UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Métodos Matemáticos y de la Física

TESIS DOCTORAL

Métodos variacionales y de invariancia aplicados al estudio de las densidades conservadas en problemas físicos no lineales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Francisco José Guil Guerrero

DIRECTOR:

Lorenzo Abellanas Rapun

Madrid, 2015

Francisco José Guil Guerrero

METODOS VARIACIONALES Y DE INVARIANCIA APLICADOS AL ESTUDIO DE LAS DENSIDADES CONSERVADAS EN PROBLEMAS FISICOS NO LINEALES

Departamento de Métodos Matemáticos de la Física.
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid
1980

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-8921-1980

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

"METODOS VARIACIONALES Y DE INVARIANCIA APLICADOS AL ESTUDIO DE LAS DENSIDADES CONSERVADAS EN PROBLEMAS FISICOS NO LINEALES"

MEMORIA presentada por D. Francisco GUIL GUERRERO para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Madrid, Junio 1979

Este trabajo ha sido llevado a cabo gracias a la dirección del Profesor L. Abellanas Rapún a quien deseo hacer constar mi agradecimiento por la atención y gran sentido crítico que ha puesto en la elaboración de las ideas aquí contenidas. En buena parte, los problemas resueltos son fruto de largas discusiones donde quedó patente su capacidad a la hora de elegir el camino correcto. Los mismo puedo decir del Profesor A. Galindo y de los restantes miembros de los Departamentos de Física Matemática y Física Teórica. En especial de mi amigo Luis Martínez Alonso. Mi deuda científica con él es enorme.

La ayuda económica durante la elaboración de este trabajo ha sido proporcionada por una beca del Ministerio de Educación y Ciencia (P.F.P.D.I.).

INDICE

INTRODUCCION

Resulta evidente a partir del desarrollo de la moderna Física Matemática que el bloque central de problemas que ha tenido y tiene planteados apuntan hacia un objetivo final: la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales (ordinarias o en derivadas parciales).

Ahora bien, dada la envergadura de este problema desde el punto de vista de la matemática pura, se hace muy difícil cuando no imposible resolver en detalle una ecuación dada. Hay que distinguir no obstante en este punto dos situaciones completamente distintas tanto por los tratamientos técnicos exigidos en cada caso como por el papel que han jugado en el desarrollo de los modelos matemáticos en Física. Nos referimos de una parte a las ecuaciones lineales y por otra a aquellos fenómenos físicos que vienen descritos por ecuaciones no lineales.

No es fácil justificar mediante argumentos intrínsecos el lugar privilegiado de las ecuaciones lineales dentro de los modelos físicos. En ciertos casos como la Física Cuántica puede argumentarse a posteriori alegando que las predicciones basadas en ecuaciones cuyas soluciones obedecen principios de superposición lineales dan resultados en buen acuerdo con la experiencia.

Pero claro está, esto ni es cierto en general en los diversos campos de la Física, ni descarta la posibilidad de que incluso los mo delos lineales que funcionan bien sean tan solo una buena aproximación a una realidad no lineal.

Mas aún. La incorporación a la metodología matemática de disciplinas como la Biología, Bioquímica, etc. no hace sino aportar nuevo apoyo a la creencia de que los procesos de la naturaleza estén descritos mediante modelos no lineales.

En cualquier caso, un simple argumento de genericidad ratifica esta sospecha si bien pudiera ser la Física una disciplina "singular" en este aspecto.

En los últimos años se asiste de hecho dentro de la Física Matemática a un crecimiento espectacular del interés por analizar algunas ecuaciones no lineales en relación con campos diversos como la hidrodinámica, teoría de campos, transparencia autoinducida, física del plasma, etc.

Ciertamente se está muy lejos de una teoría general de las ecuaciones no lineales. Esto no puede sorprendernos puesto que tras muchos años de intensos esfuerzos acerca de las ecuaciones de tipo lineal, estas carecen todavía de un tratamiento exhaustivo.

Cabe esperar incluso, como señala Ames, que no siendo las ecuaciones lineales en su conjunto sino la familia asociada a un tipo concreto de no linealidad, la amplitud y dificultad de los problemas implicados en una teoría general de procesos no lineales deberá esperar largo tiempo.

. Ante la impotencia para obtener la solución general de una ecuación dada aun en el caso de ser lineal, se ha recurrido principalmente a dos tipos de métodos radicalmente distintos.

Por un lado, el análisis numérico permite aproximar soluciones o realizar experimentos numéricos para investigar el comportamiento de ciertos datos iniciales al evolucionar bajo la ecuación. De otra parte, están los métodos analíticos que permiten obtener información parcial sobre familias especiales de soluciones o bien sobre aspectos cualitativos de la propia ecuación. Uno de estos métodos conocido como método de invariancia o similaridad, cuyos orígenes se remontan cuando menos a la Geometría Diferencial del siglo pasado y concretamente a las aportaciones de S. Lie, están siendo objeto muy recientemente de un relanzamiento espectacular.

Este interés renovado ha sido provocado por las sorprendentes propiedades que parecen ser comunes a varias ecuaciones en derivadas parciales no lineales propuestas como modelos aproximados en una gran variedad de problemas.

Aunque estos métodos de invariancia en su forma más elemental fueron ya aplicados con éxito por Lie y otros a las ecuaciones ordinarias, y desde otro punto de vista están en la base del análisis dimensional, a la hora de aplicarlo a las ecuaciones en derivadas parciales no lineales ha quedado patente la necesidad de generalizar la idea subyacente.

Hasta que fueron descubiertas las extrañas propiedades de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) el papel de los grupos de Lie frente a las ecuaciones de la Física Matemática se reducía básicamente a imponer restricciones a priori sobre el tipo de ecuaciones admisibles y a constituir via el teorema de Noether el soporte teórico de la conservación de magnitudes físicas relevantes como la energía, el momento, etc. . Tal es el caso de las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac, cuyo grupo de invariancia a priori es el grupo de Lorentz. De hecho no iba más allá el interés por las leyes de conservación adicionales que una ecuación pudiese admitir.

No nos puede sorprender que hasta hace bien poco (Arnold 1976) no se hayan estipulado claramente las hipótesis implícitas en la formulación de la Mecánica Newtoniana y el papel central del grupo de Galilei en la forma de las ecuaciones del movimiento.

Sin embargo, a raiz de la aparición de los solitones en KdV, Sine-Gordon, Schrödinger no lineal, etc. ha ido tomando cuerpo la idea de que hay una serie de propiedades aparentemente simultáneas que caracterizan el peculiar comportamiento de dichas ecuaciones, a saber:

1. Existencia de solitones
2. Transformaciones de Bäcklund (dependientes de un parámetro libre)
3. Scattering Inverso
4. Infinitas leyes de conservación.

Los grupos de invariancia de Lie junto con el teorema de Noether no dan cuenta de esas infinitas leyes de conservación. Surge entonces la cuestión de saber hasta que punto son las leyes de conservación de una ecuación prefijada consecuencia de invariancias (en un sentido u otro) de dicha ecuación. Fue en un intento de dar respuesta a esta pregunta cuando Anderson, Kumei y Wulfman introdujeron la noción generalizada de transformaciones de Lie-Bäcklund (denominación incorrecta pero que sigue vigente).

Efectivamente, ya en 1977 Kumei comprobó que este nuevo tipo de invariancias daban lugar a las sucesivas leyes de conservación contenidas en la serie propuesta por Kruskal, Gardner, Miura y otros y clarificó parcialmente la interrelación entre densidades conservadas y grupos de invariancia.

Aparte de estas aportaciones citadas, poco más se sabía hasta ese momento en relación con las propiedades de invariancia y conservación de las ecuaciones en derivadas parciales.

En el primer capítulo de la presente memoria se recoge una breve introducción a los métodos de invariancia tanto en el sentido clásico de Lie como en el de Lie-Bäcklund, poniendo cierto énfasis en la construcción de soluciones de similaridad en el método clásico de Lie, discutiéndose asimismo la posible utilidad de las transformaciones de Lie-Bäcklund a este respecto.

En el segundo capítulo, de caracter esencialmente técnico, introducimos los operadores variacionales que generalizan de forma natural al operador de Euler-Lagrange (gradiente Frechet).

Al objeto de disponer de relaciones algebráicas simples que faciliten el posterior manejo de las expresiones en las que intervienen estos nuevos operadores, desarrollamos algunas identidades que serán de utilidad en los problemas abordados en las siguientes secciones.

Hemos de hacer notar que en el estudio de los problemas variacionales tal como se exponen en cualquier texto standard no aparecen recogidas este tipo de derivadas variacionales generalizadas.

Aparte de que encuentran una sobrada justificación en el análisis desarrollado en el siguiente capítulo, no es difícil comprender que son estos operadores quienes generalizan de forma "natural" el operador usual $\frac{\delta}{\delta u}$, sin más que expresar su acción dentro del álgebra simbólica de Gel'fand-Dikii [25].

El capítulo III persigue un propósito bien definido: probar que las densidades conservadas vienen caracterizadas por ecuaciones (de tipo funcional) de una forma análoga a las que caracterizan los generadores de invariancia Lie-Bäcklund de las ecuaciones en derivadas parciales.

Una vez sentado este principio observamos que esencialmente las únicas ecuaciones en derivadas parciales en las que ambos tipos de condiciones coinciden, esto es las condiciones para ser un generador de invariancia y ser una densidad conservada una función dada, son las ecuaciones lagrangianas. Puesto que son estas ecuaciones las elegidas por la Física en su descripción de la Naturaleza, las simetría y las leyes de conservación deben desempeñar ambas un papel con un profundo significado en la estructura de las soluciones de estas ecuaciones.

Algunas realizaciones concretas de la teoría desarrollada en los capítulos precedentes se plasman en el capítulo IV bajo la nueva visión de conjunto que nos proporciona el manejar simultáneamente los tres pilares perfilados con anterioridad: invariancias, leyes de conservación y las reglas del cálculo formal de variaciones.

En primer lugar damos dos ejemplos en los que puede verse el método general a seguir para encontrar las simetrías y las leyes de conservación. Pasamos a discutir algunos problemas de caracter técnico en relación con ambos tipos de funciones para finalizar analizando algunas propiedades generales de las densidades conservadas a la ley de las propiedades de invariancia.

En muchos casos nuestros logros, así lo creemos, se encuentran más en el método esbozado que en el resultado mismo. Esa es la razón de haber elegido a veces casos particularmente sencillos para contrastar la potencia de las técnicas utilizadas.

I. GRUPOS DE LIE - BÄCKLUND

1. Grupos de Lie sobre ecuaciones en derivadas parciales

Consideramos funciones reales u(x) definidas en puntos $x=(x_1,\dots,x_n)$ del espacio R^n. Tales funciones las supondremos diferenciables con continuidad hasta el orden que sea necesario en cada caso y en general que satisfacen todos los requisitos de regularidad exigidos más adelante. Como se verá nuestros problemas serán de un tipo más bien algebráico que analítico.

Introducimos la siguiente notación para sus derivadas:

$$u_\alpha(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \quad , \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Salvo mención expresa en contrario, existirá suma sobre índiceS repetidos.

Una ecuación en derivadas parciales de orden m es una relación del tipo:

$$\Omega[x, u] = 0 \qquad (1)$$

donde Ω es una función de las variables independientes x, de la dependientes u(x) y de sus derivadas $u_\alpha(x)$ hasta un orden m, es decir $|\alpha| \leq m$. En general un paréntesis cuadrado denotará dependencia en u y sus derivadas $[x,u] \equiv (x_1 \dots x_n ; u_\alpha)$.

Las soluciones de la ecuación (1) son aquellas funciones u(x) para la que (1) se satisface identicamente.

Desde el punto de vista geométrico, las soluciones u=u(x) pueden ser tratadas junto a x como los puntos (x, u(x)) de una variedad M_u dentro del espacio R^{n+1}.

Sobre el espacio R^{n+1} tiene sentido la accion de un grupo de Lie uniparamétrico G que asocie a (x, u(x)) el punto (x', u' (x')).

$$x \xrightarrow{g(a)} x' = x'(x, u; a)$$
$$u \xrightarrow{g(a)} u' = u'(x, u; a) \qquad (2)$$

donde a es un parámetro real que describe los elementos de G.

Los elementos $g(a) \in G$ transforman una variedad M_u como la considerada más arriba en otra $M_{u'}$, con puntos (x', u' (x')), de acuerdo con las fórmulas (2).

La aplicación

$$u = u(x) \longrightarrow u' = u'(x') \qquad (3)$$

inducida por (2) pasa de las funciones u(x) sobre R^n a las u'(x').

En el presente contexto cobran sentido las dos definiciones siguientes:

Def. 1.- "G es un grupo admisible para la ecuación (1) si toda solución es transformada por (3) en otra solución".

Desgraciadamente conocemos las ecuaciones, pero no es lo más frecuente conocer tambien sus soluciones. Si la teoría de los Grupos de Lie puede esclarecer en algo los problemas asociados a una ecuación en derivadas parciales como (1), debemos relacionar ante todo el grupo con la ecuación más bien que con las soluciones de ésta.

A tal fin sea R^N el espacio de puntos $p \equiv (x, u, u_\alpha)$, $1 \leq |\alpha| \leq m$. Dado un grupo de Lie uniparamétrico actuando en R^{n+1} podemos extender su acción al espacio R^N de manera que las variables u_α se transformen como las derivadas de tipo α de u(x). Esto es, para cual quier función u=u(x) los puntos $p(x) \equiv (x, u(x), u_{\alpha}(x))$ se convierten en los $p'(x') \equiv (x', u'(x'), u'_{\alpha}(x'))$ bajo la acción extendida de G, siendo $u'_{\alpha}(x') = \frac{\partial^{|\alpha|} u'}{\partial x_1'^{\alpha_1} \cdots \partial x_n'^{\alpha_n}}(x')$. Denotaremos por G^{ext} el grupo de estas transformaciones sobre R^N.

La función $\Omega[x,u]$ de la ecuación (1) es una función $\Omega = \Omega(p)$ definida sobre R^N.
Sea $\mathcal{M}(\Omega)$ la variedad $\{p : \Omega(p) = 0\}$ en R^N.

Def. 2.- Dado un grupo de Lie uniparamétrico G sobre R^{n+1} diremos que G es un grupo de invariancia para la ecuación (1) $\Omega[x,u] = 0$ si $\mathcal{M}(\Omega)$ es invariante bajo la acción de G^{ext} sobre R^N. Es decir, si $\Omega(p) = 0$ implica $\Omega(p') = 0$ para todas las transformaciones de G^{ext}.

La definición 2 satisface la necesidad mencionada antes, caracterizando un grupo por propiedades "medibles" en la propia ecuación. Evidentemente todo grupo admisible es de invariancia.

Una aplicación importante de los grupos de invariancia consiste en un método para encontrar soluciones de la ecuación (1) mediante la reducción del número de variables independientes, lo que se conoce como Método de Similaridad [1] , aplicable siempre que el grupo de invariancia sea admisible, cosa que ocurre bajo condiciones de regularidad en la ecuación no muy estrictas.

Consideremos entonces la acción infinitesimal del grupo G sobre los puntos x y las funciones u(x), hasta el primer orden en a la ley de transformación (2) resulta ser

$$x'_i = x_i + a\,\xi_i(x,u(x)) + O(a^2)$$

$$u'(x') = u(x) + a\,\eta(x,u(x)) + O(a^2) \qquad (4)$$

Dada una función F=F(x,u) definida sobre R^{n+1}, tendremos

$$F(x',u'(x')) = (\exp aX)\,F(x,u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}(X^n F)(x,u(x)) \qquad (5)$$

donde X es el generador infinitesimal del grupo G

$$X = \xi_i(x,u(x))\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u(x))\frac{\partial}{\partial u}$$

Este operador diferencial de primer orden se obtiene considerando la acción infinitesimal de G sobre una función $F(x,u(x))$

$$F(x',u'(x')) = F(x,u(x)) + a\frac{d}{da}\Big|_{a=0} F(x',u'(x')) + O(a^2) =$$

$$= F(x,u(x)) + a\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial}{\partial u}\right)F(x,u(x)) + O(a^2)$$

Hasta el primer orden en a, tendremos tambien para $G^{ext.}$ las fórmulas

$$x'_i = x_i + a\,\xi_i(x,u(x)) + O(a^2)$$

$$u'(x') = u(x) + a\,\eta(x,u(x)) + O(a^2) \qquad (6)$$

$$u'_\alpha(x') = u_\alpha(x) + a\,\eta_\alpha(x,u(x),u_\beta(x)) + O(a^2)\ ,\quad |\beta|\leq|\alpha|$$

Las funciones η_α definidas sobre R^N se calculan facilmente a partir de la fórmula (4) (por ejemplo [1]) y se expresan como polinomios en las u_β cuyos coeficientes dependen linealmente en las ξ_i, η y sus derivadas y resultan ser $\eta_\alpha = D^\alpha(\eta - \xi_k D_k u) + \xi_k D_k u_\alpha$

El generador infinitesimal de $G^{ext.}$ se escribe entonces

$$X^{ext.} = \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_\alpha \eta_\alpha\frac{\partial}{\partial u_\alpha} =$$

$$= \xi_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n\frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_\alpha \eta_\alpha\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \qquad (7)$$

Def. 3.- Si G es un grupo de invariancia para la ecuación (1), diremos que X^{ext} es un generador de invariancia para esta ecuación.

Proposición 1.- Si $\Omega(x, u, u_\alpha)$, $1\leq|\alpha|\leq m$ es una función diferenciable y su matriz Jacobiana $(\Omega_{x_i}, \Omega_u, \Omega_{u_\alpha})$ es no singular sobre $\mathcal{M}(\Omega)$, entonces G es un grupo de invariancia para la ecuación (1) si y solo si $X^{ext}\Omega$ se anula sobre $\mathcal{M}(\Omega)$, es decir

$$X^{ext.}\Omega\Big|_{\Omega=0} = 0 \qquad (8)$$

Demostración.-

Con las hipótesis hechas sobre la función Ω, $\mathcal{M}(\Omega)$ resulta ser [3] una subvariedad regular de R^N que permanece invariante bajo la acción de G^{ext} si y solo si X^{ext} es un campo vectorial tangente en $\mathcal{M}(\Omega)$, es decir si y solo si $X^{ext}\Omega(p)=0$ para todo $p \in \mathcal{M}(\Omega)$.

La proposición 1 nos proporciona el método de cálculo para determinar los grupos de invariancia de la ecuación $\Omega[x,u]=0$. En efecto, el problema se reduce a resolver (8)

$$\xi_i \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} + \sum_\alpha \eta_\alpha \frac{\partial\Omega}{\partial u_\alpha} = 0 \qquad (9)$$

para las n+1 funciones incógnitas ξ_i, η teniendo en cuenta $\Omega[x,u]=0$
En la práctica (9) resulta ser un sistema sobredeterminado y sus soluciones varian mucho con el tipo de ecuación Ω pudiendo depender de funciones "arbitrarias" de x y de u (caso de las ecuaciones lineales y cuasi-lineales) o bien tan solo de unos cuantos parámetros (como en general ocurre en las ecuaciones Ω no lineales) e incluso tener solo la solución trivial .

2.- Método de Similaridad

Def. 4.- Dado un grupo de invariancia G para la ecuación (1) diremos que u(x) es una solución de similaridad de (1) bajo G, si es invariante bajo G.

Es decir $u'(x') = u(x)$ (10)

Infinitesimalmente la fórmula (10) se escribe

$$\xi_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \eta(x,u) \qquad (11)$$

para ξ_i, η dados. La ecuación (11) es una ecuación cuasi-lineal en derivadas parciales para u(x). La teoría de tales ecuaciones cuasi-lineales es completa [4] en cuanto al cálculo de la solución más general que viene dada por una relación funcional del tipo.

$$\Phi(\psi_1, \cdots, \psi_n) = 0 \qquad (12)$$

donde Φ es una función arbitraria de las n integrales primeras $\psi_i = \psi_i(x,u)$ de la ecuación (11). El método a seguir para resolver (11) es el siguiente.

1. Se le asocia la ecuación homogénea

   $$\xi_i(x,u)\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$$

   donde $\psi(x_1,\dots,x_n\,;\,u(x))=0$ define una solución u(x) de (11) en forma implícita.

2. Se buscan n integrales primeras

   $\psi_1(x,u), \dots, \psi_n(x,u)$

3. Por fín se toma

   $\psi(x,u) = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_n)$

   y se despeja en (12) la letra u.

Sin embargo, las soluciones de (11) aun no son soluciones de la ecuación original (1) puesto que el grupo caracterizado por las ξ_i, η no determina ni con mucho una única ecuación $\Omega[x,u]=0$ que lo tenga por grupo de invariancia (por ejemplo, las ecuaciones de la forma $\Omega[u]=0$ que no dependen explicitamente de las coordenadas x_i son todas invariantes bajo los grupos de translaciones $x_i \to x_i+\lambda_i$, $u'(x')=u(x)$ que tienen por generadores $\xi_i=\lambda_i$, $\eta=0$) . A partir de (12) se obtiene una forma funcional para u en función de las invariantes ó integrales primeras ψ_i. Al exigir que u sea solución de (1) se obtiene una nueva ecuación diferencial en derivadas parciales para uno de lós invariantes, el ψ_n digamos, en función de los restantes $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ habiendose reducido en uno el número de variables, de las n variables x hemos pasado a las nuevas variables $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$.

Si la ecuación de partida contenía dos variables independientes sólo,se logra reducir a una ecuación ordinaria, con lo que se cambia radicalmente el tipo de problema.

Hacemos notar que nos hemos restringido al marco de una sola ecuación y una variable dependiente u(x), y que la extensión del método al caso de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales sigue la linea establecida anteriormente si bien aumentar las dificultades en los cálculos prácticos.

Como ilustración de la teoria desarrollada brevemente hasta aqui mostraremos las soluciones de similaridad de dos ecuaciones a las que nos referiremos con frecuencia en lo que sigue: la ecuación de calor y la ecuación de Korteweg de Vries

Sea la ecuación

$$u_t = u_{xx} \qquad (13)$$

que describe la evolución de un campo térmico u(x,t) en una dimensión espacial x("ecuación de calor"). Si hacemos $\Omega = u_t - u_{xx}$ y llamamos ahora $\xi_1 \equiv \xi$, $\xi_2 \equiv \tau$ las funciones $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$, $\eta(x,t,u)$ definen un grupo de invariancia para (13) si se satisface (9) es decir

$$\eta_{(t)} - \eta_{(xx)} = 0 \qquad (14)$$

bajo $u_t = u_{xx}$ para cualquier solución u(x,t) de (13).
Las soluciones de (14) resultan ser las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma x t + (\beta/2)\, x + \delta t + \varepsilon \\ \tau &= \gamma t^2 + \beta t + \alpha \\ \eta &= u \left[(-\gamma/2)(x^2/2 + t) - (\delta/2)\, x + \lambda \right] \end{aligned} \qquad (15)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ constantes. Las fórmulas (15) definen el grupo de invariancia de la ecuación del calor (13). Identificamos con facilidad los siguientes subgrupos: ε-traslaciones en x, α-traslaciones en t, β - dilataciones de las coordenadas x y t, λ -dilataciones en u. Cada uno de los seis subgrupos de (15) puede usarse para buscar soluciones de similaridad de la ecuación (13). En particular es posible obtener la solución fundamental de (13) que es la determinada por la condición inicial.

$$u(x,0) = \delta(x)$$

resultando [1]

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

El uso de condiciones de contorno viene impuesto aqui por el tipo de solución buscada, pero no es caracteristico del método.

Un procedimiento análogo aplicado a la ecuación de Korteweg de

Vries (KdV).

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0 \qquad (16)$$

nos conduce al grupo de 4 parámetros

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha}{3} x + \gamma t + \delta \\ \tau &= \alpha t + \beta \\ \eta &= -\frac{2\alpha}{3} u + \gamma \end{aligned} \qquad (17)$$

el subgrupo de (17) $\alpha = \gamma = 0$ da la solución

$$u(x,t) = 3c\, \mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right], \quad c = \frac{\delta}{\beta} \qquad (18)$$

que recibe el nombre de solitón[5].

Otra familia de soluciones asociada al subgrupo de (17) $\alpha=0$ está caracterizada por la ecuación de Painlevé[6,7]

En realidad las soluciones de similaridad "Tipo Lie" de una ecuación en derivadas parciales constituyen una subfamilia, por lo general no muy numerosa, del conjunto de las soluciones de la ecuación aunque tambien es cierto que es el único método aplicable de un modo sistematico para encontrar soluciones. Una versión simplificada es el análisis dimensional que presentamos en el apéndice.

3. Transformaciones de Lie- Bäcklund

Las transformaciones tratadas hasta ahora se reducen a una aplicación directa de la teoría de los grupos de Lie a las ecuaciones en derivadas parciales. Dentro de este orden de ideas, se han conseguido muy recientemente extensiones en modo alguno triviales de la teoria, los grupos de Lie-Bäcklund [8,9] . Lo que a nuestro juicio constituye la razón esencial de tal prolongación se reduce simplemente a tratar en pie de igualdad la conexión entre integrales primeras y grupos de simetria que aparece en la Mecánica Clásica[16] con las ecuaciónes en drivadas parciales, en particular las no lineales. Este esquema se verá completado en los capítulos que siguen.

Sea pues, sin pérdida de generalidad una función real o compleja u con N componentes $u^{\lambda}\ (\lambda=1,\dots,N)$ que dependen de n coordenadas $x_k\ (k=1,\dots,n)$. Como en el § 1

$$u^{\lambda}_{\alpha}(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}u^{\lambda}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\quad,\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$$

Si m es un entero no negativo, definimos el espacio E_m como el conjunto de puntos $(x_1,\dots,x_n;u_\alpha^1,\dots,u_\alpha^N)$, $|\alpha|\leq m$ y $E=\bigcup_{m\geq 0} E_m$ por $\mathcal{F}_m$ denotaremos el conjunto de funciónes $F=F(x_i,u^{\lambda}_{\alpha})$ definidas en E_m (para abreviar pondremos a veces F[x,u]) y de clase C^{∞} localmente en todos sus argumentos. Hacemos entonces $\mathcal{F}=\bigcup_{m\geq 0}\mathcal{F}_m$. Sea $D_k\ (k=1,\dots,n)$ el operador de derivación total respecto a la variable x_k ; actuando sobre $\mathcal{F}$ es

$$D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{\alpha}(D_k u^{\lambda}_{\alpha})\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\alpha}} \qquad (19)$$

donde se suma sobre los índices repetidos. Escribiremos

$$D^{\alpha}=\prod_k (D_k)^{\alpha_k}$$

En lo que sigue un sistema de ecuaciones en derivadas parciales se considerará constituido por N funciones $\Omega^{\lambda}\in\mathcal{F}$ igualadas a cero

$$\Omega^{\lambda}[x,u]=0\quad,\quad \lambda=1,\dots,N \qquad (20)$$

Lo que llamaremos sistema extendido, se obtiene del (20) considerando las consecuencias diferenciales de estas ecuaciones.

$$D^{\alpha}\Omega^{r}[x, u] = 0 \quad , \quad |\alpha| \geq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, N \tag{21}$$

Si $\Omega^{r} \in \mathcal{F}$ las soluciones de (21) determinan una variedad $\mathcal{M}(\Omega)$ en el espacio euclídeo E de un modo análogo al ya indicado en el § 1.

