UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Geometría y Topología

PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN DE CURVAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Víctor Gonzalo Fernández Mateos

Bajo la dirección de los doctores
Jaime Muñoz Masqué
Marco Castrillón López

Madrid, 2009

- **ISBN: 978-84-692-2412-0**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN DE CURVAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

por

Víctor Gonzalo Fernández Mateos

Memoria presentada al Departamento de Geometría y Topología
para optar al grado de

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Junio de 2008

Dirigida por: Jaime Muñoz Masqué, Investigador Científico
del Instituto de Física Aplicada, CSIC,
Marco Castrillón López, Profesor Titular
de la Universidad Complutense de Madrid

PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN DE CURVAS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

por

Víctor Gonzalo Fernández Mateos
Licenciado en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid

Presentada al Departamento de Geometría y Topología
para optar al grado de

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por la

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Junio de 2008

Firma del autor

Dirigida por: Jaime Muñoz Masqué, Investigador Científico
del Instituto de Física Aplicada, CSIC,
Marco Castrillón López, Profesor Titular
de la Universidad Complutense de Madrid

Aceptada por: Jesús María Ruiz Sancho,
Director del Departamento de Geometría y Topología
de la Universidad Complutense de Madrid

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

1. Resumen

Sea (M, g) una variedad riemanniana. Dos curvas

$$\sigma, \overline{\sigma} \colon (a, b) \to (M, g)$$

se dice que son *congruentes* si existe una isometría $\phi \colon U \to M$ de (M, g) definida en un entorno abierto U de la imagen de σ, tal que: $\phi \circ \sigma = \overline{\sigma}$.

En este trabajo se estudia el problema de congruencia de curvas en variedades riemannianas y se determinan invariantes que permiten decidir de modo eficiente por métodos computacionales cuándo dos tales curvas son congruentes, al menos localmente.

En el caso de las variedades de curvatura constante, se estudia el conjunto de clases de equivalencia de jets de curvas hasta un orden dado módulo el grupo de isometrías.

Se da también una interpretación geométrica de la curvatura total de una curva con valores en una variedad riemanniana arbitraria.

2. Clasificación y palabras clave

Mathematics Subject Classification 2000

Primaria:

53A55: Differential invariants (local theory) geometric objects

Secundaria:

53A04: Curves in Euclidean space
53A35: Non-Euclidean differential geometry
53B20: Local Riemannian geometry
53B21: Methods of Riemannian geometry
51F20: Congruence and orthogonality
53C35: Symmetric spaces
58A20: Jets
58B20: Riemannian, Finsler and othe geometric structures
57N75: General position and transversality
58D17: Manifolds of metrics (esp. Riemannian)

58D27: Moduli problems for differential geometric structures

Palabras clave

Curvas de Frénet, curvatura total de una curva, isometrías, invariantes diferenciales, jets, métricas riemannianas.

3. Orígenes y desarrollos anteriores

Un teorema clásico de Frénet (e.g., véase [**37**, Capítulo 1, Sección 1-8]) establece que dos curvas parametrizadas por la longitud de arco en $\mathbb{R}^m$ son congruentes si y sólo si tienen las mismas curvaturas.

Este resultado se extendió a curvas de Frénet con valores en variedades de curvatura constante en [**31**]. (La noción de referencia de Frénet ha sido dada también (véase [**35**]) para inmersiones de variedades de dimensión mayor que 1 en un espacio euclídeo). También se estudia el caso en el que tanto la variedad como las curvas de Frénet son analíticas, llegando a la conclusión de que estas curvas son congruentes en torno a un punto si y solamente si los ángulos que forman las derivadas covariantes sucesivas del campo tangente coinciden en el punto. Además se prueba que este resultado es característico de las variedades de curvatura constante, es decir, si la igualdad de las curvaturas caracteriza la congruencia de curvas entonces la variedad tiene curvatura constante.

El problema de congruencia de curvas ha sido tratado en [**18**] para algunos ejemplos de variedades riemannianas, tales como la grassmanniana de 2-planos orientados de $\mathbb{R}^4$, el espacio simétrico $\mathbb{C}P^2$, etc. Para variedades riemannianas homogéneas, este problema se ha abordado en [**12**] y en [**13**] usando el método clásico de la "moving frame" de Élie Cartan.

Quedaba, pues, pendiente formular un enunciado general que permitiera resolver el problema de congruencia de curvas en variedades riemannianas arbitrarias.

4. Resumen de los contenidos

4.1. Capítulo 2. En este capítulo se enumeran las principales notaciones y resultados que se usan de la geometría riemanniana, tales como la *derivada covariante* de un tensor, la *curvatura* de una variedad riemanniana y las *isometrías* en dicha variedad riemanniana.

4.2. Capítulo 3. En este capítulo se presentan las nociones sobre *jets* de secciones de fibrados arbitrarios y, más concretamente *jets de curvas*, que se utilizan en el resto del trabajo. Usando este lenguaje de jets de curvas se obtiene una expresión local para las derivadas covariantes sucesivas del campo tangente de una curva.

También se muestran varios resultados concernientes a la *transversalidad*, que son útiles en el capítulo 5.

4.3. Capítulo 4. Este apartado de la memoria se ocupa de probar que en una variedad riemanniana arbitraria, “en general no existen isometrías”. Con esto queremos decir que existe un subconjunto abierto y denso en el fibrado de métricas riemannianas formado por métricas cuyo grupo de isometrías es discreto, o equivalentemente, que cualquier *campo de Killing* es nulo.

Para verlo primero se presenta el *fibrado de métricas riemannianas* de una variedad diferenciable.

A continuación se definen los *invariantes métricos* de orden r, que son funciones definidas en el jet de orden r de métricas riemannianas que permanecen inalteradas bajo la acción del grupo de difeomorfismos de la variedad. Además se prueba que no existen invariantes métricos de orden 1 que no sean constantes.

Entre los invariantes métricos son importantes los *invariantes de Weyl*, pues generan el anillo de invariantes métricos, por lo que para ver que una función es invariante métrico basta expresarla como polinomio en ciertos invariantes de Weyl.

En la siguiente sección de este capítulo se obtienen los denominados *invariantes de Ricci*. Como el tensor de Ricci de una variedad riemanniana es, en cada punto, bilineal y simétrico, tiene asociado un endomorfismo autoadjunto en el espacio tangente que es, por lo tanto, diagonalizable. Los invariantes de Ricci son $m = \dim M$ invariantes de orden 2 y se obtienen asignando a un 2-jet de métrica los coeficientes del polinomio característico del endomorfismo diagonalizable.

Se prueba que, cuando la dimensión de la variedad es mayor que 2, estos invariantes de Ricci son, genéricamente, funcionalmente independientes, i. e., hay un abierto denso en el 3-jet de métricas riemannianas de la variedad en el que estos invariantes métricos proyectan en funciones independientes. En el caso bidimensional se sabe ([**32**]) que sólo hay un único invariante métrico de orden 2, salvo dependencia funcional, a saber, la *curvatura de Gauss* de la variedad, por lo que, si queremos encontrar $m = 2$ invariantes independientes debemos considerar órdenes superiores. Este nuevo invariante, de orden 3, lo proporciona la norma de la diferencial de la curvatura gaussiana. Estos dos invariantes son, de nuevo genéricamente, funcionalmente independientes en el 4-jet de métricas riemannianas de la variedad.

El resultado clave de este capítulo se encuentra en la última sección. Se basa en el hecho de que un invariante métrico proyecta en una integral primera de cualquier campo de Killing. En los abiertos densos en los que hay $m = \dim M$ invariantes métricos que proyectan en funciones independientes, éstos determinan un sistema de coordenadas. Al ser integrales primeras de cualquier campo de Killing, necesariamente los campos de Killing deben ser nulos.

4.4. Capítulo 5. Este capítulo versa sobre las *curvas de Frénet*, que son curvas en *posición general hasta el orden* $m-1$, i. e., tales que las $m-2$ primeras derivadas covariantes del campo tangente son linealmente independientes en cada punto. Se demuestra que el conjunto de curvas en posición general hasta el orden $r \leqslant m-1$ es abierto y denso en $C^{\infty}(\mathbb{R}, M)$ para la *topología fuerte*, la cual se ha presentado en el capítulo 3. Además se prueba que este es el mejor resultado posible puesto que las curvas en posición general hasta el orden m no forman un subconjunto denso, debido a que los puntos de inflexión no pueden eliminarse con pequeñas perturbaciones.

Para una curva de Frénet arbitraria en una variedad riemanniana orientada puede definirse una referencia intrínseca, denominada *referencia de Frénet*, que es una referencia ortonormal a lo largo de la curva, orientada positivamente y que se obtiene a partir de las $m-2$ primeras derivadas covariantes del campo tangente aplicando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt. El último campo se define como el único que hace que la referencia esté orientada positivamente.

Asimismo se definen m funciones intrínsecas, las $m-1$ primeras de ellas positivas , llamadas *curvaturas*. Éstas se obtienen como coordenadas de las derivadas covariantes de los campos de la referencia de Frénet en la propia referencia de Frénet.

Resulta que las derivadas covariantes del campo tangente de una curva de Frénet, al ser expresadas en la referencia de Frénet, tienen componentes que únicamente dependen de las curvaturas y de sus derivadas.

Este hecho sirve para encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales de orden m que satisface toda curva de Frénet, que a su vez sirve para construir curvas de Frénet con curvaturas dadas, como soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

A continuación se expresan las curvaturas en función de los ángulos que forman las derivadas covariantes sucesivas del campo tangente entre sí, permitiendo establecer la equivalencia entre la igualdad de las curvaturas (la última en valor absoluto) y la igualdad de dichos ángulos.

Por último se define la congruencia de curvas y se demuestra que las curvaturas son invariantes por congruencia. Además se prueba que la referencia de Frénet también es invariante por congruencia, en el sentido de que los campos de la referencia de Frénet van a parar a campos de la referencia de Frénet.

4.5. Capítulo 6. En este capítulo se encuentra el resultado principal y más general de esta memoria, en el que se establecen los invariantes necesarios para caracterizar la congruencia de curvas de Frénet en variedades riemannianas analíticas.

Primero se prueba que un *isomorfismo afín* que además es isometría lineal en un punto, necesariamente es isometría.

Estos invariantes (de orden m) necesarios para caracterizar la congruencia de curvas de Frénet son, además de las curvaturas de la curva, las derivadas covariantes de la curvatura de la variedad evaluadas en los campos de la referencias de Frénet.

En general no es posible considerar sólo la curvatura; sin embargo, como el número de invariantes de orden m funcionalmente independientes es finito, el conjunto infinito de invariantes dado en el criterio general puede reducirse a un conjunto finito. El problema está en hallar una cota para el número de veces que hay que derivar la curvatura. En el caso bidimensional se prueba que, genéricamente, este número es 2.

Para probar el criterio general se hace uso de un resultado de [**21**] que requiere la analiticidad de las variedades, lo cual no es posible evitar, como se muestra en un ejemplo no analítico al final del capítulo.

4.6. Capítulo 7. El capítulo se ocupa de un ejemplo de espacio *homogéneo* no simétrico conocido como *variedad de Cartan*. Los espacios homogéneos tienen suficientes isometrías como para que el problema de congruencia sea interesante. Y sin embargo, la no simetría de la variedad complica (y hace interesante) dicho estudio de congruencia ya que se aleja de las situaciones geométricas estudiadas anteriormente en la literatura.

Primero se calcula el *álgebra de Lie de las isometrías infinitesimales* resolviendo el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que surge de la definición de isometría infinitesimal. Usando la estructura algebraica de los espacios homogéneos se prueba que este espacio no tiene curvatura constante e incluso que no es simétrico.

Para finalizar se calculan invariantes independientes en este caso concreto.

4.7. Capítulo 8. Este capítulo contiene el teorema de congruencia de curvas en una *variedad localmente simétrica*, no necesariamente analítica. Los invariantes necesarios para caraterizar la congruencia de dos curvas son, en este caso, las curvaturas de las curvas y las curvaturas seccionales en los planos generados por los campos de las referencias de Frénet, sin necesidad de derivar covariantemente la curvatura (es conocido el hecho de que en las variedades simétricas la derivada covariante de la curvatura es un tensor nulo).

También se prueba que este teorema es característico de las variedades localmente simétricas, es decir, si la congruencia de curvas de Frénet en una variedad riemanniana arbitraria se caracteriza por la igualdad de curvaturas y la igualdad de curvaturas seccionales, entonces la variedad es localmente simétrica necesariamente.

4.8. Capítulo 9. En este capítulo se presenta el teorema de congruencia de curvas en *variedades de curvatura constante*, a saber, dos curvas de Frénet con valores en una variedad de curvatura constante son congruentes si, y sólo si, sus curvaturas coinciden. De nuevo se prueba que este resultado es característico de las variedades de curvatura constante.

Para terminar el capítulo se estudia, en el caso de variedades de curvatura constante, el conjunto cociente del jet de curvas de un orden dado, módulo el grupo de isometrías.

4.9. Capítulo 10. El concepto principal del que se ocupa este capítulo es la *curvatura total* de una curva cerrada, que es el número que resulta de calcular la integral de la curvatura a lo largo de la curva. La curvatura total es un invariante métrico global, a diferencia de los invariantes que han aparecido en esta memoria hasta este momento.

Era conocido que la curvatura total de una curva convexa cerrada en el espacio euclídeo tridimensional es mayor que 2π ([**10**]). Este resultado se extendió al espacio euclídeo m-dimensional ([**3**]) y se conjeturó que en el espacio euclídeo tridimensional es mayor que 4π, lo cual se probó en [**30**]. En este último se da además una interpretación geométrica de la curvatura total como límite de la suma de los ángulos exteriores de los polígonos geodésicos inscritos en la curva. En [**15**] se extiende este concepto a curvaturas totales de órdenes superiores.

En este trabajo se generaliza esta interpretación de la curvatura total de una curva, no necesariamente cerrada, con valores en una variedad riemanniana arbitraria.

CAPÍTULO 2

Variedades riemannianas

La referencia básica para los conceptos sobre variedades diferenciables, tensores y conexiones, será [**21**]. Para profundizar en las variedades diferenciables pueden consultarse [**2**], [**8**], [**11**] y [**26**], y para profundizar en las variedades riemannianas son útiles [**7**], [**9**], [**41**] y [**42**]. En toda la memoria, las variedades involucradas serán conexas.

La *derivada covariante* de un tensor $A \in \mathcal{I}_s^r(M)$ es otro tensor, que denotamos ∇A, de bigrado $(r, s+1)$, definido por:

$$\begin{aligned} \nabla A\left(X_1, \ldots, X_{s+1}, \omega^1, \ldots, \omega^r\right) &= X_1\left(A\left(X_2, \ldots, X_{s+1}, \omega^1, \ldots, \omega^r\right)\right) \\ &\quad -A\left(\nabla_{X_1} X_2, \ldots, X_{s+1}, \omega^1, \ldots, \omega^r\right) \\ &\quad - \ldots \\ &\quad -A\left(X_2, \ldots, X_{s+1}, \omega^1, \ldots, \nabla_{X_1}\omega^r\right), \end{aligned}$$

para $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, \ldots, s+1$, $\omega^j \in \mathfrak{X}^*(M)$, $j = 1, \ldots, r$.

Definición 1. *Dada (M, g) una variedad riemanniana de dimensión $m = \dim M$, con ∇ su conexión de Levi-Civita, la* curvatura *de (M, g) es la aplicación*

$$\begin{aligned} R\colon \mathfrak{X}(M)^3 &\rightarrow \mathfrak{X}(M), \\ R(X, Y) Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \end{aligned}$$

Esta aplicación es $C^\infty(M)$-trilineal, por lo que define un tensor

$$R \in \mathcal{I}_3^1(M),$$

conocido por *tensor de curvatura de Riemann*, de la siguiente manera

$$R(Z, X, Y, \omega) = \omega(R(X, Y) Z),$$

para cualesquiera campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y cualquier forma diferencial $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Si $(U; x^i)$ es un sistema de coordenadas de M, entonces

$$R = \sum_{i,j,k,l=1}^{m} R^i_{jkl} dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \sum_{h=1}^{m} \left(\Gamma^h_{jl} \Gamma^i_{hk} - \Gamma^h_{jk} \Gamma^i_{hl} \right), \tag{0.1}$$

siendo Γ^i_{jk} los *símbolos de Christoffel de segunda especie* de la conexión de Levi-Civita ∇ ([**21**, Capítulo IV, Corollary 2.4]).

Definición 2. *El* tensor de Riemann-Christoffel R_4 *de una variedad riemanniana* (M, g) *es el tensor covariante de orden* 4 *dado por*

$$R_4(X, Y, Z, T) = g(R(Z, T)Y, X),$$

$X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 3. *Sean* (M, g) *y* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *dos variedades riemannianas de la misma dimensión* m*. Un difeomorfismo* $\phi \colon M \to \overline{M}$ *es una* isometría *si conserva la métrica, i. e.* $\phi^* \overline{g} = g$*. En este caso decimos que las variedades riemannianas* (M, g) *y* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *son* isométricas*. Si* ϕ *está definida entre abiertos de* M *y* $\overline{M}$*, respectivamente, se dice que* ϕ *es una* isometría local.

El conjunto de isometrías $I(M)$ de una variedad riemanniana (M, g) es un grupo con la composición de aplicaciones, que actúa de manera natural en M. De hecho, $I(M)$ es un grupo de Lie con la topología compacto-abierta ([**20**, Capítulo II, Theorem 1.2]).

CAPÍTULO 3

Fibrados de jets

1. Jets de secciones

Sea $p\colon E \to M$ una variedad fibrada arbitraria, esto es, p es una submersión epiyectiva.

Pongamos $\dim M = m$, $\dim E = m+n$. En lo que sigue, los índices latinos van de 1 a m, mientras que los índices griegos van de 1 a n. Se dice que un sistema de coordenadas $(U; x^i, y^\alpha)$ definido en un abierto $U \subseteq E$ es un *sistema fibrado para la proyección* p, si $x^i \in p^* C^\infty(pU)$, esto es, existe un sistema de coordenadas $(p(U); x'^i)$ en la variedad M tal que: $x^i = x'^i \circ p$, $i = 1, \dots, m$.

Se designa por $V(p)$ el subfibrado del fibrado tangente formado por los vectores verticales respecto de la proyección p; i.e.,

$$V(p) = \{X \in TE : p_* X = 0\}.$$

Localmente, si $(U; x^i, y^\alpha)$ es un sistema fibrado de coordenadas para p, entonces:

$$V(p)|_U = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\rangle.$$

Un *morfismo* de la variedad fibrada $p\colon E \to M$ a la variedad fibrada $p'\colon E' \to M'$ es un par de aplicaciones diferenciables $\Phi\colon E \to E'$, $\phi\colon M \to M'$ tal que: $p' \circ \Phi = \phi \circ p$. En estas condiciones, la aplicación ϕ es única, puesto que p y p' son epiyectivas.

Se denota por $p_r\colon J^r(E) \to M$ el fibrado de los r-jets de secciones locales de p y por $j^r s\colon U \to J^r(E)$ la extensión r-jet de una sección $s\colon U \to E$ definida en un abierto $U \subseteq M$. Se escribe $j^r_x s$ en vez de $j^r s(x)$, $\forall x \in U$. Así mismo, para cada $r > r'$ se denota por $p_{rr'}\colon J^r(E) \to J^{r'}(E)$ la proyección canónica: $p_{rr'}(j^r_x s) = j^{r'}_x s$, $\forall j^r_x s \in J^r(E)$.

Si la variedad fibrada $p\colon E \to M$ es un producto directo, es decir, $E = M \times F$ y $p(x,y) = x$, entonces las secciones de p se identifican a las aplicaciones de M en F, mediante la gráfica de la aplicación, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} s_f\colon M & \to & E, \\ s_f(x) & = & (x, f(x)), \quad \forall x \in M. \end{array}$$

En este caso, se escribe $J^r(M,F)$ en vez de $J^r(E)$ y se habla de r-jets de aplicaciones.

Si $(\Phi,\phi)\colon E\to E'$ es un morfismo de variedades fibradas para el cual la aplicación $\phi\colon M\to M'$ inducida en las bases, es un difeomorfismo, entonces se puede definir el morfismo inducido en los fibrados de jets, como sigue:

$$\begin{array}{rcl} J^r(\Phi)\colon J^r(E) & \to & J^r(E') \\ J^r(\Phi)\left(j^r_x s\right) & = & j^r_{\phi(x)}\left(\Phi\circ s\circ\phi^{-1}\right). \end{array}$$

Es fácil ver que si $(\Psi,\psi)\colon E'\to E''$ es un morfismo de variedades fibradas para el cual la aplicación $\psi\colon M'\to M''$ inducida en las bases, también es un difeomorfismo, entonces $J^r(\Psi\circ\Phi)=J^r(\Psi)\circ J^r(\Phi)$, de modo que la asignación $p\colon E\to M \rightsquigarrow p_r\colon J^r(E)\to M$ es un functor covariante respecto a la clase de morfismo mencionada.

Un *multi-índice* de longitud m y orden r es un sistema $I\in\mathbb{N}^m$, $I=(i_1,\dots,i_m)$, tal que: $|I|=i_1+\ldots+i_m=r$. Los multi-índices se ordenan "componente a componente", i.e., $I\leq I$ significa $i_h\leq j_h$ para todo $h=1,\dots,m$. La suma de multi-índices se define del mismo modo: $(I+J)_h=i_h+j_h$, y se escribe: $I!=i_1!\cdots i_m!$, $\binom{I}{J}=\frac{I!}{J!(I-J)!}$ si $J\leq I$.

Si $f\in C^r(\mathbb{R}^m)$, entonces escribiremos:

$$\frac{\partial^{|I|}f}{\partial x^I}=\frac{\partial^{|I|}f}{\partial(x^1)^{i_1}\ldots\partial(x^m)^{i_m}}.$$

Un sistema fibrado de coordenadas $(U;x^i,y^\alpha)$ induce un sistema de coordenadas $(p_{r0}^{-1}(U);x^i,y^\alpha_I)$, $I\in\mathbb{N}^m$, $|I|\leq r$, con el convenio $y^\alpha_0=y^\alpha$, y donde y^α_I, para $|I|>0$, está definido como sigue:

$$y^\alpha_I\left(j^r_x s\right)=\frac{\partial^{|I|}\left(y^\alpha\circ s\right)}{\partial x^I}(x).$$

Se sigue de lo anterior que la dimensión del fibrado de jets es igual a

$$\dim J^r(E)=\dim M+n\cdot\#\left\{I\in\mathbb{N}^m:0\leq|I|\leq r\right\}.$$

Ahora bien, $N_k=\#\left\{I\in\mathbb{N}^m:|I|=k\right\}$ es el número de combinaciones con repetición de m elementos tomados de k en k, porque un multi-índice $I=(i_1,\dots,i_m)$ de orden k equivale a dar la sucesión (no ordenada) de k elementos

$$1,\overset{(i_1}{\ldots},1,\ldots,m,\overset{(i_m}{\ldots},m,$$

que son, por definición, las combinaciones mencionadas. Por tanto,

$$N_k=\binom{m+k-1}{k}.$$

Usando la conocida propiedad de los números combinatorios (véase por ejemplo [**19**, 1.2.6]),

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{t+k}{k}=\binom{t+l+1}{l},$$

con $t=m-1$, $l=r$, se obtiene

$$\begin{aligned}\#\left\{I\in\mathbb{N}^m:0\leq|I|\leq r\right\} &= \sum_{k=0}^{r}N_k\\ &= \binom{m+r}{r},\end{aligned}$$

de donde

$$\dim J^r(E)=m+n\binom{m+r}{r}.$$

2. Jets de curvas

En esta memoria serán especialmente importantes los jets de curvas; esto es, los fibrados $p_r\colon J^r(\mathbb{R},M)\to M$, siendo M una variedad diferenciable. Adaptamos las notaciones generales anteriores al caso particular de estos fibrados, como sigue.

Para cada sistema de coordenadas $(x^1,\ldots,x^m)$ de M definido en un entorno abierto U de $x_0\in M$, se definen funciones $x^i_j\colon J^r(\mathbb{R},U)\to\mathbb{R}$ por las fórmulas:

$$\left\{\begin{array}{l} x^i_j\left(j^r_{t_0}\sigma\right)=\dfrac{d^j\left(x^i\circ\sigma\right)}{dt^j}(t_0),\\ i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,r,\end{array}\right.$$

Por convenio: $x^i_0=x^i,\quad i=1,\ldots,m.$

Los sistemas de funciones (t,x^i_j), $i=1,\ldots,m$; $j=0,\ldots,r$, constituyen un atlas para $J^r(\mathbb{R},M)$ y se tiene:

$$\dim J^r(\mathbb{R},M)=1+m(r+1).$$

Observación 1. *Si* (t,x^i_j), $i=1,\ldots,m$; $j=0,\ldots,r$, *es un sistema de coordenadas en* $J^r(\mathbb{R},M)$ *y* $r>r'$, *entonces*

$$(t,x^i_j),\quad i=1,\ldots,m; j=0,\ldots,r',$$

lo es en $J^{r'}(\mathbb{R},M)$, *por lo que si* F *es una función definida en* $J^{r'}(\mathbb{R},M)$, F *puede verse como una función definida en* $J^r(\mathbb{R},M)$ *verificando*

$$\frac{\partial F}{\partial x^i_j}=0\quad\forall j=r'+1,\ldots,r,$$

es decir, puede identificarse $F=F\circ p_{rr'}$.

3. Derivadas sucesivas del campo tangente

PROPOSICIÓN 1. *Sea* $(U; x^1, \dots, x^m)$ *un sistema de coordenadas en* M*, con* ∇ *conexión lineal. Existen funciones diferenciables*

$$\left\{ \begin{array}{c} F_i^k \colon J^k(\mathbb{R}, U) \to \mathbb{R}, \\ k \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, m = \dim M, \end{array} \right.$$

tales que:

$$\left(\nabla_T^k T\right)_t = \sum_{i=1}^m \left(\frac{d^{k+1}\sigma_i}{dt^{k+1}}(t) + F_i^k\left(j_t^k \sigma\right) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma(t)}, \tag{3.1}$$

para toda curva $\sigma \colon \mathbb{R} \to U$ *y todo* $t \in \mathbb{R}$*, siendo* $\sigma_i = x^i \circ \sigma$*.*

DEMOSTRACIÓN. Para $k = 0$, se tiene:

$$T_t = \sum_{i=1}^m \frac{d\sigma_i}{dt}(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma(t)}.$$

Por tanto: $F_i^0 = 0$. Para $k = 1$, se tiene:

$$(\nabla_T T)_t = \sum_{i=1}^m \left(\frac{d^2\sigma_i}{dt^2}(t) + \sum_{j,h=1}^m \Gamma_{jh}^i(\sigma(t)) \frac{d\sigma_j}{dt}(t) \frac{d\sigma_h}{dt}(t) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma(t)}.$$

Por tanto:

$$F_i^1 = \sum_{j,h=1}^m \Gamma_{jh}^i x_1^j x_1^h.$$

Procediendo por inducción, supongamos que se verifica:

$$\nabla_T^{k-1} T = \sum_{i=1}^m \left(\frac{d^k\sigma_i}{dt^k} + F_i^{k-1} \circ j^{k-1}\sigma \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma}, \tag{3.2}$$

donde $j^k\sigma \colon \mathbb{R} \to J^k(\mathbb{R}, U)$ es la extensión k-jet de la curva σ; i.e., $j^k\sigma(t) = j_t^k\sigma$.

Aplicando ∇_T a la ecuación (3.2) y teniendo en cuenta la regla de la cadena, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_T^k T \;=\; & \sum_{i=1}^m \left(\frac{d^{k+1}\sigma_i}{dt^{k+1}} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{\partial F_i^{k-1}}{\partial x_l^j} \circ j^{k-1}\sigma \right) \frac{d^{l+1}\sigma_j}{dt^{l+1}} \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma} \\ & + \sum_{i,j,h=1}^m \left(\frac{d^k\sigma_i}{dt^k} + F_i^{k-1} \circ j^{k-1}\sigma \right) \frac{d\sigma_j}{dt} \left(\Gamma_{ij}^h \circ \sigma\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_{\sigma}. \end{aligned}$$

En consecuencia, las funciones F_i^k existen y están determinadas recurrentemente por las siguientes fórmulas:

$$F_i^k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\partial F_i^{k-1}}{\partial x_l^j} x_{l+1}^j + \sum_{h,j=1}^{m} \Gamma_{hj}^i x_1^j \left(x_k^h + F_h^{k-1} \right). \tag{3.3}$$

□

4. Topología débil y fuerte

4.1. Topología débil C^∞.

DEFINICIÓN 4. *Sean X, Y dos espacios topológicos. Los conjuntos de la forma*

$$\{ f \in C(X,Y) : f(K) \subset V \},$$

cuando $K \subset X$ es compacto y $V \subset Y$ es un abierto, constituyen una subbase de una topología en $C(X,Y)$, conocida por topología débil *(o* topología compacto-abierta*).*

DEFINICIÓN 5. *Sean X, Y dos variedades diferenciable de clase C^∞. Se llama* topología débil de orden $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*, y se designa por C^k, a la topología asociada a la inyección*

$$j^k : C^\infty(X,Y) \to C\left(X, J^k(X,Y)\right),$$

considerando la topología débil en el espacio $C\left(X, J^k(X,Y)\right)$ (e.g., véase [**16**, Capítulo 2, Sección 4, p. 62]*).*

4.2. Topología fuerte W^∞.

DEFINICIÓN 6. *Sean X, Y espacios topológicos. Para cada aplicación $f \in C(X,Y)$ sea*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

la gráfica de f.

