

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Ecuaciones Funcionales



TESIS DOCTORAL

**Unicidad y aproximación en ciertos problemas elásticos no
lineales**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Emilio Garbayo Martínez

DIRECTOR:

Albert Dou

Madrid, 2015

Emilio Garbayo Martínez

TP
1983

213



* 5 3 0 9 8 6 2 2 9 8 *
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

x-53-166864-8

UNICIDAD Y APROXIMACION
EN CIERTOS PROBLEMAS ELASTICOS NO LINEALES

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

1983



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. Nº 213/83

© Emilio Garbayo Martínez
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1983
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-32320-1983

UNICIDAD Y APROXIMACION
EN CIERTOS PROBLEMAS ELASTICOS NO LINEALES

Tesis presentada para
optar al grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas, por
EMILIO GARBAYO MARTINEZ
de 1982

PROLOGO

Los orígenes y motivación del presente trabajo son algo remotos. Arrancan de un problema de ingeniería que me fue comunicado hacia 1968, por un antiguo compañero de curso, José María Octavio de Toledo, el cual estaba tratando de calcular la carga crítica de pandeo de un arco circular sometido a su peso propio.

Daba la impresión de que este problema debía ya estar resuelto y publicado en forma standard, pero nuestras búsquedas bibliográficas y consultas a expertos (mucho más sistemáticas y conscientes las de Octavio de Toledo en aquel entonces, que las mías) no dieron resultado o tuvieron insatisfactoria respuesta. De modo natural, surgió entonces la necesidad de investigar el problema directamente, lo que fuimos haciendo de modo independiente, por líneas cada vez más dispares y en forma, al menos por mi parte, un tanto fragmentaria en el tiempo. En distintas circunstancias y épocas acudimos ambos, en busca de orientación para el problema que se mostraba con múltiples ramificaciones, al profesor Alberto Dou, quien nos animó en cada ocasión a seguir elaborando los aspectos más profundos que mostraba la tarea emprendida.

En el curso de las investigaciones, la necesidad de generalizar el problema se me aparecía cada vez más natural. Después de cada solución parcial, el problema cobraba mayor coherencia si se planteaba en términos más generales y así se fueron dejando paulatinamente de lado, cada una de las hipótesis simplificadoras, más comunes en ingeniería civil: desplazamientos "infinitesimales", linealidad de las deformaciones respecto a los desplazamientos, li

nealidad entre tensiones y deformaciones, etc... etc.

En un cierto momento (curso académico 72-73) los trabajos emprendidos parecieron adquirir fuste suficiente para una posible tesis, lo que confirmó la animosa y experimentada opinión del profesor Dou, por lo que ésta se preinscribió bajo su dirección. En los años transcurridos, la velocidad de investigación ha pasado por altibajos, con mínimos condicionados a menudo por los imperativos del vivir cotidiano, habiendo dado lugar a varias publicaciones relacionadas con la tesis presentada, pero de contenido sustancialmente diferenciado.

Solo me resta agradecer al profesor Alberto Dou la ayuda prestada, tanto en la tesis como en las publicaciones previas. Agradezco que es obligado extender a mi compañero José María Octavio por haberme proporcionado tan fructífero motivo de reflexión.

INTRODUCCION

AMBITO DEL ESTUDIO.-El presente trabajo se sitúa en el ámbito de los sistemas elásticos unidimensionales, es decir, sistemas cuya configuración se describe mediante un número finito de funciones en un cierto intervalo real $[s_0, s_1]$, cerrado y acotado. Nos limitaremos a considerar sistemas de directriz siempre contenida en un plano fijo. Las fuerzas exteriores que se consideran actantes son las que derivan del peso propio, si bien todos los métodos se generalizan sin ninguna dificultad, al caso de fuerzas que derivan de un potencial y conservan su dirección y magnitud (cargas "muertas") durante la deformación del sistema elástico.

En los restantes aspectos trabajaremos con generalidad poco usual, considerando una completa no linealidad del sistema. Lo que se refiere, por una parte, a la llamada "no linealidad mecánica" expresada mediante un potencial elástico $W_1(A, B, s)$ que no tiene por qué ser de la típica forma de Hooke $\lambda A^2 + \mu B^2$, y al que solo supondremos satisfacer condiciones físico-matemáticas de un orden muy general. Por otra parte, consideraremos también completa no linealidad geométrica con desplazamientos de magnitud arbitraria, sin limitarnos al tratamiento usual de considerarlos "infinitesimales" ni tampoco a aquél que, considerándolos "finitos", presupone que las deformaciones asociadas pueden tratarse como "infinitesimales".

PANORAMA RESUMIDO DE METODOS Y RESULTADOS.- El primer capítulo

abarca solamente cuestiones de formulación. Se trata de una generalización de lo que en Geometría Diferencial se conoce como ecuación intrínseca de una curva, generalización por la cual se establece una correspondencia biyectiva entre las posibles funciones desplazamiento que pertenecen a cierto subespacio \mathcal{S} , y las posibles funciones de deformación, que pertenecen a una cierta variedad no lineal \mathcal{M} de un adecuado espacio de funciones. El resto del capítulo se dedica a una formulación del problema a resolver, estableciendo las definiciones necesarias para ello.

El segundo capítulo, demuestra la existencia (no la unicidad) de configuración de equilibrio, para cualquier valor del factor q de carga. Los métodos utilizados siguen las ideas de S. S. Antman (referencias 2, 4 y 13) adaptadas al tipo de fuerzas exteriores aquí consideradas (carga de peso propio) y a las condiciones de sustentación del sistema elástico, que se ha supuesto biarticulado por corresponder al caso de más difícil tratamiento. Se han introducido, asimismo, pequeñas modificaciones que completan o simplifican algún punto concreto de la exposición de Antman; por ejemplo, al establecer en la (157) la existencia de los multiplicadores μ , y de Lagrange.

El tercer capítulo contiene los aportes principales de este trabajo, que se describen en dos secciones distintas.

En la Sección 3.1 se demuestra la existencia de todo un intervalo real y abierto I , del factor de carga, que contiene el $q = 0$ y la existencia de una curva regular $\bar{\varphi}(q)$ de configuraciones del sistema elástico (curva definida en un apropiado espacio funcional), curva definida en I con las propiedades si

güentes:

- $\bar{F}(0)$ coincide con la configuración de equilibrio inicial y, para cada q en I , la configuración $\bar{F}(q)$ satisface la condición necesaria de equilibrio, de ser solución de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange.

- Para cada q en I , existe un entorno de $\bar{F}(q)$, que no contiene ninguna otra solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, aparte de la propia $\bar{F}(q)$.

La herramienta fundamental para obtener los resultados anteriores es el teorema de la función implícita en un espacio de Banach, y la dificultad principal reside en demostrar que se verifican las hipótesis del aludido teorema.

También se prueba en la Sección 3.1, que para cada q en I , la configuración $\bar{F}(q)$ es de equilibrio, en el sentido de proporcionar un mínimo aislado al funcional de la energía. Las dificultades que surgen para probar tal resultado son de dos órdenes distintos. Por una parte, el funcional \mathcal{U} de la energía es condicionado, ya que $\bar{F}(q)$ debe pertenecer a una cierta variedad, no lineal e infinito-dimensional, y en el Cálculo Diferencial en espacios normados no existe ningún criterio general, que proporcione una condición suficiente de mínimo para tales funcionales. Una versión mejorada del criterio de positividad fuerte de la variación segunda de \mathcal{U} permite obviar la dificultad expresada, pero deja constancia de otra, cual es que $\delta^2 \mathcal{U}$ no es fuertemente positiva en relación con la norma típica "del máximo", norma, sin embargo, que permite considerar \mathcal{U} como funcional continuo y diferenciable hasta el orden tres. La positividad fuer-

te se da para $\delta^2 \mathcal{U}$ si se consideran las configuraciones normadas de acuerdo con el típico producto escalar de $L^2(s_0, s_1)$, pero en tal caso \mathcal{U} no puede considerarse diferenciable Frechet y, en consecuencia, la teoría general también deja de prestarnos su apoyo.

En la Sección 3.2 se estudian aproximaciones a cada una de las $\bar{F}(q)$ previamente consideradas. Estas aproximaciones tienen la particularidad de ser soluciones de ciertos problemas lineales contruidos ad hoc, que se obtendrían si con adecuada configuración inicial, se considerasen desplazamientos "infinitesimales", energía interna de tipo hookeano $\lambda A^2 + 2\mu AB + \nu B^2$ y factor de carga Δq igual a una cierta fracción del factor q de nuestro problema no lineal. Se demuestra entonces en 3.2 que cuando la fracción del factor de carga tiende a cero y cuando el valor q pertenece al intervalo I , las correspondientes aproximaciones lineales tienen por límite la solución del problema elástico no lineal, con lo que se justifica matemáticamente un método utilizado en Ingeniería civil y que se suele llamar "de las cargas incrementales". La herramienta utilizada es una adecuada generalización de los métodos de la poligonal de Euler y de Cauchy-Peano, para ecuaciones diferenciales en espacios de Banach. Generalización que ha de hacerse con las necesarias precauciones, introduciendo hipótesis complementarias, pues las típicas del teorema de Cauchy-Peano para un número finito de dimensiones son insuficientes en virtud de las diferentes leyes a que obedecen los conceptos involucrados, como continuidad uniforme y acotación de funciones, compacidad de conjuntos, etc...

PANDEO Y BIFURCACION. - Los problemas de pandeo, ya sean por inestabilidad o por bifurcación, no se tratan en este trabajo. El intervalo I descrito en el apartado anterior es, precisamente, un intervalo de no bifurcación cuya existencia se prueba mediante un trabajoso teorema.

En caso de que existan configuraciones "triviales" de equilibrio en el intervalo I (es decir, que la solución del problema no lineal sea expresable mediante una fórmula de funciones elementales) se han ideado técnicas aceptablemente generales, para decidir si hay o no bifurcación (por ejemplo referencia 13) con lo que puede procederse al diseño de métodos de cálculo de los correspondientes valores críticos. Sin embargo, cuando la solución del problema elástico no lineal solo está garantizada por un teorema de existencia, no parece disponerse de ningún método general y matemáticamente riguroso, que permita estudiar el pandeo.

Es de notar que las hipótesis adoptadas para la función de energía $W_i(A,B,s)$ permiten, en principio, modelar el fenómeno de pandeo ya que, para valores suficientemente grandes del factor de carga q , puede darse una multiplicidad de soluciones de las ecuaciones de Euler. Esta multiplicidad se presenta, de hecho, en ejemplos particulares de sistemas que son anillos o columnas elásticas.

CAPITULO 1

PRESENTACION Y FORMULACION

SECCION 1.1 PRIMERAS CONSIDERACIONES Y DEFINICIONES.- El sistema que estudiaremos en este trabajo puede pensarse como el que corresponde a un arco esbelto, en equilibrio elástico bajo la acción de ciertas fuerzas exteriores. El estudio que haremos será de tipo matemático, sobre un modelo previo de similar naturaleza que representará el sistema físico aludido. La característica principal del modelo será la de representar el arco mediante una "curva deformable" (es decir, una familia adecuada de curvas) que será expresión ideal del lugar geométrico constituido por los centros de gravedad de secciones transversales del arco, en algún modo definidas. La curva (o curvas) recibirá el nombre de directriz del arco, según la clásica terminología ingenieril y la supondremos siempre situada en un plano fijo, definido a priori. El propio arco recibirá alternativa e indistintamente el nombre de pieza lineal, en alusión a su aspecto físico de unas dimensiones transversales mucho menores que la máxima medida a lo largo de la directriz.

