ANÁLISIS DE LOS MANUALES ESPAÑOLES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS: EL CASO DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Marianna Bosch, Universitat Ramon Llull

Josep Gascón, Universitat Autònoma de Barcelona

Tomás Sierra, Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

En este trabajo llevamos a cabo un análisis de los diferentes libros de textos utilizados en la Formación de Maestros en España en torno a los Sistema de Numeración. Mostraremos que las cuestiones problemáticas a las que responde la Numeración están prácticamente ausentes tanto en la enseñanza "clásica" como en los desarrollos posteriores de ésta que han desembocado en la enseñanza actual. Esta ausencia de las razones de ser del Sistema de Numeración posicional en la Formación de Maestros en España constituye un fenómeno relativamente universal y que, como todo fenómeno didáctico, debe responder a restricciones y limitaciones que conviene estudiar para empezar a establecer las condiciones que permitan superarlas. Para realizar este estudio hemos utilizado un Modelo Epistemológico del desarrollo de los Sistemas de Numeración que nos sirve de referencia y además nos permite escapar de las restricciones o condicionantes que conlleva el proceso de transposición didáctica.

ABSTRACT

In this project we undertook an analysis of different textbooks used in the formation of future teachers in Spain and their study of numerical systems. We will show that the problems that respond to numeration are practically non existent in both "classical" teaching and in later developments of this topic that have lead to today's teaching. This absence of reasons to be of the positional system of numeration in the formation of teachers in Spain constitutes a relatively universal phenomenon and that as all didactic phenomenon, it should respond to restrictions and limitations that are suitable to study in order to begin to establish conditions that permit going beyond them. In order to accomplish this study we have used an epistemological model of development of numerical systems that serves us as a reference, and besides, allows us to be free of the restrictions or conditions which go along with the process of the didactical transposition.

Bosch,M., Gascón, J., Sierra T. (2009). Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139-150). Santander: SEIEM.

UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA EN TORNO A LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Para analizar la propuesta que hacen los manuales para Maestros en relación a los Sistemas de Numeración, es imprescindible (como para cualquier otro análisis didáctico) situarnos en una "posición" determinada desde la cual "mirar" los "hechos empíricos" que se van a analizar. Necesitamos un "sistema de referencia" que, como sucede en mecánica, será siempre relativo, provisional y fuertemente determinado por el problema que queremos abordar.

En nuestro caso utilizaremos un Modelo Epistemológico de Referencia (en adelante MER) de los Sistemas de Numeración (en adelante SN) que ya hemos desarrollado en un trabajo anterior (Sierra, 2006) y que presentaremos aquí muy brevemente.

Se trata de un modelo epistemológico *dinámico* que describe una sucesión de Organizaciones Matemática (OM) o praxeologías[1], cada vez más amplias y completas, que se construyen en un proceso de estudio hipotético con el objetivo de responder en la institución de Formación de Maestros a la siguiente cuestión que tomaremos provisionalmente como "*cuestión generatriz*" del proceso de estudio:

q = "¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?"

En el Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas dicho MER ha de ser construido *explícitamente* y, desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, ha de tener una estructura *praxeológica*.

En cierto sentido, cada OM se presenta como *la razón de ser* de la anterior, es decir, las cuestiones a las que responde cada OM surgen de las limitaciones de la anterior. Además los tipos de tareas asociadas a cada OM, así como las técnicas y el entorno tecnológico-teórico, han de adaptarse a las restricciones ecológicas que impone la institución docente de Formación de Maestros.

La elección de las OM intermedias proviene del análisis detallado de la cuestión matemática de partida *q* que nos ha llevado a considerar *tres grandes categorías de sistemas de numeración*[2]: "aditivos", "híbridos" y "de posición". Cada una de estas categorías dará origen a un nuevo eslabón en la sucesión de OM que desemboca en OM_p entorno a los SN posicionales completos.

La organización matemática inicial en torno a un sistema aditivo rudimentario

Partimos de una OM generada por un tipo de cuestiones problemáticas muy elementales relativas a la *designación* de los números naturales:

¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que:
(1) No haya ninguna ambigüedad?
(2) Se utilice una pequeña cantidad de símbolos diferentes y fijados de antemano?
(3) La "cadena" resultante no sea excesivamente larga?