Los conjuntos $E_f(U) = \{g \in C(X,Y) : \Gamma(g) \subseteq U\}$, cuando U recorre la familia de abiertos de $X \times Y$ que contienen $\Gamma(f)$, constituye una base de entornos para una topología sobre $C(X,Y)$ que recibe el nombre de topología fuerte.

OBSERVACIÓN 2. *La topología fuerte es más fina que la débil y ambas coinciden si X es compacto.*

OBSERVACIÓN 3. *Si (Y,d) es un espacio métrico y X es paracompacto, los conjuntos*

$$B_\varepsilon(f) = \{g \in C(X,Y) : d\left(f(x), g(y)\right) < \varepsilon(x), \forall x \in X\}$$

constituyen una base de entornos abiertos de f para la topología fuerte, cuando ε recorre el conjunto $C(X, \mathbb{R}^+)$, e.g., véase [**16**, Capítulo 2, Sección 4, p. 59].

DEFINICIÓN 7. *Sean X, Y dos variedades diferenciable de clase C^∞. Se llama* topología fuerte *(o* de Whitney*) de orden $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, y se designa por W^k, a la topología asociada a la inyección*

$$j^k \colon C^\infty(X, Y) \to C\left(X, J^k(X, Y)\right),$$

considerando la topología fuerte en el espacio $C\left(X, J^k(X, Y)\right)$ (e.g., véase [**16**, Capítulo 2, Sección 4, p. 62]*).*

PROPOSICIÓN 2 ([**29**, Sección 3, p. 308]). *Dado un abierto*

$$U \subseteq J^k(X, Y),$$

sea

$$M_k(U) = \left\{f \in C^\infty(X, Y) : j^k_x f \in U, \forall x \in X\right\}.$$

Entonces, los conjuntos $M_k(U)$ constituyen una base de abiertos para la topología W^k cuando U recorre los abiertos de $J^k(X, Y)$.

PROPOSICIÓN 3 ([**16**, Capítulo 2, Sección 4, Theorem 4.4]). *Sean X, Y dos variedades diferenciables. Todo subespacio débilmente cerrado de $C^\infty(X, Y)$ es un espacio de Baire para la topolgía fuerte W^∞.*

OBSERVACIÓN 4. *Se verifica: $W^1 \subset W^2 \subset \ldots \subset W^\infty$.*

5. Transversalidad

DEFINICIÓN 8. *Se dice que una aplicación diferenciable entre variedades $f \colon X \to Y$ es* transversal *a una subvariedad $Z \subseteq Y$ sobre un subespacio $Z' \subseteq Z$ si, o bien $f(x) = y$ no pertenece a Z', o bien $y \in Z'$ y, en este caso, se verifica:*

$$f_* \left(T_x X\right) + T_y Z = T_y Y.$$

Es bien conocida la siguiente propiedad de las aplicaciones transversales (e. g., [**14**, Capítulo I, Sección 5, p. 28]):

PROPOSICIÓN 4. *Si $f \colon X \to Y$ es transversal a la subvariedad $Z \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X, y se verifica que la codimensión de Z en Y es la misma que la de $f^{-1}(Z)$ en X.*

TEOREMA 1 ([**39**, VII, Théorème 4.2]). *Sea Z una subvariedad de clase C^∞ de $J^q(X, Y)$, $Z' \subseteq Z$ un subespacio cerrado en $J^q(X, Y)$ y $K \subseteq X$ un subespacio cerrado. El conjunto*

$$\mathcal{U}_K = \{f \in C^\infty(X, Y) : j^q f|_K \text{ es transversal a } Z \text{ sobre } Z'\}$$

es un abierto denso en $C^\infty(X, Y)$ respecto de la topología fuerte W^∞.

Definición 9 ([**29**, Sección 6, pp. 318–319]). *Sea $Z \subseteq J^k(X,Y)$ una subvariedad y $z \in Z$ un punto en la fibra de $x \in X$. Se dice que z es un* punto transversal *de Z si existe una aplicación $f\colon U \to Y$ definida en un entorno abierto de x en X, tal que:*

1. $j^k_x f = z$,
2. $j^k f$ *es transversal a Z en x.*

Teorema 2 ([**29**, Theorem 6.1]). *Sea $Z \subseteq J^k(X,Y)$ una subvariedad. Si la codimensión de Z en $J^k(X,Y)$ es $\leq n = \dim X$, entonces el conjunto de puntos transversales es denso en Z.*

Teorema 3 ([**27**, Lemma 1, p. 45]). *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ y $S \subseteq \mathbb{R}^p$ una subvariedad de codimensión $q \leq n$, tal que en algún punto $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in S$ y f es transversal a S en x. Entonces, para cualquier entorno abierto U de x existe un entorno W_f de f en $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ respecto de la topología débil de clase C^1, tal que:*

1. *Para cualquier $g \in W_f$ hay un punto $x' \in U$ tal que $g(x') \in S$,*
2. *g es transversal a S en x'.*

CAPÍTULO 4

Isometrías en una variedad riemanniana

El propósito de este capítulo es demostrar que “en general” el grupo de isometrías $I\,(M)$ de una variedad riemanniana es discreto. “En general” significa que encontraremos un abierto denso en el espacio de métricas riemannianas en M, formado por métricas cuyo grupo de isometrías es discreto.

1. El fibrado de métricas riemannianas

Dada una variedad diferenciable M, se denota por $p\colon \mathcal{M} \to M$ su fibrado de métricas riemannianas con la estructura diferenciable inducida como subfibrado abierto de $S^2T^*(M)$; esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= p^{-1}(x) \\ &= \left\{ g_x \in S^2T_x^*M : g_x(X,X) > 0, \forall X \in T_xM, X \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Todo difeomorfismo $\phi\colon M \to M'$ induce un difeomorfismo de variedades fibradas,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}\colon \mathcal{M} &\to \mathcal{M}' \\ \bar{\phi}\,(g_x) &= S^2(\phi^*)^{-1}(g_x), \quad \forall g_x \in \mathcal{M}_x, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_*\colon T_xM \to T_{\phi(x)}M'$$

es la aplicación lineal tangente,

$$\phi^*\colon T^*_{\phi(x)}M' \to T_x^*M$$

es la aplicación lineal tangente inducida en el dual y

$$S^2(\phi^*)\colon S^2T^*_{\phi(x)}M' \to S^2T_x^*M$$

es la aplicación inducida por esta última en la segunda potencia simétrica del espacio cotangente.

Por tanto, se verifica:

$$p' \circ \bar{\phi} = \phi \circ p, \quad \forall \phi \in \mathrm{Dif}(M, M').$$

Así pues, todo difeomorfismo $\phi\colon M \to M'$ induce un difeomorfismo $J^r(\bar{\phi})\colon J^r(\mathcal{M}) \to J^r(\mathcal{M}')$ de variedades fibradas, de acuerdo a la definición general:

$$J^r(\bar{\phi})(j^r_x g) = j^r_{\phi(x)}\left(\bar{\phi}\circ g\circ \phi^{-1}\right).$$

Un sencillo cálculo demuestra que $J^r_x(\bar{\phi})\colon J^r_x(\mathcal{M}) \to J^r_{\phi(x)}(\mathcal{M}')$ sólo depende de las derivadas de orden $\leq r+1$ de las funciones componentes de ϕ en un sistema de coordenadas, i.e.,

$$\frac{\partial^{|I|}\left(x'^i\circ\phi\right)}{\partial x^I}(x), \quad |I|\leq r+1,$$

siendo (x^i), (x'^i) sendos sistemas de coordenadas alrededor de x, $\phi(x)$, en M, M', respectivamente.

Si X es un campo vectorial en M con flujo ϕ_t, entonces $\bar{\phi}_t\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}$ es el flujo de un campo $\bar{X}\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ y la aplicación $X\mapsto\bar{X}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie; i.e.,

$$\begin{aligned}\overline{\lambda X+\mu Y} &= \lambda\bar{X}+\mu\bar{Y}, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),\\ \overline{[X,Y]} &= \left[\bar{X},\bar{Y}\right], \quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M).\end{aligned}$$

Consideramos un sistema de coordenadas (x^i) en M y $(x^i, y_{ij}, y_{ij,k})$ el sistema de coordenadas en $J^1(\mathcal{M})$ inducido por el sistema de coordenadas fibrado (x^i, y_{ij}) en $\mathcal{M}$, esto es,

$$\begin{aligned}g_x &= \sum_{i\leq j} y_{ij}(g_x)(dx^i)_x\otimes(dx^j)_x\in\mathcal{M},\\ y_{ij,k}\left(j^1_x g\right) &= \frac{\partial\left(y_{ij}\circ g\right)}{\partial x^k}(x).\end{aligned}$$

Si $X\in\mathfrak{X}(M)$ tiene la expresión local $X = X^i\partial/\partial x^i$, entonces teniendo en cuenta las ecuaciones (2) de [**32**] se tiene que el levantamiento natural de X viene dado por:

$$\bar{X} = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i\leq j}\left(y_{hj}\frac{\partial X^h}{\partial x^i} + y_{ih}\frac{\partial X^h}{\partial x^j}\right)\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}). \tag{1.1}$$

Análogamente, de la fórmula (4) de [**32**] se sigue que la extensión 1-jet de $\bar{X}$ es:

$$
\begin{aligned}
(1.2) \qquad \bar{X}^{(1)} = {} & X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i \le j} \left(y_{hj} \frac{\partial X^h}{\partial x^i} + y_{hi} \frac{\partial X^h}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial y_{ij}} \\
& - \sum_{i \le j} \left(y_{hj} \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^i \partial x^k} + y_{ih} \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^j \partial x^k} + y_{hj,k} \frac{\partial X^h}{\partial x^i} \right. \\
& \left. + y_{ih,k} \frac{\partial X^h}{\partial x^j} + y_{ij,h} \frac{\partial X^h}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial y_{ij,k}} \in \mathfrak{X}\left(J^1(\mathcal{M})\right).
\end{aligned}
$$

2. Invariantes métricos

Definición 10. *Una función diferenciable* $f \colon J^r(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ *se dice que es un* invariante métrico *si verifica:*

$$f \circ J^r(\bar{\phi}) = f, \quad \forall \phi \in \operatorname{Dif}(M),$$

o equivalentemente:

$$f\left(j^r_{\phi(x)}\left(\bar{\phi} \circ g \circ \phi^{-1}\right)\right) = f\left(j^r_x g\right), \quad \forall j^r_x g \in J^r(\mathcal{M}), \forall \phi \in \operatorname{Dif}(M).$$

Proposición 5. *No existen invariantes métricos de primer orden no constantes.*

Demostración. Si una función $f \colon J^1(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ es invariante, entonces, en particular, se tiene:

$$f \circ J^r(\bar{\phi}_t) = f,$$

para todo flujo ϕ_t de M. Por tanto, derivando se deduce $\bar{X}^{(1)} f = 0$, para todo campo completo X en M. Ahora bien, los campos con soporte compacto son completos y densos en $\mathfrak{X}(M)$ para la topología C^∞. Por tanto, pasando al límite la ecuación anterior se deduce que ésta se verifica para cualquier campo de M. Así pues, de la fórmula (1.2) se deduce que si f es un invariante métrico, entonces:

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{X}^{(1)}(f) \\
&= X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - \sum_{i \le j} \left(y_{hj} \frac{\partial X^h}{\partial x^i} + y_{hi} \frac{\partial X^h}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial y_{ij}} \\
& \quad - \sum_{i \le j} \left(y_{hj} \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^i \partial x^k} + y_{ih} \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^j \partial x^k} + y_{hj,k} \frac{\partial X^h}{\partial x^i} \right. \\
& \quad \left. + y_{ih,k} \frac{\partial X^h}{\partial x^j} + y_{ij,h} \frac{\partial X^h}{\partial x^k} \right) \frac{\partial f}{\partial y_{ij,k}}.
\end{aligned}
$$

Como los valores de X^i, $\partial X^i/\partial x^j$, $\partial^2 X^i/\partial x^j \partial x^k$, $j \leq k$, en un punto dado $x \in M$, pueden tomarse arbitrariamente, la ecuación anterior equivale al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x^i}, \\ 0 &= y_{hj}\frac{\partial f}{\partial y_{ij}} + y_{hj,k}\frac{\partial f}{\partial y_{ij,k}} + \sum_{r\leq s} y_{rs,h}\frac{\partial f}{\partial y_{rs,i}}, \\ 0 &= y_{hj}\frac{\partial f}{\partial y_{ij,k}}, \end{aligned}$$

De la tercera condición se deduce:

$$\frac{\partial f}{\partial y_{ij,k}} = 0,$$

ya que la matriz (y_{hj}) es invertible, y sustituyendo dicho valor en la segunda condición se deduce:

$$\frac{\partial f}{\partial y_{ij}} = 0.$$

Por tanto, f es constante. □

Así pues, de ahora en adelante, al considerar invariantes métricos en $J^r(\mathcal{M})$ supondremos $r \geq 2$.

Definición 11 (cf. [**34**], [**40**]). *Una función $w_g \colon M \to \mathbb{R}$ se dice que es un* invariante de Weyl *de la métrica riemanniana g si tiene la forma*

$$\operatorname{tr}\left(\nabla^{i_1} R^g \otimes \ldots \otimes \nabla^{i_\mu} R^g\right), \quad i_j \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, \mu,$$

donde tr *indica la contracción completa con respecto a la métrica g de cualquier permutación de índices en el tensor $\nabla^{i_1} R^g \otimes \ldots \otimes \nabla^{i_\mu} R^g$ de bigrado $(\mu, 3\mu + i_1 + \ldots + i_\mu)$. Cada invariante de Weyl definido usando una misma traza para todas las métricas riemannianas define una función*

$$\begin{aligned} W \colon J^r(\mathcal{M}) &\to \mathbb{R}, \\ W\left(j_x^r g\right) &= w_g(x), \end{aligned}$$

siendo $r = i_1 + \ldots + i_\mu + 2$.

Se sabe que los invariantes de Weyl son invariantes métricos en el sentido de la definición anterior; e.g., véase [**32**].

3. Los invariantes de Ricci

El *tensor de Ricci* de una métrica riemanniana (M, g),

$$Ric^g \in \mathcal{I}_2^0(M),$$

viene definido por:

$$Ric^g(X, Y) = \operatorname{tr}(V \mapsto R^g(V, X)Y), \quad \forall X, Y, V \in \mathfrak{X}(M),$$

donde $R^g \in \mathcal{I}_3^1(M)$ es el tensor de curvatura de g. En un sistema de coordenadas $(U; x^i)$, las componentes de este tensor son:

$$\begin{aligned}
(Ric^g)_{ij} &= Ric^g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(V \mapsto R^g\left(V, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{a=1}^m dx^a\left(R^g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{a=1}^m (R^g)^a_{jai}.
\end{aligned}$$

Si $(E_1, \ldots, E_m)$ es una referencia ortonormal definida en un abierto $U \subseteq M$ entonces

$$Ric^g(X, Y) = \sum_{a=1}^m g(R^g(E_a, X)Y, E_a),$$

así que, debido a la simetría de R^g, el tensor de Ricci es simétrico.

En cada punto $x \in M$, Ric^g es una aplicación bilineal simétrica definida en el espacio tangente T_pM. Por tanto, existe un endomorfismo

$$\uparrow_1^1 Ric_x^g \colon T_xM \to T_xM$$

autoadjunto con respecto del producto escalar g_x, definido por la condición

$$Ric_x^g(v, w) = g_x\left(\uparrow_1^1 Ric_x^g(v), w\right), \quad v, w \in T_xM.$$

Como $\uparrow_1^1 Ric_x^g$ es autoadjunto, es diagonalizable, y tenemos una base ortonormal $(v_1, \ldots, v_m)$ de T_xM formada por autovectores. Las aplicaciones autoadjuntas $\uparrow_1^1 Ric_x^g$, $x \in M$, definen un campo tensorial $\uparrow_1^1 Ric^g \in \mathcal{I}_1^1(M)$ diagonalizable.

Si ∇ es la conexión de Levi-Civita de (M, g), el tensor de Ricci Ric^g sólo depende de $j_x^2 g$, pues los símbolos de Christoffel locales $\Gamma_{ij}^k(x)$ de ∇ sólo dependen de $j_x^1 g$ y R_x^g sólo dependen de $j_x^2 g$ ([**21**, Capítulo III, Proposition 7,6 y Capítulo IV, Corolary 2,4]).

Definición 12. *Sea*

$$c_k^g \colon M \to \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

la función diferenciable que asigna a cada punto $x \in M$ el coeficiente k-ésimo del polinomio característico del endomorfismo $\uparrow_1^1 Ric_x^g$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} I_k \colon J^2(\mathcal{M}) & \to & \mathbb{R},\ 1 \leq k \leq m, \\ I_k\left(j_x^2 g\right) & = & c_k^g(x). \end{array}$$

Lema 1. *Las funciones $I_1, \ldots, I_m$ son invariantes métricos.*

Demostración. Si $\phi \colon M \to M$ un difeomorfismo y definimos $\overline{g} = \overline{\phi} \circ g \circ \phi^{-1}$ entonces $\phi \colon (M, g) \to (M, \overline{g})$ es una isometría y, en particular, es una aplicación afín. Sea $\left(\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_m\right)$ una referencia local $\overline{g}$-ortonormal. Entonces

$$\delta_{ij} = \overline{g}\left(\overline{E}_i, \overline{E}_j\right) = g\left(\phi_*^{-1}\overline{E}_i, \phi_*^{-1}\overline{E}_i\right),$$

es decir, $\left(\phi_*^{-1}\overline{E}_1, \ldots, \phi_*^{-1}\overline{E}_m\right)$ es una referencia local g-ortonormal. Por tanto, usando [**21**, Capítulo VI, Proposition 1,2], si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} Ric^{\overline{g}}\left(\phi_* X, \phi_* Y\right) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^m \overline{g}\left(R^{\overline{g}}\left(\phi_* X, \overline{E}_i\right)\phi_* Y, \overline{E}_i\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^m g\left(R^g\left(X, \phi_*^{-1}E_i\right)Y, \phi_*^{-1}E_i\right) \\ & = & Ric^g(X, Y). \end{array} \tag{3.1}$$

En particular, se verifica que los campos $\uparrow_1^1 Ric^g(X)$ y $\uparrow_1^1 Ric^{\overline{g}}(\phi_* X)$ están ϕ-relacionados. En efecto, la condición

$$\phi_* \uparrow_1^1 Ric^g(X) = \uparrow_1^1 Ric^{\overline{g}}(\phi_* X)$$

equivale a

$$\overline{g}\left(\phi_* \uparrow_1^1 Ric^g(X), \phi_* Y\right) = \overline{g}\left(\uparrow_1^1 Ric^{\overline{g}}(\phi_* X), \phi_* Y\right), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.2}$$

Por un lado tenemos

$$\overline{g}\left(\phi_* \uparrow_1^1 Ric^g(X), \phi_* Y\right) = g\left(\uparrow_1^1 Ric^g(X), Y\right) = Ric^g(X, Y),$$

por la definición de $\overline{g}$. Por otro lado tenemos

$$\overline{g}\left(\uparrow_1^1 Ric^{\overline{g}}(\phi_* X), \phi_* Y\right) = \uparrow_1^1 Ric^{\overline{g}}(\phi_* X, \phi_* Y),$$

así que la condición (3.2) se verifica, en virtud de (3.1).

Para terminar basta notar que lo anterior significa

$$\phi^*\left(\uparrow_1^1 Ric^{\overline{g}}\right) = \uparrow_1^1 Ric^g,$$

de donde se tiene:

$$\begin{aligned}\lambda^m + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k c^g_{m-k}\lambda^{m-k} &= \det\left(\lambda Id - \uparrow^1_1 Ric^g\right)\\ &= \det\left(\lambda Id - \phi^*\left(\uparrow^1_1 Ric^{\overline{g}}\right)\right)\\ &= \lambda^m + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k c^{\overline{g}}_{m-k}\lambda^{m-k},\end{aligned}$$

luego $c^{\overline{g}}_k(\phi(x)) = c^g_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, $x \in M$, que equivale a

$$I_k\left(j^2_{\phi(x)}\left(\bar{\phi}\circ g\circ\phi^{-1}\right)\right) = I_k\left(j^2_x g\right).$$

□

Definición 13. *Las funciones $I_1, \ldots, I_m$ se denominan* invariantes de Ricci.

Observación 5. *A partir de la fórmula*

$$c^g_k = \operatorname{tr}\left(\bigwedge^{m-k} \uparrow^1_1 Ric^g\right)$$

(véase [**4**, Ex. 21, p. 153]*) y de la Definición 11 se tiene que c^g_k es combinación lineal de invariantes de Weyl, por lo que las funciones $I_1, \ldots, I_m$ son invariantes métricos.*

4. Independencia de los invariantes de Ricci

Los invariantes de Ricci definidos en la sección precedente son, genéricamente, funcionalmente independientes cuando la dimensión de la variedad M es $m \geqslant 3$.

Proposición 6. *Si $m = \dim M \geqslant 3$ entonces existe un abierto denso $\mathcal{O}$ en $J^3(\mathcal{M})$ formado por jets de métricas $j^3_x g$ tales que las funciones $I_1\circ j^2 g, \ldots, I_m\circ j^2 g$ determinan un sistema de coordenadas en torno a x, donde $I_1, \ldots, I_m$ son los invariantes de Ricci. En particular, $I_1, \ldots, I_m$ son funcionalmente independientes.*

Demostración. Si $j^3_x g \in J^3(\mathcal{M})$ entonces

$$\left(d\left(I_1\circ j^2 g\right)\wedge\ldots\wedge d\left(I_m\circ j^2 g\right)\right)(x)$$

es una m-forma de M, por lo que existe $\lambda^g(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(d\left(I_1\circ j^2 g\right)\wedge\ldots\wedge d\left(I_m\circ j^2 g\right)\right)(x) = \lambda^g(x)\operatorname{vol}_g(x),$$

donde $\mathrm{vol}_g \in \bigwedge^m T^*M$ es la forma de volumen de (M,g). Notemos que $\lambda^g(x)$ sólo depende de $j^3_x g$. Consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} I\colon J^3(\mathcal{M}) & \to & \mathbb{R}, \\ I\left(j^3_x g\right) & = & \lambda^g(x). \end{array}$$

Esta función es un invariante métrico de orden 3. En efecto, si $\phi\colon M \to M$ es un difeomorfismo y $\overline{g} = \overline{\phi} \circ g \circ \phi^{-1}$ entonces $\phi\colon (M,g) \to (M,\overline{g})$ es una isometría. Por tanto $\phi^* \mathrm{vol}_{\overline{g}} = \mathrm{vol}_g$, o equivalentemente

$$\mathrm{vol}_g(x) = \mathrm{vol}_{\overline{g}}(\phi(x)), \quad x \in M.$$

Como I_k es un invariante métrico, tenemos $I_k\left(j^2_{\phi(x)}\overline{g}\right) = I_k\left(j^2_x g\right)$, o equivalentemente $I_k \circ j^2\overline{g} \circ \phi = I_k \circ j^2 g$, para todo $k = 1, \ldots, m$. Por tanto, para cada $x \in M$ se tiene

$$\begin{array}{rcl} \lambda^{\overline{g}}(\phi(x))\,\mathrm{vol}_{\overline{g}}(\phi(x)) & = & \left(d\left(I_1 \circ j^2\overline{g}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(I_m \circ j^2\overline{g}\right)\right)(\phi(x)) \\ & = & \left(d\left(I_1 \circ j^2 g\right) \wedge \ldots \wedge d\left(I_m \circ j^2 g\right)\right)(x) \\ & = & \lambda^g(x)\,\mathrm{vol}_g(x) \\ & = & \lambda^g(x)\,\mathrm{vol}_{\overline{g}}(\phi(x)). \end{array}$$

Entonces $\lambda^{\overline{g}}(\phi(x)) = \lambda^g(x)$, que equivale a

$$I\left(j^3_{\phi(x)}\left(\overline{\phi} \circ g \circ \phi^{-1}\right)\right) = I\left(j^3_x g\right),$$

i. e., I es un invariante métrico de orden 3.

Como la función I es racional en g_{ij} y sus derivadas hasta el tercer orden, y en $\sqrt{\det(g_{ij})}$, el conjunto $I^{-1}(0)$ o bien es el complemento de un abierto denso, o bien es $J^3(\mathcal{M})$, si I es nula. Sin embargo esta última condición no se verifica, como muestra el siguiente ejemplo. Sea $(U; x^i)$ un sistema de coordenadas en torno a un punto $x \in M$ tal que $x(U) = \mathbb{R}^m$ y $x^i(x) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\left(x^i(x)\right)^2 \neq \left(x^j(x)\right)^2$ si $i \neq j$. Consideremos la métrica riemanniana definida en torno a x por

$$g_{ij} = \delta_{ij} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{\left(x^k\right)^2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\mathrm{Jac}\left(I_1 \circ j^2 g, \ldots, I_m \circ j^2 g\right)(x) \\ &\qquad = C(m) \prod_{k=1}^{m} \left(x^k(x)\right)^r \prod_{i<j} \left(\left(x^i(x)\right)^2 - \left(x^j(x)\right)^2\right) \neq 0, \end{aligned}$$

donde Jac indica el jacobiano y $C(m)$ y r son constantes no nulas que dependen de la dimensión $m \geqslant 3$ ($r = m(m-1) - 1$). Como

$$I\left(j_x^3 g\right) = \mathrm{Jac}\left(I_1 \circ j^2 g, \ldots, I_m \circ j^2 g\right)(x) / \det(g_{ij}),$$

necesariamente $I\left(j_x^3 g\right) \neq 0$.

Por consiguiente, el abierto $\mathcal{O} = J^3(\mathcal{M}) - I^{-1}(0)$ es denso. Si $j_p^2 g \in \mathcal{O}$ entonces $d_x\left(I_1 \circ j^2 g\right), \ldots, d_x\left(I_m \circ j^2 g\right)$ son linealmente independientes, luego $I_1 \circ j^2 g, \ldots, I_m \circ j^2 g$ son funcionalmente independientes en un entorno de x, por lo que definen un sistema de coordenadas en p. $\square$

OBSERVACIÓN 6. *En el caso bidimensional $m = 2$, el tensor de Ricci es proporcional a la métrica; en efecto, basta usar las fórmulas de cambio conforme de la métrica y el Teorema de las coordenadas isotermas (ver [**24**]). De hecho se sabe*

$$Ric^g = K^g\left(dx^2 + dy^2\right),$$

*donde K^g es la curvatura gaussiana. Por tanto $c_0^g = \left(K^g\right)^2$ y $c_1^g = 2K^g$ son funcionalmente dependientes. Por el Teorema 17 de [**32**] sabemos que no hay más que un único invariante de segundo orden (salvo dependencia funcional), a saber, la curvatura gaussiana. Por tanto, en el caso bidimensional necesitamos considerar invariantes de orden superior.*

Sea g una métrica riemanniana en una superficie M, y K^g su curvatura gaussiana. Como $K^g = C_{11}C_2^1\left(R^g\right)$ es un invariante de Weyl (Definición 11), la función

$$\begin{array}{rcl} K\colon J^2(\mathcal{M}) & \to & \mathbb{R}, \\ K\left(j_x^2 g\right) & = & K^g(x), \end{array}$$

es invariante métrico de orden 2.

Consideramos la función $w_g = \left\|dK^g\right\|^2 : M \to \mathbb{R}$. Como

$$dK^g = C_{23}C_2^1\left(\nabla R^g\right)$$

es invariante de Weyl, la función w^g también es invariante de Weyl. Por tanto, la función

$$\begin{array}{rcl} W\colon J^3(\mathcal{M}) & \to & \mathbb{R}, \\ W\left(j_x^3 g\right) & = & \left\|dK^g\right\|^2(x), \end{array}$$

es invariante métrico de orden 3.

PROPOSICIÓN 7. *Si $m = \dim M = 2$, existe un abierto denso $\mathcal{O}$ en $J^4(\mathcal{M})$ formado por jets de métricas $j_x^4 g$ tales que las funciones $K \circ j^2 g$, $W \circ j^3 g$ determinan un sistema de coordenadas en torno a*

x. En particular las funciones $K \circ j^2 g$, $W \circ j^3 g$ son funcionalmente independientes.