En muchas situaciones físicas usuales resulta ineludible el formular un modelo en el que la directriz no sea plana, o bien siéndolo inicialmente se deforme según curvas que no lo sean. No abordaremos tales modelos en este trabajo, el cual se circunscri

birá el supuesto de directriz plana. Dado que también nos limitaremos en el sentido de considerar solo problemas de equilibrio y de ignorar situaciones de tipo cinemático o dinámico, la deformación de la curva directriz se podrá representar adecuadamente mediante dos configuraciones de ésta, que llamaremos inicial y final.

1.1.1. Preliminares geométricos. - Supondremos la configuración inicial de la directriz definida por la ecuación vectorial $\bar{r}(s)$ de una cierta curva plana, para que la s representará su propia longitud de arco variable en un intervalo cerrado y acotado $[s_0, s_1]$. La curva $\bar{r}(s)$ se supondrá con tangente continua cuyo vector unitario notaremos $\bar{t}(s)$ y también con radio de curvatura $\rho(s)$, continuo y nunca nulo en $[s_0, s_1]$. Es decir, en la notación usual del análisis matemático

$$s_0 < s_1 \quad \bar{r}(s) \in C^2 [s_0, s_1] \quad (1)$$

La configuración deformada de la directriz la describiremos mediante otra función vectorial $\bar{r}_*(s)$, donde el parámetro s conserva su significado previo de longitud de arco de la configuración inicial. El llamado campo de desplazamientos es la función vectorial $\bar{v}(s)$ definida por

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \bar{r}_*(s) = \bar{r}(s) + \bar{v}(s) \quad (2)$$

Eléjidos unos ejes XOY, cartesianos ortonormales en el plano de la directriz, la ecuación (2) la reescribiremos con nueva notación

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \bar{r}(s) \equiv (x(s), y(s)) \quad \bar{v}(s) \equiv (u(s), w(s)) \quad (3)$$

y supondremos que el campo $\vec{v}(s)$ es tal que la curva $\vec{r}_*(s)$ admite tangente \vec{t}_* y radio de curvatura ρ_* ambos continuos, con el segundo nunca nulo. Convendremos asimismo en que la longitud del arco s_* de la curva $\vec{r}_*(s)$ sea creciente con s , lo que se expresaría

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \frac{ds_*}{ds} \geq 0 \quad (4)$$

En aras de una cuidadosa determinación de signos, nos detendremos brevemente a precisar las definiciones de ρ, ρ_* . Una vez definido el intervalo $[s_0, s_1]$ y la función $\vec{r}(s)$ en él, se determina unívocamente el vector tangente $\vec{t}(s)$ y también el normal $\vec{n}(s)$ por la condición de que el giro de \vec{t} a \vec{n} tenga igual orientación que el de OX a OY. Similar definición adoptaremos para $\vec{t}^*(s)$ y $\vec{n}^*(s)$, puesto que el sentido de crecimiento del arco s^* viene fijado por la hipótesis (4). En las condiciones anteriores, definimos las funciones $\rho(s), \rho_*(s)$ con signo unívocamente determinado por las clásicas fórmulas de Frenet (ref. 1, pp. 21 a 29)

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = -\frac{1}{\rho(s)} \vec{n}(s) \quad \frac{d\vec{t}^*}{ds^*} = -\frac{1}{\rho_*(s)} \vec{n}^*(s) \quad (5)$$

Si adoptamos para \vec{t}, \vec{n} y demás vectores en el plano, la notación del cálculo con números complejos, podemos evidentemente escribir

$$\vec{n}(s) = i \vec{t}(s) \quad \vec{n}^*(s) = i \vec{t}^*(s) \quad (6)$$

lo que conduce a las restantes fórmulas de Frenet

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\rho(s)} \vec{t}(s) \quad \frac{d\vec{n}^*}{ds^*} = \frac{1}{\rho_*(s)} \vec{t}^*(s) \quad (7)$$

Las funciones $\bar{t}(s)$, $\bar{t}^*(s)$ se pueden considerar con valores en el plano complejo \mathbb{C} isomorfo a \mathbb{R}^2 , con lo cual se pueden definir sus respectivos módulos y argumentos, siendo estos últimos definibles (ver ref. 1, pp. 21,22) como funciones continuas del intervalo $[s_0, s_1]$ en \mathbb{R} .

Denotaremos por $\phi(s)$, $\phi_*(s)$ los respectivos argumentos de $\bar{t}(s)$, $\bar{t}^*(s)$ con lo cual

$$\bar{t}(s) = \exp i \phi(s) \qquad \bar{t}^*(s) = \exp i \phi_*(s)$$

De aquí se deduce

$$\bar{n}_*(s) = i \bar{t}^*(s) = i \exp i \phi_*(s) \qquad (8)$$

y similar fórmula para $\bar{n}(s)$. Después de derivar y comparar con (7) se concluye fácilmente

$$\frac{d\phi_*}{ds_*} = -\frac{1}{p_*} \qquad \frac{d\phi}{ds} = -\frac{1}{p} \qquad (9)$$

todo lo cual permite y justifica introducir la siguiente

SECCION 1.2 DEFINICION DE LAS DEFORMACIONES. - Llamaremos alargamiento relativo, a la función que notaremos $\alpha(s)$ y definida por

$$\forall s \in [s_0, s_1] \qquad \alpha(s) = -1 + \frac{ds_*}{ds} \qquad (10)$$

y llamaremos giro relativo a la función $\beta(s)$ definida por

$$\forall s \in [s_0, s_1] \qquad \beta(s) = -\frac{1}{p_*(s)} \frac{ds_*}{ds} + \frac{1}{p(s)} \qquad (11)$$

justificándose el nombre de la segunda función, si observamos que las anteriores relaciones (9) implican

$$\forall s \in [S_0, S_1] \quad \beta(s) ds = d\phi_* - d\phi \quad (12)$$

Calificaremos indistintamente a $\beta(s)$, $\alpha(s)$ como deformaciones, o también de modo respectivo, como deformación angular y deformación longitudinal.

Mediante cálculos elementales que no detallaremos, típicos de la geometría diferencial clásica, que utilizan las relaciones (5) a (11), se llega a las fórmulas

$$1 + \alpha(s) = \sqrt{(x'(s) + u'(s))^2 + (y'(s) + w'(s))^2} = \left| \bar{t} + \frac{d\bar{v}}{ds} \right|$$

$$\bar{t}^*(s) = \frac{ds}{d\bar{s}_*} \frac{d\bar{t}_*}{ds} = \frac{1}{1 + \alpha(s)} \left(\bar{t} + \frac{d\bar{v}}{ds} \right) \quad (13)$$

$$-\frac{1}{\bar{p}_*(s)} \bar{n}^*(s) = \frac{1}{(1 + \alpha(s))^3} \left[\left(\frac{d^2\bar{v}}{ds^2} - \frac{\bar{n}}{\rho} \right) (1 + \alpha(s)) - \alpha'(s) \left(\bar{t} + \frac{d\bar{v}}{ds} \right) \right]$$

Estas fórmulas muestran que en el caso de ser $\bar{r}(s)$, $\bar{v}(s)$ funciones en $C^2[S_0, S_1]$, la condición de desigualdad estricta:

$$\forall s \in [S_0, S_1] \quad \alpha(s) > -1 \quad (14)$$

es necesaria y suficiente para satisfacer los requisitos anteriormente expresados, de existencia y continuidad de $\bar{t}^*(s)$ y de existencia y no anulación de $\bar{p}_*(s)$.

Hipótesis de regularidad. - Daremos este nombre a la condición (14) de desigualdad estricta $\alpha(s) > -1$ que, salvo advertencia explícita en contra, supondremos a lo largo de este trabajo.

que debe satisfacerse. Como tendremos ocasión de ir reflexionando, es una condición de mucho más alcance que la mera desigualdad no estricta $a(s) \geq -1$, que equivale al no decrecimiento de s^* con s .

Es quizá conveniente notar, por otra parte, que la existencia de $\bar{r}^*(s)$ indica una "regularidad" de la curva deformada $\bar{r}^*(s)$ entendida como función del arco s , es decir, una regularidad "material" más allá de la geométrica, y cuyo sentido físico sería el de no existencia de elemento material alguno de la directriz del arco, que se comprimiese hasta un volumen nulo, en la transformación $\bar{r}(s) \rightarrow \bar{r}_*(s)$.

SECCION 1.3 OBTENCION DE LAS DEFORMACIONES A PARTIR DE LOS DESPLAZAMIENTOS. - Si $\bar{v}(s)$, de componentes $(u(s), w(s))$ es un campo de desplazamientos de clase dos, que verifica la hipótesis de regularidad

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad (x'(s) + u'(s))^2 + (y'(s) + w'(s))^2 > 0 \quad (15)$$

entonces las deformaciones $a(s)$, $\beta(s)$ están determinadas de modo unívoco por $\bar{v}(s)$ y son, respectivamente, funciones de clase uno y clase cero.

En efecto, $a(s)$ viene dada por la primera de las ecuaciones (13), mientras que la segunda y tercera de tales ecuaciones se pueden combinar en una nueva ecuación, que escribimos con notación compleja, en la forma:

$$\frac{-i}{p(s)} \left(\bar{t} + \frac{d\bar{v}}{ds} \right) = \frac{1}{(1+a(s))^2} \left[\left(\frac{d^2\bar{v}}{ds^2} - \frac{\bar{n}}{p} \right) (1+a(s)) - a'(s) \left(\bar{t} + \frac{d\bar{v}}{ds} \right) \right] \quad (16)$$

Esta ecuación se puede ahora elaborar del modo siguiente: considérense las dos ecuaciones componentes (real e imaginaria) y efectúese una combinación lineal de ambas, con coeficientes adecuados para que se produzca la mutua anulación de los dos términos que contienen un factor $a'(s)$. El resultado de las largas pero elementales operaciones es:

$$\frac{1}{\rho_*(s)} (1+a(s)) = \frac{1}{(1+a(s))^2} \left\{ u''(y+w') - w''(x+u') + \frac{1}{\rho(s)} (1+x'u'+y'w') \right\} \quad (17)$$

debiendo notarse que $\beta(s)$ se expresaría finalmente:

$$\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{\rho_*(s)} (1+a(s)) \quad (18)$$

SECCION 1.4 OBTENCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS A PARTIR DE LAS DE-

