

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT38

Ondas gravitacionales y su detección

Gravitational waves and their detection

Supervisor: Antonio Dobado González

Calificación: 9.0

Ángel Velarde Náñez

Grado en Física

Curso académico 2023-2024

Convocatoria extraordinaria

Resumen:

Las ondas gravitacionales fueron teorizadas por Albert Einstein un año después de postular la teoría de la Relatividad General. Durante un siglo se ha debatido sobre su significado físico, explorando diferentes vías para demostrar su existencia. Esto exige revisar los principios básicos de la formulación linealizada de las ecuaciones de Einstein, buscando sistemas de referencia adecuados para resolverlas y para describir posibles métodos de detección directa. Los primeros intentos de observar estos fenómenos usaron barras resonantes estudiadas en el sistema de referencia propio del detector, pero no han sido exitosos. En las últimas décadas se han establecido ambiciosos proyectos de detección directa basados en interferometría. Las dificultades técnicas asociadas al uso de estos aparatos son enormes, pero los avances técnicos han permitido la reciente detección directa de ondas gravitacionales.

Abstract:

Gravitational waves were theorized by Albert Einstein one year after he proposed the theory of General Relativity. For a century, their physical interpretation has been debated, exploring several methods to demonstrate their existence. This necessitates a review of the fundamental principles of the linearized formulation of Einstein's equations, looking for appropriate frames to solve them and to describe potential methods of direct detection. Initial attempts to observe these phenomena used resonant bars described in the detector's proper frame, but they were unsuccessful. In recent decades, ambitious projects for direct detection based on interferometry have been established. The technical challenges associated with using these devices are substantial, but technological advances have enabled the recent direct detection of gravitational waves.

Palabras clave: Relatividad General, teoría linealizada, simetría *gauge*, sistemas de referencia, interferometría.

Keywords: General Relativity, linearized theory, gauge symmetry, frame, interferometry.

Índice

1	Introducción	1
2	Teoría linealizada de la Relatividad General	2
2.1	Fijación de <i>gauge</i>	3
3	Propagación en vacío	4
3.1	<i>Gauge</i> trasverso y sin traza	5
3.1.1	Interferómetro de Michelson en el TTG	7
3.2	Sistema de coordenadas propio del detector	9
4	Detección directa de ondas gravitacionales	13
4.1	Cuestiones técnicas	13
4.1.1	Barras resonantes	13
4.1.2	Interferómetros	14
4.2	Astronomía de ondas gravitacionales	16
4.2.1	Localización de la fuente en la esfera celeste con interferometría	17
4.3	Historia de la detección directa de ondas gravitacionales	17
5	Conclusión	19

1. Introducción

En 1915, A. Einstein expuso sus resultados sobre la teoría de la Relatividad General en [1], introduciendo un formalismo geométrico para estudiar el movimiento gravitatorio de los cuerpos mediante trayectorias en una variedad diferenciable lorentziana de cuatro dimensiones denominada espacio-tiempo. La dinámica de esta estructura matemática queda determinada por las siguientes ecuaciones de campo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Estas relaciones acoplan la evolución del tensor métrico (que contiene la información de la curvatura del espacio-tiempo a través del tensor de Riemann) con la del tensor energía-momento. Como indica [2, Sec. 35.1], los caminos más exitosos para estudiar sus soluciones se basan en aproximaciones que simplifiquen los desarrollos, lo que además permite construir modelos más fáciles de interpretar. Solo un año después de plantear las ecuaciones de campo, A. Einstein usó una de estas aproximaciones en [3], la de campo débil, para proponer la existencia de ondas gravitacionales.

Las ondas gravitacionales son, desde un punto de vista fundamental, un requisito indispensable en la Relatividad General. Hasta 1915, los eventos gravitatorios se estudiaban mediante las leyes de Newton, que violaban los postulados de la teoría de la Relatividad Especial porque permitían que los cambios en las fuentes del campo se percibieran de forma instantánea en todos los puntos del Universo. Una teoría consistente con los principios relativistas necesita una propagación a velocidad finita de las perturbaciones para conservar la causalidad¹, justificando así la existencia de ondas gravitacionales.

¹Es interesante destacar que [4] usa este razonamiento para construir una teoría gravitatoria relativista con potenciales adecuadamente retardados, reproduciendo muchos resultados de la Relatividad General y de las ondas gravitacionales.

A pesar de este argumento, durante varias décadas se gestó un intenso debate entorno a estos fenómenos ondulatorios. Para entender las dudas que había debemos saber que la formulación geométrica de la Relatividad General permite cambiar arbitrariamente el sistema de coordenadas (simetría de covarianza general), lo que dificulta distinguir fenómenos genuinamente físicos de efectos asociados a la descripción matemática. Esto puede generar confusión sobre las consecuencias físicas de las ondas gravitacionales. Durante la conferencia de gravitación de Chapel Hill (1957) se debatió sobre la posibilidad de que un dispositivo absorbiera energía de las ondulaciones en el espacio-tiempo. Así se asentó la idea de que estos fenómenos contenían efectos físicos reales, introduciendo los primeros intentos de detección directa. Pero fue una observación indirecta, realizada por R.A. Hulse y J.H. Taylor en 1974, la que zanjó el debate. Ambos probaron que el púlsar binario PSR B1913+16 estaba disminuyendo su periodo orbital debido a la radiación de energía, y la coincidencia entre las predicciones teóricas basadas en ondas gravitacionales y las observaciones fue tan ajustada que obligó a considerar definitivamente la radiación gravitacional como un fenómeno físico y no un mero producto de la elección de coordenadas.

Detecciones indirectas como las de R.A. Hulse y J.H. Taylor son un test de consistencia muy relevante para probar la integridad de la Relatividad General y demostrar la existencia de ondas gravitacionales, pero se limitan a sistemas visibles mediante astronomía óptica. Para estudiar la validez de la teoría en regímenes inaccesibles por estos medios se requieren técnicas de observación directa. Por eso la detección directa es una pieza fundamental en el campo de las ondas gravitacionales. Además, las observaciones directas proporcionan información completamente nueva de diferentes regiones del Universo que permiten contrastar las predicciones teóricas sobre eventos extremos (modos de oscilación en estrellas de neutrones, dinámica de rotación en agujeros negros binarios etc.) con la realidad física.

El objetivo de este trabajo es introducir los fundamentos de la detección directa de ondas gravitacionales. Expondremos primero las bases teóricas para entender los diferentes métodos de detección, centrándonos en qué sistemas de coordenadas son más convenientes para estudiar cada uno. Después presentaremos algunos aspectos relacionados con las dificultades técnicas asociadas a la observación de fenómenos tan pequeños. Por último, proporcionaremos una breve revisión histórica de la detección hasta el año 2016, cuando la colaboración LIGO anunció la primera detección contrastada de ondas gravitacionales en la Historia de la Física.

En lo que sigue, usaremos la convención espacial para la signatura del tensor métrico. Además, emplearemos el sistema de unidades geometrizadas (de ligaduras $c = 1$ y $G = 1$), excepto en algunas aproximaciones a velocidades no relativistas donde explicitaremos los valores c .

2. Teoría linealizada de la Relatividad General

La linealización es una aproximación de la Relatividad General que permite simplificar la comprensión de fenómenos descritos por campos gravitatorios débiles. Según [2, Sec. 18.1], este formalismo exige que las componentes del tensor métrico se puedan escribir en algún sistema de referencia como una contribución perturbativa a la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2)$$

La perturbación verifica $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, lo que permite desarrollar en serie la dinámica y usar el orden lineal. A este nivel de precisión podemos usar $\eta_{\mu\nu}$ y $\eta^{\mu\nu}$ para subir y bajar los índices. Como muestra [5, Sec. 2], los tensores del espacio-tiempo quedan

$$R^\alpha_{\beta\mu\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\nu}(h_{\sigma\nu,\beta\mu} - h_{\beta\sigma,\nu\mu} - h_{\mu\nu,\beta\sigma} + h_{\beta\mu,\nu\sigma}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (3a)$$

$$R_{\beta\sigma} = \frac{1}{2}(h_{\sigma\nu,\beta}{}^\nu - h_{\beta\sigma,\nu}{}^\nu - h_{\nu,\beta\sigma}{}^\nu + h_{\beta}{}^\nu{}_{,\nu\sigma}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (3b)$$

$$R = h_{\sigma\nu,\sigma}{}^\nu - h_{\sigma}{}^\sigma{}_{,\nu}{}^\nu + \mathcal{O}(h^2) \quad (3c)$$

Por tanto, (1) a primer orden en la perturbación queda

$$h_{\sigma\nu,\beta}{}^\nu - h_{\beta\sigma,\nu}{}^\nu - h_{\nu,\beta\sigma}{}^\nu + h_{\beta}{}^\nu{}_{,\nu\sigma} - \eta_{\beta\sigma}(h_{\rho\nu,\rho}{}^{\rho\nu} - h_{\rho}{}^\rho{}_{,\nu}{}^\nu) + \mathcal{O}(h^2) = 16\pi T_{\beta\sigma} \quad (4)$$

Conviene definir el siguiente campo.

