

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE FILOSOFÍA Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**  
Departamento de Lógica



TESIS DOCTORAL

**Extensiones del sistema L-3 de lógica trivalente**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Eduardo Jaime Sarabia Álvarez-Ude**

Madrid, 2015

Eduardo Jaime Sarabia Alvarez-Ude

TP  
1981  
210



\* 5 3 0 9 8 5 7 0 7 3 \*

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

x-53-202.256-3

EXTENSIONES DEL SISTEMA L3 DE LOGICA TRIVALENTE

Departamento de Lógica  
Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación  
Universidad Complutense de Madrid  
1981

© Eduardo Jaime Sarabia Alvarez-Ude  
Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografia  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1981  
Xerox 9200 XB 480  
Depósito Legal: M-31069-1981

R. JAIME SABIDO RIVERO-1939

EXERCICIOS DEL SEMESTRE DE LA LÓGICA GENERAL

Director: Dr. C. José María Sánchez  
Prof. Fernando de Lórcos  
Universidad Complutense de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
Facultad de Filosofía y Ciencias  
de la Educación,  
Sección de Filosofía  
Año 1939



INDICE

Indice	0
Introducción	1
1. La lógica L3	11
1.1 Introducción	12
1.2 Sintaxis I	17
1.3 Sintaxis II: Los lenguajes $L3A_i$	25
1.4 Semántica I: Interpretaciones	32
1.5 Semántica II: Valoraciones	41
1.6 Sintaxis III: Cálculos	48
1.7 Semántica III: Definiciones y Teoremas. Semántica para $L3A_i$	54
1.8 Relaciones entre L2 y L3	55
Notas al capítulo 1	61
2. El principio de unificación de Skolem y su aplicación a L3: Conjuntos-modelo, propiedades de consistencia y demostrabilidad	67
2.1 Introducción	68
2.2 Notación	70
2.3 Conjuntos-modelo trivalentes	71
2.4 Propiedades trivalentes de consistencia cuantificadas	81
2.5 Propiedades trivalentes de demostrabilidad cuantificadas	81
2.6 Completud de A3	85
Notas al capítulo 2	100
3. Cálculo axiomático A3 para la lógica de cuantificadores de L3	101
3.1 Introducción	103

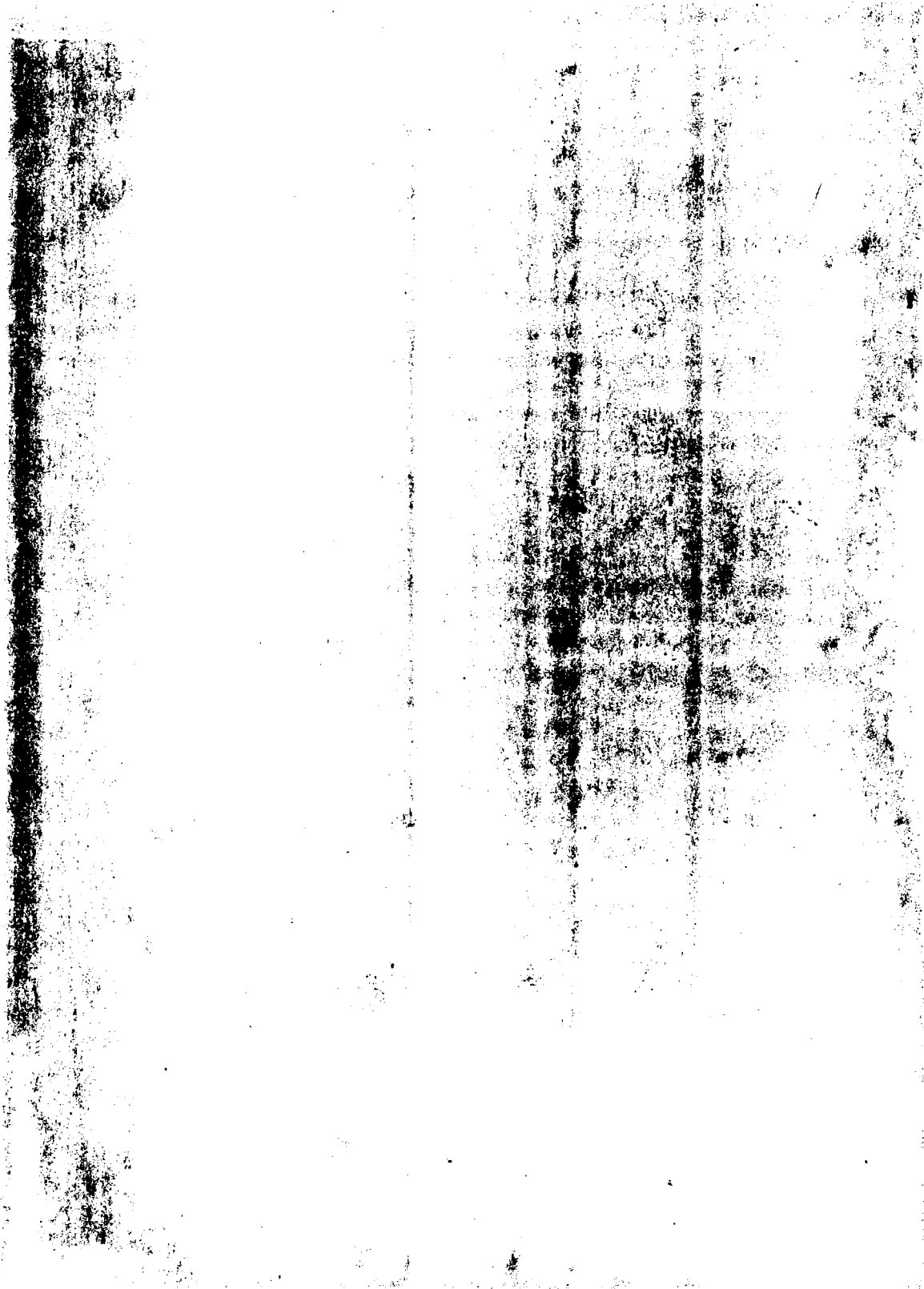
3.2 Postulados de AJ3. Reducción y demostración en AJ3.	108
3.3 Corrección de AJ3	110
3.4 Completud de AJ3 respecto a la consecuencia	113
Notas al capítulo 3	124
4. Cálculo S3. El "Hauptsatz"	125
4.1 Introducción	125
4.2 Definición del cálculo S3	131
4.3 Corrección de S3 respecto a la consecuencia	136
4.4 Reglas derivadas en S3	140
4.5 Completud de S3 respecto a la consecuencia	143
4.6 Eliminación de la regla de separación en S3 (Hauptsatz)	161
4.7 Una versión del Hauptsatz adecuada a B3. Equivalencia de B3 y S3.	174
Notas al capítulo 4	173
5. Cálculos de deducción natural H3 y HJ3	179
5.1 Introducción	179
5.2 El cálculo H3	181
5.3 Cálculo HJ3 de deducción natural para la lógica J3	198
Notas al capítulo 5	219
6. Cálculos secuenciales simétricos. El lema de Craig	220
6.1 Introducción	220
6.2 El cálculo S3-S1. Definición. Adecuación a L3	231
6.3 El teorema de interpolación (Lema de Craig)	238
6.4 El cálculo S2-S2	243
6.5 El cálculo S2-S2	247
Notas al capítulo 6	252
7. Los teoremas de Beth y Robinson en L3	253
7.1 Introducción	253
7.2 Teorema de definibilidad (Beth)	254

7.3 Teorema de consistencia de Robinson	142
Notas al capítulo 7	143
Apéndice I: Demostración del teorema para $\mathcal{L}_1$ por medio de fórmulas signadas	149
Apéndice II: Equivalencia de dos conceptos de decidibilidad implícita	170
Notas a los apéndices I y II	171
Conclusiones	172
Bibliografía	173



Fe de erratas

- p. 18: Los puntos (ii) y (iii) de la definición de subfórmula inmediata deben modificarse de la siguiente manera:
- (ii)  $F$  es una subfórmula inmediata de  $\neg F$  y  $F$ .  $F$  y  $G$  son subfórmulas inmediatas de  $F \supset G$ .
  - (iii)  $F \wedge A$  es una subfórmula inmediata de  $\exists x K$ , si  $A$  es una descripción.
- p. 32, línea 2: dice negación fuerte y debe decir negación débil.
- p. 76, línea 7: dice: Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto de fórmulas de  $L_3$ . Debe decir: Sea  $\mathcal{L}$  un conjunto de fórmulas que contiene sólo símbolos primitivos de  $L_3$ .
- pp. 82 y 83: la numeración está cambiada. Su orden es el inverso.
- p. 215: La tesis (26) puede eliminarse, aparece ya bajo (21)
- p. 258: La deducción de (17)-(20) a (21) y (22) no es correcta. La proposición 7.2.4, aunque demostrable, precisa de una nueva prueba que, por falta de espacio, no indicamos aquí.
- p. 282, línea 23: dice nodeducibilidad y debe decir no-deducibilidad.



## INTRODUCCIÓN

Las teorías científicas se desarrollan sobre la base de una precomprensión de su objeto y de los elementos que pueden aparecer en ellas que, justamente por ser epistemológicamente anterior a la teoría misma, no es justificable intersubjetivamente, sino que opera como garantía de la bondad de la teoría en la medida en que se expresa en ella, conformándosele.

A veces, esta precomprensión, estos prejuicios —dicho sea sin tono peyorativo alguno— aparecen explícitamente en la literatura científica, a menudo bajo el aspecto de axiomas, explicaciones informales, planteamientos generales o divulgación y otras permanecen implícitos y subyacentes a las teorías mismas. Sin pretender hacer teoría de la ciencia y sólo a título de ilustración, pondría como ejemplo de esta precomprensión, tanto en los aspectos de contenido como en los metodológicos, la concepción del lenguaje y de las notas y notas de la lingüística que se formula más o menos explícitamente en el "Cours de Linguistique Générale" de Saussure o las declaraciones explícitas sobre la naturaleza del lenguaje y de la lingüística de "Cartesian Linguistics" o "Aspects of the Theory of Syntax" de Chomsky. Otro ejemplo, éste tomado de un ámbito muy alejado de la lingüística y de tipo más concreto, sería el papel que las ideas de esfericidad y circunferencia como formas perfectas jugaron en el desarrollo de la astronomía antigua, como Hanson ha puesto de manifiesto.

Los ejemplos tomados de la lingüística, encajan en

evidencia la importancia que esta precomprensión del tema de la teoría puede llegar a tener. En los casos citados, no creo totalmente inadecuado decir que en buena parte es el cambio en la precomprensión del objeto de la teoría así como en las ideas metodológicas lo que produce el cambio de paradigma en la lingüística a que hemos asistido en los últimos años.

no parece claro que en el conjunto de ideas que definen ese pre-conocimiento del campo de una teoría se entremezclan consideraciones de tipo filosófico, con otras de carácter metodológico y otras que apuntan a los hechos básicos de que la teoría tiene que dar cuenta. Entre el segundo tipo de ideas podríamos apuntar a las ideas epistemológicas que de manera más o menos clara utilizan los científicos en un momento dado, por ejemplo, en la delimitación de los métodos científicos que se consideran válidos - experimentación, métodos deductivos, etc - y su importancia relativa. Como ejemplo del primer tipo de ideas hablaríamos de consideraciones como las relativas al tipo de entidades que pueden poblar un universo describible científicamente. Así, en lingüística, la posibilidad de apelar o no a las ideas hechas como un elemento explicativo de la adquisición del lenguaje.

En las ciencias formales es quizá más difícil captar o explicitar el tipo de ideas a que aludimos, a la vez que parecen tener una menor influencia que en las ciencias empíricas en el desarrollo del trabajo científico concreto. Considerar que los verdaderos matemáticos se inventan o que, por el contrario, se descubren, no influye gran cosa en el contenido de un teorema ni en el método de su demostración. No siempre es así, sin embargo: la puesta en cuestión de ciertos principios metodológicos,

por ejemplo, la negación de la validez universal de la ley de tercio excluso, entre otras cosas, ha llevado a la formulación intuicionista de las matemáticas.

La lógica no es una excepción en este aspecto, ni por la aparente falta de relevancia en el desarrollo científico de la precomprensión del objeto - al menos dentro de cada uno de los dos grandes paradigmas que enmarcan la historia de la lógica occidental - ni por la existencia, sin saberlo, de ese tipo de ideas que condicionan el desarrollo de la ciencia. Creo que se podría afirmar que la relación que la lógica simbólica guarda con la lógica tradicional es la misma que Claudio Albinetti atribuye a la guerra y la política: la persecución de los mismos fines por distintos medios. En efecto, el cambio fundamental de uno a otro paradigma es un cambio no tanto en los presupuestos de contenido sino en los presupuestos metodológicos, en la consideración de cómo se debe hacer la ciencia, y no en la definición del tema de la ciencia. Esto acompañado, desde luego, de un cambio en el conjunto de las aplicaciones buscadas. Entonces, sin embargo, que la lógica se ha de hacer al modo de la matemática o al modo de la filosofía no ha supuesto un cambio esencial en la definición del objeto de la lógica, que ha continuado siendo la determinación y justificación de las intenciones válidas. Esto no quiere decir que el cambio metodológico no haya supuesto modificaciones en el aspecto, tratamiento y afirmaciones de las teorías lógicas así como en los límites de lo que se considera tratable por la lógica. De todo ello he hablado. Y sin embargo, un lógico formal actual puede aceptar sin objeciones problemas la teoría aristotélica del silogismo categórico, o la ontología del silogismo hipotético, aunque la formule de otra manera, la modifique encuadrándola en un ámbito diferente o la complete.

Hay, sin embargo, ciertos presupuestos de contenido que se han mantenido a lo largo de la historia de la lógica y que sólo en épocas muy recientes se han visto sometidos a discusión. Presupuestos cuya modificación puede llevar a sistemas lógicos alternativos, en los que se ponen en cuestión ciertas afirmaciones que en algún momento han llegado a aparecer como el paradigma de la verdad lógica.

Entre estos presupuestos podríamos citar los siguientes, particularmente relevantes para nuestro caso. Primero, lo que podríamos llamar el presupuesto de dualidad, presupuesto que se podría expresar diciendo que hay justamente dos valores de verdad, lo verdadero y lo falso. Además, el presupuesto de unicidad, que vendría a afirmar algo así como que lo que tiene un valor de verdad sólo tiene uno. De quizá menor importancia teórica sería, por ejemplo, lo que llamaríamos el presupuesto de precisión, que afirmaría que todo atributo, para serlo, ha de poder ser bien definido, en el sentido de que para  $n$ -tuplo de objetos y atributo  $n$ -ádico, el  $n$ -tuplo de objetos tiene el atributo  $n$ -ádico en cuestión y se puede afirmar si lo tiene o no lo tiene, sin casos intermedios. No pretendemos aquí una discusión rigurosa de estos presupuestos, ni menos un análisis filosófico en profundidad de estas ideas, análisis que incorporaría, por ejemplo, un tratamiento de su posible equivalencia y del ámbito -lingüístico, epistemológico, ontológico- a que pertenecen. Sí, en cambio, queremos hacer notar que estos presupuestos se presentan en la lógica, fundamentalmente en sus consecuencias, pero no se justifican en ella, sino que son una medida de la aceptabilidad de una lógica dada. Así, no hay ley lógica que afirme que hay exactamente dos valores de verdad o que todo predicado  $n$ -ádico esté bien definido pero sí hay una ley lógica

como

$\Lambda(x \vee \neg x)$

en la lógica bivalente que, si la entendamos como expresión de la ley de tercio excluso, entonces, haciendo una alusión a su "significado" en lenguaje ontológico, por así decir, viene a afirmar que todo objeto tiene un atributo tal o no lo tiene, lo cual viene a ser una presentación - y una consecuencia directa - de lo que hemos llamado presupuesto de precisión - es decir que incluye la posibilidad de que un objeto tenga un atributo hasta cierto punto solamente - y a la vez de los presupuestos de unicidad y bivalencia, en una época esta vez lingüística y no ontológica, en cuanto podría explicarse diciendo que la fórmula en cuestión indica que todo enunciado es verdadero o falso. En este sentido la expresión presenta aquellos presupuestos, pero no los justifica. La justificación intrateórica de la expresión que comentamos, en tanto que ley lógica, viene dada por su verificabilidad en un cálculo adecuado o bien por su demostrabilidad como lógicamente verdadera en el marco de una semiótica. De hecho, en ambos casos la justificación o fundamentación como ley de la expresión es la prueba de que la expresión cumple las condiciones de una definición no de verdad lógica en general sino de verdad lógica en un lenguaje bien determinado. La fundamentación de la expresión como ley no usa directamente los presupuestos de que hablamos, los supone. Así, esta justificación o fundamentación resulta ser, y esto es lo importante, immanente al sistema lógico en que se produce la expresión: está cerrada sobre sí misma. Definimos un cálculo adecuado o una semiótica, pero una semiótica no es menos formal y teórica que el cálculo. Podemos, igual de bien, definir una semiótica y otro cálculo en que se necaran todos o algunos de los presupuestos a que hacen alusión

y el cálculo podría ser igualmente adecuado a esa semántica. Y es que los presupuestos que hemos apuntado antes, y algunos otros, con la garantía de la "bondad" de la teoría, en tanto en cuanto podemos aceptar que la definición de verdad lógica en un lenguaje  $L$  y la presentación de las verdades lógicas en ese lenguaje constituyen una buena reproducción de lo que consideramos verdad lógica en el ámbito preteórico.

Veamos esto desde otro punto de vista. Si aceptamos que todo objeto es igual a sí mismo o la versión lingüística de esta idea, que todo designador designa lo que designa y nos encontramos con una expresión de una lógica, en este caso  $L_3$ , como

$$\neg \forall x(x=x)$$

que se puede cular diciendo que no es verdad que todo objeto sea igual a sí mismo, o bien que puede haber designadores de los que no se puede afirmar que designan lo que designan (sería el caso en que un designador no tiene designatum), y además vemos que esa expresión es lógicamente verdadera en  $L_3$  y una tesis en cálculos adecuados para  $L_3$ , entonces nos veremos obligados no a discutir la validez de la demostración de la verdad lógica en  $L_3$  de ese enunciado, sino a rechazar, en principio en bloque, la definición de verdad lógica en  $L_3$  y toda la lógica que sobre ella se construye. Y a rechazarla no por razones intrateóricas como sería una demostración mal hecha, sino porque la teoría en su conjunto es inaceptable desde los presupuestos que sobre la lógica mantenemos, porque no es una "buena" lógica, una lógica sensata.

Así, los presupuestos de que hablamos tienden a ser inanes a la revisión desde dentro de la teoría misma: no hay lógica standard que nos lleve, desde dentro de la teoría, a modificar, por ejemplo, lo que hemos llamado principio de des-

lidad. Una lógica alternativa, no estándar, tampoco lo hará, puesto que está construida sobre la base de otros presupuestos. Esto en principio, aunque es innegable que si no existiera una lógica consata (perdónese me la vaguedad de la expresión) que, por ejemplo, negara ese presupuesto de dualidad - y no diestoy por la demostración de la imposibilidad de tal lógica - entonces se haría muy dudosa la posibilidad de la negación de ese presupuesto.

La discusión, entonces, sobre presupuestos de una teoría se mueve en un ámbito distinto al de la teoría científica misma. En el caso de la lógica, si hemos de poner nombres, se desarrollaría en el seno de la filosofía de la lógica.

Por otro lado, en tanto en cuanto se plantea la aplicabilidad de una teoría lógica, en tanto en cuanto se intenta tener una lógica aplicada, los presupuestos en que se funda son o se presentan como condiciones de esa aplicabilidad: si pretendemos utilizar la lógica estándar como herramienta en la aplicación teórica de las implicaciones válidas en el lenguaje natural, por ejemplo, es necesario que en ese lenguaje existan esas características a que aludimos al hablar de presupuestos en una teoría lógica: de nuevo, debe darse la cualidad, la precisión de los atributos, etc. Si esto no ocurre no quedará más que dos vías: la exclusión de ese ámbito como posible campo de aplicación de la teoría, al decreto, más o menos justificado de que el lenguaje natural está mal hecho desde un punto de vista lógico o la modificación de la teoría lógica estándar.

En los últimos tiempos esta segunda opción se ha visto más favorecida. Parece claro que en el lenguaje natural aparecen ciertos rasgos lógicos como serían la existencia

de modificadores que hacen imprecisos a los predicados que acompañan o de predicados no bien definidos, de enunciados a los que se duda en dar un valor de verdad y ello no por razones epistemológicas, contextos en que parece no cumplirse las leyes de la identidad, etc. Ante estos hechos, inmanejables por la teoría standard, se ha tendido a construir lógicas que permitan explicarlos, en todas las cuales se ha producido un alejamiento mayor o menor del núcleo de la lógica standard, la lógica bivalente de primer orden con identidad. Así, por ejemplo, en unos casos se han introducido intensiones por medio de lógicas de orden superior, manteniendo los principios de dualidad y precisión. En otros casos, como es el de las "fuzzy logic" se intenta explicar la no precisión de los predicados del lenguaje natural recurriendo a un conjunto infinito de valores de verdad y en otros, es el caso de la lógica L3 de que nos vamos a ocupar en el resto del trabajo, se ha prescindido del presupuesto de dualidad para intentar explicar problemas del lenguaje natural como la vaguedad, la presuposición o la existencia de designadores no-referenciales, conservando, sin embargo, un número finito -tres- de valores de verdad.

No es este el momento de entrar en análisis críticos de estas teorías parcialmente concurrentes. Sí se puede apuntar, sin embargo, que la discusión entre estos programas de investigación no ha hecho más que comenzar y que no parece que, en la situación actual, haya una teoría claramente preferible. Además, conviene poner de manifiesto que esta discusión es de relevancia filosófica por cuanto la decisión de la comunidad científica sobre cual de estas teorías, u otras concurrentes, es preferible, contribuirá a dejar claro cuáles de los presupuestos a los que hemos aludido son válidos, cuáles son hechos.

La lógica L3 es una lógica trivalente de primer orden, construida como extensión conservadora de la lógica trivalente standard cuya característica básica, desde el punto de vista que aquí comentamos, es la utilización de tres valores de verdad -verdadero, indefinido, falso - y que trata con ello de ser una lógica apropiada para el análisis lógico-semántico del lenguaje natural. No voy a dar aquí una presentación por extenso de esta lógica - a ello se dedica el primer capítulo de la tesis - pero sí quiero destacar que los valores de verdad indefinido y falso se mueven, por así decir, en el ámbito de lo que en la lógica standard es lo falso, que desde el punto de vista de la precomprensión que aquí se tiene de los fenómenos lógicos en el lenguaje natural, es un concepto que inadecuadamente coincide, en la lógica standard, con el de no-verdadero. Como ya he apuntado más arriba, el conjunto de aplicaciones pretendidas en esta teoría queda definido por la búsqueda de aplicación a la vaciedad de los predicados en el lenguaje natural, a los fenómenos de presuposición y a la existencia de denominaciones no-intencionales, entre otras aplicaciones. Se en su éxito en la explicación de estos fenómenos en el lenguaje natural donde L3 se presenta como una alternativa válida de análisis lógico-semántico del lenguaje natural. Sin embargo, no es aquí donde se realiza nuestro trabajo. En las páginas que siguen se va descubriendo el análisis del lenguaje natural y así, en cambio, comprobamos los paralelos inéditos de la lógica L3. El trabajo formal en lógica necesitara de justificaciones fuera del alcance de comentarios que produce, diríamos que tratamos de contribuir a mostrar que L3 no es un esbozo o propuesta de lógica, como otros tales como las lógicas polivalentes, sino una teoría formalizada rigurosa, una lógica de pleno derecho, si queremos decirlo así. Por lo tanto no vamos por un camino que consideramos prohibido, a saber, el de

rollo formal de la teoría.

Así, en el primer capítulo damos una presentación de L3. En él no se han buscado aportaciones nuevas sino simplemente presentar los elementos indispensables para la comprensión del resto de la tesis. Los demás capítulos se mueven en dos direcciones fundamentales: definición y análisis metalógico de una serie de cálculos y ciertas calas en la teoría de modelos de L3. Los capítulos 3, 4, 5 y parte del 6 se sitúan en la primera dirección. El resto del capítulo 6 y el séptimo, en la segunda. En los primeros definimos varios cálculos de tipo axiomático, secuencial y de deducción natural adecuados para L3 o para su lógica de enunciados y en los últimos tratamos básicamente de dar versiones apropiadas para L3 de los teoremas de Craig, Robinson y Beth. Un puesto especial ocupa el capítulo segundo, en el que se estudia el principio de unificación de Smullyan para la lógica L3 y un grupo de conceptos relacionados con él. Una buena parte de los resultados posteriores se basan en este capítulo. En los apéndices se tratan dos cuestiones -una demostración alternativa del Hauptsatz para el cálculo secuencial S3 y la equivalencia de dos conceptos de definibilidad- que si bien están íntimamente relacionadas con el resto del trabajo, exigen un tratamiento al margen del desarrollo general del mismo.

## 1. LA LOGICA L3

### 1.1 Introducción

En este primer capítulo definimos la lógica L3, a modo de introducción de la tesis y como base teórica necesaria para la comprensión de la misma. Como el resto de la tesis, este capítulo tiene un carácter marcadamente formal, por lo que prescindimos en general, salvo en el apartado dedicado a la semántica interpretativa, de indicar las motivaciones intuitivas de esta lógica que la justificarían como sensata, útil y apropiada dando razón, a la vez, de determinadas opciones teóricas.

En sus rasgos generales la lógica L3 se presenta como una lógica trivalente de primer orden, que constituye una extensión conservadora de la lógica bivalente standard a la que en lo que sigue denominaremos L2. Por extensión conservadora entendemos lo siguiente: El vocabulario lógico de L3 incluye el de L2 (en un sentido que precisa de ulterior cualificación) y todo teorema de L2 - en el ámbito de la teoría común de la cuantificación sin incluir la teoría de la identidad - es un teorema de L3. A la inversa, toda fórmula que sea a la vez una fórmula en L3 y L2, si es un teorema en L3, lo es también en L2.

En lo que sigue alternamos los párrafos dedicados a la sintaxis con los que estudian la semántica de L3, en la esperanza de lograr así una mayor claridad de exposición.

Si bien en este capítulo no hay ninguna aportación nueva, puesto que estos apartados responden al material contenido en los capítulos 1-3 de la parte II del libro de U. Blau "Die dreiwertige Logik der Sprache", considero necesaria esta presentación de la lógica L3 a fin de hacer comprensible el resto del trabajo.

## 1.2 Sintaxis I (1)

### (1) Vocabulario

(i) Un conjunto infinito enumerable de parámetros de predicado  $n$ -ádicos:  $p^n, q^n, p_1^n, q_1^n, \dots$  para cada número natural  $n$ . Designamos estos parámetros con las metavariables  $P^n, Q^n, P_1^n, Q_1^n, \dots$

(ii) Un conjunto suplementario de parámetros de predicado monádicos:  $a^1, b^1, c^1, \dots$ . La cardinalidad de este conjunto es también  $\aleph_0$ .

(iii) La constante de predicado diádica =

(iv) Un conjunto infinito enumerable de variables de individuo:  $x_1, x_2, x_3, \dots$  que designaremos con las metavariables  $X_1, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots$

(v) Los funtores  $-$ ,  $\neg$  y  $\wedge$  que llamamos negación fuerte, negación débil y conjunción, respectivamente, y que utilizamos autónimamente en el metalenguaje.

(vi) El cuantor nominal universal  $\wedge$ , que utilizaremos también autónimamente.

(vii) El signo de descripción u operador iota:  $\iota$

(viii) Paréntesis: ( , )

A partir de los signos comprendidos en los puntos (i) - (viii) definiremos más adelante (cfr. punto (8) de este apartado) los funtores y cuantores siguientes  $\top, \perp, +, \Gamma, \vee, \forall, \rightarrow, \leftrightarrow, \equiv, /, \boxplus, \nabla, \Delta$  todos los cuales serán utilizados autónomamente en el metalenguaje.

(2) Expresiones, pre-fórmulas y pre-descripciones

(i) Toda secuencia finita  $S_1 \dots S_n$  de signos de L3 es una expresión de L3.

(ii) Una expresión  $P^k S_1 \dots S_k$  formada por un parámetro de predicado k-ádico  $P^k$  seguido de k variables de individuo y/o pre-descripciones  $S_1, \dots, S_n$  es una pre-fórmula elemental.

(iii) Si  $S_1$  y  $S_2$  son pre-fórmulas, entonces  $\neg S_1, \neg S_1, S_1 \wedge S_2$  son prefórmulas j-complejas.

(iv) Si S es una pre-fórmula, X una variable de individuo, q un cuantor, entonces  $qXS$  es una pre-fórmula q-compleja y  $\iota XS$  es una pre-descripción.

(3) Cuantificadores, descriptor, dominios, variables ligadas y libres

(i) Si q es un cuantor y X es una variable de individuo,  $qX$  es un cuantificador y  $\iota X$  es un descriptor. Si  $qXS$  es una pre-fórmula y  $\iota XS$  es una pre-descripción, S es el dominio de  $qX$  y  $\iota X$ .

(ii) Si S es una pre-fórmula elemental y X aparece en S, entonces X está ligada por  $qX$  y  $\iota X$  en las expresiones

$qXS$  y  $\iota XS$ , respectivamente.

(iii) Si  $S$  es una pre-fórmula no elemental o una pre-descripción y  $X$  no está ligada en  $S$ , entonces  $X$  está ligada en las expresiones  $qXS$  y  $\iota XS$ .

(iv) Si  $S_1$  aparece en  $S$ ,  $X$  aparece no ligada en  $S_1$  y no hay cuantor o descriptor en  $S$  en cuyo dominio aparezca  $X$ ,  $X$  está libre en  $S$ . (Es claro que  $X$  puede aparecer libre y ligada en  $S$ ).

(v) Si el cuantificador  $qX$  o el descriptor  $\iota X$  aparecen en  $S$  y no hay ninguna variable  $X$  ligada por  $qX$  o  $\iota X$  en  $S$ , decimos que  $qX$  y  $\iota X$  son ligaduras vacías de  $X$  en  $S$ .

#### (4) Descripciones y fórmulas

(i) Si  $S$  es una pre-descripción sin ligaduras vacías en la que aparecen libres justo las variables  $X_1, \dots, X_j$ ,  $S$  es una descripción abierta en  $X_1, \dots, X_j$ .

(ii) Si  $S$  es una pre-descripción sin ligaduras vacías ni variables libres,  $S$  es una descripción.

(iii) Las descripciones y descripciones abiertas se llaman términos descriptivos. Términos descriptivos y variables de individuo se llaman términos.

(iv) Si  $S$  es una pre-fórmula sin ligaduras vacías en la que aparecen libres justo las variables  $X_1, \dots, X_j$ ,  $S$  es una fórmula abierta en  $X_1, \dots, X_j$ .

(v) Si  $S$  es una pre-fórmula sin ligaduras vacías ni variables libres,  $S$  es una fórmula.

(5) Fórmulas elementales y complejas

(i) Si  $S$  es una pre-fórmula de la forma  $P^k A_1 \dots A_k$  donde  $A_1, \dots, A_k$  son descripciones, entonces  $S$  es una fórmula elemental.

(ii) Si  $S$  es una fórmula y hay fórmulas  $F_1, F_2$  tales que  $S$  es de la forma  $\neg F_1, \neg F_1$  o  $(F_1 \wedge F_2)$ , entonces  $S$  es una fórmula j-compleja.

(iii) Si  $S$  es una fórmula,  $S_1$  una prefórmula y  $S$  es de la forma  $qXS_1$ , entonces  $S$  es una fórmula g-compleja.

(iv) Si  $S$  es una fórmula elemental o no es  $j$ -compleja, entonces es j-elemental.

(6) Signos del metalenguaje

Utilizaremos como metalenguaje el castellano, utilizando una parte de la teoría de conjuntos y una lógica bivalente clásica<sup>(2)</sup>. Como signos específicos del metalenguaje empleamos, entre otros, los siguientes:

(i)  $\&, \text{no}, \text{o}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$ , como funtores y cuantores metalingüísticos. A menudo, y con el mismo sentido, utilizamos las expresiones castellanas "y", "no", "o", "si... entonces", "si", "para todo ..." , " hay algún ...".

(ii)  $S_1, S_2, \dots$  : Expresiones y clases de expresiones de  $L_3$ .

(iii)  $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \dots$ : Metavariabes para las variables de individuo.

(iv)  $A, B, C, A_1, B_1, C_1 \dots$  : Descripciones.

(v)  $T, T_1, \dots$  : Términos

(vi)  $P^k, Q^k, P_1^k, Q_1^k, \dots$  : Metavariabes para

los parámetros de predicado  $k$ -ádicos.

(vii)  $F, G, H, F_1, G_1, H_1, \dots, F_n, G_n, H_n, \dots$  :  
Fórmulas de L3. Alguno de estos signos será empleado en el metalenguaje como constante, aunque su uso habitual sea el de variables.

(viii)  $q$  : Cuantor

(ix)  $a, b, c, d$  : Metavariabes para ciertos tipos de fórmulas a definir posteriormente.

(x)  $\beta, \beta_1, \dots$  : Valoraciones.

(xi)  $\varphi, \varphi_1, \dots$  : Interpretaciones.

(xii)  $E_1, E_2, \dots$  : Conjuntos de conjuntos de fórmulas (propiedades de conjuntos de fórmulas).

(xiii)  $M, N, M_1, N_1, \dots$  : Conjuntos de fórmulas.

(xiv)  $\equiv$  : Igualdad semiótica: " $S_1 \equiv S_2$ " equivale a  $S_1$  es de la forma  $S_2$ .

(xv)  $\Leftrightarrow, :=$  : Equivalencia e igualdad por definición, respectivamente.

A lo largo del trabajo iremos introduciendo otros signos propios del metalenguaje. El signo de la igualdad lo empleamos tanto en el lenguaje-objeto como en el metalenguaje. Cuando el signo de la igualdad,  $=$ , se emplea en el metalenguaje no como nombre de la igualdad lingüística sino como signo de la igualdad, separamos con un espacio sus argumentos. Por ejemplo:  $\varphi(A=B) = v$ .

Utilizamos también una clase de signos  $*_1, *_2, \dots$  que llamamos marcadores. Estos signos originan un tipo de expresiones metalingüísticas que llamamos predicados. Sea  $F$  una fórmula. Si en  $F$  se "sustituyen algunas descripciones (por lo menos una) por  $*_1, \dots$ , y ciertas descripciones (por lo menos una) por

por  $*_k$ , el resultado se llama predicado k-ádico. Como metavariables empleamos

$$F[*_1 \dots *_k] \quad , \quad G[*_1 \dots *_k] .$$

Dado un predicado  $F[*_1 \dots *_k]$  y términos  $T_1, \dots, T_k$ , si se cumple la condición:

- (\*) No aparece ningún  $*_i$  en  $F[*_1 \dots *_k]$  en el dominio de un cuantificador o descriptor que ligue una variable que aparece libre en  $T_i$  ( $i=1 \dots k$ )

entonces  $F[T_1 \dots T_k]$  es la fórmula (abierta) que se origina al sustituir todas las apariciones de  $*_i$  por  $T_i$ . (Cuando utilizamos  $F[T_1 \dots T_k]$  se supone que la condición (\*) se cumple). Llamamos marcados a los  $T_i$  que aparecen en  $F[T_1 \dots T_k]$  en lugar de  $*_1, \dots, *_k$ . Dada una (fórmula)  $F[T_1 \dots T_k]$ ,  $F[T'_1 \dots T'_k]$  y  $F[T''_1 \dots T''_k]$  se distinguen como máximo en los  $T_i$  "marcados" (3).

Con  $F[*_1]$  designamos un predicado monádico, obtenido a partir de la fórmula  $F[A_1 \dots A_k]$  por sustitución de una descripción  $A_i$  por un marcador  $*_1$ .

Utilizamos  $\mathcal{P}^k$  como abreviatura para la descripción  $\mathcal{P}^k[X]$ . Llamamos especialización de  $\mathcal{P}^k[X]$  de  $\mathcal{P}^k$  a la fórmula  $F[A]$ . Además, utilizamos  $\mathcal{P}_j^1$  como abreviatura de  $\mathcal{P}_j^1[X]$ .

#### (7) Grado de una fórmula, inducción

Habitualmente los razonamientos por inducción semiótica se harán según el grado de las fórmulas fuera de las descripciones. Para poder realizar este tipo de inducción definimos el grado de una fórmula fuera de las descripciones, abreviado en  $gr(F)$ , como sigue:

- (i) Si  $F \equiv \mathcal{P}^k A_1 \dots A_k$ , donde  $A_1, \dots, A_k$  son descripciones, entonces  $gr(F) = 0$ .

- (ii) Si  $F \equiv \neg G$ , entonces  $gr(F) = gr(G) + 1$
- (iii) Si  $F \equiv \neg G$ , entonces  $gr(F) = gr(G) + 1$
- (iv) Si  $F \equiv G \wedge H$ , entonces  $gr(F) = gr(G) + gr(H) + 1$ .
- (v) Si  $F \equiv \wedge XG[X]$ , entonces  $gr(F) = gr(G) + 1$ .

En algún caso haremos un razonamiento por inducción semiótica según el grado de una fórmula en una expresión parcial S. Para definir este concepto necesitamos algunas nociones auxiliares.

Expresión parcial: Toda expresión de L3 que aparece en la expresión S es una expresión parcial de S.

Subfórmula inmediata:

- (i) F es una subfórmula inmediata de F.
- (ii) F es una subfórmula inmediata de  $\neg F$  y  $\neg F$
- (iii)  $F[X]$  es una subfórmula inmediata de  $\wedge XF[X]$ .

Subfórmula: F es una subfórmula de G si F es una subfórmula inmediata de G o hay una subfórmula H de G tal que F es subfórmula inmediata de H.

Dominio de los funtores: Dada una subfórmula  $\neg F$ ,  $\neg F$ ,  $F \wedge G$  de H, llamamos dominio de  $\neg$  (respectivamente de  $\neg$  y  $\wedge$ ) a la subfórmula F ( respectivamente F, F y G).

Podemos ahora definir el grado de F en la expresión parcial S, abreviado en  $gr(F,S)$ , como sigue:

- (i) Si S no aparece en el dominio de ningún functor, cuantor o descriptor en F, entonces  $gr(F,S) = 0$ .
- (ii) Si hay una expresión parcial  $S'$  de F y el grado de F en  $S'$  es n y S es una expresión parcial de  $S'$  tal que hay exactamente un cuantor, functor o descriptor en cuyo dominio aparece S pero no  $S'$ , entonces el  $gr(F,S) = n + 1$ .

(8) Signos definidos

Sean  $F$  y  $G$  fórmulas o fórmulas abiertas y  $F[X]$  una fórmula abierta al menos en  $X$ . En la lista que sigue ha de entenderse que cada una de las expresiones lingüísticas construidas de acuerdo con el esquema metalingüístico de la derecha del signo de definición será considerada como el definiens de la correspondiente expresión lingüística formada de acuerdo con el esquema de la izquierda, el definiendum.

- (i)  $\top F : \Leftrightarrow \neg \neg F$ .  $\top F$  puede leerse como 'F es verdadero.'
- (ii)  $\perp F : \Leftrightarrow \neg \neg \neg F$ .  $\perp F$  puede leerse como 'F es falso.'
- (iii)  $+F : \Leftrightarrow (\neg F \wedge \neg \neg F)$ .  $+F$  puede leerse como 'F es indefinido.'
- (iv)  $F \vee G : \Leftrightarrow \neg(\neg F \wedge \neg G)$ .  $F \vee G$  puede leerse como 'F o G.'
- (v)  $F \rightarrow G : \Leftrightarrow \neg F \vee G$ . El definiens puede leerse como 'si F, entonces G.'
- (vi)  $\mathbf{I} F : \Leftrightarrow \neg +F$ .  $\mathbf{I} F$  puede leerse como 'F es verdadero o falso.'
- (vii)  $F \leftrightarrow G : \Leftrightarrow (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$ .  $F \leftrightarrow G$  puede leerse como 'F si y sólo si G'. Alternativamente, como 'F sii G'.
- (viii)  $F \equiv G : \Leftrightarrow (\top F \leftrightarrow \top G) \wedge (\perp F \leftrightarrow \perp G)$ . El definiens puede leerse como 'F equivale o es equivalente a G'.
- (ix)  $\boxed{\perp} : \Leftrightarrow \forall X(X=X)$ . Léase 'i' o bien 'la fórmula indeterminada'.
- (x)  $F/G : \Leftrightarrow (G \rightarrow F) \wedge (\neg G \rightarrow \boxed{\perp})$ . El definiens puede leerse como 'F bajo la presuposición de G'.
- (xi)  $\forall X F[X] : \Leftrightarrow \neg \exists X \neg F[X]$ .  $\forall$  es el cuantor nominal existencial.

(xi)  $\Delta xF[x] : \Leftrightarrow \bigwedge x(x=x \rightarrow F[x])$ .  $\Delta$  es el cuantor referencial universal. El definiens puede leerse como 'todo objeto existente tiene el atributo F'.

(xii)  $\nabla xF[x] : \Leftrightarrow \bigvee x(\top x=x \wedge F[x])$ .  $\nabla$  es el cuantor referencial existencial. El definiens puede leerse como 'hay un objeto existente que tiene el atributo F'.

### 1.3 Sintaxis II: Los lenguajes $L3A_i$

Por las razones que a continuación discutiremos, es conveniente definir una familia de extensiones  $(L3A_i)_{i \in I}$  -entendiendo extensión en el sentido de Shoenfield<sup>(4)</sup>- como sigue:

(i) Sea  $I$  un conjunto tal que cada elemento  $i$  de  $I$  es un conjunto de parámetros de individuo cuya cardinalidad puede ser superior a  $\aleph_0$ , es decir, puede ser un conjunto infinito no enumerable. El vocabulario de cada lenguaje  $L3A_i$  es el mismo que el de  $L3$  salvo que en  $L3A_i$  existe un conjunto  $i$  accesorio de parámetros de individuo. La única condición que imponemos sobre estos parámetros es que sean distintos entre sí y de los signos de  $L3$ .

(ii) Las nociones de pre-fórmula, pre-descripción, fórmula, descripción, predicado, etc. se definen del mismo modo que para  $L3$ , partiendo del nuevo conjunto de signos primitivos y tratando los nuevos parámetros como descripciones a la hora de definir las fórmulas de  $L3A_i$  y nociones relacionadas. Hablaremos de fórmulas (descripciones, predicados, etc.) en  $L3A_i$  o simplemente de  $L3A_i$ -fórmulas ( $L3A_i$ -descripciones,  $L3A_i$ -predicados, etc), para referirnos a las correspondientes expresiones de  $L3A_i$ .

Esta ampliación del lenguaje  $L_3$  se realiza para poder tratar de dominios de objetos infinitos no-enumerables. Como veremos a continuación, la semántica de  $L_3$  está definida de tal manera que se exige que todo objeto del dominio de individuos tenga un nombre, es decir, que haya una función suprayectiva de los términos no variables del lenguaje sobre el dominio de objetos de la interpretación. Dado que en  $L_3$  no se utilizan parámetros de individuo como signos primitivos, las descripciones hacen el papel de nombres de los objetos. Es claro que no hay más que un número infinito enumerable de expresiones en  $L_3$  y, con ello, un número infinito enumerable de descripciones. Por lo tanto, sólo hay nombres suficientes para dominios de objetos finitos o infinitos enumerables. Si disponemos de un conjunto infinito no-enumerable de parámetros de individuo, tenemos la posibilidad de que cada objeto en un dominio de cardinalidad igual o menor a la del conjunto accesorio de parámetros de individuo venga a ser nombrado por un parámetro o descripción y con ello se logra, sin modificar esencialmente la semántica, tratar de dominios no-enumerables. Por lo mismo, se hace necesario no sólo una extensión de  $L_3$  sino la definición de una familia de tales extensiones, puesto que no se establece un límite superior a la cardinalidad de los posibles dominios de objetos.

Se plantea en este contexto la siguiente dificultad: no podemos dar, de hecho, un conjunto infinito no-enumerable de signos, en el sentido de que es imposible escribir o decir en un lenguaje un conjunto infinito no-enumerable de signos, por las mismas razones que no se puede hacer en  $L_3$ . Sin embargo, esta dificultad no es más que aparente. Si aceptamos la existencia de un conjunto  $D$ , infinito no-enumerable, como dominio de objetos en una interpretación de  $L_3$ , también hemos de aceptar, por la teoría de

conjuntos, el conjunto de los pares  $\langle d, d \rangle$  donde  $d \in D$ . Podemos entonces, por ejemplo, tomar tales pares como nombres de los objetos de  $D$ . Tal conjunto tiene ciertamente la misma cardinalidad que  $D$ : existe una biyección entre ellos. También es posible tomar como nombre de cada elemento de  $D$  al elemento mismo<sup>(5)</sup>. En cualquier caso, es tan lícito aceptar la existencia de conjuntos no-enumerables como la de nombres para los elementos de esos conjuntos<sup>(6)</sup>.

Utilizaremos como metavariables para las expresiones de  $L3A_1$  los mismos signos que para  $L3$ , siempre que no exista riesgo de confusión. En otro caso indicaremos explícitamente a qué nos referimos.

#### 1.4 Semántica I: Interpretación

Vamos a definir en primer lugar una semántica para  $L3$  basada en la noción de interpretación. Posteriormente daremos una semántica que parte del concepto de valoración. En ambos casos se trata de semánticas que utilizan una interpretación sustitutiva o lingüística de los cuantores<sup>(7)</sup>. Hemos de ver que ambas formulaciones de la semántica de  $L3$  son equivalentes. En lo que sigue, damos primero la semántica para  $L3$  y sólo posteriormente la generalizamos a  $L3A_1$ .

##### 1.4.1. Interpretación

Def. 1.4.1.1: Interpretación<sup>(8)</sup>

Sea  $A$  un subconjunto, posiblemente vacío, del conjunto  $Des_{L3}$  de las descripciones de  $L3$ . Sea  $PPred_{L3}$  el conjunto de

los parámetros de predicado y  $\text{Frm}_{L_3}$  el conjunto de las fórmulas en  $L_3$ .  $D$  es un conjunto, posiblemente vacío, y  $\varphi$  una función

$$\varphi: \mathcal{A} \cup \text{PPred}_{L_3} \cup \text{Frm}_{L_3} \longrightarrow D \cup \bigcup_{k \geq 1} (\mathcal{P}(D^k) \times \mathcal{P}(D^k)) \cup \{v, f, i\}$$

tal que se cumple:

$$(i) \quad \begin{aligned} &\forall \Lambda (\Lambda \in \text{Des}_{L_3} \ \& \ \Lambda \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(\Lambda) \in D) \\ &\& \ \forall d (d \in D \Rightarrow \exists \Lambda (\Lambda \in \mathcal{A} \ \& \ \varphi(\Lambda) = d)) \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \forall P^k (P^k \in \text{PPred}_{L_3} \Rightarrow \varphi(P^k) = \langle I^+, I^- \rangle)$$

donde  $I^+, I^- \subseteq D^k$ , es decir,  $I^+, I^-$  son conjuntos de  $k$ -tuplos de elementos de  $D$  y donde  $I^+ \cap I^- = \emptyset$ . Abreviamos  $I^+$  como  $\varphi(P^k)^+$  y  $I^-$  como  $\varphi(P^k)^-$ .

$$(iii) \quad \forall F (F \in \text{Frm}_{L_3} \Rightarrow \varphi(F) \in \{v, f, i\})$$

cumpliéndose, además que

$$(iii.i) \quad F \equiv P^k \Lambda_1 \dots \Lambda_k \Rightarrow \varphi(F) = \begin{cases} v, & \text{si } \Lambda_1, \dots, \Lambda_k \in \mathcal{A} \ \& \ \langle \varphi(\Lambda_1), \dots, \varphi(\Lambda_k) \rangle \in \varphi(P^k)^+ \\ f, & \text{si } \Lambda_1, \dots, \Lambda_k \in \mathcal{A} \ \& \ \langle \varphi(\Lambda_1), \dots, \varphi(\Lambda_k) \rangle \in \varphi(P^k)^- \\ i, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(iii.ii) \quad F \equiv \Lambda = B \Rightarrow \varphi(F) = \begin{cases} v, & \text{si } \Lambda, B \in \mathcal{A} \ \& \ \varphi(\Lambda) = \varphi(B) \\ f, & \text{si } \Lambda, B \in \mathcal{A} \ \& \ \varphi(\Lambda) \neq \varphi(B) \\ i, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(iii.iii) \quad F \equiv \neg G \Rightarrow \varphi(F) = \begin{cases} v, & \text{si } \varphi(G) = f \\ f, & \text{si } \varphi(G) = v \\ i, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(iii.iv) \quad F \equiv \neg G \Rightarrow \varphi(F) = \begin{cases} v, & \text{si } \varphi(G) = f \ \text{o} \ \varphi(G) = i \\ f, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(iii.v) \quad F \equiv G \wedge H \Rightarrow \varphi(F) = \begin{cases} v, & \text{si } \varphi(G) = \varphi(H) = v \\ f, & \text{si } \varphi(G) = f \ \text{o} \ \varphi(H) = f \\ i, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(iii.vi) \quad F \equiv \Lambda x G[x] \Rightarrow \varphi(F) = \begin{cases} v, & \text{si } \forall \Lambda (\Lambda \in \text{Des}_{L_3} \Rightarrow \varphi(G[\Lambda])) = v \\ f, & \text{si } \exists \Lambda (\Lambda \in \text{Des}_{L_3} \ \& \ \varphi(G[\Lambda])) = f \\ i, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(iii.vii) Si  $S_i$  es igual o equivalente por definición a  $S_j$ , entonces  $\varphi(S_i) = \varphi(S_j)$ .

(iv) Si  $A \equiv \{XG[X]\}$ , entonces, si  $\exists A, \exists d(A \in \text{Des}_{L3} \ \& \ d \in D \ \& \ \varphi(G[A]) = v \ \& \ \forall B(B \in \text{Des}_{L3} \Rightarrow (\varphi(G[B]) = v \Rightarrow \varphi(B) = d))$ , entonces  $\varphi(\{XG[X]\}) = d$ . En otro caso  $\varphi(\{XG[X]\})$  queda indefinida, es decir,  $\{XG[X]\} \in \text{Des}_{L3} \setminus \mathcal{A}$ .

#### 1.4.2. Análisis de la definición de interpretación

##### (1) El dominio de objetos y la interpretación de los predicados

Hablamos de una interpretación  $\varphi$  sobre el dominio de objetos  $D$  para referirnos a un par  $\langle \varphi, D \rangle$  en que  $\varphi$  y  $D$  cumplen las condiciones de la anterior definición. Como vemos, el dominio de objetos puede ser vacío, a diferencia de lo que ocurre habitualmente en las formulaciones standard de la lógica bivalente. Considero, con Blau<sup>(9)</sup>, que desde el punto de vista puramente lógico es preferible asumir los menos presupuestos ontológicos posibles, incluyendo en estos presupuestos el de la existencia de algo.

La condición primera de la definición afirma que  $\varphi$  es una función suprayectiva de  $\mathcal{A}$  en  $D$ , donde  $\mathcal{A}$  es el conjunto de las descripciones que designan un objeto del dominio en la interpretación  $\varphi$ . Cada objeto del dominio tiene, pues, un nombre. Esto conlleva, como dijimos, el que los dominios de objetos puedan ser, como máximo, infinitos enumerables. Consecuencia de ello es que, por ejemplo, en  $L3$  no se pueda hablar de los números reales. Esta restricción se elimina al ampliar  $L3$  a  $L3A_1$ . La exigencia de que la restricción de  $\varphi$  al conjunto  $\mathcal{A}$  sea una función suprayecti-

va sobre  $D$  es una consecuencia del tipo de semántica de los cuantores que se utiliza en la presente definición. Llamamos sustitativa o lingüística a la semántica que interpreta la cuantificación a través de los valores de verdad de las especializaciones de las fórmulas cuantificadas. Del punto (iii.vi) de la definición se sigue que una fórmula del tipo  $\forall x P^1(x)$  es verdadera en la interpretación  $\varphi$  sii para toda descripción  $A$  la fórmula  $P^1[A]$  es verdadera en  $\varphi$ . Si hay un elemento de  $D$ , digamos  $d$ ; tal que no hay ninguna descripción  $A'$  con  $\varphi(A') = d$ , y si  $d \notin \varphi(P^1)^+$  y para toda descripción  $A$ ,  $\varphi(P^1[A]) = v$ , entonces  $\forall x P^1(x)$  es verdadero según la definición anterior, lo cual implicaría la inadecuación de la misma, puesto que no cumpliría la convención T tarskiana<sup>(10)</sup>: la traducción del enunciado en cuestión al metalenguaje semántico sería 'todo tiene la propiedad  $P^1$ '. Sin embargo, dado que  $d \notin \varphi(P^1)^+$ , tenemos que hay un objeto que no tiene la propiedad  $P^1$ . Se cumpliría entonces

" $\forall x P^1(x)$ " es verdadero y no todos los objetos tienen la propiedad  $P^1$

contra la convención T, que exigiría que se cumpliera

Si " $\forall x P^1(x)$ " es verdadero, entonces todos los objetos tienen la propiedad  $P^1$ .

Ya en los primeros planteamientos de este tipo de interpretación lingüística de los cuantores se puso de manifiesto esta necesidad<sup>(11)</sup>. No se exige, en cambio, que haya un único nombre para cada objeto: diversas descripciones pueden designar el mismo individuo.

Llamamos referenciales en la interpretación  $\varphi$  a las descripciones  $A$  tales que  $\varphi(A) \in D$ , es decir, a los elementos del conjunto  $\mathcal{A}$ . El conjunto  $Des_{1,3} \mathcal{A}$  es el conjunto de las descripciones no-referenciales. Hay que notar que en la definición de interpretación no hay nada que exija que  $D \neq \emptyset$ : puede

no haber descripciones referenciales en una interpretación  $\langle \varphi, D \rangle$ . Esto es sólo posible, evidentemente, en el caso de que  $D = \emptyset$ .

La condición (ii) de la definición de interpretación exige que una interpretación asigne a cada parámetro de predicado un par de conjuntos  $\varphi(P^k)^+$ ,  $\varphi(P^k)^-$ , que llamamos dominio positivo y dominio negativo de  $P^k$  en  $\varphi$ . Cada elemento en estos dominios es un  $k$ -tuplo ordenado de elementos de  $D$ . Se admite la posibilidad de que uno de los elementos del par, o los dos, sea vacío.  $\varphi(P^k)^+$  y  $\varphi(P^k)^-$  deben ser disjuntos. Es claro que si  $\varphi(P^k)^+ \cup \varphi(P^k)^- \neq D^k$  existe un conjunto no vacío  $D^k \setminus (\varphi(P^k)^+ \cup \varphi(P^k)^-)$  al que llamamos dominio neutro de  $P^k$  en  $\varphi$ . Designamos este dominio neutro con  $\varphi(P^k)^0$ . Intuitiva e informalmente diremos que el dominio positivo de  $P^k$  está formado por los  $k$ -tuplos de objetos en  $D$  que de manera clara tienen la propiedad  $P^k$  o están en la relación  $P^k$ .  $\varphi(P^k)^-$  es la clase de  $k$ -tuplos que de manera no menos clara y precisa no están en la relación  $P^k$ . El dominio neutro de  $P^k$  en la interpretación  $\varphi$  representa la zona de vaguedad del predicado  $P^k$ . Recordemos que la lógica  $L3$  está construida con el fin de tener un instrumento formal apropiado al análisis lógico del lenguaje natural, en donde uno de los problemas lógicos existentes es precisamente el de la vaguedad de los predicados.

## (2) La trivalencia

El punto (iii) de la definición que comentamos puede interpretarse como principio de trivalencia: la definición de interpretación exige que toda fórmula o enunciado tenga uno, y sólo uno, de los tres valores de verdad, verdadero  $v$ , falso  $f$  e indeterminado  $i$ . Las condiciones (iii.1)-(iii.vi) constituyen una definición por recursión del valor de verdad de las fórmulas, tomando como base el valor de verdad de las fórmulas elementales.

Según (iii.i) una fórmula elemental es verdadera en una interpretación  $\varphi$  exactamente cuando está formada por un parámetro de predicado  $k$ -ádico seguido de  $k$  descripciones referenciales en la interpretación  $\varphi$  y el  $k$ -tuplo formado por los objetos designados por las descripciones pertenece al dominio positivo del parámetro de predicado en esa interpretación. Si las descripciones son referenciales y el  $k$ -tuplo de objetos que designan está en el dominio negativo del parámetro de predicado, entonces la fórmula elemental es falsa. Finalmente, si alguna de las descripciones no es referencial o, siendo referenciales las descripciones, el  $k$ -tuplo de objetos que designan está en el dominio neutro del parámetro de predicado, la fórmula elemental es indeterminada. Por otro lado, si la fórmula elemental tiene la forma  $A=B$ , entonces, si  $A$  y  $B$  son descripciones referenciales, entonces la fórmula es verdadera o falsa según que  $A$  y  $B$  designen o no el mismo objeto en la interpretación  $\varphi$ . Si una de las descripciones, o las dos, no son referenciales, entonces la fórmula es indeterminada. Esto es lo que afirma la condición (iii.ii) de la definición de interpretación. Esta condición (iii.ii) implica que  $D$  se considera un conjunto en sentido clásico y por ello se supone que "(a) Para todo  $d$  vale que o bien es un elemento de  $D$  o no lo es.

(b) Los elementos  $d_1, d_2$  de  $D$  o bien son idénticos entre sí o bien no lo son"<sup>(12)</sup>.

Es decir, se supone que la igualdad es un predicado que no tiene zonas de vaguedad y lo mismo cabe decir de la pertenencia al dominio  $D$ . Que estos supuestos sean evidentes es algo discutible, como el mismo Blau ha puesto de manifiesto<sup>(13)</sup>. Es preciso reconocer, sin embargo, que prescindir de estas suposiciones nos apartaría radicalmente de la lógica bivalente clásica.

Quizá sea este el momento de apuntar alguna dificultad accesoria en el tipo de semántica que estudiamos, aunque no sea de tipo formal sino que se plantea al considerar las aplicaciones de L3. Como ya hemos dicho, L3 se construye para analizar la lógica del lenguaje natural, como una teoría de esa lógica. Desde este punto de vista hay que poner de manifiesto que el tipo de semántica que estamos dando origina formalizaciones incorrectas: el enunciado

(1) Pienso en Alicia

cuando Alicia es el nombre de la protagonista de alguno de los libros de Lewis Carroll, debería formalizarse -tomando Alicia como una descripción- como (1f)

$$(1f) p(\iota x q_1 x)(\iota x q_2 x)$$

donde  $pxy$ :  $x$  piensa en  $y$ ;  $q_1 x$ :  $x$  es el que escribe estas líneas;  $q_2 x$ :  $x$  es la protagonista de 'Alicia en el País de las Maravillas'. Según la semántica que hemos definido anteriormente, (1f) tiene el valor de verdad 1 puesto que ' $\iota x q_2 x$ ' no es referencial. Sin embargo (1) es verdadero. Luego la formalización no tiene, en la interpretación deseada el mismo valor de verdad que el enunciado que se formaliza, siendo, por tanto, una formalización incorrecta. Blau<sup>(14)</sup> propone solucionar este tipo de problemas por medio de una distinción entre lugares argumentales referenciales y no referenciales de un predicado. Según esta concepción, cada lugar argumental de un predicado se caracteriza por un índice 'r' o 'n' según que el lugar en cuestión sea referencial o no, es decir, según que el significado del predicado en cuestión exija de cada argumento que sea referencial o no. Por ejemplo, el predicado ' $x$  piensa en  $y$ ' se formalizaría por medio del parámetro  $p^{rn}$ , indicando con ello que el pensador ha de existir mientras que lo pen-

sado no ha de existir necesariamente. La formalización de (1) sería, desde esta nueva perspectiva, (1f'):

$$(1f') \quad p^{rn}(\cup xq_1x)(\cup xq_2x)$$

La semántica se modificaría entonces sustituyendo la condición (ii) por otra que exigiera que  $\varphi(P^k)^+$ ,  $\varphi(P^k)^-$  sean conjuntos disjuntos de k-tuplos tales que cada elemento del k-tuplo fuera o bien un objeto del dominio D (en el caso de los lugares argumentales referenciales) o bien un término (en los lugares no referenciales). La condición (iii.i) se modificaría en el sentido de considerar verdadera una fórmula elemental de la forma

$$p^{n_1 \dots n_k} \Lambda_1 \dots \Lambda_k$$

donde  $n_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) es un índice 'r' o 'n' y  $\Lambda_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) es una descripción, en el caso de que  $\langle \varphi(\Lambda_1), \dots, \varphi(\Lambda_k) \rangle \in \varphi(p^{n_1 \dots n_k})^+$ .

La falsedad de la fórmula se definiría de modo correspondiente. La modificación de la condición (ii) traería consigo un cambio en la condición (i), en el sentido de que  $\varphi(\Lambda) = d$ , para algún  $d \in D$ , si  $\Lambda \in \mathcal{A}$  y  $\varphi(\Lambda) = A$  si  $\Lambda \notin \mathcal{A}$ . Desde el punto de vista formal el cambio en la condición (i) haría de  $\varphi$  una función total sobre el conjunto de las descripciones, lo que sin duda sería una cierta simplificación de la semántica. Sin embargo, la sustitución de parámetros de predicado tropezaría con mayores dificultades que las que existen en la formulación de L3 que aquí utilizamos. No entraremos aquí en estos problemas y seguiremos utilizando la formulación de L3 que hemos presentado, puesto que es más sencilla desde el punto de vista formal y los problemas aquí planteados caen fuera del ámbito del trabajo, que no se ocupa de la aplicación de L3 al lenguaje natural, sino del desarrollo de temas formales.

A propósito del tema de la trivalencia queremos

hacer notar que, desde un punto de vista intuitivo o preformal, el valor de verdad verdadero se entiende en L3 del mismo modo que lo entiende -preteóricamente- la lógica standard. Por el contrario, la distinción entre los valores de verdad indeterminado y falso pretende ser un análisis más fino que el de la lógica bivalente del concepto intuitivo de 'no verdadero', que en L2 se hace coincidir con el de falso. Utilizando un esquema de Blau<sup>(15)</sup>, representaríamos las relaciones entre verdadero y falso en L2 y la tricotomía verdadero - falso - indeterminado en L3 como sigue:

verdadero		falso
verdadero	indeterminado	falso

Con un ejemplo: un enunciado no verdadero como:

(2) Pegaso duerme en cabo Sounlon

se interpreta en L2 como falso. En L3 se acepta como no verdadero, pero se continúa el análisis mostrando que la negación natural de (2),

(3) Pegaso no duerme en cabo Sounlon

puede justificarse afirmando (4) o (5)

(4) Pegaso no duerme en cabo Sounlon sino en Delfos

(5) Pegaso no duerme en cabo Sounlon ni, para decirlo todo, en ningún otro sitio, puesto que Pegaso no existe

Si (4) no es verdadero y (5) sí, la no verdad de (2) se considera falsedad en L2 e indeterminación en L3. Volveremos sobre esto más adelante. En cualquier caso, estas observaciones han de entenderse, insisto, desde un punto de vista preteórico. Desde el punto de vista de la teoría formal manejamos exclusivamente un conjunto de

tres objetos, que designamos con  $v, f$  e  $i$  y de cuya naturaleza sólo nos interesa saber que son distintos entre sí y del resto del vocabulario y expresiones de  $L3$ .

(3) Semántica de los funtores primitivos

Las condiciones (iii.iii)-(iii.v) de la definición de interpretación nos aseguran de que toda función de interpretación  $\varphi$  interpreta los funtores  $\neg$ ,  $\neg$  y  $\wedge$  como funciones de verdad. En primer lugar, el funtor  $\neg$  se interpreta como negación fuerte o presupositiva (starke Negation, präsupponierende Negation). Podemos hacer explícita la operación que llamamos negación fuerte por medio de la siguiente tabla de verdad, donde  $F$  es una fórmula:

F	$\neg F$
v	f
f	v
i	i

Esta negación, que aparece muy a menudo en la literatura sobre lógica trivalente<sup>(16)</sup> representa uno de los dos tipos de negación en  $L3$ . Con ella se pretende captar en el lenguaje lógico un tipo de negación que aparece frecuentemente en el lenguaje natural: No parece insensato afirmar que la negación en un lenguaje como el castellano es ambigua y que esta negación fuerte es una de sus interpretaciones. Consideremos los siguientes ejemplos:

- (1) El agua no tiene color
- (2) El éter no tiene color

Podemos parafrasear (1) y (2) de dos maneras diferentes:

- (1') El agua es incolora  
 (1'') No es verdad que el agua tenga color  
 (2') El éter es incoloro  
 (2'') No es verdad que el éter tenga color

(1') y (1'') son dos lecturas diferentes de (1). Lo mismo vale decir de (2') y (2'') respecto de (2). Creemos que (1') y (1'') (respectivamente, (2') y (2'')) tienen formas lógicas diferentes: Si (2') y (2'') tuvieran la misma forma lógica serían lógicamente equivalentes, se implicarían entre sí. Consideremos, sin embargo, los enunciados (3) y (4) donde  $\vdash_1$  significa "de ... se sigue, en ciertos idiolectos castellanos (o "intuitivamente"), que ...":

- (3) El éter es incoloro  $\vdash_1$  No es verdad que el éter tenga color  
 (4) No es verdad que el éter tenga color  $\vdash_1$  El éter es incoloro

Claramente, la afirmación (3) es verdadera, mientras que (4) no lo es. ¿Por qué?. Una afirmación como (3) o (4), que afirma que existe una relación de consecuencia, desde un punto de vista "intuitivo" o preformal entre dos enunciados, es verdadera cuando no hay una situación tal que en ella es verdadero el primer enunciado y no es verdadero el segundo. Existe, sin embargo, una situación así, en la que (2'') es verdadero y (2') no lo es, a saber, la situación real, en la que el éter no existe (evidentemente, no me refiero en los ejemplos que consideramos al gas éter sino al pretendido soporte de las interacciones entre los cuerpos celestes). Si el éter no existe no es verdad que el éter tenga color, desde luego, pero eso no implica que sea incoloro: para que algo sea incoloro, como para que tenga color, es necesario que ese algo exista. Podemos afirmar, entonces, que las dos paráfrasis de (2)

no son lógicamente equivalentes y que la negación que aparece en (2) es ambigua. Esta ambigüedad de la negación no se percibe habitualmente, puesto que tendemos a hacer afirmaciones sólo acerca de objetos de los que suponemos que existen. Si (1') y (1''). Se suelen percibir como sinónimos es porque sabemos de antemano que la presuposición de que el agua existe se cumple.

La negación fuerte, caracterizada por mantener las presuposiciones de los enunciados que se niegan, la negación ejemplificada en (1') y (2'), es representada formalmente por el functor que estamos considerando: una fórmula de la forma  $\neg F$  se comporta como la negación clásica bivalente en el caso de que  $F$  tenga un valor de verdad clásico, es decir, en el caso de que  $F$  sea verdadera o falsa. En el caso de que  $F$  sea indeterminada  $\neg F$  es indeterminada también. Supuesta la interpretación de (2) como (2'), con negación fuerte, formalizaríamos (3)

(3) El éter tiene color

como (3f), tomando -inadecuadamente, pero sin consecuencias aquí- 'el éter' como una descripción:

(3f)  $p(\lambda xqx)$

donde  $px$ :  $x$  tiene color;  $qx$ :  $x$  es el éter, mientras que la formalización de (2) y (2') sería (2f)

(2f)  $\neg p(\lambda xqx)$

Supuesta una interpretación como la que utilizamos implícitamente aquí, (3f) sería una fórmula indeterminada, puesto que ' $\lambda xqx$ ' es una descripción no referencial, e igualmente sería indeterminada (2f). Esto parece responder a nuestra intuición sobre la diferencia entre los dos tipos de negación.

Si el functor  $\neg$  representa la negación fuerte del

lenguaje natural, el segundo funtor que vamos a analizar es el correlato formal de la negación débil, la negación que se ejemplifica en (1'') y (2''): Si aceptamos que (1) y (2) son respectivamente verdadero e indeterminado, (1'') y (2'') son intuitivamente verdaderos. 'No es verdad' se comporta como un funtor que construye un enunciado verdadero del tipo 'no es verdad que F' cuando F es falso o indeterminado, y un enunciado falso cuando F es verdadero. Esto responde a la interpretación del funtor  $\neg$ , cuyas condiciones de verdad, definidas en (iii.iv), damos aquí en forma de tabla de verdad:

F	$\neg$ F
v	f
f	v
ι	v

Esta negación, al igual que la negación fuerte, se comporta como la negación bivalente en el caso de valores de verdad clásicos.

El tercer funtor primitivo, la conjunción  $\wedge$  (punto (iii.v) de la definición de interpretación), es de nuevo una función de verdad trivalente clásica<sup>(17)</sup>. Su tabla de verdad sería la siguiente:

F	G	$F \wedge G$
v	v	v
v	f	f
v	ι	ι
f	v	f
f	f	f
f	ι	f
ι	v	ι
ι	f	f

F	G	F $\wedge$ G
t	t	t

#### (4) Cuantificadores y descripciones

En el punto (iii.vi) de la definición que comentamos se establece la interpretación del cuantor universal: una fórmula  $\wedge XG[X]$  es verdadera en la interpretación  $\varphi$  si toda fórmula  $G[A]$  es verdadera, es decir, si son verdaderas todas y cada una de las especializaciones de la fórmula  $\wedge XG[X]$ .  $\wedge XG[X]$  es falsa si hay al menos una especialización  $G[A]$  tal que  $\varphi(G[A]) = f$ . La fórmula es indeterminada en  $\varphi$  si no hay ninguna especialización que sea falsa en  $\varphi$  y hay al menos una especialización de la fórmula que es indeterminada. Como ya dijimos, dado que en este tipo de semántica, lingüística o sustitutiva, no hay referencia explícita al dominio de objetos en la interpretación de los cuantores, la adecuación de la definición de verdad se logra por el camino indirecto de la utilización de "nombres" de los objetos. Cuando la fórmula  $G[A]$  es verdadera para toda descripción A, si todo objeto viene a ser nombrado por una descripción, entonces ocurre, dicho sea sin pretensiones de rigor, que todo objeto tiene la propiedad G y, con ello, la traducción metalingüística de la fórmula  $\wedge XG[X]$  es verdadera también. Como vemos, este tipo de semántica interpreta la cuantificación universal como una conjunción, posiblemente infinita, de enunciados.

Dunn y Belnap<sup>(18)</sup> han puesto de manifiesto ciertas dificultades en la interpretación sustitutiva de los cuantores. Estos problemas se plantean en relación con la completud en sentido fuerte o completud respecto a la consecuencia (strong completeness, Folgerungsvollständigkeit). Decimos que un sistema de-

ductivo  $\mathcal{D}$  es completo en sentido fuerte si ocurre que cuando la fórmula  $F$  es consecuencia en sentido semántico de la clase de fórmulas  $H$ , entonces  $F$  es sintácticamente deducible en  $\mathcal{D}$  de  $H$ . Consideremos ahora el conjunto (1)

$$(1) \quad \{P^1A_1, P^1A_2, \dots, P^1A_n, \dots, \bigwedge XP^1[X]\}$$

(1) es un conjunto infinito de fórmulas en  $L_3$ . Es claro que  $\bigwedge XP^1[X]$  es una consecuencia semántica de la clase de fórmulas  $\{P^1A_1, \dots, P^1A_n, \dots\}$  puesto que, según las condiciones de verdad de una fórmula cuantificada universalmente que da la definición 1.4.1.1., si todas las especializaciones  $P^1A_1, P^1A_2, \dots, P^1A_n, \dots$  de la fórmula  $\bigwedge XP^1[X]$  son verdaderas en una interpretación  $\varphi$ , también lo es la fórmula  $\bigwedge XP^1[X]$ . Sin embargo,  $\bigwedge XP^1[X]$  no es deducible de esa clase de premisas en un sistema deductivo completo con respecto a la consecuencia: si lo fuera, habría un subconjunto finito  $M^0$  de  $\{P^1A_1, P^1A_2, \dots, P^1A_n, \dots\}$  a partir del cual se deduciría  $\bigwedge XP^1[X]$ , según la definición habitual de deducción. Ahora bien, si el sistema en cuestión es completo en sentido fuerte entonces  $\bigwedge XP^1[X]$  sería consecuencia semántica de  $M^0$ , es decir, de un subconjunto finito de (1), lo cual es evidentemente falso. Dicho de otra manera: la semántica que se define en la def. 1.4.1.1. es tal que el teorema de compacidad no se cumple de manera general: el conjunto (2)

$$(2) \quad \{P^1A_1, P^1A_2, \dots, P^1A_n, \dots, \neg \bigwedge XP^1[X]\}$$

es insatisfacible, en el sentido de que no hay ninguna interpretación  $\varphi$  tal que  $\varphi(F) = v$ , para toda fórmula  $F$  en (2), y sin embargo no hay ningún subconjunto finito de (2) que sea insatisfacible.

Para evitar este problema utilizaremos la noción de conjunto de fórmulas infinitamente ampliable o conjunto de

fórmulas paramétricamente limitado (infinitely extendible set<sup>(19)</sup>; beschränkte Formelmeng<sup>(20)</sup>). Un conjunto de fórmulas es infinitamente ampliable cuando hay un número infinito de descripciones que no aparecen en él. En el marco de la lógica L3 afirmaremos la completud en sentido fuerte de los sistemas deductivos que tratemos sólo para conjuntos de premisas paramétricamente limitados, e igualmente afirmaremos el teorema de compacidad sólo para estos conjuntos. Dado que (1) no es un conjunto paramétricamente limitado, la dificultad desaparece. Por el contrario podemos afirmar la validez no restringida del teorema de compacidad para la lógica  $L3A_1$  y con ello, la completud en sentido fuerte de ciertos sistemas deductivos que resultan ser adecuados para  $L3A_1$ . Volveremos de nuevo sobre este tema en párrafos posteriores.

Dado que no vamos a analizar posteriormente la lógica de la identidad que se contiene en L3, conviene mostrar aquí que el enunciado

$$\bigwedge x(x=x)$$

no es lógicamente verdadero en L3<sup>(21)</sup>, sino lógicamente indeterminado, es decir, para toda L3-interpretación  $\varphi$ , vale que  $\varphi(\bigwedge x(x=x)) = i$ . La demostración de este hecho es sencilla: según la definición de interpretación que estamos discutiendo, vale para toda L3-interpretación  $\varphi$  que  $\varphi(\bigwedge x(x=x)) = v$  sii  $\varphi(A=A) = v$ , para toda descripción A, referencial o no. En cualquiera de los dos casos, sea A referencial o no,  $\varphi(A=A) \neq f$ . Luego no hay una descripción B tal que  $\varphi(-B=B) = v$ , según el punto (iii.iii) de la definición. Consideremos ahora la descripción  $\epsilon x(-x=x)$ . Según el punto (iv),  $\epsilon x(-x=x) \notin \mathcal{A}$ , puesto que no hay ninguna B tal que  $\varphi(-B=B) = v$ , y esta condición es necesaria para que  $\epsilon x(-x=x)$  sea referencial. Luego para toda L3-interpretación  $\varphi$  vale que  $\varphi(\epsilon x(-x=x) = \epsilon x(-x=x)) = i$ . Por lo tanto,  $\varphi(\bigwedge x(x=x)) = i$ ,

para toda interpretación  $\varphi$ .