FORMACIONES. -Dada una función $B(s)$ de clase cero en $[s_0, s_1]$ y otra $A(s)$ de clase uno, que supondremos satisface la hipótesis (14) de regularidad, podemos decir que en el caso de existir un campo (al menos) de desplazamientos $\bar{v}(s)$ para el que $A(s)$, $B(s)$ sean las correspondientes deformaciones longitudinal y angular, se deberá verificar entonces

$$\bar{v}_*(s) - \bar{v}_*(s_0) = \int_{s_0}^s \frac{d\bar{v}_*}{d\sigma} d\sigma = \int_{s_0}^s \bar{v}_*(\sigma) (1+A(\sigma)) d\sigma = \int_{s_0}^s e^{i\phi_*(\sigma)} (1+A(\sigma)) d\sigma \quad (19)$$

lo que, en virtud de las relaciones (9), (10) y (18) se puede escribir

$$\begin{aligned} \bar{r}_*(s) - \bar{r}_*(s_0) &= \int_{s_0}^s (1+A(\sigma)) \exp i \left(\phi_*(s_0) + \int_{s_0}^{\sigma} \frac{1+A(\lambda)}{\rho_*(\lambda)} d\lambda \right) d\sigma = \\ &= \int_{s_0}^s d\sigma (1+A(\sigma)) \exp i \left(\phi_*(s_0) + \int_{s_0}^{\sigma} \left(B(\lambda) - \frac{1}{\rho(\lambda)} \right) d\lambda \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Recíprocamente, al campo de desplazamiento $\bar{v}(s) = \bar{r}_*(s) - \bar{r}(s)$ definido a partir de la (20) le corresponden, cualesquiera que sean las constantes $\bar{r}_*(s_0)$, $\phi_*(s_0)$, unas deformaciones longitudinal y angular que son, precisa y respectivamente, $A(s)$ y $B(s)$. En efecto, la primera de las (13) indica

$$1 + \alpha(s) = \left| \bar{v} + \frac{d\bar{v}}{ds} \right| = \left| \frac{d\bar{r}_*}{ds} \right| = |1 + A(s)| = 1 + A(s)$$

mientras que para la deformación angular observamos

$$\bar{t}_*(s) = \frac{d\bar{r}_*}{ds_*} = \frac{1}{1+\alpha(s)} \frac{d\bar{r}_*}{ds} = \exp i \left(\phi_*(s_0) + \int_{s_0}^s \left(B(\lambda) - \frac{1}{\rho(\lambda)} \right) d\lambda \right)$$

lo que conlleva

$$\frac{d\bar{t}_*}{ds_*} = \frac{1}{1+\alpha(s)} \frac{d\bar{t}_*}{ds} = \frac{1}{1+\alpha(s)} \left(B(s) - \frac{1}{\rho(s)} \right) i \bar{t}_*(s) = \left(B(s) - \frac{1}{\rho(s)} \right) \frac{\bar{t}_*(s)}{1+\alpha(s)}$$

lo que indica por comparación con (9)

$$-\frac{1}{\rho_*(s)} = \frac{1}{1+\alpha(s)} \left(B(s) - \frac{1}{\rho(s)} \right)$$

es decir, en virtud de la definición (11) resultaría

$$\beta(s) = \frac{1}{\rho(s)} - \frac{1}{\rho_*(s)} (1+\alpha(s)) = B(s)$$

SECCION 1.5 UNICIDAD DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS. - La expresión (20) obtenida para $\bar{r}_*(s)$ contiene tres constantes reales arbitrarias de integración, a saber $\phi_*(s_0)$ y las dos componentes de $\bar{r}_*(s_0)$.

Supongamos para concretar las ideas, que los extremos de la curva directriz tienen desplazamiento nulo (pieza biarticulada) lo que será la situación concreta a la que, salvo advertencia en contra, nos referiremos siempre en este trabajo. En tal caso, las dos constantes de integración que corresponden a $\bar{r}_*(s_0)$ se determinan trivialmente en la forma

$$\bar{r}_*(s_0) = \bar{r}(s_0) \quad (21)$$

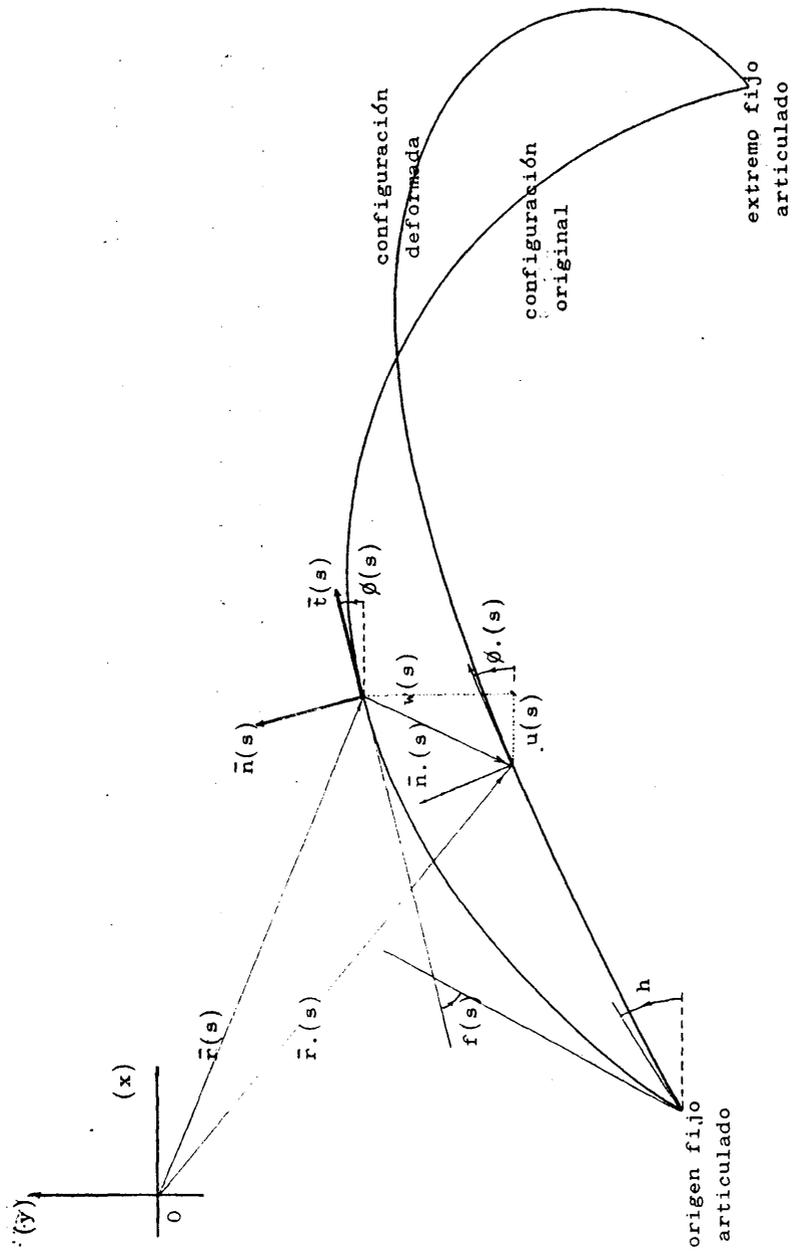
Para determinar $\phi_*(s_0)$ expresamos la condición $\bar{r}_*(s_1) = \bar{r}(s_1)$ en la siguiente forma:

$$e^{i\phi_*(s_0)} \int_{s_0}^{s_1} (1+a(\sigma)) e^{i\xi(\sigma)} d\sigma = \bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0) \quad (22)$$

donde se ha empleado la notación

$$\xi(\sigma) = \int_{s_0}^{\sigma} \left(\beta(\lambda) - \frac{1}{\rho(\lambda)} \right) d\lambda \quad (23)$$

Resulta así evidente, que una elección arbitraria de $\beta(s)$



y $a(s)$ no permitirá, en general, desplazamiento nulo en ambos extremos. Para ello deberá verificarse

$$\left| \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \cos \xi(s) ds \right|^2 + \left| \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \sin \xi(s) ds \right|^2 = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)|^2 \quad (24)$$

según se deduce de igualar módulos para ambos miembros de la (22).

Esta última condición (24) junto con la adicional $\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0) \neq 0$ será suficiente para la existencia y unicidad de la constante

$\phi_*(s_0)$ en el intervalo semiabierto $[0, 2\pi)$. En efecto, si consideramos la (22) como una igualdad entre números complejos,

$\phi_*(s_0)$ es aquel (único) número real en el intervalo semiabierto $[0, 2\pi)$ que verifica

$$\phi_*(s_0) = -\arg \frac{\int_{s_0}^{s_1} (1+A(\sigma)) e^{i\xi(\sigma)} d\sigma}{(x(s_1) - x(s_0)) + i(y(s_1) - y(s_0))} \quad (25)$$

En caso de ser $\bar{r}(s_1) = \bar{r}(s_0)$ (extremos coincidentes) cualquier valor de la constante $\phi_*(s_0)$ da lugar a un campo de desplazamientos compatible con las $A(s)$, $B(s)$ prefijadas. En tal situación es necesario y suficiente para la existencia (no unicidad) de un campo de desplazamientos, que se verifique

$$\int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \cos \xi(s) ds = \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \sin \xi(s) ds = 0 \quad (26)$$

donde $\xi(s)$ se entiende como en (23) con $\beta(\lambda)$ reemplazada por $B(\lambda)$.

En los apartados y capítulos que seguirán supondremos, salvo advertencia en contra, que se cumple la desigualdad:

$$|\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \neq 0 \quad (27)$$

Podemos resumir todos los resultados obtenidos hasta ahora del modo siguiente:

Resultado 1.5.1. Si la directriz indeformada satisface la condición $x(s_0) + iy(s_0) \neq x(s_1) + iy(s_1)$ y si adoptamos las notaciones

$$\mathcal{S} = \{ (u, w) \in C^2[s_0, s_1] \times C^2[s_0, s_1] \mid u(s_0) = u(s_1) = w(s_0) = w(s_1) = 0 \} \quad (28)$$

$$\mathcal{M} = \{ (A, B) \in C^1[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \mid \left| \int_{s_0}^{s_1} ds (HA(s)) \exp i \int_{s_0}^s d\sigma (B(\sigma) - \frac{1}{p(\sigma)}) \right| = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \} \quad (29)$$

$$\mathcal{S}' = \{ (u, w) \in \mathcal{S} \mid \forall s \in [s_0, s_1] \quad (x'(s) + u'(s))^2 + (y'(s) + w'(s))^2 > 0 \} \quad (30)$$

$$\mathcal{M}' = \{ (A, B) \in \mathcal{M} \mid \forall s \in [s_0, s_1] \quad 1 + A(s) > 0 \} \quad (31)$$

se verifica entonces que la aplicación definida en \mathcal{M}' por las fórmulas:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}' \quad u(s) + iw(s) = (x(s_0) - z(s)) + i(y(s_0) - y(s)) + \int_{s_0}^s d\sigma (HA(\sigma)) \exp i \left(\phi_*^*(s_0) + \int_{s_0}^{\sigma} (B(\lambda) - \frac{1}{p(\lambda)}) d\lambda \right) \quad (32)$$

donde

$$\phi_*^*(s_0) = - \arg \frac{\int_{s_0}^{s_1} d\sigma (HA(\sigma)) \exp i \int_{s_0}^{\sigma} (B(\lambda) - \frac{1}{p(\lambda)}) d\lambda}{(x(s_1) - z(s_1)) + i(y(s_1) - y(s_0))} \quad (33)$$

es una aplicación biyectiva de \mathcal{M}' sobre \mathcal{S}' , cuya inversa viene definida por las fórmulas

$$\forall (u, w) \in \mathcal{S}' \quad A(s) = -1 + \sqrt{(x'(s) + u'(s))^2 + (y'(s) + w'(s))^2} \quad (34)$$

$$\forall (u, w) \in \mathcal{D} \quad \frac{1}{\rho(s)} - B(s) =$$

$$= \frac{u''(s)(y'(s)+w'(s)) - w''(s)(x'(s)+u'(s)) + \rho^{-1}(s)(1+x'(s)u'(s)+y'(s)w'(s))}{(x'(s)+u'(s))^2 + (y'(s)+w'(s))^2} \quad (35)$$