1 Para un estudio más profundo de la nociones: Modelo Epistemológico de Referencia, Organización o Praxeología Matemática y Organización o Praxeología Didáctica ver (Chevallard, 1999), (Sierra, 2006), (Bosch y Gascón, 2007).
2 Estas categorías están basadas en la clasificación jerarquizada que propone Guitel (1975)

Para responder a dichas cuestiones partiremos de dos técnicas extremas de representación de los números: (a) Utilizar un único símbolo y repetirlo tantas veces como indica el número que queramos representar; o bien (b) utilizar un símbolo diferente para cada número natural. Está claro que la técnica (a) no responde a (3) mientras que la técnica (b) no responde a (2).

Pero el trabajo con estas técnicas extremas permitirá desarrollarlas y hacerlas evolucionar hacia técnicas intermedias que sean más útiles y más eficaces. Obtendremos así en primer lugar una nueva técnica, que llamaremos, *técnica inicial de representación de los números naturales*, τ_i, que sólo sirve para describir números pequeños y aporta una única novedad respecto a la representación "lineal" de los números (colección uniforme sin ningún tipo de agrupamientos): el empleo de *un único tipo de agrupamiento*, que ayuda a leer y describirlos mejor. Esta técnica es muy utilizada en los recuentos de las votaciones y en Estadística Descriptiva rudimentaria, (por ejemplo, 13 es IIII IIII III). Designaremos mediante $OM_i = < \tau_i >$ a la OM generada por esta técnica inicial y que puede ser considerada como una OM en torno a un SN "aditivo rudimentario".

La organización matemática OM_a en torno a un sistema de numeración aditivo.

La técnica que permite generar la nueva OM se caracteriza por utilizar *agrupamientos regulares* de primer orden, de segundo orden, etc. Esta técnica, que designaremos medianteτ_a, responde a las cuestiones (2) y (3) de manera mucho más económica y eficaz que τ_i y, además, permite empezar a dar respuesta a nuevas cuestiones ante las cuales la técnica τ_i era completamente ineficaz como, por ejemplo:

(4) ¿Cómo comparar dos números mediante sus expresiones escritas?
(5) ¿Cómo simplificar los algoritmos de las operaciones suma y resta?
(6) ¿Cómo simplificar el algoritmo de la operación multiplicación?

Denominaremos OM_a a la OM en torno a un *SN aditivo* y generada por esta técnica, $OM_a = < \tau_a >$, en el bien entendido que τ_a sigue teniendo muchas limitaciones para llevar a cabo las tareas asociadas a las cuestiones (5) y (6).

La técnica τ_a es similar a la utilizada en el *sistema egipcio* con agrupamientos de forma regular y cuyos símbolos[3] I, A, B, C, D, E y F designan unidades de órdenes sucesivos, cada una de las cuales es diez veces la anterior (aquí los símbolos representan a cada una de las 7 primeras potencias de la base: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 y 10^6). Resumiendo las características de OM_a, podemos decir que:

- Permite representar los números naturales sin ningún tipo de ambigüedad.
- Sigue presentando dificultades para resolver la tarea de disminuir la cantidad de símbolos necesarios para representar cada número. Así, por ejemplo, para representar el número 9.999.999 necesitamos 63 símbolos.
- No permite comparar dos números de forma satisfactoria, pues la cantidad de símbolos utilizados para representar un número no está relacionada con su tamaño.

3 Los símbolos que utilizamos en todo este trabajo generalmente no son los mismos que fueron usados históricamente. Dado que no pretendemos llevar a cabo un estudio histórico de los sistemas de numeración, nos servimos de símbolos más cómodos de representar mediante el tratamiento de textos con el que trabajamos.

- Permite realizar las tareas de sumar, restar, multiplicar y dividir para números pequeños de forma "razonablemente económica". Pero si el tamaño de los números aumenta, entonces la técnica se vuelve muy poco económica.
- Presenta la ventaja de no tener que recurrir a utilizar las tablas de sumar y de multiplicar.

La evolución de la técnica de representación τ_a provoca el desarrollo de OM_a. En concreto aparecen dos variaciones de τ_a encaminadas a responder de un modo más eficaz a la cuestión (3). En ambos casos tenemos el ejemplo histórico del SN romano.

(a) Añadir nuevos símbolos a la serie de potencias básica: I, V, X, L, C, D y M designan unidades sucesivas que son alternativamente el quíntuplo o el doble de la anterior (es decir, 10^0, 5×10^0, 10^1, 5×10^1, 10^2, 5×10^2 y 10^3). De esta manera se escribirá VIIII en lugar de IIIIIIIII.

