margen para realizar ni escalados del campo ni redefiniciones del momento mediante funciones dependientes del tiempo.
- También se ha estudiado la cuantización de Fock de un campo escalar, tanto masivo como sin masa, que se propaga en un espaciotiempo de tipo de Sitter. Más concretamente, se ha estudiado la posibilidad de obtener una representación de Fock para la que la evolución del campo sea implementable de forma unitaria. Se ha mostrado que, para conseguir una cuantización con esta característica, es necesario considerar una transformación canónica dependiente del tiempo que incluye no solo el escalado del campo sino también una redefinición de su momento. Así, se ha construido una representación de Fock invariante $O(4)$ para la cual se ha mostrado explícitamente que la evolución es unitaria independientemente de la masa del campo. El criterio de unicidad mencionado en el punto anterior selecciona esta representación de Fock de forma única, salvo equivalencia unitaria.
 - Además, se ha estudiado la equivalencia entre el vacío seleccionado por el criterio de evolución unitaria e invariancia $O(4)$ con otros estados de vacío ampliamente utilizados en la literatura. De forma más específica, se ha demostrado que el vacío unitario es equivalente unitariamente a los vacíos se-

leccionados a través del criterio de Hadamard: el vacío de Bunch–Davies para un campo escalar masivo y los vacíos de Allen–Folacci para un campo escalar sin masa. También se ha mostrado explícitamente la equivalencia del vacío unitario con los estados de vacío adiabáticos de orden cero, y por consiguiente con los de todos los órdenes.

- Considerando campos escalares definidos en espaciotiempos no estacionarios con secciones espaciales compactas arbitrarias de tres dimensiones, se han estudiado transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo no locales que relacionan descripciones de campo para las cuales es posible obtener una implementación unitaria de la evolución con invariancia bajo las simetrías espaciales. Se ha caracterizado la forma más general de estas transformaciones no locales asumiendo que, por una parte, éstas no mezclan modos desacoplados dinámicamente y, por otra parte, admiten una expresión asintótica en frecuencias en serie de Laurent. Se ha mostrado que todas estas transformaciones son implementables unitariamente en la representación de Fock seleccionada de forma única por el criterio de unicidad para la descripción de campo original. De esta forma, el criterio de unicidad estudiado escoge una clase privilegiada de equivalencia unitaria invariante de representaciones de Fock incluso cuando se permiten transformaciones canónicas lineales dependientes del tiempo no locales.
- Se han extendido las técnicas de cuantización híbrida desarrolladas para el modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 linealmente polarizado para incluir un campo escalar sin masa mínimamente acoplado con las mismas simetrías que la geometría. Así, se ha logrado cuantizar de forma completa un modelo que incluye inhomogeneidades materiales y que contiene un subconjunto de soluciones clásicas homogéneas e isótropas de tipo FRW plano, por lo que resulta físicamente más interesante que el modelo sin campo escalar. Se ha mostrado que, tras un escalado conveniente de las inhomogeneidades materiales, que lleva a una evolución unitaria para las mismas, ambos tipos de inhomogeneidades materiales y gravitatorias toman parte en el sistema de la misma manera, pudiendo ser tratadas de forma idéntica. Mediante la aplicación de las técnicas de cuantización híbrida se ha obtenido un modelo cuántico tal que:
 1. Los operadores que representan a las ligaduras del sistema son operadores con una actuación bien definida en el espacio de Hilbert cinemático.
 2. La cuantización polimérica para el sector homogéneo del modelo, correspondiente a cosmologías de Bianchi I con un campo escalar sin masa ho-

mogéneo, ha permitido desacoplar los estados análogos a la singularidad clásica de tipo Big Bang.

3. La cuantización de Fock para ambos tipos de inhomogeneidades permite tratar la complejidad creada por los infinitos grados de libertad y permite recuperar la descripción de teoría cuántica de campos para las mismas cuando los efectos de la geometría cuántica homogénea son despreciables.
 4. La imposición del operador de ligadura hamiltoniana (densitizada) lleva a una ecuación en diferencias finitas en el volumen tal que las soluciones de la ligadura quedan completamente determinadas a partir de los datos iniciales en la sección de volumen mínimo. Se ha podido dotar de estructura de Hilbert al espacio de los datos iniciales imponiendo condiciones de realidad sobre un conjunto adecuado de observables, caracterizando de esta forma el espacio de Hilbert físico del modelo.
- Por otra parte, se ha estudiado la *proyección* a nivel cuántico del modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 con polarización lineal al submodelo cuántico con simetría rotacional local. Se ha mostrado que el resultado obtenido mediante la *proyección* introducida es equivalente al obtenido mediante la cuantización híbrida de la restricción clásica por simetría al submodelo en cuestión.
 - Se han desarrollado y aplicado métodos aproximados en el contexto de la cuantización híbrida para la obtención de soluciones físicas correspondientes a situaciones de interés físico. Para ello, se han utilizado las propiedades del operador gravitatorio de FRW en cosmología cuántica de lazos así como el conveniente comportamiento de sus autoestados. De esta forma, para el modelo de Gowdy \mathbb{T}^3 con simetría rotacional local se han obtenido los siguientes resultados:
 1. Se ha encontrado un operador aproximado para el término de anisotropía del operador de ligadura hamiltoniana densitizada cuya actuación es mucho más sencilla que la del original. El nuevo operador aproximado se factoriza en el producto tensorial de dos operadores, uno que actúa únicamente sobre la variable de volumen y otro que actúa solo sobre la variable de anisotropía. El nuevo operador de anisotropía es un operador de derivada discretizada bien definido en redes equiespaciadas contenidas en el sector de superselección de la variable de anisotropía. Esto ha permitido el estudio espectral de este nuevo operador, demostrando que

es un operador autoadjunto con un espectro real acotado, absolutamente continuo y doblemente degenerado.

2. Se ha mostrado también que las contribuciones asociadas a la regularización del operador inverso de tríada pueden ser despreciadas restringiendo el estudio a autoestados del operador geométrico de FRW con autovalores suficientemente grandes.
3. Se ha corroborado la validez de estas aproximaciones a partir de la comparación numérica de los elementos de matriz de los operadores originales con los de los operadores aproximados deducidos mediante técnicas analíticas.
4. Gracias a la introducción del operador de anisotropía aproximado, se ha construido una familia de estados cuyos perfiles en la etiqueta de anisotropía son tales que se puede despreciar tanto el término de anisotropía como el término de autointeracción del operador de ligadura hamiltoniana densitizada. Así se ha alcanzado un operador ligadura aproximado que es resoluble y que corresponde al de un modelo de FRW con un campo escalar homogéneo y la contribución libre de ambos tipos de homogeneidades.
5. Se han construido las soluciones físicas para este nuevo operador de ligadura aproximado las cuales, restringiendo los perfiles de anisotropía a los mencionados anteriormente y suponiendo un contenido razonable de inhomogeneidades, proporcionan soluciones aproximadas para el modelo de Gowdy con simetría rotacional local en la región de autovalores grandes para el operador geométrico de FRW. Éstas soluciones aproximadas corresponden a las situaciones físicamente relevantes de espaciotiempos de FRW con efectos de anisotropía pequeños y bajo contenido en inhomogeneidades.

Apéndices

Apéndice A

Caracterización de estructuras complejas invariantes: modos complejos

En este apéndice se va a estudiar la caracterización de las estructuras complejas invariantes bajo el grupo de simetrías del tres-toro, haciendo uso de la descomposición del campo en términos de autofunciones complejas dada en la expresión (3.4). Obviamente, el resultado final será equivalente al obtenido utilizando la descomposición en modos reales presentada en la sección 3.3.1. No obstante esta deducción puede resultar útil para clarificar ciertos aspectos del papel desempeñado por las representaciones irreducibles del grupo de simetría cuando éstas son complejas.

A partir de la acción sobre el campo (en su descomposición compleja) de las transformaciones $T_{\vec{\alpha}}$ definidas en (3.3) se obtiene que la transformación activa sobre los coeficientes de los modos complejos está dada por

$$q'_{\vec{m}} = e^{-i\vec{m}\cdot\vec{\alpha}} q_{\vec{m}}, \quad p'_{\vec{m}} = e^{-i\vec{m}\cdot\vec{\alpha}} p_{\vec{m}}. \quad (\text{A.1})$$

Así pues, toda transformación $T_{\vec{\alpha}}$ actúa, tanto para los modos de configuración $\{q_{\vec{m}}\}$, como para los modos del momento $\{p_{\vec{m}}\}$, como el producto de tres copias de $U(1)$, una para cada dirección. De hecho, para cada etiqueta \vec{m} , se obtiene una representación irreducible diferente de este grupo. En este punto, se puede hacer uso del lema de Schur [158], obteniendo así que toda aplicación en el espacio de fases invariante bajo el grupo de simetría ha de ser diagonal por bloques en la base de modos complejos $\{(q_{\vec{m}}, p_{\vec{m}})\}$, con bloques 2×2 dados por matrices complejas arbitrarias. No obstante, dado que la estructura compleja J es una aplicación en el espacio de fases real, ésta tiene que preservar las condiciones de realidad de

APÉNDICE A. ESTRUCTURAS COMPLEJAS INVARIANTES: MODOS COMPLEJOS

los modos. Por lo tanto, los bloques $J_{\vec{m}}$ y $J_{-\vec{m}}$ han de estar relacionados por conjugación compleja. Entonces, reordenando la base de modos complejos de la forma $\{(\mathfrak{q}_{\vec{m}}, \mathfrak{q}_{-\vec{m}}, \mathfrak{p}_{-\vec{m}}, \mathfrak{p}_{\vec{m}})\}$ (donde ahora \vec{m} tiene como mucho una componente negativa), se concluye que cada bloque 4×4 de J debe de tener la forma

$$J_{\vec{m}} = \begin{pmatrix} J_{\vec{m}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{q}} & J_{\vec{m}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} \\ J_{\vec{m}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} & J_{\vec{m}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \end{pmatrix}, \quad J_{\vec{m}}^{\mathfrak{r}\mathfrak{s}} = \begin{pmatrix} \gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{r}\mathfrak{s}} & 0 \\ 0 & (\gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{r}\mathfrak{s}})^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

donde los superíndices $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ representan los cuatro posibles sub-bloques ($\mathfrak{q}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ o $\mathfrak{p}\mathfrak{p}$), mientras que $\gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{r}\mathfrak{s}}$ son números complejos.