Los grupos de transformaciones de Lie-Bäcklund [8] no son otra cosa que grupos de transformaciones de Lie sobre $\mathcal{M}(\Omega)$

Sea G un grupo de Lie sobre la variedad $\mathcal{M}(\Omega)$, definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x'_k &= x'_k(x_1, \dots, x_n, u^1_\alpha, \dots, u^N_\alpha; a) \\ u'^r &= u'^r(x_1, \dots, x_n, u^1_\alpha, \dots, u^N_\alpha; a) \end{aligned} \tag{22}$$

siendo a el parámetro del grupo.

<u>Definición 5.</u> G es un grupo de invariancia Lie-Bäcklund para el sistema (21) si

$$D^{\alpha}\Omega^{r}[x', u'(x')]\Big|_{\Omega = 0} = 0 \quad , \quad r = 1, \dots, N$$

Es decir, las variables transformadas satisfacen las mismas ecuaciones que las originales. O bien $\mathcal{M}(\Omega)$ permanece invariante bajo (22).

La acción infinitesimal de G viene caracterizada por n + N funciones $\xi_k[x, u]$, $\eta^r[x, u] \in \mathcal{F}$, (k = 1,..,n; r = 1,..,N) tales que en primer orden de a la transformación (22) es

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k + a\,\xi_k[x, u] + O(a^2) \\ u'^r(x') &= u^r(x) + a\,\eta^r[x, u] + O(a^2) \end{aligned} \tag{23}$$

En contraste con la teoría estricta de los grupos de Lie, las funciones ξ_k, η^r dependen ahora tanto de las u^r como de sus derivadas

El generador infinitesimal de G es el operador diferencial lineal de primer orden $X = \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_\alpha \eta^\lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha}$

siendo las funciones $\eta^\lambda_\alpha[x,u]$ de la forma

$$\eta^\lambda_\alpha = D^\alpha(\eta^\lambda - \xi_k D_k u^\lambda) + \xi_k D_k u^\lambda_\alpha \qquad (24)$$

de modo que

$$u'^\lambda_\alpha(x') = u^\lambda_\alpha(x) + a\,\eta^\lambda_\alpha[x,u] + O(a^2)$$

para el primer orden en a, con lo que las derivadas u^λ_α se transforman de manera coherente con la ley definida por las expresiones que figuran en (23), nótese que

$$\eta^\lambda_\alpha\Big|_{|\alpha|=0} = \eta^\lambda$$

Proposición 2.- Si definimos $\zeta^\lambda \equiv \eta^\lambda - \xi_k D_k u^\lambda$, en términos de las nuevas funciones ζ^λ el generador infinitesimal de G es el operador

$$X = \xi_k D_k + \sum_\alpha \left(D^\alpha \zeta^\lambda\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha}$$

Dem.- Basta observar la identidad

$$\xi_k\cdot\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_\alpha \eta^\lambda_\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha} = \xi_k\cdot\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_\alpha \xi_k\left(D_k u^\lambda_\alpha\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha} + \sum_\alpha\left(D^\alpha\zeta^\lambda\right)\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha} = \xi_k D_k + \sum_\alpha \left(D^\alpha\zeta^\lambda\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha}$$

De un modo análogo a como se procedió en la proposición 1 se ve que la definición 5 tiene como consecuencia la

Proposición 3.- G es de invariancia para el sistema $\Omega^\lambda = 0$, $\lambda=1,\dots m$ si y solo si

$$X\Omega^\lambda = \xi_k D_k \Omega^\lambda + \sum_\alpha \left(D^\alpha\zeta^s\right)\frac{\partial\Omega^\lambda}{\partial u^s_\alpha} \doteq \sum_\alpha \left(D^\alpha \zeta^s\right)\cdot\frac{\partial \Omega^\lambda}{\partial u^s_\alpha} \doteq 0 \qquad (25)$$

donde $\doteq$ significa que la igualdad se satisface sobre los puntos de $\mathcal{M}(\Omega)$
Observamos en (25) que $\xi_k D_k\Omega^\lambda \doteq 0$ y por consiguiente la condición de invariancia es simplemente.

$$\sum_{\alpha} (D^{\alpha}\zeta^{s}) \cdot \frac{\partial \Omega^{\lambda}}{\partial u^{s}_{\alpha}} \doteq 0 \qquad (26)$$

El significado de las funciones $\zeta^{\lambda}[x,u]$ queda aclarado por la proposición siguiente

Proposición 4.- Bajo la ley de transformación (23) del grupo G.

$$u'^{\lambda}(x) = u^{\lambda}(x) + a\,\zeta^{\lambda}[x,u(x)] + O(a^2) \qquad (27)$$

Dem.- A partir de las fórmulas (23)

$$u'^{\lambda}(x') = u^{\lambda}(x'_t - a\xi_t) + a\eta^{\lambda} + O(a^2) = u^{\lambda}(x') + a(\eta^{\lambda} - \xi_t D_t u^{\lambda}) + O(a^2)$$

observando el primer orden en a. Cambiando **x'** por x se tiene (27).

Las funciones ζ^{λ} son por lo tanto los generadores de un grupo que transforma las funciones u^{λ} y no a las variables x_t. Dado que en la expresión (26) de la condición de invariancia para un sistema $\Omega^{\lambda} = 0$ no aparecen para nada las funciones ξ_t, se puede prescindir de ellas y trabajar tan solo con las ζ^{λ}. El procedimiento es del todo equivalente a utilizar ξ y ζ pero menos engorroso.

4.- Soluciones de Similaridad y Grupos de Lie-Bäcklund

La caracterización dada por la definición 4 del§2 para las soluciones de similaridad que se pueden formar a partir de un grupo de Lie es tambien aplicable a los grupos de Lie-Bäcklund. Si $u'^{\lambda}(x)$ son las funciones transformadas de las $u^r(x)$, las $u^r(x)$ son una solución **de similaridad** para las ecuaciones $\Omega^{\lambda}[x,u]=0$, si son invariantes

$$u'^{\lambda}(x) = u^{\lambda}(x) \quad , (\lambda = 1,\dots, N)$$

siempre que las $\Omega^{\lambda}[x,u]$ sean ellas mismas invariantes.

• El método a aplicar para obtener estas soluciones consiste en anular las funciones ζ^{α}, ya que entonces se tendrá $X=0 \Rightarrow u'^{\alpha}(x) = u^{\alpha}(x)$ que sucede si $\zeta^{\alpha}[x, u] = 0$ (28)

Las ecuaciones (28) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones $u^{\alpha}(x)$ En este caso, a diferencia de lo que ocurría en los grupos de Lie puros, la solubilidad de (28) no se puede asegurar en principio y puede resultar un sistema tanto o más complicado que el original de las $\Omega^{\alpha}[x,u]=0$ Recordemos que el argumento para tener soluciones de similaridad a partir de un grupo de invariancia de Lie estribaba en la asociación de la condición de invariancia (28) con una ecuación cuasi-lineal en derivadas parciales para la función $u(x)$(se trataba allí por sencillez de una función u solo) que era $\xi_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = \eta$

Si tenemos en cuenta que $\zeta^{\alpha} = \eta^{\alpha} - \xi_k D_k u^{\alpha}$ las ecuaciones (28) son formalmente las mismas que antes pero ya no son cuasi-lineales y por consiguiente mucho menos sencillas casi siempre. Ello es debido a que como ya se ha visto las ξ_k y η^{α} dependen de u y de sus derivadas lo que en este caso complica las cosas.

Hacemos notar que alguna solución de importancia en la ecuación de KdV es de similaridad via Lie-Bäcklund[10] . De cualquier modo la forma en que los grupos de Lie-Bäcklund sean aprovechables para un método de similaridad o algo por el estilo no parece estar aun clara.

5. Grupos de invariancia para KdV y Schrödinger no lineal

Comentaremos ahora con algún detalle el procedimiento a seguir para obtener los grupos hasta derivadas de un orden dado de invariancia Lie-Bäcklund de una ecuación diferencial en derivadas parciales.

Para la ecuación de KdV ya dimos la expresión (17) del § 2 de su grupo de Lie con cuatro parámetros. Ampliaremos ahora este grupo.

En la ecuación de KdV (16)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

nos encontramos con una sola función u(x,t) y necesitamos determinar una $\zeta[x,u]$ tal que

$$u'(x) = u(x) + a\,\zeta[x,u] + O(a^2)$$

sea de invariancia, lo que equivale según (26) a que

$$D_t\zeta + \zeta u_x + u D_x\zeta + D_x^3\zeta \doteq 0 \tag{29}$$

En principio ζ puede depender de derivadas $u_t, u_{tt}, u_{xt}, \ldots u_x, u_{xx}, \ldots$ pero la ecuación nos dice que $u_t = -(uu_x + u_{xxx})$, por lo que se pueden eliminar las derivadas temporales desde el principio y buscar $\zeta(x,t,u,u_x,u_{xx},\ldots)$ dependiendo de u y sus derivadas en x solo. Efectuando las derivaciones indicadas en (29) obtenemos

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial\zeta}{\partial u_k} D_x^k(-uu_x - u_3) + \zeta u_x + u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + u\sum_k \frac{\partial\zeta}{\partial u_k} u_{k+1} +$$

$$+\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+3\sum_k\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\partial u_k}u_{k+1}+3\sum_{k,l}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial u_k\partial u_l}u_{k+1}u_{l+1}+$$

$$+3\sum_k\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial u_k}u_{k+2}+\sum_{k,l,m}\frac{\partial^3\zeta}{\partial u_k\partial u_l\partial u_m}u_{k+1}u_{l+1}u_{m+1}+$$

$$+3\sum_{k,l}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u_k\partial u_l}u_{k+2}u_{l+1}+\sum_k\frac{\partial\zeta}{\partial u_k}u_{k+3}=0 \tag{30}$$

(como de costumbre $u_1 \equiv u_x$, $u_2 \equiv u_{xx}$,... $u_n \equiv D_x^n u$). Reagrupando términos

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+\zeta u_1+\sum_k\frac{\partial\zeta}{\partial u_k}\left(uu_{k+1}-D_x^k(uu_1)\right)+$$

$$+3\sum_{k,l}\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\partial u_k}u_{k+1}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial u_k}u_{k+2}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial u_k\partial u_l}u_{k+1}u_{l+1}\right]+$$

$$+\sum_{k,l,m}\frac{\partial^3\zeta}{\partial u_k\partial u_l\partial u_m}u_{k+1}u_{l+1}u_{m+1}+3\sum_{k,l}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u_k\partial u_l}u_{k+2}u_{l+1}=0 \tag{31}$$

La ecuación (31) debe anularse idénticamente en u y en sus derivadas puesto que ha de verificarse para cualquier solución u de KdV, por consiguiente las derivadas parciales de (31) $\frac{\partial}{\partial u_k}$, $\frac{\partial^2}{\partial u_k\partial u_l}$, ... han de ser también idénticamente nulas.

Si nos limitamos a orden cinco en las derivadas de u que figuran en ζ [10] de modo que $\zeta(x,t,u,u_1,\dots,u_5)$, en la ecuación (31) aparece a lo sumo una derivada de orden siete. Imponemos que $\frac{\partial}{\partial u_7}(31)=0$ es decir

$$\frac{\partial}{\partial u_7}(31) = 3\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u_5}+\sum_k\frac{\partial^2\zeta}{\partial u_k\,\partial u_5}u_{k+1}\right)=0$$

o bien

$$D_x \frac{\partial \zeta}{\partial u_5} = 0 \quad \Longrightarrow \zeta = m(t)\, u_5 + \zeta'(x,t,u,\ldots,u_4) \tag{32}$$

y del mismo modo para $u_6,\ldots$ con lo que se acaba obteniendo

$$\zeta = c_1\left(3/5\, u_5 + u u_3 + 2u_1 u_2 + \tfrac{1}{2} u^2 u_1\right) + c_2\,(u_3 + u u_1) +$$

$$+ c_3 u_1 + c_4\left(x u_1 - 3t\left(u_3 + u u_1\right) + 2u\right) + c_5\left(t u_1 - 1\right) \tag{33}$$

siendo c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 los parámetros del grupo. A los c_2,c_3,c_4,c_5 corresponden los mismos generadores que ya se tenían en el § 3, lo que se ve más claramente si se sustituye $u_3 + uu_1$ por $-u_t$ según la ecuación para u. En principio, a la vista de este ejemplo, es posible tener un grupo de invariancia con tantos parámetros como se desee sin más que aumentar el orden de las derivadas de u de las que depende ζ. De hecho, en un caso tan trillado como KdV, existe una fórmula de recurrencia [11] sobre los generadores que dependen solo de u y sus derivadas. Si ζ_n es una solución de (29) hasta derivadas de orden n, es decir $\zeta_n(u, u_1, \ldots, u_n)$

$$\zeta_{n+1} = \left(D_x^2 + \tfrac{2}{3}\, u + \tfrac{1}{3}\, u_x\, D_x^{-1}\right)\zeta_n \tag{34}$$

es también solución de (29). En (34) se ha de comenzar con $\zeta_0 = u_x$ [12].

La ecuación de Schrödinger no lineal con un término cúbico

$$i v_t + v_{xx} + |v|^2 v = 0 \tag{35}$$

tiene propiedades comunes con la de KdV [5]. Aquí nos limitaremos a dar su grupo de invariancia. Puesto que ψ es una función a valores complejos de las variables (x,t), ζ será en general una función de ψ, su compleja conjugada $\bar{\psi}$ y de sus derivadas. Podemos eliminar aquí también la dependencia de ζ en ψ_t , $\bar{\psi}_t$, ... completando (35) con $-i\bar{\psi}_t + \bar{\psi}_{xx} + |\psi|^2\bar{\psi} = 0$. La condición de invariancia para (35) bajo un grupo caracterizado por ζ es entonces

$$iD_t\,\zeta + D_x^2\zeta + \bar{\zeta}\,\psi^2 + 2|\psi|^2\zeta \doteq 0 \tag{36}$$

con $\zeta(x,t,\psi,\bar{\psi},\psi_1,\bar{\psi}_1,\cdots)$. Desarrollando las derivadas y teniendo en cuenta (35) llegamos a la ecuación

$$i\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \bar{\zeta}\,\psi^2 + 2\zeta|\psi|^2 - \sum_k \frac{\partial\zeta}{\partial\psi_k}D_x^k(\psi|\psi|^2) +$$

$$+\sum_k \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{\psi}_k}D_x^k(\bar{\psi}|\psi|^2) + 2\sum_k\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial\psi_k}\psi_{k+1} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial\bar{\psi}_k}\bar{\psi}_{k+1}\right) +$$

$$+\sum_{k,l}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\psi_k\partial\psi_l}\psi_{k+1}\psi_{l+1} + 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\psi_k\partial\bar{\psi}_l}\psi_{k+1}\bar{\psi}_{l+1} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\bar{\psi}_k\partial\bar{\psi}_l}\bar{\psi}_{k+1}\bar{\psi}_{l+1}\right) + \sum_k \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{\psi}_k}\bar{\psi}_{k+2} = 0 \tag{37}$$

La técnica para resolver (37) es la misma que la expuesta en el ejemplo anterior para KdV. Hasta quinto orden en derivadas se obtienen los generadores [10]

$$\zeta_1 = -\frac{ix}{2}\psi + t\,\psi_1$$

$$\zeta_2 = it(\psi_2 + |\psi|^2\psi) + \frac{1}{2}x\,\psi_x + \frac{1}{2}\psi$$

$$\zeta_3 = i\psi$$

$$\zeta_4 = \psi_x$$

$$\zeta_5 = i(\psi_2 + |\psi|^2\psi)$$

$$\zeta_6 = \psi_3 + 3|\psi|^2\psi_1$$

$$\zeta_7 = i(\psi_4 + \psi^2\bar{\psi}_2 + 4|\psi|^2\psi_2 + 2\psi|\psi_1|^2 + 3\bar{\psi}\psi_1^2 + \tfrac{3}{2}|\psi|^4\psi)$$

$$\zeta_8 = \psi_5 + 5\left(|\psi|^2\psi_3 + \psi\psi_1\bar{\psi}_2 + 2\bar{\psi}\psi_1\psi_2 + \psi\bar{\psi}_1\psi_2 + \psi_1^2\bar{\psi}_1\right) + \tfrac{15}{2}|\psi|^4\psi_1$$

Los cinco primeros corresponden a grupos de Lie puros.

Es fácil advertir cómo aumenta de un modo desproporcionado la dificultad para resolver (29) ó (36) conforme se consideran ζ que dependan de derivadas de órdenes cada vez más altos de las soluciones $u(x,t)$ ó $\psi(x,t)$ respectivamente.

Por otra parte y a la vista de los ejemplos anteriores nos inclinaríamos a pensar que tales soluciones ζ, si bien difíciles de calcular, existen. Como se verá en la próxima sección, la posibilidad de derivadas de órdenes arbitrariamente altos está casi siempre excluida.

6. Grupos de Lie-Bäcklund de dimensión infinita

Nos proponemos demostrar ahora que el grupo de transformaciones de Lie-Bäcklund de invariancia para una ecuación dada es en general finito.

6.1 KdV y su modificada

Consideraremos en primer lugar la familia de ecuaciones

$$u_t + g(u)\, u_x + u_{xxx} = 0 \tag{38}$$

donde g(u) es sólo función de u, con las propiedades de regularidad acostumbradas. Según la proposición 3 del § 3 los generadores de invariancia Lie-Bäcklund ζ de (38) quedan determinados por la ecuación

$$D_t \zeta + g(u)\, D_x \zeta + \frac{\partial g}{\partial u} u_x \zeta + D_x^3 \zeta \doteq 0 \tag{39}$$

Si ζ satisface (39), la transformación infinitesimal $u'(x,t) = u(x,t) + \varepsilon \zeta[x,t,u] + O(\varepsilon^2)$ es de invariancia para la ecuación (38). Sin pérdida de generalidad omitimos la dependencia explícita en (x,t) de modo que todo lo que se diga será válido para funciones ζ de u y sus derivadas respecto a x hasta un orden N. Sobre las soluciones de (38) la ecuación (39) pasa a ser

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\partial \zeta}{\partial u_k} D_x^k (g u_1 + u_3) - \left(\frac{\partial g}{\partial u} u_1 \zeta + g\, D_x \zeta + D_x^3 \zeta \right) = 0 \tag{40}$$

Supuesto N suficientemente grande, como $\zeta \in \mathcal{F}_N$ el miembro de la izquierda de (40) está en $\mathcal{F}_{N+2}$. Por lo tanto dado que (40) ha de anularse idénticamente deducimos

- $$\frac{\partial}{\partial u_{N+2}}(40)=0 \Rightarrow D_x\frac{\partial\zeta}{\partial u_N}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta = k u_N + \zeta'(u, u_1, \dots, u_{N-1}) \tag{41}$$

con k = constante. Calculando ahora $\frac{\partial}{\partial u_{N+1}}$ (40) y recordando la expresión de ζ dada por (41)

$$\frac{\partial}{\partial u_{N+1}}(40)=0 \Rightarrow D_x\frac{\partial\zeta}{\partial u_{N-1}}+D_x^2\frac{\partial\zeta}{\partial u_N}=D_x\frac{\partial\zeta'}{\partial u_{N-1}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta' = k' u_{N-1} + \zeta''(u, u_1, \dots, u_{N-2})$$

k' = constante, de manera que $\zeta = ku_N + k'u_{N-1} + \zeta''(u,u_1,\dots,u_{N-2})$

La aplicación sistemática de este proceso nos conduce sin dificultad a las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial u_N}(40)=0 \Rightarrow D_x\frac{\partial\zeta''}{\partial u_{N-2}}=\frac{N+1}{3}k D_x g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta'' = \left[k''+\frac{N+1}{3}k\, g(u)\right]u_{N-2}+\zeta'''(u,\dots,u_{N-3})$$

(k'' = constante)

$$\frac{\partial}{\partial u_{N-1}}(40)=0 \Rightarrow D_x\frac{\partial\zeta'''}{\partial u_{N-3}}=(k/3)\left[\frac{N(N-1)}{2}-1\right]D_x^2 g+\frac{N-1}{3}k' D_x g$$

con lo que llegamos a la expresión

$$\zeta = k\, u_N + k'\, u_{N-1} + \left[k'' + \frac{N+1}{3}\, k\, g(u)\right] u_{N-2} +$$

$$+ \left[k''' + \frac{N-1}{3}\, k'\, g(u) + \left(\frac{N(N-1)}{6} - \frac{1}{3}\right) k\, D_x g\right] u_{N-3} + \zeta^{IV}(u, \ldots, u_{N-4}) \qquad (42)$$

e podría pensar que el proceso continúa indefinidamente de este mo-
o. Sin embargo, al imponer $\frac{\partial}{\partial u_{N-2}}$ (40) = 0 nos encontramos con una
cuación de la forma

$$3\, D_x \frac{\partial \zeta^{IV}}{\partial u_{N-4}} + D_x P = k\, \frac{N+1}{3}\, \frac{\partial g}{\partial u}\, u_3 + (k''' - k')\, g + \frac{k'}{3}(N-1)\, g^2 \qquad (43)$$

a función P de la ecuación (43) está dada en función de g y sus de-
ivadas. Dado que (43) ha de satisfacerse identicamente en u y deri-
adas, según (13) § 3 II la derivada variacional respecto a u del
iembro de la derecha de (43) ha de ser idénticamente nula, ya que
l miembro de la izquierda es una derivada total respecto a x. Por
onsiguiente

$$(43) \Rightarrow \frac{\delta}{\delta u}\left(k\, \frac{N+1}{3}\, \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u_3 + (k''' - k')\, g + \frac{k'}{3}(N-1)\, g^2\right) = 0$$

esarrollando la derivada variacional de acuerdo con su definición
1) § 1.II obtenemos

$$-k\, \frac{N+1}{3}\left(\frac{\partial^4 g}{\partial u^4}\, u_1^3 + 3\, u_1 u_2\, \frac{\partial^3 g}{\partial u^3}\right) + 2\, \frac{k'(N-1)}{3}\, g\, \frac{\partial g}{\partial u} + (k''' - k')\frac{\partial g}{\partial u} = 0 \qquad (44)$$

n la ecuación (44) hacemos

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(44) = 0 \implies \frac{\partial^3 g}{\partial u^3} = 0$$

de manera que las únicas funciones g(u) para las que ζ puede depender de derivadas de u de un orden arbitrariamente alto son las que son polinomios a lo sumo cuadráticos en u

$$g(u) = a u^2 + b u + c$$

siendo a,b,c constantes arbitrarias. Como consecuencia de (44) también han de ser k' = k''' = 0.

<u>Teorema 1.</u> Dada la ecuación $u_t + g(u)u_x + u_{xxx} = 0$ siendo g(u) una función arbitraria pero suficientemente regular de u, existen generadores de invariancia $\zeta(u,\ldots)$ que dependen de derivadas de un orden arbitrariamente alto de u si y solo si g es un polinomio de orden menor o igual a dos en la variable u. Este resultado nos dice que las únicas ecuaciones independientes de la forma considerada (38) que poseen grupos de invariancia Lie-Bäcklund de dimensión infinita en el sentido de depender de derivadas de un orden arbitrariamente alto son

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_t + u\, u_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

La primera de ellas es una ecuación lineal y como todas las ecuaciones lineales y reales con coeficientes constantes tiene un número infinito de generadores de invariancia Lie-Bäcklund, de hecho

$$\zeta_k = \text{const.}\ u_k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Las otras dos son KdV modificada y KdV, para las que se conocen explícitamente las expresiones de los $\zeta \in \mathcal{F}_N$, $\forall N \geq 0$.

6.2 La ecuación de Schrödinger

Trataremos de contestar una pregunta análoga para las ecuaciones del tipo

$$i\psi_t + \psi_{xx} + g(\psi,\bar{\psi}) = 0 \tag{45}$$

Con otras palabras, determinar qué funciones $g(\psi,\bar{\psi})$ pueden añadirse a la ecuación de Schrödinger libre $i\psi_t + \psi_{xx} = 0$ de manera que aun tengamos un generador $\zeta(\psi,\dots,\psi_N,\bar{\psi},\dots,\bar{\psi}_M)$ de invariancia para (45) con N y M tan grandes como se quiera. El método a seguir es el mismo que ya hemos utilizado en § 8.1. Aunque con algunas dificultades adicionales que provienen del hecho de que en (45) intervienen ahora dos funciones independientes $\psi(x,t)$ y $\bar{\psi}(x,t)$.