Demostración. Si $j^4_x g \in J^4(\mathcal{M})$ entonces

$$\left(d\left(K \circ j^2 g\right) \wedge d\left(W \circ j^3 g\right)\right)(x)$$

es una 2-forma de M, por lo que existe $\lambda^g(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(d\left(K \circ j^2 g\right) \wedge d\left(W \circ j^3 g\right)\right)(x) = \lambda^g(x)\, \mathrm{vol}_g(x),$$

donde $\mathrm{vol}_g \in \bigwedge^2 T^*M$ es la forma de volumen de (M, g). Como en la Proposición anterior, la función

$$\begin{array}{rcl} I\colon J^4(\mathcal{M}) & \to & \mathbb{R}, \\ I\left(j^4_x g\right) & = & \lambda^g(x), \end{array}$$

es un invariante métrico, pero ahora de orden 4. De nuevo

$$I^{-1}(0) \neq J^4(\mathcal{M})$$

pues I no es nula, como muestra el siguiente ejemplo. Sea $(U; (x^1, x^2))$ un sistema de coordenadas en torno a un punto $x \in M$, tal que $x^1(x), x^2(x) \neq 0$ y $\left(x^1(x)\right)^2 - \left(x^2(x)\right)^2 \neq 0$, y sea g la métrica riemanniana definida en torno a x por

$$g_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{(x^1 x^2)^2}.$$

Entonces

$$K^g = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2$$

y

$$\|dK^g\|^2 = 4\left(x^1\right)^2 \left(x^2\right)^2 \left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right).$$

Por tanto

$$\mathrm{Jac}\left(K \circ j^2 g, W \circ j^3 g\right) = 16 x^1 x^2 \left(x^1 - x^2\right)\left(x^1 + x^2\right)\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right),$$

luego $I\left(j^4_x g\right) \neq 0$.

Tomando $\mathcal{O} = I^{-1}(0)$ se concluye. □

5. Inexistencia genérica de isometrías

Teorema 4. *Si $m = \dim M \geqslant 3$ entonces existe un abierto denso $\mathcal{O}$ en $J^3(\mathcal{M})$ formado por jets de métricas que no tienen campos de Killing no nulos, por lo que el grupo de isometrías $I(M)$ es discreto.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $g \in \mathcal{M}$. Si X es un campo de Killing de (M, g) e $f \colon J^r(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ es un invariante métrico entonces $f \circ j^2 g \in C^\infty(M)$ es una integral primera de X, es decir,

$$X\left(f \circ j^2 g\right) = 0.$$

En efecto, sea ϕ_t el flujo de X, que es una isometría local de (M, g), en particular, es un difeomorfismo local de M. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} (5.1) \qquad \left(f \circ j^2 g\right)(x) &= f\left(j^2_x g\right) = f\left(j^2_{\phi_t(x)}\left(\overline{\phi_t} \circ g \circ \phi_t^{-1}\right)\right) \\ &= \left(f \circ j^2\left(\overline{\phi_t} \circ g \circ \phi_{-t}\right)\right)\left(\phi_t(x)\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta

$$\left(\overline{\phi_t} \circ g\right)_q = \overline{\phi_t}\left(g_q\right) = \phi^*_{-t}\left(g_q\right) = g_{\phi_t(q)}, \quad \forall q,$$

donde la última igualdad se tiene por ser ϕ_t una isometría local de (M, g), deducimos

$$\left(\overline{\phi_t} \circ g \circ \phi_{-t}\right)_q = \left(\overline{\phi_t} \circ g\right)_{\phi_{-t}(q)} = g_q, \quad \forall q,$$

es decir $\overline{\phi_t} \circ g \circ \phi_{-t} = g$. Sustituyendo en (5.1) se tiene

$$\left(f \circ j^2 g\right)(x) = \left(f \circ j^2 g\right)\left(\phi_t(x)\right),$$

luego la función $f \circ j^2 g$ es constante a lo largo de las curvas integrales de X. Por tanto $X\left(f \circ j^2 g\right) = 0$.

Por la Proposición 6, si $j^3_x g \in \mathcal{O}$, entonces $(I_1 \circ j^2 g, \ldots, I_m \circ j^2 g)$ es un sistema de coordenadas en torno a x, y además $I_1, \ldots, I_m$ son invariantes métricos. Por tanto $X\left(I_k \circ j^2 g\right) = 0$ para todo $k = 1, \ldots, m$, luego necesariamente $X = 0$ en torno a x. Como x es arbitrario, el campo de Killing X es nulo en M. □

Teorema 5. *Si $m = \dim M = 2$ entonces existe un abierto denso $\mathcal{O}$ en $J^4(\mathcal{M})$ formado por jets de métricas que no tienen campos de Killing no nulos, por lo que el grupo de isometrías $I(M)$ es discreto.*

Demostración. Por la Proposición 7, sabemos que si $j^4_x g \in \mathcal{O}$, entonces $(I \circ j^2 g, W \circ j^3 g)$ es un sistema de coordenadas en torno a x, y además I, W son invariantes métricos. Por tanto $X\left(I \circ j^2 g\right) = 0$ y $X\left(W \circ j^3 g\right) = 0$, luego necesariamente $X = 0$ en torno a x. Como x es arbitrario, el campo de Killing X es nulo en M. □

CAPÍTULO 5

Curvas de Frénet

En esta memoria estudiamos el problema de clasificación de curvas de Frénet, por lo que resulta una cuestión clave saber en qué medida es posible caracterizar curvas de Frénet congruentes mediante la igualdad de las curvaturas. Es conocido el caso euclídeo tridimensional $M = \mathbb{R}^3$, que se denomina *Teorema fundamental de la Teoría Local de Curvas* (ver por ejemplo [**6**, Capítulo 1, Sección 1.5, p. 33]), así como el caso de variedades de curvatura constante ([**31**]), que tratamos en el Capítulo 9. De hecho, se prueba que si se puede caracterizar la congruencia de curvas a partir de las curvaturas de las curvas entonces la variedad tiene curvatura constante ([**31**, Theorem 2]). En consecuencia, para obtener un critrerio general de congruencia de curvas de Frénet vamos a necesitar nuevos invariantes por congruencia. Este tema será tratado en profundidad en el Capítulo 6 (Teorema 6).

1. Curvas en posición general

DEFINICIÓN 14. *Una curva* $\sigma\colon (a,b) \to M$ *con valores en una variedad* M *provista de una conexión lineal* ∇ *se dice que está en* posición general hasta el orden r*,* $r = 1, \dots, m-1$*,* $m = \dim M$*, en* $t_0 \in (a,b)$ *si las derivadas covariantes* $T, \nabla_T T, \dots, \nabla_T^{r-1} T$ *son linealmente independientes en* t_0*.*

Se dice que σ *está* en posición general hasta el orden r *si lo está en todo punto* $t \in (a,b)$*.*

OBSERVACIÓN 7. *Geométricamente, las curvas* σ *situadas en posición general hasta el orden* r *en* t_0 *están "alabeadas" hasta el orden* r *en el punto* $\sigma(t_0)$*, en el sentido de que ningún entorno* $\{\sigma(t) : |t - t_0| < \varepsilon\}$ *de la curva está contenido en una subvariedad autoparalela (cf.* [**21**, Capítulo VII, Sección 8]*) de* M *de dimensión* $< r$*. Como ejemplo, considérese el caso del espacio euclídeo* $M = \mathbb{R}^m$ *provisto de la conexión euclídea, en el que las únicas subvariedades autoparalelas cerradas son los subespacios de la estructura afín.*

OBSERVACIÓN 8. *La condición de que una curva esté situada en posición general hasta el primer orden, es evidentemente independiente* *de la conexión lineal que se considere; pero para órdenes $r > 1$ la condición de estar en posición general sí depende de la conexión elegida. Por ejemplo, la curva*

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3, \\ \sigma(t) & = & (\exp t, \exp t, \exp t)\,, \end{array}$$

no está situada en posición general al segundo orden respecto de la conexión euclídea ∇, pues: $\nabla_T T = T$; pero sí lo está respecto de la conexión lineal ∇' definida por los siguientes símbolos de Christoffel en coordenadas euclídeas:

$$\Gamma'^{1}_{11} = 1; \quad \Gamma'^{i}_{jk} = 0, \forall (i,j,k) \neq (1,1,1).$$

Proposición 8. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m provista de una conexión lineal ∇. El conjunto de curvas en posición general hasta el orden $r \leqslant m-1$ es abierto y denso en $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ para la topología fuerte.*

Demostración. Utilizando las fórmulas (3.1) del Capítulo 3 se comprueba que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi^r_\nabla\colon J^r(\mathbb{R}, M) & \to & \mathbb{R}\times(\oplus^r TM)\,, \\ \Phi^r_\nabla\left(j^r_{t_0}\sigma\right) & = & \Big(t_0; T_{t_0}, \left(\nabla_T T\right)_{t_0}, ..., \left(\nabla_T^{r-1} T\right)_{t_0}\Big)\,, \end{array}$$

es un difeomorfismo de variedades sobre $J^0(\mathbb{R}, M) = \mathbb{R}\times M$. Sea

$$E = \left\{\left(t, X^1, \dots, X^r\right) \in \mathbb{R}\times(\oplus^r TM) : X^1\wedge\dots\wedge X^r = 0\right\},$$

y para cada $k = 1, \dots, r-1$ y cada sistema estrictamente creciente de índices $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$, sea

$$E_{i_1,\dots,i_k} = \left\{ \begin{array}{l} (t, X^1, \dots, X^r) \in \mathbb{R}\times(\oplus^r TM) : \\ X^{i_1}\wedge\dots\wedge X^{i_k} \neq 0, \\ X^{j_1}, \dots, X^{j_{r-k}} \in \langle X^{i_1}, \dots, X^{i_k}\rangle \end{array} \right\},$$

siendo $j_1 < \dots < j_{r-k}$ la sucesión complementaria de $i_1 < \dots < i_k$ en $\{1, 2, \dots, r\}$.

Finalmente, sea $E_0 = \mathbb{R}\times Z$, siendo Z la sección cero de $\oplus^r TM$; esto es,

$$Z = \{(0_x, \dots, 0_x) \in \oplus^r T_x M : x \in M\}\,.$$

Claramente, se tiene:

$$E = E_0 \cup \bigcup_{k=1}^{r-1} \bigcup_{i_1<\dots<i_k} E_{i_1,\dots,i_k}.$$

Por otra parte, el subconjunto $U_k \subset \oplus^k TM$ formado por los sistemas de k vectores tangentes en un mismo punto linealmente independientes, es abierto. Sea

$$A_{i_1,\dots,i_k}\colon \mathbb{R}^{1+k(r-k)} \times U_k \to \mathbb{R} \times (\oplus^r TM)$$

la aplicación definida como sigue:

$$A_{i_1,\dots,i_k}\big(t;\lambda_1^1,\dots,\lambda_k^1,\dots,\lambda_1^{r-k},\dots,\lambda_k^{r-k};X^1,\dots,X^k\big)=\big(t;\bar{X}^1,\dots,\bar{X}^r\big)\,,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{X}^{i_h} &= X^h, & h &= 1,\dots,k,\\ \bar{X}^{j_h} &= \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i^h X^i, & h &= 1,\dots,r-k, \end{aligned}$$

siendo $j_1 < \ldots < j_{r-k}$, como antes, la sucesión complementaria de $i_1 < \ldots < i_k$ en $\{1,2,\dots,r\}$.

Dicha aplicación es una inmersión inyectiva cuya imagen es la subvariedad $E_{i_1,\dots,i_k}$ y se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{codim} E_{i_1,\dots,i_k} &= \dim\left(\mathbb{R}\times(\oplus^r TM)\right) - \dim E_{i_1,\dots,i_k}\\ &= (1+m+rm) - (1+k(r-k)+m+km)\\ &= (m-k)(r-k)\\ &\geq m+1-r. \end{aligned}$$

Obsérvese que el producto $(m-k)(r-k)$ es mínimo cuando k es máximo, i.e., cuando $k=r-1$, en cuyo caso dicho producto vale $m+1-r$.

Como Φ_∇^r es un difeomorfismo,

$$Y_{i_1,\dots,i_k} = \left(\Phi_\nabla^r\right)^{-1}\left(E_{i_1,\dots,i_k}\right)$$

es una subvariedad de $J^r(\mathbb{R},M)$ de codimensión $(m-k)(r-k)$.

Por el teorema de transversalidad de Thom (véase Teorema 1 de la sección 5 del Capítulo 3) el conjunto de curvas $\sigma\colon \mathbb{R}\to M$ cuya extensión r-jet, $j^r\sigma$, es transversal a $Y_{i_1,\dots,i_k}$ es un subconjunto residual (y, por tanto, denso) de $C^\infty(\mathbb{R},M)$ para la topología fuerte. Para tales curvas,

$$\left(j^r\sigma\right)^{-1}\left(Y_{i_1,\dots,i_k}\right)$$

es una subvariedad de la recta de codimensión $(m-k)(r-k) \geq m+1-r$. Si $r \leq m-1$, eso no es posible a menos que dicha subvariedad sea vacía. En consecuencia, para $r \leq m-1$, se verifica:

$$\begin{aligned} &\{\sigma \in C^\infty(\mathbb{R},M) : j^r\sigma \text{ es transversal a cada } Y_{i_1,\dots,i_k}\}\\ &\qquad\qquad = \mathcal{F}^r = \{\sigma\in C^\infty(\mathbb{R},M) : j^r\sigma\left(\mathbb{R}\right)\cap Y=\emptyset\}\,, \end{aligned}$$

donde

$$Y = Y_0 \cup \bigcup_{k=1}^{r-1}\ \bigcup_{i_1<\ldots<i_k} Y_{i_1,\dots,i_k}.$$

Por tanto, si $\sigma \in \mathcal{F}^r$, entonces

$$\Phi^r_\nabla \left(j^r\sigma\left(\mathbb{R}\right)\right) \cap E = \emptyset.$$

Es decir, σ es una curva situada en posición general hasta el orden r respecto de la conexión elegida.

Veamos finalmente que $\mathcal{F}^r$ es abierto. Sea d una distancia que defina la topología de $J^r(\mathbb{R}, M)$. Para cada $\sigma \in \mathcal{F}^r$ sea $\delta_\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la función

$$\delta_\sigma(t) = d\left(j^r_t\sigma, Y\right) > 0,$$

que está bien definida, pues Y es cerrado. El conjunto

$$U(\sigma) = \{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : d\left(j^r_t\sigma, j^r_t\gamma\right) < \delta_\sigma(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

es un entorno de σ en la topología fuerte de orden r y, por tanto, en la topología fuerte de orden ∞. Como $\gamma \in U(\sigma)$ implica $\gamma \in \mathcal{F}^r$, se concluye. $\square$

Observación 9. *El enunciado de la proposición anterior es el mejor posible, puesto que las curvas situadas en posición general hasta el orden* $m = \dim M$ *respecto de una conexión lineal* ∇ ***no*** *son densas en* $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ *para la topología fuerte. Con las mismas notaciones de la demostración de la proposición anterior, pongamos:*

$$\mathcal{F}^m = \{\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : j^m\sigma(\mathbb{R}) \cap Y = \emptyset\},$$

$$\bar{\mathcal{F}}^m = \{\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : j^m\sigma \text{ es transversal a cada } Y_{i_1,\dots,i_k}\}.$$

El conjunto $\bar{\mathcal{F}}^m$ *es denso en* $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ *por ser residual y* $\mathcal{F}^m$ *coincide con el conjunto de las curvas situadas en posición general hasta el orden* m*. Para probar que* $\mathcal{F}^m$ *no es denso, basta ver que existe un abierto contenido en su complementario. Sea*

$$\begin{aligned} Y' &= \bigcup_{k=0}^{m-2} \bigcup_{i_1<\dots<i_k} Y_{i_1,\dots,i_k}, \\ Y_i &= \left(\Phi^m_\nabla\right)^{-1}(E_i), \quad 1 \le i \le n, \end{aligned}$$

donde

$$E_i = \left\{ \begin{array}{l} (t, X^1, \dots, X^m) \in \mathbb{R} \times (\oplus^m TM) : \\ X^1 \wedge \dots \wedge \widehat{X^i} \wedge \dots \wedge X^m \neq 0, \\ X^i \in \left\langle X^1, \dots, \widehat{X^i}, \dots, X^m \right\rangle \end{array} \right\}$$

Es claro que Y *es la unión de* Y' *y de* $Y_1, \dots, Y_m$*.*

La intersección $Y_0 = Y_1 \cap \dots \cap Y_m$ *es un abierto en cada* Y_i*, de modo que* Y_0 *es una subvariedad de codimensión* 1 *de* $J^m(\mathbb{R}, M)$*.*

De un conocido resultado de Mather (véase Teorema 2 de la sección 5 del Capítulo 3) se deduce que existe una curva $\sigma\colon \mathbb{R} \to M$ *tal que: 1)* $j^m\sigma$ *es transversal a* Y_0*, 2)* $j^m\sigma(\mathbb{R}) \cap Y_0 \neq \emptyset$*. Por tanto,* $j^m\sigma(\mathbb{R}) \cap Y \neq \emptyset$*.*

De un resultado de Levine (véase Teorema 3 de la sección 5 del Capítulo 3) se deduce que dada subvariedad $Z \subset Y$ *con* $\mathrm{codim} Z \leq \dim X$, *una aplicación diferenciable* $f\colon X \to Y$ *que corte transversalmente a* Z *en el punto* x, *y un entorno abierto* U *de* x, *existe un entorno* E_f *de* f *en la topología débil de clase* C^∞ *formado por aplicaciones diferenciables* $g\colon X \to Y$ *que cortan transversalemtne a* Z *en algún punto* $x' \in U$. *En consecuencia, dado un entorno* U *de* t, *existe un entorno* E_σ *de la topología débil (y, por tanto, en la fuerte), tal que si* $\tau \in E_\sigma$, *entonces* $j^m\tau$ *corta transversalmente a* Z *en algún punto* $t' \in U$. *Por tanto,* $\tau \in E_\sigma$ *implica* $j^m\tau(\mathbb{R}) \cap Y \neq \emptyset$*; es decir,* $\tau \notin \digamma^m$. *Así pues,* σ *posee un entorno formado por curvas que no pertenecen a* $\digamma^m$, *con lo que se concluye.*

2. Referencias de Frénet

Definición 15. *Una curva* $\sigma\colon\ (a,b) \to M$ *con valores en una variedad riemanniana* (M,g) *se dice que es una* curva de Frénet *si está en posición general hasta el orden* $m-1$ $(m = \dim M \geqslant 2)$ *respecto de la conexión de Levi-Civita de la métrica* g.

En una variedad riemanniana orientada, las curvas de Frénet admiten una única *referencia de Frénet*, que se define a partir de la siguiente:

Proposición 9. *Dada una curva de Frénet* $\sigma\colon\ (a,b) \to M$ *en una variedad riemanniana orientada* (M,g), *existen* m *campos vectoriales únicos* $X_1,\dots,X_m$ *definidos a lo largo de* σ *verificando:*

1. $(X_1(t),\dots,X_m(t))$ *es una base ortonormal orientada positivamente, para todo* $t \in (a,b)$.
2. *Para todo* $i = 1,\dots,m-1$ *y todo* $t \in (a,b)$ *se verifica:*
$$\langle X_1(t),\dots,X_i(t)\rangle = \left\langle T_t, (\nabla_T T)_t, \dots, \left(\nabla_T^{i-1} T\right)_t \right\rangle.$$
3. *Para todo* $i = 1,\dots,m-1$ *y todo* $t \in (a,b)$ *los sistemas* $(X_1(t),\dots,X_i(t))$ *y* $\left(T_t, (\nabla_T T)_t, \dots, \left(\nabla_T^{i-1} T\right)_t\right)$ *están igualmente orientados.*

Para construir la referencia de Frénet de una curva de Frénet

$$\sigma\colon\ (a,b) \to M$$

debemos aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt en $t \in (a,b)$ a los vectores linealmente independientes

$$\left(T_t, (\nabla_T T)_t, \dots, \left(\nabla_T^{m-2} T\right)_t\right).$$

Una vez fijada la orientación de M, sea $\mathrm{vol}_g \in \bigwedge^m T^*M$ la m-forma de volumen definida por la métrica riemanniana g en σ^*TM compatible con la orientación de M. Se completa la referencia $(X_1, \ldots, X_{m-1})$ con otro campo X_m en la curva de tal forma que $(X_1, \ldots, X_m)$ es ortonormal y se tenga

$$\mathrm{vol}_g (X_1, \ldots, X_m) = 1.$$

Definición 16. *La referencia de campos $(X_1, \ldots, X_m)$ a lo largo de una curva de Frénet σ dados en la Proposición 9 se conoce por* referencia de Frénet *asociada a σ.*

Si σ es una curva de Frénet, existen funciones diferenciables

$$\kappa_0, \ldots, \kappa_{m-1} \colon (a, b) \to \mathbb{R}$$

verificando:

1. $\kappa_j > 0$, para $j = 0, \ldots, m-2$,
2. Se satisfacen las *fórmulas de Frénet*:
   a) $T = \kappa_0 X_1$,
   b) $\nabla_{X_1} X_1 = \kappa_1 X_2$,
   c) $\nabla_{X_1} X_i = -\kappa_{i-1} X_{i-1} + \kappa_i X_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, m-1$,
   d) $\nabla_{X_1} X_m = -\kappa_{m-1} X_{m-1}$.

La función κ_0 se llama *velocidad*, pues $\kappa_0 = \|T\|$, mientras que las funciones $\kappa_1, \ldots, \kappa_{m-1}$ se llaman *curvaturas j-ésimas*. La primera curvatura κ_1 se conoce simplemente por *curvatura*, y la segunda κ_2 por *torsión*.

Observación 10. *La referencia de Frénet es única si se exige, como antes hemos hecho, que las curvaturas κ_j sean positivas para los índices $j = 0, \ldots, m-2$.*

Otra manera equivalente de construir la referencia de Frénet es la siguiente ([**36**, Capítulo 7, p. 30]). Supongamos que $\sigma \colon (a, b) \to M$ es una curva de Frénet en la variedad orientada M parametrizada por la longitud de arco, es decir, verificando que su vector velocidad T_s es unitario. Tomamos entonces $X_1 = T$. Como $g(X_1, X_1) = 1$, derivando:

$$0 = \frac{d}{ds} g(X_1, X_1) = 2g(\nabla_{X_1} X_1, X_1).$$

Se define la *primera curvatura* κ_1 de σ como sigue

$$\kappa_1 = \|\nabla_{X_1} X_1\|,$$

y como σ es de Frénet, $\kappa_1(s) \neq 0$ para todo $s \in (a, b)$, luego podemos tomar

$$X_2 = \kappa_1^{-1} \nabla_{X_1} X_1.$$

Así, X_2 es unitario y perpendicular a X_1 y tenemos la fórmula de Frénet 2.b). Derivando $1 = g(X_2, X_2)$ se obtiene

$$0 = \frac{d}{ds} g(X_2, X_2) = 2g(\nabla_{X_1} X_2, X_2),$$

y derivando $0 = g(X_1, X_2)$ se obtiene

$$0 = g(\nabla_{X_1} X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_{X_1} X_2) = \kappa_1 + g(X_1, \nabla_{X_1} X_2),$$

lo cual implica que $\nabla_{X_1} X_2 + \kappa_1 X_1$ es perpendicular a X_1 y a X_2. Se toma entonces la *segunda curvatura* de σ como

$$\kappa_2 = \|\nabla_{X_1} X_2 + \kappa_1 X_1\|,$$

y, al ser σ una curva de Frénet, $\kappa_2(s) \neq 0$ para todo $s \in (a, b)$. Entonces tomamos

$$X_3 = \kappa_2^{-1} \{\nabla_{X_1} X_2 + \kappa_1 X_1\},$$

que es unitario y perpendicular a X_1, X_2, y tenemos además la fórmula de Frénet 2.c) para $i = 2$.

Razonemos ahora inductivamente suponiendo que para $j \leqslant m$ tenemos campos ortonormales $(X_1, \ldots, X_j)$ a lo largo de σ y funciones positivas $\kappa_1, \ldots, \kappa_{j-1}$, tales que

1. $\nabla_{X_1} X_1 = \kappa_1 X_2$,
2. $\nabla_{X_1} X_i = -\kappa_{i-1} X_{i-1} + \kappa_i X_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, j-1.$

Entonces, derivando $1 = g(X_j, X_j)$ tenemos

$$0 = g(\nabla_{X_1} X_j, X_j),$$

y, cuando $i < j$, $0 = g(X_j, X_i)$ implica

$$g(\nabla_{X_1} X_j, X_i) = -g(X_j, \nabla_{X_1} X_i) = \begin{cases} 0 & i < j-1, \\ -\kappa_{j-1} & i = j-1. \end{cases}$$

Por tanto $\nabla_{X_1} X_j + \kappa_{j-1} X_{j-1}$ es perpendicular a $X_1, \ldots, X_j$.

Si $j < m$ se toma la *j-ésima curvatura* de σ

$$\kappa_j = \|\nabla_{X_1} X_j + \kappa_{j-1} X_{j-1}\|,$$

que al ser σ curva de Frénet, $\kappa_j(s) \neq 0$ para todo $s \in (a, b)$. Se toma además

$$X_{j+1} = \kappa_j^{-1} \{\nabla_{X_1} X_j + \kappa_{j-1} X_{j-1}\},$$

que es también unitario y perpendicular a $X_1, \ldots, X_j$.

Si $j = m$ el único campo perpendicular a $X_1, \ldots, X_m$ es el campo nulo, por lo que

$$\nabla_{X_1} X_m + \kappa_{m-1} X_{m-1} = 0,$$

que es la última fórmula de Frénet 2.d).

Nótese que hay una única posibilidad de elegir el campo X_m si tenemos en cuenta que la orientación de la referencia de Frénet $(X_1, \ldots, X_m)$ debe ser positiva con respecto a la orientación de M.

OBSERVACIÓN 11. *Una generalización de la construcción de referencias de Frénet de curvas en variedades semi-riemannianas puede encontrarse en* [**1**].

PROPOSICIÓN 10. *Las derivadas sucesivas del campo tangente de una curva de Frénet, al ser expresadas en función de la referencia de Frénet asociada, tienen componentes que únicamente dependen de las curvaturas de la curva y de sus derivadas.*

DEMOSTRACIÓN. Las fórmulas de Frénet $2.a) - 2.d)$ permiten expresar las derivadas covariantes sucesivas del campo tangente $\nabla_T^{j-1}T$, $j = 1, ..., m$, de una curva de Frénet σ como combinación lineal de la referencia de Frénet $(X_1, \ldots, X_m)$ asociada, en la forma:

$$\nabla_T^{j-1}T = \sum_{i=1}^{j} f_{ij} X_i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Vamos a hallar las funciones $f_{ij} \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ recurrentemente.