La condición (iii.vii) establece que las expresiones cuya equivalencia o igualdad se ha establecido por definición reciben la misma interpretación semántica. A través de este punto se establece, por lo tanto, la semántica de los signos definidos, de la que nos ocuparemos más tarde.

La condición (iv) establece las condiciones para que una descripción sea referencial. Dado un predicado monádico  $G[*_1]$ , la primera condición exigida para que la descripción  $\lambda XG[X]$  sea referencial en la interpretación  $\varphi$  es que haya una descripción A tal que  $\varphi(G[A]) = v$ . Además, y esto es la segunda condición, debe ocurrir que si hay alguna descripción B tal que  $\varphi(G[B]) = v$ , entonces  $\varphi(A) = d = \varphi(B)$ . De esta segunda condición se sigue, por lo tanto, que A es referencial y, en términos de la semántica de tipo no lingüístico, que hay un objeto y sólo uno que satisface el predicado  $G[*_1]$ . Si designamos con  $\varphi(G[*_1])^+$  al conjunto  $D^1$  de los elementos de D tales que si  $\varphi(A) \in D^1$ , entonces  $\varphi(G[A]) = v$ , podemos redefinir la condición (iv) diciendo que si  $A \equiv \lambda XG[X]$ , entonces  $\varphi(A) = d$  sii  $\varphi(G[*_1])^+ = \{d\}$ . Es decir, una descripción es referencial y denota el objeto d cuando el dominio  $\varphi(G[*_1])^+$  del predicado monádico  $G[*_1]$  es el conjunto cuyo único elemento es d.

Desearíamos comentar en este punto la ausencia de parámetros de individuo como signos primitivos de L3. Consideramos como parámetros todo signo cuyo significado permanece fijo en cada interpretación -al contrario que las variables- pero que cambia de significado en diferentes interpretaciones -al contrario que las constantes-. Es bastante frecuente utilizar los parámetros de individuo como "nombres" de los objetos del dominio de

interpretación y dar la semántica -sustitutiva- de los cuantores por medio de estos signos. Como hemos dicho, en L3 no aparecen los parámetros de individuo como signos primitivos, al contrario que en las formulaciones más habituales de la lógica de primer orden, aunque pueden introducirse por definición, por medio de descripciones formadas con los parámetros de predicado monádicos  $a^1, b^1, \dots$  (cfr. 1.2, (1), (ii)).

No veo mayores dificultades para introducir ese tipo de signos como categoría signica primitiva, produciéndose incluso una cierta simplificación de las demostraciones, por cuanto cada especialización  $G[a]$ , donde  $a$  es un parámetro de individuo, de una fórmula universal tendría un grado menor que el correspondiente enunciado universal  $\forall xG(x)$ , mientras que en nuestra formulación actual  $G[A]$  puede ser una fórmula de grado mayor que la fórmula universal correspondiente: basta para ello que  $A$  contenga un predicado de grado igual a  $G$ . La renuncia a los parámetros como signos primitivos se debe a razones de tipo no estrictamente formal. En principio, un parámetro de individuo (o variable libre, que cumple en ocasiones las mismas funciones) se interpreta como un símbolo con denotación. Con palabras de Quine: "Vimos ... que las argumentaciones que giran en torno a un término singular pueden realizarse mediante la teoría de la cuantificación con una variable libre, 'y', por ejemplo, para el término singular, pero que la aplicación de los resultados depende de que  $y$  se construya como el objeto nombrado por el término singular, y que, por tanto, depende en última instancia de la existencia de tal objeto. Esta construcción de  $y$  y la suposición de existencia que está a su base no figuran en la esquematización de la deducción, sino sólo en el paso no formal que es la aplicación del resultado"<sup>(27)</sup>. Por el contrario, las descripciones -frente a parámetros de indi-

viduo y variables libres- llevan consigo, por así decir, la afirmación de existencia en la formalización misma. Esto adquiere particular importancia en lenguajes que, como L3, se construyen con la finalidad de tratar lógicamente términos sin denotación. Por otro lado, los nombres del lenguaje natural pueden sustituirse, para su tratamiento lógico, por descripciones. Lo que en el lenguaje natural puede ser un nombre puede interpretarse, desde un punto de vista lógico, según Quine, como un predicado primitivo que conviene exclusivamente a un objeto. El nombre lógico del objeto es, entonces, la descripción que tiene como predicado la traducción al lenguaje formal del nombre del lenguaje natural. De nuevo, Quine: "No hay, pues, ningún obstáculo que nos impida tratar todos los términos singulares como descripciones. Dado cualquier término singular del lenguaje ordinario, por otro lado, 'Sócrates' o 'Cerbero' o 'el autor del Quijote', la elección del 'F' apropiado no nos pondrá nunca en un callejón sin salida. Si tenemos a mano una traducción correcta y cómoda del tipo '( $\forall x$ )(x escribió el Quijote)' mejor que mejor; pero si no la tenemos, no vacilaremos en admitir una versión del tipo '( $\forall x$ )(x es-Sócrates)' o '( $\forall x$ )(x es-Cerbero)'; ..." <sup>(23)</sup>. El problema a la hora de utilizar parámetros es lo apuntado en la primera cita de Quine: se supone siempre que un parámetro (o, en su caso, una variable libre) tiene denotación, es referencial. Este supuesto no se puede mantener en L3, donde se formalizan términos sin denotación del lenguaje natural. Por otro lado, como apunta Quine, las descripciones son suficientes como categoría de designadores de individuos. Incluso las descripciones pueden desaparecer por medio de definiciones contextuales como las de Russell o el mismo Quine. Sin embargo es más cómodo utilizarlas que no hacerlo. Por otro lado, si se utiliza una semántica substitutiva o una semántica de valoraciones, co-

mo la que daremos a continuación, la supresión de los términos singulares no variables no puede ser total, puesto que sin ellos no podemos definir la semántica de la cuantificación.

Un último punto respecto a los términos singulares en L3. La utilización de descripciones como únicos designadores de individuos no prejuzga en modo alguno la solución a la discusión actual en torno a los nombres: sean los nombres, desde un punto de vista filosófico, descripciones abreviadas de un tipo u otro, o designadores rígidos à la Kripke o lo que sean, lo único que se utiliza en L3 es la posibilidad de designar un objeto por una descripción  $\langle XP^1[X] \rangle$ , donde  $P^1$  es la traducción de un predicado del lenguaje natural como 'x es-(llamado)-...'. Esta posibilidad es independiente de la explicación filosófica del modo de designar un nombre.

#### 1.5 Semántica II: Valoraciones (Bewertungssemantik, Truth-value semantics)

Definimos ahora un tipo de semántica que tiene como característica el tomar como elemento básico de la definición por recursión del concepto de verdad una valoración de las fórmulas elementales de L3. Esta valoración es simplemente una atribución de valores de verdad a estas fórmulas. En la semántica de valoraciones tanto los términos como los parámetros de predicado permanecen ininterpretados.

##### Definición 1.5.1. Valoración<sup>(24)</sup>

Sea  $\beta$  una función del conjunto de las fórmulas de L3 en el conjunto  $\{v, f, i\}$ .  $\beta$  es una valoración sii cumple las

siguientes condiciones:

(i) Si  $F$  es una fórmula elemental, entonces  $\beta(F) \in \{v, f, i\}$ .

(ii) Si  $F \equiv \neg G$ , entonces  $\beta(F) = \begin{cases} v, \text{ si } \beta(G) = f \\ f, \text{ si } \beta(G) = v \\ i, \text{ en otro caso.} \end{cases}$

(iii) Si  $F \equiv \neg G$ , entonces  $\beta(F) = \begin{cases} v, \text{ si } \beta(G) = f \text{ o } \beta(G) = i \\ f, \text{ en otro caso.} \end{cases}$

(iv) Si  $F \equiv G \wedge H$ , entonces  $\beta(F) = \begin{cases} v, \text{ si } \beta(G) = \beta(H) = v \\ f, \text{ si } \beta(G) = f \text{ o } \beta(H) = f \\ i, \text{ en otro caso.} \end{cases}$

(v) Si  $F \equiv \forall x G(x)$ , entonces  $\beta(F) = \begin{cases} v, \text{ si } \beta(G[A]) = v, \text{ para toda} \\ \text{descripción } A. \\ f, \text{ si } \beta(G[A]) = f, \text{ para algu-} \\ \text{na descripción } A \\ i, \text{ en otro caso.} \end{cases}$

(vi) Si  $S_1$  es equivalente o igual por definición a  $S_2$ , entonces  $\beta(S_1) = \beta(S_2)$ .

(vii)  $\beta(\exists x P^k[A] \rightarrow A=A) = v$

(viii)  $\beta((A=A \wedge B=B) \rightarrow \exists A=B) = v$

(ix)  $\beta(A=B \rightarrow (F[A] \rightarrow F[B])) = v$

(x)  $\beta(\exists x (F(x)=A \leftrightarrow F[A] \wedge \forall x (F(x) \rightarrow x=A))) = v$

Los dos tipos de semántica que hemos desarrollado hasta ahora son equivalentes, puesto que coinciden respecto a la validez lógica, la consecuencia lógica y la satisfacibilidad. No voy a desarrollar las pruebas de estas afirmaciones, que pueden encontrarse en las págs. 181-184 y 191-193 de Blau (1978). Me li-  
mito, pues, a enunciar las correspondientes proposiciones y a bos-

quejar las pruebas.

Proposición 1.5.2 <sup>(25)</sup>

Toda interpretación de L3 contiene una valoración de L3.

Demostración: El núcleo de la demostración es hacer ver que toda interpretación  $\varphi$  cumple las propiedades de la definición de valoración. En efecto, por el punto (iii) de la definición 1.4.1.1, la restricción de una interpretación a las fórmulas es una función de las fórmulas de L3 en el conjunto de los valores de verdad y cumple las condiciones (ii)-(vi) de la definición de valoración. Además, toda interpretación da el valor de verdad verdadero a los enunciados según los esquemas (vii)-(x). Por lo tanto, toda interpretación contiene una valoración.

Proposición 1.5.3 <sup>(26)</sup>

Toda valoración de L3 es ampliable a una interpretación de L3.

Demostración: El método más sencillo para probar esta proposición es utilizar entidades lingüísticas, a saber, las descripciones de L3, como elementos del dominio de individuos de la interpretación a que se amplía la valoración. Sin embargo, para lograr demostrar que al ampliar  $\beta$  a una interpretación el símbolo "=" se entiende como auténtica igualdad, es decir, para mostrar que se cumple el punto (iii.ii) de la definición de interpretación, se toman como elementos del dominio de objetos no las descripciones mismas sino las clases de equivalencia módulo = en la valoración, es decir, definimos

$$|A|_{\beta} := \{ B \mid \beta(B=A) = \vee \} \quad \text{y}$$

$$D := \{ |A|_{\beta} \mid |A|_{\beta} \neq \emptyset \} .$$

Podemos entonces definir las descripciones referenciales y los dominios positivos y negativos de los predicados como sigue:

$$\beta(A) \begin{cases} := |A|_p \text{ si } |A|_B \neq \emptyset \\ \text{indefinida, en otro caso.} \end{cases}$$

$$\beta(P^k)^+ := \{ \langle |A_1|_B, \dots, |A_k|_B \rangle \mid \beta(P^k_{A_1 \dots A_k}) = v \}$$

$$\beta(P^k)^- := \{ \langle |A_1|_B, \dots, |A_k|_B \rangle \mid \beta(P^k_{A_1 \dots A_k}) = f \}$$

A partir de estas definiciones es relativamente fácil mostrar que la valoración  $\beta$ , así ampliada, cumple las condiciones que definen una interpretación.

Estos resultados son la base para afirmar que los dos tipos de semántica son equivalentes. Adelantándonos a lo que diremos en el apartado 7 de este capítulo, podemos indicar que una fórmula  $F$  es lógicamente verdadera en sentido de la semántica de interpretaciones (respectivamente, en sentido de la semántica de valoraciones) si para toda interpretación (respectivamente, valoración) la fórmula es verdadera en esa interpretación (valoración). Una fórmula es satisfacible si hay una interpretación (valoración) en que es verdadera. Una fórmula  $F$  es consecuencia lógica de una clase de fórmulas  $M$  si toda interpretación (valoración) que satisface todas las fórmulas en  $M$  satisface también a  $F$ . Las proposiciones 1.5.2 y 1.5.3 conllevan la afirmación de que para toda interpretación hay una valoración que coincide en el valor de verdad de las fórmulas y a la inversa. Por ello las dos semánticas son equivalentes. A modo de ejemplo, veamos que los conjuntos de fórmulas lógicamente verdaderas en sentido de la semántica de interpretaciones y en sentido de la semántica de valoraciones coinciden: Supuesto que  $F$  es lógicamente verdadera en sentido de la semántica de interpretaciones, entonces si hay

una valoración  $\beta$  tal que  $\beta(F) \neq v$ , entonces hay una interpretación  $\varphi$ , por la prop. 5.2, tal que  $\varphi(F) \neq v$ , contra el supuesto. Un razonamiento similar, partiendo del supuesto de que F es lógicamente verdadera en sentido de la semántica de valoraciones, nos muestra que ambos conjuntos coinciden.

### 1.6 Sintaxis III: Cálculos

Presentamos en este apartado dos de los tres cálculos que se definen en Blau (1978). La razón de su inclusión aquí es que parte del trabajo posterior está basado en ellos.

#### 1.6.1. Cálculo axiomático $\Lambda_3$ <sup>(27)</sup>

##### Esquemas axiomáticos

- Ax. 1 F, en el caso de que  $\frac{\vdash}{\vdash} F$   
 Ax. 2  $\Lambda X F[X] \rightarrow F[A]$   
 Ax. 3  $\Lambda X \neg F[X] \leftrightarrow \neg \Lambda X F[X]$   
 Ax. 4  $\text{IP}^k[A] \rightarrow A=A$   
 Ax. 5  $(A=A \wedge B=B) \rightarrow \text{IA}=B$   
 Ax. 6  $A=B \wedge F[A] \rightarrow F[B]$   
 Ax. 7  $(\vdash F=A) \leftrightarrow (F[A] \wedge \Lambda X(F[X] \rightarrow X=A))$

##### Reglas de deducción

$$\text{(MP)} \quad \frac{F, F \rightarrow G}{G}$$

$$\text{(RG)} \quad \frac{F \rightarrow G[\text{IP}_j^1]}{F \rightarrow \Lambda X G[X]}$$

en el caso de que  $\text{IP}_j^1$  no aparezca en el conjunto de supuestos ni en la conclusión.

Llamamos axioma a cada fórmula según uno de los esquemas de axioma Ax.1 - Ax. 7. El esquema de axiomas Ax.1 indica que es un axioma de A3 toda fórmula F tal que para toda e-valoración  $\beta$ ,  $\beta(F) = v$ , donde  $\beta$  es una e-valoración si  $\beta$  es una función de las fórmulas de L3 que cumple:

- (i) Si F es una fórmula elemental o q-compleja,  $(F) \in \{v, f, i\}$
- (ii) Si F es j-compleja, entonces  $\beta$  cumple las condiciones (ii), (iii) y (iv) de la definición de valoración (Def. 1.5.1).

Dicho de otra manera, toda fórmula tautológica es un axioma.

Una aplicación de una regla es el par o triplete formado por la(s) fórmula(s) según la parte superior de una regla de deducción y la fórmula correspondiente formada según la parte inferior de la misma. Llamamos premisa(s) a la(s) primera(s) fórmula(s) y conclusión a la última.

#### Definición 1.6.1.1

F es deducible en A3 del conjunto de supuestos M

$(M \xrightarrow[A3]{} F) : \Leftrightarrow$  Hay un subconjunto finito  $M^0$  de M, posiblemente vacío, y una secuencia finita de fórmulas  $F_1, \dots, F_n$  tal que:

- (i)  $F_n \equiv F$
- (ii) Para toda fórmula  $F_i$  de la secuencia  $F_1, \dots, F_n$  se cumple al menos una de las siguientes condiciones:
  - (ii.i)  $F_i \in M^0$
  - (ii.ii)  $F_i$  es un axioma
  - (ii.iii)  $F_i$  es la conclusión de una aplicación de una regla cuyas premisas son elementos anteriores en la secuencia.
  - (ii.iv)  $F_i$  se ha obtenido de líneas anteriores en la secuencia por eliminación o introducción de una definición.

#### Definición 1.6.1.2

D es demostrable en A3, F es un teorema de A3,

$(\frac{\quad}{\Lambda 3} F) : \Leftrightarrow F$  es deducible del conjunto  $\emptyset$ .

### 1.6.2 Cálculo de árboles B3 (28)

Damos por supuesta la definición de árbol de fórmulas y conceptos relacionados con él (sucesor, antecesor, rama, árbol infinita o finitamente ramificado, etc....) para pasar directamente a presentar las reglas de deducción de B3

#### Reglas de deducción

RB 1	$\frac{\frac{\frac{\quad}{\neg\neg} F}{\neg\neg}}{F}$	RB 2	$\frac{\frac{\frac{\quad}{\neg\neg} F}{\neg\neg}}{\neg F}$
RB 3	$\frac{F \wedge G}{F}$ $G$	RB 4	$\frac{\neg(F \wedge G)}{\neg F}$ $\neg G$
RB 5	$\frac{\neg(F \wedge G)}{\neg F \quad \neg G}$	RB 6	$\frac{\neg(F \wedge G)}{\neg F \quad \neg G}$
RB 7	$\frac{\Lambda X F[X]}{F[A]}$	RB 8	$\frac{\neg \Lambda X F[X]}{\neg F[A]}$
RB 9	$\frac{\neg \Lambda X F[X]}{\neg F[P_j^1]}$	RB 10	$\frac{\neg \Lambda X F[X]}{\neg F[P_j^1]}$

RB 9 y RB 10 se utilizan bajo la condición de que  $P_j^1$  no aparezca ni en el conjunto de supuestos ni en un predecesor de la conclusión.

RB 11.  $\mathbf{I} P^k(A) \rightarrow A=A$

RB 12.  $(A=A \wedge B=B) \rightarrow \mathbf{I} A=B$

RB 13  $(A=B \wedge F[A]) \rightarrow F[B]$       RB 14  $(F=A \leftrightarrow (F[A] \wedge \forall X(F[X] \rightarrow X=A)))$

Como en el caso de A3, una aplicación de una de las reglas RB 1 - RB 10 es un par donde el primer elemento es una fórmula según la parte superior de una regla y el segundo es la fórmula correspondiente según la parte inferior de la regla en cuestión. En estas reglas el primer elemento del par se llama premisa y el segundo, conclusión. En el caso de las reglas RB 11 - RB 14, toda fórmula según uno de los esquemas que aparecen en ellas es una aplicación de la regla. Se trata aquí de reglas sin premisas, es decir, las fórmulas según estos esquemas pueden añadirse en cualquier punto de una rama de un árbol lógico. Pasamos ahora a definir los conceptos de árbol cerrado y deducibilidad en B3.

Definición 1.6.2.1

B es un árbol para la fórmula F a partir del conjunto  $M^0: \Leftrightarrow M^0$  es un conjunto finito de fórmulas, quizá vacío, tal que:

- (i) B tiene su origen en F y se cumple (ii)
- (ii) Cada par  $\langle H, H' \rangle$  de sucesores inmediatos cumple una de las siguientes condiciones:
  - (ii.i)  $H'$  es el único sucesor inmediato de H y
    - $H' \in M^0$  o
    - $H'$  es la conclusión de una de las reglas RB 1 - RB 4, RB 7 - RB 14 y su premisa aparece en la misma rama que  $H'$  o
    - $H'$  se obtiene por introducción o eliminación de símbolos definidos en elementos anteriores de la rama en que aparece  $H'$ .
  - (ii.ii)  $H'$  y otra fórmula  $H''$  se han añadido como sucesores inmediatos de H por aplicación de las reglas RB 5 o RB 6.

Definición 1.6.2.2

La rama R de un árbol B está cerrada:  $\Leftrightarrow$  R contiene una fórmula G y su negación fuerte  $\neg G$  o débil  $\neg G$ .

El árbol B está cerrado:  $\Leftrightarrow$  Todas las ramas de B están cerradas.

Definición 1.6.2.3

Hay un árbol cerrado B para el conjunto de fórmulas M:  $\Leftrightarrow$  Hay un subconjunto finito  $M^0 \subseteq M$  y una fórmula  $F \in M$  tal que B es un árbol cerrado para F a partir de los supuestos  $M^0$ .

Definición 1.6.2.4

B es una refutación de F a partir de  $M^0$ :  $\Leftrightarrow$  B es un árbol cerrado para F a partir del conjunto  $M^0$  de supuestos.

Definición 1.6.2.5

F es deducible de M en B3 ( $M \vdash_{B3} F$ ):  $\Leftrightarrow$  Hay un subconjunto finito  $M^0$  de M y un árbol B tal que B es un árbol cerrado para  $\neg F$  a partir del conjunto de supuestos  $M^0$ .

Definición 1.6.2.6

F es demonstrable en B3 ( $\vdash_{B3} F$ ):  $\Leftrightarrow$  Hay una refutación de  $\neg F$  a partir del conjunto  $\emptyset$  de supuestos.

Dejamos en este punto la presentación de los cálculos para L3. En capítulos posteriores nos ocuparemos de su corrección y completud y definiremos otros cálculos distintos, alguno de ellos de tipo axiomático, como los cálculos secuenciales y otros de deducción natural. Igualmente definiremos un cálculo axiomático adecuado para la lógica de enunciados de L3.

1.7 Semántica III: Definiciones y teoremas.  
Semántica para  $L3A_1$ .

1.7.1 Semántica de los signos definidos

La condición (iii.vii) de la definición de interpretación (def. 1.4.1.1) establece las propiedades semánticas de los signos definidos de  $L3$ . Básicamente se trata de que el definiens y el definiendum de una definición son semánticamente equivalentes. En este apartado damos la semántica de estos signos de modo explícito, utilizando tablas de verdad para los funtores definidos. De lo que acabamos de decir se sigue, evidentemente, que las tablas de verdad de los funtores definidos no son otra cosa que las tablas de verdad de las expresiones que actúan como definiens. A fin de lograr una visión de conjunto incluyo las tablas de verdad de los funtores primitivos <sup>(29)</sup>.

$\perp$	F	$\neg F$	$\neg\neg F$	$\top F$	$\perp F$	$\top F$	$\perp F$
v	v	f	f	v	f	f	v
f	f	v	v	f	v	f	v
i	i	i	v	f	f	v	f

$\wedge$	v	f	i
v	v	f	i
f	f	f	f
i	i	f	i

$\vee$	v	f	i
v	v	v	v
f	v	f	i
i	v	i	i

$\rightarrow$	v	f	i
v	v	f	i
f	v	v	v
i	v	v	v

$\leftrightarrow$	v	f	i
v	v	f	i
f	f	v	v
i	i	v	v

$\equiv$	v	f	i
v	v	f	f
f	f	v	f
i	f	f	v

$\wedge$	v	f	i
v	v	i	i
f	f	i	i
i	i	i	i

$\equiv$  puede considerarse como un funtor cero-ádico, es decir, como una constante que tiene el valor de verdad indeterminado para toda interpretación. Su introducción en L3 responde a la necesidad de conseguir un conjunto de funtores independientes que sea veritativo-funcionalmente completo. En la lógica de enunciados de L3  $\equiv$  ha de ser considerada como una constante primitiva. En el marco más amplio de L<sub>3</sub>  $\equiv$  puede definirse como equivalente a la fórmula  $\lambda X(X=X)$  que, como vimos, es indeterminada en toda interpretación. Otra posibilidad, apuntada por Blau (1980) (30) es utilizar como funtores primitivos  $\neg$ ,  $\wedge$  y  $\wedge$ . Dado que  $\neg$ ,  $\equiv$  y  $\rightarrow$  constituyen un conjunto de funtores funcionalmente completo y que  $\equiv$  y  $\rightarrow$  pueden definirse a través de  $\neg$  y de  $\wedge$ , la negación débil y la conjunción asimétrica, estos tres funtores forman un conjunto veritativo-funcionalmente completo de conectivas primitivas.

El funtor  $\wedge$ , introducido por Blau en Blau (1980) en el marco de una lógica para la cuantificación colectiva y distributiva, se llama conjunción presupositiva asimétrica. No lo utilizaremos en lo que sigue.

El funtor condicional o, mejor, su tabla de verdad, encuentra su motivación intuitiva en el intento de formalizar de manera adecuada los enunciados universales restringidos del tipo  $\lambda X(F[X] \rightarrow G[X])$  (31). No entraremos aquí en esta cuestión ni en la de comparar la definición de los funtores que aquí se utiliza con otras definiciones alternativas, como las de los

sistemas de lógica trivalente de Łukasiewicz o Kleene.

En L3 se distingue entre el funtor bicondicional  $\leftrightarrow$  y el funtor equivalencia  $\equiv$ , funciones coincidentes en la lógica bivalente. Una expresión bicondicional  $F \leftrightarrow G$  es verdadera si son verdaderos los condicionales  $F \rightarrow G$  y  $G \rightarrow F$ . Ello no implica, sin embargo, que  $F$  y  $G$  tengan el mismo valor de verdad: así,  $F \leftrightarrow G$  puede ser verdadero siendo falsa la fórmula  $F$  e indeterminada la fórmula  $G$ . Por el contrario, la verdad de la expresión  $F \equiv G$  implica justamente que las dos fórmulas  $F$  y  $G$  tienen el mismo valor de verdad.

Las reglas de interpretación de los cuantores definidos son las siguientes: <sup>(32)</sup>

$$\varphi(\forall X F[X]) = \begin{cases} v, \text{ si } \exists A (A \in \text{Des}_{L3} \ \& \ \varphi(F[A]) = v) \\ f, \text{ si } \forall A (A \in \text{Des}_{L3} \Rightarrow \varphi(F[A]) = f) \\ i, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$$\varphi(\Delta X F[X]) = \begin{cases} v, \text{ si } \forall A (A \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(F[A]) = v) \\ f, \text{ si } \exists A (A \in \mathcal{A} \ \& \ \varphi(F[A]) = f) \\ i, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$$\varphi(\nabla X F[X]) = \begin{cases} v, \text{ si } \exists A (A \in \mathcal{A} \ \& \ \varphi(F[A]) = v) \\ f, \text{ si } \forall A (A \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(F[A]) = f) \\ i, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

#### 1.7.2 Conceptos y teoremas semánticos fundamentales

Vamos a definir en primer lugar una serie de conceptos semánticos básicos. En todos los casos se trata de transposiciones a la lógica trivalente de los correspondientes conceptos de la lógica bivalente, lo que hace innecesario extenderse en

Comentarios ulteriores. Definimos estos conceptos en sentido de la semántica de interpretaciones. Las definiciones correspondientes para la semántica de valoraciones se obtienen sustituyendo las referencias a interpretaciones por referencias a valoraciones en las definiciones que siguen.

Definición 1.7.2.1 <sup>(33)</sup>

Sean  $F$  y  $G$  fórmulas,  $M$  un conjunto de fórmulas y una L3-interpretación. Entonces,

- (i)  $M \models_3 F$ ,  $F$  es lógicamente verdadero en L3,  $F$  es 1-verdadero,  $F$  es 1-válido:  $\Leftrightarrow \forall \varphi, \varphi(F) = v$ .
- (ii)  $F$  es lógicamente falso, 1-falso, en L3:  $\Leftrightarrow \forall \varphi, \varphi(F) = f$
- (iii)  $F$  es lógicamente indeterminado en L3:  $\Leftrightarrow \forall \varphi, \varphi(F) = i$
- (iv)  $F$  es insatisfacible en L3,  $F$  es L3-insatisfacible:  $\Leftrightarrow \text{no } \exists \varphi, \varphi(F) = v$
- (v)  $F$  es satisfacible en L3,  $F$  es L3-satisfacible:  $\Leftrightarrow \exists \varphi, \varphi(F) = v$
- (vi)  $\varphi$  satisface  $F$ :  $\Leftrightarrow \varphi(F) = v$
- (vii)  $\varphi$  satisface  $M$ :  $\Leftrightarrow \forall F (F \in M \Rightarrow \varphi(F) = v)$
- (viii)  $M$  es satisfacible en L3,  $M$  es L3-satisfacible:  $\Leftrightarrow \exists \varphi$  tal que  $\varphi$  satisface a  $M$ .
- (ix)  $M$  es insatisfacible en L3,  $M$  es L3-insatisfacible:  $\Leftrightarrow \text{no } \exists \varphi$  tal que  $\varphi$  satisface a  $M$ .
- (x)  $G \models_3 F$ ,  $F$  es consecuencia lógica de  $G$ ,  $F$  se sigue lógicamente de  $G$ :  $\Leftrightarrow \forall \varphi (\varphi(G) = v \Rightarrow \varphi(F) = v)$
- (xi)  $M \models_3 F$ ,  $F$  es consecuencia lógica de  $M$ ,  $F$  se sigue de  $M$ :  $\Leftrightarrow \forall \varphi (\varphi \text{ satisface } M \Rightarrow \varphi \text{ satisface } F)$
- (xii)  $F$  y  $G$  son bicondicionales en L3, son L3-bicondicionales:  $\Leftrightarrow F$  es consecuencia lógica de  $G$  y  $G$  lo es de  $F$ .
- (xiii)  $F$  y  $G$  son equivalentes en L3, L3-equivalentes:  $\Leftrightarrow \forall \varphi, \varphi(F) = \varphi(G)$ .
- (xiv)  $F$  presupone a  $G$  en L3:  $\Leftrightarrow \forall \varphi, \varphi(F) = v \text{ o } \varphi(F) = f \Rightarrow \varphi(G) = v$

Proposición 1.7.2.2<sup>(34)</sup>

- (i)  $\Vdash_{L_3} \hat{\emptyset}$
- (ii)  $\Vdash_{L_3} F \Leftrightarrow \emptyset \Vdash_{L_3} F$
- (iii)  $\Vdash_{L_3} F \Leftrightarrow \neg F$  es insatisfacible
- (iv)  $\{F_1, \dots, F_n\} \Vdash_{L_3} F \Leftrightarrow \Vdash_{L_3} F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow F$
- (v)  $M \Vdash_{L_3} F \Leftrightarrow M \cup \{\neg F\}$  es L3-insatisfacible
- (vi)  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es L3-satisfacible  $\Leftrightarrow$  no  $\Vdash_{L_3} \neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n)$
- (vii)  $M$  es L3-satisfacible  $\Leftrightarrow$  Hay una fórmula  $F$  tal que no  $M \Vdash_{L_3} F$ .

Demostración: La demostración es muy sencilla en todos los casos. A título de ejemplo demostramos el punto (vii) de la proposición. Si  $M$  es L3-satisfacible, entonces  $\exists \varphi$  tal que  $\varphi(G) = v$ , para toda fórmula  $G$  en  $M$ . Ahora bien,  $\forall \varphi, \varphi(G \wedge \neg G) = f$ . Luego hay una fórmula  $F$  y una interpretación  $\varphi$  tal que  $\varphi$  satisface  $M$  y  $\varphi(F) \neq v$ , si  $M$  es satisfacible. Luego no  $M \Vdash_{L_3} F$ . Por otro lado, si no  $M \Vdash_{L_3} F$  entonces  $\exists \varphi, \varphi(M) = v$  y  $\varphi(F) \neq v$ . Luego hay una interpretación que satisface  $M$ .

Demostramos a continuación que L3 es consistente. Una teoría es consistente sii no toda fórmula del lenguaje de la teoría es lógicamente verdadera o, de modo equivalente, sii hay una interpretación del lenguaje.

Proposición 1.7.2.3<sup>(35)</sup>

Hay una interpretación para L3

Demostración: Sea  $D = \emptyset, \mathcal{A} = \emptyset$  y  $\varphi$  una función del conjunto unión de los conjuntos de los parámetros de predicado y las fórmulas en  $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\emptyset)$  tal que para todo parámetro de predicado  $P^k$ ,  $\varphi(P^k) = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$ . Además,  $\varphi(F) = v$ , para toda fórmula elemental.  $\varphi(F)$ , para  $F$  compleja, se define según las condiciones (iii.iii) - (iii.vii) de la definición 1.4.1.1. Es fácil ver por inducción sobre el grado de las fórmulas que toda fórmula recibe una interpretación en el conjunto  $\{v, f, \perp\}$  y que se cumple

la condición de interpretación de las descripciones, puesto que D es vacío y por tanto toda descripción es indefinida.

A continuación enunciamos, sin prueba, dos versiones del teorema de generalización que utilizaremos posteriormente con cierta frecuencia.

Proposición 1.7.2.4<sup>(36)</sup>

Si el parámetro de predicado  $P^1$  no aparece en  $\wedge X F(X)$ , entonces  $\Vdash_{\mathcal{L}_3} F[\mathcal{L}P^1(X)] \Rightarrow \Vdash_{\mathcal{L}_3} \wedge X F(X)$

Proposición 1.7.2.5<sup>(37)</sup>

Sea  $M^0$  un conjunto finito de fórmulas, posiblemente vacío, y  $P^1$  un parámetro de predicado monádico que no aparece en  $M^0$ ,  $F$ ,  $\wedge X G(X)$ . Entonces  $M^0 \Vdash_{\mathcal{L}_3} F \rightarrow G[\mathcal{L}P^1(X)] \Rightarrow M^0 \Vdash_{\mathcal{L}_3} F \rightarrow \wedge X G(X)$

Las siguientes definiciones y teoremas se refieren a una serie de operaciones de sustitución. Como en los casos anteriores, enunciamos los teoremas sin demostración, a fin de no alargar excesivamente este capítulo.

Definición 1.7.2.6<sup>(38)</sup>

- (i)  $S_2$  se origina de  $S_1$  por cambio alfabético de la variable X por la variable Y si  $S_2$  es el resultado de sustituir en  $S_1$  la variable X de cada cuantificador  $qX$  o descriptor X y todas las X ligadas por ese cuantificador o descriptor por la variable Y, de tal modo que los nuevos cuantificadores o descriptores no liguen otras variables fuera de Y.
- (ii) Las expresiones  $S_1$  y  $S_2$  son variantes respecto a variables ligadas cuando  $S_2$  se origina a partir de  $S_1$  por uso repetido del cambio alfabético de variables
- (iii)  $S_2$  se origina de  $S_1$  por cambio alfabético del parámetro  $P^k$

por el parámetro  $Q^k$  cuando  $Q^k$  no aparece en  $S_1$  y  $S_2$  es el resultado de sustituir toda aparición de  $P^k$  en  $S_1$  por una aparición de  $Q^k$  en  $S_2$ .

(iv) Las expresiones o clases de expresiones  $S_1$  y  $S_2$  son variantes respecto a parámetros si  $S_2$  se origina de  $S_1$  por uso repetido del cambio alfabético de parámetros de predicado.

Definición 1.7.2.7<sup>(39)</sup>

$$A \approx B : \Leftrightarrow A=B \vee (\neg(A=A) \wedge \neg(B=B))$$

Proposición 1.7.2.8<sup>(40)</sup>

(i) Si  $F$  es una variante de  $G$  respecto a variables ligadas, entonces  $\Vdash_{L_3} G \equiv F$

(ii) Sea  $M \cup \{F\} = \{F_1, \dots, F_n, \dots\} \cup \{F\}$  un conjunto de fórmulas y sean las fórmulas de  $N \cup \{G\} = \{F'_1, \dots, F'_n, \dots\} \cup \{G\}$  variantes respecto a parámetros de predicado de las fórmulas de  $M$ . Entonces

(ii.1)  $M$  es  $L_3$ -satisfacible  $\Leftrightarrow N$  es  $L_3$ -satisfacible

(ii.ii)  $M \Vdash_{L_3} F \Leftrightarrow N \Vdash_{L_3} G$

(iii)  $A \approx B \Vdash_{L_3} F[A] \equiv F[B]$

(iv) Supuesto que  $F_G$  se origina de  $F_H$  por sustitución de  $H$  por  $G$  en  $F$  y que  $G$  no aparece en el dominio de un functor  $\neg, \perp, +, \mathbb{I}, \equiv$ , entonces  $G \leftrightarrow H \Vdash_{L_3} F_G \leftrightarrow F_H$

(v) Si  $G$  aparece en  $F_G$  y  $F_H$  es el resultado de sustituir  $G$  por  $H$  en  $F$ , entonces  $G \equiv H \Vdash_{L_3} F_G \equiv F_H$ .

(vi) Supuesto que  $F_{G^k}$  da origen a  $F_{H^k}$  por sustitución de un predicado  $G^k$  por otro predicado  $H^k$ , entonces

$$\bigwedge X_1 \dots X_k ((G[X_1 \dots X_k]) \equiv (H[X_1 \dots X_k])) \Vdash_{L_3} F_{G^k} \equiv F_{H^k}$$

(vii) Supuesto que  $F_{G^k}$  se origina de  $F_{H^k}$  por sustitución de  $G^k$  por  $H^k$  fuera del dominio de un functor  $\neg, \perp, +, \mathbb{I}, \equiv$ , entonces

$$\bigwedge X_1 \dots X_k ((G[X_1 \dots X_k]) \leftrightarrow (H[X_1 \dots X_k])) \Vdash_{L_3} F_{G^k} \leftrightarrow F_{H^k}$$

1.7.3 Semántica para  $L3A_i$ 

Definimos a continuación la semántica de  $L3A_i$ . Podemos indicar los rasgos esenciales de esta semántica diciendo que  $\varphi_A$  es una  $L3A_i$ -interpretación sii cumple las condiciones de la definición 1.4.1.1 cuando las metavariables se interpretan teniendo como rango las expresiones de  $L3A_i$  y, además, para cada parámetro de individuo  $\underline{a}$  en el conjunto  $i$  se cumple que  $\varphi_A(\underline{a}) \in D$  de tal modo que la restricción de  $\varphi_A$  a  $\mathcal{A} \cup i$  es una función suprayectiva sobre  $D$ . La interpretación de los parámetros de individuo en el conjunto  $i$  exige, evidentemente, modificaciones de orden menor en la definición de la noción de interpretación. No entraremos en este tema aquí, por carecer de importancia en el contexto de este trabajo. Sí que tiene interés, sin embargo, apuntar que los conceptos semánticos básicos de  $L3A_i$  se definen de modo similar a como lo hemos hecho más arriba, partiendo del concepto de  $L3A_i$ -interpretación.

En lo que queda de este apartado sobre la semántica de  $L3A_i$  vamos a dar dos versiones, sin prueba, de dos teoremas importantes, el de compacidad y el de Löwenheim-Skolem, adaptadas a la lógica  $L3A_i$ .

Proposición 1.7.3.1. Teorema de compacidad para  $L3A_i$  (41)

Para todo conjunto  $M$  de fórmulas de  $L3$  vale que  $M$  es  $L3A_i$ -satisfacible  $\Leftrightarrow$  Todo subconjunto finito de  $M$  es  $L3A_i$ -satisfacible.

Proposición 1.7.3.2. Teorema de Löwenheim-Skolem (42)

Todo conjunto  $M$  de fórmulas de  $L3$  que es  $L3A_i$ -satisfacible es  $L3A_i$ -satisfacible en un dominio enumerable.

Observemos que en la formulación de estos teoremas hablamos de conjuntos de fórmulas de L3 que son satisfacibles en  $L3A_1$ . Esto es necesario puesto que en las formulaciones habituales del teorema de Löwenheim-Skolem se supone que el alfabeto del lenguaje es enumerable.

En este contexto es fácil observar una de las diferencias importantes entre las lógicas L3 y  $L3A_1$ . En L3 el teorema de Löwenheim-Skolem es trivial, puesto que por la definición de interpretación, todo dominio de una interpretación de L3 es un dominio enumerable. Este teorema no es, evidentemente, trivial en  $L3A_1$ . Por otro lado, el teorema de compacidad, cuya demostración daremos en el próximo capítulo para L3, sólo puede afirmarse para conjuntos restringidos de fórmulas de L3. En cambio, como hemos visto, se puede afirmar de manera general en  $L3A_1$ .

### 1.8 Relaciones entre L2 y L3

Las similitudes y diferencias de la lógica bivalente clásica y la lógica trivalente L3 pueden analizarse desde diversos puntos de vista o, mejor, desde el punto de vista de las diferentes teorías parciales que forman esas lógicas. Los resultados son parcialmente distintos si comparamos la lógica de enunciados en ambas teorías o la lógica de la cuantificación sin identidad o con ella.

Para realizar este análisis comparativo de ambas lógicas es necesario en primer lugar tener un dominio sintáctico común a L2 y L3. Dada la peculiar construcción de L3 definiremos como fórmulas de L2 en L3 al más pequeño conjunto de fórmulas de L3 tales que "fuera de las descripciones contienen sólo parámetros

de predicado, los funtores standard  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  y cuantores nominales que sólo ligan variables fuera de las descripciones" <sup>(43)</sup>. Sobre la base de esta sintaxis común se puede establecer el resultado principal de esta sección: la lógica cuantificacional de L3 es una extensión conservadora de la correspondiente lógica L2. Se puede afirmar que si M es un conjunto de fórmulas en el dominio sintáctico común a L2 y L3 y F es una fórmula en ese dominio, entonces, si F es consecuencia de M en la teoría de la cuantificación sin identidad de L2 (LC2), entonces F es consecuencia de M en L3, es decir, <sup>(44)</sup>

$$M \Vdash_{LC2} F \Rightarrow M \Vdash_{L3} F$$

Por otro lado, utilizando el signo  $\approx$  que introdujimos anteriormente podemos ampliar la correspondencia entre ambas lógicas de la manera siguiente: Si  $M^{\sim}$ ,  $F^{\sim}$  es el resultado de sustituir toda aparición del signo = en M, F por  $\approx$  en las fórmulas de M y en F, entonces se puede afirmar que <sup>(45)</sup>

$$M \Vdash_{I2} F \Rightarrow M^{\sim} \Vdash_{L3} F^{\sim}$$

donde I2 es una lógica cuantificacional bivalente de primer orden con identidad. Estos resultados conllevan, al través de la adecuación de los cálculos para L2 y L3, los correspondientes resultados sintácticos.

El último resultado que queremos enunciar aquí muestra la coincidencia de la teoría de la cuantificación en L2 con la lógica LC3, resultado de segregar de L3 la teoría de la identidad y la teoría de las descripciones (tomando las descripciones como parámetros de individuo, signos inanalizados). Estas dos teorías coinciden respecto a la satisfacibilidad y la consecuencia: "Para toda fórmula de L2 en L3 y conjunto de fórmulas M vale que: a) M es satisfacible en LC2  $\Leftrightarrow$  M es satisfacible en LC3

060

$$b) \mathbb{H} \Vdash_{LC_2} F \Leftrightarrow \mathbb{H} \Vdash_{LC_3} F''^{(46)}$$

Esto configura a LC3 como extensión conservadora de LC2, puesto que una y otra coinciden respecto a la satisficibilidad, validez y consecuencia en el dominio de la sintaxis común.

Notas al capítulo 1

- (1) Básicamente, este apartado contiene el material de Blau (1978) pp. 167-176. 1.2.(8) presenta las definiciones de la p.173 de la misma obra.
- (2) Cfr. Blau (1978) pp. 137 ss.
- (3) Blau (1978), pp. 170-1
- (4) Shoenfield (1967), p. 41
- (5) Cfr. Smullyan (1968), p. 46; Blau (1978) pp. 251-2; Blau (1979) pp. 120 ss. Esta propuesta parece tener un aire de autoreferencialidad. A pesar de ello no parece que sea inviable.
- (6) Con esto desaparecen, dicho sea a modo de excursus, una de las críticas a la semántica carnapiana, que se basaba justamente en la imposibilidad de tratar de dominios no-enumerables en esa semántica, puesto que exigía un "nombre" para cada individuo del dominio. Cfr. Martin (1963), p. 373.
- (7) Cfr. un análisis de este tipo de semántica, Kripke (1976)
- (8) Cfr. Blau (1978) pp. 179, 188
- (9) Cfr. Blau (1978), p. 207
- (10) Tarski (1935), p. 191
- (11) Cfr, el análisis que Martin hace de la semántica carnapiana en Schilpp ( ) p.
- (12) Blau (1978), p. 69
- (13) Blau (1978), p 69-71
- (14) Blau (1978), p. 121 y ss.
- (15) Blau (1978), p. 47
- (16) Cfr., por ejemplo, Łukasiewicz (1930)
- (17) Łukasiewicz (1930); Kleene (1952); Rescher (1969)
- (18) Dunn & Belnap (1968), p.180
- (19) Leblanc (1968b), p. 7
- (20) Blau (1978), p.221
- (21) Blau (1978), pp. 165-6
- (22) Quine (1952) p. 293
- (23) Quine (1952) p. 296
- (24) Blau (1978), pp. 173,180, 191 y 199.
- (25) Blau (1978), pp. 191 ss.
- (26) Blau (1978), pp. 183 ss.
- (27) Blau (1978), pp. 222 ss.
- (28) Blau (1978), pp. 227 ss.
- (29) Blau (1978), p. 144
- (30) Blau (1930), p.16
- (31) Blau (1978), pp. 92 ss. y 99 ss.
- (32) Blau (1978), p. 145, 180
- (33) Blau (1978), pp. 189-90

## 062

- (34) Blau (1978), pp. 145 y 190
- (35) Blau (1978), p. 190
- (36) Blau (1978), p. 212
- (37) Blau (1978), pp.212-3
- (38) Blau (1978), pp.196-7
- (39) Blau (1978), p. 184
- (40) Blau (1978), pp. 196, 198, 199, 201, 200, 2o3
- (41) Blau (1978), p. 255
- (42) Blau (1978), p. 255
- (43) Blau (1978), p. 176
- (44) Blau (1978), p. 193
- (45) Blau (1978), p. 186
- (46) Blau (1978), p. 177

2. EL PRINCIPIO DE UNIFICACION DE SMULLYAN Y SU  
APLICACION A L3: CONJUNTOS-MODELO, PROPIEDADES  
DE CONSISTENCIA Y DEMOSTRABILIDAD

2.1 Introducción

El núcleo de las demostraciones de completud en la lógica bivalente y, como hemos de ver, también en la trivalente, consiste en definir una clase de fórmulas con propiedades sintácticas tales que una propiedad semántica, a saber, la satisfaciabilidad, se derive de ellas. Los llamados conjuntos gödelianos son clases de fórmulas que gozan de las necesarias propiedades sintácticas y en ellos se basan las pruebas de completud tipo Gödel-Henkin. Vamos a analizar brevemente este concepto de conjunto gödeliano. Un conjunto de fórmulas  $N$  es gödeliano cuando tiene las propiedades siguientes:

- (i)  $N$  es completo y no contradictorio, i. e., para toda fórmula  $F$  del lenguaje  $L$  en cuestión,  $F \in N$  si  $\neg F \notin N$ .
- (ii)  $N$  está cerrado para la deducción, i. e., si  $C$  es un cálculo para  $L$  y  $N \vdash_C F$ , entonces  $F \in N$  <sup>(1)</sup>.

La primera propiedad importante de los conjuntos gödelianos es que el conjunto de las fórmulas verdaderas en  $L$  para una interpretación  $\gamma$  es un conjunto gödeliano. La segunda propiedad de estos conjuntos que nos interesa destacar consiste en que, por el teorema de completud de Gödel, sabemos que, dado un cálculo  $C$  adecuado a la lógica bivalente de primer orden, (i) todo conjunto gödeliano respecto a  $C$  es el conjunto de las fórmulas verdaderas en una interpretación adecuada y (ii) todo con-

junto  $M$  de fórmulas que sea consistente (es decir, tal que no hay una fórmula  $F$  con  $M \vdash F$  y  $M \vdash \neg F$ ) puede ampliarse a un conjunto gödeliano. Con esto tenemos que si  $N$  es un conjunto gödeliano hay una interpretación  $\varphi$  tal que para toda fórmula  $F$ ,  $F \in N$  sii  $F$  es verdadera en  $\varphi$ . El conjunto de los enunciados verdaderos en  $\varphi$  y el conjunto gödeliano  $N$  coinciden, por lo tanto<sup>(2)</sup>. De lo dicho se sigue, evidentemente, que el concepto de conjunto gödeliano es una mejor aproximación sintáctica al concepto de verdad que el de teorema: es claro que en cualquiera de los cálculos habituales para  $L_2$  hay fórmulas tales que ni ellas ni su negación son teoremas, aunque necesariamente una de las dos es verdadera.

El concepto de conjunto-verdad (truth-set) de (teorías de) primer orden que utiliza, entre otros, Smullyan<sup>(3)</sup> viene a coincidir, desde otro punto de vista, con el de conjunto gödeliano. Vamos a discutir este punto aunque sólo sea informalmente. Antes de entrar en materia presentamos una notación metalingüística que Smullyan define para la lógica bivalente y que nosotros adaptaremos luego a  $L_3$ .

Sean  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma[a], \delta$ ,  $\delta[a]$  fórmulas de  $L_2$ , donde 'a' es un parámetro de individuo, definidas según los cuadros siguientes<sup>(4)</sup>:

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$(F \wedge G)$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	F

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$(F \vee G)$	F	G
$(F \rightarrow G)$	$\neg F$	G

$\delta$	$\delta[a]$	$\delta$	$\delta[a]$
$\Lambda X F[X]$	$F[a]$	$\forall X F[X]$	$F[a]$
$\neg \forall X F[X]$	$\neg F[a]$	$\neg \Lambda X F[X]$	$\neg F[a]$

Utilizando esta notación podemos definir un conjunto-verdad como sigue:  $M$  es un conjunto-verdad sii  $H$  es un conjunto de fórmulas que cumple:

- (i) Para toda fórmula  $F$ ,  $F \in M$  sii  $\neg F \notin H$
- (ii)  $\alpha \in M$  sii  $\alpha_1 \in M$  y  $\alpha_2 \in M$ .
- (iii)  $\beta \in M$  sii  $\beta_1 \in M$  o  $\beta_2 \in M$ .
- (iv)  $\gamma \in H$  sii para todo parámetro de individuo  $a$ ,  $\gamma[a] \in H$
- (v)  $\delta \in M$  sii hay un parámetro de individuo  $a$  tal que  $\delta[a] \in H$ .

Ahora es fácil ver que conjunto gödeliano y conjunto-verdad coinciden: ambas definiciones comparten la condición (i) y las condiciones (ii)-(v) de la definición de conjunto-verdad, tomadas juntamente, coinciden con la condición (ii) de la primera definición, cuando el cálculo que se toma en consideración es un cálculo de árboles lógicos. Veámoslo. Supongamos que  $H$  es un conjunto-verdad y que  $M \stackrel{B2}{\vdash} F$ , donde  $B2$  es un cálculo de árboles para la lógica standard. En el supuesto de que  $F \notin H$ , de la condición (i) se sigue que  $\neg F \in H$ . Ahora bien, las reglas de deducción de un cálculo de árboles pueden formularse de la siguiente manera:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1, \alpha_2} \quad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \quad \frac{\gamma}{\gamma[a]} \quad \frac{\delta}{\delta[a]} \quad (5)$$

teniendo en cuenta que la última regla se utiliza bajo la condición de que 'a' no aparezca en los supuestos ni en  $\delta$ .

Entonces, dado que hay un árbol cerrado para el conjunto  $M \cup \{\neg F\}$  de supuestos, por las condiciones (ii)-(v), todos los sucesores de  $\neg F$  en el árbol pertenecen a  $M$ , pues  $\neg F \in M$ . Luego hay una fórmula  $G$  tal que  $G \in M$  y  $\neg G \in M$ , en contradicción con la afirmación de que  $M$  es un conjunto-verdad. Por lo tanto,  $F \in M$ . Las condiciones (i)-(v) implican, en consecuencia, que  $M$  está cerrado para la deducción. A la inversa, si se cumple que  $M \vdash_{B2} F$  implica que  $F \in M$ , entonces se cumplen las condiciones (ii)-(v), pues si  $F$  es un  $\alpha$ , por ejemplo, y  $F \in M$ , entonces  $M \vdash_{B2} F$  y, además, dado que  $\alpha \vdash_{B2} \alpha_1$  y  $\alpha \vdash_{B2} \alpha_2$ , se sigue que  $M \vdash_{B2} \alpha_1$  y  $M \vdash_{B2} \alpha_2$ . Luego  $\alpha_1 \in M$  y  $\alpha_2 \in M$ . A la inversa, si  $\alpha_1 \in M$  y  $\alpha_2 \in M$ , dado que  $\alpha_1, \alpha_2 \vdash_{B2} \alpha$ , entonces  $M \vdash_{B2} F$  y  $F \in M$ . Luego podemos afirmar que estas condiciones son equivalentes.

Cabe plantearse si hay condiciones más débiles que las del conjunto gödeliano para definir una clase de fórmulas que sea demostrablemente satisfacible. Una primera debilitación resulta de la sustitución del bicondicional por el condicional de izquierda a derecha en las condiciones (ii)-(v). En efecto, para asegurarnos que  $M$  está cerrado para la deducción sólo necesitamos ese condicional, como se desprende del bosquejo de prueba que hemos hecho más arriba. La segunda simplificación posible consiste en eliminar la mitad de la condición (i) y exigir que  $M$  no contenga una fórmula y su negación. O, más radicalmente, que  $M$  no contenga una fórmula elemental y su negación. Demostración de la suficiencia de las condiciones así debilitadas para definir conjuntos satisfacibles se puede encontrar en Smullyan<sup>(6)</sup>. Utilizando estos recursos más débiles, (i)-(v) se formularían así:

(i') Para toda fórmula elemental  $F$ ,  $F \in M \Rightarrow \neg F \notin M$

(ii')  $\alpha \in M \Rightarrow \alpha_1 \in M \ \& \ \alpha_2 \in M$ .

(iii')  $\beta \in M \Rightarrow \beta_1 \in M \ \text{o} \ \beta_2 \in M$ .

(iv')  $\gamma \in \mathbb{N} \Rightarrow \delta[a] \in \mathbb{N}$ , para todo parámetro de individuo  $a$ .

(v)  $\delta \in \mathbb{N} \Rightarrow \delta[a] \in \mathbb{N}$ , para al menos un parámetro de individuo  $a$ .

Hintikka llamó conjuntos-modelo (model-set)<sup>(7)</sup> a los conjuntos de fórmulas que cumplen las condiciones (i')-(v'). Se les suele designar también con el nombre de conjuntos de Hintikka. Se puede demostrar que los conjuntos-modelo, como los conjuntos gödelianos, son satisfacibles en una interpretación adecuada sobre el dominio de los parámetros de individuo<sup>(8)</sup>. A partir de la noción de conjunto-modelo es fácil mostrar que un cálculo, por ejemplo de árboles lógicos, es completo: En primer lugar se muestra que los puntos de una rama abierta de un árbol pueden extenderse hasta un conjunto de Hintikka. Entonces, si  $F$  es una fórmula válida y no deducible, hay un árbol abierto para  $\neg F$ . Una de las ramas abiertas de ese árbol puede extenderse a un conjunto de Hintikka. Ese conjunto es satisfacible y con él la fórmula  $\neg F$ , contra el supuesto de que  $F$  era lógicamente verdadera. Por lo tanto,  $F$  es deducible.

Una de las tareas que nos proponemos en este capítulo es extender estos resultados a la lógica trivalente L3. Hemos de definir la noción de conjunto-modelo trivalente y mostrar que todo conjunto-modelo así definido es satisfacible en la semántica propia de L3. Utilizando una modificación de la notación de Smullyan, podemos definir los conjuntos-modelo trivalentes en términos casi idénticos a los que se emplean en la lógica bivalente. Aquí se plantea un tema que no abordaré en este trabajo pero que quizá sea interesante apuntar: podemos definir ciertos conceptos básicos de la metateoría de la lógica trivalente de primer orden recurriendo a nociones que se asemejan mucho a las correspondientes en la lógica bivalente. Nos podemos plantear entonces la cuestión de si existe un nivel de abstracción que englobe a

ambas teorías, generalizando, a todas las teorías  $n$ -valentes de primer orden. Dicho de otro modo, ¿puede darse una metateoría general de las teorías de primer orden  $n$ -valentes?. Como ya he dicho, no me ocuparé de este tema aquí, pero los resultados que se obtienen en este capítulo, así como en el resto del trabajo, parecen apuntar en la dirección de una respuesta positiva a esta pregunta.

En Smullyan (1968) se definen una clase de propiedades de conjuntos de fórmulas llamadas propiedades de consistencia analítica (analytic consistency property)<sup>(\*)</sup>. Son propiedades relacionadas con la noción de conjunto de Hintikka en el sentido de que el teorema fundamental que de ellas se afirma establece la satisfacibilidad de todo conjunto que posea una de estas propiedades y ello por el camino de mostrar que si un conjunto goza de una propiedad de consistencia, entonces es ampliable a un conjunto de Hintikka. Este resultado, que Smullyan presenta para la lógica bivalente, se generaliza aquí para la lógica trivalente, bajo el nombre de Principio de Unificación de Smullyan. Del alcance de este principio da idea el que sean consecuencias suyas, por ejemplo, el teorema de compacidad y una serie de resultados de completud que iremos mostrando en este y siguientes capítulos.

En síntesis, una propiedad de consistencia analítica  $E$  es una propiedad de conjuntos de fórmulas tal que todo conjunto  $M$  que tiene la propiedad es tal que no contiene una fórmula y su negación y, además, la unión de  $M$  con los sucesores de las fórmulas en  $M$  es un nuevo conjunto que tiene la propiedad  $E$ , entendiendo sucesor de una fórmula como aquellas que pueden ser sucesores de la fórmula en un árbol lógico.

A nuestro entender, la formulación que aquí da-

mos del Principio de Unificación presenta ciertas ventajas sobre la de Smullyan. En concreto, debilitamos las condiciones que definen una propiedad analítica de consistencia, puesto que no exigimos su carácter finito -decimos que la propiedad E es de carácter finito si ocurre que un conjunto H tiene la propiedad E si y sólo si la tienen todos los subconjuntos finitos de H - y no basamos la demostración del Principio en ningún cálculo concreto.

En lo que sigue haremos frecuente uso de la noción de propiedad de consistencia, aplicada a L3, para mostrar la completud de diversos cálculos. En este capítulo probaremos la completud de B3 mostrando que "ser un conjunto H tal que no hay un árbol cerrado para ningún subconjunto  $H^0$ , finito, de H" es una propiedad trivalente de consistencia analítica. De esto se sigue la demostración de la completud de B3 por un camino distinto al que sigue Blau<sup>(10)</sup>. Además, daremos una demostración del teorema de compacidad para L3 basándonos también en el Principio de Unificación.

Una clase de conjuntos de conjuntos de fórmulas con características similares a las de las propiedades de consistencia analítica es la clase de las propiedades de demostrabilidad analítica (analytic provability property)<sup>(11)</sup>. Estas propiedades de demostrabilidad analítica, cuya definición para la lógica trivalente daremos en la definición 2.5.1, son "duals" de las propiedades de consistencia, puesto que podemos establecer (proposición 2.5.3) que dado un conjunto H tal que la conjunción de las negaciones de sus elementos es insatisfacible y una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica E, entonces H tiene la propiedad E. Al través de este concepto de propiedad de demostrabilidad pondremos de manifiesto que el cálculo A3 es completo, utilizando,

de nuevo, métodos distintos a los ya existentes. No será esta la última vez que utilicemos estas propiedades, sin embargo.

Los dos tipos de propiedades relacionan un concepto semántico, el de satisfacibilidad, con conceptos sintácticos de varios tipos, según el tipo de propiedad de que se trate. Esta relación es la base sobre la que se apoya el uso de las propiedades de consistencia o demostrabilidad en pruebas de completud de los cálculos para L3.

## 2.2 Notación

Introducimos en este apartado una nueva notación para ciertas clases de fórmulas de L3. Como se verá, se trata de una generalización de la notación de Smullyan a que antes hemos aludido. La base intuitiva de la notación es siempre la misma: se consideran fórmulas de tipo a ( $\alpha$ , en Smullyan) las fórmulas j-complejas que no dan lugar a ramificaciones en un cálculo de árboles lógicos. De tipo b ( $\beta$ , en Smullyan) son las fórmulas j-complejas que ramifican en el cálculo de árboles. c ( $\gamma$ , en Smullyan) son las fórmulas de la teoría de la cuantificación de las que son deducibles, en el mismo tipo de cálculo, todas sus especializaciones. Finalmente, del tipo d ( $\delta$ , en Smullyan) serán aquellas fórmulas cuyas especializaciones sólo son deducibles bajo ciertas condiciones.

Sean entonces del tipo a las fórmulas de la forma

$$\frac{\neg\neg F}{\neg\neg} \quad (F \wedge G) \quad \neg\neg(F \wedge G).$$

En dependencia con este tipo de fórmulas definimos los tipos de fórmula  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ :

$$\text{Si } a \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \exists x F \\ (F \wedge G) \\ \neg(F \wedge G) \end{array} \right\} \text{ entonces } a_1 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} F \\ F \\ \neg F \end{array} \right\} \text{ y } a_2 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} F \\ G \\ \neg G \end{array} \right\}$$

Con  $b$  designamos las fórmulas de la forma

$$\exists x \neg F \quad \neg(F \wedge G) \quad \neg(F \wedge G)$$

$b_1$   $b_2$  son los posibles sucesores de una fórmula  $b$ :

$$\text{Si } b \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \exists x \neg F \\ \neg(F \wedge G) \\ \neg(F \wedge G) \end{array} \right\} \text{ entonces } b_1 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \neg F \\ -F \\ \neg F \end{array} \right\} \text{ y } b_2 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \neg F \\ -G \\ \neg G \end{array} \right\}$$

Del tipo  $c$  son las fórmulas

$$\Lambda X F[X] \quad \neg \Lambda X F[X]$$

Las fórmulas  $c[A]$  se definen como sigue:

$$\text{Si } c \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \Lambda X F[X] \\ \neg \Lambda X F[X] \end{array} \right\} \text{ entonces } c[A] \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} F[A] \\ \neg F[A] \end{array} \right\}$$

Finalmente, las fórmulas de tipo  $d$  tienen la forma

$$\neg \Lambda X F[X] \quad \neg \Lambda X F[X]$$

y las fórmulas  $d[A]$  son definidas así:

$$\text{Si } d \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \neg \Lambda X F[X] \\ \neg \Lambda X F[X] \end{array} \right\} \text{ entonces } d[A] \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} -F[A] \\ \neg F[A] \end{array} \right\}$$

Por otro lado utilizaremos en lo que sigue los signos  $H_1, H_2, H_3$  y  $H_4$  como constantes en el metalenguaje para designar las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{llll} H_1 & \text{designará la fórmula} & \text{IP}^k[A] \rightarrow A=A & \\ H_2 & " & " & (\Lambda=B \wedge F[A]) \rightarrow F[B] \\ H_3 & " & " & (\Lambda=A \wedge B=B) \rightarrow \Lambda=B \\ H_4 & " & " & (F=A \rightarrow (F[A] \wedge \Lambda X(F[X] \rightarrow X=A))). \end{array}$$

En rigor, y contra lo que antes hemos dicho, hay un tipo de fórmulas  $b$  que no ramifica en B3, a saber, las fórmulas  $\exists\exists F$  (entiéndase  $\exists\exists F$  como abreviatura de dos tipos de fórmulas:  $\exists\exists F$  y  $\exists\exists F$ ). De modo similar debe entenderse  $\exists\exists F$ . Si consideramos de tipo  $b$  a las fórmulas  $\exists\exists F$ , es por cuestiones de dualidad con las fórmulas  $\exists\exists F$ , como luego se pondrá de manifiesto. Teniendo esto en cuenta, podemos presentar las reglas del cálculo B3 como sigue:

$$(1) \frac{a}{a_1} \quad (2) \frac{b}{b_1 \mid b_2} \quad (3) \frac{c}{c(A)} \quad (4) \frac{d}{d(P^1)}$$

$$(5) \Pi_1 \quad (1 \leq i \leq 4)$$

utilizando la regla (4) bajo el supuesto de que  $P^1$  no aparezca en los supuestos ni en un predecesor de la conclusión.

El tratar las fórmulas  $\exists\exists F$  como pertenecientes al tipo  $b$  no plantea mayores problemas: al utilizar la regla (2) con estas fórmulas se generan dos ramas iguales una de las cuales debe eliminarse.

Vamos a estudiar ahora algunas propiedades semánticas de esta notación que utilizaremos más adelante.

#### Lema 2.2.1

Para toda valoración  $\beta$  (o interpretación  $\varphi$ ) vale

- (i)  $\beta(a) = v$  sii  $\beta(a_1) = v$  y  $\beta(a_2) = v$ .
- (ii)  $\beta(b) = v$  sii  $\beta(b_1) = v$  o  $\beta(b_2) = v$ .
- (iii)  $\beta(c) = v$  sii  $\beta(c(A)) = v$ , para toda descripción  $A$ .
- (iv)  $\beta(d) = v$  sii  $\beta(d(A)) = v$ , para al menos una descripción  $A$ .
- (v)  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  y  $\Pi_4$  son L3-verdaderas.

Demostración: El lema es trivial si se tiene en cuenta qué tipos de fórmulas se designan con las letras  $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c[\Lambda], d, d[\Lambda]$  y las condiciones de definición de las valoraciones.

En el lema siguiente analizamos las relaciones entre los diferentes tipos de fórmulas que hemos definido, particularmente en el caso de que se trate de una fórmula negada. Vemos que las fórmulas  $a$  y  $b$  son, en cierto sentido, duales, al igual que  $c$  y  $d$ .

Lema 2.2.2

Para toda fórmula del tipo  $a, b, c$  o  $d$  y sus sucesores o descendientes  $a_1, a_2, b_1, b_2, c[\Lambda], d[\Lambda]$ , vale que

- (i)  $\neg a$  es una  $b$  ( $\neg \neg F; \neg(F \wedge G)$ ) y/o es L3-bicondicional con una  $b$ . ( $\models_{L3} \neg \neg F \leftrightarrow F; \models_{L3} \neg \neg (F \wedge G) \leftrightarrow (F \wedge G)$ ).
- (ii)  $\neg b$  es una  $a$  ( $\neg \neg (F \wedge G)$ ) y/o es L3-bicondicional con una  $a$ . ( $\models_{L3} \neg \neg \neg F \leftrightarrow \neg F; \models_{L3} \neg \neg (F \wedge G) \leftrightarrow (F \wedge G)$ ).
- (iii)  $\neg c$  es una  $d$  ( $\neg \neg \neg \neg XFX$ ) y/o es L3-bicondicional con una  $d$ . ( $\models_{L3} \neg \neg \neg \neg XFX \leftrightarrow \neg \neg \neg \neg XFX$ ).
- (iv)  $\neg d$  es una  $c$  ( $\neg \neg \neg \neg XFX$ ) o es L3-bicondicional con una  $c$ .
- (v) Pueden hacerse afirmaciones análogas respecto a  $a_1, a_2, b_1, b_2, c[\Lambda], d[\Lambda]$ .

En relación con futuras demostraciones se debe notar que, en una inducción según el grado de una fórmula fuera de las descripciones las fórmulas  $a_1, a_2, b_1, b_2, c[\Lambda], d[\Lambda]$  tienen un grado menor que las correspondientes fórmulas  $a, b, c, d$ .

Discutimos finalmente si toda fórmula de L3 queda englobada en la clasificación de las fórmulas según los tipos que hemos definido en este apartado. Vemos que no es así y ponemos de manifiesto qué otros tipos de fórmulas existen. El lema siguiente

te adquiere importancia en demostraciones posteriores, en que deberemos hacer inducciones sobre todas las fórmulas de L3 y no sólo sobre el conjunto de las fórmulas  $a, b, c, d$  y sus descendientes.

Lema 2.2.3

Toda fórmula  $F$  de L3 que contenga sólo signos primitivos o bien (i) es elemental o (ii) es de la forma  $\neg G, \neg G, \neg G$ , con  $G$  elemental o bien (iii) es una  $a, b, c, d$ .

Demostración: Por inducción fuerte según el grado de  $F$  fuera de las descripciones. Base de inducción:  $F$  es elemental. En este caso  $F$  pertenece a la clase (i) de fórmulas.

Paso de inducción. Supuesto de inducción: para toda fórmula de grado menor que  $F$  fuera de las descripciones se cumple el lema. Supuesto que  $F$  es  $j$ -compleja o  $q$ -compleja, entonces se cumple que o bien (1)  $F$  es  $\neg G$  o (2)  $F$  es  $\neg G$  o (3)  $F$  es  $(G_1 \wedge G_2)$  o (4)  $F$  es  $\exists x F(x)$ .

(1) Por supuesto de inducción, o (1.1)  $G$  es elemental o (1.2)  $G \equiv \neg G_2$  o (1.3)  $G \equiv \neg G_2$  o (1.4)  $G \equiv \neg G_2$  o (1.5)  $G$  es una  $a, b, c$ , o  $d$ .

(1.1)  $F \equiv \neg G$ , con  $G$  elemental. Por lo tanto cumple (ii). En los casos (1.2)–(1.4)  $F$  es una  $a$ . En los casos comprendidos en (1.5)  $F$  es una  $a, b, c$ , o  $d$ , como se comprueba fácilmente.

(2) Por supuesto de inducción, o bien (2.1)  $G$  es elemental o bien (2.2)  $G \equiv \neg G_2$  o (2.3)  $G \equiv \neg G_2$  o (2.4)  $G \equiv \neg G_2$  o (2.)  $G$  es una  $a, b, c$ , o  $d$ .

(2.1)  $F \equiv \neg G$ , con  $G$  elemental. Por lo tanto, cumple (ii). En el caso (2.2)  $F \equiv \neg G_2$ , Por supuesto de inducción,  $G_2$  cumple el lema. Si  $G_2$  es elemental, entonces  $F$  es de la forma  $\neg G_2$  con  $G_2$ , con  $G_2$  elemental y cumple (ii). En los otros casos,

F es una a, b, c, o d. En los casos (2.3) y (2.4) F es una a.

En los casos comprendidos en (2.5) F es una a, b, c, o d.

(3) F es una a.

(4) F es una c.

q.e.d.

### 2.3 Conjuntos-modelo trivalentes<sup>(12)</sup>

Como ya hemos dicho, los conjuntos-modelo trivalentes representan una noción afín a la de conjunto satisfacible, aunque más debil que ésta. En síntesis, podemos decir que todo conjunto-modelo es satisfacible, aunque hay conjuntos satisfacibles que no son conjuntos-modelo. Si se puede afirmar, en cambio, que todo conjunto satisfacible es ampliable a un conjunto-modelo. En esta sección damos la definición de conjunto-modelo para la lógica trivalente y demostramos sus propiedades esenciales, a las que acabamos de aludir. Conviene insistir en que la noción de conjunto-modelo es puramente sintáctica, aunque sus propiedades más interesantes, en concreto, su satisfacibilidad, sean semánticas. En este sentido el concepto de conjunto-modelo constituye un puente de capital importancia entre sintaxis y semántica. Como en el caso de los conjuntos-modelo para la lógica bivalente, lo definitorio de estos conjuntos de fórmulas es no contener dos expresiones tales que una sea la negación de la otra y la pertenencia al conjunto de todos los descendientes de fórmulas en el conjunto. Debido a que en L3 existen dos negaciones distintas, la condición primera de la definición de conjunto-modelo se aparta de lo que es habitual en la lógica bivalente (cfr. el punto (i) de la definición que sigue) aunque el fin buscado es el mismo: excluir de los conjuntos-modelo los pares de fórmulas que no sean simultáneamente satisfacibles. Esto puede lograrse o bien definiendo los

los conjuntos-modelo de tal modo que no contengan una fórmula y su negación fuerte o débil o bien, y de modo equivalente, en la forma de la condición (i) de la definición de conjunto-modelo trivalente. La equivalencia de estas dos condiciones se mostrará posteriormente en la nota (13).

Definición 2.3.1. Conjunto-modelo trivalente

Sea  $M$  un conjunto de fórmulas de L3. Por definición,  $M$  se llama conjunto-modelo si

- (i) No hay ninguna fórmula elemental  $F$  tal que o bien  $F \in M$  y  $\neg F \in M$  o bien  $\neg F \in M$  y  $\neg\neg F \in M$  <sup>(13)</sup>.
- (ii) Si  $a \in M$ , entonces  $a_1 \in M$  y  $a_2 \in M$ .
- (iii) Si  $b \in M$ , entonces  $b_1 \in M$  o  $b_2 \in M$ .
- (iv) Si  $c \in M$ , entonces  $c(A) \in M$ , para toda descripción  $A$ .
- (v) Si  $d \in M$ , entonces  $d(A) \in M$ , para al menos una descripción  $A$ .
- (vi)  $H_i \in M$ , ( $1 \leq i \leq 4$ ).

Vimos antes que un conjunto gödeliano está cerrado para la deducción en cálculos adecuados. En el caso de los conjuntos-modelo alcanzamos un resultado más débil en la misma dirección. Se puede afirmar que un conjunto-modelo o está cerrado para la deducción o es ampliable a un conjunto-modelo cerrado en ese sentido. Podemos justificar esta afirmación como sigue: Sea  $N$  un conjunto-modelo y  $F$  una fórmula cualquiera tal que  $N \not\vdash_C F$ , siendo  $C$  un cálculo adecuado para L3. Si  $F \in N$ , no hay nada que demostrar. Supongamos que  $F \notin N$ . Sea  $C$  el cálculo B3. Si comparamos las condiciones (ii)-(vi) de la definición precedente con las reglas del cálculo B3 expresadas por medio de la notación  $a, b, c$ , etc., vemos que dada una fórmula como origen de un árbol lógico, todos los sucesores de la fórmula pertenecen a todo con-

junto-modelo al que pertenece la fórmula. Sea  $B$  un árbol con supuestos  $H \cup \{\neg F\}$ . Si  $\neg F \in H$ , pertenecen al conjunto-modelo  $H$  todos los sucesores de  $\neg F$  y, en particular, una fórmula y su negación fuerte o débil. En ese caso  $H$  no será un conjunto-modelo, contra el supuesto. Luego  $\neg F \notin H$ . Consideremos ahora el conjunto  $H \cup \{G \mid H \vdash_{B3} G\}$ . Es claro que  $H \subseteq H \cup \{G \mid H \vdash_{B3} G\}$  y que  $F \in H \cup \{G \mid H \vdash_{B3} G\}$ . Afirmamos que  $H \cup \{G \mid H \vdash_{B3} G\}$  es un conjunto-modelo. En efecto, las condiciones (ii)-(vi) de la definición 2.3.1 se cumplen trivialmente. Además, si suponemos que hay una fórmula  $F'$  tal que  $F'$  y  $\neg F'$  pertenecen a  $H \cup \{G \mid H \vdash_{B3} G\}$ , entonces, por la corrección de  $B3$ , se puede afirmar que  $H \vdash_{L3} F' \wedge \neg F'$ . En ese caso,  $H$  sería insatisfacible, contra la proposición 2.3.2 (cfr. más abajo), que afirma la satisfacibilidad de todo conjunto-modelo. Luego  $H \cup \{G \mid H \vdash_{B3} G\}$  es un conjunto-modelo cerrado para la deducción a partir de fórmulas contenidas en él.