Todavía quedan por imponer las condiciones sobre J que aseguren que es una estructura compleja compatible con la estructura simpléctica. Primero se requerirá que $J_{\vec{m}}^T \Omega_{\vec{m}}$ sea una matriz hermítica definida positiva, donde $\Omega_{\vec{m}}$ son los bloques de la estructura simpléctica que toman la misma forma que los proporcionados en la expresión (3.13). De esta condición se sigue que las matrices $J_{\vec{m}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ y $-J_{\vec{m}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}$ deben ser matrices definidas positivas y que $J_{\vec{m}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{q}} = (J_{\vec{m}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{p}})^*$. Por lo tanto, $\gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} = d_{\vec{m}}^{(1)}$ y $\gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} = d_{\vec{m}}^{(2)}$ han de ser números positivos, mientras que $\gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{q}} = (\gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{p}})^*$. Además, las condiciones $J_{\vec{m}}^T \Omega_{\vec{m}} J_{\vec{m}}$ (para que J sea un simplectomorfismo) y $J_{\vec{m}}^2 = -\mathbf{I}_{4 \times 4}$ (para que J^2 sea menos la identidad) implican que $\gamma_{\vec{m}}^{\mathfrak{q}\mathfrak{q}} = \pm \sqrt{d_{\vec{m}}^{(1)} d_{\vec{m}}^{(2)}} - 1$. En conclusión, toda estructura compleja invariante J es diagonal por bloques, con bloques 4×4 en la base $\{(\mathfrak{q}_{\vec{m}}, \mathfrak{q}_{-\vec{m}}, \mathfrak{p}_{-\vec{m}}, \mathfrak{p}_{\vec{m}})\}$, que toman la forma

$$J_{\vec{m}} = \begin{pmatrix} \pm d_{\vec{m}}^{(3)} \mathbf{I}_{2 \times 2} & -d_{\vec{m}}^{(2)} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ d_{\vec{m}}^{(1)} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mp d_{\vec{m}}^{(3)} \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde los números $d_{\vec{m}}$ son números positivos que satisfacen $d_{\vec{m}}^{(3)} = \sqrt{d_{\vec{m}}^{(1)} d_{\vec{m}}^{(2)}} - 1$ y $d_{\vec{m}}^{(1)} d_{\vec{m}}^{(2)} \geq 1$.

Por supuesto, las dos formas de caracterizar las estructuras complejas invariantes—a saber, la presentada en la sección 3.3.1 usando la descomposición en modos reales y la presentada en este apéndice a través de la descomposición en modos complejos—son equivalentes. La relación entre ambas está dada por un cambio de base en el espacio de fases, que pasa de los modos reales a los complejos:

$$q_{\vec{n}_j} = \frac{1}{2^{3/2}} (\mathfrak{q}_{\vec{m}} + \mathfrak{q}_{-\vec{m}})|_{\vec{m}=\vec{n}_j}, \quad x_{\vec{n}_j} = \frac{i}{2^{3/2}} (\mathfrak{q}_{\vec{m}} - \mathfrak{q}_{-\vec{m}})|_{\vec{m}=\vec{n}_j}, \quad (\text{A.4})$$

junto con un cambio similar entre los modos del momento reales $\{(p_{\vec{n}_j}, y_{\vec{n}_j})\}$ y los complejos $\{(\mathfrak{p}_{\vec{m}}, \mathfrak{p}_{-\vec{m}})\}$. De esta forma es inmediato comprobar que $c_{\vec{n}_j}^{(i)} = d_{\vec{m}}^{(i)}$ para $i = 1, 2, 3$, donde el conjunto de números positivos $\{c_{\vec{n}_j}^{(i)}\}$ es el que caracteriza las estructuras complejas invariantes en la base de modos reales.

Apéndice B

Transformaciones no locales en perturbaciones cosmológicas

En este apéndice se mostrará de forma resumida la aplicación de las transformaciones canónicas dependientes del tiempo y del modo en el análisis de perturbaciones escalares en cosmología [112]. El sistema cosmológico que se analizará está dado por un espaciotiempo de FRW con secciones espaciales cerradas que tienen la topología de la tres-esfera. El contenido material está proporcionado por un campo escalar mínimamente acoplado con una masa $\tilde{m} = m\sqrt{3\pi/2G}$. Comenzando desde una situación homogénea, se pueden considerar las perturbaciones alrededor de las soluciones de FRW [159], restringiendo el estudio, por conveniencia, únicamente a las perturbaciones escalares [112]. Esta restricción es posible debido a que las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales están desacopladas en la evolución en el orden perturbativo dominante en el que se trunca el sistema [159]. La expansión de las perturbaciones en modos se realiza utilizando los armónicos hiperesféricos, los cuales son autofunciones del operador de Laplace–Beltrami en la tres-esfera. Los grados de libertad no físicos pueden eliminarse tomando una fijación de gauge adecuada, como, por ejemplo, el gauge longitudinal. Después de esta fijación de gauge, el sector de soluciones homogéneo puede describirse mediante dos pares canónicos, por ejemplo, los pares (α, π_α) y $(\bar{\varphi}, \pi_{\bar{\varphi}})$ usados en la referencia [112], donde α está relacionado con el logaritmo del factor de escala de FRW y $\bar{\varphi}$ es esencialmente el modo homogéneo del campo escalar material. Por otra parte, las perturbaciones escalares pueden describirse, después de la fijación de gauge, por un conjunto de pares de variables de configuración y momento, $(h_{n,\vec{\ell}}, \pi_{n\vec{\ell}})$, obtenidos a partir de la descomposición en modos del campo escalar y su momento después de un escalado conveniente mediante el factor de escala de FRW (véase, por ejemplo, las referencias [78,159]). El subíndice n es un entero positivo tal que $n > 1$ y etiqueta

los autoespacios del operador de Laplace–Beltrami en la tres-esfera que contribuyen con grados de libertad físicos inhomogéneos a las perturbaciones, con el autovalor correspondiente dado (después de un cambio de signo) por $\omega_n^2 = n(n+2)$. El índice de degeneración $\vec{\ell}$, por otra parte, representa los enteros (ℓ, m) que designan cada uno de los diferentes armónicos hiperesféricos con un mismo valor de n . Sus rangos son $0 \leq \ell \leq n$ y $-\ell \leq m \leq \ell$. Las ecuaciones del movimiento que satisfacen los modos inhomogéneos en el gauge longitudinal tienen la forma

$$\ddot{h}_n + r_n(t)\dot{h}_n + \left[\omega_n^2 + s_n(t) \right] h_n = 0. \quad (\text{B.1})$$

Se ha omitido la etiqueta de degeneración debido a que la evolución dinámica es independiente de ésta. El punto representa la derivada temporal con respecto al tiempo conforme, aquí denotado como t . Las funciones $r_n(t)$ y $s_n(t)$ dependen del tiempo y de los modos:

$$r_n(t) = 2\tilde{A}_n\tilde{g}_n^2, \quad s_n(t) = \tilde{s}(t) + \mathcal{O}(\omega_n^{-2}), \quad (\text{B.2})$$

donde $\tilde{s}(t)$ es una función que únicamente depende del tiempo, mientras que \tilde{A}_n y \tilde{g}_n^2 dependen también del modo considerado

$$\tilde{A}_n = \frac{3}{\omega_n^2 - 3} e^{-6\alpha} \pi_{\bar{\varphi}} (2\pi_\alpha \pi_{\bar{\varphi}} - e^{6\alpha} m^2 \bar{\varphi}), \quad \tilde{g}_n^2 = \left[1 - \frac{3}{\omega_n^2 - 3} e^{-4\alpha} \pi_{\bar{\varphi}}^2 \right]^{-1}. \quad (\text{B.3})$$

Es inmediato ver que $\tilde{A}_n = \mathcal{O}(\omega_n^{-2})$ y que $\tilde{g}_n^2 = 1 + \mathcal{O}(\omega_n^{-2})$. Por lo tanto, se tiene que la función $r_n(t)$ es de orden asintótico $\mathcal{O}(\omega_n^{-2})$. Por otra parte, las variables de momento satisfacen la relación $\pi_n = \dot{h}_n + \mathcal{O}(\omega_n^{-2})$. En la referencia [112] se demuestra que el criterio de imponer invariancia bajo las simetrías espaciales y una evolución unitaria selecciona, incluso para este caso donde se tienen unas ecuaciones de Klein–Gordon modificadas con términos subdominantes de la forma indicada arriba, una única cuantización de Fock. Este resultado se obtiene incluso para modificaciones subdominantes más generales como, por ejemplo, para correcciones de la función de masa de orden $\mathcal{O}(\omega_n^{-1})$, que son las que se han considerado en el capítulo 5. La representación de Fock seleccionada por este criterio pertenece a la clase de equivalencia unitaria determinada por la estructura compleja J_0 asociada de forma natural a un campo escalar libre sin masa. Es también posible obtener una descripción alternativa sin término subdominante de amortiguamiento considerando una transformación dependiente del modo que elimina la contribución de $r_n(t)$. Esta transformación está dada por

$$\bar{h}_n = \tilde{g}_n h_n, \quad \bar{\pi}_n = \frac{1}{\tilde{g}_n} \pi_n + (\tilde{g}_n A_n + \dot{\tilde{g}}_n) h_n, \quad (\text{B.4})$$

donde, al igual que antes, se ha omitido el subíndice de degeneración para las variables canónicas, debido a que la transformación es independiente de éste. Tras esta transformación, el nuevo conjunto de variables canónicas $(\bar{h}_n, \bar{\pi}_n)$ satisface unas ecuaciones del movimiento como las dadas en la expresión (B.1), donde $s_n(t)$ toma la misma forma, salvo correcciones del orden ω_n^{-2} , mientras que $r_n(t) = 0$. Además, se ha incluido una contribución de los modos de configuración en la definición de los nuevos modos del momento, de forma que se cumple la ecuación de Hamilton $\bar{\pi}_n = \dot{\bar{h}}_n$. Por tanto, las ecuaciones dinámicas para esta nueva descripción de campo están completamente adaptadas a las consideradas a lo largo del capítulo 5.