Cuando $j = 1$ tenemos:

$$T = \kappa_0 X_1,$$

luego

$$f_{11} = \kappa_0.$$

Cuando $j = 2$, se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \nabla_T (\kappa_0 X_1) \\ &= \frac{d\kappa_0}{dt} X_1 + \kappa_0 \nabla_T X_1 \\ &= \frac{d\kappa_0}{dt} X_1 + \kappa_0^2 \nabla_{X_1} X_1 \\ &= \frac{d\kappa_0}{dt} X_1 + \kappa_0^2 \kappa_1 X_2, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{d\kappa_0}{dt} = \frac{df_{11}}{dt}, \\ f_{22} &= \kappa_0^2 \kappa_1 = f_{11} \kappa_0 \kappa_1. \end{aligned}$$

Cuando $j = 3$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\nabla_T^2 T &= \nabla_T \left(\nabla_T T\right) \\
&= \nabla_T \left(f_{12} X_1 + f_{22} X_2\right) \\
&= \frac{df_{12}}{dt} X_1 + f_{12} \nabla_T X_1 + \frac{df_{22}}{dt} X_2 + f_{22} \nabla_T X_2 \\
&= \frac{df_{12}}{dt} X_1 + f_{12} \kappa_0 \nabla_{X_1} X_1 + \frac{df_{22}}{dt} X_2 + f_{22} \kappa_0 \nabla_{X_1} X_2 \\
&= \frac{df_{12}}{dt} X_1 + f_{12} \kappa_0 \kappa_1 X_2 + \frac{df_{22}}{dt} X_2 \\
&\quad + f_{22} \kappa_0 \left(-\kappa_1 X_1 + \kappa_2 X_3\right) \\
&= \left(\frac{df_{12}}{dt} - f_{22} \kappa_0 \kappa_1\right) X_1 + \left(\frac{df_{22}}{dt} + f_{12} \kappa_0 \kappa_1\right) X_2 \\
&\quad + f_{22} \kappa_0 \kappa_2 X_3,
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
f_{13} &= \frac{df_{12}}{dt} - f_{22} \kappa_0 \kappa_1, \\
f_{23} &= \frac{df_{22}}{dt} + f_{12} \kappa_0 \kappa_1, \\
f_{33} &= f_{22} \kappa_0 \kappa_2.
\end{aligned}
$$

Cuando $j = 4$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\nabla_T^3 T &= \nabla_T \left(\nabla_T^2 T\right) \\
&= \nabla_T \left(f_{13} X_1 + f_{23} X_2 + f_{33} X_3\right) \\
&= \frac{df_{13}}{dt} X_1 + f_{13} \nabla_T X_1 + \frac{df_{23}}{dt} X_2 + f_{23} \nabla_T X_2 \\
&\quad + \frac{df_{33}}{dt} X_3 + f_{33} \nabla_T X_3 \\
&= \frac{df_{13}}{dt} X_1 + f_{13} \kappa_0 \nabla_{X_1} X_1 + \frac{df_{23}}{dt} X_2 + f_{23} \kappa_0 \nabla_{X_1} X_2 \\
&\quad + \frac{df_{33}}{dt} X_3 + f_{33} \kappa_0 \nabla_{X_1} X_3 \\
&= \frac{df_{13}}{dt} X_1 + f_{13} \kappa_0 k_1 X_2 + \frac{df_{23}}{dt} X_2 \\
&\quad + f_{23} \kappa_0 \left(-\kappa_1 X_1 + \kappa_2 X_3\right) + \frac{df_{33}}{dt} X_3 \\
&\quad + f_{33} \kappa_0 \left(-\kappa_2 X_2 + \kappa_3 X_4\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{df_{13}}{dt} - f_{23}\kappa_0\kappa_1\right) X_1 \\ &\quad + \left(\frac{df_{23}}{dt} - f_{33}\kappa_0\kappa_2 + f_{13}\kappa_0 k_1\right) X_2 \\ &\quad + \left(\frac{df_{33}}{dt} + f_{23}\kappa_0\kappa_2\right) X_3 + f_{33}\kappa_0\kappa_3 X_4, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f_{14} &= \frac{df_{13}}{dt} - f_{23}\kappa_0\kappa_1, \\ f_{24} &= \frac{df_{23}}{dt} - f_{33}\kappa_0\kappa_2 + f_{13}\kappa_0 k_1, \\ f_{34} &= \frac{df_{33}}{dt} + f_{23}\kappa_0\kappa_2, \\ f_{44} &= f_{33}\kappa_0\kappa_3. \end{aligned}$$

Cuando $4 < j \leqslant m$, se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla_T^{j-1} T &= \nabla_T \left(\nabla_T^{j-2} T\right) = \sum_{i=1}^{j-1} \nabla_T \left(f_{i,j-1} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{df_{i,j-1}}{dt} X_i + f_{i,j-1}\kappa_0 \nabla_{X_1} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{df_{i,j-1}}{dt} X_i + f_{1,j-1}\kappa_0\kappa_1 X_2 \\ &\quad + \sum_{i=2}^{j-1} f_{i,j-1}\kappa_0 \left(-\kappa_{i-1} X_{i-1} + \kappa_i X_{i+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{df_{i,j-1}}{dt} X_i + f_{1,j-1}\kappa_0\kappa_1 X_2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^{j-2} f_{i+1,j-1}\kappa_0\kappa_i X_i + \sum_{i=3}^{j} f_{i-1,j-1}\kappa_0\kappa_{i-1} X_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{df_{1,j-1}}{dt} - f_{2,j-1}\kappa_0\kappa_1\right) X_1 \\
&\quad + \left(\frac{df_{2,j-1}}{dt} - f_{3,j-1}\kappa_0\kappa_2 + f_{1,j-1}\kappa_0\kappa_1\right) X_2 \\
&\quad + \sum_{i=3}^{j-2}\left(\frac{df_{i,j-1}}{dt} - f_{i+1,j-1}\kappa_0\kappa_i + f_{i-1,j-1}\kappa_0\kappa_{i-1}\right) X_i \\
&\quad + \left(\frac{df_{j-1,j-1}}{dt} + f_{j-2,j-1}\kappa_0\kappa_{j-2}\right) X_{j-1} + f_{j-1,j-1}\kappa_0\kappa_{j-1}X_j.
\end{aligned}$$

En general, podemos escribir

$$\nabla_T^{j-1}T = \sum_{i=1}^{j} f_{ij}X_i, \qquad j = 1, ..., m, \tag{2.1}$$

donde las funciones $f_{ij}\colon\ (a,b) \to \mathbb{R}$ vienen dadas recurrentemente por las fórmulas:

1. $f_{11} = \kappa_0, \quad j = 1,$
2. $f_{12} = \frac{df_{11}}{dt}, \quad f_{22} = f_{11}\kappa_0\kappa_1, \quad j = 2,$
3. $j = 3, ..., m$

$$f_{1j} = \frac{df_{1,j-1}}{dt} - f_{2,j-1}\kappa_0\kappa_1, \quad i = 1, \tag{2.2}$$

$$f_{ij} = \frac{df_{i,j-1}}{dt} - f_{i+1,j-1}\kappa_0\kappa_i + f_{i-1,j-1}\kappa_0\kappa_{i-1}, \quad i = 2, ..., j-2,$$

$$f_{j-1,j} = \frac{df_{j-1,j-1}}{dt} + f_{j-2,j-1}\kappa_0\kappa_{j-2}, \quad i = j-1,$$

$$f_{jj} = f_{j-1,j-1}\kappa_0\kappa_{j-1}, \quad i = j,$$

teniendo en cuenta que $f_{ij} = 0$ si $i > j$.

□

3. Curvaturas de curvas de Frénet

En esta sección queremos establecer varios resultados relacionados con las curvaturas de las curvas de Frénet, que nos van a ser útiles en secciones posteriores. En particular veremos que las curvaturas son invariantes por congruencia (Proposición 11).

Lema 2. *Sea $(U; x)$ una carta de una variedad riemanniana (M, g), de dimensión $\dim M = m$. Entonces existen unas funciones diferenciables $F_1, ..., F_m$, definidas en un abierto de $\mathbb{R}^{m^2+\frac{m(m+1)}{2}}$, tales que para cualquier curva de Frénet*

$$\sigma\colon\ (a,b) \to U, \sigma_h = x^h \circ \sigma,$$

se verifican las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^m\sigma_h}{dt^m} = F_h\left(\frac{d^a\sigma_i}{dt^a}, \frac{d^b\kappa_j}{dt^b}\right), \tag{3.1}$$

donde $a = 0, \dots, m-1$*;* $b + j = 0, \dots, m-1$*;* $h, i = 1, \dots, m$*.*

Demostración. Por un lado sabemos (Proposición 1)

$$\left(\nabla_T^{m-1}T\right)_t = \sum_{h=1}^{m}\left(\frac{d^m\sigma_h}{dt^m}(t) + F_h^{m-1}\left(j_t^{m-1}\sigma\right)\right)\left.\frac{\partial}{\partial x^h}\right|_{\sigma(t)},$$

y por otro lado (fórmula (2.1))

$$\nabla_T^{m-1}T = \sum_{k=1}^{m} f_{km}X_k,$$

por lo que, igualando estas expresiones y despejando, obtenemos

$$\frac{d^m\sigma_h}{dt^m} = \sum_{k=1}^{m} f_{km}X_k\left(x^h\right) - F_h^{m-1}\circ j^{m-1}\sigma. \tag{3.2}$$

De la fórmula (3.1) del Capítulo 3 se deduce que las componentes de $T, \dots, \nabla_T^{m-2}T$ en el sistema de coordenadas $(U; x^i)$ son funciones de

$$\frac{d^a\sigma_i}{dt^a}, \quad a = 0, \dots, m-1; i = 1, \dots, m.$$

El campo X_m se obtiene a partir de $X_1, \dots, X_{m-1}$ y de la métrica g; por consiguiente, sus componentes $X_m\left(x^h\right)$ son funciones de las componentes de $X_1, \dots, X_{m-1}$. Ahora bien, las componentes de $X_1, \dots, X_{m-1}$ son funciones de f_{ij}, $i, j = 1, \dots, m-1$, y de las componentes de $T, \dots, \nabla_T^{m-2}T$, en virtud de la fórmula (2.1), por lo que las componentes de $X_1, \dots, X_m$ son funciones de f_{ij}, $i, j = 1, \dots, m-1$, y de

$$\frac{d^a\sigma_i}{dt^a}, \quad a = 0, \dots, m-1, i = 1, \dots, m.$$

De las fórmulas (2.2) se obtiene, razonando por recursión, que las funciones f_{ij}, $i, j = 1, \dots, m$, son funciones de

$$\frac{d^b\kappa_j}{dt^b}, \quad b + j = 0, \dots, m-1.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta la fórmula (3.2), se concluye. □

Este resultado nos permite construir curvas de Frénet con curvaturas dadas, pues (3.1) puede verse como un sistema de ecuaciones diferenciales de orden m con incógnitas $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.

LEMA 3. *Sea (M,g) una variedad riemanniana de dimensión m, y sean $v_1,\dots,v_{m-1}\in T_pM$ linealmente independientes. Dadas las funciones $\kappa_{j-1}\in C^\infty(-\delta,\delta)$, $j=1,\dots,m$, $\delta>0$, con $\kappa_{j-1}>0$ para $j=1,\dots,m-1$, existe $0<\varepsilon<\delta$ y una curva de Frénet*

$$\sigma\colon\ (-\varepsilon,\varepsilon)\to M$$

tal que: $\sigma(0)=p$, $\left(\nabla_T^{j-1}T\right)_0=v_j$ para todo $j=1,\dots,m-1$, y κ_j es la curvatura j-ésima de σ.

DEMOSTRACIÓN. Tomamos $(U;x)$ una carta de M en torno a p. Podemos ver (3.1) como un sistema de ecuaciones diferenciales de orden m, cuyas incógnitas son las funciones coordenadas

$$\sigma_h=x^h\circ\sigma,\quad h=1,\dots,m,$$

con condiciones iniciales deducidas de

$$\left(\nabla_T^{j-1}T\right)_0=v_j,\quad j=1,\dots,m-1,$$

usando las fórmulas (3.1) del Capítulo 3. Por el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales (véase por ejemplo [**17**, Capítulo 8, Sección 2, Theorem 1]), obtenemos una curva $\sigma\colon\ (-\delta,\delta)\to U$ tal que

$$\sigma(0)=p,\quad \left(\nabla_T^{j-1}T\right)_0=v_j\quad\text{para todo } j=1,\dots,m-1.$$

Como la independencia lineal es una condición abierta, podemos tomar $\delta>\varepsilon>0$ tal que $\sigma\colon\ (-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ es una curva de Frénet, cuya curvatura j-ésima será κ_j. □

LEMA 4. *Sea $\sigma\colon\ (a,b)\to M$ una curva de Frénet inmersa en una variedad riemanniana (M,g). Si denotamos por Δ_k al determinante de la matriz*

$$\left(g\left(\nabla_T^{i-1}T,\nabla_T^{j-1}T\right)\right)_{i,j=1,\dots,k}$$

entonces se verifican las fórmulas

$$\begin{aligned}
\kappa_0 &= \sqrt{\Delta_1},\\
\kappa_1 &= \sqrt{\frac{\Delta_2}{(\Delta_1)^3}},\\
\kappa_i &= \frac{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}}}{\sqrt{\Delta_1}\Delta_i},\qquad i=2,\dots,m-2,\\
\kappa_{m-1} &= \frac{\operatorname{vol}_g\left(T,\nabla_TT,\dots,\nabla_T^{m-1}T\right)\sqrt{\Delta_{m-2}}}{\sqrt{\Delta_1}\Delta_{m-1}}\\
&= \frac{\varepsilon\sqrt{\Delta_{m-2}\Delta_m}}{\sqrt{\Delta_1}\Delta_{m-1}},
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon = +1$ *ó* -1 *y* $\mathrm{vol}_g \in \bigwedge^m T^*M$ *es la única forma de volumen compatible con la orientación de* M*.*

Demostración. Para $i = 0$ tenemos

$$\Delta_1 = g\left(T, T\right) = \kappa_0^2,$$

luego

$$\kappa_0 = \sqrt{\Delta_1}.$$

Por el Teorema del determinante de Gram, como $(X_1, \ldots, X_k)$ es una referencia ortonormal, usando la expresión (2.1), sabemos

$$\Delta_k = \left(\det\left(\left(f_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right)\right)^2.$$

Como la matriz $\left(f_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,k}$ es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal, luego

$$\Delta_k = f_{11}^2 \ldots f_{kk}^2.$$

Observemos en las fórmulas (2.2) que las funciones f_{jj} verifican

$$f_{jj} = \kappa_0^j \kappa_1 \ldots \kappa_{j-1}.$$

Cuando $i = 2, \ldots, m-2$ tenemos

$$\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}} = f_{11}^2 \ldots f_{i-1,i-1}^2 f_{ii} f_{i+1,i+1},$$

luego

$$\frac{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}}}{\Delta_i} = \frac{f_{i+1,i+1}}{f_{ii}} = \kappa_0 \kappa_i.$$

Por tanto

$$\frac{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}}}{\sqrt{\Delta_1}\Delta_i} = \kappa_i.$$

Finalmente, para la última fórmula basta notar

$$\mathrm{vol}_g\left(T, \nabla_T T, \ldots, \nabla_T^{m-1} T\right) = \pm\sqrt{\Delta_m}\mathrm{vol}_g\left(X_1, \ldots, X_m\right) = \pm\sqrt{\Delta_m},$$

que nos da

$$\frac{\pm\sqrt{\Delta_{m-2}\Delta_m}}{\sqrt{\Delta_1}\Delta_{m-1}} = \kappa_{m-1}.$$

$\square$

Lema 5. *Sean* $\sigma\colon (a,b) \to M$ *y* $\overline{\sigma}\colon (a,b) \to \overline{M}$ *dos curvas de Frénet, siendo* (M, g) *y* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *dos variedades riemannianas. Entonces* $|\kappa_i| = |\overline{\kappa}_i|$ *para todo* $i = 0, \ldots, m-1$ *si, y sólo si,*

$$g\left(\nabla_T^{i-1} T, \nabla_T^{j-1} T\right) = \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{i-1}\overline{T}, \overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1}\overline{T}\right), \tag{3.3}$$

para todo par de enteros $i, j = 1, \ldots, m$*, siendo* $\nabla, \overline{\nabla}$ *las conexiones de Levi-Civita asociadas a* g *y* $\overline{g}$*.*

Demostración. Es obvio que si

$$g\left(\nabla_T^{i-1}T, \nabla_T^{j-1}T\right) = \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{i-1}\overline{T}, \overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1}\overline{T}\right)$$

para todo $i, j = 1, \ldots, m$ entonces

$$\Delta_k = \overline{\Delta}_k \qquad \text{para todo } k = 1, \ldots, m,$$

donde

$$\overline{\Delta}_k = \det\left(\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{i-1}\overline{T}, \overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1}\overline{T}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right).$$

Del Lema 4 deducimos entonces que $\kappa_i = \overline{\kappa}_i$ para todo $i =0,\ldots, m-2$ y $|\kappa_{m-1}| = |\overline{\kappa}_{m-1}|$.

Recíprocamente, si $|\kappa_i| = |\overline{\kappa}_i|$ para todo $i = 0, \ldots, m-1$, entonces de las fórmulas (2.2) se tiene $|f_{mm}(t)| = \left|\overline{f}_{mm}(t)\right|$ y $f_{ij}(t) = \overline{f}_{ij}(t)$ en otro caso. Por tanto

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_T^{i-1}T, \nabla_T^{j-1}T\right) &= \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} f_{ki} f_{lj} \delta_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} \overline{f}_{ki}\overline{f}_{lj}\delta_{kl} = \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{i-1}\overline{T}, \overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1}\overline{T}\right), \end{aligned}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, m$. □

Definición 17. *Se dice que dos curvas* σ*,* $\overline{\sigma}$ *en las variedades riemannianas* (M, g)*,* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$*, respectivamente, son* congruentes *si existe una isometría local* ϕ *que conserva la orientación tal que* $\overline{\sigma} = \phi \circ \sigma$*.*

Proposición 11. *Las curvaturas de un curva de Frénet son invariantes por congruencia. Además, las referencias de Frénet de dos curvas congruentes están* ϕ*-relacionadas, es decir, si* ϕ *es una isometría local entre dos variedades riemannianas* (M, g)*,* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$*, y* σ*,* $\overline{\sigma}$ *son dos curvas de Frénet en* M*,* $\overline{M}$*, respectivamente, congruentes por* ϕ*, entonces*

$$\phi_* X_i = \overline{X}_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

donde $(X_1, \ldots, X_m)$ *y* $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m\right)$ *son las referencias de Frénet de* σ *y* $\overline{\sigma}$*.*

Demostración. Sea ϕ una isometría que conserva la orientación entre dos variedades riemannianas (M, g) y $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$; en particular ϕ es una aplicación afín. Si $\sigma\colon\ (a, b) \to M$ es una curva de Frénet con valores en M y $\overline{\sigma} = \phi \circ \sigma$ su imagen en $\overline{M}$, que es otra curva de Frénet, entonces de [**21**, Capítulo VI, Proposition 1.2] tenemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\nabla_T^j T$ y $\overline{\nabla}_{\overline{T}}^j \overline{T}$ están ϕ-relacionados, es decir

$$\phi_* \left(\nabla_T^j T\right) = \overline{\nabla}_{\overline{T}}^j \overline{T}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Como ϕ es isometría, para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{i-1}\overline{T}, \overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1}\overline{T}\right) &= \overline{g}\left(\phi_*\left(\nabla_T^{i-1}T\right), \phi_*\left(\nabla_T^{j-1}T\right)\right) \\ &= g\left(\nabla_T^{i-1}T, \nabla_T^{j-1}T\right), \end{aligned}$$

y como conserva la orientación,

$$\mathrm{vol}_g(T, \ldots, \nabla_T^{m-1}T) = \mathrm{vol}_{\overline{g}}(\overline{T}, \ldots, \overline{\nabla}_{\overline{T}}^{m-1}\overline{T}).$$

Por el Lema 5, las curvaturas de σ y de $\overline{\sigma}$ coinciden. En particular, las funciones f_{ij} y $\overline{f}_{ij}$ definidas por las fórmulas (2.2) también coinciden. Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m f_{im}\overline{X}_i &= \sum_{i=1}^m \overline{f}_{im}\overline{X} = \overline{\nabla}_{\overline{T}}^{m-1}\overline{T} = \phi_*\left(\nabla_T^{m-1}T\right) \\ &= \phi_*\left(\sum_{i=1}^m f_{im}X_i\right) = \sum_{i=1}^m f_{im}\phi_* X_i, \end{aligned}$$

luego

$$\overline{X}_i = \phi_* X_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

$\square$

CAPÍTULO 6

Criterio general de congruencia

1. El criterio general

Las isometrías entre variedades riemannianas son isomorfismos afínes, pero el resultado recíproco no es cierto. Sin embargo, dado un isomorfismo afín, basta que su diferencial en algún punto sea isometría lineal para que el isomorfismo afín sea isometría en un entorno (normal) del punto, como probamos en el siguiente:

LEMA 6. *Sean (M,g) y $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ dos variedades riemannianas de la misma dimensión $m = \dim M = \dim \overline{M}$. Sea $\phi\colon U \to \overline{U}$ un isomorfismo afín definido en un entorno normal de $p \in M$, sobre otro entorno normal de $\overline{p} = \phi(p) \in \overline{M}$. Si la diferencial $d_p\phi$ es isometría lineal entre T_pM y $T_{\phi(p)}\overline{M}$ entonces ϕ es isometría.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $q \in U$ y $(u_1, \ldots, u_m)$ una base ortonormal de T_qM. Entonces, existe $\tau = (X_1, \ldots, X_m)$ una referencia de campos paralelos en la geodésica radial $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, de U, donde

$$v = \exp_p^{-1}(q) \in T_pM,$$

verificando

$$X_i(1) = u_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Como ϕ es una aplicación afín, los campos $\phi(\tau) = (\phi_* X_1, \ldots, \phi_* X_m)$ forman también una referencia de campos paralelos pero ahora en la geodésica radial de $\overline{U}$

$$\overline{\gamma}_{\phi_*(v)} = \phi \circ \gamma_v.$$

Como $(u_1, \ldots, u_m)$ es base ortonormal de T_qM, $\tau_0 = (X_1(0), \ldots, X_m(0))$ es base ortonormal de T_pM, y como ϕ_* es isometría lineal, la base de $T_{\overline{p}}\overline{M}$

$$(\phi(\tau))_0 = (\phi_* X_1(0), \ldots, \phi_* X_m(0))$$

es a su vez ortonormal.

La referencia $\phi(\tau)$ está formada por campos paralelos a lo largo de $\overline{\gamma}_{\phi_*(v)}$ y en $\overline{p} = \overline{\gamma}_{\phi_*(v)}(0)$ es la base ortonormal $(\phi(\tau))_0$ de $T_{\overline{p}}\overline{M}$, luego la base de $T_{\phi(q)}\overline{M}$

$$(\phi(\tau))_1 = (\phi_*(u_1), \ldots, \phi_*(u_m))$$

también es ortonormal. Por tanto ϕ_* lleva bases ortonormales de T_qM a bases ortonormales de $T_{\phi(q)}\overline{M}$, para $q \in U$ arbitrario, por lo que ϕ es isometría. $\square$

El resultado más profundo sobre congruencia de curvas es el siguiente *Criterio general de congruencia de curvas de Frénet*:

TEOREMA 6. *Sean (M, g) y $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ dos variedades riemannianas analíticas de la misma dimensión m, con conexiones de Levi-Civita ∇, $\overline{\nabla}$, y sean*

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon (a,b) & \to & M, \\ \overline{\sigma}\colon (a,b) & \to & \overline{M}, \end{array}$$

dos curvas de Frénet también analíticas, con campos tangentes T, $\overline{T}$, respectivamente. Pongamos $p = \sigma(t_0)$, $\overline{p} = \overline{\sigma}(t_0)$, $a < t_0 < b$. Dichas curvas son congruentes en torno a p y $\overline{p}$, es decir, existe una isometría que conserva la orientación $\phi\colon U \to \overline{U}$ definida en un entorno abierto U de p, tal que

$$\phi(\sigma(t)) = \overline{\sigma}(t)$$

para $|t - t_0| < \varepsilon$ suficientemente pequeño si, y sólo si, se verifican las dos condiciones siguientes:

1. *Para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $i = 0, \ldots, m-1$, se tiene*

$$\frac{d^j \kappa_i}{dt^j}(t_0) = \frac{d^j \overline{\kappa}_i}{dt^j}(t_0), \tag{1.1}$$

2. *Para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo sistema de índices*

$$i, i_1, \ldots, i_{j+3} \in \{1, ..., m\},$$

se verifica

$$\left(\nabla^j R\right)\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{j+3}}, \omega^i\right)(p) = \left(\overline{\nabla}^j \, \overline{R}\right)\left(\overline{X}_{i_1}, \ldots, \overline{X}_{i_{j+3}}, \overline{\omega}^i\right)(\overline{p}), \tag{1.2}$$

siendo $(X_1, \ldots, X_m)$, $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m\right)$ las referencias de Frénet de σ, $\overline{\sigma}$, con referencias duales $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$, $(\overline{\omega}^1, \ldots, \overline{\omega}^m)$, y R, $\overline{R}$ los tensores de curvatura de (M, g), $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por el Lema 5 que si σ y $\overline{\sigma}$ son congruentes entonces $\kappa_i = \overline{\kappa}_i$, $i = 0, \ldots, m-1$, con lo que, en particular, (1.1) se verifica. Por otro lado, si ϕ es la isometría entre σ y $\overline{\sigma}$, de [**21**, Capítulo VI, Proposition 1.2] tenemos que $\nabla_T^j T$ y $\overline{\nabla}_{\overline{T}}^j \overline{T}$ están ϕ-relacionados, es decir

$$\phi_*\left(\nabla_T^j T\right) = \left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^j \overline{T}\right).$$

Por el Lema 11 tenemos

$$\phi_* X_i = \overline{X}_i, i = 1, \ldots, m,$$

luego también $\phi^* \bar{\omega}^i = \omega^i$, $i = 1, \ldots, m$. El mismo resultado de [**21**] arriba mencionado nos dice entonces que ϕ lleva $\left(\nabla^j R\right)_{\sigma(t)}$ a $(\overline{\nabla}^j \, \overline{R})_{\overline{\sigma}(t)}$, en el sentido siguiente

$$\phi_* \left(\nabla^j R \left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{j+3}}\right)\right) (\sigma(t)) = \overline{\nabla}^j \, \overline{R} \left(\overline{X}_{i_1}, \ldots, \overline{X}_{i_{j+3}}\right) (\overline{\sigma}(t)),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $t \in (a, b)$; en particular se verifica (1.2).

Para ver el resultado recíproco, consideremos la aplicación lineal

$$A \colon T_p M \to T_{\overline{p}} \overline{M}$$

definida por

$$A \left(X_i \left(t_0\right)\right) = \overline{X}_i \left(t_0\right), i = 1, \ldots, m.$$

Como $(X_1, \ldots, X_m)$ y $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m\right)$ son referencias ortonormales, A es una isometría lineal. La condición (1.2) implica que A lleva el tensor $\left(\nabla^j R\right)_p$ al tensor $(\overline{\nabla}^j \, \overline{R})_{\overline{p}}$ en el sentido anterior, para todo $j \in \mathbb{N}$, ya que tienen las mismas coordenadas en las bases $(X_1, \ldots, X_m)$ y $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m\right)$. Aplicando [**21**, Capítulo VI, Theorem 7.2] deducimos que la aplicación

$$\phi \colon U \to \overline{U}, \quad \phi = \exp_{\overline{p}} \circ A \circ \exp_p^{-1},$$

es un isomorfismo afín definido en un entorno normal U de p, tal que $\phi(p) = \overline{p}$ y $d_p \phi = A$. El Lema 6 anterior nos dice entonces que ϕ es isometría.

Para terminar basta ver que $\phi(\sigma(t)) = \overline{\sigma}(t)$ para $|t - t_0| < \varepsilon$, y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Tomamos $\gamma = \phi \circ \sigma$ otra curva de Frénet en $\overline{M}$, que satisface $\gamma(t_0) = \overline{p}$ y

$$Y_i(t_0) = d_p \phi \left(X_i(t_0)\right) = \overline{X}_i(t_0),$$

siendo $(Y_1, \ldots, Y_m)$ la referencia de Frénet de γ. Veamos que $\overline{\sigma} = \gamma$ en $|t - t_0| < \varepsilon$ suficientemente pequeño.

Dado un sistema de coordenadas normales $\left(\overline{U}; \overline{x}_1, ..., \overline{x}_m\right)$ de $\overline{M}$ en torno a $\overline{p}$, sabemos (Lema 2) que existen funciones diferenciables F_h definidas en un abierto de $\mathbb{R}^{m^2 + \frac{m(m+1)}{2}}$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{d^n \overline{\sigma}_h}{dt^n} &= F_h \left(\frac{d^\alpha \overline{\sigma}_i}{dt^\alpha}, \frac{d^\beta \bar{\kappa}_j}{dt^\beta} \right), \\ \frac{d^n \gamma_h}{dt^n} &= F_h \left(\frac{d^\alpha \gamma_i}{dt^\alpha}, \frac{d^\beta \kappa_j^\gamma}{dt^\beta} \right), \end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta, j = 0, \ldots, m-1$, $0 \leqslant \beta + j \leqslant m-1$, $h, i = 1, \ldots, m$, donde $\overline{\sigma}_h = \overline{\sigma} \circ \overline{x}^h$, $\gamma_h = \gamma \circ \overline{x}^h$ y κ_j^γ es la curvatura j-ésima de γ. De la condición (1.1) y de la analiticidad de las curvaturas deducimos

$$\frac{d^\beta \overline{\kappa}_j}{dt^\beta} = \frac{d^\beta \kappa_j}{dt^\beta},$$

y como ϕ es isometría tenemos

$$\frac{d^\beta \overline{\kappa}_j}{dt^\beta} = \frac{d^\beta \kappa_j}{dt^\beta} = \frac{d^\beta \kappa_j^\gamma}{dt^\beta},$$

para cualquier par de enteros no negativos β, j que satisfacen

$$\beta + j = 0, \ldots, m-1.$$

Por tanto las coordenadas $\overline{\sigma}_h$ y γ_h verifican el mismo sistema de ecuaciones diferenciales. Basta ver que $\overline{\sigma}_h$ y γ_h satisfacen las mismas condiciones iniciales, de lo que se deduce nuestra afirmación anterior $\overline{\sigma} = \gamma$, es decir, σ y $\overline{\sigma}$ son congruentes.

