

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Geometría y Topología



TESIS DOCTORAL

Índice de punto fijo en productos simétricos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Eduardo Blanco Gómez

Director

Francisco Romero Ruiz del Portal

Madrid, 2014

Índice de punto fijo en productos simétricos

Eduardo Blanco Gómez



Memoria para optar al grado de Doctor en CC.Matemáticas.
Dirigida por Francisco Romero Ruiz del Portal,
Doctor en CC. Matemáticas y
Profesor Titular del Departamento de Geometría y Topología
de la Facultad de CC. Matemáticas de la U.C.M.

Madrid, 2014

Departamento de Geometría y Topología

Facultad de CC. Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

Índice general

Agradecimientos	5
Summary	7
Introducción	15
Capítulo 1. Índice de punto fijo en productos simétricos	17
1. Productos simétricos: definición, topología y sistemas semidinámicos	17
2. Índice de punto fijo en productos simétricos	18
3. Propiedad aditiva del índice n -simétrico	19
4. Otras propiedades	24
Capítulo 2. Cálculo del índice n -simétrico para homeomorfismos del plano que conservan la orientación	27
1. Introducción	27
2. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ es aislado como compacto invariante	31
3. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ es no aislado como compacto invariante	41
Capítulo 3. Índice de punto fijo en productos simétricos infinitos	67
1. Productos simétricos infinitos: definición, topología y sistemas semidinámicos	67
2. Índice de punto fijo en productos simétricos infinitos	69
3. Propiedades del índice simétrico infinito de punto fijo	71
4. Cálculo del índice de punto fijo en productos simétricos infinitos para homeomorfismos del plano que conservan la orientación	73
Capítulo 4. Aplicaciones del índice de punto fijo en productos simétricos	81
1. Introducción	81
2. Aplicaciones del índice n -simétrico a un sistema dinámico que conserva áreas	81
3. Cálculo de las características de Euler de los productos simétricos de todas las superficies cerradas, compactas y orientables.	83

Capítulo 5. Descomposición de compactos invariantes aislados de homeomorfismos del plano. Existencia de órbitas periódicas y caos.	85
1. Introducción	85
2. Pares filtrantes y ciclos filtrantes	86
3. Herradura de Smale	87
4. Existencia de órbitas periódicas en un conjunto compacto, invariante y aislado para un homeomorfismo plano que conserva la orientación	93
Bibliografía	103

Agradecimientos

Doy mi agradecimiento a mucha gente, es por todos ellos que he conseguido terminar la tarea titánica de completar esta tesis. Mis primeros agradecimientos van hacia mi esposa y hacia mis hijas, que son las que hacen que funcione mi corazón y mis soles de todas las mañanas.

Después querría agradecerles a mis padres todo su apoyo, toda la motivación que me han aportado para que tenga unos buenos estudios con los que fuese feliz y que me hiciesen la vida más fácil. Ellos me han dado la educación que tengo y me han guiado por el buen camino desde pequeño.

Les doy las gracias a mis dos abuelas. Siempre fueron la mejor parte de la familia. Mi infancia no hubiese sido tan feliz sin ellas y sin su cariño.

Por último, le quiero dar las gracias a mi director de tesis, Francisco Romero Ruiz del Portal. Prácticamente todas las matemáticas que sé son gracias a él. Sin duda, al finalizar este camino, sé infinitamente más de lo que sabía al empezar aunque eso solo suponga una ínfima parte del conocimiento que él atesora. Siempre ha estado ahí, me ha animado en los momentos de flaqueza y su perfeccionismo es el que ha logrado que elaboremos un trabajo honesto y entendemos que interesante. Él me ha enseñado la dureza del oficio de investigador y la alegría al obtener buenos resultados.

Summary

Introduction:

Let $f : U \subset X \rightarrow X$ be a continuous map, with U an open subset of a locally compact ANR (for metric spaces) X . Let $K \subset U$ be an isolated, compact, invariant set for f . Our objective is to deep in the study of the dynamics of f in K . We have a special interest in the periodic orbits contained in K . For this purpose, in this thesis we will build fixed point index of the induced map in the n -symmetric product of X , $SP_n(X)$. This survey begins from the work of J.M. Salazar (see [77], [81] y [82]) with the finite subsets of X with, at most, n elements, $F_n(X)$, also called by some authors, symmetric products. These spaces were introduced in 1931 by Borsuk and Ulam in [11] with the name of n -symmetric products of X . The authors researched topological properties that the n -symmetric products $F_n(X)$ inherited from X , and they considered the case $X = I$ to obtain topological properties of $F_n(I)$.

It is known that $SP_n(X) = F_n(X)$ if $n = 2$. We recommend the book of Aguilar, Gitler y Prieto, [1], where these spaces are used to explain through an homotopical point of view several classic concepts of algebraic topology.

In previous issues it was pointed that it could be interesting to research the fixed point index in $SP_n(X)$ because the additive behaviour of the index would be better than in $F_n(X)$. Masih and Rallis, in [58], [59] y [74] have defined some index for maps $X \rightarrow SP_n(X)$ so with a completely different point of view and objectives from ours. It is a natural and almost unexplored framework to study periodic orbits of discrete dynamical systems.

Due to the nature of our construction, the index develop here will give us information about periodic orbits, contained in K , of period lower or equal to n . We will focus our efforts in the research of the homeomorphisms of the plane although our construction is completely general.

In this framework we will develop methods that allow us to compute Euler's characteristics of the n -symmetric products of finite dimension manifolds. Our point of view can be interesting, and we devote one section to this, to be an alternative way to the traditional methods

used in the known literature. We will pay attention to the compact, orientable and boundaryless surfaces making the complete computation for them.

We will extend, in a natural way, that construction to the infinite symmetric products, associating to every fixed point, isolated as periodic orbit, a complex formal series. In the particular case we have an isolated fixed point as a compact invariant set not being an attractor nor repeller, we will associate to every germ a polynomial. We will research the effect of some dynamic properties to the associated series.

To finish, following Ruiz del Portal and Salazar in [76], we will research from our point of view, compact isolated invariant sets of the plane that admit isolated neighborhoods that are unions of discs to give some clues about the detection of periodic orbits a chaos with our methods.

Objectives:

The main objective of this thesis is to define a Conley type index for the topological spaces called symmetric products introduced by Borsuk and Ulam in [11] and use this fixed point index to detect chaos for homeomorphisms of the plane that preserve orientation.

In the first chapter we begin with the definition of the n -symmetric index. Let X be an ANR for metric spaces and $U \subset X$ an open subset. Let $f : U \rightarrow X$ a semidynamical system. In the first chapter we consider the symmetric product of the space X , that is the space $SP_n(X) = X \times \cdots \times X / \sim$, where the equivalence relation identify those points whose coordinates are permuted. Every semidynamical system f induce another semidynamical system in the symmetric product and we will define a Conley type index for these spaces that we will denote n -symmetric index. Afterwards, we will obtain a topological decomposition for the symmetric products of unions of disjoint sets which is the result needed to prove the main property of the n -symmetric index, the additive property. We will finish proving, for the n -symmetric index, two classical properties of the fixed point index: commutative property and homotopy invariance.

In the second chapter we compute the n -symmetric index for homeomorphisms of the plane that preserve orientation, splitting this calculation into two cases: the first case where our fixed point is isolated as a compact invariant set and the second case where our fixed point is not isolated as a compact invariant set. Let f be a homeomorphism of the plane. Let $K \subset \mathbb{R}^2$ be a compact invariant subset containing a fixed point p of f such that p is isolated as periodic orbit. The aim is to compute the n -symmetric index of f in K_0 the connected component of K that contains p . At this point we will distinguish two cases: K isolated and not as a compact invariant set. In the case that K is not

isolated we will use Carathéodory's compactification to simplify this case to the first one.

In the third chapter we introduce the concept of infinite symmetric product, to define later the infinite symmetric index, not analogously to the n -symmetric index, but as a formal series containing as coefficients all the n -symmetric index. Finally we will make the computation of the infinite symmetric product for the homeomorphisms of the plane that preserve orientation, in the two cases distinguished in the previous chapter. Let X be an *ANR* locally compact, $U \subset X$ an open subset and $f : U \rightarrow f(U) \subset X$ a semidynamical system. We will define the infinite symmetric product $SP_\infty(X)$ through the symmetric products $SP_n(X)$ introduced in the first chapter; we will endow $SP_\infty(X)$ with its natural topology and we will define the semidynamical system $SP_\infty(f)$, induced by f in $SP_\infty(X)$. We will also define the infinite symmetric index for the map $SP_\infty(f)$ in a compact invariant set K . The amazing fact around this index is that we will define it as a formal complex series whose coefficients will be the n -symmetric index. This definition is very comfortable to prove some crucial properties as the additive one, completely necessary to the computations, because as $SP_\infty(X)$ is an infinite dimension space, in the place of Conley type ideas, we will approach to this problem following a strategy closer to the definition of Leray-Schauder's degree (see [52]) or even closer to the construction of extensions of the degree for A -proper maps, [95], or through Galerkin's approximations, [12]. Despite the fact that definitions are written using general hypotheses, we will make the calculations, as in previous sections, for planar homeomorphisms although, as we have mentioned before, similar technics based on recent results would allow us to obtain information on higher dimensions.

In the fourth chapter the aim is to use the n -symmetric index for homeomorphisms of the plane that preserve, expand and shrink areas and the computation of the Euler characteristic of the symmetric product of every compact orientable surface.

In the last chapter we research about the descompositions of compact isolated invariant sets of homeomorphisms of the plane that preserve orientation and the existence of periodic orbits and chaos. Let $U \subset \mathbb{R}^2$ be an open subset and $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ be an homeomorphism that preserves orientation. Let $K \subset U$ be a compact, isolated, invariant set for f , that admits an isolated neighborhood which is a finite union of close discs. In this conditions it exists an isolated block that can be decomposed into a union of disjoint discs. We will build filtration cycles which are the fundamental tool we are going to use to study the existence of periodic orbits of f that follow a specific itinerary. We will give sufficient conditions in terms of these technics that allow us to deduce the existence of chaos.

Results:

The main result of this thesis is obtained in the last chapter where it is computed the n -symmetric index for a planar homeomorphism that preserves orientation and following a specific itinerary.

In the first chapter, after defining the topological spaces called n -symmetric products and defining the n -symmetric index, for X an ANR for metric spaces, we obtain a topological descomposition of the symmetric product of a disjoint union of open subsets, i.e., let X be a locally compact ANR. Let U_1 and U_2 two disjoint open subsets of X . Then,

$$SP_n(U_1 \cup U_2) \cong \bigcup_{0 \leq j \leq n} (SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)),$$

where we will understand that the last equality means that both spaces are homeomorphic. Moreover, the cartesian product $SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)$ is identified with $SP_n(U_1)$ when $j = n$ and with $SP_n(U_2)$ when $j = 0$. With this topological descomposition we have the main tool to prove the additive property: let X a locally compact ANR and $U \subset X$ an open subset. Let $f : U \rightarrow X$ be a semidynamical system and K a compact invariant set with respect to f . Suppose that K is the disjoint union of two compact invariant sets K_1 and K_2 that admit compact neighborhoods N_1 and N_2 such that $Per^j(f) \cap N_m \subset K_m$ for $m = 1, 2$ and $j \leq n$. Then,

$$I_X^{SP_n}(f, K) = \sum_{j=0}^n I_X^{SP_j}(f, K_1) \cdot I_X^{SP_{n-j}}(f, K_2),$$

where we use the notation $I_X^{SP_0}(f, K_m) = 1$ for $m = 1, 2$.

In the second chapter, we compute the n -symmetric index for planar homeomorphisms that preserve orientation in a fixed point having account the two possible cases: the fixed point is isolated as a compact invariant set and the fixed point is non-isolated as a compact invariant set. First of all we define the concept of generalized filtration pair in order to obtain another continuous map \bar{f}^i that coincides with f in a small enough neighborhood of the compact invariant set K but for which we have information about the orbits out of K but inside the exit set of the isolated block chosen for K . Furthermore, the orbits of \bar{f}^i out of K , but inside the exit set of the isolating neighborhood chosen for K , have all the same period $q \geq 1$. All in all, for the case that the fixed point $\{p\}$ is isolated as a compact invariant set and contained in K_0 , a connected component of K , the value of the n -symmetric index of f in K_0 is,

$$i_n(f, p) = i_n(f, K_0) = (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]}.$$

For the second case, when the fixed point $\{p\}$ is non-isolated as a compact invariant set, we begin using Carathéodory's prime ends theory to reduce this case to the first one. Let $U \subset \mathbb{R}^2$ be an open subset, let $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ be an homeomorphism, let $K \subset U$ be the non-isolated compact invariant set that contains the fixed point $\{p\}$ of f and let K_0 be the connected component of K that contains $\{p\}$. With Carathéodory's prime ends theory we obtain the important equality,

$$i_n(K_0) = 1 + \sum_{j=1}^n i_j(U).$$

Having account that the open set U contain, out of K_0 , all the periodic orbits (maybe with period 1, i.e., fixed points) generated by Carathéodory's compactification, we can compute the n -symmetric index of U with similar calculations as in the previous case (the isolated one), so, using the last equality, we would obtain an expression for the n -symmetric index of K_0 the connected component of K a non-isolated compact invariant set containing the fixed point $\{p\}$,

$$(1) \quad i_n(f, K_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \nmid n \\ \begin{cases} \binom{a - e + [n/q]}{[n/q]} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{[n/q]} \binom{e - a - 1}{[n/q]} & \text{si } e > a \end{cases} & \text{si } q \mid n. \end{cases}$$

with $e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1)$. This is the desired formula for $i_n(f, K_0)$ in the case that $\{p\}$ is a non-isolated fixed point as a compact invariant set and, after Carathéodory's compactification, we have $r + a + b$ periodic orbits of period q splitted in: r non-attractor and non-repeller periodic orbits each one with m_s positive invariant exit regions for f^q , $s = 1, \dots, r$, a attractor orbits and b repeller orbits.

In the third chapter, the infinite symmetric index of a semidynamical system is defined in the infinite symmetric product $SP_\infty(X)$ and we make use of the second chapter to obtain the different values of this index. The surprise here is that we define the infinite symmetric index as a formal complex series with n -coefficient the n -symmetric product. The aim of this chapter is to summarize all the information of the n -symmetric index into a series to compute the different cases appeared for the n -symmetric index. For X a locally compact ANR we define the topological space named infinite symmetric product, as,

$$SP_\infty(X) = \bigcup_{n \geq 1} SP_n(X),$$

endowed with the union topology. We define the infinite symmetric index of a semidynamical system f in a compact invariant set K (that

admits a neighborhood N such that $N \cap \text{Per}(f) \subset K$ as,

$$I_X^{SP_\infty}(f, K) = \sum_{n=0}^{\infty} I_X^{SP_n}(f, K)z^n,$$

using the notation $I_X^{SP_0}(f, K) = 1$. For this index one can obtain the classical properties of the fixed point index: additivity, commutativity and homotopy invariance. With respect to the expression of this index we have two cases as before: if the fixed point $\{p\}$ is isolated as a compact invariant set, having the map \bar{f}^l m periodic orbits of period q ,

$$i_\infty(f, \{p\}) = \frac{(1 - z^q)^m}{1 - z}.$$

If the fixed point $\{p\}$ is non-isolated as a compact invariant set, obtaining, after Carathéodory's compactification, r non-attractor and non-repeller periodic orbits each one with m_s positive invariant exit regions for f^q , $s = 1, \dots, r$, a attractor orbits and b repeller orbits,

$$i_\infty(f, \{p\}) = \begin{cases} \frac{(1 - z^q)^{e-a}}{(1 - z)} & |z| < 1 & \text{si } e \leq a. \\ \begin{cases} \frac{(1 - z^q)^{e-a}}{(1 - z)} & \text{si } z \neq 1 \\ 0 & \text{si } z = 1 \end{cases} & & \text{si } e > a, \end{cases}$$

with $e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1)$.

In the fourth chapter, the objective is to prove that,

$$i_n(f, p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

for f a planar homeomorphism that preserves or expand or retract areas. Moreover, in this chapter we obtain the euler characteristic of every orientable surface. As the n -symmetric product of the sphere is the complex n -projective space, we focus our effort in obtaining an expression for the euler characteristic of the connected sum of torus, that is,

$$\chi(SP_n(\mathbb{T}^m)) = (-1)^n \binom{-\chi(\mathbb{T}^m)}{n}.$$

In the last chapter, the main objective is to present the technics created by Ruiz del Portal and Salazar in [76] to prove the next theorem,

THEOREM. *Let $U \subset \mathbb{R}^2$ an open subset and $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ a semidynamical system that preserves orientation. Let K a compact isolated invariant set containing all the non-attractor and non-repeller periodic orbits of f and $N \subset U$ an isolating block of K . Let $\tau : \{1, \dots, q\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ an itinerary and let,*

$$(N_\tau, L_\tau) = \{(N_{\tau(1)}, L_{\tau(1)\tau(2)}), (N_{\tau(2)}, L_{\tau(2)\tau(3)}), \dots, (N_{\tau(q)}, L_{\tau(q)\tau(1)})\},$$

a filtration cycle such that the components $L_{\tau(\delta)}$ are discs and the boundaries $\partial(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)})$ are homeomorphic to S^1 , for all $\delta = 1, \dots, q$. Then,

$$i_n(F_\tau, Per_\tau(N_\tau)) = \begin{cases} (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]} & \text{si } q \mid n \\ 0 & \text{si } q \nmid n \end{cases},$$

with m the number of periodic orbits of F_τ in $\{p_{11}, \dots, p_{1m}, \dots, p_{q1}, \dots, p_{qm}\}$ and q the period of every orbit.

Conclusions:

As conclusions of this thesis we obtain the next information: the n -symmetric index, the fixed point index defined in the topological spaces called n -symmetric products, $SP_n(X)$, is a very useful tool to study the dynamics of homeomorphisms defined between these spaces. In this thesis we construct the n -symmetric index, proving its main properties in the first chapter (including the most important one to make calculations: the additive property) and computing all its values, in the second chapter, for the case of a planar homeomorphism that preserves orientation. Something interesting about n -symmetric index is that one can compute exactly its value for every fixed point of a planar homeomorphism that preserves orientation, see as a compact invariant set; moreover, splitting the computation in two cases, when the fixed point is isolated and when not, as a compact invariant set, one can reduce the non-isolated case to the isolated one using Carathéodory's prime ends theory. Furthermore, in the third chapter, all this information is perfectly summarize into the infinite symmetric index defined in the topological space named as infinite symmetric product, $SP_\infty(X)$ (the union of all symmetric products $SP_n(X)$ with the union topology), defining the infinte symmetric index as a series whose coefficients are the n -symmetric index. Through this point of view one can translate the dynamics of a homeomorphism to the aspect of the series of the infinite symmetric index. Like in the cases of the n -symmetric product, one can compute all the 'values' of the infinite symmetric index for a planar homeomorphism that preserves orientation. Three interesting applications of the n -symmetric index are included in the thesis: its behaviour for planar homeomorphisms that preserve, shrink or expand areas, the computation of this index for every compact orientable surface (both applications into chapter fourth) and the existence of periodic orbits and chaos for planar homeomorphisms that preserve orientation, using the descomposition of isolated invariant compact sets of these homeomorphisms.

Introducción

Sea $f : U \subset X \rightarrow X$ una aplicación continua, con U un subconjunto abierto de un ANR (para espacios métricos) localmente compacto X . Sea $K \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f . Nuestro objetivo es profundizar en el estudio de la dinámica de f en K . De especial interés es la obtención de información acerca de las órbitas periódicas contenidas en K . Para ello, en la presente memoria construiremos índices de punto fijo de la aplicación inducida en el n -producto simétrico de X , $SP_n(X)$. Este estudio parte de la filosofía del trabajo de J.M. Salazar (ver [77], [81] y [82]) en los subconjuntos finitos de X , no vacíos, con, a lo sumo, n elementos $F_n(X)$, también llamados por algunos autores productos simétricos. Estos espacios fueron considerados en 1931 por Borsuk y Ulam en [11] con el nombre de n -producto simétrico de X . Los autores investigaron las propiedades topológicas que heredaban de X los n -productos simétricos $F_n(X)$, y consideraron $X = I$ para estudiar las propiedades topológicas de $F_n(I)$.

Se sabe que $SP_n(X) = F_n(X)$ si $n = 2$. Recomendamos el libro de Aguilar, Gitler y Prieto, [1], en el que se utilizan estos espacios para dar un enfoque homotópico a varios conceptos clásicos de la topología algebraica.

En trabajos anteriores ya se apuntaba que podría ser interesante estudiar el índice de punto fijo en $SP_n(X)$ dado que se puede esperar un comportamiento aditivo mejor que en los espacios $F_n(X)$. Masih y Rallis, en [58], [59] y [74] han definido ciertos índices para aplicaciones $X \rightarrow SP_n(X)$ por tanto con un enfoque y objetivos completamente diferentes a los nuestros. Se trata de un marco muy natural pero apenas explorado para estudiar órbitas periódicas de sistemas dinámicos discretos.

Por la naturaleza de nuestra construcción, el índice que desarrollaremos dará información sobre las órbitas periódicas, contenidas en K , de período menor o igual que n . Nos centraremos especialmente en el estudio de los homeomorfismos del plano aunque nuestra construcción sea completamente general.

En este marco desarrollaremos técnicas que permitan el cálculo de las características de Euler de los n -productos simétricos de variedades de dimensión finita. Nuestro enfoque puede ser de cierto interés, y a ello se dedica una sección, por ser una alternativa completamente diferente a las empleadas en la literatura existente. Pondremos

especial atención en las superficies compactas, orientables y sin borde, para las que haremos el cómputo completo.

Extenderemos de manera natural la construcción a los productos simétricos infinitos asociando a cada punto fijo, aislado como órbita periódica, una serie formal compleja. En el caso particular de tener un punto fijo aislado como compacto invariante que no sea atractor ni repulsor, asociaremos a cada germen un polinomio. Estudiaremos qué reflejo tienen algunas propiedades dinámicas en la serie asociada.

Por último, siguiendo el trabajo de Ruiz del Portal y Salazar en [76], estudiaremos desde nuestro punto de vista compactos invariantes aislados del plano que admiten entornos aislantes formados por uniones de discos para esbozar la técnica de detección de órbitas periódicas y caos.

Índice de punto fijo en productos simétricos

RESUMEN: Sea X un ANR para espacios métricos y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico. En este capítulo consideraremos el producto simétrico del espacio X , que no es más que el espacio $SP_n(X) = X \times \cdots \times X / \sim$, donde la relación de equivalencia identifica aquellos puntos cuyas coordenadas están permutadas. Todo sistema semidinámico f induce otro sistema semidinámico en el producto simétrico y definiremos un índice tipo Conley para estos espacios que denominaremos índice n -simétrico. Por último obtendremos una descomposición topológica para los productos simétricos de uniones de conjuntos disjuntos que nos llevará a demostrar la propiedad principal del índice n -simétrico, la propiedad aditiva. Terminaremos demostrando, para el índice n -simétrico, dos propiedades típicas de los índices de punto fijo: la propiedad conmutativa y la propiedad de invarianza por homotopías.

1. Productos simétricos: definición, topología y sistemas semidinámicos

DEFINICIÓN 1.1. Sea X un ANR para espacios métricos (ANR son las siglas de *absolute neighborhood retract* ver [8] o [45]). De ahora en adelante siempre que nos refiramos a ANR se entenderá que lo es para espacios métricos. Sea σ una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. En $X^n = X \times X \times \cdots \times X$ definimos la siguiente relación de equivalencia,

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists \sigma : (y_1, \dots, y_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Definimos el **n-producto simétrico de X** como,

$$SP_n(X) = X \times X \times \cdots \times X / \sim = X^n / \sim.$$

La clase de equivalencia del punto (x_1, \dots, x_n) la denotaremos por $[x_1, \dots, x_n]$.

NOTACIÓN 1. Al grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$ lo denominaremos Σ_n . Además a menudo utilizaremos también las notaciones $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{x}_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, puntos en X^n , para cada $\sigma \in \Sigma_n$. La clase de equivalencia en $SP_n(X)$ del punto \vec{x} la denotaremos por $[\vec{x}]$.

OBSERVACIÓN 1.2. La primera observación que cabe hacer al concepto anterior es que no es universal, es decir, existen autores (ver por ejemplo [92]) que al producto anterior lo llaman de otras formas como por ejemplo producto de permutación (*permutation product*); de hecho, en muchos textos se reserva el nombre de producto simétrico para el espacio $F_n(X)$ de todos los subconjuntos no vacíos de X que contienen a lo sumo n puntos.

Desde el punto de vista de nuestros objetivos es importante destacar que, en el caso de que X sea un ANR también lo es su n -producto simétrico $SP_n(X)$ (ver las referencias [58], [59] y [74]).

OBSERVACIÓN 1.3. (Topología en $SP_n(X)$). Lo primero que debemos hacer es recordar cómo se define la topología de $SP_n(X)$. Para ello denotamos a la aplicación cociente con la letra π , es decir,

$$\begin{aligned} \pi : X^n &\rightarrow SP_n(X) \\ \vec{x} &\mapsto \pi(\vec{x}) = [\vec{x}]. \end{aligned}$$

En X^n consideraremos la topología producto mientras que en $SP_n(X)$ consideraremos la topología cociente.

DEFINICIÓN 1.4. Sea X un ANR y $U \subset X$ un abierto. Un **sistema semidinámico** (local) es una aplicación continua e inyectiva, definida localmente, $f : U \rightarrow X$.

Diremos que un conjunto compacto $K \subset X$ es **invariante** por f si $f(K) = K$. Un conjunto compacto e invariante es **aislado respecto a f** si existe un entorno compacto N de K tal que $\text{Inv}(N, f) = K$. Aquí utilizaremos la notación $\text{Inv}(N, f)$ para referirnos al mayor compacto invariante por f que a la vez es subconjunto de N . A N se le denomina **entorno aislante** de K . Diremos que K es un conjunto compacto, invariante y aislado sin especificar f cuando no exista confusión posible. Denotaremos por $\text{Per}^n(f)$ al conjunto de órbitas periódicas de período n de f .

2. Índice de punto fijo en productos simétricos

Un sistema semidinámico $f : U \rightarrow X$ induce, de manera natural, otro sistema semidinámico en $SP_n(X)$, a saber,

$$(2) \quad \begin{aligned} SP_n(f) : SP_n(U) &\rightarrow SP_n(X) \\ [\vec{x}] &\mapsto SP_n(f)[\vec{x}] = [(f(x_1), \dots, f(x_n))]. \end{aligned}$$

La aplicación $SP_n(f)$ definida anteriormente es continua.

LEMA 1.5. *Sea X un ANR. Sea U un abierto de X y sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Entonces la aplicación $SP_n(f)$ inducida por f desde el producto simétrico $SP_n(U)$ en $SP_n(X)$ es también un sistema semidinámico.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} SP_n(U) & \xrightarrow{SP_n(f)} & SP_n(X) \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ U \times \overset{n\text{-veces}}{\times} U & \xrightarrow{F} & X \times \overset{n\text{-veces}}{\times} X, \end{array}$$

donde $F(\vec{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$. La continuidad de $SP_n(f)$ es consecuencia de la igualdad $\pi \circ F = SP_n(f) \circ \pi$. \square

Sea $K \subset U$ un conjunto compacto e invariante con respecto a f y sea N un entorno compacto de K tal que $Per^j(f) \cap N \subset K$ con $j \leq n$. Para cualquier conjunto abierto W tal que $K \subset W \subset N$ consideremos $SP_n(f)|_{SP_n(W)} : SP_n(W) \rightarrow SP_n(X)$. Claramente $Fix(SP_n(f)|_{SP_n(W)}) \subset SP_n(K)$, con $SP_n(K)$ compacto invariante, con lo que $Fix(SP_n(f)|_{SP_n(W)})$ es un subconjunto compacto de $SP_n(W)$. Por otro lado $SP_n(f)|_{SP_n(W)}$ es una aplicación compacta porque admite una extensión evidente a $SP_n(N)$ entorno compacto de $SP_n(K)$.

Teniendo en cuenta todas las observaciones anteriores, el índice $i_{SP_n(X)}(SP_n(f)|_{SP_n(W)}, SP_n(W))$ está bien definido.

DEFINICIÓN 1.6. Definimos el **índice n -simétrico** del par (K, f) como,

$$I_X^{SP_n}(f, K) = i_{SP_n(X)}(SP_n(f)|_{SP_n(W)}, SP_n(W)).$$

OBSERVACIÓN 1.7. Por la propiedad de escisión del índice de punto fijo sabemos que $I_X^{SP_n}(f, K)$ no depende de las elecciones del entorno N de K ni del conjunto abierto W .

Obsérvese también que la definición anterior tiene sentido en el caso, algo más restrictivo, de que K sea un compacto invariante aislado y N un entorno aislante de K .

3. Propiedad aditiva del índice n -simétrico

En esta sección demostraremos el resultado más importante del capítulo: la propiedad aditiva del índice de punto fijo en los productos simétricos $SP_n(X)$, con X un ANR localmente compacto. Desde el momento en que uno se plantea realizar cálculos con el índice de punto fijo, la propiedad aditiva se convierte en una herramienta fundamental, puesto que nos permite, por ejemplo, calcular el índice de punto fijo sobre un compacto invariante operando sobre sus componentes conexas -siempre que la función no las intercambie-, lo cual simplifica el problema enormemente.