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^\sigma{}_\sigma\eta_{\mu\nu} \quad (5)$$

Se dice perturbación de traza inversa porque $\bar{h}^\sigma{}_\sigma = -h^\sigma{}_\sigma$. La ventaja de usar este campo es que (4) adquiere la siguiente expresión, más simplificada.

$$\bar{h}_{\sigma\nu,\beta}{}^\nu - \bar{h}_{\beta\sigma,\nu}{}^\nu + \bar{h}_{\beta}{}^\nu{}_{,\nu\sigma} - \eta_{\beta\sigma}\bar{h}_{\rho\nu,\rho}{}^{\rho\nu} + \mathcal{O}(\bar{h}^2) = 16\pi T_{\beta\sigma} \quad (6)$$

2.1. Fijación de *gauge*

La teoría linealizada requiere utilizar un sistema de referencia en el que se cumpla (2). Un cambio de coordenadas arbitrario no preserva esta expresión, lo que impide a la teoría tener simetría de covarianza general. Pero aún existe cierta libertad para cambiar las coordenadas manteniendo esta descomposición de la métrica. [6, Sec. 1.1] plantea la transformación $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ tal que $|\partial_\nu \xi_\mu| \leq h_{\mu\nu}$. A primer orden, podemos invertirla según

$$\xi^\alpha(x) = \xi^\alpha(x' - \xi^\beta(x)) = \xi^\alpha(x') + \mathcal{O}(\partial\xi) \Rightarrow x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha(x') + \mathcal{O}(\partial\xi)$$

Por tanto, usando la regla de transformación tensorial para las componentes del tensor métrico,

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x(x'))$$

llegamos a la siguiente expresión para el cambio en la métrica bajo la transformación propuesta.

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= [\delta^\mu{}_\alpha - \xi^\mu{}_{,\alpha} + \mathcal{O}(\partial\xi^2)][\delta^\sigma{}_\beta - \xi^\sigma{}_{,\beta} + \mathcal{O}(\partial\xi^2)](\eta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma}) = \\ &= [\delta^\mu{}_\alpha \delta^\sigma{}_\beta - \delta^\mu{}_\alpha \xi^\sigma{}_{,\beta} - \xi^\mu{}_{,\alpha} \delta^\sigma{}_\beta + \mathcal{O}(\partial\xi^2)](\eta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma}) = \\ &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\sigma} \xi^\sigma{}_{,\beta} - \eta_{\mu\beta} \xi^\mu{}_{,\alpha} + \mathcal{O}(h^2) = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (7)$$

donde $h'_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$. Si imponemos $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ en las coordenadas originales, entonces $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$ y las componentes del tensor métrico siguen verificando (2) a primer orden. Por tanto, $g'_{\mu\nu}$ tiene la forma adecuada para seguir usando la teoría linealizada. Más aún, el tensor de Riemann a orden $\mathcal{O}(h^2)$ es invariante bajo esta transformación. Esta modificación de la descripción matemática sin afectar a los observables físicos permite referirse las transformaciones propuestas como simetrías *gauge*. Así que el formalismo planteado contiene grados de libertad no físicos.

La transformación *gauge* en las componentes de la perturbación de traza inversa queda

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + (\eta_{\mu\nu}\xi^\sigma{}_{,\sigma} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}) \quad (8)$$

Podemos hacer uso de la libertad para elegir ξ_μ con el objetivo de simplificar la expresión (6). Para ello, imponemos la siguiente condición.

$$\bar{h}'_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} - \xi_{\mu,\nu}{}^{,\nu} \stackrel{!}{=} 0$$

Esta elección, que siempre es posible², se dice *gauge* de Lorentz. La perturbación tenía originalmente diez grados de libertad (asociados a las diez componentes independientes de un tensor totalmente simétrico), pero el *gauge* de Lorentz impone cuatro restricciones que reducen los grados de libertad a seis. La expresión (6) en esta elección se escribe

$$-\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\sigma} + \mathcal{O}(h^2) = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (9)$$

En este *gauge* identificamos claramente una ecuación de ondas con fuente para las componentes de la perturbación a orden lineal. Pero aún no hemos fijado todos los grados de libertad no físicos. Supongamos que $\bar{h}_{\mu\nu}$ ya está en el *gauge* de Lorentz. Un vector ξ_μ tal que $\xi_{\mu,\sigma}{}^{,\sigma} = 0$ induce una transformación (8) que no sale del *gauge* de Lorentz, manifestando una libertad *gauge* residual.

3. Propagación en vacío

La linealización de la Relatividad General permite estudiar la propagación en vacío de la perturbación imponiendo $T_{\mu\nu} = 0$. En el *gauge* de Lorentz, las ecuaciones del movimiento quedan

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\sigma} = 0 \quad (10)$$

Desarrollando la suma implícita en el sistema de referencia particular en el que trabajemos, $x^\mu = (ct, \vec{x})$, la ecuación se expresa

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{h}_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = 0 \quad (11)$$

Es sencillo ver de esta expresión que la velocidad espacial de las ondas es c , como apunta [6, Sec. 1.2].

Una solución sencilla de (11) son ondas monocromáticas planas, cuya expresión es

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \Re\{A_{\mu\nu}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\} \quad (12)$$

donde \vec{k} y ω son constantes reales tales que $\omega = c|\vec{k}|$ y $A_{\mu\nu}$ es una matriz constante. Para nuestros propósitos de estudiar la detección en la Tierra, los frentes de ondas producidos por cualquier fuente se pueden considerar planos debido a sus grandes distancias hasta nosotros y debido a que el campo gravitatorio terrestre es tan débil que no modificará apreciablemente su forma, como indica [2, Sec. 37.1]. Así que trabajaremos siempre con ondas planas.

La propagación de ondas gravitacionales en detectores no se produce estrictamente en vacío porque estos instrumentos son materiales. No obstante, como no son suficientemente energéticos como para modificar apreciablemente la curvatura del espacio-tiempo, podemos describir la dinámica de los detectores como partículas test, i.e. objetos que no afectan al espacio-tiempo pero sí se ven afect-

²La ecuación $\xi_{\mu,\nu}{}^{,\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu}$ siempre tiene solución por ser el d'alambertiano un operador invertible, como dicen [6, Sec. 1.1], [7, Sec. 6.4] y [5, Sec. 2].

tados por él. Podemos preguntarnos también si está justificado considerar la métrica que subyace al fenómeno ondulatorio como $\eta_{\mu\nu}$. La teoría linealizada puede desarrollarse sobre un espacio-tiempo de fondo no plano, pero los detectores concebibles por el ser humano se localizan en el seno de un campo gravitatorio (el terrestre) que tiene una escala de variación típica mayor que las ondas gravitacionales. Por tanto, los efectos ondulatorios inducidos sobre la variación temporal de la luz al recorrer una distancia (interferometría) o sobre las tensiones resonantes en barras metálicas (detectores mecánicos) son atribuibles únicamente a la perturbación y no tendremos en cuenta la curvatura de fondo.

3.1. *Gauge* trasverso y sin traza

La expresión (10) proporciona la dinámica de una perturbación de traza inversa en el *gauge* de Lorentz, pero aún contiene grados de libertad no físicos asociados a la libertad *gauge* residual. Podemos eliminarlos eligiendo un vector ξ_μ que imponga condiciones sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$. Notemos que el campo de perturbación en el vacío y el término entre paréntesis de (8) (usando un vector de *gauge* residual, $\xi_{\mu,\sigma}{}^\sigma = 0$) satisfacen las mismas ecuaciones de evolución. Esto permite probar³ que podemos fijar las siguientes condiciones en la perturbación de traza inversa.

$$\bar{h}^\sigma{}_\sigma = 0 \quad ; \quad \bar{h}_{0i} = 0 \quad (13)$$

Estas cuatro condiciones definen el *Gauge* Trasverso y sin Traza (TTG), que permite reducir los grados de libertad de la perturbación a dos y fija completamente la libertad *gauge*⁴. Notemos además que, en este *gauge*, $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$.

Partiendo de las condiciones (13), dentro del *gauge* de Lorentz, vemos que $h_{00,0} = 0$. Esta relación se resuelve con una función constante en el tiempo para la primera componente de la perturbación. No obstante, estamos interesados en estudiar contribuciones que varíen con el tiempo en la métrica (porque es lo que podemos medir), así que podemos tomar $h_{00} = 0$ para nuestro propósito, como indica [6, Sec.1.2].

El TTG es especialmente útil para estudiar la polarización de las ondas gravitacionales monocromáticas planas porque impone las siguientes restricciones a los elementos de la matriz $A_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} 0 = h_{0\mu} = A_{0\mu} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} &\Leftrightarrow A_{0\mu} = 0 \\ 0 = h_{\mu\nu, \nu} &\Rightarrow 0 = h_{ji, i} = -ik^j A_{ji} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \Leftrightarrow k^i A_{ij} = 0 \end{aligned}$$

La segunda condición establece una relación transversalidad entre la propagación (dada por \vec{k}) y la polarización (dada por $A_{\mu\nu}$). Sin pérdida de generalidad⁵, podemos elegir $\vec{k} = k\vec{u}_z$, obteniendo la siguiente perturbación.

³[8, Sec. 4.4b] detalla cómo, para todo $\bar{h}_{\mu\nu}$ en el *gauge* de Lorentz y en el vacío, podemos encontrar un vector de transformación ξ_μ tal que la nueva perturbación cumpla (13) en todo punto.

⁴A.S. Eddington estudió en 1922, en [9], la presencia de tres modos de oscilación en las ondas gravitacionales: longitudinal-longitudinal, longitudinal-transversa y transversa-transversa (denominados así por H. Weyl). Demostró que los dos primeros se mueven a velocidad arbitraria (pero sin propagar energía, así que son reflejo de la elección de coordenadas) mientras que el tercero lo hace a la velocidad de la luz. El TTG es conveniente para estudiar la evolución en vacío porque solo contiene el tercer modo de radiación, que es genuinamente físico.