De forma alternativa, para el estudio de perturbaciones cosmológicas, es habitual usar cantidades invariantes de gauge para describir el sistema. Un par canónico de cantidades escalares invariantes de gauge puede construirse a partir de las variables originales (h_n, π_n) a través de una transformación canónica lineal dependiente del tiempo, que depende también del modo considerado pero sin mezclarlos:

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - 3}}(\pi_n + \chi h_n), \quad \Pi_n = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - 3}} \left[\chi \pi_n + (\chi^2 - \omega_n^2 + 3)h_n \right]. \quad (\text{B.5})$$

Aquí también se ha obviado el subíndice de degeneración, dado que la transformación no tiene dependencia en el mismo. La función χ depende del tiempo y está definida en términos de las variables del fondo. Es independiente del modo considerado y se relaciona con \tilde{A}_n y \tilde{g}_n a través de la identidad

$$\chi = \frac{e^{-2\alpha}}{\pi_{\bar{\varphi}}} (2\pi_\alpha \pi_{\bar{\varphi}} - e^{6\alpha} m^2 \bar{\varphi}) = \frac{\tilde{A}_n \tilde{g}_n^2}{1 - \tilde{g}_n^2}. \quad (\text{B.6})$$

Estos nuevos pares canónicos de cantidades invariantes de gauge son combinaciones lineales (dependientes de funciones del fondo; véase [112] para más detalles) de los potenciales de Bardeen (también invariantes de gauge) que proporcionan la densidad de energía y la velocidad de las perturbaciones materiales [113]. Las ecuaciones del movimiento que satisfacen son

$$\ddot{\Psi}_n + \left[\omega_n^2 + s(t) \right] \Psi_n = 0, \quad (\text{B.7})$$

y $\Pi_n = \dot{\Psi}_n$, hasta el orden perturbativo al que la teoría ha sido truncada. Estas ecuaciones del movimiento tienen precisamente la forma considerada en el capítulo 5 para la descripción original de campo. Combinando las transformaciones canónicas introducidas a lo largo de este apéndice, se obtiene de manera sencilla la transformación dependiente del tiempo y del modo que relaciona las cantidades invariantes gauge (Ψ_n, Π_n) con las variables $(\bar{h}_n, \bar{\pi}_n)$, para todos los valores de n . Esta

transformación es

$$\bar{h}_n = \frac{\tilde{g}_n}{\sqrt{\omega_n^2 - 3}}(-\Pi_n + \chi\Psi_n), \quad (\text{B.8})$$

$$\bar{\pi}_n = \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - 3}}(\chi\tilde{g}_n + \dot{\tilde{g}}_n)\Pi_n + \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 - 3}}\left(\frac{\omega_n^2 - 3}{\tilde{g}_n} - \chi^2\tilde{g}_n - \chi\dot{\tilde{g}}_n\right)\Psi_n. \quad (\text{B.9})$$

Teniendo en cuenta la expresión (B.6), y en particular que la función χ es una función dependiente del tiempo pero independiente de los modos, se puede comprobar que las funciones $f_n(t)$ y $g_n(t)$ que caracterizan las transformaciones canónicas (dependientes del tiempo y de los modos) consideradas a lo largo del capítulo 5 vienen dadas por

$$f_n(t) = -g_n(t)\chi = -\frac{\tilde{g}_n}{\tilde{\omega}_n} \sim -\frac{1}{\tilde{\omega}_n} - \frac{3}{2\tilde{\omega}_n^3}e^{-4\alpha}\pi_{\tilde{\varphi}}^2 + \mathcal{O}(\tilde{\omega}_n^{-5}). \quad (\text{B.10})$$

Aquí, se ha redefinido $\tilde{\omega}_n^2 = \omega_n^2 - 3$. Recordando la caracterización realizada en la sección 5.3.3, se puede comprobar que esta transformación pertenece al tipo descrito en la expresión (5.25), donde los coeficientes de la combinación lineal que proporcionan los nuevos modos de configuración se anulan en el régimen ultravioleta. Por otra parte, los coeficientes de la combinación lineal que definen los nuevos modos del momento, $A_n(t)$ y $B_n(t)$, adoptan la forma:

$$A_n(t) = \frac{1}{\tilde{\omega}_n}(\chi\tilde{g}_n + \dot{\tilde{g}}_n) \sim \frac{\chi}{\tilde{\omega}_n} + \mathcal{O}(\tilde{\omega}_n^{-3}) \quad (\text{B.11})$$

$$B_n(t) = \frac{1}{\tilde{\omega}_n}\left(-\frac{\tilde{\omega}_n^2}{\tilde{g}_n} + \chi^2\tilde{g}_n + \chi\dot{\tilde{g}}_n\right) \sim -\tilde{\omega}_n + \mathcal{O}(\tilde{\omega}_n^{-1}). \quad (\text{B.12})$$

Así pues, los nuevos modos del momento explotan en el régimen ultravioleta, dado que el coeficiente $B_n(t)$ lo hace. Como corolario, esta transformación admite una implementación unitaria en la representación de Fock determinada por J_0 para la descripción a partir de las cantidades invariantes de gauge, y, por lo tanto, esta cuantización es unitariamente equivalente a la obtenida a partir de las variables del gauge longitudinal.

Apéndice C

Deducción analítica de aproximaciones para el modelo de Gowdy

En este apéndice se mostrará la deducción analítica de los operadores aproximados introducidos en la secciones 7.2.3 y 7.2.4. Para ello se hará uso del comportamiento de los autoestados $|e_\rho\rangle$ (con autovalor generalizado ρ^2) del operador gravitatorio de FRW, $\hat{\Omega}^2$, el cual se ha estudiado detalladamente en la sección 7.2.2. En particular, se hará uso principalmente de que $e_\rho(v) = \langle v|e_\rho\rangle$ son funciones exponencialmente suprimidas para $v < \tilde{v}(\rho) = \rho/(2\kappa)$. También se usará que estos autoestados toman un límite WDW bien definido para $v \gg \tilde{v}(\rho)$, suponiéndose que estas funciones pueden ser aproximadas de forma satisfactoria por la expresión analítica $\tilde{e}_\rho(v)$ dada en (7.13), es decir

$$e_\rho(v) \simeq \tilde{e}_\rho(v) = \begin{cases} 0 & \text{para } v < \tilde{v}(\rho), \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\kappa v}} \cos\left(\frac{\rho}{4\kappa} \log v + \phi_\rho^\epsilon\right) & \text{para } v \geq \tilde{v}(\rho). \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Primeramente se considerará la aproximación relativa a las contribuciones del operador regularizado del inverso de tríada, es decir, la aproximación $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D} \approx \hat{\Omega}^2$. Para ello se calculará la actuación $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}|e_\rho\rangle$. Haciendo uso de las expresiones de los operadores involucrados se tiene que esta actuación está dada por

$$\begin{aligned} \hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}|e_\rho\rangle &= \kappa^2 \int_{\mathbb{R}^+} d\rho' |e_{\rho'}\rangle \sum_{v \in \mathcal{L}_v} \left[(x_0^+(v) + x_0^-(v)) D^2(v) e_{\rho'}(v) e_\rho(v) \right. \\ &\quad \left. - x_4^+(v) D(v) D(v+4) \left(e_{\rho'}(v+4) e_\rho(v) + e_{\rho'}(v) e_\rho(v+4) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Los coeficientes $D(v)D(v+4)$ y $D^2(v)$ satisfacen las siguientes expresiones asintóticas para $v \gg 1$:

$$D(v)D(v+4) \approx 1 + \frac{1}{2v^2} + \mathcal{O}(v^{-3}), \quad D^2(v) \approx 1 + \frac{1}{2v^2} + \mathcal{O}(v^{-4}). \quad (\text{C.3})$$

Si se considera únicamente la primera contribución de éstas en la expresión (C.2), el resultado sería (por definición) $\hat{\Omega}^2|e_\rho\rangle = \rho^2|e_\rho\rangle$. Por lo tanto, se puede escribir $\hat{D}\hat{\Omega}^2\hat{D}|e_\rho\rangle = \rho^2|e_\rho\rangle + |\tilde{\Psi}\rangle$. Ahora se calculará la contribución $|\tilde{\Psi}\rangle$ estudiándose cuándo ésta es despreciable con respecto al término $\rho^2|e_\rho\rangle$. Para ello, la expresión que se tiene que calcular es la proporcionada en (C.2), donde los coeficientes $D^2(v)$ y $D(v)D(v+4)$ han sido reemplazados respectivamente por $[D^2(v) - 1]$ y $[D(v)D(v+4) - 1]$. Para realizar este cálculo se supondrá que se puede utilizar la sustitución $e_\rho(v) \rightarrow \tilde{e}_\rho(v)$. De esta forma, la suma realizada sobre $v \in \mathcal{L}_\epsilon$ pasará a ser sobre

$$v \in \mathcal{L}'_\epsilon = \mathcal{L}_\epsilon \setminus \{v; v < \tilde{v}_m = \tilde{v}(\rho_M)\}, \quad \text{donde } \rho_M = \max\{\rho', \rho\}. \quad (\text{C.4})$$

Además, considerando autoestados con $\rho \gg 8\kappa$, está justificado por una parte el uso de las expresiones asintóticas dadas en (C.3), mientras que, por otra parte, dada la forma analítica de $\tilde{e}_\rho(v)$, la suma discreta en v puede reemplazarse por una integral de la forma

$$\sum_{v \in \mathcal{L}'_\epsilon} \rightarrow \frac{1}{4} \int_{\tilde{v}_m}^{\infty} dv. \quad (\text{C.5})$$