Notemos que $A\left(\nabla_T^{j-1} T\right)_{t_0} = \left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1} \overline{T}\right)_{t_0}$ para todo $j = 1, \ldots, m$. En efecto, teniendo en cuenta las fórmulas (2.1) y (2.2) del Capítulo 5 y la condición (1.1) tenemos

$$\begin{aligned} A\left(\nabla_T^{j-1} T\right)_{t_0} &= \sum_{i=1}^m f_{ij}(t_0)\, A X_i(t_0) \\ &= \sum_{i=1}^m \overline{f}_{ij}(t_0)\, \overline{X}_i(t_0) = \left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1} \overline{T}\right)_{t_0}. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $j = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\nabla}_{T^\gamma}^{j-1} T^\gamma\right)_{t_0} &= d_p\phi\left(\left(\nabla_T^{j-1} T\right)_{t_0}\right) \\ &= A\left(\nabla_T^{j-1} T\right)_{t_0} = \left(\overline{\nabla}_{\overline{T}}^{j-1} \overline{T}\right)_{t_0}, \end{aligned}$$

siendo T^γ el campo tangente de γ. En particular tenemos que

$$\frac{d^{j-1}\gamma_i}{dt^{j-1}}(t_0) = \frac{d^{j-1}\overline{\sigma}_i}{dt^{j-1}}(t_0)$$

para todo $i, j = 1, \ldots, m$. Por tanto $\overline{\sigma}_h$ y γ_h verifican las mismas condiciones iniciales y, en conclusión, σ y $\overline{\sigma}$ son congruentes. □

Es posible evitar la hipótesis de analiticidad de las curvas, según hemos visto en la anterior demostración, pero no podemos evitar la analiticidad de las variedades involucradas, como veremos en la siguiente sección.

COROLARIO 1. *Sean* (M, g) *y* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *dos variedades riemannianas analíticas de la misma dimensión* m*, y sean*

$$\begin{array}{rcl} \sigma\colon (a,b) & \to & M, \\ \overline{\sigma}\colon (a,b) & \to & \overline{M}, \end{array}$$

dos curvas de Frénet. Dichas curvas son congruentes en torno a $\sigma(t_0)$ *y* $\overline{\sigma}(t_0)$ *si, y sólo si, para algún* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeño se verifican las dos condiciones siguientes:*

1. *Para todo* $i = 0, \ldots, m-1$*, se tiene*
$$\kappa_i(t) = \bar{\kappa}_i(t) \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$
2. *Para todo* $j \in \mathbb{N}$ *y todo sistema de índices*
$$i, i_1, \ldots, i_{j+3} \in \{1, \ldots, m\},$$
se verifica
$$\left(\nabla^j R\right)\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{j+3}}, \omega^i\right)(\sigma(t)) = \left(\overline{\nabla}^j\,\overline{R}\right)\left(\overline{X}_{i_1}, \ldots, \overline{X}_{i_{j+3}}, \overline{\omega}^i\right)(\overline{\sigma}(t)),$$
para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

OBSERVACIÓN 12. *No es posible sustituir la segunda condición (1.2) del Teorema 6 por*

$$R\left(X_j, X_k, X_l, \omega^i\right)(\sigma(t)) = \overline{R}\left(\overline{X}_j, \overline{X}_k, \overline{X}_l, \overline{\omega}^i\right)(\overline{\sigma}(t)) \tag{1.3}$$

para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$*, puesto que esta condición* ***no*** *es equivalente a 1.2, sino sólo necesaria (debido a la analiticidad). Derivando el primer miembro de la igualdad anterior, tenemos:*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt} R\left(X_j, X_k, X_l, \omega^i\right)(\sigma(t)) & = & \left(\nabla_T R\right)\left(X_j, X_k, X_l, \omega^i\right)(\sigma(t)) \\ & & +R\left(\nabla_T X_j, X_k, X_l, \omega^i\right)(\sigma(t)) \\ & & + \ldots \\ & & +R\left(X_j, X_k, X_l, \nabla_T \omega^i\right)(\sigma(t)) \\ & = & \kappa_0(t)\, \nabla R\left(X_1, X_j, X_k, X_l, \omega^i\right)(\sigma(t)) \\ & & + \ldots \end{array}$$

Nótese que la primera entrada de ∇R *es* X_1*, por lo que no podemos recuperar* ∇R *para cualquier entrada* $\left(X_h, X_j, X_k, X_l, \omega^i\right)$ *a partir de (1.3). Por tanto la condición no es suficiente. Este hecho se observa en el siguiente ejemplo. Consideremos el toro bidimensional* T *en* $\mathbb{R}^3$ *de ecuación*

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3\right)^2 = 16\left(x^2 + y^2\right),$$

y la circunferencia $C = T \cap \{z = 1\}$, que tiene radio 2 y en los cuales la curvatura gaussiana de T es nula (por lo que $R^T = 0$ en C). Esta curva es regular y su curvatura es una función constante no nula. Consideremos una curva C' en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con la misma curvatura que C. Obviamente $R = 0$ en C' pero es imposible que C y C' sean congruentes, pues $R^T \neq 0$ en cualquier entorno de un punto de C.

Observación 13. *Se deduce de las fórmulas de la Proposición 9 que la referencia de Frénet de una curva de Frénet σ y su referencia dual, en un punto $\sigma(t_0)$, sólo dependen de $j_{t_0}^{m-1}\sigma$. Por tanto, para cada sistema de índices $j \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_{j+3}, i = 1, \ldots, m$, se puede definir una función*

$$\begin{aligned} I^j_{i_1 \ldots i_{j+3}, i} \colon \mathcal{O}^{m-1} &\to \mathbb{R}, \\ I^j_{i_1 \ldots i_{j+3}, i}(j_{t_0}^{m-1}\sigma) &= \left(\nabla^j R\right)\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{j+3}}, \omega^i\right)\left(\sigma\left(t_0\right)\right), \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{O}^{m-1} \subset J^{m-1}(\mathbb{R}, M)$ el abierto formado por los jets de orden $m-1$ de curvas de Frénet con valores en M. Pues bien, se sigue del teorema anterior que tales funciones son invariantes por isometría. Como $\dim \mathcal{O}^{m-1} = m^2 + 1$, sólo un número finito (y no superior a $m^2 + 1$) de tales funciones pueden ser funcionalmente independientes "genéricamente", esto es, en un abierto denso de $\mathcal{O}^{m-1}$. Así pues, el conjunto infinito de condiciones dadas por las ecuaciones (1.2), de hecho, se puede reducir a un número finito. El problema es que no es fácil determinar una cota para el índice j que mide el número de veces que hay que derivar covariantemente el tensor de curvatura. El teorema siguiente muestra que en el caso bidimensional basta con derivar dos veces.

Teorema 7. *Sea $(M = \mathbb{R}^2, g)$ una variedad riemanniana analítica bidimensional tal que*

$$\begin{aligned} &4(f_1f_9 - f_2f_8)\mathrm{Jac}(f_4, f_6) + 2(f_5f_8 - f_4f_9)\mathrm{Jac}(f_1, f_6) \\ &+2(f_6f_9 - f_7f_8)\mathrm{Jac}(f_1, f_4) + 2(f_1f_5 - f_2f_4)\mathrm{Jac}(f_6, f_8) \\ &+2(f_2f_6 - f_1f_7)\mathrm{Jac}(f_4, f_8) + (f_4f_7 - f_5f_6)\mathrm{Jac}(f_1, f_8) \neq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 &= g_{11},\ f_2 = g_{12},\ f_3 = g_{22},\ f_4 = K_x,\ f_5 = K_y, \\ f_6 &= g_{11}K_y - g_{12}K_x,\ f_7 = g_{12}K_y - g_{22}K_x, \\ f_8 &= K_{xx} - 2\Gamma^1_{11}K_x,\ f_9 = K_{xy} - \Gamma^1_{12}K_x - \Gamma^2_{12}K_y \end{aligned}$$

y K es la curvatura de Gauss de $(\mathbb{R}^2, g)$. Entonces dos curvas de Frénet σ y $\overline{\sigma}$, con valores en M, son congruentes en torno a $\sigma(t_0)$ y $\overline{\sigma}(t_0)$ si, *y sólo si, para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se verifican las dos condiciones siguientes:*

1. $\kappa_0(t) = \overline{\kappa}_0(t)$ *y* $\kappa_1(t) = \overline{\kappa}_1(t)$, $|t - t_0| < \varepsilon$.
2. *Se satisfacen las igualdades:*

$$\begin{aligned}\nabla R_4(X_1, X_1, X_2, X_1, X_2)(\sigma(t)) &= \nabla R_4(\overline{X}_1, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_1, \overline{X}_2)(\overline{\sigma}(t)),\\ \nabla R_4(X_2, X_1, X_2, X_1, X_2)(\sigma(t)) &= \nabla R_4(\overline{X}_2, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_1, \overline{X}_2)(\overline{\sigma}(t)),\\ \nabla^2 R_4(X_1,X_1,X_1,X_2,X_1,X_2)(\sigma(t)) &= \nabla^2 R_4(\overline{X}_1,\overline{X}_1,\overline{X}_1,\overline{X}_2,\overline{X}_1,\overline{X}_2)(\overline{\sigma}(t)),\end{aligned}$$

donde $|t - t_0| < \varepsilon$, (X_1, X_2) y $(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ son las referencias de Frénet de σ y $\overline{\sigma}$, y R_4 es el tensor de Riemann-Christoffel.

Lema 7. *En una variedad riemanniana analítica $(M = \mathbb{R}^2, g)$ tal que se verifica la fórmula (1.4), los siguientes invariantes de orden* 1

$$\begin{aligned}I_0(j^1_{t_0}\sigma) &= t_0,\\ I_1(j^1_{t_0}\sigma) &= \kappa_0(t_0),\\ I_2(j^1_{t_0}\sigma) &= \nabla R_4(X_1, X_1, X_2, X_1, X_2)(\sigma(t_0)),\\ I_3(j^1_{t_0}\sigma) &= \nabla R_4(X_2, X_1, X_2, X_1, X_2)(\sigma(t_0)),\\ I_4(j^1_{t_0}\sigma) &= \nabla^2 R_4(X_1,X_1,X_1,X_2,X_1,X_2)(\sigma(t_0)),\end{aligned}$$

son funcionalmente independientes. En particular, como la dimensión del espacio de jets de orden 1 *de curvas con valores en $\mathbb{R}^2$ es* 5*, los invariantes anteriores constituyen una base de invariantes de orden* 1*.*

Demostración. Calculando la expresión de los invariantes anteriores en las coordenadas $(t, x, y, x^{(1)}, y^{(1)})$ se obtiene

$$\begin{aligned}I_0 &= t_0,\\ I_1 &= (x^{(1)}x_{(1)} + y^{(1)}y_{(1)})^{1/2},\\ I_2 &= I_1^{-1}(x^{(1)}K_x + y^{(1)}K_y),\\ I_3 &= I_1^{-1}(-y_{(1)}K_x + x_{(1)}K_y),\\ I_4 &= I_1^{-1}(\left(x^{(1)}\right)^2(K_{xx} - 2\Gamma^1_{11}K_x)\\ &\quad +2x^{(1)}y^{(1)}(K_{xy} - \Gamma^1_{12}K_x - \Gamma^2_{12}K_y)\\ &\quad +(y^{(1)})^2(K_{yy} - 2\Gamma^2_{22}K_y)),\end{aligned}$$

en donde $(x_{(1)}, y_{(1)})$ es la bajada de índices de $(x^{(1)}, y^{(1)})$ respecto de la métrica, es decir, $x_{(1)} = x^{(1)}g_{11} + y^{(1)}g_{12}$, $y_{(1)} = x^{(1)}g_{21} + y^{(1)}g_{22}$.

Entonces $(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4)$ son funcionalmente independientes si, y solamente si lo son

$$\begin{aligned}
J_0 &= I_0 = t_0, \\
J_1 &= x^{(1)}x_{(1)} + y^{(1)}y_{(1)}, \\
J_2 &= x^{(1)}K_x + y^{(1)}K_y, \\
J_3 &= -y_{(1)}K_x + x_{(1)}K_y, \\
J_4 &= \left(x^{(1)}\right)^2 (K_{xx} - 2\Gamma^1_{11}K_x) \\
&\quad +2x^{(1)}y^{(1)}(K_{xy} - \Gamma^1_{12}K_x - \Gamma^2_{12}K_y) \\
&\quad +(y^{(1)})^2(K_{yy} - 2\Gamma^2_{22}K_y).
\end{aligned}$$

Resulta que el jacobiano de $(J_0, J_1, J_2, J_3, J_4)$ es un polinomio homogéneo de grado 4 en las variables $x^{(1)}, y^{(1)}$, y el coeficiente de grado máximo en la variable $x^{(1)}$ es la expresión (1.4) que es no nulo por hipótesis. Por tanto, el jacobiano anterior es no nulo, luego los invariantes son funcionalmente independientes. □

Demostración. Basta notar que el Lema anterior implica que las condiciones (1.1) y (1.2) se verifican, pues todo invariante del teorema 6 se obtiene como polinomio en las variables $I_0, \ldots, I_4$. □

Observación 14. *Un cálculo directo con la métrica*

$$(1 + x^2y)\,(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

nos muestra que la expresión (1.4) no es idénticamente nula. Al tratarse de una expresión racional de los coeficientes de la métrica, de sus derivadas y de $\sqrt{g}$, podemos afirmar que dicha condición es por tanto genérica.

2. Un ejemplo no analítico

Sin imponer ninguna condición sobre las variedades riemannianas, salvo la analiticidad, este resultado es el más general que podemos esperar. Esto se debe principalmente a que el resultado [**21**, Capítulo VI, Theorem 7.2] no puede generalizarse a variedades no analíticas, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Sean $M = \overline{M} = \mathbb{R}^m$ y sean

$$\begin{aligned}
g &= \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}dx^i \otimes dx^j, \\
g &= \sum_{i,j=1}^{m} \overline{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j
\end{aligned}$$

tales que

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + e^{-1/\|x\|^2}, \\ \overline{g}_{ij} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Entonces (M,g) y $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ son variedades riemannianas de dimensión m, siendo $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ el espacio euclideo usual. $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ es por tanto analítica.

Proposición 12. *La variedad riemanniana (M,g) antes definida no es analítica.*

Lema 8. *La función $h(s) = e^{-1/s^2}$, $s \neq 0$, verifica*

$$h^{(n)}(s) = \frac{P_n(s)}{s^{3n}} e^{-1/s^2}, \tag{2.1}$$

siendo P_n un polinomio con término independiente $P_n(0) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. En particular, $\lim_{s\to 0} h^{(n)}(s) = 0$. Entonces $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(s) = e^{-1/s^2}$, $h(0) = 0$, es C^∞ pero no es analítica en $s = 0$.

Demostración. Probemos (2.1) por inducción. Cuando $n = 0$ basta tomar $P_0 = 1$ y cuando $n = 1$ basta tomar $P_1 = 2$. Supongamos que (2.1) es cierta para cierto n, con $P_n(0) = 2^n$. Entonces

$$h^{(n+1)}(s) = \frac{s^3 P_n'(s) + (2 - 3ns^2) P_n(s)}{s^{3(n+1)}} e^{-1/s^2}.$$

Luego debe ser que

$$P_{n+1}(s) = s^3 P_n'(s) + \left(2 - 3ns^2\right) P_n(s),$$

y por tanto $P_{n+1}(0) = 2P_n(0) = 2^{n+1}$. Así que (2.1) es cierta.

Para calcular el límite, consideramos la función $f_n \in C^\infty(0,+\infty)$ dada por $f_n(x) = x^{3n/2} e^{-x}$. Entonces $h^{(n)}(s) = P_n(s) f_n(1/s^2)$ y así

$$\lim_{s\to 0} h^{(n)}(s) = 2^n \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 2^n \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3n/2}}{e^x}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital suficientes veces llegamos a que este límite es 0. Por tanto $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sin embargo no puede ser analítica en $s = 0$, pues $h^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Pasamos a probar la Proposición 12:

Demostración. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^{-1/\|x\|^2} = h\left(\|x\|^2\right), \quad f\left(\overline{0}\right) = 0.$$

Si $x \neq \overline{0}$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) &= 2x^i h'\left(\|x\|^2\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) &= 2\left(\delta_{ij} h'\left(\|x\|^2\right) + x^i x^j h''\left(\|x\|^2\right)\right).\end{aligned}$$

En general

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}}(x) = f^j_{i_1 \dots i_n}(x)\, h^{(j)}\left(\|x\|^2\right),$$

siendo $f^j_{i_1 \dots i_n} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $i_j = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta el Lema 8 obtenemos

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}}\left(\overline{0}\right) = 0, \tag{2.2}$$

por lo que f es C^∞ pero no es analítica en $x = \overline{0}$. Como $g_{ij} = \delta_{ij} + f$, tenemos que (M, g) no es analítica (en $x = \overline{0}$). □

Lema 9. *Si R es el tensor de curvatura de (M, g) y ∇ su conexión de Levi-Civita entonces $(\nabla^n R)\left(\overline{0}\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la fórmula (2.2), sabemos

$$\frac{\partial^n g_{ij}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}}\left(\overline{0}\right) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Entonces, derivando la expresión local de los símbolos de Christoffel ([**21**, Capítulo IV, Corollary 2.4]) deducimos

$$\frac{\partial^n \Gamma^k_{ij}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}}\left(\overline{0}\right) = 0$$

para $i_r = 1, \dots, m$; $r = 1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$. Ahora derivando la expresión local de las componentes del tensor de curvatura de Riemann (fórmula (0.1) del Capítulo 2) tenemos

$$\frac{\partial^n R^i_{jkl}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}}\left(\overline{0}\right) = 0,$$

luego $(\nabla^n R)\left(\overline{0}\right) = 0$. □

Ahora podemos ver que en [**21**, Capítulo VI, Theorem 7.2], la hipótesis de analiticidad de las variedades riemannianas es necesaria. Consideremos la aplicación lineal *identidad* $Id \colon T_{\overline{0}}M \to T_{\overline{0}}\overline{M}$. Como

$$g_{ij}\left(\overline{0}\right) = \delta_{ij} = \overline{g}_{ij}\left(\overline{0}\right),$$

Id es una isometría lineal. Además hemos visto en el Lema 9 que $\left(\nabla^k R\right)\left(\overline{0}\right) = 0$. Como $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ es plana, tenemos

$$\left(\overline{\nabla}^k \overline{R}\right)\left(\overline{0}\right) = \left(\nabla^k R\right)\left(\overline{0}\right),$$

donde $\overline{R}$ es el tensor de curvatura y $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$. Supongamos que existe un isomorfismo afín

$$\phi \colon U \to \overline{U} = \overline{M}$$

definido en entornos normales de $\overline{0}$ tal que $\phi_{*,\overline{0}} = Id$. Teniendo en cuenta el Lema 6 tenemos que ϕ es una isometría, luego lleva el tensor $\nabla^k R$ al tensor $\overline{\nabla}^k \overline{R} = 0$. Entonces $\nabla^k R$ debe ser nulo en un entorno normal de $\overline{0}$. Sin embargo esto no es cierto, como mostramos a continuación.

Como $g_{ij} = \delta_{ij} + h\left(\|x\|^2\right) = \delta_{ij} + e^{-1/\|x\|^2}$, tenemos

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{h\left(\|x\|^2\right)}{1 + mh\left(\|x\|^2\right)}.$$

Entonces los símbolos de Christoffel son

(2.3)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{h'\left(\|x\|^2\right)}{1 + mh\left(\|x\|^2\right)}\left(x^i + x^j - x^k + h\left(\|x\|^2\right)\left(\sum_{a=1}^m x^a - mx^k\right)\right).$$

Sea $p_t = (t, ..., t) \in \mathbb{R}^m$, con $t \neq 0$, por tanto

$$\Gamma_{ij}^k\left(p_t\right) = \frac{h'\left(\|p_t\|^2\right)}{1 + mh\left(\|p_t\|^2\right)} t \neq 0,$$

luego

$$\Gamma_{ii}^a\left(p_t\right)\Gamma_{aj}^j\left(p_t\right) = \left(\frac{h'\left(\|p_t\|^2\right)}{1 + mh\left(\|p_t\|^2\right)}\right)^2 mt^2 = \Gamma_{ji}^a\left(p_t\right)\Gamma_{ai}^j\left(p_t\right),$$

y en consecuencia $\Gamma_{ii}^a\left(p_t\right)\Gamma_{aj}^j\left(p_t\right) - \Gamma_{ji}^a\left(p_t\right)\Gamma_{ai}^j\left(p_t\right) = 0$. En particular, la fórmula (0.1) del Capítulo 2 nos dice

$$R_{iji}^j\left(p_t\right) = \frac{\partial \Gamma_{ii}^j}{\partial x^j}\left(p_t\right) - \frac{\partial \Gamma_{ji}^j}{\partial x^i}\left(p_t\right).$$

Derivando la expresión (2.3) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma_{ii}^{j}}{\partial x^{j}} &= 2x^{j}\left(2x^{i}-x^{j}+h\left(\|x\|^{2}\right)\left(\sum_{a=1}^{m}x^{a}-mx^{j}\right)\right)\left(\frac{h''\left(\|x\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|x\|^{2}\right)}\right.\\ &\quad\left.-m\left(\frac{h'\left(\|x\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|x\|^{2}\right)}\right)^{2}\right)+\frac{h'\left(\|x\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|x\|^{2}\right)}H_{1},\end{aligned}$$

donde

$$H_{1}=(1-m)\,h\left(\|x\|^{2}\right)-1+2x^{j}h'\left(\|x\|^{2}\right)\left(\sum_{a=1}^{m}x^{a}-mx^{j}\right)$$

Evaluando en p_t

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma_{ii}^{j}}{\partial x^{j}}\left(p_{t}\right) &= \frac{h'\left(\|p_{t}\|^{2}\right)\left((1-m)\,h\left(\|p_{t}\|^{2}\right)-1\right)}{1+mh\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}\\ &\quad+2t^{2}\left(\frac{h''\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}-m\left(\frac{h'\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}\right)^{2}\right).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma_{ji}^{j}}{\partial x^{i}}(x) &= 2x^{i}\left(x^{i}+h\left(\|x\|^{2}\right)\left(\sum_{a=1}^{m}x^{a}-mx^{j}\right)\right)\left(\frac{h''\left(\|x\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|x\|^{2}\right)}\right.\\ &\quad\left.-m\left(\frac{h'\left(\|x\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|x\|^{2}\right)}\right)^{2}\right)+\frac{h'\left(\|x\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|x\|^{2}\right)}H_{2},\end{aligned}$$

donde

$$H_{2}=1+h\left(\|x\|^{2}\right)+2x^{i}h'\left(\|x\|^{2}\right)\left(\sum_{a=1}^{m}x^{a}-mx^{j}\right)$$

Evaluando en p_t

$$\frac{\partial\Gamma_{ji}^{j}}{\partial x^{i}}\left(p_{t}\right)=2t^{2}H_{3}h'\left(\|p_{t}\|^{2}\right)\frac{1+h\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|p_{t}\|^{2}\right)},\tag{2.5}$$

donde

$$H_{3}=\left(\frac{h''\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}-m\left(\frac{h'\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}{1+mh\left(\|p_{t}\|^{2}\right)}\right)^{2}\right).$$

Restando (2.5) a (2.4) obtenemos

$$\frac{\partial \Gamma_{ii}^{j}}{\partial x^{j}}\left(p_t\right)-\frac{\partial \Gamma_{ji}^{j}}{\partial x^{i}}\left(p_t\right)=-\left(2+mh\left(\left\|p_t\right\|^2\right)\right)\frac{h'\left(\left\|p_t\right\|^2\right)}{1+mh\left(\left\|p_t\right\|^2\right)},$$

es decir

$$R_{iji}^{j}\left(p_t\right)=-\left(2+mh\left(\left\|p_t\right\|^2\right)\right)\frac{h'\left(\left\|p_t\right\|^2\right)}{1+mh\left(\left\|p_t\right\|^2\right)}. \tag{2.6}$$

Ahora notemos que $h\left(\left\|p_t\right\|^2\right)>0$ y $h'\left(\left\|p_t\right\|^2\right)>0$ para todo $t\neq 0$, luego $R_{iji}^{j}\left(p_t\right)<0$. Pero entonces R_{iji}^{j} no puede anularse en un entorno U de $\overline{0}$, pues U contiene algún p_t, para $0<|t|<\varepsilon$ suficientemente pequeño.

CAPÍTULO 7

Espacios homogéneos no simétricos: un ejemplo

1. Variedades de Cartan

El grupo de isometrías $I(M)$ de una variedad riemanniana conexa (M, g) es un grupo de Lie respecto de la topología compacto-abierta (véase [**20**, Capítulo II, Theorem 1.2]). Si $\dim M = m$, entonces

$$\dim I(M) \leq \frac{1}{2}m(m+1)$$

y la igualdad se verifica si y sólo si M es de curvatura constante (véase [**20**, Capítulo II, Theorem 3.1]).

Si $I(M)$ es discreto (i.e., $\dim I(M) = 0$) o tiene una dimensión muy pequeña en relación a la dimensión de M, entonces el problema de equivalencia de curvas con valores en M no es muy interesante, ya que tales curvas son muy "rígidas". Una hipótesis razonable para que dicho problema sea interesante es suponer que M posee "suficientes isometrías" y un modo natural de precisar esta afirmación es suponer que M sea "riemannianamente homogénea"; es decir, que el grupo $I(M)$ opere transitivamente sobre M. En este caso, se tiene: $M \cong G/H$, siendo $G = I(M)$ y H un subgrupo de cerrado. En lo sucesivo, supondremos también que M no es de curvatura constante, pues este caso ya ha sido resuelto anteriormente ([**31**]); es decir, supondremos $\dim I(M) < \frac{1}{2}m(m+1)$.

Ahora bien las dimensiones de los subgrupos cerrados de G no pueden tomar cualquier valor. En efecto, se sabe (véase [**20**, Capítulo II, Theorem 3.2]) que si $m \neq 4$, entonces $I(M)$ no contiene ningún subgrupo cerrado de dimensión r con

$$\frac{1}{2}m(m-1) + 1 < r < \frac{1}{2}m(m+1). \tag{1.1}$$

Resultados más precisos pueden verse en [**22**].

Si $m = 2$, y la variedad M no es de curvatura constante, entonces de la fórmula (1.1) se deduce que: $\dim I(M) \leq 1$; luego, M no es homogénea y este caso queda descartado.

Si M es de dimensión 3, pero no tiene curvatura constante, entonces de la fórmula (1.1) se deduce que: $\dim I(M) \leq 4$. En este caso, forzosamente se tiene:

$$\begin{aligned} 3 &= \dim M \\ &= \dim I(M) - \dim H \\ &= 4 - \dim H. \end{aligned}$$

Luego la dimensión del subgrupo de isotropía H es 1. Por tanto, estas variedades, i.e., las determinadas por las condiciones

$$\dim M = 3, \quad \dim I(M) = 4,$$

son las variedades riemannianas de curvatura no constante de dimensión menor que admiten un grupo de isometrías actuando transitivamente. Los modelos simplemente conexos de dichas estructuras fueron clasificados por É. Cartan en [**5**, Sección 297, Théorème]. El resultado es como sigue: $(M, g) = (\mathbb{R}^3, g)$, donde g viene dada por la siguiente fórmula (véase [**5**, Sección 296, fórmula (41)]):

$$g = \frac{A\left(dx^2 + dy^2\right) + \left\{\left[1 + \frac{\varepsilon}{4}\left(x^2 + y^2\right)\right] dz + B\left(xdy - ydx\right)\right\}^2}{\left[1 + \frac{\varepsilon}{4}\left(x^2 + y^2\right)\right]^2}, \tag{1.2}$$

donde $A > 0$, $B > 0$, y $\varepsilon = 1$, 0 ó -1. La matriz de g es

$$\begin{pmatrix} \frac{A+(By)^2}{h^2} & -\frac{B^2xy}{h^2} & -\frac{By}{h} \\ -\frac{B^2xy}{h^2} & \frac{A+(Bx)^2}{h^2} & \frac{Bx}{h} \\ -\frac{By}{h} & \frac{Bx}{h} & 1 \end{pmatrix}, \quad h = 1 + \frac{\varepsilon}{4}\left(x^2 + y^2\right).$$

En los próximo epígrafes, vamos estudiar de manera detallada el problema de congruencia de curvas en estas variedades para el valor $\varepsilon = 0$, siendo A, B dos constantes fijas.

2. Isometrías infinitesimales

Aplicaremos los resultados de [**21**, Capítulo X, Sección 2] a este ejemplo concreto. Queremos calcular el álgebra de Lie $\mathfrak{i}(M)$ (formada por los campos de Killing) del grupo de isometrías $G = I(M)$. Como M es un espacio riemanniano homogéneo, sabemos que es completo y por tanto los campos de Killing son completos ([**21**, Capítulo IV, Theorem 4.5; Capítulo VI, Theorem 3.4]). Según [**5**, Sección 297, Théorème], $\dim I(M) = 4$, por lo que el álgebra de Lie asociada $i(M)$ es un espacio vectorial de dimensión 4. Por tanto basta hallar cuatro campos de Killing independientes.