⁵[6, Sec. 1.1] muestra que la perturbación $h_{\mu\nu}$ se comporta como un tensor covariante de rango dos bajo transformaciones del grupo de Lorentz, así que podemos rotar el sistema de coordenadas para hacer coincidir el eje *OZ* con la propagación.

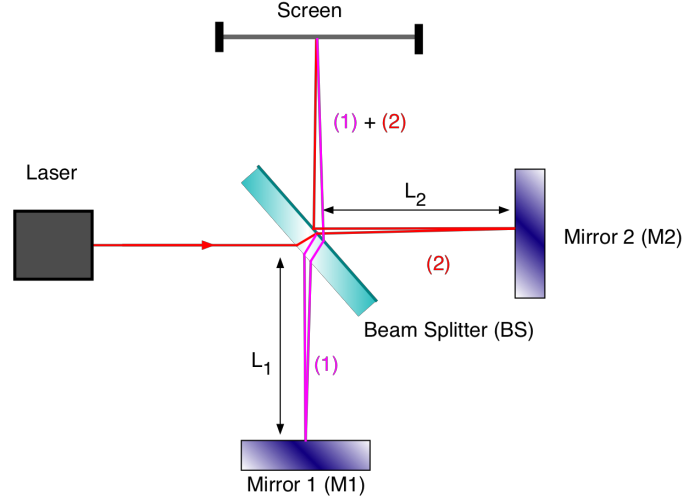


Figura 1: Esquema del interferómetro de Michelson. ©Polytec GmbH, CC BY-SA 3.0.

$$h(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\omega(t-z/c)} \right\} \quad (14)$$

En lo que sigue, supondremos que la matriz constante es real, así que

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = A_{\mu\nu} \cos(\omega t - \omega z/c) \quad (15)$$

La matriz $A_{\mu\nu}$ indica los posibles estados de vibración de una onda, y por eso se dice matriz de polarización. Está claro que presenta dos tipos de oscilación independientes, que podemos estudiar según la siguiente base: $b = 0$ (polarización $+$) y $a = 0$ (polarización \times). Sus nombres se establecen debido a las fuerzas de marea que ejercen, de lo que se hablará en la sección 3.2.

El TTG nos ha permitido expresar las ondas gravitacionales de una forma muy sencilla, pero aún no sabemos qué significado físico tiene esta elección de coordenadas. Para entenderlo, vamos a estudiar la evolución de un conjunto de partículas test libres (i.e. que se mueven a lo largo de curvas geodésicas) en este sistema de referencia. Su ecuación del movimiento en tiempo propio es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (16)$$

[5, Sec. 3.] muestra cómo podemos desarrollar (16) para obtener la aceleración espacial en función del tiempo coordenado, obteniendo

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{v^i}{c} \left(\Gamma^0_{00} + 2\Gamma^0_{0j} \frac{v^j}{c} + \Gamma^0_{jk} \frac{v^j v^k}{c^2} \right) - \left(\Gamma^i_{00} + 2\Gamma^i_{0j} \frac{v^j}{c} + \Gamma^i_{jk} \frac{v^j v^k}{c^2} \right) \quad (17)$$

donde v^i es la velocidad respecto al tiempo coordenado. Hemos explicitado la dependencia en c para mostrar que, trabajando con partículas test no relativistas, i.e. $v^i \ll c$, podemos aproximar (17) según

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} + \mathcal{O}(v/c) = 0 \quad (18)$$

Estos tres símbolos de Christoffel para una onda gravitacional en el TTG quedan

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(h_{0\sigma,0} + h_{0\sigma,0} - h_{00,\sigma}) + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h^2)$$

Por tanto, la aceleración de una partícula test libre no relativista es nula a orden lineal en $h_{\mu\nu}$ y a orden cero en v/c . En particular, si está en reposo en $t = 0$, entonces la relación (18) es exacta porque $\mathcal{O}(v/c) = 0$. Además, en $t = 0$ (15) se reduce a $h(0, \vec{x}) = 0$, lo que permite empalmar con una métrica $g_{\mu\nu}(t) = \eta_{\mu\nu}$ en $t < 0$. Con todo esto, [6, Sec. 1.3.3] concluye que una partícula libre en reposo en $t < 0$ (antes de la llegada de la onda gravitacional) permanece en reposo después. Esto permite usar partículas test libres en reposo antes de que llegue la onda para definir el TTG como aquel en el cual siguen en reposo después. Seleccionaremos cuatro de estas partículas para etiquetar los tres ejes espaciales y un origen, definiendo así las coordenadas espaciales.

3.1.1. Interferómetro de Michelson en el TTG

Que las partículas test libres no cambien sus coordenadas en el TTG no implica que las ondas gravitacionales no tengan impacto ellas. Para entender el efecto físico real, más allá de las consecuencias aparentes en un sistema de referencia concreto, es útil examinar cantidades escalares bajo cambios de coordenadas. Vamos a estudiar qué efecto tiene la propagación de una onda gravitacional sobre el intervalo invariante, ds^2 , analizando las geodésicas nulas de un haz de luz. Los instrumentos más precisos para abordar este asunto son los interferómetros, y por eso usaremos un interferómetro de Michelson como el expuesto en la figura 1.

Sea una fuente de luz monocromática (de frecuencia ω_L) que emite pulsos de luz colimados a lo largo del eje OX . La luz incide sobre un divisor de haz (*Beam Splitter*, BS, en la figura) que la separa en dos caminos perpendiculares de longitudes L_2 (horizontal) y L_1 (vertical). Ambos tienen un espejo al final. Los pulsos salen del BS, recorren cada camino, se reflejan, regresan al BS y se interfieren en un solo haz que llega a un fotodetector. Como indica [6, Sec. 9.1], la variación en el tiempo que tarda cada haz en realizar su recorrido modifica el desfase entre ambos, lo que cambia la interferencia y la intensidad medida por el fotodetector.

Los espejos y el BS del montaje descrito no son libres porque están suspendidos de un soporte que evita su caída al suelo, lo que impide utilizarlos como partículas test para etiquetar las coordenadas del TTG. No obstante, como afirma [6, Sec. 9.1.1], podemos suponer que el movimiento en el plano horizontal sí sigue las geodésicas marcadas por el tensor métrico (salvo correcciones por fuerzas térmicas, sísmicas...). Por tanto, las coordenadas del BS y de los espejos en el plano (que supondremos $(0, 0)$, $(L_2, 0)$ y $(0, -L_1)$, respectivamente) no se ven modificadas por la llegada de la onda gravitacional. Supongamos que la onda gravitacional es (15) con polarización $+$. El intervalo espacio-temporal queda descrito según

$$ds^2 := g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dz^2 + dx^2[1 + h_{11}(t)] + dy^2[1 + h_{22}(t)] \quad (19)$$

A continuación usaremos las geodésicas nulas. El haz de luz que recorre el camino horizontal verifica

$$dx = \pm c dt \left[1 - \frac{1}{2} h_{11}(t) \right]$$

donde cada signo indica un sentido de propagación y hemos usado $|h_{\mu\nu}(t)| \ll 1$ para hacer un desarrollo en serie a primer orden. Si el pulso de luz sale del BS en un tiempo t_0 , el tiempo que tarda en llegar al espejo verifica

$$\int_0^{L_2} dx = c \int_{t_0}^{t_1} dt \left(1 - \frac{1}{2} h_{11} \right) \Rightarrow L_2 = c(t_1 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt h_{11}(t)$$

Por otro lado, el tiempo de regreso al BS cumple

$$\int_{L_2}^0 dx = -c \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{1}{2} h_{11} \right) \Rightarrow -L_2 = -c(t_2 - t_1) + \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt h_{11}(t)$$

Combinando ambas expresiones tenemos

$$t_2 = t_0 + \frac{2L_2}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_2} dt h_{11}(t)$$

A continuación, [6, sec. 9.1.1] propone sustituir recursivamente t_2 en esta expresión. A orden $\mathcal{O}(h_{11})$, y sabiendo que $h_{11} = a \cos(\omega t)$ (porque $z = 0$), podemos escribir

$$\begin{aligned} t_2 = t_0 + \frac{2L_2}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L_2}{c}} dt h_{11}(t) &= t_0 + \frac{2L_2}{c} + \frac{a}{2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L_2}{c}} dt \cos(\omega t) = \\ &= t_0 + \frac{2L_2}{c} + \frac{a}{2\omega} \left[\sin \left(\omega t_0 + \omega \frac{2L_2}{c} \right) - \sin(\omega t_0) \right] \end{aligned}$$

Usando la identidad del seno de la suma tenemos

$$\begin{aligned} t_2 - t_0 = \frac{2L_2}{c} + \frac{a}{\omega} \sin \left(\omega \frac{L_2}{c} \right) \cos \left(\omega t_0 + \omega \frac{L_2}{c} \right) &= \frac{2L_2}{c} + \frac{L_2}{c} h_{11}(t_0 + L_2/c) \frac{\sin(\omega L_2/c)}{\omega L_2/c} \equiv \\ &= 2 \frac{L_2}{c} + \frac{\delta L_2}{c} \end{aligned} \quad (20)$$

El primer término de este resultado es la solución en ausencia de onda gravitacional (la longitud coordenada recorrida entre la velocidad). Así, hemos probado que la presencia de la onda gravitacional induce una variación cosenoidal. El mismo análisis podemos hacer para el pulso vertical.