Tras un largo cálculo, se tiene entonces que el estado $|\tilde{\Psi}\rangle$ puede aproximarse por la expresión

$$|\tilde{\Psi}\rangle \approx \int_{\mathbb{R}^+} d\rho' |e_{\rho'}\rangle \rho' \rho \int_0^\infty dx \frac{e^{-16\pi\kappa x}}{\tilde{v}_m(\tilde{v}_m + 4)} \left\{ \cos [2\pi(\rho' - \rho)x + \Gamma^-] - \cos [2\pi(\rho' + \rho)x + \Gamma^+] \right\} + \mathcal{O}(e^{-32\pi\kappa x}), \quad (\text{C.6})$$

donde se ha definido

$$x = \frac{1}{16\pi\kappa} \{ \log[v(v+4)] - \log[\tilde{v}_m(\tilde{v}_m + 4)] \}, \quad (\text{C.7})$$

$$\Gamma^\pm = \frac{\rho' \pm \rho}{8\kappa} \log[\tilde{v}_m(\tilde{v}_m + 4)] + \phi_{\rho'}^\epsilon \pm \phi_\rho^\epsilon. \quad (\text{C.8})$$

De esta forma, despreciando las contribuciones subdominantes de orden $\mathcal{O}(e^{-32\pi\kappa x})$ e integrando, se tiene que

$$|\tilde{\Psi}\rangle \approx \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^+} d\rho' |e_{\rho'}\rangle \frac{\rho' \rho}{\rho_M(\rho_M + 8\kappa)} \left[\frac{\cos \Gamma^-}{1 + \left(\frac{\rho' - \rho}{8\kappa}\right)^2} - \frac{\cos \Gamma^+}{1 + \left(\frac{\rho' + \rho}{8\kappa}\right)^2} \right]. \quad (\text{C.9})$$

se tiene que la actuación puede aproximarse por

$$4\kappa^2 \int_{\mathbb{R}^+} d\rho' |e_{\rho'}\rangle \sum_{v \in \mathcal{L}'_e} y_+(v) \left[e_{\rho'}(v+4)e_\rho(v) - e_{\rho'}(v)e_\rho(v+4) \right] \partial_\Lambda f(\Lambda'). \quad (\text{C.15})$$

con $y_+(v) = \sqrt{v(v+4)}$. Consecuentemente, cuando $f(\Lambda)$ es una función suficientemente suave y se consideran autoestados $|e_\rho\rangle$ con $\rho \gg 8\kappa$, se concluye que se puede realizar la siguiente aproximación

$$\langle \Lambda' | (\hat{\Omega}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\hat{\Omega}) \sum_{\Lambda} f(\Lambda) |e_\rho\rangle \otimes |\Lambda\rangle \approx -i8\kappa \partial_\Lambda f(\Lambda') \hat{\Omega}' |e_\rho\rangle, \quad (\text{C.16})$$

donde el operador $\hat{\Omega}'$ únicamente actúa sobre la etiqueta v :

$$\hat{\Omega}' |v\rangle = -i\frac{\kappa}{2} [y_-(v)|v-4\rangle - y_+(v)|v+4\rangle], \quad (\text{C.17})$$

con $y_-(v) = [\text{sgn}(v) + \text{sgn}(v-4)]\sqrt{v(v-4)}/2$.

Publicaciones

La investigación presentada en esta tesis ha dado lugar a las siguientes publicaciones:

- M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Matter in inhomogeneous loop quantum cosmology: The Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **83**, 084050 (2011).
- D. Martín-de Blas, M. Martín-Benito y G. A. Mena Marugán, *Inclusion of matter in inhomogeneous quantum cosmology*, AIP Conf. Proc. **1458**, 467 (2011).
- D. Martín-de Blas, M. Martín-Benito y G. A. Mena Marugán, *Inhomogeneous loop quantum cosmology with matter*, J. Phys. Conf. Ser. **360**, 012032 (2012).
- L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields in spatially flat cosmological spacetimes*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **11**, 001 (2012).
- J. Cortez, L. Fonseca, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields under mode preserving canonical transformations varying in time*, Phys. Rev. D **87**, 044013 (2013).
- G. A. Mena Marugán, D. Martín-de Blas y L. Castelló Gomar, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock quantization in flat cosmologies*, J. Phys. Conf. Ser. **410**, 012151 (2013).
- J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Massless scalar field in de Sitter: Unitary quantum time evolution*, Class. Quantum Grav. **30**, 075015 (2013).
- L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock quantization in flat cosmologies with compact spatial sections*, enviado a publicar en el número especial de la conferencia IC-MSQUARE, preprint arXiv:1212.5677 (2012).

PUBLICACIONES

- M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Approximation methods in Loop Quantum Cosmology: From Gowdy cosmologies to inhomogeneous models in Friedmann-Robertson-Walker geometries*, se enviará próximamente a Phys. Rev. D.

Summary

Introduction

The theory of General Relativity, since its formulation by Albert Einstein almost one century ago, has been used to explain the gravitational interaction in a highly satisfactory way. Currently, there is no experimental evidence against the validity of this theory and, in fact, it has been corroborated by the most recent experiments specifically designed to test it. General Relativity explains the gravitational interaction in a geometrical way. The spacetime where we live, and where matter fields propagate, is a dynamical entity which is curved by the presence of matter and energy. In turn, the spacetime tells matter and energy how to propagate on it, namely, following the spacetime *geodesics* in free falling. The way how the fields modify the spacetime, and how the latter affects the propagation of the particles, is given by the renowned Einstein equations. However, a series of problems which are present in the theory of General Relativity suggest that it is not a fundamental theory, but rather an effective theory coming from a fundamental one. On the one hand, there exist a clear tension between this classical theory and the quantum theories that describe matter and the rest of interactions. As already mentioned, Einstein's equations explain in a classical level how the spacetime is curved by the contained matter. However, this matter content is described by a quantum field theory while spacetime is described classically. This inconsistency, even though there have been attempts to overcome it by other methods, suggests that a quantum theory for General Relativity is needed. On the other hand, General Relativity ensures the existence of *singularities*, where the theory goes beyond of its range of validity, a fact that exhibits its own incompleteness. Singularities are regions of the spacetime where the curvature or other physical quantities diverge. The existence of such singularities in General Relativity is stated by the Singularity Theorems developed mainly by Hawking and Penrose [1]. Nevertheless, the spacetime regions where the singularities occur are precisely those in which quantum effects must be important. Therefore, it is reasonable to expect that singularities should disappear when

considering a quantum theory of gravity.

At present, Loop Quantum Gravity [2–5] is one of the most promising candidates to attain a complete quantum description of gravity. Loop Quantum Gravity is a non-perturbative theory—namely, it does not start from a linearizations of the classical theory with successive corrections—and it is also independent of background structures [5]. Its final goal is to reach a quantum theory of *Einsteinian gravity* in four dimensions. Therefore, in this quantum theory, gravitation is still regarded in a geometrical shape. Consequently, geometrical quantities as area or volume are described in a quantum way. Canonical Loop Quantum Gravity follows Dirac’s quantization program for constrained systems [6]. General Relativity, in its Hamiltonian formulation, is a completely constrained system, namely, the Hamiltonian density is a linear combination of constraints [7]. The set of these constraints is given by three momentum constraints, that generate the spatial diffeomorphisms transformations, and the Hamiltonian constraint, that essentially generates time reparametrizations *on shell*. The quantization of the system is performed by constructing a representation of the algebra associated with the initial classical variables. Such initial variables are represented by operators on a kinematical Hilbert space [8]. In this first step, the existence of the constraints is ignored. Then, one constructs operators representing the classical constraints in the quantum theory. It is worth noting that, in general, the construction of such constraint operators is not unique but one has some freedom (or ambiguity) in the choice of different factor orderings. According to Dirac’s quantization program, the *physical states* of the quantum theory are those that are annihilated by all the constraint operators. Finally, the space given by such physical states generally has to be provided with an inner product and completed to a Hilbert space.

The starting point of canonical Loop Quantum Gravity is the Hamiltonian formulation of General Relativity in terms of the Ashtekar–Barbero variables [9]. These variables are given by a densitized triad, from which the spatial metric is constructed, and a gauge *connection*. The formulation of General Relativity in these variables is analogous to the formulation of classical electrodynamics in terms of the electric field and the vector potential. The consideration of these variables, instead of the more habitual ones provided by the components of the spatial metric (and their conjugate momenta), considerably simplifies the expressions of (most of) the constraints. On the other hand, a new set of constraints is included in the theory, the so-called Gauss constraints. The elementary variables for the quantization in Loop Quantum Gravity are given by *holonomies* of the connection along paths, or more specifically by functions of these holonomies (cylindrical functions), and by fluxes of the densitized triad through surfaces.

Loop quantum gravity has meant a great progress toward the completion of a quantum theory of Einsteinian gravity, achieving e.g. the construction of well defined geometrical operators or a unique quantum representation. Nonetheless, the quantization program has not been completed mainly because the imposition of the Hamiltonian constraint has not been accomplished satisfactorily yet, and therefore, the dynamics of the quantum theory has not been dealt with. Owing to this, the application of the Loop Quantum Gravity ideas and techniques to cosmological systems, field of research called Loop Quantum Cosmology [12–14], has received great attention during the last years. For these systems, after a classical symmetry reduction, the phase space has a finite dimension and only the Hamiltonian constraint remains to be imposed at the quantum level. The motivations to perform the study of such cosmological systems are mainly two. On the one hand, the analysis of the loop ideas and techniques in such simple models, in which the quantization procedure can be completed, can provide hints about how to proceed to complete the general quantum theory. On the other hand, although it is known that Loop Quantum Cosmology does not fully correspond to the symmetry reduction of Loop Quantum Gravity, the hope is that it captures the most important effects of the loop quantum geometry, and hence allows the discussion of its physical consequences in systems that describe scenarios of great interest in physics, like those that model the Universe where we live. In fact, the study of the physical consequences of Loop Quantum Cosmology is one of the most promising roads for the confrontation of the predictions of quantum theories of gravity with observations.