TEOREMA 8. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{i}(M)$ *del grupo de isometrías* $I(M)$ *de la variedad de Cartan definida por la métrica* (1.2) *para el caso* $\varepsilon = 0$

es el espacio vectorial

$$\left\{ (ay+b)\frac{\partial}{\partial x} + (-ax+c)\frac{\partial}{\partial y} + (B(cx-by)+d)\frac{\partial}{\partial z} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostración. Pongamos

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Si $X = u\partial_1 + v\partial_2 + w\partial_3 \in \mathfrak{X}(M)$, entonces las ecuaciones de los campos de Killing, $L_X(g) = 0$, son

$$u\partial_1 g_{hk} + v\partial_2 g_{hk} + g_{1k}\partial_h u + g_{1h}\partial_k u + g_{2k}\partial_h v$$
$$+g_{2h}\partial_k v + g_{3k}\partial_h w + g_{3h}\partial_k w = 0, \tag{2.1}$$

para cada $h,k = 1,2,3$. Como estas ecuaciones no varían al permutar h y k tenemos seis ecuaciones. No es difícil comprobar que $u=0$, $v=0$, $w = w_0 \in \mathbb{R}$ es solución de este sistema de ecuaciones en derivadas parciales, por lo que $\partial/\partial z$ es un campo de Killing. La fórmula (1.2) en el caso que nos ocupa $\varepsilon = 0$ se escribe:

$$\begin{aligned} g &= \left(A+(By)^2\right)dx^2 + \left(A+(Bx)^2\right)dy^2 + dz^2 \\ &\quad -2B^2xydxdy - 2Bydxdz + 2Bxdydz. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g_{11} &= A+(By)^2, \quad \partial_1 g_{11} = 0, \quad \partial_2 g_{11} = 2B^2y, \quad \partial_3 g_{11} = 0, \\ g_{22} &= A+(Bx)^2, \quad \partial_1 g_{22} = 2B^2x, \quad \partial_2 g_{22} = 0, \quad \partial_3 g_{22} = 0, \\ g_{33} &= 1, \quad \partial_1 g_{33} = 0, \quad \partial_2 g_{33} = 0, \quad \partial_3 g_{33} = 0, \\ g_{12} &= -B^2xy, \quad \partial_1 g_{12} = -B^2y, \quad \partial_2 g_{12} = -B^2x, \quad \partial_3 g_{11} = 0, \\ g_{13} &= -By, \quad \partial_1 g_{13} = 0, \quad \partial_2 g_{13} = -B, \quad \partial_3 g_{11} = 0, \\ g_{23} &= Bx, \quad \partial_1 g_{23} = B, \quad \partial_2 g_{23} = 0, \quad \partial_3 g_{11} = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas fórmulas, las ecuaciones de los campos de Killing ([**21**, Capítulo VI, Proposition 3.2]) quedan:

$$
\begin{aligned}
&(2.3)\ 0 &=& \quad B^2yv + \left(A + (By)^2\right)\partial_1 u - B^2xy\partial_1 v - By\partial_1 w,\\
&(2.4)\ 0 &=& \quad B^2xu - B^2xy\partial_2 u + \left(A + (Bx)^2\right)\partial_2 v + Bx\partial_2 w,\\
&(2.5)\ 0 &=& \quad -By\partial_3 u + Bx\partial_3 v + \partial_3 w,\\
&(2.6)\ 0 &=& \quad -B^2yu - B^2xv - B^2xy\partial_1 u + \left(A + (By)^2\right)\partial_2 u\\
& & & \quad + \left(A + (Bx)^2\right)\partial_1 v - B^2xy\partial_2 v + Bx\partial_1 w - By\partial_2 w\\
&(2.7)\ 0 &=& \quad -Bv - By\partial_1 u + \left(A + (By)^2\right)\partial_3 u + Bx\partial_1 v\\
& & & \quad -B^2xy\partial_3 v + \partial_1 w - By\partial_3 w\\
&(2.8)\ 0 &=& \quad Bu - By\partial_2 u - B^2xy\partial_3 u + Bx\partial_2 v + \left(A + (Bx)^2\right)\partial_3 v\\
& & & \quad +\partial_2 w + Bx\partial_3 w
\end{aligned}
$$

Despejamos $\partial_3 w$ en la ecuación (2.5), $\partial_1 w$ en (2.7) y $\partial_2 w$ en (2.8),

$$\partial_3 w = By\partial_3 u - Bx\partial_3 v, \tag{2.9}$$

$$\partial_1 w = Bv - A\partial_3 u + By\partial_1 u - Bx\partial_1 v, \tag{2.10}$$

$$\partial_2 w = -Bu - A\partial_3 v + By\partial_2 u - Bx\partial_2 v. \tag{2.11}$$

y sustituimos en las ecuaciones restantes. Finalmente obtenemos

$$0 = \partial_1 u + By\partial_3 u, \tag{2.12}$$

$$0 = \partial_2 v - Bx\partial_3 v, \tag{2.13}$$

$$0 = \partial_2 u + \partial_1 v + B\left(y\partial_3 v - x\partial_3 u\right). \tag{2.14}$$

Supongamos que $\partial_3 u = 0, \partial_3 v = 0$, es decir $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. En este caso, las ecuaciones de los campos de Killing (2.12), (2.13) y (2.14) quedan:

$$0 = \partial_1 u, \tag{2.15}$$

$$0 = \partial_2 v \tag{2.16}$$

$$0 = \partial_2 u + \partial_1 v. \tag{2.17}$$

Teniendo en cuenta (2.15) y (2.16), tenemos $u = u(y)$ y $v = v(x)$, luego (2.17) nos dice

$$u'(y) + v'(x) = 0$$

(para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), es decir

$$u'(y) = a = -v'(x)$$

para cierta constante $a \in \mathbb{R}$. Integrando esta ecuación tenemos

$$u = ay + b, v = -ax + c,$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$. A continuación calculamos la expresión de w a partir de las EDPs (2.9), (2.10) y (2.11):

$$\begin{aligned} \partial_3 w &= 0, \\ \partial_1 w &= Bc, \\ \partial_2 w &= -Bb, \end{aligned}$$

donde $b, c \in \mathbb{R}$. Podemos observar que w sólo depende de x e y. Además, integrando $\partial_1 w = Bc$ deducimos

$$w = Bcx + h(y),$$

luego

$$-Bb = \partial_2 w = h'(y).$$

Integrando esta ecuación tenemos

$$h(y) = -Bby + d,$$

donde $d \in \mathbb{R}$. En conclusión,

$$w = B(cx - by) + d$$

y así

$$F = (ay + b)\partial_1 + (-ax + c)\partial_2 + (B(cx - by) + d)\partial_3,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, forman el espacio vectorial $\mathfrak{i}(M)$ (de dimensión 4) de los campos de Killing, es decir, el álgebra de Lie de $I(M)$. □

3. Curvatura

PROPOSICIÓN 13. *La variedad de Cartan (M, g), siendo g la métrica definida en (1.2) para $\varepsilon = 0$, no tiene curvatura constante ni es un espacio riemanniano simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $o = (0,0,0)$. Vamos a comprobar que este espacio homogéneo es naturalmente reductivo, es decir, vamos a ver que el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = i(M)$ puede descomponerse como suma directa de $\mathfrak{h} = \langle K \rangle$ y $\mathfrak{m} = \langle X, Y, Z \rangle$, siendo $\mathfrak{m}$ $Ad(H)$-invariante, verificando

$$B(U, [W,V]_{\mathfrak{m}}) + B([W,U]_{\mathfrak{m}}, V) = 0, \text{ para } U, V, W \in \mathfrak{m},$$

donde B es la forma bilineal en $\mathfrak{m}$, simétrica, definida positiva y $Ad(H)$-invariante, dada por $B(U,V) = g(U,V)_o$, para poder aplicar los resultados de [**21**, Capítulo X, Sección 3]. En esta sección continuamos denotando $\partial_1 = \partial/\partial x \partial$, $\partial_2 = \partial/\partial y$, $\partial_3 = \partial/\partial z$. Tomemos la descomposición

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{h} = \langle K \rangle$, $\mathfrak{m} = \langle X, Y, Z \rangle$ siendo

$$\begin{aligned} K &= y\partial_1 - x\partial_2, \\ X &= \partial_1 - By\partial_3, \\ Y &= \partial_2 + Bx\partial_3, \\ Z &= \partial_3 + \lambda K, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro que debemos averiguar para que la descomposición sea naturalmente reductiva. Calculemos corchetes:

$$[K, X] = Y, \quad [K, Y] = -X, \quad [K, Z] = 0, \tag{3.2}$$

$$[X, Y] = 2B\partial_3 = 2B\,(Z - \lambda K)\,, \quad [X, Z] = -\lambda Y, \quad [Y, Z] = \lambda X.$$

De (3.2) deducimos que $\mathfrak{m}$ es $Ad\,(H)$-invariante. Usando estas fórmulas, tenemos, para $U, V \in \mathfrak{m}$:

$$\begin{aligned} [U, V] &= 2B\left(U^1V^2 - U^2V^1\right)(Z - \lambda K) - \lambda\left(U^1V^3 - U^3V^1\right)Y \\ &\quad +\lambda\left(U^2V^3 - U^3V^2\right)X, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} [U, V]_{\mathsf{m}} &= 2B\left(U^1V^2 - U^2V^1\right)Z - \lambda\left(U^1V^3 - U^3V^1\right)Y \\ &\quad +\lambda\left(U^2V^3 - U^3V^2\right)X. \end{aligned}$$

Si $U, V, W \in \mathfrak{m}$ entonces

$$\begin{aligned} B\,(U, [W, V]_{\mathsf{m}}) &= 2BU^3\left(W^1V^2 - W^2V^1\right) - \lambda AU^2(W^1V^3 \\ &\quad -W^3V^1) + \lambda AU^1\left(W^2V^3 - W^3V^2\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

luego

$$\begin{aligned} B\,([W, U]_{\mathsf{m}}\,, V) &= 2BV^3\left(W^1U^2 - W^2U^1\right) - \lambda AV^2(W^1U^3 \\ &\quad -W^3U^1) + \lambda AV^1\left(W^2U^3 - W^3U^2\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sumando las igualdades (3.3) y (3.4) tenemos

$$B\,(U, [W, V]_{\mathsf{m}}) + B\,([W, U]_{\mathsf{m}}\,, V) = (2B - \lambda A)\,(U^3V^2W^1 - U^3V^1W^2$$

$$+U^2V^3W^1 - U^1V^3W^2),$$

así que, si $\lambda = \frac{2B}{A}$ la descomposición anterior $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ es naturalmente reductiva. Usando entonces [**21**, Capítulo X, Proposition 3.4], si R_4 es el tensor (covariante de orden 4) de curvatura de Riemann-Christoffel de (M, g), conocemos la curvatura seccional:

$$R_4\,(U, V, U, V)_o = \frac{1}{4}B\,([U, V]_{\mathsf{m}}\,, [U, V]_{\mathsf{m}}) - B\left(\left[[U, V]_{\mathsf{h}}\,, V\right], U\right) \tag{3.5}$$

para $U, V \in \mathfrak{m}$. A partir de la fórmula de polarización

$$\begin{aligned} R_4(U,W,V,W) &= \frac{1}{2}\{R_4(U+V,W,U+V,W) \\ &\quad -R_4(U,W,U,W) - R_4(V,W,V,W)\} \end{aligned}$$

es claro que podemos conocer el tensor R_4 sin más que calcular las siguientes tres posibilidades, que obtenemos usando (3.5):

$$\begin{aligned} R_4(X,Y,X,Y)_o &= -3B^2, \\ R_4(X,Z,X,Z)_o &= \frac{B^2}{A}, \\ R_4(Y,Z,Y,Z)_o &= \frac{B^2}{A}. \end{aligned}$$

Como las curvaturas seccionales no coinciden, la variedad no tiene curvatura constante.

Ahora vamos a calcular la derivada covariante del tensor de curvatura anterior usando los resultados de [**21**] antes citados. Debemos calcular

$$(\nabla R_4)(U_1,...,U_5)_o = (\nabla_{U_1} R_4)(U_2,...,U_5)_o\,,$$

siendo $U_1 = X, Y, Z$ y $(U_2,...,U_5)$ cualquiera de las tres cuadruplas anteriores (X,Y,X,Y), (X,Z,X,Z) y (Y,Z,Y,Z), por lo que tenemos 9 valores. Calculemos, por ejemplo

$$\begin{aligned} (\nabla_X R_4)(X,Y,Z,X)_o &= X(R_4(X,Y,Z,X))_o - R_4(X,\nabla_X Y,Z,X)_o \\ &\quad -R_4(X,Y,\nabla_X Z,X)_o\,. \end{aligned}$$

Por un lado

$$\begin{aligned} X(R_4(X,Y,Z,X)) &= -X(R_4(X,Y,X,Z)) = -X(g(R(X,Y)X,Z)) \\ &= X\left(g\left(\frac{3B^2}{A}Y,Z\right)\right) = \frac{3B^2}{A}X(g(Y,Z)) \\ &= \frac{3B^2}{A}X\left(-\frac{4B^3}{A}x\left(x^2+y^2\right)\right) \\ &= -\frac{12B^5}{A^2}(\partial_1 - By\partial_3)\left(x\left(x^2+y^2\right)\right) \\ &= \frac{12B^5}{A^2}\left(x^2+y^2+2x^2\right) = \frac{12B^5}{A^2}\left(3x^2+y^2\right), \end{aligned}$$

por lo que se tiene:

$$X(R_4(X,Y,Z,X))_o = 0. \tag{3.6}$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
(3.7) \qquad R_4\left(X, \nabla_X Y, Z, X\right)_o &= \frac{1}{2} R_4\left(X, [X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z, X\right)_o \\
&= \frac{1}{2} R_4\left(X, 2BZ, Z, X\right)_o \\
&= B R_4\left(X, Z, Z, X\right)_o = -\frac{B^3}{A},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.8) \qquad R_4\left(X, Y, \nabla_X Z, X\right)_o &= \frac{1}{2} R_4\left(X, Y, [X,Z]_{\mathfrak{m}}, X\right)_o \\
&= \frac{1}{2} R_4\left(X, Y, -\frac{2B}{A} Y, X\right)_o \\
&= -\frac{B}{A} R_4\left(X, Y, Y, X\right)_o \\
&= -\frac{3B^3}{A}.
\end{aligned}
$$

Usando (3.6), (3.7) y (3.8) tenemos

$$\left(\nabla_X R_4\right)\left(X, Y, Z, X\right)_o = \frac{4B^3}{A},$$

que al ser no nulo permite asegurar que M **no** es un espacio simétrico. $\square$

4. Invariantes de curvas

Consideremos el k-jet de curvas en M, esto es, el fibrado $J^k(\mathbb{R}, M)$. El grupo $I(M)$ opera en M por la izquierda por ser un grupo de isometrías y dicha operación se extiende a $J^k(\mathbb{R}, M)$ de modo natural. En efecto, cada $\phi \in I(M)$ induce una transformación

$$
\begin{aligned}
\phi^{(k)} \colon J^k(\mathbb{R}, M) &\to J^k(\mathbb{R}, M), \\
\phi^{(k)}\left(j_t^k \sigma\right) &= j_t^k(\phi \circ \sigma).
\end{aligned}
$$

Si $F \in \mathfrak{i}(M)$ es una isometría infinitesimal, entonces se tiene un grupo uniparamétrico de transformaciones en M:

$$\phi_t(x) = \exp(tF) \cdot x, \quad \forall x \in M,$$

donde $\exp(tF) \in I(M)$. Por tanto las extensiones $\phi_t^{(k)}$ forman un grupo uniparamétrico en $J^k(\mathbb{R}, M)$ que definen un campo

$$F^{(k)} \in \mathfrak{X}\left(J^k(\mathbb{R}, M)\right),$$

llamado *k-ésima prolongación del campo F*.

Si $I(M)$ es conexo, entonces una función diferenciable

$$I\colon J^k(\mathbb{R}, M) \to \mathbb{R}$$

es invariante frente a la acción de $I(M)$ si y sólo si es una integral primera de la distribución

$$\mathfrak{D}^{(k)} \subset \mathfrak{X}\left(J^k(\mathbb{R}, M)\right)$$

generada por los campos $F^{(k)}$. Esta distribución es involutiva, porque:

$$\left[F_1^{(k)}, F_2^{(k)}\right] = [F_1, F_2]^{(k)}, \quad \forall F_1, F_2 \in i(M).$$

Aplicando el Teorema de Frobenius, se tiene

$$\begin{aligned} N_k &= \dim J^k(\mathbb{R}, M) - \mathrm{rg}\mathfrak{D}^{(k)} \\ &= (3k+4) - \mathrm{rg}\mathfrak{D}^{(k)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

siendo N_k el número máximo de invariantes funcionalmente independientes en $J^k(\mathbb{R}, M)$.

Consideramos los campos K, X, Y, Z que forman base de

$$i(M) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

definidos en (3.1), tomando $\lambda = 0$ en este caso, donde $\mathfrak{h} = \langle K \rangle$ es el álgebra de Lie del grupo de isotropía H de o.

Cuando $k = 0$ sólo obtenemos un invariante $N_0 = 4 - 3 = 1$, pues $\mathrm{rg}\mathfrak{D}^{(0)} = \mathrm{rg}\mathfrak{D} = 3$ al ser K isotropía de o. El invariante es la coordenada t.

En vez de usar la notación sugerida en la sección 2 del Capítulo 3 seguiremos la siguiente: en el fibrado de jets $J^k(\mathbb{R}, M)$, para cada $j = 0, \ldots, k$, las funciones $x^{(j)}$, $y^{(j)}$, $z^{(j)}$, denotan respectivamente x_j^1, x_j^2, x_j^3.

Para hallar los invariantes de primer orden debemos hallar las extensiones $K^{(1)}$, $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ al 1-jet $J^1(\mathbb{R}, M)$. Si

$$F = (ay+b)\frac{\partial}{\partial x} + (-ax+c)\frac{\partial}{\partial y} + (B(cx-by)+d)\frac{\partial}{\partial z},$$

entonces debe ocurrir $L_{F^{(1)}}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$, donde

$$\mathcal{C} = \left\langle dx - x^{(1)}dt, dy - y^{(1)}dt, dz - z^{(1)}dt \right\rangle$$

y L es la derivada de Lie. Calculamos:

$$\begin{aligned} L_{F^{(1)}}\left(dx - x^{(1)}dt\right) &= dF(x) - \lambda dt = a dy - \lambda dt \\ &= a\left(dy - y^{(1)}dt\right) + \left(ay^{(1)} - \lambda\right)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{F^{(1)}}\left(dy - y^{(1)}dt\right) &= dF(y) - \mu dt = -a dy - \mu dt \\ &= -a\left(dx - x^{(1)}dt\right) - \left(ax^{(1)} + \mu\right)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{F^{(1)}}\left(dz - z^{(1)}dt\right) &= dF(z) - \nu dt = B\left(cdx - bdy\right) - \nu dt \\ &= Bc\left(dx - x^{(1)}dt\right) - Bb\left(dy - y^{(1)}dt\right) \\ &\quad +Bcx^{(1)}dt - Bby^{(1)}dt - \nu dt. \end{aligned}$$

Para que se verifique $L_{F^{(1)}}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ debemos tener $\lambda = ay^{(1)}$, $\mu = ax^{(1)}$, $\nu = B\left(cx^{(1)} - by^{(1)}\right)dt$, luego la primera prolongación de F será

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= a\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + y^{(1)}\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} - x^{(1)}\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}\right) \\ &\quad +b\left(\frac{\partial}{\partial x} - By\frac{\partial}{\partial z} - By^{(1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}\right) \\ &\quad +c\left(\frac{\partial}{\partial y} + Bx\frac{\partial}{\partial z} + Bx^{(1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}\right) + d\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Por tanto, las primeras prolongaciones de las isometrías infinitesimales son

$$\begin{aligned} K^{(1)} &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + y^{(1)}\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} - x^{(1)}\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}, \\ X^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x} - By\frac{\partial}{\partial z} - By^{(1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}, \\ Y^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial y} + Bx\frac{\partial}{\partial z} + Bx^{(1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1)}}, \\ Z^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 14. *El número de invariantes independientes de primer orden es*

$$N_1 = 3.$$

De hecho, una base de integrales primeras de la distribución $\mathfrak{D}^{(1)}$ *es* (t, u, v)*, donde*

$$\begin{aligned} u &= \|T\|^2, \\ v &= g\left(T, \frac{\partial}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 15. *Es de notar que no sólo debe ser invariante la norma del campo tangente, sino también el ángulo que éste forma con el eje* OZ*.*

Demostración. Primero expresamos u y v en las coordenadas $\left(x, y, z, x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}\right)$:

$$\begin{aligned} v &= g\left(T, \frac{\partial}{\partial z}\right) = x^{(1)} g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + y^{(1)} g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &\quad + z^{(1)} g\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= -Byx^{(1)} + Bxy^{(1)} + z^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \|T\|^2 \\ &= x^{(1)} g\left(T, \frac{\partial}{\partial x}\right) + y^{(1)} g\left(T, \frac{\partial}{\partial y}\right) + z^{(1)} g\left(T, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= x^{(1)} \left\{x^{(1)} \left(A + B^2 y^2\right) + y^{(1)} \left(-B^2 xy\right) + z^{(1)} \left(-By\right)\right\} \\ &\quad + y^{(1)} \left\{x^{(1)} \left(-B^2 xy\right) + y^{(1)} \left(A + B^2 x^2\right) + z^{(1)} Bx\right\} + z^{(1)} v \\ &= A \left(x^{(1)}\right)^2 + B^2 y^2 \left(x^{(1)}\right)^2 - B^2 xyx^{(1)} y^{(1)} - Byx^{(1)} z^{(1)} \\ &\quad - B^2 xyx^{(1)} y^{(1)} + A \left(y^{(1)}\right)^2 + B^2 x^2 \left(y^{(1)}\right)^2 + Bxy^{(1)} z^{(1)} + z^{(1)} v \\ &= A \left(\left(x^{(1)}\right)^2 + \left(y^{(1)}\right)^2\right) + B^2 y^2 \left(x^{(1)}\right)^2 - 2B^2 xyx^{(1)} y^{(1)} \\ &\quad + B^2 x^2 \left(y^{(1)}\right)^2 + z^{(1)} \left(v + Bxy^{(1)} - Byx^{(1)}\right) \\ &= A \left(\left(x^{(1)}\right)^2 + \left(y^{(1)}\right)^2\right) + B^2 y^2 \left(x^{(1)}\right)^2 - 2B^2 xyx^{(1)} y^{(1)} \\ &\quad + B^2 x^2 \left(y^{(1)}\right)^2 + \left(v - Bxy^{(1)} + Byx^{(1)}\right) \left(v + Bxy^{(1)} - Byx^{(1)}\right) \\ &= A \left(\left(x^{(1)}\right)^2 + \left(y^{(1)}\right)^2\right) + B^2 y^2 \left(x^{(1)}\right)^2 - 2B^2 xyx^{(1)} y^{(1)} \\ &\quad + B^2 x^2 \left(y^{(1)}\right)^2 + v^2 - B^2 x^2 \left(y^{(1)}\right)^2 - B^2 y^2 \left(x^{(1)}\right)^2 \\ &\quad + 2B^2 xyx^{(1)} y^{(1)} \\ &= A \left(\left(x^{(1)}\right)^2 + \left(y^{(1)}\right)^2\right) + v^2. \end{aligned}$$

Ahora es fácil comprobar que $F^{(1)}(u) = 0$, $F^{(1)}(v) = 0$, y como u y v son independientes es claro que (t, u, v) es una base de los invariantes de primer orden. Podemos además tomar los invariantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(y^{(1)}\right)^2, \\ I_2 &= z^{(1)} + Bxy^{(1)} - Byx^{(1)}, \end{aligned}$$

como generadores, pues van a simplificar los cálculos posteriores. □

Para hallar los invariantes de orden superior debemos hallar el resto de prolongaciones de las isometrías infinitesimales. Para ello debemos actuar similarmente pero con

$$\mathcal{C}^{(k)} = \left\langle dx^{(k-1)} - x^{(k)}dt, dy^{(k-1)} - y^{(k)}dt, dz^{(k-1)} - z^{(k)}dt \right\rangle$$

e imponer la condición $L_{F^{(k)}}\mathcal{C}^{(k)} \subset \mathcal{C}^{(k)}$, $k = 2, ...$Así se obtiene

$$\begin{aligned} K^{(k)} &= K^{(k-1)} + y^{(k)}\frac{\partial}{\partial x^{(k)}} - x^{(k)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}}, \\ X^{(k)} &= X^{(k-1)} - By^{(k)}\frac{\partial}{\partial z^{(k)}}, \\ Y^{(k)} &= Y^{(k-1)} + Bx^{(k)}\frac{\partial}{\partial z^{(k)}}, \\ Z^{(k)} &= Z = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que efectivamente la distribución $\mathfrak{D}^{(k)}$ es involutiva, con tal de calcular los corchetes de estos campos. Además $rg\mathfrak{D}^{(k)} = 4$ para todo $k = 1, ...$, por lo que el número de invariantes de orden k es

$$N_k = 1 + 3\,(k+1) - 4 = 3k.$$

Entonces el número de invariantes de orden k estricto es

$$N_k - N_{k-1} = 3,$$

es decir, cuando aumentamos el orden obtenemos 3 invariantes independientes.

Proposición 15. *El número de invariantes independientes de segundo orden es*

$$N_2 = 6.$$

De hecho, una base de integrales primeras de la distribución $\mathfrak{D}^{(2)}$ *es* $(t, I_1, I_2, I_3, I_4, \kappa)$*, donde*

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(y^{(1)}\right)^2, \\ I_2 &= z^{(1)} + Bxy^{(1)} - Byx^{(1)}, \\ I_3 &= x^{(1)}x^{(2)} + y^{(1)}y^{(2)}, \\ I_4 &= z^{(2)} + Bxy^{(2)} - Byx^{(2)}, \end{aligned}$$

y κ es la curvatura de la curva.

OBSERVACIÓN 16. *No obstante, podemos sustituir κ por el siguiente invariante: $I_5 = \left(x^{(2)}\right)^2 + \left(y^{(2)}\right)^2$, que, si bien no tiene una interpretación geométrica tan clara como la curvatura, tiene una expresión analítica má sencilla.*

DEMOSTRACIÓN. Es conocido que las derivadas totales de los invariantes de orden k son invariantes de orden $k+1$. Las derivadas totales de I_1 e I_2 son

$$\begin{aligned} D_t(I_1) &= 2x^{(1)}x^{(2)} + 2y^{(1)}y^{(2)}, \\ D_t(I_2) &= z^{(2)} + Bxy^{(2)} - Byx^{(2)}. \end{aligned}$$

Llamamos

$$\begin{aligned} I_3 &= x^{(1)}x^{(2)} + y^{(1)}y^{(2)}, \\ I_4 &= z^{(2)} + Bxy^{(2)} - Byx^{(2)}, \end{aligned}$$

que son invariantes de orden 2. Es obvio que estos invariantes son independientes, pues en I_4 aparece $z^{(2)}$ pero en I_3 no. Por la fórmula de las dimensiones (4.1), existe un tercer invariante independiente de I_3 e I_4, que por el Teorema de clasificación debe ser κ o, si queremos evitar algunas raíces cuadradas, κ^2 (recordemos que f es invariante si, y sólo si, f^2 es invariante), donde

$$\kappa = \frac{\left(g(T,T)\,g(\nabla_T T, \nabla_T T) - g(T, \nabla_T T)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{g(T,T)^{\frac{3}{2}}}$$

es la fórmula de la curvatura de la curva. Sin embargo, es fácil comprobar que

$$I_5 = \left(x^{(2)}\right)^2 + \left(y^{(2)}\right)^2$$

es también invariante de orden 2, pues $F^{(2)}(I_5) = 0$, e independiente de I_3 e I_4, ya que el rango de la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x^{(2)} & y^{(2)} & 0 & x^{(1)} & y^{(1)} & 0 \\ By^{(2)} & -Bx^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -By & Bx & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x^{(2)} & 2y^{(2)} & 0 \end{pmatrix}$$

es 3, por lo que $(t, I_1, ..., I_5)$ es una base de integrales primeras de la distribución $\mathfrak{D}^{(2)}$, es decir, una base de invariantes de orden 2. $\square$

Usando un programa Maple diseñado "ad hoc" para este caso, calculamos la expresión de κ^2 en función de esta base $(t, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$, obteniendo

$$\kappa^2 = \frac{4B^2 (I_2)^2 (I_1)^2 + A\Big((I_2)^2 I_5 - 2I_2I_4I_3 + (I_4)^2 I_1 + A \left(I_1I_5 - (I_3)^2\right)\Big)}{(I_2^2 + AI_1)^3}$$
$$+\frac{4B^2 (I_2)^4 I_1}{A(I_2^2 + AI_1)^3} + \frac{4BI_2\sqrt{I_1I_5 - I_3^2}}{(I_2^2 + AI_1)^2}.$$

En el Teorema general de congruencia de curvas (Teorema 6) se establecen los invariantes necesarios para la equivalencia de curvas, que son

$$\nabla^j R\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_{j+3}}, \omega^i\right),$$

donde (X_1, X_2, X_3) es la referencia de Frénet de una curva de Frénet cualquiera y $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ es la referencia dual.