Es quizá interesante insistir en que la (33) se sobreentien-
de para aquella determinación (única) del argumento, cuyo valor
está en el intervalo $[0, 2\pi)$. Sin embargo, cualquier otra de-
terminación de $\phi_*(s_0)$ haría igualmente válida la (32), fórmula
que podría reescribirse en el modo ligeramente distinto que sigue:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{H} \quad u(s) + i w(s) = x(s_0) - x(s) + i y(s_0) - i y(s) +$$

$$+ \frac{x(s) - x(s_0) + i y(s_0) - i y(s)}{\int_{s_0}^s dt (1 + A(t)) \exp i \int_{s_0}^t (B(\lambda) - \frac{1}{\rho(\lambda)}) d\lambda} \int_{s_0}^s dt (1 + A(t)) \exp i \int_{s_0}^t (B(\lambda) - \frac{1}{\rho(\lambda)}) d\lambda \quad (36)$$

SECCION 1.6 DEFINICIONES BASICAS. - En este apartado establecere-
mos las definiciones más importantes, que desde un punto de vis-
ta formal fundamentan todos los resultados posteriores. Completa-
remos tales definiciones con unos comentarios que expliquen bre-
vemente su significado físico.

1.6.1 Arco elástico. - Entenderemos por tal una terna de objetos
matemáticos con características del tipo siguiente:

1 - Una curva regular $\bar{r}(s)$ definida en un cierto intervalo
 $[s_0, s_1]$ de variación de su parámetro "longitud de arco" s , de
clase $C^2[s_0, s_1]$ y con valores en el plano R^2 de modo que su ra-
dio de curvatura $\rho(s)$ sea continuo y nunca nulo en $[s_0, s_1]$.
La curva $\bar{r}(s)$ se dirá configuración inicial, o más completa-

mente "configuración inicial de la directriz del arco".

2 - Un subespacio S (que diremos subespacio de las condiciones de contorno en los desplazamientos) de pares de funciones escalares (con valores en R) que sea de la forma:

$$S = \left\{ (u(s), w(s)) \in C^2[s_0, s_1] \times C^2[s_0, s_1] \mid \begin{aligned} &\alpha_{j1} u(s_0) + \alpha_{j2} u'(s_0) + \alpha_{j3} w(s_0) + \\ &+ \alpha_{j4} w'(s_0) = 0, \beta_{j1} u(s_1) + \beta_{j2} u'(s_1) + \beta_{j3} w(s_1) + \beta_{j4} w'(s_1) = 0 \quad j=1,2,3,4 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

donde los $\alpha_{j1} \dots \beta_{j4}$ $j = 1, 2, 3, 4$ son ciertos números reales que definen S . En todo lo que resta de este trabajo, cuando se precise operar con un S concreto adoptaremos salvo advertencia explícita en contra:

$$S = \left\{ (u(s), w(s)) \in C^2[s_0, s_1] \times C^2[s_0, s_1] \mid u(s_0) = w(s_0) = u(s_1) = w(s_1) = 0 \right\} \quad (38)$$

que es el mismo subespacio definido por la fórmula (28). La gran mayoría de los métodos que utilizaremos se extenderán sin embargo sin ninguna dificultad, al caso de espacios S más generales del tipo (37).

3 - Una función W_i de $R^2 \times [s_0, s_1]$ en \bar{R} , de clase dos en la terna conjunta de sus argumentos, que llamaremos densidad de energía elástica (o también energía interna por unidad de arco, o potencial elástico por unidad de arco) con las propiedades:

$$W_i(+\infty) = \left\{ (A, B, s) \in R^2 \times [s_0, s_1] \mid A \leq -1 \right\} \quad (39)$$

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \lim_{|A|+|B| \rightarrow \infty} W_i(A, B, s) = +\infty \quad (40)$$

En capítulos posteriores supondremos propiedades adicionales

les para la función W_i , a medida que vayan siendo necesarias. Recordamos la notación habitual \bar{R} para el espacio completado del R con el punto $+\infty$.

1.6.2 Energía elástica. - Definido un arco elástico y con las notaciones anteriores, llamamos energía elástica al funcional U_i de \mathcal{S} en \bar{R} definido del modo siguiente

$$\forall (u(s), w(s)) \in \mathcal{S} \quad U_i = \int_{s_0}^{s_1} W_i(A(s), B(s), s) ds \quad (41)$$

donde $A(s)$, $B(s)$ son las funciones definidas por (34) y (35).

El funcional U_i puede entenderse también, como definido en \mathcal{M} o incluso en \mathcal{M} variedades definidas por las (29) y (31). En este último caso los valores de U_i pertenecen todos a R .

1.6.3 Arco elástico en carga. - Definiremos como "arco elástico en carga" a un par de objetos matemáticos que cumplan las condiciones siguientes: El primero es un arco elástico, según se definió en 1.6.1 y el segundo objeto es un funcional U_e de \mathcal{S} en R continuo en las norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\forall (u, w) \in \mathcal{S} \quad \|(u, w)\| = \max_{S \in [s_0, s_1]} |u(s)| + |u'(s)| + |w(s)| + |w'(s)| \quad (42)$$

Daremos a U_e el nombre de módulo de potencial externo. Supondremos salvo advertencia explícita que U_e es de la forma

$$\forall (u, w) \in \mathcal{S} \quad U_e(u, w) = \int_{s_0}^{s_1} W_e(u(s), w(s), u'(s), w'(s), s) ds \quad (43)$$

donde W_e es una función de $R^4 \times [s_0, s_1]$ en R , de clase dos en sus cinco argumentos conjuntamente. De hecho, una gran mayoría de las conclusiones de este trabajo supondrán una forma aún más es-

pecial de U_e , a saber:

$$\forall (u, w) \in \mathcal{S} \quad U_e(u, w) = \int_{s_0}^{s_1} P(s) w(s) ds \quad (44)$$

donde $P(s)$ es una función real prefijada en $C[s_0, s_1]$ que llamaremos "peso unitario", mientras que el propio funcional U_e recibirá en este caso el nombre de módulo de potencial de "peso propio".

1.6.4. Energía total. Dado q número real, llamaremos energía total de factor q al funcional U de \mathcal{S} en \bar{R} definido en la forma siguiente

$$\forall (u, w) \in \mathcal{S} \quad U(u, w) = U_i(u, w) + q U_e(u, w) \quad (45)$$

1.6.5 Configuración de equilibrio para el factor q de R . Llamaremos a toda curva $\bar{r}_*(s)$, definida de $[s_0, s_1]$ en R^2 tal que

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \bar{r}_*(s) = \bar{r}(s) + (u_*(s), w(s))$$

donde $\bar{r}(s)$ es la configuración inicial, mientras que $(u_*(s), w_*(s))$ es cualquier elemento de \mathcal{S} que proporcione un valor estacionario al funcional $U_i + qU_e$, es decir que anule la variación primera $\delta U_i + q \delta U_e$ en el sentido del Cálculo de variaciones clásico (ver referencia 7 pp. 91-93, 103, 108). Si el aludido valor estacionario es un mínimo relativo débil de $U_i + qU_e$ (es decir en el sentido de la norma adecuada, ver referencia 7 pp 3,5,6) diremos que la configuración de equilibrio es finitamente estable.

1.6.6 Comentarios e interpretaciones físicas. - Las definiciones

que preceden describen de un modo matemático y abstracto la situación física que se produce cuando un arco elástico convenientemente sustentado en sus extremos, se carga lentamente (lo que prácticamente excluye fenómenos dinámicos) y pasa por "sucesivas" configuraciones de equilibrio estático, cuando una cierta distribución de fuerzas exteriores (aquí representadas por su potencial U_e) varía proporcionalmente a sí misma (variación aquí representada por el factor q) desde un valor nulo, en el que la configuración de equilibrio es la inicial $\bar{r}(s)$ hasta un cierto valor, para el que la configuración de equilibrio es la que hemos notado $\bar{r}_*(s)$.

Las condiciones de contorno que definen \mathcal{S} son versión abstracta de las condiciones de sustentación del arco, tales como apoyo simple, articulación, empotramiento rígido, etc. lo que puede referirse a uno o ambos extremos. En el caso particular (38) que se ha elegido, se considera un arco articulado en cada uno de sus extremos, es decir, éstos no pueden moverse durante la deformación por carga, pero la tangente en ellos a la directriz del arco no está sujeta a limitación.

La función $W_i(A, B, s)$ expresa la energía por unidad de longitud de arco, que se "acumula" por efecto de unas deformaciones $A(s)$, $B(s)$ prefijadas en cada sección transversal del mismo. Para un arco de sección constante, de un material homogéneo y de los llamados hookeanos W_i es constante con s y de la forma $W_i = \lambda A^2 + \mu B^2$. La condición $A = -1$ en algún punto del arco significa una compresión local de la materia hasta un valor nulo, razón por la cual suponemos $W_i = \infty$ en tal caso.

Según se establece en las publicaciones de Elasticidad, las derivadas parciales $\partial W_i / \partial A$, $\partial W_i / \partial B$, tienen sentido de "esfuerzos" (normal y flector respectivamente, ver referencia 2 pp. 655-675), por lo cual un material no hookeano suele decirse no lineal, o también hiperelástico. No impondremos por ahora las condiciones $(\partial/\partial A, \partial/\partial B) W_i(0,0,s) = \bar{0}$ en aras de poder plantear problemas con "esfuerzos iniciales" no necesariamente nulos. Por supuesto si $f_0(s)$ es una función arbitraria de $C^2[s_0, s_1]$, puede redefinirse el "nivel cero" del potencial elástico de modo que sea $W_i(0,0,s) = f_0(s)$, sin que por ello varíen las posibles configuraciones de equilibrio.

En la expresión (44) la función $P(s)$ representa el peso propio del arco por unidad de longitud y la realización física del fenómeno de carga lenta podría consistir, por ejemplo, en un arco construido sobre una plataforma horizontal muy rígida, que se iza lentamente hasta poner el arco en la posición vertical definitiva (prefabricación de gran número de arcos iguales). La expresión más general (43) de W_e como función no solo del desplazamiento $(u(s), w(s))$ sino también de su derivada se presenta, por ejemplo, como caso particular, en el de un anillo sometido a presión hidrostática.

Los problemas elásticos en que las fuerzas exteriores no admiten un potencial W_e no entran en nuestro estudio. Deben abordarse planteando las llamadas ecuaciones de equilibrio (ver referencia 2 pp. 665-675) y no por métodos de minimización de funcionales. Otros problemas en cuya formulación tampoco entraremos son los de dependencia de la energía total U de un parámetro q que

sea multidimensional (en vez de simplemente $q \in \mathbb{R}$ con una dependencia lineal) o los problemas en que se consideran deformaciones y esfuerzos térmicos.