(b) Introducir la condición de que todo símbolo colocado a la izquierda de un símbolo de valor inmediatamente superior, indica que el menor debe restarse del mayor:

$$9 \rightarrow \text{IX};\ 4 \rightarrow \text{IV};\ 40 \rightarrow \text{XL};\ 90 \rightarrow \text{XC};\ 400 \rightarrow \text{CD};\ 900 \rightarrow \text{CM}$$

Sin embargo, estas posibles evoluciones de la técnica τ_a (y, por tanto, de $OM_a = < \tau_a >$) si bien mejoran la eficacia y la economía de las tareas asociadas a (3), provocan un aumento de complejidad en los algoritmos correspondientes a las operaciones aritméticas, incluso con números pequeños (tareas asociadas a las cuestiones (5) y (6)). Podemos concluir que la "razón de ser" de los SN *aditivos* (esto es, la cuestión a la que responden) es la *representación de los números naturales* sin ambigüedades y con una pequeña cantidad de símbolos, y no la simplificación de los algoritmos de las operaciones aritméticas[4].

Al comprobar que la dirección anterior de evolución de OM_a nos lleva a un callejón sin salida, creemos que es necesario ampliar la problemática y hacer evolucionar la técnica de representación hacia la búsqueda de un SN que proporcione mayor *fiabilidad* y *economía* en la realización de los cálculos aritméticos.

La organización matemática OM_h en torno a un sistema de numeración híbrido

Existe una dirección de evolución de la técnica τ_a que además de mejorar la representación de los números y de proporcionar una respuesta más eficaz a la tarea de comparar dos números (cuestiones (1), (2), (3), (4)) permite optimizar la economía y la fiabilidad de los algoritmos de las operaciones aritméticas respondiendo así a las cuestiones (5) y (6). Pretendemos, incluso, obtener una técnica capaz de llevar a cabo las tareas asociadas a la cuestión:

> **(7)** ¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifique el algoritmo de la división?

Esta nueva dirección de variación de la técnica τ_a se caracteriza por evitar la repetición de símbolos, gracias a la introducción de un nuevo tipo de símbolos que harán el papel de *multiplicadores de las potencias de la base*. Designaremos mediante

---

4 De hecho, los contables romanos siempre utilizaban ábacos de fichas para practicar el cálculo, donde cada una de las posiciones del ábaco indicaba cada una de las potencias de diez, siguiendo un sistema semejante al sistema posicional

τ_h a la técnica que se obtiene como resultado de dicha evolución. Sus principales características son las siguientes:

- Genera una $OM_h = < \tau_h >$ en torno a un SN *híbrido (aditivo-multiplicativo)* semejante al *sistema chino* o a nuestro *sistema oral*.
- Utiliza los símbolos para las potencias de la base:

  $I \rightarrow 10^0$; $A \rightarrow 10^1$; $B \rightarrow 10^2$; $C \rightarrow 10^3$; $D \rightarrow 10^4$; $E \rightarrow 10^5$; $F \rightarrow 10^6$;. ..
- Utiliza un nuevo tipo de símbolos que hacen la función de multiplicadores de dichas potencias: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
- Mejora la solución a las tareas asociadas a la cuestión (3) puesto que evita la repetición de símbolos de las potencias de la base.
- La *representación de los números se simplifica*, aunque todavía no podemos escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos (cuestión (2)).
- El algoritmo de comparación es más económico que con τ_a, puesto que con τ_h no es necesario contar cuántas veces se repite cada símbolo (cuestión (4)).
- Sin embargo, hay que utilizar la tabla de sumar de los coeficientes y las dos tablas de multiplicar (la de las potencias de la base y la de los coeficientes).

Podemos afirmar que con esta nueva técnica τ_h de representación se pueden realizar las operaciones aritméticas de forma más económica y con mayor alcance que con la técnica τ_a, especialmente cuando intervienen números grandes, aunque ello suponga tener que utilizar las tablas de multiplicar. La representación de los números también se simplifica, pero todavía no podemos responder plenamente a la cuestión (2), pues se necesita un nuevo símbolo para cada potencia de la base.