The pioneering works on Loop Quantum Cosmology are due Bojowald [15–18], who studied the first attempts to adapt the ideas and techniques of Loop Quantum Gravity to the most simple homogeneous systems. More specifically, he mainly focused his discussion on the homogeneous and isotropic model with flat spatial sections, namely, on the flat Friedmann–Robertson–Walker model. Afterwards, the mathematical and kinematical aspects of the theory were analyzed in more detail for this model, showing the possibility to resolve the initial cosmological singularity [19]. Finally, it was possible to complete the quantization procedure for the flat Friedmann–Robertson–Walker model with a minimally coupled homogeneous massless scalar field [20, 21]. The physical Hilbert space of the model was completely characterized and a complete set of physical observables was constructed. This allowed the analysis of the dynamical evolution of quantum states by using the homogeneous massless scalar field as a relational time. However, it was necessary to modify the quantization procedure by including an *improved dynamics* prescription with the aim at guaranteeing that the quantum effects were relevant only at Planck scales [22]. The discussion of the quantum dynamics for semiclassical states sho-

wed a new phenomenology for such Planck densities. The Big Bang cosmological singularity was resolved dynamically by a quantum Big Bounce. This Big Bounce mechanism connected in a deterministic way two branches of the Universe, a contracting one and an expanding one, which rapidly recovered the classical trajectory before/after the bounce [22].

In subsequent studies, the quantum bounce mechanism was discussed in more detail using slightly different quantization prescriptions, including simplifications and more suitable factor orderings [23,24]. Thus, the robustness and generality of the Big Bounce was shown for the flat Friedmann–Robertson–Walker model, occurring irrespectively of the considered physical state or of the specific geometry discretization [24]. Moreover, for the mentioned model, it was possible to study rigorously the trajectory followed by the peaks of certain class of semiclassical states. In this manner, the *effective dynamics* coming from Loop Quantum Cosmology was deduced [25].

Many homogeneous and isotropic models have been satisfactorily quantized by using the Loop Quantum Cosmology Techniques. These models include cosmologies with positive curvature (closed universes) [26,27], and with negative curvature (open universes) [28,29], as well as the consideration of a non-vanishing cosmological constant [30,31]. The quantization of more general models, that include anisotropies, has been completed as well, e.g. the spatially flat Bianchi I model [32,33] or the Bianchi II [34] and Bianchi IX [35] models, whose spatial sections are curved. However, owing to the complexity of such anisotropic models, increased by the consideration of a suitable improved dynamics prescription for them, it has not been possible to discuss yet such systems with the same level of detail as in the case of the isotropic ones. Nonetheless, it has been shown that the singularity can be removed from the quantum theory at a kinematical level. Additionally, the study of the effective dynamics for such systems has shown the dynamical resolution of the singularities [36].

Given the great success of the Loop Quantum Cosmology techniques in the quantization of homogeneous models, and in particular for the resolution of cosmological singularities, the extension of its application to more general cosmological systems has been considered, studying models that contain inhomogeneities. With this aim, cosmological *midisuperspaces*, which are symmetry reduced systems with fields that describe inhomogeneities, have been discussed. The motivations to study these systems in the framework of Loop Quantum Cosmology are several. First, they contain an infinite number of degrees of freedom (as the complete theory) and, therefore, it is expected that the analysis of such systems can show

how to complete the quantization program in the general theory. On the other hand, this kind of models can describe situations closer to realistic scenarios and, consequently, its consideration can lead to physical predictions that can be confronted with observations, being possible to check in this way if the loop quantization is a suitable theory to describe reality. Finally, the analysis of these systems allows the discussion of the robustness of the singularity resolution mechanisms obtained in homogeneous situations.

With the aim at studying inhomogeneous systems in the framework of Loop Quantum Cosmology, a hybrid quantization, that combines the loop quantization with the more standard Fock quantization, was developed [33, 37–39]. On the one hand, the quantization of the variables that parameterize the homogeneous solutions is performed by using the polymeric quantization of Loop Quantum Cosmology, including thus the most important effects of the loop quantum geometry. On the other hand, the Fock quantization for the (infinite) remaining degrees of freedom allows one to deal with the field complexity. The first model studied, and in which these hybrid techniques were developed, was the most simple of the Gowdy models in vacuum, i.e., the model with the three-torus topology and linear polarization. By using these hybrid methods, the model was completely quantized, obtaining a well defined quantum constraint operators. In addition, the analog states of the classical singularity were decoupled from the theory and a standard quantum field theory description was recovered for the gravitational waves. Nonetheless, it is worth mentioning that this model is unable to describe a fully realistic scenario, given that it does not contain homogeneous and isotropic Friedmann–Robertson–Walker-like solutions.

Considering this previous context, the main goal addressed in this thesis is the extension of the hybrid quantization techniques to more realistic cosmological models and the development (in part) of the necessary basis and tools that allow the extraction of reliable physical predictions from them. For these purposes, on the one hand, it is necessary to remove the ambiguities that exist in different steps of the quantization process and, in particular, in the choice of a particular Fock representation for the inhomogeneities. This ambiguous election leads to inequivalent quantum theories, affecting the reliability of the physical consequences derived from them. Concerning the hybrid quantization, the Fock quantization for the inhomogeneities can be uniquely selected appealing to suitable uniqueness criteria in the framework of quantum field theory in cosmological spacetimes. Owing to that, uniqueness criteria to select a sole Fock quantization for scalar fields propagating on non-stationary spacetimes are studied in this thesis. The application of these uniqueness criteria removes the ambiguities that arise in the quantization process.

It is worth noting that the range of applicability and the relevance of these studies are not limited exclusively to the context of the hybrid quantization, but extend also in quantum field theory in cosmological spacetimes, leading to robust physical predictions in quantum inhomogeneous cosmological systems.

Goals

As it has already been mentioned, the main goal of this thesis is to provide the necessary basis and tools to obtain reliable physical predictions for inhomogeneous cosmological models quantized by means of the hybrid methods in Loop Quantum Cosmology. With this purpose, we first discuss the applicability of uniqueness criteria to remove the ambiguities arising in the Fock quantization of fields that propagate in physically interesting cosmological spacetimes. Then, we study the extension of the hybrid techniques to models that are closer to realistic situations. With this aim, we add a massless matter field to the above mentioned Gowdy model. Finally, for this completely quantized model, we develop and analyze approximation methods that can be extended to more general models in the framework of the Loop Quantum Cosmology and the hybrid quantization, allowing in particular the extraction of approximate physical solutions.

More specifically, the first part of the thesis is devoted to the discussion of uniqueness results for the Fock quantization of scalar fields defined on cosmological spacetimes. First, we study the Fock quantization of a scalar field with a time dependent mass that propagates in a(n ultrastatic) spacetime with flat and compact spatial sections, with the topology of a three-torus. In particular, we discuss the applicability in these scenarios of the criterion to select a unique Fock representation consisting of two requirements: (i) the vacuum invariance under the spatial symmetries, and (ii) the unitary implementability of the evolution. We study as well whether or not this criterion selects a unique initial canonical field description among all those related by linear canonical transformations that include a scaling of the field and a redefinition of its momentum through time dependent functions.

Furthermore, we consider the Fock quantization for both massive and massless scalar fields propagating on de Sitter spacetimes. In particular, we discuss the possibility to construct a Fock representation with a unitarily implementable dynamics and with a vacuum that is invariant under the de Sitter spatial symmetries, i.e., the $O(4)$ symmetry group. Indeed, the uniqueness criterion mentioned above picks out a unique Fock representation and a unique canonical field description. Then, we study the relation between the unique vacuum selected by the criterion and other

vacua that are widely used in the literature, such as the Bunch–Davies vacuum for a massive scalar field and the Allen–Folacci vacua for the massless case. In addition, we discuss the unitary equivalence of the selected vacuum and zeroth-order adiabatic vacuum states.

We analyze as well a new ambiguity that naturally arises when scalar cosmological perturbations are considered in inflationary models. This ambiguity comes from the possibility to consider non-local and time dependent linear canonical transformations which relate descriptions of the system that admit a unitary implementation of the evolution. First, we study the most general form of these transformations supposing that they do not mix modes that are dynamically decoupled and admit an asymptotic expansion in the form of a Laurent series in the frequencies of the modes. To conclude this first part of the thesis, we discuss whether or not these non-local transformations are unitarily implementable in the corresponding Fock representations selected by the criterion of unitary evolution and invariance under the spatial symmetries.

In the second part of the thesis we face the extension of the hybrid quantization techniques to models that are closer to realistic situations, as well as the development and analysis of approximation methods to attain quantum predictions from these models. First, we study the hybrid quantization of the Gowdy model with the three-torus topology and linear polarization in presence of a minimally coupled massless scalar field satisfying the same symmetries as the geometry. We show that the matter inhomogeneities can be mathematically described in the very same way as the gravitational waves. Consequently, as happened to be the case for the vacuum model, the classical singularity is resolved at the kinematical level and the physical Hilbert space can be constructed from the space of initial data. Thus, we reach a complete quantization a model much closer to physical scenarios than the Gowdy models in vacuo, since the model with matter admits homogeneous and isotropic Friedmann–Robertson–Walker-like solutions and contains matter inhomogeneities. We analyze as well the quantum projection of this quantum Gowdy model (both in vacuo and with matter) to the Gowdy submodels with local rotational symmetry.

Then, considering this last quantum Gowdy model with matter, we discuss and develop approximate methods that allow us to construct approximate physical solutions of great interest, inasmuch as they correspond to solutions that describe Friedmann–Robertson–Walker spacetimes with small anisotropic contributions and low content of inhomogeneities. Using the spectral properties of the geometry operator (in Loop Quantum Cosmology) of the Friedmann–Robertson–Walker model,

as well as the behavior of its eigenstates, we discuss the possibility of approximating and replacing the operators in the Hamiltonian constraint with the most complicated actions with others with a simpler and more controllable effect. Moreover, we analyze the validity of these approximations making a numerical comparison between the corresponding matrix elements of the original operators and those that approximate them. Then, we discuss the construction of approximate solutions for the Gowdy model considering suitable anisotropic profiles that permit one to disregard both the anisotropy contribution and the autointeraction term for the inhomogeneities in the constraint.