Las ecuaciones (45) y (25) nos dicen que si $\zeta(\psi,\dots,\psi_N,\dots\bar{\psi}_M)$ define una transformación de invariancia ha de verificar

$$D_t\zeta \doteq i D_x^2\zeta + i\frac{\partial g}{\partial\psi}\zeta + i\frac{\partial g}{\partial\bar{\psi}}\bar{\zeta} \tag{46}$$

que bajo (45) es

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{\partial\zeta}{\partial\psi_k}(\psi_{k+2} + D_x^k g) - \sum_{k=0}^{M}\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{\psi}_k}(\bar{\psi}_{k+2} + D_x^k\bar{g}) =$$

$$= D_x^2\zeta + \frac{\partial g}{\partial\psi}\zeta + \frac{\partial g}{\partial\bar{\psi}}\bar{\zeta} \tag{47}$$

En (47) es fácil advertir que M ha de ser $\leq$ N-2, de modo que ponemos un $\zeta \in \mathcal{F}_{N,N-2}$ donde el primer índice en $\mathcal{F}$ denota la dependencia en ψ y sus derivadas mientras que el segundo lo hace para las $\bar{\psi}, \bar{\psi}_1, \ldots$

Sobre la ecuación (47) imponemos

$$\frac{\partial}{\partial \psi_{N+1}}(47) = 0 \Rightarrow D_x \frac{\partial \zeta}{\partial \psi_N} = 0 \Rightarrow \zeta = 2k\psi_N + \zeta'(\ldots \psi_{N-1}, \ldots \bar{\psi}_{N-2})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_N}(47) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \zeta'}{\partial \bar{\psi}_{N-2}} = (k-\bar{k})\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}$$

con lo que conseguímos extraer la dependencia de ζ en ψ_N, $\bar{\psi}_{N-2}$

$$\zeta = 2k\psi_N + (k-\bar{k})\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}\bar{\psi}_{N-2} + \zeta''(\ldots \psi_{N-1}, \ldots \bar{\psi}_{N-3}) \qquad (48)$$

Damos otro paso más y hacemos

$$\frac{\partial}{\partial \psi_N}(47) = 0 \Rightarrow D_x \frac{\partial \zeta''}{\partial \psi_{N-1}} = 0 \text{ , } \zeta'' = 2k'\psi_{N-1} + \zeta'''(\ldots \psi_{N-2}, \ldots, \bar{\psi}_{N-3})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{N-1}}(47) = 0 \Rightarrow [k(N-1)+\bar{k}]D_x \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} + (k'-\bar{k}')\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial \zeta'''}{\partial \bar{\psi}_{N-3}}$$

con lo que

$$\zeta''' = \left\{[k(N-1)+\bar{k}]\left(D_x \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}\right) + (k'-\bar{k}')\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}\right\}\bar{\psi}_{N-3} + \zeta^{IV}(\ldots \psi_{N-2}, \ldots \bar{\psi}_{N-4})$$

También tendremos para $\frac{\partial}{\partial \psi_{N-1}}$

$$\frac{\partial}{\partial \psi_{N-1}}(47) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \zeta^{IV}}{\partial \psi_{N-2}} = kN\frac{\partial g}{\partial \psi} + k''$$

Por lo que sabemos hasta el momento

$$\zeta = 2k\psi_N + (k-\bar{k})\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}\,\bar{\psi}_{N-2} +$$

$$+ 2k'\psi_{N-1} + \left\{ [k(N-1)+\bar{k}]\left(D_x \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}\right) + (k'-\bar{k}')\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}} \right\} \bar{\psi}_{N-3} +$$

$$+ \left(k'' + kN\frac{\partial g}{\partial \psi}\right)\psi_{N-2} + \zeta^{v}(\dots \psi_{N-3}, \dots \bar{\psi}_{N-4}) \tag{49}$$

Imponemos sobre (47),

$$\frac{\partial}{\partial \psi_{N-2}}(47)=0 \Rightarrow kN\left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}(\psi_2+g) - \frac{\partial^2 g}{\partial \psi \partial \bar{\psi}}(\bar{\psi}_2+\bar{g}) \right\} +$$

$$+(k-\bar{k})\left(\left|\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}\right|^2 - \frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}}\,\frac{\partial \bar{g}}{\partial \psi} \right) + D_x\left[2(N-1)k'\frac{\partial g}{\partial \psi} + kN(N-2)D_x\frac{\partial g}{\partial \psi} - 2\frac{\partial \zeta^{v}}{\partial \psi_{N-3}} \right] \tag{50}$$

La ecuación (50) consta de dos partes, la primera no es en general una derivada total respecto a x y la segunda sí lo es. Según (13) §3 II: $\frac{\delta}{\delta \psi}(50) = 0$,, $\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}(50) = 0$. A partir de estas dos condiciones, las funciones $g(\psi, \bar{\psi})$ admisibles resultan ser

$$g = h(\bar{\psi})$$

$$g = a|\psi|^2\psi + b\psi + c\left(\psi^2 e^{i\theta} + 2|\psi|^2 e^{-i\theta}\right) + \frac{c^2 e^{-2i\theta}\bar{\psi}^2 + cbe^{-i\theta}\bar{\psi} + n}{a\bar{\psi} + ce^{i\theta}} \tag{51}$$

la función h es arbitraria así como las constantes reales a,b,c, θ, n

A los coeficientes a y b están asociadas las ecuaciones

$$i\psi_t + \psi_{xx} + a|\psi|^2\psi = 0$$

$$i\psi_t + \psi_{xx} + b\psi = 0$$

La función arbitraria $h(\bar{\psi})$ podemos atribuirla al hecho de haber considerado ψ y $\bar{\psi}$ como "variables independientes" de modo que $h(\bar{\psi})$ representa una ecuación del tipo

$$i\psi_t + \psi_{xx} + F(x,t) = 0 \tag{52}$$

sin que esto deba tomarse muy al pie de la letra. Del coeficiente c no sabemos decir gran cosa. Lo cierto es que si nos restringimos a considerar un tipo más particular de funciones $g(\psi, \bar{\psi})$ para evitar situaciones como la de la ecuación (52) tendremos

<u>Teorema 2</u>. Las ecuaciones de la forma

$$i\psi_t + \psi_{xx} - V'(|\psi|^2)\,\psi = 0 \tag{53}$$

solo pueden tener grupos de invariancia Lie-Bãcklund con generadores que dependan de derivadas de un orden arbitrariamente alto (sin dependencia explícita en x,t) cuando $V(|\psi|^2)$ está dada por

$$V(|\psi|^2) = \frac{a}{2}|\psi|^4 + b\,|\psi|^2 + c\,\ln|\psi|^2$$

Para $|\psi|^2$, $|\psi|^2$ sabemos que tales grupos existen. No podemos decir lo mismo para el $\ln|\psi|^2$. Esta función $\ln|\psi|^2$ proviene de la $g = \frac{1}{\psi}$. Además la única $h(\bar{\psi})$ que conduce a una $V'(|\psi|^2)$ es precísamente $1/\bar{\psi}$. El hamiltoniano H del que se puede derivar (53) es el funcional

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(|\psi_x|^2 + V(|\psi|^2) \right)$$

que en nuestro caso toma la forma

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(|\psi_x|^2 + \frac{a}{2} |\psi|^4 + b |\psi|^2 + c \ln |\psi|^2 \right)$$

Apéndice: Análisis Dimensional

Habitualmente suele identificarse el método de similaridad con la aplicación más restringida del grupo de dilataciones a la reducción del número de variables en las ecuaciones en derivadas parciales. Comentaremos brevemente aquí qué tipo de relación existe entre ambos.

El análisis dimensional trata con la invariancia de las ecuaciones bajo los grupos de dilataciones de las unidades fundamentales en las variables y en las constantes físicas. Las soluciones obtenidas mediante el análisis dimensional se denominan soluciones autosimilares del primer tipo. Las soluciones asociadas con grupos de invariancia no involucrados en el análisis dimensional se llaman soluciones autosimilares del segundo tipo.

En un problema físico es común que aparezcan m magnitudes fundamentales con las dimensiones de masa, longitud, tiempo,... que podemos designar por $L_1, L_2, .. L_m$. Si $W_1, W_2, .., W_n$ son n cantidades que expecifican el estado del sistema y se sabe que u es una característica de dicho sistema que depende de las $W_1, W_2, .., W_n$, se trata de encontrar la dependencia funcional

$$u = f(W_1, W_2, \dots, W_n) \tag{A.1}$$

La elección de f viene restringida por el teorema π de Buckingham que está en la base del análisis dimensional [1 , 14].

Teorema π. Bajo las hipótesis

(i) Si Z es una magnitud medible entonces la dimensión de Z es una expresión de la forma

$$\{Z\} = L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2}, \ldots L_m^{\alpha_m}$$

siendo $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ el vector de dimensiones de Z.

(ii) La fórmula (A.1) es cierta en cualquier sistema de unidades.

(iii) u es diferenciable respecto a las $W_1, W_2, \ldots, W_n$

se siguen las siguientes afirmaciones:

a) La fórmula (A.1) para encontrar u puede ser expresada en términos de cantidades sin dimensiones.

b) El número de cantidades sin dimensiones (variables π) es $K + 1 = n + 1 - q$ donde q es el rango de la mx(n+1) matriz de dimensiones B formada por los exponentes de dimensiones de las n+1 cantidades u, $W_1, W_2, \ldots, W_n$. (Es decir, si

$$\{u\} = L_1^{a_1} \ldots L_m^{a_m} \quad , \quad \{W_i\} = L_1^{b_{i1}} \ldots L_m^{b_{im}}$$

la matriz B es

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \\ a_1 & \ldots & a_m \end{pmatrix}$$

c) La fórmula (11) para u puede escribirse como

$$u = G(W_1, \ldots, W_n)\, F(\pi_1, \ldots \pi_k)$$

$$G = W_1^{\beta_1} \ldots W_n^{\beta_n}$$

siendo los $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números reales y

$$\pi_i = W_1^{\gamma_{i_1}} \ldots W_n^{\gamma_{i_n}}, \quad \gamma_{i_1} \ldots \gamma_{i_n},\ 1 \leq i \leq k$$

F es una función arbitraria de las variables $\pi_1, \ldots, \pi_k$ y $\frac{u}{G}$, $\pi_1, \ldots, \pi_k$ no tienen dimensiones.

La demostración del teorema puede encontrarse en [1]. Su inclusión aquí es tan solo a título informativo, ya que puede probarse [1] que si el número de variables que aparecen en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales puede reducirse en r variables por medio del análisis dimensional (que transforma variables y constantes) entonces dicho número de variables puede ser reducido en r por medio de la invariancia de la ecuación en derivadas parciales transformando las variables solo.

No obstante, son abundantes las aplicaciones en la Física del análisis dimensional como puede verse en [14] y [15]. Los casos tratados en [15] van desde los clásicos del movimiento de fluidos hasta los relacionados con la Astrofísica y los fenómenos asociados a procesos explosivos.

El uso práctico del método dimensional puede aclararse con el siguiente ejemplo sencillo [15]. El problema consiste en determinar el peso por unidad de tiempo Q de fluido pesante en regimen laminar que se vierte a través de un triángulo como aparece en la figura. El deslizamiento laminar queda determinado por las magnitudes

ρ - densidad del fluido $[\rho] = M L^{-3}$

g - valor de la aceleración de la gravedad, $[g] = L T^{-2}$

h - altura de la superficie libre del líquido sobre el vértice inferior del triángulo. $[h] = L$

y el parámetro sin dimensiones α (ángulo de abertura).

El peso Q será entonces una función de ρ, g, h para un α dado

La combinación

$$\rho\, g\, h^3 \sqrt{\frac{g}{h}}$$

tiene igualmente las dimensiones de peso por unidad de tiempo y es la única que puede formarse con estas dimensiones, de modo que

$$\frac{Q}{\rho\, g^{3/2} h^{5/2}} = C(\alpha)$$

siendo C(α) una constante sin dimensiones para cada α. Tendremos así la ley

$$Q = C(\alpha)\, \rho\, g^{3/2} h^{5/2}$$

que es la fórmula buscada.

II. METODOS VARIACIONALES

1. Gradiente de un funcional y Cálculo de Variaciones.

Aunque hemos utilizado libremente el nombre de funciones para los objetos de los que se ha hecho un uso constante en el capítulo anterior, nos referimos a los elementos de $\mathcal{F}$ (ver pág 10), no es menos cierto que caen dentro del tipo de objetos denominados funcionales. Los funcionales son aplicaciones de un tipo especial: aquellas que tienen por dominio un cierto espacio de funciones y por recorrido un conjunto numérico. Cuando ese conjunto de números está bien ordenado cabe preguntarse por los extremos del funcional, es decir, sobre que elementos de su dominio de definición alcanza sus valores máximo ó mínimo. Este es el problema central del Cálculo de Variaciones [17,18] .

Dado un funcional W definido en su dominio D(W) $\subset$M donde M es un cierto espacio lineal, bajo las condiciones de regularidad que sea necesario suponer para W, podemos definir un nuevo funcional sobre M de la manera que sigue.

Fijamos un elemento $z \in M$ que se encuentre en el dominio de W y formamos $z+\varepsilon\eta$ para $\eta \in M$ y ε un número real, el funcional

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} W(z+\varepsilon\eta)$$

se denomina la variación (ó variación primera) del funcional W en el punto z y se denota mediante el símbolo $\delta W(z,\eta)$

$$\delta W(z,\eta) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} W(z+\varepsilon\eta)$$

La variación de W en z es un funcional de η. Bajo ciertas restricciones [18] $\delta W(z,\eta)$ es un funcional lineal de η en general no acotado $\forall z \in D(W)$. Supongamos que existe un subdominio denso $N \in D(W)$ sobre el que $\delta W(z,\eta)\big|_{z\in N}$ es un funcional acotado de η. En tal caso, existe un funcional acotado definido por $g(z) \in M$

$$\delta W(z,\eta) = (g(z),\eta) \quad , \quad \forall z \in N$$

donde $(g(z),\eta)$ denota la acción de g(z) sobre η. Establecemos de este modo una correspondencia entre los elementos $z \in N$ y los funcionales sobre M. Si M es un espacio de Hilbert este resultado cae en el marco del $T^{\underline{a}}$ de Riesz[18].

El elemento $g(z) \in M$ recibe el nombre de gradiente de W en z para el que usaremos la notación

$$g(z) = grad\, W(z)$$

Lo dicho hasta ahora podemos resumirlo en la fórmula

$$\delta W(z,\eta) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} W(z+\varepsilon\eta) = (grad W(z), \eta)$$

Consideremos el siguiente ejemplo

Sea una función Φ (x,y,z) definida en R^3 y continua en

$$a \leq x \leq b \quad , \quad -\infty < y < +\infty \quad , \quad -\infty < z < +\infty$$

Supondremos que las derivadas parciales $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ existen y son continuas en el dominio anterior. Pedemos definir el funcional

$$I[u] = \int_a^b \Phi(x, u(x), u'(x))\, dx$$

sobre el dominio

$$D(I) = \{ u(x) : u(x) \in C^1[a,b] \; ; \; u(a) = A \, , \, u(b) = B \}$$

siendo A y B constantes dadas.

Tendremos entonces, sobre las funciones $\eta(x)$: $\eta(a) = \eta(b) = 0$

$$\delta I[u;\eta] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} I[u+\varepsilon\eta] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_a^b \Phi(x, u+\varepsilon\eta, u'+\varepsilon\eta')\,dx =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\eta + \frac{\partial\Phi}{\partial u'}\eta'\right)dx$$

En estas condiciones $\delta I[u;\eta]$ es un funcional lineal de η. Integrando por partes y recordando que $\eta(a)=\eta(b)=0$

$$\delta I[u;\eta] = \int_a^b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\right)\eta\,dx$$

Por lo tanto gradiente de $I[u]$ en el punto x es

$$\operatorname{grad} I[u] = \frac{\partial\Phi}{\partial u}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}(x, u(x), u'(x))$$

De una manera general, sea $F[x,u]\in\mathcal{F}$, formamos

$$I(u) = \int d^n x \quad F[x,u]$$

Si $\eta(x) \equiv (\eta^1(x), \dots, \eta^m(x))$ tendremos como antes

$$\delta I[u;\eta] = \int d^n x \sum_\lambda \left(\operatorname{grad}^\lambda I\right)\eta^\lambda \equiv \int d^n x \operatorname{grad} I[u]\,\eta(x)$$

donde

$$\operatorname{grad} I[u] = \left(\operatorname{grad}^1 I[u], \dots, \operatorname{grad}^m I[u]\right)$$

y

$$\operatorname{grad}^\lambda I[u] = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \frac{\partial F}{\partial u^\lambda_\alpha}[x,u] \quad , \quad \lambda = 1,\dots,m$$

Esto nos lleva a definir el siguiente operador de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$

<u>Definición 1</u>.- La derivada variacional respecto a u de la función $F\in\mathcal{F}$ es el elemento de $\mathcal{F}$ que viene dado por la fórmula

$$\frac{\delta F}{\delta u^\lambda}[x,u] = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \frac{\partial F}{\partial u^\lambda_\alpha} \qquad (1)$$

Recordemos que los extremales de I [u] vienen dados por las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta F}{\delta u^\lambda}[x,u] = 0 \quad , \quad \lambda = 1,\dots,m.$$

2. Derivadas Variacionales generalizadas

Las propiedades de linealidad de los operadores $\frac{\delta}{\delta u^{\wedge}}$ son claras. Sin embargo la regla del producto para las derivadas usuales no es cierta aquí. Recordemos que la razón para definir $\frac{\delta}{\delta u^{\wedge}}$ como lo hacíamos en (1) era la forma del gradiente de un funcional $I[u] = \int \mathcal{F}[x,u]\, d^n x$. Cuando el funcional $I[u]$ es del tipo:

$$I[u] = \int d^n x \;\; \varphi(x) \;\; \mathcal{F}[x,u]$$

donde $\varphi(x)$ es una función densidad, el operador que debemos hacer actuar sobre $\mathcal{F}[x,u]$ para obtener el gradiente $\operatorname{grad} I[u]$ ya no es simplemente $\frac{\delta}{\delta u^{\wedge}}$ como aparece en (1). Tal situación ocurre cuando efectuamos un cambio de variables

$$x_1 = x_1 \;(y_1, \ldots, y_n)$$

$$x_2 = x_2 \;(y_1, \ldots, y_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = x_n \;(y_1, \ldots y_n)$$

Teniendose entoncer para φ el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación. Para decirlo con otras palabras, deseamos caracterizar el operador que en un sistema de coordenadas curvilineas arbitrario nos permite obtener el gradiente del funcional I(u). Procediendo como en el § 1

$$\delta I[u;\eta] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} d^n x \;\; \varphi(x)\, \mathcal{F}[x, u+\varepsilon\eta] = \int \varphi(x)\; d^n x \cdot \operatorname{grad} I[u] \cdot \eta(x)$$

siendo $\operatorname{grad} I[u]$ el gradiente de I(u) respecto al "producto escalar" en el que al elemento de volumen $d^n x$ se le atorga un peso $\varphi(x) d^n x$. Es facil comprobar que entonces

$$\operatorname{grad} I[u] = \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \left(D^{\alpha}\varphi(x)\right) \cdot \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u_{\alpha}}$$

donde $\frac{\delta}{\delta u_\alpha} \equiv \left(\frac{\delta}{\delta u^1_\alpha}, \dots, \frac{\delta}{\delta u^m_\alpha}\right)$,siendo $\frac{\delta}{\delta u^h_\alpha}$, $1 \leq h \leq m$ el operador

que a continuación se define. Además

$$\operatorname{grad} I[u]\Big|_{\varphi(x)=1} = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u}[x,u]$$

Def. 2.- Sobre $\mathcal{F}$ y con las condiciones de regularidad habituales definimos la derivada variacional respecto a u^h_α [19] como el operador diferencial lineal

$$\frac{\delta}{\delta u^h_\alpha} = \sum_{\beta} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha+\beta}{\beta} D^{\beta} \frac{\partial}{\partial u^h_{\alpha+\beta}} \quad , \alpha+\beta = (\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n) \qquad (2)$$

donde

$$\binom{\alpha+\beta}{\beta} = \prod_k \binom{\alpha_k+\beta_k}{\beta_k}$$

Hacemos notar que

$$\frac{\delta}{\delta u^h_\alpha}\Big|_{|\alpha|=0} = \frac{\delta}{\delta u^h}$$

Proposición 1. (Regla del producto). Para $\forall \mathcal{F}, G \in \mathcal{F}$ se verica que

$$\frac{\delta}{\delta u^h}(\mathcal{F}\cdot G) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \left(D^{\alpha}\mathcal{F} \cdot \frac{\delta G}{\delta u^h_\alpha} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^h_\alpha} D^{\alpha} G \right) \qquad (3)$$

Dem.- La definición (1) y la regla de Leibniz nos permiten escribir

$$\frac{\delta}{\delta u^h}(\mathcal{F}\cdot G) = \sum_{\nu} (-1)^{|\nu|} D^{\nu}\left(\mathcal{F}\cdot\frac{\partial G}{\partial u^h_\nu} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^h_\nu} G\right) =$$

$$= \sum_{\nu} (-1)^{|\nu|} \sum_{\alpha \leq \nu} \binom{\nu}{\alpha} \left(D^{\alpha}\mathcal{F} \cdot D^{\nu-\alpha} \frac{\partial G}{\partial u^h_\nu} + D^{\nu-\alpha}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^h_\nu} \cdot D^{\alpha} G \right) =$$

$$= \sum_{\alpha} \left(D^{\alpha}\mathcal{F} \cdot \sum_{\nu \geq \alpha} (-1)^{|\nu|} \binom{\nu}{\alpha} D^{\nu-\alpha} \frac{\partial G}{\partial u^h_\nu} + D^{\alpha} G \sum_{\nu \geq \alpha} (-1)^{|\nu|} \binom{\nu}{\alpha} D^{\nu-\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^h_\nu} \right)$$

cambiando la variable ν por $\lambda = \nu - \alpha$ resulta:

$$\frac{\delta}{\delta u^\nu}(F\cdot G)=\sum_\alpha(-1)^{|\alpha|}\left(D^\alpha F\cdot\sum_\lambda(-1)^{|\lambda|}\binom{\alpha+\lambda}{\lambda}D^\lambda\frac{\partial G}{\partial u^\nu_{\alpha+\lambda}}+D^\alpha G\sum_\lambda(-1)^{|\lambda|}\binom{\alpha+\lambda}{\lambda}D^\lambda\frac{\partial F}{\partial u^\nu_{\alpha+\lambda}}\right)$$

lo que demuestra (3).

La derivada variacional $\frac{\delta}{\delta u^\nu_\alpha}(F\cdot G)$ puede descomponerse de una forma análoga como se ve en la proporción siguiente.

<u>Proposición 2</u>.-

$$\frac{\delta}{\delta u^\nu_\alpha}(F\cdot G)=\sum_\beta(-1)^{|\beta|}\binom{\alpha+\beta}{\beta}\left\{\frac{\delta F}{\delta u^\nu_{\alpha+\beta}}D^\beta G+D^\beta F\cdot\frac{\delta G}{\delta u^\nu_{\alpha+\beta}}\right\}\qquad(4)$$

Dem.- Como la proposición 1.

Los operadores $\frac{\delta}{\delta u^\nu_\alpha}$ juegan un papel dual a los de derivación parcial $\frac{\partial}{\partial u^\nu_\alpha}$ como lo prueba la proposición siguiente.

<u>Proposición 3</u>.-

$$\frac{\partial F}{\partial u^\nu_\alpha}=\sum_\beta\binom{\alpha+\beta}{\beta}D^\beta\frac{\delta F}{\delta u^\nu_{\alpha+\beta}}\qquad(5)$$

Dem.- Desarrollando el segundo miembro de (5) de acuerdo con la definicion (2)

$$\sum_\beta\binom{\alpha+\beta}{\beta}D^\beta\sum_\gamma(-1)^{|\gamma|}\binom{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}D^\gamma\frac{\partial F}{\partial u^\nu_{\alpha+\beta+\gamma}}=$$

$$=\sum_\lambda\left\{\sum_{\gamma\le\lambda}(-1)^{|\gamma|}\binom{\alpha+\lambda-\gamma}{\alpha}\binom{\alpha+\lambda}{\alpha+\lambda-\gamma}\right\}D^\lambda\frac{\partial F}{\partial u^\nu_{\alpha+\lambda}}$$

despues de hacer $\lambda=\beta+\gamma$. Pero

$$\sum_{\gamma\le\lambda}(-1)^{|\gamma|}\binom{\alpha+\lambda-\gamma}{\alpha}\binom{\alpha+\lambda}{\alpha+\lambda-\gamma}=\delta_{\lambda,0}\equiv\prod_k\delta_{\lambda_k,0}$$

donde $\delta_{\lambda 0}$ es el producto de n deltas de Kronecker [19] , lo que finalmente demuestra (5)

Acentuamos aun más la dualidad entre las $\frac{\partial}{\partial u_\alpha}$ y $\frac{\delta}{\delta u_\alpha}$ con la siguiente observación.

Pongamos una sola u(x) (m=1) y consideremos $\mathcal{F}[x,u]$ como un funcional, para el que calculamos su variación $\delta\mathcal{F}[x,u;\eta]$

$$\delta\mathcal{F}[x,u;\eta] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}[x,u+\varepsilon\eta] = \sum_\alpha \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_\alpha} D^\alpha \eta$$

que resulta ser un operador diferencial lineal sobre η. Lo denotamos por $\mathcal{F}'_u \cdot \eta \equiv \delta\mathcal{F}[x,u;\eta]$

Con otra función ξ (x) formemos.

$$(\xi, \mathcal{F}'_u \eta) = \int d^n x \; \xi(x) \, \mathcal{F}'_u \eta(x) = (\tilde{\mathcal{F}}'_u \xi, \eta)$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}'_u$ es el adjunto formal del operador $\mathcal{F}'_u$. Pues bien

$$\tilde{\mathcal{F}}'_u \cdot \xi = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u_\alpha} D^\alpha \xi(x)$$

sin más que tener en cuenta la regla del producto (3). Obtenemos así las fórmulas

$$\mathcal{F}'_u = \sum_\alpha \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_\alpha} D^\alpha$$

$$\tilde{\mathcal{F}}'_u = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u_\alpha} D^\alpha$$

Además de las relaciones del tipo de la (5) con las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha}$, los operadores $\frac{\delta}{\delta u^\lambda_\alpha}$ actuan de una forma característica sobre los operadores D^β de derivación total, como se desprenderá del próximo corolario.

Proposición 4.-

$$\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha} D^\beta = \sum_\gamma \binom{\beta}{\gamma} D^{\beta-\gamma} \frac{\partial}{\partial u^\lambda_{\alpha-\gamma}} \qquad (6)$$

Demostración.- Se comprueba fácilmente [20] que los operadores de Lie-Bäcklund X_ζ del capítulo I conmutan con D^β.

$$X_\zeta D^\beta = D^\beta X_\zeta \quad , \quad X_\zeta = \sum_\alpha (D^\alpha \zeta^\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha}$$

por consiguiente

$$\sum_\alpha (D^\alpha \zeta^\lambda) \frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha} D^\beta \mathcal{E} = D^\beta \sum_\alpha (D^\alpha \zeta^\lambda) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u^\lambda_\alpha} = \sum_{\alpha,\nu} \binom{\beta}{\nu} (D^{\alpha+\nu} \zeta^\lambda) \cdot D^{\beta-\nu} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u^\lambda_\alpha}$$

Comparando los coeficientes de $D^\alpha \zeta^\lambda$ y teniendo en cuenta que las $\zeta^1, \ldots, \zeta^m$ son funciones arbitrarias se sigue (6).

Corolario

$$\frac{\delta}{\delta u^\lambda_\alpha} D^\beta = \frac{\delta}{\delta u^\lambda_{\alpha-\beta}} \qquad (7)$$

La fórmula (7) simplifica extraordinariamente el cálculo de las expresiones con $\frac{\delta}{\delta u^\lambda_\alpha}$ y operadores de derivación D^β.

A la hora de estudiar teoremas del tipo del Ta de Noether y otras cuestiones conexas es útil expresar un operador de Lie-Bäcklund $X_\zeta = \sum_\alpha (D^\alpha \zeta^\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha}$ en función de los operadores $\frac{\delta}{\delta u^\lambda_\alpha}$. Tal cosa es posible desde el momento en que podemos hacer uso de la proposición 3

Proposición 5.- Sobre $\mathcal{F}$

$$X_\zeta = \sum_\alpha D^\alpha \left(\zeta^\lambda \frac{\delta}{\delta u^\lambda_\alpha} \right) , \; \forall \zeta^1, \ldots, \zeta^m ; \; \zeta^\lambda \in \mathcal{F}, 1 \leq \lambda \leq m \quad (8)$$

Demostración.- Desarrollar el segundo miembro de (8) de acuerdo con la regla de Leibniz y utilizar la fórmula (5)

Para establecer el último de los resultados que incluimos en esta sección necesitamos el siguiente lema.