LEMA 1.8. *Sea X un ANR localmente compacto. Sean U_1 y U_2 dos subconjuntos abiertos disjuntos de X . Entonces,*

$$SP_n(U_1 \cup U_2) \cong \bigcup_{0 \leq j \leq n} (SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)),$$

donde entenderemos que la igualdad anterior significa que los dos espacios son homeomorfos. Además, el producto cartesiano $SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)$ lo identificamos con $SP_n(U_1)$ cuando $j = n$ y con $SP_n(U_2)$ cuando $j = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Construimos la siguiente aplicación,

$$\begin{aligned} \alpha : \bigcup_{0 \leq j \leq n} (SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)) &\rightarrow SP_n(U_1 \cup U_2) \\ ([x_1, \dots, x_j], [x_{j+1}, \dots, x_n]) &\mapsto [x_1, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

Queremos demostrar que α es un homeomorfismo. Es inmediato comprobar que α está bien definida. Veamos que es biyectiva. Sea $[x_1, \dots, x_n] \in SP_n(U_1 \cup U_2)$ cuyas primeras j coordenadas se encuentren en U_1 y las segundas $n - j$ coordenadas en U_2 . Veamos por ejemplo que la aplicación α es sobreyectiva. La inyectividad es similar. Para $[x_1, \dots, x_n] \in SP_n(U_1 \cup U_2)$ dado, se tiene la igualdad,

$$\alpha([x_1, \dots, x_j], [x_{j+1}, \dots, x_n]) = [x_1, \dots, x_n].$$

Es decir que para cualquier elemento $[x_1, \dots, x_n] \in SP_n(U_1 \cup U_2)$, podemos realizar una reordenación de manera que la clase de equivalencia de las primeras j coordenadas pertenezca a $SP_j(U_1)$ y la clase de equivalencia de las siguientes $n - j$ coordenadas pertenezca a $SP_{n-j}(U_2)$.

Demostremos, por último, que α es continua y abierta. Esto es una consecuencia del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{j=0}^n (SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)) & \xrightarrow{\alpha} & SP_n(U_1 \cup U_2) \\ h \uparrow & & \uparrow \pi \\ \bigcup_{j=0}^n (U_1^j \times U_2^{n-j}) & \xrightarrow{g} & (U_1 \cup U_2)^n, \end{array}$$

donde π es la aplicación cociente introducida en la observación 1.3, la aplicación g es la aplicación continua y abierta:

$$\begin{aligned} g : \bigcup_{j=0}^n (U_1^j \times U_2^{n-j}) &\rightarrow (U_1 \cup U_2)^n \\ ((x_1, \dots, x_j), (x_{j+1}, \dots, x_n)) &\mapsto (x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

y

$$h : \bigcup_{j=0}^n (U_1^j \times U_2^{n-j}) \rightarrow \bigcup_{j=0}^n (SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2))$$

$$((x_1, \dots, x_j), (x_{j+1}, \dots, x_n)) \mapsto ([x_1, \dots, x_j], [x_{j+1}, \dots, x_n]).$$

Según el diagrama, $\alpha \circ h = \pi \circ g$, así que α es continua por serlo π , g y h . Además, α es abierta porque transforma la imagen por h de abiertos saturados en la imagen por π de abiertos saturados. \square

Con la descomposición anterior ya podemos demostrar la propiedad aditiva del índice n -simétrico.

TEOREMA 1.9. (Propiedad aditiva). Sea X un ANR localmente compacto y sea $U \subset X$ un abierto. Sean $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y K un conjunto compacto e invariante con respecto a f . Supongamos que K es unión disjunta de dos conjuntos compactos e invariantes K_1 y K_2 que admiten entornos compactos N_1 y N_2 tales que $Per^j(f) \cap N_m \subset K_m$ para $m = 1, 2$ y $j \leq n$. Entonces:

$$I_X^{SP_n}(f, K) = \sum_{j=0}^n I_X^{SP_j}(f, K_1) \cdot I_X^{SP_{n-j}}(f, K_2),$$

donde convenimos que $I_X^{SP_0}(f, K_m) = 1$ para $m = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que $N = N_1 \cup N_2$ es un entorno de K tal que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Escogemos entornos abiertos $U_m \subset N_m$ de K_m para $m = 1, 2$, tales que $f(U_{m_1}) \cap U_{m_2} = \emptyset$ si $m_1 \neq m_2$.

Tenemos entonces que,

$$I_X^{SP_n}(f, K) = i_{SP_n(X)}(SP_n(f)|_{SP_n(U_1 \cup U_2)}, SP_n(U_1 \cup U_2))$$

$$I_X^{SP_j}(f, K_m) = \begin{cases} i_{SP_j(X)}(SP_j(f)|_{SP_j(U_m)}, SP_j(U_m)) & \text{si } j \in \{1, \dots, n\} \\ 1 & \text{si } j = 0, \end{cases}$$

con $m = 1, 2$.

Consideremos los espacios,

$$W_1 = SP_n(U_1 \cup U_2) \quad ; \quad W_2 = \bigcup_{j=0}^n (SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2))$$

$$X_1 = SP_n(X) \quad ; \quad X_2 = \bigcup_{j=0}^n (SP_j(X) \times SP_{n-j}(X)).$$

Vamos a construir tres aplicaciones α, F_* y β correspondientes al siguiente diagrama,

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{SP_n(f)} & X_1 \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ W_2 & \xrightarrow{F_*} & X_2 \end{array}$$

y tales que $SP_n(f) = \beta \circ F_* \circ \alpha^{-1}$.

Tomemos,

$$F_* = \bigvee_{j=0}^n (SP_j(f) \times SP_{n-j}(f)).$$

Consideremos $\alpha : W_2 \rightarrow W_1$ definida de manera natural,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(SP_j(K'_1), SP_{n-j}(K'_2)) = SP_n(K') \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} K' = K'_1 \cup K'_2 \\ j \in \{1, \dots, n-1\} \end{array} \right. \\ \alpha(SP_n(K'_1)) = SP_n(K'_1) \\ \alpha(SP_n(K'_2)) = SP_n(K'_2), \end{array} \right.$$

para cada $K'_m \subset U_m$ con $m = 1, 2$. La aplicación α es un homeomorfismo sin más que acudir al lema 1.8.

Análogamente tenemos otra aplicación natural $\beta : X_2 \rightarrow X_1$ definida por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(SP_j(K'_1), SP_{n-j}(K'_2)) = SP_n(K') \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} K' = K'_1 \cup K'_2 \\ j \in \{1, \dots, n-1\} \end{array} \right. \\ \beta(SP_n(K'_1)) = SP_n(K'_1) \\ \beta(SP_n(K'_2)) = SP_n(K'_2), \end{array} \right.$$

para cada $K'_m \subset X$ con $m = 1, 2$.

Según el diagrama 3 y las definiciones de F_* , α y β tenemos que $SP_n(f) = \beta \circ F_* \circ \alpha^{-1}$.

Sean ahora las nuevas aplicaciones $f_1 = \gamma \circ \alpha^{-1} : W_1 \rightarrow X_2$ siendo $\gamma : W_2 \rightarrow X_2$ la inclusión, y sea $f_2 = SP_n(f) \circ \alpha : W_2 \rightarrow X_1$. De esta manera, el conjunto de puntos fijos del sistema semidinámico $SP_n(f)$ cumple,

$$S = \{x \in W_1 : SP_n(f)(x) = x\} = \{x \in f_1^{-1}(W_2) : (f_2 \circ f_1)(x) = x\},$$

y es compacto (porque es cerrado dentro del compacto $SP_n(K)$).

Teniendo en cuenta que S es un conjunto compacto, que W_1 y W_2 son homeomorfos a través de α y usando la propiedad conmutativa del índice de punto fijo aplicada a f_1 y f_2 :

$$I_X^{SP_n}(f, K) = i_{SP_n(X)}(SP_n(f)|_{SP_n(U_1 \cup U_2)}, SP_n(U_1 \cup U_2)) =$$

$$\begin{aligned}
&= i_{X_1}(f_2 \circ f_1, W_1) = i_{X_1}(f_2 \circ f_1, f_1^{-1}(W_2)) \\
&= i_{X_1}(f_1 \circ f_2, W_2) = i_{X_2}(f_1 \circ f_2, f_2^{-1}(W_1)) \\
&= i_{\cup_{j=0}^n (SP_j(X) \times SP_{n-j}(X))}(\gamma \circ \alpha^{-1} \circ SP_n(f) \circ \alpha, (SP_n(f) \circ \alpha)^{-1}(W_1)).
\end{aligned}$$

Como $SP_n(f) = \beta \circ F_* \circ \alpha^{-1}$,

$$\gamma \circ \alpha^{-1} \circ SP_n(f) \circ \alpha|_{\alpha^{-1}(SP_n(f)^{-1}(W_1))} = \gamma \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ F_*|_{F_*^{-1}(\beta^{-1}(W_1))}.$$

Además, $\gamma \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ F_*|_{F_*^{-1}(\beta^{-1}(W_1))} = F_*|_{F_*^{-1}(\beta^{-1}(W_1))}$, pues la aplicación de la izquierda,

$$X_2 \xrightarrow{\beta|_{\beta^{-1}(W_1)}} W_1 \xrightarrow{\alpha^{-1}} W_2 \xrightarrow{\gamma} X_2,$$

es la identidad en X_2 .

Aplicando todo lo anterior y la propiedad aditiva del índice de punto fijo, se obtiene,

$$\begin{aligned}
&i_{SP_n(X)}(SP_n(f), SP_n(U_1 \cup U_2)) = \\
&= i_{\cup_{j=0}^n (SP_j(X) \times SP_{n-j}(X))}(\gamma \circ \alpha^{-1} \circ \beta \circ F_*, F_*^{-1}(\beta^{-1}(W_1))) \\
&= i_{X_2}(F_*, F_*^{-1}(\beta^{-1}(W_1))) = i_{X_2}(F_*, W_2) \\
&= \sum_{j=0}^n i_{X_2}(F_*|_{SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)}, SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)) \\
&= \sum_{j=0}^n i_{SP_j(X) \times SP_{n-j}(X)}(SP_j(f) \times SP_{n-j}(f)|_{SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)}, \\
&\quad , SP_j(U_1) \times SP_{n-j}(U_2)) \\
&= \sum_{j=0}^n i_{SP_j(X)}(SP_j(f)|_{SP_j(U_1)}, SP_j(U_1)) \\
&\quad \cdot i_{SP_{n-j}(X)}(SP_{n-j}(f)|_{SP_{n-j}(U_2)}, SP_{n-j}(U_2)),
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. \square

PROPOSICIÓN 1.10. (Propiedad aditiva generalizada). *Sea X un ANR. Sea $U \subset X$ abierto. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y $K \subset U$ un conjunto compacto e invariante con respecto a f . Supongamos que K es unión disjunta de $m + 1$ conjuntos compactos e invariantes, $K = \bigcup_{j=0}^m K_j$. Entonces,*

$$I_X^{SP_n}(f, K) = \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=0}^m j_s=n}}^n I_X^{SP_{j_0}}(f, K_0) \dots I_X^{SP_{j_m}}(f, K_m)$$

donde nuevamente convenimos que $I_X^{SP_0}(f, K_j) = 1$ para $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en m . Si $m = 1$ entonces $K = K_0 \cup K_1$ y el enunciado es cierto sin más que aplicar el Teorema 1.9. Supongamos ahora que la igualdad es cierta para todo entero positivo

menor o igual que m . Demostremosla para $m+1$. Usando el Teorema 1.9 en el primer paso y la hipótesis de inducción en el segundo obtenemos,

$$\begin{aligned}
& I_X^{SP_n}(f, K) = \\
&= \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_0+j=n}}^n I_X^{SP_{j_0}}(K_0, f) \cdot I_X^{SP_j}(\cup_{j=1}^m K_j, f) \\
&= \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_0+j=n}}^n I_X^{SP_{j_0}}(K_0, f) \cdot \left(\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^m j_s=j}}^j I_X^{SP_{j_1}}(K_1, f) \dots I_X^{SP_{j_m}}(K_m, f) \right) \\
&= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=0}^m j_s=n}}^n I_X^{SP_{j_0}}(K_0, f) \dots I_X^{SP_{j_m}}(K_m, f),
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. \square

4. Otras propiedades

En esta sección demostramos dos propiedades importantes del índice de punto fijo en productos simétricos: la propiedad conmutativa y la propiedad de invarianza por homotopías. A diferencia de la propiedad aditiva estas propiedades se heredan de manera natural de las fundamentales del índice clásico. Vamos a enunciarlas en las hipótesis típicas del índice de Conley aunque pueden demostrarse con condiciones más débiles.

PROPOSICIÓN 1.11. (Propiedad conmutativa). *Sean X e Y ANR's localmente compactos. Sean $U \subset X$ y $V \subset Y$ conjuntos abiertos, y*

$$\varphi : U \rightarrow Y \quad , \quad \psi : V \rightarrow X,$$

dos aplicaciones continuas. Tomemos $f = \psi \circ \varphi$, y, $g = \varphi \circ \psi$. Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a f , entonces $\varphi(K)$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a g , y, además,

$$I_X^{SP_n}(f, K) = I_Y^{SP_n}(g, \varphi(K)).$$

DEMOSTRACIÓN. Es un resultado conocido que, en las condiciones del enunciado, $\varphi(K)$ es un conjunto compacto, invariante y aislado con respecto a g (ver Teorema 1.12 de [64]). Tenemos que,

$$\begin{aligned}
I_X^{SP_n}(f, K) &= i_{SP_n(X)}(SP_n(f), SP_n(U_1)) \\
&= i_{SP_n(X)}(SP_n(\psi) \circ SP_n(\varphi), SP_n(\varphi)^{-1}(SP_n(V_1))) \\
&= i_{SP_n(Y)}(SP_n(\varphi) \circ SP_n(\psi), SP_n(\psi)^{-1}(SP_n(U_1))) \\
&= i_{SP_n(Y)}(SP_n(g), SP_n(V_1)) = I_Y^{SP_n}(g, \varphi(K)),
\end{aligned}$$

donde $\text{Cl}(U_1)$ y $\text{Cl}(V_1)$ son entornos aislantes de K y $\varphi(K)$ respectivamente. La segunda y cuarta igualdades proceden de las definiciones de φ y ψ , y la tercera se debe a la propiedad conmutativa del índice de punto fijo aplicada a,

$$SP_n(\varphi) : SP_n(U_1) \rightarrow SP_n(Y) \quad ; \quad SP_n(\psi) : SP_n(V_1) \rightarrow SP_n(X).$$

□

COROLARIO 1.12. *Sea X un ANR localmente compacto, $U \subset X$ un subconjunto abierto y $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Sea $Y \subset X$ otro ANR localmente compacto tal que $f(X) \subset Y$. Si K es un conjunto compacto, invariante y aislado para f , entonces K también es un conjunto compacto, invariante y aislado para $f|_Y$, y,*

$$I_X^{SP_n}(f, K) = I_Y^{SP_n}(f|_Y, K).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar la Proposición 1.11 tomando $g = f|_Y$. □

PROPOSICIÓN 1.13. (Invarianza por homotopías). *Sea X un ANR localmente compacto. Sea $f : U \times \Lambda \rightarrow X$ una aplicación continua, tal que U es un subconjunto abierto de X y $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Sea $N \subset X$ un entorno aislante para cada función $f_\lambda : U \rightarrow X$. Entonces $I_X^{SP_n}(f_\lambda, \text{Inv}(N, f_\lambda))$ no depende de $\lambda \in \Lambda$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U_0 abierto tal que $\text{Inv}(N, f_\lambda) \subset U_0 \subset N \forall \lambda \in \Lambda$. Consideremos la aplicación f , restringida en su dominio,

$$f : U_0 \times \Lambda \rightarrow X.$$

Como $f_\lambda \simeq f_{\lambda'}$ entonces $SP_n(f_\lambda) \simeq SP_n(f_{\lambda'}) \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$.

Tenemos,

$$SP_n(f_\lambda) : SP_n(U_0) \rightarrow SP_n(X),$$

con $SP_n(f_\lambda)(SP_n(\text{Inv}(N, f_\lambda))) = SP_n(f_\lambda(\text{Inv}(N, f_\lambda)))$ porque al ser $\text{Inv}(N, f_\lambda) \subset U_0 \subset N$ entonces se tiene que $SP_n(\text{Inv}(N, f_\lambda)) = \text{Inv}(SP_n(N), SP_n(f_\lambda)) \subset SP_n(U_0) \subset SP_n(N)$.

Definimos la aplicación $F : SP_n(U_0) \times \Lambda \rightarrow SP_n(X)$ como,

$$F_{\text{Inv}(N, f_\lambda), \lambda} = SP_n(f_\lambda)(SP_n(\text{Inv}(N, f_\lambda))) = SP_n(f_\lambda(\text{Inv}(N, f_\lambda))).$$

Al ser f continua resulta sencillo ver que F también lo es. Ocurre que,

$$S_\lambda = \text{Fix}(SP_n(f_\lambda)) \subset SP_n(\text{Inv}(N, f_\lambda)) \subset SP_n(U_0) \subset SP_n(N),$$

es un compacto $\forall \lambda \in \Lambda$. De hecho el conjunto $\Sigma = \{(\text{Inv}(N, f_\lambda), \lambda) \in SP_n(U_0) \times \Lambda : F(\text{Inv}(N, f_\lambda), \lambda) = \text{Inv}(N, f_\lambda)\} \subset SP_n(N) \times \Lambda$ es compacto. Además, resulta claro que la homotopía F es compacta (su dominio se puede extender al compacto $SP_n(N) \times \Lambda$). En estas condiciones, podemos aplicar la propiedad de invarianza por homotopías del índice de punto fijo en ANR's a nuestra homotopía F y tenemos que $I_X^{SP_n}(f_\lambda, \text{Inv}(N, f_\lambda))$ no depende de λ . □

CAPÍTULO 2

Cálculo del índice n -simétrico para homeomorfismos del plano que conservan la orientación

RESUMEN: Sea f un homeomorfismo del plano. Sea K un subconjunto compacto e invariante conteniendo a un punto fijo p de f tal que p es aislado como órbita periódica. En este capítulo calcularemos el índice n -simétrico de f en K_0 la componente conexa de K que contiene al punto fijo p . Distinguiremos dos situaciones diferentes. La más sencilla es el caso en el que K sea invariante aislado. Cuando K no es aislado como compacto invariante haremos uso de la compactificación de Carathéodory para poder reducir el problema a la situación anterior.

1. Introducción

El problema de la existencia o no de homeomorfismos minimales de \mathbb{R}^m con un único punto omitido fue uno de los problemas propuestos por S.Ulam, e incluido en el famoso *Scottish Book*, ([61], problema 115). Existen varias respuestas parciales (ver por ejemplo [3], [4], [5], [61], [70]), pero el problema permanece abierto. Como consecuencia del teorema de traslación de arcos de Brouwer ([13], [34]) tenemos que no existen homeomorfismos minimales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para el plano multiperforado el problema ha resultado ser mucho más complicado. En [39], M. Handel probó la no existencia de homeomorfismos minimales de $\mathbb{R}^2 \setminus K$, donde K es un conjunto finito con, al menos, dos puntos, y más recientemente Le Calvez y Yoccoz, en [55], han resuelto completamente este problema. Posteriormente, en [33], J. Franks dió una demostración alternativa, más corta, usando técnicas del índice de Conley.

Le Calvez y Yoccoz probaron la no existencia de homeomorfismos minimales de $\mathbb{R}^2 \setminus K$, para cualquier conjunto K finito, utilizando la teoría del índice de punto fijo. Dado un homeomorfismo local que preserva la orientación, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ellos hacen un estudio local en un entorno de un punto fijo p que es, localmente, un conjunto invariante maximal y que no es ni repulsor ni atractor. Prueban que existen enteros $q, r \geq 1$ tales que

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, p) = \begin{cases} 1 - rq & \text{si } k \in r\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } k \notin r\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Aunque el índice de Conley facilita una demostración muy breve de la no existencia de homeomorfismos minimales de $\mathbb{R}^2 \setminus K$, con K finito, no proporciona el profundo análisis local necesario para probar el teorema de cálculo anterior. No obstante, manipulando adecuadamente cierta clase de objetos, los pares filtrantes, las claves para los cálculos aparecen de manera natural y puede darse una demostración elemental ([78]).

Uno de los principales objetivos de [81] fue proporcionar una prueba alternativa, más breve y simple, del resultado enunciado, así como una generalización del mismo a conjuntos compactos, conexos, invariantes y aislados. Las técnicas están basadas en las ideas del índice de Conley, y pueden ser aplicadas a homeomorfismos, definidos localmente, arbitrarios. Se obtiene de este modo, un teorema general que permite calcular el índice de punto fijo de cualquier iteración de cualquier homeomorfismo local en un punto fijo, que sea un conjunto invariante localmente maximal. Se emplea un tipo especial de *index pairs* que llamaremos filtraciones fuertes. Un hecho remarcable es que, una vez obtenido uno de tales *index pairs*, el cálculo del índice de punto fijo y los enteros q y r es inmediato. Se demuestra que estos enteros dependen del comportamiento de f en el conjunto de salida de una filtración fuerte dada. De modo más general, el mismo argumento permite determinar el índice de punto fijo de las iteraciones de homeomorfismos en entornos aislantes de conjuntos compactos, invariantes y aislados, que admiten filtraciones fuertes. Finalmente, con la ayuda de las técnicas utilizadas en la primera parte del estudio, se computan con facilidad los índices de punto fijo de cualquier iteración de un homeomorfismo definido localmente, en cualquier conjunto compacto, invariante, aislado y conexo.

Existe una interesante literatura dedicada al estudio del índice de punto fijo en un entorno de un punto fijo aislado (como punto fijo pero no necesariamente como compacto invariante) y su relación con la dinámica de la función. En este sentido recomendamos los trabajos de Alonso y Campos ([2]), M. Brown ([14], [15], [16]), Dancer y Ortega, ([24]), Handel ([40]), Hirsch ([43], [44]), Le Calvez ([53], [54]), Pelikan y Slaminka ([71]), Shub y Sullivan ([83]) y Simon ([84]).

Sea X un ANR localmente compacto. Sea la aplicación continua, definida localmente, $f : U \subset X \rightarrow X$, con U abierto de X . Dado un conjunto $N \subset U$, definimos el *conjunto de salida de N* como,

$$N^- = \{x \in N \text{ tal que } f(x) \notin \text{int}(N)\}.$$

DEFINICIÓN 2.1. (*Par filtrante*) (Véase [35]). Sea K un conjunto compacto, invariante y aislado, y sea (N, L) , con $L \subset N$, un par compacto contenido en el interior del dominio de f . El par (N, L) se

denomina *par filtrante* para K si N y L son las clausuras de sus interiores y,

- 1) $\text{cl}(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K ,
- 2) L es un entorno de N^- en N ,
- 3) $f(L) \cap \text{cl}(N \setminus L) = \emptyset$.

La próxima definición está basada en el concepto de par filtrante, y es clave para poder efectuar un cálculo inmediato del índice de punto fijo de cualquier iteración de un homeomorfismo, definido localmente, del plano.

DEFINICIÓN 2.2. (*Filtración fuerte*) (Véase *generalized filtration pair* en [78]) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen y sea K un conjunto compacto, invariante y aislado. Supongamos que (N, L) , con $L \subset N$, es un par compacto contenido en el interior de U . El par (N, L) se llama *filtración fuerte* para K si N y L son las clausuras de sus interiores y,

- 1) N y $\partial(N \setminus L)$ son homeomorfos a un disco y a S^1 respectivamente.
- 2) $\text{cl}(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K .
- 3) $f(\text{cl}(N \setminus L)) \subset \text{int}(N)$.
- 4) Para toda componente L_i de L , $\partial_N(L_i)$ es un arco, y existe un disco topológico B_i tal que $\partial_N(L_i) \subset B_i \subset L_i$, $B_i \cap N^- \neq \emptyset$ y $f(B_i) \cap \text{cl}(N \setminus L) = \emptyset$.

El teorema que a continuación enunciamos garantiza, en determinadas circunstancias, la existencia de filtraciones fuertes.

TEOREMA 2.3. ([78], [81]) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen, con U abierto, y sea K un conjunto compacto, invariante, aislado, conexo y no repulsor, $K = \text{Inv}(V, f)$, donde $V \subset U$ es homeomorfo a una bola abierta. Entonces existe una filtración fuerte (N, L) para K .

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre la imagen y sea (N, L) una filtración fuerte para K , un conjunto compacto, invariante y aislado. L es la unión de sus componentes $L = L_1 \cup \cdots \cup L_m$.

Tenemos que,

$$f|_{\text{cl}(N \setminus L)} : \text{cl}(N \setminus L) \rightarrow N,$$

y, para todo i , existe un j tal que $f(\partial_N(L_i)) \subset \text{int}(L_j)$.

Consideremos el espacio cociente $\text{cl}(N \setminus L) / \sim$ que resulta de identificar cada $\partial_N(L_i)$ a un punto p_i (si $i \neq j$ entonces $p_i \neq p_j$).

Consideremos la aplicación proyección,

$$\pi : \text{cl}(N \setminus L) \rightarrow \text{cl}(N \setminus L) / \sim,$$

y

$$r : N \rightarrow \text{cl}(N \setminus L),$$

retracción en la que cada L_i se retrae a $\partial_N(L_i)$, con $r(x) = x$ si $x \in \text{cl}(N \setminus L)$.

Definimos, ahora, $f' = \pi \circ r \circ f \circ \pi^{-1}$,

$$(4) \quad f' : \text{cl}(N \setminus L) / \sim \setminus \{p_1, \dots, p_m\} \rightarrow \text{cl}(N \setminus L) / \sim$$

Resulta que f' es continua y, en un entorno suficientemente pequeño de K , $f' \equiv f$. Como $f(\partial_N(L_i)) \subset \text{int}(L_j)$, f' admite una única extensión continua,

$$\overline{f'} : \text{cl}(N \setminus L) / \sim \rightarrow \text{cl}(N \setminus L) / \sim,$$

tal que $\overline{f'}(U'(p_i)) = p_j$ para un entorno $U'(p_i)$ de p_i .

Tenemos $\overline{f'}(\{p_1, \dots, p_m\}) \subset \{p_1, \dots, p_m\}$. De hecho $\overline{f'}(p_i) = p_j$ si, y solo si, $f(\partial_N(L_i)) \subset \text{int}(L_j)$.

Es claro que,

$$\text{Fix}_{\text{cl}(N \setminus L) / \sim}(\overline{f'}) \subset K \cup \{p_1, \dots, p_m\},$$

y como $\text{cl}(N \setminus L)$ es un entorno aislante de K ,

$$\text{Fix}_{\text{cl}(N \setminus L) / \sim}((\overline{f'})^k) \subset K \cup \{p_1, \dots, p_m\}.$$

Además, si f conserva orientación todas las órbitas periódicas de $\overline{f'}$ fuera de K tienen el mismo período ([78], [81]).

OBSERVACIÓN 2.4. Es importante recalcar que, aunque en las secciones posteriores no lo indiquemos, el cálculo del índice n -simétrico de punto fijo lo realizaremos sobre la función $\overline{f'}$ construida anteriormente. Puesto que $\overline{f'}$ es una extensión continua de f' definida en (4) y $f' \equiv f$ en un entorno suficientemente pequeño del compacto K que contenga a nuestro punto fijo, por la propiedad de escisión se tiene,

$$i_n(\overline{f'}, K) = i_n(f', K) = i_n(f, K).$$

Antes de comenzar con el cómputo del índice n -simétrico conviene realizar una observación y establecer la notación estándar que usaremos de manera frecuente en todos los capítulos posteriores.

NOTACIÓN 2. Sea X un ANR. Sea $U \subset X$ abierto. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y $K \subset U$ un conjunto compacto e invariante en las condiciones anteriores. Para reducir la notación llamaremos,

$$i_n(U) = i_{SP_n(X)}(SP_n(f), SP_n(U))$$

$$i_n(K) = I_X^{SP_n}(f, K).$$

Cuando sea necesario indicar el espacio ambiente o el sistema semidinámico lo haremos notar llamando $i_{X,n}(f, K) = I_X^{SP_n}(f, K)$. Cuando aparezca el índice n -simétrico con subíndice cero, convendremos en utilizar la notación $i_0(\dots) = 1$ con el fin de que tanto los cálculos como las fórmulas obtenidas sean más claras y legibles. Es importante observar que la expresión $i_0(\dots) = 1$ es un convenio de notación y no tiene significado topológico alguno.

NOTACIÓN 3. Desde este momento utilizaremos la notación,

$$\binom{r}{s} \quad r, s \in \mathbb{Z},$$

para indicar los subconjuntos de s elementos en uno de r elementos, de suerte que,

$$\binom{r}{s} = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} s > r \\ \text{ó} \\ r \text{ ó } s \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

Comenzaremos estudiando los casos en que nuestro punto fijo $\{p\}$ es aislado como compacto invariante para luego estudiar la situación general.

De ahora en adelante, salvo que se especifique lo contrario, siempre supondremos que f es un homeomorfismo del plano que conserva la orientación.

2. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ es aislado como compacto invariante

En esta sección calcularemos el índice n -simétrico de un punto fijo aislado como compacto invariante de un homeomorfismo del plano que conserva orientación. Usando las técnicas de índice de Conley de la sección anterior podemos reducir el problema al estudio de una aplicación continua en un AR compacto.

En primer lugar vamos a ocuparnos de la situación más simple: el caso en el que p es un **atractor** o más generalmente si K es un atractor que no desconecta el espacio -de forma trivial- (ver [9], [56] o [57] para obtener información sobre la teoría de la forma).

Bajo estas hipótesis es bien conocido por los trabajos de Kérékjarto que existe un bloque aislante N para f tal que $N^- = \emptyset$ y N es un

disco topológico. Por tanto, teniendo en cuenta que $SP_n(N)$ es un AR, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$i_n(K) = i_n(N) = \Lambda(SP_n(f)) = 1.$$

De manera similar podemos concluir, usando la propiedad aditiva, que si K es un **repulsor** que no desconecta el plano también se tiene que $i_n(K) = 1$. Esto es, sea $K = K_0 \cup K_1$ con K_0 la componente conexa de K que contiene al punto fijo repulsor y K_1 la unión del resto de componentes conexas. La propiedad aditiva dice que,

$$i_n(K) = \sum_{j=0}^n i_j(K_0) \cdot i_{n-j}(K_1).$$

Teniendo en cuenta que $i_n(K_0) = 1$ e $i_n(K_1) = 0$ concluiríamos que $i_n(K) = 1$.

Por tanto, de ahora en adelante, nos ocuparemos de realizar el cálculo del índice n -simétrico sobre un K conjunto compacto invariante que contiene a un punto fijo ni atractor ni repulsor.

2.1. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ es aislado como compacto invariante y \bar{f}^l tiene m puntos fijos más. El cómputo que vamos a realizar se basa en el siguiente lema técnico.