$$t_2 - t_0 = \frac{2L_1}{c} + \frac{L_1}{c} h_{22}(t_0 + L_1/c) \frac{\sin(\omega L_1/c)}{\omega L_1/c} \equiv 2 \frac{L_1}{c} + \frac{\delta L_1}{c} \quad (21)$$

La óptica electromagnética proporciona las herramientas para analizar este experimento. Estudiaremos primero el caso en ausencia de ondas gravitacionales siguiendo las indicaciones de [10, sec. 9.4.2]. Supondremos que la luz emitida por la fuente es plana y se propaga en el vacío. Podemos modelizar el recorrido de cada haz mediante una fuente virtual cuya distancia hasta el BS es el doble que la de los espejos. Además, debemos añadir un desfase π al haz horizontal al reflejarse hacia el fotodetector por hacerlo desde el aire. También debemos dividir la intensidad entre cuatro (el haz incidente se divide en dos y cada haz que regresa hace lo mismo). Así, el campo eléctrico en el fotodetector es, en notación compleja,

$$\vec{E}_{\text{out}} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 e^{i\omega_L(t-2L_1/c)} - \frac{1}{2} \vec{E}_0 e^{i\omega_L(t-2L_2/c)} = i \vec{E}_0 e^{i\omega_L(t-(L_2+L_1)/c)} \sin[\omega_L(L_2 - L_1)/c] \quad (22)$$

El argumento de cada exponencial compleja es el tiempo t_0 en el que cada pulso de luz ha tenido que salir del BS (equivalentemente, de la fuente virtual) para llegar de nuevo a él a tiempo t e interferirse con el otro. En presencia de la onda gravitacional este tiempo varía. Podemos usar (20) y (21) para obtener el nuevo tiempo de salida.

$$t_0^x = t_2 - \left[2\frac{L_2}{c} + \frac{\delta L_2}{c} \right] \quad ; \quad t_0^y = t_2 - \left[2\frac{L_1}{c} + \frac{\delta L_1}{c} \right]$$

Por tanto, el campo a la salida en presencia de la onda gravitacional es

$$\vec{E}_{\text{out}} = \frac{1}{2}\vec{E}_0 e^{i\omega_L[t_2 - (2L_1 + \delta L_1)/c]} - \frac{1}{2}\vec{E}_0 e^{i\omega_L[t_2 - (2L_2 + \delta L_2)/c]}$$

Según indica [6, Sec. 9.1.1], es conveniente construir los brazos del interferómetro de longitudes similares para reducir ruido común a ambos. Esto incentiva a usar el parámetro $L := (L_1 + L_2)/2$, con el cual $2L_2 = 2L + \phi_0$ y $2L_1 = 2L - \phi_0$, donde $\phi_0 = (L_2 - L_1)$. Los factores δL_i son de orden lineal en h . Como ϕ_0 es pequeño, podemos desarrollar δL_i a orden lineal en h y orden nulo en ϕ_0 . Así, $\delta L_2 = -\delta L_1 + \mathcal{O}(\phi_0)$ (recordemos que en polarización + tenemos $h_{11} = -h_{22}$) y

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{out}} &= \frac{1}{2}\vec{E}_0 \left[e^{i\omega_L[t_2 - (2L - \phi_0 + \delta L_1)/c]} - e^{i\omega_L[t_2 - (2L + \phi_0 + \delta L_2)/c]} \right] = \\ &= i\vec{E}_0 e^{i(\omega_L(t_2 - 2L/c))} \sin[\omega_L(\phi_0 + \delta L_2)/c] \end{aligned} \quad (23)$$

Analizando la amplitud de oscilación de δL_2 vemos, según $\text{sinc}(\omega L/c)$, tres regímenes. En primer lugar, si $\omega L/c \rightarrow 0$, entonces $\delta L_2 \rightarrow L_2 h_{11}$. Podemos comparar (22) y (23) para ver que el efecto de la onda gravitacional es formalmente análogo a modificar $L_2 - L_1$ sumando $\delta L_2 \approx L_2 h_{11}$. Según esta interpretación, $h_{11} = \delta L_2/L_2$ es una deformación relativa que modifica la distancia entre los espejos, como afirma [5, Sec. 3.]. En segundo lugar, cada onda gravitacional tiene un valor óptimo para L . La amplitud de oscilación en δL_2 , a orden nulo en ϕ_0 , es $(c/\omega) \sin(\omega L/c)$. El valor que maximiza esta amplitud es de orden

$$L^{\text{opt}} \sim \frac{10^6 \text{ km Hz}}{\omega}$$

Por tanto, detectar una onda gravitacional con una frecuencia de orden kHz implica interferómetros de cientos de kilómetros. En tercer lugar, $L \gg L^{\text{opt}}$ implica $\delta L_2 \approx 0$. [6, Sec. 9.1.1] proporciona una interpretación para este resultado: $\omega L/c \gg 1 \Rightarrow 2\pi L \gg \lambda$ (con λ la longitud de onda de la onda gravitacional, porque $\omega/c = 2\pi/\lambda$), así que durante el viaje del pulso hasta $x = L$ la onda completará muchos periodos oscilatorios y el efecto promedio tenderá a 0.

En resumen, las ondas gravitacionales tienen efectos físicos medibles en el TTG aunque las coordenadas de los espejos no varíen. Este desarrollo introduce las herramientas básicas de la interferometría de ondas gravitacionales. Un razonamiento muy similar fue utilizado por R. Weiss en 1974, en [11], para plantear la conveniencia de usar estos dispositivos como detectores (aunque J. Webber, en 1964, y M. Gerstenshtein y V.I. Pustovoit, en 1962, ya habían sugerido la idea).

3.2. Sistema de coordenadas propio del detector

En la subsección 3.1 hemos empleado un sistema de coordenadas que simplifica notablemente la resolución de las ecuaciones del movimiento para una métrica descompuesta según (2). Este sistema de referencia etiqueta las coordenadas mediante las posiciones relativas de partículas test que fluyen libremente a lo largo de curvas geodésicas. Esto es suficiente para trabajar con interferómetros si permitimos que oscilen libremente en el plano perpendicular a la propagación de la onda, pero hay otros montajes experimentales cuyos elementos no se mueven libremente y que también pueden ayudarnos a detectar ondas gravitacionales.

Supongamos que trabajamos con tres barras rígidas ortogonales y sujetas a un punto O de la superficie terrestre. Cualquier físico experimental usará los extremos de las barras como coordenadas espaciales y el tiempo propio de la línea del Universo de O como tiempo coordinado. Desde el punto de vista de un observador inercial (i.e. que recorre una geodésica utilizando un sistema de coordenadas de Fermi), el punto O se mueve con una aceleración $\vec{a} = -\vec{g}$ (con \vec{g} la aceleración de la gravedad) y una velocidad angular constante $\vec{\omega}$ (debida esencialmente a la rotación terrestre). Además, cada elemento de masa en las barras sufre la acción de fuerzas internas de tensión que tienden a mantener la condición de sólido rígido. En resumen, las partículas test que usamos para describir el sistema de coordenadas no se mueven libremente y no podemos usar el TTG. Este nuevo sistema de referencia se denomina Sistema de referencia Propio del Detector (SPD), y es el más ajustado a la realidad experimental en la Tierra. [12] deduce la métrica del espacio-tiempo en el SPD a orden $\mathcal{O}(x^3)$ respecto al punto O . El resultado es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 \left[1 + \frac{2}{c^2} \vec{a} \cdot \vec{x} + \frac{1}{c^4} (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 + \frac{1}{c^2} \vec{x} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{x}) + R_{0l0m} x^l x^m \right] + 2cdtdx^i \left(\frac{1}{c} \vec{\omega} \times \vec{x} - \frac{2}{3} R_{0lim} x^l x^m \right) + dx^i dx^j \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iljm} x^l x^m \right) + \mathcal{O}(x^3) \quad (24)$$

donde \vec{a} , $\vec{\omega}$ y $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se evalúan en O . Notemos que $ds^2|_O = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, es decir, en origen del sistema de coordenadas recuperamos el espacio-tiempo plano (algo que no ocurre en el TTG en ningún punto espacial). Además, a orden lineal solo aparecen efectos inerciales. Por tanto, los efectos de las ondas gravitacionales no se reflejan hasta orden cuadrático.

Nuestro objetivo es estudiar qué consecuencias tiene la presencia de ondas gravitacionales en una de las barras, y para ello vamos a interpretar (24) mediante fuerzas newtonianas sobre cada elemento de masa. El movimiento de una partícula test sometida a una 4-fuerza \mathbf{f} se modeliza en Relatividad General según $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{f}$. [12] obtiene $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$ en el SPD y despeja la aceleración tridimensional de la partícula, $d^2 \vec{x} / dt^2$. Añadiendo la fuerza externa (por unidad de masa) y suponiendo velocidades pequeñas tenemos

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{f} - c^2 \left(1 + \frac{1}{c^2} \vec{a} \cdot \vec{x} \right) \vec{a} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{x} - c^2 \vec{R}_{0l0} x^l + \mathcal{O}(\vec{x}^2) \mathcal{O}(\vec{v}/c) \quad (25)$$

donde $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ y hemos definido $\vec{R}_{0l0} := (R^1_{0l0}, R^2_{0l0}, R^3_{0l0})$. \vec{f} son las fuerzas internas que actúan sobre el elemento de masa en la barra (electrostáticas, de tensión, de recuperación etc.). $-\vec{a}$ es la aceleración con la que caen las partículas libres debido a la gravedad terrestre en O (reflejo de la aceleración $-\vec{g}$ con la que O evita su caída en la geodésica). $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{x}$ es la aceleración centrífuga. $-(\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{a}$ es el desplazamiento al rojo gravitacional debido a la altura del elemento de masa respecto a O , $\vec{a} \cdot \vec{x}$. Si la barra es horizontal, este último efecto desaparece porque $\vec{x} = (x^1, x^2, 0) \perp \vec{a}$, pero incluso aunque no sea así podemos ignorarlo ([2, Sec. 37.2] lo justifica en base a que es estacionario, así que no producirá resonancias en la barra y no afectará al estudio de las ondas gravitacionales).