La organización matemática OM_p en torno a un sistema posicional completo

Las limitaciones de la actividad matemática que es posible llevar a cabo en OM_h ponen de manifiesto la necesidad de ampliarla y construir una nueva OM_p donde puedan realizarse de forma más económica y eficaz las tareas realizadas en OM_h y, al mismo tiempo, se puedan llevar a cabo tareas que en OM_h sólo podían llevarse a cabo de manera muy limitada (como las asociadas a las cuestiones (2), (6) y (7)) e, incluso, tareas aritméticas más complejas asociadas a la cuestión:

> **(8)** ¿Qué representación simplifica la divisibilidad elemental (múltiplos y divisores de un número, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números, descomposición de un número en factores,. ..) sin complicar la suma?

La nueva técnica de representaciónτ_p generadora de la OM en torno a un SN posicional completo, $OM_p = < \tau_p >$, se caracteriza por:

- Dar una respuesta definitiva a la cuestión (3).
- Prescindir de los símbolos de las potencias de la base ya que éstas vienen indicadas por las distintas posiciones que ocupan los respectivos coeficientes. Los únicos símbolos utilizados son los coeficientes de las potencias de la base.
- Permitir escribir todos los números con un número finito de símbolos (fijados de antemano). Se da así una respuesta definitiva a la cuestión (2).

- Añadir un nuevo símbolo como coeficiente multiplicador: el *cero*, para indicar que en una determinada posición hay ausencia de elementos.
- No presentar ambigüedades. Cuestión (1).
- Permitir comparar dos números de una forma muy eficaz. Cuestión (4).
- Calcular de forma más económica y eficaz. Cuestiones (5) a (8).

En resumen, dentro de cada una de estas OM consideradas hemos valorado el *alcance* (o dominio de validez), la *economía*, la *eficacia* y la *fiabilidad* de los distintos algoritmos asociados, lo que nos ha permitido ir ampliando y optimizando los distintos ingredientes praxeológicos. Hemos obtenido de esta manera una sucesión evolutiva de OM mediante ampliaciones y completaciones progresivas que ha culminado en OM_p y que puede considerarse como el esqueleto de una posible *reconstrucción escolar* de OM_p en la institución docente de Formación de Maestros.

LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN LOS MANUALES ESPAÑOLES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

Para analizar las distintas OM que se han propuesto como *saber a enseñar* en la institución de Formación de Maestros, hemos considerado tres grandes períodos: la *enseñanza clásica* previa a la matemática moderna (que estructuraba la matemática en tres grandes bloques, la aritmética, la geometría y el álgebra), el período marcado por la *matemática moderna* y la *situación actual*. Basándonos en el análisis de algunos libros de texto representativos de cada época, mostraremos que las razones de ser del SN posicional tal como las describe nuestro MER, esto es, las cuestiones problemáticas a las que responde OM_p como desarrollo de OM_a y OM_h tienen una presencia casi nula tanto en la enseñanza clásica como en los desarrollos posteriores de ésta que han desembocado en la enseñanza actual.

Esta ausencia de las razones de ser del SN posicional en la Formación de Maestros en España constituye un fenómeno relativamente universal que, como todo fenómeno didáctico, debe responder a restricciones y limitaciones que conviene estudiar para empezar a establecer las condiciones que permitan superarlas.

Los Sistemas de Numeración en la enseñanza clásica

Tomamos como ejemplo de libro de texto característico de lo que se ha llamado la enseñanza "clásica" de las matemáticas (siguiendo a Bosch, 1994): un libro de texto para maestros titulado *Aritmética y su metodología y Álgebra* de Julio García Pradillo, publicado en 1957 en la editorial Nuevas Gráficas de Madrid (García Pradillo, 1957). Este libro se presenta como un manual de la asignatura "Matemáticas: Aritmética y su metodología. Álgebra" propuesta para la formación de maestros en el plan de estudios de 1950.

El autor propone una estructura del curso en 48 lecciones donde el estudio de la Numeración corresponde a la lección 2 que consta de los siguientes epígrafes: Numeración: Oral y escrita, Sistema decimal: Metodología, Idea de la escritura de un número en un sistema básico, Sistema romano, Igualdades y desigualdades. Propiedades y Representación gráfica de los números naturales.

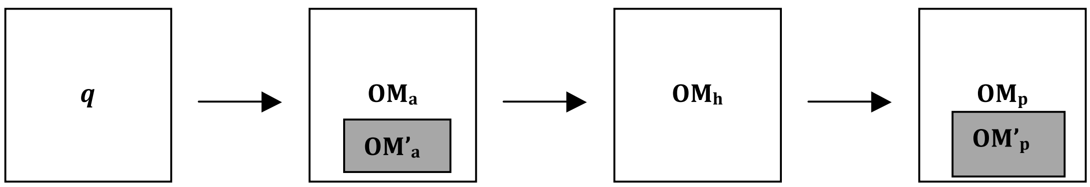
La lección (p. 6) empieza con el problema de la designación de un conjunto infinito de números y a continuación define la Numeración como "La parte de la

Aritmética que se ocupa de la representación de los números mediante palabras y símbolos”.