LEMA 2.5. *Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ y sea la siguiente sucesión definida por recurrencia,*

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^n \binom{n-j+m-1}{m-1} a_j &= 1 \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$a_n = (-1)^n \binom{m-1}{n} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

DEMOSTRACIÓN. Utilicemos la siguiente notación,

$$S(m, n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-j+m-1}{m-1} \binom{m-1}{j}.$$

Empecemos por demostrar que,

$$(5) \quad S(m, n) + S(m+1, n+1) = S(m+1, n) + S(m, n+1)$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$. Sea,

$$S(m+1, n+1) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m+1}{m} \binom{m}{j}.$$

Usando la igualdad combinatoria,

$$\binom{n-j+m+1}{m} = \binom{n-j+m}{m} + \binom{n-j+m}{m-1},$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} S(m+1, n+1) &= \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m}{m} \binom{m}{j} + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m}{m-1} \binom{m}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-j+m}{m} \binom{m}{j} + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m}{m-1} \binom{m}{j} \\ &= S(m+1, n) + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m}{m-1} \binom{m}{j}. \end{aligned}$$

Para la segunda suma del miembro derecho de la igualdad anterior utilizemos que,

$$\binom{m}{j} = \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1},$$

obteniendo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m}{m-1} \binom{m}{j} &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m}{m-1} \binom{m-1}{j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+m}{m-1} \binom{m-1}{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{(n+1)-j+m-1}{m-1} \binom{m-1}{j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \binom{n-j+m-1}{m-1} \binom{m-1}{j} \\ &= S(m, n+1) - S(m, n). \end{aligned}$$

De esta última igualdad obtenemos que

$$S(m+1, n+1) = S(m+1, n) + S(m, n+1) - S(m, n),$$

que es equivalente a la ecuación (5). Como esa igualdad se cumple para todo m, n enteros positivos entonces también se cumple la igualdad,

(6)

$$S(m+r+1, n+s+1) = S(m+r+1, n+s) + S(m+r, n+s+1) - S(m+r, n+s),$$

para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}^+$, con $r \in \{-(m-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1\}$ y $s \in \{-(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1\}$.

Demostremos ahora por inducción sobre $m+n$ que,

$$(7) \quad S(m, n) = 1 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Supongamos que $m + n = 2$. Tenemos un caso $m = 1$, $n = 1$,

$$S(1, 1) = \sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{1-j+1-1}{1-1} \binom{1-1}{j} = 1.$$

Supongamos que la hipótesis del enunciado se cumple para $m + n + 1$. Veámoslo para $m + n + 2$. Hay que comprobar que para cualquier combinación del tipo $m + r + 1$ y $n + s + 1$ con $(m + r + 1) + (n + s + 1) = m + n + 2$ se cumple que $S(m + r + 1, n + s + 1) = 1$ para $r \in \{-(m - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, m - 1\}$ y $s \in \{-(n - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 1\}$. Pero usando la ecuación 6 y la hipótesis de inducción,

$$1 + S(m + r + 1, n + s + 1) = 1 + 1 \Rightarrow S(m + r + 1, n + s + 1) = 1,$$

para cualesquiera $r \in \{-(m - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, m - 1\}$ y $s \in \{-(n - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 1\}$.

Llegados a este punto hemos conseguido demostrar que la sucesión,

$$a_n = (-1)^n \binom{m-1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

cumple las dos condiciones del enunciado del lema. Ahora hemos de demostrar unicidad, es decir, si $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión que cumple las condiciones,

$$b_0 = 1 \\ \sum_{j=0}^n \binom{n-j+m-1}{m-1} b_j = 1 \quad \forall n \geq 1,$$

entonces $a_n = b_n$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Sea la sucesión $c_n = a_n - b_n$; observando que tanto a_n como b_n cumplen las condiciones del enunciado del lema, entonces,

$$c_0 = 0 \\ \sum_{j=0}^n \binom{n-j+m-1}{m-1} c_j = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

pero entonces, basta aplicar inducción en n para demostrar que $c_n = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, lo cual implica que $a_n = b_n$ y que la sucesión que cumple las dos condiciones del enunciado del lema es única. \square

NOTACIÓN 4. Sea M un AR compacto y sea $f : M \rightarrow M$ un sistema semidinámico. Denominaremos $\text{Perf } f$ al conjunto de puntos periódicos de f y $\text{Fix } f$ al conjunto de puntos fijos de f .

TEOREMA 2.6. *Sea M un AR compacto y conexo, sea $f : M \rightarrow M$ un sistema semidinámico y K un conjunto compacto, invariante y aislado, de manera que $\text{Perf } f \subset K \subset M$. Supongamos que $K = \cup_{j=0}^m K_j$, unión disjunta de compactos invariantes y aislados, con $m \geq$*

1. Supongamos también que $i_{j_s}(K_s) = 1 \ \forall j_s \in \{0, \dots, n\}$ y $\forall s \in \{1, \dots, m\}$. Entonces,

$$i_n(K_0) = (-1)^n \binom{m-1}{n}.$$

En particular $i_n(K_0) = 0 \quad \forall n \geq m$.

DEMOSTRACIÓN. Por la propiedad de escisión del índice n -simétrico,

$$i_n(f, K) = i_n(f, M).$$

Aplicando el teorema de Lefschetz-Hopf (véanse [51], [31], [46]),

$$i_n(f, M) = \Lambda(SP_n(f)).$$

Como M es un AR entonces $SP_n(M)$ también lo es (por la retracción natural inducida), y, en ese caso, como todo AR es contractible (véase [45]), todos los grupos de homología de $SP_n(M)$ serían cero excepto el $H_0(SP_n(M)) = \mathbb{Z}$. Por otra parte, acudiendo a la definición de número de Lefschetz (véanse [31], [87], [46]),

$$\Lambda(SP_n(f)) = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \text{tr}(H_j(SP_n(f))) = 1.$$

Juntando todo lo anterior, $i_n(K) = 1$ para todo n .

Usando la propiedad aditiva generalizada demostrada en la Proposición 1.10,

$$\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^m j_s=n}}^n i_{j_0}(K_0) \dots i_{j_m}(K_m) = 1.$$

Con la hipótesis $i_{j_s}(K_s) = 1 \ \forall j_s \in \{0, \dots, n\}$ y $\forall s \in \{1, \dots, m\}$ se obtiene,

$$\sum_{j_0=0}^n i_{j_0}(K_0) \left[\begin{array}{c} n-j_0 \\ \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^m j_s=n-j_0}} 1 \end{array} \right] = 1.$$

Usando el concepto de combinación con repetición queremos meter $n - j_0$ bolas en m urnas de modo que pueda haber repetición. Entonces,

$$\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^m j_s=n-j_0}}^{n-j_0} 1 = \binom{n-j_0+m-1}{n-j_0} = \binom{n-j_0+m-1}{m-1}.$$

Así que entonces,

$$\sum_{j_0=0}^n \binom{n-j_0+m-1}{m-1} i_{j_0}(K_0) = 1.$$

Es decir,

$$\sum_{j=0}^n \binom{n-j+m-1}{m-1} i_j(K_0) = 1.$$

Tomando $a_j = i_j(K_0)$ y aplicando el Lema 2.5 se concluye. \square

COROLARIO 2.7. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto del plano. Sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserva la orientación. Sea $p \in U$ un punto fijo ni atractor ni repulsor de f o más generalmente sea $K_0 \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado de forma trivial que no es atractor ni repulsor. Si la aplicación \bar{f}^l inducida (ver introducción de este capítulo) tiene r órbitas de período $q = 1$, es decir r puntos fijos, se tiene que*

$$i_n(f, K_0) = (-1)^n \binom{rq-1}{n} = (-1)^n \binom{r-1}{n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se trata de una consecuencia inmediata del resultado anterior aplicado a \bar{f}^l . \square

Observemos sin embargo que Le Calvez y Yoccoz, en su artículo [55], prueban que, dado un homeomorfismo local que preserva la orientación, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cualquier punto fijo aislado como compacto invariante $\{p\}$, ni atractor ni repulsor, existen enteros $q, r \geq 1$ tales que,

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, \{p\}) = \begin{cases} 1 - rq & \text{si } k \in q\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } k \notin q\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Estos enteros $q, r \geq 1$ son exactamente las órbitas periódicas que \bar{f}^l tiene fuera de K_0 . En particular, bajo las hipótesis de nuestro corolario, como suponemos que \bar{f}^l no tiene sino puntos fijos fuera de K_0 , $q = 1$ y r es exactamente su cardinal.

EJEMPLO 1. Veamos ahora la aplicación del teorema 2.6 y del corolario 2.7 a un ejemplo concreto. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea un homeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que responda a la dinámica de la figura 1.

En particular el homeomorfismo f posee un punto fijo p y la correspondiente función continua asociada \bar{f}^l otros cuatro puntos fijos más, es decir, bajo las condiciones del teorema 2.6 y del corolario 2.7 tendríamos $m = rq = 4$ ($r = 4, q = 1$). Aplicando, pues, dicho teorema se obtendría la siguiente expresión para el índice n -simétrico de f , para todo $s \in \mathbb{N}$,

$$i_n(f, \{p\}) = i_n(f^s, \{p\}) = (-1)^n \binom{4-1}{n} = \begin{cases} -3 & \text{si } n = 1 \\ +3 & \text{si } n = 2 \\ -1 & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$$

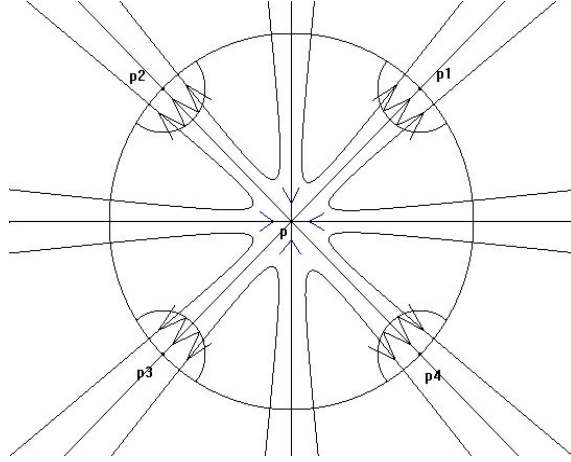


FIGURA 1. Sistema dinámico f cuya $\overline{f'}$ tiene un punto fijo aislado y cuatro puntos fijos más.

2.2. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ es aislado como compacto invariante y $\overline{f'}$ tiene r órbitas periódicas de periodo $q > 1$. Queremos ahora calcular el índice $i_n(K_0)$ en el caso de que $\overline{f'}$ posea r órbitas periódicas de periodo $q > 1$.

Empezamos llamando,

$$S(m, n) = \sum_{j=0}^n \binom{n-j+m-1}{m-1} (-1)^j \binom{m-1}{j}.$$

En el Lema 2.5 de la sección anterior ya demostramos que $S(m, n) = 1 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$.

TEOREMA 2.8. *Sea M un AR compacto conexo, sea $f : M \rightarrow M$ un sistema semidinámico y K un conjunto compacto, invariante y aislado, de manera que $\text{Perf} \subset K \subset M$. Supongamos que K se descompone como unión disjunta $K = \cup_{j=0}^m K_j$, con $m \geq 1$, donde K_0 es un conjunto compacto, invariante y aislado y cada K_j con $j = 1, \dots, m$ es un conjunto compacto, invariante y aislado que cumple,*

$$K_j = K_{1j} \cup \dots \cup K_{qj},$$

siendo $K_{\delta j}$ conjuntos compactos que satisfacen $f(K_{\delta j}) \subset K_{(\delta+1)j}$ para todo $\delta = 1, \dots, q$ y para todo $j = 1, \dots, m$ (identificamos $K_{(q+1)j} = K_{1j}$). Supongamos también que

$$i_{j_s}(K_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid j_s \\ 0 & \text{si } q \nmid j_s, \end{cases}$$

$\forall j_s \in \{0, \dots, n\}$ y $\forall s \in \{1, \dots, m\}$. Sea $[n/q]$ la parte entera de n/q . Entonces,

$$i_n(K_0) = (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la propiedad de escisión del índice n -simétrico,

$$i_n(f, K) = i_n(f, M).$$

Aplicando el teorema de Lefschetz-Hopf (véanse [51], [31], [46]),

$$i_n(f, M) = \Lambda(SP_n(f)).$$

Como M es un AR entonces $SP_n(M)$ también lo es (por la retracción natural inducida), y, en ese caso, como todo AR es contractible (véase [45]), todos los grupos de homología de $SP_n(M)$ serían cero excepto el $H_0(SP_n(M)) = \mathbb{Z}$. Por otra parte, acudiendo a la definición de número de Lefschetz (véanse [31], [87], [46]),

$$\Lambda(SP_n(f)) = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \text{tr}(H_j(SP_n(f))) = 1.$$

Juntando todo lo anterior,

$$i_n(K) = 1.$$

Usando la propiedad aditiva generalizada demostrada en la Proposición 1.10,

$$\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=0}^m j_s=n}}^n i_{j_0}(K_0) \dots i_{j_m}(K_m) = 1.$$

Con la hipótesis

$$i_{j_s}(K_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid j_s \\ 0 & \text{si } q \nmid j_s, \end{cases}$$

$\forall j_s \in \{0, \dots, n\}$ y $\forall s \in \{1, \dots, m\}$, y haciendo los cambios de subíndice de sumación $j_s = q\tilde{j}_s \quad \forall s \in \{1, \dots, m\}$ se obtiene,

$$(8) \quad \sum_{\substack{j_0=0 \\ j_0+q\tilde{j}_1+\dots+q\tilde{j}_m=n}}^n \sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_s \leq [n/q]}}^{[n/q]} i_{j_0}(K_0) \cdot i_{q\tilde{j}_1}(K_1) \dots i_{q\tilde{j}_m}(K_m) = 1.$$

Supongamos ahora que $n \equiv \rho \pmod{q}$ siendo $\rho \in \{0, 1, \dots, q-1\}$; llamemos $n = N \cdot q + \rho$ donde $N = [n/q]$. Haciendo ahora el cambio de subíndice de sumación $\tilde{j}_0 = (j_0 - \rho)/q$ se nos queda,

$$\sum_{\substack{\tilde{j}_0=0 \\ q\tilde{j}_0+q\tilde{j}_1+\dots+q\tilde{j}_m=qN}}^{[n/q]} \sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_s \leq [n/q]}}^{[n/q]} i_{q\tilde{j}_0+\rho}(K_0) \cdot i_{q\tilde{j}_1}(K_1) \dots i_{q\tilde{j}_m}(K_m) = 1.$$

Es decir,

$$\sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_0+\dots+\tilde{j}_m=[n/q]}}^{[n/q]} i_{q\tilde{j}_0+\rho}(K_0) \cdot i_{q\tilde{j}_1}(K_1) \dots i_{q\tilde{j}_m}(K_m) = 1.$$

Utilizando de nuevo el dato,

$$i_{j_s}(K_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid j_s \\ 0 & \text{si } q \nmid j_s, \end{cases}$$

$\forall j_s \in \{0, \dots, n\}$ y $\forall s \in \{1, \dots, m\}$ la suma anterior se puede escribir de la siguiente manera,

$$\sum_{\tilde{j}_0=0}^{[n/q]} i_{q\tilde{j}_0+\rho}(K_0) \left(\begin{array}{c} [n/q]-\tilde{j}_0 \\ \sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_1+\dots+\tilde{j}_m=[n/q]-\tilde{j}_0}} 1 \end{array} \right) = 1.$$

Usando el concepto de combinación con repetición queremos meter $[n/q] - \tilde{j}_0$ bolas en m urnas de modo que pueda haber repetición. Entonces,

$$\sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_1+\dots+\tilde{j}_m=[n/q]-\tilde{j}_0}}^{[n/q]-\tilde{j}_0} 1 = \binom{[n/q] - \tilde{j}_0 + m - 1}{[n/q] - \tilde{j}_0} = \binom{[n/q] - \tilde{j}_0 + m - 1}{m - 1}.$$

Por tanto,

$$\sum_{\tilde{j}_0=0}^{[n/q]} \binom{[n/q] - \tilde{j}_0 + m - 1}{m - 1} i_{q\tilde{j}_0+\rho}(K_0) = 1.$$

O escribiéndolo con índice j ,

$$\sum_{j=0}^{[n/q]} \binom{[n/q] - j + m - 1}{m - 1} i_{qj+\rho}(K_0) = 1.$$

En el caso de que $1 \leq n \leq q - 1$, entonces de la igualdad anterior obtenemos que,

$$i_n(K_0) = i_\rho(K_0) = 1.$$

Tomando ahora la sucesión $a_j = i_{qj+\rho}(K_0)$ y $[n/q]$ en vez de n , se cumplen las condiciones del Lema 2.5 y se puede concluir que,

$$i_n(K_0) = (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]}.$$

□

COROLARIO 2.9. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto del plano. Sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserva la orientación. Sea $p \in U$ un punto fijo ni atractor ni repulsor de f (o, más en general, $K_0 \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado*

no atractor ni repulsor de forma trivial). Entonces existen dos enteros $q, r \geq 1$ tales que,

$$i_n(f, K_0) = (-1)^{\lfloor n/q \rfloor} \binom{r-1}{\lfloor n/q \rfloor}.$$

DEMOSTRACIÓN. Le Calvez y Yoccoz, en su artículo [55], prueban que, dado un homeomorfismo local que preserva la orientación, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cualquier punto fijo $\{p\}$ ni atractor ni repulsor existen enteros $q, r \geq 1$ tales que,

$$i_{\mathbb{R}^2}(f^k, \{p\}) = \begin{cases} 1 - rq & \text{si } k \in q\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } k \notin q\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Estos enteros corresponden al número de órbitas periódicas (r) y su período (q) de la función asociada $\overline{f^r}$ sin más que acudir a la referencia [78].

□

Por otra parte obsérvese que

$$(9) \quad i_{\mathbb{R}^2}(f^q, \{p\}) = 1 - rq.$$

Si aplicamos sobre f^{rq} el teorema 2.6 obtendríamos,

$$i_n(f^q, \{p\}) = (-1)^n \binom{rq-1}{n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

EJEMPLO 2. Veamos ahora la aplicación del teorema 2.8 y del corolario 2.9 a un ejemplo concreto. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea un homeomorfismo $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtenido componiendo el homeomorfismo f del ejemplo 1 con una rotación de ángulo $\pi/2$. La aplicación g respondería a una dinámica como la de la figura 2.

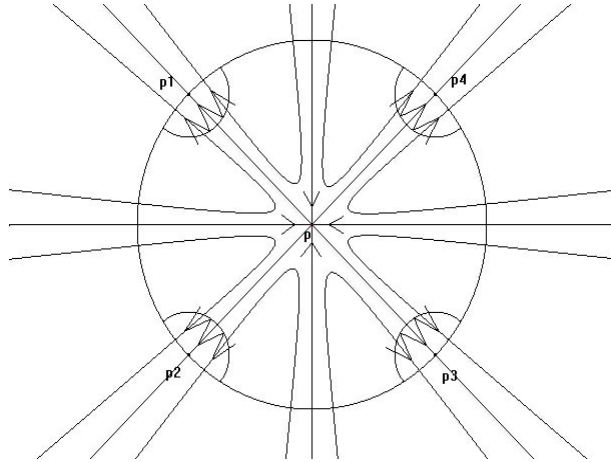


FIGURA 2. Sistema dinámico f cuya $\overline{f^r}$ tiene un punto fijo aislado y una órbita periódica.

En particular el homeomorfismo g posee un punto fijo p aislado como compacto invariante y $\overline{f^i}$ tiene una órbita periódica de periodo 4 más, es decir, en las condiciones del teorema 2.8 y del corolario 2.9 tendríamos $r = 1$ y $q = 4$. Aplicando, pues, dicho teorema se obtendría la siguiente expresión para el índice n -simétrico de g ,

$$i_n(g, \{p\}) = (-1)^{[n/4]} \binom{1-1}{[n/4]} = \begin{cases} +1 & \text{si } n = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$$

También como consecuencia del teorema 2.8 podemos dar una demostración simple del siguiente resultado.

TEOREMA 2.10. (*Le Calvez, Yoccoz [55].*) Sean $F \subset S^2$ un subconjunto finito y $f : S^2 \setminus F \rightarrow S^2 \setminus F$ un homeomorfismo. Entonces f no es minimal, esto es, existe x tal que su órbita completa por f no es densa en S^2 .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f fuera minimal. Podemos extender f a un homeomorfismo de la esfera. Tomando una potencia par y suficientemente grande también podemos suponer que f conserva orientación y $F = \text{Fix}(f)$.

Para cada entero m consideramos $SP_m(S^2)$ y $SP_m(f)$ el homeomorfismo inducido por f . Teniendo en cuenta que cada $p \in F$ es un conjunto invariante aislado que no es atractor ni repulsor, existe m_p tal que $i(SP_k(f), p) = 0$ para cada $k > m_p$.

Así, tomando $m > \prod_{p \in F} m_p$ y usando la propiedad aditiva tenemos que $0 = i(SP_m(f), F) = i(SP_m(f), SP_m(S^2)) = m + 1$ (obsérvese que $SP_m(S^2)$ es homeomorfo a $\mathbb{C}P^m$) y hemos llegado a una contradicción. \square

3. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ es no aislado como compacto invariante

Antes de entrar en materia necesitamos recordar las nociones básicas de la compactificación de Carathéodory. El teorema de de la aplicación conforme de Riemann afirma que se puede transformar de manera conforme todo abierto simplemente conexo del plano en el disco unidad abierto. Carathéodory desarrolló la teoría de finales primos para entender el comportamiento de la transformación conforme cerca de la frontera. Se trata por tanto de una teoría que nació dentro de la variable compleja, pero que ha encontrado bastantes aplicaciones en dinámica y teoría de punto fijo, ver por ejemplo [54] o [72] por citar dos trabajos muy destacados. También se puede utilizar para demostrar resultados topológicos generales (véase [15]) o resultados sobre periodicidad y descomponibilidad (véase [93]).

Sea $B \subset \mathbb{C}$ el disco unidad abierto y sea $f : B \rightarrow G \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ una función conforme y sobreyectiva. El problema de si f admite una extensión continua a $cl(B) = B \cup S^1$, definiendo $f(z) = \lim_{x \rightarrow z} f(x)$

para $z \in S^1$, tiene una respuesta topológica. Se tiene que f admite una extensión si y solo si ∂G es localmente conexo. El problema de si f tiene una extensión inyectiva posee, a su vez, otra respuesta de naturaleza topológica: f tiene una extensión inyectiva si y solo si ∂G es una curva de Jordan (ver el teorema de Carathéodory en [73]). Si ∂G es localmente conexo pero no una curva de Jordan, existen puntos de ∂G que poseen varias preimágenes. La situación se torna mucho más complicada si ∂G no es localmente conexo. Carathéodory introdujo la noción de final primo para describir este caso. Los puntos $z \in S^1$ se corresponden uno a uno a los finales primos de G y el límite $f(z)$ existe si y solo si el final primo *contiene* solo un punto (ver [73]).

Sea $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto simplemente conexo conteniendo al punto del infinito tal que $\partial \mathfrak{D}$ contiene más de un punto. Entonces $\partial \mathfrak{D}$ es acotado. Una *cortadura* es un arco simple, C , dentro de \mathfrak{D} , exceptuando sus extremos. Si C es una cortadura de \mathfrak{D} entonces $\mathfrak{D} \setminus C$ está formado exactamente por dos componentes A_1 y A_2 tales que $\mathfrak{D} \cap \partial(A_1) = \mathfrak{D} \cap \partial(A_2) = C \setminus \{ \text{puntos finales} \}$.

Una sucesión $\{C_n\}$ de cortaduras mutuamente disjuntas y tal que cada C_n separa C_{n-1} y C_{n+1} se denomina una *cadena*. Una cadena de cortaduras induce una cadena de dominios encajados (acotados por cada C_n) $\dots D_{n+1} \subset D_n \dots$. Cada cadena de cortaduras define un *final*. Dos cadenas de cortaduras, $\{C_n\}$ y $\{C'_n\}$, son *equivalentes* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m(n)$ tal que $D_m \subset D'_n$ y $D'_m \subset D_n$ para cada $m > m(n)$. Diremos que cadenas equivalentes de cortaduras inducen el mismo final. Si P y Q son finales representados por cadenas de cortaduras $\{C(P)_n\}$ y $\{C(Q)_n\}$ tal que para cada n , $D(P)_m \subset D(Q)_n$ si $m > m(n)$ diremos que P *divide* Q . Un *final primo* P es un final que no puede ser dividido por ningún otro.

Sea P un final primo. El *conjunto de puntos de P* es la intersección $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{cl}(D(P)_n)$ donde $\{D(P)_n\}$ es una sucesión de dominios acotados por cualquier sucesión de cortaduras que represente P . Un *punto principal* de P es un punto límite de una cadena de cortaduras que representa a P con diámetros tendiendo a 0. El conjunto $H_P \subset E$ de puntos principales de un final primo P es un continuo (conjunto compacto y conexo) (ver [18] o [19] para más detalles).

Cada cadena de cortaduras que induce un final primo P determina una base de entornos de P . Obtenemos, de esta forma, una topología en el conjunto de los finales primos de \mathfrak{D} . De manera más precisa, si \mathbb{P} es el conjunto de finales primos de \mathfrak{D} y \mathfrak{D}^* es la unión disjunta de \mathfrak{D} y \mathbb{P} , podemos definir una topología en \mathfrak{D}^* de tal manera que dicho conjunto sea homeomorfo al disco cerrado y su borde esté compuesto por los finales primos. Basta con definir una base de entornos del final primo $P \in \mathbb{P}$. Dada una sucesión de dominios $\{D(P)_n\}$, producimos una base de entornos $\{U_n\}$ de P en \mathfrak{D}^* . Cada U_n está formado por los

puntos en $D(P)_n$ y por los finales primos Q tales que $D(Q)_m \subset D(P)_n$ para m suficientemente grande.

Si S^2 es la esfera bidimensional $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ y $\infty \in \mathfrak{D} \subset S^2$ es un dominio abierto simplemente conexo, la compactificación natural, debida a Carathéodory, ver [18], de \mathfrak{D} obtenida adjuntando a \mathfrak{D} un conjunto homeomorfo a la esfera unidimensional S^1 se denomina *la compactificación de finales primos de \mathfrak{D}* . Identificamos $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ y consideramos un homeomorfismo conforme $g : \mathfrak{D} \rightarrow S^2 \setminus B$ (donde B es el disco $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$). Ahora la esfera unidimensional S^1 se adjunta a \mathfrak{D} usando g . Cada punto de S^1 se corresponde con un final primo de \mathfrak{D} .

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo. Sea p un punto fijo no aislado como compacto invariante de f que no sea límite de órbitas periódicas. En estas condiciones no podemos emplear las técnicas de índice de Conley consideradas en secciones anteriores. Haremos uso de la teoría de finales primos para solventar este problema.

Tomemos un disco cerrado J centrado en p suficientemente pequeño. Si p no es aislado, $\text{Inv}(f, J) = K$ es un compacto que toca a la frontera de J . Sea K_0 la componente conexa de K que contiene a p . Es inmediato comprobar que K_0 no descompone el plano y por tanto se puede aplicar la construcción de Carathéodory a $\mathbb{R}^2 \setminus K_0$. De esta forma obtenemos un disco cerrado $\bar{\mathbb{D}}$.

Consideremos $D \subset \mathbb{R}^2$ un disco abierto tal que $K \subset J \subset U \subset D$ de tal manera que todas las órbitas periódicas de período $\leq n$ estén contenidas en $D^c \cup K$.

Es bien conocido, ver [54] o [79], que se puede suponer que los puntos fijos, o más generalmente órbitas periódicas, de la extensión de f en \mathbb{P} son un conjunto finito y cada una de ellas ahora es un compacto invariante aislado, en la compactificación $\bar{\mathbb{D}}$.

En consecuencia tenemos tres posibles tipos de finales primos fijos, representados en la figura 3, según sean sus bloques aislantes y sus filtraciones asociadas.

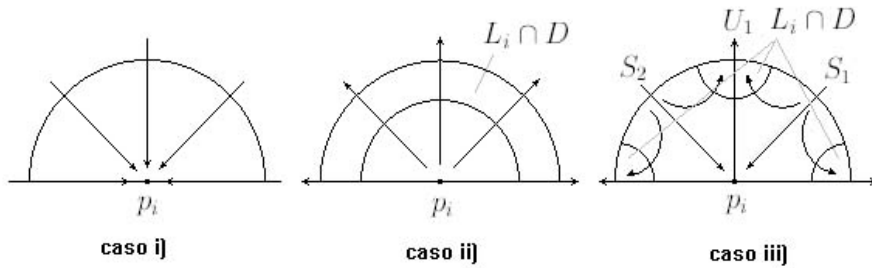


FIGURA 3. Tipos de órbitas que surgen después de aplicar la compactificación de Carathéodory.

A lo largo de esta sección utilizaremos un hecho conocido (ver las referencias [31], [51] y [87]): aplicando la definición de número de Lefschetz y de la característica de Euler tenemos que,

$$\Lambda(id) = \chi(X),$$

siendo X un ANR e $id : X \rightarrow X$ la aplicación identidad en X . Más generalmente, para cualquier aplicación continua $f : X \rightarrow X$ homótopa a la identidad tenemos que,

$$\Lambda(f) = \chi(X).$$

En particular, todo homeomorfismo plano que conserve la orientación es homótopo a la identidad.

A partir del teorema de Lefschetz-Hopf aplicado al n -producto simétrico de la esfera y de la compactificación de Carathéodory, $\overline{\mathbb{D}}$, de $S^2 \setminus K_0$ se tiene que,

$$i_n(D^c \cup K_0) = \Lambda(SP_n(f)) = \chi(SP_n(S^2)).$$

Acudiendo por ejemplo a la referencia [1] sabemos que,

$$SP_n(S^2) \text{ es homeomorfo a } \mathbb{C}P^n.$$

Por tanto,

$$\chi(SP_n(S^2)) = \chi(\mathbb{C}P^n).$$

El hecho de que los grupos de homología $H_k(\mathbb{C}P^n)$ sean todos cero excepto aquellos que corresponden a los valores pares de k , con $1 \leq k \leq 2n$, que son iguales a \mathbb{Z} , podemos escribir,

$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1.$$

Juntando todo lo anterior concluimos,

$$(10) \quad i_n(D^c \cup K_0) = \chi(SP_n(S^2)) = \chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1.$$

Por otra parte, considerando un entorno suficientemente pequeño $U \subset D$ de los finales primos periódicos que hayan podido surgir,

$$(11) \quad i_n(D^c \cup U) = \Lambda(SP_n(f)) = \chi(SP_n(\overline{\mathbb{D}})) = 1$$

La última igualdad es consecuencia de que $\overline{\mathbb{D}}$ y por tanto $SP_n(\overline{\mathbb{D}})$ son contractibles (véase [1]).