En la variedad de Cartan que estamos considerando se observa que éstos no son necesarios para clasificar las curvas por isometrías, pues dependen de $I_1, ..., I_5$, según indican las fórmulas que hemos calculado usando un programa Maple. Por ejemplo, se tiene:

$$R\left(X_1, X_2, X_1, X_2\right) = -\frac{N}{D},$$

donde

$$\begin{aligned} N &= B^2(-4B^2 (I_2)^4 I_1 + 12AB^2 (I_2)^2 (I_1)^2 - A (I_2)^2 I_5 \\ &\quad -A^2 (I_4)^2 I_1 + 2A^2I_4I_2I_3 + 3A^3I_1I_5 - 3A^3 (I_3)^2 \\ &\quad +4ABI_2 \left(3AI_1 - (I_2)^2\right) \sqrt{I_1I_5 - (I_3)^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= A^2(4B^2 (I_2)^4 I_1 + 4AB^2 (I_2)^2 (I_1)^2 + A^2 (I_2)^2 I_5 \\ &\quad +A^2 (I_4)^2 I_1 - 2A^2I_4I_2I_3 + A^3I_1I_5 - A^3 (I_3)^2 \\ &\quad +4BAI_2 \left(AI_1 - (I_2)^2\right) \sqrt{I_1I_5 - (I_3)^2}). \end{aligned}$$

Al pasar al tercer orden hay que tener en cuenta las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} D_t\left(I_3\right) &= \left(x^{(2)}\right)^2 + \left(y^{(2)}\right)^2 + x^{(1)}x^{(3)} + y^{(1)}y^{(3)} \\ &= I_5 + x^{(1)}x^{(3)} + y^{(1)}y^{(3)}, \end{aligned}$$

$$D_t\left(I_4\right) = z^{(3)} + Bxy^{(3)} - Byx^{(3)} + B\left(x^{(1)}y^{(2)} - y^{(1)}x^{(2)}\right).$$

Notemos que $x^{(1)}y^{(2)} - y^{(1)}x^{(2)}$ es un invariante de orden 2 que depende de I_1, I_3 e I_5, pues se verifica la relación

$$\left(x^{(1)}y^{(2)} - y^{(1)}x^{(2)}\right)^2 = I_1I_5 - I_3^2.$$

Por tanto podemos tomar

$$\begin{aligned} I_6 &= x^{(1)}x^{(3)} + y^{(1)}y^{(3)}, \\ I_7 &= z^{(3)} + Bxy^{(3)} - Byx^{(3)}, \end{aligned}$$

como invariantes de orden 3 independientes (nótese que en I_7 aparece $z^{(3)}$ pero no aparece en I_6). Sabemos que deben existir tres invariantes independientes de orden 3 estricto, por lo que es necesario encontrar uno más. Según el Teorema general de congruencia, éste debe ser la torsión τ de la curva, o al menos debe obtenerse a partir de ésta. De hecho, no es difícil ver que la función

$$I_8 = \left(x^{(3)}\right)^2 + \left(y^{(3)}\right)^2$$

es invariante, pues $F^{(3)}(I_8) = 0$. Además I_8 es independiente de I_6 e I_7, pues el rango de la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x^{(3)} & y^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{(1)} & y^{(1)} & 0 \\ By^{(3)} & -Bx^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -By & Bx & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x^{(3)} & 2y^{(3)} & 0 \end{pmatrix}$$

es 3. Por tanto, acabamos de probar la siguiente:

Proposición 16. $(t, I_1, ..., I_8)$ *es una base de invariantes de tercer orden.*

Usando un programa Maple, podemos calcular la expresión de τ^2 en función de esta base, según la fórmula:

$$\tau = \frac{\mathrm{vol}\left(T, \nabla_T T, \nabla_T^2 T\right)}{\left(g\left(T,T\right) g\left(\nabla_T T, \nabla_T T\right) - g\left(T, \nabla_T T\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

donde vol es la forma de volumen asociada a la métrica g. En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol} &= \left(\det\left(g_{ij}\right)\right)^{\frac{1}{2}} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= A dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Hemos obtenido la siguiente expresión:

$$\tau^2 = -\frac{N_\tau}{D_\tau},$$

donde

$$\begin{aligned}
N_\tau &= (4B^3 (I_1)^2 (I_2)^4 - 4AB^3 (I_1)^3 (I_2)^2 - 2A^2 B I_1 (I_2)^2 I_6 \\
&\quad +3A^2 B I_1 (I_2)^2 I_5 - 3A^2 B (I_1)^2 (I_4)^2 + 2A^2 B (I_1)^2 I_2 I_7 \\
&\quad +(A^3 (I_2 I_3 - I_1 I_4) \sqrt{I_1 I_8 - (I_6)^2} + (A^3 I_1 I_7 + 8AB^2 I_1 (I_2)^3 \\
&\quad -A^3 I_2 I_6 - 2A^2 B^2 (I_1)^2 I_2) \sqrt{I_1 I_5 - (I_3)^2})^2, \\
D_\tau &= A^3 (I_1)^2 (-4B^2 I_1 (I_2)^4 - 4AB^2 (I_1)^2 (I_2)^2 - A^2 I_1 (I_4)^2 \\
&\quad -A^2 (I_2)^2 I_5 + 2A^2 I_2 I_3 I_4 + A^3 (I_3)^2 - A^3 I_1 I_5 \\
&\quad -4ABI_2 \left((I_2)^2 + A^2 I_1\right) \sqrt{I_1 I_5 - (I_3)^2}).
\end{aligned}$$

TEOREMA 9. *Los invariantes de cualquier orden $k \geq 4$ se obtienen efectuando derivadas totales sucesivas y operaciones algebraicas de los invariantes de tercer orden. Por tanto, el orden de estabilidad asintótica (en el sentido de* [**23**]*) de la variedad de Cartan definida por la métrica riemanniana de la fórmula* (1.2) *correspondiente a* $\varepsilon = 0$ *es* 3*.*

DEMOSTRACIÓN. Para hallar los invariantes de cuarto orden primero calculamos las derivadas totales de los invariantes I_6, I_7 e I_8:

$$\begin{aligned}
D_t (I_6) &= x^{(2)} x^{(3)} + y^{(2)} y^{(3)} + x^{(1)} x^{(4)} + y^{(1)} y^{(4)}, \\
D_t (I_7) &= z^{(4)} + Bxy^{(4)} - Byx^{(4)} + B\left(x^{(1)} y^{(3)} - y^{(1)} x^{(3)}\right), \\
D_t (I_8) &= 2x^{(3)} x^{(4)} + 2y^{(3)} y^{(4)}.
\end{aligned}$$

Las funciones $J_1 = x^{(2)} x^{(3)} + y^{(2)} y^{(3)}$ y $J_2 = x^{(1)} y^{(3)} - y^{(1)} x^{(3)}$ son invariantes de orden 3 que dependen de $(I_1, ..., I_8)$, ya que $F^{(3)} (J_1) = 0$ y $F^{(3)} (J_2) = 0$, y el rango de la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 2x^{(1)} & 2y^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
By^{(1)} & -Bx^{(1)} & 0 & -By & Bx & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x^{(2)} & y^{(2)} & 0 & x^{(1)} & y^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
By^{(2)} & -Bx^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -By & Bx & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x^{(2)} & 2y^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x^{(3)} & y^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{(1)} & y^{(1)} & 0 \\
By^{(3)} & -Bx^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -By & Bx & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x^{(3)} & 2y^{(3)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^{(3)} & y^{(3)} & 0 & x^{(2)} & y^{(2)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & y^{(3)} & -x^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^{(1)} & x^{(1)} & 0
\end{pmatrix}$$

es 8. Por tanto podemos tomar

$$\begin{aligned} I_9 &= x^{(1)}x^{(4)} + y^{(1)}y^{(4)}, \\ I_{10} &= z^{(4)} + Bxy^{(4)} - Byx^{(4)}, \\ I_{11} &= x^{(3)}x^{(4)} + y^{(3)}y^{(4)}, \end{aligned}$$

como invariantes independientes de orden 4 estricto. Podemos observar que éstos son derivadas totales de invariantes de orden inferior excepto una suma de invariantes de orden inferior. Como $N_{k+1} = N_k + 3$, lo mismo sucede para todo $k \geqslant 4$. $\square$

CAPÍTULO 8

Congruencia de curvas en espacios simétricos

1. Variedades Simétricas

Definición 18. *Una variedad riemanniana conexa* (M, g) *es* simétrica *(o es un* espacio riemanniano simétrico*) si para cada* $p \in M$ *existe una única isometría* $\phi_p \colon M \to M$ *con diferencial* $d_p\phi_p = -Id$*, llamada* simetría global de M en p*. Si la isometría está definida en un entorno* U *de* p*, para cada* $p \in M$*, se dice que* (M, g) *es* localmente simétrica*.*

Claramente, una variedad simétrica es localmente simétrica, no siendo cierto el recíproco. Sin embargo, una variedad localmente simétrica, completa y simplemente conexa es simétrica (véase [**33**, Capítulo 8, Corollary 21]). Se sabe además ([**33**, Capítulo 8, Corollary 10, Corollary 16]):

Proposición 17. *Dada* (M, g) *una variedad riemanniana, son equivalentes:*

1. M *es localmente simétrica;*
2. $\nabla R = 0$*;*
3. *Si* $A \colon T_pM \to T_qM$ *es una isometría lineal que lleva el tensor* R_p *al tensor* R_q*, es decir, para cualesquiera* $v_1, v_2, v_3 \in T_pM$ *se tiene* $A\left(R(v_1, v_2)v_3\right) = R(Av_1, Av_2)(Av_3)$*, entonces existe una isometría* ϕ *definida en entornos normales de* p *y* q *tal que* $d_p\phi = A$*;*
4. *Si* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ *son campos paralelos a lo largo de una curva* σ *entonces* $R(X, Y)Z$ *también es paralelo a lo largo de* σ*;*
5. *La curvatura seccional es invariante por transporte paralelo.*

Es conocido (véase [**33**, Capítulo 9, Lemma 36]) que todo espacio riemanniano M simétrico es homogéneo. Por tanto M puede verse como el cociente de la componente conexa de la identidad G del grupo de isometrías $I(M)$ por un subgrupo de isotropía H de un punto o de M, es decir el subgrupo de G que deja invariante el punto o. En este caso, las geodésicas, la curvatura, etc., pueden estudiarse a partir de la estructura algebraica de $I(M)$ como grupo de Lie (véase [**21**, Capítulo XI], [**33**, Capítulo 11, p. 315-321]).

2. Congruencia de curvas

TEOREMA 10. *Sean* (M, g) *y* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ *dos variedades riemannianas localmente simétricas, de la misma dimensión* m*, y sean*

$$\sigma\colon (a, b) \to M,\ \overline{\sigma}\colon (a, b) \to \overline{M},$$

dos curvas de Frénet, $p = \sigma(t_0)$*,* $\overline{p} = \overline{\sigma}(t_0)$*,* $a < t_0 < b$*. Dichas curvas son congruentes en torno a* p *y* $\overline{p}$ *si, y sólo si, se verifican las dos siguientes condiciones:*

1. *Para todo* $i = 0, \ldots, m-1$*,* $|t - t_0| < \varepsilon$*, se tiene*

$$\kappa_i(t) = \overline{\kappa}_i(t)\,. \tag{2.1}$$

2. *Para todo* $i, j, k, l = 1, \ldots, m$*,* $|t - t_0| < \varepsilon$*, se verifica*

$$R\left(X_i, X_j, X_k, \omega^l\right)(\sigma(t)) = \overline{R}\left(\overline{X}_i, \overline{X}_j, \overline{X}_k, \overline{\omega}^l\right)(\overline{\sigma}(t))\,, \tag{2.2}$$

donde $R, \overline{R}$ *son los tensores de curvatura de Riemann de* (M, g) *y* $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$*,* $(X_1, \ldots, X_m)$*,* $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m\right)$ *son las referencias de Frénet de* $\sigma, \overline{\sigma}$*, y* $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$*,* $(\overline{\omega}^1, \ldots, \overline{\omega}^m)$ *las referencias duales.*

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo el mismo razonamiento que en la demostración del Criterio general de congruencia (Capítulo 6, Sección 1, Teorema 6), llegamos a que (2.1) y (2.2) se verifican. Por tanto basta ver que las condiciones (2.1) y (2.2) implican la congruencia de σ y de $\overline{\sigma}$.

Para ello, consideramos la isometría lineal

$$A\colon T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$$

definida por $A(X_i(t_0)) = \overline{X}_i(t_0)$, $i = 1, \ldots, m$. La condición 2.2 nos dice que A preserva la curvatura en p (en el sentido de [**33**]) por lo que, aplicando [**33**, Capítulo 8, Theorem 14] deducimos que la aplicación $\phi\colon U \to \overline{U}$,

$$\phi = \exp_{\overline{p}} \circ A \circ \exp_p^{-1},$$

es una isometría local que conserva la orientación definida en un entorno normal U de p, tal que $\phi(p) = \overline{p}$ y $d_p\phi = A$. Para terminar, el argumento que se usa al final de la demostración del Teorema 6 para ver que $\phi(\sigma(t)) = \overline{\sigma}(t)$, siendo $|t - t_0| < \varepsilon$ suficientemente pequeño, i. e., ver que $\phi \circ \sigma$ y σ son soluciones del mismo sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, puede usarse también aquí, con lo que se concluye. □

OBSERVACIÓN 17. *Según* [**21**, VI, Theorem 7.7]*, toda variedad riemanniana localmente simétrica es analítica, y su conexión de Levi-Civita también es analítica. Usando este potente resultado, se está en* *las condiciones del Criterio general de congruencia (Teorema 6). En este caso, las hipótesis (1.2) son simplemente*

$$R\left(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, \omega^i\right)(p) = \overline{R}\left(\overline{X}_{i_1}, \overline{X}_{i_2}, \overline{X}_{i_3}, \overline{\omega}^i\right)(\overline{p}),$$

por lo que se vuelve a probar, apoyados en el Teorema 6, el resultado anterior.

Observación 18. *Teniendo en cuenta* [**21**, Capítulo VI, Proposition 1.2], *podemos sustituir la segunda condición del Teorema anterior por*

$$R\left(X_i, X_j, X_k, \omega^l\right)(\sigma(t)) = R\left(\overline{X}_i, \overline{X}_j, \overline{X}_k, \overline{\omega}^l\right)(\overline{\sigma}(t)).$$

Cuando $M = \overline{M}$ es arbitraria (no necesariamnete simétrica) podemos decir que, si las condiciones (2.1) y (2.2) del Teorema 10 anterior caracterizan la congruencia de curvas de Frénet entonces la variedad es localmente simétrica, es decir, el Teorema anterior es característico de los espacios localmente simétricos.

Teorema 11. *Sea (M, g) una variedad riemanniana, con tensor de curvatura de Riemann R, verificando: dos curvas de Frénet $\sigma, \overline{\sigma}$ con valores en M, tales que $\sigma(t_0) = \overline{\sigma}(t_0) = p$, son congruentes en torno a p si, y solamente si, se verifican las condiciones*

1. *Para todo $i = 0, \ldots, m-1$, $|t - t_0| < \varepsilon$, se tiene*
$$\kappa_i(t) = \overline{\kappa}_i(t).$$
2. *Para todo $i, j, k, l = 1, \ldots, m$, se verifica*
$$R\left(X_i, X_j, X_k, \omega^l\right)(p) = R\left(\overline{X}_i, \overline{X}_j, \overline{X}_k, \overline{\omega}^l\right)(p),$$
donde $(X_1, \ldots, X_m)$, $\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m\right)$ son las referencias de Frénet de $\sigma, \overline{\sigma}$ y $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$, $(\overline{\omega}^1, \ldots, \overline{\omega}^m)$ las referencias duales, calculadas con la misma orientación si $\dim M$ *es par, y con orientaciones contrarias si* $\dim M$ *es impar.*

Entonces M es localmente simétrica.

Demostración. Sea $p \in M$ y sea $(v_1, ..., v_m)$ una base ortonormal positiva de T_pM. Tomemos además un sistema de coordenadas $(U; x^i)$ en torno a p, y m funciones diferenciables $\kappa_j \in C^\infty((-\delta, \delta))$, para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tales que $\kappa_j > 0$ para todo $j = 0, \ldots, m-2$. Por el Lema 3 sabemos que existen dos curvas de Frénet $\sigma, \overline{\sigma} \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $0 < \varepsilon < \delta$, con curvaturas dadas $\kappa_j = \overline{\kappa}_j$, tales que $\sigma(0) = \overline{\sigma}(0) = p$ y

$$\left(\nabla_T^{j-1} T\right)_0 = v_j = -\left(\nabla_{\overline{T}}^{j-1} \overline{T}\right)_0, \text{ para } j = 1, \ldots, m-1,$$

para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces los $m-1$ primeros campos de las referencias de Frénet de σ y $\overline{\sigma}$ se relacionan de la siguiente forma en p:

$$X_i(0) = -\overline{X}_i(0), \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

y sus referencias duales

$$\omega^i(0) = -\overline{\omega}^i(0), \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

Si la dimensión de la variedad es par, las referencias de Frénet se construyen con la misma orientación, pero si la dimensión es impar se construyen con orientaciones contrarias. En cualquier caso, los últimos campos verifican

$$X_m(0) = -X_m(0).$$

En consecuencia, para todo $i, j, k, l = 1, \ldots, m$, tenemos

$$\begin{aligned} R\left(X_i, X_j, X_k, \omega^l\right)(p) &= R_p\left(-X_i(0), -X_j(0), -X_k(0), -\omega^l(0)\right) \\ &= R\left(\overline{X}_i, \overline{X}_j, \overline{X}_k, \overline{\omega}^l\right)(p). \end{aligned}$$

Por la hipótesis sabemos que σ, $\overline{\sigma}$ son isométricas, es decir, existe una isometría $\phi\colon U \to M$ definida en un entorno abierto de p que lleva σ a $\overline{\sigma}$ y deja p fijo. Como $\overline{\sigma} = \phi \circ \sigma$, necesariamente

$$d_p\phi\left(X_i(0)\right) = \overline{X}_i(0) = -X_i(0), \quad i = 1, \ldots, m,$$

es decir $d_p\phi = -Id_{T_pM}$. Como el punto $p \in M$ es arbitrario, la variedad (M, g) es localmente simétrica. $\square$

CAPÍTULO 9

Curvas en espacios de curvatura constante

Un resultado clásico de Frénet (e.g., véase [**37**]) muestra que dos curvas de Frénet en $\mathbb{R}^m$ son congruentes si y solamente si sus $m-1$ curvaturas coinciden. El siguiente resultado prueba que este Teorema de Frénet es cierto en cualquier variedad de curvatura constante. Su demostración puede encontrarse en [**31**, Theorem 1], cuyo esquema es el mismo que el de la demostración del Teorema 10, salvo en que se usa que las variedades de curvatura constante son espacios isotrópicos en el sentido de [**38**, (4.3.4) y (4.3.11)]. De hecho se prueba que el Teorema de Frénet es característico de las variedades de curvatura constante.

TEOREMA 12. *Sean* $\sigma, \overline{\sigma}\colon (a,b) \to M$ *dos curvas de Frénet con valores en una variedad riemanniana* (M,g) *de curvatura constante y de dimensión* m*, con conexión de Levi-Civita* ∇*. Dichas curvas son congruentes en torno a* $p = \sigma(t_0)$ *y* $\overline{p} = \overline{\sigma}(t_0)$*,* $a < t_0 < b$ *si, y sólo si,* $\kappa_i(t) = \overline{\kappa}_i(t)$ *para todo* $i = 0, \ldots, m-1$ *y* $|t - t_0|$ *suficientemente pequeño.*

TEOREMA 13. *Sea* (M,g) *una variedad riemanniana en la que dos curvas de Frénet son congruentes si, y sólo si, sus curvaturas coinciden. Entonces* M *tiene curvatura constante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(v_1, \ldots, v_m)$ una base ortonormal de T_pM. Del Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias ([**17**, Capítulo 8, Sección 2, Theorem 1]) y del Lema 2 deducimos la existencia de una curva

$$\sigma\colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$$

tal que $\sigma(t_0) = p$, $\left(\nabla_T^i T\right)_{t_0} = v_{i+1}$, $i = 0, \ldots, m-1$ y $\left(\nabla_T^m T\right)_t = 0$ para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Sea $A\colon T_pM \to T_pM$ un isomorfismo lineal arbitrario que preserve el producto escalar inducido por la métrica riemanniana g en el espacio tangente T_pM, y sea

$$\overline{\sigma}\colon (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to M$$

la curva determinada por

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(t_0) &= p, \\ \left(\nabla^i_{\overline{T}}\overline{T}\right)_{t_0} &= A(v_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, m-1, \\ \left(\nabla^m_{T}T\right)_t &= 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos suponer que σ y $\overline{\sigma}$ son curvas de Frénet. Consideremos

$$h_{ij} = g\left(\left(\nabla^i_T T\right)_t, \left(\nabla^j_T T\right)_t\right) - g\left(\left(\nabla^i_{\overline{T}}\overline{T}\right)_t, \left(\nabla^j_{\overline{T}}\overline{T}\right)_t\right).$$

Entonces

$$\frac{d^r h_{ij}}{dt^r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} h_{i+r-k,j+k}, \tag{0.3}$$

y por las definiciones de σ y $\overline{\sigma}$

$$h_{ij}(t) = 0 \quad \text{para } i \geqslant m \text{ ó } j \geqslant m, \tag{0.4}$$

$$h_{ij}(t_0) = 0 \quad \text{para } i, j = 0, \ldots, m-1. \tag{0.5}$$

Por tanto, de (0.3) y (0.4) tenemos

$$\frac{d^{2m} h_{ij}}{dt^{2m}} = 0,$$

luego h_{ij} es un polinomio de grado menor o igual que $2m-1$. De (0.3) y (0.5) se deduce, para todo $r \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^r h_{ij}}{dt^r}(t_0) = 0,$$

luego h_{ij} se anula idénticamente. El Lema 5 nos dice entonces

$$\kappa_i = \overline{\kappa}_i, \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

En virtud de la hipótesis, existe una isometría ϕ definida en un entorno abierto de p, que deja p fijo, tal que $\phi_* = A$. En consecuencia, M es isotrópica en el sentido de [**38**], y por tanto M tiene curvatura constante. □

Definición 19. *Diremos que dos r-jets de curvas*

$$j^r_{t_0}\sigma, j^r_{t_0}\sigma' \in J^r_{t_0}(\mathbb{R}, M)$$

están r-relacionados, *y escribiremos $j^r_{t_0}\sigma \sim_r j^r_{t_0}\sigma'$, si existe un embebimiento isométrico ϕ tal que $\phi^{(r)}(j^r_{t_0}\sigma) = j^r_{t_0}\sigma'$.*

Es claro que ésta es una relación de equivalencia en $J^r_{t_0}(\mathbb{R}, M)$.

COROLARIO 2. *Sean* $(x_{hi})_{1\leq h\leq i\leq r}$ *las coordenadas cartesianas de* $\mathbb{R}^N$*,* $N = \frac{1}{2}r(r+1)$*. Dada una variedad riemanniana* M *de curvatura constante y dimensión* m*, sea*

$$f^r \colon J^r_{t_0}(\mathbb{R}, M) \to \mathbb{R}^N,\ 1 \leq r \leq m,$$

la aplicación cuyas componentes son

$$\left(x_{hi} \circ f^r\right)\left(j^r_{t_0}\sigma\right) = g\left(\left(\nabla_T^{h-1}T\right)_{t_0}, \left(\nabla_T^{i-1}T\right)_{t_0}\right),\ 1 \leq h \leq i \leq r.$$

Entonces f^r *induce un homeomorfismo entre* $J^r_{t_0}\left(\mathbb{R}, M\right)/\sim_r$ *y la subvariedad con esquinas* $Q_r \subset \mathbb{R}^N$ *definida por las desigualdades:*

$$x_{11} \geq 0, \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \dots, \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rr} \end{vmatrix} \geq 0,$$

donde hemos fijado $x_{hi} = x_{ih}$ *para* $h > i$*.*

En particular, si M *es conexa, simplemente conexa y completa, entonces*

$$J^r_{t_0}\left(\mathbb{R}, M\right)/I(M) \simeq Q_r.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $r \in \mathbb{N}$ tenemos

$$f^r\left(J^r_{t_0}(\mathbb{R}, M)\right) \subset Q_r$$

y

$$f^r\left(j^r_{t_0}\sigma\right) = f^r\left(j^r_{t_0}\sigma'\right)$$

si $j^r_{t_0}\sigma$ y $j^r_{t_0}\sigma'$ son congruentes. Primero mostramos que para $r \leq m$, $f^r \colon J^r_{t_0}\left(\mathbb{R}, M\right) \to Q_r$ es sobreyectiva. Dado un punto

$$a = (a_{hi})_{1\leq h\leq i\leq r} \in Q_r$$

podemos obtener otro punto $a' = (a'_{hi})_{1\leq h\leq i\leq m} \in Q_m$ tomando $a'_{hi} = a_{hi}$ para $i \leq r$, $a'_{hi} = \delta_{hi}$ para $r+1 \leq i \leq m$. Si existe $j^m_{t_0}\sigma$ tal que $f^m(j^m_{t_0}) = a'$, entonces $f^r(j^r_{t_0}) = a$. Luego, podemos asumir $r = m$. En ese caso, como $a \in Q_m$, tenemos

$$\sum_{h,i=1}^{m} a_{hi}x_h x_i \geq 0$$

para todo $(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$. Por tanto, los autovalores de la m-matriz simétrica $A = (a_{hi})$ son no negativos y por tanto A admite una raiz cuadrada simétrica $\sqrt{A} = (b_{hi})$. Sea $(X_1, ..., X_m)$ una base ortonormal de $T_{x_0}M$. Como arriba, podemos obtener una curva σ tal que

$$\sigma(t_0) = x_0 \in M, \quad (\nabla^i_T T)_{t_0} = \sum_{h=1}^{m} b_{h,i+1} X_h \ , \ i = 0, \dots, m-1.$$

Entonces, $f^m(j^m_{t_0}\sigma) = a$.

Además, dado un punto $j^r_{t_0}\sigma \in J^r_{t_0}(\mathbb{R}, M)$ podemos determinar una curva $\tilde{\sigma}$ por las condiciones: $j^r_{t_0}\tilde{\sigma} = j^r_{t_0}\sigma$ y $\nabla^r_{\tilde{T}}\tilde{T} = 0$. Entonces, $f^r(j^r_{t_0}\sigma) = f^r(j^r_{t_0}\tau)$ implica $f^m(j^m_{t_0}\tilde{\sigma}) = f^m(j^m_{t_0}\tilde{\tau})$ y del Teorema 12, para algún embebimiento isométrico ϕ tenemos: $\phi^{(m)}(j^m_{t_0}\tilde{\sigma}) = j^m_{t_0}\tilde{\tau}$. Por tanto, $\phi^{(r)}(j^r_{t_0}\sigma) = j^r_{t_0}\tau$, es decir, $j^r_{t_0}\sigma \sim_r j^r_{t_0}\tau$. En consecuencia, f^r induce una biyección continua $\bar{f}^r \colon J^r_{t_0}(\mathbb{R}, M)/\sim_r \longrightarrow Q_r$, que además es homeomorfismo por ser f^r propia. $\square$

OBSERVACIÓN 19. *Los puntos en el interior de Q_r se corresponden con r–jets de curvas tales que $\left(T_{t_0}, (\nabla_T T)_{t_0}, ..., (\nabla^{r-1}_T T)_{t_0}\right)$ son linealmente independientes. En particular, $Q_{m-1} - \partial Q_{m-1}$ se corresponde con los $(m-1)$–jets de curvas de Frénet.*

DEFINICIÓN 20. *Una función $F \colon J^r_{t_0}(\mathbb{R}, M) \to \mathbb{R}$ se dice que es un* invariante diferencial de orden r *si $j^r_{t_0}\sigma \sim_r j^r_{t_0}\sigma'$ implica*

$$F(j^r_{t_0}\sigma) = F(j^r_{t_0}\sigma').$$

COROLARIO 3. *El anillo formado por los invariantes diferenciales de orden $r \leq m$ es isomorfo a $C^\infty(Q_r)$.*

CAPÍTULO 10

Curvatura total en variedades riemannianas

En este capítulo generalizamos la interpretación de la curvatura total de una curva en $\mathbb{R}^3$, dada en [**30**], a variedades riemannianas arbitrarias. Debemos hacer notar que en este capítulo tratamos un invariante métrico que es global, y no local, como los invariantes métricos que hemos tratado hasta ahora.

Consideremos (M, g) una variedad riemanniana de dimensión m y orientada. Sea C una curva de clase $C^k, k \geqslant 3$, inmersa en (M, g), parametrizada al arco por $\sigma\colon [a, b] \to M$ y en posición general.

Definición 21. *La* curvatura total *de una curva C de clase C^2 inmersa en una variedad riemanniana (M, g) se define como*

$$\kappa(C) = \int_C |\kappa| \, ds.$$

Definición 22. *Un* polígono geodésico *inscrito en $C = \sigma([a, b])$ es una sucesión de puntos $\Pi = (x_0, \ldots, x_n)$ tal que*

$$x_i = \sigma(s_i), \quad i = 0, \ldots, n; a = s_0 < \ldots < s_n = b,$$

y tal que cada par de vértices consecutivos x_i, x_{i+1} pueden ser unidos por una geodésica mínima

$$\gamma_i\colon [s_i, s_i + \delta_i] \to M,$$

que suponemos parametrizada por la longitud de arco ($\delta_i = d_M(x_i, x_{i+1})$, $|T_i| = 1$ donde T_i es el campo tangente de γ_i).