Solo nos queda analizar $\vec{R}_{0l0} x^l$, que contiene los efectos gravitatorios no reflejados en \vec{g} , es decir, debidos a las ondas gravitacionales y a la inhomogeneidad del campo gravitatorio terrestre. *A priori* no es trivial separar ambas contribuciones, pero la curvatura generada por la Tierra tiene una escala espacio-temporal de variación mucho mayor que la producida por las ondas gravitacionales. Esto permite separar la métrica de fondo (newtoniana) de la métrica ondulatoria. Podríamos generalizar la teoría linealizada sobre una métrica de fondo no plana ($g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{back}} + h_{\mu\nu}$), pero no es necesario porque, como indica [2, Sec. 37.2], el tensor de Riemann final a primer orden es la suma de ambos comportamientos y, en el límite newtoniano, la curvatura de fondo tiene el siguiente efecto.

$$(R^i_{0j0})_{\text{newt}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}$$

La aceleración de la gravedad es $-\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi|_O$, por lo que

$$-\vec{\nabla}\Phi|_O - (R^i_{0j0})_{\text{newt}}x^j = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right|_O - \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j}\right|_O x^j \approx -\vec{\nabla}\Phi|_{\vec{x}}$$

Esta expresión describe la aceleración de la gravedad en el punto \vec{x} . En resumen, en la ecuación del movimiento para cada elemento de masa intervienen de tres fuerzas newtonianas, cuyos efectos se conocen bien y pueden eliminarse de la detección, y las ondas gravitacionales. Esto permite estudiar los efectos de estas últimas también mediante una fuerza, cuya expresión es

$$F_{\text{GW}}^i = -c^2(R^i_{0j0})_{\text{GW}}x^j \quad (26)$$

El movimiento de cada elemento de masa debido exclusivamente a las ondas gravitacionales queda

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -c^2(R^i_{0j0})_{\text{GW}}x^j \quad (27)$$

Hemos llegado a la ecuación de desviación geodésica en un espacio-tiempo plano con ondas gravitacionales. Podríamos haber obtenido el mismo resultado ignorando los efectos inerciales en (24), lo que conduce a una métrica en caída libre ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(x^2)$), y usando la ecuación de desviación geodésica para partículas libres. Es cierto que la barra no es libre, pero una vez sabemos cómo se movería un cuerpo en caída libre podemos introducir todas las demás fuerzas para modelizar el efecto completo. Este camino es llevado a cabo por [5, Sec. 3] y [13, Sec. 1.2].

Debemos obtener la contribución ondulatoria al tensor de Riemann. En ausencia del campo gravitatorio terrestre, la métrica sería (2) en el TTG (cuyas coordenadas se denotarán \hat{x}^μ). El tensor de Riemann asociado es

$$\hat{R}^i_{0j0} = \frac{1}{2}\eta^{i\nu}(h_{0\nu,0j} - h_{00,\nu j} - h_{j\nu,00} + h_{0j,\nu 0}) + \mathcal{O}(h^2) = -\frac{1}{2c^2}\frac{d^2h^i_j}{dt^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (28)$$

Este no es el tensor de Riemann en el SPD, pero podemos pasar de un sistema de coordenadas a otro usando la transformación tensorial entre unas coordenadas con métrica (2) y unas con (24). En el punto espacial $O = \vec{0}$, la métrica en el SPD se reduce a $\eta_{\mu\nu}$. Así que

$$\eta_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial\hat{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\hat{x}^\beta}{\partial x^\nu}\right)_{\hat{x}(t,\vec{0})}(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}|_{\hat{x}(t,\vec{0})}) \Rightarrow \left(\frac{\partial\hat{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\hat{x}^\beta}{\partial x^\nu}\right)_{\hat{x}(t,\vec{0})} = \eta_{\mu\nu}(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}|_{\hat{x}(t,\vec{0})})$$

Retener el término lineal en h hace que la transformación en el tensor de Riemann tenga términos cuadráticos. Así, como dice [2, Sec. 37.2], orientando los ejes del SPD y del TTG para que coincidan en un tiempo inicial $\hat{t} = t = 0$ (lo que elimina las rotaciones en la matriz de cambio de coordenadas) tenemos a orden lineal en h y cerca del origen que $\partial\hat{x}^\alpha/\partial x^\beta = \delta^\alpha_\beta$. Así que en este entorno tenemos

$$R^i_{0j0} = \hat{R}^i_{0j0} \Rightarrow F_{\text{GW}}^i = \frac{1}{2}\frac{d^2h^i_j}{dt^2}x^j \quad (29)$$

Esta fuerza describe cómo responde un elemento de masa en el SPD cerca del origen y con velocidades pequeñas cuando lo atraviesa una onda gravitacional. Un procedimiento análogo fue usado por J. Weber en 1959, en [14], al proponer la detección de ondas gravitacionales midiendo las tensiones inducidas por eventos ondulatorios.

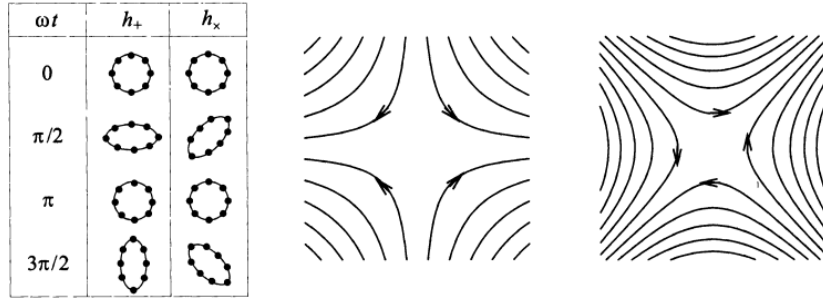


Figura 2: Derecha: líneas de fuerza de la polarización \times cuando $\omega t = \pi/2$. Centro: líneas de fuerza de la polarización $+$ cuando $\omega t = \pi/2$. Izquierda: deformación sobre un anillo. Fuente:[6].

El desarrollo hecho en este apartado solo sirve cerca del origen del SPD, $|\vec{x}| \ll \lambda$ (con λ la longitud de onda de la onda gravitacional). El motivo son las aproximaciones que hemos realizado. Para empezar, (24) solo funciona en este régimen, como indica [12] "Los resultados de este artículo pueden usarse para analizar las deformaciones de marea [...] donde el aparato tiene un tamaño pequeño comparado con la inhomogeneidad del campo gravitacional observado" (p. 17). El mismo análisis hace [2, Sec 37.2] sobre (26). Por otro lado, la ecuación de desviación geodésica tiene también su régimen de aplicación en la escala local. En resumen, este sistema de referencia es válido al trabajar con sistemas de detección terrestres (del orden de kilómetros), pero laboratorios mayores (como el interferómetro espacial LISA) necesitan un formalismo no local proporcionado por los análisis del TTG, cuyos resultados son exactos. Estudiar el interferómetro de Michelson desde el SPD no aporta más información que la vista en la subsección 3.1.1, pero puede ser muy ilustrativo porque el resultado son los primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de (20), como indica [6, Sec. 9.1.2]. Esto confirma el carácter local de este sistema de referencia.

Con el formalismo newtoniano podemos entender claramente el significado de los nombres \times y $+$ para la polarización de una onda. Consideremos una onda gravitacional de tipo (15). Solo hay efectos en el plano perpendicular a la dirección de propagación. La fuerza (29) no tiene divergencia porque $h_{\mu\nu}$ no tiene traza, $\partial_i F^i \propto h_{ji,00} \delta^j_i = 0$. Por tanto, podemos obtener sus curvas integrales como líneas de campo sin fuentes. La figura 2 muestra estas líneas de campo según las polarizaciones $+$ y \times . La fuerza es tangente a cada línea, y la densidad de líneas indica la intensidad de la fuerza. Está claro que una polarización se forma rotando 45° la otra. Otra forma de visualizar ambas polarizaciones es estudiar su efecto sobre un sistema de partículas libres que inicialmente forman un anillo sobre el plano XY centrado en el origen. Consideremos una onda de tipo (15) con polarización $+$. Las ecuaciones del movimiento para una partícula en el punto inicial (x_0, y_0) son

$$\begin{pmatrix} \delta\ddot{x} \\ \delta\ddot{y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\omega^2 \cos(\omega t) \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + \delta x \\ y_0 + \delta y \end{pmatrix} \quad (30)$$

Despreciando los factores δx y δy en el miembro derecho (que son pequeños comparados con x_0 y además están multiplicando a h , también pequeño) podemos integrar directamente estas ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Es decir, el anillo de partículas libres se deforma en sentido opuesto en un eje respecto del otro, proporcionando el resultado dibujado en la figura 2. El análisis de la polarización \times es idéntico.