Usando (10) y (11), y aplicando la propiedad aditiva resultaría,

$$(12) \quad \begin{cases} \sum_{j=0}^n i_j(K_0) \cdot i_{n-j}(D^c) = n + 1. \\ \sum_{j=0}^n i_j(U) \cdot i_{n-j}(D^c) = 1. \end{cases}$$

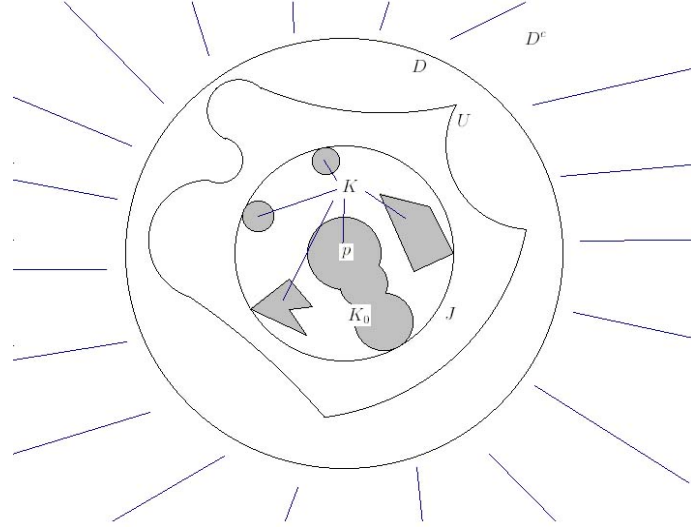


FIGURA 4. Situación antes de la compactificación de Carathéodory.

Restando las dos ecuaciones anteriores,

$$(13) \quad i_n(K_0) - i_n(U) + \sum_{j=1}^{n-1} [i_{n-j}(K_0) - i_{n-j}(U)] \cdot i_j(D^c) = n.$$

A partir de esta igualdad en n y en $n + 1$ vamos a obtener una fórmula abreviada para $i_n(K_0)$. Tenemos,

$$i_n(K_0) - i_n(U) + \sum_{j=1}^{n-1} [i_{n-j}(K_0) - i_{n-j}(U)] \cdot i_j(D^c) = n$$

$$i_{n+1}(K_0) - i_{n+1}(U) + \sum_{j=1}^n [i_{n+1-j}(K_0) - i_{n+1-j}(U)] \cdot i_j(D^c) = n + 1.$$

Restando las dos ecuaciones,

$$\begin{aligned} & i_{n+1}(K_0) - i_n(K_0) - i_{n+1}(U) + i_n(U) + [i_1(K_0) - i_1(U)] \cdot i_n(D^c) \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} [i_{n+1-j}(K_0) - i_{n+1-j}(U) - i_{n-j}(K_0) + i_{n-j}(U)] \cdot i_j(D^c) = 1. \end{aligned}$$

Como, haciendo $n = 1$ en la ecuación (13),

$$(14) \quad [i_1(K_0) - i_1(U)] = 1,$$

si usamos también la segunda ecuación de (12), se obtiene,

$$(15) \quad \begin{aligned} & i_{n+1}(K_0) - i_n(K_0) - i_{n+1}(U) \\ & + \sum_{j=1}^n [i_{n+1-j}(K_0) - i_{n+1-j}(U) - i_{n-j}(K_0)] \cdot i_j(D^c) = 0. \end{aligned}$$

LEMA 2.11. Sean dos sucesiones $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$ cumpliendo que $a_1 = 0$ y $0 = a_{n+1} + \sum_{j=1}^n b_j \cdot a_{n+1-j}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,

$$a_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrarlo por inducción en n . Si n es 1, usando el dato $a_1 = 0$ se obtiene,

$$0 = a_2 + b_1 \cdot a_1 = a_2.$$

Supongamos ahora que $a_j = 0$ para todo entero menor o igual que n . Veámoslo para $n + 1$. Basta observar que,

$$0 = a_{n+1} + \sum_{j=1}^n b_j \cdot a_{n+1-j} = a_{n+1} + \sum_{j=1}^n b_j \cdot 0 = a_{n+1}.$$

□

Tomamos,

$$\begin{cases} a_j = i_j(K_0) - i_{j-1}(K_0) - i_j(U) \\ b_j = i_j(D^c). \end{cases}$$

Observando las ecuaciones (14) y (15) se comprueba que las sucesiones definidas anteriormente cumplen el Lema 2.11, por lo que,

$$i_{n+1}(K_0) = i_n(K_0) + i_{n+1}(U).$$

Por inducción tenemos que,

$$(16) \quad i_n(K_0) = 1 + \sum_{j=1}^n i_j(U) = \sum_{j=0}^n i_j(U).$$

Esta es la fórmula que queríamos obtener para $i_n(K_0)$ en función de $i_j(U)$. Ahora bastaría calcular $i_j(U)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e insertar dicho cálculo en (16). Distinguiremos cada uno de los casos en las subsecciones siguientes.

3.1. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ es no aislado como compacto invariante y surgen únicamente puntos fijos de la compactificación de Carathéodory. Es bien conocida la relación entre el número de rotación de la circunferencia de finales primos, cuando aplicamos el proceso de compactificación de Carathéodory, y la aparición de puntos fijos (u órbitas periódicas). El primer autor que estableció dicha relación fue Birkhoff (ver [7]). El caso en el que el número de rotación es racional fue investigado por Ortega y Ruiz del Portal en [69] mientras que un estudio del caso en el que el número de rotación es irracional es llevado a cabo por Hernández Corbato en [41].

En las condiciones de la sección anterior, vamos a suponer en primer lugar que el homeomorfismo inducido en la circunferencia de finales primos tiene puntos fijos (es decir, tiene número de rotación 0).

Obsérvese que si no aparecen finales primos fijos (u órbitas periódicas) -por ejemplo si en la circunferencia de finales primos tenemos una rotación irracional- el problema es trivial. En efecto, $i_n(K_0) = 1 + \sum_{j=1}^n i_j(U) = 1$ para cada n porque podemos tomar $U = \emptyset$.

Por tanto vamos a detenernos primero en el estudio de la existencia de finales primos fijos para, a continuación, estudiar qué ocurre si aparecen órbitas periódicas.

Recordamos nuevamente que supondremos que el conjunto de finales primos fijos o periódicos es finito. Ya comentamos anteriormente que esto no supone pérdida de generalidad alguna porque identificando intervalos a puntos si fuera preciso siempre podemos trabajar en esas hipótesis ([54] y [79]).

3.1.1. Caso en el que todos los finales primos fijos, surgidos de la compactificación de Carathéodory, son atractores o repulsores. Supongamos que tenemos $2a$ puntos fijos surgidos de la compactificación de Carathéodory que son de los tipos i) e ii) con a atractores y a repulsores. Observemos que los puntos atractores también lo serán para la restricción a la circunferencia de finales primos y por tanto tendremos un número par de finales primos fijos $2a$ con a atractores y a repulsores.

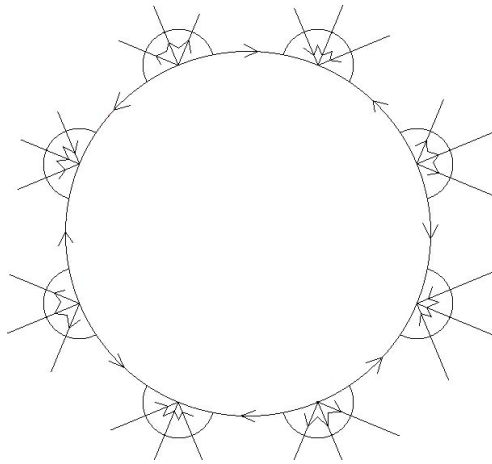


FIGURA 5. Caso en el que, después de la compactificación de Carathéodory, aparecen solamente atractores y repulsores.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo sobre su imagen. Sea p un punto fijo no aislado de f . Queremos calcular una fórmula para $i_n(K_0) = i_n(p)$ donde $K_0 \subset U$ es la componente conexa de $Inv(f, J)$ que contiene a p , para algún disco J suficientemente pequeño que contenga a p .

Para los cálculos solo tendremos en cuenta los atractores dado que en los repulsores tendremos exactamente una región de salida y por lo tanto todos los índices son triviales.

Supongamos que $\cup_{s=1}^a K_s \subset U$, K_s un conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo al punto fijo p_s con $s = 1, \dots, a$ siendo cada K_s intervalos y U unión de semidiscos abiertos (interiores de bloques aislantes). Queremos aplicar la igualdad (16), a saber,

$$i_n(K_0) = 1 + \sum_{j=1}^n i_j(U) = \sum_{j=0}^n i_j(U).$$

Por tanto, necesitamos calcular $i_j(U)$ para $j = 1, \dots, n$. Sean $\{p_1, \dots, p_a\}$ los a puntos fijos atractores. Usando la propiedad aditiva generalizada, demostrada en la proposición 1.10, y el hecho de que los p_s son atractores $\forall s = 1, \dots, a$ (es decir, que $i_{j_s}(K_s) = 1$ para todo $j_s = 0, 1, \dots$ y para todo $s \in \{1, \dots, a\}$),

$$\begin{aligned} i_j(U) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^a j_s=j}}^j i_{j_1}(K_1) \dots i_{j_a}(K_a) \\ &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^a j_s=j}}^j 1. \end{aligned}$$

Utilizando el concepto de combinación con repetición queremos meter j bolas en a urnas de modo que pueda haber repetición. Entonces,

$$\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^a j_s=j}}^j 1 = \binom{j+a-1}{j} = \binom{j+a-1}{a-1}.$$

Juntando las dos cosas,

$$(17) \quad i_j(U) = \binom{j+a-1}{a-1}.$$

Retomando el cálculo de $i_n(K_0)$, si usamos la ecuación (16) combinada con la fórmula (17),

$$(18) \quad i_n(K_0) = \sum_{j=0}^n \binom{j+a-1}{a-1},$$

LEMA 2.12. *Sea un entero positivo a . Sea la sucesión,*

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^n \binom{j+a-1}{a-1} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Entonces,

$$(19) \quad \alpha_n = \binom{a+n}{a} \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacer la prueba por inducción en n . Supongamos que $n = 0$. Entonces,

$$\alpha_0 = \sum_{j=0}^0 \binom{j+a-1}{m-1} = \binom{a-1}{a-1} = \binom{a+0}{a}.$$

Supongamos que la fórmula (19) es cierta para todo entero menor o igual que n . Veámosla para $n+1$,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{j+a-1}{a-1} = \binom{a+n}{a-1} + \sum_{j=0}^n \binom{j+a-1}{a-1} \\ &= \binom{a+n}{a-1} + \binom{a+n}{a} = \binom{a+n+1}{a}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. \square

Utilizando ahora este Lema 2.12 podemos reducir la fórmula (18) y obtener,

$$(20) \quad i_n(K_0) = \binom{a+n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

que es la fórmula buscada para el índice n -simétrico del homeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ en $\{p\}$ punto fijo no aislado, en caso de que al realizar la compactificación de Carathéodory surjan $2a$ puntos fijos, a atractores y a repulsores.

3.1.2. Caso en el que ninguno de los finales primos fijos, surgidos en la compactificación de Carathéodory, sean ni atractores ni repulsores. Supongamos que tenemos r puntos fijos $\{p_1, \dots, p_r\}$ surgidos de la compactificación de Carathéodory que no son atractores ni repulsores (puntos fijos de tipo iii), cada uno con m_j regiones de salida positivamente invariantes. Sea U un entorno abierto de esos r finales primos fijos y K_j un intervalo compacto, invariante y aislado conteniendo al punto fijo p_s , con $s = 1, \dots, r$, y cumpliéndose $\cup_{s=1}^r K_s \subset U$. Nuevamente podemos suponer que U es una unión de semidiscos abiertos (interiores de bloques aislantes).

Aplicando la propiedad aditiva generalizada, demostrada en la proposición 1.10, obtenemos,

$$i_n(U) = \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=n}}^n i_{j_1}(K_1) \dots i_{j_r}(K_r).$$

Del proceso de compactificación de Carathéodory podemos descomponer cada K_s en m_s ciclos de periodo 1, para $s = 1, \dots, r$ por lo que,

$$i_1(K_s) = i(K_s) = 1 - m_s \quad \forall s = 1, \dots, r.$$

Entonces, usando la fórmula del Teorema 2.6,

$$i_n(K_s) = (-1)^n \binom{m_s - 1}{n} \quad \forall \begin{cases} n = 1, 2, \dots \\ s = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Introduciendo esto en la propiedad aditiva para $i_n(U)$ se queda,

$$(21) \quad i_n(U) = \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=n}}^n (-1)^{j_1} \binom{m_1 - 1}{j_1} \dots (-1)^{j_r} \binom{m_r - 1}{j_r}.$$

Para reducir esta fórmula usaremos el siguiente,

LEMA 2.13. Sean $N, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,

$$\sum_{j=0}^N \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{N-j} = \binom{\alpha + \beta}{N}.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos inducción en α . Supongamos que $\alpha = 1$. Entonces,

$$\sum_{j=0}^N \binom{1}{j} \binom{\beta}{N-j} = \binom{\beta}{N} + \binom{\beta}{N-1} = \binom{1 + \beta}{N}.$$

Supongamos que la fórmula del lema se cumple para todo entero menor que α . Veámoslo para α . Usando la propiedad de los números combinatorios y la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{N-j} &= \sum_{j=0}^N \binom{\alpha-1}{j} \binom{\beta}{N-j} + \sum_{j=1}^N \binom{\alpha-1}{j-1} \binom{\beta}{N-j} \\ &= \binom{(\alpha-1) + \beta}{N} + \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\alpha-1}{j} \binom{\beta}{(N-1)-j} \\ &= \binom{(\alpha-1) + \beta}{N} + \binom{(\alpha-1) + \beta}{N-1} = \binom{\alpha + \beta}{N}. \end{aligned}$$

□

COROLARIO 2.14. Sea $r \in \mathbb{N}$. Sean $\alpha_s \in \mathbb{Z}^+$ con $s = 1, \dots, r$. Entonces,

$$\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=N}}^N \binom{\alpha_1}{j_1} \dots \binom{\alpha_r}{j_r} = \binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}{N}.$$

DEMOSTRACIÓN. Lo demostraremos por inducción en r . Si $r = 2$ aplicando el lema 2.13 con $\alpha = \alpha_1$ y $\beta = \alpha_2$ la fórmula del enunciado del corolario es cierta. Supongamos que es cierta para todo entero positivo menor que r . Demostrémosla para r . Aplicando la hipótesis de inducción y el lema 2.13,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=N}}^N \binom{\alpha_1}{j_1} \cdots \binom{\alpha_r}{j_r} &= \sum_{j_r=0}^N \left(\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^{r-1} j_s=N-j_r}}^{N-j_r} \binom{\alpha_1}{j_1} \cdots \binom{\alpha_{r-1}}{j_{r-1}} \right) \binom{\alpha_r}{j_r} \\ &= \sum_{j_r=0}^N \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}}{N-j_r} \binom{\alpha_r}{j_r} \\ &= \binom{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r}{N}. \end{aligned}$$

□

Aplicando el corolario 2.14 y continuando con (21),

$$\begin{aligned} (22) \quad i_n(U) &= (-1)^n \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=n}}^n \binom{m_1-1}{j_1} \cdots \binom{m_r-1}{j_r} \\ &= (-1)^n \binom{\sum_{s=1}^r (m_s-1)}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(23) \quad i_j(U) = (-1)^j \binom{e}{j} \quad \text{con } e = \sum_{s=1}^r (m_s-1).$$

Acudiendo ahora a la fórmula 16,

$$(24) \quad i_n(K_0) = \sum_{j=0}^n i_j(U) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{e}{j},$$

que es la fórmula buscada para $i_n(K_0)$ en caso de que al realizar el proceso de compactificación de Carathéodory surjan r finales primos que corresponden a puntos fijos ni atractores ni repulsores, cada uno con m_s regiones de salida positivamente invariantes. Esta fórmula se puede reducir un poco si usamos el siguiente,

LEMA 2.15. Sean $n, e \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{e}{j} = (-1)^n \binom{e-1}{n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en n . Si $n = 1$,

$$\sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{e}{j} = 1 - e = (-1)^1 \binom{e-1}{1}.$$

Supongamos que la igualdad del enunciado se cumple para todo entero positivo menor que n . Veámosla para n . Usando esta hipótesis de inducción sale,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{e}{j} &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{e}{j} + (-1)^n \binom{e}{n} \\ &= (-1)^{n-1} \binom{e-1}{n-1} + (-1)^n \binom{e}{n} = (-1)^n \binom{e-1}{n}. \end{aligned}$$

□

Aplicando el lema 2.15 a la ecuación (24) se queda,

$$(25) \quad i_n(K_0) = (-1)^n \binom{e-1}{n} \quad \text{con } e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1),$$

que es la fórmula buscada para el índice n -simétrico del homeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ en $\{p\}$ punto fijo no aislado como compacto invariante, en caso de que al realizar la compactificación de Carathéodory surjan r finales primos que corresponden a r puntos fijos ni atractores ni repulsores, cada uno con m_s regiones de salida positivamente invariantes, $s = 1, \dots, r$.

Como consecuencia interesante, se puede obtener el siguiente corolario.

COROLARIO 2.16. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserva orientación. Sea p un punto fijo no aislado como compacto invariante de f . Supongamos que al realizar la compactificación de Carathéodory, de la componente conexa K_0 de $\text{Inv}(f, J)$ que contiene a p , nacen finales primos fijos $\{p_1, \dots, p_r\}$ que no son ni atractores ni repulsores, teniendo m_s regiones de salida positivamente invariantes para cada $s = 1, \dots, r$. Sea $e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1)$. Entonces,*

$$i_n(K_0) = i_n(p) = 0 \quad \forall n \geq e.$$

DEMOSTRACIÓN. En el caso de que $n \geq e$, acudiendo a la fórmula (24) obtenemos,

$$i_n(K_0) = \sum_{j=0}^n i_j(U) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{e}{j} = \sum_{j=0}^e (-1)^j \binom{e}{j} = (1-1)^e = 0.$$

□

3.1.3. *Caso general.* Supongamos que entre los finales primos fijos surgidos de la compactificación de Carathéodory tenemos a atractores, b repulsores y r ni atractores ni repulsores, cada uno con m_s regiones de salida positivamente invariantes, $s = 1, \dots, r$. Esto es, tenemos finales primos fijos de los tipos i), ii) y iii). Sea U un entorno abierto de todos esos puntos fijos donde $U = U_1 \cup U_2$, U_1 es un entorno abierto de los puntos fijos atractores y repulsores y U_2 es un entorno abierto de los puntos fijos ni atractores ni repulsores. Tanto U_1 como U_2 son uniones de semidiscos abiertos.

Aplicando la propiedad aditiva se tiene:

$$i_n(U) = \sum_{j=0}^n i_{n-j}(U_1) \cdot i_j(U_2).$$

Usando la fórmula (17) para $i_{n-j}(U_1)$ y la fórmula (23) para $i_j(U_2)$ obtenidas anteriormente,

$$i_{n-j}(U_1) = \binom{n-j+a-1}{a-1},$$

$$i_j(U_2) = (-1)^j \binom{e}{j} \quad e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1),$$

se queda que,

$$(26) \quad i_n(U) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-j+a-1}{a-1} \binom{e}{j} \quad e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1).$$

LEMA 2.17. *Sea la sucesión doble,*

$$R(a, n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-j+a-1}{a-1} \binom{e}{j} \quad a, n, e \in \mathbb{Z}^+.$$

Entonces,

$$R(a, n) = \begin{cases} \binom{a-e+n-1}{n} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^n \binom{e-a}{n} & \text{si } e > a. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrarlo por inducción sobre $a+n$ de una manera análoga a la que usamos para probar el Lema 2.5. Empecemos por demostrar que,

$$(27) \quad R(a+1, n+1) = R(a+1, n) + R(a, n+1)$$

$\forall a, n \in \mathbb{Z}^+$. Sea,

$$R(a+1, n+1) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+a+1}{a} \binom{e}{j}.$$

Usando la igualdad combinatoria,

$$\binom{n-j+a+1}{a} = \binom{n-j+a}{a} + \binom{n-j+a}{a-1},$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} R(a+1, n+1) &= \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+a}{a} \binom{e}{j} + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+a}{a-1} \binom{e}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-j+a}{a} \binom{e}{j} + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n-j+a}{a-1} \binom{e}{j} \\ &= R(a+1, n) + R(a, n+1). \end{aligned}$$

De modo que es cierta la fórmula (27). De hecho, sustituyendo en la fórmula anterior $a+1$ por $a+\lambda$ y $n+1$ por $n+\mu$, con $\lambda \in \{-(a-1), \dots, 0, \dots, a-1\}$ y $\mu \in \{-(n-1), \dots, 0, \dots, n-1\}$,

$$(28) \quad R(a+\lambda, n+\mu) = R(a+\lambda, n+\mu-1) + R(a+\lambda-1, n+\mu).$$

Ahora, para demostrar el enunciado del lema, aplicamos inducción sobre $a+n$.

Supongamos primero que $a+n=2$. Solo hay un caso $a=1$ y $n=1$ (ya tratamos el caso $a=0$ en la subsección 3.1.2). Entonces, de la definición de $R(a, n)$ del enunciado del lema,

$$\begin{aligned} R(1, 1) &= \sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{1-j+1-1}{1-1} \binom{e}{j} = \binom{e}{0} - \binom{e}{1} = 1 - e = \\ &= \begin{cases} \binom{1-e+1-1}{1} & \text{si } e \leq 1 \\ (-1)^1 \binom{e-1}{1} & \text{si } e > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Supongamos que la tesis del enunciado del Lema se cumple para todo entero menor o igual que $a+n+1$. Veámosla para $a+n+2$. Aplicando la hipótesis de inducción al miembro derecho de la fórmula (28) suponiendo que $\lambda+\mu=2$,

$$\begin{aligned} R(a+\lambda, n+\mu) &= \\ &= \begin{cases} \begin{cases} \binom{(a+\lambda)-e+(n+\mu-1)-1}{n+\mu-1} \\ + \binom{(a+\lambda-1)-e+(n+\mu)-1}{n+\mu} \end{cases} & \text{si } e \leq a+\lambda \\ \begin{cases} (-1)^{n+\mu-1} \binom{e-(a+\lambda)}{n+\mu-1} \\ + (-1)^{n+\mu} \binom{e-(a+\lambda-1)}{n+\mu} \end{cases} & \text{si } e > a+\lambda. \end{cases} \end{aligned}$$

Usando ahora las fórmulas,

$$\begin{aligned} & \binom{(a+\lambda) - e + (n+\mu) - 1}{n+\mu-1} \\ & + \binom{(a+\lambda-1) - e + (n+\mu) - 1}{n+\mu} = \binom{(a+\lambda) - e + (n+\mu) - 1}{n+\mu} \\ & (-1)^{n+\mu-1} \binom{e - (a+\lambda)}{n+\mu-1} \\ & + (-1)^{n+\mu} \binom{e - (a+\lambda-1)}{n+\mu} = (-1)^{n+\mu} \binom{e - (a+\lambda)}{n+\mu}. \end{aligned}$$

Obtenemos,

$$R(a+\lambda, n+\mu) = \begin{cases} \binom{(a+\lambda) - e + (n+\mu) - 1}{n+\mu} & \text{si } e \leq a+\lambda \\ (-1)^{n+\mu} \binom{e - (a+\lambda)}{n+\mu} & \text{si } e > a+\lambda, \end{cases}$$

que es justo lo que se quería demostrar. \square

Aplicando este Lema a la fórmula (26),

$$i_n(U) = \begin{cases} \binom{a - e + n - 1}{n} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^n \binom{e - a - 1}{n} & \text{si } e > a. \end{cases}$$

De la fórmula obtenida en la ecuación (16) se deduce que,

$$(29) \quad i_n(K_0) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n \binom{a - e + j - 1}{j} & \text{si } e \leq a \\ \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{e - a - 1}{j} & \text{si } e > a. \end{cases}$$

Reduzcamos un poco esta fórmula.

LEMA 2.18. Sean $n, N \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,

$$\sum_{j=0}^n \binom{N+j-1}{j} = \binom{N+n}{n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando una de las propiedades de los números combinatorios,

$$\binom{N+j-1}{j} = \binom{N+j}{j} - \binom{N+j-1}{j-1},$$

y haciendo un cambio de índice en la segunda suma,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{N+j-1}{j} &= \sum_{j=0}^n \binom{N+j}{j} - \sum_{j=1}^n \binom{N+j-1}{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{N+j}{j} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{N+j}{j} \\ &= \binom{N+n}{n}. \end{aligned}$$

□

Aplicando el lema 2.18 a la primera suma de la igualdad (29) tomando $N = a - e$ y usando el lema 2.15, sin más que sustituir e por $e - a$, para reducir la segunda suma de la igualdad (29), queda,

$$(30) \quad i_n(K_0) = \begin{cases} \binom{a-e+n}{n} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^n \binom{e-a-1}{n} & \text{si } e > a, \end{cases}$$

que es la fórmula buscada para el caso general: al considerar la compactificación de Carathéodory obtenemos $a + b + r$ finales primos fijos que corresponden a a puntos fijos atractores, b puntos fijos repulsores y r puntos fijos ni atractores ni repulsores, siendo,

$$e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1),$$

y m_s , con $s = 1, \dots, r$, el número de regiones de salida positivamente invariantes de cada uno de los puntos fijos ni atractores ni repulsores.

Este resultado puede ser interpretado dinámicamente. En [79] se da una definición de ramas estables e inestables así como de pétalos atractores y repulsores para puntos fijos de homeomorfismos del plano que no son aislados como compacto invariante. Esta definición depende del disco J que se elija. En efecto, el número de pétalos atractores (repulsores) y de ramas estables (inestables) puede variar si consideramos dos discos J y J' distintos porque los compactos K_0 y K'_0 que se explotan son diferentes. En [79] se dan ejemplos de este fenómeno.

Sin embargo, la diferencia,

pétalos atractores-ramas estables =

pétalos repulsores-ramas inestables,

es constante, solo depende del germen del homeomorfismo.

Denotemos por a (b) el número de pétalos atractores (repulsores) y por e (u) el de ramas estables (inestables).

En [79] se demuestra también que los enteros a y e del resultado anterior, se corresponden precisamente con la cantidad de pétalos atractores y ramas estables y también que $a - e = b - u$.

En consecuencia,

$$i_n(K_0) = \begin{cases} \binom{a - e + n}{n} = \binom{b - u + n}{n} & \text{si } e \leq a (u \leq b) \\ (-1)^n \binom{e - a - 1}{n} = (-1)^n \binom{u - b - 1}{n} & \text{si } e > a (u > b). \end{cases}$$

Para exponer esto de una forma más clara, aunque no recordemos aquí las definiciones precisas de [79] que nos llevarían quizás demasiado lejos, vamos a identificar los elementos del resultado anterior en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3. Veamos ahora la aplicación de la fórmula (30) a un ejemplo concreto en el que, al considerar la compactificación de Carathéodory, el número de puntos fijos atractores es menor que el número de regiones de salida positivamente invariantes de los puntos fijos ni atractores ni repulsores. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea un homeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que responda a una dinámica como la de la figura 6.

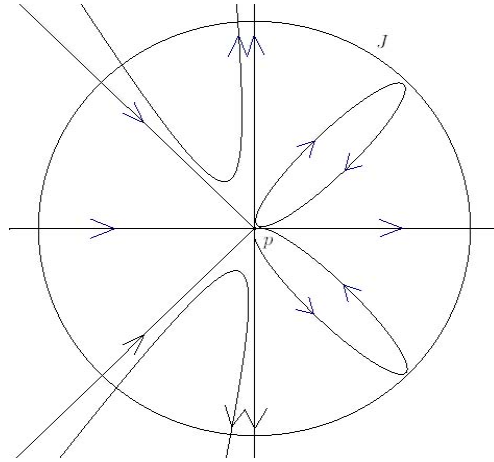


FIGURA 6. Sistema dinámico con un punto fijo no aislado y más regiones de salida positivamente invariantes que puntos fijos atractores después de aplicar Carathéodory.

Consideremos el disco J de la figura y K_0 el compacto invariante maximal contenido en J . Obviamente $K_0 \cap \partial(J) \neq \emptyset$. Al considerar la compactificación de Carathéodory de $\mathbb{S}^2 \setminus K_0$ la dinámica sería como la de la figura 7.

En particular, del proceso de compactificación de Carathéodory no surgiría ningún punto fijo atractor, es decir, $a = 0$, y surgirían dos

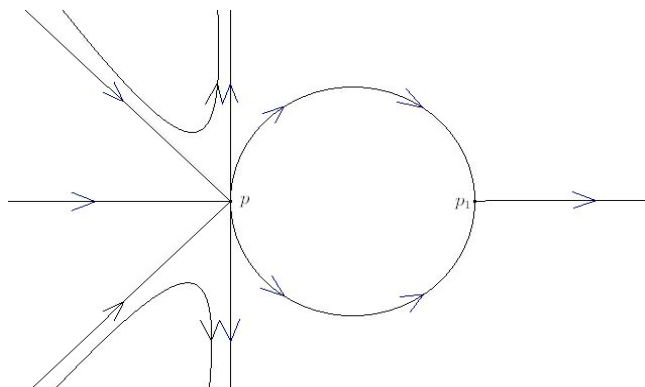


FIGURA 7. Sistema dinámico con un punto fijo aislado ni atractor ni repulsor con dos regiones de salida positivamente invariantes y un punto fijo ni atractor ni repulsor con una región de salida.

puntos fijos ni atractores ni repulsores, uno con una región de salida y el otro con dos regiones de salida positivamente invariantes, es decir, $e = 1$ (que es también el número de ramas estables). Sustituyendo estos valores en la fórmula (30),

$$i_n(f, \{p\}) = (-1)^n \binom{1-0-1}{n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

EJEMPLO 4. Veamos ahora la aplicación de la fórmula (30) a otro ejemplo en el que, después de aplicar la compactificación de Carathéodory, el número de puntos fijos atractores es mayor que el número de regiones de salida, positivamente invariantes, de los finales primos fijos.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea un homeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que responda a una dinámica como la de la figura 8.