Pasamos ahora a estudiar uno de los resultados más importantes de este capítulo. Vamos a ver que todo conjunto-modelo es satisfacible en al menos una valoración y, por lo tanto, en al menos una interpretación. Nuestra demostración de este hecho está muy relacionada con la demostración de Blau<sup>(14)</sup> de que las ramas abiertas de determinado tipo de árboles lógicos, en concreto, de los llamados árboles sistemáticos, son satisfacibles. En cierto sentido, la prueba que aquí damos es anterior a la demostración de Blau, puesto que esta última es, esencialmente, una demostración simultánea de que toda rama abierta de un árbol sistemático es un conjunto-modelo (noción que Blau no emplea) y de que un conjunto-modelo es satisfacible. En la forma en que nosotros presentamos este resultado, se derivan consecuencias más generales que en el caso de Blau. El elemento esencial de la demostración es construir o, mejor, dar instrucciones para definir una inter-

pretación o valoración que satisfaga todas las fórmulas de un conjunto-modelo dado.

Proposición 2.3.2

Todo conjunto-modelo trivalente es L3-satisfacible

Demostración: Sea  $\beta$  la siguiente L3-valoración:

Para toda fórmula elemental  $F$ ,  $\beta(F) = \begin{cases} v, & \text{si } F \in M \\ f, & \text{si } \neg F \in M \\ i, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Las fórmulas  $j$ -complejas y  $q$ -complejas se valoran según los puntos (ii)-(x) de la definición de valoración 1.5.1. Es claro que  $\beta$  es una valoración unívoca de las fórmulas elementales y, por lo tanto, lo es también de todas y cada una de las fórmulas complejas. Además, se puede demostrar que la valoración así definida satisface todas las fórmulas del conjunto-modelo  $M$ . La demostración se hace por inducción fuerte según el grado de cada fórmula  $H$  de  $M$  fuera de las descripciones ( $gr(H)$ ).

Base de inducción:  $H$  es elemental. Por la definición de  $\beta$ , se sigue que  $\beta(H) = v$ .

Paso de inducción. Supuesto de inducción: para toda fórmula  $F \in M$ , tal que  $gr(F) < gr(H)$  se cumple que  $\beta(F) = v$ . Sea ahora  $H$   $j$ -compleja o  $q$ -compleja. Según el lema 2.2.3,  $H$  tiene una de las siete formas siguientes: (1)  $\neg F$ ; (2)  $\neg\neg F$ ; (3)  $\neg F$ ; (4)  $H$  es una  $a$ ; (5)  $H$  es una  $b$ ; (6)  $H$  es una  $c$ ; (7)  $H$  es una  $d$ . En los casos (1), (2) y (3)  $F$  es una fórmula elemental. Entonces, según la definición de  $\beta$  resulta que

(1)  $\beta(F) = f$ . Por lo tanto,  $\beta(H) = \beta(\neg F) = v$

(2) Según la condición (i) de la definición 2.3.1,  $\neg F \notin M$ . Entonces por la definición de  $\beta$ ,  $\beta(F) = v$  o  $\beta(F) = i$ . En ambos casos,  $\beta(\neg\neg F) = \beta(H) = v$ .

(3) Por (i) en la def. 2.3.1,  $F \notin M$ . Por lo tanto  $\beta(F) \neq v$  y  $\beta(\neg F) = v = \beta(H)$ .

(4) Si  $H$  es una  $\alpha$ , según el punto (ii) de la definición de conjunto-modelo,  $\alpha_1 \in H$  y  $\alpha_2 \in H$ . El grado de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es menor que el de  $H$ . Por supuesto de inducción  $\beta(\alpha_1) = v = \beta(\alpha_2)$ . Según el lema 2.2.1,  $\beta(\alpha) = v = \beta(H)$ .

(5) Si  $H$  es una  $b$ , según la def. 2.3.1 (iii),  $b_1 \in H$  o  $b_2 \in H$ . Por supuesto de inducción  $\beta(b_1) = v$  o  $\beta(b_2) = v$ . Por el lema 2.2.1,  $\beta(b) = v = \beta(H)$ .

(6) Si  $H$  es una  $c$ , según def. 2.3.1 (iv)  $c[A] \in H$ , para toda descripción  $A$ . Puesto que  $gr(c[A])$  es menor que  $gr(H)$ , para toda descripción  $A$ , se sigue que  $\beta(c[A]) = v$ . Por el lema 2.2.1 se cumple que  $\beta(c) = v = \beta(H)$ .

(7) Si  $H$  es una  $\sigma$ , según la def. 2.3.1,  $\sigma[A] \in H$ , para al menos una descripción  $A$ . Dado que  $gr(\sigma[A]) < gr(H)$ , por el supuesto de inducción  $\beta(\sigma[A]) = v$ , para al menos una descripción  $A$ . Según el lema 2.2.1 se sigue  $\beta(\sigma) = v = \beta(H)$ . En consecuencia, cualquiera que sea la forma de  $H$ ,  $H$  es verdadera en la valoración  $\beta$  si  $H \in M$ . Dado que  $H$  es una fórmula cualquiera, la afirmación vale para todas las fórmulas. Por otro lado,  $H_1, H_2, H_3$  y  $H_4$  son fórmulas de  $H$ , por def. 2.3.1 (vi). Por lo tanto,  $\beta(H_i) = v$  ( $1 \leq i \leq 4$ ). Luego  $\beta$  es una valoración que satisface a  $H$ . q.e.d.

Dado que según la proposición 1.5.2 toda valoración de  $L_3$  es ampliable a una  $L_3$ -interpretación, y que toda  $L_3$ -interpretación lo es sobre un dominio enumerable, de la proposición anterior se sigue que todo conjunto-modelo de fórmulas de  $L_3$  es satisfacible en un dominio enumerable, por ejemplo y en concreto, sobre el dominio infinito enumerable de las clases de descripciones equivalentes modulo  $=$  en la valoración  $\beta$ .

Como hemos dicho, el concepto de conjunto-modelo no es equivalente al de conjunto satisfacible. Hay conjuntos satisfacibles que no son conjuntos-modelo. Sin embargo, el próximo

teorema (prop. 2.3.3) nos da la seguridad de que todo conjunto satisfacible es subconjunto de un conjunto-modelo. La prop. 2.3.4, una consecuencia trivial de la prop. 2.3.2, afirma la relación inversa, a saber, que todo subconjunto de un conjunto-modelo es satisfacible.

Proposición 2.3.3

Si  $N$  es un conjunto de fórmulas de L3 y es L3-satisfacible, entonces hay un conjunto-modelo  $M$  tal que  $N \subseteq M$ .

Demostración: Sea  $\beta$  una de las L3-valoraciones en las que las fórmulas del conjunto  $N$  son verdaderas. Sea  $M$  el conjunto de las fórmulas de L3 que son verdaderas en  $\beta$ . Evidentemente,  $N \subseteq M$ . Además,  $M$  es un conjunto-modelo, como demostramos a continuación: (i) para toda fórmula  $F \in M$  no es cierto que  $F$  y  $\neg F$  sean verdaderas y por lo tanto sólo una de ellas pertenece a  $M$ . Según el lema 2.2.1, se cumplen también el resto de las condiciones definitorias de los conjuntos-modelo, pues si, por ejemplo, una fórmula  $a$  es verdadera y, por tanto, pertenece a  $M$ , entonces las correspondientes fórmulas  $a_1$  y  $a_2$  también son verdaderas y pertenecen a  $M$ . Lo mismo vale, mutatis mutandis, de los otros tipos de fórmulas  $b, c$ , y  $d$ . Finalmente, por la definición de valoración, las fórmulas  $H_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) son verdaderas en toda valoración y, en particular en  $\beta$ . De ello se sigue su pertenencia a  $M$ , cumpliéndose la condición (vi) de la definición de conjunto-modelo.

q.e.d.

Proposición 2.3.4

Si  $M$  es un conjunto-modelo y  $N \subseteq M$ ,  $N$  es satisfacible.

Demostración: Según la proposición 2.3.1 hay una valoración que satisface todas las fórmulas de  $\mathcal{M}$  y, en particular, todas las de  $\mathcal{N}$ .

#### 2.4 Propiedades trivalentes de consistencia analítica

Ya hemos visto en la introducción al capítulo qué funciones cumplen las propiedades de consistencia analítica. Se trata de propiedades de conjuntos de fórmulas todas las cuales aseguran la satisfacibilidad de los conjuntos de fórmulas que las poseen. Como en el resto del trabajo, hablamos aquí de propiedades de conjuntos de fórmulas y de conjuntos de conjuntos de fórmulas sin hacer distinciones entre ambos giros. El atributo fundamental de estas propiedades de consistencia, al que acabamos de aludir, se enuncia en el teorema que hemos llamado Principio de Unificación de Smullyan. Como hemos de ver en la demostración de este teorema, en la base del Principio de Unificación está la noción de conjunto-modelo. Frente al concepto de conjunto-modelo, la definición de propiedad de consistencia presenta la ventaja de estar más orientada, por así decir, hacia la estructura de los cálculos concretos: es mucho más fácil, en general, mostrar que una propiedad relacionada con la deducibilidad es una propiedad trivalente de consistencia analítica que demostrar que el conjunto de fórmulas que tiene esa propiedad es un conjunto-modelo o subconjunto de un conjunto-modelo. Finalmente, hemos de apuntar la gran virtualidad de la definición, que permite afirmar importantes propiedades semánticas de conjuntos cuya definición sintáctica es muy variada.

- (ii') Si  $\{H, a, a_1\} \notin E$  o  $\{H, a, a_2\} \notin E$ , entonces  $\{H, a\} \notin E$ .
- (iii') Si  $\{H, b, b_1\} \notin E$  y  $\{H, b, b_2\} \notin E$ , entonces  $\{H, b\} \notin E$ .
- (iv') Si  $\{H, c, c[A]\} \notin E$ , entonces  $\{H, c\} \notin E$ .
- (v') Si  $\{H, d, d[P_j^1]\} \notin E$ , cuando  $P_j^1$  no aparece en  $\{H, d\}$  entonces  $\{H, d\} \notin E$ .
- (vi') Si  $\{H, H_1\} \notin E$ , entonces  $H \notin E$ .

Vamos ahora a enunciar y demostrar el Principio de Unificación de Smullyan para L3. Quizá sea conveniente analizar la estructura de la demostración antes de realizarla. Se parte de un conjunto de fórmulas  $H^*$ , paramétricamente limitado, que posee una propiedad trivalente de consistencia analítica E. El primer paso de la demostración de que este conjunto H es satisfacible es la definición por inducción de una secuencia  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  tal que cada conjunto  $S_i$  en la secuencia tiene a H como subconjunto y goza de la propiedad E. Estas propiedades de los conjuntos de la secuencia se demuestran en los lemas 1, 2, 3 y 4, que aparecen en el desarrollo de la prueba. La segunda parte de la demostración es la definición de un conjunto H, definido sobre la base de la secuencia a que antes hemos aludido, que contiene a H como subconjunto y que es un conjunto-modelo. La satisfacibilidad de H se sigue entonces del segundo paso de la demostración por la prop. 2.3.4. El elemento esencial de la demostración es la definición del conjunto H y la prueba de que es un conjunto-modelo.

Proposición 2.4.2. Principio de Unificación de Smullyan.

Sea  $H^*$  un conjunto paramétricamente limitado de fórmulas de L3 y E una propiedad trivalente de consistencia analítica. Se puede afirmar que si  $H^* \in E$ , entonces  $H^*$  es satisfacible en L3.

Como ya dijimos en la introducción al capítulo, la diferencia esencial entre nuestra definición de propiedad de consistencia analítica y la de Smullyan, aparte, naturalmente, de que en nuestro caso se trata de una generalización a L3, reside en que no exigimos que las propiedades de consistencia sean de carácter finito.

Respecto a la notación apuntamos el uso de  $\{F, F\}$  para indicar el conjunto  $H \cup \{F\}$ . Esta notación la empleamos con carácter general para otros tipos de metavariables.

Definición 2.4.1. Propiedades trivalentes de consistencia analítica en L3.<sup>(15)</sup>

Sea E un conjunto de conjuntos de fórmulas de L3.

E es, por definición, una propiedad trivalente de consistencia analítica sii para todo conjunto H de fórmulas de L3 tal que  $H \in E$ , se cumple

- (i) H no contiene una fórmula y su negación fuerte o débil.
- (ii) Si  $a \in H$ , entonces  $\{H, a_1\} \in E$  y  $\{H, a_2\} \in E$ .
- (iii) Si  $b \in H$ , entonces  $\{H, b_1\} \in E$  o  $\{H, b_2\} \in E$ .
- (iv) Si  $c \in H$ , entonces  $\{H, c[A]\} \in E$ , para toda descripción A.
- (v) Si  $d \in H$ , entonces  $\{H, d[(P_j^1)]\} \in E$ , para todo parámetro de predicado  $P_j^1$  que no aparece en H.
- (vi)  $\{H, H_i\} \in E$  ( $1 \leq i \leq 4$ ).

Podemos dar estas condiciones, de manera equivalente y en ocasiones más apropiada a nuestras necesidades posteriores, como sigue:

- (i') Si hay una fórmula F tal que F y  $\neg F$  aparecen en el conjunto H, entonces  $H \notin E$ .

Demostración: (1) Definición de la secuencia  $f$  y propiedades de los elementos de la secuencia.

(1.1) Definición de la secuencia: Sea  $g$  una secuencia  $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$  de las fórmulas de L3. Definimos  $f$  como una secuencia de conjuntos de fórmulas  $N_1, N_2, \dots, N_n, \dots$  como sigue:

(1.1.1) Sea  $N_1$  el conjunto  $M^*$

(1.1.2) Supuesto que se ha definido ya  $N_n$ , definimos  $N_{n+1}$ . Consideremos las siguientes condiciones:

(i) Hay una  $a \in N_n$  y  $F$  es la correspondiente  $a_1$  o  $a_2$

(ii) Hay una  $b \in N_n$  y  $F$  es la correspondiente  $b_1$  y  $\{N_n, b_1\} \in E$ .

(iii) Hay una  $b \in N_n$  y  $F$  es la correspondiente  $b_2$  y  $\{N_n, b_2\} \in E$

(iv) Hay una  $c \in N_n$  y  $F \equiv c[\Lambda]$ .

(v) Hay una  $d \in N_n$  y  $F \equiv d[P_j^1]$  siendo  $P_j^1$  un parámetro que no aparece en  $N_n$  ni en  $d$ .

(vi)  $F \equiv H_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ).

Entonces,

$$N_{n+1} = \begin{cases} \{N_n, F\}, & \text{si existe una fórmula } F \text{ en la secuencia } g \text{ tal} \\ & \text{que } F \text{ es la primera fórmula en } g \text{ que no pertenece a } N_n \\ & \text{y } F \text{ cumple alguna de las condiciones (i)-(vi).} \\ N_n, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esto queda definida la secuencia  $f = N_1, N_2, \dots, N_n, \dots$ . Estudiemos ahora algunas propiedades de los elementos de la secuencia.

Lema 1: La relación  $\subseteq$  es un orden lineal en los elementos de la secuencia  $f$ .

Demostración: Queremos mostrar que se puede afirmar de cada par de elementos  $N_i$  y  $N_j$  en la secuencia  $f$  que o bien  $N_i \subseteq N_j$  o bien  $N_j \subseteq N_i$ . El resto de las características de una relación de orden lineal se cumplen de  $\subseteq$ , como es sabido. En-

tonces, supuesto que  $i < j$ , es evidente que  $j = i + k$ . Se sigue que

$$G \in \tilde{H}_i \Rightarrow G \in \tilde{H}_{i+1}, \text{ puesto que } \tilde{H}_{i+1} = \tilde{H}_i \text{ o}$$

$$\tilde{H}_{i+1} = \{ \tilde{H}_i, F \}$$

$$G \in \tilde{H}_{i+1} \Rightarrow G \in \tilde{H}_{i+2}, \text{ por lo mismo}$$

⋮

$$G \in \tilde{H}_{i+(k-1)} \Rightarrow G \in \tilde{H}_{i+k} = \tilde{H}_j$$

Por la transitividad del condicional se sigue el lema.

**Lema 2:** Para todo conjunto  $\tilde{H}_i$  en la secuencia  $f$ ,  $\tilde{H}_i \in E$ , con  $i \neq 1$ .

**Demostración:** Por inducción según  $i$ . Base de inducción:  $\tilde{H}_1$  pertenece a  $E$ , por supuesto del teorema. Paso de inducción: Supuesto de inducción:  $\tilde{H}_{n-1} \in E$ . Por la definición de la secuencia  $\tilde{H}_n$  es  $\tilde{H}_{n-1}$  o  $\{ \tilde{H}_{n-1}, F \}$ . En el primer caso,  $\tilde{H}_n \in E$ , por supuesto de inducción. Si  $\tilde{H}_n = \{ \tilde{H}_{n-1}, F \}$  entonces  $F$  es una  $a_1, a_2, b_1, b_2, c[A]$  o  $d[CP_j^1]$  (con  $P_j^1$  nuevo para  $\tilde{H}_{n-1}$ ) y por definición de la secuencia  $f$ , la correspondiente  $a, b, c$  o  $d$  aparece en algún  $\tilde{H}_j$  con  $j \leq n-1$ . Por el lema 1 la  $a, b, c$  o  $d$  en cuestión pertenece a  $\tilde{H}_{n-1}$ . Ahora bien,  $\tilde{H}_{n-1} \in E$  por supuesto de inducción y según las condiciones (ii)-(v) de la definición de propiedad de consistencia,  $\{ \tilde{H}_{n-1}, F \} \in E$ , es decir,  $\tilde{H}_n \in E$ . Lo mismo vale decir cuando  $F$  es una  $H_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ).

**Lema 3:** Ningún  $\tilde{H}_i$  ( $i \neq 1$ ) contiene una fórmula y su negación fuerte o débil.

**Demostración:** Dado que todo  $\tilde{H}_i \in E$ , por la condición (i) de la definición de propiedad de consistencia se sigue el lema.

**Lema 4:** Ningún  $\tilde{H}_i$  ( $i \neq 1$ ) contiene una fórmula  $\neg H_i$ .

**Demostración:** Por inducción según  $i$ . Base de inducción:  $\tilde{H}_1$  no contiene  $\neg H_1$ . En otro caso, dado que  $\tilde{H}_1 \in E$ , tendríamos que  $\{ \tilde{H}_1, \neg H_1 \} \in E$ , cosa que no puede ocurrir

a la vista de la condición (1) de la def. 2.4.1. Paso de inducción: el mismo razonamiento que en la base excluye la presencia de  $\exists \Pi_1$  en el paso de inducción.

(2) Definición del conjunto N. N es un conjunto-modelo.

Sea  $H := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{N}_i$ . Nótese en primer lugar que  $H^* = \bar{N}_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{N}_i$ . Además, N es un conjunto-modelo:

(i) Supuesto que haya una fórmula F tal que F y  $\neg F$  pertenezcan a N, entonces hay un  $\bar{N}_i$  en la secuencia f que contiene a F y  $\neg F$ , contra el lema 3.

(ii) Supuesto que haya una  $\alpha \in N$ , entonces hay un i tal que  $\alpha \in \bar{N}_i$ . Si la correspondiente  $\alpha_1 \in \bar{N}_i$ , entonces no hay nada que demostrar. Si  $\alpha_1 \notin \bar{N}_i$ , entonces existe un conjunto de fórmulas  $\{F_j, F_{j+1}, \dots, F_k\}$  ( $j \leq k$ ), quizá vacío, tal que  $F_m = \alpha_1$  con  $m = k+1$ . Si las fórmulas  $F_1, F_2, \dots, F_h$  que pertenecen al conjunto  $\{F_j, F_{j+1}, \dots, F_k\}$  cumplen las condiciones de la definición de  $\bar{N}_{i+1}$ , entonces, según la def. 2.4.1 se cumple que

$$\begin{aligned} \bar{N}_{i+1} &= \bar{N}_i \cup \{F_1\} \text{ pertenece a } E, \text{ por lema 2} \\ \bar{N}_{i+2} &= \bar{N}_{i+1} \cup \{F_2\} \quad " \quad " \quad " \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \bar{N}_{i+h} &= \bar{N}_{i+(h-1)} \cup \{F_h\} \quad " \quad " \end{aligned}$$

Entonces  $\bar{N}_{i+h} \cup \{\alpha_1\} \in E$ , por la def. 2.4.1 (ii), ya que  $\alpha \in \bar{N}_i \subseteq \bar{N}_{i+h}$  (lema 1). Tenemos entonces que hay una  $\alpha \in \bar{N}_{i+h}$  cuya correspondiente  $\alpha_1$  es la primera fórmula en  $\alpha$  que cumple la condición (i) de la definición de la secuencia f. Por lo tanto,  $\bar{N}_{i+h} \cup \{\alpha_1\} = \bar{N}_{i+h+1}$  es un elemento de la secuencia f. En consecuencia hay un j tal que  $\alpha_1 \in \bar{N}_j$  y  $\alpha_1 \in H$ . En el caso de que el conjunto  $\{F_1, \dots, F_h\}$  sea vacío,  $\bar{N}_{i+h} = \bar{N}_i$  y  $\bar{N}_{i+1} = \bar{N}_i \cup \{\alpha_1\}$  y la afirmación se sigue como

en el caso anterior. Resulta entonces que en todos los casos  $a \in M \Rightarrow a_1 \in N$  y se cumple la mitad de la condición (ii) de la definición de conjunto-modelo. La otra mitad de esta condición, la referente a  $a_2$ , se cumple por las mismas razones.

(iii) Supuesto que  $b \in M$ , entonces hay un elemento  $\bar{N}_i$  de la secuencia  $f$  al que pertenece  $b$ . Si  $b_1$  o  $b_2$  pertenecen a  $\bar{N}_i$ , no hay nada que demostrar. Si ni  $b_1$  ni  $b_2$  aparecen en  $\bar{N}_i$ , entonces, de modo totalmente análogo al caso de  $a_1$  que acabamos de discutir,

$b_1 \in \bar{N}_{i+h+1}$  o  $b_2 \in \bar{N}_{i+h+1}$ . En consecuencia,  $b \in M \Rightarrow b_1 \in M$  o  $b_2 \in M$ .

(iv) Supuesto que  $c \in N$ , entonces hay un elemento  $\bar{N}_i$  en  $f$  al que pertenece  $c$ . Sea ahora  $A$  una descripción tal que  $c(A)$  no está contenida en  $\bar{N}_i$ . De modo similar a los casos anteriores podemos afirmar que  $c(A) \in \bar{N}_{i+h+1}$  y, con ello, que si  $c \in M \Rightarrow c(A) \in M$ .

(v) Supuesto que  $d \in M$ , entonces hay un  $\bar{N}_i$  en  $f$  al que pertenece  $d$ . Supongamos que no hay ninguna fórmula  $\sigma[P_j^1]$  que pertenezca a  $\bar{N}_i$ , con  $P_j^1$  nuevo para  $\bar{N}_{i-1}$ . Sea ahora  $\bar{N}_{i+h}$  un conjunto definido como en el caso de  $a_1$ , que hemos tratado más arriba. Podemos suponer que  $P_j^1$  no aparece en  $\bar{N}_{i+h}$ . La fórmula  $\sigma[P_j^1]$  es la primera fórmula en  $g$  que no pertenece a  $\bar{N}_{i+h}$  y cumple la condición (v) de la definición de la secuencia  $f$ . Nótese que la existencia de un  $P_j^1$  nuevo para  $\bar{N}_{i+h}$  es una consecuencia de que  $M^*$  es un conjunto paramétricamente limitado y, con ello, cada  $b_i$  en la secuencia  $f$ . Por lo tanto  $\sigma[P_j^1] \in \bar{N}_{i+h+1}$ . En consecuencia, si  $d \in M$ , entonces  $\sigma[P_j^1] \in M$ , para al menos una descripción  $\sigma[P_j^1]$ , como exige la condición (v) de la definición de conjunto-modelo.

(vi) Según la condición (vi) de la definición de la secuencia  $f$ , para toda fórmula  $H_i$  hay un elemento  $H_k$  de la secuencia tal que  $H_i \in \bar{N}_k$ . Por lo tanto, para toda  $H_i$  vale que  $H_i \in M$ . Con esto queda demostrado que  $M$  es un conjunto-modelo.

### (3) $M$ es satisfacible

Dado que  $M \subseteq M$  y que  $M$  es un conjunto-modelo, de la prop. 2.3.4

se sigue que  $\mathbb{H}$  es satisfacible.

q.e.d.

Vamos a mostrar ahora una primera aplicación del Principio de Unificación que acabamos de demostrar volviéndonos a un problema que quedó planteado y sin solución en el primer capítulo. Se trata de la cuestión de la completud del cálculo B3, de árboles lógicos. Demostraremos primero la completud para conjuntos paramétricamente limitados y luego ampliaremos este resultado a conjuntos en general. El procedimiento de demostración es el siguiente: definimos una propiedad  $E_0$  de conjuntos de fórmulas directamente relacionada con la deducibilidad en B3. Mostramos entonces que si  $\mathbb{H} \vdash_{L3} F$ , el conjunto  $\{\mathbb{H}, \neg F\} \notin E_0$ , de donde se sigue muy fácilmente que  $\mathbb{H} \vdash_{B3} F$ . Veámoslo.

#### Definición 2.4.3

Sea  $E_0$ , por definición, la propiedad o clase de conjuntos  $M$  de fórmulas de  $L3$  tales que para todo subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  no hay un árbol cerrado con premisas  $M^0$ .

#### Lema 2.4.4

$E_0$  es una propiedad trivalente de consistencia analítica.

Demostración: En lo que sigue diremos que el conjunto  $M$  es refutable si  $M \notin E_0$ . Este concepto de refutable se utiliza sólo a lo largo de esta demostración. Mostramos ahora que  $E_0$  cumple las condiciones de la definición de propiedad de consistencia. Supuesto que  $M \in E_0$ , entonces

- (i) No hay ninguna fórmula  $F$  tal que  $F$  y  $\neg F$  o  $\neg F$  estén en  $M$ . En otro caso  $M$  tendría un árbol cerrado y sería refutable.
- (ii) Si  $\alpha \in M$  y  $\{\mathbb{H}, \alpha_1\}$  o  $\{\mathbb{H}, \alpha_2\}$  son refutables, entonces también lo es  $M$ , contra el supuesto de que  $M \in E_0$ . Por lo tanto  $\{\mathbb{H}, \alpha_1\} \in E_0$  y  $\{\mathbb{H}, \alpha_2\} \in E_0$ .

- (iii) Si  $b \in H$ , entonces, si  $\{H, b_1\}$  y  $\{H, b_2\}$  son refutables, también lo es  $H$ , contra el supuesto. Por lo tanto,  $\{H, b_1\} \in E_0$  o  $\{H, b_2\} \in E_0$ .
- (iv) Si  $c \in H$  y  $\{H, c[A]\}$  es refutable para alguna descripción  $A$ , entonces  $H$  es refutable, contra el supuesto. Luego  $\{H, c[A]\} \in E_0$ , para toda descripción  $A$ .
- (v) Si  $d \in H$  y  $\{H, d[P_j^1]\}$  es refutable siendo  $P_j^1$  un parámetro nuevo para  $H, d$ , entonces  $H$  es refutable, contra el supuesto. Luego  $\{H, d[P_j^1]\} \in E_0$  para algún  $P_j^1$  nuevo para  $H$ .
- (vi) Dado que  $H$  no es refutable, por el supuesto, tampoco lo es  $\{H, H_1\}$ . q.e.d

Del lema que acabamos de demostrar se sigue la completud de B3 de manera particularmente elegante, como vamos a ver en la proposición siguiente.

**Proposición 2.4.5** Completud (restringida) de B3  
 Sea  $H^*$  un conjunto de fórmulas paramótricamente limitado y  $F$  una fórmula. Entonces

$$H^* \vdash_{L3} F \Rightarrow H^* \vdash_{B3} F.$$

**Demostración:** Si  $H^* \vdash_{L3} F$ , entonces  $\{H^*, \neg F\}$  es L3-insatisfacible, según la prop. 1.7.2.2 (v). Dado que  $E_0$  es una propiedad de consistencia según el lema precedente, si  $H \in E_0$ , entonces  $H$  es satisfacible, según la prop. 2.4.2. Por lo tanto,  $\{H, \neg F\} \notin E_0$  o, lo que es lo mismo, hay un subconjunto finito  $\{H_1^0, \dots, H_n^0\}$  tal que existe un árbol cerrado con supuestos  $\{H_1^0, \dots, H_n^0\}$ . Por la definición de deducibilidad en B3 (def. 1.6.2.5),  $H^* \vdash_{B3} F$ . q.e.d

**Proposición 2.4.6** Completud (general) de B3

Sea  $H$  un conjunto, posiblemente vacío, de fórmulas de L3. Entonces

$$H \vdash_{L3_1} F \Rightarrow H \vdash_{B3} F.$$

Demostración: Si  $M \not\models_{L3A_1} F$ , entonces  $\{M, \neg F\}$  es  $L3A_1$ -insatisfacible y por el teorema de compacidad aplicado a  $L3A_1$  (prop. 1.7.3.1) hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $\{M^0, \neg F\}$  es  $L3A_1$ -insatisfacible. Entonces, dado que  $M^0$  es paramétricamente limitado y que para conjuntos limitados vale que son  $L3$ -satisfacibles sii son  $L3A_1$ -satisfacibles<sup>(16)</sup>,  $\{M^0, \neg F\}$  es  $L3$ -insatisfacible y  $M^0 \not\models_{L3} F$ . De la proposición anterior se sigue que  $M \not\models_{L3} F$ . q.e.d.

Como segunda aplicación del principio de Unificación demostramos el teorema de compacidad para  $L3$ .

Lema 2.4.7.

Sea  $E_1$  la propiedad de conjuntos de fórmulas de  $L3$  tal que un conjunto  $M$  tiene la propiedad  $E_1$  sii todo subconjunto finito de  $M$  es  $L3$ -satisfacible. Afirmamos que  $E_1$  es una propiedad trivalente de consistencia.

Demostración: La condición (i) de la def.2.4.1 se cumple, puesto que si hay una fórmula  $F$  y su negación fuerte o débil en un conjunto  $M$  tal que  $M \in E_1$ , entonces hay un subconjunto finito  $\{F, \neg F\}$  de  $M$  que es insatisfacible, contra el supuesto. Las condiciones (ii)-(v) se siguen fácilmente del lema 2.2.1. Por otro lado, es claro que si todo subconjunto finito de  $M$  es  $L3$ -satisfacible, entonces también lo es todo subconjunto finito de  $\{M, M_1\}$ , con lo que se cumple la condición (vi).

Proposición 2.4.8

Sea  $M^*$  un conjunto paramétricamente limitado de fórmulas de  $L3$ .  $M^*$  es  $L3$ -satisfacible si y sólo si todo subconjunto finito de  $M^*$  lo es.

Demostración: Si  $M^*$  es satisfacible, entonces lo

es también todo subconjunto finito de  $\mathbb{N}^*$ , evidentemente. Supues-  
to en cambio que todo subconjunto finito de  $\mathbb{N}$  sea L3-satisfacible,  
entonces  $\mathbb{N} \in E_1$ . Dado que  $E_1$  es una propiedad trivalente de con-  
sistencia analítica,  $\mathbb{N}$  es L3-satisfacible. e.e.d.

### 2.5 Propiedades trivalentes de demostrabilidad analítica

Como en el caso de las propiedades de consisten-  
cia, las propiedades trivalentes de demostrabilidad analítica  
son clases de conjuntos de fórmulas de L3 que, si bien son defini-  
das sintácticamente, gozan de una propiedad semántica importante  
sobre cuya base pueden obtenerse resultados como la completud de  
ciertos sistemas. En el caso de las propiedades de demostrabili-  
dad, la relación entre sintaxis y semántica se establece al po-  
der afirmar que los conjuntos disyuntivamente válidos<sup>(17)</sup>, es de-  
cir, los conjuntos de fórmulas tales que la disyunción de sus  
elementos es L3-válida, tienen la propiedad E, cuando E es una  
propiedad de demostrabilidad analítica. El uso de propiedades de  
demostrabilidad se adapta particularmente bien a sistemas de tipo  
axiomático, como veremos a continuación, al mostrar la completud  
del cálculo A3 por medio de estas propiedades.

Definición 2.5.1. Propiedad trivalente de demos-  
trabilidad analítica.<sup>(18)</sup>

Sea E una propiedad de conjuntos finitos. E es  
una propiedad trivalente de demostrabilidad ana-  
lítica sii para todo conjunto finito  $\mathbb{N}^0$ , fórmula  
F y fórmulas de tipo a, b, c y d vale que:

$$(1) \quad \{\mathbb{N}^0, F, \neg F\} \in E \text{ y } \{\mathbb{N}^0, \neg F, \neg \neg F\} \in E.$$

- (ii)  $\{M^0, \neg\neg F\} \in E \Rightarrow \{M^0, F\} \in E.$   
 (iii)  $\{M^0, a_1\} \in E$  y  $\{M^0, a_2\} \in E \Rightarrow \{M^0, a\} \in E.$   
 (iv)  $\{M^0, b_1\} \in E \Rightarrow \{M^0, b\} \in E$  y  
 $\{M^0, b_2\} \in E \Rightarrow \{M^0, b\} \in E.$   
 (v)  $\{M^0, c \wedge (P_j^1)\} \in E$  y  $P_j^1$  no aparece en  $M^0; c$   
 $\Rightarrow \{M^0, c\} \in E.$   
 (vi)  $\{M^0, \sigma(A)\} \in E \Rightarrow \{M^0, \sigma\} \in E.$   
 (vii)  $\{M^0, \neg H_1\} \in E \Rightarrow M^0 \in E.$

Definición 2.5.2

El conjunto finito de fórmulas  $M$  es disyuntivamente válido:  $\Leftrightarrow$  Para toda valoración  $\beta$  hay al menos una fórmula  $F$  de  $M$  tal que  $\beta(F) = v$

Sea  $M$  el conjunto finito de fórmulas  $\{F_1, \dots, F_n\}.$

Con  $\bar{M}$  designamos cualquier disyunción de las fórmulas de  $M$ , en cualquier orden y con cualquier orden de paréntesis. De modo similar,  $\hat{M}$  designa una conjunción de las fórmulas de  $M$ . El corolario que sigue es una consecuencia inmediata de la definición anterior.

Corolario 2.5.3

$M$  es disyuntivamente válido sii  $(\neg F_1 \wedge \dots \wedge \neg F_n)$  es L3-insatisfacible, cuando  $\{F_1, \dots, F_n\} = M.$

El resultado fundamental de este apartado es la siguiente proposición que, con palabras de Smullyan, podríamos llamar "una versión dual del Principio de Unificación"<sup>(19)</sup>. La demostración del teorema la pospondremos hasta el final del apartado.

Proposición 2.5.4

Si  $M$  es un conjunto finito, disyuntivamente váli-

do, de fórmulas de  $L_3$  y  $E$  es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica, entonces  $H \in E$ .

Corolario 2.5.5

Sea  $C$  un cálculo para  $L_3$ . Si la propiedad "la disyunción de los elementos del conjunto finito  $H$  es una fórmula demostrable en  $C$ " es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica, entonces  $C$  es un cálculo completo respecto a la consecuencia.

Demostración: En el caso de que  $H^* \Vdash_{L_3} F$ , entonces  $\{\neg(\hat{H}^0), F\}$  es disyuntivamente válido, siendo  $\hat{H}^0$  un subconjunto finito de  $H$ , por el teorema de compacidad para  $L_3$  (prop. 2.4.3) y el corolario 2.5.3. Por la proposición 2.5.4,  $(\neg(\hat{H}^0) \vee F)$  es demostrable en  $C$ . De ahí se sigue que  $H^0 \vdash_C F$  y que  $H^* \vdash_C F$ . q.e.d.

En un capítulo posterior utilizaremos la noción de propiedad de demostrabilidad analítica para demostrar la completud de un cálculo axiomático para la lógica de enunciados de  $L_3$ . A fin de tener a nuestra disposición un concepto de propiedad de demostrabilidad restringido al cálculo de funtores, damos a continuación la definición de propiedad trivalente de demostrabilidad analítica para  $J_3$ , la de conjunto disyuntivamente válido y el teorema, sin demostración, que relaciona estos conceptos.

Definición 2.5.6

Bajo las condiciones de la def. 2.5.1 sea, por definición, una propiedad de demostrabilidad analítica para  $J_3$  sii se cumplen las condiciones (i)-(iv) de esa definición.

Definición 2.5.7

El conjunto finito de fórmulas  $M$  es disyuntivamente válido en  $J3$ :  $\Leftrightarrow$  Para toda  $\varepsilon$ -valoración  $\beta$  hay al menos una fórmula  $F$  de  $M$  tal que  $\beta(F) = v$ .

Proposición 2.5.8

Si  $M$  es un conjunto finito, disyuntivamente válido en  $J3$ , y  $E$  es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica para  $J3$ , entonces  $M \in E$ .

Vamos a dar ahora la demostración de la prop. 2.5.

4. Para hacerlo utilizamos el cálculo de árboles del siguiente modo: en el lema que sigue inmediatamente a estas líneas mostramos que el conjunto de las negaciones débiles de los puntos de una rama de un árbol cerrado tienen la propiedad  $E$ , si  $E$  es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica. Basándonos en el corolario 2.5.3 mostramos que si  $M$  es un conjunto disyuntivamente válido, entonces el conjunto de las negaciones débiles de sus elementos tiene un árbol cerrado. De ello se sigue, por el lema y la definición de propiedad de demostrabilidad, que  $M \in E$ .

Lema 2.5.9

Sea  $M$  el conjunto finito de los supuestos de un árbol cerrado  $B$  y  $\bar{M}$  el conjunto  $\{\neg G'_1, \dots, \neg G'_n\}$  de las negaciones débiles de los elementos  $G'_1, \dots, G'_n$  de  $M$ . Además, sean  $\underline{P}, \underline{Q}$ , puntos de  $B$ ;  $W_{\underline{P}}, W_{\underline{Q}}$  los conjuntos de los predecesores de  $\underline{P}, \underline{Q}$  en  $B$ ;  $\bar{W}_{\underline{P}}, \bar{W}_{\underline{Q}}$  los conjuntos de las negaciones débiles de los elementos de  $W_{\underline{P}}, W_{\underline{Q}}$  y  $E$  una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica. Entonces se cumple que  $\{\bar{M}, \bar{W}_{\underline{P}}\} \in E$ , para todo punto  $\underline{P}$  de  $B$ .

Demostración: Por inducción según el número de sucesores de  $\underline{P}$  en  $U$ .

1. Base de inducción:  $\underline{P}$  es un punto final. Entonces  $\{H, W_{\underline{P}}\}$  es  $\{H, W'_{\underline{P}}, F, \neg F\}$  o  $\{H, W'_{\underline{P}}, F, -F\}$ . Por lo tanto,  $\{\bar{H}, \bar{W}_{\underline{P}}\}$  es  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, \neg F, \neg \neg F\}$  o  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, \neg F, \neg -F\}$ . Según las condiciones (i) y (ii) de la definición 2.5.1,  $\{\bar{H}, \bar{W}_{\underline{P}}\} \in E$ .

2. Paso de inducción: Supuesto de inducción: Supuesto que  $\underline{Q}$  tiene menos sucesores que  $\underline{P}$ , entonces  $\{\bar{H}, \bar{W}_{\underline{Q}}\} \in E$ . Consideremos ahora un punto  $\underline{P}$  con  $n$ ,  $n \geq 1$ , sucesores. El inmediato sucesor (los inmediatos sucesores) de  $\underline{P}$  es (son) o bien

- 2.1 una  $a_1$  o  $a_2$  o
- 2.2 una  $b_1$  y una  $b_2$  o
- 2.3 una  $c[A]$  o
- 2.4 una  $d[A]$  o
- 2.5 un elemento de  $H$  o

2.6 una fórmula  $H_1$ . Tenemos entonces los siguientes casos:

2.1 Si  $\{H, W_{\underline{P}}\}$  es  $\{H, W'_{\underline{P}}, a\}$ , entonces

$$\text{si } \neg a \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \neg \neg \neg F \\ \neg \neg \neg F \\ \neg (F \wedge G) \end{array} \right\} \text{ entonces } \neg a_1 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \neg F \\ \neg F \\ \neg \neg -F \end{array} \right\} \text{ y } \neg a_2 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \neg F \\ \neg F \\ \neg \neg -G \end{array} \right\}$$

2.1.1 Si  $\neg a$  es  $\neg \neg \neg F$  o  $\neg (F \wedge G)$ , entonces  $\neg a$  es una  $b, \neg a_1$  la correspondiente  $b_1$  y  $\neg a_2$  la correspondiente  $b_2$ . Por supuesto de inducción,  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, \neg a, \neg a_1\} \in E$  o  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, \neg a, \neg a_2\} \in E$ , es decir,

$\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, b, b_1\} \in E$  o  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, b, b_2\} \in E$ . Según la def. 2.5.1 (iv),  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, b\} \in E$ . Ahora bien,  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, b\}$  es  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, b\}$ . Luego  $\{\bar{H}, \bar{W}_{\underline{P}}\} \in E$ .

2.1.2 Si  $\neg a$  es  $\neg \neg \neg F$ , entonces  $\neg a_1$  y  $\neg a_2$  son  $\neg F$ . Por supuesto de inducción  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, \neg \neg \neg F, \neg F\} \in E$ . Considerando  $\neg F$  como  $a_1$  y  $a_2$ , entonces, según la def. 2.5.1 (iii),  $\{\bar{H}, \bar{W}'_{\underline{P}}, \neg \neg \neg F, \neg \neg \neg F\} \in E$ , es decir,  $\{\bar{H}, \bar{W}_{\underline{P}}\} \in E$ .

2.1.3 Si  $\neg a$  es  $\neg \neg (F \wedge G)$ , entonces  $\neg a_1$  es  $\neg \neg -F$  y  $\neg a_2$  es  $\neg \neg -G$ . Por

supuesto de inducción,  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg(F \wedge G), \neg\neg F\} \in E$  o  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg\neg(F \wedge G), \neg\neg G\} \in E$ . Según la def. 2.5.1 (ii) vale que  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg(F \wedge G), \neg F\} \in E$  o  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg(F \wedge G), \neg G\} \in E$ . Por el punto (iv) de la misma definición se sigue que  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg(F \wedge G)\} \in E$  y según la condición (iii),  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg(F \wedge G)\}$ , es decir  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P\}$ , pertenece a E.

2.2 Si  $\{H, W'_P\}$  es  $\{H, W'_P, b\}$ , entonces, por supuesto de inducción,  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg b, \neg b_1\} \in E$  y  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg b, \neg b_2\} \in E$ . Tenemos que

$$\text{si } \neg b \text{ es } \begin{cases} \neg\neg\neg F \\ \neg\neg\neg(F \wedge G) \\ \neg\neg(F \wedge G) \end{cases} \text{ entonces } \neg b_1 \text{ es } \begin{cases} \neg\neg F \\ \neg\neg F \\ \neg\neg F \end{cases} \text{ y } \neg b_2 \text{ es } \begin{cases} \neg\neg F \\ \neg\neg G \\ \neg\neg G \end{cases}$$

Como vemos,  $\neg b$  es una  $\alpha$  o  $\alpha_1$ ,  $\neg b_1$  es la correspondiente  $\alpha_1$  o  $\alpha_1$  y  $\neg b_2$  la correspondiente  $\alpha_2$  o  $\alpha_2$ . Según la def. 2.5.1 (ii) y (iii), se sigue el lema.

2.3 Si  $\{H, W'_P\}$  es  $\{H, W'_P, c\}$ , entonces, por supuesto de inducción,  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg c, \neg c[A]\} \in E$ . Entonces,

$$\text{si } c \text{ es } \begin{cases} \neg \wedge X F[X] \\ \neg\neg \wedge X F[X] \end{cases} \text{ entonces } \neg c[A] \text{ es } \begin{cases} \neg F[A] \\ \neg\neg F[A] \end{cases}$$

$\neg c$  es una  $\alpha$  o  $\alpha[A]$  y  $c[A]$  es la correspondiente  $\alpha[A]$  o  $\alpha[A]$ . Del supuesto de inducción y las condiciones (ii) y (vi) de la def. 2.5.1 se sigue el lema.

2.4 Si  $\{H, W'_P\}$  es  $\{H, W'_P, d\}$ , entonces, por supuesto de inducción,  $\{\bar{H}, \bar{W}'_P, \neg d, \neg d[P_j^1]\} \in E$ , donde  $P_j^1$  no aparece en  $H, W'_P, d$ . Entonces,

$$\text{si } \neg d \text{ es } \begin{cases} \neg \wedge X F[X] \\ \neg \wedge X F[X] \end{cases} \text{ entonces } \neg d[P_j^1] \text{ es } \begin{cases} \neg\neg F[P_j^1] \\ \neg\neg F[P_j^1] \end{cases}$$

De modo similar a los casos anteriores,  $\neg d$  es una  $\alpha$  o  $\alpha[P_j^1]$  y  $\neg d[P_j^1]$  es  $\alpha[P_j^1]$  o  $\alpha[P_j^1]$ . Del supuesto de inducción y las condiciones (ii) y (v) de la def. 2.5.1 se sigue el lema.

2.5 Si el sucesor de  $\underline{P}$  es un elemento  $F$  de  $\mathbb{N}$  entonces, por supuesto de inducción,  $\{\bar{P}, \bar{W}_P, \neg F\} \in E$ . Ahora bien,  $\{\bar{P}, \bar{W}_P, \neg F\}$  es el conjunto  $\{\bar{H}, \bar{V}_P\}$ . Luego  $\{\bar{H}, \bar{V}_P\} \in E$ .

2.6 Si el sucesor de  $\underline{P}$  es una  $\Pi_1$  entonces, por supuesto de inducción,  $\{\bar{H}, \bar{W}_P, \neg \Pi_1\} \in E$ , de donde se sigue, por la definición 2.5.1 (vii) que  $\{\bar{H}, \bar{V}_P\} \in E$ . q.e.d.

Podemos ahora demostrar que si  $\mathbb{N}$  es un conjunto disyuntivamente válido y  $E$  una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica entonces  $\mathbb{N} \in E$ .

Demostración de la prop. 2.5.4: Supuesto que  $\mathbb{N}$  es un conjunto finito disyuntivamente válido de fórmulas de L3, por el corolario 2.5.3,  $(\neg F_1 \wedge \dots \wedge \neg F_n)$  es una fórmula L3-incatisfacible, siendo  $F_1, \dots, F_n$  los elementos de  $\mathbb{N}$ . Por la completud de B3 sabemos que existe un árbol cerrado  $B$  con supuestos  $\{\neg F_1, \dots, \neg F_n\}$ . De esto se sigue, según el lema que acabamos de demostrar, que  $\{\neg F_1, \dots, \neg F_n\} \in E$ , para toda propiedad trivalente de demostrabilidad analítica  $E$ . Según la definición 2.5.1 (ii),  $\{F_1, \dots, F_n\} \in \mathbb{N}$ , es decir  $\mathbb{N} \in E$ . q.e.d.

La proposición 2.5.6, un caso especial del teorema que acabamos de demostrar, se sigue también del lema 2.5.9 y la completud de B3, en particular de los puntos 1, 2.1, 2.2, 2.5 del lema y por el mismo razonamiento que hemos hecho en la demostración precedente.

2.6 Completud de A3

Vamos a mostrar en este apartado un ejemplo de las aplicaciones de las propiedades trivalentes de demostrabilidad analítica realizando una prueba muy sencilla de la completud del cálculo A3. Frente al método que sigue Blau <sup>(20)</sup> para mostrar la completud de este cálculo, método que se basa en la completud de B3, nosotros utilizamos una vía diferente que, en síntesis, puede describirse como sigue: en primer lugar, mostramos que la demostrabilidad de ciertas fórmulas en A3 es una propiedad de demostrabilidad analítica. La prueba de completud propiamente dicha se realiza por medio del teorema de compacidad y la prop. 2,5,4 mostrando que si  $M \vdash_{L3} F$ , entonces hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $\{\neg(\hat{M}^0), F\}$  es disyuntivamente válido y, por tanto, demostrable en A3.

No es este el único caso en que vamos a emplear las propiedades de demostrabilidad. En los próximos capítulos las emplearemos para mostrar la completud de otros cálculos.

Lema 2.6.1

Sea  $E_3$  la propiedad de conjuntos  $M$  de fórmulas " $\hat{M}$  es demostrable en A3".  $E_3$  es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica.

Demostración: Nótese, en primer lugar, que  $E_3$  es una propiedad de conjuntos finitos, ya que no hay fórmulas de longitud infinita en L3. Por lo tanto,  $\hat{M}$  sólo existe -y puede ser demostrable en A3- cuando  $M$  es un conjunto finito. Además, se cumple:

(i) Sea  $M$  un conjunto finito,  $M = \{F_1, \dots, F_n\}$ . Las fórmulas

$$(F_1 \vee \dots \vee (F_n \vee (F \vee \neg F))) \dots$$

y  $(F_1 \vee \dots \vee (F_n \vee (\neg F \vee \neg F))) \dots$

son axiomas de  $\Lambda_3$  según el esquema axiomático Ax. 1 (cfr. apartado 1.6.1). Luego  $\{H, F, \neg F\} \in E_3$  y  $\{H, \neg F, \neg \neg F\} \in E_3$  y  $E_3$  cumple la condición (i) de la def. 2.5.1.

(ii) Si  $(F_1 \vee \dots \vee (F_n \vee \neg \neg F)) \dots$  es  $\Lambda_3$ -demostrable, entonces también lo es  $(F_1 \vee \dots \vee (F_n \vee F)) \dots$ , puesto que  $\frac{}{\Lambda_3} \neg \neg F \rightarrow F$  por Ax. 1. Por tanto se cumple que  $\{H, \neg \neg F\} \in E_3 \Rightarrow \{H, F\} \in E_3$ , la condición (ii) de la def. 2.5.1.

(iii)  $\{H, a_1\} \in E_3$  y  $\{H, a_2\} \in E_3$  equivalen a  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee a_1$  y  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee a_2$ . Por Ax. 1 y HP podemos afirmar que  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee a$ , es decir,  $\{H, a\} \in E_3$ .

(iv)  $\{H, b_1\} \in E_3$  equivale a  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee b_1$ , de donde se sigue, por Ax.1 y HP que  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee b$ .  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee b$  equivale a su vez a  $\{H, b\} \in E_3$ .

El mismo razonamiento nos lleva a afirmar que  $\{H, b_2\} \in E_3 \Rightarrow \{H, b\} \in E_3$ .  $E_3$  cumple por tanto la condición (iv) de la def. 2.5.1.

(v) Supuesto que  $\{H, c[\neg P_j^1]\} \in E_3$  y  $P_j^1$  no aparece en  $H$  ni en  $c$ , entonces podemos demostrar, según que  $c[\neg P_j^1]$  sea  $G[\neg P_j^1]$  o  $\neg G[\neg P_j^1]$ , que  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee \wedge XG[X]$  o que  $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee \neg \wedge XG[X]$ , es decir  $\{H, c\} \in E_3$ . La demostración es como sigue:

- |        |   |                    |
|--------|---|--------------------|
| (a) 1. | $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee G[\neg P_j^1]$                  | Supuesto           |
| 2.     | $\frac{}{\Lambda_3} \neg \checkmark \rightarrow G[\neg P_j^1]$      | 1, Ax. 1 y HP      |
| 3.     | $\frac{}{\Lambda_3} \neg \checkmark \rightarrow \wedge XG[X]$       | 2, RG              |
| 4.     | $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee \wedge XG[X]$                   | 3, Ax.1 y HP.      |
| (b) 1. | $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee \neg G[\neg P_j^1]$             | Supuesto           |
| 2.     | $\frac{}{\Lambda_3} \neg \checkmark \rightarrow \neg G[\neg P_j^1]$ | 1, Ax. 1 y HP      |
| 3.     | $\frac{}{\Lambda_3} \neg \checkmark \rightarrow \wedge X \neg G[X]$ | 2, RG              |
| 4.     | $\frac{}{\Lambda_3} \neg \checkmark \rightarrow \neg \wedge XG[X]$  | 3, Ax.2, Ax.1 y HP |
| 5.     | $\frac{}{\Lambda_3} \checkmark \vee \wedge XG[X]$                   | 4, Ax.1 y HP       |

En ambos casos se cumple, pues, que  $\{H, c[\neg P_j^1]\} \in E_3 \Rightarrow \{H, c\} \in E_3$ .

(vi) En el caso de que  $\{M, d[A]\} \in E_3$  distinguimos dos casos, según que  $d[A]$  sea (a)  $\neg G[A]$  o (b)  $\neg G[A]$ . Queremos demostrar que (a)

$$\frac{}{A_3} \check{M} \vee \neg \Lambda XG[X] \text{ o que (b) } \frac{}{A_3} \check{M} \vee \neg \Lambda XG[X].$$

- (a) 1.  $\frac{}{A_3} \check{M} \vee \neg G[A]$                       Supuesto  
 2.  $\frac{}{A_3} \neg \neg \Lambda XG[X] \rightarrow \Lambda X \neg G[X]$     Ax. 3 def  $\leftrightarrow$  y MP  
 3.  $\frac{}{A_3} \Lambda X \neg G[X] \rightarrow \neg G[A]$             Ax. 2  
 4.  $\frac{}{A_3} \neg G[A] \rightarrow \check{M}$                       1, Ax. 1 y MP  
 5.  $\frac{}{A_3} \neg \neg \Lambda XG[X] \rightarrow \check{M}$                 2, 3, 4, Ax. 1 y MP  
 6.  $\frac{}{A_3} \neg \check{M} \rightarrow \neg \Lambda XG[X]$                 5, Ax. 1 y MP  
 7.  $\frac{}{A_3} \check{M} \vee \neg \Lambda XG[X]$                     6, Ax. 1, MP
- (b) 1.  $\frac{}{A_3} \check{M} \vee \neg G[A]$                       Supuesto  
 2.  $\frac{}{A_3} \Lambda XG[X] \rightarrow G[A]$                     Ax. 2  
 3.  $\frac{}{A_3} G[A] \rightarrow \neg(\check{M})$                       1, Ax. 1, MP  
 4.  $\frac{}{A_3} \Lambda XG[X] \rightarrow \neg(\check{M})$                     2, 3, Ax. 1, MP  
 5.  $\frac{}{A_3} \check{M} \rightarrow \neg \Lambda XG[X]$                     4, Ax. 1, MP

En ambos casos se cumple, pues, que si  $\{M, d[A]\} \in E_3 \Rightarrow \{M, d\} \in E_3$ .

(vii)  $\{M, \neg H_1\} \in E_3$  equivale a  $\frac{}{A_3} \check{M} \vee \neg H_1$ . Por el Ax. 1, los esquemas axiomáticos Ax. 4 - Ax. 7 y MP se sigue que  $E_3$  cumple la condición (vii) de la def. 2.5.1.                      q.e.d

Proposición 2.6.2. Completud (restringida) de  $A_3$

Sea  $M^*$  un conjunto de fórmulas, posiblemente vacío, paramétricamente limitado y  $F$  una fórmula.

Entonces se cumple que  $M^* \frac{}{L_3} F \Rightarrow M^* \frac{}{A_3} F$

Demostración: Si  $M^* \frac{}{L_3} F$ , entonces  $M^* \cup \{\neg F\}$  es

$L_3$ -insatisfacible. De ello se sigue, por el teorema de compacidad (prop. 2.4.3), que existe un subconjunto finito  $M^0$  de  $M^*$  tal que  $\{M^0, \neg F\}$  es  $L_3$ -insatisfacible.  $\{M^0, \neg F\}$  es insatisfacible si la fórmula  $(\neg(\neg(M^0) \wedge \neg F))$  es insatisfacible. Por el corolario 2.5.3,

$\{\neg(\hat{M}^0), F\}$  es disyuntivamente válido. En virtud de la prop. 2.5.4 y del lema precedente, se puede afirmar que  $\{\neg(\hat{M}^0), F\} \in E_3$ . Luego hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $\vdash_{\Lambda 3} \neg(\hat{M}^0) \vee F$ . Por tanto,  $M^0 \vdash_{\Lambda 3} F$ . Por definición de deducción en  $\Lambda 3$ ,  $M^* \vdash_{\Lambda 3} F$ .

Proposición 2.6.3. Completud (general) de  $\Lambda 3$

Sea  $M$  un conjunto de fórmulas de  $L3$ , posiblemente vacío, y  $F$  una fórmula de  $L3$ . Entonces,

$$M \Vdash_{L3A_1} F \Rightarrow M \vdash_{\Lambda 3} F.$$

Demostración: Por el teorema de compacidad para  $L3A_1$ , si  $M \Vdash_{L3A_1} F$ , entonces hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $\{M^0, \neg F\}$  es  $L3A_1$ -insatisfacible. Esto implica que  $\{M^0, \neg F\}$  es  $L3$ -insatisfacible <sup>(16)</sup>. Por las mismas razones que en el caso de la proposición anterior, se puede afirmar que  $M \vdash_{\Lambda 3} F$ .

Notas al capítulo 2

- (1) Tanto el nombre como la definición de conjunto gödeliano están tomadas de Hanin (1977), p. 32. Los conjuntos gödelianos equivalen a los conjuntos no-contradictorios y completos de, por ejemplo, Tarski (1935). Nótese que en la discusión que sigue, en la introducción del capítulo, se sobreentiende que hacemos referencia a la lógica bivalente standard.
- (2) Para una demostración de estos resultados cfr., por ejemplo, Hanin (1977) p. 32 y ss. y 58 ss. Tarski, en Tarski (1935) muestra que el concepto  $Vr$  -verdad en un cálculo de clases- es un conjunto no contradictorio y completo. Cfr. Tarski (1935) pp. 189 y 200.
- (3) Smullyan (1968), pp. 12-13, 47.
- (4) Smullyan (1968), pp. 20-21, 52
- (5) Smullyan (1968), p. 53
- (6) Smullyan (1968), p. 58. Observemos que las dos debilitaciones, juntas, no dan lugar a conjuntos cerrados para la deducción. Sí, en cambio, las condiciones (i), (ii')-(v').
- (7) Cfr. v. gr.: Hintikka (1955), (1970).
- (8) Cfr. , por ejemplo, Smullyan (1968) p. 58
- (9) Smullyan (1968), pp. 65 ss
- (10) Blau (1978), p. 235 ss.
- (11) Smullyan (1968), p. 69
- (12) El concepto que aquí presentamos es un desarrollo de lo dicho en Smullyan (1968), pp. 57 ss.
- (13) Demostraremos aquí que la condición (i) de la definición de conjunto-modelo trivalente puede ser sustituida por el siguiente enunciado (i')
- (i')  $H$  no contiene ninguna fórmula y su negación fuerte o débil. Es claro que si se cumple (i') se cumple (i). La implicación inversa se demuestra como sigue:
- Proposición:** Si  $H$  es un conjunto-modelo trivalente, entonces  $H$  no contiene una fórmula  $F$  y su negación fuerte o débil.
- Demostración:** Por inducción sobre  $gr(F)$ . Base de inducción:  $F$  es elemental. Por la def. 2.3.1 se cumple que como máximo una de las fórmulas  $F, \neg F, \neg\neg F$  pertenece a  $H$ .
- Paso de inducción. Supuesto de inducción: para toda fórmula  $H$  tal que  $gr(H) \prec gr(F)$ ,  $H$  no contiene a  $H$  y su negación fuerte o débil.
- (i)  $F \# \neg H$ . Supuesto que  $F \in H$ , entonces  $\neg F$  es  $\neg\neg H$  y  $\neg\neg F$  es  $\neg H$ . Si  $\neg\neg H \in H$ , entonces  $H \in H$  según la def. 2.3.1 (ii). En ese caso  $H$  y  $\neg H$  pertenecerían a  $H$ , contra el supuesto de inducción. Si  $\neg H \in H$ , entonces entonces  $H \in H$ , por la def. 2.3.1 (ii), contra el supuesto de inducción. Por lo tanto, ni  $\neg F \in H$  ni  $\neg\neg F \in H$ . Supuesto que  $\neg F \in H$ , es decir, que  $\neg\neg H \in H$ , entonces  $H \in H$  por def. 2.3.1 (ii). Por el supuesto de inducción,  $\neg H$ , es decir,  $F$ , no pertenece a  $H$ . En el supuesto de que  $\neg\neg F \in H$ , es decir, de que  $\neg H \in H$ , entonces, por la

misma razón que antes,  $H \in H$ . Por supuesto de inducción,  $F \notin H$ .  
(ii)  $F \equiv \neg H$ . Entonces  $\neg F \equiv \neg\neg H$ . Si suponemos que  $F \in H$ , entonces si  $\neg F \in H$ , entonces  $H \in H$  por def. 2.3.1 (ii). En tal caso  $H \in H$  y  $\neg H \in H$ , contra el supuesto de inducción. Por lo tanto,  $\neg F \notin H$ . Supuesto que  $\neg F \in H$ , es decir,  $\neg\neg H \in H$ , entonces o bien  $H$  es elemental y  $\neg H \in H$ , es decir,  $F \notin H$ , por def. 2.3.1 (i), o bien  $H$  tiene una de las formas siguientes: (ii.i)  $H \equiv \neg G_1$ ; (ii.ii)  $H \equiv \neg G_1$ ; (ii.iii)  $H \equiv (G_1 \wedge G_2)$ ; (ii.iv)  $H \equiv \bigwedge X \in \mathcal{A} [X]$ . Entonces,

- (ii.i)  $F \equiv \neg\neg G_1$  y  $\neg F \equiv \neg\neg\neg G_1$
- (ii.ii)  $F \equiv \neg\neg G_1$  y  $\neg F \equiv \neg\neg\neg G_1$
- (ii.iii)  $F \equiv \neg(G_1 \wedge G_2)$  y  $\neg F \equiv \neg\neg(G_1 \wedge G_2)$
- (ii.iv)  $F \equiv \neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X]$  y  $\neg F \equiv \neg\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X]$ . Analizamos los distintos casos:

(ii.i)  $\neg\neg G_1 \in H \Rightarrow \neg G_1 \in H$  por def. 2.3.1 (iii). De ahí se sigue que  $\neg G_1 \in H$ , por supuesto de inducción, ya que  $gr(G_1) < gr(\neg G_1)$ . Por lo tanto  $F \notin H$ .  
(ii.ii)  $\neg\neg G_1 \in H \Rightarrow \neg G_1 \in H$ , por def. 2.3.1 (iii). De ahí se sigue que  $\neg G_1 \notin H$ , es decir,  $F \notin H$ .  
(ii.iii)  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H \Rightarrow \neg G_1 \in H$  y  $\neg G_2 \in H$ . Supuesto que  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H \Rightarrow \neg G_1 \in H$  o  $\neg G_2 \in H$ . Supuesto que  $\neg G_1 \in H$ , entonces  $\neg G_1 \in H$  y  $\neg G_2 \in H$ , contra el supuesto de inducción. Lo mismo vale en el caso de que  $\neg G_2 \in H$ . Por lo tanto  $\neg(G_1 \wedge G_2) \notin H$ .  
(ii.iv)  $\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H \Rightarrow \neg G[\Lambda] \in H$ , para toda descripción  $\Lambda$ . Supuesto que  $\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H$ , entonces hay por lo menos una descripción  $\Lambda$  tal que  $\neg G[\Lambda] \in H$ , en contradicción con el supuesto de inducción.  
El caso en que  $F$  es  $\neg H$  o  $F$  es  $\neg\neg H$  y  $F \in H$ , se trata de forma similar al caso anterior, por inducción sobre el grado de  $H$ .  
(iii)  $F \equiv (G_1 \wedge G_2)$ . Si  $(G_1 \wedge G_2) \in H$ , entonces  $G_1 \in H$  y  $G_2 \in H$ , por def. 2.3.1 (ii). Si  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H$ , entonces  $\neg G_1 \in H$  o  $\neg G_2 \in H$ , contra el supuesto de inducción. Si  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H$ , entonces  $\neg G_1 \in H$  o  $\neg G_2 \in H$ , contra el supuesto de inducción. Por lo tanto, ni  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H$  ni  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H$ . Los casos en que  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H$  o en que  $\neg(G_1 \wedge G_2) \in H$ , se tratan de manera similar.  
(iv)  $F \equiv \bigwedge X \in \mathcal{A} [X]$ . Si  $\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H$ , entonces  $G[\Lambda] \in H$ , para toda descripción  $\Lambda$ , según la def. 2.3.1 (iv). Si  $\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H$  o  $\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H$ , entonces hay una descripción  $\Lambda^1$  tal que  $\neg G[\Lambda^1] \in H$  o  $\neg G[\Lambda^1] \in H$ . Dado que  $gr(G[\Lambda^1]) < gr(\bigwedge X \in \mathcal{A} [X])$ , entonces  $\neg G[\Lambda^1] \notin H$  y  $\neg G[\Lambda^1] \notin H$ . Por lo tanto,  $\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \notin H$  y  $\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H$ . Algo similar vale para los casos en que  $\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H$  o en que  $\neg\bigwedge X \in \mathcal{A} [X] \in H$ .  
q.e.d.

(14) Cfr. Blau (1973), pp. 237-8  
(15) La definición correspondiente para  $L_0$  puede verse en Saulsky (1963) p. 66  
(16) Cfr. Blau (1973) p. 253-4

(17) Este concepto es una simple transposición a L3 del correspondiente concepto en L2. Cfr. Smullyan (1968), p. 69

(18) La definición correspondiente para L2 puede encontrarse en Smullyan (1968), p. 69. La diferencia esencial con esta definición de Smullyan estriba, evidentemente, en el diferente significado de las metavariabes, en que se trata aquí de L3 y en los puntos (i) y (ii), exigidos por la existencia de dos tipos de negación en L3.

(19) Smullyan (1968), p. 69

(20) Blau (1978), pp. 243 ss.

### 3. EL CÁLCULO AXIOMÁTICO AJ3 PARA LA LÓGICA DE ENUNCIADOS DE L3

#### 3.1 Introducción

En el cálculo AJ3 no se trata explícitamente la lógica de enunciados, puesto que se incorpora toda ella en un sólo esquema axiomático, el Ax. 1, según el cual toda tautología es un axioma del cálculo. Dado que en L3 -al igual que en L2- la noción de verdad lógica en el marco de la lógica de enunciados coincide con la de tautología y que esta última noción es decidible -por ejemplo por medio del algoritmo de las tablas de verdad- parece razonable aceptar un esquema axiomático como el citado Ax. 1. Sin embargo, no deja de tener sentido el dar una caracterización axiomática explícita de la lógica de enunciados por medio de un conjunto de postulados que no exijan el recurso a un mecanismo en principio extraño a los cálculos axiomáticos como es el uso de las tablas de verdad o artilugio equivalente. Esto vale también para el caso en que las tablas de verdad y la noción de tautología se entienden de manera sintáctica y no semántica, cosa perfectamente posible.

Los postulados -esquemas axiomáticos y reglas- del cálculo AJ3 que presentamos a continuación, están inspirados en el cálculo para la lógica bivalente de enunciados de Kleene<sup>(1)</sup>. Como en el caso de Kleene, damos unos esquemas axiomáticos que, en cierta medida, recuerdan las reglas de introducción y eliminación de los signos de un cálculo de deducción natural. No debe tomarse esto, sin embargo, de un modo demasiado riguroso. Sólo en el caso

de la conjunción tenemos un esquema axiomático que sirve para la introducción de este signo y otros dos esquemas por medio de los cuales, y con ayuda del modus ponens, se pasa de teoremas que contienen el signo de conjunción a otros que no lo tienen. Los otros cinco esquemas axiomáticos definen las relaciones que aquí tratamos como básicas para combinaciones diversas de las negaciones características de  $L_3$  y de estas con la conjunción. Por otro lado, no damos postulados para todos y cada uno de los funtores de  $L_3$  sino sólo para los funtores primitivos. No nos hemos preocupado en exceso del problema de la independencia de los postulados y así utilizamos dos reglas de deducción, la regla que llamamos MP (modus ponens) y una regla de transitividad que, probablemente, no es independiente. En principio nos parece más importante la sencillez de manejo de un sistema axiomático que la independencia de los postulados. Así por ejemplo, la axiomatización de la lógica trivalente de Łukasiewicz realizada por Wajsberg<sup>(2)</sup> si bien es de una gran elegancia formal, resulta de una complicación excesiva incluso a la hora de deducir teoremas muy básicos. Esto, evidentemente, no quita nada al valor de aquella axiomatización primera de la lógica de enunciados trivalente.

En los apartados 3 y 4 de este capítulo mostramos la corrección y completud respecto a la consecuencia de  $AJ_3$ . La demostración de completud del cálculo la hacemos basándonos en el concepto de propiedad trivalente de demostrabilidad para la lógica de enunciados, que introdujimos en el capítulo anterior. Al tratar del cálculo de deducción natural  $NJ_3$  daremos una prueba de completud para la lógica de funtores trivalente siguiendo la estructura de pruebas más clásicas, como la de Kálmar, lo que permite comparar las ventajas e inconvenientes de ambos métodos. Al hacer la demostración de completud de  $AJ_3$  utilizamos una serie

de teoremas que sólo demostraremos en el apartado 5, donde habrá ocasión de utilizar en la práctica el cálculo que aquí definimos.

Al presentar el cálculo  $\Lambda 3$ , en el apartado 1.6.1 del primer capítulo, hicimos mención del concepto que consideramos fundamental a la hora de definir qué es una lógica de enunciados, a saber, el de e-valoración. Como ya dijimos allí, una e-valoración para la lógica de enunciados es una función  $\beta$  del conjunto de las fórmulas de  $L3$  en el conjunto  $\{v, f, i\}$  tal que cumple:

- (i) Para toda fórmula  $F$  elemental o  $q$ -compleja,  $\beta(F) \in \{v, f, i\}$
- (ii) Si  $F \equiv \neg G$ , entonces  $\beta(F)$  es  $v, f$  o  $i$  según que  $\beta(G)$  sea  $f, v$  o  $i$ , respectivamente.
- (iii) Si  $F \equiv \neg G$ , entonces  $\beta(F) = v$  si  $\beta(G) = f$  o  $i$  y  $\beta(F) = f$  en otro caso.
- (iv) Si  $F \equiv (G_1 \wedge G_2)$ , entonces  $\beta(F) = v$  si  $\beta(G_1) = \beta(G_2) = v$ .  
 $\beta(F) = f$  si  $\beta(G_1) = f$  o  $\beta(G_2) = f$ .  $\beta(F) = i$  en otro caso.
- (v) Si  $S_1$  es igual o equivalente a  $S_2$  por definición de un funtor, entonces  $\beta(S_1) = \beta(S_2)$ .

Como vemos, una e-valoración sólo tiene en cuenta, al dar valores de verdad a las expresiones complejas, la estructura veritativo-funcional de las mismas. En base a este concepto de e-valoración se definen el resto de los conceptos semánticos para la lógica de funtores. Así, por ejemplo, diremos que la fórmula  $F$  es  $J3$ -válida o lógicamente verdadera en la lógica de funtores o enunciados de  $L3$  sii  $\beta(F) = v$  para toda e-valoración  $\beta$ . El resto de los conceptos semánticos se define del modo que cabe esperar. Llamamos lógica de funtores o enunciados en  $L3$  al más pequeño conjunto que contiene todas las expresiones  $J3$ -válidas.

3.2 Postulados de LJ3. Deducción y demostración en LJ3.

3.2.1 Postulados

Esquemas axiomáticos

- Ax. J1  $F \rightarrow \neg\neg F$   
 Ax. J2  $\neg\neg F \rightarrow F$   
 Ax. J3  $F \rightarrow (G \rightarrow (F \wedge G))$   
 Ax. J4  $(F \wedge G) \rightarrow F$   
 Ax. J5  $(F \wedge G) \rightarrow G$   
 Ax. J6  $\neg F \rightarrow \neg(F \wedge G)$   
 Ax. J7  $\neg G \rightarrow \neg(F \wedge G)$   
 Ax. J8  $(\neg F \rightarrow H) \rightarrow ((\neg G \rightarrow H) \rightarrow \neg(F \wedge G) \rightarrow H)$

Reglas de deducción

- Modus ponens (MP)  $\frac{\frac{}{\text{LJ3}} F \rightarrow G \quad \frac{}{\text{LJ3}} F}{\frac{}{\text{LJ3}} G}$
- Transitividad (Tr)  $\frac{\frac{}{\text{LJ3}} F \vee G \quad \frac{}{\text{LJ3}} F \rightarrow H}{\frac{}{\text{LJ3}} G \vee H}$

Los esquemas axiomáticos deben entenderse en el sentido de que las sustituciones -con las cautelas de rigor- de las metavariables en los esquemas por fórmulas de LJ3 dan lugar a axiomas del cálculo. Los esquemas Ax.J1 y Ax.J2 pueden entenderse como bases para la introducción y eliminación de dobles negaciones de diversos tipos. Los esquemas Ax.J3 - Ax.J5 sirven a los mismos fines en el caso de la conjunción. El resto de los

esquemas axiomáticos introducen las propiedades básicas de la negación fuerte de las conjunciones. Las reglas de deducción deben entenderse en el sentido habitual. Entendemos que una aplicación de una regla es el triplete formado por tres fórmulas, dos de las cuales están formadas según los esquemas que aparecen encima de la raya, las premisas de la aplicación de la regla, y la tercera responde al esquema que aparece debajo de la raya. Llamamos conclusión (de la aplicación) de la regla a esta tercera fórmula.

### 3.2.2. Deducción y demostración en AJ3

#### Definición 3.2.1. Deducción en AJ3 (AJ3-deducción)

Una deducción  $H^0 \xrightarrow{AJ3} F$  en AJ3 para la fórmula  $F$  a partir del conjunto finito de supuestos  $H^0$  es una secuencia finita  $F_1, \dots, F_n$  de fórmulas de L3 tales que  $F_n$  es  $F$  y para cada  $F_i$  en la secuencia se cumple una de las siguientes condiciones:

- (i)  $F_i$  es un axioma de AJ3, según los esquemas de axiomas Ax.J1-Ax.J8.
- (ii)  $F_i$  es un elemento de  $H^0$ .
- (iii) Hay fórmulas  $F_j, F_h$  en la secuencia, con  $h, j < i$ , tales que  $\langle F_h, F_j, F_i \rangle$  es una aplicación de una de las reglas IP o Tr.
- (iv)  $F_i$  es el resultado de la introducción o eliminación de una definición en una fórmula  $F_h$  de la secuencia, con  $h < i$ .

Como vemos, la definición de deducción en AJ3 responde a los cánones habituales. Las definiciones que si bien tampoco contienen sorpresas.

#### Definición 3.2.2

$F$  es deducible en AJ3 del conjunto  $H^0$  de supuestos:

$\Leftrightarrow$  Hay un subconjunto  $M^0$ , finito, de  $M$  tal que  
 $M^0 \vdash_{AJ3} F$ .

Definición 3.2.3

- (i) Una demostración en AJ3 para la fórmula  $F$  es una AJ3-deducción de  $F$  a partir de la clase vacía de supuestos.
- (ii)  $F$  es AJ3-demostrable:  $\Leftrightarrow$  Hay una AJ3-demostración de  $F$ .

Con esto quedan definidos los conceptos fundamentales de AJ3. Vamos a discutir ahora la corrección y completud de AJ3.

3.3 Corrección de AJ3

Como sabemos, un cálculo es correcto para una lógica cuando la relación de deducción en el cálculo es un subconjunto de la relación de consecuencia en la lógica. El cálculo es completo cuando se da la relación inversa, es decir, cuando la relación de consecuencia es un subconjunto de la relación de deducción. Decimos que el cálculo es adecuado para la lógica cuando deducción y consecuencia coinciden. Hablamos aquí, naturalmente, de corrección y completud respecto de la consecuencia. Los conceptos de corrección y completud respecto de la validez o verdad lógica se definen de modo similar, sustituyendo las referencias a la consecuencia por alusiones a la validez. Suponemos definidos, en lo que sigue, los conceptos de verdad y consecuencia lógicas en la lógica de funtores de L3, sobre la base, claro está, del concepto de e-valoración que antes hemos definido.