El concepto de configuración finitamente estable, definido en 1.6.5 correspondería, si en vez del espacio \mathcal{S} se tratase de otro con un número finito de "grados de libertad" a lo que en Mecánica clásica se llama equilibrio estable. Ahora bien, es conocido que en el caso de infinitos grados de libertad no tiene por que verificarse un análogo del teorema de Dirichlet sobre proximidad estable de las trayectorias dinámicas.

Las consideraciones precedentes nos han inclinado a adoptar la terminología "finitamente estable", significando con ello que el movimiento sería estable si los desplazamientos se constriñesen a algún subespacio con un número finito, no importa lo grande que fuese, de dimensiones.

En los capítulos que siguen estudiaremos principalmente el caso de arco elástico en carga por peso propio, estableciendo teoremas que aseguren, en adecuadas condiciones, la existencia y/o unicidad de configuraciones de equilibrio para una valor genérico del factor q .

CAPITULO 2

EXISTENCIA DE SOLUCIONES

SECCION 2.1 EXISTENCIA DE CONFIGURACIONES GENERALIZADAS. - En los apartados que siguen consideraremos el funcional

$$U = \int_{s_0}^{s_1} W_i(A(s), B(s), s) ds + q \int_{s_0}^{s_1} P(s) w(s) ds \quad (48)$$

definido en una variedad (no lineal) que notaremos ex. \mathcal{M} y que será una extensión de la \mathcal{M} definida por (29) a un espacio funcional conveniente. Supondremos a tal efecto que existen índices reales $\alpha > 1$, $\beta > 1$ de modo que:

$$\text{ex. } \mathcal{M} = \left\{ (A, B) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1) \mid \left| \int_{s_0}^{s_1} ds (1 + A(s)) e^{i \int_{s_0}^s \frac{B(\sigma)}{P(\sigma)} d\sigma} \right| = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \right\} \quad (49)$$

donde se siguen las notaciones de 1.5.1, los espacios $L^\alpha(s_0, s_1)$, $L^\beta(s_0, s_1)$ son los que clásicamente se designan con esas notaciones (ver referencia 3, pp. 60-69 y pp. 127-130) y $w(s)$ viene definido en función de A, B por la fórmula (36) que tiene pleno sentido en $L^\alpha(s_0, s_1)$ y $L^\beta(s_0, s_1)$.

En los párrafos y apartados que siguen tendremos como objetivo principal demostrar que, con adecuadas hipótesis en la función W_i , el funcional U alcanza, para cada valor de q real un mínimo absoluto en la variedad ex. \mathcal{M} . Para ello seguiremos

los métodos de S.S. Antman (referencia 2 pp. 676-689 y referencia 4 pp. 9-12) convenientemente adecuados a nuestro caso de carga de peso propio.

2.1.1 Hipótesis sobre la densidad de potencial elástico. - La función $W_i(A, B, s)$ la supondremos verificar, aparte de las propiedades ya registradas en 1.6.1, las dos condiciones que siguen:

a) Existen números positivos H, K tales que para cualquier par A, B de reales y cualquier s en $[s_0, s_1]$ el valor $W_i(A, B, s)$ no es inferior a $H |A|^\alpha + H |B|^\beta - K$, donde α, β son los números reales > 1 , previamente considerados al definir ex. \mathcal{M} . En resumen:

$$\exists H, K \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (A, B, s) \in \mathbb{R}^2 \times [s_0, s_1] \quad (50)$$

$$W_i(A, B, s) \geq H |A|^\alpha + H |B|^\beta - K$$

b) La matriz hessiana de $W_i(A, B, s)$ respecto del par A, B es, para cualquier valor de s , definida positiva. Es decir

$$\forall (A, B, s) \in (-1, \infty) \times \mathbb{R} \times [s_0, s_1] \quad \frac{\partial^2}{\partial A^2} W_i(A, B, s) > 0 \quad \&$$

$$\& \left(\frac{\partial^2}{\partial A^2} W_i \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial B^2} W_i \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial A \partial B} W_i \right)^2 > 0 \quad (51)$$

El significado físico de este último supuesto es el de crecimiento monótono de los "esfuerzos" $(\partial/\partial A)W_i$ $(\partial/\partial B)W_i$ con las deformaciones A, B y de correspondencia biyectiva entre ambos pares de magnitudes físicas.

Lema 2.1.2. - En las condiciones anteriores de 1.6.1 para W_i se

verifica que, para cualquier número real l el subconjunto de $L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1)$ que notaremos por E_l y definido por:

$$E_l = \{ (A, B) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1) \mid \mathcal{U}_i(A, B) \leq l \} \quad (52)$$

es un subconjunto convexo.

En efecto, utilicemos por brevedad la notación

$$\bar{F}(s) = (A(s), B(s)) \quad \Delta = L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1) \quad (53)$$

y supongamos $\bar{F}_1(s) \in E_l$, $\bar{F}_2(s) \in E_l$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, $t_1 + t_2 = 1$ con lo cual podemos escribir

$$\mathcal{U}_i(t_1 \bar{F}_1(s) + t_2 \bar{F}_2(s)) = \int_{s_0}^{s_1} \mathcal{W}_i(t_1 \bar{F}_1(s) + t_2 \bar{F}_2(s), s) ds \quad (54)$$

Ahora bien, según resultados de análisis matemático elemental, la condición (51) implica que, para cualquier s de $[s_0, s_1]$ la función \mathcal{W}_i es convexa en el para A, B con lo cual

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \mathcal{W}_i(t_1 \bar{F}_1(s) + t_2 \bar{F}_2(s), s) \leq t_1 \mathcal{W}_i(\bar{F}_1(s), s) + t_2 \mathcal{W}_i(\bar{F}_2(s), s) \quad (55)$$

de modo que se concluye

$$\mathcal{U}_i(t_1 \bar{F}_1(s) + t_2 \bar{F}_2(s)) \leq t_1 \mathcal{U}_i(\bar{F}_1(s)) + t_2 \mathcal{U}_i(\bar{F}_2(s)) \leq t_1 l + t_2 l = l$$

con lo que es así evidente que $t_1 \bar{F}_1(s) + t_2 \bar{F}_2(s)$ pertenece al subconjunto E_l que resulta, por tanto, convexo en Δ

Lema 2.1.3. - Con las condiciones y notaciones del lema anterior se verifica que E_l es, para cualquier l real, cerrado en la topología débil de Δ .

En efecto, como E_ρ es convexo, bastará comprobar que es cerrado en sentido de la topología fuerte de Δ (ver referencia 6 pp. 64, 65). Supongamos para ello que $(\bar{f}_n(s))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tiende a $\bar{f}(s)$ en la norma de Δ y que la sucesión funcional ahora escrita está contenida en E_ρ . Según un resultado de análisis funcional (referencia 3 pp. 66, 67) existe una subsucesión de la $(\bar{f}_n(s))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ que tiende puntualmente a $\bar{f}(s)$ casi por doquier en $[s_0, s_1]$ y a la que seguiremos notando $(\bar{f}_n(s))_{n \in \mathbb{Z}^+}$, de modo que la continuidad de W_i permite escribir

$$\text{caso } \forall s_0, [s_0, s_1] \quad W_i(\bar{f}(s), s) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_i(\bar{f}_n(s), s) \quad (56)$$

por lo que el clásico lema de Fatou (referencia 3 pp. 22, 23) indica $U_i(\bar{f}(s)) = \int_{s_0}^{s_1} \liminf W_i(\bar{f}_n(s), s) ds \leq \liminf \int_{s_0}^{s_1} W_i(\bar{f}_n(s), s) ds \leq \ell$ por lo que puede concluirse que $\bar{f}(s)$ pertenece a E_ρ

Lema 2.1.4. - El funcional U_i es inferiormente semicontinuo por sucesiones en sentido débil (según el significado usual que se da a tales conceptos en análisis funcional, ver referencia 5 pp. 72-75).

En efecto, sea $(\bar{f}_n(s))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión funcional que converge débilmente a un elemento $\bar{f}(s)$ y tratemos de probar que

$$U_i(\bar{f}(s)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} U_i(\bar{f}_n(s)) \quad (57)$$

como propiedad característica de la semicontinuidad inferior. Razonando por contradicción, supongamos la existencia de un número real ℓ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} U_i(\bar{f}_n(s)) < \ell < U_i(\bar{f}(s)) \quad (58)$$

donde las desigualdades son estrictas. Por definición de límite inferior, existirá una subsucesión de la $(\bar{\varphi}_n(s))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ que notaremos $(\bar{\varphi}_m(s))_{m \in \mathbb{Z}^+}$ de modo que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad U_i(\bar{\varphi}_m(s)) < \ell$$

lo que se escribirá, en la notación del lema previo, como

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \bar{\varphi}_m(s) \in E_\ell$$

pero dado que $(\bar{\varphi}_n(s))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ también converge débilmente a $\bar{\varphi}(s)$, el aludido lema previo nos indica que $\bar{\varphi}(s)$ pertenece a E_ℓ , es decir $U_i(\bar{\varphi}(s)) < \ell$ lo que contradice la (59) y termina la demostración del lema que nos ocupa.

Lema 2.1.5. - Para cualquier q de \mathbb{R} y con las notaciones (44) y (45) se verifica

$$\lim U_i(A(s), B(s)) = \infty \quad \lim (U_i + \varepsilon U_e)(A(s), B(s)) = \infty$$

$$\text{si } \|(A(s), B(s))\| \rightarrow \infty \text{ en } (L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1)) \cap \text{ex. } \mathcal{M} \quad (59)$$

En efecto, el primer límite resulta inmediatamente de reescribir la desigualdad (50) en la forma

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad W_i(A(s), B(s), s) \geq H|A(s)|^\alpha + H|B(s)|^\beta - K \quad (60)$$

e integrar entre s_0 y s_1 teniendo en cuenta la definición de la norma $\|\cdot\|$ en el espacio $L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1)$.

El segundo límite requiere más elaboración ya que la función $w(s)$ que figura en la expresión (44) de U_e debe obtenerse en función de $A(s)$, $B(s)$ a partir de la fórmula (36).