Lema 1 (T^{a} Fundamental del Cálculo)

$$\mathcal{F}[x,u] = \mathcal{F}[x,0] + \int_0^1 \frac{d\mathcal{F}}{d\tau}[x,\tau u]\cdot d\tau \quad , \quad \forall \mathcal{F} \in \mathscr{F} \qquad (9)$$

$$\mathcal{F}[x,\tau u] = \mathcal{F}(x,\tau u^1_\alpha,\dots,\tau u^n_\alpha)$$

Proposición 6 [19] . Para $\forall \mathcal{F} \in \mathscr{F}$

$$\mathcal{F}[x,u] = \mathcal{F}[x,0] + \sum_\alpha D^\alpha \int_\gamma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta v^\lambda_\alpha}\, dv^\lambda \qquad (10)$$

siendo γ la curva $t \xrightarrow{\gamma} [x, tu]$, $0 \leq t \leq 1$

Dem.- Segun (9)

$$\mathcal{F}[x,u] = \mathcal{F}[x,0] + \int_0^1 \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\lambda_\alpha}[x,\tau u]\cdot u^\lambda_\alpha \, d\tau =$$

$$= \mathcal{F}[x,0] + \sum_\alpha \int_0^1 D^\alpha\left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^\lambda_\alpha}[x,\tau u]\cdot u^\lambda\right) d\tau = \mathcal{F}[x,0] + \sum_\alpha D^\alpha \int_\gamma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta v^\lambda_\alpha}\, dv^\lambda$$

Corolario.- $\forall \mathcal{F} \in \mathscr{F}$ Se puede escribir como

$$\mathcal{F}[x,u] = \sum_\alpha D^\alpha G_\alpha[x,u] \, , \quad G_\alpha \in \mathscr{F} \qquad (11)$$

Podemos añadir que la descomposición (11) no es única.

Las proposiciones anteriores constituyen las reglas de cálculo para operar con los símbolos $\frac{\partial}{\partial u^\lambda_\alpha}$, $\frac{\delta}{\delta u^\lambda}$, D^α.

3. Núcleo y recorrido del operador

La caracterización del $\mathrm{Ran}\,\frac{\delta}{\delta \vec{u}}$ y la inclusión en el $\mathrm{ker}\,\frac{\delta}{\delta \vec{u}}$ del rango de la divergencia, por lo que a nosotros nos consta se trata por primera vez en [17] y las referencias dadas allí.

El teorema standard afirma [17 , 21] .

$$\mathcal{F}[x,u] \in Ran \frac{\delta}{\delta u} \Longleftrightarrow \mathcal{F}'_u[u] \quad \text{formalmente autoadjunto.}$$

Tratamos aquí algunos aspectos nuevos del problema. Además daremos la solución del sistema.

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^\lambda} = G^\lambda[x,u] \quad , \quad \lambda = 1,\dots,m. \tag{12}$$

en $\mathscr{F}$. Al caracterizar las soluciones $\mathcal{F}$ del sistema (12) estamos en condiciones de decir cuando un sistema de ecuaciones es lagrangiano (las propiedades de los sistemas lagrangianos que los hacen particularmente importantes se discutirán en el próximo capítulo).

Comenzamos estudiando el núcleo de los operadores $\frac{\delta}{\delta u^\lambda}$.

<u>Proposición 7.</u> [19] . Sobre $\mathscr{F}$ es

$$\ker \frac{\delta}{\delta \vec{u}} = Ran\ \vec{D} \tag{13}$$

donde

$$\ker \frac{\delta}{\delta \vec{u}} = \left\{ \mathcal{F} \in \mathscr{F} : \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^\lambda} = 0 \ , \ \lambda = 1,\dots,m \right\} \tag{14}$$

$$Ran\ \vec{D} = \left\{ \mathcal{F} \in \mathscr{F} : \exists\ A^1,\dots,A^n \in \mathscr{F} \wedge \mathcal{F} = D_k A^k \right\} \tag{15}$$

Demostración.-

En primer lugar, $\forall \mathcal{F}[x,u] \in \mathscr{F}$ es cierto que $\mathcal{F}[x,0] \in Ran\ \vec{D}$ porque

$$\mathcal{F}[x,0] = D_1 \int_0^{x_1} \mathcal{F}[y, x_2,\dots,x_n, 0]\, dy$$

de manera que si $\mathcal{F} \in \ker \frac{\delta}{\delta \vec{u}}$ según la proporción 6. $\mathcal{F} \in Ran\ \vec{D}$

Por otra parte para $\forall \mathcal{F} \in Ran \vec{D}$ se encuentra a partir del corolario a la proposición 4 que $\mathcal{F} \in ker \frac{\delta}{\delta \vec{u}}$

<u>Corolario</u>. $\mathcal{F} \in ker \frac{\delta}{\delta u^a}$, a fijo $1 \leq a \leq m \Leftrightarrow \mathcal{F} = \vec{D} \cdot \vec{\Lambda} + G(x, u^1_\alpha \ldots \hat{u}^a_\alpha, \ldots u^m_\alpha)$

(En el G no aparecen ni u^a ni sus derivadas).

Dada una colección de funciones $G^1, G^2, \ldots, G^m$ nos preguntamos cúando existe una $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ tal que $\vec{G} = \frac{\delta}{\delta \vec{u}} \mathcal{F}$. En tal caso se dice que el conjunto de funciones G admite un "potencial" F [17] .

<u>Proposición 8</u>.-

$$\vec{G} \in Ran \frac{\delta}{\delta \vec{u}} \Leftrightarrow \vec{G}[x,u] = \frac{\delta}{\delta \vec{u}} \int_\gamma G^\lambda[x,v] \, dv^\lambda \qquad (16)$$

<u>Demostración</u>: Por hipótesis, $\exists \mathcal{F} \in \mathcal{F} : \vec{G} = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \vec{u}}$. Segun la proposición 6.

$$\mathcal{F}[x,u] = \mathcal{F}[x,0] + \int_\gamma G^\lambda[x,v] \, dv^\lambda + \vec{D} \cdot \vec{A}[x,u] \qquad (17)$$

donde

$$\vec{D} \vec{A}[x,u] = \sum_{|\alpha| \geq 1} D^\alpha \int_\gamma \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta v^\lambda_\alpha} dv^\lambda$$

La acción del operador $\frac{\delta}{\delta \vec{u}} \equiv \left(\frac{\delta}{\delta u^1}, \ldots, \frac{\delta}{\delta u^m}\right)$ sobre (17) nos proporciona

$$\vec{G}[x,u] = \frac{\delta}{\delta \vec{u}} \int_\gamma G^\lambda[x,v] \, dv^\lambda$$

que es lo que queríamos probar

$\Leftarrow$):
Evidente.

La proposición 8 ofrece un criterío para decidir cuando un sistema de ecuaciones $\Omega^\lambda[x,u] = 0$, $\lambda = 1, \ldots, m$

es derivable de un lagrangiano $\mathcal{L}[x,u] \in \mathcal{F}$. En efecto, la condición necesaria y suficiente es que las funciones $\Omega^\lambda[x,u] \in \mathcal{F}$ cumplan el conjunto de condiciones

$$\Omega^{\lambda}[x,u] = \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} \int_{\gamma} \Omega^{s}[x,v]\, dv^{s}\ , \quad \lambda=1,\dots,m$$

En breve, indicaremos cómo se construye $\mathcal{L}[x,u]$ a partir de la colección $\Omega^{1},\dots,\Omega^{m}$ lo que resuelve el llamado problema inverso del Cálculo de Variaciones. Indicamos antes otro criterio útil para caracterizar el $\operatorname{Ran}\frac{\delta}{\delta \vec{u}}$. Haremos uso del siguiente lema

Lema 2.- Dada la colección de funciones $\gamma^{1}(x),\dots,\gamma^{m}(x)$ sobre $\mathcal{F}$

$$X_{\gamma} \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} = \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} X_{\gamma} \qquad (18)$$

siendo $X_{\gamma} = \sum_{\alpha} (D^{\alpha}\gamma^{s}) \frac{\partial}{\partial u^{s}_{\alpha}}$ el operador de Lie-Bäcklund asociado a $(\gamma^{1},\dots,\gamma^{m})$

Demostración.- Como comentábamos en (6)

$$[X_{\gamma}\ ,\ D^{\alpha}] = 0$$

Por otra parte

$$X_{\gamma} \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\beta}} = \sum_{\alpha} (D^{\alpha}\gamma^{s}) \frac{\partial}{\partial u^{s}_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\beta}} = \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\beta}} X_{\gamma}$$

debido a que $\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\beta}} D^{\alpha}\gamma^{s} = 0$ Es claro entonces que

$$X_{\gamma} \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} = X_{\gamma} \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\alpha}} = \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} X_{\gamma}$$

lo que prueba el lema.

Proposición 9.- [20]

$$(-1)^{|\alpha|} \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}_{\alpha}} \frac{\delta}{\delta u^{s}} F = \frac{\partial}{\partial u^{s}_{\alpha}} \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} F\ ,\ \forall F \in \mathcal{F},\ \lambda, s \geq 0 \qquad (19)$$

Demostración.- Según el lema anterior, para $\gamma^{1},\dots,\gamma^{m}$, $F \in \mathcal{F}$ arbitrarias

$$X_{\gamma} \frac{\delta F}{\delta u^{\lambda}} = \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} X_{\gamma} F = \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} \left(\gamma^{s} \frac{\delta F}{\delta u^{s}} \right) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} (D^{\alpha}\gamma^{s}) \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}_{\alpha}} \frac{\delta F}{\delta u^{s}}$$

después de utilizar la proposición 7 y la regla del producto (3) - de la proposición 1.

Tenemos entonces, por la fórmula anterior:

$$\sum_{\alpha}(D^{\alpha}\gamma^{s})\frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^{s}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u^{\lambda}}=\sum_{\alpha}\left((-1)^{|\alpha|}\frac{\delta}{\delta u_{\alpha}^{\lambda}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta u^{s}}\right)(D^{\alpha}\gamma^{s})$$

y la arbitrariedad de las funciones $\gamma^{1},\dots,\gamma^{m}$ confirma (19).

<u>Corolario</u>. Sean $G^{1}[x,u],\dots,G^{m}[x,u]\in\mathcal{F}$

$$\vec{G}\in Ran\frac{\delta}{\delta\vec{u}}\iff\frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^{\lambda}}G^{s}=(-1)^{|\alpha|}\frac{\delta}{\delta u_{\alpha}^{s}}G^{\lambda}$$

$\Rightarrow$:Evidente por la proposición anterior

$\Leftarrow$:Calculemos $\frac{\delta}{\delta u^{\lambda}}\int_{\gamma}G^{s}[x,v]\,dv^{s}=\frac{\delta}{\delta u^{\lambda}}\left(u^{s}\int_{0}^{1}G^{s}[x,\tau u]\,d\tau\right)=$

$$=\int_{0}^{1}G^{\lambda}[x,\tau u]\,d\tau+\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}u_{\alpha}^{s}\frac{\delta}{\delta u_{\alpha}^{\lambda}}\int_{0}^{1}G^{s}[x,\tau u]\,d\tau$$

después de usar la regla del producto (3).

Por otro lado cualquier $G^{\lambda}\in\mathcal{F}$ suficientemente regular se descompone en suma de partes homogéneas respecto a las u_{α}^{s} en el sentido siguiente:

$$G^{\lambda}[x,u]=\sum_{N\geq 0}G_{N}^{\lambda}[x,u]\quad,\quad G_{N}^{\lambda}[x,\tau u]=\tau^{N}G_{N}^{\lambda}[x,u]$$

Podemos escribir entonces:

$$\frac{\delta}{\delta u^{\lambda}}\int_{\gamma}G^{s}[x,v]\,dv^{s}=\sum_{N}\int_{0}^{1}G_{N}^{\lambda}[x,\tau u]\,d\tau+\sum_{\alpha,N}(-1)^{|\alpha|}u_{\alpha}^{s}\frac{\delta}{\delta u_{\alpha}^{\lambda}}\int_{0}^{1}G_{N}^{s}[x,\tau u]\,d\tau=$$

$$=\sum_{N}\left(\frac{1}{N+1}G_{N}^{\lambda}[x,u]+\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}u_{\alpha}^{s}\frac{1}{N+1}\frac{\delta}{\delta u_{\alpha}^{\lambda}}G_{N}^{s}[x,u]\right)$$

Es claro además que para cada G_N $\frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^{\lambda}}G_{N}^{s}=(-1)^{|\alpha|}\frac{\delta}{\delta u_{\alpha}^{s}}G_{N}^{\lambda}$ si así sucede para G^{s}, $s=1,\dots,m$. Concluimos de lo anterior que

$$\frac{\delta}{\delta u^r}\int_\Gamma G^s[x,v^s]\,dv^s = \sum_N \frac{1}{N+1}\left(G_N^r + \sum_\alpha u_\alpha^s \frac{\partial}{\partial u_\alpha^s} G_N^r[x,u]\right) =$$

$$= \sum_N \frac{1}{N+1}\left(G_N^r + N G_N^r\right) = G^r[x,u]$$

después de aplicar el Tª. de Euler de las funciones homogéneas Según la proposición 8 el corolario queda demostrado.

Una vez caracterizados $\ker \frac{\delta}{\delta \vec{u}}$ y $\operatorname{Ran} \frac{\delta}{\delta \vec{u}}$ podemos resolver nuestro problema inicial, el sistema de ecuaciones (12).

<u>Proposición 10</u>.- [19] Dadas las funciones $G^1, \ldots, G^m$ y la colección de n funciones arbitrarias $A=(A^1, \ldots A^n)$, siempre que $\vec{G} \in \operatorname{Ran} \frac{\delta}{\delta \vec{u}}$, el sistema $\frac{\delta F}{\delta u^r} = G^r[x,u]$, $r = 1, \ldots, m$.

admite por solución general las funciones de la forma

$$F[x,u] = \int_\Gamma G^r[x,v]\,dv^r + \vec{D}\cdot\vec{A}[x,u] \qquad (20)$$

<u>Demostración</u>.-

$$\forall F \in \mathcal{F} \quad : \quad F[x,\vec{u}] = \int_\Gamma \frac{\delta F}{\delta v^r}\,dv^r + \vec{D}\cdot\vec{R}$$

De acuerdo con la proposición 8, la fórmula (20) es la solución buscada.

4.- <u>Algunos Problemas variacionales</u>.

Nos proponemos ilustrar ahora con algunos ejemplos el alcance y las limitaciones de los métodos de cálculo desarrollados en las secciones precedentes.

Comenzamos con un problema puramente técnico.

4.1 .- El núcleo del operador $\frac{\delta}{\delta u_1}$

Por razones de sencillez nos restringimos a considerar una sóla función u(x) de una variable independiente x. Nuestra pregunta es si podemos caracterizar el conjunto:

$$\ker \frac{\delta}{\delta u_1} = \left\{ F \in \mathcal{F} : \frac{\delta F}{\delta u_1} = 0 \right\} \quad , \quad \frac{\delta}{\delta u_1} = \sum_j (-1)^j (j+1) D^j \frac{\partial}{\partial u_{j+1}}$$

para lo cual nos vemos obligados a considerar las siguiente proposición previa.

Proposición 11.-

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\delta}{\delta u_\ell} = \sum_j \binom{k+j}{j} \frac{\delta}{\delta u_{k+j}} \frac{\delta}{\delta u_{\ell-j}} \quad , \; k,\ell = 0,1,\dots \qquad (21)$$

$$(-1)^k \frac{\delta}{\delta u_k} \frac{\delta}{\delta u_\ell} = \sum_j \binom{k+j}{j} \frac{\partial}{\partial u_{k+j}} \frac{\delta}{\delta u_{\ell-j}} \quad , \; k,\ell = 0,1,\dots \qquad (22)$$

Demostración.-

Sea $\gamma(x)$ una función arbitraria de x sólo y $F(x,u) \in \mathcal{F}$ según (3)

$$\frac{\delta}{\delta u}(\gamma F) = \sum_\ell (-1)^\ell \gamma_\ell \frac{\delta F}{\delta u_\ell} \quad ; \quad \gamma_\ell(x) \equiv D_x^\ell \gamma(x)$$

por lo tanto

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\delta}{\delta u}(\gamma F) = \sum_\ell (-1)^\ell \gamma_\ell (-1)^k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\delta F}{\delta u_\ell}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (19)

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\delta}{\delta u}(\gamma F) = \frac{\delta}{\delta u_k} \frac{\delta}{\delta u}(\gamma F) = \sum_\ell (-1)^\ell \frac{\delta}{\delta u_k}\left(\gamma_\ell \frac{\delta F}{\delta u_\ell}\right) =$$

$$= \sum_{\ell,j} (-1)^{\ell+j} \binom{k+j}{j} \gamma_{\ell+j} \frac{\delta}{\delta u_{k+j}} \frac{\delta F}{\delta u_\ell}$$

comparando las dos expresiones $(-1)^k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\delta}{\delta u}(\gamma F)$ se obtiene (21). La fórmula (22) se sigue de la (21)

Definamos ahora los operadores:

$$\mathcal{R}_k \equiv (-1)^k \frac{\delta}{\delta u_k} - \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad k=0,1,\dots \qquad (23)$$

Estos operadores tienen la propiedad de aniquilar cualquier función de la forma $\frac{\delta F}{\delta u}$ de hecho (proposición 9).

$$\mathrm{Ran}\,\frac{\delta}{\delta u} = \bigcap_k \mathrm{ker}\,\mathcal{R}_k$$

Proposición 12.-

$$\mathrm{ker}\,\frac{\delta}{\delta u_1} = \left\{ F[x,u] : F = A(x,u) + D_x^2 B[x,u] \;/\!/\; A \in \mathcal{F}_0, \; B \in \mathcal{F} \right\}$$

Demostración.

Si $F[x,u]$ es de la forma propuesta se comprueba facilmente que $F \in \mathrm{ker}\,\frac{\delta}{\delta u_1}$

Supongamos F tal que

$$\frac{\delta F}{\delta u_1} = 0$$

entonces, por (22)

$$\mathcal{R}_k \frac{\delta F}{\delta u_1} = (k+1)\frac{\partial}{\partial u_{k+1}} \frac{\delta F}{\delta u} = 0 \quad , \quad k=0,1,2,\dots$$

La solución a este sistema de ecuaciones se escribe

$$\frac{\delta F}{\delta u} = G(x,u) \;, \quad G(x,u) \in \mathcal{F}_0 \quad \text{arbitraria}$$

observamos que $\forall G(x,u) \in \mathcal{F}_0 : G \in \mathrm{Ran}\,\frac{\delta}{\delta u}$ y por lo tanto

$$F[x,u] = \int_0^u G(x,\lambda)\, d\lambda + D_x C[x,u] \;, \quad C \in \mathcal{F} \qquad (24)$$

con C(x,u) arbitraria. Hasta ahora hemos visto

$$\frac{\delta F}{\delta u_1} = 0 \implies F = \int_0^u G(x,\lambda)\, d\lambda + D_x C$$

Para determinar que funciones de la forma (24) están en el núcleo de $\frac{\delta}{\delta u_1}$, aplicamos $\frac{\delta}{\delta u_1}$ en ambos miembros de (24)

$$0 = \frac{\delta}{\delta u_1} D_x C = \frac{\delta C}{\delta u}$$

La solución de la ecuación $\frac{\delta C}{\delta u} = 0$ sabemos que es $C = D_x \Omega$ llamando $A(x,u) = \int_0^u G(x,\lambda)d\lambda$ queda demostrada la proposición 12.

4.2.- Sistemas hamiltonianos. Problema de los momentos.

Cuando un sistema de ecuaciones deriva de un lagrangiano, pueden extraerse nuevas propiedades del sistema si se sabe escribir en forma hamiltoniana siempre que ello sea posible. El problema más elemental se plantea con lagrangianos que dependen de derivadas primeras a lo sumo de las funciones que intervienen en dicho lagrangiano. Trataremos aquí el caso general para lagrangianos $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ restringiéndonos a una función u(x) de una sola variable independiente x

A $\mathcal{L}[x,u] = \mathcal{L}(x,u,u_1,\ldots)$ está asociada la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u}[x,u] = 0 \qquad (25)$$

Si $\mathcal{L}[x,u] \in \mathcal{F}_N$ la ecuación (25) es de orden 2N. Como se sabe [22] , una ecuación diferencial ordinaria arbitraria de orden p es equivalente a un sistema de p ecuaciones diferenciales de primer orden con p funciones incógnitas, basta hacer.

$$u_1 = v^1,\ u_2 = v^2, \ldots,\ u_{p-1} = v^{p-1}$$

Aún cuando se ha conseguido así un sistema de ecuaciones de primer orden, el nuevo sistema no conservará por lo general en las nuevas variables la propiedad de ser lagrangiano si así lo era el sistema de partida. Los sistemas hamiltonianos reunen ambas propiedades: son sistemas de primer orden y admiten un lagrangiano. Estas dos caracteristicas les confieren propiedades superiores a los sistemas simplemente lagrangianos [23] .

El interés por conseguir un hamiltoniano en un problema en el que aparecen derivadas de un orden arbitrariamente alto es mayor que el puramente académico. Muy recientemente [24] se han encontrado sistemas de este tipo con la propiedad de ser sistemas completamente integrables, lo que los hace particularmente importantes.

En primer lugar establecemos la ley de conservación de la energia para la ecuación (25).

<u>Proposición 13</u>.- La ecuación (25) admite la integral primera

$$H[u] = \sum_k D_x^k\left(u_1 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}}\right) - \mathcal{L} \tag{26}$$

si $\partial\mathcal{L}/\partial x = 0$

<u>Demostración</u>.-

Por definición de la derivada total respecto a x

$$D_x \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k} u_{k+1}$$

Reescribiendo el segundo término con la ayuda de la proposición 5.

$$D_x \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} u_1 + \sum_{k \geq 1} D_x^k\left(u_1 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_k}\right)$$

entonces

$$D_x \left\{ \sum_k D_x^k\left(u_1 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}}\right) - \mathcal{L} \right\} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} u_1 \doteq -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

como queríamos probar.

Hacemos notar, que segun la definición (26) si $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_N \Rightarrow H \in \mathcal{F}_{2N-1}$ como corresponde a las integrales primeras de la ecuación (25), ya que $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \in \mathcal{F}_{2N}$

La función H[u] es por definición el hamiltoniano del sistema.

Estudiemos ahora la variación de H[u] a lo largo de una curva con parámetro τ : $\tau \to u + \tau\, v(x) + O(\tau^2)$

$$\delta H[u,v] = X_v\, H[u] = \sum_{\ell \geq 0} (D_x^\ell v) \frac{\partial H}{\partial u_\ell} = \sum_k D_x^k X_v \left(u_1 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}}\right) - X_v \mathcal{L} =$$

$$= \sum_k D_x^k \left\{ D_x v \cdot \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} + u_1 X_v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} \right\} - v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} - \sum_k D_x^{k+1}\left(v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}}\right)$$

de acuerdo con (8). Obtenemos así la expresión.

$$\delta H[u,v] = -v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + \sum_k D_x^k \left\{ (D_x v) \cdot \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} + u_1 X_v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} - (D_x v) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} - v D_x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} \right\}$$

$$= -v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + \sum_k D_x^k \left\{ u_1 X_v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} - v D_x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} \right\} =$$

$$= -v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + \sum_{k,\ell} \left\{ u_{\ell+1} X_v \left(\binom{k}{\ell} D_x^{k-\ell} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} \right) - v_\ell\, D_x \left(\binom{k}{\ell} D_x^{k-\ell} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} \right) \right\}$$

Definamos

$$p^\ell[u] = \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} D_x^{k-\ell} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} \qquad (27)$$

Introduciendo las cantidades $p^\ell[u]$

$$\delta H[u,v] = -v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + \sum_\ell \left\{ (D_x u_\ell) \cdot X_v\, p^\ell[u] - (X_v u_\ell)\, D_x p^\ell \right\} =$$

$$= -v \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + \sum_\ell \left[(D_x u_\ell) \cdot \delta p^\ell[u,v] - (D_x p^\ell) \cdot \delta u_\ell[v] \right]$$

<u>Proposición 14.</u>- El sistema de 2N ecuaciones de primer orden en las variables (u, u_1, u_2, ..., u_{N-1}, p, p^1, ..., p^{N-1})

$$D_x u_\ell = \frac{\partial H}{\partial p^\ell} \quad , \quad D_x p^\ell = -\frac{\partial H}{\partial u_\ell}$$

es equivalente a la ecuación (25), siempre que (27) defina (u_N, u_{N+1}, ..., u_{2N-1}) en función de $(p, p^1, \dots, p^{N-1})$

Demostración.- Basta observar la relación obtenida.

$$\delta H[u,v] = -v\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} + \sum_k \left[(D_x u_k)\cdot \delta\mu^k(v) - (D_x\mu^k)\cdot \delta u_k(v)\right]$$

Volvemos ahora sobre los $\mu^\ell[u]$ definidos por (27) para demostrar que coinciden con los momentos introducidos ad hoc por otros autores [25, 26] defindos como.

$$\mu^\ell = \sum_k (-1)^k D^k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{\ell+k+1}}$$

Segun (27) y la definición (2) de derivada variacional generalizada.

$$\mu^\ell = \sum_{\substack{k\geq \ell\\ m\geq 0}} \binom{k}{\ell}(-1)^m \binom{k+m+1}{m} D^{k+m-\ell}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{k+m+1}} =$$

$$= \sum_{j\geq 0}\left[\sum_{k+m=j+\ell} (-1)^m \binom{k}{\ell}\binom{k+m+1}{m}\right] D^j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{j+\ell+1}}$$

Probaremos a continuación que

$$\sum_{\substack{k+m=j+\ell\\ k,m\geq 0}} (-1)^m \binom{k}{\ell}\binom{k+m+1}{m} = (-1)^j$$

tal fin utilizamos la serie formal

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$$

de donde se deduce derivando respecto a z en ambos miembros la igualdad

$$\frac{1}{(1-z)^{\ell+1}} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+\ell}{\ell} z^n$$

Por otra parte, la fórmula del binomio de Newton nos permite escribir

$$(1-z)^{j+\ell+1} = \sum_{m\leq j+\ell+1} (-1)^m \binom{j+\ell+1}{m} z^m$$

Multiplicando miembro a miembro ambas expresiones

$$(1-z)^j = \sum_{n\geq 0}\ \sum_{m\leq n+\ell} (-1)^m \binom{n+\ell-m}{\ell}\binom{j+\ell+1}{m} z^n$$

de donde deducimos, volviendo a utilizar la fórmula del binomio para $(1-z)^j$ e identificando los coeficientes de las potencias de z que

$$\sum_{m\leq n+\ell} (-1)^m \binom{n+\ell-m}{\ell}\binom{j+\ell+1}{m} = (-1)^n \binom{j}{n}$$

Haciendo ahora n=j tendremos

$$\sum_{m\leq j+\ell} (-1)^m \binom{j+\ell-m}{\ell}\binom{j+\ell+1}{m} = (-1)^j$$

finalmente escribiendo $j+\ell-m=k$ queda probada nuestra afirmación. Por lo tanto.

$$p^\ell = \sum_{k\geq \ell}\binom{k}{\ell} D_x^{k-\ell}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_{k+1}} = \sum_{j\geq 0}(-1)^j D_x^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\ell+j+1}}$$

Como decíamos al comienzo de la sección, en base al caracter hamiltoniano de un cierto sistema de ecuaciones puede probarse que es completamente integrable. Los momentos p^ℓ son las cantidades a utilizar en el marco de los métodos hamiltonianos cuando sean aplicable a un sistema de ecuaciones diferenciales.