Más adelante hace una clasificación de los SN. Por un lado considera el sistema decimal con los sistemas análogos, que el autor llama sistemas “básicos”, y, por otro, los sistemas “no básicos”, de los que pone como ejemplo el sistema romano.

En definitiva, estamos ante una lección que consiste en mostrar de modo muy breve el funcionamiento del sistema decimal y el sistema romano. La *única cuestión planteada* inicialmente es el *problema de la representación de una infinitud de números*, sin que aparezca ningún otro tipo de cuestionamiento tecnológico, por ejemplo en lo que se refiere a la comparación de los distintos SN considerados. En cierta manera, al ser ésta una de las primeras lecciones del manual, el autor no se permite hacer alusión a la pertinencia de uno y otro sistema para llevar a cabo las operaciones aritméticas básicas, dado que éstas aún no han sido presentadas.

Podemos pues considerar que la propuesta de este manual sólo se sitúa, de manera muy parcial, en la segunda y cuarta etapa de la sucesión de OM de nuestro MER, donde, recordémoslo, q es el conjunto de cuestiones que dan origen a la OM local en torno a los SN, OM_a es la OM en torno a los SN aditivos, OM_h la OM en torno a los SN híbridos y OM_p la OM en torno a los SN posicionales:



La OM presentada en este manual queda situada en un recuadro en oscuro en OM_a, designada por OM'_a, y en otro recuadro en oscuro del gráfico dentro de OM_p, designada por OM'_p, sin plantear ninguna comparación entre ambos SN ni su incidencia en la definición de los algoritmos de las operaciones aritméticas.

Junto a este manual hemos analizado otros de la misma época[5] (utilizados antes de los años 70) y podemos afirmar que las conclusiones extraídas son válidas para todos ellos o, en otros términos, que lo dicho hasta aquí representa adecuadamente las características principales de la *OM a enseñar* en torno a los SN, en la institución de la Formación de Maestros, a lo largo del periodo de “enseñanza clásica”.

Los Sistemas de Numeración a partir de la Ley de Educación de 1970

En España, la reforma que promovía la Ley de Educación de 1970 trajo consigo el fin de la estructuración clásica de las matemáticas escolares en los 3 bloques aritmética, geometría y álgebra. El cambio curricular que se produce en la Formación de Maestros queda bien de manifiesto con la aparición del libro de texto titulado:

5 *Matemáticas segundo curso* de José Taboas Salvador (1943), “Metodología de las Matemáticas” de Xiberta y Roqueta (1934) y *Aritmética razonada* de Sabrás Gurrea (1931). Y de los mismos autores analizados, aunque de distinto año: *Matemática de siempre. Didáctica de hoy.* Tomo 1, de García Pradillo (1969); y *Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría* de Taboas Salvador (1942).

Didáctica de las Matemáticas del profesor de la Universidad Complutense de Madrid Eugenio Roanes Macías, publicado por la editorial Anaya en 1983.

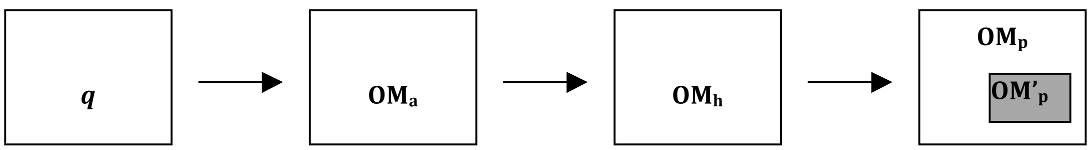
En este libro se propone un curso para maestros estructurado en 24 temas. Dicho texto fue aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia el 27-1-1970. Por tanto, surge en el momento que se aprueba la Ley General de Educación de 1970 del ministro Villar Palasí. Es con esta Ley que se promueve la enseñanza de las Matemáticas Modernas. Y es también con esta Ley que se propone tanto en el currículo de Primaria (entonces E.G.B.) como en el de Secundaria (entonces dividida en B.U.P. y C.O.U.) el estudio de los SN.