La demostración de la corrección de AJ3 se realiza por inducción sobre la longitud de las deducciones, mostrando que todo elemento de la secuencia que constituye una deducción es verdadero si los elementos del conjunto de supuestos lo son. Previamente demostramos, en un lema, que los axiomas de AJ3 son 1-verdaderos en J3, la lógica de enunciados de I3, y que las reglas de deducción transmiten la verdad de las premisas a la conclusión.

Lema 3.3.1

- (i) Todo axioma de AJ3 es 1-verdadero en J3  
(ii) Toda aplicación de una regla de deducción de AJ3 tiene una conclusión verdadera en toda e-valoración  $\beta$  en que las premisas sean verdaderas.

Demostración: (i) Es fácil ver, por medio de las tablas de verdad o por otro método equivalente, que para toda fórmula F,G,H se cumple que

$$\begin{array}{l} \Vdash_{J3} F \rightarrow \neg\neg F \\ \Vdash_{J3} F \rightarrow \neg\neg\neg\neg F \\ \Vdash_{J3} F \rightarrow \neg\neg\neg\neg\neg\neg F \\ \Vdash_{J3} \neg\neg F \rightarrow F \\ \Vdash_{J3} \neg\neg\neg\neg F \rightarrow F \\ \Vdash_{J3} \neg\neg F \rightarrow F \\ \Vdash_{J3} F \rightarrow (G \rightarrow (F \wedge G)) \\ \Vdash_{J3} (F \wedge G) \rightarrow F \\ \Vdash_{J3} (F \wedge G) \rightarrow G \\ \Vdash_{J3} \neg F \rightarrow \neg(F \wedge G) \\ \Vdash_{J3} \neg G \rightarrow \neg(F \wedge G) \\ \Vdash_{J3} (\neg F \rightarrow H) \rightarrow ((\neg G \rightarrow H) \rightarrow \neg(F \wedge G) \rightarrow H). \end{array}$$

Todo axioma es 1-verdadero en J3, por lo tanto.

(ii) Supuesto que las premisas de una aplicación de MP son verdaderas en  $\beta$ , entonces  $\beta(G) = v$ , puesto que si  $\beta(G) \neq v$  entonces o  $\beta(F) \neq v$  o  $\beta(F \rightarrow G) \neq v$ , contra el supuesto.

Supuesto que las premisas de una aplicación de Trson verdaderas en la e-valoración  $\beta$ , entonces  $\beta(F \vee G) = v$ . Por lo tanto,  $\beta(F) = v$  o  $\beta(G) = v$ . Si  $\beta(F) = v$ , entonces  $\beta(H) = v$ , ya que, por supuesto,  $\beta(F \rightarrow H) = v$ . En consecuencia,  $\beta(G \vee H) = v$ . Si  $\beta(G) = v$ , entonces  $\beta(G \vee H) = v$ . En ambos casos vale pues que  $\beta(G \vee H) = v$ .

Proposición 3.3.2. Corrección de AJ3 respecto a la consecuencia

Sea M un conjunto de fórmulas, posiblemente vacío, y F una fórmula de L3. Entonces

$$M \frac{}{AJ3} F \Rightarrow M \frac{}{J3} F.$$

Demostración: Supuesto que hay una deducción en AJ3 de la fórmula F a partir del conjunto M de supuestos y que la e-valoración  $\beta$  satisface al conjunto M entonces se puede afirmar, por inducción sobre la longitud de la deducción de F, que  $\beta(F) = v$ .  
Base de inducción: Si F es un axioma, entonces  $\beta(F) = v$ , por el lema que se acaba de demostrar. Si F es un supuesto, entonces  $\beta(F) = v$ , por las condiciones del teorema.

Paso de inducción: Por el supuesto de inducción y el lema anterior, si  $F_i$  es la conclusión de una regla de deducción cuyas premisas son elementos anteriores en la secuencia, entonces  $\beta(F_i) = v$ . Además, por la condición (v) de la definición de e-valoración y el supuesto de inducción, si  $F_i$  se ha obtenido por introducción o eliminación de una definición en elementos anteriores de la secuencia, entonces  $\beta(F_i) = v$ . q.e.d.

3.4 Completud de AJ3 respecto a la consecuencia

La demostración de la completud del cálculo AJ3 es resultado de la utilización de la idea de propiedad trivalente de demostrabilidad analítica para J3. En síntesis, mostraremos que la propiedad  $E_4$  "la disyunción de los elementos del conjunto  $\mathbb{H}$  es una fórmula AJ3-demostrable" es una propiedad de demostrabilidad para J3. Entonces resulta que si una fórmula  $F$  es consecuencia de un conjunto de supuestos  $\mathbb{H}$ , existe un subconjunto finito  $\mathbb{H}^0$  de  $\mathbb{H}$  tal que  $\{\mathbb{H}^0, F\} \in E_4$ , de donde se sigue que  $F$  es deducible en AJ3 del conjunto de supuestos  $\mathbb{H}$ . En la demostración va a quedar un cabo suelto, a saber, vamos a utilizar el teorema de compactidad para J3 sin demostración previa. La prueba de este teorema puede hacerse, sin embargo, por medios similares a los empleados en el caso de L3. Se define la noción de conjunto-modelo para J3 por medio de las condiciones (i)-(iii) de la definición de conjunto-modelo para L3 y se muestra la satisfacibilidad en J3 de los conjuntos así definidos. La definición de propiedad de consistencia analítica para J3 consiste también en las mismas condiciones de la definición correspondiente para L3. Finalmente se afirma una versión adecuada a J3 del Principio de Unificación y que la propiedad " todos los subconjuntos finitos de  $\mathbb{H}$  son satisfacibles" es una propiedad de consistencia para J3. El teorema de compactidad se sigue en tonces como en el caso de L3.

Para lograr una mayor claridad de exposición demostramos primero que  $E_4$  es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica para J3, utilizando una serie de afirmaciones que sólo posteriormente, en el lema 3.4.2 y 3.4.3, serán demostradas.

Lema 3.4.1

La propiedad  $E_4$ : "la disyunción de los elementos

del conjunto  $H$  de fórmulas de  $L_3$  es demostrable en  $AJ_3$  es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica para  $J_3$ .

Demostración: La propiedad  $E_4$  es una propiedad de conjuntos finitos: la disyunción  $\checkmark$  de los elementos de un conjunto de fórmulas  $H$  sólo existe cuando  $H$  es un conjunto finito. Además se cumple:

(i) Si  $H$  es un conjunto finito, entonces para toda fórmula  $F$  vale que  $\frac{\checkmark}{AJ_3} \checkmark \vee \neg F \vee F$ , es decir,  $\{H, \neg F, F\} \in E_4$ . Igualmente,  $\{H, \neg F, \neg \neg F\} \in E_4$ . En ambos casos la afirmación se justifica en el lema 3.4.4 (a).

(ii) Si  $\{H, \neg \neg F\} \in E_4$ , es decir, si  $\frac{\checkmark}{AJ_3} \checkmark \vee \neg \neg F$ , entonces por Ax. J2 y Tr vale que  $\{H, F\} \in E_4$ .

(iii) Si  $\{H, a_1\} \in E_4$  y  $\{H, a_2\} \in E_4$ , es decir, si  $\frac{\checkmark}{AJ_3} \checkmark \vee a_1$  y  $\frac{\checkmark}{AJ_3} \checkmark \vee a_2$ , entonces  $\{H, a\} \in E_4$  por Ax. J1, Ax. J3, Lema 3.4. (5) y (15).

(iv) Si  $\{H, b_1\} \in E_4$  o  $\{H, b_2\} \in E_4$ , entonces, por el lema 3.4.5 (8), (17), (18), (19) y Ax. J6, Ax. J7, Tr y MF, vale que  $\frac{\checkmark}{AJ_3} \checkmark \vee b$ , es decir,  $\{H, b\} \in E_4$ . Con esto queda demostrado que se cumplen las propiedades de la definición 2.5.3. q.e.d

#### Proposición 3.4.2. Completud de $AJ_3$

Si  $H$  es un conjunto de fórmulas, posiblemente vacío, y  $F$  es una fórmula de  $L_3$ , entonces

$$H \Vdash_{J_3} F \Rightarrow H \frac{\checkmark}{AJ_3} F.$$

Demostración: Si  $H \Vdash_{J_3} F$ , entonces  $\{H, \neg F\}$  es insatisfacible en  $J_3$ . De esto se sigue, por el teorema de compacidad aplicado a  $J_3$ , que hay un subconjunto finito  $H^0$  de  $H$  tal que  $\{H^0, \neg F\}$  es insatisfacible en  $J_3$  o, lo que es lo mismo, que la fórmula  $(\bigwedge (H^0) \wedge \neg F)$  es  $J_3$ -insatisfacible. En consecuencia, por

la def. 2.5.4, el conjunto  $\{\neg(\hat{H}^0), F\}$  es disyuntivamente válido y posee, por la prop. 2.5.2, la propiedad  $E_4$ , que es una propiedad de demostrabilidad para  $J3$ , como hemos visto en el lema anterior. Por lo tanto,  $\vdash_{AJ3} \neg(\hat{H}^0) \vee F$  y  $H^0 \vdash_{AJ3} F$ . Por la definición de deducción en  $AJ3$ ,  $\mathcal{M} \vdash_{AJ3} F$ .

Proposición 3.4.3. Adecuación de  $AJ3$

Si  $H$  es un conjunto de fórmulas, posiblemente vacío, y  $F$  una fórmula de  $L3$ , entonces,

$$H \Vdash_{J3} F \Leftrightarrow H \vdash_{AJ3} F.$$

Demostración: La proposición se sigue de la corrección y completud de  $AJ3$ .

Vamos a probar ahora los lemas que hemos utilizado para demostrar la completud de  $AJ3$ . El primero de ellos afirma que la propiedad  $E_4$  cumple la condición (i) de la definición de propiedad trivalente de demostrabilidad. El segundo asegura la demostrabilidad de ciertas expresiones.

Lema 3.4.4

Sea  $H = \{G_1, \dots, G_n\}$  un conjunto finito de fórmulas. Entonces,

- (a)  $\vdash_{AJ3} (\dots(G_1 \vee \dots \vee G_n) \vee F) \vee \neg F$ .  
 (b)  $\vdash_{AJ3} (\dots(G_1 \vee \dots \vee G_n) \vee \neg F) \vee \neg \neg F$ .

Demostración: Por eliminación de la definición en el lema 3.4.5 (4) se puede afirmar que  $\neg F \vee F$ . Por la conmutatividad de  $\vee$  (cfr. el lema 3.4.5 (1)) vale que  $\vdash_{AJ3} \neg F \vee F$ . Por (3), en el mismo lema,  $\vdash_{AJ3} G_n \vee (F \vee \neg F)$ , y repitiendo esta operación  $n-1$  veces  $\vdash_{AJ3} G_1 \vee (G_2 \vee \dots \vee (G_n \vee (F \vee \neg F)) \dots)$ . Por las leyes de asociatividad (10), (11) y (12) del lema 3.4.5, se sigue la afirmación (a). (b) se sigue del Ax.J1 como en el caso anterior.

Lema 3.4.5

Las expresiones (1)-(19) son tesis de AJ3:

$$(1) \frac{}{AJ3} (F \vee G) \rightarrow (G \vee F)$$

Demostración:

1.  $\neg\neg F \rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F)$  Ax.J7
2.  $\neg\neg G \rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F)$  Ax.J6
3.  $(\neg\neg F \rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F)) \rightarrow ((\neg\neg G \rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F)) \rightarrow \neg(\neg F \wedge \neg G))$   
 $\rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F)$  Ax.J8
4.  $(\neg\neg G \rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F)) \rightarrow (\neg(\neg F \wedge \neg G) \rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F))$  HP 1,3
5.  $\neg(\neg F \wedge \neg G) \rightarrow \neg(\neg G \wedge \neg F)$  MP 2,4.
6.  $(F \vee G) \rightarrow (G \vee F)$  Def.  $\vee$ , 5.

$$(2) \frac{}{AJ3} F \rightarrow (F \vee G)$$

Demostración:

1.  $\neg\neg F \rightarrow \neg(\neg F \wedge \neg G)$  Ax.J6
2.  $F \rightarrow \neg\neg F$  Ax.J1
3.  $\neg F \vee \neg\neg F$  Def.  $\rightarrow$  2.
4.  $(\neg F \vee \neg\neg F) \rightarrow (\neg\neg F \vee \neg F)$  (1)
5.  $\neg\neg F \vee \neg F$  MP 3,4
6.  $\neg F \vee \neg(\neg F \wedge \neg G)$  Tr. 1,5
7.  $F \rightarrow (F \vee G)$  Def  $\rightarrow$ ,  $\vee$ , 6

$$(3) \frac{}{AJ3} F \rightarrow (G \vee F)$$

Demostración: Como en (2). La primera línea es

el Ax.J7.

$$(4) \frac{}{AJ3} F \rightarrow F$$

Demostración:

- (1)  $\neg\neg F \rightarrow F$  Ax.J2

- |    |   |                        |
|----|---|------------------------|
| 2. | $\neg\neg F \rightarrow F$                    | Ax.J2                  |
| 3. | $\neg\neg F \vee F$                           | Def. $\rightarrow$ , 1 |
| 4. | $F \vee \neg F$                               | Tr 2,3                 |
| 5. | $(F \vee \neg F) \rightarrow (\neg F \vee F)$ | (1)                    |
| 6. | $\neg F \vee F$                               | IP 4,5                 |
| 7. | $F \rightarrow F$                             | Def $\rightarrow$ , 6. |

$$(5) \frac{}{\wedge J3} F \rightarrow \neg\neg F$$

Demostración:

- |    |   |                         |
|----|---|-------------------------|
| 1. | $\neg F \rightarrow \neg F$                                     | (4)                     |
| 2. | $\neg\neg F \vee \neg F$  | Def. $\rightarrow$ , 1. |
| 3. | $(\neg\neg F \vee \neg F) \rightarrow (\neg F \vee \neg\neg F)$ | (1)                     |
| 4. | $\neg F \vee \neg\neg F$  | IP 2,3                  |
| 5. | $F \rightarrow \neg\neg F$                                      | Def $\rightarrow$ , 4   |

$$(6) \frac{}{\wedge J3} \neg\neg\neg F \rightarrow \neg F$$

Demostración:

- |    |   |                       |
|----|---|-----------------------|
| 1. | $F \rightarrow \neg\neg F$              | Ax.J1                 |
| 2. | $\neg F \vee \neg\neg F$                | Def $\rightarrow$ , 1 |
| 3. | $\neg\neg F \rightarrow \neg\neg\neg F$ | (5)                   |
| 4. | $\neg\neg\neg F \vee \neg F$            | Tr 2,3                |
| 5. | $\neg\neg F \rightarrow \neg F$         | Def $\rightarrow$ , 4 |

$$(7) \frac{}{\wedge J3} \neg F \rightarrow \neg\neg F$$

Demostración:

- |    |                                     |                       |
|----|-------------------------------------|-----------------------|
| 1. | $\neg F \rightarrow \neg\neg\neg F$ | Ax.J1                 |
| 2. | $\neg\neg F \vee \neg\neg\neg F$    | Def $\rightarrow$ , 1 |
| 3. | $\neg\neg\neg F \rightarrow \neg F$ | (6)                   |
| 4. | $\neg\neg F \vee \neg F$            | Tr 2,3                |
| 5. | $\neg F \rightarrow \neg F$         | Def $\rightarrow$ , 4 |

$$(8) \frac{}{AJ3} \neg F \rightarrow \neg \neg F$$

Demostración:

1.	$\neg F \rightarrow F$	Ax. J2
2.	$F \rightarrow \neg \neg F$	(5)
3.	$\neg \neg F \vee F$	Def $\rightarrow$ , 1
4.	$\neg F \vee \neg \neg F$	Tr 2,3 MP (1)
5.	$\neg F \rightarrow \neg \neg F$	Def $\rightarrow$ , 4

$$(9) \text{ Si } \frac{}{AJ3} F \rightarrow G \text{ y } \frac{}{AJ3} G \rightarrow H, \text{ entonces } \frac{}{AJ3} F \rightarrow H.$$

Demostración: Supuesto que las líneas 1. y 2. aparecen en una AJ3-demostración entonces pueden aparecer también las líneas 3.-7. en esa AJ3-demostración.

1.	$F \rightarrow G$	Supuesto
2.	$G \rightarrow H$	Supuesto
3.	$\neg F \vee G$	Def $\rightarrow$ , 1
4.	$(\neg F \vee G) \rightarrow (G \vee \neg F)$	(1)
5.	$G \vee \neg F$	MP 3,4
6.	$\neg F \vee H$	Tr. 2,5
7.	$F \rightarrow H$	Def $\rightarrow$ , 6

$$(10) \frac{}{AJ3} F \vee (G \vee H) \rightarrow G \vee (F \vee H)$$

Demostración:

1.	$\neg F \rightarrow F$	Ax. J2
2.	$F \rightarrow (F \vee H)$	(2)
3.	$(F \vee H) \rightarrow (G \vee (F \vee H))$	(3)
4.	$\neg F \rightarrow (G \vee (F \vee H))$	(9), 1, 2, 3
5.	$\neg G \rightarrow G$	Ax. J2
6.	$G \rightarrow (G \vee (F \vee H))$	(2)
7.	$\neg G \rightarrow (G \vee (F \vee H))$	(9), 5, 6

8.  $\neg\neg H \rightarrow H$  Ax. J2  
 9.  $H \rightarrow (F \vee H)$  (3)  
 10.  $(F \vee H) \rightarrow (G \vee (F \vee H))$  (3)  
 11.  $\neg\neg H \rightarrow (G \vee (F \vee H))$  (9), 8, 9, 10  
 12.  $((\neg G \rightarrow (G \vee (F \vee H))) \rightarrow ((\neg\neg H \rightarrow (G \vee (F \vee H))) \rightarrow (\neg(\neg G \wedge \neg H) \rightarrow G \vee (F \vee H))))$  Ax. J8  
 13.  $\neg(\neg G \wedge \neg H) \rightarrow (G \vee (F \vee H))$  HP 12, 7; HP 11  
 14.  $(G \vee H) \rightarrow (G \vee (F \vee H))$  Def  $\vee$ , 13  
 15.  $\neg\neg(G \vee H) \rightarrow (G \vee H)$  Ax. J2  
 16.  $\neg\neg(G \vee H) \rightarrow (G \vee (F \vee H))$  (9), 14, 15  
 17.  $\neg\neg F \rightarrow (G \vee (F \vee H)) \rightarrow ((\neg\neg(G \vee H) \rightarrow G \vee (F \vee H)) \rightarrow (\neg(\neg F \wedge \neg(G \vee H)) \rightarrow (G \vee (F \vee H))))$  Ax. J8  
 18.  $\neg(\neg F \wedge \neg(G \vee H)) \rightarrow (G \vee (F \vee H))$  HP, 17, 4, HP 16  
 19.  $F \vee (G \vee H) \rightarrow G \vee (F \vee H)$  Def  $\rightarrow$ , 18

$$(11) \frac{}{AJ3} (F \vee G) \vee H \rightarrow F \vee (G \vee H)$$

Demostración: similar a (10)

$$(12) \frac{}{AJ3} F \vee (G \vee H) \rightarrow (F \vee G) \vee H$$

Demostración: similar a 10

$$(13) \frac{}{AJ3} (F \rightarrow H) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow ((F \vee G) \rightarrow H))$$

Demostración:

1.  $\neg F \rightarrow \neg\neg F$  (3)  
 2.  $\neg\neg F \rightarrow (\neg\neg F \vee H)$  (2)  
 3.  $H \rightarrow (\neg\neg F \vee H)$  (3)  
 4.  $\neg\neg F \rightarrow \neg F$  Ax. J2  
 5.  $\neg\neg H \rightarrow H$  Ax. J2  
 6.  $\neg\neg F \rightarrow (\neg\neg F \vee H)$  (3), 4, 1, 2  
 7.  $\neg\neg H \rightarrow (\neg\neg F \vee H)$  (3), 5, 3

8.  $\neg(\neg F \wedge \neg H) \rightarrow (\neg\neg F \vee H)$  Ax.J8,MP 6 MP 7

9.  $(F \rightarrow H) \rightarrow (\neg\neg F \rightarrow H)$  Def  $\vee, \rightarrow, 8$

de modo similar se consigue la línea 10:

10.  $(G \rightarrow H) \rightarrow (\neg\neg G \rightarrow H)$

11.  $(\neg\neg F \rightarrow H) \rightarrow ((\neg\neg G \rightarrow H) \rightarrow \neg(F \wedge \neg G) \rightarrow H)$  Ax.J8

12.  $(F \rightarrow H) \rightarrow ((\neg\neg G \rightarrow H) \rightarrow \neg(F \wedge \neg G) \rightarrow H)$  (9),9,11

13.  $\neg(F \rightarrow H) \vee (\neg(\neg\neg G \rightarrow H) \rightarrow \neg(F \wedge \neg G) \rightarrow H)$  Def  $\rightarrow, 12$

14.  $\neg(\neg\neg G \rightarrow H) \vee (\neg(F \rightarrow H) \vee \neg(F \wedge \neg G) \rightarrow H)$  (10), MP 13

15.  $\neg(G \rightarrow H) \vee (\neg(F \rightarrow H) \vee \neg(F \wedge \neg G) \rightarrow H)$  Tr. 14,10

16.  $\neg(F \rightarrow H) \vee (\neg(G \rightarrow H) \vee \neg(F \wedge \neg G) \rightarrow H)$  (10) MP 15

17.  $(F \rightarrow H) \rightarrow ((G \rightarrow H) \rightarrow ((F \vee G) \rightarrow H))$  Def.  $\rightarrow,$

16

. . .

(14)  $\frac{}{\wedge J3} \neg(F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$

Demostración:

1.  $\neg F \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  (2)

2.  $\neg G \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  (3)

3.  $\neg(F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  Ax.J8, MP 1,MP 2

. . .

(15)  $\frac{}{\wedge J3} \neg F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg(F \wedge G))$

Demostración:

1.  $\neg F \rightarrow \neg F$  (5)

2.  $\neg G \rightarrow \neg G$  (5)

3.  $\neg F \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  (2)

4.  $\neg G \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  (3)

5.  $\neg F \vee \neg G \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  (9),1,3;2,4; MP (10)

6.  $\neg(F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  (14)

7.  $\neg(F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee \neg G)$  (9), 5, 6.

8.  $\neg(F \wedge G) \vee (\neg F \vee \neg G)$  Def  $\rightarrow, 7$

9.  $\neg F \vee (\neg(F \wedge G) \vee \neg G)$  MP 8,(10)

# 121

10.  $(\neg(F \wedge G) \vee \neg\neg G) \rightarrow (\neg\neg G \vee \neg(F \wedge G))$  (1)
11.  $\neg\neg F \vee (\neg\neg G \vee \neg(F \wedge G))$  Tr. 9,10
12.  $\neg F \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg(F \wedge G))$  Def  $\rightarrow$ , 11

. . .

$$(16) \frac{}{AJ3} (F \rightarrow G) \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$$

Demostración:

1.  $\neg F \rightarrow (\neg G \vee \neg F)$  (3)
2.  $G \rightarrow \neg\neg G$  (5)
3.  $\neg\neg G \rightarrow (\neg G \vee \neg F)$  (2)
4.  $G \rightarrow (\neg G \vee \neg F)$  (9), 2, 3
5.  $(\neg F \vee G) \rightarrow (\neg G \vee \neg F)$  (13) 1, 3
6.  $(F \rightarrow G) \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg F)$  Def  $\rightarrow$ , 4

. . .

$$(17) \frac{}{AJ3} \neg F \rightarrow \neg(F \wedge G)$$

Demostración:

1.  $(F \wedge G) \rightarrow F$  Ax. J4
2.  $\neg F \rightarrow \neg(F \wedge G)$  IP (16), 1

. . .

$$(18) \frac{}{AJ3} \neg G \rightarrow \neg(F \wedge G)$$

Demostración: A partir del Ax. J7, como en (17).

. . .

$$(19) \frac{}{AJ3} \neg F \rightarrow \neg\neg\neg F$$

Demostración:

1.  $\neg\neg F \rightarrow F$  Ax. J2
  2.  $\neg F \rightarrow \neg\neg\neg F$  IP (16), 1
- q.e.d.

. . .

En la demostración de la completud de AJ3 hemos utilizado implícitamente el teorema de deducción, al afirmar que si  $\frac{}{AJ3} \neg(H^0) \vee F$ , entonces  $H^0 \frac{}{AJ3} F$ . Aunque de hecho utilizamos

sólo la parte trivial del teorema, no está fuera de lugar el demostrarlo.

Lema 3.4.6

Si  $H$  es un conjunto de fórmulas y  $F, G$  son fórmulas de  $L_3$ , entonces

$$H, F \vdash_{AJ3} G \Leftrightarrow H \vdash_{AJ3} F \rightarrow G$$

Demostración: El condicional de derecha a izquierda se sigue de la existencia del MP en  $AJ_3$ , de modo trivial. El condicional de izquierda a derecha se demuestra por inducción según la longitud de la deducción de  $G$  a partir del conjunto  $\{H, F\}$ .

Base de inducción: Si  $G$  es un axioma o un elemento de  $H$ , de

$\vdash_{AJ3} G \rightarrow (\neg F \vee G)$  se sigue que  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow G$ . Si  $G$  es  $F$ , por lema 3.4.5 (4) se sigue que  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow G$ . Paso de inducción: Si

$G$  es un axioma o un elemento de  $H$  o es  $F$ , entonces la afirmación se sigue como en la base de inducción. Si  $G$  es la conclusión de la aplicación de una de las reglas de deducción, entonces por supuesto de inducción valen 1. y 2.

1.  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow (H \rightarrow G)$
2.  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow H$

de donde se sigue

3.  $H \vdash_{AJ3} H \rightarrow (F \rightarrow G)$  Def  $\rightarrow$ , 1. (10), MP
4.  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow (F \rightarrow G)$  (9) 2, 4
5.  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow G$  Def  $\rightarrow$ , 2, (9) MP 4.

También por supuesto de inducción se cumplen 1' y 2' :

- 1'.  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow (G \vee H_1)$
- 2'.  $H \vdash_{AJ3} F \rightarrow (G \rightarrow H_2)$

de donde se sigue

- 3'.  $H \vdash_{AJ3} G \vee (\neg F \vee H_1)$  Def  $\rightarrow$  1, (10), MP
- 4'.  $H \vdash_{AJ3} \neg G \vee (\neg F \vee H_2)$  Def  $\rightarrow$ , 2 (10) MP

5.  $H \xrightarrow{AJS} (\neg F \vee H_1) \vee (\neg F \vee H_2)$  Def. Tr. 3, 4  
 6.  $H \xrightarrow{AJS} F \rightarrow (H_1 \vee H_2)$  (10), (2), (9), RP 5  
 Def .

Si  $G$  se ha obtenido por introducción o eliminación de una definición, la afirmación se sigue del supuesto de inducción, por el mismo procedimiento de introducir o eliminar un signo definido.

Notas al capítulo 3

- (1) Cfr. Kleene (1952) p. 82
- (2) Wajsberg (1934) en McCall (1967) pp. 264-284
- (3) Cfr. Smullyan (1968) pp. 30-40, para una larga serie de demostraciones del teorema de compacidad en la lógica de enunciados bivalente, algunas del mismo tipo que la que bosquejamos aquí.

4. EL CALCULO S3. EL "HAUPTSATZ"4.1 Introducción

En sus Untersuchungen über das logische Schliessen <sup>(1)</sup> definió Gentzen por vez primera dos tipos de cálculo de gran importancia en la historia de la lógica posterior. Uno de ellos era el cálculo de deducción natural y el otro el cálculo secuencial. El segundo de ellos ocupa un lugar intermedio entre los cálculos "logísticos" puros, como los de los Principia Mathematica, y los cálculos de deducción natural ya que "por un lado es "logístico", pues en él las deducciones no contienen supuestos como en NJ [el cálculo de deducción natural definido por Gentzen], pero por otro toman del cálculo NJ la división de los modos de deducción en introducciones y eliminaciones" <sup>(2)</sup>. Los cálculos secuenciales son axiomáticos y, junto con la característica que apunta Gentzen en la cita que acabamos de hacer, presentan la peculiaridad de que no operan sólo con fórmulas sino también con secuencias o con conjuntos de fórmulas.

El concepto fundamental de estos cálculos es el de seciente. De modo intuitivo diremos que un seciente

$$F_1, \dots, F_n \rightarrow G_1, \dots, G_m$$

donde  $F_1, \dots, F_n, G_1, \dots, G_m$  son fórmulas, es una expresión que semánticamente no se diferencia de la fórmula

$$(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow (G_1 \vee \dots \vee G_m).$$

Podemos decir, pues que un seciente expresa una especie de relación de consecuencia generalizada entre clases de fórmulas. En

concreto, podemos hacer explícita esta relación diciendo que un seciente es verdadero si es verdadero el condicional que une la conjunción de las fórmulas a la izquierda del seciente con la disyunción de las fórmulas a la derecha del signo de seciente. Dicho de otro modo: el seciente es verdadero si al menos una fórmula a la izquierda del signo de seciente es falsa o al menos una de las fórmulas de su derecha es verdadera. En el caso de que a la derecha y a la izquierda del signo de seciente haya una fórmula, el seciente es verdadero si el condicional que une a esas dos fórmulas es verdadero. En este sentido decimos que el seciente expresa una generalización de la idea de consecuencia o, para ser más exactos, de la noción de fórmula condicional.

Llamamos antecedente de un seciente al conjunto de fórmulas que aparece a la izquierda del signo de seciente y consecuente del seciente al conjunto de fórmulas que está a la derecha del mismo.

Los cálculos secuenciales LJ y LK de Gentzen tienen como esquema axiomático o seciente inicial la expresión

$$F \rightarrow F$$

donde  $F$  es una fórmula cualquiera<sup>(3)</sup>. Se distinguen dos tipos de reglas de deducción en estos cálculos. Las primeras permiten añadir una fórmula al antecedente y al consecuente de un seciente, cambiar el orden de las fórmulas y eliminar fórmulas del antecedente y consecuente en ciertos casos. Una de estas reglas de eliminación es la regla de corte o separación (Schnittsregel), que nos ocupará luego. Este primer conjunto de reglas son las reglas estructurales. El segundo conjunto de reglas indica las condiciones bajo las cuales está permitida la introducción de los signos lógicos en el antecedente y consecuente.

Una propiedad fundamental del cálculo secuencial de Gentzen es que la regla de corte no es independiente, es decir, que puede demostrarse que toda tesis del cálculo secuencial con regla de corte es también una tesis de ese cálculo sin regla de corte. Este es el sentido del teorema fundamental (Hauptsatz) de Gentzen. La regla de separación permite deducir un seciente como

$$M, N' \rightarrow N, N'$$

en una deducción en que han aparecido los secientes

$$M, F \rightarrow N \quad \text{y} \quad N' \rightarrow N', F$$

es decir, permite eliminar una fórmula que aparece en el antecedente y consecuente de dos secientes. Si esta regla es eliminable, entonces se pueden construir deducciones en las que "todas las fórmulas secuenciales de la deducción (H-S-Formeln) son subfórmulas de las fórmulas que aparecen en el seciente final. ... de manera intuitiva, se puede expresar la citada propiedad de la deducción sin corte más o menos como sigue: las fórmulas secuenciales se van haciendo cada vez más largas hacia abajo, nunca más cortas. Por decirlo así, se va construyendo el resultado final a partir de sus elementos componentes"<sup>(4)</sup>.

Si comparamos el cálculo secuencial con el de árboles lógicos, observamos que los dos operan según el principio de subfórmula a que alude Gentzen en la cita anterior, al contrario que los cálculos axiomáticos del tipo de A3: Demostramos la validez de una fórmula utilizando subfórmulas suyos a lo largo de la deducción. En el cálculo secuencial se sigue, sin embargo, un proceso que podríamos llamar sintético, al contrario que en el cálculo de árboles. En el primero el punto de partida de una deducción viene dado por subfórmulas de la fórmula cuya validez queremos demostrar, mientras que en el cálculo de árboles el ori-

gen de la deducción es la fórmula misma o, mejor, su negación.

Carnap<sup>(5)</sup> introdujo el concepto de involucración o envolvimiento (involution) como un posible concepto básico de la semántica. La involucración lógica puede tomarse como un correlato semántico de la noción de seciente. Según Carnap, la clase de fórmulas M involucra (involves) la clase N de fórmulas exactamente cuando al menos un enunciado de M no es verdadero o al menos un enunciado o fórmula de N es verdadero. Es decir, M involucra N justo cuando el seciente

$$M \rightarrow N$$

es verdadero según la caracterización informal de Gentzen. Los Kneale<sup>(6)</sup> han definido sistemas secuenciales de deducción utilizando la noción carnapiana de involucración como concepto semántico básico.

El núcleo fundamental de este capítulo es la definición de un cálculo secuencial para la lógica L3 y la demostración de una versión del Hauptsatz adecuada a este cálculo. Ni que decir tiene que la diferencia esencial con los cálculos secuenciales de Gentzen, los Kneale o Smullyan estriba en que aquí se trata de dar un cálculo secuencial para una lógica trivalente. Este hecho implica las divergencias mayores entre S3 y los cálculos a que acabamos de hacer mención. Hay otras diferencias de orden menor, sin embargo. Al contrario que Gentzen y siguiendo a Smullyan<sup>(7)</sup> concebimos el antecedente y consecuente de un seciente como un conjunto de fórmulas y no como una secuencia de fórmulas. A consecuencia de esto las reglas estructurales salvo, en principio, la de corte, se hacen innecesarias. Es claro que la clase de fórmulas

$$\{F_1, \dots, F_1, \dots, F_1, \dots, F_n\}$$

es la misma clase que

$$\{F_1, \dots, F_i, \dots, F_n\}$$

y que el conjunto de fórmulas

$$\{F_1, \dots, F_i, \dots, F_j, \dots, F_n\}$$

es el mismo conjunto que

$$\{F_1, \dots, F_j, \dots, F_i, \dots, F_n\}$$

Dos de las reglas estructurales de Gentzen permitían realizar estas operaciones de eliminación de una fórmula repetida y cambio de orden de las fórmulas tanto en el antecedente como en el consecuente de los secuentes. Resulta así que si el antecedente y el consecuente son conjuntos y no secuencias, estas dos reglas son superfluas. Por otro lado, la regla de ampliación, que permite deducir

$$M, F \rightarrow N \quad \text{o} \quad M \rightarrow N, F$$

de

$$M \rightarrow N$$

donde  $M, N$  son clases de fórmulas y  $F$  una fórmula, la demostraremos como una regla derivada. Finalmente, al demostrar el Hauptsatz para el cálculo S3 habremos suprimido totalmente la necesidad de reglas estructurales. Las reglas de deducción de S3 son todas, por lo tanto, salvo la de corte, reglas de introducción de los signos lógicos  $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ .

Una de las razones de la elegancia de los cálculos secuenciales en la lógica bivalente es que cada signo lógico tiene dos reglas simétricas, duales para los signos duales, una para la introducción del signo en el antecedente y otra para su introducción en el consecuente. En L3, sin embargo, no es posible definir un

cálculo secuencial tan sencillo. La razón fundamental estriba en el comportamiento de la negación fuerte: No hay dificultad para dar una regla de introducción de la negación fuerte en el antecedente de los secuentes, por ejemplo la siguiente:

$$\frac{M \rightarrow N, F}{M, \neg F \rightarrow N} .$$

Sin embargo no es viable la regla simétrica para el consecuente:

$$\frac{M, F \rightarrow N}{M \rightarrow N, \neg F}$$

puesto que esta regla no sería semánticamente correcta. En efecto, una condición semánticamente necesaria de una regla de deducción es que si la premisa de la regla es verdadera -en este caso, el secuyente  $M, F \rightarrow N$ - la conclusión -el secuyente  $M \rightarrow N, \neg F$ - debe ser verdadera también. Pero este no es el caso aquí, como se puede ver fácilmente: suponiendo que  $M$  es verdadero en la valoración  $\beta$  y que  $F$  es indeterminado y  $N$  falso en esa valoración, el antecedente de la regla es verdadero y el consecuente, no. Estamos aceptando implícitamente, claro está, que un secuyente es verdadero cuando el antecedente involucra lógicamente al consecuente. Salvamos esta dificultad, al precio de la elegancia formal, tomando en cuenta la estructura interna de las expresiones que vienen precedidas por la negación fuerte y dando reglas para estas expresiones, es decir, damos reglas de introducción para expresiones de la forma

$$\neg F, \neg\neg F, \neg(F \wedge G), \neg \wedge XG\{X\} .$$

La demostración de la completud y corrección del cálculo, que luego daremos, nos asegura la efectividad de este procedimiento.

Hay cuatro reglas en S3 que no suelen aparecer en

los cálculos secuenciales ordinarios: las reglas sin premisas  $RS_{=1} - RS_{\neq 1}$ . Podrían tomarse como esquemas axiomáticos pero hemos preferido darles carácter de reglas para conservar el paralelismo con otros cálculos de L3 y con los cálculos secuenciales standard. Estas reglas no suponen, evidentemente, un alejamiento sustancial de las formas clásicas de los cálculos secuenciales.

Hemos dicho ya qué entendíamos por seciente verdadero. Posteriormente volveremos sobre ello, precisando la noción. Nos interesa destacar aquí que un seciente es lógicamente válido cuando la implicación  $\hat{M} \rightarrow \check{N}$  es lógicamente verdadera, donde  $\hat{M}$  es una conjunción de las fórmulas de  $M$  y  $\check{N}$  una disyunción de los elementos de  $N$ , un conjunto de fórmulas. Una fórmula  $F$  es lógicamente válida cuando el seciente  $\emptyset \rightarrow F$  o, simplemente,  $\rightarrow F$  es lógicamente verdadero.

En lo que sigue, daremos primero las definiciones de seciente y sus propiedades semánticas, así como la de deducción en S3 y otros conceptos relacionados con estos, para pasar luego a presentar el esquema axiomático y las reglas de deducción del cálculo. Posteriormente estudiaremos la corrección de S3, algunas reglas derivadas y la completud de S3, basándonos en la completud de B3. A continuación damos otra prueba, diferente, de la completud de S3, sobre la base de las propiedades analíticas de consistencia. La demostración del Teorema Fundamental y la equivalencia de S3 y B3 ocupan la parte final del capítulo.

#### 4.2 Definición del cálculo S3

##### Definición 4.2.1

Un seciente  $\Sigma$  es un triplete  $\langle \Pi, \Pi, \rightarrow \rangle$  donde  $\Pi$

y  $N$  son conjuntos finitos, posiblemente vacíos, de fórmulas de  $L_3$ . Escribimos

$$M \rightarrow N$$

para nombrar el secunte  $\langle M, N, \rightarrow \rangle$ .

Definición 4.2.2

Supuesto que  $\Sigma \equiv M \rightarrow N$ , decimos que el secunte  $\Sigma$  es válido en  $L_3$  o  $L_3$ -verdadero si para toda valoración de  $L_3$   $\beta$ ,  $\beta(\hat{M}) = v \Rightarrow \beta(\check{N}) = v$ .

En lo que sigue, escribimos  $\Vdash_{L_3} \Sigma$  para indicar que el secunte  $\Sigma$  es válido en  $L_3$ . Es claro que un secunte  $\Sigma$  es  $L_3$ -verdadero si para toda valoración  $\beta$ ,  $\beta(\hat{M}) \neq v$  o  $\beta(\check{N}) = v$ , cuando  $\Sigma \equiv M \rightarrow N$ .

Proposición 4.2.3

- (i)  $\Vdash_{L_3} M \rightarrow N \Leftrightarrow \Vdash_{L_3} \hat{M} \rightarrow \check{N}$
- (ii)  $\Vdash_{L_3} M \rightarrow F \Leftrightarrow \hat{M} \Vdash_{L_3} F$
- (iii)  $\Vdash_{L_3} \rightarrow F \Leftrightarrow \Vdash_{L_3} F$
- (iv)  $\Vdash_{L_3} M \rightarrow \Leftrightarrow M$  es  $L_3$ -insatisfacible
- (v)  $\emptyset \rightarrow \emptyset$  no es válido en  $L_3$ .

Demostración: (i) Por definición,  $\Vdash_{L_3} M \rightarrow N$  es equivalente a  $\forall \beta, \beta(\hat{M}) = v \Rightarrow \beta(\check{N}) = v$ . Esto equivale a su vez a  $\Vdash_{L_3} \hat{M} \rightarrow \check{N}$ .

(ii) es una consecuencia trivial de (i)

(iii)  $\Vdash_{L_3} \rightarrow F$  es equivalente a decir que para toda valoración  $\beta$  si  $\beta$  satisface todas las fórmulas del antecedente, entonces  $\beta(F) = v$ . Pero el antecedente es vacío. Luego toda valoración satisface todas las fórmulas del antecedente y con ello, a  $F$ .

(iv) Supuesto que haya una valoración  $\beta$ , tal que  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces, por definición de  $\Vdash_{L_3} M \rightarrow$ ,  $\beta(\check{\emptyset}) = v$ . Ahora bien,  $\beta(\check{\emptyset}) = v$

equivale a la afirmación de que hay una fórmula  $F$  tal que  $F \in \emptyset$  y  $\beta(F) = v$ . Pero no hay tal fórmula, luego  $M$  es L3-insatisfacible.  
 (v)  $F \in \emptyset \Rightarrow \beta(F) = v$ , para toda valoración  $\beta$ . Luego para toda  $\beta$ ,  $\beta(\emptyset) = v$ . Como hemos visto más arriba,  $\beta(\emptyset) \neq v$ . Luego no es cierto que  $\vdash_{L3} \emptyset \rightarrow \emptyset$  (8).

Introducimos ahora los postulados de S3. Se trata de un esquema axiomático y 18 reglas de deducción. Entre ellas está la regla de corte o separación, cuya eliminabilidad demostraremos más tarde.

Esquema axiomático

$$M, F \rightarrow H, F$$

Reglas de deducción

$$\text{RS 1} \quad \frac{M, F \rightarrow N}{M \rightarrow \neg F, N}$$

$$\text{RS 2} \quad \frac{H \rightarrow H, F}{H, \neg F \rightarrow H}$$

$$\text{RS 3} \quad \frac{M, F \rightarrow N^{(9)}}{H, \neg\neg F \rightarrow N}$$

$$\text{RS 4} \quad \frac{H \rightarrow F, H}{H \rightarrow \neg\neg F, H}$$

$$\text{RS 5} \quad \frac{M \rightarrow H, F}{H, -F \rightarrow H}$$

$$\text{RS 6} \quad \frac{M, F, G \rightarrow H}{H, F \wedge G \rightarrow H}$$

$$\text{RS 7} \quad \frac{H \rightarrow H, F \quad H \rightarrow H, G}{H \rightarrow H, F \wedge G}$$

$$\text{RS 8} \quad \frac{H, -F \rightarrow H \quad H, -G \rightarrow H}{H, -(F \wedge G) \rightarrow H}$$

$$\text{RS 9} \quad \frac{H \rightarrow H, -F, -G}{H \rightarrow H, -(F \wedge G)}$$

$$\text{RS } 10 \quad \frac{M, F[A] \rightarrow N}{M, \wedge X F[X] \rightarrow N}$$

$$\text{RS } 11 \quad \frac{M \rightarrow N, F[\neg P_j^1]}{M \rightarrow N, \wedge X F[X]} \quad (*)$$

$$\text{RS } 12 \quad \frac{M, \neg F[\neg P_j^1] \rightarrow N}{M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow N} \quad (*)$$

$$\text{RS } 13 \quad \frac{M \rightarrow N, \neg F[A]}{M \rightarrow N, \neg \wedge X F[X]}$$

(\*) bajo el supuesto de que  $P_j^1$  no aparezca en la conclusión.

$$\text{RS}_{=1} \quad M \rightarrow \neg \exists P^k [A] \rightarrow A=A, N$$

$$\text{RS}_{=2} \quad M \rightarrow A=B \wedge F[A] \rightarrow F[B], N$$

$$\text{RS}_{=3} \quad M \rightarrow A=A \wedge B=B \rightarrow \exists A=B, N$$

$$\text{RS}_{\neq 1} \quad M \rightarrow \neg F=A \leftrightarrow (F[A] \wedge \wedge X (F[X] \rightarrow X=A))$$

$$\text{Regla de separación} \quad \frac{M_1, F \rightarrow N_1 \quad M_2 \rightarrow F, N_2}{M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2}$$

Como vemos, todo seciente en el que una fórmula  $F$  aparece tanto en el antecedente como en el consecuente, es un axioma. El sentido de las reglas debería ser claro. Las reglas 11 y 12 se pueden aplicar sólo en el caso de que el parámetro de predicado  $P_j^1$  no aparezca en  $M, N$  ni  $F$ . En otro caso se podrían realizar deducciones incorrectas desde el punto de vista semántico. Como en casos anteriores llamamos aplicación de una regla de S3 al par o triplete tal que el primer (los dos primeros) elemento(s) del par (triplete) están formados según la parte superior de una de las reglas RS 1 - RS 13 y el último elemento del par está formado según la parte inferior de una de esas reglas. Es también una aplicación de una regla cada seciente formado según una de las reglas  $\text{RS}_{=1}$  -  $\text{RS}_{\neq 1}$ . En el caso de las reglas RS 1 - RS 13 llamamos premisa(s) de la (aplicación de la) regla al primer o dos primeros elementos de la aplicación. Llamamos conclusión

de la regla al otro elemento del par o triplete. En el caso de las reglas  $RS_{=1}$  -  $RS_{\neq 1}$  la aplicación y la conclusión de la regla coinciden. Se trata, por lo tanto, de reglas sin premisas.

Definimos ahora una serie de conceptos relacionados con el de deducción en S3.

Definición 4.2.4

La secuencia finita  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  de secuentes es una demostración del secuente  $\Sigma$  en S3:  $\vdash_{S3} \Sigma \equiv \Sigma_n$  y cada  $\Sigma_i$  en la secuencia cumple una de las condiciones siguientes:

- (i)  $\Sigma_i$  es un axioma.
- (ii)  $\Sigma_i$  es la conclusión de una regla cuyas premisas, en el caso de reglas con premisas, son elementos anteriores a  $\Sigma_i$  en la secuencia.
- (iii)  $\Sigma_i$  se ha obtenido por introducción o eliminación de un signo definido en un elemento de la secuencia anterior a  $\Sigma_i$ .

Definición 4.2.5

$\Sigma$  es una tesis de S3 o  $\Sigma$  es demostrable en S3 o  $\vdash_{S3} \Sigma$  :  $\Leftrightarrow$  Hay una demostración de  $\Sigma$  en S3.

Definición 4.2.6

La fórmula F es deducible en S3 del conjunto H de supuestos o  $H \vdash_{S3} F$  :  $\Leftrightarrow$  Hay un subconjunto finito  $H^0$  de H tal que  $\vdash_{S3} H^0 \rightarrow F$ .

Definición 4.2.7

La fórmula F es una tesis de S3. F es demostrable en S3.  $\vdash_{S3} F$  :  $\Leftrightarrow$   $\vdash_{S3} \rightarrow F$ .

Definición 4.2.8

La fórmula  $F$  es S3-refutable:  $\Leftrightarrow \nexists_{S3} F \rightarrow$

4.3 Corrección de S3 respecto a la consecuencia

Corrección y consistencia son conceptos que guardan estrechas relaciones. Dado un cálculo correcto respecto a la consecuencia (folgerungskorrekter Kalkül) para una lógica consistente, es decir, para una lógica en que al menos una fórmula no sea lógicamente verdadera, se puede afirmar, claramente, que hay al menos una fórmula que no es teorema del cálculo o, lo que es lo mismo, que el cálculo es consistente en sentido de Post<sup>(10)</sup>. Afirmaciones similares pueden hacerse para otros sentidos de consistencia. En este apartado estudiamos la corrección del cálculo S3 con respecto a la consecuencia. Este concepto de corrección engloba, como ya he dicho, al de corrección con respecto a la validez. Por ello sólo damos una prueba explícita de corrección en el primer sentido. La demostración sigue la pauta habitual de este tipo de pruebas en este trabajo. Mostramos primero, en un lema, que los axiomas de S3 son secuentes 1-verdaderos y que las reglas de deducción transmiten la verdad de las premisas a la conclusión. Luego, en una demostración por inducción sobre la longitud de las demostraciones de S3, se prueba que todo seciente en una de esas demostraciones es un seciente 1-verdadero y, con ello, toda tesis del cálculo S3. Dado que si del conjunto  $M$  se sigue la fórmula  $F$  entonces el seciente  $M \rightarrow F$  es 1-verdadero y a la inversa, resulta que si toda tesis de S3 es 1-verdadera, entonces el cálculo es correcto.

Lema 4.3.1

- (a) Todo axioma de S3 es L3-verdadero  
 (b) Toda aplicación de una regla de S3 cuyas premisas, en el caso de que existan, son lógicamente verdaderas, tiene una conclusión L3-verdadera.

Demostración: (a). Todo axioma es de la forma

$M, F \rightarrow F, N$ . Por lo tanto, para toda valoración que satisface  $\hat{M} \wedge F$  vale decir que satisface  $F$  y, con ello,  $F \vee \check{N}$ . (b). En lo que sigue, mostramos que  $\beta(M) = v \Rightarrow \beta(N) = v$  cuando  $M \rightarrow N$  es la conclusión de una regla cuyas premisas son verdaderas en  $\beta$ . Esto es equivalente, según la proposición 4.2.3, a la parte (b) del lema que consideramos.

RS 1: para toda valoración  $\beta$  tal que  $\beta(\hat{M}) = v$  vale que o bien  $\beta(F) = v$  y entonces  $\beta(\check{N}) = v$ , por el supuesto, con lo cual  $\beta(\check{N} \vee F) = v$  o bien  $\beta(F) \neq v$ , y entonces  $\beta(\neg F) = v$ , de donde  $\beta(\check{N} \vee F) = v$ . En ambos casos, pues,  $\beta(\hat{M} \rightarrow (\neg F \vee \check{N})) = v$ .

RS 2: si  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces, por el supuesto  $\beta(\check{N}) = v$  o  $\beta(F) = v$ . Si  $\beta(\check{N}) = v$ , entonces  $\beta((\hat{M} \wedge \neg F) \rightarrow \check{N}) = v$ . Si  $\beta(F) = v$ , entonces  $\beta(\neg F) \neq v$  y, con ello,  $\beta(\hat{M} \wedge \neg F) \neq v$  y  $\beta((\hat{M} \wedge \neg F) \rightarrow \check{N}) = v$ .

RS 3: si  $\beta(\hat{M} \wedge \neg \neg F) = v$ , entonces  $\beta(\hat{M} \wedge F) = v$ , puesto que  $\vdash_{L3} F \rightarrow \neg \neg F$ . Por lo tanto,  $\beta(\check{N}) = v$ , por el supuesto. Por lo tanto, si se cumple el supuesto, entonces  $\beta(\hat{M} \wedge \neg \neg F \rightarrow \check{N}) = v$ .

RS 4: si  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces, por el supuesto,  $\beta(F) = v$  o  $\beta(\check{N}) = v$ . Si  $\beta(F) = v$ , entonces  $\beta(\neg \neg F) = v$ , por la tautología antes citada, y, por lo tanto,  $\beta(\neg \neg F \vee \check{N}) = v$ . Si  $\beta(\check{N}) = v$ , entonces  $\beta(\neg \neg F \vee \check{N}) = v$ . Luego, en ambos casos,  $\beta(\neg \neg F \vee \check{N}) = v$ .

RS 5: si  $\beta(\hat{M} \wedge \neg F) = v$ , entonces  $\beta(\hat{M}) = v$  y  $\beta(F) = f$ . Por el supuesto, si  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces  $\beta(\check{N}) = v$  o  $\beta(F) = v$ . Ahora bien, hemos aceptado que  $\beta(F) = f$ . Luego si  $\beta(\hat{M} \wedge \neg F) = v$ , entonces necesariamente  $\beta(\check{N}) = v$ .

Regla de separación: supuesto que  $\beta(\hat{M}_1 \wedge \hat{M}_2) = v$ , entonces  $\beta(F) = v$  o  $\beta(F) \neq v$ . En el primer caso, por la primera premisa, que suponemos verdadera,  $\beta(\check{N}_1) = v$  y, con ello,  $\beta(\check{N}_1 \vee \check{N}_2) = v$ . En el caso de que  $\beta(F) \neq v$ , entonces, por la segunda premisa,  $\beta(\check{N}_2) = v$  y, por tanto,  $\beta(\check{N}_1 \vee \check{N}_2) = v$ .

RS 6: la demostración es trivial.

RS 7: si  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces, por el supuesto de la verdad de las premisas en  $\beta$ , o bien  $\beta(\check{N}) = v$  o bien  $\beta(F) = v$  y  $\beta(G) = v$ . En ambos casos se cumple que  $\beta(\check{N} \vee (F \wedge G)) = v$ .

RS 8: si  $\beta(\hat{M}) = v$  y  $\beta(-(F \wedge G)) = v$ , entonces  $\beta(\hat{M} \wedge -F) = v$  o  $\beta(\hat{M} \wedge -G) = v$ . En ambos casos se sigue del supuesto que  $\beta(\check{N}) = v$ .

RS 9: si  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces, por el supuesto,  $\beta(\check{N}) = v$  o  $\beta(-F) = v$  o  $\beta(-G) = v$ . si  $\beta(-F) = v$  o  $\beta(-G) = v$ , entonces  $\beta(-(F \wedge G)) = v$ , puesto que  $\Vdash_{L3} -F \rightarrow -(F \wedge G)$  y  $\Vdash_{L3} -G \rightarrow -(F \wedge G)$ . Luego en estos dos casos  $\beta(\check{N} \vee -(F \wedge G)) = v$ . Si  $\beta(\check{N}) = v$ , entonces también  $\beta(\check{N} \vee -(F \wedge G)) = v$ .

RS 10: si  $\beta(\hat{M}) = v$  y  $\beta(\wedge X F[X]) = v$ , entonces  $\beta(\hat{M}) = v$  y  $\beta(F[A]) = v$ , para toda descripción A. Por el supuesto vale entonces que  $\beta(\check{N}) = v$ .

RS 11: si  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces, por el supuesto,  $\beta(\check{N}) = v$  o  $\beta(F[\cup P_j^1]) = v$ . En el primer caso,  $\beta(\check{N} \vee \wedge X F[X]) = v$ . En el segundo, por el teorema de generalización (prop.1.7.2.5) y puesto que, por el supuesto, vale que  $M \Vdash_{L3} \neg(\check{N}) \rightarrow F[\cup P_j^1]$  y el parámetro  $P_j^1$  no aparece en M, N, F podemos afirmar que  $M \Vdash_{L3} \neg(\check{N}) \rightarrow \wedge X F[X]$ , o lo que es lo mismo,  $M \Vdash_{L3} (\check{N} \vee \wedge X F[X])$ .

RS 12: supuesto que el seciente  $M, -F[\cup P_j^1] \rightarrow N$  es L3-válido, entonces, por la prop. 4.2.3,  $\Vdash_{L3} \hat{M} \rightarrow (-F[\cup P_j^1] \rightarrow N)$ . Por el teorema de generalización se puede afirmar que

$$\begin{array}{ll} \Vdash_{L3} \hat{M} \rightarrow \wedge X (-F[X] \rightarrow \check{N}) & \text{t. de general.} \\ M \Vdash_{L3} \forall X -F[X] \rightarrow N & \text{esquema válido.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
M \Vdash_{L3} \neg \Lambda X \neg \neg F[X] \rightarrow \check{M} & \text{Def. } \check{V} \\
M \Vdash_{L3} \neg \Lambda X F[X] \rightarrow \check{M} & \text{prop. 1.7.2.3 (v)} \\
\check{M} \Vdash_{L3} ((\hat{M} \wedge \neg \Lambda X F[X]) \rightarrow \check{M}) & \text{teorema de deducción.}
\end{array}$$

RS 13: si  $\beta(\hat{M}) = v$ , entonces, por el supuesto,  $\beta(\check{M}) = v$  o  $\beta(\neg F[\Lambda]) = v$ . En el primer caso,  $\beta(\check{M} \vee \neg \Lambda X F[X]) = v$ . En el segundo, de  $\beta(\neg F[\Lambda]) = v$  se sigue que  $\beta(\Lambda X F[X]) = f$  y, en consecuencia,  $\beta(\neg \Lambda X F[X]) = v$ . Por lo tanto,  $\beta(\check{M} \vee \neg \Lambda X F[X]) = v$ .

RS<sub>=1</sub> - RS<sub>v1</sub>: dado que el consecuente es lógicamente verdadero, por la definición de valoración, el secuyente es L3-válido. q.e.d

Proposición 4.3.2 Corrección de S3 respecto a la consecuencia.

Si M es un conjunto de fórmulas, posiblemente vacío, y F es una fórmula de L3, entonces

$$M \Vdash_{S3} F \Rightarrow M \Vdash_{L3} F$$

Demostración: Por definición de deducción podemos suponer que el secuyente  $M^0 \rightarrow F$ , con  $M^0 \subseteq M$  y  $M^0$  finito, es demostrable en S3. Ahora bien, sabemos que todo secuyente en una S3-demostración es L3-válido, como es fácil probar por inducción sobre la longitud de la deducción de los secuentes demostrables: si un secuyente es un axioma, es L3-válido según el punto (a) del lema anterior. Si es la conclusión de premisas anteriores en la deducción, dado que, por supuesto de inducción, se puede suponer que estas son L3-válidas, la conclusión también lo es, por el punto (b) del lema 4.3.1. Luego el secuyente  $M^0 \rightarrow F$  es L3-válido y por lo tanto vale, por la prop. 4.2.3, que  $\Vdash_{L3} M^0 \rightarrow F$ , de donde se sigue, por el teorema de compacidad que  $\Vdash_{L3} F$ . q.e.d.

## 4.4 Reglas derivadas en S3

En este apartado vamos a dar reglas de introducción en las deducciones de S3 para los funtores standard y el cuantor nominal existencial, reglas que no han sido introducidas entre las reglas primitivas de S3. Aunque el cálculo S3 en su formulación original es completo, incluso sin la regla de separación, lo que hace teóricamente innecesarias estas reglas, es interesante darlas como elemento de comparación entre S3 y los cálculos secuenciales para L2: en ambos tipos de cálculos no se diferencian sintácticamente las reglas para los funtores standard y el cuantor nominal existencial. Primero introducimos las reglas y luego mostramos que son reglas admisibles en S3.

$$\text{RS}_{\vee 1} \frac{H, F \rightarrow N \quad H, G \rightarrow N}{H, F \vee G \rightarrow N}$$

$$\text{RS}_{\vee 2} \frac{M \rightarrow N, F, G}{M \rightarrow N, F \vee G}$$

$$\text{RS}_{\rightarrow 1} \frac{H \rightarrow H, F \quad M, G \rightarrow M}{N, F \rightarrow G \rightarrow N}$$

$$\text{RS}_{\rightarrow 2} \frac{M, F \rightarrow N, G}{N \rightarrow N, F \rightarrow G}$$

$$\text{RS}_{\leftrightarrow 1} \frac{H, F \rightarrow G, G \rightarrow F \rightarrow N}{H, F \leftrightarrow G \rightarrow N}$$

$$\text{RS}_{\leftrightarrow 2} \frac{M \rightarrow N, F \rightarrow G \quad M \rightarrow N, G \rightarrow F}{M \rightarrow N, F \leftrightarrow G}$$

$$\text{RS}_{\vee 1} \frac{H, F[\text{cP}_j^1] \rightarrow N}{H, \vee X F[X] \rightarrow N} (*)$$

$$\text{RS}_{\vee 2} \frac{H \rightarrow H, F[A]}{H \rightarrow N, \vee X F[X]}$$

(\*) bajo la condición de que  $P_j^1$  no aparezca en la conclusión.

Podemos mostrar ahora que cuando en una S3-deducción aparece un seciente o secuentes de la forma de las premisas de una de las reglas  $\text{RS}_{\vee 1}$  -  $\text{RS}_{\vee 2}$ , entonces también puede ser un elemento de esa deducción un seciente que tiene la forma

de la conclusión de la correspondiente regla. En virtud de la corrección de S3 respecto a la consecuencia se puede afirmar que estas reglas son también correctas. Igualmente, si el cálculo S3 es completo en su forma primitiva, lo ha de ser también el cálculo que se origina al añadir a las reglas primitivas de S3 estas nuevas reglas. En las demostraciones que siguen se supone siempre que en una S3-deducción aparecen secuentes de la forma de la premisa o premisas de una regla derivadas y se muestra como se podría deducir la conclusión.

Demostración de la admisibilidad en S3 de las reglas  $RS_{\vee 1}$  -  $RS_{\vee 2}$ .

$RS_{\vee 1}$	1. $H, F \rightarrow N$	Supuesto
	2. $M, G \rightarrow N$	Supuesto
	3. $M, \neg\neg F \rightarrow N$	$RS_{3,1}$
	4. $M, \neg\neg G \rightarrow N$	$RS_{3,2}$
	5. $M, \neg(\neg F \wedge \neg G) \rightarrow H$	$RS_{6,3,4}$
	6. $M, (F \vee G) \rightarrow N$	def. $\vee$ , 5
. . . . .		
$RS_{\vee 2}$	1. $H \rightarrow F, G, N$	Supuesto
	2. $M \rightarrow \neg\neg F, \neg\neg G, H$	$RS_{4,1}$
	3. $M \rightarrow H, \neg(\neg F \wedge \neg G)$	$RS_{9,2}$
	4. $H \rightarrow H, (F \vee G)$	def. $\vee$ , 3
. . . . .		
$RS_{\rightarrow 1}$	1. $M \rightarrow N, F$	Supuesto
	2. $H, G \rightarrow N$	Supuesto
	3. $H, \neg F \rightarrow N$	$RS_{2,1}$
	4. $H, \neg F \vee G \rightarrow H$	$RS_{\vee 1, 2, 3}$
	5. $H, F \rightarrow G \rightarrow H$	def. $\rightarrow$ , 4
. . . . .		

RS $\rightarrow_2$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>M, F \rightarrow N, G</math></li> <li>2. <math>M \rightarrow \neg F, G, N</math></li> <li>3. <math>M \rightarrow \neg F \vee G, N</math></li> <li>4. <math>M \rightarrow N, F \rightarrow G</math></li> </ol>	<p>Supuesto</p> <p>RS 1, 1</p> <p>RS <math>\vee_2</math>, 2</p> <p>def. <math>\rightarrow</math>, 3</p>
. . .		
RS $\leftrightarrow_1$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>M, F \rightarrow G, G \rightarrow F \rightarrow N</math></li> <li>2. <math>M, (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \rightarrow N</math></li> <li>3. <math>M, F \leftrightarrow G \rightarrow N</math></li> </ol>	<p>Supuesto</p> <p>RS 6,1</p> <p>def. <math>\leftrightarrow</math>, 2</p>
. . .		
RS $\leftrightarrow_2$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>M \rightarrow N, F \rightarrow G</math></li> <li>2. <math>M \rightarrow N, G \rightarrow F</math></li> <li>3. <math>M \rightarrow N, (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)</math></li> <li>4. <math>M \rightarrow N, F \leftrightarrow G</math></li> </ol>	<p>Supuesto</p> <p>Supuesto</p> <p>RS 7, 1,2</p> <p>def. <math>\leftrightarrow</math>, 3</p>
. . .		
RS $\vee_1$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>M, F[P_j^1] \rightarrow N</math></li> <li>2. <math>M, \neg F[P_j^1] \rightarrow N</math></li> <li>3. <math>M, \neg \wedge X-F[X] \rightarrow N</math></li> <li>4. <math>M, \vee X F[X] \rightarrow N</math></li> </ol>	<p>Supuesto</p> <p>RS 3, 1</p> <p>RS 12, 2</p> <p>def. <math>\vee</math>, 3</p>
. . .		
RS $\vee_2$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>M \rightarrow N, F[A]</math></li> <li>2. <math>M \rightarrow N, \neg F[A]</math></li> <li>3. <math>M \rightarrow N, \neg \wedge X-F[X]</math></li> <li>4. <math>M \rightarrow N, \vee X F[X]</math></li> </ol>	<p>Supuesto</p> <p>RS 4, 1</p> <p>RS 13, 3</p> <p>def <math>\vee</math>, 3</p>
. . .		

#### 4.5 Completud de S3 respecto a la consecuencia

Vamos a dar dos demostraciones de la completud de S3 en este apartado. La primera de ellas se basa en la completud de B3 y se realiza mostrando que, dada una deducción en el cálculo de árboles, hay una deducción correspondiente en S3<sup>(11)</sup>. La demostración se hace por medios constructivos, indicando el procedimiento para realizar la deducción en S3 que corresponde a una deducción dada en B3. Es interesante el hecho de que a lo largo de esta demostración se pone de manifiesto la necesidad de la regla de corte, ya sea como regla primitiva o derivada. Esta es la razón de que hayamos introducido la regla de separación entre las reglas primitivas de S3, aunque posteriormente demostramos su eliminabilidad. En la segunda demostración de completud de S3, realizada tomando como base la noción de propiedad trivalente de consistencia analítica, vuelve a utilizarse la regla de corte. La primera demostración nos sirve a la vez para probar, en parte, la equivalencia de S3 con B3. En concreto, mostramos que las deducciones en B3 son un subconjunto de las deducciones en S3 o, mejor dicho, que a cada deducción en B3 le corresponde una deducción en S3 que demuestra lo mismo. Posteriormente, al extender el Hauptsatz a B3, mostraremos la relación inversa. Con esto quedará demostrada la equivalencia de ambos cálculos y a la vez, en base a resultados obtenidos por Blau<sup>(12)</sup>, la equivalencia de S3 con el resto de los cálculos adecuados para L3. Estos resultados son triviales desde un punto de vista puramente semántico, puesto que dados dos cálculos adecuados para una lógica, es claro que las clases de los pares  $(M, F)$ , tales que F es deducible de M en cada uno de los cálculos, coinciden. Sin embargo, en tanto en cuanto la equivalencia entre los distintos cálculos se establece por me-

dios sintácticos, indicando los procedimientos de construcción de deducciones en un cálculo a partir de deducciones ya dadas en otro cálculo distan de ser triviales, como veremos luego.

Como hemos dicho, la segunda prueba de completud se basa en la noción de propiedad de consistencia. Constituye una nueva aplicación de la teoría que hemos desarrollado en el capítulo segundo.

En las dos demostraciones utilizamos una serie de reglas de deducción derivadas, que demostraremos primero de todo en dos lemas. Apoyándonos en estos lemas desarrollaremos posteriormente las pruebas de completud en sentido estricto.

El primero de los dos lemas que hemos de considerar afirma la aceptabilidad de ciertas reglas de deducción que podemos considerar inversiones de reglas originales de S3. Se trata de las reglas  $\overline{RS\ 2}$  -  $\overline{RS\ 13}$ , en las que, en general, la premisa viene dada por la conclusión de una regla primitiva de S3 y la conclusión es la premisa o premisas de estas reglas primitivas. El segundo lema muestra la admisibilidad de reglas de deducción inspiradas en el cálculo B3. En todas ellas se muestra que, dada una deducción en S3 en la que aparezca un seciente en cuyo antecedente hay una fórmula y su sucesor en una rama de un árbol lógico, también puede pertenecer a esa deducción un seciente en cuyo antecedente aparece sólo la fórmula en cuestión y no su sucesor. Este lema es la base para pasar de deducciones en B3 a deducciones en S3. La justificación de este paso se dará en el lema 4.5.3, utilizando un razonamiento similar al de la prueba del lema 2.5.1.

#### Lema 4.5.1

Las siguientes reglas  $\overline{RS\ 2}$  -  $\overline{RS\ 13}$  son admisibles

en S3:

$$\overline{\text{RS 2}} \quad \frac{H, \neg F \rightarrow H}{H \rightarrow H, F}$$

$$\overline{\text{RS 3}} \quad \frac{H, \neg\neg F \rightarrow H}{H, F \rightarrow H}$$

$$\overline{\text{RS 4}} \quad \frac{H \rightarrow N, \neg\neg F}{H \rightarrow N, F}$$

$$\overline{\text{RS 5}} \quad \frac{H, G \wedge H \rightarrow H}{H, G, H \rightarrow H}$$

$$\overline{\text{RS 6}} \quad \frac{H \rightarrow H, F \wedge G}{H \rightarrow N, F}$$

$$(H \rightarrow N, G)$$

$$\overline{\text{RS 7}} \quad \frac{H, -(F \wedge G) \rightarrow H}{H, -F \rightarrow H}$$

$$(H, -G \rightarrow H)$$

$$\overline{\text{RS 8}} \quad \frac{H \rightarrow N, -(F \wedge G)}{H \rightarrow N, -F, -G}$$

$$\overline{\text{RS 9}} \quad \frac{H, \wedge X F[X] \rightarrow H}{H, F[\ulcorner P_j^1 \urcorner] \rightarrow H} \quad (*)$$

$$\overline{\text{RS 10}} \quad \frac{H \rightarrow H, \wedge X F[X]}{H \rightarrow N, F[A]}$$

$$\overline{\text{RS 11}} \quad \frac{H, -\wedge X F[X] \rightarrow H}{H, -F[A] \rightarrow H}$$

$$\overline{\text{RS 12}} \quad \frac{H \rightarrow N, -\wedge X F[X]}{H \rightarrow N, -F[\ulcorner P_j^1 \urcorner]} \quad (*)$$

(\*) bajo el supuesto de que  $P_j^1$  no aparece en la conclusión.

**Demostración:** En todos los casos se trata de demostraciones por inducción sobre la longitud de la demostración de la premisa de la regla en S3. Señalamos con 1. la base de inducción y con 2. el paso de inducción.

$\overline{\text{RS 2}}$ : 1. Si la premisa es un axioma, entonces puede ocurrir uno de los siguientes casos:

1.1 N es el conjunto  $\{H', \neg F\}$ . Entonces del axioma

$$H, F \rightarrow F, H'$$

se sigue, por RS 1,

$$M \rightarrow F, N', \neg F$$

es decir,

$$M \rightarrow N, F$$

1.2 Si  $M$  y  $N$  contienen ambos una fórmula  $G$ , entonces el secuento  $M \rightarrow N, F$  es un axioma.

En lo que sigue, diremos que una regla se aplica via la fórmula  $F$  o las fórmulas  $F, G$  o que  $F$  ( $F$  y  $G$ ) son las partes principales de la aplicación de una regla cuando la conclusión de la regla se hay obtenido por una transformación de la fórmula  $F$  o de una subfórmula de  $F$  (o de  $F$  y  $G$ ), que aparece en la conclusión. Podemos dar el paso de inducción como sigue:

2. Si  $M, \neg F \rightarrow N$  se ha obtenido por medio de una regla, entonces vale uno de los casos siguientes:

2.1  $F$  es la parte principal de la regla. En ese caso la premisa se ha obtenido de  $M \rightarrow N, F$  por medio de RS 2, y no hay nada que demostrar.

2.2 Una fórmula de  $M$  o  $N$  es parte principal. Entonces, por supuesto de inducción y el uso de la misma regla por la que se ha obtenido la premisa, se sigue la conclusión de RS 1.

Antes de entrar en la demostración de las reglas  $\overline{RS\ 3}$  y  $\overline{RS\ 4}$  hay que hacer notar que las reglas

$$\frac{M, F \rightarrow N}{M, \neg\neg F \quad N}$$

$$\frac{M \rightarrow N, F}{M \rightarrow N, \neg\neg F}$$

son admisibles en  $S_3$ , como consecuencia inmediata de RS 1 y RS 2

$\overline{RS\ 3}$ : si la premisa es un axioma entonces vale uno de los siguientes casos:

1.1  $N$  es el conjunto  $\{N', \neg\neg F\}$ . Entonces del axioma

$$M, F \rightarrow N', F$$

se sigue por RS 4 o por una de las reglas que hemos citado inmediatamente arriba

$$M, F \rightarrow N', \exists F$$

es decir, la conclusión  $M, F \rightarrow N$ .

1.2 Si tanto M como N contienen un enunciado G entonces  $M, F \rightarrow N$  es un axioma.

2. Si la premisa se ha obtenido por medio de una regla, entonces vale uno de los siguientes casos:

2.1 Si la regla se ha aplicado via  $\exists F$ , entonces la premisa se ha obtenido por medio de RS 3 o por una de las reglas derivadas que acabamos de citar, y no hay nada que demostrar.

2.2 Si la regla se ha aplicado via una fórmula de  $\exists$  o  $\forall$ , entonces, por supuesto de inducción, y por la aplicación de la misma regla a través de la cual se ha obtenido la premisa, se sigue la conclusión de RS 3.

RS 4: La demostración es muy similar al caso anterior.

RS 6: Si la premisa es un axioma, entonces vale uno de los casos siguientes:

1.1 M es el conjunto  $\{N', (G \wedge H)\}$ . Entonces, de los axiomas  $M, G, H \rightarrow G, N'$  y  $M, G, H \rightarrow H, N'$  se sigue, por RS 7, la conclusión de RS 6,  $M, G, H \rightarrow N$ .

1.2 Si M y N contienen ambos una fórmula F, entonces la conclusión es un axioma.

2. El paso de inducción es análogo al caso de RS 2

RS 7: 1. Si la premisa es un axioma, entonces ocurre uno de los casos siguientes:

1.1 M es el conjunto  $\{N', F \wedge G\}$ . Entonces del axioma  $N', F, G \rightarrow F, N$  se sigue, por RS 6,  $M \rightarrow N, F$ . Del mismo modo, del axioma

$M', F, G \rightarrow G, H$  se sigue, por la misma regla,  $H \rightarrow N, G$ .

1.2. Como en la regla anterior.

2. Como en la regla anterior.

RS 8: 1. Si la premisa es un axioma entonces,

1.1 Si  $N$  es el conjunto  $\{M', -(F \wedge G)\}$ , entonces del axioma

$M, -F \rightarrow N', -F, -G$  (o del axioma  $M, -G \rightarrow N', -F, -G$ ) se sigue, por RS 9, la conclusión  $M, -F \rightarrow N$  (o  $M, -G \rightarrow N$ ).

1.2 Como en las reglas anteriores.

2. Como en las reglas anteriores.

RS 9: La demostración es como en las reglas ante-

rioras, teniendo en cuenta que el caso 1.1 se plantea de la siguiente manera: 1.1 Si  $M$  es el conjunto  $M', -(F \wedge G)$ , entonces de los axiomas  $M', -F \rightarrow -F, -G, N$  y  $M', -G, \rightarrow -F, -G, N$ , se sigue la afirmación.

RS 10: La demostración es similar a la de las re-

glas anteriores, salvo en el caso del punto 1.1: Si  $N$  es el conjunto  $\{M', \wedge X F[X]\}$ , entonces del axioma  $M, F[\neg P_j^1] \rightarrow N', F[\neg P_j^1] (\wedge)$  donde  $P_j^1$  no aparece en  $M, F, N'$  se sigue, por RS 11,  $M, F[\neg P_j^1] \rightarrow N$ .