4. Detección directa de ondas gravitacionales

Como se ha comentado en la sección 1, las primeras décadas de estudio de las ondas gravitacionales se centraron en probar si sus efectos físicos eran reales o fruto de las coordenadas elegidas. No se demostró que estos fenómenos propagaban energía hasta la observación del púlsar binario de Hulse-Taylor. Esta confirmación fue muy relevante porque despertó el interés de los físicos por desarrollar tecnología capaz de detectar en la Tierra las ondas gravitacionales producidas en otras partes del Universo. Esencialmente se diseñaron dos clases de experimentos para lograr este objetivo: barras resonantes (descritas en el SPD) e interferómetros (descritos a menudo en el TTG). Aunque las primeras no han tenido éxito, los segundos han marcado un punto de inflexión en el estudio directo de estos fenómenos.

4.1. Cuestiones técnicas

La principal dificultad en la búsqueda de ondas gravitacionales es la pequeña magnitud de los efectos inducidos por ellas, conocida desde que se teorizaron. A. Einstein publicó en [3] "...es evidente que A tiene, en todos los casos imaginables, un valor prácticamente nulo" (p. 209). Con más precisión, [15] realiza un análisis de la producción de ondas gravitacionales para un colapso gravitatorio ocurrido en el cúmulo de Virgo obteniendo un valor $h \sim 10^{-21}$, orden de magnitud corroborado por simulaciones numéricas de otros eventos astrofísicos. Sucesos muy extremos en nuestra galaxia podrían alcanzar amplitudes de 10^{-20} , pero son muy poco usuales. Suponiendo un instrumento de longitud $L = 10\text{m}$, las ondas gravitacionales inducen una variación $\delta L \sim hL \sim 10^{-20}\text{m}$, mucho más pequeña que el tamaño de un átomo. En resumen, detectar estos eventos requiere una destreza técnica considerable de la que ahora expondremos algunos aspectos básicos.

4.1.1. Barras resonantes

Los principios sobre los que se asienta la detección mediante masas resonantes se explican en la subsección 3.2. La idea es usar tensiones inducidas por las ondas gravitacionales cercanas a la frecuencia de resonancia del detector para medirlas mediante cristales piezoeléctricos. El análisis de estos efectos no es sencillo porque la respuesta depende mucho de los materiales y su estructura interna. En general, su sensibilidad es muy grande para frecuencias muy cercanas a la de resonancia, pero disminuye enormemente en otras regiones del espectro. Además, si la duración de la señal es muy grande, estimulará la resonancia de la barra aumentando su amplitud, aunque hay que tener en cuenta en los cálculos la disipación de energía elástica por fricciones internas.

Las principales dificultades técnicas a las que se enfrentan las barras resonantes son las fuentes de ruido térmico asociado a vibraciones aleatorias de las partículas que forman la barra. Además, el ruido térmico se amplifica cerca de la frecuencia de resonancia (donde se centra la detección de unas barras), por lo que dificulta mucho la detección. La mejor forma de lidiar con este problema es usando tecnología criogénica para disminuir la temperatura de los dispositivos hasta temperaturas inferiores a 1K. No obstante, incluso en este límite nos encontramos una fuente de error aparentemente inevitable: el límite cuántico asociado a las vibraciones de punto cero en los átomos que forman la barra. [16] introduce una forma de aliviar este ruido renunciando a medir el estado vibratorio de la barra (amplitud y fase, observables que no conmutan) y centrando los esfuerzos en un observable físico que responda a la presencia de la onda sin estudiar su observable conjugado. No obstante, estas técnicas no se han llevado a la práctica en ningún experimento a día de hoy.

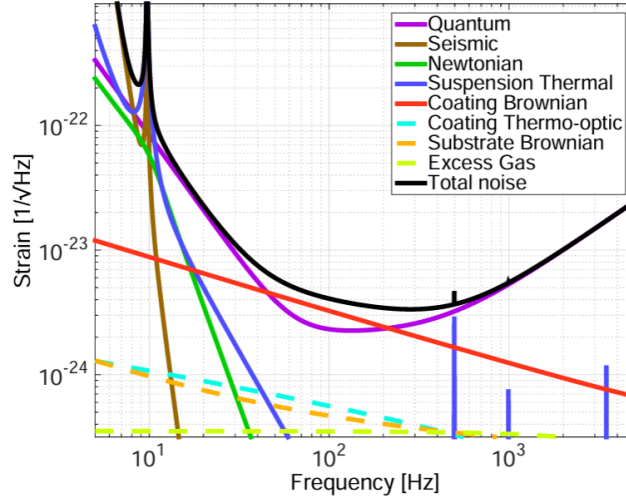


Figura 3: Curva de ruidos de Advanced LIGO. Fuente: [17]

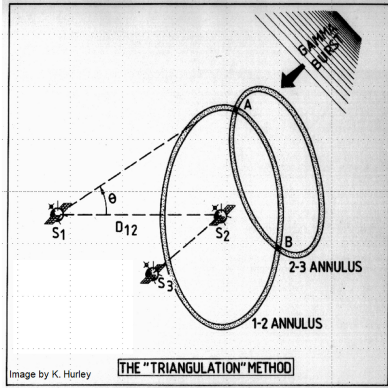
Por otro lado, las tensiones inducidas en la barra son tan pequeñas que se necesitan amplificadores que aumenten la intensidad de la deformación antes de ser leída por los cristales piezoeléctricos. Notemos que un amplificador perfecto podría aumentar el ancho de banda de la detección más allá de la frecuencia de resonancia. No obstante, los piezoeléctricos reducen la ventana de frecuencias observables por sus limitaciones de precisión, y además los amplificadores no son ideales e inducen ruido en las medidas.

4.1.2. Interferómetros

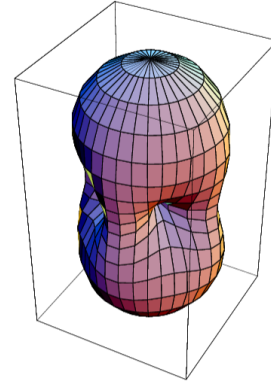
Un interferómetro es un instrumento extremadamente complejo, con muchos grados de libertad que deben ser controlados con mucha precisión. De hecho, los interferómetros no han podido ser utilizados como instrumentos fiables en este ámbito hasta hace una década debido a las enormes exigencias técnicas que requieren.

Los análisis se hacen en el TTG para mayor precisión, dejando los espejos moverse libremente en el plano horizontal. Considerando h como una deformación relativa, podemos estudiar la precisión de los interferómetros mediante su sensibilidad bajo deformaciones. Teniendo en cuenta que la sensibilidad observada en un interferómetro de Michelson con brazos de 11m es de orden $\delta L/L \sim 5 \times 10^{-10}$, como dice [18], es fácil entender las dificultades técnicas para detectar ondas gravitacionales. Una solución se puede encontrar aumentando la longitud de los brazos del interferómetro para acercarse a (3.1.1). No obstante, tamaños superiores a los 5 km son técnica y económicamente inviables. La alternativa es almacenar los pulsos de luz para que recorran el brazo del interferómetro varias veces mediante retardos de línea o cavidades de Fabry-Perot, como indica [13, Sec. 2.2].

Otro de los aspectos técnicos más relevantes es el control de la incertidumbre en el detector, lo que requiere estudiar las fuentes de ruido que modifican la intensidad recibida en el fotodetector y pueden camuflar la presencia de una onda gravitacional. Este aspecto ha sido ampliamente desarrollado por diversos autores, pero en general coinciden en considerar tres fuentes esenciales de ruido. Antes de detallarlas, es importante destacar que parte de estas incertidumbres aparecen solo en algún rango de frecuencias. La mayoría de señales que se han medido o se esperan medir se encuentran en el rango 10Hz – 10kHz, por lo que cualquier incertidumbre asociada a una vibración fuera de este rango puede descartarse.



(a) Método de la triangulación para buscar la fuente de rayos gamma. Fuente: [20]



(b) Patrón de antena de una onda gravitacional con polarización mixta x y $+$.. Fuente: [21]

Figura 4: Cuestiones sobre triangulación

En primer lugar, el ruido térmico asociado al movimiento térmico de los espejos o de sus soportes. Las oscilaciones de esta naturaleza tienen un máximo en un modo vibracional y se atenúan rápidamente en el resto de frecuencias. Construyendo espejos cuya resonancia esté fuera de las frecuencias de trabajo del interferómetro elimina parte de este ruido, y para eso se usan materiales como el sílice fundido (aunque, como apunta [19, Sec. 2.4], el uso de tecnología criogénica en interferómetros de última generación exigirá utilizar espejos de sustrato cristalino). Además, también hay contribuciones debidas a las colisiones brownianas del gas con los espejos, que se reducen haciendo el vacío a los brazos del dispositivo.