Volviendo al libro de texto, observamos que el estudio de los SN aparece dentro del tema 9 dedicado al número natural, con seis apartados de un total de diecisiete. Los apartados relativos a los SN (pp. 257- 272) ponen de manifiesto que el texto se centrará en los SN posicionales y en el trabajo con SN de diferentes bases.

Como en el manual de 1957 examinado inicialmente, *la cuestión que da origen a la consideración de los SN* radica en la dificultad de tener que nombrar el conjunto infinito de los números naturales sin tener que recurrir a infinitos nombres y, por tanto, infinitos signos para designarlos. Para evitar este inconveniente, el autor explica que existen métodos que mediante un número pequeño de signos y reglas permiten nombrar y escribir todos los números naturales. El autor presenta el SN como este sistema de reglas y signos.

Se desprende entonces que aquellos sistemas que no permiten la escritura de cualquier número natural con un número finito de símbolos fijados de antemano (como los sistemas aditivos o los híbridos) no son considerados por el autor como SN. Tampoco aparece como cuestión problemática la ambigüedad de la designación ni la longitud de la cadena de símbolos necesaria para designar cada número. De hecho, el autor sólo considera como SN los sistemas posicionales, dando por sentado que para representar los números sólo se utilizan signos para los multiplicadores de las potencias de la base.

En resumen podemos decir que la OM propuesta en este texto (así como en todos los consultados de esta época)[6] se sitúa directamente en el ámbito de los SN posicionales y tan sólo se propone "tematizar" la elección de la base de estos sistemas, mediante el estudio de la conversión de escrituras de una base a la otra y de la realización de las operaciones elementales básicas en distintas bases. Podemos pues situarla, dentro del MER que hemos elaborado, como un aspecto de la última de las OM consideradas:



6 *Matemáticas para el maestro de enseñanza elemental* de Nichols y Swain (1975), *Matemáticas primer curso. Escuelas Universitarias del profesorado de E.G.B.* de Nortes Checa (1978), *Los números y el cálculo numérico* de Aizpún y otros (1976) y *Teoría y didáctica de la matemática actual* de Aizpún (1970).

La importancia otorgada por las Matemáticas Modernas al trabajo con distintas bases para la *construcción del concepto de número* podría explicar el papel otorgado a este tema en los nuevos libros de texto para Maestros.

Los Sistemas de Numeración en la enseñanza actual

Para analizar el tratamiento que se da al tema de los SN en la enseñanza actual hemos elegido el libro de texto siguiente *Matemáticas para maestros. Manual para el estudiante* del "Proyecto Edumat-Maestros" dirigido por el profesor Juan D. Godino de la Universidad de Granada y publicado en Internet desde octubre 2004 (Díaz Godino, 2004).

Este libro trata los SN dentro del tema dedicado a los sistemas numéricos y, más concretamente, en el apartado 3 del capítulo I, titulado "Tipos de Sistemas de Numeración y aspectos históricos" (pp. 27- 43).

Los autores introducen los SN mediante tres situaciones en las que únicamente se hace referencia a los sistemas posicionales análogos a nuestro SN posicional completo. Creemos que el objetivo de dichas situaciones es que el estudiante se plantee cuestiones acerca de la forma y del número de símbolos utilizados en el sistema y que experimente lo que sucede cuando realiza agrupamientos sucesivos de n elementos (con $n < 10$, $n = 10$ y $n > 10$).

En los siguientes apartados, los autores irán más allá de los SN posicionales presentando las características de los diferentes SN que han existido a lo largo de la Historia. Por ejemplo, en el apartado 3.2, presentan las características del sistema egipcio, del sistema chino y del sistema hindú.

En el apartado 3.3 proponen la siguiente clasificación de los SN:

a) Sistema aditivo regular

b) Sistema multiplicativo regular

c) Sistema posicional regular

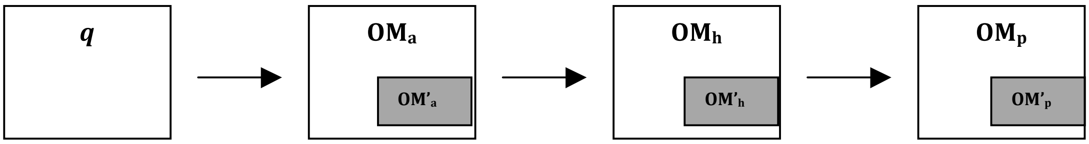
A continuación, los autores presentan una técnica general de cambio de base dentro de los SN posicionales. Y concentran la mayor parte de las tareas en la aplicación de esta técnica de cambio de base.