Después de aplicar el proceso de compactificación de Carathéodory la dinámica sería como la de la figura 9.

En particular, del proceso de compactificación de Carathéodory surgirían dos puntos fijos atractores $a = 2$ y dos puntos fijos repulsores $b = 2$. Sustituyendo estos valores en la fórmula (30),

$$i_n(f, \{p\}) = \binom{2-0+n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Observemos que en esta situación la sucesión no es acotada.

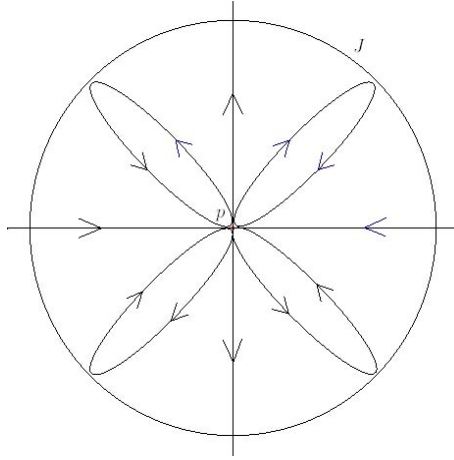


FIGURA 8. Sistema dinámico con un punto fijo no aislado y más puntos fijos atractores que regiones de salida positivamente invariantes después de aplicar Carathéodory.

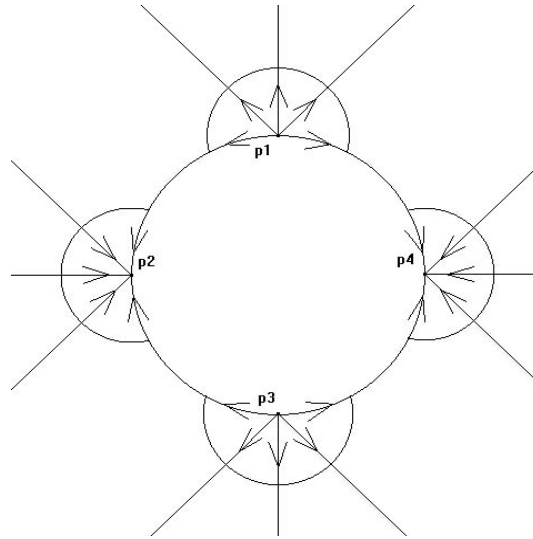


FIGURA 9. Sistema dinámico con un punto fijo aislado ni atracción ni repulsor con dos regiones de salida positivamente invariantes, dos puntos fijos atractores y dos puntos fijos repulsores.

3.2. Cálculo del índice n -simétrico cuando $\{p\}$ no es aislado como compacto invariante y surgen finales primos periódicos en la compactificación de Carathéodory. Caso general. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserve orientación. Sea p un punto fijo de f no aislado como compacto invariante. Queremos calcular una fórmula para $i_n(K_0) = i_n(p)$ donde $K_0 \subset U$ es la componente conexa de $Inv(f, J)$ que contiene a p .

Supongamos que al realizar la compactificación de Carathéodory de $S^2 \setminus K_0$ surgen $r + a + b$ órbitas periódicas: r órbitas ni atractoras ni repulsoras cada una con m_s regiones de salida positivamente invariantes (por f^q), $s = 1, \dots, r$, a órbitas atractoras y b órbitas repulsoras. Nótese que todas las órbitas periódicas han de tener el mismo período.

Sea $U = U_1 \cup \dots \cup U_r$ donde U_j es un entorno abierto que contiene a la órbita ni atractora ni repulsora j con $j = 1, \dots, r$; sea $V = V_{r+1} \cup \dots \cup V_{r+a}$ donde V_j es un entorno abierto que contiene a la órbita atractora j con $j = r + 1, \dots, r + a$; sea $W = W_{r+a+1} \cup \dots \cup W_{r+a+b}$ donde W_j es un entorno abierto que contiene a la órbita repulsora j con $j = r + a + 1, \dots, r + a + b$. Cada uno de estos entornos será unión de semidiscos abiertos, interiores de bloques aislantes para f^q , donde q es el período de las órbitas. Teniendo en cuenta que la dinámica en cada punto periódico es localmente conjugada con la de cualquier otro punto de su órbita, las filtraciones asociadas serán topológicamente equivalentes y por tanto tendremos el mismo número de regiones de salida.

Necesitamos obtener una fórmula abreviada para $i_n(U \cup V \cup W)$, de manera que, usando la expresión (16), hallemos una fórmula reducida para $i_n(K_0) = i_n(p)$. Por la propiedad aditiva,

$$\begin{aligned}
 i_n(U) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=n}}^n i_{j_1}(U_1) \dots i_{j_r}(U_r) \\
 (31) \quad i_n(V) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=r+1}^{r+a} j_s=n}}^n i_{j_{r+1}}(V_{r+1}) \dots i_{j_{r+a}}(V_{r+a}) \\
 i_n(W) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=r+a+1}^{r+a+b} j_s=n}}^n i_{j_{r+a+1}}(W_{r+a+1}) \dots i_{j_{r+a+b}}(W_{r+a+b}).
 \end{aligned}$$

Por tanto, necesitamos calcular $i_{j_s}(U_s)$ para cada $s \in \{1, \dots, r\}$, $i_{j_s}(V_s)$ para cada $s \in \{r + 1, \dots, r + a\}$ y, por último, $i_{j_s}(W_s)$ para cada $s \in \{r + a + 1, \dots, r + a + b\}$, siendo $j_s \in \{0, \dots, n\}$. Para ello tomamos un compacto, invariante y aislado K_s que contenga a la órbita s de manera que se cumple que,

$$\begin{cases} i_{j_s}(U_s) = i_{j_s}(K_s) & s \in \{1, \dots, r\} \\ i_{j_s}(V_s) = i_{j_s}(K_s) & s \in \{r + 1, \dots, r + a\} \\ i_{j_s}(W_s) = i_{j_s}(K_s) & s \in \{r + a + 1, \dots, r + a + b\}, \end{cases}$$

con $j_s \in \{0, \dots, n\}$ para todo $s \in \{1, \dots, r + a + b\}$.

Empezamos calculando $i_n(U)$. Del proceso de compactificación de Carathéodory podemos descomponer cada K_s en ciclos de periodo q ,

para $s = 1, \dots, r$ por lo que,

$$i_n(K_s) = 0 \quad \text{si } q \nmid n.$$

Cada ciclo tiene asociados $m_s \geq 1$ ciclos correspondientes a las regiones de salida positivamente invariantes para f^q . Para el caso en que $q \mid n$ del Teorema 2.8 obtenemos,

$$i_n(K_s) = (-1)^{n/q} \binom{m_s - 1}{n/q} \quad \text{si } q \mid n \quad s = 1, \dots, r.$$

Juntando las dos cosas,

$$i_n(K_s) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \nmid n \\ (-1)^{n/q} \binom{m_s - 1}{n/q} & \text{si } q \mid n \end{cases}$$

$s = 1, \dots, r$. Introduciendo la información anterior en la fórmula (31) obtenida aplicando la propiedad aditiva,

$$\begin{aligned} i_n(U) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=n}}^n i_{j_1}(K_1) \dots i_{j_r}(K_r) \\ &= \sum_{\substack{qj_s=0 \\ \sum_{s=1}^r qj_s=n}}^n i_{qj_1}(K_1) \dots i_{qj_r}(K_r). \end{aligned}$$

Es decir, si $q \nmid n$ entonces la suma es vacía por lo que $i_n(U) = 0$. Supongamos que $q \mid n$. Continuando con la suma anterior,

$$\begin{aligned} i_n(U) &= \sum_{\substack{qj_s=0 \\ \sum_{s=1}^r qj_s=n}}^n i_{qj_1}(K_1) \dots i_{qj_r}(K_r) \\ &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=n/q}}^{n/q} i_{qj_1}(K_1) \dots i_{qj_r}(K_r) \\ &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=1}^r j_s=n/q}}^{n/q} (-1)^{j_1} \binom{m_1 - 1}{j_1} \dots (-1)^{j_r} \binom{m_r - 1}{j_r} \end{aligned}$$

Si aplicamos el corolario 2.14 tomando $N = n/q$ y $\alpha_s = m_s - 1$ con $s = 1, \dots, r$, llegamos a,

$$i_n(U) = (-1)^{n/q} \binom{e}{n/q} \quad \text{con } e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1) \quad \text{y } q \mid n,$$

es decir,

$$(32) \quad i_n(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \nmid n \\ (-1)^{n/q} \binom{e}{n/q} & \text{si } q \mid n, \end{cases}$$

con $e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1)$.

Continuemos con el cálculo de $i_n(V)$. Siendo la órbita s , con $s \in \{r+1, \dots, r+a\}$, una órbita atractora tenemos que,

$$i_n(K_s) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \nmid n \\ 1 & \text{si } q \mid n. \end{cases} \quad s = r+1, \dots, r+a.$$

Introduciendo la información anterior en la fórmula (31) obtenida aplicando la propiedad aditiva,

$$\begin{aligned} i_n(V) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=r+1}^{r+a} j_s=n}}^n i_{j_{r+1}}(K_{r+1}) \dots i_{j_{r+a}}(K_{r+a}) \\ &= \sum_{\substack{qj_s=0 \\ \sum_{s=r+1}^{r+a} qj_s=n}}^n i_{qj_{r+1}}(K_{r+1}) \dots i_{qj_{r+a}}(K_{r+a}). \end{aligned}$$

Es decir, si $q \nmid n$ entonces la suma es vacía por lo que $i_n(V) = 0$. Supongamos que $q \mid n$. Continuando con la suma anterior,

$$\begin{aligned} i_n(V) &= \sum_{\substack{qj_s=0 \\ \sum_{s=r+1}^{r+a} qj_s=n}}^n i_{qj_{r+1}}(K_{r+1}) \dots i_{qj_{r+a}}(K_{r+a}) \\ &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=r+1}^{r+a} j_s=n/q}}^{n/q} i_{qj_{r+1}}(K_{r+1}) \dots i_{qj_{r+a}}(K_{r+a}) \\ &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=r+1}^{r+a} j_s=n/q}}^{n/q} 1. \end{aligned}$$

Basta acudir de nuevo al concepto de combinación con repetición para reducir la suma, si $q \mid n$, a,

$$i_n(V) = \binom{n/q + a - 1}{a - 1},$$

es decir,

$$(33) \quad i_n(V) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \nmid n \\ \binom{n/q + a - 1}{a - 1} & \text{si } q \mid n. \end{cases}$$

Por último, calculemos $i_n(W)$. Siendo la órbita s , $s \in \{r+a+1, \dots, r+a+b\}$, una órbita repulsora, tenemos que,

$$i_n(K_s) = 0 \quad s = r+a+1, \dots, r+a+b.$$

Por tanto, recordando el convenio adoptado en la notación 2,

$$(34) \quad \begin{aligned} i_n(W) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=r+a+1}^{r+a+b} j_s=n}}^n i_{j_{r+a+1}}(K_{r+a+1}) \cdots i_{j_{r+a+b}}(K_{r+a+b}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

De esta manera, si $q \nmid n$, aplicando las expresiones (32), (33), (34),

$$\begin{aligned} i_n(U \cup V \cup W) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+j_2+j_3=n}}^n i_{j_1}(U) \cdot i_{j_2}(V) \cdot i_{j_3}(W) \\ &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+j_2=n}}^n i_{j_1}(U) \cdot i_{j_2}(V) = \sum_{\substack{qj_s=0 \\ qj_1+qj_2=n}}^n i_{qj_1}(U) \cdot i_{qj_2}(V) = 0. \end{aligned}$$

Si $q \mid n$, utilizando de nuevo la propiedad aditiva, aplicando consecutivamente las expresiones (32), (33), (34), y usando el lema 2.17,

$$\begin{aligned} i_n(U \cup V \cup W) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+j_2+j_3=n}}^n i_{j_1}(U) \cdot i_{j_2}(V) \cdot i_{j_3}(W) = \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+j_2=n}}^n i_{j_1}(U) \cdot i_{j_2}(V) \\ &= \sum_{\substack{qj_s=0 \\ qj_1+qj_2=n}}^n i_{qj_1}(U) \cdot i_{qj_2}(V) = \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+j_2=n/q}}^{n/q} i_{qj_1}(U) \cdot i_{qj_2}(V) \\ &= \sum_{j_1=0}^{n/q} (-1)^{j_1} \binom{e}{j_1} \binom{n/q - j_1 + a - 1}{a - 1} \\ &= \begin{cases} \binom{a - e + n/q - 1}{n/q} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{n/q} \binom{e - a}{n/q} & \text{si } e > a \end{cases} \quad \text{si } q \mid n. \end{aligned}$$

En resumidas cuentas,

$$i_n(U \cup V \cup W) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \nmid n \\ \begin{cases} \binom{a - e + n/q - 1}{n/q} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{n/q} \binom{e - a}{n/q} & \text{si } e > a \end{cases} & \text{si } q \mid n, \end{cases}$$

con $e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1)$.

Habiendo obtenido una fórmula para $i_n(U \cup V \cup W)$ aplicamos la igualdad (16), y si $q \mid n$,

$$\begin{aligned} i_n(K_0) &= \sum_{j=0}^n i_j(U \cup V \cup W) = \sum_{qj=0}^n i_{qj}(U \cup V \cup W) = \sum_{j=0}^{[n/q]} i_{qj}(U \cup V \cup W) \\ &= \begin{cases} \sum_{j=0}^{[n/q]} \binom{a-e+j-1}{j} & \text{si } e \leq a \\ \sum_{j=0}^{[n/q]} (-1)^j \binom{e-a}{j} & \text{si } e > a \end{cases} \quad \text{si } q \mid n. \end{aligned}$$

Utilizando el lema 2.18 para la primera suma, tomando $N = a - e$, y el lema 2.15 para la segunda, sustituyendo e por $e - a$,

$$i_n(K_0) = \begin{cases} \binom{a-e+[n/q]}{[n/q]} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{[n/q]} \binom{e-a-1}{[n/q]} & \text{si } e > a \end{cases} \quad \text{si } q \mid n,$$

es decir, que, de la expresión (16),
(35)

$$i_n(K_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \nmid n \\ \begin{cases} \binom{a-e+[n/q]}{[n/q]} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{[n/q]} \binom{e-a-1}{[n/q]} & \text{si } e > a \end{cases} & \text{si } q \mid n. \end{cases}$$

con $e = \sum_{s=1}^r (m_s - 1)$. Esta es la fórmula buscada para $i_n(K_0)$ en el caso de que $\{p\}$ sea un punto fijo no aislado como compacto invariante y, al realizar la compactificación de Carathéodory, surjan $r + a + b$ órbitas periódicas de periodo q divididas en: r órbitas ni atractoras ni repulsoras cada una con m_s regiones de salida positivamente invariantes para f^q , $s = 1, \dots, r$, a órbitas atractoras y b órbitas repulsoras.

COROLARIO 2.19. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto del plano. Sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserva la orientación. Sea $p \in U$ un punto fijo no aislado como compacto invariante de f . Si el número de rotación en la circunferencia de finales primos asociada a la compactificación de Carathéodory de $S^2 \setminus K_0$ es racional, existen enteros no negativos e, a y $q \geq 1$, tales que,*

$$(36) \quad i_n(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \nmid n \\ \begin{cases} \binom{a-e+[n/q]}{[n/q]} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{[n/q]} \binom{e-a-1}{[n/q]} & \text{si } e > a \end{cases} & \text{si } q \mid n. \end{cases}$$

EJEMPLO 5. Veamos ahora la aplicación de la fórmula (36) y del corolario 2.19 a otro ejemplo. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea un homeomorfismo $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que siga una dinámica como la de la figura 10. Después de aplicar el proceso de compactificación de Carathéodory la

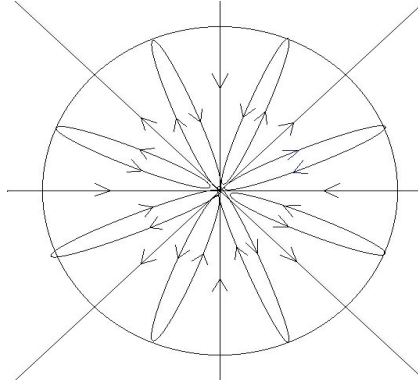


FIGURA 10. Homeomorfismo del plano con un punto fijo no aislado como compacto invariante en el que, después de aplicar Carathéodory aparecerán finales primos correspondientes a órbitas periódicas atractoras y repulsoras.

dinámica sería como la de la figura 11.

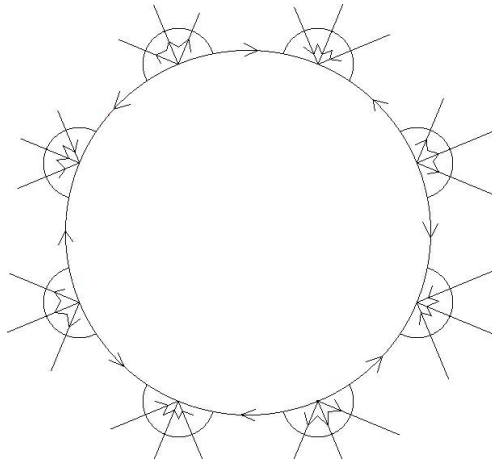


FIGURA 11. Homeomorfismo de plano con un punto fijo aislado como compacto invariante, una órbita atractora y una repulsora surgido de aplicar la compactificación de Carathéodory a otro homeomorfismo del plano con un punto fijo no aislado como compacto invariante.

En particular, del proceso de compactificación de Carathéodory surgiría una órbita atractora ($a = 1$) de periodo 4, una órbita repulsora ($b = 1$) de periodo 4 y ninguna órbita ni atractora ni repulsora ($e = 0$).

Sustituyendo estos valores en la fórmula (36),

$$i_n(g, \{p\}) = \begin{cases} \binom{1 - 0 + [n/4]}{[n/4]} & \text{si } 4 \mid n \\ 1 & \text{si } 4 \nmid n \end{cases} = \begin{cases} [n/4] + 1 & \text{si } 4 \mid n \\ 1 & \text{si } 4 \nmid n. \end{cases}$$

Índice de punto fijo en productos simétricos infinitos

RESUMEN: Sea X un ANR localmente compacto, $U \subset X$ un subconjunto abierto y $f : U \rightarrow f(U) \subset X$ un sistema semidinámico. En este capítulo definiremos el producto simétrico infinito $SP_\infty(X)$ a través de los productos simétricos $SP_n(X)$ presentados en el capítulo 1; dotaremos a $SP_\infty(X)$ de su topología natural y definiremos el sistema semidinámico $SP_\infty(f)$, inducido por f en $SP_\infty(X)$. Definiremos también el índice simétrico infinito para la aplicación $SP_\infty(f)$ en un compacto invariante K . La novedad de este índice simétrico infinito es que lo definimos como una serie formal compleja cuyos coeficientes son los índices n -simétricos. Esta definición es muy cómoda para tratar, por ejemplo, la propiedad aditiva, clave para el cálculo. al ser $SP_\infty(X)$ un espacio de dimensión infinita, en lugar de usar ideas del tipo de Conley, vamos a tratar el problema siguiendo una estrategia más próxima al de la definición del grado de Leray-Schauder (véase [52]) o más cercana aún, a la construcción de extensiones del grado para aplicaciones A-propias, [95], o mediante aproximaciones de Galerkin, [12]. Aunque las definiciones las planteemos en hipótesis generales, los cálculos se realizarán, como en secciones anteriores, para homeomorfismos planos aunque como ya hemos mencionado técnicas similares basadas en resultados recientes permitirían la obtención de resultados en dimensiones superiores.

1. Productos simétricos infinitos: definición, topología y sistemas semidinámicos

Esta sección está dedicada a la definición y propiedades básicas de los productos simétricos infinitos. Estos espacios son interesantes, entre otras cosas, porque los grupos de homología de un espacio X coinciden con los grupos de homotopía de su producto simétrico infinito (véase [1]). En estos espacios podremos recopilar todos los resultados obtenidos en los productos n -simétricos de una manera muy natural.

Dado un compacto invariante de una función continua, definida en un ANR localmente compacto, introduciremos el índice como una serie compleja formal. La propiedad aditiva relacionará la unión disjunta de compactos invariantes con el producto de las series formales asociadas. En cierta manera esta serie representa una generalización de

las funciones zeta asociadas a la sucesión de iteradas de dicha función continua. De esta manera, cuando el compacto invariante es un punto fijo, asociamos a cada germen de una función continua una serie compleja que recoge toda la información conseguida hasta ahora. Estudiaremos algunas propiedades dinámicas que se trasladan naturalmente a las series asociadas. Como en secciones anteriores nos centraremos en el cómputo en el caso de homeomorfismos planos que conservan la orientación. Sin embargo resultados muy recientes, ver [42], permitirían, empleando técnicas similares, realizar el cálculo para aplicaciones continuas arbitrarias en el caso invariante aislado y obtener resultados para homeomorfismos en dimensión 3 (ver también [41]).

Comenzamos recordando la definición de los productos n -simétricos para terminar definiendo los productos simétricos infinitos.

DEFINICIÓN 3.1. (Productos simétricos infinitos) Sea X un ANR localmente compacto. Sea σ una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. En $X^n = X \times X \times \dots \times X$ definimos la siguiente relación de equivalencia,

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists \sigma : (y_1, \dots, y_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Definimos el **producto n -simétrico de X** como,

$$SP_n(X) = X \times X \times \dots \times X / \sim = X^n / \sim.$$

La clase de equivalencia (x_1, \dots, x_n) será denotada por $[x_1, \dots, x_n]$. Usando un punto base $x_0 \in X$ definimos las inclusiones,

$$SP_n(X) \rightarrow SP_{n+1}(X),$$

por

$$[x_1, \dots, x_n] \mapsto [x_0, x_1, \dots, x_n],$$

para $n \geq 1$. Entonces podemos construir la unión,

$$SP_\infty(X) = \bigcup_{n \geq 1} SP_n(X),$$

dotada de la topología de la unión; diremos que $B \subset SP_\infty(X)$ es cerrado si y solo si $B \cap SP_n(X)$ es cerrado para cada $n \geq 1$. Llamaremos $SP_\infty(X)$ **producto simétrico infinito** de X .

De esta manera, los elementos de $SP_\infty(X)$ pueden ser también considerados como n -tuplas desordenadas $[x_1, \dots, x_n]$, donde n es cualquier entero positivo. Entonces $SP_\infty(X)$ se convierte en un espacio de puntos con punto base $0 = [x_0]$. Además, se tiene la inclusión natural $i : X \hookrightarrow SP_\infty(X)$ puesto que $X = SP_1(X)$.

OBSERVACIÓN 3.2. Una definición alternativa del producto simétrico infinito $SP_\infty(X)$ de un espacio X . Primero definimos,

$$\begin{aligned} \oplus X = \{ & (x_1, x_2, \dots) \mid x_j \in X, x_j = * \text{ para todos los} \\ & \text{subíndices } j \in \mathbb{N} \text{ excepto un conjunto finito} \}, \end{aligned}$$

considerado como un conjunto. Dotamos al conjunto $\oplus X$ con la topología colímite inducida por los espacios $\overline{X}^n = \{(x_1, \dots, x_n, *, *, \dots)\}$, que a su vez están dotados de la topología producto. Ahora sea Σ_∞ el grupo de las permutaciones de todos los números naturales. Entonces Σ_∞ actúa sobre $\oplus X$ definiendo $\sigma(x_1, x_2, \dots) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)$ para $\sigma \in \Sigma_\infty$. Finalmente, construimos el espacio de órbitas de esta acción, para obtener $\oplus X / \Sigma_\infty = SP_\infty(X)$

Por supuesto, las dos definiciones coinciden.

2. Índice de punto fijo en productos simétricos infinitos

Sea X un ANR localmente compacto y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Un sistema semidinámico $f : U \rightarrow X$ induce, de una manera natural, otro sistema semidinámico $SP_\infty(f)$, a saber,

$$(37) \quad \begin{aligned} SP_\infty(f) : SP_\infty(U) &\rightarrow SP_\infty(X) \\ [\vec{x}] &\mapsto SP_\infty(f)[\vec{x}] = SP_n(f)[\vec{x}] \quad \text{si } [\vec{x}] \in SP_n(U) \end{aligned}$$

Necesitamos ahora un lema para demostrar que $SP_\infty(f)$ es continua.

LEMA 3.3. Sean (Y_j, \mathfrak{T}_j) espacios topológicos con $j \in \mathbb{N}$. Sea $Y_\infty = \cup_{j \geq 1} Y_j$ dotado de la topología de la unión. Sea $U \subset Y_\infty$ un subconjunto abierto, $U_j = U \cap Y_j$ y $g_\infty : U \rightarrow Y_\infty$ una función tal que,

$$g_j = g_\infty|_{U_j} : U_j \rightarrow Y_j,$$

sea continua para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces g_∞ es continua.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subset U$ un subconjunto abierto. Tengamos en cuenta que $A = \cup_{j \geq 1} (A \cap Y_j)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} g_\infty^{-1}(A) &= g_\infty^{-1} \left(\bigcup_{j \geq 1} (A \cap Y_j) \right) = \bigcup_{j \geq 1} g_\infty^{-1}(A \cap Y_j) \\ &= \bigcup_{j \geq 1} (g_\infty|_{U_j})^{-1}(A \cap Y_j) = \bigcup_{j \geq 1} g_j^{-1}(A \cap Y_j). \end{aligned}$$

Como g_j es continua para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces $g_\infty^{-1}(A)$ es un conjunto abierto, así que g_∞ es también continua. \square

LEMA 3.4. Sea X un ANR localmente compacto. Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto y $f : U \rightarrow X$ una función continua. Entonces $SP_\infty(f)$ definida en (37) también es continua.

DEMOSTRACIÓN. Tomando,

$$\begin{aligned} Y_j &= SP_j(X) \\ g_j &= SP_j(f) \quad j = 1, 2, \dots, \infty, \end{aligned}$$

y aplicando el lema 3.3 se termina la demostración. \square

Recordamos ahora algunos conceptos importantes de la sección 2 del capítulo 1. Sea X un ANR localmente compacto, $U \subset X$ un subconjunto abierto, $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y $K \subset U$ un conjunto compacto e invariante para f . Supongamos que existe $N \subset U$, un entorno compacto de K , tal que $Per(f) \cap N \subset K$ y consideremos W un conjunto abierto tal que $K \subset W \subset N$. Tomemos,

$$SP_n(f)|_{SP_n(W)} : SP_n(W) \rightarrow SP_n(X).$$

Como $Fix(SP_n(f)|_{SP_n(W)}) \subset SP_n(K)$, con $SP_n(K)$ un conjunto compacto, entonces $Fix(SP_n(f)|_{SP_n(W)})$ es un subconjunto compacto de $SP_n(W)$. Además, $SP_n(f)|_{SP_n(W)}$ es una función compacta porque admite una clara extensión a $SP_n(N)$. Teniendo en cuenta todo lo anterior, el índice $I_X^{SP_n}(f, K) = i_{SP_n(W)}(SP_n(f)|_{SP_n(W)}, SP_n(W))$ está bien definido. La propiedad de escisión del índice de punto fijo nos dice que $I_X^{SP_n}(f, K)$ no depende de la elección del entorno compacto N de K ni del conjunto abierto W . Llegados a este punto, podemos introducir una nueva definición.

DEFINICIÓN 3.5. Sea X un ANR localmente compacto, $U \subset X$ un subconjunto abierto, $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y $K \subset U$ un conjunto compacto e invariante respecto a f que admite un entorno N con $Per(f) \cap N \subset K$. Definimos el **índice simétrico infinito** del par (f, K) como la serie formal,

$$(38) \quad I_X^{SP_\infty}(f, K) = \sum_{n=0}^{\infty} I_X^{SP_n}(f, K) z^n,$$

donde, por conveniencia, utilizamos la notación $I_X^{SP_0}(f, K) = 1$ desde el teorema 1.9 de la sección 3 del capítulo 1.

OBSERVACIÓN 3.6. Utilizamos la convención $I_X^{SP_0}(f, K) = 1$, en vez de comenzar la suma en $n = 1$ por conveniencia. De esta manera la propiedad aditiva y sus consecuencias presentarán un aspecto más agradable.