III. DENSIDADES CONSERVADAS

1. Introducción

El estudio de las llamadas leyes de conservación de un sistema de ecuaciones diferenciales viene motivado por el papel central que juegan dichas cantidades en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y muy especialmente en la dinámica de los puntos materiales. En efecto, conocer un número suficiente de tales leyes supone resolver el sistema o decidir si es ó no completamente integrable [16,27].

Las razones que podemos aducir para justificar su importancia en los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales son de índole más variada y quizá no tan concluyentes como la ya citada para las ecuaciones ordinarias, pero en cualquier caso existen y son de peso. Entre otras cabe citar:

1. La posibilidad de extender a la Teoría de Campos conceptos como los de energía, momento, momento angular ... [28].

2. Posibilidad de probar teoremas de existencia y unicidad cuando se conocen algunas de estas leyes [29].

3. Sirven para caracterizar soluciones.

4. Existe la sospecha, ante cierto número de ejemplos concretos,de que en determinadas ecuaciones en derivadas parciales, el teorema de integrabilidad completa de los sistemas ordinarios [27] sea aplicable casi literalmente.

En los últimos diez años se han venido encontrando ecuaciones no lineales con un número infinito de leyes de conservación. Acerca de este fenómeno no existe hoy en día una justificación satisfactoria.

Sin embargo, sí es posible determinar sistemáticamente todas [30] las leyes de conservación de un sistema de ecuaciones como se verá más adelante.

En el presente capítulo nos ocuparemos de algunos aspectos de este problema que a nuestro juicio tienden a presentar en su justa medida las dificultades subyacentes.

Comenzaremos situando el problema en el marco de los sistemas normales [22] , requisito este sin el que bien poco puede hacerse y sin embargo cuando se le tiene en cuenta es mucho lo que se avanza.

Por lo que a nosotros nos concierne, es la propiedad de los ceros la de mayor utilidad de las que presentan estos sistemas normales, aparte de que los teoremas de existencia y unicidad, solo factibles en este caso, ya los hacen ser especialmente importantes

El resto del capítulo se sigue ya, sin más problemas técnicos, de las propiedades relacionadas con los sistemas normales y el cálculo formal de variaciones esbozado en el capítulo anterior. En particular la caracterización que hemos llevado a cabo de los conjuntos $\mathrm{Ker}\,\frac{\delta}{\delta u}$ y $\mathrm{Ran}\,\frac{\delta}{\delta u}$ resultará esencial en lo que sigue, sin olvidar tampoco las propiedades de las derivadas variacionales generalizadas de las que tanto nos servimos.

No estará de más una última puntualización sobre algo que no debe pasar inadvertido. Se trata de la restricción que nos imponemos al considerar solo el espacio $\mathcal{F}$, que no pensamos que sea de gran importancia pero que no debemos olvidarla. En todo lo que llevamos dicho y en lo que diremos,las dependencias funcionales se suponen extendidas a las derivadas sucesivas de una o varias funciones, lo que venimos denotando por el paréntesis cuadrado $[x,u]$. Están excluidas, por ejemplo, las primitivas de la función u así como otras combinaciones de primitivas y derivadas. El que no las hayamos tenido en cuenta no es dejadez por nuestra parte, más bien se trata de que deslucen el aspecto sencillo que tienen nuestras fórmulas sin que tengamos noticia de que puedan utilizarse de una manera sistemática para los fines que nos proponemos.

2. Sistemas normales y teorema de los ceros

Como ya hemos indicado, para tratar rigurosamente el problema de caracterizar las leyes de conservación de un sistema de ecuaciones diferenciales nos vemos obligados a restringir el tipo de sistemas a estudiar mediante una hipótesis de tipo técnico que se verifica de cualquier forma en todos los casos de interés en Física. A partir de ahora tendremos necesidad de distinguir una variable (el tiempo t) frente a las restantes (las variables espaciales $x = (x_1,\dots,x_n)$). Los convenios de notación por lo que a las variables x se refiere serán los mismos que los utilizados hasta aquí cuando las considerábamos a ellas solas, introduciendo las derivadas temporales mediante un subíndice especial, es decir que pondremos

$$u^r_{k,\alpha} = \frac{\partial^k}{\partial t^k} u^r_\alpha \ , \quad \bar{\alpha} = (k;\alpha_1,\dots,\alpha_n) \ , \quad D^{\bar{\alpha}} = D_t^k D^\alpha , \dots$$

Supongamos el sistema de e.d.p. $\Omega^r[x,t,u] = 0$, $r = 1,\dots,m$.

Definición 1.- El sistema anterior es normal [22] si es de la forma

$$\Omega^r \equiv \frac{\partial^{n(r)}}{\partial t^{n(r)}} u^r - \omega^r(x,t,u^1_\alpha,\dots,u^m_\alpha, u^1_{t,\alpha},\dots,u^m_{t,\alpha}, u^1_{tt,\alpha},\dots) \ , \quad 1 \leq r \leq m \qquad (1)$$

donde para cada r en lo que a las derivadas temporales de u se refiere, solo las $\frac{\partial^p}{\partial t^p} u^r_\alpha$, $p < n(r)$ aparecen dentro de las $\omega^1[x,t,u] \dots \omega^m[x,t,u]$. Con otras palabras, la restricción es que la derivada $\frac{\partial^{n(r)}}{\partial t^{n(r)}} u^r$ sea la derivada temporal de u^r de mayor orden de las que se encuentran en el sistema y esté separada y despejada.

El interés de los sistemas normales para nuestras aplicaciones se manifiesta en el siguiente ejemplo.

Supongamos el sistema de evolución definido por m funciones

$\omega^{\lambda}[x,t,u]$ en las que no se encuentran derivadas temporales de las $u^1,\dots,u^m$. Entonces

$$\Omega^{\lambda} \equiv u_t^{\lambda} - \omega^{\lambda}[x,t,u] = 0 \;, \quad \lambda = 1,\dots,m \tag{2}$$

es claramente un sistema normal. Como todos los n(r) = 1 dentro de las $\omega^{\lambda}[x,t,u]$ no deben aparecer derivadas temporales de las $u^1,\dots$ $\dots u^m$. Entonces las derivadas temporales de las $u^1_{\alpha},\dots,u^m_{\alpha}$ se "despejan" en función de derivadas espaciales solo. En efecto, a partir de (2)

$$u^{\lambda}_{t,\alpha} = D^{\alpha}\omega^{\lambda} + D^{\alpha}\Omega^{\lambda}$$

$$u^{\lambda}_{tt,\alpha} = D^{\alpha}\left[\frac{\partial\omega^{\lambda}}{\partial u^s_{\beta}} D^{\beta}\omega^s + \frac{\partial\omega^{\lambda}}{\partial t}\right] + D_t D^{\beta}\Omega^{\lambda} + D^{\alpha}\left(\frac{\partial\omega^{\lambda}}{\partial u^s_{\beta}} D^{\beta}\Omega^s\right)$$

....
....

Por otra parte, todo sistema normal (1) podemos convertirlo en un sistema de evolución introduciendo nuevas funciones incógnitas, de modo que este resultado es válido en el caso general de los sistemas de la forma (1).

Otra consecuencia importante del caracter normal de un s.e.d.p reside en lo siguiente. Consideremos una función $F[x,t,u] \in \mathcal{F}$ en la que entran derivadas respecto a t de las funciones $u^1,\dots,u^m$ de un orden arbitrario. Si se interpretan las ecuaciones (1) como las fórmulas que definen m "nuevas" variables $\Omega^1,\dots,\Omega^m$ tendremos también paralelamente una expresión para F de la forma

$$F[x,t,u] = \hat{F}[x,t|u|\Omega] \tag{3}$$

donde ahora la letra u denota solo las derivadas espaciales.

Definición 2.- Dada una función $\mathcal{F} \in \mathscr{F}$, diremos que se anula sobre las soluciones del sistema (1) si

$$\hat{\mathcal{F}}[x,t|u|0] = 0$$

En tal caso escribiremos, también $\mathcal{F}[x,t,u] \doteq 0$.

Proposición 1.- (Teorema de los ceros). Dado el sistema normal (1) y $\mathcal{F} \in \mathscr{F}$, entonces:

$$\mathcal{F}[x,t,u] \doteq 0 \iff \hat{\mathcal{F}}[x,t|u|\Omega] = \sum_{\bar{\alpha}} a^{\lambda}_{\bar{\alpha}}[x,t,u]\, D^{\bar{\alpha}}\Omega^{\lambda} \tag{4}$$

Demostración:

$\Longrightarrow$): Dado que por hipótesis el sistema es normal

$$\mathcal{F}[x,t,u] = \hat{\mathcal{F}}[x,t|u|\Omega]$$

El lema 1 del § 2.II nos permite escribir

$$\hat{\mathcal{F}}[x,t|u|\Omega] = \hat{\mathcal{F}}[x,t|u|0] + \sum_{\bar{\alpha}} \Omega^{\lambda}_{\bar{\alpha}} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Omega^{\lambda}_{\bar{\alpha}}}[x\,t|u|\tau\Omega]\cdot d\tau \;,\; \Omega^{\lambda}_{\bar{\alpha}} \equiv D^{\bar{\alpha}}\Omega^{\lambda}$$

Si $\hat{\mathcal{F}}[x,t|u|0] = 0$ la implicación hacia la derecha en (4) queda demostrada.

$\Longleftarrow$): Evidente.

• Pasemos ya al problema de las leyes de conservación de un sistema normal.

3. Leyes de conservación

Empezaremos definiendo con precisión lo que entenderemos por ley de conservación (l.c.) de un s.e.d.p., dando a continuación el método de cálculo que sistemáticamente permite obtener las l.c. de un sistema dado, que sobreentendemos normal

Definición 3.- Dado el conjunto de funciones $A^0, A^1, \dots, A^n \in \mathcal{F}$ diremos que forma una ley de conservación para el sistema $\Omega^\wedge[x,u]=0$ si

$$D_t A^0 + \vec{D}\cdot\vec{A} \doteq 0 \quad , \quad \vec{A} = (A^1,\dots,A^n) \tag{5}$$

En tal caso A^0 se denomina densidad conservada y $\vec{A}$ densidad de corriente conservada. Un conjunto $(A^0, \vec{A})$ tal que $D_t A^0 + \vec{D}\cdot\vec{A} \equiv 0$ es una ley de conservación trivial.

El primer problema que plantea la definición anterior es el de caracterizar las corrientes conservadas (c.c.) por un sistema.

La definición 3 y la proposición 1 nos permiten asociar a cada c.c. un conjunto de cantidades $a^\wedge_{\bar{\alpha}}[x,u]$ tales que

$$D_t A^0 + \vec{D}\cdot\vec{A} = \sum_{\bar{\alpha}} a^\wedge_{\bar{\alpha}}[x,u]\,\Omega^\wedge_{\bar{\alpha}} \tag{6}$$

La identidad establecida en el § 3 II, a saber $\ker \frac{\delta}{\delta\vec{u}} = \mathrm{Ran}(D_t,\vec{D})$ tiene como consecuencia:

Proposición 2.- Las c.c. por un sistema $\Omega^{\lambda}[x,u]=0$, $\lambda=1,\dots,m$ están determinadas por las soluciones $a^{s}_{\bar\alpha}[x,u]$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{\delta}{\delta u^{\lambda}}\sum_{\bar\alpha}\left(a^{s}_{\bar\alpha}[x,u]\cdot D^{\bar\alpha}\Omega^{s}\right)=0 \quad , \ \lambda=1,\dots,m \tag{7}$$

Las ecuaciones (7) se resuelven por el mismo procedimiento usado al caracterizar los generadores de invariancia Lie-Bäcklund en el capítulo I. Aunque pronto veremos que es posible establecer criterios más sencillos que el de la fórmula (7). Tengamos en cuenta que la fórmula (6) puede siempre reescribirse de la siguiente manera

$$D_t A^{\circ}+\vec{D}\cdot\vec{A}=a^{\lambda}\,\Omega^{\lambda}+D_t B^{\circ}+\vec{D}\cdot\vec{B} \tag{8}$$

después de aplicar integración por partes en el miembro de la derecha de (6). Entonces a toda corriente de la forma (6) le podemos asociar unívocamente otra del tipo

$$D_t\left(A^{\circ}-B^{\circ}\right)+\vec{D}\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=a^{\lambda}[x,u]\cdot\Omega^{\lambda} \tag{9}$$

Además, toda corriente de la forma (9) está trivialmente incluida en la forma general (6). Diremos que $\left(A^{\circ}-B^{\circ},\vec{A}-\vec{B}\right)$ es equivalente a $(A^{\circ},\vec{A})$

Proposición 3.- En el sistema $\Omega^{\lambda}[x,u]=0$, $\lambda=1,\dots,m$, toda c.c. es equivalente a una corriente de la forma

$$D_t A^{\circ}+\vec{D}\cdot\vec{A}=a^{\lambda}[x,u]\cdot\Omega^{\lambda} \tag{10}$$

En consecuencia, las c.c. están determinadas por las soluciones $a^\lambda[x,u]$ del sistema

$$\frac{\delta}{\delta u^s}\left(a^\lambda[x,u]\cdot\Omega^\lambda\right) = 0 \tag{11}$$

Las corrientes de la forma (10) se llaman de primera clase [31]. Las cantidades $a^\lambda[x,u]$, $\lambda = 1,\dots,m$ se denominan características de la c.c. (A^o, $\vec{A}$).

Concluimos que en un sistema normal todas las corrientes conservadas son equivalentes a una de primera clase y vienen determinadas por sus características.

Una vez halladas las $a^\lambda[x,u]$, $\lambda = 1,\dots,m$ la construcción de la corriente propiamente dicha no presenta dificultades desde que tenemos a nuestra disposición la fórmula (10) § 2.II.

Procederemos seguidamente a utilizar la otra propiedad mencionada más arriba de los sistemas normales que aun no hemos tenido en cuenta, la de ser equivalentes a un sistema de ecuaciones de evolución. En los sistemas de evolución podemos dar una forma más acabada a la ecuación que caracteriza las corrientes conservadas por estos sistemas.

4. Densidades conservadas en ecuaciones de evolución

Consideremos un sistema normal puesto ya como sistema de evolución, esto es

$$\Omega^{\lambda} = u^{\lambda}_{t} - \omega^{\lambda}[x, t, u] = 0 \ , \ \lambda = 1, \ldots, m \tag{12}$$

Como ya se advirtió a continuación de la definición 1 en las ω^{λ} no aparecen derivadas temporales de la función u(x,t).

Lo verdaderamente importante de las ecuaciones (12) es que podemos eliminar las derivadas respecto a una variable, por supuesto la t, a la hora de determinar las leyes de conservación y restringirnos a considerar solo las derivadas espaciales de las funciones $u^1, \ldots, u^m$. Ello es consecuencia de que sobre las soluciones de (12) las corrientes conservadas por (12) pueden escribirse en función solo de las derivadas espaciales en virtud del procedimiento de eliminación que comentamos a renglón seguido de la definición 1. Más precisamente

<u>Proposición 4</u>.- Toda corriente conservada por (12) es equivalente a una c.c. independiente de las variables Ω^{λ} y de sus derivadas $\Omega^{\lambda}_{\underline{\alpha}}$

Demostración:

Por ser (12) normal, si $(A^{\circ}[x, t, u] \ , \ \vec{A}[x, t, u])$ es una c.c. se puede escribir de la forma $(\hat{A}^{\circ}[x, t | u | \Omega] \ , \ \hat{\vec{A}}[x, t | u | \Omega])$ donde ahora u denota solo derivadas espaciales. Puesto que (A°, $\vec{A}$) es una c.c. por un s.n. la podemos suponer de primera clase

$$D_t A^0 + \vec{D}\cdot\vec{A} = \sum_{r=1}^{m} a^r \Omega^r$$

Desarrollando $\left(\hat{A}^0[x,t|u|\Omega],\ \hat{\vec{A}}[x,t|u|\Omega]\right)$ en la variable Ω (como lo hacíamos en la demostración de la proposición 1),

$$D_t \hat{A}^0[x,t|u|0] + \vec{D}\cdot\hat{\vec{A}}[x,t|u|0] \doteq 0 \qquad (13)$$

donde no escribimos la dependencia en Ω por abreviar.

La proposición anterior nos dice que las c.c. no triviales (y módulo éstas, claro está) se pueden escribir para el sistema (12) en función de x,t y las derivadas espaciales de las funciones u.

Una vez que hemos conseguido eliminar la dependencia en las derivadas temporales en las corrientes conservadas por (12) procedemos a establecer un criterio que hace referencia a las funciones $\omega^r[x,t,u]$ solo.

La condición necesaria y suficiente (13) para que $(A^0, \vec{A})$ sea conservada podemos escribirla como

$$\frac{\partial \hat{A}^0}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \hat{A}^0}{\partial u^r_\alpha} D^\alpha \omega^r + \vec{D}\cdot\hat{\vec{A}} = 0 \qquad (14)$$

después de utilizar (12). Nótese que (14) es una ecuación en la que solo aparecen derivadas de tipo espacial de las $u^1,\dots,u^m$ y que ya no precisa de la ecuación (12) para satisfacerse. En orden a que $(\hat{A}^0, \hat{\vec{A}})$ sea c.c. basta según (14) con que la derivada total con respecto al tiempo de $\hat{A}^0$ sea igual a una divergencia espacial. Por lo tanto, caracterizar las c.c. de (12) es lo mismo que determinar las d.c. de la forma $\hat{A}^{\circ}[x,t|u|0]$ a las que denotaremos a partir de ahora por $\rho[x,t,u]$

<u>Proposición 5</u>.- $\rho[x,t,u]$ es una d.c. por la ecuación (12) si y solo si

$$\frac{\delta}{\delta u^{\lambda}}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+X_{\omega}\,\rho\right)=0\ ,\quad \lambda=1,\dots,m \tag{15}$$

donde

$$X_{\omega}=\sum_{\alpha}\left(D^{\alpha}\omega^{\lambda}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\alpha}}$$

Demostración:

Si ρ es una d.c. tiene lugar una ecuación como la (14), el criterio (13) § 3 II acerca del $\ker\frac{\delta}{\delta\vec{u}}$ implica (15). Si ρ satisface (15)

$$D_t\,\rho\doteq\frac{\partial\rho}{\partial t}+X_{\omega}\,\rho=\vec{D}\cdot\vec{J}$$

por la misma razón que antes.

La fórmula práctica para calcular las d.c. ρ nos la ofrece el siguiente corolario:

<u>Corolario</u>.- ρ d.c. por (12) si y solo si

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\rho}{\delta u^{\lambda}}+\frac{\delta}{\delta u^{\lambda}}\left(\omega^{s}\frac{\delta\rho}{\delta u^{s}}\right)=0 \tag{16}$$

Observamos en la fórmula (16) que las cantidades relevantes a la hora de saber si una ρ es una d.c. por un sistema de evolución son las derivadas variacionales de la función ρ respecto a las u^r, $r = 1,\dots,m$ a las que denotaremos por $\gamma^r[x,t,u] = \frac{\delta\rho}{\delta u^r}$. Los gradientes γ^r determinan ρ salvo una divergencia espacial que resulta inesencial a la vista de (15) ya que sobre ρ pesa siempre la indeterminación trivial en una divergencia espacial.

Damos a continuación las ecuaciones que deben satisfacer los gradientes de las d.c. por el sistema (12).

<u>Proposición 6</u>.- Los gradientes del sistema (12) satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + X_\omega\right)\gamma^r + \vec{Z}_{rs}\,\gamma^s = 0\ , \quad r = 1,\dots,m. \tag{17}$$

Donde los $\vec{Z}_{rs}$ son los "elementos de matriz" del operador diferencial

$$\vec{Z} = \left(\sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\frac{\delta\omega^s}{\delta u^r_\alpha}D^\alpha\right)$$

Demostración:

Calculando $\frac{\delta}{\delta u^r}\left(\omega^s\frac{\delta\rho}{\delta u^s}\right)$ con la ayuda de la regla del producto (3) § 2 II

$$\frac{\delta}{\delta u^r}\left(\omega^s\frac{\delta\rho}{\delta u^s}\right) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\frac{\delta\omega^s}{\delta u^r_\alpha}D^\alpha\frac{\delta\rho}{\delta u^s} + \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\left(D^\alpha\omega^s\right)\frac{\delta}{\delta u^r_\alpha}\frac{\delta\rho}{\delta u^s} =$$

$$= \tilde{Z}_{\lambda s}\, \gamma^{s} + \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} (D^{\alpha}\omega^{s}) \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}_{\alpha}} \frac{\delta \rho}{\delta u^{s}}$$

pero de acuerdo con (19) § 3 II

$$(-1)^{|\alpha|} \frac{\delta}{\delta u^{\lambda}_{\alpha}} \frac{\delta \rho}{\delta u^{s}} = \frac{\partial}{\partial u^{s}_{\alpha}} \frac{\delta \rho}{\delta u^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial u^{s}_{\alpha}} \gamma^{\lambda}$$

entonces

$$\frac{\delta}{\delta u^{\lambda}} \left(\omega^{s} \frac{\delta \rho}{\delta u^{s}} \right) = \tilde{Z}_{\lambda s}\, \gamma^{s} + \sum_{\alpha} (D^{\alpha}\omega^{s}) \frac{\partial}{\partial u^{s}_{\alpha}} \gamma^{\lambda}$$

lo que demuestra (17).

Observamos que $\tilde{Z}$ es el adjunto formal [18] del operador diferencial

$$Z = \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \omega^{\lambda}}{\partial u^{s}_{\alpha}} D^{\alpha} \right)$$

y que éste a su vez actúa como

$$Z_{\lambda s}\, \zeta^{s} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \omega^{\lambda}}{\partial u^{s}_{\alpha}} D^{\alpha} \zeta^{s} = X_{\zeta}\, \omega^{\lambda} \quad , \quad \zeta^{\lambda} \in \mathcal{F}$$

fórmula que pone de manifiesto el papel dual de los operadores Z y X_{ζ} como ya comentábamos en el capítulo II.

La ecuación (17) de la proposición 6 caracteriza los gradientes de las d.c. por nuestro sistema (12). Un análisis más cuidadoso de las cantidades γ^{λ} nos va a permitir poner de manifiesto la conexión que existe entre estas funciones y las características $a^{\lambda}[x,u]$ de las c.c. por la ecuación (12).

Como dijimos antes, en un sistema de evolución todo lo que necesitamos para conocer todas sus c.c. son las correspondientes densidades conservadas. Veremos a continuación que los gradientes $\gamma^{\lambda} = \frac{\delta \rho}{\delta u^{\lambda}}$ son las características de una c.c. por las ecuaciones (12) que tiene a ρ por d.c. . En efecto, dada ρ tendremos

$$D_t \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial u^{\lambda}_{\alpha}} D^{\alpha} u^{\lambda}_{t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + X_{\omega} \rho + X_{\Omega} \rho$$

donde

$$X_{\Omega} = \sum_{\alpha} (D^{\alpha} \Omega^{\lambda}) \cdot \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}_{\alpha}}$$

Ahora bien, ρ d.c. $\Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + X_{\omega} \rho = \vec{D} \cdot \vec{J}$ lo que nos permite escribir

$$D_t \rho = \vec{D} (\vec{J} + \vec{B}) + \gamma^{\lambda} \Omega^{\lambda} \tag{18}$$

fórmula que prueba nuestra afirmación acerca de las características de las c.c. por (12). La fórmula (18) tiene algunas consecuencias curiosas sobre las características de las c.c. por los sistemas de evolución. Vemos que todas las c.c. son de primera clase, que todas las características son gradientes y que la asociación entre c.c. y sus características es uno a uno. Además las características son función tan solo de x,t y de las derivadas espaciales de las $u^1, \dots, u^m$.

El trabajo llevado a cabo en este apartado creemos que nos permite afirmar la falsedad del siguiente comentario [11] por lo que a las c.c. se refiere:

> "... Thus the more immediate object of interest becomes the symmetry groups... The advantage of this point of view is that the symmetry groups can be systematically found, as in Theorem 1, in contrast to the ad hoc methods used to discover conservation laws".

Enfatizamos el paralelismo entre las ecuaciones (17) que caracterizan los gradientes de las densidades conservadas y las que han de utilizarse cuando se trata de las invariancias de la ecuación. Hablando un tanto libremente ambos sistemas son "adjuntos". A continuación discutimos sistemas de ecuaciones en los que este paralelismo se acentúa aun más.

5. Teorema de Noether

Cuando la forma del sistema normal $\mathcal{Q}^{\nu}[x, u]=0$, $\nu=1,\dots,m$ puede asociarse con la acción de alguno de los operadores que conocemos bien, los $\frac{\delta}{\delta\vec{u}}$, $\vec{D}, \cdots$ es factible añadir algunas propiedades nuevas a las ya estudiadas para los factores integrantes y las leyes de conservación en general.

Sin lugar a dudas, los sistemas lagrangianos reunen las propiedades más interesantes en lo que concierne a leyes de conservación y simetrías. Como se verá, el papel que desempeña el operador $\frac{\delta}{\delta\vec{u}}$ es crucial. En la Física provienen las ecuaciones lagrangianas de un principio de mínimo para el funcional

$$S = \int d^n x \ \mathcal{L}[x, u]$$

La función $\mathcal{L}[x,u] \in \mathcal{F}$ se denomina lagrangiana. Para funciones $\eta^\lambda[x,u]$ que se anulen en los extremos de integración

$$S[u + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2)] = S[u] + \varepsilon \int d^n x \ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\lambda} \eta^\lambda + O(\varepsilon^2)$$

de modo que una condición necesaria para que S tenga un extremal en un punto $[x, u]$ son las ecuaciones

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\lambda}[x,u] = 0 \quad , \quad \lambda = 1, \dots, m. \tag{19}$$

Los sistemas lagrangianos resultan particularmente interesantes porque su forma está dada con una sola función: el lagrangiano $\mathcal{L}$. Son las propiedades de esta única función las que nos van a permitir caracterizar las c.c. por el sistema (19). Nos restringimos como siempre a sistemas normales.

Teorema 1.

El conjunto de funciones $\zeta^1[x,u], \dots, \zeta^m[x,u] \in \mathcal{F}$ forma la característica (§ 3) de alguna ley de conservación del sistema (19) si y solo si

$$X_\zeta \mathcal{L} = \vec{D} \cdot \vec{C} \tag{20}$$

En tal caso, X_ζ es un grupo de Noether de $\mathcal{L}$.

Demostración:

$\Longrightarrow$): Por hipótesis, $\frac{\delta}{\delta u^r}\left(\zeta^s\cdot\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^s}\right)=0$

La fórmula (8) § 2 II nos permite escribir

$$\frac{\delta}{\delta u^r}\left(\zeta^s\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^s}\right)=\frac{\delta}{\delta u^r}X_\zeta\mathcal{L}-\frac{\delta}{\delta u^s}\sum_{|\alpha|\geq 1}\left(D^\alpha\zeta^s\cdot\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^s_\alpha}\right)=\frac{\delta}{\delta u^r}X_\zeta\mathcal{L}$$

por lo tanto $X_\zeta\mathcal{L}\in\ker\frac{\delta}{\delta\vec{u}}$

$\Longleftarrow$): Argumento similar.