Summarizing, in this thesis we study criteria to remove the ambiguities that appear in the Fock quantization of scalar inhomogeneities, with the aim at providing more robustness and reliability to the physical predictions extracted from inhomogeneous quantum cosmologies in the framework of quantum field theory and of the hybrid quantization in Loop Quantum Cosmology. Moreover, we extend the mentioned hybrid techniques to models that are closer to realistic scenarios and we develop approximation methods designed to obtain their physical consequences.

Conclusions

The main goal of this thesis is provide the basis and tools that allow one to extract robust and reliable physical predictions for realistic inhomogeneous quantum cosmologies, both in the context of quantum field theory and in the context of the Loop Quantum Gravity by means of the co-called hybrid quantization techniques. With this objective, we have proven the applicability of certain uniqueness criteria in order to remove the ambiguities that appear in the Fock quantization of scalar fields in non-stationary cosmological spacetimes. Moreover, we have demonstrated also the suitability of these criteria when non-local and time dependent canonical transformations are considered. Such transformations arise naturally in the study of cosmological perturbations in inflationary spacetimes. On the other hand, we have succeeded in extending the hybrid quantization techniques to study systems closer to realistic situations, which include matter inhomogeneities. Finally, we have developed well controlled approximate methods to construct quantum solutions that represent physically interesting situations.

Results

- We have analyzed the Fock quantization of a massless scalar field with a time dependent mass defined in ultrastatic spacetimes with three-torus spatial topology, i.e., with flat and compact spatial sections. In particular, we have discussed the suitability of the uniqueness criterion given by imposing two requirements to the Fock representation: (i) the invariance of its vacuum under the spatial symmetries, in this case the symmetries of the three-torus, and (ii) the unitary implementability of the evolution. We have shown that the imposition of these requirements removes the two main ambiguities that arise in the Fock quantization of scalar fields in cosmological spacetimes:
 1. The uniqueness criterion removes the ambiguity in the choice of a representation of the canonical commutation relations selecting a unique class of unitarily equivalent invariant Fock representations. This equivalence class is determined by the representation that is naturally associated with a free massless scalar field. In order to prove this result, it has been necessary to study in detail the characterization of the complex structures that are invariant under the symmetries of the three-torus, and the asymptotic behavior of the degeneracy of the Laplace–Beltrami operator.
 2. In addition, we have shown that the considered uniqueness criterion removes as well the ambiguity in the choice of an initial canonical field description, among all those related through time dependent linear canonical transformations. More specifically, we have studied transformations that include a field scaling and a redefinition of the momentum with a term proportional to the configuration field, both of them by means of time dependent functions. We have proven that the unitary implementability of the evolution is only possible for a unique, specific canonical pair. For this canonical pair, the configuration field satisfies a Klein–Gordon equation on a static (auxiliar) spacetime with a time dependent mass term. Moreover, the momentum field is defined by the time derivative of the configuration field, with respect to the time associated to such a static spacetime. Consequently, we have shown that the considered uniqueness criterion allows neither field scalings nor momentum redefinitions through time dependent functions.
- Furthermore, we have discussed the Fock quantization of both massive and massless scalar fields that propagate in de Sitter spacetime. In particular, we have studied whether or not it is possible to reach a Fock representation with

unitary implementable evolution. We have shown that, in order to obtain such a representation it is necessary to consider time dependent canonical transformations that include not only a field scaling, but also momentum redefinition. Then, we have constructed an $O(4)$ invariant Fock representation for which we have explicitly demonstrated that the evolution is unitary regardless of the value of the field mass. The uniqueness criterion mentioned in the previous point selects a unique Fock representation, up to unitary equivalence.

- Moreover, we have analyzed the equivalence of the vacuum selected by the uniqueness criterion of unitary evolution and $O(4)$ invariance with other vacua often considered in the literature. More specifically, we have proven that the selected vacuum is unitarily equivalent to the vacua picked out by the Hadamard criterion, i.e., the Bunch–Davies vacuum for a massive scalar field and the Allen–Folacci vacua for a massless scalar field. Hence, we have demonstrated that both criteria lead to compatible results in the Sitter spacetime. Besides, we have shown explicitly that our unique vacuum is unitarily equivalent as well to the zeroth-order adiabatic vacuum states, and therefore to the adiabatic states of all orders.
- We have then considered scalar fields propagating in non-stationary spacetimes with arbitrary three dimensional compact spatial sections. In these systems, we have studied non-local and time dependent linear canonical transformations that relate field descriptions for which it is possible to obtain a unitary implementation of the evolution with invariance under the spatial symmetries. We have characterized the most general form of such non-local transformations assuming that (i) they do not mix dynamically decoupled modes and (ii) they admit an asymptotic expansion in Laurent series of the modes frequencies. We have proven that every transformation of this kind is unitarily implementable in the Fock representation picked out by the considered uniqueness criterion in the original field description. Consequently, the studied criterion turns out to select a privileged class of unitarily equivalent Fock quantizations even when non-local and time dependent linear canonical transformations are allowed.
- We have extended the hybrid quantization techniques originally developed in the linearly polarized Gowdy \mathbb{T}^3 model to include a minimally coupled massless scalar field with the same symmetries as the geometry. In this way, we have achieved a complete quantization of a model that includes matter inhomogeneities and that has a subset of homogeneous, isotropic and flat Friedmann–Robertson–Walker-like classical solutions. We have shown that,

after a suitable scaling of the matter inhomogeneities, permitting the unitary implementation of its dynamical evolution, both kinds of inhomogeneities, the matter and the gravitational ones, appear in the system identically. By means of the hybrid quantization techniques we have then reached a quantum model such that:

1. The operators representing the global constraint of the system have a well defined action on the kinematical Hilbert space.
 2. The polymeric quantization of the homogeneous sector of the model, that corresponds to Bianchi I cosmologies with a homogeneous massless scalar field, leads to a quantum model where the states analog to the classical singularity are decoupled.
 3. The Fock quantization for both kinds of inhomogeneities allows us to deal with the field complexity of the system. Furthermore, the standard description in quantum field theory of the inhomogeneities is recovered for regions where the effects of the homogeneous loop quantum geometry are small.
 4. The imposition of the densitized Hamiltonian constraint operator leads to a difference equation in the volume variable such that its solutions are completely determined by the initial data in the section of minimum volume. Thanks to this, it has been possible to obtain the space of physical states of the model by providing the space of initial data with a Hilbert structure, determined by imposing reality conditions on a suitable set of observables.
- In addition, we have studied the *projection* from the quantum linearly polarized Gowdy \mathbb{T}^3 model to the quantum submodel with local rotational symmetry. We have shown that the result obtained by means of this quantum projection is equivalent to the model reached by means of the hybrid quantization of the classically reduced system with local rotational symmetry.
 - We have developed and applied approximation methods in the framework of this hybrid quantization with the aim at obtaining physical solutions representing situations of interest in cosmology. To derive these approximations, we have considered the spectral properties of the Friedmann–Robertson–Walker geometry operator in Loop Quantum Cosmology as well as the behavior of its eigenstates. In this manner, we have obtained the following results for the Gowdy \mathbb{T}^3 model with local rotational symmetry:

1. We have found an operator approximating the anisotropy term of the densitized Hamiltonian constraint with a much simpler and controllable action than the original one. The new operator factorizes in the tensor product of two operators, one acting just on the volume variable while the other only acts on the anisotropy variable. The new anisotropy operator is a discrete first derivative operator whose action is defined in lattices of constant step, contained in the considered superselection sector for the anisotropy variables. This property has permitted the spectral analysis of this new operator, and we have shown that it is a self-adjoint operator with a bounded, absolutely continuous, and doubly degenerate spectrum.
2. We have shown that the contributions coming from the regularized inverse triad operator can be neglected if one restricts the study to eigenstates of the Friedmann–Robertson–Walker geometry operator with large enough eigenvalues.
3. The correctness of the considered approximations has been confirmed through numerical computation and comparison of the matrix elements for both the original and the approximating operators.
4. With the approximation put forward for the anisotropy operator, we have been able to construct a family of states whose anisotropy profiles are such that both the anisotropy and the autointeraction terms of the densitized Hamiltonian constraint can be disregarded. Thus, we have reached an approximate quantum constraint which can be solved. This constraint operator can be regarded as the one obtained for the flat Friedmann–Robertson–Walker model with a homogeneous massless scalar field together with the free-field contribution of the two kinds of inhomogeneities.
5. We have constructed the solutions to the approximation of the constraint operator. From these solutions we have obtained approximate solutions to the considered Gowdy model by restricting their anisotropy profiles to the previously mentioned ones and by considering only eigenstates of the Friedmann–Robertson–Walker geometry operator with large enough eigenvalues. These approximate solutions correspond to physically interesting situations consisting in Friedmann–Robertson–Walker spacetimes with small anisotropy effects and a low content of inhomogeneities.

Bibliografía

- [1] S. W. Hawking y R. Penrose, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A314**, 529 (1970).
- [2] T. Thiemman, *Modern canonical quantum general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [3] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Londres, 2004).
- [4] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Background independent quantum gravity: A status report*, Class. Quantum Grav. **21**, R53 (2004).
- [5] H. Sahlmann, *Loop Quantum Gravity - A short review*, arXiv:1001.4188 (2010).
- [6] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, Nueva York, 1964).
- [7] R. Arnowitt., S. Deser y C. W. Misner, *The dynamics of general relativity*, en *Gravitation: an introduction to current research* (Wiley, Nueva York, 1962).
- [8] A. Ashtekar y R. S. Tate, *An algebraic extension of Dirac quantization: Examples*, J. Math. Phys. **35**, 6434 (1994).
- [9] J. F. Barbero G., *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times*, Phys. Rev. D **51**, 5507 (1995).
- [10] M. Domagala, K. Giesel, W. Kaminski y J. Lewandowski, *Gravity quantized: Loop Quantum Gravity with a scalar field*, Phys. Rev. D **82**, 104038 (2010).
- [11] V. Husain y T. Pawłowski, *Time and a physical Hamiltonian for quantum gravity*, Phys. Rev. Lett. **108**, 141301 (2012).
- [12] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology*, Living Rev. Rel. **11**, 4 (2008).
- [13] A. Ashtekar y P. Singh, *Loop Quantum Cosmology: A status report*, Class. Quantum Grav. **28**, 213001 (2011).