OBSERVACIÓN 3.7. En caso de que el límite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_X^{SP_n}(f, K)$$

existiese, podríamos haber definido el índice en productos simétricos infinitos de esa forma. Sin embargo, la definición 38 es mucho más general y contiene mucha más información pues, desde ella, se puede recuperar el índice n -simétrico sin más que calcular la n -ésima derivada en el valor $z = 0$,

$$(I_X^{SP_\infty}(f, K))^{(n)}(0) = I_X^{SP_n}(f, K).$$

3. Propiedades del índice simétrico infinito de punto fijo

TEOREMA 3.8. (Propiedad aditiva). *Sea X un ANR localmente compacto y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y $K \subset U$ un conjunto compacto e invariante con respecto de f . Sea $K = K_1 \cup K_2$ una unión disjunta de conjuntos compactos e invariantes en las condiciones anteriores. Entonces,*

$$I_X^{SP\infty}(f, K) = I_X^{SP\infty}(f, K_1) \cdot I_X^{SP\infty}(f, K_2),$$

DEMOSTRACIÓN. Este teorema es una consecuencia directa de la propiedad aditiva del índice n -simétrico demostrada en el teorema 1.9,

$$\begin{aligned} I_X^{SP\infty}(f, K) &= \sum_{n=0}^{\infty} I_X^{SPn}(f, K) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1+j_2=n}}^n I_X^{SPj_1}(f, K_1) I_X^{SPj_2}(f, K_2) \right) z^n \\ &= \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} I_X^{SPj_1}(f, K_1) z^{j_1} \right) \cdot \left(\sum_{j_2=0}^{\infty} I_X^{SPj_2}(f, K_2) z^{j_2} \right) \\ &= I_X^{SP\infty}(f, K_1) \cdot I_X^{SP\infty}(f, K_2). \end{aligned}$$

□

COROLARIO 3.9. (Propiedad aditiva generalizada). *Sea X un ANR localmente compacto y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Sea $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico y K un conjunto compacto e invariante con respecto de f . Sea $K = K_1 \cup \dots \cup K_s$ una unión disjunta de conjuntos compactos e invariantes en las condiciones anteriores. Entonces,*

$$I_X^{SP\infty}(f, K) = I_X^{SP\infty}(f, K_1) \dots I_X^{SP\infty}(f, K_s).$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en s , hemos probado en el anterior teorema el caso $s = 2$, así que, utilizando este caso en el primer paso y suponiendo que la ecuación es cierta para todo entero $< s$,

$$\begin{aligned} I_X^{SP\infty}(f, K) &= I_X^{SP\infty}(f, K_1 \cup \dots \cup K_{s-1}) \dots I_X^{SP\infty}(f, K_s) \\ &= I_X^{SP\infty}(f, K_1) \dots I_X^{SP\infty}(f, K_{s-1}) \cdot I_X^{SP\infty}(f, K_s). \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.10. (Propiedad conmutativa). *Sean X e Y ANR's localmente compactos. Sean $U \subset X$ y $V \subset Y$ subconjuntos abiertos, y,*

$$\varphi : U \rightarrow Y \quad , \quad \psi : V \rightarrow X,$$

dos aplicaciones continuas. Tomemos $f = \psi \circ \varphi$ y $g = \varphi \circ \psi$. Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, invariante y aislado respecto a f , entonces

$\varphi(K)$ es un conjunto compacto, invariante y aislado respecto a g , y ,

$$I_X^{SP_\infty}(f, K) = I_Y^{SP_\infty}(g, \varphi(K)),$$

siempre que la serie (38) represente una función analítica compleja.

DEMOSTRACIÓN. Usando la propiedad conmutativa del índice n -simétrico de punto fijo, demostrada en la proposición 1.11,

$$I_X^{SP_n}(f, K) = I_Y^{SP_n}(g, \varphi(K)).$$

Obtenemos,

$$\begin{aligned} I_X^{SP_\infty}(f, K) &= \sum_{n=0}^{\infty} I_X^{SP_n}(f, K)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} I_Y^{SP_n}(g, \varphi(K))z^n = I_Y^{SP_\infty}(g, \varphi(K)). \end{aligned}$$

□

COROLARIO 3.11. Sea X un ANR localmente compacto, $U \subset X$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow X$ un sistema semidinámico. Sea $Y \subset X$ otro ANR localmente compacto tal que $f(X) \subset Y$. Si $K \subset U$ es un conjunto compacto, invariante, aislado respecto a f , entonces K es también un conjunto compacto, invariante, aislado respecto a $f|_Y$, y ,

$$I_X^{SP_\infty}(f, K) = I_Y^{SP_\infty}(f|_Y, K).$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el corolario 1.12 de la sección 4 del capítulo 1,

$$\begin{aligned} I_X^{SP_\infty}(f, K) &= \sum_{n=0}^{\infty} I_X^{SP_n}(f, K)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} I_Y^{SP_n}(f|_Y, K)z^n = I_Y^{SP_\infty}(f|_Y, K). \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.12. (Invarianza por homotopías). Sea X un ANR localmente compacto. Sea $f : U \times \Lambda \rightarrow X$ una función continua, tal que U es un subconjunto abierto de X y $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto. Sea $N \subset X$ un entorno aislante para cada función $f_\lambda : U \rightarrow X$. Entonces $I_X^{SP_\infty}(f_\lambda, \text{Inv}(N, f_\lambda))$ no depende de $\lambda \in \Lambda$.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la invarianza por homotopías del índice n -simétrico, demostrada en la proposición 1.13 de la sección 4 del capítulo 1, concluimos que,

$$I_X^{SP_\infty}(f_\lambda, \text{Inv}(N, f_\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} I_X^{SP_n}(f_\lambda, \text{Inv}(N, f_\lambda))z^n,$$

no depende de $\lambda \in \Lambda$.

□

4. Cálculo del índice de punto fijo en productos simétricos infinitos para homeomorfismos del plano que conservan la orientación

4.1. Introducción. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserva orientación. En este capítulo calcularemos el índice simétrico infinito del sistema dinámico $SP_\infty(f)$ en un conjunto compacto e invariante K que admite un entorno N tal que $Per(f) \cap N \subset K$. Distinguiremos, al igual que en el capítulo 2, dos casos, K aislado y K no aislado como compacto invariante. Comprobaremos que de la definición 3.5 y de las fórmulas obtenidas en el capítulo 2 para el índice n -simétrico, se obtienen de una manera sencilla fórmulas para el índice simétrico infinito en cada caso.

NOTACIÓN 5. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto. Sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserve la orientación y $K \subset U$ un subconjunto compacto. En pro de reducir la notación usaremos la siguiente escritura,

$$i_\infty(U) = I_{\mathbb{R}^2}^{SP_\infty}(f, U)$$

$$i_\infty(K) = I_{\mathbb{R}^2}^{SP_\infty}(f, K),$$

o bien $i_{\mathbb{R}^2, \infty}(K) = i_{\mathbb{R}^2, \infty}(f, K) = I_{\mathbb{R}^2}^{SP_\infty}(f, K)$.

4.2. Cálculo del índice simétrico infinito cuando $K = \{p\}$ es aislado como compacto invariante.

4.2.1. *Cálculo del índice simétrico infinito cuando $\{p\}$ es aislado como compacto invariante y f^l tiene m puntos fijos más.* En este caso sabemos que

$$i_n(K) = (-1)^n \binom{m-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Recordando la definición 38 del índice simétrico infinito se tiene,

$$i_\infty(K) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n(K) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m-1}{n} z^n.$$

Ahora, usando la fórmula binomial de Newton,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m-1}{n} z^n = \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} (-z)^n = (1-z)^{m-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, obtenemos que,

$$i_\infty(K_0) = (1-z)^{m-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{con } m \geq 1.$$

4.2.2. *Cálculo del índice simétrico infinito cuando $\{p\}$ es aislado como compacto invariante y \bar{f}^l tiene m nuevas órbitas periódicas de periodo q .* Podemos obtener $i_\infty(K)$ dependiendo de los enteros $q, r \geq 1$ cuya existencia demostraron Le Calvez y Yoccoz en [55] para un homeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que conserve la orientación y posea un punto fijo $\{p\}$ ni atractor ni repulsor. Acudiendo a la demostración del corolario 2.9, obtuvimos

$$i_n(K) = (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De la definición 38 del índice simétrico infinito,

$$i_\infty(K) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n(K) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]} z^n.$$

Ahora, aplicando la fórmula del binomio de Newton,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]} z^n &= \sum_{n=0}^{qm-1} (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]} z^n \\ &= \sum_{c=0}^{m-1} \sum_{\rho=0}^{q-1} (-1)^{[(cq+\rho)/q]} \binom{m-1}{[(cq+\rho)/q]} z^{cq+\rho} \\ &= \sum_{c=0}^{m-1} \sum_{\rho=0}^{q-1} (-1)^c \binom{m-1}{c} z^{cq+\rho} \\ &= \left(\sum_{c=0}^{m-1} \binom{m-1}{c} (-z^q)^c \right) \left(\sum_{\rho=0}^{q-1} z^\rho \right) \\ &= (1 - z^q)^{m-1} \frac{(1 - z^q)}{(1 - z)}. \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que,

$$i_\infty(K) = \frac{(1 - z^q)^m}{(1 - z)}$$

4.3. Cálculo del índice simétrico infinito cuando $\{p\}$ es no aislado como compacto invariante. Haremos uso de los cálculos del capítulo anterior y para ello vamos a dividir el estudio en los mismos epígrafes. En primer lugar vamos a considerar el caso de que el **número de rotación en la circunferencia de finales sea irracional**. Esto es, que no tengamos ni puntos fijos ni órbitas periódicas. Entonces sabemos que $i_n(p) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$i_\infty(p) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1 - z)$$

Por tanto vamos a estudiar ahora qué ocurre cuando el número de rotación es racional comenzando con el caso en el que sea cero -existencia de finales primos fijos-.

4.3.1. Índice simétrico infinito de punto fijo con $\{p\}$ punto fijo no aislado y solo puntos fijos surgidos de la compactificación de Carathéodory. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserve la orientación. Sea p un punto fijo no aislado de f . Queremos calcular una fórmula para $i_\infty(K_0) = i_\infty(p)$ donde $K_0 \subset U$ es un compacto, invariante -y no aislado- que contiene a p . Concretamente consideraremos, como en secciones precedentes, un dominio de Jordan J que contenga a p y $K = \text{Inv}(J, f)$. K_0 denotará la componente conexa de K que contiene a p .

Recordemos que una vez realizada la compactificación de Carathéodory de $S^2 \setminus K_0$ el número de atractores menos el número de ramas estables tiene que ser igual al de repulsores menos el número de ramas inestables (esa igualdad se cumple debido al Teorema 1 -Teorema del Pétalo- y al Teorema 2 de [79] página 7).

Caso en el que todos los finales primos fijos son atractores o repulsores.

Supongamos que tenemos $2a$ puntos fijos surgidos de la compactificación de Carathéodory: a atractores y a repulsores.

Para los cálculos solo tendremos en cuenta los atractores dado que en los repulsores tendremos exactamente una región de salida y por lo tanto todos los índices son triviales.

Realicemos la compactificación de Carathéodory y supongamos que $\cup_{s=1}^a K_s \subset U$, K_s un conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo al punto fijo p_s con $s = 1, \dots, a$ siendo cada U unión de semidiscos. Aplicando la fórmula (20) para calcular $i_n(K_0)$, queda,

$$(39) \quad i_n(K_0) = \binom{a+n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así que, sustituyendo esta fórmula en la expresión (38), la serie del índice simétrico infinito,

$$i_\infty(K_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n(K_0) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+n}{n} z^n.$$

LEMA 3.13. *Sea $a \in \mathbb{Z}^+$ y $f(z) = z^a(1-z)^{-1}$ con $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Entonces, la a -ésima derivada de $f(z)$, $f^{(a)}(z)$, es,*

$$f^{(a)}(z) = a!(1-z)^{-(a+1)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto del plano complejo. Recordando la regla de Leibniz para $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función producto de otras dos $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, i.e., $g(z) = \alpha(z) \cdot \beta(z)$,

$$g^{(a)}(z) = \sum_{j=0}^a \binom{a}{j} \alpha(z)^{(j)} \cdot \beta(z)^{(a-j)},$$

y, usando esta regla para calcular la a -ésima derivada tomando $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, $\alpha(z) = z^a$ y $\beta(z) = (1-z)^{-1}$,

$$\begin{aligned} f^{(a)}(z) &= \sum_{j=0}^a \binom{a}{j} (z^a)^{(j)} \cdot ((1-z)^{-1})^{(a-j)} \\ &= \sum_{j=0}^a \binom{a}{j} a \dots (a-j+1) z^{a-j} \cdot (a-j)! (1-z)^{-(a-j+1)} \\ &= a! (1-z)^{-1} \sum_{j=0}^a \binom{a}{j} (z(1-z)^{-1})^{a-j} \\ &= a! (1-z)^{-1} (1+z(1-z)^{-1})^a = a! (1-z)^{-(a+1)}. \end{aligned}$$

□

LEMA 3.14. Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Sea,

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+n}{n} z^n.$$

Entonces,

$$S(a) = \frac{1}{(1-z)^{1+a}} \quad \text{si } |z| < 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Escribimos la serie como una a -ésima derivada,

$$\begin{aligned} S(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+n}{n} z^n \\ &= \frac{1}{a!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+a) \dots (n+1) z^n \\ &= \frac{1}{a!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+a} \right)^{(a)} = \frac{1}{a!} \left(\frac{z^a}{1-z} \right)^{(a)}. \end{aligned}$$

Calculando ahora la a -ésima derivada de esa fracción con el lema 3.13, obtenemos,

$$S(a) = (1-z)^{-(a+1)} \quad \text{si } |z| < 1.$$

□

Por tanto, la expresión para el índice simétrico infinito de punto fijo cuando nuestro punto fijo es no aislado y, procedentes de la

compactificación de Carathéodory, surgen solo puntos fijos atractores y repulsores, es,

$$i_\infty(K_0) = i_\infty(p) = (1 - z)^{-(a+1)} \quad \text{si } |z| < 1,$$

siendo a el número de puntos fijos atractores.

Caso en el que todos los finales primos fijos son ni atractores ni repulsores:

Supongamos que tenemos r puntos fijos $\{p_1, \dots, p_r\}$ surgidos de la compactificación de Carathéodory que no son atractores ni repulsores, cada uno con m_s regiones de salida, $s = 1, \dots, r$.

Supongamos que $\cup_{s=1}^r K_s \subset U$, K_s un conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo al punto fijo p_s con $s = 1, \dots, r$ siendo cada K_s un intervalo y U unión de semidiscos.

Aplicando la igualdad (25) para calcular $i_n(K_0)$,

$$i_n(p) = i_n(K_0) = (-1)^n \binom{e-1}{n} \quad e = \sum_{s=1}^r m_s - r \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, de la definición 38, el valor del índice simétrico infinito de punto fijo es,

$$i_\infty(K_0) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{e-1}{j} z^j.$$

Por la fórmula del binomio de Newton,

$$\begin{aligned} i_\infty(K_0) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{e-1}{j} z^j \\ &= \sum_{j=0}^{e-1} \binom{e-1}{j} (-z)^j = (1 - z)^{e-1}. \end{aligned}$$

De esta forma y para este caso, el índice simétrico infinito es,

$$i_\infty(K_0) = (1 - z)^{e-1} \quad \text{para} \quad e = \sum_{s=0}^r m_s - r,$$

y m_s el número de regiones de salida del punto fijo p_s , $s = 1, \dots, r$, surgidas al aplicar la compactificación de Carathéodory.

Caso general. Caso en que entre los puntos fijos tenemos atractores, repulsores y ni atractores ni repulsores.

Supongamos ahora que entre los finales primos fijos surgidos de la compactificación de Carathéodory tenemos a atractores, b repulsores y r ni atractores ni repulsores, cada uno con m_s regiones de salida, $s = 1, \dots, r$.

Supongamos que $\cup_{s=1}^{r+a+b} K_s \subset U$, K_s un conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo al punto fijo p_s con $s = 1, \dots, r + a + b$ siendo cada K_s un intervalo y U unión de semidiscos.

Entonces aplicando la igualdad (30) para calcular $i_n(K_0) = i_n(p)$,

$$i_n(K_0) = i_n(p) = \begin{cases} \binom{a-e+n}{n} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^n \binom{e-a-1}{n} & \text{si } e > a \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con a el número de puntos fijos atractores, $e = \sum_{s=1}^r m_s - r$ y m_s el número de regiones de salida de cada punto fijo p_s que no sea atractor ni repulsor, $s = 1, \dots, r$. O equivalentemente, a el número de finales primos atractores y e el número de ramas estables (positivamente) invariantes asociadas a J . Sabemos que $a - e = b - u$ siendo b el número de finales primos repulsores y u el número de ramas inestables (negativamente) invariantes. Así, de la definición 38, el índice simétrico infinito de punto fijo es,

$$i_\infty(K_0) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-e+n}{n} z^n & \text{si } e \leq a \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{e-a-1}{n} z^n & \text{si } e > a. \end{cases}$$

Para la primera suma usamos el lema 3.14 sustituyendo a por $a - e$, obteniendo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-e+n}{n} z^n = (1-z)^{-(a-e+1)} \quad \text{si } \begin{cases} |z| < 1 \\ e \leq a \end{cases}.$$

Para la segunda suma utilizamos las mismas operaciones que en el caso inmediatamente anterior en el que solo surgen puntos fijos ni atractores ni repulsores, obteniendo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{e-a-1}{n} z^n = (1-z)^{e-a-1} \quad \text{si } e > a.$$

Resumiendo todo esto en una ecuación,

$$i_\infty(K_0) = \begin{cases} (1-z)^{e-a-1} & \text{para } |z| < 1 & \text{si } e \leq a \\ (1-z)^{e-a-1} & \text{para } z \in \mathbb{C} & \text{si } e > a, \end{cases}$$

4.3.2. Cálculo del índice simétrico infinito cuando $\{p\}$ es no aislado como compacto invariante y surgen órbitas periódicas de la compactificación de Carathéodory. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserve orientación. Sea $\{p\}$ un punto fijo no aislado de f . Queremos calcular por último $i_\infty(K_0) = i_n(p)$ cuando en la circunferencia de finales primos aparecen órbitas

periódicas de período $q > 1$. Recordemos nuevamente que todas ellas han de tener el mismo período.

Supongamos que tenemos a órbitas periódicas atractoras, b órbitas periódicas repulsoras y r órbitas periódicas ni atractoras ni repulsoras, cada una con m_s regiones de salida, $s = 1, \dots, r$.

Supongamos que $\cup_{s=1}^{r+a+b} K_s \subset U$, K_s un conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo a la s -órbita periódica con $s = 1, \dots, r+a+b$ siendo cada K_s y U unión de intervalos y semidiscos respectivamente.

Así, de la fórmula (36),

$$i_n(K_0) = \begin{cases} \binom{a - e + [n/q]}{[n/q]} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{[n/q]} \binom{e - a - 1}{[n/q]} & \text{si } e > a \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

siendo $e = \sum_{s=1}^r m_s - r$. De la definición 38 de índice simétrico infinito de punto fijo,

$$i_\infty(K_0) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a - e + [n/q]}{[n/q]} z^n & \text{si } e \leq a \\ \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{[n/q]} \binom{e - a - 1}{[n/q]} z^n & \text{si } e > a. \end{cases}$$

En la primera suma, dividiendo el rango de sumación en sistemas completos de restos módulo q , y aplicando el lema 3.14,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a - e + [n/q]}{[n/q]} z^n = \\ & = \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{\rho=0}^{q-1} \binom{a - e + [(cq + \rho)/q]}{[(cq + \rho)/q]} z^{cq+\rho} \\ & = \left(\sum_{c=0}^{\infty} \binom{a - e + c}{c} (z^q)^c \right) \cdot \left(\sum_{\rho=0}^{q-1} z^\rho \right) \\ & = (1 - z^q)^{-(a-e+1)} \cdot \frac{(1 - z^q)}{(1 - z)} \quad \text{si } |z| < 1 \text{ y } e \leq a. \end{aligned}$$

Para la segunda suma aplicamos un razonamiento análogo,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{[n/q]} \binom{e - a - 1}{[n/q]} z^n =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{\rho=0}^{q-1} (-1)^{[(cq+\rho)/q]} \binom{e-a-1}{[(cq+\rho)/q]} z^{cq+\rho} \\
&= \left(\sum_{c=0}^{e-a-1} \binom{e-a-1}{c} (-z^q)^c \right) \cdot \left(\sum_{\rho=0}^{q-1} z^\rho \right) \\
&= \begin{cases} (1-z^q)^{e-a-1} \cdot \frac{(1-z^q)}{(1-z)} & \text{si } z \neq 1 \\ q(1-z^q)^{e-a-1} & \text{si } z = 1 \end{cases} \quad \text{si } e > a \\
&= \begin{cases} \frac{(1-z^q)^{e-a}}{(1-z)} & \text{si } z \neq 1 \\ q(1-z^q)^{e-a-1} & \text{si } z = 1 \end{cases} \quad \text{si } e > a.
\end{aligned}$$

Juntando las dos sumas,

$$i_\infty(K_0) = \begin{cases} \frac{(1-z^q)^{e-a}}{(1-z)} & |z| < 1 \quad \text{si } e \leq a. \\ \begin{cases} \frac{(1-z^q)^{e-a}}{(1-z)} & \text{si } z \neq 1 \\ 0 & \text{si } z = 1 \end{cases} & \text{si } e > a. \end{cases}$$

CAPÍTULO 4

Aplicaciones del índice de punto fijo en productos simétricos

RESUMEN: en este capítulo estudiaremos dos aplicaciones que nos parecen interesantes del índice n -simétrico, una es su comportamiento sobre homeomorfismos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ que conservan, expanden o contraen áreas, y otra el cálculo de la característica de Euler de los productos simétricos de todas las superficies compactas orientables.

1. Introducción

Una de las consecuencias inmediatas del trabajo realizado en secciones anteriores es que el índice simétrico infinito de un punto fijo de un homeomorfismo del plano que conserva orientación, que no es atractor ni repulsor y que es aislado como compacto invariante es un polinomio. Este hecho permitiría volver a obtener, como corolario, el teorema de Le Calvez y Yoccoz de la no existencia de homeomorfismos minimales en la 2-esfera multipunteada ya que, un conjunto finito, aislado como compacto invariante, tiene asociado un polinomio pero eso no es posible ya que $SP_m(\mathbb{S}^2) = \mathbb{C}P^m$ para cada m .

Un comportamiento similar al caso invariante aislado lo tenemos cuando estamos en presencia de un homeomorfismo de superficies que contrae, expande o conserva áreas. La conservación de áreas es una propiedad que restringe los posibles valores del índice de punto fijo de dicha aplicación. De hecho, el índice de punto fijo de un homeomorfismo entre dos superficies que conserva la orientación, está acotado por $+1$ (véase la referencia [71] y [53] en la que se extiende un resultado análogo para difeomorfismos de superficies incluido en [84]. En [79] se puede encontrar una demostración alternativa que usa la compactificación de Carathéodory).

2. Aplicaciones del índice n -simétrico a un sistema dinámico que conserva áreas

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto, sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico y sea $p \in U$ un punto fijo aislado como órbita periódica -o más generalmente $K \subset U$ un compacto invariante que no desconecta el plano y que tiene un entorno suyo M tal que $Per(f) \cap M \subset K$ -. El objetivo de esta sección es estudiar la tendencia del índice $i_n(f, p)$

cuando f conserva, expande o contrae área. Vamos a centrarnos inicialmente en los dos primeros casos porque admiten un planteamiento similar.

2.1. f conserva o expande áreas: Tenemos dos casos: p conjunto compacto, invariante, **aislado** y p **no aislado**. Si p es un conjunto compacto, invariante, aislado el índice $i_n(f, p)$ se calcula con el Teorema 2.6 obteniendo,

$$i_n(f, p) = (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $m+1$ es el número de puntos periódicos de $\overline{f^T}$ (obviamente $m \neq 0$, de otra manera p será un atractor, lo cual es imposible siendo f un sistema dinámico que conserva áreas). Tomando ahora el límite cuando n tiende a infinito,

$$i_n(f, p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Si p es un conjunto compacto, invariante, no aislado, el índice $i_n(f, p)$ se calcula a través de la ecuación 36, procedente del proceso de compactificación de Carathéodory, obteniendo, **en el caso de número de rotación racional**,

$$i_n(f, p) = \begin{cases} \binom{a-e+[n/q]}{[n/q]} & \text{si } e \leq a \\ (-1)^{[n/q]} \binom{e-a-1}{[n/q]} & \text{si } e > a, \end{cases}$$

donde $e = \sum_{j=1}^r (m_j - 1)$, siendo r el número órbitas ni atractoras ni repulsoras cada una con m_j regiones de salida, $j = 1, \dots, r$, a el número de órbitas atractoras y q el periodo de cada órbita. Teniendo en cuenta que queremos tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y que f conserva áreas, es decir, $a = 0$, entonces el índice cumple,

$$i_n(f, p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

porque, cuando $a = 0$, la fórmula válida es la que corresponde a la condición $e > a$ y, en ese caso, el número binomial tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ (de hecho, el índice es cero a partir de $n = q(e - a)$).

Resumiendo, tanto en el caso de que p sea un conjunto compacto, invariante, aislado como en el caso de que p sea un conjunto compacto, invariante, no aislado, si tomamos límites cuando n tiende a infinito teniendo en cuenta que f es un sistema dinámico que conserva áreas,

$$i_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Usando el lenguaje del índice de punto fijo en productos simétricos infinitos, si f es un homeomorfismo del plano que conserva orientación y áreas ocurre que, $i_\infty(f)$ es un polinomio o $i_\infty(f) = 1/(1-z)$. Además

el grado de este polinomio hemos demostrado que tiene un significado dinámico.

2.2. f contrae áreas: Basta observar que $i_n(f, p) = i_n(f^{-1}, p)$ y que f^{-1} expande áreas.

3. Cálculo de las características de Euler de los productos simétricos de todas las superficies cerradas, compactas y orientables.

Sea X un ANR compacto y $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua homotópica a la identidad. Entonces los números de Lefschetz $\Lambda(f) = \Lambda(Id_X)$. Como $\Lambda(Id_X) = \chi(X)$, podemos calcular esta última considerando cualquier función continua homotópica a la identidad.

Nuestra estrategia será emplear un flujo $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ con una cantidad finita de puntos de equilibrio y un homeomorfismo $\pi_t : X \rightarrow X$ con $t \neq 0$. Obviamente el propio flujo nos da una homotopía entre la identidad y π_t y podremos calcular $\Lambda(\pi_t)$ a partir de los índices de cada uno de los puntos fijos mediante la propiedad aditiva. Existen otros procedimientos para hacer el cálculo, involucrando técnicas de topología algebraica que son, a nuestro entender, mucho más delicadas y menos geométricas ([30]). Aunque como hemos avanzado nos vamos a centrar en los productos simétricos de superficies, estas mismas ideas servirían para el cómputo en variedades tridimensionales para las que haya flujos con una cantidad finita de puntos de equilibrio que admitan bolas como bloques aislantes. En estos casos se pueden usar los resultados de [42].

La característica de Euler de $SP_n(X)$ es,

$$\chi(SP_n(X)) = \Lambda(SP_n(\text{id})) = \Lambda(SP_n(f))$$

para cualquier $f : X \rightarrow X$ que sea homotópica a la identidad. Si X es una superficie compacta orientable y sin borde, solo tenemos que ocuparnos de la suma conexa de toros dado que para la esfera conocemos ya un modelo homeomorfo a cualquiera de sus productos simétricos, los espacios proyectivos complejos.

PROPOSICIÓN 4.1. *La característica de Euler de $SP_n(\mathbb{T}^m)$ para $m \geq 1$ es,*

$$\chi(SP_n(\mathbb{T}^m)) = (-1)^n \binom{-\chi(\mathbb{T}^m)}{n},$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el sistema dinámico $J : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$, con $\{p_1, \dots, p_{2(m-1)}\}$ sus puntos fijos -que no son ni atractores ni repulsores- análogo al mostrado en la figura 12 para el 2-toro.

Observemos que estos puntos fijos son hiperbólicos. Cada uno es un compacto invariante aislado con dos ramas estables y dos inestables. En consecuencia,

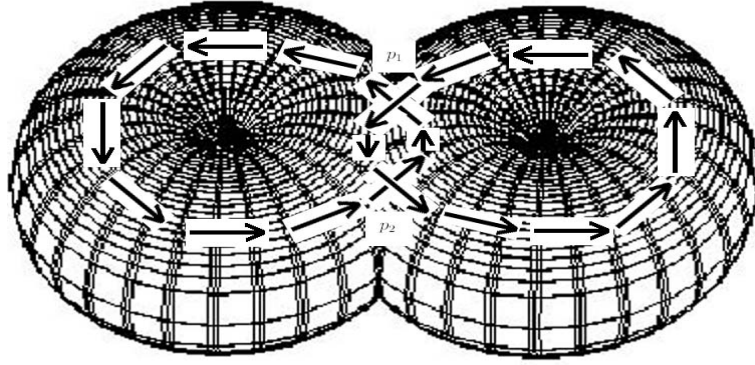


FIGURA 12. Dinámica en el 2-toro

$$i_n(p_j) = (-1)^n \binom{1}{n} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Tomando K la unión de todos los puntos de equilibrio, entonces la propiedad aditiva indica que,

$$\begin{aligned} i_n(K) &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+\dots+j_{2(m-1)}=n}}^n i_{j_1}(K_1) \dots i_{j_{2(m-1)}}(K_{2(m-1)}) \\ &= \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+\dots+j_{2(m-1)}=n}}^n (-1)^{j_1} \binom{1}{j_1} \dots (-1)^{j_{2(m-1)}} \binom{1}{j_{2(m-1)}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2(m-1) \\ (-1)^n \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+\dots+j_{2(m-1)}=n}}^n \binom{1}{j_1} \dots \binom{1}{j_{2(m-1)}} & \text{si } n \leq 2(m-1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2(m-1) \\ (-1)^n \sum_{\substack{j_s=0 \\ j_1+\dots+j_{2(m-1)}=n}}^1 1 & \text{si } n \leq 2(m-1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2(m-1) \\ (-1)^n \binom{2(m-1)}{n} & \text{si } n \leq 2(m-1). \end{cases} \end{aligned}$$

Observando que $\chi(\mathbb{T}^m) = 2 - 2m$ la demostración termina. \square

Descomposición de compactos invariantes aislados de homeomorfismos del plano. Existencia de órbitas periódicas y caos.

RESUMEN: Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que conserva orientación. Sea $K \subset U$ un conjunto compacto, invariante y aislado que admite un entorno aislante que es unión finita de discos cerrados. En estas condiciones existe un bloque aislante que se puede descomponer en unión de discos disjuntos. Construiremos los ciclos filtrantes que es la herramienta fundamental que utilizaremos para estudiar la existencia de órbitas periódicas de f que sigan un itinerario determinado. Daremos condiciones suficientes en términos de estas técnicas que permitan deducir la aparición de caos.

1. Introducción

Este capítulo tiene su origen en la construcción, realizada en [76], de pares filtrantes especialmente indicados para el estudio del índice de Conley de compactos invariantes no conexos del plano. Existe una amplia bibliografía acerca del índice de Conley de un conjunto invariante aislado (véanse por ejemplo, [33], [62], [63], [64], [65], [75], [80]). Existe, a su vez, una gran cantidad de literatura en la que se describen métodos para obtener una información más completa que la proporcionada por la teoría clásica o para extender dicha teoría a situaciones más generales (véanse por ejemplo [88] y [89]). Más concretamente, en [89], Szymczak introduce un índice tipo Conley para conjuntos compactos invariantes y aislados que admiten una descomposición en unión disjunta de una cantidad finita de conjuntos compactos. Este índice es capaz de detectar caos mostrando la existencia de una semiconjugación entre la aplicación dada y el *shift* de un número finito de símbolos (véase [90]). En muchos casos de la literatura, la detección de caos usando el índice de Conley está basado en la teoría de punto fijo debido a que el número de Lefschetz puede ser calculado usando *index pairs* (véanse [35], [62] y [42]).