Nos detendremos un momento para comentar el alcance y las limitaciones del teorema anterior.

En primer lugar observamos que con la anterior definición de grupo de Noether y supuesto el caracter normal para el sistema (19), existe según el Teorema 1 una correspondencia biunívoca entre l.c. y grupos de invariancia Noether. Esta correspondencia es posible porque hemos ampliado los grupos a estudiar desde los grupos de Lie puros a los grupos de Lie-Bäcklund. Esta es la razón de que no estén presentes las funciones ξ que mueven las coordenadas x como es habitual en la formulación clásica del Teorema de Noether [32,33].

Aún más. En los últimos años [34,35] se encuentran con frecuencia pretendidas mejoras y puestas a punto del Teorema de Noether a costa de introducir funciones auxiliares, acompañando a los generadores de invariancia, que han de anularse sobre las soluciones y otros extraños requerimientos [35]. Creemos que el teorema anterior hace superfluas tantas complicaciones. La razón de tantos nuevos teoremas de Noether parece ser la de proporcionar un método de cálculo de las leyes de conservación, pues según el comentario que incluíamos al final del § 4 de este capítulo, no parecen ser del dominio público las ecuaciones que determinan las l.c. de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Y es precisamente en este terreno donde el Teorema de Noether no añade nada nuevo, no proporciona un método de cálculo, porque en último término caracterizar los grupos de Noether es tan difícil como hacer lo propio con las leyes de conservación y según nuestros resultados del § 4 lo más facil para calcular estas leyes es el método de las densidades conservadas poniendo el sistema normal en la forma de un sistema de evolución. Si además, como es el caso, el sistema es lagrangiano, por un procedimiento similar al esbozado en el § 4.2 II podemos pasar a un sistema hamiltoniano. En los sistemas hamiltonianos tiene lugar una nueva relación entre las propiedades de invariancia de las ecuaciones y los gradientes de las leyes de conservación como veremos en breve.

El segundo paso, una vez formulado el Teorema 1, consiste en relacionar el grupo de Noether de $\mathcal{L}$ con el grupo de invariancia de las ecuaciones $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^r}[x,u] = 0$ asociado a ese lagrangiano.

Lema.- Sobre $\mathcal{F}$

$$\left[\frac{\delta}{\delta u^r}, X_\zeta\right] = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{\delta \zeta^s}{\delta u^r_\alpha} D^\alpha \frac{\delta}{\delta u^s}, \quad \forall (\zeta^1, \dots, \zeta^m) \in \mathcal{F} \qquad (21)$$
$$r = 1, \dots, m.$$

Demostración:

De (8) § 2 II

$$\frac{\delta}{\delta u^\lambda} X_\zeta = \frac{\delta}{\delta u^\lambda}\left(\zeta^s \frac{\delta}{\delta u^s}\right) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \zeta^s) \frac{\delta}{\delta u^\lambda_\alpha} \frac{\delta}{\delta u^s} + \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{\delta \zeta^s}{\delta u^\lambda_\alpha} D^\alpha \frac{\delta}{\delta u^s}$$

Aplicando ahora (19) § 3 II se llega a la fórmula (21).

Con el lema anterior estamos en condiciones de dar una demostración rigurosa del siguiente teorema:

Teorema 2.- Los grupos de Noether de $\mathcal{L}$ son grupos de invariancia de las ecuaciones de Euler-Lagrange (19) asociadas a $\mathcal{L}$.

Demostración:

De acuerdo con (21),

$$\frac{\delta}{\delta u^\lambda} X_\zeta \mathcal{L} = X_\zeta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\lambda} + \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \frac{\delta \zeta^s}{\delta u^\lambda_\alpha} D^\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^s}$$

Si $X_\zeta \mathcal{L} = \vec{D}\cdot\vec{C}$ (grupo de Noether), $\frac{\delta}{\delta u^\lambda} X_\zeta \mathcal{L} = 0$, entonces

$$X_\zeta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\lambda} \doteq 0$$

Haremos notar que el inverso del Teorema 2 en general no es cierto

$$\frac{\delta}{\delta u^\lambda} X_\zeta \mathcal{L} \doteq 0 \not\Rightarrow X_\zeta \mathcal{L} = \vec{D}\cdot\vec{C}$$

lo que habitualmente se suele resumir diciendo que existen grupos de invariancia de las ecuaciones que no dejan invariantes al lagrangiano. Lo veremos con un contraejemplo. Tomamos

$$\mathcal{L} = \frac{u_x^2}{2} + \frac{u^3}{3}$$

La ecuación de Euler-Lagrange correspondiente es

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = u_{xx} - u^2 = 0$$

Esta ecuación es invariante bajo el grupo de dilataciones

$$x \to \lambda^{-1/2} x$$
$$u \to \lambda \; u$$

que tiene por generador $\zeta = u + \frac{1}{2} x u_x$. Comprobamos que efectivamente es de invariancia para la ecuación $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0$

$$-X_\zeta \delta\mathcal{L}/\delta u = 2\,(u_{xx} - u^2) + \frac{x}{2}\, D_x\,(u_{xx} - u^2) =$$

$$= 2\,\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + \frac{x}{2}\, D_x\, \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \doteq 0$$

Pero no es un grupo de Noether para $\mathcal{L}$

$$X_\zeta\, \mathcal{L} = 5/4\,(u_x^2 + 2/3\, u^3) + D_x(\cdot)$$

y $\frac{\delta}{\delta u}\left(u_x^2 + \frac{2}{3}\, u^3\right) \neq 0$

6. Densidades conservadas en los sistemas Hamiltonianos

Cuando el lagrangiano es una función de la forma

$$\mathcal{L}[x,u] = u_t^{1'}\, v^1 - \mathcal{H}[x,u,v] \tag{22}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan ser

$$-\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^{r}} = v^{r}_{t} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^{r}} = 0$$

$$r = 1, \dots, m.$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta v^{r}} = u^{r}_{t} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^{r}} = 0$$

Las funciones $v^{r}(x,t)$, $r=1,\dots,m$ son otras m funciones en pie de igualdad con las u^r. La función $\mathcal{H}[x,u,v]$, el hamiltoniano, la supondremos independiente de t y de las derivadas temporales de las u y v. Las ecuaciones (23) son lagrangianas y además son también ecuaciones de evolución. Todo lo dicho hasta aquí para ambos tipos de ecuaciones les resulta aplicable. Pero además podemos relacionar de una manera sencilla propiedades de invariancia de la ecuación (23) con las d.c. cosa no inmediatamente factible a la luz del ejemplo anterior.

Teorema 3.- Para el sistema (23)

$$\rho \text{ d.c.} \Longleftrightarrow \Lambda(\rho) \equiv \left(-\frac{\delta \rho}{\delta v^{1}}, \dots, -\frac{\delta \rho}{\delta v^{m}}, \frac{\delta \rho}{\delta u^{1}}, \dots, \frac{\delta \rho}{\delta u^{m}} \right)$$

son los generadores de un grupo de invariancia de Lie-Bäcklund de las ecuaciones (23) de la forma

$$u'^{r} = u^{r} - \varepsilon \frac{\delta \rho}{\delta v^{r}} + O(\varepsilon^{2})$$

$$v'^{r} = v^{r} + \varepsilon \frac{\delta \rho}{\delta u^{r}} + O(\varepsilon^{2})$$

Demostración:

Observemos la siguiente identidad que se desprende de la regla del producto (3) § 2 II y de la fórmula (19) § 3 II

$$\frac{\delta}{\delta u^r}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\delta \rho}{\delta u^s}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^s} - \frac{\delta \rho}{\delta v^s}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^s}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta \rho}{\delta u^r} + \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\left[\left(\frac{\delta}{\delta u^r_\alpha}\frac{\delta \rho}{\delta u^s}\right) D^\alpha \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^s} + \left(D^\alpha \frac{\delta \rho}{\delta u^s}\right)\frac{\delta}{\delta u^r}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^s} - \left(\frac{\delta}{\delta u^r_\alpha}\frac{\delta \rho}{\delta v^s}\right) D^\alpha \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^s} -\right.$$

$$\left. - \left(D^\alpha \frac{\delta \rho}{\delta v^s}\right)\frac{\delta}{\delta u^r_\alpha}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^s}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta \rho}{\delta u^r} + \sum_\alpha \left[\left(\frac{\partial}{\partial u^s_\alpha}\frac{\delta \rho}{\delta u^r}\right) D^\alpha \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^s} + \left(D^\alpha \frac{\delta \rho}{\delta u^s}\right)\frac{\partial}{\partial v^s_\alpha}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^r} - \left(\frac{\partial}{\partial v^s_\alpha}\frac{\delta \rho}{\delta u^r}\right) D^\alpha \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^s} -\right.$$

$$\left. - \left(D^\alpha \frac{\delta \rho}{\delta v^s}\right)\frac{\partial}{\partial u^s_\alpha}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^r_\alpha}\right] \doteq$$

$$\doteq D_t \frac{\delta \rho}{\delta u^r} + \sum_\alpha \left[\left(D^\alpha\left(-\frac{\delta \rho}{\delta v^s}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^s_\alpha}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^r} + \left(D^\alpha \frac{\delta \rho}{\delta u^s}\right)\frac{\partial}{\partial v^s_\alpha}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^r}\right] \equiv$$

$$D_t \frac{\delta \rho}{\delta u^r} + X_{\Lambda(\rho)}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^r}$$

y otra análoga cuando calculamos la $\frac{\delta}{\delta v^r}$.

Por lo tanto, si ρ es una d.c.

$$D_t \frac{\delta \rho}{\delta u^r} + X_{\Lambda(\rho)}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^r} \doteq 0$$

$$D_t \frac{\delta \rho}{\delta v^r} + X_{\Lambda(\rho)}\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^r} \doteq 0$$

un más. Si $\Lambda(\rho) = \left(-\frac{\delta \rho}{\delta v^1}, \dots, -\frac{\delta \rho}{\delta v^m}, \frac{\delta \rho}{\delta u^1}, \dots, \frac{\delta \rho}{\delta u^m}\right)$ es un generador de invariancia para las ecuaciones (23), según la identidad que acabamos de establecer y otra paralela que no escribimos

$$\frac{\delta}{\delta u^r}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\delta \rho}{\delta u^s}\,\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^s}-\frac{\delta \rho}{\delta v^s}\,\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^s}\right)\doteq 0$$

$$\frac{\delta}{\delta v^r}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\delta \rho}{\delta u^s}\,\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v^s}-\frac{\delta \rho}{\delta v^s}\,\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^s}\right)\doteq 0$$

Notemos que si bien en principio estas derivadas variacionales se anulan solo sobre las ecuaciones (23), han de hacerlo idénticamente puesto que el miembro de la izquierda no contiene derivadas respecto al tiempo de las funciones $u^1 \ldots u^m$ ni de las $v^1, \ldots, v^m$.

El teorema anterior aparece enunciado en [36], sin embargo la demostración que lo acompaña en dicha referencia restringe innecesariamente su grado de aplicabilidad. Más detalles se dan en [20].

El teorema no afirma que todo grupo de invariancia de las ecuaciones (23) de lugar a una densidad conservada. Solo aquellos grupos cuyos generadores tomen la forma del $\Lambda(\rho)$ nos conducen a una ρ con la propiedad de ser d.c. por (23).

Este problema se discutirá en el capítulo IV a la vista de algún sistema concreto.

IV. APLICACIONES

1. Ecuación generalizada del calor

Resolver completamente el sistema (16) § 4 III no es en general una empresa fácil. El problema puede simplificarse un poco si se restringe de entrada la clase de densidades sobre las que se trabaja. Es frecuente buscar soluciones $\rho[u]$ sin dependencia explícita en x ni t. En tal caso, el sistema que estudiaremos a continuación (1), es suceptible de ser elevado a la categoria de los raros ejemplos en los que podemos afirmar que poseemos una visión global del problema [37]. Genéricamente no existen d.c. y solo en casos especiales existe una o dos

Queda abierta la cuestión de cuáles sean las $\rho[x,t,u]$ conservadas por (1), asunto éste del que no tardaremos en dar una respuesta, por desgracia no todo lo concreta que hubiéramos deseado.

Para resarcirnos del malestar que nos produce tal estado de cosas, resolvemos por completo dos casos que presentaremos a continuación del problema que nos ofrece la ecuación (1).

Problema: Dada la ecuación

$$u_t = a(u, u_1)\, u_2 + b(u, u_1) \qquad (1)$$

encontrar sus densidades conservadas y la forma de las funciones $a(u,u_1)$, $b(u,u_1)$ para que éstas existan.

Las funciones $a(u,u_1)$ y $b(u,u_1)$ son en principio arbitrarias, pero como veremos al exigir que (1) tenga densidades conservadas no triviales su forma queda bastante delimitada. Hacemos notar que la ecuación (1) comprende las ecuaciones de evolución de segundo orden en la derivada espacial y que son cuasi-lineales. El caso en que aparezca una no linealidad en u_2 no presenta dificultades a la hora de probar que no posee d.c. no triviales.

Sea entonces $\rho(x,t,u,u_1,\dots,u_N)$ una d.c. por (1) lo que ocurre si

$$D_t\,\rho \doteq D_x(\cdot) \qquad (2)$$

Bajo la ley de evolución temporal prescrita por (1)

$$D_t\,\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\partial\rho}{\partial u_k} D_x^k u_t \doteq$$

$$\doteq \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\partial\rho}{\partial u_k} D^k(a\,u_2 + b) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\delta\rho}{\delta u}(a u_2 + b) + D_x(\cdot)$$

Como ya se probó en el § 3 II la condición (2) es equivalente a exigir $\frac{\delta}{\delta u} D_t\rho = 0$ una vez que se ha expresado $D_t\rho$ en función de derivadas x de u mediante (1). Por lo tanto ρ será d.c. si satisface

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\delta\rho}{\delta u}(a u_2 + b)\right) = 0 \qquad (3)$$

Haciendo uso de las propiedades enunciadas en los § 2, § 3 II esta ecuación se transforma en la siguiente

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \sum_{k=0}^{2N} \frac{\partial \gamma}{\partial u_k} D^k(a u_2 + b) + \left[\frac{\partial a}{\partial u} u_2 + D_x\left(\frac{\partial a}{\partial u} u_1\right) + \frac{\partial b}{\partial u} - D_x \frac{\partial b}{\partial u_1}\right] \gamma +$$

$$+ \left(\frac{\partial a}{\partial u_1} u_2 + 2\frac{\partial a}{\partial u} u_1 - \frac{\partial b}{\partial u_1}\right) D_x \gamma + a D_x^2 \gamma = 0$$

donde

$$\gamma(x, t, u, \ldots, u_{2N}) = \frac{\delta}{\delta u} \rho(x, t, u, \ldots, u_N)$$

caracteriza ρ (salvo divergencias y por consiguiente determina las d.c.)

Dado que (4) ha de ser idénticamente nula en u y en sus derivadas, la anulación sucesiva del coeficiente de la derivada de mayor orden de u que aparece en (4) nos conduce a la forma siguiente para la función γ

$$\gamma = \gamma(x, t, u)$$

es decir, γ puede depender de u pero no de sus derivadas. Con esta limitación (4) se reduce ahora a

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (a u_2 + b)\frac{\partial \gamma}{\partial u} + \left[\frac{\partial a}{\partial u} u_2 + D_x\left(\frac{\partial a}{\partial u} u_1\right) + \frac{\partial b}{\partial u} - D_x \frac{\partial b}{\partial u_1}\right] \gamma +$$

$$+\left(\frac{\partial a}{\partial u_1} u_2 + 2\frac{\partial a}{\partial u} u_1 - \frac{\partial b}{\partial u_1}\right) D_x \gamma + a D_x^2 \gamma = 0 \qquad (5)$$

En esta expresión sólo figuran derivadas de u de orden menor o igual que dos. Puesto que (5) es idénticamente nula lo mismo ocurre con sus derivadas parciales, de modo que haciendo $\frac{\partial}{\partial u_2}(5) = 0$ resulta:

$$\frac{\partial a}{\partial u_1}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \left(2a + \frac{\partial a}{\partial u_1}u_1\right)\frac{\partial \gamma}{\partial u} + \left(2\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial^2 a}{\partial u\,\partial u_1}u_1 - \frac{\partial^2 b}{\partial u_1^2}\right)\gamma = 0 \tag{6}$$

lo que exige que γ sea de la forma

$$\gamma = e^{q(u)}\,\Phi(t,z) \quad , \quad z = x - p(u) \tag{7}$$

y que las funciones $a(u,u_1)$, $b(u,u_1)$ estén dadas por

$$a = \frac{k(u)}{(1-p_u u_1)^2} \quad , \quad b = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k(u)}{(1-p_u u_1)^2 p_u^2}\right) + \frac{k(u)\,q(u)}{p_u^2(1-p_u u_1)} + m(u)u_1 + l(u) \tag{8}$$

siendo p(u), q(u), k(u), l(u), m(u) funciones arbitrarias de u. Para que (7) sea solución de (5) la función $\Phi(t,z)$ ha de ser solución de la ecuación en derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\hat{b}\,q_u + \hat{b}_u)\,\Phi - (\hat{b}\,p_u + \hat{b}_u)\frac{\partial \Phi}{\partial z} + k\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{9}$$

Como es fácil comprobar la condición $\frac{\partial}{\partial u_1}$ (5) = 0 no añade nada nuevo una vez que γ satisface (6). Por lo tanto, (5) bajo las restricciones (7) y (8) es independiente de u_1 lo que nos permite tratar (5) sin pérdida de generalidad en $u_1 = 0$, por eso hemos hecho

$$\hat{b}(u) = b(u,0)$$

$$\hat{b}_u(u) = \frac{\partial b}{\partial u}(u,0)$$

Dado que los coeficientes de (9) dependen solo de u y la función Φ lo hace a través de $z = x - p(u)$, se presentan aún restricciones funcionales a la hora de determinar las soluciones de (9).

Un caso sencillo ocurre cuando buscamos las soluciones de (9) que se escriben como producto de funciones de t y z es decir $\Phi_1 = A(t)\, B(z)$. En tal caso, teniendo en cuenta la expresión de γ dada por (7) después de algunos cálculos llegamos a la siguiente expresión

$$\gamma_{fact.} = \lambda\, e^{\alpha x + \beta t}\, e^{q(u) - \alpha p(u)} \tag{10}$$

con α, β, λ constantes; y la restricción sobre la función $l(u)$

$$\frac{\partial l}{\partial u} + (q(u) - \alpha)\, l = \alpha\, m(u) - \Big[\beta + \frac{k q_u - \alpha(k q_u + k q_u p_u)}{p_u^2} +$$
$$+ q_u \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k}{p_u^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k q_u}{p_u^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k}{p_u^2}\right) - \alpha \frac{k}{p_u^2} - \alpha \frac{k}{p_u} \right)\Big] - \alpha^2 k$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y lineal para l quedando p,q,k, y m como funciones arbitrarias de u.

A partir de $\gamma(x,t,u)$, ρ viene dada simplemente por

$$\rho(x,t,u) = \int_0^u \gamma(x,t,\xi)\, d\xi$$

y tendremos por consiguiente

$$\rho_{fact.}(x,t,u) = \lambda\, e^{\alpha x + \beta t} \int_0^u e^{q(\xi) - \alpha p(\xi)}\, d\xi \tag{11}$$

como expresión general de las densidades conservadas (del tipo factorizado) de la ecuación (1) cuando $a(u, u_x)$ y $b(u, u_x)$ están dados por (8).

Veamos ahora algunos ejemplos concretos:

Tomemos en primer lugar

$k(u) = 1 \ , \ p(u) = u \ , \ q(u) = m(u) = \beta = 0$

con esta elección, la ecuación a estudiar es

$$u_t = \frac{u_2}{(1-u_1)^2} + e^{\alpha u} + \alpha \quad , \ \alpha = \text{const.} \tag{12}$$

y según (11), la función

$$\rho(x,u) = e^{\alpha(x-u)}$$

debe de ser una densidad conservada por la ecuación (12). En efecto, así sucede ya que

$$-D_t\rho \underset{(12)}{\doteq} \alpha e^{\alpha(x-u)}\left[\frac{u_2}{(1-u_1)^2} + e^{\alpha u} + \alpha\right] =$$

$$= \alpha\left\{\frac{u_2}{(1-u_1)^2}\, e^{\alpha(x-u)} + e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha(x-u)}\right\} =$$

$$= D_x\, e^{\alpha x} + \alpha D_x\left[\frac{e^{\alpha(x-u)}}{1-u_1}\right] = D_x\left[e^{\alpha x}\left(1 + \frac{\alpha e^{-u}}{1-u_1}\right)\right]$$

es efectivamente una derivada total respecto a x.

Otro caso aun. Hagamos k(u) = p(u) = u ,, q(u) = m(u) = β = 0. La ecuación a tratar resulta ser

$$u_t = \frac{u u_2}{(1-u_1)^2} + \frac{1}{1-u_1} + \mu e^{\alpha u} + \alpha u - 1 \quad ,, \alpha , \mu = \text{const.} \tag{13}$$

La densidad ρ (x,u) dada por (11) es de nuevo

$$\rho(x,u) = e^{\alpha(x-\mu)}$$

para la que se tiene

$$-D_t \rho \underset{(13)}{\doteq} \alpha\, e^{\alpha(x-u)} \left[D_x \frac{u}{1-u_1} + \alpha u + \mu e^{\alpha u} \right] =$$

$$= D_x \left\{ e^{\alpha x} \left[\mu + \frac{\alpha u\, e^{-\alpha u}}{1-u_1} \right] \right\}$$

Observamos que si bien las densidades son las mismas en ambos casos, no ocurre así con la parte espacial de la corriente, como está claro desde el momento en que las leyes de evolución que marcan (12) y (13) son diferentes.

Las ecuaciones (12) y (13) son ejemplos púramente académicos, pero sirven para probar que al menos en el caso par, la ecuación ha de complicarse bastante si ha de conservar alguna función que no sea simplemente la u(x,t). Como vemos también la dependencia en x es esencial para conseguir que las densidades consideradas más arriba sean conservadas por las ecuaciones (12) y (13).

El tipo de ecuaciones $u_t = a(u,u_1)u_2 + b(u,u_1)$ con a y b dados por (8) forman las ecuaciones con d.c. no triviales en las que $\frac{\partial a}{\partial u_1} \neq 0$

Como se ha podido comprobar los cálculos son más bien tediosos. Un problema más sencillo supone resolver el caso a = 1

$$u_t = u_2 + b(u, u_1) \tag{14}$$

La ecuación para el gradiente $\gamma = \frac{\delta \rho}{\delta u}$ es ahora

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (u_2 + b)\frac{\partial \gamma}{\partial u} + \left(\frac{\partial b}{\partial u} - D_x \frac{\partial b}{\partial u_1}\right)\gamma - \frac{\partial b}{\partial u_1} D_x \gamma + D_x^2 \gamma = 0 \tag{15}$$

Como antes, calculamos $\frac{\partial}{\partial u_2}$ (15)

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(15) = 0 \implies 2\frac{\partial}{\partial u}\ln \gamma = \frac{\partial^2 b}{\partial u_1^2}$$

la solución de esta ecuación es

$$\gamma = f(x,t)\, e^{g(u)}, \quad b = \frac{\partial g}{\partial u} u_1^2 + h(u) u_1 + k(u) \tag{16}$$

Introduciendo (16) en (15)

$$\frac{\partial f}{\partial t} - h(u)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(k \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial u}\right) f = 0$$

por lo que

$$f(x,t) = \text{const.}\; e^{\alpha x - (\beta + \alpha^2) t} \qquad ; \; \alpha, \beta = \text{const.}$$

$$h(u) = \frac{1}{\alpha}\left(k \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial u} - \beta\right)$$

Así pues, las ecuaciones (14) con d.c. no triviales son

$$u_t = u_2 + \frac{\partial g}{\partial u} u_1^2 + \frac{1}{\alpha}\left(k\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial u} - \beta\right) u_1 + k(u) \; ; \quad g(u),\, k(u) \text{ arbitrarias}$$

y las d.c. son

$$\rho(x,t,u) = e^{\alpha x - (\beta + \alpha^2) t} \int_0^u e^{g(\xi)}\, d\xi$$

En este caso, los cálculos se pueden llevar explícitamente hasta el final.

2. Simetrías y leyes de conservación para la ecuación de Schrödinger libre

Como ya se dijo con anterioridad, resolver completamente la ecuación que caracteriza los generadores de invariancia o determinar todas las leyes de conservación de una ecuación solo puede hacerse en contadas ocasiones. Lo haremos aquí para la ecuación de Schrödinger libre

$$i\,\psi_t + \psi_{xx} = 0 \tag{17}$$

Consideremos la transformación

$$\psi'(x,t) = \psi(x,t) + \varepsilon\,\eta[x,t,\psi,\bar{\psi}] + O(\varepsilon^2) \tag{18}$$

donde $\eta = \eta(x,t,\psi,\psi_1,\dots,\bar{\psi},\bar{\psi}_1,\dots)$

La condición de invariancia para (17) bajo (18) es

$$\mathcal{D}_t\,\eta - i\,\mathcal{D}_x^2\,\eta = 0 \tag{19}$$

Desarrollando la derivada respecto a t y x obtenemos

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - i\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - 2i\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial\psi_k}\,\psi_{k+1} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial\bar{\psi}_k}\,\bar{\psi}_{k+1}\right) -$$

$$- i\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\psi_k\,\partial\psi_\ell}\,\psi_{k+1}\,\psi_{\ell+1} + 2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial\bar{\psi}_k\,\partial\psi_\ell}\,\bar{\psi}_{k+1}\,\psi_{\ell+1} + \frac{\partial^2\eta}{\partial\bar{\psi}_k\,\partial\bar{\psi}_\ell}\,\bar{\psi}_{k+1}\,\bar{\psi}_{\ell+1}\right) - 2i\,\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\psi}_k}\,\bar{\psi}_{k+2} = 0 \tag{20}$$

El último término en (20) nos dice que $\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\psi}_k} = 0,\ k \geq 0$. Por consiguiente $\bar{\psi}_k$ no aparece en η con lo que (20) se simplifica a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - i\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - 2i\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial\psi_k}\,\psi_{k+1} - i\,\frac{\partial^2\eta}{\partial\psi_k\,\partial\psi_l}\,\psi_{k+1}\,\psi_{l+1} = 0 \tag{21}$$

Tomemos $\eta(x, t, \psi, \psi_1, \dots, \psi_N)$

$$\frac{\partial^2}{\partial\psi_{N+1}^2}\,(21) = 0 \implies \frac{\partial^2\eta}{\partial\psi_N^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi_{N+1}}\,(21) = 0 \implies D_x\left(\frac{\partial\eta}{\partial\psi_N}\right) = 0$$

por lo que η ha de ser de la forma

$$\eta = a(x, t, \psi, \dots \psi_{N-1}) + b(t)\,\psi_N \tag{22}$$

La expresión final para η la obtenemos observando que dada una solución de (21) del tipo $\eta = a(x,t,\psi,\dots,\psi_{M-1}) + \sum_{k=0}^{p} b_k(x,t)\,\psi_{M+k}$, $p \geq 0$ la dependencia de a en ψ_{M-1} resulta ser $a = c(x,t,\psi,\dots,\psi_{M-2}) + d(x,t)\,\psi_{M-1}$, lo que finalmente nos conduce a una η

$$\eta = a(x,t) + \sum_{k=0}^{N} b_k(x,t)\,\psi_k \tag{23}$$

Las funciones $a, b_k, k = 0,1,\dots,N$ son las soluciones del sistema

$$\frac{\partial b_N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} - i\,\frac{\partial^2 b_k}{\partial x^2} - 2i\,\frac{\partial b_{k-1}}{\partial x} = 0 \quad , \; k = 1,\dots,N \tag{24}$$

$$i\,\frac{\partial b_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad i\,\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0$$

No es dificil encontrar las soluciones a este sistema para un N dado. Tampoco es difícil probar que para $\forall N \geq 0$ las a, b_k son polinomios en (x,t). Por ejemplo, para N = 3 la solución completa está dada por

$$
\begin{aligned}
a &= \varphi(x,t) \quad : \quad i\varphi_t + \varphi_{xx} = 0 \\
b_3 &= \alpha_0 + 2\alpha_1 t + 4\alpha_2 t^2 + 8\alpha_3 t^3 \\
b_2 &= \beta_0 - i\alpha_1 x + 2(\beta_1 - 2i\alpha_2 x)t + 4(\beta_2 - 3i\alpha_3 x)t^2 \\
b_1 &= \gamma_0 - i\beta_1 x - \alpha_2 x^2 + 2(\gamma_1 - 2i\beta_2 x - 3\alpha_3 x^2)t - 12i\alpha_3 t^2 \\
b_0 &= \delta_0 + (\alpha_2 - i\gamma_1)x - \beta_2 x^2 + i\alpha_3 x^3 - 2(i\beta_2 + 3\alpha_3 x)t
\end{aligned}
\tag{25}
$$

donde φ (x,t) es una solución cualquiera de la ecuación (17) y los $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_0$ son parámetros complejos. El álgebra de Lie del "grupo de Schrödinger" [38] está contenida en (25) y corresponde a los parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \delta_0 = \frac{1}{2}\beta_1$.