Con las notaciones previas

$$P = \max_{s \in [s_0, s_1]} |P(s)| \quad Q = (s_1 - s_0) + \max_{s \in [s_0, s_1]} |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s)|$$

$$P_1 = (s_1 - s_0)^{\frac{1}{\alpha'}} \quad \text{con} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad (61)$$

efectuamos en la (36) las acotaciones siguientes

$$|w(s)| \leq (s_0 - \bar{r}(s)) + \frac{|\bar{r}(s_0) - \bar{r}(s_1)|}{\left| \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1+A(\sigma)) \exp i \int_{s_0}^{\sigma} (B(\lambda) + \frac{1}{\rho(\lambda)}) \right|} \int_{s_0}^s d\sigma |1+A(\sigma)|$$

y si suponemos que $A(s), B(s)$ pertenecen a $\text{ex } \mathcal{M}$, la (49) indica que

$$|w(s)| \leq |\bar{r}(s_0) - \bar{r}(s)| + \int_{s_0}^{s_1} d\sigma |1+A(\sigma)| \leq |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| + \int_{s_0}^{s_1} (1+|A(\sigma)|) d\sigma \leq Q + \int_{s_0}^{s_1} |A(\sigma)| d\sigma$$

y si ahora utilizamos la desigualdad de Hölder (referencia 3 p. 62) obtenemos

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad |w(s)| \leq Q + P_1 \|A(s)\| \quad (62)$$

Podemos ahora escribir, en el supuesto $(A(s), B(s)) \in \text{ex } \mathcal{M}$ la cadena siguiente de desigualdades

$$|U_1(A(s), B(s)) + \eta U_2(A(s), B(s))| \geq |U_1(A(s), B(s))| - |\eta| |U_2(A(s), B(s))| \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq |\mathcal{U}_i(A(s), B(s)) - 1q| \left| \int_{s_0}^{s_1} P(s)w(s)ds \right| \geq |\mathcal{U}_i(A(s), B(s)) - 1q| P \int_{s_0}^{s_1} |w(s)| ds \geq \\ &\geq |\mathcal{U}_i(A(s), B(s)) - 1q| P(s_1 - s_0) (Q + P_1 \|A(s)\|) \end{aligned}$$

Por integración de la (60) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}_i(A(s), B(s)) + q \mathcal{U}_e(A(s), B(s))| &\geq H \|A(s)\|^\alpha + H \|B(s)\|^\beta - K(s_1 - s_0) - \\ &- 1q| P Q (s_1 - s_0) - 1q| P P_1 (s_1 - s_0) \|A(s)\| \end{aligned} \quad (63)$$

desigualdad que demuestra la infinitud del límite planteado si

$\|A(s)\| + \|B(s)\| \rightarrow \infty$, ya que $\alpha > 1$.

Lema 2.1.6. - El funcional $\Gamma: L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por la fórmula

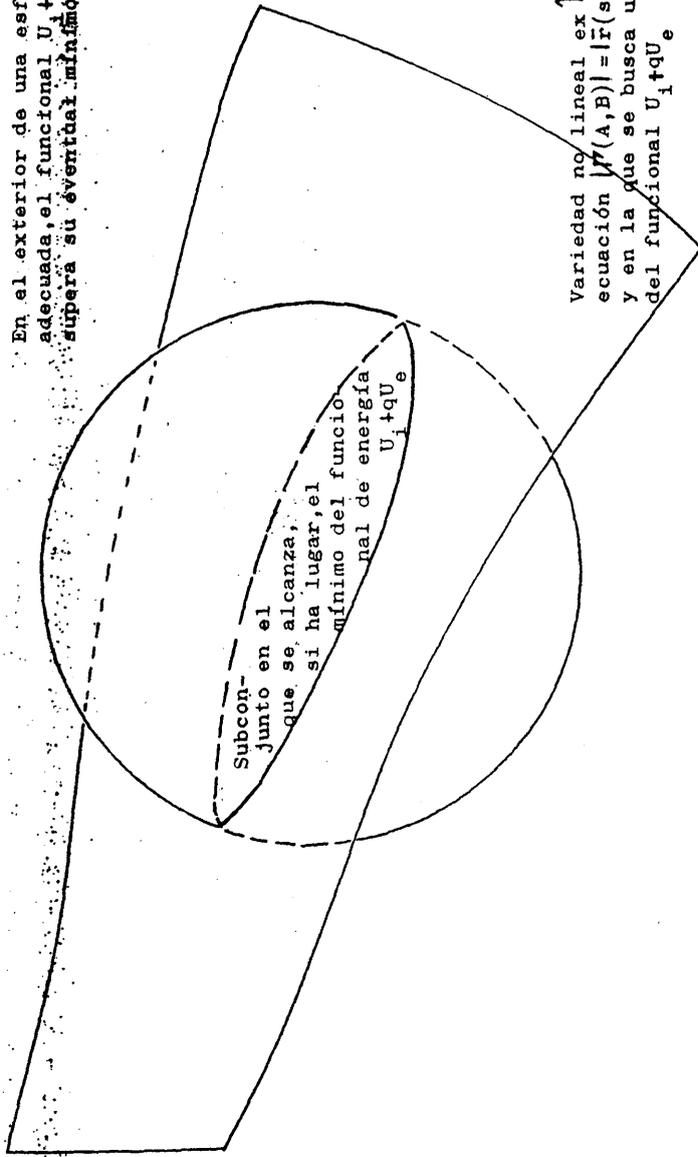
$$\forall (A, B) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1) \quad \Gamma(A, B) = \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1+A(\sigma)) e^{i \int_{s_0}^{\sigma} \frac{d\lambda(B(\lambda))}{\rho(\lambda)}} \quad (64)$$

es débilmente continuo por sucesiones. En efecto, utilicemos la notación $b(\lambda) = B(\lambda) - (1/\rho(\lambda))$ y supongamos una sucesión

$(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ que converge débilmente al elemento (A, B) , lo que escribiremos del modo usual $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \rightarrow (A, B)$, con lo que también se verificará entonces $(A_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \rightarrow (A, b)$. Escribamos ahora la diferencia

$$\begin{aligned} \Gamma(A_n, B_n) - \Gamma(A, B) &= \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1+A_n(\sigma)) e^{i \int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda} - \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1+A(\sigma)) e^{i \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda} = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1+A_n(\sigma)) \left\{ \exp i \int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda \right\} - \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1+A(\sigma)) \left\{ \exp i \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda \right\} + \\ &+ \int_{s_0}^{s_1} (A_n(\sigma) - A(\sigma)) \left(\exp i \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda \right) d\sigma \end{aligned} \quad (65)$$

En el exterior de una esfera adecuada, el funcional $U_i + qU_e$ supera su eventual mínimo.



Subconjunto en el que se alcanza, si ha lugar, el mínimo del funcional de energía $U_i + qU_e$

Variedad no lineal \mathcal{M} de ecuación $|\nabla(A, B)| = |\vec{r}(s_1) - \vec{r}(s_0)|$ y en la que se busca un mínimo del funcional $U_i + qU_e$

Para comprobar que $\Gamma(A_n, B_n) - \Gamma(A, B)$ tiende a cero si $n \rightarrow \infty$, advertimos primeramente que el segundo sumando integral del último miembro de la cadena de igualdades escrita, sumando que notaremos II_n , tiende a cero por propia definición de convergencia débil puesto que la función $\int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda$ es continua ya que, en efecto, por aplicación de la desigualdad de Hölder si

$$\begin{aligned} \sigma' < \sigma'' \\ \left| \int_{s_0}^{\sigma''} b(\lambda) d\lambda - \int_{s_0}^{\sigma'} b(\lambda) d\lambda \right| &= \left| \int_{\sigma'}^{\sigma''} b(\lambda) d\lambda \right| \leq \\ &\leq (\sigma'' - \sigma')^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\sigma'}^{\sigma''} |b(\lambda)|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\sigma'' - \sigma')^{\frac{1}{p'}} \|b(\lambda)\|_{L^p} \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \end{aligned} \quad (66)$$

Respecto al primer sumando integral, que notaremos I_n , el probar su convergencia a cero es algo más laborioso. Para ello consideremos en primer lugar la diferencia

$$\max_{\sigma \in [s_0, s_1]} \left| \int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda - \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda \right| \quad (67)$$

y veamos que tiende a cero si $n \rightarrow \infty$ (es decir, la sucesión de integradas de las $b_n(\lambda)$ converge inferiormente a la función integrada de $b(\lambda)$). A tal efecto consideramos el operador lineal \mathcal{J} de $L^p(s_0, s_1)$ en $C[s_0, s_1]$ definido por

$$\forall b(\lambda) \in L^p(s_0, s_1) \quad (\mathcal{J}b)(\sigma) = \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda \quad (68)$$

es decir, el operador de integración del que es sencillo probar que es compacto. Para ello sea $\mathcal{F} \subset L^p(s_0, s_1)$ un conjunto acotado, es decir

$$\exists M > 0 \quad \forall b(\lambda) \in \mathcal{F} \quad \|b(\lambda)\|_{L^p} < M \quad (69)$$

y veamos que el conjunto transformado $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ es compacto en la norma usual del máximo en $C[s_0, s_1]$, lo que equivale en virtud del teorema de Ascoli-Arzelá (ver referencia 6 pp.369,370) a la equiacotación y equicontinuidad de la familia $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. La equiacotación resulta inmediatamente usando la desigualdad de Hölder del modo que sigue

$$\begin{aligned} \forall \sigma, \sigma' \in [s_0, s_1] \quad \forall b(\lambda) \in \mathcal{F} \quad \left| \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda - \int_{s_0}^{\sigma'} b(\lambda) d\lambda \right| &\leq \int_{s_0}^{\sigma'} |b(\lambda)| d\lambda \leq \\ &\leq (s_1 - s_0)^{\frac{1}{p'}} \|b(\lambda)\|_{L^p} < (s_1 - s_0)^{\frac{1}{p'}} M \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \end{aligned} \quad (70)$$

mientras que la equicontinuidad se prueba como la (66) obteniéndose

$$\forall \sigma, \sigma' \in [s_0, s_1] \quad \forall b(\lambda) \in \mathcal{F} \quad \left| \int_{s_0}^{\sigma''} b(\lambda) d\lambda - \int_{s_0}^{\sigma'} b(\lambda) d\lambda \right| \leq |\sigma'' - \sigma'|^{\frac{1}{p}} M \quad (71)$$

La compacidad del operador \mathcal{O} de integración implica ahora que la convergencia débil $(b_n(\lambda))_{n \in \mathbb{Z}^+} \rightarrow b(\lambda)$ en $L^p(s_0, s_1)$ resulta en convergencia fuerte de las funciones transformadas (ver referencia 6 p. 107) en la norma del espacio al que pertenecen, es decir, que la diferencia (67) tiende a cero si $n \rightarrow \infty$.

Concluamos la demostración del lema, comprobando que el sumando integral que notábamos por I_n tiende a cero si $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1 + |A_n(\sigma)|) \left| e^{i \int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda} - e^{i \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda} \right| \leq \\ &\leq \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1 + |A_n(\sigma)|) \left| \int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda - \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leftarrow \max_{\sigma \in [s_0, s_1]} \left| \int_{s_0}^{\sigma} b_m(\lambda) d\lambda - \int_{s_0}^{\sigma} \tilde{b}(\lambda) d\lambda \right| \int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1 + |A_m(\sigma)|) \quad (72)$$

El primer factor del último miembro de las desigualdades escritas tiende a cero si $n \rightarrow \infty$, según hemos probado antes. El segundo factor está acotado ya que la desigualdad de Hölder indica

$$\int_{s_0}^{s_1} (1 + |A_m(\sigma)|) d\sigma \leq (s_1 - s_0) + (s_1 - s_0)^{\frac{1}{\alpha'}} \|A_m(\sigma)\|_{L^\alpha} \quad \text{con } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad (73)$$

y la sucesión de normas $\|A_n(\sigma)\|$ está acotada por ser la sucesión $(A_n(\sigma))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ débilmente convergente (referencia 6 p. 107). En resumen $I_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ y el lema 2.1.6 queda probado.