- [14] K. Banerjee, G. Calcagni y M. Martín-Benito, *Introduction to loop quantum cosmology*, SIGMA **8**, 016 (2012).
- [15] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology I: Kinematics*, Class. Quantum Grav. **17**, 1489 (2000).
- [16] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology II: Volume operators*, Class. Quantum Grav. **17**, 1509 (2000).
- [17] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology III: Wheeler-DeWitt operators*, Class. Quantum Grav. **18**, 1055 (2001).
- [18] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology IV: Discrete time evolution*, Class. Quantum Grav. **18**, 1071 (2001).
- [19] A. Ashtekar, M. Bojowald y J. Lewandowski, *Mathematical structure of loop quantum cosmology*, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233 (2003).
- [20] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the big bang*, Phys. Rev. Lett. **96**, 141301 (2006).
- [21] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the Big Bang: An analytical and numerical investigation*, Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006).
- [22] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the Big Bang: Improved dynamics*, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).
- [23] A. Ashtekar, A. Corichi y P. Singh, *Robustness of key features of loop quantum cosmology*, Phys. Rev. D **77**, 024046 (2008).
- [24] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Further improvements in the understanding of isotropic loop quantum cosmology*, Phys. Rev. D **80**, 104015 (2009).
- [25] V. Taveras, *Corrections to the Friedmann equations from LQG for a universe with a free scalar field*, Phys. Rev. D **78**, 064072 (2008).
- [26] A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh y K. Vandersloot, *Loop quantum cosmology of $k=1$ FRW models*, Phys. Rev. D **75**, 024035 (2007).
- [27] L. Szulc, W. Kaminski y J. Lewandowski, *Closed FRW model in loop quantum cosmology*, Class. Quantum Grav. **24**, 2621 (2007).
- [28] K. Vandersloot, *Loop quantum cosmology and the $k = -1$ RW model*, Phys. Rev. D **75**, 023523 (2007).

-
- [29] L. Szulc, *Open FRW model in loop quantum cosmology*, *Class. Quantum Grav.* **24**, 6191 (2007).
- [30] E. Bentivegna y T. Pawłowski, *Anti-deSitter universe dynamics in LQC*, *Phys. Rev. D* **77**, 124025 (2008).
- [31] W. Kaminski y T. Pawłowski, *The LQC evolution operator of FRW universe with positive cosmological constant*, *Phys. Rev. D* **81**, 024014 (2010).
- [32] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop quantum cosmology of Bianchi I models*, *Phys. Rev. D* **79**, 083535 (2009).
- [33] L. J. Garay, M. Martín-Benito y G. A. Mena Marugán, *Inhomogeneous loop quantum cosmology: Hybrid quantization of the Gowdy model*, *Phys. Rev. D* **82**, 044048 (2010).
- [34] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, *Loop quantum cosmology of Bianchi type II models*, *Phys. Rev. D* **80**, 123532 (2009).
- [35] E. Wilson-Ewing, *Loop quantum cosmology of Bianchi type IX models*, *Phys. Rev. D* **82**, 043508 (2010).
- [36] A. Corichi y P. Singh, *A geometric perspective on singularity resolution and uniqueness in loop quantum cosmology*, *Phys. Rev. D* **80**, 044024 (2009).
- [37] M. Martín-Benito, L. J. Garay y G. A. Mena Marugán, *Hybrid quantum Gowdy cosmology: Combining loop and Fock quantizations*, *Phys. Rev. D* **78**, 083516 (2008).
- [38] G. A. Mena Marugán y M. Martín-Benito, *Hybrid quantum cosmology: Combining loop and Fock quantizations*, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 2820 (2009).
- [39] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y E. Wilson-Ewing, *Hybrid quantization: From Bianchi I to the Gowdy model*, *Phys. Rev. D* **82**, 084012 (2010).
- [40] G. Immirzi, *Real and complex connections for canonical gravity*, *Class. Quantum Grav.* **14**, L177 (1997).
- [41] G. Immirzi, *Quantum gravity and Regge calculus*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **57**, 65 (1997).
- [42] A. Kreienbuehl y T. Pawłowski, *Singularity resolution from polymer quantum matter*, arXiv:1302.6566 (2013).

- [43] H. Sahlmann y T. Thiemann, *Irreducibility of the Ashtekar-Isham-Lewandowski representation*, *Class. Quantum Grav.* **23**, 4453 (2006).
- [44] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann y T. Thiemann, *Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy-flux algebras*, *Commun. Math. Phys.* **267**, 703 (2006).
- [45] A. Ashtekar y C. J. Isham, *Representations of the holonomy algebras of gravity and non-Abelian gauge theories*, *Class. Quantum Grav.* **9**, 1433 (1992).
- [46] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Representation theory of analytic holonomy C^* algebras*, arXiv:gr-qc/9311010 (1993).
- [47] J. C. Baez, *Generalized measures in gauge theory*, *Lett. Math. Phys.* **31**, 213 (1994).
- [48] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Projective techniques and functional integration for gauge theories*, *J. Math. Phys.* **36**, 2170 (1995).
- [49] J. M. Velhinho, *The quantum configuration space of loop quantum cosmology*, *Class. Quantum Grav.* **24**, 3745 (2007).
- [50] B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. I. The canonical theory*, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [51] J. A. Wheeler, *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics* (in *Battelle Rencontres*, Nueva York, 1968).
- [52] A. Ashtekar y J. Lewandowski, *Quantum theory of geometry. 1: Area operators*, *Class. Quantum Grav.* **14**, A55 (1997).
- [53] C. Rovelli y L. Smolin, *Discreteness of area and volume in quantum gravity*, *Nucl. Phys.* **B442**, 593 (1995).
- [54] T. Thiemann, *Anomaly-free formulation of nonperturbative, four-dimensional Lorentzian quantum gravity*, *Phys. Lett. B* **380**, 257 (1996).
- [55] T. Thiemann, *Quantum spin dynamics (QSD)*, *Class. Quantum Grav.* **15**, 839 (1998).
- [56] W. Kaminski, J. Lewandowski y T. Pawłowski, *Physical time and other conceptual issues of QG on the example of LQC*, *Class. Quantum Grav.* **26**, 035012 (2009).
- [57] G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y T. Pawłowski, *Prescriptions in loop quantum cosmology: A comparative analysis*, *Phys. Rev. D* **84**, 064012 (2011).

-
- [58] J. Yang, Y. Ding y Y. Ma, *Alternative quantization of the Hamiltonian in loop quantum cosmology II: Including the Lorentz term*, Phys. Lett. B **682**, 1 (2009).
- [59] W. Kaminski y J. Lewandowski, *The flat FRW model in LQC: The self-adjointness*, Class. Quantum Grav. **25**, 035001 (2008).
- [60] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Loop quantization of vacuum Bianchi I cosmology*, Phys. Rev. D **D78**, 064008 (2008).
- [61] W. Kaminski y T. Pawłowski, *Cosmic recall and the scattering picture of loop quantum cosmology*, Phys. Rev. D **81**, 084027 (2010).
- [62] D. Marolf, *Almost ideal clocks in quantum cosmology: A brief derivation of time*, Class. Quantum Grav. **12**, 2469 (1995).
- [63] D. Marolf, *Observables and a Hilbert space for Bianchi IX*, Class. Quantum Grav. **12**, 1441 (1995).
- [64] D. Marolf, *Quantum observables and recollapsing dynamics*, Class. Quantum Grav. **12**, 1199 (1995).
- [65] D. Marolf, *Refined algebraic quantization: Systems with a single constraint*, arXiv:gr-qc/9508015 (1995).
- [66] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao y T. Thiemann, *Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom*, J. Math. Phys. **36**, 6456 (1995).
- [67] L. Bianchi, *On the Spaces of three dimensiones that admit a continuous group of movements*, Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat. **11**, 267 (1977).
- [68] M. Bojowald, *Homogeneous loop quantum cosmology*, Class. Quantum Grav. **20**, 2595 (2003).
- [69] D.-W. Chiou, *Effective dynamics, big bounces and scaling symmetry in Bianchi type I loop quantum cosmology*, Phys. Rev. D **76**, 124037 (2007).
- [70] D.-W. Chiou, *Loop quantum cosmology in Bianchi type I models: analytical investigation*, Phys. Rev. D **75**, 024029 (2007).
- [71] L. Szulc, *Loop quantum cosmology of diagonal Bianchi type I model: Simplifications and scaling problems*, Phys. Rev. D **78**, 064035 (2008).

BIBLIOGRAFÍA

- [72] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Physical evolution in loop quantum cosmology: The example of vacuum Bianchi I*, Phys. Rev. D **80**, 084038 (2009).
- [73] R. M. Wald, *Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics* (Chicago University Press, Chicago, 1994).
- [74] N. D. Birrell y P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [75] W. G. Unruh, *Notes on black-hole evaporation*, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [76] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [77] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman y R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, Phys. Rept. **215**, 203 (1992).
- [78] V. F. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [79] R. H. Brandenberger, H. Feldman y V. F. Mukhanov, *Classical and quantum theory of perturbations in inflationary universe models*, arXiv:astro-ph/9307016 (1993).
- [80] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space, III: Operational methods and group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A **16**, 172 (1930).
- [81] B. Simon, *Topics in functional analysis* (Academic Press, Londres, 1972).
- [82] D. Shale, *Linear symmetries of free boson fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **103**, 149 (1962).
- [83] R. Honegger y A. Rieckers, *Squeezing Bogoliubov transformations on the infinite mode CCR algebra*, J. Math. Phys. **37**, 4292 (1996).
- [84] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The large-scale structure of the spacetime* (Cambridge University Press, Londres, 1973).
- [85] T. S. Bunch y P. C. W. Davies, *Quantum field theory in de Sitter space: Renormalization by point splitting*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).
- [86] B. Allen, *Vacuum states in de Sitter space*, Phys. Rev. D **32**, 3136 (1985).