Pasemos ahora a la cuestión de las leyes de conservación para la ecuación (17). Teniendo en cuenta que la ecuación de Schrödinger puede derivarse del hamiltoniano $H = i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \bar{\psi}\cdot\psi_{xx}$, el Teorema 3 del § 6 III nos lleva sin más a las d.c.

$$\rho^0 = \varphi\bar{\psi} - \bar{\varphi}\psi \qquad n = 0,1,2,3$$

$$\rho^1_n = \bar{\psi}\, D_x^n\, \psi \qquad n = 0,1,2$$

$$\rho_n^2 = \bar{\psi}\left(\frac{x}{2}D_x^n + it D_x^{n+1}\right)\psi \qquad n=0,1,2$$

$$\rho_n^3 = \bar{\psi}\left[\left(\frac{it}{2}+\frac{x^2}{4}\right)D_x^n + itx D_x^{n+1} - t^2 D_x^{n+2}\right]\psi \qquad n=0,1$$

$$\rho_n^4 = \bar{\psi}\left[\left(3xt - i\frac{x^3}{2}\right)D_x^n + 3(x^2t+2it^2)D_x^{n+1} + 6ixt^2 D_x^{n+2} - 4t^3 D_x^{n+3}\right]\psi \qquad n=0$$

Hacemos notar que ρ_n^k es una d.c. para $\forall n \geq 0$ entero. Por otra parte observamos las relaciones

$$\left(\frac{it}{2}+\frac{x^2}{4}\right)D_x^n + itx D_x^{n+1} - t^2 D_x^{n+2} = \left(\frac{x}{2}+itD_x\right)\left(\frac{x}{2}D_x^n + it D_x^{n+1}\right)$$

$$\left(3xt - \frac{ix^3}{2}\right)D_x^n + 3(x^2t+2it^2)D_x^{n+1} + 6ixt^2 D_x^{n+2} - 4t^3 D_x^{n+3} =$$

$$= \text{const.}\left(\frac{x}{2}+itD_x\right)^2\left(\frac{x}{2}D_x^n + itD_x^{n+1}\right)$$

Llegamos así a la siguiente conclusión: las d.c. ρ_n^k que hemos obtenido, están incluidas en la expresión

$$\rho_{n,m} = \bar{\psi}\left(\frac{x}{2}+itD_x\right)^n \psi_m \qquad \text{n,m enteros no negativos}$$

El que $\rho_{n,m}$ sea una d.c. por la ecuación de Schrõdinger libre para $\forall$ n,m enteros y no negativos se deduce del hecho de ser (17) invariante Galilei junto a la invariancia bajo traslaciones en la **x**, $\bar{\psi}\psi_m$ es una d.c. $\forall m \geq 0$. Por otra parte, en el orden de las ideas puestas en juego en las dos últimas secciones de este capítul el generador de invariancia asociado a X_{γ_1} en (25) es

$$X_{\gamma_1} = \left(D_x^k\left[\left(\frac{x}{2}+it D_x\right)\psi\right]\right)\frac{\partial}{\partial \psi_k} + \left(D_x^k\left[\left(\frac{x}{2}-itD_x\right)\bar{\psi}\right]\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_k}$$

(grupo de Galilei) y sobre $\bar{\psi}\psi_m$, para $\forall n \geq 0$

$$X_{\gamma_1}^{n}(\bar{\psi}\psi_m) = \text{const.}\ \bar{\psi}\left(\frac{x}{2}+itD_x\right)^{n}\psi_m + \cdots$$

Como se verá (§ 4 IV) $X^n\rho$ es una d.c. si X es de invariancia y ρ así mismo es una d.c. . Los puntos suspensivos en nuestro caso denotan otras d.c. del tipo propuesto pero de órdenes mas bajos en derivadas.

La expresión de $\rho_{n,m}$ es algo más que unas simples relaciones de recurrencia, son las relaciones de recurrencia integradas.

Como se afirma en [37] , el caracter lineal de la ecuación de Schrödinger libre exige que $\forall\rho$ es a lo sumo cuadrática en las soluciones.

3. De grupos de invariancia a leyes de conservación en sistemas hamiltonianos

En el § 6 del capítulo III, se afirma que para un sistema hailtoniano es siempre posible el paso de una densidad conservada a n grupo de invariancia de las ecuaciones pero, el recíproco no siempre es cierto. En efecto, puede ocurrir que los generadores de un grupo de invariancia de las ecuaciones no estén en el rango del operador $\mathcal{J}\frac{\delta}{\delta u}$, $\mathcal{J}$ denota el operador simpléctico de la estructura hamiltoniana, y por consiguiente no podremos asociarlas en este esquema una densidad conservada. Diremos entonces que el grupo no es integrable.

Existen grupos de invariancia que son "siempre" integrables de una manera natural. Tal cosa ocurre con los grupos de traslaciones, como podemos ver en la siguiente familia de ejemplos. Consideremos las ecuaciones

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H/\delta u \\ \delta H/\delta v \end{pmatrix} \tag{26}$$

donde u = u(x,t), v = v(x,t) y H[u,v] depende de u,v y sus derivadas espaciales. Puesto que las ecuaciones (26) no dependen explícitamente de x son invariantes bajo el grupo de las traslaciones en x. Este grupo está representado por el generador

$$\zeta = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

al que el Teorema 3 § 6 III asocia una densidad ρ tal que $\zeta = \mathcal{J}\frac{\delta\rho}{\delta u}$ es decir

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho/\delta u \\ \delta\rho/\delta v \end{pmatrix}$$

o bien

$$u_x = -\frac{\delta\rho}{\delta v} \quad , \quad v_x = \frac{\delta\rho}{\delta u}$$

De acuerdo con los resultados del § 3 II la solución general de es_ tas ecuaciones es módulo derivadas

$$\rho = u\, v_x$$

Calculando ahora $D_t \rho$

$$D_t \rho = u_t v_x + u v_{xt} \doteq \frac{\delta H}{\delta v} v_x + D_x(u v_t) + u_x \frac{\delta H}{\delta u} \doteq$$

$$\doteq D_x \left[H - D^k \left(u_1 \frac{\delta H}{\delta u_{k+1}} + v_1 \frac{\delta H}{\delta v_{k+1}} \right) - u \frac{\delta H}{\delta u} \right]$$

después de usar la identidad

$$D_t = \left(D_x u^n\right) \frac{\delta}{\delta u^n} + \sum_{l \geq 1} D_x^l \left(u_1^n \frac{\delta}{\delta u_l^n} \right)$$

Así pues, la d.c. por (26) $\rho = u v_x$ está asociada al generador $\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$. Otro es el caso cuando tratamos con grupos de dilataciones. Su_ pongamos primero el par de ecuaciones

$$u_t = P[u, v] \quad , \quad v_t = Q[u, v] \tag{27}$$

donde u = u(x,t) ,, v(x,t) y $P(u,u_1,\dots,v,v_1\dots)$, $Q(u,u_1,\dots,v,v_1\dots)$. Queremos saber cuándo (27) es invariante bajo el grupo de Lie caracterizado por

$$\zeta = \begin{pmatrix} \alpha u + \theta x u_x + \gamma t P[u,v] \\ \beta v + \theta x v_x + \gamma t Q[u,v] \end{pmatrix} \tag{28}$$

que dilata u y v en $e^{\alpha}u$, $e^{\beta}v$ a la $x \to e^{-\theta}x$ y $t \to e^{-\gamma t}$. Si llamamos η y σ a las componentes de ζ , esto es $\eta = \alpha u + \theta x u_x + \gamma t P$ y $\sigma = \beta v + \theta x v_x + \gamma t Q$ (28) deja invariante (27) según la definición de invariancia del § 3 I si

$$\begin{aligned} D_t \eta &\doteq (D_x^k \eta) \cdot \frac{\partial P}{\partial u_k} + (D_x^k \sigma) \cdot \frac{\partial P}{\partial v_k} \\ D_t \sigma &\doteq (D_x^k \eta) \cdot \frac{\partial Q}{\partial u_k} + (D_x^k \sigma) \cdot \frac{\partial Q}{\partial v_k} \end{aligned} \tag{29}$$

Escribiendo en vez de η y σ sus expresiones (28) y utilizando (27) obtenemos

$$\begin{aligned} (\alpha+\gamma) P &= \sum_{\ell \geq 0} (\alpha+\theta\ell)\, u_\ell \frac{\partial P}{\partial u_\ell} + (\beta+\theta\ell)\, v_\ell \frac{\partial P}{\partial v_\ell} \\ (\beta+\gamma) Q &= \sum_{\ell \geq 0} (\alpha+\theta\ell)\, u_\ell \frac{\partial Q}{\partial u_\ell} + (\beta+\theta\ell)\, v_\ell \frac{\partial Q}{\partial v_\ell} \end{aligned} \tag{30}$$

La solución general de las ecuaciones (30) [4], está dada por

$$P = u^{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}}\, \Phi \left[\frac{u_1}{u^{(\alpha+\theta)/\alpha}}, \frac{u_2}{u^{(\alpha+2\theta)/\alpha}}, \dots, \frac{u_k}{u^{(\alpha+k\theta)/\alpha}}, \dots, \frac{v}{u^{\beta/\alpha}}, \frac{v_1}{u^{(\beta+\theta)/\alpha}}, \dots, \frac{v_k}{u^{(\beta+k\theta)/\alpha}}, \dots \right]$$

$$Q = u^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}\, \Psi \left[\frac{u_1}{u^{(\alpha+\theta)/\alpha}}, \dots\dots, \frac{u_k}{u^{(\alpha+k\theta)/\alpha}}, \dots, \frac{v}{u^{\beta/\alpha}}, \dots, \frac{v_k}{u^{(\beta+k\theta)/\alpha}}, \dots \right]$$

(31)

con las funciones Φ y Ψ arbitrarias. La forma de P y Q nos muestra como se adapta un sistema de ecuaciones a la invariancia que dicta un grupo.

Visto ya que existen sistemas del tipo (27) invariantes bajo los grupos de dilataciones, pasemos a la cuestión de la integrabilidad de (28).

Lo que se diga a continuación sobre los generadores ζ de invariancia para el sistema (27) cuando P y Q son de la forma (31) tiene sentido unicamente cuando

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H/\delta u \\ \delta H/\delta v \end{pmatrix}$$

puesto que entonces tendremos una asociación $\zeta \leftrightarrow \rho$ via el teorema 3 § 6 III.

Sea pues, el generador ζ de dilataciones para un sistema

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta v} \qquad , \qquad v_t = -\frac{\delta H}{\delta u}$$

invariante bajo tal grupo. En tal caso, existe una ρ conservada, asociada a ζ cuando podamos escribir (teorema 3 § 6 III)

$$\zeta = -\mathcal{J}\begin{pmatrix} \delta\rho/\delta u \\ \delta\rho/\delta v \end{pmatrix}$$

es decir

$$\alpha u + \theta x u_1 + \gamma t \frac{\delta H}{\delta v} = \frac{\delta \rho}{\delta v}$$
$$\beta v + \theta x v_1 - \gamma t \frac{\delta H}{\delta u} = -\frac{\delta \rho}{\delta u} \tag{32}$$

Si de la primera de las ecuaciones (32) despejamos ρ

$$\rho = \alpha u v + \theta x\, v u_1 + \gamma t H + R[u] + D_x(\cdot)$$

Introduciendo esta expresión de ρ en la segunda de las ecuaciones (32)

$$\beta v + \theta x v_1 = -(\alpha v - \theta D_x x v) - \frac{\delta R}{\delta u}$$

Dado que R es función solo de $u, u_x, \cdots$

$$(\alpha + \beta) v = \theta v \quad , \quad \frac{\delta R}{\delta u} = 0$$

Entonces, existe ρ cuando $\theta = \alpha + \beta$ y viene dada por

$$\rho = \alpha u v + (\alpha + \beta) x\, v u_1 + \gamma t H + D_x(\cdot)$$

Se comprueba que esta ρ efectivamente satisface (7).

Tratemos con más detalle el caso sencillo representado por el par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v} \quad , \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u} \tag{33}$$

Determinaremos a continuación la forma de los hamiltonianos H = H(u,v) para los que el sistema (33) admite una integral primera asociada con la invariancia bajo dilataciones. Los generadores (28) son aquí

$$\eta = \alpha u + \gamma t \frac{\partial H}{\partial v}$$
$$\sigma = \beta v - \gamma t \frac{\partial H}{\partial u} \qquad (34)$$

con $\theta = 0$, de manera que la integrabilidad de (34) exige $\alpha + \beta = 0$
La invariancia de las ecuaciones (33) bajo (34) según las fórmulas (31) nos lleva a escribir

$$\frac{\partial H}{\partial v} = P = u^{1+\frac{\gamma}{\alpha}} \Phi\left(u^{-\beta/\alpha} v\right)$$
$$-\frac{\partial H}{\partial u} = Q = u^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}} \Psi\left(u^{-\beta/\alpha} v\right) \qquad (35)$$

Redefiniendo los parámetros $\frac{\gamma}{\alpha} \to \hat{\gamma}$, $\frac{\beta}{\alpha} \to \hat{\beta}$ y haciendo $\frac{\beta}{\alpha} = -1$, la condición

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u} \qquad (36)$$

sobre la existencia de H y llamando $\xi = uv$, la condición (36) se refleja en

$$\frac{d\Psi}{d\xi} + \xi \frac{d\Phi}{d\xi} + (1+\hat{\gamma}) \Phi = \frac{d\Psi}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\xi \Phi) + \hat{\gamma} \Phi = 0$$

Poniendo $\Phi = \frac{d}{d\xi} R(\xi)$, tendremos $-\Psi$ = constante $+ \hat{\gamma} R + \xi R'$ y también, según (35)

$$H(u,v) = u^{\hat{\gamma}} R(uv) \qquad (37)$$

Este hamiltoniano representa la forma general, R arbitraria, de los que conducen a sistemas (33) invariantes bajo dilataciones. Al grupo (34) está asociada entonces la integral primera

$$\rho = uv + \hat{\gamma}\, t\, H$$

Entre los sistemas (37) los Newtonianos vienen representados por funciones H de la forma $H = \frac{v^2}{2} + V(u)$ que corresponden al caso $\hat{\gamma} = -2$ y $R(\xi) = -\frac{\xi^2}{2}$ + constante y por consiguiente los potenciales $V(u)$ para los que las dilataciones son integrables están dados por

$$V(u) = \text{const.}\ u^{-2}$$

Hacemos notar que en relación con estos potenciales existe una moderna bibliografía que trata con la integrabilidad completa de sistemas de n partículas unidimensionales que interaccionan via $\frac{1}{(u_i - u_k)^2}$ [39].

La integrabilidad de los grupos de dilataciones puede plantearse en el marco de otro tipo de ecuaciones que constituyen también sistemas hamiltonianos [40]. Son ecuaciones de la forma

$$u_t = D_x \frac{\delta H}{\delta u} \tag{38}$$

donde u(x,t) es una función de dos variables x,t y H[u] el hamiltoniano función de $u, u_x, u_{xx}, \ldots$. Al menos formalmente podemos identificar el operador de derivación total D_x con el $\mathcal{J}$ de las ecuaciones (26), sin perder de vista que si bien D_x continúa siendo antisimétrico no es, a diferencia de $\mathcal{J}$, biyectivo.

Sea entonces $\rho(t,u,u_x,..)$ una d.c. por (38) que según (15) del § 4 III satisfará

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + X\rho\right) = 0 \qquad (39)$$

donde

$$X = \sum_k \left(D_x^{k+1}\frac{\delta H}{\delta u}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u_k}\,,$$

es el operador de Lie-Bäcklund determinado por H. Teniendo en cuenta el lema del § 5 III

$$\frac{\delta}{\delta u}X = X\frac{\delta}{\delta u} + \widetilde{\left(D_x\frac{\delta H}{\delta u}\right)'}\frac{\delta}{\delta u}$$

siendo $\widetilde{\left(D_x\frac{\delta H}{\delta u}\right)'}$ el adjunto formal de $\left(D_x\frac{\delta H}{\delta u}\right)'$, utilizando la notación $\delta\sigma[u,\eta] = \sigma'\eta = \sum_k \frac{\partial\sigma}{\partial u_k}D^k\eta = X_\eta\sigma$. Es fácil ver que $\widetilde{\left(D_x\frac{\delta H}{\delta u}\right)'} = -\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)'D_x$ sin más que recordar el caracter autoadjunto de $\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)'$ como se comentaba en el § 3 II. Con los datos anteriores (39) pasa a ser

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\rho}{\delta u} + X\frac{\delta\rho}{\delta u} = \left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)'D_x\frac{\delta\rho}{\delta u}\,.$$

multiplicando a la izquierda por D_x, observando la relación $[X,D_x]=0$ y reagrupando términos llegamos a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+X\right)\left(D_x\frac{\delta\rho}{\delta u}\right) = D_x\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)'\left(D_x\frac{\delta\rho}{\delta u}\right)$$

ecuación, que si llamamos $\zeta \equiv D_x \frac{\delta \rho}{\delta u}$, caracteriza las simetrías de la ecuación (13) puesto que este ζ satisface

$$D_t \zeta \doteq X_\zeta \left(D_x \frac{\delta H}{\delta u} \right)$$

siempre que ρ sea una d.c. para la ecuación (13).

Proposición 1. Para la ecuación $u_t = D_x \frac{\delta H}{\delta u}$ a toda densidad conservada ρ está asociado el grupo de Lie-Bäcklund de invariancia con generador $\zeta = D_x \frac{\delta \rho}{\delta u}$. El carácter no inyectivo de D_x hace que el recíproco no siempre sea cierto si tenemos en cuenta que la identidad de la que hemos hecho uso para probar la proposición anterior es

$$\left(X + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(D_x \frac{\delta \rho}{\delta u}\right) - D_x\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)' D_x \frac{\delta \rho}{\delta u} = D_x \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + X\rho\right)$$

por lo tanto, aun cuando el miembro de la izquierda se anule (lo que corresponde a la invariancia de (38) bajo el grupo de generador $\zeta = D_x \frac{\delta \rho}{\delta u}$) solo podemos afirmar que $\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta \rho}{\delta u} \; D_x \frac{\delta H}{\delta u}\right) = f(t)$

En cualquier caso, cuando un generador ζ de invariancia se descompone de la forma $\zeta = D_x \frac{\delta \rho}{\delta u}$, la función ρ es un candidato a densidad conservada por la ecuación (38)

Contraejemplo. Supongamos $u_t = D_x \frac{\delta}{\delta u}\left(-\frac{u_x^2}{2}\right) = u_{xxx}$

Evidentemente $\zeta = x^2$ es un generador de invariancia que se escribe

$$\zeta = \frac{1}{3} D_x x^3 = D_x \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{x^3 u}{3}\right)$$

pero $\frac{x^3 u}{3}$ no es una d.c. por $u_t = u_{xxx}$. En este caso

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{x^3}{3}\ u_3\right) = -2$$

como ya habíamos previsto.

Volvamos a la cuestión de los grupos de dilataciones y determinemos en primer lugar qué ecuaciones de la forma

$$u_t = P(u, u_x, u_{xx}, \ldots)$$

son invariantes bajo el grupo generado por

$$\zeta = u + \theta x u_x + \gamma t P[u] \tag{40}$$

donde ya hacemos $\alpha = 1$ para abreviar. Según las ecuaciones (29) y (30) la forma de P viene dada por

$$P[u] = u^{1+\gamma}\Phi\left(\frac{u_1}{u^{\theta+1}}, \frac{u_2}{u^{2\theta+1}}, \ldots, \frac{u_k}{u^{k\theta+1}}, \ldots\right) \tag{41}$$

con Φ arbitraria.

Con la función ζ dada por (40) escribimos

$$\zeta = u + D_x(x\theta u) - \theta u + D_x\left(\gamma t \frac{\delta H}{\delta u}\right) = (1-\theta)u + D_x\frac{\delta}{\delta u}\left(\theta x \frac{u^2}{2} + \gamma t H\right)$$

cuando $P = D_x \frac{\delta H}{\delta u}$. Por consiguiente cuando $\theta = 1$

$$\zeta = D_x \frac{\delta}{\delta u}\left(x\frac{u^2}{2} + \gamma t H\right)$$

y la función $x\frac{u^2}{2}+\gamma t H$ podrá ser una d.c. por $u_t = D_x \frac{\delta H}{\delta u}$. Más concretamente, tomemos la ecuación

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x$$

KdV modificada. En este caso

$$P[u] = u_{xxx} + u^2 u_x = D_x \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{u^4}{12} - \frac{u_x^2}{2}\right)$$

esta función P se pone bajo la forma

$$P[u] = u_{xxx} + u^2 u_x = \left[\frac{u_{xxx}}{u^{3\theta+1}} + \frac{u_x}{u^{\theta+1}}\right] u^{\gamma+1}$$

siempre que $\gamma = 3\theta$, $\theta = 1$. Según la fórmula (41) KdV modificada es invariante bajo el grupo de dilataciones con generador

$$\zeta = u + x u_x + 3t(u_{xxx} + u^2 u_x)$$

Puesto que θ = 1

$$\zeta = D_x \frac{\delta}{\delta u}\left[x\frac{u^2}{2} + 3t\left(\frac{u^4}{12} - \frac{u_1^2}{2}\right)\right] = D_x \frac{\delta}{\delta u}\left[x\frac{u^2}{2} + 3t\, H[u]\right]$$

Comprobaremos que $x\frac{u^2}{2} + 3t\left(\frac{u^4}{12} - \frac{u_1^2}{2}\right)$ es una d.c. por la ecuación de KdV modificada. En efecto, teniendo en cuenta que $D_t H \doteq D_x($

$$D_t\left(\frac{xu^2}{2} + 3t H\right) \doteq xu D_x \frac{\delta H}{\delta u} + 3H + D_x(\cdot) =$$

$$= 4H - u\frac{\delta H}{\delta u} - u_1 \frac{\delta H}{\delta u_1} + D_x(\cdot) =$$

$$= 4\left(\frac{u^4}{12} - \frac{u_1^2}{2}\right) - u\left(\frac{u^3}{3} + u_2\right) - u_1(-u_1) + D_x(\cdot) = D_x(\cdot)$$

como queríamos ver.

Hacemos notar que de la familia $u_t = u^n u_x + u_{xxx}$, KdV modificada es la única en que $\zeta_{\text{dilat.}}$ es integrable a una ρ.

Otras cuestiones íntimamente ligadas con las que hemos discutido hasta aquí forman el contenido de las siguientes secciones.

4. Propiedades de homogeneidad

En el apartado anterior hemos examinado la cuestión de la integrabilidad de los grupos de dilataciones que dejan invariantes ecuaciones en derivadas parciales y ordinarias del tipo hamiltoniano. Dicha integrabilidad nos permitía obtener una ley de conservación con una forma característica para todas las ecuaciones. Al lado de este uso, la invariancia bajo dilataciones nos proporciona un método para clasificar las densidades conservadas por una ecuación dada y también delimitar la forma funcional de estas densidades cuando se trata con una ecuación de evolución invariante bajo dilataciones y con densidades conservadas de tipo polinómico. El germen de las ideas que expondremos aquí se encuentra en [13] para la ecuación de KdV, sin embargo nuestras técnicas son diferentes.

Sea entonces una ecuación de evolución

$$u_t = P[u]$$

donde $u = u(x,t)$ es una función escalar de las dos variables x y t y

$P[u]$ una función de u y sus derivadas espaciales $u_x, u_{xx}, \ldots$

Definición 1. Llamaremos operador de Euler de índice θ al operador diferencial lineal

$$\mathcal{E}_\theta = \sum_{k \geq 0} (1+\theta k)\, u_k \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{42}$$

La denominación empleada para (42) viene motivada por el hecho de que para $\theta = 0$, $\mathcal{E}_0$ sobre un polinomio homogéneo Q de grado m en las variables $u, u_1, u_2, \ldots u_k, \ldots$ según el teorema de Euler

$$\mathcal{E}_0\, Q = m\, Q \tag{43}$$

Generalizaremos ahora la ecuación (43) para un índice θ arbitrario.

Proposición 2. Las soluciones Q de la ecuación

$$\mathcal{E}_\theta\, Q = \lambda\, Q \quad , \ \lambda = \text{const.} \tag{44}$$

son las funciones de la forma

$$Q[u] = u^\lambda\, \Phi\left(\frac{u_1}{u^{\theta+1}}, \frac{u_2}{u^{2\theta+1}}, \ldots, \frac{u_k}{u^{k\theta+1}}, \ldots \right) \tag{45}$$

Demostración

La ecuación (19) impone sobre Q la condición

$$\sum_{k \geq 0} (1+\theta k)\, u_k \frac{\partial Q}{\partial u_k} = \lambda\, Q$$

que es una ecuación cuasi-lineal en derivadas parciales. El procedimiento del que hemos hecho uso en ocasiones anteriores [4] nos conduce a la solución (45).

Definición 2. Las funciones Q de la forma que establece (45) se llamarán θ-homogéneas de grado λ .