En segundo lugar, el ruido cuántico asociado a la naturaleza probabilística de los fotones. Se puede dividir en dos efectos. Por un lado el ruido de disparo que, como dice [13, Sec. 2.2], es la principal limitación de sensibilidad a frecuencias más altas que 300Hz. Los fotones inciden en el fotodetector de forma aleatoria, induciendo pequeñas fluctuaciones en la intensidad. En otros experimentos puede ser irrelevante, pero no en interferometría de ondas gravitacionales. La solución está en aumentar el número de fotones para que la intensidad instantánea se ajuste lo máximo posible al promedio. Una técnica usada para aumentar la potencia en el láser es el reciclaje de potencia. Supongamos que la intensidad en el fotodetector es nula en ausencia de onda gravitacional (calibración del interferómetro en la banda oscura). Esto significa que la interferencia es destructiva hacia el fotodetector y, para que la energía se conserve, constructiva hacia el láser. Si colocamos un espejo semirreflectante entre el láser y el divisor de haz que permita pasar la luz del primero y refleje la del segundo, conseguimos aumentar la intensidad en el interferómetro. Por otro lado, el ruido de presión de radiación, asociado a que los fotones transportan momento (así que un mayor número de reflexiones en los espejos implica mayor movimiento). Esto supone una desventaja para los sistemas de confinamiento de luz frente a aumentar el tamaño de los brazos, además de reducir la precisión de un interferómetro que use reciclaje de potencia.

En tercer lugar, el ruido sísmico asociado a movimientos del soporte de los espejos. Como explica [13, Sec. 2.2], es relevante para frecuencias inferiores a 100Hz debido a que los espectros de frecuencias en vibraciones sísmicas se desvanecen más allá de este valor. Para evitarlo, se han desarrollado sofisticados sistemas de péndulos acoplados en los soportes de los espejos, con frecuencias características muy por debajo del rango de frecuencias medibles. Así podemos amortiguar mucho las oscilaciones de frecuencias mayores. Además, también existen mecanismos activos que miden las vibraciones sísmicas y, usando actuadores y soportes de retroalimentación, las eliminan.

Más allá de estas fuentes de ruido, hay otras que también deben tenerse en cuenta. Entre ellas podemos destacar las vibraciones cuánticas de punto cero en los espejos, el gradiente gravitacional debido a variaciones en el campo gravitatorio cercano (movimiento de masas pesadas como trenes, cambios bruscos en la presión atmosférica etc.) o ruidos en el láser. Esto pone de manifiesto que los experimentos de interferometría necesitan constantes innovaciones en fotónica, ciencia de materiales, mecánica cuántica, aislamiento mecánico y térmico etc., lo que requiere grandes inversiones económicas. En la figura 3 se observa un análisis de sensibilidad del interferómetro LIGO, donde se aprecia la reducción de las incertidumbres hasta deformaciones de 10^{-23} en frecuencias mayores que 100Hz. No obstante, a muy bajas frecuencias hay fuentes de ruido de magnitud superior a las deformaciones que se pretenden medir, algunas imposibles de evitar para interferómetros terrestres (como el gradiente gravitacional, representado como *newtonian*). Esto hace necesarios observatorios en órbita para estudiar estos rangos de frecuencia.

4.2. Astronomía de ondas gravitacionales

Durante la Historia de la humanidad, el estudio del Universo profundo se ha llevado a cabo mediante la observación de señales electromagnéticas. La detección de ondas gravitacionales abre un nuevo canal para la estudiar de los fenómenos astrofísicos. Como indica [5, Sec. 6.], puede ser muy ilustrativo comparar ambas fuentes de información. La radiación electromagnética interactúa fuertemente con la materia pero la gravitacional no. Esto supone una desventaja para la segunda porque es más difícil su detección, pero significa también que su propagación desde el origen hasta la Tierra no ha sufrido muchas modificaciones (a diferencia de las señales ópticas, que sufren dispersión y atenuación en el medio interestelar). Por otro lado, la luz se genera a partir de movimientos a escalas atómicas, así que su longitud de onda es mucho más pequeña que el sistema observado (estrellas, nubes de gas etc.). Sin embargo, la radiación gravitacional surge de la dinámica global de la fuente (movimientos diametrales en el interior de estrellas de neutrones, rotación de sistemas binarios etc.), así que su longitud de onda es similar al tamaño del objeto de estudio. Este argumento permite entender que las ondas gravitacionales sean coherentes (se producen como respuesta a un mismo efecto dinámico), mientras que las electromagnéticas no (se producen por emisiones independientes en cada átomo). Además, podemos entender así que las ondas gravitacionales contienen información sobre la estructura macroscópica y la dinámica de la fuente, mientras que la radiación electromagnética aporta datos sobre la estructura microscópica y otros aspectos energéticos. Así que son canales complementarios de información.

El objetivo de cualquier detector de ondas gravitacionales es determinar la polarización de la onda, las frecuencias que la integran, su fase y su dirección angular. La forma de medir cada uno de estos parámetros es diferente según las características de la señal recibida, que [13, Sec. 2.1] clasifica en las siguientes tres categorías.

- Ráfagas. Su duración temporal es muy pequeña, por lo que el movimiento de la Tierra no afecta a las medidas. [22] las divide en dos grupos: Bien definidas y desconocidas. Las primeras proceden de fuentes conocidas, esencialmente el colapso de un sistema binario. Las segundas, típicamente producidas por supernovas, tienen una evolución en la fase indeterminada (lo que dificulta el análisis de las señales).
- Ondas Continuas. Su duración hace relevante introducir en el análisis el movimiento de la Tierra. Típicamente son producidas por estrellas de neutrones asimétricas en rotación en nuestra galaxia. De nuevo, conocer o no la frecuencia de rotación supone una diferencia considerable a la hora de diseñar algoritmos para procesar estas señales.

- Fondo estocástico. Análogo al Fondo cósmico de microondas, puede pasar por una contribución de ruido en el detector. No obstante, la misma señal en dos detectores puede mostrar una naturaleza de onda gravitacional. Su origen se encuentra en la superposición incoherente de distintas fuentes, y puede que en una componente previa al Big Bang.

4.2.1. Localización de la fuente en la esfera celeste con interferometría

La expresión (20) se ha deducido a partir de una onda gravitacional de polarización + propagándose en la dirección perpendicular al plano del interferómetro. No obstante, podríamos haber deducido una expresión general en función de los ángulos de la dirección de propagación y la polarización. Esto permite obtener un patrón de antena del interferómetro, como el que se muestra en la figura 4b. Este resultado tiene cuatro puntos ciegos en las bisectrices de los brazos del interferómetro, pero en el resto de ángulos es muy isótropo. Así que las medidas de un solo interferómetro no son suficientes para fijar la dirección de propagación de la señal. Esto supone una gran diferencia con las observaciones ópticas, que se realizan mediante telescopios que enfocan una región muy específica del cielo (lo que permite estudiar muy bien un emisor concreto pero omite fenómenos relevantes en otras posiciones). La detección de ondas gravitacionales actúa de forma opuesta: permite estudiar simultáneamente casi todo el firmamento, pero no es inmediato saber de dónde procede cada señal.

Para localizar la fuente se pueden usar varias técnicas, pero la más sencilla de visualizar es la triangulación temporal. Como representa la figura 4a (que utiliza señales de rayos gamma, pero la idea es la misma), consideremos dos interferómetros a una distancia fija D_{12} y una señal de onda gravitacional procedente de un objeto lejano. Cuando la señal llega a S_2 , aún tendrá que recorrer una distancia $c\Delta t$ hasta S_1 . Esto permite obtener el ángulo que subtiende la línea de visión respecto del eje entre ambos interferómetros, $\cos\theta = c\Delta t/D_{12}$, obteniendo así un círculo de posibles localizaciones (que se convierte en un anillo por la incertidumbre en la medida de la diferencia temporal). Usando el interferómetro S_3 podemos repetir el proceso con cada detector para reducir el área en la esfera celeste donde se puede encontrar la fuente.

El proceso descrito se utiliza para obtener la posición de fuentes de ráfagas. Además, para ráfagas bien definidas, podemos aprovechar la coherencia de las ondas gravitacionales y mejorar su detección modelizando la fase a partir del evento del que surgieron. No obstante, no es necesario utilizar la triangulación en ondas continuas porque podemos usar el movimiento del detector para ajustar los datos del patrón de antena con el tiempo y obtener la localización, como indica [13, Sec. 2.1]. Aún así, es conveniente usar otro interferómetro para confirmar los resultados. En resumen, el análisis de estos fenómenos requiere de la colaboración de varios proyectos simultáneamente, formando una red global de detectores de ondas gravitacionales.

4.3. Historia de la detección directa de ondas gravitacionales

La historia de los detectores de ondas gravitacionales tiene su punto de partida en las propuestas de J. Weber, a principios de la década de 1960, de construir barras resonantes. Su equipo construyó dos discos de aluminio con cristales ferroeléctricos en su superficie que transformaban las tensiones en señales eléctricas. Sus frecuencias de resonancia estaban en 1660Hz y su precisión alcanzaba deformaciones de $\delta L/L \sim 10^{-16}$, según [23]. El equipo anunció a finales de la década la detección de las mismas ondulaciones en ambos discos (separados 2km para reducir el ruido ambiental), lo que atribuyeron a la detección de ondas gravitacionales. Durante los años siguientes se anunciaron

muchas más detecciones, demasiadas para lo que las predicciones teóricas estimaban probable. Esto estimuló a numerosos grupos de investigación a construir sus propios aparatos, entre los que destacaron J.A. Tyson en Bell Labs y J.L. Levine y R.L. Garwin en el IBM Thomas J. Watson Research Center. Ninguno fue capaz de replicar los resultados de Weber. A fines de la década de 1990 había cinco detectores de barras operando conjuntamente: Allegro en Luisiana, Auriga en Padua, Explorer en el CERN, Nautilus en Roma y Niobe en Australia. A pesar de aumentar notablemente su sensibilidad ninguno ha reportado eventos de ondas gravitacionales a día de hoy. De hecho, los detectores de barras actualmente son más considerados una prueba de concepto que un camino realista para la observación ondas gravitacionales.