RS 13: 1. 1.1. Si  $M$  es el conjunto  $M', -\wedge X F[X]$ ,

entonces del axioma  $M', -F[\neg P_j^1] \rightarrow N, -F[\neg P_j^1]$ , donde  $P_j^1$  no aparece en  $M', F, N$ , se sigue, por RS 12, la afirmación. Los casos 1.2

y 2. se tratan de modo similar a las demostraciones anteriores.

RS 12 : 1. La premisa es un axioma. Entonces

1.1 si  $M$  es el conjunto  $\{M', -\wedge X F[X]\}$ , del axioma  $M, -F[A] \rightarrow -F[A], N$  se sigue, por RS 13,  $M, -F[A] \rightarrow -\wedge X F[X]$ .

1.2 Si tanto  $M$  como  $N$  contienen una fórmula  $G$ , entonces la conclusión es también un axioma.

2. El primer caso que consideramos es aquel en que la premisa de la regla aparece en una deducción en S3 como regul-

tado de la aplicación de la regla RS 12.

2.1 La premisa se ha obtenido por medio de la regla RS 12 de un secuyente  $M, -F[\neg P_i^1] \rightarrow N$ . Si la descripción  $\Lambda$  que aparece en la conclusión de la regla que discutimos es  $\neg P_i^1$ , entonces no hay nada que demostrar. Supongamos ahora que  $\Lambda \neq \neg P_i^1$ . Sin restricción de la generalidad podemos suponer que  $\Lambda \neq \neg P_j^1$ . Dado que la premisa de la regla se ha obtenido por una aplicación de la regla RS 12, existe una deducción en S3 de un secuyente  $M, -F[\neg P_i^1] \rightarrow N$  donde  $P_i^1$  no aparece en  $M, F, N$ . Entonces podemos afirmar lo siguiente:

(A) Bajo las condiciones que acabamos de indicar existe también una S3-deducción de  $M, -F[\neg P_j^1] \rightarrow N$  (es decir, un secuyente en el que cada aparición de  $P_i^1$  ha sido sustituida por una aparición de  $P_j^1$ ) cambiando cada aparición de  $P_i^1$  por una aparición de  $P_j^1$  en la demostración del secuyente  $M, -F[\neg P_i^1] \rightarrow N$  y escogiendo cada parámetro de predicado  $P_h^1$  que sea necesario de tal manera que  $P_h^1$  sea distinto de  $P_i^1$  y de  $P_j^1$ .

Prueba de la afirmación (A): Sea  $M$  una fórmula o clase de fórmulas. Con  $(M)P_k^1/P_l^1$  indicamos el resultado de la sustitución de cada aparición de  $P_k^1$  en  $M$  por una aparición de  $P_l^1$ .

En los supuestos de la afirmación que tratamos de probar, vale que  $(M)P_i^1/P_j^1 = M$  y que  $(M)P_i^1/P_j^1 = M$ , puesto que  $P_i^1$  no aparece en  $M$  ni en  $N$ . Por otro lado,  $(-F[\neg P_i^1])P_i^1/P_j^1 = -F[\neg P_j^1]$ , puesto que  $P_i^1$  no aparece tampoco en  $F$ . Resulta entonces que

i. Si  $M, -F[\neg P_i^1] \rightarrow N$  es un axioma, entonces  $M, -F[\neg P_j^1] \rightarrow N$  es un axioma.

ii. i Si  $M, -F[\neg P_i^1] \rightarrow N$  se ha obtenido por medio de una regla distinta de RS 11 y RS 12, teniendo como premisa un secuyente  $M'' \rightarrow N''$  (o dos secuyentes  $M''_1 \rightarrow N''_1$  y  $M''_2 \rightarrow N''_2$ ) y como conclusión un secuyente  $M' \rightarrow N'$ , entonces, por supuesto de inducción  $(M'')P_i^1/P_j^1 \rightarrow$   
 $(M'')P_i^1/P_j^1$  es demostrable en S3 (el caso de dos premisas es similar).  
 Por una aplicación de la regla en cuestión a  $(M'')P_i^1/P_j^1 \rightarrow (M'')P_i^1/P_j^1$

se obtiene la conclusión  $(M^{\wedge})_{P_i^1/P_j^1} \rightarrow (N^{\wedge})_{P_i^1/P_j^1}$ , es decir,  
 $M, \neg F[P_j^1] \rightarrow N$ .

ii,ii. En el caso de que la regla por la que se ha obtenido  $M, \neg F[P_i^1] \rightarrow N$  sea RS 11 o RS 12, entonces hay que tener en cuenta que  $\neg F[P_i^1]$  no es desde luego, la parte principal de la aplicación de la regla. Si hay una expresión como  $\wedge XF[X]$  (o  $\neg \wedge XF[X]$ ) en  $N^{\wedge}$  que se ha obtenido a partir de  $F[P_h^1]$  (o en  $M^{\wedge}$ , que se ha obtenido de  $\neg F[P_h^1]$ ) entonces puede escogerse  $P_h^1$  - puesto que  $P_h^1$  no aparece en  $M, N, F[P_i^1]$  - de tal manera que  $P_h^1$  sea diferente de  $P_j^1$ . Entonces  $(M'' \rightarrow N'', F[P_h^1])_{P_i^1/P_j^1} \equiv (M'')_{P_i^1/P_j^1} \rightarrow (N'')$   
 $P_i^1/P_j^1, F[P_h^1]$  y por la regla RS 11 se sigue

$$(M'')_{P_i^1/P_j^1} \rightarrow (N'')_{P_i^1/P_j^1}, \wedge XF[X]$$

es decir,  
 $M, \neg F[P_j^1] \rightarrow N$ .

Lo mismo vale para el caso en que en  $M^{\wedge}$  aparezca  $\neg \wedge XF[X]$ . Con esto queda demostrado el paso de inducción, la afirmación (A) y el punto 2.1 de la demostración de la admisibilidad de RS 12.

2.2. Si  $\neg \wedge XF[X]$  no es la parte principal de la aplicación de la regla por medio de la cual se ha obtenido la premisa de la regla RS 12, entonces la conclusión se sigue del supuesto de inducción y la aplicación de la regla correspondiente.

RS 11: 1. 1.1 Si  $M$  es el conjunto  $M', \wedge XF[X]$ , entonces del axioma  $M', F[A] \rightarrow N, F[A]$  se sigue la conclusión por RS 10.

1.2 Si  $M$  y  $N$  contienen ambos una fórmula  $G$ , entonces la conclusión es un axioma.

2. El paso de inducción es similar al de la regla anterior.

#### Lema 4.5.2

Las siguientes reglas RS B1 - RS A2 son admisibles

en S3:

$$\text{RS B1} \quad \frac{H, \neg\neg F, F \rightarrow N}{H, \neg\neg F \rightarrow N}$$

$$\text{RS B2} \quad \frac{H, \neg\neg F, \neg F \rightarrow H}{H, \neg\neg F \rightarrow H}$$

$$\text{RS B3} \quad \frac{H, F \wedge G, F, G \rightarrow H}{H, F \wedge G \rightarrow H}$$

$$\text{RS B4} \quad \frac{H, \neg(F \wedge G), \neg F, \neg G \rightarrow H}{H, \neg(F \wedge G) \rightarrow H}$$

$$\text{RS B5} \quad \frac{H, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow N \quad H, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow H}{H, \neg(F \wedge G) \rightarrow H}$$

$$\text{RS B6} \quad \frac{H, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow N \quad H, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow H}{H, \neg(F \wedge G) \rightarrow H}$$

$$\text{RS B7} \quad \frac{H, \wedge X F[X], F[A] \rightarrow N}{H, \wedge X F[X] \rightarrow N}$$

$$\text{RS B8} \quad \frac{H, \neg \wedge X F[X], \neg F[A] \rightarrow H}{H, \neg \wedge X F[X] \rightarrow H}$$

$$\text{RS B9} \quad \frac{H, \neg \wedge X F[X], \neg F[P_j^1] \rightarrow H}{H, \neg \wedge X F[X] \rightarrow H} (*)$$

$$\text{RS B10} \quad \frac{H, \neg \wedge X F[X], \neg F[P_j^1] \rightarrow H}{H, \neg \wedge X F[X] \rightarrow H} (*)$$

(\*) bajo el supuesto de que  $P_j^1$  no aparezca en la conclusión.

$$\text{RS A1} \quad \frac{H \rightarrow N}{H, G \rightarrow N}$$

$$\text{RS A2} \quad \frac{H \rightarrow H}{H \rightarrow H, G}$$

Demostración:

RS B1: Se sigue inmediatamente de RS 3, RS 1 y

RS 2.

RS B2: Supuesto que en una demostración en S3 aparece un seciente de la misma forma que la premisa, entonces también pueden aparecer en esa demostración los siguientes secientes:

1.  $H, \neg\neg F, \neg F \rightarrow H$                       Supuesto

2.  $M \rightarrow \neg \neg F, F, N$  RS 1,1;  $\overline{RS 4}$
3.  $M \rightarrow F, N$   $\overline{RS 4}, 2$
4.  $M, \neg F \rightarrow N$  RS 2, 3

RS B3: La conclusión se sigue de la premisa por RS 6.

RS B4: Si la premisa de la regla aparece en una S3-demostración, también pueden aparecer en ella los siguientes secuentes:

1.  $M, \neg (F \wedge G), \neg F, \neg G \rightarrow N$  Supuesto
2.  $M, \neg (F \wedge G) \rightarrow N, \neg F, \neg G$   $\overline{RS 2}, 1$
3.  $M, \neg (F \wedge G) \rightarrow N, \neg (F \wedge G)$  RS 9, 2
4.  $M, \neg (F \wedge G) \rightarrow N$  RS 2, 3

RS B5: la conclusión se sigue de la premisa por RS 8

RS B6: Si la premisa de la regla aparece en una S3-demostración, entonces también pueden aparecer en ella los siguientes secuentes:

1.  $M, \neg (F \wedge G), \neg F \rightarrow N$  Supuesto
2.  $M, \neg (F \wedge G), \neg G \rightarrow N$  Supuesto
3.  $M, \neg (F \wedge G) \rightarrow N, F$   $\overline{RS 2}, 1$
4.  $M, \neg (F \wedge G) \rightarrow N, G$   $\overline{RS 2}, 2$
5.  $M, \neg (F \wedge G) \rightarrow N, F \wedge G$  RS 7
6.  $M, \neg (F \wedge G) \rightarrow N$  RS 2

RS B7: De la premisa se sigue la conclusión por RS 10.

RS B8: Si la premisa aparece en una S3-demostración, entonces los siguientes secuentes pueden formar parte de ella:

1.  $M, \neg \neg A[XF[X]], \neg \neg F[A] \rightarrow N$  Supuesto
2.  $M, \neg \neg A[XF[X]] \rightarrow N, \neg F[A]$   $\overline{RS 2}, 1$

3.  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow N, \neg \wedge X F[X]$  RS 13, 2

4.  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow N$  RS 2, 3

RS B9: La conclusión se sigue de la premisa según

RS 12

RS B10: Si la premisa aparece en una S3-demonstración, entonces los siguientes secuentes pueden aparecer en ella:

1.  $M, \neg \wedge X F[X], \neg F[\ulcorner P_j^1 \urcorner] \rightarrow N$  Supuesto

2.  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow N, F[\ulcorner P_j^1 \urcorner]$  RS 2, 1

3.  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow N, \wedge X F[X]$  RS 11, 2

4.  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow N$  RS 2, 3

RS A1: demostración según la longitud de la S3-demonstración de la premisa: 1. Si  $M \rightarrow N$  es un axioma, también lo es  $M, G \rightarrow N$ .

2:2.1 Toda aplicación de una regla, fuera de las reglas RS 11 y RS 12, es también una aplicación de la misma regla cuando premisas y conclusión se amplían en la fórmula  $G$ .

2.2 Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido de  $M \rightarrow N', F[\ulcorner P_j^1 \urcorner]$  por una aplicación de la regla RS 11, entonces se puede sustituir cada aparición de  $P_j^1$  en la demostración por una aparición de un parámetro distinto de todos los de la demostración y de  $G$ . Entonces, por supuesto de inducción, vale que  $M, G \rightarrow N', F[\ulcorner P_i^1 \urcorner]$ , donde  $P_i^1$  es el nuevo parámetro, es un secuyente de una S3-demonstración, y por RS 11 se sigue la conclusión. Lo mismo vale para el caso en que la premisa se haya obtenido por una aplicación de la regla RS 12.

RS A2: La demostración es similar al caso anterior.

Pasamos ahora a mostrar la relación entre deducciones en B3 y deducciones en S3, como paso previo para dar la primera prueba de completud de S3.

Lema 4.5.3

Sea  $B_{M^0, \neg F}$  una deducción de  $F$  a partir del conjunto  $M^0$  de supuestos en el cálculo B3, siendo  $M^0$  un conjunto finito. Sea  $\underline{P}$  un punto de  $B_{M^0, \neg F}$  y  $W_{\underline{P}}$  el conjunto de los predecesores de  $\underline{P}$  en  $B_{M^0, \neg F}$ . Bajo estos supuestos, se cumple que para todo punto  $\underline{P}$  del árbol finito cerrado  $B_{M^0, \neg F}$  es demostrable en S3 el seciente  $M^0, W_{\underline{P}} \rightarrow$ .

Demostración: Por inducción fuerte según el número de sucesores de  $\underline{P}$  en  $B_{M^0, \neg F}$ .

Base de inducción:  $n = 0$ . En este caso  $\underline{P}$  es un punto final. Entonces  $W_{\underline{P}}$  es el conjunto  $\{M^0, F, \neg F\}$  o  $\{M^0, F, -F\}$ . Del axioma  $M^0, F \rightarrow F$  se sigue, por RS 2 y RS 5,  $M^0, F, \neg F \rightarrow$  y  $M^0, F, -F \rightarrow$ .

Paso de inducción: Supuesto de inducción: Si el punto  $\underline{Q}$  de  $B_{M^0, \neg F}$  tiene menos sucesores que  $\underline{P}$ , entonces es demostrable en S3 que  $M^0, W_{\underline{Q}} \rightarrow$ .

1. A  $\underline{P}$  se le ha añadido un supuesto  $G$ ,  $G \in M^0$ . Por supuesto de inducción,  $M^0, W_{\underline{P}}, G \rightarrow$  es S3-demostrable. Esto es lo mismo que decir que  $M^0, W_{\underline{P}} \rightarrow$  es S3-demostrable.

2. A  $\underline{P}$  se le ha añadido un sucesor  $H$  o dos sucesores  $H_1$  y  $H_2$  por medio de una aplicación de una de las reglas RB 1 - RB 10. Entonces sea  $M = M^0 \cup (W_{\underline{P}} \setminus \{Q\})$ , donde  $\underline{Q}$  es un punto de  $W_{\underline{P}}$ , a determinar en cada caso.

2.1 Si  $H$  se ha obtenido por RB 1, entonces  $H$  es  $F$  y hay un  $\underline{Q} \in W_{\underline{P}}$  tal que  $\underline{Q} \equiv \neg \neg F$ . Entonces, por supuesto de inducción,  $M, \neg \neg F, F \rightarrow$  es S3-demostrable. RS B1,  $M, \neg \neg F \rightarrow$ , es decir,  $M^0, W_{\underline{P}} \rightarrow$  es S3-demostrable.

2.2 Si  $H$  se ha obtenido por RB 2, hay un  $\underline{Q}$  tal que  $\underline{Q} \in W_{\underline{P}}$  y  $\underline{Q} \equiv \neg \neg F$ . Entonces, por supuesto de inducción,  $M, \neg \neg F, F \rightarrow$

es S3-demostrable. Por RS B2,  $M, \neg\neg F \rightarrow$  es S3-demostrable.

2.3 Si  $H$  es  $F$  o es  $G$  y se ha obtenido por RB 2, hay un  $Q$  en  $W_P$  tal que  $Q$  es  $F \wedge G$ . Si  $H$  es  $F$ , entonces, por supuesto de inducción,  $M, F \wedge G, F \rightarrow$  es S3-demostrable. Por RS A1 y RS B3  $M, F \wedge G \rightarrow$  es S3-demostrable. Un razonamiento similar vale para el caso en que  $H$  es  $G$ .

2.4 Sea  $H$   $\neg F$  o  $\neg G$ , habiéndose obtenido por RB 4. Hay un  $Q$  en  $W_P$  tal que  $Q$  es  $\neg(F \wedge G)$ . Por supuesto de inducción  $M, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow$  es S3-demostrable o  $M, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow$  es S3-demostrable. Por RS A1 y RS B4  $M, \neg(F \wedge G) \rightarrow$  es S3-demostrable.

2.5 Sean  $H_1$  y  $H_2$  las fórmulas  $\neg F$  y  $\neg G$ , respectivamente. Supuesto que se han obtenido por RB 5, existe un  $Q$  en  $W_P$  que es de la forma  $\neg(F \wedge G)$ . Por supuesto de inducción,  $M, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow$  y  $M, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow$  son S3-demostrables.  $M, \neg(F \wedge G) \rightarrow$  es S3-demostrable por RS B5.

2.6 Si  $H_1$  y  $H_2$  son  $\neg F$  y  $\neg G$  habiéndose obtenido por RB 6, existe un punto  $Q$  en  $W_P$  de la forma  $\neg(F \wedge G)$ . Por supuesto de inducción,  $M, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow$  y  $M, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow$  son S3-demostrables. Por RS B6,  $M, \neg(F \wedge G) \rightarrow$  es S3-demostrable.

2.7 Si  $H$  es  $F[A]$ , entonces hay un  $Q$  en  $W_P$  de la forma  $\wedge X F[X]$ , si  $H$  se ha obtenido por B7. Por supuesto de inducción,  $M, \wedge X F[X], F[A] \rightarrow$  es S3-demostrable, y por RS B7 lo es  $M, \wedge X F[X] \rightarrow$ .

2.8 Si  $H$  es  $\neg F[A]$ , habiéndose obtenido por RB 8, entonces hay un  $Q$  de la forma  $\neg \wedge X F[X]$  en  $W_P$ . Entonces, por supuesto de inducción,  $M, \neg \wedge X F[X], \neg F[A] \rightarrow$  es S3-demostrable. Por RS B8, lo es también  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow$ .

2.9 Si  $H$  es  $\neg F[P_j^1]$  y se ha obtenido por RB 9, entonces hay un  $Q$  de la forma  $\neg \wedge X F[X]$  en  $W_P$ . Por supuesto de in-

ducción,  $M, \neg \wedge X F[X], \neg F[P_j^1] \rightarrow$  es S3-demostrable y por RS B9 lo es también  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow$ .

2.10 Si  $H$  es  $\neg F[P_j^1]$  y se ha obtenido por RB 10, entonces hay un  $Q$  en  $W_P$  de la forma  $\neg \wedge X F[X]$ . Por supuesto de inducción,  $M, \neg \wedge X F[X], \neg F[P_j^1] \rightarrow$  es S3-demostrable y por RS B10 lo es también  $M, \neg \wedge X F[X] \rightarrow$ .

3. Si el sucesor de  $P$  pertenece a  $B_{M^0, \neg F}$  por una de las reglas RB 11 - RB 14, entonces, por supuesto de inducción,  $M^0, W_P, H_i \rightarrow$  es S3-demostrable. Por las reglas  $RS_{=1} - RS_{\neq 1}$ ,  $M^0, W_P \rightarrow H_i$  es S3-demostrable. Por la regla de separación,  $M^0, W_P \rightarrow$  es S3-demostrable. q.e.d.

La demostración de la completud de S3 es ahora muy sencilla. Partiendo de la completud de B3, demostramos que si un enunciado es consecuencia semántica de una clase de enunciados, entonces es deducible en B3 y, por el lema que acabamos de demostrar, en S3.

Proposición 4.5.4 Completud (restringida) de B3

Si  $M^*$  es un conjunto de fórmulas paraméricamente limitado, posiblemente vacío, y  $F$  una fórmula de  $L3$ , entonces

$$M^* \Vdash_{L3} F \Rightarrow M^* \Vdash_{S3} F.$$

Demostración: Si  $M^* \Vdash_{L3} F$ , entonces por la completud de B3 (prop. 2.4.5),  $M^* \Vdash_{B3} F$ . Por la definición de deducción en B3 se sigue que hay un árbol cerrado finito con supuestos  $M^0, \neg F$  donde  $M^0 \subseteq M$ . Por el lema 4.5.3  $M^0, W_{\neg F} \rightarrow$  es S3-demostrable, es decir  $M^0, \neg F \rightarrow$  es S3-demostrable. Por lo tanto, por RS 2,  $M^0 \rightarrow F$  es S3-demostrable y por la definición de deducción en S3,  $M^* \Vdash_{S3} F$ . q.e.d.

Proposición 4.5.5. Completud (general) de S3

Sea  $M$  un conjunto de fórmulas, posiblemente vacío, y  $F$  una fórmula de L3. Entonces

$$M \Vdash_{L3A_1} F \Rightarrow M \Vdash_{S3} F$$

Demostración: Como en la proposición anterior, utilizando la completud general de B3.

Proposición 4.5.6 Adecuación de S3

Si  $M^*$  es un conjunto de fórmulas paramétricamente limitado y  $F$  es una fórmula de L3, entonces

$$M^* \Vdash_{L3} F \Leftrightarrow M^* \Vdash_{S3} F.$$

Demostración: La proposición es consecuencia inmediata de la completud restringida y la corrección de S3. (proposiciones 4.5.5 y 4.3.2).

Nos volvemos ahora a la segunda demostración de la completud de S3. En este caso nos basamos en la noción de propiedad trivalente de consistencia analítica. Como en el caso de B3, demostramos que la demostrabilidad de ciertos secuentes o, mejor, su no demostrabilidad en S3, es una propiedad de consistencia. De ahí se sigue la completud de S3. Aunque el contenido final de la prueba no difiere, naturalmente, de lo que afirma la anterior prueba de completud, juzgo interesante esta demostración en sí misma, como aplicación de la idea de propiedad de consistencia a un cálculo nuevo.

Definimos la propiedad  $E_5$  como sigue: Si  $M$  es un conjunto de fórmulas de L3,  $M \in E_5$  sii para todo subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  no hay una S3-demostración del seciente  $M^0 \rightarrow$ . Vamos a demostrar a continuación que  $E_5$  es una propiedad trivalente de consistencia analítica. Sin embargo, en vez de probar que  $E_5$

cumple las condiciones de definición de las propiedades de consistencia vamos a probar que el complemento de  $E_5$ , es decir, la clase de conjuntos de fórmulas tales que tienen un subconjunto finito  $M^0$  con un secuyente  $M^0 \rightarrow$  que es S3-demostrable, cumple las condiciones (i') - (vi') de la definición de propiedad de consistencia.

Lema 4.5.7

Sea  $E_5$  la propiedad de conjuntos de fórmulas  $M$  definida por:  $M \in E_5$  sii para todo subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  no hay un secuyente  $M^0 \rightarrow$  demostrable en S3. Entonces  $E_5$  es una propiedad trivalente de consistencia analítica.

Demostración: (i') Si  $M$  contiene una fórmula y su negación fuerte o débil, entonces hay una S3-demostración de  $M^0 \rightarrow$ , para un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$ . En concreto, la siguiente:

- |                              |         |
|------------------------------|---------|
| 1. $F, \neg F \rightarrow F$ | Axioma  |
| 2. $F, \neg F \rightarrow$   | RS 2, 1 |

o bien

- |                          |         |
|--------------------------|---------|
| 1. $F, -F \rightarrow F$ | Axioma  |
| 2. $F, -F \rightarrow$   | RS 5, 1 |

Es claro que los conjuntos  $\{F, \neg F\}$  y  $\{F, -F\}$  son subconjuntos finitos de  $M$ . Luego se cumple la condición (i'): Si hay una fórmula  $F$  en  $M$  tal que ella y su negación fuerte o débil aparece en  $M$ , entonces hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que el secuyente  $M^0 \rightarrow$  es demostrable en S3, es decir,  $M \notin E_5$ .

(ii'): Si  $\{M, \alpha, \alpha_1\} \notin E_5$  o  $\{M, \alpha, \alpha_2\} \notin E_5$ , entonces sea  $M^0$  un subconjunto finito de  $M$  tal que los secuyentes  $M, \alpha, \alpha_1 \rightarrow$  o  $M^0, \alpha, \alpha_2 \rightarrow$  son S3-demostrables. Entonces se cumple que

(1) Si  $\alpha$  es  $\exists\exists F$ , entonces

1.  $M^0, \exists\exists F, F \rightarrow$  Supuesto
2.  $M^0, \exists\exists F \rightarrow$  RS B2

(2) Si  $\alpha$  es  $(F \wedge G)$ , entonces

1.  $M^0, F \wedge G, F \rightarrow$  Supuesto
- (1'.  $M^0, F \wedge G, G \rightarrow$  Supuesto)
2.  $M^0, F \wedge G, F, G \rightarrow$  RS A1, 1 o 1'
3.  $M^0, F \wedge G \rightarrow$  RS G, 2

(3) Si  $\alpha$  es  $\neg(F \wedge G)$ , entonces

1.  $M^0, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow$  Supuesto
- (1'.  $M^0, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow$  Supuesto)
2.  $M^0, \neg(F \wedge G), \neg F, \neg G \rightarrow$  RS A1, 1 o 1'
3.  $M^0, \neg(F \wedge G) \rightarrow$  RS B4

Por lo tanto, si  $M^0, \alpha, \alpha_1 \rightarrow$  es S3-demostrable o lo es  $M^0, \alpha, \alpha_2$  entonces lo es también  $M^0, \alpha \rightarrow$ . En consecuencia, se cumple la condición (ii').

(iii'): Si  $\{M, b, b_1\} \notin E_5$  y  $\{M, b, b_2\} \notin E_5$ , entonces sea  $M^0$  un subconjunto finito de  $M$  tal que los secuentes  $M^0, b, b_1 \rightarrow$  y  $M^0, b, b_2 \rightarrow$  son S3-demostrables. Entonces, los secuentes

- (1)  $M^0, \exists\exists F, \exists F \rightarrow$
- o (2)  $M, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow$
- y (2')  $M, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow$
- o bien (3)  $M, \neg(F \wedge G), \neg F \rightarrow$
- y (3')  $M, \neg(F \wedge G), \neg G \rightarrow$

son demostrables en S3. Entonces, por RS B2, RS B5 y RS B6, el secuyente  $M^0, b \rightarrow$  es S3-demostrable.

(iv'): Si  $\{M, c, c[\Lambda]\} \notin E_5$ , entonces sea  $M^0$  un subconjunto finito de  $M$ , tal que el secuyente  $M^0, c, c[\Lambda] \rightarrow$  sea S3-demostrable. Entonces, los secuentes

$$(1) M^0, \wedge x F[x], F[A] \rightarrow$$

o

$$(2) M^0, \neg \wedge x F[x], \neg F[A] \rightarrow$$

son S3-demostrables. Por RS B7 y RS B8,  $M^0, c, \rightarrow$  es S3-demostrable.

(v'): Si  $\{M, d, d \in P_j^1\} \notin E_5$ , entonces sea  $M^0$  un subconjunto finito de  $M$ , tal que el seciente  $M^0, d, d \in P_j^1 \rightarrow$  sea S3-demostrable. Supuesto que  $P_j^1$  no aparece en  $M^0, d$ , los secientes

$$(1) M^0, \neg \wedge x F[x], \neg F[P_j^1] \rightarrow$$

o

$$(2) M^0, \neg \wedge x F[x], \neg F[P_j^1] \rightarrow$$

son S3-demostrables. Por RS B9 y RS B 10,  $M, d \rightarrow$  es S3-demostrable, es decir, si  $\{M, d, d \in P_j^1\} \notin E_5$ , entonces  $\{M, d\} \notin E_5$ , como exige la condición (v').

(vi'): Si  $\{M, H_i\} \notin E_5$ , para  $1 \leq i \leq 4$ , entonces sea  $M^0$  un subconjunto finito tal que existe una S3-demostración para

$$1. M^0, H_1 \rightarrow .$$

Entonces se puede hacer la siguiente S3-demostración:

$$2. M^0 \rightarrow H_1$$

$$RS_{=1} - RS_{\neq 1}$$

$$3. H^0 \rightarrow$$

Regla de separación

En consecuencia, de la S3-demostrabilidad de  $M^0, H_1 \rightarrow$  se sigue la demostrabilidad de  $M^0 \rightarrow$ . Por lo tanto, se cumple la condición (vi). q.e.d

Del lema se sigue la completud restringida de S3 como sigue:

Proposición 4.5.8. Completud (restringida) de S3  
Sea  $M^*$  un conjunto de fórmulas parametricamente limitado, posiblemente vacío, y  $F$  una fórmula de  $L_3$ . Entonces se cumple que

$$M^* \Vdash_{L3} F \Rightarrow M^* \Vdash_{S3} F$$

Demostración: Si  $M^* \Vdash_{L3} F$ , entonces  $\{M^*, \neg F\}$  es L3-insatisfacible. Por el Principio de Unificación,  $\{M^*, \neg F\} \notin \mathcal{A}_3$ . Esto es equivalente a decir que hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que el secuyente  $M^0, \neg F \rightarrow$  es S3-demostrable. Por RS 2,  $M^0 \rightarrow F$  es S3-demostrable. Por definición de deducción en S3,  $M \Vdash_{S3} F$ .

La completud general de S3 y su adecuación se siguen, sobre la base de la proposición anterior, del mismo modo que en los demás cálculos.

#### 4.6 Eliminación de la regla de separación en S3

En este apartado demostramos el Hauptsatz para S3, de cuyo contenido y consecuencias ya hemos hablado. Dicho con cierta precisión, lo que hacemos es mostrar que en un cálculo secuencial igual a S3 salvo que en él no aparece la regla de corte, son demostrables los mismos secuentes que en S3. Una vez que hayamos probado esta afirmación, hablaremos de S3 bajo el supuesto implícito de que se trata de ese cálculo sin regla de separación.

##### Proposición 4.6.1

Supuesto que hay demostraciones en S3 para los secuentes P1:  $\Pi_1, F \rightarrow \Pi_1$  y P2:  $\Pi_2 \rightarrow F, \Pi_2$  en las cuales no se ha empleado la regla de separación, entonces hay también una S3-demostración del secuyente  $\Pi_1, \Pi_2 \rightarrow \Pi_1, \Pi_2$  en la que no se emplea la regla de separación.

La demostración de esta proposición se realiza por una doble inducción según la longitud de las demostraciones de P1 y P2 y según el grado de F fuera de las descripciones, siguiendo el modelo de la demostración de Gentzen. En el apéndice I daremos otra demostración distinta del mismo teorema, basada en ideas de Smullyan.

Demostración de la prop. 4.6.1: Por doble inducción según (i) la suma  $k$  de las longitudes  $k_1$  y  $k_2$  de las demostraciones en S3 de los secuentes P1 y P2 y (ii) según el grado de F fuera de las descripciones.

1. Base de inducción: Si  $k = 2$ , entonces, para todo  $\text{gr}(F)$ , P1 y P2 son axiomas y hay una fórmula G que aparece en el antecedente y el consecuente del secuyente  $P^1$  y una fórmula G' que aparece en el antecedente y consecuente de P2. Consideremos el caso en que G o G' son distintas de F. Entonces o bien P1, es decir,  $M_1, F \rightarrow N_1$  es  $M', G, F \rightarrow N', G$  o bien P2, es decir,  $M_2 \rightarrow F, N$  es  $M'_2, G' \rightarrow F, G', N_2$ . En ambos casos  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$  es un axioma, y por lo tanto es demostrable. En el caso de que G sea igual a F igual, a su vez, a G', tenemos que  $M_1, F \rightarrow N_1$  es  $M_1, F \rightarrow N'_1, F$  y  $M_2 \rightarrow N_2, F$  es  $M'_2, F \rightarrow N_2, F$ . En este caso  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$  es también un axioma, en concreto  $M_1, M'_2, F \rightarrow N_2, N'_1, F$ . Esto completa la demostración de la base de inducción.

2. Paso de inducción. Supuesto de inducción: Sea  $k \geq 2$  y  $n$  el grado de F fuera de las descripciones. Sea  $m$  el grado de G fuera de las descripciones. Entonces I1: si  $m < n$  y  $M_1, G \rightarrow H_1$  y  $M_2 \rightarrow H_2, G$  son S3-demostrables sin regla de corte, entonces  $M_1, M_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de corte. I2: si  $m \geq n$  y  $P'_1: M_1, G \rightarrow N_1$  y  $P'_2: M_2 \rightarrow N_2, G$  son S3-demostrables sin regla de separación con longitudes  $k'_1$  y  $k'_2$  respectivamente y  $k'_1 + k'_2 < k$ , entonces  $M_1, M_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin

aplicar la regla de separación.

2.1:  $H_1, F \rightarrow H_1$  o  $H_2 \rightarrow F, H_2$  se han obtenido por RS 1 via una fórmula  $G$  o  $G'$ . Sea  $G$  o  $G'$  distintas de  $F$  en P1 o P2.

2.1.1: Si  $H_1, F \rightarrow N$  es  $H_1, F \rightarrow H_1, \neg G$ , entonces  $P'_1: H_1, F, G \rightarrow H_1$  es S3-demostrable con longitud  $k'_1 < k_1$ . Dado que  $k_2 + k'_1 < k$ , de  $P'_1$  y P2 se sigue, por I2, que  $H_1, H_2, G \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si P1 y P2 lo son. Según RS 1,  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es también demostrable sin uso de la regla de separación.

2.1.1': Si  $H_2 \rightarrow F, N_2$  es  $H_2 \rightarrow F, N_2, G'$ , entonces  $P'_2: H_2, G' \rightarrow F, H_2$  es S3-demostrable. Entonces, por I2, se sigue que  $H_1, H_2, G' \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si P1 y P2 lo son. Por RS 1, lo es también  $H_1, H_2 \rightarrow N_1, N_2$ .

Suponemos ahora que  $G$  y  $G'$  son  $F$ , es decir, suponemos que P1 o P2 se han obtenido por RS 1 via  $G$  o  $G'$  y que  $G$  y  $G'$  son  $F$  o, lo que es lo mismo, que  $F$  es la parte principal de la aplicación de RS 1 en P1 o P2. Dado que la parte principal de RS 1 aparece en el consecuente de la conclusión, el único caso que cabe considerar es el siguiente:

2.1.2': Si  $H_2 \rightarrow F, N_2$  es  $H_2 \rightarrow \neg G, H_2$ , entonces  $P'_2: H_2, G \rightarrow H_2$  es S3-demostrable por RS 2 y  $\overline{RS 3}^{(14)}$ . P1 es el secunte  $H_1, \neg G \rightarrow H_1$ , de donde se sigue, por RS 1 y  $\overline{RS 4}$ ,  $H_1 \rightarrow H_1, G$ . De este último secunte, junto con  $P'_2$  se sigue, por I1, puesto que  $gr(G) < gr(\neg G) = gr(F)$ , que  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de separación, cuando P1 y P2 se han obtenido sin regla de separación.

2.2: P1 o P2 se han obtenido mediante la regla RS 2, via  $G$  o  $G'$ . Consideramos primero el caso en que  $G$  o  $G'$  son distintas de  $F$ .

2.2.1: Si P1 se ha obtenido por RS 2, entonces  $H_1, F \rightarrow H_1$  es

$M_1', \neg G, F \rightarrow N_1$ . Entonces,  $P_1'$ :  $M_1', F \rightarrow N_1, G$  es S3-demostrable con longitud  $k_1' < k_1$ . Puesto que  $k_1' + k_2 < k$ , de  $P_1'$  y P2 se sigue, por I2, la demostrabilidad de  $M_1', M_2 \rightarrow N_1, N_2$  sin regla de corte si P1 y P2 se han obtenido sin regla de corte. Por RS 2 también es demostrable sin regla de separación el seciente  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$ .

2.2.1': Si P2 se ha obtenido por RS 2, entonces  $M_2 \rightarrow F, N_2$  es  $M_2', \neg G \rightarrow F, N_2$  y, en consecuencia,  $P_2'$ :  $M_2' \rightarrow F, G, N_2$  es S3-demostrable con longitud  $k_2' < k_2$ . De  $P_2'$  y P1 se sigue, por I2, que  $M_1, M_2' \rightarrow N_1, N_2, G$  es S3-demostrable sin regla de separación si P1 y P2 lo son. Por RS 2 lo es también  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$ .

Sean ahora G y G' la fórmula F. Hay que considerar el siguiente caso:

2.2.2: Si  $M_1, F \rightarrow N_1$  es  $M_1, \neg G \rightarrow N_1$ , entonces  $P_1'$  es S3-demostrable, por RS 1 y RS 4. Entonces existe la siguiente demostración en S3:

1. $M_1 \rightarrow N_1, G$	$P_1'$
2. $M_2 \rightarrow \neg G, N_2$	P2
3. $M_2, \neg \neg G \rightarrow N_2$	RS 2, 2
4. $M_2, G \rightarrow N_2$	$\overline{\text{RS 3, 3}}$

Puesto que el grado de G es menor que el grado de  $\neg G$ , por I1 se sigue de 1. y 4. la afirmación de la demostrabilidad en S3 de  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$  sin regla de separación si P1 y P2 se obtuvieron sin usarla.

Finalmente, no cabe considerar el caso en que P2 se ha obtenido por RS 2 via F, puesto que F aparece en el consecuente de P2.

2.3: P1 o P2 se han obtenido mediante RS 3, via G o G'. Consideramos primero el caso en que  $\neg \neg G$  o  $\neg \neg G'$  son distintas de F en P1 o P2:

2.3.1: Si P1 se ha obtenido mediante RS 3, entonces P1 es

$H_1', \neg\neg G, F \rightarrow H_1$  y se ha obtenido de  $P_1': H_1', G, F \rightarrow H_1$ , la longitud de cuya demostración es menor que  $k_1$ , la longitud de la demostración de  $P_1$ . Por I2, se sigue que  $H_1', G, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable y por RS 3  $H_1, H_2 \rightarrow N_1, N_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si  $P_1$  y  $P_2$  lo son.

2.3.1':  $P_2$  se ha obtenido por RS 3.  $P_2$  es el secuyente  $H_2', \neg\neg G' \rightarrow F, H_2$ . La demostración es, en este caso, similar a la anterior.

Sea ahora  $G$  y  $G'$  igual a  $F$ . Dado que  $F$  aparece en el consecuente de  $P_2$ , este secuyente no se ha obtenido por medio de RS 3 via  $F$ . El caso que queda por considerar es, entonces, el siguiente:

2.3.2:  $P_1$  se ha obtenido por RS 3. Entonces,  $P_1$  es  $H_1, \neg\neg G \rightarrow H_1$ . Por RS 3,  $H_1, G \rightarrow N_1$  es S3-demostrable. De  $P_2$  se sigue, por RS 4,  $H_2 \rightarrow G, H_2$ . Por I1 se sigue que  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si lo son también  $P_1$  y  $P_2$ .

2.4:  $P_1$  o  $P_2$  se han obtenido por RS 4, via  $G$  o  $G'$ .

Estudiamos el caso en que  $G$  o  $G'$  son distintas de  $F$ .

2.4.1. Si  $P_1$  se ha obtenido por RS 4, entonces  $P_1$  es  $H_1, F \rightarrow H_1', \neg\neg G$  y hay una S3-demostración de  $P_1': H_1, F \rightarrow H_1', G$  con longitud  $k_1' < k_1$ . De  $P_1'$  y  $P_2$  se sigue, por I2,  $H_1, H_2 \rightarrow H_1', G, H_2$ . Por RS 4,  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, N_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si  $P_1$  y  $P_2$  lo son.

Sea ahora  $F$  la parte principal de la aplicación de la regla. Puesto que  $F$  aparece en el antecedente de  $P_1$ ,  $P_1$  no se ha obtenido por RS 4 via  $F$ . Consideramos entonces el caso 2.4.2':

2.4.2'. Si  $P_2$  se ha obtenido por RS 4, entonces  $H_2 \rightarrow F, H_2$  es  $H_2 \rightarrow \neg\neg G, H_2$ . Entonces de  $P_1: H_1, \neg\neg G \rightarrow H_1$  se sigue, por RS 3,  $H_1, G \rightarrow H_1$ . De  $P_2$  se sigue, por RS 4,  $H_2 \rightarrow G, H_2$ . Por I1 se sigue que  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de corte si  $P_1$  y  $P_2$  lo son.

2.5:  $P_1$  o  $P_2$  se han obtenido por RS 5, via  $G$  o  $G'$ .

Discutimos primero los casos en que  $G$  o  $G'$  son distintas de  $F$ .

2.5.1: Si  $P_1$  se ha obtenido por RS 5, entonces  $M_1, F \rightarrow N_1$  es  $M'_1, -G, F \rightarrow N_1$ . Entonces  $P'_1: M'_1, F \rightarrow N_1, G$  es S3-demostrable con longitud  $k'_1 < k_1$ . De  $P'_1$  y  $P_2$  se sigue, por I2, que  $M'_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2, G$  es demostrable sin regla de corte si  $P_1$  y  $P_2$  lo son. En consecuencia, por RS 5,  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$  es también demostrable sin regla de corte si  $P_1$  y  $P_2$  lo son.

2.5.1': El caso en que  $P_2$  se ha obtenido por RS 5 via una fórmula  $G$  distinta de  $F$ , se trata de manera similar al caso anterior.

Consideremos ahora los casos en que  $G$  o  $G'$  son  $F$ , es decir, los casos en que  $F$  es la parte principal de la aplicación de la regla. Hay que notar que no ocurre que  $P_2$  se haya obtenido por RS 6 con  $G' = F$ , puesto que esta regla tiene como parte principal de su aplicación una fórmula en el antecedente y  $F$  aparece en el consecuente de  $P_2$ . Consideramos sólo el caso siguiente:

2.5.2: Si  $P_1$  se ha obtenido por RS 5, entonces  $P_1$  es  $M_1, -G \rightarrow N_1$  y se ha obtenido de  $P'_1: M_1 \rightarrow N_1, G$ . Entonces existe la siguiente S3-demostración:

1. $M_1 \rightarrow N_1, G$	$P'_1$
2. $M_2 \rightarrow N_2, -G$	$P_2$
3. $M_2, -G \rightarrow N_2$	RS 5, 2
4. $M_2, G \rightarrow N_2$	RS 3, 3

De 1. y 4. se sigue, por I1, que  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si  $P_1$  y  $P_2$  lo son.

2.6:  $P_1$  o  $P_2$  se han obtenido por RS 6, via  $G$  o  $G'$ .

Estudiemos primero el caso en que  $P_1$  se ha obtenido por RS 6. Puede ocurrir que  $G$ , es decir, la parte principal de la aplicación de la regla, sea distinta de  $F$  (2.6.1) o que sea  $F$  (2.6.1').

2.6. En este caso  $P_1$  es el seciente  $M'_1, (H \wedge H'), F \rightarrow N_1$ . Se ha ob-

tenido de  $P'_1: H'_1, F, H, H' \rightarrow H_1$ , seciente que es S3-demostrable con longitud  $k'_1 < k_1$ . De  $P'_1$  y P2 se sigue, por I2,  $H'_1, H_2, H, H' \rightarrow H_1, H_2$ . Por RS 6,  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si P1 y P2 lo son.

2.6.1': En el caso de que P1 se haya obtenido por RS 6 via G y G sea F, entonces P1 es el seciente  $H_1, (H \wedge H') \rightarrow H_1$ . P2 es el seciente  $H_2 \rightarrow H_2, (H \wedge H')$ . Por RS 6 y RS 7, de P1 y P2 se siguen los secientes  $H_1, H, H' \rightarrow H_1$ ;  $H_2 \rightarrow H_2, H$  y  $H_2 \rightarrow H_2, H'$ . Por I1, el seciente  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si P1 y P2 lo son.

Consideramos ahora el caso en que P2 se ha obtenido por RS 6. En este caso, la parte principal de la aplicación de la regla, la fórmula  $G'$ , es distinta de F, puesto que RS 6 actúa sobre el antecedente de los secientes y F aparece en el seciente de P2. Tenemos entonces que P2 es el seciente  $H'_2, (H \wedge H') \rightarrow F, H_2$ , que se ha obtenido de  $P'_2: H_2, H, H' \rightarrow F, H_2$ , cuya demostración tiene una longitud  $k'_2$  menor que  $k_2$ , la longitud de P2. Entonces de  $P'_2$  y P1, por I2, se sigue que  $H'_2, H_1, H, H' \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de corte si P1 y P2 lo son y, con ello,  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  también lo es, por RS 6.

2.7: P1 o P2 se han obtenido por RS 7. Consideramos primero el caso en que P1 se ha obtenido por medio de esa regla. Sea G la parte principal de la aplicación de la regla. G ha de ser distinta de F, puesto que RS 7 actúa sobre el consecuente de los secientes y F aparece en el antecedente de P1. Entonces, P1 es el seciente  $H_1, F \rightarrow H'_1, (H \wedge H')$ . Este seciente se ha obtenido de dos secientes anteriores en la demostración, a saber,

$P'_1: H_1, F \rightarrow H'_1, H$  y  $P''_1: H_1, F \rightarrow H'_1, H'$  con longitudes  $k'_1$  de  $P'_1$  y  $k''_1$  de  $P''_1$ , ambas menores que  $k_1$ . Por I2, de P2 y  $P'_1$  se sigue  $H_1, H_2 \rightarrow H'_1, H, H_2$  y de P2 y  $P''_1$  se sigue  $H_1, H_2 \rightarrow H'_1, H', H_2$ . De

aquí se deduce  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$  por RS 7 sin utilizar la regla de separación si en las demostraciones de P1 y P2 tampoco se utilizó. Consideramos ahora el caso en que P2 se ha obtenido por RS 7. Puede ocurrir que (2.7.2) la parte principal de la aplicación de la regla, la fórmula G, sea distinta de F o que (2.7.2') sea igual a F.

2.7.2: En este caso el seciente P2 es  $M_2 \rightarrow F, (H \wedge H'), N_2$ . La demostración en este caso es similar a la anterior.

2.7.2': el seciente P2 es  $M_2 \rightarrow F, (H \wedge H'), N_2$ . P1 es  $M_1, (H \wedge H') \rightarrow N_1$ . De P1 y P2 se sigue, por  $\overline{RS\ 6}$  y  $\overline{RS\ 7}$  que  $M_1, H, H' \rightarrow N_1$ ;  $M_2 \rightarrow H, N_2$  y  $M_2 \rightarrow H', N_2$  son S3-demostrables. Por I1 lo es  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$ , sin regla de separación si P1 y P2 lo son.

2.8 P1 o P2 se han obtenido por medio de RS 8, via una fórmula G o G'. Consideramos primero el caso en que P1 se ha obtenido por RS 8. O bien G es distinta de F (caso 2.8.1) o bien G es F (caso 2.8.1').

2.8.1: P1 es  $M_1', -(H \wedge H'), F \rightarrow N_1$  y se ha obtenido de secientes anteriores en la demostración, a saber,  $P_1': M_1', -H, F \rightarrow N_1$  y  $P_1'': M_1', -H', F \rightarrow N_1$  con longitudes de demostración  $k_1'$  y  $k_1''$ , menores que  $k_1$ . De  $P_1', P_1''$  y P2 se sigue, por I2, que  $M_1', M_2, -H, -H' \rightarrow N_1, N_2$  es S3-demostrable sin regla de corte si P1 y P2 lo son. Por RS 8 lo es también  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$ .

2.8.1': En este caso P1 es  $M_1, -(H \wedge H') \rightarrow N_1$ . Por  $\overline{RS\ 9}$  y  $\overline{RS\ 10}$ , se sigue de P1 y P2 que los secientes  $M_1, -H \rightarrow N_1$ ;  $M_1, -H' \rightarrow N_1$  y  $M_2 \rightarrow N_2, -H, -H'$  son demostrables en S3. Por I1 se sigue que  $M_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$  es S3-demostrable sin regla de corte si P1 y P2 lo son.

Consideramos ahora el caso en que P2 se ha obtenido por RS 9. En este caso, F no es la parte principal de la aplicación de la regla, puesto que F aparece en el consecuente de la regla. Entonces, P2 es  $M_2', -(H \wedge H') \rightarrow F, N_2$  y la demostración es similar a 2.8.1.

2.9: P1 o P2 se han obtenido por RS 9, via una fórmula G o G'. Supongamos que P1 se ha obtenido por RS 9. En este caso, la parte principal de la aplicación de la regla, la fórmula G, es distinta de F. Por lo tanto sólo cabe considerar el caso 2.9.1:

2.9.1: P1 es  $H_1, F \rightarrow H'_1, -(H \wedge H')$  y se ha obtenido de un secunete  $P'_1$  anterior en la demostración.  $P'_1$  es  $H_1, F \rightarrow H'_1, -H, -H'$  y la longitud  $k'_1$  de su demostración es menor que  $k_1$ . De  $P'_1$  y P2 se sigue, por I2,  $H_1, H_2 \rightarrow H'_1, -H, -H', H_2$  y de este secunete, por RS 9,  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$ .

En el caso de que P2 se haya obtenido por RS 9, puede ocurrir que G' sea distinta de F (caso 2.9.2) o que G' sea F (2.9.2').

2.9.2: P2 es  $H_2 \rightarrow F, -(H \wedge H'), H_2$ . La demostración es similar al caso anterior.

2.9.2': P2 es  $H_2 \rightarrow -(H \wedge H'), H_2$ . Entonces, por  $\overline{\text{RS 9}}$  y  $\overline{\text{RS 8}}$  son demostrables los secunetes  $H_2 \rightarrow -H, -H', H_2$  y  $H_1, -H \rightarrow H_1$  y  $H_1, -H' \rightarrow H_1$ , estos últimos tomando como premisa a P1. Por I1 se sigue  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$ .

2.10: P1 o P2 se han deducido por RS 10, via una fórmula G o G'. Supuesto que P1 se ha obtenido por RS 10, puede ocurrir que o bien G sea distinta de F (caso 2.10.1) o bien que sea igual a F (caso 2.10.1').

2.10.1: P1 es  $H'_1, \wedge XG[X], F \rightarrow H_1$  y se ha obtenido de un secunete  $P'_1: H'_1, G[A], F \rightarrow H_1$  que es S3-demostrable con longitud  $k'_1$  menor que  $k_1$ . De  $P'_1$  y P2 se sigue, por I2, que  $H'_1, G[A], H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es S3-demostrable sin regla de separación si P1 y P2 lo son. De esto se sigue la S3-demostrabilidad de  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  sin regla de corte, por RS 10.

2.10.1': P1 es  $H_1, \wedge XG[X] \rightarrow H_1$ . Por  $\overline{\text{RS 10}}$ ,  $H_1, G[\frac{1}{j}] \rightarrow H_1$  es S3-demostrable. De P2:  $H_2 \rightarrow H_2, \wedge XG[X]$  se sigue, por  $\overline{\text{RS 12}}$ ,

$H_2 \rightarrow H_2, G[G[P_j^1]]$ . Por I1, se sigue la proposición.

En el supuesto de que P2 se haya obtenido por RS 10, G' es distinto de F, puesto que F aparece en el consecuente del seciente. Entonces P2 es de la forma  $H_2', \wedge XG[X] \rightarrow F, N_2$  y la proposición se sigue como en 2.10.1.

2.11: P1 o P2 se han obtenido por medio de la regla RS 11. Supuesto que P1 se ha obtenido por RS 11, entonces la parte principal de la aplicación de la regla es una fórmula G distinta de F, y sólo cabe considerar el caso 2.11.1:

2.11.1: P1 es  $H_1, F \rightarrow N_1', \wedge XG[X]$ . P1 se ha obtenido de

$P_1': H_1, F \rightarrow N_1', G[G[P_j^1]]$  y la longitud de la demostración de  $P_1'$  es menor que  $k_1$ , longitud de la demostración de P1. De  $P_1'$  y P2 se sigue, por I2,  $H_1, H_2 \rightarrow N_1', G[G[P_j^1]], H_2$  y, por RS 11,  $H_1, H_2 \rightarrow N_1, H_2$  es demostrable sin regla de corte si P1 y P2 lo son.

Sea ahora P2 el resultado de una aplicación de RS 11. Distinguimos el caso en que la parte principal de la aplicación, la fórmula G', es distinta de F (caso 2.11.2) del caso en que G' es F (caso 2.11.2').

2.11.2: P2 es  $H_2 \rightarrow F, N_2', \wedge XG[X]$  y la demostración es similar al caso 2.11.1.

2.11.2': P2 es  $H_2 \rightarrow \wedge XG[X], N_2$ . De P1:  $H_1, \wedge XG[X] \rightarrow N_1$  se sigue, por RS 10,  $H_1, G[G[P_j^1]] \rightarrow N_1$ , y de P2, por RS 11,  $H_2, G[G[P_j^1]] \rightarrow N_2$ . Por I1 se sigue la proposición.

2.12: P1 o P2 se han obtenido por medio de RS 12. Consideramos primero el caso en que P1 se ha obtenido por esa regla. Distinguimos entre los casos en que la parte principal de la aplicación de la regla es distinta de F (2.12.1) y los casos en que es igual a F (2.12.1'):

2.12.1: P1 es  $H_1', -\wedge XG[X], F \rightarrow H_1$  y se ha obtenido de  $P_1'$ :

$H_1', -G[G[P_j^1]], F \rightarrow H_1$ , seciente cuya demostración tiene una longitud

menor que la de P1. De  $P'_1$  y P2 se sigue, por I2,  $H'_1, H_2, -G[C-P_j^1] \rightarrow H_1, H_2$ . De este último secuyente se sigue, por RS 12,  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$ , con ello, la proposición.

2.12.1': P1 es  $H_1, -\Lambda XG[X] \rightarrow H_1$ . Por  $\overline{RS 12}$  y  $\overline{RS 13}$  se sigue de P1 y P2 la demostrabilidad de  $H_1, -G[C-P_j^1] \rightarrow H_1$  y de  $H_2 \rightarrow G[C-P_j^1], H_2$ . Por I1 se sigue la proposición.

Estudieemos ahora el caso en que P2 se ha obtenido por RS 12. Es claro que la parte principal de la regla no es F. Por lo tanto sólo consideramos el caso 2.12.2:

2.12.2: P2 es  $H'_2, -\Lambda XG[X] \rightarrow F, H_2$ . La proposición se sigue de modo similar al caso 2.12.1.

2.13: P1 o P2 se han obtenido por medio de RS 13.

En el caso de que P1 sea el secuyente obtenido por medio de RS 13, entonces la parte principal de la regla no es F. Consideremos, entonces, el caso 2.13.1:

2.13.1 : P1 es  $H_1, F \rightarrow H'_1, -\Lambda XG[X]$ . Se ha obtenido de  $P'_1$ :  $H_1 \rightarrow H'_1, -G[A]$ , cuya longitud de demostración es menor que  $k_1$ , longitud de la demostración de P1. Por I2, se sigue de  $P'_1$  y P2 que el secuyente  $H_1, H_2 \rightarrow H'_1, H_2, -G[A]$  es demostrable sin regla de corte si P1 y P2 lo son. Por RS 13 se sigue que también lo es  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$ .

Supongamos que P2 se ha obtenido por medio de RS 13. Distinguiamos los casos en que la parte principal de la regla es distinta de F (caso 2.13.2) de los casos en que es F (caso 2.13.2'):

2.13.2: P2 es  $H_2 \rightarrow F, H'_2, -\Lambda XG[X]$ . La demostración de la proposición es similar al caso 2.13.1.

2.13.2': P2 es  $H_2 \rightarrow H_2, -\Lambda XG[X]$ . P1 es  $H_1, -\Lambda XG[X] \rightarrow H_1$ . De P1 y P2 se sigue, por  $\overline{RS 12}$  y  $\overline{RS 13}$ , la demostrabilidad de  $H_1, -G[C-P_j^1] \rightarrow H_1$  y  $H_2 \rightarrow H_2, -G[C-P_j^1]$ . Por I1 se sigue la proposición.

2.14: P1 o P2 se han obtenido por medio de una de las reglas  $RS_{=1} - RS_{\neq 1}$ . Vamos a estudiar sólo uno de los cuatro casos posibles, puesto que la demostración es similar en todos ellos. Así, supongamos que P1 se ha obtenido por  $RS_{=1}$ . En este caso, F es distinta de la parte principal de la regla, la fórmula  $H_1$ , y  $H_1, M_2 \rightarrow H_1, N_2$  se obtiene por la misma regla  $RS_{=1}$ . Lo mismo ocurre en el caso de que P2 se haya obtenido por  $RS_{=1}$  y  $H_1$  sea distinto de F. Supongamos ahora que P2 se ha obtenido por medio de  $RS_{\neq 1}$  y  $H_1$  sea F. Tenemos entonces la siguiente posible deducción:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $H_1, IP^k[A] \rightarrow \Lambda = \Lambda \rightarrow N_1$ | P1  |
| 2. $M_2 \rightarrow H_2, IP^k[A] \rightarrow \Lambda = \Lambda$ | P2  |
| 3. $H_1 \rightarrow N_1, IP^k[A]$                               | Def $\rightarrow, 1; \overline{RS 8},$<br>RS 3, RS 2, $\overline{RS 4}$ |
| 4. $M_1, \Lambda = \Lambda \rightarrow N_1$                     | Def $\rightarrow, 1; \overline{RS 8},$<br>RS 3,                         |
| 5. $M_2, IP^k A \rightarrow \Lambda = \Lambda, N_2$             | Def $\rightarrow, 2; RS 9,$<br>RS 2, RS 3, RS 4.                        |
| 6. $M_1, M_2 \rightarrow \Lambda = \Lambda, N_1, N_2$           | I1, 3, 5  |
| 7. $H_1, M_2 \rightarrow N_1, N_2$                              | I1, 6, 4.   |
|   | q.e.d   |

Con esto queda demostrada la proposición 4.6.1 y podemos pasar ahora a la demostración del Hauptsatz

Proposición 4.6.2. El Hauptsatz en  $S_3$

Sea  $S_3^*$  un cálculo igual a  $S_3$ , salvo por la ausencia en  $S_3$  de la regla de separación. Entonces,

$$\overline{S_3} \Sigma \Rightarrow \overline{S_3^*} \Sigma$$

Demostración: Se trata de un sencilla inducción sobre la longitud de las demostraciones en  $S_3$ , apoyándose en la

prop. 4.6.1: Si  $\Sigma$  es un axioma de  $S3$ , también lo es de  $S3^*$ . Si la longitud de la demostración de  $\Sigma$  es  $k$ ,  $k > 1$ , entonces, por el supuesto de inducción y la prop. 4.6.1 se sigue el teorema.  
q.c.d.

Podemos reforzar el teorema anterior indicando que los cálculos  $S3^*$  y  $S3$  son equivalentes. Para ello lo único que necesitamos es probar el condicional inverso al que se afirma en la prop. 4.6.2. Ese condicional se sigue trivialmente del hecho de que todo axioma y regla de deducción de  $S3^*$  lo sea también de  $S3$ . En consecuencia, a partir de ahora identificaremos el cálculo  $S3$  con el cálculo  $S3^*$ , en el que la regla de separación es una regla derivada y no primitiva.

Es interesante, quizá, hacer notar que la regla de separación equivale a la siguiente afirmación: Si  $\vdash_{S3} H_1, F \rightarrow H_1$  y  $\vdash_{S3} H_2, \neg F \rightarrow H_2$ , entonces  $\vdash_{S3} H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$ . La razón es clara: si se cumplen los supuestos de la afirmación, entonces por RS 1 y  $\overline{RS 4}$  se cumplen también las premisas de la regla de separación y, con ello, la conclusión de la regla de separación y de la afirmación anterior. A la inversa, si se dan las premisas de la regla de corte, entonces, por RS 2, se cumplen las premisas de la afirmación que comentamos y, con ello, la conclusión de la regla de corte. Un caso particular de esta versión de la regla que nos ocupa es aquel en que  $H_1$  y  $H_2$  son conjuntos vacíos. Si llamamos eliminable en  $S3$  a toda fórmula tal que si existe una  $S3$ -demostración de  $H, F \rightarrow$  y  $H, \neg F \rightarrow$  entonces existe una  $S3$ -demostración de  $H \rightarrow$ , podemos reformular el Hauptsatz diciendo que toda fórmula es eliminable. Esta es la formulación que da Smullyan a su versión del Hauptsatz para la lógica bivalente y está muy cercana a lo que vamos a tratar en el próximo apartado de este capítulo, una extensión del Teorema Fundamental al cálculo  $S3$ .

La relación fundamental estriba en que una fórmula es eliminable en el sentido del próximo apartado exactamente cuando es eliminable en S3, como se ve fácilmente si tenemos en cuenta la adecuación de los cálculos B3 y S3.

#### 4.7 Una versión del Hauptsatz adecuada a B3.

##### Equivalencia de B3 y S3.

Llamamos eliminable<sup>(15)</sup> a toda fórmula  $F$  tal que si existe un árbol cerrado  $B_{M, \neg F}$  con supuestos  $\{M, \neg F\}$  y un árbol cerrado  $B_{M, F}$  con supuestos  $\{M, F\}$  entonces existe un árbol cerrado  $B_M$  con supuestos  $M$ . La afirmación fundamental de este apartado es la siguiente proposición:

##### Proposición 4.7.1

Toda fórmula  $F$  es eliminable

Demostración: Según el lema 4.5.3, si existe un árbol cerrado  $B_{M, \neg F}$  y otro árbol cerrado  $B_{M, F}$ , entonces los secuentes  $M, \neg F \rightarrow$  y  $M, F \rightarrow$  son demostrables en S3. Por la regla de separación,  $M \rightarrow$  es S3-demostrable. Supuesto que de la S3-demostrabilidad de  $M \rightarrow$  se siga que hay un árbol cerrado con supuestos  $M$ , entonces la proposición está demostrada. Esta última afirmación es el contenido del siguiente lema.

##### Lema 4.7.2

Si  $\frac{}{S3} M \rightarrow N$ , entonces hay un árbol finito cerrado con supuestos  $M, \neg N_1, \dots, \neg N_n$ , donde  $\{N_1, \dots, N_n\} \equiv N$ .

Demostración: Por inducción sobre la longitud de la S3-demostración de  $M \rightarrow N$ . En lo que sigue, abreviamos  $\neg N_1, \dots, \neg N_n$  en la forma  $\neg(N)$ .

1. Base de inducción:  $H \rightarrow H$  es un axioma.  $H \rightarrow H$  es el secunte  $H', G \rightarrow H', G$ . Es claro que existe un árbol cerrado con supuestos  $H', G, \neg(H'), \neg G$ , es decir, con supuestos  $H, \neg(H)$ .

2. Paso de inducción: Supuesto de inducción: Si  $H' \rightarrow H'$  es S3-demostrable con longitud menor que  $n$ , entonces vale el lema.

2.1  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por RS 1 de  $H', F \rightarrow H$ . Por supuesto de inducción, existe un árbol cerrado  $B_{M', F, \neg(H)}$ . Sea  $B'$  el árbol que se origina al añadir a  $B_{M', F, \neg(H)}$  el supuesto  $\neg F$ , justificando la aparición de  $F$  por una aplicación de RS 1.  $B'$  es, evidentemente un árbol cerrado con supuestos  $H, \neg F, \neg(H)$ .

2.2  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por medio de RS 2 de un secunte  $H' \rightarrow H, F$ . Entonces, por supuesto de inducción, existe un árbol cerrado  $B_{M', \neg(H), \neg F}$ . Puesto que  $H \rightarrow H$  tiene la forma  $H', \neg F \rightarrow H$ , se sigue la afirmación.

2.3 y 2.4 Los casos en que  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por RS 3 o RS 4 se tratan de manera similar al caso anterior.

2.5 Supuesto que  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por medio de RS 5, entonces es de la forma  $H', -F \rightarrow H$ . Por supuesto de inducción existe un árbol  $B$ , cerrado, con supuestos  $H, \neg(H), \neg F$ . Podemos formar un árbol  $B'$  con supuestos  $H', \neg(H), -F$  cuya primera línea fuera de los supuestos sea  $-F \rightarrow \neg F$ . Puesto que el modus ponens es una regla admisible en E3, se puede continuar el árbol  $B'$  de la misma manera que  $B$ . Es claro que  $B'$  es el árbol buscado.

2.6 Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por RS 6, entonces es de la forma  $H', F \wedge G \rightarrow H$ . Por supuesto de inducción existe un árbol cerrado  $B$  con supuestos  $H, F, G, \neg(H)$ . La existencia de un árbol cerrado  $B'$  con supuestos  $H', F \wedge G, \neg(H)$  se sigue trivialmente.

2.7 Sea  $H \rightarrow H$  de la forma  $H \rightarrow H', F \wedge G$ , habiéndolo-

se obtenido por medio de RS 7. Por supuesto de inducción hay árboles cerrados  $B$  y  $B''$  con supuestos  $M, \gamma(N), \gamma F$  y  $M, \gamma(N), \gamma G$ . Existe, por tanto, también un árbol cerrado con supuestos  $M, \gamma(F \wedge G), \gamma(N')$  en el que se utilizan los árboles  $B$  y  $B''$  para cerrar las ramas generadas por el uso de RB 6.

2.8 El caso en que  $M \rightarrow N$  se obtiene por medio de RS 8 se trata de modo similar al caso anterior.

2.9  $M \rightarrow N$ , de la forma  $M \rightarrow N', \neg(F \wedge G)$ , se ha obtenido por RS 9. Por supuesto de inducción, existe un árbol cerrado  $B$  con supuestos  $M, \gamma(N), \gamma \neg F, \gamma G$ . Por medio de RB 4 se sigue la existencia de un árbol  $B'$  con supuestos  $M, \gamma(N'), \gamma \neg(F \wedge G)$ .

2.10 Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por la aplicación de RS 10, del supuesto de inducción se sigue, utilizando RB 7, la proposición.

2.11 Sea  $M \rightarrow N$  de la forma  $M \rightarrow N', \wedge X F[X]$ , habiéndose obtenido por medio de RS 11. Por supuesto de inducción existe un árbol cerrado  $B$  para  $M, \gamma(N), \gamma F[P_j^1]$ . Dado que  $P_j^1$  no aparece en  $M, N, F$ , existe también un árbol cerrado para  $M, \gamma(N'), \gamma \wedge X F[X]$ .

2.12 El caso en que  $M \rightarrow N$  es  $M', \neg \wedge X F[X] \rightarrow N$ , habiéndose obtenido por RS 12, se trata de manera similar al caso anterior.

2.13 Si  $M \rightarrow N$  es de la forma  $M \rightarrow N', \neg \wedge X F[X]$  y se ha obtenido por medio de RS 13, entonces, por supuesto de inducción y por el uso de RB 8 se sigue que existe un árbol cerrado con supuestos  $M, \gamma(N), \gamma \neg \wedge X F[X]$ .

2.14 Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por una de las regla  $RS_{=1} - RS_{\neq 1}$ , es trivial, por las reglas RB 11 - RB 14, que existe un árbol cerrado con supuestos  $M, \gamma(N)$ . q.e.d.

Es claro que la afirmación que utilizábamos, sin

demostración, en la prueba de la proposición 4.7.2 es un caso particular del lema que acabamos de demostrar.

De los lemas 4.5.3 y 4.7.2 se sigue una demostración de la equivalencia de los cálculos S3 y B3. Como hemos dicho antes, la equivalencia entre estos cálculos es una consecuencia de su adecuación: evidentemente, si el concepto de deducción en ambos cálculos coincide con el de consecuencia semántica, entonces los dos cálculos son equivalentes en el sentido de que son deducibles en ellos las mismas expresiones a partir de conjuntos iguales de supuestos. Una demostración de la equivalencia de B3 y S3 basada en estas ideas sería, sin embargo, totalmente no-constructiva, puesto que no se indica el método de transposición de las deducciones de un cálculo al otro. Por el contrario, en la prueba de equivalencia que aquí damos, sabemos cómo pasar de deducciones en B3 a deducciones equivalentes en S3 y a la inversa, basándonos en las instrucciones que nos dan las demostraciones de los lemas citados.

Proposición 4.7.3

Si  $M$  es un conjunto, posiblemente vacío, y  $F$  una fórmula de L3, entonces

$$M \vdash_{B3} F \Leftrightarrow M \vdash_{S3} F$$

Demostración: Si  $M \vdash_{B3} F$ , entonces hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $B_{M^0, \neg F}$  es un árbol cerrado con supuestos  $\{M^0, \neg F\}$ . Por el lema 4.5.3, es demostrable en S3 el secante  $M^0, \neg F \rightarrow$ . Por B3 1 y B3 4,  $\vdash_{B3} M^0 \rightarrow F$  y, por definición de S3-deducción,  $M \vdash_{S3} F$ . A la inversa, si  $M \vdash_{S3} F$ , entonces hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $\vdash_{S3} M^0 \rightarrow F$  y, por el lema 4.7.2, hay un árbol cerrado  $B_{M^0, \neg F}$  o, lo que es lo mismo,  $M \vdash_{B3} F$ . q.e.d.

Notas al capítulo 4

- (1) Gentzen (1934)
- (2) Gentzen (1934), p.15
- (3) Gentzen (1934), p.16
- (4) Gentzen (1934), p. 21
- (5) Carnap (1942), pp. 151 ss.
- (6) Kneale (1961), pp. 499 ss.
- (7) Smullyan (1968), p. 104
- (8) Una versión de esta proposición, para la lógica bivalente, puede encontrarse en Blau (1979), p. 78
- (9) La regla

$$\frac{M, F \rightarrow N}{M, \neg F \rightarrow N}$$

$$M, \neg F \rightarrow N$$

contenida en RS 3 no es independiente: se sigue de RS 1 y RS 5. La conservo entre las reglas primitivas por razones de simetría.

- (10) Cfr. Church (1956), p. 108
- (11) Esta demostración, así como su base, el lema 2.5.3, es una modificación de una demostración similar de Blau, para la lógica bivalente. Cfr. Blau (1979), p. 32 ss
- (12) Cfr. Blau (1978), p. 247
- (13) Obsérvese que es válido lo siguiente: Si  $M, G[P_j^1] \rightarrow N$  (o  $M \rightarrow G[P_j^1], N$ ), en donde  $P_j^1$  no aparece en  $M, G, N$ , es demostrable en S3, entonces también lo es  $M, G[P_h^1] \rightarrow N$  (o  $M \rightarrow G[P_h^1], N$ ) para todo  $P_h^1$  que no aparece en  $M, G, N$ . La demostración es trivial puesto que si  $M, G[P_j^1] \rightarrow N$  es un axioma, la fórmula que aparece tanto en el antecedente como en el consecuente no es  $G[P_j^1]$  y por lo tanto,  $M, G[P_h^1]$  es también un axioma. Del supuesto de inducción se sigue fácilmente la afirmación en el resto de los casos.
- (14) Utilizamos aquí, y en el resto de la demostración, las reglas derivadas de S3, aunque su aceptabilidad ha sido demostrada sobre la base del sistema S3 con regla de separación. Esto no supone ningún problema puesto que son igualmente admisibles en el sistema S3 sin regla de separación: en ningún momento hemos utilizado la regla de separación en la demostración de las reglas derivadas.
- (15) La noción tiene su origen en Smullyan (1968) que demuestra, además, un teorema análogo a la proposición 4.7.1, aunque para la lógica bivalente.

## 5. CALCULOS DE DEDUCCION NATURAL IN Y IN3

### 5.1 Introducción

Como es sabido, los cálculos de deducción natural, como los secuenciales, tienen su origen en la tesis doctoral de Gentzen<sup>(1)</sup>. Se trata de cálculos en los que se reproduce, hasta cierto punto, el modo habitual de razonamiento matemático, en que, en general, no se parte de axiomas, sino de supuestos a partir de los cuales se deduce una conclusión, para realizar, finalmente, algún tipo de eliminación de los supuestos. Así, por ejemplo, si estudiamos el proceso de demostración en una prueba de completud, encontramos que el desarrollo típico de la misma es partir de un supuesto, a saber, que una fórmula  $F$  es consecuencia semántica de un conjunto  $\mathcal{H}$  de fórmulas, para mostrar luego, sobre la base de ese supuesto, que esa fórmula es deducible, en el cálculo en cuestión, del conjunto de fórmulas. La eliminación del supuesto se realiza dando forma de condicional al teorema. Del mismo modo, en un cálculo de deducción natural se parte de supuestos, no de axiomas, se deduce una conclusión y finalmente pueden eliminarse los supuestos mediante una regla especial. En rigor, podríamos decir que lo que se hace no es tanto eliminar los supuestos como incluirlos en la afirmación final. Dado que no hay axiomas, este tipo de cálculos se define exclusivamente por medio de reglas de deducción, repartidas en dos grupos, reglas de introducción de los signos lógicos y reglas de eliminación de los mismos.

Acabamos de decir que las deducciones, en un cálculo de deducción natural, parten de supuestos. Estos supuestos no tienen por qué ser -ni suelen ser, de hecho- verdades lógicas. Si el cálculo de deducción natural es correcto, la conclusión de una deducción será verdadera en el caso de que los supuestos lo sean. Las leyes lógicas, sin embargo, se pueden afirmar como verdaderas incondicionalmente, independientemente de supuesto alguno. La deducción de las verdades lógicas se realiza por medio de la regla de eliminación de supuestos a que antes hemos aludido. Esta regla -se trata de (ES) en N3 y NJ3, cfr. más abajo- afirma, dicho sea sin pretensiones de rigor, que si la fórmula G es deducible del supuesto F en el cálculo, entonces también es deducible la fórmula  $F \rightarrow G$  y ello independientemente del supuesto F. Esta regla viene a coincidir con una de las afirmaciones del teorema de deducción en el resto de los cálculos. La diferencia esencial estriba, claro está, en que aquí se trata de uno de los postulados del cálculo mientras que en otros casos se trata de un meta-teorema.

En este capítulo definimos dos cálculos de deducción natural, a los que llamamos N3 y NJ3. El primero de ellos es un cálculo adecuado a la lógica L3, el segundo lo es para la lógica de enunciados de L3. NJ3 no es simplemente una reproducción de una parte de las reglas de N3, puesto que la lógica de enunciados queda implícita en N3, como ocurría en A3, en una regla (JC) que permite la deducción en N3 de toda fórmula que sea consecuencia semántica, en la lógica de enunciados de L3, de elementos anteriores en la deducción. En NJ3 se sustituye esta regla por un conjunto de reglas explícitas para las conectivas. En ambos casos demostraremos la adecuación de los cálculos respecto a las lógicas correspondientes. Daremos dos demostraciones diferentes de la com-

pletud de los cálculos. En ambos casos, la segunda prueba de completud se basará sobre las propiedades de demostrabilidad que introdujimos en el segundo capítulo de este trabajo. La primera demostración de completud de  $\text{H3}$ , así como la demostración de su corrección y la formulación misma del cálculo son transposiciones a la lógica trivalente de un cálculo de deducción natural para la lógica bivalente definido por Blau<sup>(2)</sup>. Las pruebas siguen muy de cerca las demostraciones de los teoremas correspondientes en esta obra. La primera demostración de completud de  $\text{H3}$  sigue los métodos clásicos de Kálmar para las pruebas de completud en lógica de enunciados.

En la medida de lo posible hemos procurado ajustarnos a los moldes tradicionales en la formulación de estos cálculos y así, hemos preferido dar, por ejemplo, reglas para la introducción y eliminación del cuantor existencial nominal o de la disyunción, a definir reglas sólo para los signos primitivos de  $\text{H3}$ . Es claro, sin embargo, que el paralelismo con los cálculos de deducción natural en lógica bivalente no puede ser completo: Nos ha sido preciso, por ejemplo, dar reglas para la introducción y eliminación del cuantor universal precedido por dos negaciones, la primera fuerte y la segunda, débil.