Lema 2.1.7. - El funcional U_e definido por las fórmulas (44) y (36) es débilmente continuo por sucesiones, en la variedad (no lineal) $\text{ex. } \mathcal{M}$ definida por la fórmula (49).

Sea $(A_n(\lambda), B_n(\lambda))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión contenida en $\text{ex. } \mathcal{M}$ de la que supondremos tiene límite débil $(A(\lambda), B(\lambda))$ el cual habrá forzosamente de pertenecer, en virtud del lema anterior, también a la variedad $\text{ex. } \mathcal{M}$ (la cual resulta así ser débilmente cerrada). La fórmula (36) define una sucesión

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad u_n(s) + L w_n(s) = z(s_0) - z(s) + i y(s_0) - i y(s) + \frac{z(s_1) - z(s_0) + i y(s_0) - i y(s_1)}{\int_{s_0}^{s_1} d\sigma (1 + |A_n(\sigma)|) \exp i \int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda} \int_{s_0}^s d\sigma (1 + |A_n(\sigma)|) e^{i \int_{s_0}^{\sigma} \tilde{b}_n(\lambda) d\lambda} \quad (74)$$

donde se ha adoptado la notación del lema anterior $b_n = B_n - (1/\rho)$. Es evidente, por una parte, que las $u_n(s) + iw_n(s)$ son continuas (de hecho son absolutamente continuas) y no es difícil probar, por otra parte, que la sucesión que forman tiende uniformemente a la función (absolutamente continua) $u(s) + iw(s)$ definida por (36). En efecto, según la compacidad del operador \mathcal{O} de integración $\int_{s_0}^{\sigma}$ definido en el lema precedente, la sucesión de funciones $(\int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tiende uniformemente a la función $\int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda$, mientras que por similar razonamiento la sucesión de funciones

$$\left(\int_{s_0}^s d\sigma (1 + A_n(\sigma)) \exp i \int_{s_0}^{\sigma} b_n(\lambda) d\lambda \right)_{n \in \mathbb{Z}^+} \quad (75)$$

tiende uniformemente a la función

$$\int_{s_0}^s d\sigma (1 + A(\sigma)) \exp i \int_{s_0}^{\sigma} b(\lambda) d\lambda$$

Dado que por otra parte, la sucesión numérica formada por los denominadores de la (74) tiene por límite, según el lema 2.1.6 previo, el denominador de la (36) se deduce la convergencia uniforme anunciada, a saber

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{s \in [s_0, s_1]} |u_m(s) - u(s) + i w_m(s) - i w(s)| = 0 \quad (76)$$

Un clásico teorema del análisis matemático elemental nos asegura en este momento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s_0}^{s_1} P(s) w_n(s) ds = \int_{s_0}^{s_1} P(s) w(s) ds \quad (77)$$

igualdad que equivale al enunciado del lema.

Observación.- La demostración dada es válida para la continuidad débil de U_e , no sólo en $\text{ex. } \mathcal{M}$ sino en cualquier otro conjunto \mathcal{C} débilmente cerrado, en el que el funcional Γ (definido por (64)) tome valores separados del cero, es decir

$$\exists d > 0 \quad \forall (A, B) \in \mathcal{C} \quad |\Gamma(A, B)| \geq d \quad (78)$$

Lema 2.1.8.- El conjunto que notaremos $\text{ex. } \mathcal{M}$ definido por

$$\text{ex } \mathcal{M} = \left\{ (A, B) \in \text{ex } \mathcal{M} \mid \text{casi } \forall s \in [s_0, s_1] \quad \dagger A(s) \geq 0 \right\} \quad (79)$$

donde $\text{ex } \mathcal{M}$ se define según (49), es un conjunto débilmente cerrado.

En efecto, el lema 2.1.6 indica que $\text{ex } \mathcal{M}$ es débilmente cerrado, puesto que $(A, B) \in \text{ex } \mathcal{M}$ si y solo si $|\Gamma(A, B)| = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)|$ y, por tanto, si para todo n de \mathbb{Z}^+ es $|\Gamma(A_n, B_n)| = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)|$ la misma relación será satisfecha por el límite débil (A, B) de $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$.

Por otra parte, es fácil probar que el conjunto \mathcal{V} definido por

$$\mathcal{V} = \left\{ (A, B) \in L^{\alpha}(s_0, s_1) \times L^{\beta}(s_0, s_1) \mid \text{casi } \forall s \in [s_0, s_1] \quad \dagger A(s) \geq 0 \right\} \quad (80)$$

es débilmente cerrado. Para ello razonamos por contradicción, su

poniendo que exista un conjunto \mathcal{E} contenido en $[s_0, s_1]$, de medida estrictamente positiva tal que

$$\forall s \in \mathcal{E} \quad 1+A(s) < 0 \quad (81)$$

y denótemos por $\chi_{\mathcal{E}}(s)$ la función característica de \mathcal{E} , que evidentemente pertenece a $L^{\alpha'}(s_0, s_1)$ con $(1/\alpha') + (1/\alpha) = 1$. Si ahora suponemos que la sucesión $(1+A_n(s))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ tiende débilmente a $1+A(s)$ pero de modo que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{casi } \forall s \in [s_0, s_1] \quad 1+A_n(s) \geq 0$$

se verificará en virtud de la convergencia débil

$$0 \leq \int_{s_0}^{s_1} (1+A_n(s)) \chi_{\mathcal{E}}(s) ds \rightarrow \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \chi_{\mathcal{E}}(s) ds \quad (82)$$

con lo cual y en virtud de la (81) deberá ser

$$\int_{\mathcal{E}} (1+A(s)) ds = 0$$

lo que implica (referencia 3, p. 29) que casi por doquier en sea $1+A(s) = 0$, contradiciendo así la (81).

La demostración del lema se concluye ahora por la simple observación de ser $\text{ex } \mathcal{M} = \bigcap \text{ex } \mathcal{M}$

Teorema 2.1.9. - Para cualquier q real el funcional $U = U_1 + qU_e$ definido por las fórmulas (41), (44) y (36) alcanza, en la variedad $\text{ex } \mathcal{M}$ definida por (79), su mínimo absoluto.

Para la demostración observamos en primer lugar que si $u(s) = w(s) = 0$ en las fórmulas (34) y (35) se obtiene $A(s) = B(s) = 0$, es decir, se deduce que el elemento de

$L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1)$ formado por el par de funciones nulas pertenece a $\text{ex. } \mathcal{M}$, con lo cual el lema 2.1.5 asegura la existencia de un entorno de cierto radio $d > 0$, del origen de $L^\alpha \times L^\beta$, de modo que en el exterior de tal entorno el funcional $U_i + qU_e$ toma valores superiores al número

$$U_i(0,0) + q U_e(0,0) = \int_{s_0}^{s_1} W_i(0,0,s) ds$$

es decir, se verifica

$$\begin{aligned} \exists d > 0 \quad \forall (A,B) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1) \quad \|A\| + \|B\| > d &\Rightarrow \\ \Rightarrow U_i(A,B) + q U_e(A,B) > U_i(0,0) + q U_e(0,0) &\quad (83) \end{aligned}$$

de modo que si el funcional $U_i + qU_e$ alcanza su mínimo en el conjunto \mathcal{G} definido por

$$\mathcal{G} = (\text{ex } \mathcal{M}) \cap \left\{ (A,B) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1) \mid \|A\| + \|B\| \leq d \right\} \quad (84)$$

ese mismo mínimo lo alcanzará en toda la variedad $\text{ex. } \mathcal{M}$

Observemos ahora que \mathcal{G} es evidentemente acotado y además débilmente cerrado, ya que resulta de la intersección de una cierta bola de $L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1)$ que, como tal, es débilmente cerrada (ver referencia 5, p. 303) y de la variedad $\text{ex. } \mathcal{M}$ que también es débilmente cerrada, en virtud del lema 2.1.6.

Tenemos así el funcional $U = U_i + qU_e$ que es inferiormente semicontínuo por sucesiones en sentido débil (según los lemas 2.1.4 y 2.1.7) en un conjunto \mathcal{G} que es acotado y débilmente cerrado en el espacio de Banach reflexivo $L^\alpha(s_0, s_1) \times L^\beta(s_0, s_1)$ (a

tal efecto ver referencias 3,6,5 en pp. 127-130, 85-90 y 105, 22-24 y 304 respectivamente). Se dan, por tanto, las condiciones exactas de aplicabilidad de un teorema de análisis funcional (ver referencia 5, p. 78) que asegura la existencia y alcanzabilidad del mínimo de $U = U_i + qU_e$ en el conjunto \mathcal{G} . Según una argumentación hecha previamente, ese mismo mínimo corresponde a toda la variedad $\text{ex. } \mathcal{M}$

Comentario.- El teorema que acabamos de probar dice que el mínimo de $U_i + qU_e$ existe y se alcanza en (al menos) alguna pareja $(A_*(s), B_*(s))$ de funciones de $\text{ex. } \mathcal{M}$, la cual llamaremos por comparación con 1.6.5 configuración generalizada de equilibrio. Si pudiera probarse que tal configuración verifica $A_*(s) \in C^1[s_0, s_1]$ y $B_*(s) \in C[s_0, s_1]$ se deduciría según (36) y la notación de (28) que el correspondiente campo de desplazamientos $(u_*(s), w_*(s))$ pertenece a \mathcal{G} . El mínimo absoluto de $U_i + qU_e$, ahí alcanzado sería entonces una configuración de equilibrio, según se definió en 1.6.5.

El próximo apartado 2.2 se dedicará a preparar la prueba de las condiciones $A_*(s) \in C^1[s_0, s_1]$ $B_*(s) \in C[s_0, s_1]$, las cuales diremos "de regularidad" de la configuración generalizada de equilibrio. La mencionada prueba exigirá hipótesis adicionales en la función $W_i(A, B, s)$ del potencial elástico.

SECCIÓN 2.2 MODIFICACION DEL PROBLEMA VARIACIONAL.- Un aspecto importante de la demostración de regularidad de la configuración generalizada consiste en establecer, que tal configuración satisfice las clásicas ecuaciones de Euler-Lagrange de un cierto proble-

ma variacional. En la formulación de ese problema consideraremos como variables del funcional, en vez de las $(A(s), B(s))$ hasta ahora manejadas un nuevo par $(A(s), \varphi(s))$, donde $\varphi(s)$ que definiremos con precisión en breve tendrá el significado geométrico de $\phi_*(s) - \phi(s)$ según las fórmulas (8) y (9).