Definimos $|\Pi| = \text{máx}\{|s_{i+1} - s_i| : i = 0, \ldots, n-1\}$.

Lema 10. *Existe $\mu > 0$ tal que si $x_0, y_0 \in C$ verifican*

$$d_g(x_0, y_0) < \mu,$$

entonces x_0 e y_0 pueden unirse por una geodésica mínima.

Demostración. Para cada $x \in C$ existe $\rho_x > 0$ tal que el entorno normal $U(x; \rho_x)$ es convexo ([**21**, Capítulo I, Theorem 3.6]). Consideremos el recubrimiento de C por abiertos convexos de M, digamos

$$\left\{ U\left(x; \frac{1}{2}\rho_x\right) : x \in C \right\}$$

Como C es compacta, existe un subrecubrimiento finito

$$\left\{U\left(x_1; \frac{1}{2}\rho_{x_1}\right), \ldots, U\left(x_p; \frac{1}{2}\rho_{x_p}\right)\right\}.$$

Sea

$$\mu = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}\rho_{x_j} : j = 1, \ldots, p\right\} > 0.$$

Veamos que si $x_0 \in U\left(x_i; \frac{1}{2}\rho_{x_i}\right)$ entonces $U(x_0;\mu) \subset U\left(x_i;\rho_{x_i}\right)$. En efecto, sea $y_0 \in U(x_0;\mu)$, es decir $d_g(x_0, y_0) < \mu$. Usando la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d_g(x_i, y_0) &\leqslant d_g(x_i, x_0) + d_g(x_0, y_0) < \frac{1}{2}\rho_{x_i} + \mu \\ &\leqslant \frac{1}{2}\rho_{x_i} + \frac{1}{2}\rho_{x_i} = \rho_{x_i}, \end{aligned}$$

es decir, $y_0 \in U\left(x_i;\rho_{x_i}\right)$.

Si $x_0, y_0 \in C$ verifican $d_g(x_0, y_0) < \mu$ entonces $y_0 \in U(x_0;\mu)$. Como $x_0 \in C$ sabemos

$$x_0 \in U\left(x_i; \frac{1}{2}\rho_{x_i}\right) \subset U\left(x_i;\rho_{x_i}\right)$$

para algún $i = 1, \ldots, p$. Como $U(x_0;\mu) \subset U\left(x_i;\rho_{x_i}\right)$, necesariamente $y_0 \in U\left(x_i;\rho_{x_i}\right)$, luego x_0 e y_0 están en el mismo entorno convexo y por tanto, pueden unirse por una geodésica mínima. □

Corolario 4. *Existe $\eta > 0$ tal que si $\Pi = (x_0, \ldots, x_n)$ es una sucesión de puntos de C verificando $|\Pi| < \eta$ entonces Π es un polígono inscrito en C, es decir, cada par de vértices consecutivos pueden unirse por una geodésica mínima γ_i.*

Como $x_i = \gamma_{i-1}(s_{i-1} + \delta_{i-1}) = \gamma_i(s_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, los vectores tangentes T_{i-1} y T_i definen un ángulo $0 \le \alpha_i \le \pi$ en x_i. En x_0 se toma $0 \le \alpha_0 \le \pi$ el ángulo definido por los vectores T_{s_0} y $T_0(s_0)$, y en x_n se toma $0 \le \alpha_n \le \pi$ el ángulo definido por los vectores T_{s_n} y $T_{n-1}(s_{n-1} + \delta_{n-1})$.

Definición 23. *La* curvatura total *de Π se define como*

$$\kappa(\Pi) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.$$

Probaremos el siguiente resultado:

TEOREMA 14. *Si C es una curva de Frénet inmersa en una variedad riemanniana (M,g), se verifica*

$$\int_C |\kappa(s)|\, ds = \lim_{|\Pi|\to 0} \kappa(\Pi).$$

LEMA 11. *Si $p=\sigma(s)$ es un punto arbitrario de C, y*

$$\gamma(t) = \exp_p^{-1}(\sigma(s+t)) : (-\delta,\delta) \to T_pM,$$

entonces $\gamma'(0) = T_s$ y $\gamma''(0) = (\nabla_T T)_s$.

DEMOSTRACIÓN. Tomando una base ortonormal $(e_1,\ldots,e_m)$ de T_pM podemos definir coordenadas normales (U,x^i) en torno a p de tal manera que estas coordenadas vengan dadas por la exponencial

$$\exp_p^{-1}(q) = \sum_{i=1}^m x^i(q)\, e_i.$$

Entonces

$$\gamma(t) = \exp_p^{-1}(\sigma(s+t)) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(t)\, e_i,$$

siendo $\sigma_i(t)$ las coordenadas de $\sigma(t)$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\Gamma_{ij}^k(p)=0$, $i,j,k=1,\ldots,m$, tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma'(0) &= \sum_{i=1}^m \frac{d\sigma_i}{dt}(0)\, e_i = T_s,\\
\gamma''(0) &= \sum_{i=1}^m \frac{d^2\sigma_i}{dt^2}(0)\, e_i = (\nabla_T T)_s,
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Como σ es de clase C^k, γ también es de clase C^k, verificando

$$\gamma(0) = 0 \quad \text{y} \quad \|\gamma'(0)\| = 1.$$

Definimos

$$U(t) = \begin{cases} -\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} & \text{si } t<0,\\[2ex] \gamma'(0) & \text{si } t=0,\\[2ex] \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} & \text{si } t>0. \end{cases}$$

Como γ es de clase C^k y $\gamma(0)=0$ sabemos por el Teorema de Taylor (ver por ejemplo [**28**, 6.8.5] o [**25**, X, 8]) que

$$\gamma(t) = \gamma'(0)\, t + \frac{1}{2}\gamma''(0)\, t^2 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)\, t^{k-1} + R_{k-1}(t),$$

donde $R_{k-1}(t)$ es de clase C^k y

$$\frac{R_{k-1}(t)}{t^{k-1}} \to 0 \tag{0.6}$$

cuando $t \to 0$. Entonces, si $t \neq 0$

$$\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \frac{t}{|t|} \frac{\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}}{\left\|\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}\right\|}.$$

Luego si $t < 0$ tenemos

$$\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = -\frac{\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}}{\left\|\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}\right\|},$$

mientras que si $t > 0$ tenemos

$$\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \frac{\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}}{\left\|\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}\right\|}.$$

Por tanto si $t \neq 0$

$$U(t) = \frac{\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}}{\left\|\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)t^{k-2} + \frac{R_{k-1}(t)}{t}\right\|}. \tag{0.7}$$

Lema 12. *Sea* $\rho(t) = \frac{R_{k-1}(t)}{t}$ *si* $t \neq 0$, $\rho(0) = 0$. *Entonces* $\rho(t)$ *es de clase* C^{k-1} *y* $\rho^{(j)}(0) = 0$ *para todo* $j = 1, \ldots, k-1$.

Demostración. Sabemos por (0.6) que

$$\lim_{t\to 0} \rho(t) = 0 = \rho(0),$$

luego $\rho(t)$ es de clase C^0.

Veamos que $\rho(t)$ es de clase C^1, es decir, veamos que $\rho'(t)$ es de clase C^0. Por definición

$$\rho'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\rho(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{R_{k-1}(t)}{t^2} = 0$$

usando de nuevo (0.6). Además

$$\lim_{t\to 0} \rho'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{tR'_{k-1}(t) - R_{k-1}(t)}{t^2} = 0,$$

usando la Regla de L'Hôpital y (0.6). Por tanto $\rho(t)$ es de clase C^1.

Puede verse por inducción para $j = 1, \ldots, k-1$ que si $t \neq 0$

$$\rho^{(j)}(t) = \frac{R_{k-1}^{(j)}(t) - j\rho^{(j-1)}(t)}{t},$$

de donde es fácil ver, usando la definición de derivada, que

$$\lim_{t\to 0} \rho^{(j)}(t) = 0 = \rho^{(j)}(0),$$

para $j = 0, \ldots, k-1$. □

Podemos observar en (0.7) que el denominador es una función nunca nula en un entorno de $t = 0$. Del Lema 12 deducimos que el numerador es de clase C^{k-1}; por tanto $U(t)$ es de clase C^{k-1} y

$$U(0) = \gamma'(0) = T_s.$$

Además podemos reescribir (0.7) como

$$U(t) = \frac{\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)\,t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)\,t^{k-2} + \rho(t)}{\left\|\gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)\,t + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(0)\,t^{k-2} + \rho(t)\right\|},$$

donde

$$\frac{\rho(t)}{t^{k-2}} \to 0$$

cuando $t \to 0$.

Lema 13. $U'(0) = \frac{1}{2}(\nabla_T T)_s$.

Demostración. Usando la expresión anterior para $k = 2$, denotemos

$$A(t) = \gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0)\,t + \rho(t),$$

con lo que

$$U(t) = \frac{A(t)}{\|A(t)\|}.$$

Entonces

$$U'(t) = \frac{A'(t)\,\|A(t)\| - A(t)\,\frac{d}{dt}\,\|A(t)\|}{\|A(t)\|^2}. \tag{0.8}$$

Primero notemos que

$$A'(t) = \frac{1}{2}\gamma''(0) + \rho'(t),$$

luego, usando el Lema 12 tenemos

$$A'(0) = \frac{1}{2}\gamma''(0). \tag{0.9}$$

Ahora notemos

$$\|A(0)\| = \|\gamma'(0)\| = \|T_s\| = 1. \tag{0.10}$$

Lo siguiente es darse cuenta de que

$$\|A(t)\|^2 = g_p(A(t), A(t))$$

implica

$$\frac{d}{dt}\|A(t)\| = g_p(A'(t), U(t)),$$

luego, por el Lema 11

$$\begin{aligned}(0.11)\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\|A(t)\| &= g_p(A'(0), U(0)) = g_p\left(\frac{1}{2}\gamma''(0), \gamma'(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}g_p\left((\nabla_T T)_s, T_s\right) = 0,\end{aligned}$$

al estar σ parametrizada por la longitud de arco.

Finalmente, sustituyendo (0.9), (0.10) y (0.11) en (0.8) obtenemos

$$U'(0) = \frac{1}{2}\gamma''(0),$$

como queríamos demostrar. □

Lema 14. *Si definimos*

$$\theta_p(r,t) = \measuredangle(U(r), U(t)) : (-\delta,\delta)^2 \to \mathbb{R},$$

$0 \leqslant \theta_p(r,t) < \pi$, $p = \sigma(s)$, *entonces* θ_p *es de clase* C^{k-1} *y*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta_p}{\partial r}(0,0) &= -\frac{1}{2}|\kappa(s)|, \\ \frac{\partial\theta_p}{\partial t}(0,0) &= \frac{1}{2}|\kappa(s)|.\end{aligned}$$

Demostración. Notemos que $\cos\theta_p(r,t) = g_p(U(r), U(t))$. Como $U(t)$ es de clase C^{k-1}, también lo es θ_p. Derivando esta expresión con respecto a r obtenemos

$$-\frac{\partial\theta_p}{\partial r}(r,t)\sin\theta_p(r,t) = g_p(U'(r), U(t)),$$

y derivando respecto a r nuevamente

$$-\frac{\partial^2\theta_p}{\partial r^2}(r,t)\sin\theta_p(r,t) - \left(\frac{\partial\theta_p}{\partial r}(r,t)\right)^2\cos\theta_p(r,t) = g_p(U''(r), U(t)).$$

Evaluando en $r = 0$ y $t = 0$, y teniendo en cuenta que $U(t)$ es unitario, tenemos

$$\begin{aligned}-\left(\frac{\partial\theta_p}{\partial r}(0,0)\right)^2 &= g_p(U''(0), U(0)) = -g_p(U'(0), U'(0)) \\ &= -g_p\left(\frac{1}{2}(\nabla_T T)_s, \frac{1}{2}(\nabla_T T)_s\right) = -\frac{1}{4}\kappa(s)^2,\end{aligned}$$

luego

$$\left|\frac{\partial\theta_p}{\partial r}(0,0)\right| = \frac{1}{2}|\kappa(s)|,$$

y por un razonamiento análogo

$$\left|\frac{\partial\theta_p}{\partial t}(0,0)\right| = \frac{1}{2}\left|\kappa(s)\right|.$$

Para terminar basta tener en cuenta que la función

$$\theta_p(r,0) = \measuredangle(U(r), U(0)) = \measuredangle(U(r), T_s)$$

decrece en un entorno de $r = 0$, por lo que $\frac{\partial\theta_p}{\partial r}(0,0) < 0$, y $\theta_p(0,t)$ crece en un entorno de $t = 0$, por lo que $\frac{\partial\theta_p}{\partial t}(0,0) > 0$. □

Lema 15. *Existe $\eta > 0$ tal que la función $\theta(s,r,t) = \theta_{\sigma(s)}(r,t)$ está definida en $[a,b] \times (-\eta,\eta)^2$.*

Demostración. Sabemos que existe $\eta > 0$ tal que toda sucesión de puntos en C que consecutivamente distan menos que η pueden unirse por geodésicas. Entonces si $s \in [a,b]$ y $r,t \in (-\eta,\eta)$ el ángulo $\theta_{\sigma(s)}(r,t)$ está definido. □

Lema 16. *Existe $R > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial^2\theta_p}{\partial r^2}(r,t)\right|, \left|\frac{\partial^2\theta_p}{\partial t^2}(r,t)\right|, \left|\frac{\partial^2\theta_p}{\partial r\partial t}(r,t)\right| < R$$

para todo $(s,r,t) \in [a,b] \times \left[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right]^2$.

Demostración. Basta notar que θ es diferenciable en el dominio. □

Pasamos a probar el Teorema 14:

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\Pi = (x_0, \ldots, x_n)$ un polígono geodésico inscrito en C, $|\Pi| < \frac{\eta}{2}$. Entonces $\alpha_i = \theta_{\sigma(s_i)}(a_i,b_i)$, donde $(a_i,b_i) = (-(s_i - s_{i-1}), s_{i+1} - s_i)$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Según el Teorema de Taylor, para cada i existe ξ_i en el segmento que une (a_i,b_i) con $(0,0)$ tal que

$$\theta_{\sigma(s_i)}(a_i,b_i) = \theta_{\sigma(s_i)}(0,0) + \frac{\partial\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial r}(0,0)\,a_i + \frac{\partial\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial t}(0,0)\,b_i$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial r^2}(\xi_i)\,a_{i-1}^2 - \frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial r\partial t}(\xi_i)\,a_{i-1}b_i + \frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial t^2}(\xi_i)\,b_i^2\right\}.$$

Usando que $\theta_{\sigma(s_i)}(0,0) = 0$ y el Lema 14 tenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left|\kappa(s_i)\right|a_{i-1} + \left|\kappa(s_i)\right|b_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial r^2}(\xi_i)\,a_{i-1}^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial r\partial t}\left(\xi_i\right)a_{i-1}b_i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial t^2}\left(\xi_i\right)b_i^2.$$

Según la definición de integral de Riemann mediante sumas inferiores y superiores, sabemos que existe $\delta_1>0$ tal que si

$$\max\left\{s_{i+1}-s_i : i=0,\ldots,n-1\right\}<\delta_1$$

se verifica

$$\left|\int_a^b\left|\kappa\left(s\right)\right|ds-\sum_{i=0}^{n-1}\left|\kappa\left(s_i\right)\right|\left(s_i-s_{i-1}\right)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\int_a^b\left|\kappa\left(s\right)\right|ds-\sum_{i=0}^{n-1}\left|\kappa\left(s_i\right)\right|\left(s_{i+1}-s_i\right)\right|<\varepsilon.$$

Por tanto, tomando $\delta=\min\left\{\frac{\eta}{2},\delta_1,\frac{2\varepsilon}{3Rl}\right\}>0$, tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b\left|\kappa\left(s\right)\right|ds-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\right| &< \varepsilon+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial r^2}\left(\xi_i\right)\right|\left(s_i-s_{i-1}\right)^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial r\partial t}\left(\xi_i\right)\right|\left(s_i-s_{i-1}\right)\left(s_{i+1}-s_i\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{\partial^2\theta_{\sigma(s_i)}}{\partial t^2}\left(\xi_i\right)\right|\left(s_{i+1}-s_i\right)^2\\ &< \varepsilon+\frac{1}{2}R\delta\sum_{i=0}^{n-1}\left(s_i-s_{i-1}\right)+\frac{1}{2}R\delta\sum_{i=0}^{n-1}\left(s_i-s_{i-1}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}R\delta\sum_{i=0}^{n-1}\left(s_{i+1}-s_i\right)\\ &< \varepsilon+\frac{3}{2}Rl\delta<2\varepsilon\end{aligned}$$

que prueba el resultado. □

El anterior resultado puede particularizarse a curvas cerradas, de la siguiente manera:

Corolario 5. *Si C es una curva de Frénet cerrada e inmersa en una variedad riemanna (M,g) se verifica*

$$\int_C\left|\kappa\left(s\right)\right|ds=\lim_{|\Pi|\to 0}\kappa\left(\Pi\right),$$

donde Π es un polígono geodésico inscrito en C.

DEMOSTRACIÓN. Cuando C, parametrizada por la longitud de arco con clase C^k, $k \geqslant 3$, por $\sigma\colon [a,b] \to M$, es una curva cerrada, en posición general e inmersa en (M,g), y

$$\Pi = (x_0, \ldots, x_n)$$

es un polígono geodésico inscrito en C, debemos tener en cuenta

$$\sigma(s_0) = x_0 = x_n = \sigma(s_n)$$

(permitimos permutaciones cíclicas en los subíndices

$$a = s_0 < \ldots < s_n = b,$$

identificando $s_0 = s_n$ cuando sea necesario), por lo que

$$T_{s_0} = T_{s_n}.$$

En $x_0 = x_n$ se verifica que la suma de los ángulos

$$\measuredangle(T_{s_0}, T_0(s_0)) \quad \text{y} \quad \measuredangle(T_{n-1}(s_{n-1} + \delta_{n-1}), T_{s_n})$$

es igual a

$$\measuredangle(T_{n-1}(s_{n-1} + \delta_{n-1}), T_0(s_0)).$$

Llamando α_0 a este ángulo, la curvatura total de Π es

$$\kappa(\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i.$$

Aplicando el Teorema 14 terminamos. □

Este Teorema generaliza un resultado clásico para curvas cerradas en $\mathbb{R}^3$ ([**30**, Theorem 2.2]). En el caso de una superficie riemanniana (M,g), es decir $\dim M = 2$, es posible obtener un resultado análogo con una demostración completamente distinta.

TEOREMA 15. *Si C es una curva de Frénet inmersa en una superficie riemanniana (M,g), se verifica*

$$\int_C |\kappa(s)|\, ds = \lim_{|\Pi| \to 0} \kappa(\Pi).$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con [**37**, Capítulo IV, Sección 8], si R es una región simplemente conexa de M acotada por una curva cerrada C compuesta por k curvas diferenciables que forman ángulos exteriores $\theta_1, ..., \theta_k$ en los vértices, entonces

$$\int_C |\kappa|\, ds + \int_R K dA = 2\pi - \sum_{i=1}^{k} \theta_i, \tag{0.12}$$

donde K es la curvatura gaussiana y dA es el elemento de área de la superficie.

Sea Π un polígono geodésico inscrito en C. Vamos a aplicar esta fórmula a la región R_i acotada por los arcos C_i y Γ_i determinados respectivamente por la restricción de σ a $[s_i, s_{i+1}]$ y la curva opuesta

$$\begin{aligned} \gamma_i^{op}\colon\ [s_i, s_i+\delta_i] &\to M, \\ \gamma_i^{op}(s) &= \gamma_i(s_i+\delta_i-s). \end{aligned}$$

Si denotamos por θ_1^i al ángulo determinado por T_{s_i} y $(T_i)_{s_i+\delta_i}$ y por θ_2^i al determinado por $T_{s_{i+1}}$ y $(T_i)_{s_i}$, entonces (0.12) nos dice, teniendo en cuenta que γ_i es una geodésica

$$\int_{C_i} |\kappa|\, ds + \int_{R_i} K dA = 2\pi - \theta_1^i - \theta_2^i.$$

Por tanto

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{C_i} |\kappa|\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{R_i} K dA = \sum_{i=0}^{n-1} \left(2\pi - \theta_1^i - \theta_2^i\right),$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \int_C |\kappa|\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{R_i} K dA &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(2\pi - \theta_2^i - \theta_1^{i+1}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = \kappa(\Pi). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el área de R_i tiende a 0 cuando $|\Pi| \to 0$ y que $|K|$ está uniformemente acotada, tenemos finalmente

$$\int_C |\kappa|\, ds = \lim_{|\Pi|\to 0} \kappa(\Pi),$$

que prueba el resultado. $\square$

Observación 20. *Existe la noción de curvatura total de orden r de una curva cerrada en el espacio euclídeo, y el correspondiente resultado análogo al Teorema 14 (véase* [**15**]*).*

CAPÍTULO 11

Conclusiones y desarrollos futuros

1. Conclusiones y aportaciones

En esta memoria se ha abordado el estudio del problema de equivalencia de curvas de Frénet por isometrías propias en variedades riemannianas. El trabajo existente hasta el momento en la literatura estudia dicho problema en variedades concretas o aquellas con curvatura constante. La riqueza del grupo de isometrías y la especial naturaleza de su geometría de dichas variedades permite enunciar resultados de equivalencia análogos al resultado clásico de Frénet en $\mathbb{R}^m$. Sin embargo, genéricamente, la existencia de isometrías de una variedad riemanniana es de hecho una condición bastante restrictiva. En este trabajo se ha probado que la componente conexa de la identidad de dicho grupo es genéricamente trivial, por lo que el problema de equivalencia en esos casos resulta de hecho muy restrictivo y posiblemente dependiente de consideraciones topológicas globales. Se abre por tanto un campo de estudio de equivalencia desde el caso de curvatura constante al genérico sin campos de Killing. Es lógico pensar que a lo largo de este espectro será necesario poseer un número creciente de invariantes diferenciales además de las curvaturas de Frénet de las curvas. En el Teorema 6, que se puede considerar como la aportación más relevante de este trabajo, se suministran los invariantes necesarios para toda variedad analítica. El requirimiento de la analiticidad es esencial como se exhibe en el ejemplo de §2. En la aplicación de este teorema en una variedad concreta, sólo se precisarán de algunos de esos invariantes, como se prueba en el ejemplo de las variedades homogéneas de Cartan, así como el caso de variedades simétricas estudiados en esta memoria. Estos casos, aún sin ser de curvatura constante, no son restrictivos por lo que el problema de equivalencia es suficientemente interesante para su estudio.

Se podría decir que los invariantes necesarios para el teorema de equivalencia se clasifican en dos grupos. Uno es el formado por las curvaturas de Frénet. El segundo grupo está formado por invariantes construidos a partir de la curva y la curvatura de Riemann de la variedad. Este segundo grupo de invariantes está más ligado a la propia geometría de la variedad ambiente en donde se trazan las curvas. En particular nótese la necesidad de los invariantes del segundo grupo en los casos en donde la curvatura no es constante. Los invariantes de Frénet poseen información geométrica más ligada a la curva en sí. De hecho, el resultado principal del último capítulo de la memoria da una interpretación de la curvatura total de una curva de Frénet en función de ángulos y polígonos geodésicos inscritos que generaliza un resultado análogo en $\mathbb{R}^m$.

2. Desarrollos futuros

- La naturaleza expcepcional de los campos de Killing ha sido probada por medio de invariantes en un fibrado de jets de métricas de cierto orden y bajo el grupo de difeomorfismos. Esta técnica podría aplicarse a otras estructuras geométricas. En concreto, se puede trabajar con los invariantes en fibrados de otras G-estructuras del fibrado de métricas como la conforme o la especial. En particular, sería interesante conocer la estructura del caso genérico en cada una de estas estructuras.
- El teorema 6 suministra los invariantes necesarios para resolver el problema de equivalencia. A fin de poder aplicar dicho resultado a estudios computacionales, sería muy interesante poder determinar una base de invariantes funcionalmente independientes. Parece obvio que dicha base depende de la naturaleza de la variedad. Sin embargo, el poder determinar al menos una cota en el orden de derivación del tensor de curvatura de Riemann aplicado a vectores de la base de Frénet sería de gran valor. Más ambiciosamente, se pretende determinar completamente alguna base en categorías geométricas concretas de variedades homogéneas.
- En relación a este último punto, sería interesante realizar un estudio completo de los invariantes en otras variedades relevantes de la geometría diferencial como los espacios proyectivos (real, complejo o cuaterniónico), variedades de Grassmann, etc.
- En el capítulo 10 se da una interpretación geométrica de la integral de la primera curvatura de Frénet de una curva. Sería interesante proporcionar interpretaciones a las integrales de las curvaturas de Frénet que generalicen clásicos resultados de curvatura total en $\mathbb{R}^m$. De hecho, el primer paso sería estudiar dichas curvaturas totales en el caso de las variedades de curvatura constante.

Bibliografía

[1] L. Bérard Bergery, X. Chaurel, *A Generalization of Frénet's Frame for Non-degenerate Quadratic Forms with any index*, Séminaire de théorie spectrale et geometrie, Grenoble, vol. **20** (2002), 101–130.

[2] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., New York, 1975.

[3] K. Borsuk, *Sur la courbure totale des courbes fermées*, Annales de la Soc. Polonaise **20** (1947), 251–265.

[4] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, Herrman, Paris, 1964.

[5] E. Cartan, *Leçons sur la Geométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1963.

[6] M. P. do Carmo, *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, Alianza Universidad, Madrid, 1994.

[7] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[8] L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[9] L. Pf. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950.

[10] W. Fenchel, *Uber Krummung und Windung geschlossener Raumkurven*, Math. Ann. **101** (1929), 238–252.

[11] J. M. Gamboa Mutuberria, J. M. Ruiz Sancho, *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*, Sanz y Torres, S. L., 2006.

[12] M. L. Green, *The moving frame, differential invariants and rigidity theorems for curves in homogeneous spaces*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 4, 735–779.

[13] P. Griffiths, *On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry*, Duke Math. J. **41** (1974), 775–814.

[14] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[15] L. Hernández Encinas, J. Muñoz Masqué, *Total curvatures of a closed curve in Euclidean n-space*, Proc. Am. Math. Soc., vol. **132** (2004), 7, 2127–2132.

[16] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, **33**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[17] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, Inc., New York, 1974.

[18] G. R. Jensen, *Higher Order Contact of Submanifolds of Homogeneous Spaces*, Lecture Notes in Math. **610**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[19] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 1*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, U.S.A., 1973.

[20] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[21] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, John Wiley & Sons, Inc. (Interscience Division), New York, Volume I, 1963; Volume II, 1969.
[22] H. T. Ku, *Automorphism groups of some geometric structures*, J. Differential Geom. **15** (1980), 381–392.
[23] A. Kumpera, *Invariants Differentiels d'un Pseudogroupe de Lie I et II*, J. Differential Geometry **10** (1975), 289-345, 347–416.
[24] J. Lafontaine, *Conformal geometry from the Riemannian viewpoint*, Conformal geometry (Bonn, 1985/1986), Aspects Math. **E12**, Vieweg, Braunschweig, 1988, 65–92.
[25] S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1969.
[26] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2002.
[27] H. I. Levine, *Singularities of Differentiable Mappings*, Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium I, Lecture Notes in Math. **192**, Springer-Verlag, Berlin, 1971, 1–89.
[28] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Análisis clásico elemental*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.
[29] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings: V, Transversality*, Advances in Math. **4** (1970), 301–336.
[30] J. W. Milnor, *On the total curvature of knots*, Annals of Mathematics, vol. **52**, no. 2 (1950), 248–257.
[31] J. Muñoz Masqué, G. Rodriguez Sánchez, *Frénet theorem for spaces of constant curvature*, Geom. Pac. Rim., New York, 1997, 253–259.
[32] A. Valdés Morales, J. Muñoz Masqué, *The number of functionally independent invariants of a pseudo-Riemannian metric*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994), 7843–7855.
[33] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, Inc., 1983.
[34] F. Prüfer, F. Tricerri, L. Vanhecke, *Curvature Invariants, Differential Operators and Local Homogeneity*, Trans. Am. Math. Soc., vol. **348**, 11 (1996), 4643–4652.
[35] M. Rochowski, *The Frénet frame of an immersion*, J. Differential Geom. **10** (1975), 181–200.
[36] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
[37] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, 2nd edition, Dover Publications, Inc., New York, 1988.
[38] W. Thirring, *A Course in Mathematical Physics 2, Classical Field Theory*, Springer-Verlag, New York, 1979.
[39] J-C Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
[40] H. Weyl, *The classical groups, their invariants and representations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1946.
[41] T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford University Press, 1993.
[42] J. A. Wolf, *Spaces of Constant Curvatures*, McGraw-Hill, Inc., NY, 1967.