## 5.2 El cálculo $\text{H3}$

### 5.2.1. Postulados de $\text{H3}$ . Deducción y demostración en $\text{H3}$

Damos primero las reglas de  $\text{H3}$  y analizamos brevemente su estructura para pasar luego a las definiciones de deducción y demostración en  $\text{H3}$ .

(IS)	$n (n)$	F
(ES)	$j (j)$	F
	$m (m_1, \dots, m_k, j)$	G
	$n (m_1, \dots, m_k)$	$F \rightarrow G$

(JC)	$m_1 (m_{1,1}, \dots, m_{1,k_1})$	$F_1$
	.	
	.	
	.	
	$m_j (m_{j,1}, \dots, m_{j,k_j})$	$F_j$
	$n (m_{1,1}, \dots, m_{1,k_1}, \dots, m_{j,k_j})$	G    bajo

la condición de que  $F_1 \dots F_j \Vdash_{J^3} G$ .

(E $\wedge$ )	$m (m_1, \dots, m_k)$	$\wedge x F(x)$
	$n (m_1, \dots, m_k)$	F[A]
(E $\neg\wedge$ )	$m (m_1, \dots, m_k)$	$\neg \wedge x F(x)$
	$n (m_1, \dots, m_k)$	$\neg F[A]$
(I $\forall$ )	$m (m_1, \dots, m_k)$	F[A]
	$n (m_1, \dots, m_k)$	$\forall x F(x)$
(E $\forall$ )	$m (m_1, \dots, m_k)$	$\forall x F(x)$
	$n (m_1, \dots, m_k)$	$F[P_j^1, P_j^1(i_1^1 \dots i_h^1)]$

en el caso de que el parámetro de predicado  $P_j^1$  no aparezca en

ninguna línea anterior a  $n$  y que  $\{P_1^1, \dots, P_n^1\}$  sean todas las descripciones de la forma  $\{P^1\}$  que aparecen en  $\forall X F[X]$ .

$$(I\wedge) \quad \frac{m(m_1, \dots, m_k) \quad F[\{P_j^1\}]}{n(m_1, \dots, m_k) \quad \wedge X F[X]}$$

en el caso de que

1.  $P_j^1$  no haya sido marcado en ninguna línea
2.  $P_j^1$  no aparezca en las líneas  $n, m_1, \dots, m_k$
3. No aparezca en las líneas  $n, m_1, \dots, m_k$  ningún parámetro de predicado  $P_k^1$  dependiente de  $P_j^1$ .

$$(I\neg\wedge) \quad \frac{m(m_1, \dots, m_k) \quad \neg F[\{P_j^1\}]}{n(m_1, \dots, m_k) \quad \neg \wedge X F[X]}$$

en el caso de que se cumplan las condiciones 1. - 3. de la regla (I $\wedge$ ).

$$(I_1=) \quad n( ) \quad I P^k[A] \rightarrow A=A$$

$$(I_2=) \quad n( ) \quad A=A \wedge B=B \rightarrow I A=B$$

$$(E=) \quad n( ) \quad A=B \wedge F[A] \rightarrow F[B]$$

$$(c) \quad n( ) \quad cP=A \leftrightarrow F[A] \wedge \wedge X(F[X] \rightarrow P=A)$$

Como de costumbre, llamamos aplicación de una regla de IC al  $n$ -tuplo cuyos  $n-1$  primeros elementos están formados según las  $n-1$  expresiones que aparecen en la parte superior de una de las reglas precedentes y el  $n$  elemento del  $n$ -tuplo está formado según la expresión que aparece en la parte inferior de la misma regla.

A parte de las cuatro últimas reglas, que definen la lógica de la identidad y de las descripciones, el resto de las reglas de  $\mathcal{H3}$  están divididas en dos grupos. El primero de ellos está formado por reglas de introducción de signos, el segundo, por reglas de eliminación. En los nombres de las reglas, las expresiones entre paréntesis que preceden a la primera línea de cada regla, la E indica que se trata de la regla de eliminación del signo o conjuntos de signos que la siguen, y la I, que se trata de una regla de introducción.

Aunque luego vamos a dar una definición estricta de deducción en  $\mathcal{H3}$ , es conveniente hacer algunos comentarios informales sobre la forma de las reglas y las deducciones. Como hemos visto, en cada línea de una regla e, igualmente, en cada línea de una deducción, encontramos primero un número natural, simbolizado en las reglas por  $n$  o  $m$ , que indica el puesto de la fórmula que sigue en la deducción. Este número opera como nombre de la línea. A continuación de este número aparecen una serie de números entre paréntesis, simbolizados en las reglas por la letra  $m$  con subíndices, que remiten a los nombres de los supuestos de que depende la línea en cuestión. Como vemos, la única regla que reduce el número de supuestos de que depende la conclusión de una regla es la regla de eliminación de supuestos (ES). La conclusión de una aplicación de la regla de consecuencia en la lógica de jutores (JC) depende de todos los supuestos de que dependen cada una de las premisas de la regla. En el resto de los casos la conclusión depende de los mismos supuestos que la premisa de la regla. A continuación de la indicación sobre los supuestos de que depende la fórmula aparece la fórmula misma y, finalmente, en algunos casos, una condición supletoria. En el caso de la regla (JC) se trata de la condición siguiente: la conclusión debe ser consecuencia lógica,

en lógica de enunciados, de las premisas de la regla. En el caso de la regla de eliminación del cuantor existencial nominal (E $\forall$ ), se exige que el parámetro de predicado monádico que aparece en la conclusión como resultado de la eliminación del cuantor, sea nuevo en la deducción. Además, cuando un parámetro de predicado monádico aparece en la conclusión como resultado de una aplicación de la regla (E $\forall$ ), entonces ese parámetro queda marcado en dependencia del resto de los parámetros que forman el predicado de las descripciones  $\langle P_1^1, \dots, P_h^1 \rangle$  que aparecen en la premisa de la regla. Dado que estas descripciones cumplen en L3 la función de parámetros de individuo, la condición podría parafrasearse, utilizando parámetros de individuo como signos definidos, diciendo que el parámetro de individuo que aparece en la conclusión de la regla (E $\forall$ ) queda marcado en dependencia del resto de los parámetros de individuo que aparecen en la conclusión de la regla.

La indicación  $P_j^1(P_1^1, \dots, P_h^1)$  que aparece después de la conclusión de la regla que comentamos, indica en dependencia de qué predicados queda marcado el predicado que aparece en la conclusión como consecuencia de la aplicación de la regla.

Las condiciones impuestas sobre la regla de introducción del cuantor universal nominal (I $\forall$ ) y sobre la regla de introducción de la combinación de signos  $\neg$ - $\wedge$  (I $\neg$ - $\wedge$ ) son precisas para evitar la deducción de conclusiones semánticamente incorrectas. Blau ha mostrado<sup>(3)</sup> la necesidad de estas condiciones para la lógica bivalente. La necesidad se transmite directamente a L3, puesto que las fórmulas que se emplean para mostrar la necesidad de estas condiciones son también fórmulas de L3, y el razonamiento es similar en ambos casos. No entraremos en este tema. Las dos condiciones primeras de la regla son claras. La tercera condición precisa de una aclaración: un parámetro de predicado monádico es dependiente o, simplemente, depende de otro pará-

metro  $P_j^1$  cuando o bien el primero, al que llamamos  $P_k^1$  ha sido marcado en dependencia de  $P_j^1$  o bien hay un parámetro  $P_h^1$  tal que  $P_h^1$  depende de  $P_j^1$  y  $P_k^1$  depende de  $P_h^1$ . Las condiciones impuestas sobre las aplicaciones de la regla (IA) son las mismas que las de la regla (I7-Λ).

Podemos pasar ahora a las definiciones de deducción y demostración en N3.

#### Definición 5.2.1.1 Deducción en N3

Una deducción en N3, N3-deducción, de la fórmula F a partir del conjunto finito  $M^0$  es una secuencia finita de líneas  $Z_1, \dots, Z_n$  que tienen las siguientes propiedades:

(i) Cada línea  $Z_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tiene la forma

$$i (m_1, \dots, m_n) \quad \text{II} \quad P_k^1(P_j^1, \dots, P_h^1)$$

donde  $i$  es el número de la línea,  $(m_1, \dots, m_n)$  la indicación, posiblemente inexistente, de los números de las líneas de los supuestos de que depende II, II es una fórmula de L3 y  $P_k^1(P_j^1, \dots, P_h^1)$  es el marcador de descripciones, que tampoco ha de aparecer necesariamente en la línea y que se añade a esta cuando se ha obtenido por medio de la regla (E∨).

(ii) La fórmula que aparece en  $Z_n$  es F y F depende sólo de supuestos en  $M^0$ .

(iii) No hay ningún parámetro  $P_j^1$  de los que aparecen en F y  $M^0$  que haya sido marcado en ningún lugar de la deducción.

(iv) Cada una de las líneas  $Z_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) aparece en la deducción como conclusión de una aplicación

de una de las reglas (13) - (1) cuyas premisas, si las hubiere, son elementos anteriores de la deducción o es el resultado de la eliminación o introducción por definición de un signo en líneas anteriores de la deducción.

Definición 5.2.1.2

$F$  es deducible del conjunto  $\Pi$  de supuestos en  $\mathcal{H}3$ ,  $\Pi \stackrel{\mathcal{H}3}{\vdash} F : \Leftrightarrow$  Hay un subconjunto finito  $\Pi^0$  de  $\Pi$  y una  $\mathcal{H}3$ -deducción de  $F$  a partir del conjunto de supuestos  $\Pi^0$ .

Definición 5.2.1.3

La fórmula  $F$  es demostrable en  $\mathcal{H}3$ ,  $\stackrel{\mathcal{H}3}{\vdash} F : \Leftrightarrow$  Hay una  $\mathcal{H}3$ -deducción de  $F$  a partir de la clase vacía de supuestos.

5.2.2 Corrección de  $\mathcal{H}3$  respecto a la consecuencia

Debido a las peculiaridades de este cálculo, la prueba de corrección es algo más compleja que en los otros cálculos que hemos tratado en este trabajo. La dificultad principal estriba en el tratamiento de las fórmulas en que aparecen descripciones derivadas de la aplicación de la regla de eliminación del cuantor existencial. Como ya hemos dicho, el método de demostración y la construcción misma de la prueba sigue muy de cerca el desarrollo de teoremas análogos, para la lógica bivalente, en Blau (1979)<sup>(4)</sup>.

Consideremos la secuencia  $F_1, \dots, F_n, \dots, F_p$  de todas las fórmulas en una  $\mathcal{H}3$ -deducción  $\Phi$ . Para cada número de línea

$n$  ( $1 \leq n \leq r$ ) sea  $S_n$  el conjunto  $\{S_{n_1}, \dots, S_{n_m}\}$  de los supuestos de que depende la línea  $n$ . Llamamos introducción de descripción (para  $P_j^1$ ) a cada uno de los condicionales  $\forall X F[X] \rightarrow F[P_j^1]$  que se forman uniendo con un condicional la premisa y la conclusión de cada aplicación de la regla (E $\forall$ ). Llamamos relevantes para  $F_n$  aquellas introducciones de descripción tales que el parámetro  $P_j^1$  o bien aparece en la fórmula  $F_n$  misma o en  $S_n$  o bien hay un parámetro  $P_k^1$  dependiente de  $P_j^1$  que aparece en  $F_n$  o en  $S_n$ . El conjunto de las introducciones de descripción que son relevantes para  $F_n$  lo designamos con  $DR_n$ . Entonces podemos demostrar el siguiente lema:

Lema 5.2.2.1

Sea  $H$  un conjunto finito de fórmulas y  $P_k^1$  un parámetro de predicado que no aparece en  $H, F[X], G$ .

Entonces,

$$\forall X F[X] \rightarrow F[P_k^1], H \Vdash_{L3} G \Rightarrow H \Vdash_{L3} G$$

Demostración: Se puede afirmar de la conjunción  $\hat{H}$

de las fórmulas en  $H$  que

$$\begin{aligned} & \Vdash_{L3} (\forall X F[X] \rightarrow F[P_j^1]) \rightarrow (\hat{H} \rightarrow G) \text{ por supuesto} \\ & \Vdash_{L3} \forall X ((\forall X F[X] \rightarrow F[X]) \rightarrow (\hat{H} \rightarrow G)) \text{ por prop.1.7.2.4} \\ & \Vdash_{L3} \forall X ((\forall X F[X] \rightarrow F[X]) \rightarrow (\hat{H} \rightarrow G)) \text{ ley lógica en } L3 \\ & \Vdash_{L3} (\forall X F[X] \rightarrow \forall X F[X]) \rightarrow (\hat{H} \rightarrow G) \text{ ley lógica en } L3 \\ & \Vdash_{L3} \hat{H} \rightarrow G \end{aligned}$$

es decir,

$$H \Vdash_{L3} G.$$

Lema 5.2.2.2

Si  $\forall X F[X] \rightarrow F[P_j^1]$  es una introducción de descripción que no pertenece al conjunto  $DR_n$  y  $P_j^1$  no aparece en  $H$  y se puede afirmar que

$\forall x(Fx) \rightarrow F(c, P_j^1)$ ,  $\mathcal{H}, DR_n, S_n \Vdash_{L3} F_n$ , entonces no puede afirmar que  $\mathcal{H}, DR_n, S_n \Vdash_{L3} F_n$ .

Demostración: Si  $P_j^1$  no aparece en  $DR_n$ , entonces no aparece en  $S_n$  ni en  $F_n$ . Supuesto que  $P_j^1$  aparece en una fórmula  $\forall x(Gx) \rightarrow G(c, P_k^1)$  de  $DR_n$ , entonces  $P_k^1$  o bien es  $P_j^1$  o bien depende de  $P_j^1$ , es decir,  $P_k^1$  o un parámetro  $P_h^1$  dependiente de  $P_j^1$  aparece en  $S_n$  o  $F_n$ . Entonces  $P_j^1$  o un parámetro  $P_h^1$  dependiente de  $P_j^1$  aparece en  $S_n, F_n$ . En ese caso,  $\forall x(Fx) \rightarrow F(c, P_j^1)$  sería un elemento de  $DR_n$ , contra el supuesto. En este caso, la afirmación se sigue por el lema anterior.

Lema 5.2.2.3

$$S_n, DR_n \Vdash_{L3} F_n$$

Demostración: Por inducción fuerte según el número  $n$  de cada línea. Base de inducción: 1. Si  $F_n$  se ha obtenido por (IS), la afirmación se cumple trivialmente, puesto que  $\{F_n\} = S_n$ . 2. Si  $F_n$  se ha obtenido por una de las reglas  $(I_1=)$  - (C), entonces la afirmación se sigue, puesto que la conclusión de la regla es L3-verdadera.

Paso de inducción: 1. Supuesto que  $F_n$  es  $F_j \rightarrow F_m$  y que se ha obtenido de  $F_j, F_m$  por (ES), entonces, dado que  $S_n \cup \{F_j\} = S_m$  y que por supuesto de inducción vale que  $S_m, DR_m \Vdash_{L3} F_m$ , entonces vale que  $S_n, DR_n \Vdash_{L3} F_n$ , puesto que  $DR_m = DR_n$ .

2. Supongamos que  $F_n$  se ha obtenido de  $F_{m_1}, \dots, F_{m_j}$  por medio de (JC). Por supuesto de inducción vale que  $S_{m_1}, \dots, S_{m_j}, DR_{m_1}, \dots,$

$DR_{m_j} \Vdash_{L3} F_{m_1} \wedge \dots \wedge F_{m_j}$ . Dado que  $S_n = S_{m_1} \cup \dots \cup S_{m_j}$  y que

$F_{m_1} \wedge \dots \wedge F_{m_j} \Vdash_{L3} F_n$ , vale que  $S_n, DR_{m_1}, \dots, DR_{m_j} \Vdash_{L3} F_n$ . Por el

lema anterior se pueden eliminar los elementos de  $\bigcup_{i=m_1}^j DR_i$  que no

pertenecen a  $DR_n$ . Por lo tanto se puede afirmar que  $S_n, DR_n \Vdash_{L3} F_n$ .

3. Supongamos que  $F_n$  es  $F[A]$  y que se ha obtenido de  $F_m \equiv \bigwedge X F[X]$ . Por supuesto de inducción vale que  $S_m, DR_m \Vdash_{L3} \bigwedge X F[X]$ . Dado que  $S_m = S_n$  y que  $DR_m \subseteq DR_n$  y que  $\bigwedge X F[X] \Vdash_{L3} F[A]$ , se sigue la afirmación.

4. Supongamos que  $F_n$  sea  $\neg F[A]$  y que se ha obtenido de  $F_m \equiv \neg \bigwedge X F[X]$  por medio de  $(E\neg)$ . Por supuesto de inducción,  $S_m, DR_m \Vdash_{L3} F_m$ . Puesto que  $S_m = S_n$  y  $DR_m \subseteq DR_n$  y que  $\neg \bigwedge X F[X] \Vdash_{L3} \neg F[A]$ , se sigue la afirmación.

5. Supuesto que  $F_n$  es  $\bigvee X F[X]$  y que se ha obtenido de  $F[A]$  por  $(IV)$ , entonces, por supuesto de inducción vale que  $S_m, DR_m \Vdash_{L3} F[A]$ . Puesto que  $S_m = S_n$  y que  $F[A] \Vdash_{L3} \bigvee X F[X]$ , vale que  $S_n, DR_m \Vdash_{L3} \bigvee X F[X]$ . Los elementos de  $DR_m$  que no pertenecen a  $DR_n$  se pueden eliminar, según el lema 5.2.2. Por tanto, la afirmación se cumple en este caso también.

6. Supuesto que  $F_n$  es  $F[P_i^1]$  y que se ha obtenido de  $F_m \equiv \bigvee X F[X]$  por medio de  $(EV)$ , entonces, por supuesto de inducción, vale que  $S_m, DR_m \Vdash_{L3} \bigvee X F[X]$  y, con ello,  $DR_m, S_m, \bigvee X F[X] \rightarrow F[P_i^1] \Vdash_{L3} F[P_i^1]$ . Ya que  $S_m = S_n$  y  $DR_n = DR_m \cup \{\bigvee X F[X] \rightarrow F[P_i^1]\}$ , se sigue la afirmación.

7. Si  $F_n$  es  $\bigwedge X F[X]$  y se ha obtenido de  $F_m \equiv F[P_i^1]$  por  $(IA)$ , entonces, por supuesto de inducción, vale que  $S_m, DR_m \Vdash_{L3} F[P_i^1]$ . Según la segunda condición de la regla  $(IA)$ ,  $P_i^1$  no aparece en  $S_n$  ni en  $F_n$ . Si  $P_i^1$  aparece en una fórmula  $\bigvee X G[X] \rightarrow G[P_j^1]$  de  $DR_n$ , entonces o bien  $P_j^1$  es  $P_i^1$  o  $P_j^1$  depende de  $P_i^1$ , es decir, o bien  $P_j^1$  o bien un parámetro  $P_h^1$ , dependiente de  $P_j^1$ , aparece en  $F_n, S_n$ , es decir, o bien  $P_j^1$  o bien un parámetro  $P_h^1$ , dependiente de  $P_i^1$ , aparece en  $F_n, S_n$ . Si es  $P_i^1$  mismo el parámetro que aparece en  $S_n$  o  $F_n$ , caemos en contradicción con la segunda condición de la regla  $(IA)$ . Si se trata de un parámetro  $P_h^1$  que depende de  $P_i^1$ , estamos en contradicción con la tercera condición. Por lo tanto,

$P_1^1$  no aparece en  $S_n, DR_n, F_n$ . Por el teorema de generalización vale que  $S_n, DR_n \Vdash_{L3} F_n$ .

8. Si  $F_n$  es  $\neg \wedge X F[X]$  y se ha obtenido por (I7-A) de  $F_m \equiv \neg F \circ P_3^1$ , entonces, por supuesto de inducción, podemos afirmar que

$S_m, DR_m \Vdash_{L3} \neg F[P_3^1]$ . De modo análogo al caso anterior podemos mostrar que  $P_1^1$  no aparece en  $S_n, DR_n, F_n$ . Por el teorema de generalización tenemos que  $S_n, DR_n \Vdash_{L3} \wedge X \neg F[X]$ . Ahora bien, para toda valoración  $\beta$  vale que  $\beta(S_n \wedge DR_n) = v. \Rightarrow \beta(\wedge X \neg F[X]) = v$ . Esto implica que  $\beta(\neg F[A]) = v$ , para toda descripción  $A$ . Entonces, para toda descripción  $A$ ,  $\beta(F[A]) \neq f$ . Por tanto,  $\beta(\wedge X F[X]) \neq f$  y  $\beta(\neg \wedge X F[X]) = v$ . Por tanto,  $S_n, DR_n \Vdash_{L3} \neg \wedge X F[X]$ . q.e.d.

#### Proposición 5.2.2.4

Si  $H$  es un conjunto de fórmulas y  $F$  una fórmula de  $L3$ , entonces  $H \Vdash_{H3} F \Rightarrow H \Vdash_{L3} F$ .

Demostración: Por supuesto existe una H3-deducción de  $F$  a partir de un conjunto finito  $H^0$ ,  $H^0 \subseteq H$ . Según el lema 5.2.2.3,  $S_F, DR_F \Vdash_{L3} F$ . Puesto que, por definición de deducción en H3, no hay ningún parámetro de predicado  $P_j^1$  de los que aparecen en  $H^0, F$  que haya sido marcado, entonces  $DR_F = \emptyset$ . Por otro lado,  $S_F \subseteq H^0$ . Por lo tanto,  $H \Vdash_{L3} F$ . q.e.d.

#### 5.2.3 Completud de L3 respecto a la consecuencia

De nuevo vamos a dar dos demostraciones distintas de la completud de H3. La primera de ellas, basada en la completud de A3, ya demostrada, es una simple transposición a H3 de una prueba similar de Blau<sup>(5)</sup> para la lógica bivalente. Su interés reside en poner en relación directa las deducciones en ambas:

cálculos. La segunda, que utiliza como idea básica la afirmación de que la demostrabilidad en N3 es una propiedad de demostrabilidad analítica, se desarrolla en el marco que se definió en el capítulo segundo. Antes de entrar en la primera de las dos demostraciones, necesitamos probar el siguiente lema:

Lema 5.2.3.1

Sean  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  N3-deducciones de  $F_1$  y  $F_2$  a partir de los conjuntos de supuestos  $M_1^0$  y  $M_2^0$ , respectivamente. Entonces existe una N3-deducción  $\Phi = \Phi'_1 \Phi'_2$  para  $F_2$  a partir de  $M_2^0$  en donde  $\Phi'_1$  es una N3-deducción de  $F_1$  a partir de  $M_1^0$ .

Demostración: Sea  $\Phi_1$  la secuencia  $Z_1^1, \dots, Z_n^1$  y  $\Phi_2$  la secuencia  $Z_1^2, \dots, Z_n^2$ . Definimos  $\Phi'_1$  como el resultado de la sustitución de todo parámetro  $P_j^1$  que aparezca marcado en  $\Phi_1$  por un nuevo parámetro  $P_1^1$  que no aparezca en  $M_1^0, M_2^0, \Phi_1, \Phi_2$ . Sea  $\Phi'_2$  la correspondiente sustitución en  $\Phi_2$ . Por fin, sea  $\Phi'_2$  el resultado de aumentar el número de cada línea de  $\Phi'_2$  en tantas unidades como líneas tenga  $\Phi'_1$ . Definimos  $\Phi$  como igual a  $\Phi'_1 \Phi'_2$ .  $\Phi$  es, claramente, una N3-deducción de  $F_2$  a partir de  $M_2^0$  y  $\Phi'_1$  una N3-deducción de  $F_1$  a partir de  $M_1^0$ .

Proposición 5.2.3.2.

Si  $H$  es un conjunto de fórmulas y  $F$  es una fórmula de L3, entonces

$$H \frac{\vdash}{A3} F \Rightarrow H \frac{\vdash}{N3} F$$

Demostración: Por el supuesto, existe una deducción en A3 para  $F$  a partir de un conjunto finito  $M^0, M^0 \subseteq H$ . Mostramos, por inducción según la longitud  $n$  de la deducción  $\mathcal{F}$  en A3, que existe una deducción en N3 para  $F$  a partir del conjunto  $M^0$  de supuestos.

Base de inducción: 1.  $F$  es un supuesto en  $\mathcal{F}$ , es decir,  $F \in H^0$ . Entonces

1. (1)  $F$  ES

es una H3-deducción de  $F$  a partir de  $H^0$ .

2.  $F$  es un axioma según el esquema axiomático Ax. 1. Entonces:

1.  $F$  JF

es una deducción de  $F$  en H3.

3.  $F$  es un axioma según el esquema axiomático Ax. 2. Entonces:

1. (1)  $\wedge x F(x)$  E $\wedge$   
 2. (1)  $F(a)$  EA  
 3.  $\wedge x F(x) \rightarrow F(a)$  ES

es una deducción de  $F$  a partir de  $H^0$ .

4.  $F$  es un axioma según Ax. 3. Entonces,

1. (1)  $\wedge x \neg F(x)$  ES  
 2. (1)  $\neg F(c) \vee P_j^1$  E $\wedge$ ,  $P_j^1$  nuevo para 1,3  
 3. (1)  $\neg \wedge x F(x)$  I  $\neg$ - $\wedge$   
 4.  $\wedge x \neg F(x) \rightarrow \neg \wedge x F(x)$  ES  
 5. (5)  $\neg \wedge x F(x)$  ES  
 6. (5)  $\neg F(c) \vee P_j^1$  E $\neg$ ,  $P_j^1$  nuevo para 5,7  
 7. (5)  $\wedge x \neg F(x)$  I  $\wedge$   
 8.  $\neg \wedge x F(x) \rightarrow \wedge x \neg F(x)$  ES  
 9.  $\neg \wedge x F(x) \leftrightarrow \wedge x \neg F(x)$  JF y def  $\leftrightarrow$ .

es una H3-deducción a partir de  $H^0$ .

5,6,7,8: Si  $F_n$  es un axioma según Ax. 4 - Ax.7, entonces

1.  $U_1$  (I $_1$ =) ... (\*)

es una H3-deducción de  $F_n$  a partir de  $H^0$ .

Paso de inducción: 1. Si  $F$  es  $H$  y se ha obtenido de fórmulas anteriores  $G$  y  $G \rightarrow H$  en  $\mathcal{F}$  por HP, entonces, por supuesto de inducción y por el lema precedente, hay una H3-deducción  $\Phi$ , con una línea

$$j. (j_1, \dots, j_h) \quad G$$

y con una línea final

$$m. (m_1, \dots, m_k) \quad G \rightarrow H$$

en donde las fórmulas de las líneas  $j_1, \dots, j_h, m_1, \dots, m_k$  son elementos de  $H^0$ . Esta deducción puede ampliarse con una línea

$$m+1. (j_1, \dots, j_h, m_1, \dots, m_k) \quad H \quad JC$$

y se obtiene una H3-deducción de  $F_n$  a partir de  $H^0$ .

2.  $F$  es  $H \rightarrow \Lambda XG[X]$  y se ha obtenido de una fórmula  $H \rightarrow G \langle P_j^1 \rangle$  donde  $P_j^1$  no aparece en el conjunto de supuestos ni en  $F$ . Entonces, por supuesto de inducción, si  $F_n$  se ha obtenido por RG, entonces hay una H3-deducción

$$H^0 \vdash_{H3} H \rightarrow G \langle P_j^1 \rangle$$

con una línea final

$$m. (m_1, \dots, m_k) \quad H \rightarrow G \langle P_j^1 \rangle$$

en la cual las fórmulas de las líneas  $m_1, \dots, m_k$  pertenecen a  $H^0$ . Por las condiciones de la definición de deducción en H3,  $P_j^1$  no está marcado. Además,  $P_j^1$  no aparece en las fórmulas de las líneas  $m_1, \dots, m_k, H, \Lambda XG[X]$ , según las condiciones de la regla RG. En tercer lugar, no hay ningún  $P_h^1$  dependiente de  $P_j^1$  que aparezca en las fórmulas de las líneas  $m_1, \dots, m_k$ , en  $H$  o en  $\Lambda XG[X]$ , puesto que en ellas no aparece ningún parámetro marcado en  $\Phi$ . Entonces  $\Phi$  prolongada en las líneas

$m+1.$	$(m-1)$	$H$	$IC$
$m+2.$	$(m_1, \dots, m_k, m-1)$	$\exists [cP_j^1]$	$IC$
$m+3.$	$(m_1, \dots, m_k, m-1)$	$\wedge KG[X]$	$IA$
$m+4.$	$(m_1, \dots, m_k)$	$H \rightarrow \wedge KG[X]$	$ES$

es una  $IK3$ -deducción de  $F$  a partir de  $H^0$ . q.e.d.

Proposición 5.2.3.3. Completud (restringida) de  $IK3$

Sea  $H^*$  un conjunto de fórmulas paramétricamente limitado y posiblemente vacío y  $F$  una fórmula de  $L3$ . Entonces,

$$H^* \Vdash_{L3} F \Rightarrow H^* \Vdash_{IK3} F$$

Demostración: Si  $H^* \Vdash_{L3} F$ , entonces  $H^* \Vdash_{A3} F$ , por la prop. 2.6.2. Por el lema anterior,  $H^* \Vdash_{IK3} F$ . q.e.d.

La completud de  $IK3$  en sentido general, así como la adecuación del cálculo, se sigue de la manera que cabe esperar, en un caso de la completud generalizada de  $A3$  y en el otro de la corrección y completud de  $IK3$  respecto a la consecuencia. A continuación, damos la segunda demostración de completud de  $IK3$ . El método de prueba es similar al que empleamos en el caso de  $A3$  y no vamos a repetir aquí el esquema de la demostración. Pasamos, pues, directamente, a justificar el siguiente lema:

Lema 5.2.3.4

Sea  $E_6$  la siguiente propiedad de conjuntos de fórmulas de  $L3$ : " $\exists$  es demostrable en  $L3$ ".  $E_6$  es una propiedad de demostrabilidad analítica.

Demostración:  $E_6$  es una propiedad de conjuntos finitos, puesto que sólo hay fórmulas de longitud finita en  $L3$ . Además, se cumple:

Sea  $\Pi = \{F_1, \dots, F_n\}$  un conjunto finito. Entonces,

(i) 1.  $(F_1 \vee \dots \vee (F_n \vee (F \vee \neg F))) \dots$  JC

y

1'.  $(F_1 \vee \dots \vee (F_n \vee (\neg F \vee \neg F))) \dots$  JC

son N3-demostraciones de  $\check{M} \vee (F \vee \neg F)$  y  $\check{M} \vee (\neg F \vee \neg F)$ . Es decir,  $\{\Pi, F, \neg F\} \in E_G$  y  $\{\Pi, \neg F, \neg \neg F\} \in E_G$  y se cumple la condición (i) de la definición de propiedad analítica de demostrabilidad.

Los puntos (ii) - (iv) de la definición de propiedad de demostrabilidad se cumplen también, puesto que existe la regla JC en N3.

(v) Supuesto que  $\{\Pi, c \ulcorner P_j^1 \urcorner\} \in E_G$  y  $P_j^1$  no aparece en  $\Pi$  ni en  $c$ , entonces existe una N3-demostración para  $\check{M} \vee F \ulcorner P_j^1 \urcorner$  o  $\check{M} \vee \neg F \ulcorner P_j^1 \urcorner$  según que  $c$  sea  $\wedge X F[X]$  o  $\neg \wedge X F[X]$ . Dado que  $P_j^1$  no aparece en  $\Pi$  ni en  $c$ , entonces se cumple que 1.  $P_j^1$  no ha sido marcado en alguna línea, por la condición (iii) de la definición de N3-deducción; 2.  $P_j^1$  no aparece en los supuestos de que depende  $\check{M} \vee F \ulcorner P_j^1 \urcorner$  o  $\check{M} \vee \neg F \ulcorner P_j^1 \urcorner$ , porque no existen y  $P_j^1$  no aparece en  $\wedge X F[X]$  ni en  $\neg \wedge X F[X]$ , porque no aparece en  $F$ ; 3. puesto que  $\check{M} \vee F \ulcorner P_j^1 \urcorner$  y  $\check{M} \vee \neg F \ulcorner P_j^1 \urcorner$  son la fórmula de una línea final de una N3-demostración, entonces no aparece en ellas ningún parámetro marcado, por la condición (iii) antes citada y, con ello, ningún parámetro dependiente de  $P_j^1$ . Por tanto se cumplen las tres condiciones de las reglas (IA) y (I $\neg$ - $\wedge$ ). Entonces la N3-demostración de

n.  $\check{M} \vee F \ulcorner P_j^1 \urcorner$

puede prolongarse como sigue

n+1.	(n+1)	$F \ulcorner P_j^1 \urcorner$	IS
n+2.	(n+1)	$\wedge X F[X]$	IA
n+3.	(n+1)	$\wedge X F[X] \vee \check{M}$	JC
n+4		$F \ulcorner P_j^1 \urcorner \rightarrow (\wedge X F[X] \vee \check{M})$	ES
n+5		$\check{M} \rightarrow (\wedge X F[X] \vee \check{M})$	JC



Proposición 5.2.3.5. Completud (restringida) de  $\mathbb{H}3$   
 Sea  $H^*$  un conjunto paramétricamente limitado y  
 posiblemente vacío de fórmulas y  $F$  una fórmula  
 de  $L3$ . Entonces

$$H^* \Vdash_{L3} F \Rightarrow H^* \vdash_{\mathbb{H}3} F.$$

Demostración: Si  $H^* \Vdash_{L3} F$ , entonces, por el teorema  
 de compacidad y el corolario 2.5.3, hay un subconjunto finito  $H^0$   
 de  $H^*$  tal que  $\{\neg(H^0), F\}$  es disyuntivamente válido. Por la prop.  
 2.5.4 y el lema que acabamos de demostrar,  $\{\neg(H^0), F\} \in E_6$ . Luego  
 hay un subconjunto finito  $H^0$  de  $H^*$  tal que  $\vdash_{\mathbb{H}3} \neg(H^0) \vee F$ . Por lo  
 tanto,  $H^0 \vdash_{\mathbb{H}3} F$ . Por definición de deducción en  $\mathbb{H}3$ ,  $H^* \vdash_{\mathbb{H}3} F$ . q.e.d.

La completud en sentido general se demuestra como  
 en los otros casos que hemos tratado anteriormente.

### 5.3 Cálculo $\mathbb{H}3$ de deducción natural para la lógica $J3$

Como hemos visto, la regla  $JC$  del cálculo  $\mathbb{H}3$  hace  
 mención de una noción que, en principio, suele ser extraña a los  
 cálculos habituales. Si bien, como hemos dicho más arriba, la  
 regla es correcta desde todos los puntos de vista y además sim-  
 plifica el proceso de deducción, no deja de ser interesante dar  
 una definición de un cálculo de deducción natural con un número  
 finito de reglas de deducción. Por otro lado, la comparación de  
 este cálculo para la lógica trivalente de enunciados con cálculos  
 similares para la lógica bivalente o para otras lógicas  $n$ -valentes  
 puede resultar instructivo.

En síntesis, los apartados siguientes muestran la

posibilidad de sustituir la regla JC por un conjunto de ocho reglas, cuatro para las negaciones, dos para la conjunción y dos para la disyunción que, en conjunto, logran los mismos resultados que JC sin necesidad de recurrir a las tablas de verdad o algoritmo equivalente. La posibilidad mencionada queda asegurada al demostrar la adecuación de HJ3 para la lógica de enunciados de L3.

5.3.1 Postulados de HJ3. Deducción y demostración en HJ3.

Las siguientes reglas de deducción son los postulados de HJ3: (IS) y (ES), como en H3. Además,

(I $\neg$ )	$m (m_1, \dots, m_k) \quad F \rightarrow G \wedge \neg G$
	$n (m_1, \dots, m_k) \quad \neg F$
(I $\neg$ -)	$m (m_1, \dots, m_k) \quad F$
	$n (m_1, \dots, m_k) \quad \neg F$
(E $\neg$ )	$m (m_1, \dots, m_k) \quad \neg F$
	$n (m_1, \dots, m_k) \quad F$
(E $\neg$ -)	$m (m_1, \dots, m_k) \quad \neg\neg F$
	$n (m_1, \dots, m_k) \quad \neg F$

(I $\wedge$ )	$m_i (m_{i,1}, \dots, m_{i,k})$	F
	$m_j (m_{j,1}, \dots, m_{j,h})$	H
	$n (m_{i,1}, \dots, m_{i,k}, m_{j,1}, \dots, m_{j,h})$ F $\wedge$ H	
(E $\wedge$ )	$m (m_1, \dots, m_k)$	F $\wedge$ H
	$n (m_1, \dots, m_k)$	F
	( $n (m_1, \dots, m_k)$ )	H )
(I $\vee$ )	$m (m_1, \dots, m_k)$	F
	$n (m_1, \dots, m_k)$	F $\vee$ H
	( $n (m_1, \dots, m_k)$ )	H $\vee$ F )
(E $\vee$ )	$m_i (m_{i,1}, \dots, m_{i,k})$	F $\vee$ H
	$m_j (m_{j,1}, \dots, m_{j,h})$	F $\rightarrow$ G
	$m_f (m_{f,1}, \dots, m_{f,\pi})$	H $\rightarrow$ G
	$n (m_{i,1}, \dots, m_{i,k}, m_{j,1}, \dots, m_{j,h}, m_{f,1}, \dots, m_{f,\pi})$ G	

Con respecto a estas reglas queremos hacer las siguientes observaciones: En primer lugar, entendemos aplicación de una regla de NJ3 de manera similar a como lo hicimos en H3, cambiando, naturalmente, las reglas a que se refiere la aplicación. Las reglas de conjunción y disyunción que hemos propuesto son las habituales en este tipo de cálculos, así como la primera regla de introducción de la negación. Las otras reglas se hacen necesarias por la existencia de dos tipos de negación en J3. En el caso de las reglas (E $\wedge$ ) e (I $\vee$ ) la línea que aparece entre paréntesis es:

una segunda posible conclusión. En realidad, hemos abreviado en una sola formulación dos reglas diferentes. La última regla es la habitual regla de casos.

Las nociones de NJ3-deducción y demostración se definen básicamente como en el caso de NJ, cambiando, naturalmente, la referencia a las reglas. No daremos aquí una definición explícita de estos conceptos, sino que pasamos a demostrar la corrección y completud de NJ3.

### 5.3.2 Corrección de NJ3 respecto a la consecuencia

#### Proposición 5.2.2.1

Sea  $H$  un conjunto, posiblemente vacío, de fórmulas y  $F$  una fórmula de L3. Entonces,

$$H \Vdash_{NJ3} F \Rightarrow H \Vdash_{J3} F.$$

Demostración: Si  $H \Vdash_{NJ3} F$ , entonces existe una NJ3-deducción de  $F$  a partir de un conjunto finito  $H^0, \dots, H^r$ , de supuestos. Si demostramos que para toda  $F_i$  en la secuencia  $F_1, \dots, F_n$  de las fórmulas de la NJ3-deducción de  $F$  ( $F = F_n$ ), se cumple que  $S_i \Vdash_{J3} F_i$ , donde  $S_i$  es el conjunto de supuestos de que depende la fórmula  $F_i$  en esa NJ3-deducción, el teorema queda demostrado.

Para completar la demostración del teorema de corrección de NJ3 precisamos probar, por lo tanto, el siguiente lema:

#### Lema 5.3.2.2

Sea  $F_i$  un elemento en la secuencia  $F_1, \dots, F_n$  de

las fórmulas que aparecen en una deducción en HJ3 de  $F_n$  a partir de un conjunto finito de supuestos  $H^0$ . Si  $S_i$  es el conjunto de supuestos de que depende  $F_i$ , entonces

$$S_i \Vdash_{J3} F_i.$$

Demostración: Por inducción fuerte según i.

Base de inducción: Si  $F_i$  se ha obtenido por IS, entonces el lema se sigue trivialmente, puesto que  $S_i = F_i$ .

Paso de inducción: 1. Si  $F_i$  es  $F_j \rightarrow F_m$  y se ha obtenido por ES, entonces, dado que  $S_i \cup \{F_j\} = S_m$  y que, por supuesto de inducción, vale que  $S_m \Vdash_{J3} F_m$ , vale también  $S_i \Vdash_{J3} F_i$ .

2. Si  $F_i$  se ha obtenido por medio de una de las restantes reglas de HJ3, entonces, por supuesto de inducción, para cada una de las premisas  $F_m$  de que se ha obtenido  $F_i$ , vale que  $S_m \Vdash_{J3} F_m$ . En el caso de que  $F_i$  se haya obtenido por medio de una regla de una sola premisa  $F_m$ , entonces  $S_m = S_i$ . En el caso de que la regla en cuestión tenga varias premisas  $F_{m_1}, \dots, F_{m_j}$ , entonces

$S_i = S_{F_{m_1}} \cup \dots \cup S_{F_{m_j}}$ . Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\Vdash_{J3} (F \rightarrow (G \wedge G)) \rightarrow \neg F$$

$$\Vdash_{J3} F \rightarrow \neg \neg F$$

$$\Vdash_{J3} \neg \neg F \rightarrow F ; \Vdash_{J3} \neg \neg F \rightarrow F ; \Vdash_{J3} \neg \neg F \rightarrow F$$

$$\Vdash_{J3} \neg \neg F \rightarrow \neg F ; \Vdash_{J3} \neg \neg F \rightarrow \neg F$$

$$\Vdash_{J3} F \rightarrow (H \rightarrow (F \wedge H))$$

$$\Vdash_{J3} (F \wedge H) \rightarrow F ; \Vdash_{J3} (F \wedge H) \rightarrow H$$

$$\Vdash_{J3} F \rightarrow (F \vee H) ; \Vdash_{J3} F \rightarrow (H \vee F)$$

$$\Vdash_{J3} (F \vee H) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (H \rightarrow G) \rightarrow G).$$

Por tanto, del supuesto de inducción se sigue el lema en todos los casos. En consecuencia, el lema queda demostrado, y con él, la proposición 5.2.2.1. q.e.d.

### 5.3.3. Completud de NJ3 respecto a la consecuencia

Damos en este apartado dos demostraciones diferentes de la completud de NJ3. De nuevo, la segunda de ellas se basa en conceptos definidos en el capítulo segundo. Este es uno de los casos en que se ve con más claridad la ventaja de la utilización de propiedades de consistencia o demostrabilidad como base de las demostraciones de completud, por su mayor elegancia. La primera de las demostraciones está basada en los métodos de Kálmán, métodos que se pueden considerar standard en la demostración de completud de cálculos para la lógica de enunciados. Uno de los conceptos que empleamos, el de secuencia de formación de una fórmula  $F$  está tomado de Kanin<sup>(6)</sup> y hasta cierto punto, la prueba misma está inspirada por la correspondiente demostración de Kanin para la lógica de enunciados bivalente<sup>(7)</sup>.

Definimos en primer lugar el concepto de secuencia de formación. Sea  $\bar{M}$  un conjunto finito de fórmulas no  $j$ -complejas. La secuencia de fórmulas  $I = G_1, \dots, G_n$  es una secuencia de formación de la fórmula  $F$  a partir del conjunto  $\bar{M}$  si y sólo si se cumple que  $n$  es el más pequeño número tal que  $G_n$  es  $F$  y para cada  $G_i \in I$  se cumple que o bien  $G_i \in \bar{M}$  o bien tiene la forma  $j^1 G_{i-k}$  o  $G_{i-k} j^2 G_{i-h}$ , donde  $j^1$  es un functor monádico y  $j^2$  es un functor diádico y  $G_{i-k}$  y  $G_{i-h}$  son elementos anteriores a  $G_i$  en  $I$ . Sea  $K \subseteq \bar{M}$  el más pequeño conjunto a partir del cual se puede definir una secuencia de formación para  $F$ . Es claro que  $K$  es un subconjunto del conjunto de los elementos en una secuencia de formación  $I$  de  $F$ .

Si pensamos en la existencia de tablas de verdad en J3, el siguiente enunciado se revelará trivial:  $F$  es J3-válido si existe un conjunto  $K$  y una secuencia de formación  $I$  de  $F$  tal

que para todas las e-valoraciones  $\beta$  de las fórmulas de  $H$ ,  
 $\beta(F) = v$ .

Supongamos definidas como más arriba una fórmula  $F$  y una secuencia de formación  $I$  de  $F$  a partir del más pequeño conjunto  $M$  que permita definir a  $I$ . Sea  $N_I$  el conjunto de los elementos de  $I$  y  $\underline{B}$  el conjunto de las e-valoraciones de  $M$ . Definimos una familia de funciones  $\{*_\beta\}_{\beta \in \underline{B}}$  tales que para cada  $\beta \in \underline{B}$

$$*_\beta : N_I \longrightarrow N_I \cup N_{\perp I} \cup N_{+ I},$$

donde  $N_{\perp I}$  es la clase de las fórmulas  $\perp G_i$  cuando  $G_i \in N_I$  y  $N_{+ I}$  es la clase de las fórmulas  $+ G_i$ , cuando  $G_i \in N_I$  y, además

$$*_\beta(G_i) = \begin{cases} G_i, & \text{si } \beta(G_i) = v \\ \perp G_i, & \text{si } \beta(G_i) = f \\ + G_i, & \text{si } \beta(G_i) = i \end{cases}$$

Es decir, para una fórmula  $F$ , una valoración  $\beta$  y una secuencia de formación  $I$  de  $F$ , todas ellas fijadas de antemano,  $*_\beta$  es una función de los elementos de la secuencia  $I$  tal que atribuye a cada fórmula  $G_i$  en la secuencia una fórmula  $*_\beta(G_i)$  que coincide con  $G_i$  si  $G_i$  es verdadera en la e-valoración y una fórmula  $\perp G_i$  (que puede leerse 'es falso que  $G_i$ ' <sup>(3)</sup>) o  $+ G_i$  ( $G_i$  es indeterminada') en el caso de que  $G_i$  sea falsa o indeterminada en  $\beta$ . Entonces podemos demostrar el siguiente lema, central en la prueba de completud que queremos desarrollar:

Lema 5.3.3.1

Sea  $H$  el más pequeño conjunto de fórmulas no  $j$ -complejas a partir del cual se puede definir una secuencia de formación  $I$  para la fórmula  $F$ . Suponemos definidos, para una e-valoración  $\beta$  una función  $*_\beta$  de la manera indicada más arriba. Sea

además  $*_{\beta} H = \{ *_{\beta} (G_i) \mid G_i \in H \}$ . Entonces  
 $*_{\beta} H \stackrel{\text{HJ3}}{\vdash} *F$ .

Demostración: Por inducción fuerte según la longitud de la secuencia de formación  $I$  de  $F$  a partir de  $i$ . (En lo que sigue, dado que  $\beta$  está fijada, hablamos simplemente de  $*H, *F, *G$ , etc. en vez de  $*_{\beta} H, *_{\beta}(F), *_{\beta}(G) \dots$ ).

Base de inducción:  $n = 1$ . Entonces  $\{ *F \}$  es  $*H$  y el lema se sigue trivialmente.

Paso de inducción. Supuesto de inducción: Si  $G_i$  y  $G_j$  pertenecen a  $H$  y  $j \neq i$  son menores que  $n$ , entonces se cumple que  $*H \stackrel{\text{HJ3}}{\vdash} *G_i$  y  $*H \stackrel{\text{HJ3}}{\vdash} *G_j$ . Entonces,

1. Supongamos que  $F$  es de la forma  $\neg G_i$ . Puede ocurrir que  $\beta(G_i) = v$  o  $\beta(G_i) = f$  o  $\beta(G_i) = i$ . Consideramos estos tres casos en 1.1, 1.2 y 1.3, respectivamente.

1.1 Si  $\beta(G_i) = v$ , entonces  $*G_i \equiv G_i$  y  $*F \equiv \perp \neg G_i$ . De aquí se sigue, por supuesto de inducción, la demostrabilidad de  $\frac{}{\text{HJ3}} \perp \rightarrow \perp$

y la regla NP que  $*H \stackrel{\text{HJ3}}{\vdash} \perp \neg G_i$ , es decir,  $*H \stackrel{\text{HJ3}}{\vdash} *F$ . (Nótese que aquí, y a lo largo de toda la demostración suponemos demostradas una serie de tesis de HJ3 y de reglas de deducción admisibles en HJ3 que sólo demostraremos al final del capítulo, en la prop. 5.2.3.5).

1.2 Si  $\beta(G_i) = f$ , entonces  $*G_i \equiv \perp G_i$  y  $*F \equiv \perp F \neg G_i$ . Por supuesto de inducción se cumple  $*H \stackrel{\text{HJ3}}{\vdash} \perp G_i$ . Podemos ampliar la correspondiente deducción por medio de las siguientes líneas

m (m <sub>1</sub> , ..., m <sub>j</sub> )	$\perp G_i$	
1 (m <sub>1</sub> , ..., m <sub>j</sub> )	$\neg \neg G_i$	per. 1
2 (m <sub>1</sub> , ..., m <sub>j</sub> )	$\neg G_i$	4- $\neg$

por tanto,  $*H \stackrel{\text{HJ3}}{\vdash} *F$ . (Nota: aquí, y en el resto del apartado, cuando el número de una línea es 1, 2, ... y la línea aparece delva-

jo de otra con la indicación  $m, k, \dots$  debe entenderse que el número es  $m+1, m+2, \dots, k+1, \dots$ .

1.3 Si  $\beta(G_i) = \iota$ , entonces  $*G_i \equiv +G_i$  y  $*F \equiv +F \equiv +\neg G_i$ . Del supuesto de inducción y la tesis  $\frac{}{HJ3} +F \rightarrow +\neg F$  se sigue, por EP,  $*H \frac{}{HJ3} *F$ .

2. F es de la forma  $\neg G_i$ .

2.1 Si  $\beta(G_i) = \nu$ , entonces  $*G_i \equiv G_i$  y  $*F \equiv \perp F \equiv \perp \neg G_i$ . Del supuesto de inducción y  $\frac{}{HJ3} F \rightarrow \perp \neg F$ , se sigue  $*M \frac{}{HJ3} *F$ .

2.2 Si  $\beta(G_i) = f$ , entonces  $*M \frac{}{HJ3} *F$  se sigue del supuesto de inducción y  $\frac{}{HJ3} \perp F \rightarrow \neg F$ .

2.3 Si  $\beta(G_i) = \iota$ , entonces, por supuesto de inducción, vale que  $*H \frac{}{HJ3} +G_i$ . Ampliamos la correspondiente deducción con las líneas siguientes:

$m (m_1, \dots, m_j)$	$+G_i$	
$1 (m_1, \dots, m_j)$	$\neg G_i \wedge \neg \neg G_i$	Def. +
$2 (m_1, \dots, m_j)$	$\neg G_i$	E $\wedge$

Por tanto,  $*H \frac{}{HJ3} *F$ .

3. F tiene la forma  $G_i \wedge G_j$

3.1 Si  $\beta(G_i) = \beta(G_j) = \nu$ , entonces  $*G_i = G_i$ ,  $*G_j = G_j$  y  $*F = (G_i \wedge G_j)$ . Por supuesto de inducción vale que  $*H \frac{}{HJ3} *G_i$  y que  $*H \frac{}{HJ3} *G_j$ . Existe, por tanto, una deducción  $*H \frac{}{HJ3} *G_i \wedge *G_j$ , es decir,  $*H \frac{}{HJ3} *F$ .

3.2 Si  $\beta(G_i) = \nu$  y  $\beta(G_j) = f$ , entonces del supuesto de inducción y  $\frac{}{HJ3} \perp F \rightarrow \perp (F \wedge H)$  se sigue  $*H \frac{}{HJ3} *F$ .

3.3 Si  $\beta(G_i) = \nu$  y  $\beta(G_j) = \iota$ , entonces del supuesto de inducción y  $\frac{}{HJ3} F \rightarrow (+G \rightarrow +(F \wedge G))$  se sigue  $*H \frac{}{HJ3} *F$ .

3.4, 3.5, 3.6. Si  $\beta(G_i) = f$  y  $\beta(G_j) = \nu, f$  o  $\iota$ , entonces el lema se sigue del supuesto de inducción y  $\frac{}{HJ3} \perp F \rightarrow \perp (F \wedge G)$ .

3.7 Si  $\beta(G_i) = \iota$  y  $\beta(G_j) = \nu$ , entonces el lema se sigue del supuesto de inducción y de  $\frac{}{HJ3} F \rightarrow (+G \rightarrow +(F \wedge G))$ .

3.8 Si  $\beta(G_i) = \bar{1}$  y  $\beta(G_j) = f$ , entonces se sigue el lema del supuesto de inducción y  $\overline{1J3} \perp F \rightarrow \perp(F \wedge G)$ .

3.9 Si  $\beta(G_i) = \bar{1}$  y  $\beta(G_j) = \bar{1}$ , entonces se sigue la afirmación del lema del supuesto de inducción y  $\overline{1J3} +F \rightarrow (+G \rightarrow +(F \wedge G))$ .  
q.e.d.

Proposición 5.3.3.2. Completud de 1J3

- (a)  $\overline{1J3} F \Rightarrow \overline{1J3} F$   
 (b)  $\overline{1J3} F \Rightarrow \overline{1J3} F$ .

Demostración: (a) Si  $F$  es válido en  $J3$ , entonces para toda e-valoración  $\beta$  se cumple que  $\beta(F) = v$  y, por tanto,  $*_{\beta} F = F$ , para toda función  $*_{\beta}$ . Sea  $I$  una secuencia de formación a partir del conjunto  $N$ . Por el lema anterior se cumple que

$*_{\beta} \overline{1J3} *_{\beta} F$ , es decir,

$$*_{\beta}^{G_1}, \dots, *_{\beta}^{G_j} \overline{1J3} *_{\beta} F$$

donde  $G_h$  ( $1 \leq h \leq j$ ) es un elemento de  $N$ . Puesto que para toda e-valoración  $\beta$  tal que  $\beta(G_k) = v$  hay exactamente dos e-valoraciones  $\beta'$  y  $\beta''$  tales que  $\beta'(G_k) = f$  y  $\beta''(G_k) = \bar{1}$  y  $\beta', \beta''$  y se diferencian como máximo en la valoración de  $G_k$ , entonces se cumple también que

- (1)  $*_{\beta}^{G_1}, \dots, *_{\beta}^{G_{j-1}}, *_{\beta}^{G_j} \overline{1J3} F$   
 (2)  $*_{\beta'}^{G_1}, \dots, *_{\beta'}^{G_{j-1}}, \perp^{G_j} \overline{1J3} F$   
 (3)  $*_{\beta''}^{G_1}, \dots, *_{\beta''}^{G_{j-1}}, +^{G_j} \overline{1J3} F$

donde, es claro, se cumple que  $*_{\beta}(G_h) = *_{\beta'}(G_h) = *_{\beta''}(G_h)$  para  $1 \leq h \leq j-1$ . En consecuencia, existen también las siguientes deducciones:

- (1')  $*_{\beta}^{G_1}, \dots, *_{\beta}^{G_{j-1}} \overline{1J3} \perp^{G_j} \rightarrow F$   
 (2')  $*_{\beta'}^{G_1}, \dots, *_{\beta'}^{G_{j-1}} \overline{1J3} \perp^{G_j} \rightarrow F$

$$(3') \quad *_{\beta} G_1, \dots, *_{\beta} G_{j-1} \overline{\text{NJ3}} + G_j \rightarrow F.$$

Puesto que  $\overline{\text{NJ3}} (F \rightarrow G) \rightarrow ((\perp F \rightarrow G) \rightarrow ((+F \rightarrow G) \rightarrow G))$ , de (1'), (2') y (3'), por MP se sigue

$$*_{\alpha} G_1, \dots, *_{\beta} G_{j-1} \overline{\text{NJ3}} F.$$

Del mismo modo, se pueden eliminar el resto de los supuestos de la última deducción. Con ello queda demostrado que existe una NJ3-demostración de  $F$ , y la parte (a) de la proposición está demostrada.

(b): Si  $M \overline{\text{J3}} F$ , entonces  $\{\hat{M}, \neg F\}$  es J3-insatisfacible. Por el teorema de compacidad aplicado a J3, tenemos que existe un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $\{\hat{M}^0, \neg F\}$  es J3-insatisfacible. Por lo tanto,  $\overline{\text{J3}} \neg(\hat{M}^0) \vee F$ . Por (a) se sigue que  $\overline{\text{NJ3}} \neg(\hat{M}^0) \vee F$  y, de aquí que  $M^0 \overline{\text{NJ3}} F$ . Por definición de deducción en NJ3,  $M \overline{\text{NJ3}} F$ . q.e.d.

De la completud y corrección de NJ3 se sigue la adecuación de NJ3 y, con ello, la posibilidad de sustituir en NJ3 la regla JC por el conjunto de reglas que definen N3, puesto que  $F_1, \dots, F_m \overline{\text{J3}} F$  equivale a  $F_1, \dots, F_m \overline{\text{NJ3}} F$ .

Damos a continuación la segunda demostración de la completud de NJ3, basándonos en que la propiedad  $E_7$  de los conjuntos de fórmulas tales que la disyunción de sus elementos es demostrable en NJ3 es una propiedad de demostrabilidad analítica. Dado que esta demostración es muy semejante a otras realizadas anteriormente, vamos a eliminar en su formulación todos los pasos que no nos parezcan estrictamente necesarios. Los números entre paréntesis remiten a las afirmaciones correspondientes del lema 5.2.3.5 con que se cierra el capítulo.

Lema 5.3.3.3

Sea  $E_7$  la siguiente propiedad de conjuntos de fórmulas: La disyunción de los elementos del conjunto  $H$  es demostrable en  $HJ3$ .  $E_7$  es una propiedad de demostrabilidad analítica para  $J3$ .

Demostración:  $E_7$  es una propiedad de conjuntos

- finitos. Además se cumple que: (i) Si  $H$  es un conjunto finito, entonces  $\frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} \checkmark \forall (F \vee \neg F)$  y  $\frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} \checkmark \forall (\neg F \vee \neg \neg F)$ , por  $E3$  y  $J3$ .  
 (ii) Si  $\frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} \checkmark \forall \neg \neg F$ , entonces, por  $E3$  y  $E\forall$ ,  $\frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} \checkmark \forall F$ .  
 (iii) Si  $\checkmark \forall F$  es  $HJ3$ -demostrable, entonces por  $E\forall$  y (b), (6) y (7),  $\checkmark \forall \exists \exists F$  es también  $HJ3$ -demostrable. Similar afirmación se puede hacer si  $\alpha_1, \alpha_2$  son  $F$  y  $G$  o  $\neg F$  y  $\neg G$ , por  $I\wedge$ , (17), (32) y  $E\forall$ .  
 (iv) Si  $\frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} \checkmark \forall b_1$  o  $\frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} \checkmark \forall b_2$ , entonces, por  $I\vee$ ,  $E3$ ,  $E\forall$  y (22)-(25),  $\frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} \checkmark \forall b$ .

Proposición 5.3.3.4 Completud de  $HJ3$

Si  $H$  es un conjunto de fórmulas y  $F$  una fórmula de  $L3$ , entonces

$$H \Vdash_{J3} F \Rightarrow H \frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} F.$$

Demostración: Si  $H \frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} F$ , por el teorema de compacidad existe un subconjunto finito  $H^0$  de  $H$  tal que  $\{(H^0), \neg F\}$  es  $J3$ -insatisfacible. Por tanto, el conjunto  $\{\neg(H^0), F\}$  es disyuntivamente válido y posee, por la prop. 2.5.4, la propiedad  $E_7$ . Por tanto  $H^0 \frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} F$  y  $H \frac{\text{HJ3}}{\text{HJ3}} F$ .

Acabamos el capítulo con la demostración de un lema que recoge las pruebas de las tesis de  $HJ3$  que hemos citado a lo largo de las anteriores demostraciones sin dar allí su justificación. En los primeros casos se trata de demostrar la admisibilidad de ciertas reglas, en el resto probamos ciertas tesis de  $HJ3$ .

## Lema 5.3.3.5

Las reglas (1) - (4), (8) y (9) son admisibles en NJ3. Las fórmulas que aparecen en (5) - (7), (10)-(32) son tesis de NJ3.

(1) DM1	$m (m_1, \dots, m_j)$	$\neg(F \vee H)$
	$n (m_1, \dots, m_j)$	$\neg F \wedge \neg H$
(2) DM2	$m (m_1, \dots, m_j)$	$\neg F \wedge \neg H$
	$n (m_1, \dots, m_j)$	$\neg(F \vee H)$
(3) DM3	$m (m_1, \dots, m_j)$	$\neg(F \wedge H)$
	$n (m_1, \dots, m_j)$	$\neg F \vee \neg H$
(4) DM4	$m (m_1, \dots, m_j)$	$\neg F \vee \neg H$
	$n (m_1, \dots, m_j)$	$\neg(F \wedge H)$

Antes de entrar en la demostración de la admisibilidad de estas cuatro reglas derivadas, que llamaremos DM1 - DM4 por ser versiones en J3 de las leyes de De Morgan, demostramos tres tesis y la regla derivada ECQ (ex contradictione quodlibet):

(5)	$\frac{}{HJ3} F \rightarrow \neg\neg F$	
(6)	$\frac{}{HJ3} F \rightarrow \neg\neg\neg F$	
(7)	$\frac{}{HJ3} F \rightarrow \neg\neg\neg\neg F$	
(8) ECQ	$m (m_1, \dots, m_j)$	$F \wedge \neg F$
	$n (m_1, \dots, m_j)$	$H$

Demostraciones:

(5)	$\frac{}{HJ3} F \rightarrow \neg\neg F$	
1. (1)	$F$	IS
2. (2)	$\neg\neg F$	IS
3. (2)	$\neg F$	EN $\neg\neg$ , 2
4. (1,2)	$F \wedge \neg F$	IA, 1, 3
5. (1)	$\neg\neg\neg F$	EN, 2, 4 I
6. (1)	$\neg\neg F$	EN $\neg\neg$ , 5
7	$F \rightarrow \neg\neg F$	DE 1, 6

(6) y (7) se demuestran de similar manera. Proponemos a continuación la admisibilidad en HJ3 de la regla ECO: partiendo del supuesto de que la premisa de la regla ECO aparece en una HJ3-deducción, podemos prolongar esa deducción por medio de las líneas siguientes:

$m$	$(m_1, \dots, m_j)$	$F \wedge \neg F$	Supuesto
1. (1)		$\neg H$	IS
2. $(m_1, \dots, m_j)$		$F \wedge \neg F$	Supuesto
3. $(m_1, \dots, m_j)$		$\neg\neg H$	EN 1, 2, 1I
4. $(m_1, \dots, m_j)$		$H$	EN $\neg\neg$ , 3

Damos ahora las pruebas de la admisibilidad de DE1 y DE2. Las otras dos reglas DE3 y DE4 se demuestran de manera semejante.

(1) DE1	$m. (m_1, \dots, m_j)$	$\neg(F \vee H)$	Premisa de DE1
1. (1)		$F$	IS
2. (1)		$F \vee H$	IV, 1
3. $(m_1, \dots, m_j, 1)$		$(F \vee H) \wedge \neg(F \vee H)$	IA, $m, 2$
4. $(m_1, \dots, m_j)$		$\neg F$	EN, 1I, 1, 3
5. (5)		$H$	IS
6. (5)		$F \vee H$	IV, 5

7.	$(m_1, \dots, m_j, 5)$	$(F \vee H) \wedge \neg(F \vee H)$	$I \wedge, m, 6$
8.	$(m_1, \dots, m_j)$	$\neg H$	$ES, 5, 7, I \neg$
9.	$(m_1, \dots, m_j)$	$\neg F \wedge \neg H$	$I \wedge, 4, 8$

(2) DS2	m.	$(m_1, \dots, m_j)$	$\neg F \wedge \neg H$	Premisa de DS2
1.	(1)		$\neg \neg(F \vee H)$	IS
2.	(1)		$(F \vee H)$	$E \neg \neg, 1$
3.	(3)		$F$	IS
4.	$(m_1, \dots, m_j, 3)$		$F \wedge \neg F$	$E \wedge, m, I \wedge, 3$
5.	$(m_1, \dots, m_j, 3)$		$G \wedge \neg G$	ECQ, 4
6.	$(m_1, \dots, m_j)$		$F \rightarrow (G \wedge \neg G)$	ES 3, 5
7.	(7)		$H$	IS
8.	$(m_1, \dots, m_j, 7)$		$H \wedge \neg H$	$E \wedge, I \wedge, 7$
9.	$(m_1, \dots, m_j, 7)$		$G \wedge \neg G$	ECQ, 8
10.	$(m_1, \dots, m_j)$		$H \rightarrow (G \wedge \neg G)$	ES 8, 9
11.	$(m_1, \dots, m_j, 1)$		$G \wedge \neg G$	$E \vee, 2, 6, 10$
12.	$(m_1, \dots, m_j)$		$\neg \neg \neg(F \vee H)$	ES 1, 11, $I \neg$
13.	$(m_1, \dots, m_j)$		$\neg(F \vee H)$	$E \neg \neg, 12$

(9) IP

$m_i.$	$(m_{i,1}, \dots, m_{i,j})$	$F \rightarrow H$
$m_k.$	$(m_{k,1}, \dots, m_{k,h})$	$F$

---


$$\wedge (m_{i,1}, \dots, m_{i,j}, m_{k,1}, \dots, m_{k,h}) \quad H$$

Demostración: Supuesto que las premisas de III' aparecen en una deducción en DS3, también pueden aparecer en ella las siguientes líneas:

1.	$(m_{i,1}, \dots, m_{i,j})$	$\neg F \vee H$	Def $\rightarrow$ , Premisa
----	-----------------------------	-----------------	-----------------------------

2. (2)	$\neg F$	IS
3. (2)	$\neg F \vee H$	IV, 2
4. (4)	H	IS
5. (5)	$\neg H$	IS
6. (4,5)	$H \wedge \neg H$	IA, 4, 5
7. (4)	$\neg H$	ES 5,6 I $\neg$
8. (4)	$\neg F \vee H$	IV, 7
9. $(m_{i,1}, \dots, m_{i,j})$	$\neg F \vee H$	ES, 4, 7 y 2, 3 ES 1.
10. (10)	H	IS
11. $(m_{k,1}, \dots, m_{k,h})$	F	Premisa de la regla
12. $(m_{k,1}, \dots, m_{k,h}, 10)$	$F \wedge H$	IA, 11, 10
13. $(m_{k,1}, \dots, m_{k,h}, 10)$	$\neg(F \vee H)$	DN2, 11
14. $(m_{i,1}, \dots, m_{k,h}, 10)$	$\neg(F \vee H) \wedge (F \vee H)$	IA 9, 13
15. $(m_{i,1}, \dots, m_{k,h})$	$\neg H$	ES, 10, 14 I $\neg$
16. $(m_{i,1}, \dots, m_{k,h})$	H	ES, 15

(10)  $\frac{}{IS} F \rightarrow \perp - F$

Demostración:

1. (1)	F	IS
2.	$F \rightarrow \neg\neg F$	(5)
3. (1)	$\neg\neg F$	IP 1, 3
4.	$\neg\neg F \rightarrow \neg\neg\neg F$	(7)
5. (1)	$\neg\neg\neg F$	IP 4, 5
6. (1)	$\perp - F$	Def
7.	$F \rightarrow \perp - F$	ES 1, 6

(11)  $\frac{}{IS} \neg F \rightarrow \neg\neg\neg F$

Demostración:

1. (1)	$+F$	IS
2. (1)	$\neg F \wedge \neg F$	Def $\neg$ , 1
3. (2)	$\neg\neg F$	IS
4. (2)	$F$	E $\neg\neg$ , 3; E $\neg$
5. (4,2)	$F \wedge F$	E $\wedge$ , 2; I $\wedge$ , 4
6. (1)	$\neg\neg\neg F$	ES, 3,5 . I $\neg$
7. (1)	$\neg F \wedge \neg\neg F$	E $\neg$ , 6 ; E $\wedge$ 2; I $\wedge$
8. (1)	$+ -F$	Def $\neg$ , 7
9.	$+F \rightarrow + -F$	ES, 1, 8

(12)  $\frac{}{I\text{J}3} F \rightarrow \neg\neg F$

(13)  $\frac{}{I\text{J}3} \neg\neg F \rightarrow F$

Demostración: semejante a los casos anteriores.

(14)  $\frac{}{I\text{J}3} \neg(F \vee H) \rightarrow \neg F \wedge \neg H$

Demostración:

1. (1)	$\neg(F \vee H)$	IS
2. (1)	$\neg\neg(\neg F \wedge \neg H)$	Def $\vee$ , 1
3. (1)	$(\neg F \wedge \neg H)$	E $\neg\neg$ , 2
4.	$\neg(F \vee H) \rightarrow \neg F \wedge \neg H$	ES, 1, 3

(15)  $\frac{}{I\text{J}3} \neg F \wedge \neg H \rightarrow \neg(F \vee H)$

Demostración:

1. (1)	$\neg F \wedge \neg H$	IS
2. (2)	$\neg\neg(F \vee H)$	IS
3. (2)	$\neg\neg\neg(F \vee H)$	Def $\vee$ , 2

4. (2)	$\neg -F \vee \neg -H$	ES $\neg -$ , 3; DS
5. (5)	$\neg -F$	ES
6. (4,5)	$G \wedge \neg G$	EA, 1; EA, 5; EG
7. (7)	$\neg -H$	ES
8. (1,7)	$G \wedge \neg G$	EA, 1; EA, 7; EG
9. (4,2)	$G \wedge \neg G$	ES, 8, 6; ES 7, 8 E $\vee$ , 4
10. (1)	$\neg - (F \vee H)$	ES, 2, 3; IS; DS
11	$\neg - F \wedge \neg - H \rightarrow \neg - (F \vee H)$	ES, 1, 10

- (16)  $\frac{}{IJJ3} \neg - (F \wedge H) \rightarrow \neg - F \wedge \neg - H$
- (17)  $\frac{}{IJJ3} \neg - F \wedge \neg - H \rightarrow \neg - (F \wedge H)$
- (18)  $\frac{}{IJJ3} \neg - (F \vee H) \rightarrow \neg - F \vee \neg - H$
- (19)  $\frac{}{IJJ3} \neg - F \vee \neg - H \rightarrow \neg - (F \vee H)$
- (20)  $\frac{}{IJJ3} \neg - (F \wedge H) \rightarrow \neg - F \vee \neg - H$
- (21)  $\frac{}{IJJ3} \neg - F \vee \neg - H \rightarrow \neg - (F \wedge H)$
- (22)  $\frac{}{IJJ3} \neg - H \rightarrow \neg - (F \wedge H)$
- (23)  $\frac{}{IJJ3} \neg - F \rightarrow \neg - (F \wedge H)$
- (24)  $\frac{}{IJJ3} \neg - F \rightarrow \neg - (F \wedge H)$
- (25)  $\frac{}{IJJ3} \neg - H \rightarrow \neg - (F \wedge H)$
- (26)  $\frac{}{NJ3} \neg - F \vee \neg - H \rightarrow \neg - (F \wedge H)$  (de 18, 19, 22, 23, 24, 25)

Demostración: las demostraciones son similares a las de las tesis anteriores. La razón de incluir esta lista de tesis es que son necesarias para demostraciones posteriores o en las pruebas de completud.

(27)  $\frac{}{IJJ3} \perp F \rightarrow \perp (F \wedge G)$

Demostración:

1. (1)	$\perp F$	IS
2. (1)	$\neg\neg F$	Def $\perp$ , 1
3. (1)	$\neg F \vee \neg G$	E $\neg$ , 2; I $\vee$
4. (1)	$\neg(F \wedge G)$	(26), MP, 3
5. (1)	$\neg\neg(F \wedge G)$	(7) MP 4
6.	$\perp F \rightarrow \perp(F \vee G)$	Def $\perp$ , 5; ES 1

(28)  $\frac{}{HJ3} F \rightarrow (+G \rightarrow +(F \wedge G))$

Demostración:

1. (1)	F	IS
2. (2)	$+G$	IS
3. (2)	$\neg G \wedge \neg\neg G$	Def $+$ , 2
4. (2)	$\neg G \vee \neg\neg F$	E $\wedge$ , 3. I $\vee$
5. (2)	$\neg(G \wedge F)$	DM4, 4
6. (1)	$\neg\neg F$	I $\neg$ , 1
7. (1,2)	$\neg\neg(G \wedge F)$	E $\wedge$ , 3; I $\wedge$ , 6; (17), MP
8. (1,2)	$\neg(G \wedge F) \wedge \neg\neg(G \wedge F)$	I $\wedge$ , 7, 5
9. (1,2)	$+(G \wedge F)$	Def $+$ , 8
10.	$F \rightarrow (+G \rightarrow +(G \wedge F))$	ES 2, 9; ES, 1

(29)  $\frac{}{HJ3} +F \rightarrow (+G \rightarrow (F \wedge G))$

(30)  $\frac{}{HJ3} \neg G \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow \neg F)$

Demostración: Semejante a la de las dos reglas

anteriores.

(31)  $\frac{}{HJ3} (F \rightarrow G) \rightarrow ((\perp F \rightarrow G) \rightarrow ((+F \rightarrow G) \rightarrow G))$

Demostración:

1. (1)	$F \rightarrow G$	IS
--------	-------------------	----

2. (2)	$\perp \rightarrow G$	IS
3. (3)	$\neg F \rightarrow G$	IS
4. (4)	$\neg G$	IS
5. (3,4)	$\neg \neg F$	def $\rightarrow$ , 3; I $\neg$ 4, E $\vee$
6. (2,4)	$\neg \perp F$	def $\rightarrow$ , 2; I $\neg$ 4; E $\vee$
7. (4,4)	$\neg F$	igual que arriba
8. (3,4)	$\neg(\neg F \wedge \neg \neg F)$	def $\wedge$ , 5
9. (3,4)	$\neg \neg F \vee \neg \neg \neg F$	DIS, 8
10. (2,4)	$\neg \neg \neg F$	Def 1, 6
11. (2,4)	$\neg \neg F$	E $\neg \neg$ , 10
12. (12)	$\neg \neg F$	IS
13. (1, 4, 12)	$\neg \neg F \wedge \neg F$	I $\wedge$ , 7, 12
14. (1, 4, 12)	$H \wedge \neg H$	ECQ, 13
15. (15)	$\neg \neg \neg F$	IS
16. (2, 4, 5)	$\neg \neg \neg F \wedge \neg \neg F$	I $\wedge$ , 11, 15
17. (2, 4, 16)	$H \wedge \neg H$	ECQ, 16
18. (1, 2, 3, 4)	$H \wedge \neg H$	ES 12, 14; EG, 15, 17; E $\vee$ , 9
19. (4, 2, 3)	$G$	EG, 4, 18; I $\neg$ ; I $\neg \neg$
20. (1, 2)	$(\neg F \rightarrow G) \rightarrow G$	ES, 3, 19
21. (1)	$((\neg F \rightarrow G) \rightarrow ((\neg F \rightarrow G) \rightarrow G))$	ES, 2, 20
22.	$(F \rightarrow G) \rightarrow ((\neg F \rightarrow G) \rightarrow ((\neg F \rightarrow G) \rightarrow G))$	ES, 1, 21

(32)  $\overline{\text{HJ3}} \quad F \vee (G \wedge H) \leftrightarrow ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$

Demostración:

1. (1)	$F \wedge (G \vee H)$	IS
2. (2)	$F$	IS
3. (2)	$F \vee G$	I $\vee$ , 2

- |        |  |  |
|--------|--|--|
| 4. (2) | $F \vee H$   | $I \vee, 2$  |
| 5. (5) | $(G \wedge H)$   | $IS$   |
| 6. (5) | $F \vee G$   | $E \wedge, 5; I \vee$  |
| 7. (5) | $F \vee H$   | $E \wedge, 5; I \vee$  |
| 8. (1) | $(F \vee G) \wedge (F \vee H)$                                   | $I \wedge, 3, 4; ES 2;$<br>$I \wedge, 6, 7; ES, 5; E \vee 1$ |
| 9.     | $F \vee (G \wedge H) \rightarrow ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ | $ES 1, 8$  |

Del mismo modo se demuestra la implicación inversa.