Paralelamente, el primer interferómetro se construyó en 1972 a cargo de R. Forward y su equipo del Huggens Research Laboratory, aunque aún estaba lejos de la precisión necesaria para observar estos fenómenos. La tecnología de la época era muy insuficiente para solventar los problemas expuestos en 4.1.2, hasta el punto de K. Thorne, ganador del premio Nobel de Física en 2017 junto a B.C. Barish y R. Weiss por la detección interferométrica de ondas gravitacionales, escribió en 1973 "...estos detectores tienen una sensibilidad tan pequeña que son de poco interés experimental" [2, Sec. 37.3]. En 1974, H. Billing y su equipo construyó un prototipo de interferómetro con una longitud de brazo de 3m en Múnich, Alemania. Este proyecto ya introdujo algunas de las mejoras que hemos discutido: líneas de retardo, soportes con sistemas pendulares, reciclaje de potencia etc. El mismo equipo desarrolló unos años más tarde otro interferómetro en Garching, Alemania, con brazos de 30m. Según [24, Sec. VIII.], la sensibilidad llegó a alcanzar los 10^{-18} a 1kHz.

Los avances técnicos en la interferometría durante la década de 1970 incentivaron a diferentes instituciones para solicitar financiación que permitiera abordar proyectos más ambiciosos. En 1983, Caltech y MIT presentaron una propuesta para desarrollar un interferómetro de varios kilómetros de longitud que se materializaría en la construcción de LIGO, una colaboración de tres interferómetros. Dos están ubicados en Hanford Site, Washington (para reducir el ruido local), con 4km y 2km. Otro se encuentra en Livingston, Louisiana, y mide 4km. Se inauguró en 1999, e incorporaba gran parte de las especificaciones descritas en 4.1.2, aunque sufrió numerosos procesos de mejora (entre los que destaca la instalación de *Advanced* LIGO entre 2010 y 2014). Como muestra la figura 3, su sensibilidad alcanza los 10^{-23} en algunas bandas de frecuencia. Por otro lado, en 1989 se planteó un detector conjunto por Francia e Italia que conduciría a la formación de Virgo, un interferómetro de 3km localizado en Cascina, Italia. La principal diferencia respecto a LIGO es la incorporación integral de un sistema de aislamiento sísmico muy sofisticado. Su sensibilidad al principio era algo menor que LIGO, pero la construcción de *Advanced* Virgo ha igualado la precisión en la mayoría del espectro de frecuencias, como indica [25]. Por último, en 1994, el grupo de Garching promovió una colaboración anglo-alemana para construir GEO600, ubicado en Sarstedt, Alemania. Sus brazos son de 600m, por lo que su sensibilidad es algo menor que los dos anteriores, alcanzando 10^{-22} como indica [26]. Trabaja en asociación con LIGO desde su construcción.

Hay varios proyectos relacionados con la construcción de nuevos observatorios de ondas gravitacionales. Destacan LCGT (un interferómetro subterráneo ubicado en Japón con brazos de 3km y tecnología criogénica que comenzó a operar en 2020 pero aún está en fase de mejora), el telescopio Einstein (también subterráneo, se propone con una longitud de 10km por brazo y una forma triangular, alejándose del diseño del interferómetro de Michelson) y la propuesta de LISA (un interferómetro espacial con brazos $2,5 \times 10^6$ km).

La primera detección directa de una onda gravitacional se produjo el 15 de Septiembre del 2015 en una observación conjunta de Virgo y LIGO, publicada en [27]. El evento, GW150914, se interpretó como la fusión de un sistema binario de dos agujeros negros en rotación. Esta señal abrió

el camino para la formalización de la astrofísica observacional por radiación gravitacional, que ya ha confirmado la detección numerosos eventos durante los últimos seis años. Podemos destacar GW170817, que supuso la primera detección simultánea de ondas electromagnéticas y gravitacionales. Como indica [28], su fuente fue la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones, y permite demostrar que la propagación de las ondas gravitacionales se hace a la velocidad de la luz. Ambas señales llegaron a la Tierra con una diferencia de 1,7s. La fuente, en NGC 4993, se situaba a una distancia de 40Mpc. Esto significa que la luz tardó unos $1,305 \times 10^8$ yr en llegar a la Tierra, y la onda gravitacional tardó $1,305 \times 10^8$ yr $- 1,7$ s. La discrepancia relativa en la velocidad es muy pequeña (10^{-14} %).

5. Conclusión

Hemos presentado las bases para comprender cómo funcionan los detectores de ondas gravitacionales disponibles en la actualidad mediante las herramientas más fundamentales de la teoría linealizada de la Relatividad General: el TTG, que hemos usado para explicar el funcionamiento básico de un interferómetro; y el SPD, con el cual hemos reducido los efectos de las ondas gravitacionales sobre barras resonantes al formalismo newtoniano. Hay muchos más aspectos que tratar en ambos dispositivos porque el desarrollo que han tenido en las últimas décadas ha sido considerable. Y no es para menos, ya que la detección directa de ondas gravitacionales es imprescindible para dar validez a todos los demás desarrollos teóricos que se realicen sobre estos fenómenos ondulatorios: emisión por sistemas binarios, efectos no lineales en la propagación, tensor energía momento-propagado etc. Todos estos campos de la teoría no tendrían ninguna corroboración observacional sin los detectores que hemos expuesto. De ahí la importancia de este trabajo, que abre la puerta para estudiar nuevos conceptos teóricos con la seguridad de que podrán ser sometidos al escrutinio al que se debe someter toda teoría: la realidad física.

Referencias

- [1] A. Einstein, “The field equations of gravitation,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1915, pp. 844–847, 1915.
- [2] K. S. Thorne, J. A. Wheeler, and C. W. Misner, *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000.
- [3] A. Einstein, “Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation,” pp. 688–696, 1916.
- [4] B. F. Schutz, “Gravitational waves on the back of an envelope,” *American Journal of Physics*, vol. 52, no. 5, pp. 412–419, 1984.
- [5] E. E. Flanagan and S. A. Hughes, “The basics of gravitational wave theory,” *New Journal of Physics*, vol. 7, no. 1, p. 204, 2005.
- [6] M. Maggiore, *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*. OUP Oxford, 2007.
- [7] T. Padmanabhan, *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [8] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [9] A. S. Eddington, “The propagation of gravitational waves,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 102, no. 716, pp. 268–282, 1922.
- [10] E. Hecht, *Optics*. Boston: Pearson, global, fifth edition. ed., 2017. 1 online resource (730 pages) 5174663 Proquest Ebook Central.

-
- [11] D. J. Muehlner and R. Weiss, “Gravitation research,” tech. rep., Research Laboratory of Electronics (RLE) at the Massachusetts Institute of . . . , 1972.
- [12] W.-T. Ni and M. Zimmermann, “Inertial and gravitational effects in the proper reference frame of an accelerated, rotating observer,” *Physical Review D*, vol. 17, no. 6, p. 1473, 1978.
- [13] B. F. Schutz and F. Ricci, “Gravitational waves, sources, and detectors,” *arXiv preprint arXiv:1005.4735*, 2010.
- [14] J. Weber, “Detection and generation of gravitational waves,” *Physical Review*, vol. 117, no. 1, p. 306, 1960.
- [15] B. F. Schutz, “Sources of gravitational waves and their detectability,” in *13th International Conference on General Relativity and Gravitation*, pp. 191–209, Institute of Physics Publ., 1993.
- [16] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, “On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. i. issues of principle,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 52, no. 2, p. 341, 1980.
- [17] L. Barsotti, S. Gras, M. Evans, and P. Fritschel, “The updated advanced ligo design curve,” *LIGO Document: LIGO-T1800044*, 2018.
- [18] C.-M. Chen, J. M. Nester, and W.-T. Ni, “A brief history of gravitational wave research,” *Chinese Journal of Physics*, vol. 55, no. 1, pp. 142–169, 2017.
- [19] P. R. Saulson, “Gravitational wave detection: Principles and practice,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 14, no. 4, pp. 288–305, 2013.
- [20] V. Predoi, K. Hurley, for the LIGO Scientific Collaboration, V. Collaboration, *et al.*, “Search for gravitational waves associated with the interplanetary network short gamma ray bursts,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 363, p. 012034, IOP Publishing, 2012.
- [21] D. Sigg, “Strain calibration in ligo,” *LIGO Technical document*, vol. 970101, 1997.
- [22] K. Riles, “Gravitational waves: Sources, detectors and searches,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 68, pp. 1–54, 2013.
- [23] J. Weber, “Gravitational radiation,” *Physical Review Letters*, vol. 18, no. 13, p. 498, 1967.
- [24] D. Shoemaker, R. Schilling, L. Schnupp, W. Winkler, K. Maischberger, and A. Rüdiger, “Noise behavior of the garching 30-meter prototype gravitational-wave detector,” *Physical Review D*, vol. 38, no. 2, p. 423, 1988.
- [25] “Sensitivity of Virgo.” <https://www.virgo-gw.eu/science/detector/sensitivity/>. Accessed: 2023-11-20.
- [26] “Sensitivity of GEO600.” <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/610/1/012015/pdf>. Accessed: 2023-11-25.
- [27] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [28] “GW170817: observación de ondas gravitacionales procedentes de la espiral de una binaria de estrellas de neutrones..” <https://www.ligo.org/sp/science/Publication-GW170817BNS/>. Accessed: 2023-11-26.