En este capítulo trabajaremos como hasta ahora con homeomorfismos del plano que conservan la orientación. Las herramientas principales para la construcción que realizaremos serán los pares filtrantes y los ciclos filtrantes. En el caso de que quisiésemos desarrollar una teoría análoga para los homeomorfismos en el plano que invierten la

orientación, tendríamos que usar el concepto de *filtración fuerte*, introducido por Ruiz del Portal y Salazar en [78] con el fin de calcular el índice de punto fijo para cualquier iteración de un homeomorfismo plano local arbitrario, en el entorno de un punto fijo aislado que es aislado como compacto invariante. La motivación para el desarrollo de este capítulo surge, en parte, del estudio que realiza J.M. Salazar en el capítulo III de su tesis [81] (ver también [82]). Salazar construye un índice tipo Conley para los productos simétricos $F_n(X)$, el hiperespacio de los subconjuntos finitos de X (ANR localmente compacto), no vacíos, con, a lo sumo, n elementos. Sin embargo, el autor, insta al estudio de los productos simétricos $SP_n(X)$, principalmente teniendo en cuenta que se puede esperar un comportamiento aditivo mejor que en los hiperespacios $F_n(X)$.

2. Pares filtrantes y ciclos filtrantes

El objetivo de esta sección es definir las nociones de par filtrante y ciclo filtrante. Cuando Conley contruyó el índice que lleva su nombre en [20] utilizó la noción de *index pair* para definirlo. Sin embargo, con el índice de Conley no parece que pueda llegarse al profundo conocimiento local, en torno al punto fijo, necesario para nuestros propósitos. Franks y Richeson construyeron un nuevo tipo de *index pairs* a los que denominaron *pares filtrantes*. Por último, en [78], Ruiz del Portal y Salazar construyeron una generalización de los pares filtrantes definidos por Franks y Richeson, a la que denominaron *filtraciones fuertes*.

Recordemos que una manera sencilla de construir pares filtrantes es considerar un bloque aislante N y elegir un entorno compacto L de su región de salida, N^- , suficientemente pequeño. El índice de Conley de f en K puede ser definido usando los pares filtrantes como index pairs (véase [35]).

En un primer paso demostraremos que si K es un compacto invariante que admite un entorno aislante que es una unión finita de discos disjuntos, entonces existe un bloque aislante N tal que $\text{Inv}(N, f) = K$, que se descompone en una unión finita de discos disjuntos $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$. En ese caso, definimos un *itinerario* como una aplicación $\tau : \{1, \dots, \alpha\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, con $\alpha \in \mathbb{N}$, que determina un ciclo de longitud α ,

$$\{N_{\tau(1)}, \dots, N_{\tau(\alpha)}\}.$$

Diremos que un punto periódico p de f de periodo α , sigue el itinerario τ si,

$$f^\delta(p) \in N_{\tau(\delta+1)} \text{ para cada } \delta \in \{1, \dots, \alpha - 1\}.$$

DEFINICIÓN 5.1. (*Ciclo filtrante*) Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ subconjunto abierto del plano, sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo. Tomemos $N = N_1 \cup \dots \cup N_m \subset U$ una unión disjunta de discos que sea un bloque

aislante, y sea $\tau : \{1, \dots, \alpha\} \rightarrow \{1, \dots, \beta\}$ un itinerario. Consideremos el ciclo,

$$N_\tau = \{N_{\tau(1)}, N_{\tau(2)}, \dots, N_{\tau(\alpha)}\}.$$

Definimos un *ciclo filtrante* asociado a τ como la sucesión de pares,

$$(N_\tau, L_\tau) = \{(N_{\tau(1)}, L_{\tau(1)\tau(2)}), (N_{\tau(2)}, L_{\tau(2)\tau(3)}), \dots, (N_{\tau(\alpha)}, L_{\tau(\alpha)\tau(1)})\},$$

donde $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)} \subset N_{\tau(\delta)}$ y siendo cada $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}$ una unión finita de discos, cumpliéndose,

1. $\text{Per}_\tau(N_{\tau(\delta)}) = \{x \in N_{\tau(\delta)} : f^\alpha(x) = x \text{ y } x \text{ sigue el itinerario } \tau\} \subset \text{int}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)})$.
2. $f(\text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)})) \subset \text{int}(N_{\tau(\delta+1)})$.
3. Para cada disco $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s$ de $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}$ tenemos que $\partial_N L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s$ es una unión finita de arcos, y,

$$f(\partial_N L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s) \subset \text{int}(L_{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)})$$

y

$$L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s \cap N^- \neq \emptyset.$$

La existencia de un bloque aislante N del compacto, invariante y aislado K , y la descomposición de dicho bloque aislante en unión disjunta de discos se obtiene aplicando la proposición 1 de [76]. De hecho, ese resultado lo utilizaremos de manera extensa en el desarrollo posterior de este capítulo.

La demostración de la existencia de ciclos filtrantes se presenta en la sección 4 del presente capítulo. En la siguiente sección 3 presentamos un ejemplo para ilustrar la teoría que desarrollaremos en la sección 4.

3. Herradura de Smale

En esta sección presentamos un ejemplo clásico e ilustrativo de la teoría que desarrollaremos en la sección 4. La herradura procede de un homeomorfismo definido en un cuadrado del plano. En ella aparece un compacto invariante K que es homeomorfo a un conjunto de Cantor en el que hay dinámica caótica. Para mayor información remitimos a las referencias [85] y [86] o al libro de Devaney [27].

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto del plano que contenga a $[0, 1] \times [0, 1]$, sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ el homeomorfismo de la figura 13 y sea $SP_n(f)$ el homomorfismo inducido definido en el n -producto simétrico. Sean N_1 y N_2 discos como en la figura 13.

Es sencillo comprobar que $N = N_1 \cup N_2$ es un bloque aislante. Es bien conocido que existe un compacto invariante aislado $K \subset \text{int}(N)$ para el que f tiene un comportamiento caótico. Sin embargo, el índice de Conley en K es trivial, por lo que también lo es el índice n -simétrico en $SP_n(K)$. Existen órbitas periódicas de todos los periodos en $SP_n(K)$, sin embargo, el índice de punto fijo de $SP_n(f)$ en $SP_n([0, 1] \times [0, 1])$ es trivial, por serlo el índice de punto fijo de cualquier iteración de

f en $[0, 1] \times [0, 1]$. Por tanto, el índice de punto fijo de $SP_n(f)$ en $SP_n([0, 1] \times [0, 1])$ no aporta información acerca de la existencia de puntos fijos u órbitas periódicas porque los índices locales se cancelan. Una manera de arreglar este problema es adaptar las técnicas del índice de Conley y del índice de punto fijo con el fin de buscar las órbitas que sigan únicamente un cierto patrón predeterminado.

Trabajando con el homeomorfismo f , si queremos demostrar la existencia de puntos periódicos en N_1 (respectivamente N_2) basta que centremos nuestra atención en las órbitas que permanecen en N_1 (respectivamente N_2). Si, en vez de utilizar el índice de Conley de f , utilizamos el índice n -simétrico, la situación se torna más sencilla. Comencemos ilustrando la existencia de puntos fijos para luego pasar a la existencia de órbitas periódicas de periodos 2 y 3.

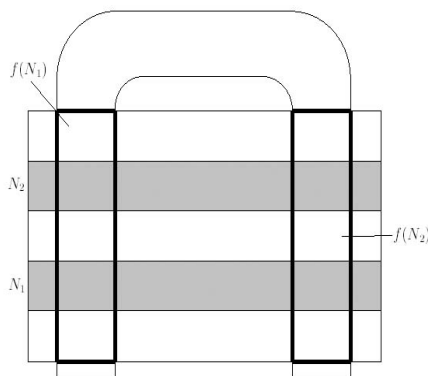


FIGURA 13. Dinámica de la herradura de Smale.

Detección de puntos fijos en la Herradura de Smale:

Tomemos dos entornos pequeños L_{11} de N_1^- y L_{22} de N_2^- . Los subconjuntos L_{11} y L_{22} se pueden tomar como unión de discos, i.e., $L_{11} = L_{11}^1 \cup L_{11}^2$ y $L_{22} = L_{22}^1 \cup L_{22}^2$. Consideremos ahora el espacio cociente N_1/\sim obtenido al identificar L_{11}^1 al punto p_1 y L_{11}^2 al punto p_2 (respectivamente N_2/\sim obtenido al identificar L_{22}^1 al punto p'_1 y L_{22}^2 al punto p'_2).

Sea $K \subset N_1 \vee N_2$ (unión disjunta de los bloques aislantes) el conjunto compacto invariante aislado que contiene a las órbitas de f en $N_1 \vee N_2$. Sea $\tilde{K} \subset (N_1/\sim) \vee (N_2/\sim)$ el conjunto compacto invariante y aislado inducido por la aplicación cociente sobre K . Es fácil comprobar que f induce dos aplicaciones continuas $f_{11} : N_1/\sim \rightarrow N_1/\sim$ y $f_{22} : N_2/\sim \rightarrow N_2/\sim$. Para los conjuntos de puntos periódicos de estas

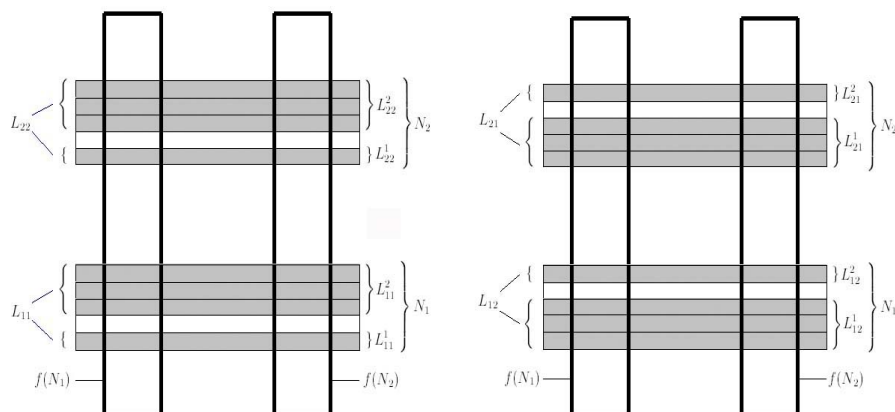


FIGURA 14. Dinámica de la herradura de Smale sobre las regiones de salida.

aplicaciones continuas se tiene que,

$$\text{Fix}(f_{11}) = \text{Fix}(f|_{N_1}) \cup \{p_1, p_2\}$$

$$\text{Fix}(f_{22}) = \text{Fix}(f|_{N_2}) \cup \{p'_1, p'_2\},$$

donde p_1 y p_2 son puntos fijos atractores para f_{11} y $\{p'_1, p'_2\}$ forman una órbita atractora de periodo dos para f_{22} . Con f_{11} y f_{22} definimos otra aplicación continua,

$$F : (N_1 / \sim) \vee (N_2 / \sim) \rightarrow (N_1 / \sim) \vee (N_2 / \sim),$$

que cumple,

$$F = f_{jj}(x) \quad \text{para } x \in N_{jj} / \sim \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Considerando

$$F_1 = F|_{N_1 / \sim} : N_1 / \sim \rightarrow N_1 / \sim,$$

cuyo conjunto de puntos fijos cumple,

$$\text{Fix}(F_1) \subset \text{Fix}(N_1) \cup \{p_1, p_2\},$$

sin perder de vista que p_1 y p_2 son puntos fijos atractores para F_1 . Sea $SP_n(F_1)$ la aplicación inducida por F_1 entre los productos simétricos. Utilizando el teorema de Lefschetz-Hopf,

$$\Lambda(SP_n(F_1)_*) = i_n(F_1, N_1 / \sim).$$

En este primer caso en el que queremos comprobar la existencia de puntos fijos, las cuentas con el índice 1-simétrico son completamente análogas a las realizadas por Ruiz del Portal y Salazar en [76] utilizando el índice de Conley para el homeomorfismo f . Así, tomando $n = 1$ en la igualdad anterior, observando que la suma alternada de la traza de la matriz correspondiente a la aplicación $SP_n(F_1)_*$ inducida por $SP_n(F_1)$

entre los grupos de homología es 1 (es decir, $\Lambda(SP_n(F)_*) = 1$), usando la propiedad aditiva 1.9 y recordando que p_1 y p_2 son puntos fijos atractores, tendríamos,

$$\begin{aligned} 1 &= i_1(F_1, N_1/\sim) = i_1(F, \text{Fix}(N_1) \cup \{p_1, p_2\}) \\ &= i_1(F_1, \text{Fix}(N_1)) + i_1(F_1, \{p_1, p_2\}) = i_1(F_1, \text{Fix}(N_1)) + 2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$-1 = i_1(F_1, N_1/\sim) = i_1(F, N_1/\sim) = i_1(f, \text{int}(N_1)),$$

lo cual nos indica que la aplicación f posee un punto fijo en el interior del bloque aislante N_1 . Para demostrar la existencia de puntos fijos en el interior de N_2 con la aplicación $F_2 = F|_{N_2/\sim} : N_2/\sim \rightarrow N_2/\sim$ se podrían realizar cálculos análogos. Sin embargo, y como hemos comentado antes, nuestros cálculos difieren muy poco de los realizados en [76] hemos buscado demostrar la existencia de puntos fijos. La utilidad del índice n -simétrico se ve mejor en la detección de órbitas periódicas que siguen un cierto itinerario. Técnicas parecidas pueden ser usadas para detectar órbitas periódicas de cualquier periodo y para calcular el índice de punto fijo de $SP_n(f)$, para cualquier n , en entornos pequeños de dichos puntos fijos. Con estas técnicas y para este ejemplo, vamos a empezar detectando órbitas periódicas de periodo 2. Para periodos superiores los cálculos serían análogos. Todos los detalles técnicos se justificarán de manera formal en la sección 4.

Detección de órbitas de periodo 2 en la Herradura de Smale:

Supongamos que queremos detectar órbitas periódicas de período 2 que siguen el itinerario identidad $\tau : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$, es decir, las órbitas que siguen el patrón $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_1$ (el caso de las órbitas que siguen el patrón $N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2$ es similar). Sea L_{12} un entorno (unión de dos discos) de $N_{12}^- = \{x \in N_1 : f(x) \notin \text{int}(N_2)\}$ y sea L_{21} un entorno (unión de dos discos) de $N_{21}^- = \{x \in N_2 : f(x) \notin \text{int}(N_1)\}$. Los conjuntos L_{12} y L_{21} (véase figura 14) se pueden escoger de manera que cumplan las propiedades para la construcción de un ciclo filtrante. Ahora consideramos,

$$(N_\tau, L_\tau) = \{(N_1, L_{12}), (N_2, L_{21}), (N_1, L_{12})\}.$$

Identificamos cada componente de L_{12} a puntos p_1, p_2 y sea el espacio cociente N_1/L_{12} generado por dicha acción. Análogamente, identificamos cada componente de L_{21} a puntos p'_1, p'_2 y sea el espacio cociente N_2/L_{21} . Los espacios N_1/L_{12} y N_2/L_{21} son discos topológicos.

Para trabajar con el índice n -simétrico observamos que f induce dos aplicaciones continuas $f_{12} : N_1/L_{12} \rightarrow N_2/L_{21}$ y $f_{21} : N_2/L_{21} \rightarrow N_1/L_{12}$. Vamos a estudiar la siguiente función,

$$F_\tau : (N_1/L_{12}) \vee (N_2/L_{21}) \rightarrow (N_1/L_{12}) \vee (N_2/L_{21}),$$

definida por,

$$F_\tau(x) = \begin{cases} f_{12}(x) & \text{si } x \in N_1/L_{12} \\ f_{21}(x) & \text{si } x \in N_2/L_{21}. \end{cases}$$

El índice 2-simétrico de F_τ coincide con el de f en un entorno suficientemente pequeño, de los puntos 2-periódicos que siguen el itinerario prefijado.

Consideramos entonces $N_\tau = (N_1/L_{12}) \vee (N_2/L_{21})$ y $F_\tau : N_\tau \rightarrow N_\tau$ cuyo conjunto de puntos 2-periódicos cumple,

$$Per^2(F_\tau) \subset Per^2(f) \cup \{p_1, p_2, p'_1, p'_2\},$$

sin perder de vista que estos últimos darían origen a órbitas atractoras. Pasemos ahora a calcular el índice 2-simétrico de la aplicación F_τ . Sea $SP_2(F_\tau)$ la aplicación inducida por F_τ entre los productos simétricos y llamemos $SP_2(F_\tau)_*$ a los homomorfismos inducidos entre los correspondientes grupos de homología. Utilizando el teorema de Lefschetz-Hopf,

$$\Lambda(SP_2(F_\tau)_*) = i_2(SP_2(F_\tau), SP_2(N_\tau)).$$

Como F_τ está definida en una unión disjunta de dos discos, las trazas de los homomorfismos $SP_2(F_\tau)_*$ solo pueden ser no triviales a nivel de componentes. La única componente de $SP_2(N_1/L_{12} \vee N_2/L_{21})$ que queda invariante por $SP_2(F_\tau)$ es la representada por $SP_1(N_1/L_{12}) \times SP_1(N_2/L_{21})$. Por tanto, $\Lambda(SP_2(F_\tau)) = 1$.

Ahora, teniendo en cuenta que $F_\tau(p_1) = p'_1$ y $F_\tau(p_2) = p'_2$ pero $F_\tau(p'_1) = p_2$ y $F_\tau(p'_2) = p_1$ los puntos fijos de $SP_2(F_\tau)$ se reducen a los de $SP_2(f)$ y se tiene que $1 = i_2(F_\tau)$ y por tanto existe una órbita 2-periódica de f que sigue el itinerario elegido.

Detección de órbitas de periodo 3 en la Herradura de Smale:

Supongamos que queremos detectar las órbitas periódicas de periodo 3 que siguen el itinerario $\tau : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$ dado por el patrón $N_2 \rightarrow N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2$ (el caso de las órbitas que siguen otros patrones es similar). Sean,

$$L_{22} \text{ entorno de } N_{22}^- = \{x \in N_2 : f(x) \notin \text{int}(N_2)\},$$

$$L_{21} \text{ entorno de } N_{21}^- = \{x \in N_2 : f(x) \notin \text{int}(N_1)\}$$

$$L_{12} \text{ entorno de } N_{12}^- = \{x \in N_1 : f(x) \notin \text{int}(N_2)\}$$

con L_{22} , L_{21} y L_{12} unión de discos. Esos tres espacios (véase figura 14) se pueden escoger de manera que cumplan las propiedades para la construcción de un ciclo filtrante. Ahora consideramos,

$$(N_\tau, L_\tau) = \{(N_2, L_{22}), (N_2, L_{21}), (N_1, L_{12}), (N_2, L_{22})\}.$$

Identificamos cada componente de L_{22} a los puntos p_1, p_2 y sea el espacio cociente N_2/L_{22} generado por dicha acción; identificamos cada

componente de L_{21} a los puntos p'_1, p'_2 y sea el espacio cociente N_2/L_{21} generado por dicha acción; por último, identificamos cada componente de L_{12} a los puntos p''_1, p''_2 y sea el espacio cociente N_1/L_{12} generado por dicha acción. Los espacios N_2/L_{22} , N_2/L_{21} y N_1/L_{12} son discos topológicos.

Para trabajar con el índice n -simétrico observamos que f induce tres aplicaciones continuas,

$$\begin{aligned} f_{22}^{21} &: N_2/L_{22} \rightarrow N_2/L_{21}. \\ f_{21}^{12} &: N_2/L_{21} \rightarrow N_1/L_{12} \\ f_{12}^{22} &: N_1/L_{12} \rightarrow N_2/L_{22} \end{aligned}$$

Vamos estudiar la siguiente función,

$$F_\tau : (N_2/L_{22}) \vee (N_2/L_{21}) \vee (N_1/L_{12}) \rightarrow (N_2/L_{22}) \vee (N_2/L_{21}) \vee (N_1/L_{12}),$$

definida por,

$$F_\tau(x) = \begin{cases} f_{22}^{21}(x) & \text{si } x \in N_2/L_{22} \\ f_{21}^{12}(x) & \text{si } x \in N_2/L_{21} \\ f_{12}^{22}(x) & \text{si } x \in N_1/L_{12} \end{cases}$$

Consideramos entonces $N_\tau = (N_2/L_{22}) \vee (N_2/L_{21}) \vee (N_1/L_{12})$ y $F_\tau : N_\tau \rightarrow N_\tau$ cuyo conjunto de puntos 3-periódicos cumple,

$$\text{Per}^3(F_\tau) \subset \text{Per}^3(N_2) \cup \{p_1, p_2, p'_1, p'_2, p''_1, p''_2\}.$$

Estos últimos darían origen a órbitas atractoras. Pasemos ahora a calcular el índice 3-simétrico de la aplicación F_τ . Sea $SP_3(F_\tau)$ la aplicación inducida por F_τ entre los productos simétricos y llamemos $SP_3(F_\tau)_*$ a los homomorfismos inducidos entre los correspondientes grupos de homología. Utilizando el teorema de Lefschetz-Hopf,

$$\Lambda(SP_3(F_\tau)_*) = i_n(SP_3(F_\tau), SP_3(N_\tau)).$$

Como F_τ está definida en la unión disjunta de tres discos, las trazas de los homomorfismos $SP_3(F_\tau)_*$ sólo pueden ser no triviales a nivel de componentes.

La única componente de $SP_3((N_2/L_{22}) \vee (N_2/L_{21}) \vee (N_1/L_{12}))$ que queda invariante por $SP_3(F_\tau)$ es la representada por,

$$SP_1(N_2/L_{22}) \times SP_1(N_2/L_{21}) \times SP_1(N_1/L_{12}).$$

Por tanto,

$$\Lambda(SP_3(F_\tau)_*) = 1.$$

Ahora teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} F_\tau(p_1) &= p'_2 & F_\tau(p'_2) &= p''_1 & F_\tau(p''_1) &= p_1 \\ F_\tau(p_2) &= p'_1 & F_\tau(p'_1) &= p''_2 & F_\tau(p''_2) &= p_2, \end{aligned}$$

por tanto los puntos fijos de $SP_3(F_\tau)$ se reducen a los de $SP_3(f)$ y dos atractores. De ahí se deduce que $1 = i_3(F_\tau) + 2$. Es decir que $i_3(F_\tau) = -1$ y por tanto, existe una órbita 3-periódica de f que sigue el itinerario elegido.

4. Existencia de órbitas periódicas en un conjunto compacto, invariante y aislado para un homeomorfismo plano que conserva la orientación

En esta sección demostraremos los resultados necesarios para el estudio de la existencia de órbitas periódicas de un sistema dinámico $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$, siendo $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto del plano. Para ello comenzaremos demostrando un teorema de descomposición para todo entorno aislante de un subconjunto compacto, invariante y aislado de \mathbb{R}^2 que sea unión disjunta de discos. Nos basaremos en el resultado presentado en la referencia [76].

PROPOSICIÓN 5.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto del plano. Sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto compacto, invariante y aislado. Sea M un entorno aislante de K tal que $K = \text{Inv}(M, f)$ y,*

$$M = M_1 \cup \dots \cup M_n,$$

siendo los M_j , $j = 1, \dots, n$, discos disjuntos. Entonces, existe un bloque aislante de K , $N \subset M$, con N unión finita de discos disjuntos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $k_0 \geq 1$ un número entero tal que,

$$\bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k}(M) \subset \text{int}(M).$$

Consideremos la familia $\{M_k\}_{0 \leq k \leq k_0}$, con $M_k = M_{k,1} \cup \dots \cup M_{k,n}$ unión de n discos disjuntos para todo k , tal que,

$$M_0 = M \quad , \quad M_{k,j} \subset \text{int}(M_{k+1,j}) \quad , \quad \bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k}(M_{k_0}) \subset \text{int}(M_0).$$

Por un teorema de Kerékjártó, [47] (véase también [21]), tenemos que la intersección de dos dominios de Jordan es una unión disjunta y numerable de dominios de Jordan. Entonces el conjunto,

$$\bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k}(\text{int}(M_{|k|})),$$

es una unión disjunta y numerable de dominios de Jordan. Tomemos $U = \cup_{j=1}^m U_j$ su conjunto de componentes conexas tales que $U_j \cap K \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \dots, m$. Puesto que K es compacto, U es una unión finita de dominios de Jordan con $m \geq n$. Además el conjunto,

$$X = \bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k}(\text{int}(M_{|k|})),$$

es un bloque aislante puesto que,

$$\begin{aligned}
& f^{-1}(X) \cap X \cap f(X) = \\
&= \bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k-1}(M_{|k|}) \bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k}(M_{|k|}) \bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k+1}(M_{|k|}) \\
&\subset \bigcap_{0 \leq k \leq k_0-1} f^{-k-1}(M_{|k|}) \bigcap_{-k_0 \leq k \leq k_0} f^{-k}(M_{k_0}) \bigcap_{-k_0+1 \leq k \leq 0} f^{-k+1}(M_{-k}) \\
&\subset \bigcap_{1 \leq k \leq k_0} f^{-k}(\text{int}(M_k)) \bigcap \text{int}(M_0) \bigcap_{-k_0 \leq k \leq 1} f^{-k}(M_{-k}) \subset \text{int}(X).
\end{aligned}$$

El conjunto $N_0 = \text{cl}(U)$ es un bloque aislante porque,

$$f^{-1}(N_0) \cap N_0 \cap f(N_0) \subset \text{int}(X) \cap N_0 \subset \text{int}(N_0).$$

Observemos que N_0 es una intersección finita de discos $\text{cl}(U_1) \cap \dots \cap \text{cl}(U_m)$ que pueden tener intersección no vacía. Entonces, definamos los dominios de Jordan $C(U_j) \subset U_j$ para $j = 1, \dots, m$, tales que $C(U) = \bigcap_{j=1}^m C(U_j)$ sea una unión finita de m dominios de Jordan con $N = \text{cl}(C(U))$ una unión finita de m discos disjuntos. Si elegimos los conjuntos $C(U_j)$ suficientemente grandes tales que $f^{-1}(N_0) \cap N_0 \cap f(N_0) \subset C(U)$ entonces tenemos que N es un bloque aislante porque $f^{-1}(N) \cap N \cap f(N) \subset f^{-1}(N_0) \cap N_0 \cap f(N_0) \subset \text{int}(N)$. \square

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico. Sea $K \subset U$ un subconjunto compacto invariante y aislado y sea el bloque aislante $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$, donde los N_j son discos disjuntos, $j = 1, \dots, m$ (cuya existencia hemos demostrado en la proposición 5.2). Según la proposición 5.2 tenemos que,

$$(40) \quad N = N_1 \cup \dots \cup N_m.$$

Además se cumple que $K \cap N_\delta \neq \emptyset$ para todo $\delta = 1, \dots, m$. Dado un itinerario $\tau : \{1, \dots, \alpha\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, queremos estudiar la existencia de órbitas periódicas en K que siguen cada ciclo,

$$\{N_{\tau(1)}, \dots, N_{\tau(\alpha)}\}.$$

Consideremos un par filtrante (N, L) de K tal que cada componente L_i de L sea un disco con el mínimo número posible de agujeros y $L_i \cap N^- \neq \emptyset$. Dividiremos nuestro estudio en los siguientes tres casos que se corresponden con la búsqueda de órbitas periódicas repulsoras, órbitas periódicas atractoras y órbitas periódicas ni atractoras ni repulsoras, respectivamente.

$$(41) \quad \text{CASOS}$$

Caso (A). Existe una componente de L , $L_{\tau(\delta)} \subset N_{\tau(\delta)}$, con un agujero $G_{\tau(\delta)}$. Demostraremos entonces que existe una órbita periódica en K que sigue el itinerario τ si $f(G_{\tau(\delta)}) \supset G_{\tau(\delta+1)}$ $\forall \delta = 1, \dots, \alpha$.

Caso (B). Existe $N_{\tau(\delta)}$ tal que $L \cap N_{\tau(\delta)} = \emptyset$. Entonces demostraremos que existe una órbita en K que sigue el itinerario τ si $f(N_{\tau(\delta)}) \subset N_{\tau(\delta+1)}$ $\forall \delta = 1, \dots, \alpha$.

Caso (C). Ninguno de los anteriores.

Caso (A)

EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS REPULSORAS

Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto, invariante y aislado y $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$ un bloque aislante de K , unión finita de discos disjuntos y tal que $K = \text{Inv}(N, f)$. Las componentes de K tiene *shape* trivial y, por tanto, K tiene *shape* trivial (en este caso eso significa que $\mathbb{R}^2 \setminus K_\delta$ es conexo para cada componente K_δ de K , véase [10]).

Por un teorema de Franks y Richeson (véase [35]) tenemos que existe un par filtrante (N, L) tal que L es un entorno de N^- , que admite una descomposición del tipo $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ y tal que cada componente L_δ de L es un disco (proposición 5.2) con el *mínimo número posible de agujeros* y cumpliendo $L_\delta \cap N^- \neq \emptyset$. Supondremos, según las hipótesis del caso (A), que dicha componente L_δ de L tiene el mínimo número de agujeros.

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ y sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico. Sea $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$ la descomposición de N en un número finito de discos disjuntos. Sea L_1 una componente de L , con $L_1 \subset N_1 \subset N$ y tal que L_1 tiene un agujero G_1 . Entonces $K_1 = K \cap G_1$ es un conjunto no vacío con *shape* trivial, y, si definimos,*

$$K_2 = f(K_1) \subset N_2, \dots, K_\delta = f(K_{\delta-1}) \subset N_\delta, \dots,$$

entonces el conjunto K_1 determina un ciclo repulsor de longitud q , es decir, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que,

$$K_1 = N_1 \cap K, \quad K_2 = f(K_1) = N_2 \cap K, \dots, K_q = f(K_{q-1}) = N_q \cap K,$$

y,

$$K_1 = f(K_q) = N_1 \cap K,$$

con $\bigcup_{\delta=1}^q K_\delta = K$.

DEMOSTRACIÓN. Esta es la proposición 2 de [76]. □

No es difícil demostrar que si la primera componente de L posee un agujero, entonces el resto también poseen exactamente un agujero.