Por introducción de la conjunción y definición del bicondicional,  
se sigue (32). q.e.d

Notas al capítulo 5

- (1) Gentzen (1934)
- (2) Blau (1979) pp. 92 ss.
- (3) Blau (1979) ibidem
- (4) Blau (1979) ibidem
- (5) Blau (1979) ibidem
- (6) Hanin (1977) p. 31
- (7) Hanin (1977) p. 52

## 6. CALCULOS SECUENCIALES SIMETRICOS.

### EL LEMA DE CRAIG.

#### 6.1 Introducción

El punto de interés central de este capítulo es la demostración de que un resultado importante de la teoría de modelos de la lógica standard, el lema de Craig, se puede afirmar en la lógica L3. El lema es importante no sólo por sus consecuencias - en el próximo capítulo discutiremos dos teoremas que se siguen del lema que aquí demostramos - sino también porque muestra una vez más que la lógica L3 y su metalógica es, en principio, tan rica como la de L2. Es esta una razón de orden formal que apoya la idea de que presentar a L3 como una lógica alternativa a L2 en ciertos casos no es descabellado.

Hemos utilizado en la demostración de este lema de Craig, también llamado Teorema de Interpolación por afirmar la existencia de un tipo de fórmula, una fórmula de interpolación, en ciertas condiciones, un método tomado de Smullyan<sup>(1)</sup> que se basa en las propiedades de una clase de cálculos secuenciales que llamamos cálculos secuenciales simétricos. Como característica principal de estos cálculos apuntamos la de que obedecen a lo que Smullyan llama el "2-sided subformula principle", es decir, se trata de cálculos que gozan de la siguiente propiedad: si un secuyente  $H \rightarrow H$  se ha deducido de otro secuyente  $H' \rightarrow H'$ , entonces cada fórmula de  $H$  es una subfórmula de  $H$  y cada fórmula en  $H'$  es una subfórmula de  $H$ . Es claro que este principio no se cumple

en S3, donde hay reglas que cambian la posición relativa de las fórmulas en el antecedente y consecuente, pasando, por ejemplo, una fórmula en el consecuente de la premisa a ser una subfórmula en el antecedente de la conclusión.

La demostración del teorema de interpolación la realizamos partiendo de un cálculo simétrico S3-S1 que vamos a definir en el próximo apartado y cuya adecuación discutiremos a continuación. Para conseguir un cálculo que respondiera a las necesidades de la demostración que queríamos hacer, es decir, un cálculo que obedeciera al principio de las "subfórmulas por ambos lados" y que fuera secuencial, hemos debido multiplicar los postulados que, expresados sin la ayuda de la notación  $a, b, c, d$ , alcanzan el número de 35. En realidad, y como un subproducto de S3-S1, se pueden conseguir cálculos secuenciales formados sólo por una parte de los postulados de S3-S1, que atienden parcialmente al principio de las subfórmulas por ambos lados, puesto que no hacen pasar fórmulas del antecedente al consecuente de los secuentes y que son adecuados para L3. En el último apartado de este capítulo mostraremos dos cálculos de este tipo, los cálculos S3-S2 y S3-S3, que se definen por medio de una parte de las reglas de S3-S1 y que, sin embargo, son equivalentes con él, en cierto sentido.

## 6.2 El cálculo S3-S1. Definición. Adecuación a L3

### 6.2.1 Postulados de S3-S1

Vamos a dar dos versiones de los postulados de S3-S1, la primera de ellas utilizando la notación  $a, b, etc.$ , y la segunda por medio de la notación primitiva de L3. La razón de

hacerlo es mostrar las ventajas de la notación abreviada, sobre la que, en general, haremos las demostraciones siguientes y, a la vez, tener presente, con claridad, qué significan las diversas reglas. Las dos formulaciones son claramente equivalentes: la segunda de ellas es, simplemente, una traducción en los símbolos primitivos de lo que afirman las reglas de la primera.

Esquemas axiomáticos

$$\text{Ax.s.01: } H, F \rightarrow F, H$$

$$\text{Ax.s.02: } H, F \rightarrow \neg\neg F, H$$

$$\text{Ax.s.03: } H, \neg F \rightarrow \neg\neg F, H$$

$$\text{Ax.s.1: } H, \neg F, F \rightarrow H$$

$$\text{Ax.s.2: } H \rightarrow \neg\neg F, F, H$$

$$\text{Ax.s.3: } H, \neg F, F \rightarrow H$$

$$\text{Ax.s.4: } H \rightarrow \neg F, \neg\neg F, H$$

Reglas de deducción

$$\text{Ra 1: } \frac{(H, a_2 \rightarrow H) \quad (H, a_1 \rightarrow H)}{H, a \rightarrow H}$$

$$\text{Ra 2: } \frac{H \rightarrow a_1, H \quad H \rightarrow a_2, H}{H \rightarrow a, H}$$

$$\text{Rb 1: } \frac{H, b_1 \rightarrow H \quad H, b_2 \rightarrow H}{H, b \rightarrow H}$$

$$\text{Rb 2: } \frac{(H \rightarrow b_2, H) \quad (H \rightarrow b_1, H)}{H \rightarrow b, H}$$

$$\text{Rc 1: } \frac{H, c[A] \rightarrow H}{H, c \rightarrow H}$$

$$\text{Rc 2: } \frac{H \rightarrow c[\frac{1}{j}A], H}{H \rightarrow c, H} (*)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Rd 1: } \frac{A, d[A \frac{1}{j}] \rightarrow B}{A, d \rightarrow B} \quad (*) \\
 \text{Rd 2: } \frac{\rightarrow d[A \frac{1}{j}], C}{\rightarrow d, C}
 \end{array}$$

(\*) bajo la condición de que  $\frac{1}{j}$  no aparezca en la conclusión.

$$\begin{array}{l}
 \text{Rd}_i 1: \frac{A, \neg A_i \rightarrow B}{A, \neg A_i} \\
 \text{Rd}_i 2: \frac{A, \neg A_i \rightarrow B}{A, \neg A_i} \\
 \text{Rd}_i 1': \frac{A, \neg A_i \rightarrow B}{A, \neg A_i} \\
 \text{Rd}_i 2': \frac{A, \neg A_i \rightarrow B}{A, \neg A_i}
 \end{array}$$

Las reglas Ra 1 y Ra 2 también tienen dos variantes o bien el secuento que aparece entre paréntesis o bien el que no aparece entre paréntesis. En lo que sigue utilizaremos como abreviatura la frecuencia las reglas de asociación (Ra 1) y (Ra 2) (ver regla 4.3.2), cuya demostración para  $\text{Rd}-\text{Rd}$  sería similar a la de  $\text{Rd}$ , de entreteños aquí en este punto.

El anterior conjunto de postulados es equivalente al siguiente:

Esquemas axiómicos

Los mismos que en el caso anterior

Reglas de deducción

$$\begin{array}{l}
 \text{R1: } \frac{A, B \rightarrow C}{A, B} \\
 \text{R2: } \frac{A, B \rightarrow C}{A, B} \\
 \text{R3: } \frac{A, \neg A \rightarrow B}{A, \neg A} \\
 \text{R4: } \frac{A, \neg A \rightarrow B}{A, \neg A}
 \end{array}$$

$$R5: \frac{(C, \neg \rightarrow D) \quad (C, F \rightarrow H)}{C, (F \wedge C) \rightarrow H}$$

$$R6: \frac{H \rightarrow F, H \quad F \rightarrow C, H}{H \rightarrow (F \wedge C), H}$$

$$R7: \frac{(C, \neg C \rightarrow D) \quad (C, \neg F \rightarrow H)}{C, \neg(F \wedge C) \rightarrow H}$$

$$R8: \frac{H \rightarrow \neg F, H \quad H \rightarrow \neg C, H}{H \rightarrow \neg(F \wedge C), H}$$

$$R9: \frac{C, \neg F \rightarrow H \quad C, \neg C \rightarrow H}{C, \neg(F \wedge C) \rightarrow H}$$

$$R10: \frac{(C \rightarrow \neg G, H) \quad H \rightarrow \neg F, H}{H \rightarrow \neg(F \wedge C), H}$$

$$R11: \frac{H, \neg F \rightarrow H \quad H, \neg C \rightarrow H}{H, \neg(F \wedge C) \rightarrow H}$$

$$R12: \frac{(H \rightarrow \neg G, H) \quad H \rightarrow \neg F, H}{H \rightarrow \neg(F \wedge C), H}$$

$$R13: \frac{C, F[C] \rightarrow H}{C, \wedge X F[C] \rightarrow H}$$

$$R14: \frac{H \rightarrow F[C]_j^1, H}{H \rightarrow \wedge X F[C]_j^1, H} (*)$$

$$R15: \frac{C, \neg F[C] \rightarrow H}{C, \neg \wedge X F[C] \rightarrow H}$$

$$R16: \frac{H \rightarrow \neg F[C]_j^1, H}{H \rightarrow \neg \wedge X F[C]_j^1, H} (*)$$

$$R17: \frac{C, \neg F[C]_j^1 \rightarrow H}{C, \neg \wedge X F[C]_j^1 \rightarrow H} (*)$$

$$R18: \frac{H \rightarrow \neg F[C]_j^1, H}{H \rightarrow \neg \wedge X F[C]_j^1, H}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{R19: } \frac{A, \neg \exists x [A^1_x] \rightarrow B}{A, \neg \forall x [A^1_x] \rightarrow B} \quad (*) \qquad \text{R20: } \frac{A \rightarrow \neg [A]}{A \rightarrow \neg \forall x [A]}
 \end{array}$$

(\*) bajo la condición de que  $A^1_x$  no aparezca en la conclusión.

$$\begin{array}{ll}
 \text{R21}_i \text{ 1: } A, \neg H_i \rightarrow B & \text{R21}_i \text{ 2: } A \rightarrow \neg H_i \\
 \text{R21}_i \text{ 1': } A, -H_i \rightarrow B & \text{R21}_i \text{ 2': } A \rightarrow \neg -H_i
 \end{array}$$

Para  $1 \leq i \leq 4$ .

Damos las últimas reglas sin caserías a la notación primitiva: las dieciséis reglas que se han resumido consisten cada una de ellas en una de las fórmulas  $A^1_x$  en el antecedente o consecuente precedidas de  $\neg, -, \neg -,$  o ellas solas.

Al igual que en la precedente formulación a (20-21), cuando en una regla aparece una expresión entre paréntesis y etc. sin paréntesis en la premisa, se indica con ello que cualquiera de ellas puede ser la premisa de la regla.

Las definiciones de demostración, deducción, etc. en 22-24, que no vamos a dar explícitamente, son muy semejantes a las de 22 (cfr. el apartado 4.2) y no hacen intervenir nada nuevo aparte de las nuevas reglas de 20-21.

6.2.2 Corrección de S3-S1 respecto a la consecuencia

Demostramos primero, en un lema, que todo seciente demostrable en S3-S1 es L3-válido, en el sentido de la definición 4.2.2. Del lema se sigue la corrección de S3-S1 de manera sencilla.

Lema 6.2.2.1

Si  $\frac{}{S3-S1} H \rightarrow H$ , entonces el seciente  $H \rightarrow H$  es L3-válido.

Demostración: Por inducción según la longitud de la demostración de  $H \rightarrow H$  en S3-S1.

Base de inducción: Si la longitud de la demostración de  $H \rightarrow H$  es 1, entonces  $H \rightarrow H$  es un axioma o se ha obtenido por una de las reglas  $RI_1$ . Entonces, si se trata de un axioma según los esquemas axiomáticos O1 - O3,  $H \rightarrow H$  es L3-válido puesto que se cumple  $\frac{}{L3} F \rightarrow F$ ,  $\frac{}{L3} F \rightarrow \neg F$  y  $\frac{}{L3} \neg F \rightarrow \neg F$ . Dado que  $(H \wedge \neg F \wedge F)$  es L3-insatisfacible, los axiomas según el esquema Ax.s.1 son L3-válidos. Lo mismo vale, mutatis mutandis, para el Ax.s.3. La fórmula  $(H \vee \neg F \vee F)$  es L3-válida y por lo tanto también lo son los secientes de la forma  $H \rightarrow \neg F$ ,  $F$ ,  $H$ , es decir, los axiomas según el esquema axiomático Ax.s.2. Lo mismo vale decir de Ax.s.4. Finalmente, si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por una de las reglas  $RI_1$ , dado que  $\beta(\exists H_1) = f$  y  $\beta(H_1) = v$ , para toda L3-valoración, se cumple el lema también en este caso.

Paso de inducción. Supuesto de inducción: Si el seciente  $H' \rightarrow H'$  (o los secientes  $H' \rightarrow H''$  y  $H'' \rightarrow H'$ ) son demostrables en S3-S1 con longitudes menores que  $n$ , entonces son L3-válidos. Demostramos el lema para la longitud  $n$  de la demostración, cuando  $n$  es mayor que 1 y se ha obtenido de secientes anteriores en una demostración en S3-S1.

Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por Ra 1, entonces, por el lema 2.2.1 vale que  $\beta(a) = v$  sii  $\beta(a_1) = v$  y  $\beta(a_2) = v$ . Si  $\beta(\hat{H} \wedge a) = v$ , entonces  $\beta(\hat{H} \wedge a_i) = v$ ,  $i = 1, 2$ , y por supuesto de inducción,  $\beta(\check{H}) = v$ . Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por Ra 2, entonces, por supuesto de inducción, si  $\beta(\hat{H}) = v$ , o bien  $\beta(\check{H}) = v$  o bien  $\beta(a_1) = v = \beta(a_2)$ . Por tanto,  $\beta(\hat{H}) = v \Rightarrow \beta(\check{H} \vee a) = v$ .

Por el lema 2.2.1 se cumple que para toda valoración  $\beta$ ,  $\beta(b) = v$  sii  $\beta(b_1) = v$  o  $\beta(b_2) = v$ . Por tanto, se cumple que si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por Rb 1, entonces si  $\beta(\hat{H} \wedge b) = v$ , entonces  $\beta(\hat{H}) = v$  y  $\beta(b) = v$ . De ahí se sigue que  $\beta(\hat{H} \wedge b_1) = v$  o  $\beta(\hat{H} \wedge b_2) = v$ . Por supuesto de inducción se sigue que  $\beta(\check{H}) = v$ . En el caso de que  $H \rightarrow H$  se haya obtenido por Rb 2, si  $\beta(\hat{H}) = v$ , entonces, por supuesto de inducción,  $\beta(b_1) = v$  o  $\beta(b_2) = v$  o  $\beta(\check{H}) = v$ . Por lo tanto,  $\beta(\check{H} \vee b) = v$ .

Por el lema antes citado, para toda valoración se cumple que  $\beta(c) = v$  sii  $\beta(c[A]) = v$ , para toda descripción  $A$ . De ello se sigue que si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por Rc 1 y  $\beta(\hat{H} \wedge c) = v$ , entonces  $\beta(\hat{H} \wedge c[A]) = v$  y por supuesto de inducción,  $\beta(\check{H}) = v$ . Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por Rc 2, entonces si  $c$  es  $\wedge XFX$ , por supuesto de inducción, se cumple que  $\Vdash_{L3} \hat{H} \rightarrow (F[F^1] \vee \check{H})$ . Por el teorema de generalización,  $\Vdash_{L3} \hat{H} \rightarrow \wedge X(F[X] \vee \check{H})$ , de donde se sigue  $\Vdash_{L3} \hat{H} \rightarrow (\wedge XFX) \vee \check{H}$ . Si  $c$  es  $\neg \wedge XFX$ , entonces vale  $\Vdash_{L3} \hat{H} \rightarrow (\neg F[F^1] \vee \check{H})$  de donde se sigue  $\Vdash_{L3} \hat{H} \rightarrow (\neg \wedge XFX) \vee \check{H}$ .

Por el lema 2.2.1 para toda L3-valoración  $\beta$  se cumple que  $\beta(d) = v$  sii hay al menos una descripción  $A$  tal que  $\beta(d[A]) = v$ . Entonces si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por Rd 1 y  $d$  es  $\neg \wedge XFX$ , por supuesto de inducción vale que  $\Vdash_{L3} (\hat{H} \wedge \neg F[F^1]) \rightarrow \check{H}$  de donde se sigue  $\Vdash_{L3} \hat{H} \rightarrow (\neg F[F^1] \rightarrow \check{H})$  y por el teorema de

generalización,  $\vdash_{L3} \hat{N} \rightarrow \wedge X(-F[X] \rightarrow \check{N})$ . Por tanto, se cumple que  $\vdash_{L3} (\hat{N} \wedge \neg \wedge X F[X]) \rightarrow \check{N}$ , si  $d$  es  $\neg \wedge X F[X]$ , el razonamiento es similar al caso anterior. Si  $N \rightarrow N$  se ha obtenido por Rd 2 y  $\beta(\hat{N}) = v$ , entonces  $\beta(\sigma[A]) = v$  o  $\beta(\check{N}) = v$ . Por tanto,  $\beta(\sigma[A] \vee \check{N}) = v$ .

El caso en que la longitud de la demostración de  $N \rightarrow N$  es mayor que 1 y se ha obtenido por  $RH_1 - RH_1 2'$ , se trata de manera similar al de la base de inducción. q.e.d.

Proposición 6.2.2.2. Corrección de S3-S1

$$M \vdash_{S3-S1} F \Rightarrow M \vdash_{L3} F.$$

Demostración: Si  $M \vdash_{S3-S1} F$ , existe una demostración en S3-S1 del secuento  $M^0 \rightarrow F$ , donde  $M^0$  es un subconjunto finito de  $M$ . Por el lema anterior se sigue que  $M^0 \vdash_{L3} F$  y, por lo tanto,  $M \vdash_{L3} F$ .

6.2.3 Completud de S3-S1 respecto a la consecuencia

Antes de entrar en la demostración de completud propiamente dicha, demostramos en un lema la admisibilidad en S3-S1 de ciertas reglas de deducción. Las primeras de ellas afirman la posibilidad de invertir algunas de las reglas primitivas de S3-S1. Las tres últimas son reglas primitivas de S3. Su admisibilidad es necesaria para la presente prueba de completud, basada en la reducibilidad de S3-S1 a S3.

Lema 6.2.3.1

Las siguientes reglas  $\bar{R}_1 - R_{-1}$  son admisibles en S3-S1,

$$\overline{R1}: \frac{H, \neg\neg F \rightarrow H}{H, F \rightarrow H}$$

$$\overline{R2}: \frac{H \rightarrow \neg\neg F, H}{H \rightarrow F, H}$$

$$\overline{R3}: \frac{H, \neg\neg\neg F \rightarrow H}{H, \neg F \rightarrow H}$$

$$\overline{R4}: \frac{H \rightarrow \neg\neg\neg F, H}{H \rightarrow \neg F, H}$$

$$R_{\neg 1}: \frac{H \rightarrow H, F}{H, \neg F \rightarrow H}$$

$$R_{\neg 2}: \frac{H, F \rightarrow H}{H \rightarrow \neg F, H}$$

$$R_{-1}: \frac{H \rightarrow F, H}{H, \neg F \rightarrow H}$$

Demostración:

$\overline{R1}$ : Demostración por inducción según la longitud de la demostración de la premisa en S3-S1. Base de inducción: Si la premisa es un axioma, entonces puede ocurrir uno de los siguientes casos:

- 1.1: H es el conjunto  $H', \neg\neg\neg F$
- 1.2: H es el conjunto  $H', \neg\neg F$
- 1.3: H es el conjunto  $H', \neg F$
- 1.4: H es el conjunto  $H', \neg\neg\neg\neg F$
- 1.5:  $H, \neg\neg F \rightarrow H$  es de la forma  $H, \neg\neg F \rightarrow \neg\neg F, H'$ .
- 1.6: En H y/o H aparece alguna fórmula que hace de  $H \rightarrow H$  un axioma y no es el caso 1.1 - 1.5. Entonces,
  - 1.1: del axioma  $H', \neg F, F \rightarrow H$  se sigue, por R3 y R1,  $H', \neg\neg\neg F, F \rightarrow H$
  - 1.2: del axioma  $H', \neg F, F \rightarrow H$  se sigue, por R1,  $H', \neg\neg\neg F, F \rightarrow H$
  - del axioma  $H', \neg F, F \rightarrow H$  se sigue, por R1,  $H', \neg\neg\neg F, F \rightarrow H$
  - 1.3: del axioma  $H, F \rightarrow F, H'$  se sigue, por R2,  $H, F \rightarrow \neg\neg F, H'$ .
  - 1.4: del axioma  $H, F \rightarrow \neg\neg F, H'$  se sigue, por R4,  $H, F \rightarrow \neg\neg\neg\neg F, H'$
  - del axioma  $H, F \rightarrow F, H$  se sigue, por R4, R2,  $H, F \rightarrow \neg\neg\neg\neg F, H'$ .

1.5: la conclusión  $H, F \rightarrow \neg F, H'$  es un axioma

del axioma  $H, F \rightarrow F, H'$  se sigue, por R2,  $H, F \rightarrow \neg \neg F, H'$ .

1.6: en este caso la conclusión es también un axioma.

Paso de inducción: Si se ha obtenido la premisa de la regla por medio de una regla de deducción, entonces puede ocurrir uno de los siguientes casos:

2.1:  $\neg \neg F$  es la parte principal de la aplicación de la regla. En ese caso, la premisa se ha obtenido por medio de R1 y no hay nada que demostrar.

2.2 Si la parte principal de la aplicación de la regla es una fórmula en  $H$  o  $H'$ , entonces del supuesto de inducción y por aplicación de la misma regla que ha originado la premisa, se sigue la conclusión.

$\overline{R2}$ : La demostración es por inducción según la longitud de la demostración en S3-S1 de la premisa.

Base de inducción: Si la premisa es un axioma, entonces se cumple uno de los casos siguientes:

1.1:  $H$  es el conjunto  $H', \neg \neg F$

1.2:  $H \rightarrow \neg \neg F, H$  es de la forma  $H', \neg \neg F \rightarrow \neg \neg F, H$

1.3:  $H \rightarrow \neg F, H$  es de la forma  $H', \neg F \rightarrow \neg F, H$

1.4:  $H \rightarrow \neg \neg F, H$  es de la forma  $H \rightarrow \neg \neg F, \neg \neg F, H'$

1.5: En  $H$  y/o  $H'$  aparece una fórmula  $G$  que hace un axioma de  $H \rightarrow H$  y  $F$  no es una subfórmula de  $G$ . Entonces,

1.1: del axioma  $H \rightarrow \neg F, F, H$  se sigue, por R4 y R2,  $H \rightarrow \neg \neg F, F, H'$

1.2: del axioma  $H', F \rightarrow F, H$  se sigue, por R1,  $H', \neg \neg F \rightarrow F, H$

1.3: del axioma  $H', F \rightarrow F, H$  se sigue, por R2,  $H', \neg F \rightarrow F, H$

1.4: del axioma  $H \rightarrow F, \neg F, H$  se sigue, por R4,  $H \rightarrow F, \neg \neg F, H'$

1.5: en este caso la conclusión es un axioma.

Paso de inducción: la demostración es similar al paso de inducción en la regla anterior.

$\overline{R3}$ : Demostración por inducción sobre la longitud de la demostración de la premisa.

Base de inducción: Si la premisa es un axioma entonces se es uno de los casos siguientes:

1.1:  $H$  es el conjunto  $H', \exists F$

1.2:  $H$  es el conjunto  $H', \neg \neg F$

1.3:  $H$  es el conjunto  $H', \exists \neg F$

1.4:  $H$  es el conjunto  $H', \neg F$

1.5:  $H$  es el conjunto  $H', \neg F$

1.6: En  $H$  y/o  $H$  aparece una fórmula  $G$  que hace que  $H \rightarrow H$  sea un axioma y  $F$  no es una subfórmula de  $G$ . Entonces, en los casos 1.1 - 1.4, la conclusión se sigue del axioma  $H', F, \neg F \rightarrow H$  por medio de la regla  $R1$ .

1.5: del axioma  $H, \neg F \rightarrow \neg F, H'$  se sigue, por  $R4$ , la conclusión.

Paso de inducción: la demostración es similar a los casos anteriores.

$\overline{R4}$ : La demostración es análoga a los casos anteriores.

$R_{\neg 1}$ : Demostración por inducción según la longitud de la demostración de la premisa.

Base de inducción: Si la premisa es un axioma, entonces se es uno de los casos siguientes:

$$H \rightarrow H, F \text{ es de la forma } \left\{ \begin{array}{l} H \rightarrow F, \neg F, H' \quad (1.1) \\ H', F \rightarrow F, H' \quad (1.2) \\ H', G \rightarrow \neg \neg G, H \quad (1.3) \\ H', \neg G \rightarrow \neg \neg G, H \quad (1.4) \\ H \rightarrow \neg \neg G, \neg G, H \quad (1.5) \end{array} \right.$$

o (1.6) hay una fórmula  $H$  en  $H$  y/o  $H$  que hace de  $H \rightarrow H$  un axioma y  $F$  no es una subfórmula de  $H$ . Entonces,

- 1.1:  $M, \Gamma F \rightarrow \Gamma F, H'$  es un axioma según ax.s.01
- 1.2:  $H', \Gamma F, F \rightarrow H$  es un axioma según Ax.s.1
- 1.3: del axioma  $H', G, \neg G \rightarrow H'$  se sigue, por R1,  $M', G, \neg G \rightarrow H'$
- 1.4: del axioma  $M, G, \neg G \rightarrow H'$  se sigue, por R1,  $M, \neg G, \neg G \rightarrow H'$
- 1.5: del axioma  $M, G \rightarrow \neg \neg G, H'$  se sigue, por R1,  $M, \neg G, \neg G \rightarrow \neg \neg G, H'$   
del axioma  $M, \neg G \rightarrow \neg \neg G, H'$  se sigue, por R1,  $M, \neg \neg G \rightarrow \neg G, H'$
- 1.6: en este caso la conclusión es un axioma.

Paso de inducción: Si la premisa se ha obtenido por aplicación de una regla de deducción, distinguimos dos casos: 1. el caso en que F es la parte principal de la aplicación de la regla por la que se ha obtenido la premisa. 2. el caso en que otra fórmula distinta de F es la parte principal.

1. Si F es la parte principal entonces F es una  $a, b, c, d$  o  $H_1$ .

1.1: Si F es una  $a$ , los secuentes  $M \rightarrow H, a_1$  y  $M \rightarrow H, a_2$  son demostrables en S3-S1, con longitud menor que  $n$ , longitud de la premisa de la regla. Por supuesto de inducción,  $M, \neg a_1 \rightarrow H$  y  $M, \neg a_2 \rightarrow H$  son demostrables en S3-S1. Dado que  $\neg a_1, \neg a_2$  son una  $b_1, b_2$  o  $\neg b_1, \neg b_2$ , por  $\bar{R}1$  y  $Rb1$ , se sigue que  $M, \Gamma F \rightarrow H$  es también demostrable en S3-S1.

1.2: F es una  $b$ . Entonces el secuento  $M \rightarrow H, b_1, (b_2)$  es demostrable en S3-S1 con longitud  $k$ , menor que  $n$ , la longitud de la premisa. Por supuesto de inducción,  $M, \neg b_1, (\neg b_2) \rightarrow H$  es demostrable. Dado que  $\neg b_1, \neg b_2$  es una  $a_1, a_2$  o  $\neg a_1, \neg a_2$ , por  $\bar{R}1$  y  $Ra1$  se sigue la afirmación.

1.3: F es una  $c$ . Entonces el secuento  $M \rightarrow H, c, [P_j^1]$  es demostrable en S3-S1 con longitud menor que la de la premisa. Además  $P_j^1$  no aparece en  $M, H, c$ . Por supuesto de inducción,  $M, \neg c, [P_j^1] \rightarrow H$  es demostrable en S3-S1.  $\neg c, [P_j^1]$  es  $\neg c, [P_j^1]$  o  $\neg c, [P_j^1]$ . Por  $\bar{R}1$ ,  $Ra1$  y  $Rd1$  se sigue que  $M, \Gamma F \rightarrow H$  es demostrable.

1.4: F es una  $d$ . Entonces el secuento  $M \rightarrow H, d, [A]$  es demostrable

en S3-S1 con longitud menor que la de la premisa. Por supuesto de inducción,  $\mathcal{M}, \sigma[A] \rightarrow H$  es demostrable.  $\sigma[A]$  es una fórmula  $c[A] \circ \sigma[A]$ . Por  $\overline{R1}$ , R<sub>o</sub> 1 y R<sub>c</sub> 1 se sigue  $\mathcal{M}, \sigma F \rightarrow H$ .

- 1.5: Si F es un  $H_i$  entonces  $\mathcal{M}, \sigma H_i \rightarrow H$  se sigue por  $\overline{R1}$ , R<sub>o</sub> 1 y  $\overline{R1}$ .
2. F no es la parte principal de la aplicación de la regla. La afirmación se sigue del supuesto de inducción por una aplicación de la misma regla por la que se obtuvo la premisa.

$R_{-2}$ : Demostración por inducción según la longitud de la demostración de la premisa.

Base de inducción: Si la premisa es un axioma, entonces se cumple uno de los siguientes casos:

$$\mathcal{M}, F \rightarrow H \text{ es de la forma } \begin{cases} \mathcal{M}, F, \sigma F \rightarrow H & (1.1) \\ \mathcal{M}, \neg F, F \rightarrow H & (1.2) \\ \mathcal{M}, F \rightarrow \sigma \neg F, H' & (1.3) \\ \mathcal{M}, \neg \sigma \rightarrow \sigma \sigma, H' & (1.4) \\ \mathcal{M}, F \rightarrow \sigma F, H' & (1.5) \end{cases}$$

o (1.6), hay una fórmula H en H y/o H que hace de  $\sigma \rightarrow H$  un axioma y F no es subfórmula de H. Entonces los casos (1.1) - (1.6) la conclusión es un axioma.

Paso de inducción: Si la premisa se ha obtenido por aplicación de una regla de deducción, distinguimos dos casos: 1. cuando F es la parte principal de la aplicación de la regla por la que se ha obtenido la premisa. 2. Otra fórmula es la parte principal de la aplicación de la regla.

1. F es la parte principal. Entonces F es una a, b, c, d o  $H_i$ .

1.1: F es un a. Entonces  $\mathcal{M}, \sigma_1, (\sigma_2) \rightarrow H$  es demostrable con longitud menor que la premisa. Por supuesto de inducción,  $\mathcal{M} \rightarrow \sigma_1, (\sigma_2) H$  es demostrable.  $\sigma_1, \sigma_2$  son  $\sigma_1, \sigma_2 \circ \sigma_1, \sigma_2$ . Entonces por R2, R3,  $\overline{R2}$ , R<sub>b</sub> 2 se sigue  $\mathcal{M} \rightarrow \sigma F, H$ .

1.2: F es una b. Entonces,  $H, b_1 \rightarrow H$  y  $H, b_2 \rightarrow H$  son demostrables en S3-S1, con longitud menor que la de la premisa. Por supuesto de inducción,  $H \rightarrow \neg b_1$ ,  $H$  y  $H \rightarrow b_2$ ,  $H$  son demostrables.  $\neg b_1$  es  $\sigma_1 \sigma_2$  y  $b_2$  es  $\sigma_2 \sigma_1$ . Por  $\overline{R2}$ , R2, R<sub>2</sub> se sigue la afirmación.

1.3: F es una c. Entonces  $H, c \in A1 \rightarrow N$  es demostrable con longitud menor que la premisa. Del supuesto de inducción se sigue, por  $\overline{R2}$ , R2, R<sub>2</sub>,  $H \rightarrow \neg F, H$ .

1.4: F es una d. Entonces, el seciente  $H, \sigma_j^1 \rightarrow H$  es demostrable en S3-S1 con longitud menor que la premisa. Del supuesto de inducción se sigue, por  $\overline{R2}$ , R2, R<sub>2</sub>, el seciente  $H \rightarrow \neg F, H$ .

1.5:  $H \rightarrow \neg H_1, N$  es demostrable por RH<sub>1</sub> 2 y R2.  $H \rightarrow \neg H_1, H, N$  es por R1

2. Si F no es la parte principal de la aplicación de la regla, entonces la conclusión se sigue del supuesto de inducción y la aplicación de la misma regla por la que se ha obtenido la premisa.

$R_{-1}$ : Demostración por inducción según la longitud de la demostración de la premisa.

Base de inducción: Si la premisa es un axioma, entonces se cumple uno de los casos siguientes:

$$H \rightarrow H, F \text{ es de la forma } \left\{ \begin{array}{ll} H \rightarrow F, \neg F, H' & (1.1) \\ H \rightarrow \neg G, \neg \neg G, H' & (1.2) \\ H, F \rightarrow F, H & (1.3) \\ H, G \rightarrow \neg \neg G, H & (1.4) \\ H, \neg G \rightarrow \neg G, H & (1.5) \end{array} \right.$$

o (1.6), en H y/o H hay una fórmula H que hace un axioma de  $H \rightarrow H$  y F no es subfórmula de H. Entonces,

- 1.1: La conclusión es un axioma según Ax.s.03
- 1.2: La conclusión se sigue de Ax.s.02 y R1
- 1.3: la conclusión es un axioma según Ax.s.3

1.4: La conclusión se sigue del Ax.5.3 por R1

1.5: La conclusión se sigue de Ax.5.3 por R1

1.6: La conclusión es un axioma.

Paso de inducción: Distinguimos los casos en (1.)  $F$  es la parte principal de la aplicación de la regla por la que se ha obtenido la premisa y los casos (2.) en que la parte principal es otra fórmula.

1.1  $F$  es una  $a$ . Entonces los sucesivos  $H \rightarrow H, a_1$  y  $H \rightarrow H, a_2$  son demostrables, con longitud menor que la de la demostración de la premisa. Si  $F \equiv \neg G$ , entonces, por supuesto de inducción, se cumple que  $H, \neg G \rightarrow H$  es demostrable y por R1,  $H, \neg\neg G \rightarrow H$  es demostrable. Si  $F$  es  $\neg\neg G$ , entonces se ha obtenido de  $G \rightarrow H, G$ . Por R<sub>11</sub> vale que  $H, \neg G \rightarrow H$  es demostrable y, por R1, lo es  $H, \neg\neg G \rightarrow H$ . Por tanto,  $H, \neg\neg\neg G \rightarrow H$  es demostrable si  $F$  es de la forma  $\neg\neg G$ . Si  $F$  es distinto de  $\neg\neg G$ , entonces, por el supuesto de inducción se sigue que  $H, \neg a_1 \rightarrow H$  y  $H, \neg a_2 \rightarrow H$  son demostrables en S3-S1. Puesto que  $\neg a_1$  es un  $b_1$  o  $\neg b_1$  y  $\neg a_2$  es un  $b_2$  o  $\neg b_2$ , por R<sub>1</sub>, Rb 1 y R1 se sigue  $H, \neg F \rightarrow H$ .

1.2:  $F$  es una  $b$ . Entonces,  $H \rightarrow b_1, (b_2), N$  es demostrable con longitud menor que la premisa. Por supuesto de inducción se cumple que  $H, \neg b_1, (\neg b_2) \rightarrow H$  es demostrable.  $\neg b_1$  es una  $a_1$  o  $\neg a_1$  y  $\neg b_2$  es una  $a_2$  o  $\neg a_2$ . Por R<sub>1</sub>, Rb 1 y R1,  $H, \neg F \rightarrow H$  es demostrable.

1.3:  $F$  es una  $c$ . Entonces,  $H \rightarrow H, c \in P_1^1$  (con  $P_1^1$  nuevo para  $c, H, c$ ) es S3-S1-demostrable. Del supuesto de inducción se sigue  $H, \neg F \rightarrow H$  por R<sub>1</sub>, Rb 1, R1.

1.4:  $F$  es una  $d$ . La demostración es similar al caso anterior, empleando Rb 1.

1.5:  $F$  es una  $H_1$ . Entonces  $H, \neg F$  es demostrable según R<sub>1</sub> 1 y P1.

2. Si  $F$  no es la parte principal de la aplicación de la regla, la conclusión de  $R_{-1}$  se sigue del supuesto de inducción por aplicación de la misma regla por la que se ha obtenido la premisa.  
q.e.d.

Del lema que acabamos de demostrar resulta que todas las reglas de  $S3$  son reglas admisibles en  $S3-S1$ . De ello se sigue la completud de  $S3-S1$  y la posibilidad de afirmar el Hauptsatz para este cálculo. Este es el contenido de la proposición y corolarios que siguen.

Proposición 6.2.3.2

Si el secuento  $M \rightarrow N$  es  $S3$ -demostrable, entonces es demostrable en  $S3-S1$ .

Demostración: Si  $M \rightarrow N$  es un axioma de  $S3$ , entonces es un axioma en  $S3-S1$ . Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por aplicación de una regla, esa misma regla es un postulado de  $S3-S1$  ( $RS\ 3$ ,  $RS\ 4$ ,  $RS\ 6 - RS_{-1}$ ) o bien es una regla admisible en  $S3-S1$  ( $RS\ 1$ ,  $RS\ 2$ ,  $RS\ 5$ ). Por tanto, del supuesto de inducción se sigue la proposición.

Corolario 6.2.3.3

Toda regla admisible en  $S3$  es admisible en  $S3-S1$

Demostración: Supuesto que las premisas de una regla de  $S3$  fueran demostrables en  $S3-S1$  y no lo fuera la conclusión, entonces habría un secuento demostrable en  $S3$  que no lo es en  $S3-S1$ , si la regla en cuestión es independiente, cosa que podemos suponer sin pérdida de la generalidad del argumento. Luego todas las reglas primitivas independientes son admisibles en  $S3-S1$ . Si lo son las reglas primitivas independientes, lo son todas, obviamente.  
q.e.d.

En esta demostración nos basamos en la proposi-

ción anterior, 6.2.3.2. Existe, sin embargo, una demostración alternativa, independiente de esta proposición y del lema que la precede. Es, en sus rasgos esenciales, la siguiente: la completud de S3-S1 puede demostrarse, de manera totalmente independiente del corolario 6.2.3.3, por medio de la completud de uno de los cálculos parciales, por ejemplo S3-S2, de S3-S1 (cfr. el apartado 6.4). De ello se sigue la proposición 6.2.3.2 y, por el mismo razonamiento que en el corolario, que toda regla admisible en S3 lo es en S3-S1.

Corolario 6.2.3.4 Completud restringida de S3-S1

Si  $H^*$  es un conjunto paramétricamente limitado, posiblemente vacío, y  $F$  es una fórmula de  $L_3$ , entonces  $H^* \Vdash_{L_3} F \Rightarrow H^* \Vdash_{S3-S1} F$ .

Demostración: Si  $H^* \Vdash_{L_3} F$ , por la completud de S3,  $H^* \Vdash_{S3} F$ , y por la proposición anterior,  $H^* \Vdash_{S3-S1} F$ .

Corolario 6.2.3.5 Adecuación de S3-S1

Bajo los supuestos del corolario anterior,

$$H^* \Vdash_{L_3} F \Leftrightarrow H^* \Vdash_{S3-S1} F$$

Demostración: se sigue de la completud y corrección de S3-S1.

Corolario 6.2.3.6 Hauptsatz para S3-S1

Si  $H_1, F \rightarrow H_2$  y  $H_2, \rightarrow F, H_2$  son demostrables en S3-S1, entonces  $H_1, H_2 \rightarrow H_1, H_2$  es también demostrable en S3-S1.

Demostración: El corolario es un caso particular de la proposición 6.2.3.2.

6.3 El Teorema de Interpolación (Lema de Craig)<sup>(2)</sup>

Dado un condicional  $F \rightarrow G$ , llamamos fórmula de interpolación de  $F \rightarrow G$  a una fórmula  $K$  que cumple las siguientes condiciones: (i) todo parámetro de predicado que aparece en  $K$  fuera de las descripciones y toda descripción que aparece en  $K$  aparece también en  $F$  y  $G$  y (ii) se cumple que  $\Vdash_{L3} F \rightarrow K$  y que  $\Vdash_{L3} K \rightarrow G$ . El lema de Craig o teorema de interpolación para  $L3$  podemos formularlo del modo siguiente:

Proposición 6.3.1

Para toda fórmula lógicamente verdadera de  $L3$  con la forma  $F \rightarrow G$  se cumple que (1) si al menos un parámetro de predicado  $P_i^k$  aparece tanto en  $F$  como en  $G$  fuera de las descripciones, entonces existe una fórmula de interpolación  $K$  para  $F \rightarrow G$  y (2) si no existe tal parámetro de predicado, entonces o bien  $F$  es  $L3$ -insatisfacible o bien  $G$  es  $L3$ -válida.

Podemos sustituir  $\Vdash_{L3} F \rightarrow G$  por  $\Vdash_{S3-S1} F \rightarrow G$  en la proposición anterior: por la adecuación de  $S3-S1$  y la definición de  $\rightarrow$ , de la afirmación de  $\Vdash_{L3} F \rightarrow G$  se sigue  $\Vdash_{S3-S1} \neg(\neg F \wedge G)$ . Por  $\overline{RS} 9$ , el corolario 6.2.3.3,  $R_{\neg 1}$  y  $\overline{R1}$  vale que  $\Vdash_{S3-S1} F \rightarrow G$ . A la inversa, supuesto que  $\Vdash_{S3-S1} F \rightarrow G$ , entonces, por  $R_{\neg 2}$ ,  $R2$ ,  $R10$ , la definición de  $\rightarrow$  y la adecuación de  $S3-S1$ , se sigue que  $\Vdash_{L3} F \rightarrow G$ . Por tanto, el lema de Craig puede reformularse diciendo que para todo seciente  $F \rightarrow G$  que es demostrable en  $S3-S1$  se cumplen las condiciones (i) y (ii) de la proposición 6.3.1. En lo que sigue, demostramos esta segunda versión del lema de Craig, de la que lo expresado en la proposición anterior es un caso particular. Hay que tener en cuenta que

para lograr una mayor exactitud habría que definir 'fórmula de interpolación' para secuentes. Esto se logra tomando  $H$  como fórmula de interpolación para el secuyente  $H \rightarrow H$  si lo es para la fórmula  $\hat{H} \rightarrow \check{H}$ .

Demostración de la proposición 6.3.1: Por inducción según la longitud  $n$  de la demostración en SS-S1 del secuyente  $H \rightarrow H$ .

1. Base de inducción: Si  $H \rightarrow H$  es un axioma, entonces se cumple uno de los casos siguientes:

1.1. Supuesto que haya un parámetro de predicado  $P_i^k$  que aparece tanto en  $H$  como en  $H$  fuera de las descripciones, entonces

Ax.s.1: La fórmula  $K_1 \equiv \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1 \dots X_k) \wedge \neg \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1 \dots X_k)$  es una fórmula de interpolación para  $H, F, \neg F \rightarrow H$ : dado que

$\{H, \neg F, F\}$  y  $K_1$  son L3-insatisfacibles, se cumple que

$\Vdash_{L3} (H \wedge \neg F \wedge F) \rightarrow K_1$  y  $\Vdash_{L3} K_1 \rightarrow H$ . Además el único parámetro de predicado que aparece en  $K_1$  aparece también, por supuesto, en  $H$  y  $H$ .

Ax.s.2:  $K_2 \equiv \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1, \dots, X_k) \vee \neg \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1 \dots X_k)$  es una fórmula de interpolación para  $H, \rightarrow \neg F, F, H: H \rightarrow K_2$

es deducible de Ax.s.2, Ro 2, Rb 2 y def  $\vee$ .  $K_2 \rightarrow H$  es un axioma. Por tanto, los dos secuentes son L3-válidos (Lema 6.2.2.1).

Por el supuesto  $P_i^k$  aparece tanto en  $H$  como en  $H$ .

Ax.s.3:  $K_3 \equiv \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1 \dots X_k) \wedge \neg \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1 \dots X_k)$  es una fórmula de interpolación para  $H, \neg F, F \rightarrow H, H \rightarrow K_3$

es un axioma y  $K_3 \rightarrow H$  es SS-S1-demostrable a partir del Ax.s.3 por medio de Ro 1. Por el supuesto  $P_i^k$  aparece tanto en  $H$  como en  $H$ .

Ax.s.4:  $K_4 \equiv \neg \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1, \dots, X_k) \vee \neg \bigwedge X_1, \dots, \bigwedge X_k (P_i^k X_1 \dots X_k)$  es una fórmula de interpolación para  $H \rightarrow \neg H, \neg F, H: H \rightarrow K_4$  es deducible de Ax.s.4 por Ro 2, Rb 2 y def.  $\vee$ .  $K_4 \rightarrow H$  es un axioma.

Así, ambos secuentes son L3-válidos;  $P_i^k$  aparece tanto en  $H$  como

en  $N$ .

Ax.s.01, Ax.s.02, Ax.s.03: Las fórmulas  $F, F, \neg F$  son ,trivialmente, fórmulas de interpolación para axiomas de la forma  $H, F \rightarrow F, H; H, F \rightarrow \neg F, H$  y  $H, \neg F \rightarrow \neg F, H$ , respectivamente.

1.2 Si no hay un parámetro de predicado  $P_1^k$  que aparezca tanto en  $H$  como en  $H$  fuera de las descripciones y  $H \rightarrow H$  es un axioma, entonces lo es según uno de los esquemas Ax.s.1 - Ax.s.4. En el caso de que lo sea según los esquemas Ax.s.1 o Ax.s.3, entonces  $\hat{H}$  es L3-insatisfacible. En el caso de que se trate de un axioma según Ax.s.2 o Ax.s.4,  $\hat{H}$  es L3-válido.

2. Paso de inducción: La longitud  $n$  de la demostración de  $H \rightarrow H$  es mayor que 1. Supuesto de inducción: Si  $H_1 \rightarrow H_1$  es demostrable en S3-S1 con longitud  $k$ , menor que  $n$ , (o si los secuentes  $H_1 \rightarrow H_1$  y  $H_2 \rightarrow H_2$  son demostrables cada uno con longitud menor que  $n$ ) entonces se cumple, para ese secuento, (esos secuentes) el teorema de interpolación.

2.1 Suponemos ahora que hay al menos un parámetro de predicado  $P_1^k$  que aparece en  $H$  y en  $H$ .

2.1.1 Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por la regla Ro 1, entonces por supuesto de inducción, hay una fórmula de interpolación  $K$  para  $H', \alpha_1, (\alpha) \rightarrow H$ . Entonces, por la adecuación de S3-S1, se cumple  $\frac{2}{S3-S1} H', \alpha_1, (\alpha_2) \rightarrow K$  y, por Ro 1,  $\frac{S3-S1}{S3-S1} H', \alpha \rightarrow K$ . Por supuesto de inducción ocurre también que  $\frac{L3}{L3} K \rightarrow H$ .  $K$  es, por tanto, una fórmula de interpolación para  $H \rightarrow H$ .

2.1.2 Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por la regla Ro 2, entonces, por supuesto de inducción, existe una fórmula de interpolación  $K_1$  para  $H \rightarrow \alpha_1, H$  y una fórmula de interpolación  $K_j$  para  $H \rightarrow \alpha_2, H$ . Tenemos entonces que  $\frac{S3-S1}{S3-S1} H \rightarrow K_1$  y  $\frac{S3-S1}{S3-S1} H \rightarrow K_j$ , de donde se sigue, por Ro 2  $\frac{S3-S1}{S3-S1} H \rightarrow K_1 \wedge K_j$ . Además, podemos afirmar que  $\frac{S3-S1}{L3} K_1 \rightarrow \alpha_1, H$  y  $\frac{S3-S1}{L3} K_j \rightarrow \alpha_2, H$ . Por lo tanto,

$\frac{}{R3-R1} K_i \wedge K_j \rightarrow a$ , H.  $K_i \wedge K_j$  es, pues, una fórmula de interpolación para  $H \rightarrow H$ .

2.1.3 Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por medio de Rb 1, entonces, por supuesto de inducción hay una fórmula de interpolación  $K_i$  para  $H, b_1 \rightarrow H$  y una fórmula de interpolación  $K_j$  para  $a, b_2 \rightarrow H$ .

Por lo tanto, se cumple que  $\frac{}{R3-R1} H, b_1 \rightarrow K_i, K_j$  y  $\frac{}{R3-R1} H, b_2 \rightarrow K_i, K_j$ .

Por Rb 1, Ra 2 y Rb 2 podemos afirmar que  $\frac{}{R3-R1} H, b \rightarrow -(K_i \wedge K_j)$ .

Por otro lado,  $K_i \rightarrow H$  es L3-válido, al igual que  $K_j \rightarrow H$ . Por Ra 1 y Rb 1,  $-(K_i \wedge K_j) \rightarrow H$  es también L3-válido y, con ello,  $-(K_i \wedge K_j)$  es la fórmula de interpolación buscada.

2.1.4 Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por medio de Rb 2, entonces, por supuesto de inducción, hay una fórmula de interpolación  $K$  para  $H \rightarrow b_1, (b_2) H$ . Entonces se cumple que  $\frac{}{R3-R1} H \rightarrow K$  y que

$\frac{}{R3-R1} K \rightarrow b_1, (b_2) H$ , de donde se sigue, por Rb 2,  $\frac{}{R3-R1} H \rightarrow b, H$ .

$K$  es, por tanto, una fórmula de interpolación para  $H \rightarrow H$ .

2.1.5 Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por medio de Rc 1, entonces, por supuesto de inducción, existe una fórmula de interpolación  $K$  para  $H', c[A] \rightarrow H$ . Por tanto,  $\frac{}{R3-R1} H', c[A] \rightarrow K$  y  $\frac{}{R3-R1} K \rightarrow H$ .

Si la descripción  $A$  no aparece en  $K$  o  $A$  aparece en  $H'$  o  $c$ , entonces

$\frac{}{R3-R1} H', c \rightarrow K$  y  $\frac{}{R3-R1} K \rightarrow H$ .  $K$  es entonces una

fórmula de interpolación para  $H \rightarrow H$ . Si la descripción  $A$

(que supondremos de la forma  $(P_j^1)$ ) aparece en  $K$ , pero no en  $H'$  ni

en  $c$ , entonces por supuesto de inducción se cumple que

$\frac{}{R3-R1} H', c[(P_j^1)] \rightarrow K[(P_j^1)]$  y por Rc 1,  $\frac{}{R3-R1} H, c \rightarrow K[(P_j^1)]$ .

Puesto que  $P_j^1$  no aparece en  $H, c$ , por Rc 2 vale que

$\frac{}{R3-R1} H', c \rightarrow \Lambda XE[K]$ . Por otro lado, de  $\frac{}{R3-R1} K \rightarrow H$  se

sigue, por Rc 1,  $\frac{}{R3-R1} \Lambda XE[K] \rightarrow H$ .  $\Lambda XE[K]$  es, por tanto, una

fórmula de interpolación para  $H \rightarrow H$ .

2.1.6 Si  $H \rightarrow H$  se ha obtenido por Rc 2, entonces, por supuesto de inducción, hay una fórmula de interpolación para  $H \rightarrow c[(P_j^1)], H$ .

En consecuencia,  $\frac{}{R3-R1} H \rightarrow H$  y  $\frac{}{R3-R1} H \rightarrow c[(P_j^1)], H$ . Puesto

que  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por Rc 2,  $P_j^1$  no aparece en  $M$ ,  $c$ , ni  $N$ . Además, dado que  $K$  es una fórmula de interpolación para  $M \rightarrow c[P_j^1]$ ,  $M$ ,  $P_j^1$  no aparece en  $K$  (ya que, en otro caso, aparecería una descripción o un parámetro de predicado fuera de las descripciones en  $K$  que no aparece en  $M$ ). Por tanto, por Rc 2,  $\frac{}{S3-S1} K \rightarrow c$ ,  $M$  y  $K$  es una fórmula de interpolación para  $M \rightarrow N$ .

2.1.7 Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por Rd 1, entonces, por supuesto de inducción, existe una fórmula de interpolación  $K$  para  $M, d[P_j^1] \rightarrow N$ . Entonces,  $\frac{}{S3-S1} M, d[P_j^1] \rightarrow K$  y  $\frac{}{S3-S1} K \rightarrow N$ . Ya que  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por Rd 1,  $P_j^1$  no aparece en  $M$ ,  $d$ ,  $N$ .  $P_j^1$  no aparece tampoco en  $K$ , puesto que en otro caso habría en  $K$  una descripción o parámetro de predicado fuera de las descripciones que no aparece en  $M$ . En consecuencia,  $\frac{}{S3-S1} M, d \rightarrow K$  es demostrable por Rd 1 y  $K$  es una fórmula de interpolación para  $M \rightarrow N$ .

2.1.8 Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por Rd 2, entonces, por supuesto de inducción, existe una fórmula de interpolación  $K$  para  $M \rightarrow d[\Lambda]$ ,  $N$ . Entonces,  $\frac{}{S3-S1} M \rightarrow K$  y  $\frac{}{S3-S1} K \rightarrow d[\Lambda]$ ,  $N$ . Si  $\Lambda$  no aparece en  $K$  o aparece en  $d$  o  $N$ , entonces, por Rd 2 se cumple  $\frac{}{S3-S1} K \rightarrow d$ ,  $N$  y  $K$  es una fórmula de interpolación para  $M \rightarrow N$ . Si  $\Lambda$  aparece en  $K$  y no aparece en  $d$  ni  $N$ , entonces por Ra 1 vale que  $\frac{}{S3-S1} \neg K \rightarrow d[\Lambda]$ ,  $N$  y, por Rd 1,  $\frac{}{S3-S1} \neg \Lambda X - K[X] \rightarrow d[\Lambda]$ ,  $N$ , de donde, por Rd 2,  $\frac{}{S3-S1} \neg \Lambda X - K[X] \rightarrow d$ . Por otro lado, de  $\frac{}{S3-S1} M \rightarrow K$  se sigue, por Rd 2 y Rd 2,  $\frac{}{S3-S1} M \rightarrow \neg \Lambda X - K[X]$ .  $\neg \Lambda X - K[X]$  es, por tanto, una fórmula de interpolación para  $M \rightarrow N$ .

2.1.9 Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por RH<sub>1</sub> 1 o RH<sub>1</sub> 1', entonces la fórmula  $\Lambda X_1, \dots, \Lambda X_k (P_1^k X_1 \dots X_k) \wedge \neg \Lambda X_1, \dots, \Lambda X_k (P_1^1 X_1 \dots X_k)$  es una fórmula de interpolación para  $M \rightarrow N$ . Si  $M \rightarrow N$  se ha obtenido por RH<sub>1</sub> 2 o RH<sub>1</sub> 2', la fórmula  $\Lambda X_1, \dots, \Lambda X_k (P_1^k X_1 \dots X_k) \vee$

$\neg \wedge x_1, \dots, \wedge x_k (P_1^k x_1 \dots x_k)$  es una fórmula de interpolación para  $H \rightarrow H'$ . Nótese que existe la posibilidad de que un secunte en una S3-S1-demostración se haya obtenido por una de las reglas  $RS_1$  y que tenga longitud 1 de demostración. Las fórmulas de interpolación son, en este caso, las mismas que en el caso anterior.

2.2 Si no hay ningún parámetro de predicado  $P_1^k$  que aparezca tanto en  $H$  como en  $H'$  fuera de las descripciones  $P_1^k \rightarrow P_1^k$  se ha obtenido de  $H'' \rightarrow H'$  (o de  $H'' \rightarrow H'$  y  $H''' \rightarrow H''$ ) entonces, por supuesto de inducción, o bien  $H'$  ( $H'$  y  $H''$ ) es L3-satisfacible o  $H'$  ( $H'$  y  $H''$ ) es L3-válido. Por el lema 2.2.1, o bien  $H$  es L3-insatisfacible, o bien  $H$  es L3-válido. q.e.d.

#### 6.4 El cálculo S3-S2

Como ya dijimos en la introducción a este capítulo, el cálculo S3-S1, si bien es útil para demostrar el teorema de interpolación, contiene muchas reglas innecesarias desde el punto de vista de la adecuación. Como prueba de esta aseveración presentamos en este apartado y en el próximo dos cálculos secuenciales formados cada uno de ellos por una parte de las reglas de S3-S1. Los dos cálculos S3-S2 y S3-S3 son adecuados para L3 y ambos presentan la peculiaridad de que operan según el principio de las subfórmulas pero sólo por un lado de los secuentes. En S3-S2 los secuentes que se obtienen por la aplicación de las reglas son tales que las fórmulas del antecedente de la(s) premissa(s) contienen sólo subfórmulas de las fórmulas del antecedente de la conclusión. En S3-S3 ocurre lo mismo en el consecuente.

S3-S2 se ha originado de motivos distintos y de

modo independiente del "cálculo de reglas" (Regelkalkül) de Blau<sup>(3)</sup>. Sin embargo, guarda ciertas relaciones con él, puesto que en ambos cálculos son deducibles justamente fórmulas (secuentes, en el caso de S3-S2) L3-insatisfacibles. Por ello mismo, el método de deducción recuerda a los cálculos de árboles, así como la definición de deducción: Una fórmula  $F$  se considera deducible de un conjunto de supuestos  $M$  en S3-S2 sii hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que el secuyente  $M^0, \neg F \rightarrow$  es demostrable en S3-S2.

Pasamos ya a presentar los postulados de S3-S2:

Esquemas axiomáticos

Ax.s.1:  $M, \neg F, F \rightarrow H$

Ax.s.3:  $M, \neg F, F \rightarrow H$

Reglas de deducción

Ra 1:  $M, a_i \rightarrow N \quad (i = 1, 2)$

---

$M, a \rightarrow H$

Rb 1:  $M, b_1 \rightarrow H \quad M, b_2 \rightarrow H$

---

$M, b \rightarrow H$

Rc 1:  $M, c [A] \rightarrow H$

---

$M, c \rightarrow H$

Rd 1:  $M, d [p_j^1] \rightarrow H$

---

$M, d \rightarrow H$

si  $p_j^1$  no aparece en la conclusión.

$$\begin{array}{l}
 \text{RH}_1' : \quad \frac{H, H_1 \rightarrow H}{H \rightarrow H}
 \end{array}$$

Como vemos, los postulados de S3-S2 son también postulados en S3-S1, salvo la regla  $\text{RH}_1'$ , que no modifica los postulados de S3-S1, y esto en el sentido siguiente:  $\text{RH}_1$  y  $\text{RH}_1'$  se sustituyen por  $\text{RH}_1'$  en S3-S1, son demostrables exactamente las mismas fórmulas que en el sistema original. A la inversa, si  $\text{RH}_1'$  se sustituye por  $\text{RH}_1$  y  $\text{RH}_1'$  en S3-S2, el conjunto de fórmulas demostrables en una y otra formulación de S3-S2, permanece idéntico.

La corrección de S3-S2 se sigue de la de S3-S1, puesto que los postulados del primero son también postulados del segundo, salvo la regla  $\text{RH}_1'$ , cuya corrección es clara: si una valoración  $\beta$  satisface  $H$ , satisface también  $H_1$  y, por tanto, para que la premisa sea válida, ha de haber al menos un elemento de  $\mathcal{U}$  que es verdadero en esa valoración.

Mostramos ahora la completud de S3-S2, utilizando una propiedad de consistencia analítica. Primero, algunas definiciones. La definición de demostración en S3-S2 responde, con las modificaciones de rigor, a la de demostración en S3, y no la damos explícitamente aquí. Diremos, además, que un secuento  $\Sigma$  es demostrable en S3-S2 si hay una demostración de  $\Sigma$  en S3-S2. Escribiremos  $\frac{\Sigma}{\text{S3-S2}}$  para indicar que  $\Sigma$  es demostrable en S3-S2.

#### Definición 6.4.1

Una refutación en S3-S1 para el conjunto finito  $\mathcal{U}$  es una demostración en S3-S2 del secuento  $H \rightarrow \cdot$ .

Diremos que el conjunto  $\Pi$  es refutable en S3-S2 si y sólo si existe un subconjunto finito  $\Pi^0$  de  $\Pi$  tal que  $\Pi^0$  es refutable en S3-S2.

Definición 6.4.2  $\Pi \in E_{S3, S2}$

La fórmula  $F$  es deducible en S3-S2 del conjunto  $\Pi$  de supuestos:  $\Leftrightarrow$  Existe una refutación en S3-S2 de  $\{\Pi^0, \neg F\}$  donde  $\Pi^0$  es un subconjunto finito de  $\Pi$ .

Lema 6.4.3

Sea  $E_g$  la propiedad de conjuntos  $\Pi$  de fórmulas tales que  $\Pi \in E_g$  si y sólo si  $\Pi$  no es refutable en S3-S2.  $E_g$  es una propiedad trivalente de consistencia analítica.

Demostración: Se cumplen las propiedades (i') -

(vi') de la definición de propiedad de consistencia analítica.

(i'): Si  $\Pi$  contiene una fórmula  $G$  y su negación fuerte o débil, entonces los secuentes  $G, \neg G \rightarrow$  y  $G, \neg G \rightarrow$  son axiomas de S3-S2 y por lo tanto existe un subconjunto  $\{G, \neg G\}$  finito de  $\Pi$ , que es refutable. Por tanto,  $\Pi \notin E_g$ .

(ii'): Supuesto que haya un subconjunto finito  $\Pi^0$  de  $\Pi$  tal que  $\Pi^0, a, a_1 \rightarrow$  o  $\Pi^0, a, a_2 \rightarrow$  son demostrables en S3-S2, entonces, por Rc 1,  $\Pi^0, a \rightarrow$  es demostrable en S3-S2.

(iii'): Si  $\Pi^0, b, b_1 \rightarrow$  y  $\Pi^0, b, b_2 \rightarrow$  son demostrables en S3-S2, también lo es, por Eb 1,  $\Pi^0, b \rightarrow$ .

(iv') Si  $\Pi^0, c[A], c \rightarrow$  es demostrable en S3-S2, lo es también  $\Pi^0, c \rightarrow$ , por Rc 1.

(v') Si  $\Pi^0, d, d[\Pi_j^1] \rightarrow$  es demostrable, con  $\Pi_j^1$  nuevo para  $\Pi, d$  entonces  $\Pi^0, d \rightarrow$  es demostrable, por Rd 1.

(v') Si  $H^0, H_1 \rightarrow$  es demostrable en S3-S2, también lo es  $H^0 \rightarrow$ , por  $RI_1'$ .

Proposición 6.4.4. Completud restringida de S3-S2  
Sea  $H^*$  un conjunto de fórmulas, paramétricamente limitado y posiblemente vacío y  $F$  una fórmula de L3. Entonces,

$$H^* \frac{}{L3} F \Rightarrow H^* \frac{}{S3-S2} F$$

Demostración: Si  $H^* \frac{}{L3} F$ , entonces  $\{H, \neg F\}$  es insatisfacible. Por lo tanto, por el Principio de Unificación, dado que  $E_3$  es una propiedad de consistencia analítica,  $\{H, \neg F\} \notin E_3$ , o lo que es lo mismo,  $H \frac{}{S3-S2} F$ .

La completud no restringida de S3-S1, se demuestra como en los casos precedentes. La adecuación de S3-S2 a la lógica L3 se sigue inmediatamente de su corrección y completud.

### 6.5 El cálculo S3-S3

El segundo cálculo adecuado contenido en S3-S1 en S3-S3, que definiremos a continuación. En este cálculo se generan muy directamente las fórmulas L3-válidas.

Postulados de S3-S3.

Esquemas axiomáticos:

$$\text{Ax. 6.2 : } H \rightarrow \neg F, F, N$$

$$\text{Ax. 6.4 : } H \rightarrow \neg F, \neg \neg F, N$$

Reglas de deducción

- Ra 2: 
$$\frac{H \rightarrow a_1, H \quad H \rightarrow a_2, H}{H \rightarrow a, H}$$
- Rb 2: 
$$\frac{H \rightarrow b_i, N \quad (i = 1, 2)}{H \rightarrow b, H}$$
- Rc 2: 
$$\frac{H \rightarrow c[P_j^1], H}{H \rightarrow c, H} \quad \text{si } P_j^1 \text{ no aparece en la conclusión}$$
- Rd 2: 
$$\frac{H \rightarrow d[A], H}{H \rightarrow d, H}$$
- RH<sub>1</sub><sup>''</sup>: 
$$\frac{H \rightarrow \neg H_1, H}{H \rightarrow H}$$

La corrección del cálculo está asegurada, puesto que los postulados de S3-S3 son postulados de S3-S1, un cálculo correcto, y RH<sub>1</sub><sup>''</sup>, la única regla que no aparece en S3-S1, es correcta: si la premisa es L3-válida, entonces, dado que H<sub>1</sub> es L3-insatisfacible, para toda valoración  $\beta$  hay al menos un elemento de H que es verdadero en  $\beta$ , de donde se sigue que la conclusión ha de ser L3-válida, también.

Para demostrar la completud de S3-S3 necesitamos algunas definiciones y lemas previos. No definimos la demostrabilidad de un secuyente en S3-S3, por ser una noción análoga a la de demostrabilidad en S3. *no ten análogo.*

Definición 6.5.1

La fórmula  $F$  es deducible en  $\text{IS-ES}$  a partir del conjunto  $M$  de supuestos:  $\Leftrightarrow$  Hay un subconjunto finito  $M^0$  de  $M$  tal que  $\rightarrow \neg(M^0)$ ,  $F$  es  $\text{IS-ES}$ -demostrable.

Lema 6.5.2

Las dos reglas siguientes son admisibles en  $\text{IS-ES}$ :

$$\text{RA 1} \quad \frac{M \rightarrow M}{M \rightarrow M, F} \quad \text{R}_{\neg 2}: \frac{M \rightarrow \neg \neg F, M}{M \rightarrow F, M}$$

Demostración: La demostración de RA 1 es similar a la correspondiente prueba para RA 1 en el lema 4.5.2.

Demostramos la admisibilidad de  $R_{\neg 2}$  por inducción según la longitud de la demostración de la premisa:

Base de inducción: Si la premisa es un axioma, entonces se cumple uno de los casos siguientes: o bien

$$M \rightarrow F, M \text{ es de la forma } \left\{ \begin{array}{l} M \rightarrow \neg \neg F, \neg F, M' \\ M \rightarrow \neg \neg F, \neg \neg F, M' \end{array} \right.$$

o bien hay una fórmula  $M$  en  $M$  y/o  $M$  que hace de  $M \rightarrow$ ,  $F$  un axioma y  $F$  no es una subfórmula de  $M$ . En los dos primeros casos la conclusión es un axioma o se sigue de un axioma por  $\text{EB 2}$ . En el otro caso, la conclusión es un axioma.

Paso de inducción: Si  $\neg \neg F$  es la parte principal de la aplicación de la regla, no hay nada que demostrar. Si la parte principal de la aplicación de la regla por la que se ha obtenido la premisa no es  $\neg \neg F$ , del supuesto de inducción y la aplicación de la misma regla, se sigue la conclusión. q.e.d.

Lema 6.5.3

Sea  $M_0$  la propiedad " $\rightarrow M$  es demostrable en

S3-S3".  $E_9$  es una propiedad trivalente de demostrabilidad analítica.

Demostración: Es obvio que  $E_9$  es una propiedad de conjuntos finitos. Además, se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Dado que los secuentes  $\rightarrow F, \neg F$  y  $\rightarrow \neg F, \neg\neg F$  son axiomas, por aplicaciones repetidas de RA 1 se sigue que

$$\rightarrow H, F, \neg F \text{ y } \rightarrow H, \neg F, \neg\neg F.$$

(ii) Por R $\neg\neg$ , si  $\rightarrow H, \neg\neg F$  es demostrable en S3-S3,  $\rightarrow H, F$  también lo es.

(iii) Si  $\rightarrow H, a_1$  y  $\rightarrow H, a_2$  son demostrables en S3-S3, también lo es  $\rightarrow H, a$ , por Ra 2

(iv) Si  $\rightarrow H, b_1$  o  $\rightarrow H, b_2$  son demostrables en S3-S3, entonces lo es también  $\rightarrow H, b$ , por Rb 2.

(v) Si  $\rightarrow H, c[P_j^1]$  es demostrable en S3-S3 y  $P_j^1$  es nuevo para  $H, c$ , entonces también es demostrable  $\rightarrow H, c$ , por Rc 2

(vi) Si  $\rightarrow H, d[A]$  es demostrable en S3-S3, también lo es  $\rightarrow H, d$ , por Rd 2.

(vii) Si  $\rightarrow H, \neg H_1$  es demostrable en S3-S3, también lo es  $\rightarrow H$ , por RH $_1$ .

Proposición 6.5.4 Completud restringida de S3-S3

Si  $H^*$  es un conjunto de fórmulas, paramétricamente limitado y posiblemente vacío, y  $F$  es una fórmula de L3, entonces

$$H^* \Vdash_{L3} F \Rightarrow H^* \Vdash_{S3-S3} F.$$

Demostración: Si  $H^* \Vdash_{L3} F$ , entonces  $\{H, \neg F\}$  es L3-insatisfacible y por el teorema de compacidad existe un subconjunto finito  $H^0$  de  $H$  tal que  $\{H^0, \neg F\}$  es L3-insatisfacible. Por tanto  $\{\neg(H^0), F\}$  es un conjunto disyuntivamente válido y

por la prop. 2.5.1,  $\{\neg(\hat{H}^0), F\} \in E_g$ . Es decir, hay un subconjunto  $H^0$  de  $H$  tal que  $\rightarrow \neg(\hat{H}^0), F$ . Por tanto,  $\frac{E}{E_0-E_0} F$ .

La completud no restringida de  $E_0-E_0$  y la adecuación de este cálculo se siguen de la proposición anterior por métodos ya conocidos.

Notas al capítulo 6

(1) Smullyan (1968), pp.124 ss

(2) El método de demostración está tomado de Smullyan (1968), pp. 127 ss, así como la idea de los cálculos secuenciales simétricos. Otras demostraciones del teorema de interpolación, aparte de su primera prueba en Craig (1957), pueden encontrarse en Chang - Keisler (1973), p. 84 ss; Shoenfield (1967), p. 80 y Kleene (1967), p. 355 ss.

(3) Blau (1978), pp. 239 ss

## 7. LOS TEOREMAS DE BETH Y ROBINSON EN L3

### 7.1 Introducción

Estudiamos en este último capítulo del trabajo dos consecuencias del lema de Craig, antes demostrado, en la lógica trivalente L3. La primera de ellas es una generalización del teorema de definibilidad de Beth. La segunda es una versión del teorema de Robinson apropiada a L3.

El teorema de Beth relaciona dos modos de entender la definibilidad en una teoría. Uno de ellos, la definibilidad explícita de un predicado (y con ello de los signos funcionales) en una teoría  $K$  - entiéndase teoría como conjunto de fórmulas que contiene los axiomas de una lógica y posiblemente otros y que está cerrado para la consecuencia lógica - se da cuando un parámetro (o constante) de predicado  $P^k$  perteneciente al vocabulario de la teoría es tal que existe un predicado ( $k$ -ádico si el parámetro o constante es  $k$ -ádico) en el que no aparece  $P^k$  y que es satisfecho exactamente por las mismas secuencias de objetos que satisfacen  $P^k$ . De manera todavía menos rigurosa, el predicado  $n$ -ádico  $G[*_1, \dots, *_n]$  define explícitamente al parámetro  $P^n$  cuando  $G[*_1, \dots, *_n]$  es verdadero exactamente de los mismos objetos que  $P^n$  y  $P^n$  no aparece en  $G[*_1, \dots, *_n]$ . Es claro que si un parámetro de predicado o constante de predicado  $P_i^n$  es definible explícitamente a partir de un predicado que contiene sólo otros parámetros distintos de  $P_i^n$ , el predicado definible no es independiente en la teoría y puede ser, por tanto,

eliminado del vocabulario de la misma.

Un segundo concepto de definibilidad es el de definibilidad implícita. Una constante o parámetro de predicado  $P_i^n$  es implícitamente definible en la teoría  $H$  cuando, por así decir, la teoría está construida de tal modo que sólo hay una interpretación del parámetro  $P_i^n$  que sea compatible con la verdad de los axiomas de la teoría. Esto es lo que viene a decir la definición 7.2.2 de definibilidad implícita. Otra manera de entender la definibilidad implícita, equivalente a la anterior, es decir que el parámetro  $P_i^n$  es implícitamente definible si dadas dos teorías  $H$  y  $H'$  tales que  $H'$  es el resultado de sustituir  $P_i^n$  en  $H$  por un nuevo parámetro  $P_j^n$ , distinto de los que aparecen en  $H$ , entonces en toda interpretación en que los enunciados de  $H$  y  $H'$  sean verdaderos,  $P_i^n$  y  $P_j^n$  son satisfechos por exactamente las mismas secuencias de  $n$ -tuplos de objetos. El teorema de Beth afirma la equivalencia de ambos conceptos de definibilidad.

El teorema de Robinson, por su parte, da las condiciones en que la unión de dos teorías consistentes es consistente. La condición que se precisa es que ambas teorías sean completas en el dominio del vocabulario común, es decir, que para toda fórmula  $F$  en la que aparecen sólo parámetros (o constantes) de predicado que pertenecen al vocabulario de ambos conjuntos  $H$  y  $H'$ , una de las fórmulas  $F$  o  $\neg F$  sea demostrable en ambas teorías.

### 7.2 Teorema de Definibilidad (1)

Damos primero las definiciones de definibilidad implícita y explícita para pasar luego a probar el teorema de

Beth para la lógica L3. Finalmente, damos una versión más general del teorema de definibilidad. En el Apéndice II mostraremos la equivalencia de las dos definiciones de definibilidad implícita que damos a continuación.

Definición 7.2.1

Sean  $H$  y  $H'$  conjuntos finitos de fórmulas cerradas sin descripciones y  $P, P_1, \dots, P_n$  sean todos los parámetros de predicado que aparecen en  $H$ . Consideremos, por el momento, a  $P$  como un parámetro monádico. Sea  $H'$  el resultado de sustituir cada aparición de  $P$  en  $H$  por un nuevo parámetro  $P'$  que es distinto de  $P, P_1, \dots, P_n$ . Entonces se cumple, por definición:  $P$  es definible implícitamente en  $H$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$ :  $\Leftrightarrow$  se cumple que

$$H \cup H' \vdash \forall X (P X \equiv P' X)$$

donde  $\vdash$  debe entenderse como el símbolo de demostrabilidad en  $ES$ , o como  $\Vdash_{L3}$  o de cualquier otra manera equivalente.

Definición 7.2.2

Bajo las condiciones de la definición 7.2.1, sean  $\varphi$  y  $\varphi'$   $L3$ -interpretaciones sobre el conjunto  $\mathcal{U}$  tales que  $\varphi(P_1) = \varphi'(P_1), \dots, \varphi(P_n) = \varphi'(P_n)$ .  $P$  es implícitamente definible en  $H$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$ :  $\Leftrightarrow \varphi(H) = \varphi'(H) = v \Rightarrow \varphi(P) = \varphi'(P)$ . Dicho de otra manera, para  $\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_n)$  dados, hay como máximo una  $\varphi(P)$  tal que  $\varphi(H) = v$ .