En el apartado 3.6 se presentan las características de nuestros actuales SN escrito y oral y se proponen tareas de paso de un sistema a otro. En el apartado 3.7 se presentan otros SN orales y en el 3.8 sistemas basados en colecciones de objetos como muescas, collares, ábacos, nudos, etc. En el apartado 3.9 los autores presentan la variedad de SN según el origen de algunas bases. En este punto aparecen dos tareas de un tipo nuevo que, probablemente, provocarán dificultades, ya que para su resolución se requiere caracterizar los símbolos utilizados en un sistema aditivo, cuestión que no se han tratado previamente. Y, por último, en el apartado 3.10 se muestran otros ejemplos históricos de SN escritos como el babilónico y el romano.

En resumen, el tratamiento que ofrecen estos autores de los SN es mucho más amplio que el examinado en los textos anteriores, puesto que el examen de los sistemas posicionales con distintas bases se amplía al caso de los dos otros tipos de sistemas (aditivo y multiplicativo regular). Por desgracia, y tal vez debido al detalle y a la longitud del tratamiento propuesto de estos sistemas, no aparece el estudio de las *limitaciones* de unos y otros, tanto en la *designación de los números* como en la *realización de las operaciones aritméticas* elementales. En otros términos, no se plantean las ventajas y limitaciones de los distintos SN considerados y las posibles relaciones entre ellos.

En las últimas tareas propuestas en el texto, bajo el epígrafe “Taller de matemáticas” aparece un principio de cuestionamiento de las relaciones entre el SN posicional y el multiplicativo, pero en ningún omento se cuestionan la eficacia de los diferentes SN, en cuanto a los símbolos y al tipo de agrupamientos utilizados ni, mucho menos, en cuanto a la economía y fiabilidad de los algoritmos de las operaciones aritméticas según que se utilice uno u otro de los SN para designar los números.

Hemos visto pues que la OM considerada en el texto que acabamos de analizar amplía considerablemente las de los libros de texto anteriores puesto que aparecen aquí tratados aspectos parciales de OM_a, OM_h y OM_p aunque no se pone de manifiesto el proceso evolutivo que genera la dinámica ni el hecho crucial que cada OM puede ser considerada como la “razón de ser” de la siguiente.



En el MER propuesto como referencia del estudio en este manual se echan en falta las relaciones de ampliación y completación que existen entre las sucesivas OM y, lo que es más importante, se echa en la falta la *cuestión generatriz del proceso de estudio*, esto es, lo que hemos llamado la “razón de ser” de los tipos sucesivos de SN que aparecen como respuestas parciales y progresivamente más completas a dicha cuestión.

Restricciones transpositivas que inciden sobre la enseñanza de los Sistemas de Numeración en la formación de maestros

Como conclusión de este trabajo creemos importante detenernos un momento sobre las *restricciones transpositivas* que pueden explicar que la mayoría de procesos didácticos que se llevan a cabo en España sobre la enseñanza de los SN no tomen en consideración un aspecto – el de la inclusión de su “razón de ser” como motor del estudio – que para nosotros es fundamental.

Siguiendo a Arsac (1988) y tal como se desarrolla en el trabajo de Bolea, Bosch y Gascón (2001), podemos considerar distintos tipos de restricciones transpositivas: restricciones que provienen de la *representación institucional* del saber matemático, restricciones impuestas por el *tiempo didáctico* (cronogénesis) que, por ejemplo, provocan serias dificultades para cuestionar conocimientos previamente aprendidos, y restricciones impuestas por la *topogénesis* del proceso y, en particular, por la *necesidad de evaluar* el trabajo llevado a cabo por los alumnos.

En el caso de los SN, es importante destacar que éstos se sitúan en una de las bases de la construcción del saber matemático, en aquella parte del edificio que trata sobre lo numérico: para hablar de los números y para hacer algo con ellos, hay que disponer de un SN. Esto explica que los temas de numeración aparezcan en el principio de los manuales y que, inicialmente, no se puedan vincular con unas operaciones aritméticas *que todavía están por definir*. Dado que las restricciones del tiempo didáctico y la "necesidad" de considerar como "definitivo" el saber enseñado hacen dificultoso el retorno hacia conocimientos previamente presentados, el estudio de las operaciones aritméticas y sus algoritmos se realiza directamente con el SN posicional sin cuestionar la elección de éste lo que constituye la primera y no menos importante restricción que dificulta el cuestionamiento del SN utilizado.