Consideremos un monomio $M = u^{\lambda_0} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_p^{\lambda_p}$, sobre M la acción de $\mathcal{E}_\theta$ resulta ser según (17)

$$\mathcal{E}_\theta M = \lambda_0 M + (1+\theta)\lambda_1 M + (1+2\theta)\lambda_2 M + \dots + (1+p\theta)\lambda_p M =$$

$$= \left[(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p) + \theta(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + p\lambda_p) \right] M$$

por lo tanto M es θ-homogéneo con grado $(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p) + \theta(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + p\lambda_p)$. A diferencia de la situación que se encuentra en la definición de la homogeneidad ordinaria (θ = 0) el orden p de las derivadas que entran en M influye de una manera característica en el θ-grado. El índice θ hace las veces del peso relativo que otorgamos a la derivación en su contribución al grado de M.

Proposición 3. La ecuación $u_t = P[u]$ es invariante bajo el grupo de dilataciones de Lie con generador $\eta = u + \theta x u_1 + \lambda t P[u]$ si y sólo si P[u] es θ-homogeneo de grado $\lambda + 1$.

Demostración:

Fórmula (30) del § 3.

En relación con las densidades conservadas por $u_t = P[u]$ tendre mos necesidad de utilizar el siguiente lema:

Lema. Sea ζ el generador infinitesimal de un grupo de invariancia Lie-Bäcklund de la ecuación $u_t = P[u]$. Si ρ es una d.c. por dicha ecuación, las funciones $X_\zeta^n \rho$, n = 0,1,... son también densidades conservadas.

Demostración:

Por definición de d.c. $\rho(u)$ es cierto que

$$D_t \rho \doteq D_x(\cdot)$$

Hasta el primer orden en ε , $u_\varepsilon = u + \varepsilon \zeta$ es una familia de soluciones de modo que

$$D_t \rho (u + \varepsilon \zeta + O(\varepsilon^2)) \doteq D_x(\cdot)$$

o bien

$$D_t \rho[u] + \varepsilon D_t X_\zeta \rho[u] + O(\varepsilon^2) \doteq D_x(\cdot)$$

La arbitrariedad del parámetro ε implica $D_t X_\zeta \rho \doteq D_x(\cdot)$. Reiterando el proceso se obtienen las d.c. $X_\zeta^n \rho$

Particularicemos el lema anterior al caso aquí tratado, poniendo como generador de invariancia $\eta = u + \theta x u_x + \lambda t P[u]$

$$X_\eta = \sum_{k \geq 0} \left[D_x^k \left(u + \theta x u_x + \lambda t P \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial u_k}$$

cuando $u_t = P[u]$ sea invariante. Sea además $\rho[u]$ una d.c. por lo que en virtud del lema anterior también lo será $X_\eta \rho$, luego

$$X_\eta \rho = \sum_{k\geq 0} [D_x^k(u+\theta x u_1 + \lambda t P)] \cdot \frac{\partial \rho}{\partial u_k} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} D^k \left[(u+\theta x u_1 + \lambda t P) \cdot \frac{\delta \rho}{\delta u_k} \right] =$$

$$= (u + \theta x u_1 + \lambda t P) \cdot \frac{\delta \rho}{\delta u} + D_x(\cdot)$$

es la nueva d.c. . Examinando más detenidamente la forma de $X_\eta \rho$ podemos efectuar todavía algunas simplificaciones. Si tenemos en cuenta que por hipótesis ρ es una d.c. $P \cdot \frac{\delta \rho}{\delta u} = D_x(\cdot)$, y por lo tanto

$$X_\eta \rho = \sum_{k\geq 0} u_k \frac{\partial \rho}{\partial u_k} + \theta x u_{k+1} \frac{\partial \rho}{\partial u_k} + k\theta u_k \frac{\partial \rho}{\partial u_k} + D_x(\cdot) =$$

$$= \mathcal{E}_\theta \rho + \theta x D_x \rho + D_x(\cdot) = \mathcal{E}_\theta \rho - \theta \rho + D_x(\cdot)$$

siendo $\mathcal{E}_\theta$ el operador de Euler con índice θ.

Asi pues, dada $\rho[u]$ d.c. por $u_t = P[u]$ la función $\mathcal{E}_\theta \rho$

$$\mathcal{E}_\theta \rho = (X_\eta + \theta)\rho$$

es también una d.c. por $u_t = P[u]$ si $P[u]$ es θ-homogéneo.

Denotemos por $C(P)$ la clase de d.c. polinómicas en $u, u_1, \ldots$ pero que no dependen explícitamente de x ni de t como hemos hecho hasta aquí. Una de tales densidades ρ se escribe como una suma de monomios $m_j[u]$ que no constituyen por si solos d.c. ni las combinaciones lineales de una parte de ellos salvo la de coeficientes nulos d.c. por

$u_t = P u$.

Definción 3. Sea $\rho[u] = \sum_{j=1}^{N} m_j[u]$, $m_j[u]$ monomios no nulos. ρ se dirá irreducible si la suma anterior no puede romperse en suma de dos partes propias conservadas.

Bajo la condición de ser P θ-homogéneo, si ρ es d.c. por $u_t = P$

$$\mathcal{E}_\theta \rho = \mathcal{E}_\theta m_1[u] + \mathcal{E}_\theta m_2[u] + \cdots \tag{46}$$

es una d.c. por $u_t = P[u]$. Como ya se ha visto en este apartado

$$\mathcal{E}_\theta m_\lambda[u] = c_\lambda m_\lambda[u]$$

para cualquier monomio de un orden y grado ambos arbitrarios. La ecuación (21) nos lleva a la expresión siguiente para $\mathcal{E}_\theta \rho$

$$\mathcal{E}_\theta \rho = c_1 m_1[u] + c_2 m_2[u] + \cdots =$$
$$= c_1 \left[m_1[u] + \frac{c_2}{c_1} m_2[u] + \cdots \right]$$

siempre que $C_1 \neq 0$.

Proposición 4. $\mathcal{E}_\theta \rho = c\,\rho$, $c = const.$ (47)

Demostración:

$$\frac{1}{c_1} \mathcal{E}_\theta \rho - \rho = \left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right) m_2 + \left(\frac{c_3}{c_1} - 1\right) m_3 + \cdots$$

puesto que el miembro de la izquierda es una d.c. por $u_t = P[u]$, la combinación lineal de monomios del miembro de la derecha asi mismo lo es. Pero estos monomios forman parte de ρ y son todos los que in tervienen en ρ menos uno. En virtud de la hipótesis acerca de C(P) los coeficientes del miembro de la derecha han de ser nulos.

La proposición 4 nos dice simplemente que $\forall \rho[u]$ es θ-homogénea.

Teorema 1. Sea $u_t = P[u]$ una e.d.p. invariante bajo el grupo de Lie de dilataciones $u'(x,t) = u(x,t) + \varepsilon\,(u + \theta x u_1 + \gamma t P) + O(\varepsilon^2)$ ($\Longleftrightarrow$ $P[u]$, θ-homogéneo: $\mathcal{E}_\theta P = (\gamma + 1)\,P$). Entonces cualquier $\rho[u]$ d.c. polinómica en $u, u_1, \ldots$ sin dependencia explícita en x ni t es también θ-homogénea. Por consiguiente las d.c. polinómicas en $[u]$ son los polinomios que se construyen a partir de la expresión

$$\rho[u] = u^{\lambda}\,\Phi_{pol.}\left(\frac{u_1}{u^{\theta+1}}, \frac{u_2}{u^{2\theta+1}}, \ldots, \frac{u_k}{u^{k\theta+1}}, \ldots \right) \qquad (48)$$

La restricción hecha a las d.c. que no dependen explícitamente ni de x ni de t se debe a que realmente el teorema falla en este caso, como se puede ver en el sigiente ejemplo. Sea la ecuación KdV-modificada

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_1$$

con $P[u] = u^2 u_1 + u_3$ que satisface

$$\mathcal{E}_1\, P[u] = 4\, P[u]$$

y es por lo tanto homogéneo de grado 4 con índice θ = 1. Como se vio en el ejemplo del § 3

$$x\,\frac{u^2}{2} + 3t\left(\frac{u^4}{12} - \frac{u_1^2}{2}\right) \qquad (49)$$

es una d.c. por esta ecuación que es manifiestamente no homogénea en el sentido que aquí útilizamos.

Como nos ha demostrado un trabajo realizado con posterioridad, todo lo dicho en esta sección se puede extender a ρ con dependencia explícita en (x,t) y pensamos que a sistemas de ecuaciones en n variables $x_1 \ldots x_n$.

5. Propiedades generales de las d.c. por ecuaciones de evolución

En el apartado anterior hemos examinado con algún detalle las restricciones impuestas sobre las d.c. de una ecuación $u_t = P[u]$ cuando $P[u]$ es de una forma especial. Asociado a esa forma de P encontrábamos un operador diferencial lineal de primer orden $\mathcal{E}_\theta = \sum_{k\geq 0} (1+\theta k) u_k \frac{\partial}{\partial u_k}$ con la propiedad de dejar invariante el conjunto C(P) de las clases de d.c. polinómicas en la letra u y que no contienen explícitamente las coordenadas (x,t).

La pregunta que intentamos responder es la de cuántos de estos operadores pueden construirse dada una ecuación $u_t = P[u]$. Con otras palabras, caracterizar los operadores diferenciales que dejan C(P) invariante.

Por razones de sencillez nos vamos a limitar a los operadores de primer orden. La extensión de la teoría a órdenes más elevados debe seguir las mismas pautas que las esbozadas aquí, si bien el grado de dificultad aumenta considerablemente.

. Dada $\rho[u]$ d.c. por $u_t = P[u]$, $\frac{\delta}{\delta u} X_P \rho = 0$ ó bien de un modo equivalente $X_P \rho = D_x(\cdot)$. Los operadores diferenciales lineales de primer orden tienen la expresión general

$$\mathcal{X} = \sum_{k\geq 0} A_k[u] \cdot \frac{\partial}{\partial u_k} \quad , \quad A_k \in \mathcal{F}$$

Definición 4. $\mathcal{X}$ deja C(P) invariante si

$$X\rho \in C(P) \quad , \quad \forall \rho \in C(P)$$

Proposición 5. Si $\mathcal{X}$ deja C(P) invariante

$$[X, D_x] = \theta D_x \quad , \quad \theta = const. \tag{50}$$

Demostración:

X_A ha de preservar las d.c. triviales (la clase nula de C(P)).

Veamos qué tipo de operadores X_A satisfacen la ecuación (50). Desarrollando el conmutador $[X, D_x]$

$$[X, D_x] = \sum_{k\geq 0} \left(A_{k+1} - D_x A_k\right) \cdot \frac{\partial}{\partial u_k}$$

la condición (50) es sobre los A_k

$$A_{k+1} = D_x A_k + \theta u_{k+1} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Llamando $\xi = A_0 - u$ tendremos

$$X = X_\xi + \mathcal{E}_\theta = \sum_k (D_x^k \xi) \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_k (1+\theta k) u_k \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{51}$$

• Como estaba claro desde el principio los operadores de Lie-Bäcklund satisfacen (51) con $\theta = 0$, el operador responsable de la inhomogeneidad θD_x en el miembro de la derecha de (50) resulta ser precisamente el operador de Euler con índice θ que manejabamos en el § 4. Observamos que $\mathcal{E}_\theta^k$ no es del tipo Lie-Bäcklund.

Demos un paso más imponiendo a los X de (51) que respeten el caracter de C(P) como conjunto de d.c. por $u_t = P[u]$ puesto que la condición (50) es solo necesaria. Para ello formamos

$$\begin{aligned} X_P X \rho &= X X_P \rho + [X_P, X] \rho = \\ &= X D_x(\cdot) + [X_P, X] \rho = \\ &= D_x X(\cdot) + [X, D_x](\cdot) + [X_P, X] \rho \end{aligned} \tag{52}$$

utilizando (50)

$$X_P X \rho = D_x X(\cdot) + \theta D_x(\cdot) + [X_P, X] \rho \tag{53}$$

Proposición 6. Dado X del tipo (51) y una d.c. ρ cualesquiera de $u_t = P[u]$ X es también una d.c. si y solo si

$$[X_P, X] = \lambda D_x + \nu X_P \quad , \quad \lambda, \nu = \text{const.} \tag{54}$$

Demostración:

Si X cumple (54), según (53) la afirmación es cierta. Por otro lado, en (53) $X\rho$ d.c. $\Longrightarrow [X_P, X]\rho = D_x(\cdot)$. Puesto que $[X_P, X]$ es un operador diferencial de primer orden y la condición se estipula sobre cualquier ρ , se concluye (54).

La relación (54) puede utilizarse en dos sentidos distintos. Dado un X de la forma (51) determinado por la pareja $(\vartheta, \xi[u])$ encontrar funciones P [u] para las que se verifique (54). O por el contrario, para un P fijo buscar $(\theta, \xi[u])$

Como ejemplo de lo primero, hagamos ξ = 1, obteniendo así el operador X_ξ más sencillo $X_\xi = \frac{\partial}{\partial u}$ y θ = 0. Las funciones P[u] que satisfacen

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}, X_P\right] = \lambda D_x \quad , \lambda \text{ const.}$$

son

$$P[u] = \lambda u u_1 + Q(u_1, u_2, \dots) \quad , \text{ Q arbitraria}$$

por consiguiente, si ρ es una d.c. por $u_t = \lambda uu_1 + Q(u_1, u_2, \dots)$ lo mismo suce con $\partial\rho/\partial u$

La condición

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}, X_P\right] = \nu X_P$$

da para P

$$P = e^{\nu u} Q(u_1, u_2, \dots)$$

Sobre las funciones ξ puede afirmarse lo siguiente:

Proposición 7. Sea $\xi[u]$ tal que se verifique (54) con θ = 0. Entonces $[P, \xi] = X_P \xi - X_\xi P$ es un generador ζ de un grupo de invariancia Lie-Bäcklund de la ecuación $u_t = P[u]$.

Demostración:

De acuerdo con la identidad

$$[X_P, X_\xi] = X_{[P,\xi]}$$

si $X_{[P,\xi]} = \lambda D_x + \nu X_P$

$$[X_{[P,\xi]}, X_P] = 0 \tag{55}$$

puesto que $[D_x, X_P] = [X_P, X_P] = 0$

La consecuencia (55) se escribe también

$$0 = [P,[P,\xi]] = X_P[P,\xi] - X_{[P,\xi]}P \doteq D_t[P,\xi] - X_{[P,\xi]}P$$

que es la condición para que $\zeta = [P,\xi]$ sea un generador de invariancia, cosa que demuestra nuestra afirmación. En particular, la proposición confirma que los operadores X_ζ de invariancia Lie-Bäcklund dejan C(P) invariante.

Las propiedades de homogeneidad estudiadas en el apartado antetior se trasladan intactas al presente contexto.

Ejemplo. La ecuación $u_t = uu_1 + u_3$ KdV es θ-homogénea con θ = 1/2, ya que

$$\mathcal{E}_{1/2}(u_3 + uu_1) = (1+3/2)u_3 + uu_1 + (1+1/2)uu_1 = (1+\tfrac{3}{2})(uu_1+u_3)$$

El teorema § 4 $\Longrightarrow \forall \rho$ polinómicas de $u, u_1, \ldots$ θ-homogéneas y

$$\mathcal{E}_\theta\, \rho_n = c_n\, \rho_n$$

siendo $c_n = 1 +$ grado para las ρ_n de un cierto grado.

Según hemos visto antes $X_f = \frac{\partial}{\partial u}$ en este caso sobre una ρ d.c. nos proporciona otra d.c. . Si ρ_n es polinómica y no depende explícitamente en (x,t) $\frac{\partial \rho_n}{\partial u}$ conserva el mismo caracter que la ρ_n.

Calculamos a continuación el conmutador de $\mathcal{E}_\theta$ con $\frac{\partial}{\partial u}$

$$\mathcal{E}_\theta \frac{\partial}{\partial u} = \sum_k (1+\theta k) u_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{E}_\theta - \frac{\partial}{\partial u}$$

es decir

$$\mathcal{E}_\theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{E}_\theta = - \frac{\partial}{\partial u}$$

aplicándolo a ρ_n

$$\mathcal{E}_\theta \frac{\partial \rho_n}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{E}_\theta \rho_n - \frac{\partial \rho_n}{\partial u}$$

y puesto que $\mathcal{E}_\theta \rho_n = c_n \rho_n$

$$\mathcal{E}_\theta \frac{\partial \rho_n}{\partial u} = (c_n - 1) \frac{\partial \rho_n}{\partial u}$$

Podemos concluir así que $\frac{\partial \rho_n}{\partial u}$ es una d.c. con un grado inferior en 1 unidad al de la densidad ρ_n . El operador $\mathcal{E}_\theta$ nos proporciona la información acerca del caracter de la nueva d.c.

Todo lo anterior se puede comprobar "empíricamente" sobre las primeras d.c. de la serie infinita que posee KdV.

CONCLUSIONES

En relación con los métodos de invariancia aplicada a las ecuaciones en derivadas parciales, las transformaciones de Lie-Bäcklund se han caracterizado de una manera concisa en términos de una función ζ construida a partir de los generadores infinitesimales del grupo. De este modo se simplifican notablemente los cálculos y se tratan rigurosamente los grupos de invariancia

De los resultados del primer capítulo se sigue que esencialmente las ecuaciones del tipo KdV y Schrödinger no lineal con un grupo infinito de invariancia Lie-Bäcklund coinciden con las ecuaciones de este tipo que poseen transformaciones de Bäcklund, infinitas densidades conservadas, solitones y son integrables por el método del Scatt ring Inverso. Esto añade una nueva propiedad a las ya conocidas: grupos de Lie-Bäcklund de dimensión infinita. Con posterioridad hemos probado que tal cosa sucede de la misma manera en las ecuaciones

$$u_{tt} - u_{xx} = f(u)$$

Otra vez las funciones f(u) para las que esta ecuación admite un grupo de invariancia Lie-Bäcklund de dimensión infinita (generadores qu dependan de derivadas de un orden arbitrariamente alto) son las que poseen las propiedades mencionadas más arriba, que se dan para $f(u) = \operatorname{sen} u$ (Sine-Gordon), $f(u) = \operatorname{Sh} u$, $f(u) = e^u$ (Liouville) y $f(u) = - m^2 u$ (Klein-Gordon).

Para estudiar con comodidad estas cuestiones nos vimos obligados a introducir nuevos operadores del tipo del de Euler-Lagrange, las derivadas variacionales generalizadas $\frac{\delta}{\delta u_\alpha}$. Con los operadores de derivación total D^α y las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial u_\alpha}$ se desarrollan unos métodos algebráicos en los que aparecen de un modo natural las $\frac{\delta}{\delta u_\alpha}$.

Tanto por lo que se ve en la pag.49 y más adelante, las $\frac{\delta}{\delta u_\alpha}$ deben de ser de un uso corriente en otras cuestiones ligadas con las que aquí tratamos [20].

De este modo nos encontramos con un procedimiento sistemático para calcular las densidades conservadas por un sistema de ecuaciones de evolución. A título de ejemplo hemos determinado las densidades conservadas por una familia de ecuaciones de evolución que generaliza la ecuación del calor. La aplicación del procedimiento a otras ecuaciones podría a lo sumo plantear mayores dificultades de cálculo.

La cuestión de saber cuál sea la relación entre simetrías y densidades conservadas se trata en el capítulo III y posteriormente en la pag.90. Se ha probado que en el marco de los sistemas hamiltonianos existe una aplicación del conjunto de las densidades conservadas en el de las simetrías del tipo Lie-Bäcklund. También estudiamos la posibilidad de invertir esta aplicación y concluimos que no siempre se puede hacer.

Como ilustración del manejo simultáneo de simetrías y densidades conservadas, se ha analizado la ecuación de Schrödinger libre. Hacemos notar la existencia de un operador que nos permite obtener por re currencia todas las leyes de conservación de esta ecuación, el operador $(\frac{x}{2} + itD_x)$ asociado a la invariancia Galilei.

Este resultado deja abierta la cuestión acerca de la existencia de operadores que nos lleven de una densidad conservada a otra.

Tal cosa puede conseguirse con las transformaciones de Lie-Bäcklund aunque el resultado es casi siempre trivial. Pero también hay excepciones: los grupos de dilataciones, el grupo de Galilei,...

Un procedimiento análogo al empleado con la ecuación de KdV lo hemos llevado a cabo con posterioridad en la ecuación de Schrödinger no lineal

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + |\Psi|^2 \Psi = 0$$

En esta ecuación existe también un operador diagonal en el conjunto de las densidades conservadas, el operador de Euler generalizado

$$\mathcal{E}_1 = (1+k)(\Psi_k \frac{\partial}{\partial \Psi_k} + \bar{\Psi}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_k})$$

y en este caso, el grupo de Galilei nos da un destructor

$$x(\Psi_k \frac{\partial}{\partial \Psi_k} - \bar{\Psi}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_k}) + \Psi_{k-1} \frac{\partial}{\partial \Psi_k} - \bar{\Psi}_{k-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_k}$$

Aunque aparece explícitamente la coordenada x en el primer sumando, sobre las d.c. desaparece debido a la invariancia gauge de primera especie, cuyo generador infinitesimal es

$$i(\Psi_k \frac{\partial}{\partial \Psi_k} - \bar{\Psi}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}_k})$$

con la propiedad de anularse sobre las d.c. por esta ecuación.

Dejando a un lado las simetrías, determinamos la condición necesaria y suficiente que han de satisfacer los operadores diferenciales de primer orden para dejar invariante el conjunto de las d.c. por una ecuación de evolución dada. Llegamos así a la ecuación

$$[X, X_P] = \lambda X_P + \nu D_X$$

donde X es el operador buscado y X_P el campo vectorial tangente a las lineas del flujo definido por la ecuación.

Sería deseable en un estado más elaborado de la teoría que aquí se ha analizado, llegar a caracterizar aquellos sistemas de ecuaciones en los que los conjuntos de generadores de invariancia por un lado y por otro el de densidades conservadas sean finitamente generados en sentido algebraico mediante ciertos operadores diferenciales ligados de forma intrínseca a la propia estructura del sistema, tal como ocurre en al menos algunos casos lineales (ver Schrödinger).

Esta cuestión junto con la relación general entre densidades conservadas y simetrías constituyen las cuestiones abiertas más importantes de la teoría.

BIBLIOGRAFIA

[1] G.W. Bluman y F.D. Cole: "Similarity Methods for Differential Equations", Springer-Verlag (1974).
Ver también: L. Abellanas, F. Guil y L. Martínez Alonso, J.E.N. Report 440 (1979).

[2] S. Lie; Math. Annalen, 25, 71-151 (1885).

[3] F. Brickell y R.S. Clark; "Differentiable Manifolds", Van Nostrand New York (1970).

[4] H. Cartan; "Calcul Differentiel", Herman, Paris (1976).

[5] A.C. Scott, F.Y.F. Chu y D.W. McLaughlin, Proc. I.E.G.G. 61, 1443 (1973).

[6] M. Wadati; "Infinitesimal Transformation and Conservation Laws.." in "Nonlinear Evolution Equation solvable by the Spectral Transform", ed. by F. Calogero, Pitman(1978).

[7] M. Boiti y F. Pempinelli; Lecce (1978) (Submitted to Nuovo Cimento).

[8] N.H. Ibragimov y R.L. Anderson; Soviet Math. Dokl. 17, 437 (1976)
Mas información puede obtenerse de:
R.L. Anderson, S. Kumei y C.L. Wulfman; Rev. Mex. Fis. 21, 1 (1972); J. Math. Phys. 14, 1527 (1973); J. Math. Phys. 16, 2461 (1975).

[9] N.H. Ibragimov; Soviet Math. Dokl. 17, 1242 (1976).

[10] S. Kumei; J. Math. Phys. 18, 256 (1977).

[11] P. Olver, J. Math. Phys. 18, 1212 (1977).

12] F. Magri, J. Math. Phys. 19, 1156 (1978).

13] M.D. Kruskal, R. Miura y C.S. Gardner; J. Math. Phys. 11, 952 (1970).

14] J. Palacios: "Análisis Dimensional", Espasa-Calpe, Madrid (1964).

[15] L. Sedov: "Similitude et Dimension en Mecanique", Mir (1977).

[16] R. Abraham y F. . Marsden, "Foundations of Mechanics", The Benjamin Cummings P. Co. (1978).

[17] M.M. Vainberg; "Variational Methods for the study of Nonlinear Operators", Holden-Day, Inc. (1964).

[18] S. G. Mikhlin; "Mathematical Physics, an advanced course", North-Holland P. Co. (1970).

[19] A. Galindo y L. Martínez Alonso; Lett. Math. Phys. 2, 385 (1978).

[20] F. Guil y L. Martínez Alonso, "Generalized Variational Derivatives in Field Theory" (aceptado para su publicación por J.Phys. A.
Otra aplicación de las derivadas variacionales generalizadas a los sistemas hamiltonianos se da en: F. Guil y L. Martínez Alonso, "Técnicas del formalismo hamiltoniano en el estudio de transformaciones de Bäcklund" (Preprint J.E.N.).

[21] M.S. Berger; "Nonlinearity y Functional Analysis", Academic Press (1977).

[22] G. Birkhoff y G.C. Rota; "Ordinary Differential Equations", John Wiley and Sons (1978).

[23] C. Lanczos; "The Variational Principles of Mechanics" University of Toronto Press, (1970).

[24] S.P. Novikov, Funkt. Analy. 8, no.3, 54 (1974).

[25] I.M. Gel'fand y L.A. Dikii, Russian Math. Surveys 30:5, 77 (1975).

[26] Dorde Musicki, Publications de l'Institut Mathematique 23, 141 (1978).

[27] V. Arnold; "Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique", Mir (1976).

[28] L.D. Landau y L.M. Lifshitz; "Teoría Clásica de Campos", Reverté S.A. (1966).

[29] M. Reed; "Abstract Non-linear Wave Equations"; Lecture Notes in Mathematics, vol. 507. Springer-Verlag (1976).

[30] L. Abellanas y A. Galindo; Lett. Math. Phys. 2, 399 (1978).

[31] H. Steudel; Thesis (Friedrich-Schiller Universität, 1960).

[32] T. Dass; Phys. Rev. 145, 1011 (1966); 150, 1251 (1966).

[33] E. L. Hill; Rev. Mod. Phys. 23, 253 (1951).

[34] J. Rosen; Ann. Phys. 69, 349 (1972); 82, 54 (1974); 82, 70 (1974).
C. Palmieri y B. Vitale; Nuovo Cim. A66, 299 (1970); etc.

[35] N.H. Ibragimov; Teor. Mat. Fizika 1, no.3, 350 (1969).

[36] S. Kumei, Z. Math. Phys. 19, 195 (1978).

[37] L. Abellanas y A. Galindo (a aparecer en J. Math. Phys.).

[38] U. Niederer; Helv. Phys. Acta 51, 220 (1978).

[39] J. Moser; Adv. Math. 16, 197 (1975).

[40] C.S.Gardner; J. Math. Phys. 12, 1548 (1971).

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha acordó calificar la presente Tesis Doctoral con la censura de -
SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

Madrid, 3 de Octubre 1979