COROLARIO 5.4. *Bajo las hipótesis de la proposición 5.3 deducimos que existe una órbita periódica repulsora de periodo q que sigue el ciclo,*

$$\{N_1, \dots, N_q\}.$$

Es más, cada órbita de K con un punto en $N_1 \cup \dots \cup N_q$ sigue el ciclo,

$$\{\dots, N_1, N_2, \dots, N_r, N_1, N_2, \dots\}.$$

Caso (B)

EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS ATRACTORAS

Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto, invariante y aislado y $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$ un bloque aislante de K unión finita de discos disjuntos y tal que $K = \text{Inv}(N, f)$. Las componentes de K tiene *shape* trivial y, por tanto, K tiene *shape* trivial (en este caso eso significa que $\mathbb{R}^2 \setminus K_\delta$ es conexo para cada componente K_δ de K , véase [10]).

Por un teorema de Franks y Richeson (véase [35]) tenemos que existe un par filtrante (N, L) tal que L es un entorno de N^- , que admite una descomposición del tipo $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ y tal que cada componente L_δ de L es un disco (proposición 5.2) con el *mínimo número posible de agujeros* y cumpliendo $L_\delta \cap N^- \neq \emptyset$. Supondremos, según las hipótesis del caso (B), que existe una componente N_δ de N tal que $L \cap N_\delta = \emptyset$ y que ninguna de las componentes de L tiene agujeros.

PROPOSICIÓN 5.5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ y sea $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico. Tomemos (N, L) un par filtrante tal que L es un entorno de N^- , $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ unión disjunta y tal que cada componente L_δ de L sea un disco. Sea $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$ la descomposición de N en un número finito de discos disjuntos. Sea N_1 una componente de N , con $L \cap N_1 = \emptyset$. Entonces $K_1 = K \cap N_1$ es un conjunto no vacío con *shape* trivial, y, si definimos,*

$$K_2 = f^{-1}(K_1) \subset N_2, \dots, K_\delta = f^{-1}(K_{\delta-1}) \subset N_\delta, \dots,$$

entonces el conjunto K_1 determina un ciclo atractor de longitud q , es decir, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que,

$$K_1 = N_1 \cap K, \quad K_2 = f^{-1}(K_1) = N_2 \cap K, \dots, K_q = f^{-1}(K_{q-1}) = N_q \cap K,$$

y,

$$K_1 = f^{-1}(K_q) = N_1 \cap K,$$

con $\cup_{\delta=1}^q K_\delta = K$.

DEMOSTRACIÓN. Esta es la proposición 3 de [76]. □

COROLARIO 5.6. *Bajo las hipótesis de la proposición 5.5 deducimos que existe una órbita periódica atractora de periodo q que sigue el ciclo,*

$$\{N_1, \dots, N_q\}.$$

Es más, cada órbita de K con un punto en $N_1 \cup \dots \cup N_q$ sigue el ciclo,

$$\{\dots, N_1, N_2, \dots, N_r, N_1, N_2, \dots\}.$$

Caso (C)

EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS NI ATRADORAS NI REPULSORAS

Esta situación es la más interesante y a ella dedicaremos el resto del capítulo. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto, invariante y aislado y $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$ un bloque aislante de K unión finita de discos disjuntos y tal que $\text{Inv}(N, f)$.

Por un teorema de Franks y Richeson (véase [35]) tenemos que existe un par filtrante (N, L) tal que L es un entorno de N^- , que admite una descomposición del tipo $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ y tal que cada componente L_δ de L es un disco (proposición 5.2) con el *mínimo número posible de agujeros* y cumpliendo $L_\delta \cap N^- \neq \emptyset$. Supondremos, según las hipótesis del caso (C), que no existe ninguna componente N_δ de N tal que $L \cap N_\delta = \emptyset$ y que las componentes de L no tienen ningún agujero.

En primer lugar veamos la existencia de ciclos filtrantes.

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea (N, L) un par filtrante en las condiciones del caso (C) de (41) y sea τ un itinerario fijo. Entonces existe un ciclo filtrante (N_τ, L_τ) asociado al itinerario τ .*

DEMOSTRACIÓN. Utilizando la proposición 4 de [76] y bajo las condiciones del caso (C) de (41), tenemos que existe un ciclo filtrante (N_τ, L_τ) que cumple,

1. $\text{Per}_\tau(N_{\tau(\delta)}) = \{x \in N_{\tau(\delta)} : f^\alpha(x) = x \text{ y } x \text{ sigue el itinerario } \tau\} \subset \text{int}(N_{\tau(\delta)}) \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}$.
2. $f(\text{cl}(N_{\tau(\delta)}) \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) \subset \text{int}(N_{\tau(\delta+1)})$.
3. Para cada disco $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s$ de $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}$ tenemos que $\partial_N L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s$ es una unión finita de arcos, y,

$$f(\partial_N L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s) \subset \text{int}(L_{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)})$$

y

$$L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^s \cap N^- \neq \emptyset.$$

□

La estrategia a seguir ahora es la siguiente: queremos estudiar la existencia de órbitas periódicas para un sistema dinámico f plano que conserva la orientación; lo que haremos será construir una aplicación F inducida por f y un ciclo filtrante de manera que, aplicando el corolario 1.12 podamos deducir que $i_n(f, K) = i_n(F, K)$ para cada

K conjunto compacto, invariante y aislado y cada $n \in \mathbb{N}$. Después de construir F queremos aplicar una estrategia parecida a la ya utilizada en la sección 2 del capítulo 2 e ilustrada en el ejemplo de la herradura de Smale en la sección 3 del capítulo 5.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto del plano y $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico que conserva la orientación. Tomemos K un conjunto compacto, invariante y aislado por una cantidad finita de discos. Sea $N \subset U$ un bloque aislante de K con $N = N_1 \cup \dots \cup N_m$ unión disjunta de discos (véase proposición 5.2) y sea $\tau : \{1, \dots, \alpha\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ un itinerario. Si existe un ciclo filtrante,

$$(N_\tau, L_\tau) = \{(N_{\tau(1)}, L_{\tau(1)\tau(2)}), (N_{\tau(2)}, L_{\tau(2)\tau(3)}), \dots, (N_{\tau(\alpha)}, L_{\tau(\alpha)\tau(1)})\},$$

tal que las componentes L_τ de L sean discos y las fronteras $\partial(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)})$ sean homeomorfas a S^1 , determinaremos la existencia de órbitas periódicas que siguen el itinerario τ .

Consideremos el espacio $\text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim$ construido identificando cada disco de la descomposición de $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}$ a un punto,

$$(42) \quad p_{\delta\gamma} \text{ con } \gamma = 1, \dots, m$$

siendo m el número de discos de $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}$ para cada $\delta = 1, \dots, \alpha$. Definamos las aplicaciones continuas,

$$(43) \quad f_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)} : \text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim \rightarrow \text{cl}(N_{\tau(\delta+1)} \setminus L_{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}) / \sim,$$

con $f_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}([x]) = f([x])$. Estas aplicaciones son tales que,

$$f_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}(\{p_{\delta 1}, \dots, p_{\delta m}\}) \subset \{p_{(\delta+1)1}, \dots, p_{(\delta+1)m}\},$$

donde $\{p_{(\delta+1)1}, \dots, p_{(\delta+1)m}\}$ es la familia de puntos obtenidos colapsando cada componente de $L_{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}$ a un punto distinto.

Puesto que para cada componente $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^{\gamma_1}$ de $L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}$, con $\gamma_1 \in \{1, \dots, m\}$, existe una componente $L_{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}^{\gamma_2}$ de $L_{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}$, con $\gamma_2 \in \{1, \dots, m\}$, tal que $f(\partial_{N_{\tau(\delta)}} L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^{\gamma_1}) \subset \text{int}(L_{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}^{\gamma_2})$, entonces obtenemos un entorno $U(p_{\delta\gamma_1})$ de $p_{\delta\gamma_1}$ tal que,

$$f_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}(U(p_{\delta\gamma_1})) = p_{(\delta+1)\gamma_2},$$

para $p_{(\delta+1)\gamma_2} \in \{p_{(\delta+1)1}, \dots, p_{(\delta+1)m}\}$.

Definimos ahora la siguiente aplicación,

$$F_\tau : \bigvee_{\delta=1}^{\alpha} \text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim \rightarrow \bigvee_{\delta=1}^{\alpha} \text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim,$$

Dada por,

$$(44) \quad F_\tau(x) = f_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}^{\tau(\delta+1)\tau(\delta+2)}(x) \quad \text{para cada } x \in \text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim.$$

Usando la notación $N_\tau = \bigvee_{\delta=1}^{\alpha} \text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim$, estamos considerando la aplicación $F_\tau : N_\tau \rightarrow N_\tau$ cuyo conjunto de puntos n -periódicos cumple,

$$(45) \quad \text{Per}^n(F_\tau) \subset \text{Per}_\tau^n(N_\tau) \cup \{p_{11}, \dots, p_{1m}, \dots, p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m}\}.$$

DEFINICIÓN 5.8. (véase [78]) Sea $\theta_\delta = \{p'_{\delta 1}, \dots, p'_{\delta \omega(\delta)}\} \subset \{p_{\delta 1}, \dots, p_{\delta m}\}$ un subconjunto sobre el que F_τ actúe como una permutación. Si existe un arco $\varphi \subset \partial(N_{\tau(1)} \setminus L_{\tau(1)\tau(2)}) / \sim$ que une $p'_{\delta \omega_1}, p'_{\delta \omega_2} \in \theta_\delta$ y tal que $\varphi \cap \theta_\delta = \{p'_{\delta \omega_1}, p'_{\delta \omega_2}\}$, entonces diremos que $p_{\delta \omega_1}, p_{\delta \omega_2}$ son adyacentes en θ_δ para F_τ .

COROLARIO 5.9. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ subconjunto abierto del plano y $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico que conserva la orientación. Sea K un conjunto compacto, invariante y aislado por una familia de discos, conteniendo al punto fijo p y $N \subset U$, bloque aislante de K , unión finita de discos. Sea $\tau : \{1, \dots, \alpha\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ un itinerario, sea la aplicación F_τ construida en (44) y los puntos $\{p_{\delta 1}, \dots, p_{\delta m}\}$ construidos en (42), para cada $\delta = 1, \dots, \alpha$. Entonces, todas las órbitas periódicas de F_τ en $\{p_{11}, \dots, p_{1m}, \dots, p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha m}\}$ tienen el mismo periodo q .

DEMOSTRACIÓN. Este corolario es consecuencia de la proposición 6 de [76]. \square

TEOREMA 5.10. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ subconjunto abierto del plano y $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un sistema dinámico que conserva la orientación. Sea K un conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo a todas las órbitas ni atractoras ni repulsoras de f y $N \subset U$ un bloque aislante de K . Sea $\tau : \{1, \dots, q\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ un itinerario y sea,

$$(N_\tau, L_\tau) = \{(N_{\tau(1)}, L_{\tau(1)\tau(2)}), (N_{\tau(2)}, L_{\tau(2)\tau(3)}), \dots, (N_{\tau(q)}, L_{\tau(q)\tau(1)})\},$$

un ciclo filtrante tal que las componentes de $L_{\tau(\delta)}$ sean discos y las fronteras $\partial(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)})$ sean homeomorfas a S^1 , para todo $\delta = 1, \dots, q$. Entonces,

$$i_n(F_\tau, \text{Per}_\tau(N_\tau)) = \begin{cases} (-1)^{[n/q]} \binom{m-1}{[n/q]} & \text{si } q \mid n \\ 0 & \text{si } q \nmid n \end{cases},$$

donde m es el número de órbitas periódicas de F_τ en $\{p_{11}, \dots, p_{1m}, \dots, p_{q1}, \dots, p_{qm}\}$ y q es el periodo de cada una de las órbitas.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es completamente análoga a la del teorema 1 de [76], veámoslo. Comencemos recordando (45),

$$\text{Per}^n(F_\tau) \subset \text{Per}_\tau^n(N_\tau) \cup \{p_{11}, \dots, p_{1m}, \dots, p_{q1}, \dots, p_{qm}\}.$$

Sea $K = K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_m$ con K_0 conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo a las órbitas periódicas de F_τ que se encuentran en $\text{Per}_\tau^n(N_\tau)$ y de manera que K_j sea un conjunto compacto, invariante y aislado conteniendo a una de las q -órbitas de la aplicación

F_τ en el conjunto $\{p_{11}, \dots, p_{1m}, \dots, p_{q1}, \dots, p_{qm}\}$. Esa descomposición de K se puede realizar porque el bloque aislante N se puede dividir en discos disjuntos (véase proposición 5.2) y, tanto $\text{Per}_\tau^n(N_\tau)$ como cada una de las órbitas periódicas, se encuentran en distintos discos de la descomposición de N (ver la definición 5.8 y al corolario 5.9). Llamemos,

$$M = \bigvee_{\delta=1}^{\alpha} \text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim,$$

al dominio de definición de la aplicación F_τ y tengamos en cuenta que M es un AR (véase [8]).

Por la propiedad de escisión del índice n -simétrico,

$$i_n(f, K) = i_n(f, M).$$

Aplicando el teorema de Lefschetz-Hopf (véanse [51], [31], [46]),

$$i_n(f, M) = \Lambda(SP_n(f)).$$

En caso de que $q \nmid n$ la aplicación $SP_n(f)$ no tendría puntos fijos (en $\bigvee_{\delta=1}^{\alpha} \text{cl}(N_{\tau(\delta)} \setminus L_{\tau(\delta)\tau(\delta+1)}) / \sim$ dominio de definición de F_τ) por lo que, según el teorema del punto fijo de Lefschetz (véanse [50], [51] o [17]) $\Lambda(SP_n(f)) = 0$. Por tanto,

$$i_n(f, K) = 0 \quad \text{si } q \nmid n.$$

Supongamos ahora que $q \mid n$ y mantengamos esta condición hasta el final de la demostración. Como M es un AR entonces $SP_n(M)$ también lo es (por la retracción natural inducida), y, en ese caso, como todo AR es contractible (véase [45]), todos los grupos de homología de $SP_n(M)$ serían cero excepto el $H_0(SP_n(M)) = \mathbb{Z}$. Por otra parte, acudiendo a la definición de número de Lefschetz (véanse [31], [87], [46]),

$$\Lambda(SP_n(f)) = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \text{tr}(H_j(SP_n(f))) = 1.$$

Juntando todo lo anterior,

$$i_n(K) = 1.$$

Usando la propiedad aditiva generalizada demostrada en la Proposición 1.10,

$$\sum_{\substack{j_s=0 \\ \sum_{s=0}^n j_s=n}} i_{j_0}(K_0) \dots i_{j_m}(K_m) = 1.$$

Como las órbitas periódicas de F_τ contenidas en el conjunto $\{p_{11}, \dots, p_{1m}, \dots, p_{q1}, \dots, p_{qm}\}$ son atractoras,

$$i_{j_s}(K_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid j_s \\ 0 & \text{si } q \nmid j_s, \end{cases}$$

$\forall j_s \in \{0, \dots, n\}$ y $\forall s \in \{1, \dots, m\}$, y haciendo los cambios de subíndice de sumación $j_s = q\tilde{j}_s \quad \forall s \in \{1, \dots, m\}$ se obtiene,

$$(46) \quad \sum_{\substack{j_0=0 \\ j_0+q\tilde{j}_1+\dots+q\tilde{j}_m=n}}^n \sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_s=0}}^{\lfloor n/q \rfloor} i_{j_0}(K_0) \cdot i_{q\tilde{j}_1}(K_1) \dots i_{q\tilde{j}_m}(K_m) = 1.$$

Recordemos ahora que $q \mid n$ y llamemos $n = N \cdot q$ donde $N = \lfloor n/q \rfloor$. Haciendo ahora el cambio de subíndice de sumación $j_0 = q\tilde{j}_0$ se nos queda,

$$\sum_{\substack{\tilde{j}_0=0 \\ q\tilde{j}_0+q\tilde{j}_1+\dots+q\tilde{j}_m=qN}}^{\lfloor n/q \rfloor} \sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_s=0}}^{\lfloor n/q \rfloor} i_{q\tilde{j}_0}(K_0) \cdot i_{q\tilde{j}_1}(K_1) \dots i_{q\tilde{j}_m}(K_m) = 1.$$

Es decir,

$$\sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_0+\dots+\tilde{j}_m=\lfloor n/q \rfloor}}^{\lfloor n/q \rfloor} i_{q\tilde{j}_0}(K_0) \cdot i_{q\tilde{j}_1}(K_1) \dots i_{q\tilde{j}_m}(K_m) = 1.$$

Utilizando de nuevo el dato,

$$i_{j_s}(K_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid j_s \\ 0 & \text{si } q \nmid j_s, \end{cases}$$

$\forall j_s \in \{0, \dots, n\}$ y $\forall s \in \{1, \dots, m\}$ la suma anterior se puede escribir de la siguiente manera,

$$\sum_{\tilde{j}_0=0}^{\lfloor n/q \rfloor} i_{q\tilde{j}_0}(K_0) \left(\sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_1+\dots+\tilde{j}_m=\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0}}^{\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0} 1 \right) = 1.$$

Usando el concepto de combinación con repetición queremos meter $\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0$ bolas en m urnas de modo que pueda haber repetición. Entonces,

$$\sum_{\substack{\tilde{j}_s=0 \\ \tilde{j}_1+\dots+\tilde{j}_m=\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0}}^{\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0} 1 = \binom{\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0 + m - 1}{\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0} = \binom{\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0 + m - 1}{m - 1}.$$

Por tanto,

$$\sum_{\tilde{j}_0=0}^{\lfloor n/q \rfloor} \binom{\lfloor n/q \rfloor - \tilde{j}_0 + m - 1}{m - 1} i_{q\tilde{j}_0}(K_0) = 1.$$

O escribiéndolo con índice j ,

$$\sum_{j=0}^{[n/q]} \binom{[n/q] - j + m - 1}{m - 1} i_{qj}(K_0) = 1.$$

Recordemos ahora la notación,

$$i_0(K_0) = 1.$$

Tomando la sucesión $a_j = i_{qj}(K_0)$ y $[n/q]$ en vez de n , se cumplen las condiciones del Lema 2.5 y se puede concluir que,

$$i_n(K_0) = (-1)^{[n/q]} \binom{m - 1}{[n/q]} \quad \text{si } q \mid n.$$

□

OBSERVACIÓN 5.11. Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y $f : U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo local con $N \subset U$ un bloque aislante union de n -discos disjuntos. Consideremos Σ_n el espacio de sucesiones bi-infinitas de símbolos en $\{1, 2, \dots, n\}$ con la topología producto. Sea $s : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ la función *shift*. Supongamos que la función $\sigma : K \rightarrow \Sigma_n$, definida por $\sigma(x) = \sigma_i$ con $\sigma_i = j \in \{1, 2, \dots, n\}$ si $f^i(x) \in N_j$, es continua. Entonces, si para cada itinerario τ $i_n(F_\tau) \neq 0$ tenemos que σ es una función suprayectiva tal que $\sigma \circ f = s \circ \sigma$ y para todo $\alpha \in \Sigma_n$ punto periódico, $\sigma^{-1}(\alpha)$ contiene puntos periódicos con el mismo periodo. Así, f tiene comportamiento caótico en el compacto invariante aislado K .

Bibliografía

- [1] M.Aguilar, S.Gitler, C.Prieto, *Topología algebraica: un enfoque homotópico*. McGraw Hill, México 1998.
- [2] J.M.Alonso, J.Campos, *The index and the asymptotic stability of fixed points in two dimensions: a counterexample*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. 32 (1998) 719-725.
- [3] S.A.Andrea, *On homeomorphisms of the plane which have no fixed points*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 30 (1967), 61-74.
- [4] A.S. Besicovitch, *A problem on topological transformation of the plane*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 47 (1951), 38-45.
- [5] A.S. Besicovitch, *A problem on topological transformation of the plane II*, Fund. Math. 28 (1973), 61-65.
- [6] N.P.Bhatia, G.P.Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Springer, Berlin, 1970.
- [7] G.D.Birkhoff, *Sur quelques courbes fermées remarquables*, Bull. Soc. Math. de France 60 (1932), 1-26.
- [8] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne 44 (PWN, Warsaw, 1967).
- [9] K. Borsuk, *Theory of shape*, Lecture Notes Ser. No 28, Mat. Inst. Aarhus Univ. (1971).
- [10] K. Borsuk, *Theory of shape*, Monografie Matematyczne 59 (PWN, Warsaw, 1975).
- [11] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931) 875-882.
- [12] F.E. Browder, W.V. Petryshyn, *The topological degree and Galerkin approximation for noncompact operators in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968) 641-646.
- [13] L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. 72 (1912) 37-54.
- [14] M.Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston Journal of Math. 10 (1984) 35-41.
- [15] M.Brown, *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*, Houston Journal of Math. 11 (1985) 455-469.
- [16] M.Brown, *On the fixed point index of iterates of planar homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990) 1109-1114.
- [17] R.F.Brown, *The Lefschetz fixed point theorem*. Scott, Foresman and Company (1971) Glenview, Illinois.
- [18] C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Annalen, 73 (1913) 323-370.
- [19] E.Coddington, N.Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Tata McGraw-Hill Publishing Co. New Delhi, 1955.
- [20] C. C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS, 38, A.M.S. Providence R. I., 1978.

- [21] C.O.Christenson, W.L. Voxman, *Aspects of Topology*, BCS Associates, Moscow, 1998.
- [22] D. W. Curtis, *Hyperspaces of noncompact metric spaces*. Compositio Math. 40, 2 (1980) 139-152.
- [23] E.N. Dancer, *Upper and lower stability and index theory for positive mappings and applications*, Nonlinear Analysis, 17 (1991), 205-217.
- [24] E.N.Dancer, R.Ortega, *The index of Lyapunov stable fixed points*, Journal of Dynamics and Diff. Equations, 6 (1994) 631-637.
- [25] M. Degiovanni, M. Mrozek, *The Conley index for maps in absence of compactness*, Pro. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123 (1993) 75-94.
- [26] K.Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [27] R.L.Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Publishing Comp. 1987.
- [28] A. Dold, *Fixed point indices of iterated maps*, Invent. Math., 74 (1983), 419-435.
- [29] A. Dold, *Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts*, Topology, 4 (1965), 1-8.
- [30] A. Dold, *Homology of symmetric products and other functors of complexes*, Ann. of Math. 68 (1958),54-80.
- [31] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1972.
- [32] J.Dugundji, A.Granas, *Fixed point theory*, Monografie Matematyczne, Warszawa, PWN-Polish Scientific Publishers (1982).
- [33] J. Franks, *The Conley index and non-existence of minimal homeomorphisms*, Illinois Journal of Math. 43 (1999), 3, 457-464.
- [34] J. Franks, *A new proof of the Brouwer plane translation Theorem*, Ergod. Th. Dyn. Sys. 12 (1992) 217-226.
- [35] J.Franks, D.Richeson, *Shift equivalence and the Conley index*, Trans. Amer. Math. Soc. 352, 7 (2000) 3305-3322.
- [36] R.L. Frum-Ketkov, *Mappings into a Banach space sphere*, Dokl. Akad. Nauk., SSSR, 175 (1967) 1229-1231- Soviet. Math. Dokl., 8 (1967), 1004-1007.
- [37] A. Granas, *Generalizing the Hopf-Lefschetz fixed point theorem for non-compact ANR's*, Symposium on infinite dimensional topology (1972) Baton Rouge.
- [38] A. Granas, *The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972) 209-228.
- [39] M.Handel, *There are no minimal homeomorphisms of the multipunctured plane*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 12 (1992), 75-83.
- [40] M.Handel, *A fixed point theorem for planar homeomorphisms*, Topology, 26 (1999) 235-264.
- [41] L. Hernández Corbato, *On the dynamics of homeomorphisms around fixed points in low dimension*, tesis doctoral, UCM 2013.
- [42] L.Hernández-Corbato, P. Le Calvez, F.R. Ruiz del Portal, *About the homological Conley index of isolated acyclic invariant compacta*, Geom. Topol. 17 (2013) 2977-3026.
- [43] M.W.Hirsch, *Fixed-point indices, homoclinic contacts and dynamics of injective planar maps*, Michigan Math. J. 47 (2000) 101-108.
- [44] M.W.Hirsch, *Periodic orbits and homoclinics loops for surface homeomorphisms*, Michigan Math. J. 47 (2000) 395-406.
- [45] S. T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
- [46] J. Jezierski, W. Marzantowicz, *Homotopy methods in topological fixed and periodic point theory*, Springer, 2006.
- [47] B. Kerékjarto, *Voresungen über Topologie (I)*, Springer, Berlin 1923.

- [48] M. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [49] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc. (1930).
- [50] S. Lefschetz, *On the fixed point formula*, Annals of Math. 38 (1937) 819-822.
- [51] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc., (1942).
- [52] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 51 (1934), 45-78.
- [53] P. Le Calvez, *Une propriété dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice > 1* , Topology, 38 (1999) 23-35.
- [54] P. Le Calvez, *Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 1, 139-171.
- [55] P. Le Calvez, J.-C. Yoccoz, *Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe*, Annals of Math. 146 (1997) 241-293.
- [56] S. Mardešić, J. Segal, *Shapes of compacta and ANR-systems*, Fund. Math. 72 (1971) 41-59.
- [57] S. Mardešić, J. Segal, *Shape theory*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [58] S.Masih, *Fixed points of symmetric product mappings of polyhedra and metric absolute neighborhood retracts*, Fund. Math, 80 (1973) 149-156.
- [59] S.Masih, *On the fixed point index and the Nielsen fixed point theorem of symmetric product mappings*, Fund. Math, 102 (1979) 143-158.
- [60] J.N. Mather, *Topological proof of some purely topological consequences of Carathéodory's theory of prime ends*, Selected Studies, North Holland Publis. Cod. Eds. Th.M. Rassias, G.M. Rassias (1982), 225-255.
- [61] R.D. Mauldin, ed., *The Scottish book*, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [62] M.Mrozek, *Index pairs and the fixed point index for semidynamical systems with discrete time*, Fund. Math. 133 (1989) 179-194.
- [63] M.Mrozek, *Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 318, 1 (1990) 149-178.
- [64] M.Mrozek, *Shape index and other indices of Conley type for local maps on locally compact Hausdorff spaces*, Fund. Math. 145, 1, (1994) 15-37.
- [65] M. Mrozek, K. P. Rybakowski, *A cohomological Conley index for maps on metrics spaces*, J. Diff. Equations 90, 143-171 (1991).
- [66] R.D.Nussbaum, *Generalizing the fixed point index*, Math. Ann. 228 (1977), 259-278.
- [67] R.D.Nussbaum, *The fixed point index and some applications*, Séminaire de Mathématiques supérieures, Les presses de L'Université de Montréal, 1985.
- [68] R. Ortega, *Some applications of the topological degree to stability theory*, Topological Methods in Dif. Equat. and Inclusions, ed. A. Granas and M. Frigon. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995, 377-410.
- [69] R. Ortega, F.R. Ruiz del Portal, *Attractors with vanishing rotation number*, J. Eur. Math. Soc. 13, no 6, 1569-1590.
- [70] J.C.Oxtoby, *Measure and category*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [71] S.Pelikan, E.E. Slaminka, *A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds*, Ergodic Th. and Dynamical systems, 7 (1987) 463-479.
- [72] R. Pérez-Marco, *Fixed points and circles maps*, Acta Math. 179 (1997) 243-294.
- [73] Ch. Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 299, 1992, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [74] N.Rallis, *A fixed point index theory for symmetric product mappings*, Manuscripta Math. 44 (1983) 279-308.

- [75] J. W. Robbin, D. Salamon, *Dynamical systems, shape theory and the Conley index*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1988), 8, 375-393.
- [76] F.R. Ruiz del Portal, J.M. Salazar, *Fixed point index and descompositions of isolated invariant compacta*, Topology and its Applications, 141 (2004) 207-223.
- [77] F.R. Ruiz del Portal, J.M. Salazar, *Fixed point index in hyperspaces: a Conley-type index for discrete semidynamical systems*, J. London Math. Soc.,(2) 64 (2001) 191-204.
- [78] F.R. Ruiz del Portal, J. M. Salazar, *Fixed point index of iterations of local homeomorphisms of the plane: a Conley index approach*, Topology,41 (2002) 1199-1212.
- [79] F.R. Ruiz del Portal, J.M. Salazar, *A Poincaré formula for the fixed point indices of planar homeomorphisms*, Fixed Point Theory and Appl. (2010) ID233069, 1-31.
- [80] F.R. Ruiz del Portal, J. M. Salazar, *Shape index in metric spaces*, Fund. Math., 176 (2003) 47-62.
- [81] J.M. Salazar, *Índice de punto fijo en hiperespacios e índice de Conley*, Tesis Doctoral, 2001.
- [82] J.M. Salazar, *Fixed point index in symmetric products*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005) 3493-3005.
- [83] M.Shub and D.Sullivan, *A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps*, Topology, 13 (1974), 189-191.
- [84] C.P.Simon, *A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics*, Inventiones Math. 26 (1974) 187-200.
- [85] S.Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points*, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 73 (1964), 63-80.
- [86] S.Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.
- [87] E.Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, NY, 1966.
- [88] A.Szymczak, *The Conley index for discrete semidynamical systems*, Topology and its Appl. 66 (1995) 215-240.
- [89] A.Szymczak, *The Conley index for decompositions of isolated invariant sets*, Fund. Math. 148 (1995) 71-90.
- [90] A.Szymczak, *The Conley index and symbolic dynamics*, Topology, 35, 2 (1996) 287-299.
- [91] A. Szymczak *A cup product pairing and time-duality for discrete dynamical systems*, Topology 37 (1998) 1299-1311.
- [92] H.C. Wagner, *Symmetric, cyclic, and permutation products*, Dissertationes Mathematicae, CLXXII, 1980.
- [93] R. Walker, *Periodicity and descomposability of basin boundaries with irrational maps on prime ends*, Trans. Amer. Math. Soc., 324 (1991), n°1, 303-317.
- [94] T. Ważewski, *Sur un principe topologique pour l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math., 20 (1947), 279-313.
- [95] H. S. F. Wong, *The topological degree of A-proper maps*, Canad. J. Math. 23 (1971), 403-412.