Otras restricciones ligadas a la cronogénesis del saber permiten explicar que los procesos didácticos habituales no se "entretengan" en hacer trabajar a los alumnos en SN que, como el aditivo y el híbrido, no proponen algoritmos de cálculo eficaces. La ausencia en los textos de un trabajo desarrollado de cálculo en OM_a y OM_h marca en realidad una dificultad transpositiva con la que nos vamos a encontrar al llevar a cabo un proceso didáctico centrado en la sucesión de OM: $OM_a \rightarrow OM_h \rightarrow OM_p$. Tendremos que hacer trabajar a los alumnos con herramientas de cálculo basadas en el SN aditivo y en el híbrido *que pronto se revelarán ineficaces* para los objetivos propuestos.

Finalmente, la *exigencia de evaluación* podría explicar el gran predominio asignado al trabajo con SN de distintas bases, que proporcionan un sinfín de tareas de conversión de un SN a otro, junto con tareas de ampliación y cuestionamiento tecnológico que pueden resolverse mediante el álgebra ecuacional elemental. En el período de la Matemática Moderna, la enseñanza de los SN posicionales en distintas bases viene también legitimado por la importancia atribuida a la teoría de conjuntos en la construcción del concepto de número y a la introducción en la enseñanza primaria de actividades de agrupaciones sucesivas para establecer distintas escrituras equivalentes de un mismo cardinal.

Postulamos, en definitiva, que para diseñar un proceso de estudio sobre los SN que contenga las cuestiones que le dan sentido, es imprescindible tener en cuenta todas estas *restricciones* así como discernir el *nivel institucional* (aula, escuela, sociedad, etc.) en el cual dichas restricciones pueden considerarse como *condiciones modificables*.

Agradecimientos : Este trabajo ha sido realizado dentro del Proyecto EDU2008/02750, Plan Nacional de I+D+I (2008-2011).

BIBLIOGRAFÍA

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 247 – 280.

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20 (1). 7-40.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M., Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica. En Ruiz-Higueras, L.; Estepa, A., García, F.J. (Eds). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica*. (385- 406). Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (1985, 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage. [Traducción en español de Claudia Gilman (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique].

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Guitel, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris: Flammarion.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tesis Doctoral. UCM. Madrid. (Consulta : 6/02/2009).Recuperable en http://www.ucm.es/BUCM/tesis/edu/ucm-t%2029075.pdf

TEXTOS ESCOLARES

Aizpún A., otros (1976). *Los números y el cálculo numérico*. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid: Editorial Gráficas Torroba.

Aizpún, A. (1970). *Teoría y didáctica de la matemática actual*. Barcelona: Editorial Vicens-Vives.

Díaz Godino, J. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros. Manual para el estudiante*. (Consulta: 26/03/2009). Recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/manual/matematicas_maestros.pdf

García Pradillo, J. (1957). *Aritmética y su metodología y Álgebra*. Madrid: Editorial Nuevas Gráficas.

García Pradillo, J. (1969). *Matemática de siempre. Didáctica de hoy.* Tomo 1. Madrid: Editorial Nuevas Gráficas.

Martínez, J. y otros (1981). *Matemáticas–1 (Escuelas Universitarias de Profesorado de E.G.B.)*. Madrid: Editorial SM.

Nichols, E.D., Swain, R.L. (1975). *Matemáticas para el maestro de enseñanza elemental.* México: Editorial CECSA.

Nortes Checa, A. (1978). *Matemáticas primer curso. Escuelas Universitarias del profesorado de E.G.B.* Burgos: Editorial Santiago Rodríguez, S.A..

Roanes Macías, E. (1972). *Matemáticas para profesores.* Salamanca: Editorial Anaya.

Roanes Macías, E. (1983). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Anaya.

Sabrás Gurrea, A. (1931). *Aritmética razonada*. Barcelona: Imprenta Ángel Ortega.

Taboas Salvador, J. (1942). *Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría*. Madrid: Gráficas Sánchez.

Taboas Salvador, J. (1943). *Matemáticas segundo curso*. Madrid: Imprenta Sáez.

Xiberta y Roqueta, M. (1934). *Metodología de las Matemáticas*. Gerona: Talleres de Salomón Marqués.