Definición 7.2.3

Bajo los supuestos de la definición 7.2.1,  $P$  es

definible explícitamente en  $M$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$ :  $\Leftrightarrow$  existe un predicado monádico  $G[*_1]$  tal que en  $G[*_1]$  sólo aparecen parámetros de predicado en el conjunto  $\{P_1, \dots, P_n\}$  y se cumple

$$M \models \forall X (PX \equiv G[X])$$

Proposición 7.2.4. Teorema de definibilidad de Beth para  $L_3$

$P$  es implícitamente definible en  $M$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$  sii es explícitamente definible en  $M$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$ , salvo el caso trivial en que  $M = \{F\}$  y en  $F$  sólo aparece  $P$  fuera de las descripciones.

Demostración: Demostramos primero que si  $P$  es explícitamente definible, lo es también implícitamente. Si  $P$  es definible explícitamente en  $M$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$  entonces se cumple, por definición

$$(1) \quad M \models \forall X (P[X] \equiv G[X])$$

Sea ahora  $P'$  un parámetro de predicado unario distinto de  $P, P_1, \dots, P_n$ . Entonces, por proposición 1.7.2.6 (iii) se cumple

$$(2) \quad M' \models \forall X (P'[X] \equiv G[X])$$

puesto que  $M', \forall X (P'[X] \equiv G[X])$  son variantes respecto a parámetros de  $M$  y  $\forall X (P[X] \equiv G[X])$ , respectivamente.  $M'$  puede entenderse en el sentido de la definición 7.2.1, Entendemos ahora  $\vdash$  como  $\vdash_{S_3}$ . Entonces (1) y (2) equivalen a las fórmulas (3) y (4)

$$(3) \quad \vdash_{S_3} M \rightarrow \forall X (P[X] \equiv G[X])$$

$$(4) \quad \vdash_{S_3} M' \rightarrow \forall X (P'[X] \equiv G[X])$$

Entonces se cumple

$$(5) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow \Lambda X(P[X] \equiv Q[X]) \wedge \Lambda X(P'[X] \equiv Q[X])$$

y por R3 11,

$$(6) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow (P[\alpha_j^1] \equiv Q[\alpha_j^1]) \wedge (P'[\alpha_j^1] \equiv Q[\alpha_j^1])$$

para un parámetro de predicado  $P_j^1$  que no aparece en  $H, H', Q$  y que es distinto de  $P, P'$ . Por la transitividad de  $\equiv$  y R3 11 vale, entonces, que

$$(7) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow \Lambda X(P[X] \equiv P'[X]),$$

es decir,

$$(8) \quad H \cup H' \vdash \Lambda X(P[X] \equiv P'[X]).$$

Demostramos ahora la implicación inversa, es decir, que si  $P$  es implícitamente definible, lo es también explícitamente. Si  $P$  es definible implícitamente, se cumple que  $H \cup H' \vdash \Lambda X(P[X] \equiv P'[X])$ , es decir,

$$(9) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow \Lambda X(P[X] \equiv P'[X])$$

Por R3 11 se cumple para una descripción  $\alpha_j^1$ , tal que  $\alpha_j^1$  no aparece en  $H, H'$ , que

$$(10) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow P[\alpha_j^1] \equiv P'[\alpha_j^1]$$

teniendo que existir un parámetro  $P_j^1$  que no aparece en  $H$  ni en  $H'$ ; puesto que  $H$  y  $H'$  son finitos. Por la definición de  $\equiv$  y R3 7 se cumplen (11) y (12):

$$(11) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow (TP[\alpha_j^1] \leftrightarrow TP'[\alpha_j^1])$$

$$(12) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow (\perp P[\alpha_j^1] \leftrightarrow \perp P'[\alpha_j^1])$$

de donde se sigue, por definición de  $\leftrightarrow$  y R3 7,

$$(13) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow TP[\alpha_j^1] \rightarrow TP'[\alpha_j^1]$$

$$(14) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow \perp P[\alpha_j^1] \rightarrow \perp P'[\alpha_j^1]$$

$$(15) \quad \frac{}{R3} H, H' \rightarrow TP'[\alpha_j^1] \rightarrow TP[\alpha_j^1]$$

$$(16) \quad \frac{}{S3} H, H' \rightarrow \perp P' \ulcorner P_j^1 \urcorner \rightarrow \perp P \ulcorner P_j^1 \urcorner$$

y por RS 1, RS 2,  $\overline{RS 3}$ ,  $\overline{RS 4}$ , la def. de  $\rightarrow$ , se cumple

$$(17) \quad \frac{}{S3} H, \top P \ulcorner P_j^1 \urcorner \rightarrow \neg(\hat{1}), \top P' \ulcorner P_j^1 \urcorner$$

$$(18) \quad \frac{}{S3} H, \perp P \ulcorner P_j^1 \urcorner \rightarrow \neg(\hat{1}), \perp P' \ulcorner P_j^1 \urcorner$$

$$(19) \quad \frac{}{S3} H, \neg \top P \ulcorner P_j^1 \urcorner \rightarrow \neg(\hat{1}), \neg \top P' \ulcorner P_j^1 \urcorner$$

$$(20) \quad \frac{}{S3} H, \neg \perp P \ulcorner P_j^1 \urcorner \rightarrow \neg(\hat{1}), \neg \perp P' \ulcorner P_j^1 \urcorner.$$

De (17) y (18) se sigue (21) y de (19) y (20), (22):

$$(21) \quad \frac{}{S3} H, (\top P \ulcorner P_j^1 \urcorner \vee \perp P \ulcorner P_j^1 \urcorner) \rightarrow \neg(\hat{1}), (\top P' \ulcorner P_j^1 \urcorner \wedge \perp P' \ulcorner P_j^1 \urcorner)$$

$$(22) \quad \frac{}{S3} H, (\neg \top P \ulcorner P_j^1 \urcorner \vee \neg \perp P \ulcorner P_j^1 \urcorner) \rightarrow \neg(\hat{1}), (\neg \top P' \ulcorner P_j^1 \urcorner \wedge \neg \perp P' \ulcorner P_j^1 \urcorner)$$

y de (21) y (22) se sigue (23):

$$(23) \quad \frac{}{S3} H, (\top P \ulcorner P_j^1 \urcorner \vee \perp P \ulcorner P_j^1 \urcorner) \vee (\neg \top P \ulcorner P_j^1 \urcorner \vee \neg \perp P \ulcorner P_j^1 \urcorner) \rightarrow \neg(\hat{1}), (\top P' \ulcorner P_j^1 \urcorner \wedge \perp P' \ulcorner P_j^1 \urcorner) \wedge (\neg \top P' \ulcorner P_j^1 \urcorner \wedge \neg \perp P' \ulcorner P_j^1 \urcorner)$$

Por el teorema de interpolación, existe una fórmula de interpolación  $K$  para (23) -puesto que por la adecuación de S3 el secuyente (23) es L3-válido - siempre que haya al menos un parámetro de predicado que aparezca tanto en el antecedente como en el consecuente del secuyente. Si este parámetro no existe, el teorema no se demuestra y se trata de la salvedad que hicimos en la formulación del teorema. En el caso que estudiamos,  $H$  es  $\{F\}$  y  $F$  es una fórmula en la que sólo aparece  $P$  fuera de las descripciones. Entonces es trivialmente verdadero que  $F$  no es explícitamente definible. Bien, supuesto que hay al menos un parámetro de predicado  $P_i^k$  que aparece tanto en el antecedente como en el consecuente del secuyente (23), existe una fórmula de interpolación  $K$  para este secuyente. Ni  $P$  ni  $P'$  aparecen en  $K$ . Si en  $K$  aparece alguna descripción entonces es  $\ulcorner P_j^1 \urcorner$ . Sea ahora  $G[\ast_j^1]$  el predicado que se origina cuando cada aparición de  $\ulcorner P_j^1 \urcorner$  en  $K$  se sustituye por  $\ast_j^1$ . Entonces,  $G[\ulcorner P_j^1 \urcorner]$  es  $K$ . Entonces se cumple

$$(24) \quad \frac{\vdash}{S3} H, (TP[C_j^1] \vee LP[C_j^1]) \vee (\neg TP[C_j^1] \vee \neg LP[C_j^1]) \rightarrow G[C_j^1]$$

$$(25) \quad \frac{\vdash}{S3} G[C_j^1] \rightarrow (G', (TP[C_j^1] \wedge LP[C_j^1]) \wedge (\neg TP[C_j^1] \wedge \neg LP[C_j^1]))$$

de donde se sigue (26) y (27)

$$(26) \quad \frac{\vdash}{S3} H \rightarrow ((TP[C_j^1] \vee LP[C_j^1]) \vee (\neg TP[C_j^1] \vee \neg LP[C_j^1])) \rightarrow G[C_j^1]$$

$$(27) \quad \frac{\vdash}{S3} H' \rightarrow G[C_j^1] \rightarrow ((TP[C_j^1] \wedge LP[C_j^1]) \wedge (\neg TP[C_j^1] \wedge \neg LP[C_j^1]))$$

Puesto que  $P$  no aparece en  $H'$ ,  $G$ ,  $G_j^1$  y es distinto de  $G'$ , (27)

es una variante respecto a parámetros de (26):

$$(28) \quad \frac{\vdash}{S3} H \rightarrow G[C_j^1] \rightarrow (TP[C_j^1] \wedge LP[C_j^1]) \wedge (\neg TP[C_j^1] \wedge \neg LP[C_j^1]).$$

Por tanto, (28) es L3-válido y demostrable en S3. De donde, además:

$$\frac{\vdash}{L3} (((TP \vee LP) \vee (\neg TP \vee \neg LP)) \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow ((TP \wedge LP) \wedge (\neg TP \wedge \neg LP))) \rightarrow \vdash \equiv \vdash$$

Entonces de (26) y (28) se sigue (29)

$$(29) \quad \frac{\vdash}{S3} H \rightarrow P[C_j^1] \equiv G[C_j^1]$$

y, puesto que  $P_j^1$  no aparece en  $H$ ,  $G$  ni  $G$ , también se cumple (30)

$$(30) \quad H \frac{\vdash}{S3} \forall X (P[X] \equiv G[X]) \quad \text{q.e.d.}$$

El teorema de definibilidad puede generalizarse en varias direcciones. En primer lugar, no es necesario que  $P$  y  $G$  sean no-númericos. Supongamos que  $P$  es  $n$ -número. La demostración del teorema en este caso se realiza como en el caso anterior salvo la siguiente diferencia: la metavariable  $X$  debe leerse como una abreviatura para  $X_1 \dots X_n$  y en vez de  $P[C_j^1]$  y fórmulas similares hay que entender  $P[C_{j_1}^1 \dots C_{j_n}^1]$ , donde los parámetros  $C_{j_i}^1$  deben escogerse de manera adecuada. En el caso de que  $C_{j_i}^1$  sean conjuntos infinitos paramétricamente limitados, el teorema de definibilidad resulta de la completud restringida de S3 y son reducibles al caso finito. En el caso de conjuntos no limitados, el teorema se sigue de la completud general de S3.

Es interesante notar que si sustituimos el signo

de la equivalencia por el del bicondicional en las definiciones de definibilidad implícita y explícita (defs. 7.2.1 y 7.2.3), se obtiene una definición más débil de definibilidad, que puede expresarse del modo siguiente: Bajo las condiciones de la definición 7.2.2,  $P$  es implícitamente definible en sentido débil en  $M$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$  sii, por definición,  $\varphi(M) = \varphi'(M) = v \Rightarrow \varphi(P)^+ = \varphi'(P)^+$ . Es decir, esta definición débil de definibilidad implícita nos asegura sólo la unicidad del dominio positivo de la interpretación del parámetro definido. La equivalencia de las dos versiones de definibilidad implícita en sentido débil - la que resulta de sustituir la equivalencia por el bicondicional en la def 7.2.1 y la versión de 7.2.2 que hemos indicado inmediatamente arriba - se demuestra de manera similar al caso de la definibilidad implícita sensu stricto (cfr. Apéndice II). Finalmente, la equivalencia de la definibilidad implícita en sentido débil con la definibilidad explícita en sentido débil - concepto que resulta de la sustitución de la equivalencia por el bicondicional en la def. 7.2.3 - puede probarse en el modo en que lo hacemos, esquemáticamente, en la siguiente proposición:

Proposición 7.2.4

$P$  es definible implícitamente en sentido débil en  $M$  a partir de  $P_1, \dots, P_n$  si y sólo si es definible explícitamente en sentido débil a partir de  $P_1, \dots, P_n$

Demostración: Si  $P$  es definible explícitamente, se cumple

$$(1) \quad M \models_{\mathcal{S}_3} \wedge X (P[X] \leftrightarrow G[X])$$

Si  $P'$  es nuevo para (1), se puede afirmar que

$$(2) \quad M' \models_{\mathcal{S}_3} \wedge X (P'[X] \leftrightarrow G[X])$$

donde  $H, H', P, P'$  deben entenderse en el sentido de las definiciones y proposición precedentes. De (2) se sigue (3) que afirma la definibilidad implícita de  $P$

$$(3) \quad H, H' \models_{\mathfrak{B}} \forall X (P[X] \leftrightarrow P'[X])$$

A la inversa, supuesto que  $P$  es definible implícitamente, entonces se cumple

$$(4) \quad H, H' \models_{\mathfrak{B}} \forall X (P[X] \leftrightarrow P'[X])$$

de donde se sigue

$$(5) \quad H, P \models_{\mathfrak{B}} P_j^1 \rightarrow (H' \rightarrow P' \models_{\mathfrak{B}} P_j^1)$$

donde  $P_j^1$  es un parámetro nuevo. Sea  $K$  una fórmula de interpolación para (5) y  $G \models_{\mathfrak{B}} P_j^1$  sea  $K$ . Por el teorema de interpolación se cumplen (6) y (7)

$$(6) \quad H \models_{\mathfrak{B}} (P \models_{\mathfrak{B}} P_j^1 \rightarrow G \models_{\mathfrak{B}} P_j^1)$$

$$(7) \quad H' \models_{\mathfrak{B}} (G \models_{\mathfrak{B}} P_j^1 \rightarrow P' \models_{\mathfrak{B}} P_j^1)$$

de donde, por ser (7) una variante respecto a parámetros de  $H \models_{\mathfrak{B}} G \models_{\mathfrak{B}} P_j^1 \rightarrow P' \models_{\mathfrak{B}} P_j^1$ , se sigue

$$(8) \quad H \models_{\mathfrak{B}} (P \models_{\mathfrak{B}} P_j^1 \leftrightarrow G \models_{\mathfrak{B}} P_j^1)$$

de donde, por ser  $P_j^1$  nuevo para  $H, G$ , se sigue

$$(9) \quad H \models_{\mathfrak{B}} \forall X (P[X] \leftrightarrow G[X])$$

A pesar de estas semejanzas entre ambos conceptos, fuerte y débil, de definibilidad, el segundo concepto no es, en sentido estricto, una noción apropiada de definibilidad, puesto que no cumple la condición de no-creatividad que es habitual imponer sobre las definiciones: dada una condición definitoria  $\forall X (P[X] \leftrightarrow G[X])$  del parámetro  $P$  por medio del predicado  $H$  en la teoría  $\mathfrak{L}$ , es necesario, para que la definición de  $P$  sea correcta que " $P$ " sea sustituible por " $G$ " en todo contexto, y a la inversa, de manera

mecánica, claro está, y que para toda fórmula  $F$  en que aparece " $P$ " y valga  $H \vdash F$ , valga también  $H' \vdash F'$ , donde  $H'$  es el conjunto de fórmulas  $H \cup \{\forall X(P \leftrightarrow G)\}$  y  $F'$  es el resultado de sustituir " $P$ " por " $G$ " o a la inversa. Esta última condición es la no-creatividad de la definición. Sea ahora  $H$  un conjunto de fórmulas y  $H'$  el conjunto definido como más arriba, siendo  $P$  un parámetro nuevo para  $H$  y  $G$ . Es claro que se cumple

$$H \Vdash_{L3} \forall X(G \equiv G).$$

Sin embargo, no es válido afirmar

$$H' \Vdash_{L3} \forall X(P \equiv G).$$

Por tanto, no se cumple la condición de no-creatividad. Sin embargo las definiciones en sentido débil de un parámetro de predicado sí nos aseguran, según la prop. 1.7.2.6 (vii), la substitutividad de ese parámetro  $P$  por el predicado  $G$  en contextos que caen fuera del dominio de los funtores  $-, \wedge, +, \exists$ .

### 7.3 Teorema de consistencia de Robinson

Como dijimos en la introducción del capítulo, el teorema de consistencia de Robinson, que demostraremos por medio del lema de Craig, indica las condiciones en que la unión de dos conjuntos consistentes de fórmulas es un conjunto consistente. En la demostración de esta versión del teorema de consistencia, seguimos el modelo de la prueba de Kleene<sup>(2)</sup> para esta proposición en la lógica bivalente.

#### Proposición 7.3.1

Sean  $H$  y  $H'$  conjuntos de fórmulas de  $L3$ , cerradas

y sin descripciones. Sean  $P_1, \dots, P_n, \dots$  todos los parámetros de predicado que aparecen en  $\Sigma$  y sea  $P'_1, \dots, P'_n, \dots$  la lista correspondiente para  $\Sigma'$ . Los parámetros de ambas listas no tienen por qué ser distintos. Supuesto que se cumple (i) y (ii):

(i)  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son consistentes, es decir, no vale que  $\Sigma \vdash_c G \wedge \neg G$  ni  $\Sigma' \vdash_c F \wedge \neg F$ , para ninguna fórmula  $G, F$ .  
(ii) Si todo parámetro de predicado que aparece en una fórmula cerrada cualquiera  $F$  pertenece al conjunto intersección de los conjuntos  $\{P_1, \dots, P_n, \dots\}$  y  $\{P'_1, \dots, P'_n, \dots\}$  y no aparece en  $F$  ninguna descripción, entonces o bien

$$\Sigma \vdash_c F \vee \Sigma' \vdash_c \neg F$$

o bien

$$\Sigma \vdash_c \neg F \vee \Sigma' \vdash_c F$$

es decir, cuando  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son conjuntos completos respecto al vocabulario común, entonces se cumple: No hay una fórmula  $G$  tal que  $\Sigma, \Sigma' \vdash_c G \wedge \neg G$  o, lo que es lo mismo,  $\Sigma \cup \Sigma'$  es consistente.

Demostración: Supuesto que  $\Sigma, \Sigma' \vdash_c F \wedge \neg F$ , existen conjuntos  $\Sigma^0, \Sigma'^0$ , finitos (por definición de  $\vdash_c$  en cualquiera de los cálculos que hemos definido) tal que  $\Sigma^0 \subseteq \Sigma, \Sigma'^0 \subseteq \Sigma'$  y  $\Sigma^0, \Sigma'^0 \vdash_c F \wedge \neg F$ . Es claro que ni  $\Sigma^0$  ni  $\Sigma'^0$  son vacíos, puesto que en otro caso,  $\Sigma$  o  $\Sigma'$  serían inconsistentes, contra el supuesto. Por tanto, podemos afirmar que

$$(1) \quad \Sigma^0, \Sigma'^0 \vdash_c G \wedge \neg G$$

Por el teorema de deducción se cumple (2):

$$(2) \quad \Sigma^0 \vdash_c (\Sigma'^0 \rightarrow G \wedge \neg G)$$

y, puesto que se puede afirmar (2) y (1), también se puede afirmar

(5):

$$(3) \quad \Vdash_{L3} (G \rightarrow F \wedge \neg F) \rightarrow \neg G$$

$$(4) \quad \Vdash_{L3} (G \rightarrow (F \wedge \neg F)) \rightarrow \neg G$$

$$(5) \quad H^0 \vdash \neg(\hat{H}^0)$$

Supuesto que no haya ningún parámetro de predicado que aparece tanto en  $H^0$  como en  $H^{0'}$ , entonces, por el teorema de interpolación, se cumple (6) o (7)

$$(6) \quad \vdash \neg(\hat{H}^0)$$

$$(7) \quad \vdash \neg(\hat{H}^{0'})$$

Pero en este caso tanto  $H$  como  $H'$  son inconsistentes, contra el supuesto. Por tanto, existe un parámetro de predicado que aparece tanto en  $H^0$  como en  $H^{0'}$ . Sea  $K$  una fórmula de interpolación para (5). Entonces,

$$(8) \quad H^0 \vdash_c K$$

$$(9) \quad K \vdash_c H^{0'}$$

Cada parámetro de predicado que aparece en  $K$  aparece en  $H^0$  y  $H^{0'}$ . Además, en  $K$  no hay descripciones. Por lo tanto  $K$  pertenece al vocabulario común de  $H$  y  $H'$ . Entonces, por la condición (ii) de la formulación de la proposición, se cumple o bien (10) o bien (11):

$$(10) \quad H \vdash_c K \text{ y } H' \vdash_c K$$

$$(11) \quad H \vdash_c \neg K \text{ y } H' \vdash_c \neg K$$

En el primer caso, de (9) se sigue que  $H' \vdash_c \neg K$  y, por tanto,  $H \vdash_c K$  y  $H' \vdash_c \neg K$ . En consecuencia,  $H'$  es inconsistente, contra el supuesto. En el segundo caso, de (8) se sigue  $H \vdash_c K$  y por (11),  $H \vdash_c \neg K$ . Entonces  $H$  sería inconsistente, contra el supuesto. En consecuencia no existen subconjuntos  $H^0, H^{0'}$  de  $H$  y  $H'$  tales que  $H^0, H^{0'} \vdash_c F \wedge \neg F$ . Por tanto  $H \cup H'$  es consistente. q.e.d.

Notas al capítulo 7

- (1) Cfr. Smullyan (1968), pp. 131 ss, de donde tomamos el texto de formulación del teorema y el método de prueba, salvo, claro está, los aspectos característicos que se derivan de que aquí se trate de una lógica trivalente.
- (2) Kleene (1967), p. 374-5.

APENDICE I : DEMOSTRACION DEL HAUPTSATZ PARA S3  
POR MEDIO DE FORMULAS SIGNADAS

1. Fórmula signada en S3

Tomo de Smullyan<sup>(1)</sup> la idea de utilizar fórmulas signadas para realizar la demostración del Hauptsatz y la idea misma de esta demostración, aunque se hace necesario, en nuestro caso, introducir notables modificaciones al utilizar este método, modificaciones que se originan en las dificultades que la asimetría característica de las reglas para la negación fuerte producen. Además, los signos que preceden en este contexto a las fórmulas o clases de fórmulas no llevan consigo información semántica, al contrario que en la utilización que hace Smullyan de las fórmulas signadas.

Sea  $H \rightarrow H$  un secuyente en el que  $H = \{F_1, \dots, F_n\}$  y  $H = \{G_1, \dots, G_n\}$ . Signamos las fórmulas del antecedente anteponiendo una  $\bar{a}$  a cada elemento del conjunto  $H$  y una  $\bar{c}$  a cada elemento del conjunto  $H$ . Entendemos que el grado de una fórmula signada es el mismo que el de la correspondiente fórmula sin signar.

Vamos a utilizar las metavariables  $\eta, \eta_1, \eta_2, \kappa, \kappa_1, \kappa_2, \dots$  del modo siguiente:

$\eta$	$\eta_1$	$\eta_2$
$\bar{a}(F \wedge G)$	$\bar{a}F$	$\bar{a}G$
$\bar{c}(\neg F)$	$\bar{a}F$	$\bar{a}F$

$\kappa$	$\kappa_1$	$\kappa_2$
$\bar{c}(F \wedge G)$	$\bar{c}F$	$\bar{c}G$
$\bar{a}(\neg F)$	$\bar{c}F$	$\bar{c}F$

$\eta$	$\eta_1$	$\eta_2$
$\bar{a} (= \bar{a} \vee F)$	$\bar{a}F$	$\bar{a}F$
$\bar{c} = (F \wedge C)$	$\bar{c} = F$	$\bar{c} = C$

$\kappa$	$\kappa_1$	$\kappa_2$
$\bar{c} (= \bar{c} \vee F)$	$\bar{c}$	$\bar{c}$
$\bar{d} = (F \wedge C)$	$\bar{d} = F$	$\bar{d} = C$
$\bar{a} = F$	$\bar{c} = F$	$\bar{c} = F$

$\lambda$	$\lambda [A]$
$\bar{a} \wedge X F C X$	$F [A]$
$\bar{c} \wedge X F C X$	$\bar{c} = F [A]$

$\mu$	$\mu [A]$
$\bar{c} \wedge X F C X$	$\bar{c} [A]$
$\bar{d} \wedge X F C X$	$\bar{d} = F [A]$

Existe una relación, bastante clara, entre las metavARIABLES  $a, b, c, d$  y  $\eta, \kappa, \lambda, \mu$  pero no nos tendremos a analizarla.

Sea ahora  $\bar{M}$  un conjunto finito de fórmulas entendidas en el sentido precedente, es decir, sea  $\bar{M} = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n\}$ . Utilizamos  $/\bar{M}/$  como abreviatura para el siguiente:

$$F_1, \dots, F_m \rightarrow C_1, \dots, C_n$$

Podemos ahora reformular el cálculo CS de la forma siguiente <sup>(\*)</sup>:

Esquema axiomático:  $/\bar{M}, \bar{a}F, \bar{c}F/$

Reglas de deducción:

$$\text{MP } \eta: \frac{/\bar{M}, \eta_1, \eta_2/}{/\bar{M}, \eta/}$$

$$\text{MP } \kappa: \frac{/\bar{M}, \kappa_1/ \quad /\bar{M}, \kappa_2/}{/\bar{M}, \kappa/}$$

$$\text{MP } \lambda: \frac{/\bar{M}, \lambda [A]/}{/\bar{M}, \lambda/}$$

$$\text{MP } \mu: \frac{/\bar{M}, \mu [A] \supset B/}{/\bar{M}, \mu/} \quad (*)$$

(\*) bajo el supuesto de que  $\bar{c}_j$  no aparece en la conclusión.

$$RH_1 \quad / \bar{A}, \bar{c}H_1 /$$

Es fácil ver que los postulados anteriores, que definen un cálculo que llamaremos  $S3^*$ , no constituyen más que una reformulación de  $S3$  sin regla de separación: Sea  $H$ , en las reglas de  $S3$ , el conjunto de las fórmulas signadas con  $\bar{a}$  que aparecen en  $/\bar{H}/$  y  $N$ , en las mismas reglas, el conjunto de las fórmulas de  $/\bar{H}/$  que aparecen signadas con  $\bar{c}$ . Entonces, a título de ejemplo, tenemos que:

1. Los axiomas según el esquema axiomático de la formulación anterior son secuentes de la forma  $H, F \rightarrow F, N$ , es decir, axiomas según el esquema axiomático de  $S3$ .
2. Si  $\eta$  es  $\bar{c} \neg F$ ,  $RS \eta$  nos permite deducir del secuyente  $/\bar{H}, \bar{a}F, \bar{a}F/$  es decir, de  $/\bar{H}, \bar{a}F/$ , el secuyente  $/\bar{H}, \bar{c} \neg F/$ . Esto es lo mismo que decir que  $RS \eta$  permite deducir  $H \rightarrow \neg F, N$  del secuyente  $H, F \rightarrow N$ . Esta es la operación que autoriza  $RS 1$  en  $S3$ .
3. Si  $\eta$  es  $\bar{a} \neg F$ ,  $RS \eta$  permite deducir  $/\bar{H}, \bar{a} \neg F/$  de un secuyente  $/\bar{H}, \bar{a}F/$ , es decir, en términos de  $S3$ , permite deducir  $H, \neg F \rightarrow N$  del secuyente  $H, F \rightarrow N$ .  $RS \eta$  es, por tanto, equivalente a  $RS 3$  en este caso.

El razonamiento es similar en los otros casos, por lo que no lo daremos aquí explícitamente.

Puesto que todas las reglas primitivas de  $S3$  son reglas de la reformulación anterior, utilizaremos las reglas derivadas en  $S3$  sin ulterior comentario.

Mostramos ahora como se puede demostrar el Hauptsatz para la anterior reformulación de  $S3$ .

Proposición AP 1. 1

Si  $/\bar{H}, \bar{a}F/$  y  $/\bar{H}, \bar{c}F/$  son demostrables en  $S3$ , entonces  $/\bar{H}/$  lo es también.

Antes de entrar en la demostración propiamente dicha de la anterior proposición hemos de dar algunas definiciones y probar un lema.

Definición AP 1.2

- (i)  $\overline{A}/\overline{B}/$  es S3 -demostrable con longitud  $k$ :  $\Leftrightarrow$  Hay una demostración  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  con  $\Sigma_k = \overline{A}/\overline{B}/$ . (suponemos definido el concepto de demostración para S3\* a lo largo de las mismas líneas que para S3).
- (ii)  $\overline{A}/\overline{B}/$  es demostrable via  $\eta$  (o  $\kappa, \lambda, \mu$ ):  $\Leftrightarrow \overline{A}/\overline{B}/$  es S3-demostrable y  $\overline{B}/$  aparece en su demostración como resultado de la aplicación de RS  $\eta$  (respectivamente, de RS  $\kappa, RS \lambda, RS \mu$ ).

Lema AP 1.3

Las siguientes afirmaciones son válidas respecto de S3 :

- (i) Si  $\overline{A}/\overline{B}/$  es S3\*-demostrable con longitud  $k$ , entonces  $\overline{A}/\overline{B}, \overline{B}/$  lo es también, con longitud  $k$ .
- (ii.i) Si  $\overline{A}/\overline{B}, \eta/$  es S3 -demostrable via  $\eta$  y longitud  $k$ ,  $\overline{A}/\overline{B}, \eta_1, \eta_2/$  y  $\overline{A}/\overline{B}, \eta_1, \eta_2, \eta_3/$  son demostrables con longitud menor que  $k$ .
- (ii.ii) Igual que el caso anterior, para  $\kappa, \kappa_1, \kappa_2$ .
- (ii.iii) Igual que el caso anterior para  $\lambda, \lambda [1]$ .
- (ii.iv) Igual que el caso anterior para  $\mu, \mu [1]$  con  $\mu_j^1$  nueva para  $\overline{A}$  y  $\overline{B}$ .
- (iii) Si  $\overline{A}/\overline{B}, \mu [1]$  es demostrable en S3, entonces  $\overline{A}/\overline{B}, \mu [A]/$  es demostrable para toda  $A$ .

Demostración: (1) Si  $\overline{A}/\overline{B}/$  es demostrable con longitud  $k$ , entonces por RS A1 y RS A2, se puede afirmar que  $\overline{A}/\overline{B}, \overline{B}/$  es

es demostrable con longitud  $k$ . (ii.i) Si  $/\bar{H}, \eta /$  es demostrable via  $\eta$  y longitud  $k$ , entonces  $/\bar{H}, \eta /$  se ha obtenido por RS  $\eta$ , que supone la existencia de una demostración para  $/\bar{H}, \eta_1, \eta_2 /$  con longitud  $k' < k$ . Por (i) se sigue, además, que  $/\bar{H}, \eta, \eta_1, \eta_2 /$  es demostrable con longitud  $k'$ . El razonamiento en el resto de los casos (ii.ii) - (ii.iv) es similar. (iii) se sigue de RS 11 y RS 12 (cfr. el lema 4.5.1).

Podemos pasar ahora a la demostración de la proposición. La demostración es, de nuevo, por doble inducción según el grado de las fórmulas fuera de las descripciones y el número  $k$  que representa la suma de las longitudes  $k_1$  y  $k_2$  de las demostraciones de  $/\bar{H}, \bar{a}F /$  y  $/\bar{H}, \bar{c}F /$ , respectivamente. Los supuestos de inducción son los siguientes: I1. si  $n$  es el grado de  $F$  fuera de las descripciones, entonces, para todo grado  $m$  menor que  $n$ , se cumple el teorema. I2. Supuesto que el grado de  $F$  es  $n$ , entonces para toda longitud  $k' = k'_1 + k'_2$ , con  $k' < k$ , se cumple la proposición.

Demostración de la proposición AF 1.

Base de inducción: Si  $k_1 = 0$  o  $k_2 = 0$ , entonces  $/\bar{H}, \bar{a}F /$  y/o  $/\bar{H}, \bar{c}F /$  es un axioma. Supongamos que  $k_1 = 0$ . Entonces hay una fórmula  $\bar{a}G, \bar{c}G$  que pertenece a  $\bar{H} \cup \{\bar{a}F\}$ . Si  $G$  es  $F$ , entonces  $/\bar{H}, \bar{a}F /$  es  $/\bar{H}, \bar{c}G, \bar{a}G /$  y  $/\bar{H}, \bar{c}F /$  es  $/\bar{H}, \bar{c}G, \bar{c}G /$ , es decir,  $/\bar{H} /$ . Luego  $/\bar{F} /$  es demostrable en S3. Si  $G \neq F$ , entonces  $/\bar{H} / = / \bar{H}, \bar{a}G, \bar{c}G /$  es un axioma, y por lo tanto, demostrable. El caso en que  $k_2 = 0$  se demuestra de modo análogo.

Paso de inducción:  $/\bar{H}, \bar{a}F /$  se ha demostrado via  $G$  y longitud  $k_1 > 1$  (considero a  $G$ , en este contexto, como una fórmula signada).

$/\bar{H}, \bar{c}F /$  se ha demostrado via  $H$  y longitud  $k_2 > 1$  ( $H$  es, de nuevo una fórmula signada). Puede ocurrir que (A)  $G \neq \bar{a}F$  o  $H \neq \bar{c}F$  o bien  $q$  (B)  $G \neq \bar{a}F$  y  $H \neq \bar{c}F$ .

(A) Supongamos que  $c \neq \bar{a}F$

1. Sea  $\eta$  una  $\eta$ . Tenemos que  $\bar{a}, \bar{a}F/$  es  $\bar{a}', \eta, \bar{a}F/$ . Ello implica, por el lema anterior, punto (ii), que  $\bar{a}', \bar{a}F, \eta, \eta_1, \eta_2/$  es demostrable con longitud  $k_1' < k_1$ .  $\bar{a}, \bar{c}F/$  es  $\bar{a}', \eta, \bar{c}F/$ . Por el punto (i) del lema precedente,  $\bar{a}', \eta, \eta_1, \eta_2, \bar{c}F/$  es demostrable con longitud  $k_2$ . Por I2 y RS  $\eta$ ,  $\bar{a}', \eta/$ , es demostrable o, lo que es lo mismo,  $\bar{a}/$  es demostrable.
2. Sea  $\kappa$  una  $\kappa$ .  $\bar{a}, \bar{a}F/$  es  $\bar{a}', \bar{a}F, \kappa/$ . Por (ii) en el lema AP 1.3,  $\bar{a}', \bar{a}F, \kappa_1, \kappa_2/$  y  $\bar{a}', \bar{a}F, \kappa, \kappa_1, \kappa_2/$  son demostrables con longitud menor que  $k_1$ .  $\bar{a}, \bar{c}F/$  es  $\bar{a}', \bar{c}F, \kappa/$ . Por (i) en el lema AP 1.3,  $\bar{a}', \bar{c}F, \kappa, \kappa_1, \kappa_2/$  y  $\bar{a}', \bar{c}F, \kappa, \kappa_1, \kappa_2/$  son demostrables con longitud  $k_2$ . Por I2 y RS  $\kappa$ ,  $\bar{a}', \kappa/$ , es decir,  $\bar{a}/$  es demostrable.
3. Sea  $\lambda$  una  $\lambda$ .  $\bar{a}, \bar{a}F/$  es  $\bar{a}', \bar{a}F, \lambda/$ . Por (ii.iii) en el lema AP 1.3,  $\bar{a}', \bar{a}F, \lambda(A), \lambda/$  es demostrable con longitud menor que  $k_1$ .  $\bar{a}, \bar{c}F/$  es  $\bar{a}', \bar{c}F, \lambda/$ . Por (i), en el lema precedente,  $\bar{a}', \bar{c}F, \lambda(B), \lambda/$  es demostrable con longitud menor que  $k_1$ . Por supuesto de inducción,  $\bar{a}', \lambda(A), \lambda(B)/$  es demostrable. Por RS  $\lambda/\bar{a}/$  es demostrable.
4. Sea  $\mu$  una  $\mu$ .  $\bar{a}, \bar{a}F/$  es  $\bar{a}', \bar{a}F, \mu/$ . Por (ii.iv) en el lema AP 1.3,  $\bar{a}', \mu \in P_j^1, \mu, \bar{c}F/$  es demostrable con longitud menor que  $k_1$ , para un  $P_j^1$  que no aparece en  $M', F, \kappa$ .  $\bar{a}, \bar{c}F/$  es  $\bar{a}', \bar{c}F, \mu/$ . Por (i),  $\bar{a}', \bar{c}F, \mu \in P_j^1, \mu/$  es demostrable con longitud  $k_1$ . Por I2 y RS  $\mu$ ,  $\bar{a}/$  es demostrable.

El caso en que  $\bar{a}$  es distinto de  $\bar{c}F$  se trata de manera análoga.

(B) Supongamos que  $c \neq \bar{a}F$  y  $\bar{a} \neq \bar{c}F$ .

1. Sea  $\bar{c} \neq \bar{a}-F'$  y  $\bar{a} \neq \bar{c}-F'$ .  $\bar{a}, \bar{a}-F'/$  es  $\bar{a}, \bar{a}-F'/$  y  $\bar{a}, \bar{a}F/$  es  $\bar{a}, \bar{a}-F'/$ .  $\bar{a}, \bar{c}F/$  es demostrable, puesto que  $\bar{a}, \bar{a}-F'/$  se ha conseguido vía  $\bar{a}-F'$ . De  $\bar{a}, \bar{c}-F'/$  se sigue  $\bar{a}, \bar{a}-F'/$  por RS  $\kappa$ . Por III 4 (cfr. lema 4.5.1) se sigue  $\bar{a}, \bar{a}F/$ . En consecuencia,  $\bar{a}, \bar{a}F/$  y  $\bar{a}, \bar{a}F'/$  son demostrables. Dado que  $cr(\bar{a}F') = cr(\bar{c}F') < cr(\bar{a}-F') = cr(\bar{c}-F')$ , por I1 se sigue que  $\bar{a}/$ .

En el resto de los casos, tenemos que una de las expresiones  $\bar{a}F$  o  $\bar{c}F$  es una  $\eta$  o una  $\lambda$  y la otra una  $\kappa$  o una  $\mu$ .

Supuesto que  $\bar{a}F$  es una  $\eta$ , tenemos que  $/\bar{H}, \bar{a}F/$  es demostrable via  $\eta$  y longitud  $k_1$  y que  $/H, \bar{c}F/$  es demostrable via  $\bar{c}F$  (se trata de una  $\kappa$ ) con longitud  $k_2$ . Dado que  $\eta$  es  $\kappa$  con el signo cambiado,  $\eta_1$  es  $\kappa_1$  con el signo cambiado y  $\eta_2$  es  $\kappa_2$  con el signo cambiado. Por (ii.i) y (ii.ii) en el lema precedente resulta que  $/\bar{H}, \eta_1, \eta_2/$  es demostrable y que  $/\bar{H}, \kappa_1/$  y  $/\bar{H}, \kappa_2/$  son demostrables. Puesto que  $\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2$  son de grado menor que  $F$ , por II,  $/\bar{H}, \eta_2/$  es demostrable y del mismo modo, por RA 1 y RA 2, lo es  $/\bar{H}/$ .

El caso en que  $F$  es una  $\kappa$  se trata de la misma manera, teniendo en cuenta que  $\bar{c}F$  es una  $\eta$ .

Consideramos ahora el caso en que  $H$  es una  $\lambda$ .  $/\bar{M}, \lambda/$  es  $/\bar{H}, \bar{a} \wedge XFX/$  o  $/\bar{H}, \bar{c} - \wedge XFX/$ . Por (ii.iii) en el lema AP 1.3,  $/\bar{H}, \bar{a}F[A]/$  o  $/\bar{H}, \bar{c} - F[A]/$  son demostrables.  $/\bar{H}, \bar{c}F/$  es  $/\bar{H}, \bar{c} \wedge XFX/$  o  $/\bar{H}, \bar{a} - \wedge XFX/$ . Por (ii.iv) y (iii),  $/\bar{M}, \bar{c}F[A]/$  o  $/\bar{M}, \bar{a} - F[A]/$  son demostrables. Dado que  $F[A]$  es de grado menor que  $\wedge XFX$ , la afirmación se sigue de II.

El caso en que  $\bar{a}F$  es  $\mu$  se trata de manera similar, teniendo en cuenta que  $\bar{c}F$  es una  $\lambda$ .

Finalmente, hay que hacer notar que los casos en  $\bar{c}F$  es una  $\eta$  son los casos en que  $\bar{a}F$  es una  $\kappa$  y que los casos en que  $\bar{c}F$  es una  $\kappa$  son los casos en que  $\bar{a}F$  es una  $\eta$  y que todos ellos han sido tratados anteriormente. Igualmente, han sido ya tratados los casos en que  $\bar{c}F$  es una  $\lambda$  o una  $\mu$ . q.e.d

APENDICE II: EQUIVALENCIA DE DOS CONCEPTOS DE  
DEFINIBILIDAD IMPLICITA

Mostramos en este apéndice que las dos definiciones 7.2.1 y 7.2.2 son equivalentes. Aparte de la demostración en sí misma, quizá lo más interesante de lo que sigue sea el tipo de semántica que planteamos para la demostración, distinta de la que hemos empleado hasta ahora, al menos en algunos de sus rasgos.

La proposición que intentamos probar puede expresarse como sigue:

Proposición AP 2.1

$P$  es implícitamente definible en sentido de la definición 7.2.1 si y sólo si lo es en sentido de la definición 7.2.2.

Para demostrar esta proposición necesitaremos probar, previamente, algunos lemas.

Definición AP 2.2

Sea  $\Gamma [ * _ 1 , \dots , * _ n ]$  un predicado  $n$ -fórmula que utilizaremos en  $\mathbb{N}$ , y  $\varphi$  una  $L_3$ -interpretación sobre  $\mathbb{N}$ .

$$(1) \varphi(\Gamma)^+ := \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N} \wedge \exists A_1, \dots, \exists A_n ( \langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \text{lec}_{L_3} \text{ y se cumple que } \varphi(A_1) = d_1, \dots, \varphi(A_n) = d_n \wedge \varphi(\Gamma[A_1, \dots, A_n]) = v ) \}$$

$$(2) \varphi(\Gamma)^- := \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N} \wedge \exists A_1, \dots, \exists A_n ( \langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \text{lec}_{L_3} \text{ y se cumple que } \varphi(A_1) = d_1, \dots, \varphi(A_n) = d_n \wedge \varphi(\Gamma[A_1, \dots, A_n]) = f ) \}$$

(iii)  $\varphi(H) := \langle \varphi(H)^+, \varphi(H)^- \rangle := E_H$

Lema AP 2.3

(i) Si  $H[*_1, \dots, *_k] \equiv P_1^k [*_1, \dots, *_k]$ , entonces  $\varphi(H) = \varphi(P_1^k)$ .

Demostración:  $\varphi(H)^+ = \{ \langle d_1, \dots, d_k \rangle \mid \exists \Lambda_1, \dots, \exists \Lambda_k$   
 con  $\varphi(\Lambda_1) = d_1, \dots, \varphi(\Lambda_k) = d_k$  &  $d_1, \dots, d_k \in D$  y  $\varphi(H[\Lambda_1 \dots \Lambda_k]) = \vee \}$   
 $\vee \} = \{ \langle d_1, \dots, d_k \rangle \mid \Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  son descripciones referenciales y  $\langle \varphi(\Lambda_1), \dots, \varphi(\Lambda_k) \rangle \in \varphi(P_1^k)^+ = \varphi(P_1^k)^+$ . La afirmación correspondiente para  $\varphi(H)^-$  se demuestra de modo similar.

(ii) Si  $H[*_1, \dots, *_n] \equiv \neg G[*_1, \dots, *_n]$ , entonces  $\varphi(H) = \langle D \setminus \varphi(G)^+, \varphi(G)^+ \rangle$ .

Demostración:

$\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(H)^+$  sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(\neg G)^+$   
 sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \notin \varphi(G)^+$   
 sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in D \setminus \varphi(G)^+$

$\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(H)^-$  sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(\neg G)^-$   
 sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(G)^+$

(iii) Si  $H[*_1, \dots, *_n] \equiv \neg G[*_1, \dots, *_n]$ , entonces  $\varphi(H) = \langle \varphi(G)^-, \varphi(G)^+ \rangle$

Demostración:

$\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(H)^+$  sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(\neg G)^+$   
 sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(G)^-$

$\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(H)^-$  sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(\neg G)^-$   
 sii  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(G)^+$

(iv) Si  $H[*_1, \dots, *_n] \equiv G_1[*_{i_1}, \dots, *_k] \wedge$

$G_2[*_{j_1}, \dots, *_m]$  donde  $G_1[*_{i_1}, \dots, *_k]$  es un predicado k-ádico y  $G_2[*_{j_1}, \dots, *_m]$  es un predicado

m-ádico,  $m+k = n$  y posiblemente uno de los dos predicados es 0-ádico, es decir, es una fórmula, entonces:  $\varphi(H)^+ = \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid \exists f, f: n \rightarrow B \text{ con } f(1) = d_1, \dots, f(n) = d_n \text{ y } \prod \{ i_1, \dots, i_k \} \in \varphi(G_1)^+ \text{ (o } \varphi(G_1) = v) \text{ y } \prod \{ j_1, \dots, j_m \} \in \varphi(G_2)^+ \text{ (o } \varphi(G_2) = v) \}$ .  
 $\varphi(H)^- = \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid \exists f, f: n \rightarrow B \text{ con } f(1) = d_1, \dots, f(n) = d_n \text{ y } \prod \{ i_1, \dots, i_k \} \in \varphi(G_1)^- \text{ (o } \varphi(G_1) = f) \text{ o } \prod \{ j_1, \dots, j_m \} \in \varphi(G_2)^- \text{ (o } \varphi(G_2) = f) \}$ . (ótese que los paréntesis del tipo  $(\varphi(G) = v)$  resalten al caso en que  $G_1$  o  $G_2$  son fórmulas).

Demostración: Consideremos la clase de sucesiones de objetos en  $B$  representadas por funciones  $f, f: n \rightarrow B$ , cuando  $n \in \omega$  tales que para todo  $h$  entre 1 y  $n$ ,  $f(h) = d_h \in B$ . Podemos identificar cada  $n$ -tuplo de objetos en  $B$  con una función de esta clase. Tenemos entonces que  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(H)^+$  si  $\exists A_1, \dots, A_n$  y  $\exists f, f: n \rightarrow B$  tal que  $f(1) = d_1 = \varphi(A_1)$  y ... y  $f(n) = d_n = \varphi(A_n)$  y  $\varphi(H[A_1, \dots, A_n]) = v$ , por la definición de  $\varphi(H)^+$ . Ahora bien,  $\varphi(H[A_1, \dots, A_n]) = v$  equivale a  $\varphi(G_1[A_{i_1}, \dots, A_{i_k}]) = v$  y  $\varphi(G_2[A_{j_1}, \dots, A_{j_m}]) = v$ , donde  $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}, A_{j_1}, \dots, A_{j_m}\} = \{A_1, \dots, A_n\}$ . Sea  $\varphi(A_{i_1}) = d_{i_1}, \dots, \varphi(A_{j_m}) = d_{j_m}$ , con lo que  $\{d_{i_1}, \dots, d_{j_m}\} = \{d_1, \dots, d_n\}$ . Entonces  $\varphi(G_1[A_{i_1}, \dots, A_{i_k}]) = v$  si  $\langle d_{i_1}, \dots, d_{i_k} \rangle \in \varphi(G_1)^+$ , por definición. Esto es equivalente a  $\prod \{ i_1, \dots, i_k \} \in \varphi(G_1)^+$ . Además,  $\varphi(G_2[A_{j_1}, \dots, A_{j_m}]) = v$  si  $\langle d_{j_1}, \dots, d_{j_m} \rangle \in \varphi(G_2)^+$  si  $\prod \{ j_1, \dots, j_m \} \in \varphi(G_2)^+$ . En consecuencia similar para  $\varphi(H)^-$ . Igualmente, el caso en que uno de las expresiones  $G_1$  o  $G_2$  es una fórmula, se justificará de manera análoga.

(v) Si  $H[*_1, \dots, *_n] \equiv \bigwedge YG[*_1, \dots, *_n, Y]$  entonces  $\varphi(H)^+ = \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid \text{para toda descripción } d, \langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(G[*_1, \dots, *_n, B]) \}$ .  
 $\varphi(H)^- = \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid \text{para una descripción } B, \langle d_1, \dots, d_n \rangle \in \varphi(G[*_1, \dots, *_n, B]) \}$ .

Demostración: La demostración es similar a los casos anteriores.

Lema AP 2.4.

Sea  $H[*_1, \dots, *_n]$  un predicado  $n$ -ádico y  $P, P_1, \dots, P_j$  todos los parámetros de predicado que aparecen en  $H$ . Sea  $H'$  el resultado de sustituir cada aparición de  $P$  en  $H$  por una aparición de  $P'$ , donde  $P'$ , donde  $P'$  es distinto de  $P, P_1, \dots, P_j$ . Sean, además,  $\varphi$  y  $\varphi'$  L3-interpretaciones sobre  $D$  tales que se cumple  $\varphi(P) = \varphi'(P')$ ;  $\varphi(P_1) = \varphi'(P_1)$ ; ...  $\varphi(P_j) = \varphi'(P_j)$ . Entonces se cumple que  $\varphi(H) = \varphi'(H')$ .

Demostración: trivial, por inducción según el grado de  $H$  fuera de las descripciones, apoyándose en el lema anterior.

Lema AP 2.5

Bajo las condiciones del lema anterior sea  $H$  un predicado monádico. Entonces,  $\varphi(\epsilon XH[\epsilon X]) = \varphi'(\epsilon XH'[\epsilon X])$  o ambas descripciones son indefinidas.

Demostración: por la definición de interpretación de las descripciones (cfr. Def.1.4.1.1 (iv)), el lema exige que  $\varphi(H[\epsilon X]) = \varphi'(H'[\epsilon X]) = \{d\}$ , para exactamente un  $d \in D$ . Puesto que se cumplen las condiciones del lema anterior, se sigue la

afirmación de este lema.

Lema AP 2.6

Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto finito de fórmulas cerradas,  $P, P_1, \dots, P_n$  todos los parámetros de predicado que aparecen en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  el resultado de sustituir cada aparición de  $P$  en  $\mathcal{A}$  por una aparición de un parámetro de predicado  $P_i$  que no aparezca en  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  es una descripción en  $\mathcal{L}$ , sea  $\mathcal{A}'$  el resultado de realizar la sustitución antes indicada en  $\mathcal{A}$ . Sean, además,  $\varphi$  y  $\varphi'$  IS-interpretaciones sobre  $\mathcal{L}$ , de tal modo que  $\varphi(P_i) = \varphi'(P_i), \dots, \varphi(P_n) = \varphi'(P_n)$ . Entonces, si  $\varphi(\mathcal{A}) = \varphi'(\mathcal{A}')$ , entonces  $\varphi(\hat{\mathcal{A}}) = \varphi'(\hat{\mathcal{A}}')$ .

Demostración: Por inducción según el número de

elementos de  $\mathcal{A}$ . Base de inducción:  $\mathcal{A}$  es  $\{ \top \}$ . Entonces o bien (1)  $\mathcal{A}$  es elemental o bien (2) es de la forma  $\neg \mathcal{A}, \neg \mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \text{ [Y]}$ :  
 (1) Si  $\mathcal{A} \# P_1^k [ \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k ]$  y  $\mathcal{A}' \# P_j^k [ \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_k ]$  con  $P_1^k = P_j^k$  si  $P_1^k \neq P$  y  $P_1^k = P$  si  $P_1^k = P$  - entonces, por supuesto, el lema 2.5, se cumple que  $\varphi(\mathcal{A}) = v$  sii  $\langle \varphi(\mathcal{A}_1), \dots, \varphi(\mathcal{A}_k) \rangle \in \varphi(P_1^k)$  sii  $\langle \varphi'(\mathcal{A}'_1), \dots, \varphi'(\mathcal{A}'_k) \rangle \in \varphi(P_j^k)$  sii  $\varphi(\mathcal{A}') = v$ . Análogamente para  $\varphi(\mathcal{A}) = f$  o  $i$ .

(2) Supuesto que para toda fórmula  $\mathcal{A}$ , con  $cr(\mathcal{A}) < cr(\mathcal{A}')$  se cumple el lema, la afirmación se sigue fácilmente por las reglas de equivalencia para conectivas y cuantores.

Base de inducción: Si la afirmación vale para  $n$  elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces vale para  $n+1$  elementos en  $\mathcal{A}$ : el  $n+1$  elemento es una fórmula  $\mathcal{A}$  y  $\varphi(\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{A}')$  según la demostración de la base de inducción.

Ahora podemos demostrar la proposición 2.3.1

Demostración de la proposición AP 2.1:

Supuesto que se cumple

$$H, H' \vdash \bigwedge x (P[x] \equiv P'[x])$$

y que  $\varphi$  y  $\varphi'$  son L3-interpretaciones que cumplen las condiciones de la definición 7.2.2, entonces, supuesto que  $\varphi(H) = \varphi'(H) = v$ , existe una L3-interpretación  $\varphi''$  tal que  $\varphi''(P_1) = \varphi(P_1); \dots;$

$$\varphi''(P_n) = \varphi(P_n); \varphi''(P') = \varphi(P) \text{ y } \varphi''(P) = \varphi'(P).$$

Puesto que  $\varphi''(P') = \varphi(P)$ , por el lema AP 2.6 se cumple que

$$\varphi''(H') = v \text{ si } \varphi(H) = v.$$

Supuesto que  $\varphi(H) = v = \varphi'(H)$ , entonces  $\varphi''(H') = v$ . De modo análogo, puesto que  $\varphi''(P) = \varphi'(P)$ , podemos afirmar que

$$\varphi''(H) = v \text{ si } \varphi(H) = v.$$

Por lo tanto,  $\varphi''(H) = v$ . En consecuencia,  $\varphi''(H \cup H') = v$  y, por el supuesto del teorema,  $\varphi''(\bigwedge x (P[x] \equiv P'[x])) = v$ . De la última afirmación se sigue que para toda descripción  $A$ ,  $\varphi''(P[A])$  tiene el mismo valor de verdad que  $\varphi''(P'[A])$ . Por lo tanto,  $\varphi''(P) = \varphi''(P')$ .

Entonces

$$\varphi(P) = \varphi''(P') = \varphi''(P) = \varphi'(P).$$

A la inversa, supuesto que  $\varphi(H \cup H') = v$  y que se cumplen las condiciones de la definición 7.2.2, sea  $\varphi'$  una L3-interpretación sobre  $D$  tal que  $\varphi'(P) = \varphi(P')$ ;  $\varphi'(P') = \varphi(P)$ ;  $\varphi'(P_1) = \varphi(P_1); \dots;$   $\varphi'(P_n) = \varphi(P_n)$ . Entonces, por el lema AP 2.6,  $\varphi'(H) = \varphi(H') = v$ . Por la def. 7.2.2 vale que  $\varphi'(P) = \varphi(P)$ , es decir,  $\varphi(P) = \varphi(P')$ . Por lo tanto se cumple que si  $\varphi(H \cup H') = v$ , entonces  $\varphi(\bigwedge x (P[x] \equiv P'[x])) = v$ . Por los teoremas de completud vale que  $H \cup H' \vdash \bigwedge x (P[x] \equiv P'[x])$ . q.e.d

Notas a los apéndices I y II

(1) cfr. Sullivan (1968), pp. 161 ss

(2) A primera vista se percibe una cierta relación, que no ha sido analizada con detalle, entre este cálculo y los cálculos en el caso Positivo/Negativo (Positiv/Negativ Kalküle) que estudia Schütte en Schütte (1960).

CONCLUSIONES

En las páginas precedentes he estudiado una serie de temas en torno a la lógica L3 que, como decíamos en el prólogo, se sitúan en torno a dos centros de interés: la investigación de ciertos aspectos de la sintaxis de L3, particularmente la definición de una serie de cálculos, el análisis de sus propiedades más importantes y la prueba de algunas proposiciones de la teoría de modelos de L3.

El primer capítulo tiene un carácter preferentemente introductorio, puesto que en él defino la lógica L3, presentando, además, una parte de los resultados ya existentes en torno a esa lógica. Me tratado en este capítulo de dar una idea adecuada de qué es L3 y de hacer explícitas las bases sobre las que se construye el trabajo posterior: Defino el lenguaje L3 en sus aspectos sintácticos y semánticos, presento algunos cálculos ya estudiados por H. Blau y ciertos resultados meta-teóricos que o bien son necesarios para la comprensión de lo que sigue o bien son de interés general a la hora de situar L3 en el panorama de la lógica en general.

En el segundo capítulo, el primero en que presentamos resultados inéditos, hacemos un análisis de lo que hemos llamado Principio de Unificación de Smullyan. El Principio de Unificación que aquí presentamos, una modificación de su homólogo en la lógica standard, afirma la satisfacibilidad de todo conjunto que posea una propiedad de consistencia analítica, es decir, que posea una propiedad de conjuntos de fórmulas, de-

finida del modo que sea y que necesariamente tiene como características el no contener, el conjunto que posee esa propiedad, una fórmula y su negación fuerte o débil así como el contener todos los sucesores potenciales en un árbol lógico de fórmulas en ese conjunto. La importancia de este resultado, aparte de las consecuencias formales que de él se derivan, estriba en constituir un puente, por así decir, entre sintaxis y semántica que permite obtener una serie de resultados de completud y otros.

En nuestra formulación del Principio de Unificación, y como consecuencia del nuevo tipo de demostración que empleamos, podemos prescindir del carácter finito de las propiedades de consistencia que Smullyan exige. La prueba del Principio de Unificación exige la introducción de la noción de conjunto-modelo en  $L_3$  y la demostración de la satisfacibilidad de este tipo de conjuntos. Con temas estos que también tratamos en el segundo capítulo. Además, introducimos otro tipo de propiedades de conjuntos de fórmulas, relacionadas con las propiedades de consistencia, a las que llamamos propiedades de demostrabilidad analítica. Mostramos que todo conjunto disyuntivamente válido tiene toda propiedad de demostrabilidad analítica.

Las consecuencias del Principio de Unificación y del teorema paralelo para las propiedades de demostrabilidad son amplias: así, mostramos la completud de los cálculos que definimos posteriormente por medio de estos conceptos y teoremas. El principio de Unificación es también la base que empleamos aquí para mostrar la completud de los cálculos definidos por  $\Delta_{\omega}$ . El teorema de compacidad para  $L_3$  puede contarse también entre las consecuencias del Principio de Unificación. Por otro lado, las pruebas de completud basadas en este Principio de Unificación resultan particularmente sencillas.

En los capítulos tres, cuatro y cinco definimos y estudiamos cuatro cálculos adecuados a L3. En el tercer capítulo se trata de un cálculo axiomático para la lógica de enunciados J3 de L3. Llamamos AJ3 a este cálculo. Demostramos su completud utilizando una propiedad de demostrabilidad analítica y probamos también su corrección respecto a J3.

En el cuarto capítulo definimos el primero de una serie de cuatro cálculos secuenciales que vamos definiendo a lo largo de la tesis. El cálculo S3, del cual tratamos en este capítulo cuarto, es un cálculo secuencial clásico que tiene una estructura muy similar a la de los cálculos secuenciales para la lógica standard. Como excepción, he dado aquí reglas derivadas para funtores y cuantores no primitivos. El análisis metalógico de este cálculo se centra en tres puntos: corrección, completud y demostración del Hauptsatz. El teorema fundamental (Hauptsatz) para S3, afirma la no independencia de la regla de separación que utilizamos en la formulación primitiva del cálculo. El teorema correspondiente en la lógica bivalente de primer orden es el conocido Hauptsatz de Gentzen. Damos dos pruebas distintas de completud: la una se basa en la traducibilidad de las demostraciones del cálculo de árboles B3, definido por Blau y presentado en el primer capítulo, a demostraciones de S3. La segunda prueba se realiza mostrando que la no deducibilidad de ningún secunente del tipo  $P^0 \rightarrow$ , con  $P^0$  subconjunto finito de  $P$ , es una propiedad trivalente de consistencia analítica de conjuntos  $\mathcal{L}$ . Damos también en este capítulo una demostración del Hauptsatz apropiada a S3 y mostramos la equivalencia de los cálculos AJ3 y S3 en base a la intertraducibilidad de sus demostraciones.

El capítulo quinto está dedicado a estudiar los cálculos de deducción natural. Uno de ellos,  $\mathcal{L}_2$ , es un cálculo adecuado a  $\mathcal{L}_1$ . La prueba de completud de este cálculo es, de nuevo, doble. La primera de ellas tiene como base la completud del cálculo axiomático  $\mathcal{A}_2$  - cálculo definido por  $\mathcal{L}_1$  y cuya completud se demuestra en el segundo capítulo - y se desarrolla mostrando como las demostraciones en  $\mathcal{A}_2$  pueden traducirse a demostraciones en  $\mathcal{L}_2$ . La segunda prueba de completud utiliza la definición de una propiedad de demostrabilidad como punto de partida de la demostración.

La lógica de enunciados queda calificada en esta forma de una regla de consecuencia en la lógica de enunciados  $\mathcal{L}_2$ , regla que vendría a afirmar la deducibilidad en  $\mathcal{L}_2$  de toda fórmula que sea consecuencia lógica en  $\mathcal{L}_1$  de fórmulas anteriormente una deducción. Ello nos ha llevado a dar un cálculo explícito de deducción natural para  $\mathcal{L}_2$ , con un conjunto de reglas que pueden sustituir en  $\mathcal{L}_2$  a la regla de consecuencia en lógicas de juntores. Esto es lo que realiza  $\mathcal{L}_2$ , cuya completud y completud demostramos. Otra vez damos con pruebas similares a la completud del cálculo, la primera tomando como base la prueba clásica de Kálmar y la segunda utilizando una propiedad de demostrabilidad para la lógica de enunciados.

Los capítulos seis y siete están dedicados a estudiar en la teoría de modelos. Se tratan de presentar en ellos sólo ciertos resultados importantes de la teoría de modelos biclasicas válidas también, naturalmente con respecto, a  $\mathcal{L}_1$ . El primero de estos resultados es el tema de Skolem, que afirma, en sus términos adecuados, la existencia de modelos de una colección de fórmulas condicionales  $\mathcal{L}_1$ -verdaderas, bajo ciertas condiciones. Los trabajos de Beth y Robinson, que se estudian en el capítulo

lo séptimo, son consecuencias del lema de Craig. Volveremos inmediatamente sobre ellos.

En la demostración del lema de Craig empleamos un cálculo secuencial S3-S1 cuya característica fundamental - aparte de su corrección y completud, que demostramos via la completud de S3 - es la de constituir un cálculo secuencial simétrico por ambos lados de los secuentes, es decir, se trata de un cálculo en el que toda fórmula que aparece en el antecedente de una premisa de una regla es una subfórmula de una fórmula en la conclusión, valiendo lo mismo para el consecuente. Este cálculo puede ser simplificado. En rigor, contiene dos cálculos completos. Esto es lo que los cálculos S3-S2 y S3-S3 ponen de manifiesto. En estos casos se trata de cálculos que utilizan sólo una parte de los postulados de S3-S1 - S3-S2 utiliza postulados que afectan sólo a los antecedentes en las reglas de S3-S1 y S3-S3 usa sólo de postulados para los consecuentes - y que sin embargo, son correctos y completos.

En el capítulo siete demostramos el teorema de definibilidad de Gödel para L3. Este teorema afirma la equivalencia de los conceptos de definibilidad implícita y explícita. Junto con este teorema nos ocupamos en este capítulo del teorema de Robinson que indica bajo qué condiciones la unión de dos conjuntos consistentes es consistente. Ambos teoremas son, como hemos dicho, consecuencias del lema de Craig.

En el apéndice I demostramos el Hauptsatz para S3 por medios distintos a los utilizados en el cap. 3, usando ahora de fórmulas simuladas. El apéndice II se dedica a mostrar la equivalencia de dos conceptos de definibilidad implícita que hemos manejado en el capítulo séptimo.

En conjunto, creo que he salido bastante bien cumplido las metas que nos proponíamos al comenzar el trabajo: investigar ciertos aspectos formales de la no clásica lógica ahora y contribuir a la justificación de que esta misma es una teoría lógica digna de tal nombre: tanto en sus caracteres lógicos como metalógicos como en su aplicabilidad cuando un prometedor programa de investigación.

Quedan abiertas algunas perspectivas a lo largo de la tesis a las que quizá convenga apuntar: a lo largo del trabajo aparecen una serie de resultados que señalan la posibilidad de construcción de una teoría de las teorías de primer orden que no se confine a una lógica bivalente o trivalente concreta, sino que tenga carácter de teoría general de las lógicas de primer orden  $n$ -valentes. No hemos investigado aquí este punto, pero creo que entre las conclusiones de un trabajo como el aquí realizado pueden apuntarse las perspectivas nuevas que el mismo ha abierto.

BIBLIOGRAFIA

- BETH, E. W.  
 (1953) On Padoa's method in the theory of definition. Konin. Akad. Wetensch. A 56, pp. 230-339. Inda. Math. 15.
- BLAU, U.  
 (1977) Zur Logik des Abstrakten. Manuscrito, München, 1977  
 (1978) Die dreiwertige Logik der Sprache. de Gruyter Verlag, Berlin- New York, 1978  
 (1979) Strukturen der Logik. Manuscrito, Munich, 1979-80  
 (1980) Distributive und kollektive Prädikation, Quantifikation und Kennzeichnung. Manuscrito, Munich, 1979-80.
- CARHAP, R.  
 (1934) Logische Syntax der Sprache. Springer Verlag, Viena, 1934  
 (1942) Introduction to Semantics & Formalization of Logic. Harvard Uni. Press. Cambridge, USA, 1942 y 1943. Cito por la 5ª ed. de los dos volúmenes en un tomo, 1975.  
 (1947) Meaning and Necessity. Chicago Uni. Press, Chicago - London, 1947. 1970<sup>6</sup>.
- CHURCH, A.  
 (1956) Introduction to Mathematical Logic. Princeton Uni. Press, Princeton, 1956. cito por la 3ª ed, 1962.
- CHANG, C.C - KEISLER, H. J.  
 (1973) Model Theory. North-Holland Publishing Cº. Amsterdam - New York, 1973. Cito por la 2ª ed., 1973.
- CRAIG, W.  
 (1957) Three uses of the Herbrand-Gentzen Theorem in relating

- Model Theory and Proof Theory. J. Symbolic L. 23,  
1957, pp. 269 - 285.
- DAVIDSON, D - HARNAH, G (eds.)  
(1972) Semantics of Natural Languages. D. Reidel, Dordrecht -  
Boston, 1972.
- DOBELJAH, K. S.  
(1975) Speaking of Nothing, en Hockney - Harper - Freed (1975),  
p. 93 - 119.
- DUBI, J.H. - BELLIAR, Jr. H. D.  
(1968) The substitution Interpretation of the Quantifiers, en  
Hous 2 (1968), p. 177-185
- DUBI, J.H - EPSTEIN, G (eds.)  
(1977) Modern Uses of Multiple-Valued Logic. D. Reidel, Dordrecht - Boston, 1977
- EVANS, G - McDOWELL, J (eds.)  
(1976) Meaning and Truth. Essays on Semantics. Clarendon Press,  
Oxford, 1976
- v. FRAASER - LAIBERT, K  
(1967) On Free Description Theory, en Zeitschrift für mathematische  
Logik und Grundlagen der Mathematik, 12  
(1967), pp. 225 - 240.
- v. FRAASER, B  
(1975) Comments: Lakoff's Fuzzy Propositional Logic, en  
Hockney - Harper - Freed (1975).
- FREGE, G  
(1892) Ueber Sinn und Bedeutung. Zeitschrift für Philosophie  
und philosophische Kritik, Neue Reihe, 100, (1892),  
p. 25 - 50.

GENTZEN, G

- (1934) Untersuchungen über das logische Schliessen, en  
 Mathematische Zeitschrift, 39 (1934) p. 176 - 210 y  
 405 - 431. Cito por la ed. facsimil de la Wissenschaftli-  
 che Buchgesellschaft: Gentzen, Untersuchungen über das  
 logische Schliessen, Darmstadt, 1974.

GODDARD, L - ROUTLEY, R

- (1973) The Logic of Significance and Context. vol I. Scottish  
 Academic Press, Cambridge, 1973.

HAACK, S

- (1974) Deviant Logic. Some Philosophical Issues. Cambridge  
 Uni. Press, Cambridge, 1974.

HERMES, H

- (1963) Einführung in die mathematische Logik. Teubner Verlag,  
 Stuttgart, 1963. Cito por la trad. inglesa de D.  
 Schmidt: Hermes, H: Introduction to Mathematical Logic.  
 Springer Verlag. Berlin - Heidelberg - New York, 1974.

HERZBERGER, H

- (1975) Dimensions of Truth, en Hockney - Harper - Freed (1975)  
 pp. 71 - 93

HINTIKKA, J

- (1955) Form and Content in Quantification Theory, en Acta  
 Philosophica Fennica 8 (1955), pp. 7 - 55
- (1963) The modes of modality. Acta Philosophica Fennica, 16  
 (1963), pp. 65 - 85
- (1969) Models for Modalities. Selected Essays. D.Reidel,  
 Dordrecht - Boston, 1969
- (1970) Existencial Presuppositions and Uniqueness Presuppo-  
 sitions, en Lambert (ed) (1970).

- (1973) Logic, Language-Games and Information. Clarendon Press, Oxford, 1973. trad. esp. de A. García Suárez: Lógica, Juegos de Lenguaje e Información. Tecnos, Madrid, 1976
- ROGGEY, D - HARPER, W - FREED, B (eds.)  
 (1975) Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics. D. Reidel, Dordrecht - Boston, 1975
- KARTTUNEN, L  
 (1977) Syntax and Semantics of Questions, en Linguistics and Philosophy 1 (1977)
- KEENE, E.L. (ed.)  
 (1975) Formal Semantics of Natural Language. Cambridge Uni. Press, Cambridge, 1975
- KLEENE, S  
 (1952) Introduction to Metamathematics. North-Holland, Amsterdam, 1952. Cito según la trad. de S. Garrido et alii: Introducción a la Metaaritmética. Tecnos, Madrid, 1974.  
 (1967) Mathematical Logic. John Wiley & Sons, New York, 1967. Cito según la trad. fran. de J. Lacombe: Logique Mathématique, Armand Colin éditeur, Paris, 1971.
- LEBLANC, M - KREISEL, F  
 (1961) The Development of Logic. Clarendon Press, Oxford, 1961. Cito según la trad. esp. de J. Guerrero: El Desarrollo de la Lógica. Tecnos, Madrid, 1970.
- LEIBNIZ, G  
 (1973) Random and Necessary. En Erkenntnis - Dordrecht (1973)  
 (1976) Is there a Problem about Substitutional Quantification? en Evans - Parson (eds) (1976)

LAKOFF, G.

- (1975) Nedges: A Study in Meaning Criteria and the Logic of Fuzzy Concepts, en Hockney - Harper - Freed (1975)

LAIBERT, R. (ed.)

- (1970) Philosophical Problems in Logic. Some recent Development  
D. Reidel, Dordrecht - Boston, 1970.

LEBLANC, H.

- (1968a) A simplified Account of Validity and Implication for Quantificational Logic, en J. Symbolic L. 33 (1968)
- (1968b) Truth-value Semantics. North-Holland Pu. Co. Amsterdam  
New York, 1976

LUKASIEWICZ, J.

- (1930) Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenskalküls, en Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 23 (1930). Trad. esp. de A. Deaño en J. Lukasiewicz: Estudios de Lógica y Filosofía. Revista de Occidente, Madrid, 1970, pp. 61-66

McCALL (ed.)

- (1967) Polish Logic. Clarendon Press, Oxford, 1967

GANIH, Y. I.

- (1977) A Course in Mathematical Logic. Trad. del ruso de H. Koblitz, por la que cito, en Springer Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1977.

MARTIN, R. H.

- (1963) On Carnap's Conception of Semantics, en Schilpp (ed.), (1963), pp. 351 - 384.

FORGALL, Ch. G. - FOLLETTIER, F. J.

- (1977) Some Notes concerning Fuzzy Logic, en *Mathematical & Philosophy* 1 (1977), pp. 79 - 99.

PIETRO, G. C.

- (1971) Set Theory. Addison & Wesley, Reading, 1971.

PUTNE, M. v. O.

- (1959) Methods of Logic. Henry Holt & Co., 1959. Ciber en català. La trad. esp. de J. Sacristán: *Orina*. - *Los métodos de la lógica*. Ariel, Barcelona, 1962.  
 (1959) From a Logical Point of View. *Logical-Philosophical Essays*. Harvard Uni. Press, Harvard, 1959. Trad. català: Harper & Row, 1963.

RESCHER, M.

- (1969) Many-valued Logic. McGraw - Hill, New York, 1969.

ROBINSON, A.

- (1956) A result on consistency and its application to a theory of definition. *Annali. Arch. der Mathematik*. Pro. Ser. A59, (1957), pp. 47-51. (Indagationes Mathematicae 13).

ROSSER, J. B. - TURQUETTE, A.

- (1952) Many-valued Logics. North-Holland Co., Amsterdam, 1952. Reimpresión, Greenwood Press, Westport, 1977.

ROTT, O.

- (1972) Zweiwertige und mehrwertige Logik. Ein Beitrag zur Geschichte und Einheit der Logik. *Durchsicht*. Verlag, München, 1972.

ROTT, O.

- (1970) Ueber mehrwertige Logik. Ein Beitrag. *Travaux de l'Institut de Philosophie*, 1970.

por H. Messel. VEB. Berlin, 1968

SINOFELT, A - MESSEL, H

(1975) Logische Sprachregeln. Eine Einführung in die Logik.  
Wilhelm Fink Verlag, München-Salzburg, 1975

SCHILPP (ed.)

(1963) The Philosophy of Rudolf Carnap. Open Court, La Salle,  
Illinois, 1963.

SCHÜTTE, K

(1960) Beweistheorie. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg -  
New York, 1960. Cito por la trad. ingl. de J.N Crossley:  
Schütte.- Proof Theory. Springer Verlag, New York -  
Heidelberg - Berlin, 1977.

SHOENFIELD, R. B.

(1967) Mathematical Logic. Addison - Wesley. Reading, 1967

SHULLYAN, R. B.

(1963) First Order Logic. Springer Verlag. New York - Heidel-  
berg - Berlin, 1963.

WALSBERG, M

(1931) Axiomatization of the tree-valued propositional  
Calculus, trad. del polaco de B. Gruchman y McCall,  
en McCall (ed.) pp. 264 - 284.

WHITEHEAD, A. N. - RUSSELL, B

(1910) Principia Mathematica. Cambridge Uni. Press. Cambridge,  
1910.

WOODRUFF, F. W

(1970) Logic and Truth-value Gaps, en Lambert (ed.), (1970).

TARSKI, A

- (1935) Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen.  
Studia Philosophica, 1 (1935). Cite par la trad.  
fran. de G. Granger, en Tarski.- Logique, Fondations,  
Metamathematique. vol 1 Armand Colin editeur, Paris,  
1972.