-
- [87] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Yale University Press, New Haven, 1923).
- [88] B. S. Kay y R. M. Wald, *Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on space-times with a bifurcate Killing horizon*, Phys. Rept. **207**, 49 (1991).
- [89] M. J. Radzikowski, *Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time*, Commun. Math. Phys. **179**, 529 (1996).
- [90] B. Allen y A. Folacci, *The massless minimally coupled scalar field in de Sitter space*, Phys. Rev. D **35**, 3771 (1987).
- [91] R. Floreanini, C. T. Hill y R. Jackiw, *Functional representation for the isometries of de Sitter space*, Ann. Phys. **175**, 345 (1987).
- [92] A. Ashtekar y A. Magnon, *Quantum fields in curved space-times*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **346**, 375 (1975).
- [93] B. S. Kay, *Linear spin 0 quantum fields in external gravitational and scalar fields. 1. A one particle structure for the stationary case*, Commun. Math. Phys. **62**, 55 (1978).
- [94] A. Ashtekar y A. Magnon-Ashtekar, *A curiosity concerning the role of coherent states in quantum field theory*, Pramana **15**, 107 (1980).
- [95] V. F. Mukhanov, *Gravitational instability of the universe filled with a scalar field*, JETP Lett. **41**, 493 (1985).
- [96] M. Sasaki, *Large scale quantum fluctuations in the inflationary universe*, Prog. Theor. Phys. **76**, 1036 (1986).
- [97] J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Feasibility of a unitary quantum dynamics in the Gowdy T^3 cosmological model*, Phys. Rev. D **72**, 064020 (2005).
- [98] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Unitary evolution in Gowdy cosmology*, Phys. Rev. D **73**, 041502 (2006).
- [99] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, *Quantum Gowdy T^3 model: A unitary description*, Phys. Rev. D **73**, 084020 (2006).
- [100] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 model: A uniqueness result*, Class. Quantum Grav. **23**, 6301 (2006).

BIBLIOGRAFÍA

- [101] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Quantum Gowdy T^3 model: Schrodinger representation with unitary dynamics*, Phys. Rev. D **76**, 124031 (2007).
- [102] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of the Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **D75**, 084027 (2007).
- [103] J. F. Barbero G., D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, *Quantum unitary evolution of linearly polarized $S^1 \times S^2$ and S^3 Gowdy models coupled to massless scalar fields*, Class. Quantum Grav. **25**, 085002 (2008).
- [104] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, R. Serôdio y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of a free scalar field on S^1 with time dependent mass*, Phys. Rev. D **79**, 084040 (2009).
- [105] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Fock quantization of a scalar field with time dependent mass on the three-sphere: Unitarity and uniqueness*, Phys. Rev. D **81**, 044037 (2010).
- [106] L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields in spatially flat cosmological spacetimes*, JCAP **1211**, 001 (2012).
- [107] L. Castelló Gomar, J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena Marugán y J. Velhinho, *Unitary evolution and uniqueness of the Fock quantization in flat cosmologies with compact spatial sections*, arXiv:1212.5677 [gr-qc] (2012).
- [108] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A uniqueness criterion for the Fock quantization of scalar fields with time dependent mass*, Class. Quantum Grav. **28**, 172001 (2011).
- [109] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *A Unique Fock quantization for fields in non-stationary spacetimes*, JCAP **1010**, 030 (2010).
- [110] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Uniqueness of the Fock quantization of fields with unitary dynamics in nonstationary spacetimes*, Phys. Rev. D **83**, 025002 (2011).
- [111] J. Cortez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Criteria for the determination of time dependent scalings in the Fock quantization of scalar fields*, Phys. Rev. D **86**, 104003 (2012).

-
- [112] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, *Unique Fock quantization of scalar cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **D85**, 103525 (2012).
- [113] J. M. Bardeen, *Gauge invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
- [114] R. H. Gowdy, *Gravitational waves in closed universes*, Phys. Rev. Lett. **27**, 826 (1971).
- [115] R. H. Gowdy, *Vacuum space-times with two parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and boundary conditions*, Ann. Phys. **83**, 203 (1974).
- [116] V. Moncrief, *Global properties of Gowdy space-times with $T^3 \times R$ topology*, Ann. Phys. **132**, 87 (1981).
- [117] V. Moncrief, *Infinite dimensional family of vacuum cosmological models with TAUB - NUT (Newman-Unti-Tamburino) type extensions*, Phys. Rev. D **23**, 312 (1981).
- [118] J. Isenberg y V. Moncrief, *Asymptotic behavior of the gravitational field and the nature of singularities in Gowdy space-times*, Ann. Phys. **199**, 84 (1990).
- [119] C. W. Misner, *A minisuperspace example: The Gowdy T^3 cosmology*, Phys. Rev. D **8**, 3271 (1973).
- [120] B. K. Berger, *Quantum graviton creation in a model universe*, Ann. Phys. **83**, 458 (1974).
- [121] B. K. Berger, *Quantum cosmology: Exact solution for the Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **11**, 2770 (1977).
- [122] B. K. Berger, *Quantum effects in the Gowdy T^3 cosmology*, Ann. Phys. **156**, 155 (1984).
- [123] G. A. Mena Marugán, *Canonical quantization of the Gowdy model*, Phys. Rev. D **56**, 908 (1997).
- [124] A. Corichi, J. Cortez y H. Quevedo, *On unitary time evolution in Gowdy T^3 cosmologies*, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 1451 (2002).
- [125] M. Pierri, *Probing quantum general relativity through exactly soluble midisuperspaces. 2. Polarized Gowdy models*, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 135 (2002).

BIBLIOGRAFÍA

- [126] C. G. Torre, *Quantum dynamics of the polarized Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **66**, 084017 (2002).
- [127] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum y E. Herlt, *Exact solutions of Einstein field equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [128] E. Kasner, *Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations*, Am. J. Math. **43**, 217 (1921).
- [129] M. Martín-Benito, D. Martín-de Blas y G. A. Mena Marugán, *Matter in inhomogeneous loop quantum cosmology: the Gowdy T^3 model*, Phys. Rev. D **83**, 084050.
- [130] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary universe*, Phys. Rev. D **86**, 024003 (2012).
- [131] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *A quantum gravity extension of the inflationary scenario*, Phys. Rev. Lett. **109**, 251301 (2012).
- [132] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *An extension of the quantum theory of cosmological perturbations to the Planck era*, Phys. Rev. D **87**, 043507 (2013).
- [133] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, *The pre-inflationary dynamics of loop quantum cosmology: Confronting quantum gravity with observations*, Class. Quantum Grav. **30**, 085014 (2013).
- [134] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary model. The flat case*, en preparación.
- [135] R. Eisberg y R. Resnick, *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*, 2ª edición (John Wiley and Sons, Nueva York, 1985).
- [136] T. Bröcker y T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups* (Springer-Verlag, Nueva York, 1985).
- [137] A. N. Kolmogorov y S. V. Formin, *Elements of the theory of functions and functional analysis* (Dover, Nueva York, 1999).
- [138] P. de Bernardis *et al.* (Boomerang Collaboration), *A flat universe from high resolution maps of the cosmic microwave background radiation*, Nature **404**, 955 (2000).
- [139] D. N. Spergel *et al.* (WMAP Collaboration), *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).

-
- [140] C. Bennett *et al.*, *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: final maps and results*, arXiv:1212.5225 (2012).
- [141] P. A. R. Ade *et al.* (Planck collaboration), *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, arXiv:1303.5076 (2013).
- [142] D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, *Unitary evolution of free massless fields in de Sitter space-time*, *Class. Quantum Grav.* **25**, 145008 (2008).
- [143] L. Parker, *Quantized fields and particle creation in expanding universes. 1*, *Phys. Rev.* **183**, 1057 (1969).
- [144] U. H. Gerlach y U. K. Sengupta, *Homogeneous collapsing star: Tensor and vector harmonics for matter and field asymmetries*, *Phys. Rev. D* **18**, 1773 (1978).
- [145] R. T. Jantzen, *Tensor harmonics on the 3-sphere*, *J. Math. Phys.* **19**, 1163 (1978).
- [146] M. Abramovitz y I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, 9ª edición (Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No. 55, U.S. Govt. Print. Off., Washington D.C., 1970).
- [147] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryshik, *Table of integrals, series and products*, 5ª edición (Academic Press, Londres, 1994).
- [148] C. Lueders y J. E. Roberts, *Local quasiequivalence and adiabatic vacuum states*, *Commun. Math. Phys.* **134**, 29 (1990).
- [149] W. Junker, *Erratum to: Hadamard states, adiabatic vacua and the construction of physical states for scalar quantum fields on curved spacetime*, *Rev. Math. Phys.* **14**, 511 (2002).
- [150] M. Taylor, *Partial differential equations II* (Springer Verlag, Nueva York, 1996).
- [151] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry* (Academic Press, Orlando, 1984).
- [152] P. D'Eath y J. Halliwell, *Fermions in quantum cosmology*, *Phys. Rev. D* **35**, 1100 (1987).
- [153] G. A. Mena Marugán y M. Montejo, *Quantization of pure gravitational plane waves*, *Phys. Rev. D* **58**, 104017 (1998).
- [154] A. D. Rendall, *Unique determination of an inner product by adjointness relations in the algebra of quantum observables*, *Class. Quantum Grav.* **10**, 2261 (1993).

BIBLIOGRAFÍA

- [155] A. D. Rendall, *Adjointness relations as a criterion for choosing an inner product*, Lect. Not. Phys. **434**, 319 (1994).
- [156] D. Brizuela, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Big Bounce and inhomogeneities*, Class. Quantum Grav. **27**, 052001 (2010).
- [157] D. Brizuela, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Effective dynamics of the hybrid quantization of the Gowdy T^3 universe*, Phys. Rev. D **D84**, 124017 (2011).
- [158] A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations* (Springer-Verlag, Nueva York, 1976).
- [159] J. J. Halliwell y S. W. Hawking, *The origin of structure in the universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985).