2.2.1. Notación y definición. - El símbolo $W_P^1(s_0, s_1)$ denotará el espacio vectorial real de las funciones $\varphi(s)$ absolutamente continuas (ver referencia 3, pp.8, 28, 165-168) en el intervalo $[s_0, s_1]$ cuya derivada $\varphi'(s)$ pertenece a $L^P(s_0, s_1)$. Es decir

$$W_P^1(s_0, s_1) = \left\{ \varphi(s) \text{ medible en } [s_0, s_1] \mid \text{casi } \forall s \in [s_0, s_1] \exists \varphi'(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(s+t) - \varphi(s)}{t} \right. \\ \left. \& \forall s \in [s_0, s_1] \varphi(s) - \varphi(s_0) = \int_{s_0}^s \varphi'(\sigma) d\sigma \& \int_{s_0}^{s_1} |\varphi'(s)|^P ds < +\infty \right\} \quad (85)$$

*Pasemos ahora a considerar la variedad $\text{ex } \mathcal{M}$ definida por las (49) y (79) y definamos en ella una aplicación Σ con imagen en $L^\alpha(s_0, s_1) \times W_P^1(s_0, s_1)$ y tal que

$$\forall (A, B) \in \text{ex } \mathcal{M} \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad \Sigma(A, B)(s) = (A(s), \varphi(s))$$

$$\text{con } \varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \quad , \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi) \quad (86)$$

$$e^{i\varphi_0} \int_{s_0}^{s_1} ds (1+A(s)) \exp i \int_{s_0}^s d\sigma (B(\sigma) - \frac{1}{\rho(\sigma)}) = x(s_1) - x(s_0) + i y(s_1) - i y(s_0)$$

Lema 2.2.2. - La aplicación Σ arriba definida es biyectiva entre la variedad $\text{ex } \mathcal{M}$ y el subconjunto \mathcal{C} de $L^\alpha(s_0, s_1) \times W_P^1(s_0, s_1)$ definido por

$$\mathcal{C} = \left\{ (A, \varphi) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times W_P^1(s_0, s_1) \mid \text{casi } \forall s \in [s_0, s_1] \quad 1+A(s) \geq 0 \& \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{s_0}^{s_1} ds (1+A(s)) \cos \left(\varphi(s) - \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)} \right) = x(s_1) - x(s_0) \quad \& \quad \varphi(s_0) \in [0, 2\pi) \quad \& \\ & \int_{s_0}^{s_1} ds (1+A(s)) \sin \left(\varphi(s) - \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)} \right) = y(s_1) - y(s_0) \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

En efecto, si examinamos primero la aplicación directa Σ con la notación $\Sigma(A, B)(s) = (A(s), \varphi(s))$, la primera condición $1+A(s) > 0$ que define \mathcal{L} resulta directamente de la definición (79) de $\text{ex } \mathcal{H}$. Las dos condiciones siguientes de la definición de \mathcal{L} se resumen en la forma compleja

$$\int_{s_0}^{s_1} ds (1+A(s)) \exp i \left(\varphi(s) - \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)} \right) = x(s_1) - x(s_0) + i y(s_1) - i y(s_0) \quad (88)$$

que se deduce inmediatamente de la definición (86) de Σ , la cual también implica de modo evidente que $\varphi(s_0) = \varphi_0 \in [0, 2\pi)$.

En cuanto a la aplicación inversa, se constata su existencia observando que si $(A(s), \varphi(s))$ es un elemento de \mathcal{L} , resulta obtenido como imagen por Σ del único elemento $(A(s), B(s))$ donde $B(s) = \varphi'(s)$. Este elemento verifica, en virtud de (88) la condición (49) y pertenece, por tanto, a $\text{ex } \mathcal{H}$.

Notaciones 2.2.3. - Denotaremos por $\text{ex } \mathcal{L}$ el subconjunto de

$L^\alpha(s_0, s_1) \times W_\beta^1(s_0, s_1)$ definido por

$$\text{ex } \mathcal{L} = \left\{ (A, \varphi) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times W_\beta^1(s_0, s_1) \mid \int_{s_0}^{s_1} ds (1+A(s)) e^{i \left(\varphi(s) - \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)} \right)} = \right. \\ \left. = x(s_1) - x(s_0) + i y(s_1) - i y(s_0) \quad \& \quad \text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad 1+A(s) > 0 \right\} \quad (89)$$

y por V_i, V_e los funcionales definidos en él, de las siguientes respectivas formas:

$$\forall (A, \varphi) \in \text{ex } \mathcal{L} \quad V_i(A, \varphi) = \int_{s_0}^{s_1} W_i(A(s), \varphi'(s), s) ds \quad (90)$$

$$V_e(A, \varphi) = \int_{s_0}^{s_1} Q(s) \left(1 + A(s) \sin \left(\varphi(s) - \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{P(\sigma)} \right) \right) ds$$

$$\text{donde} \quad Q(s) = \int_s^{s_1} P(\sigma) d\sigma \quad (91)$$

siendo la función P la considerada en (44). Finalmente y por comodidad, adoptaremos la notación

$$f(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{P(\sigma)} d\sigma \quad (92)$$

Teorema 2.2.4. - Con las notaciones previas y para cualquier q real se verifica que el funcional $V = V_i + qV_e$ alcanza su mínimo en el conjunto $\text{ex } \mathcal{L}$.

En efecto, dada la periodicidad de las funciones seno y coseno es inmediato observar, que para todo elemento $(A(s), \varphi(s))$ de $\text{ex } \mathcal{L}$ hay un elemento $(A(s), \varphi_*(s))$ de \mathcal{L} de modo que

$$V_i(A(s), \varphi(s)) = V_i(A(s), \varphi_*(s)) \quad V_e(A(s), \varphi(s)) = V_e(A(s), \varphi_*(s)) \quad (93)$$

Basta para ello tomar $\varphi_*(s) = \varphi(s) - 2n\pi$ donde n es un entero tal que $\varphi(s_0) - 2n\pi$ pertenezca al intervalo $[0, 2\pi)$. La observación hecha implica que es suficiente probar el teorema que nos ocupa, reemplazando en su enunciado $\text{ex } \mathcal{L}$ por \mathcal{L} .

Por otra parte y según el lema 2.2.2 es evidente

$$\forall (A, \varphi) \in \mathcal{L} \quad V_i(A, \varphi) = U_i(\Sigma^{-1}(A, \varphi)) \quad (94)$$

y además obtenemos para el funcional V_e , teniendo en cuenta la fórmula de integración por partes para funciones absolutamente continuas (referencia 3, p. 176).

$$\left. \begin{aligned} \forall (A, \varphi) \in \mathcal{L} \quad V_e(A, \varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} Q(s) (1+A(s)) \operatorname{sen} \left(\varphi(s) - \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{P(\sigma)} \right) ds = \\ &= Q(s) \int_{s_0}^s d\sigma (1+A(\sigma)) \operatorname{sen} \left(\varphi(\sigma) - \int_{s_0}^{\sigma} \frac{d\lambda}{P(\lambda)} \right) \left[\int_{s_0}^{s_1} ds Q'(s) \int_{s_0}^s d\sigma (1+A(\sigma)) \operatorname{sen} \left(\varphi(\sigma) - \int_{s_0}^{\sigma} \frac{d\lambda}{P(\lambda)} \right) \right] \\ &= + \int_{s_0}^{s_1} ds P(s) \int_{s_0}^s d\sigma (1+A(\sigma)) \operatorname{sen} \left(\varphi(\sigma) - \int_{s_0}^{\sigma} \frac{d\lambda}{P(\lambda)} \right) \end{aligned} \right\} (95)$$

y con las notaciones

$$\left. \begin{aligned} (A(s), B(s)) &= \Sigma^{-1}(A(s), \varphi(s)) \quad \varphi_0 = \varphi(s_0) \\ h &= \int_{s_0}^{s_1} P(s) (y(s_0) - y(s)) ds \end{aligned} \right\} (96)$$

podemos escribir en consecuencia

$$\left. \begin{aligned} \forall (A, \varphi) \in \mathcal{L} \quad h + V_e(A, \varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} P(s) \left\{ y(s_0) - y(s) + \right. \\ &+ \left. \int_{s_0}^s d\sigma (1+A(\sigma)) \operatorname{Im} \exp i \left(\varphi_0 + \int_{s_0}^{\sigma} (B(\lambda) - \frac{1}{P(\lambda)}) d\lambda \right) \right\} ds = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} P(s) \left\{ y(s_0) - y(s) + \int_{s_0}^s d\sigma (1+A(\sigma)) \operatorname{Im} \frac{z(s_1) - z(s_0) + iy(s_1) - iy(s_0)}{z(s_1) - z(s_0) + iy(s_1) + iy(s_0)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp i \left(\varphi_0 + \int_{s_0}^{\sigma} (B(\lambda) - \frac{1}{P(\lambda)}) d\lambda \right) \right\} ds \end{aligned} \right\} (97)$$

y si ahora tenemos en cuenta las (86) y la notación (36) resulta

$$\left\{ \forall (A, \varphi) \in \mathcal{L} \quad h + V_e(A, \varphi) = \int_{s_0}^{s_1} P(s) w(s) ds = \right.$$

$$= \mathcal{U}_e(A(s), B(s)) = \mathcal{U}_e(\Sigma^{-1}(A(s), \varphi(s))) \quad (98)$$

de modo que existe un número h (independiente de $A(s), \varphi(s)$) que junto con la biyección Σ establecida entre \mathcal{M} y \mathcal{L} verifican

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad \forall (A, \varphi) \in \mathcal{L} \quad (V_i + q V_e)(A, \varphi) = -qh + (U_i + q U_e)(\Sigma^{-1}(A, \varphi)) \quad (99)$$

La conclusión del teorema que nos ocupa resulta ahora como traducción directa del teorema 2.1.9 del apartado precedente.

La idea principal subyacente en la prueba de regularidad para $(A_*(s), B_*(s))$ consiste en demostrar que esa configuración generalizada satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (a describir con precisión más adelante) del funcional

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\{ W_i(A(s), \varphi(s), s) + q Q(s) (1 + A(s)) \exp i(\varphi(s) - f(s)) \right\} ds \quad (100)$$

con las dos condiciones de enlace (89) que definen \mathcal{L} , a saber

$$\int_{s_0}^{s_1} ds (1 + A(s)) \exp i(\varphi(s) - f(s)) = x(s_1) - x(s_0) + i y(s_1) - i y(s_0)$$

La dificultad más importante para la susodicha demostración proviene de que, en principio, para algunos valores s se podría verificar $A_*(s) = -1$ y en ellos la función $W_i(A_*(s), \varphi_*(s), s)$ se haría infinita de modo que cualquier intento tropezaría con un grave obstáculo. Para obviar la dificultad descrita definire-

mos una nueva deformación D , que llamaremos distorsionada, en correspondencia biyectiva $A = g(D)$ con la deformación longitudinal A , de modo que a la recta real $-\infty < D < +\infty$ le corresponda el intervalo abierto semiinfinito $-1 < A < +\infty$.

Definiciones y notaciones 2.2.5. - Llamaremos función de distorsión a toda función g de valores en $(-1, +\infty)$ que sea de clase $C^1(-\infty, +\infty)$ de derivada positiva en sentido estricto.

Dado un arco elástico en carga y con las definiciones y notaciones de 2.1.6 y de 2.2.1 a 2.2.4 llamaremos conjunto de significación a la familia \mathcal{F} de los pares $A(s), \varphi(s)$ de funciones, respectivamente medibles y absolutamente continuas en el intervalo $[s_0, s_1]$ tales que $V_i(A, \varphi) < +\infty$, $V_e(A, \varphi) < +\infty$ y además, sea casi por doquier $1+A(s) \geq 0$; es decir:

$$\mathcal{F} = \left\{ (A(s), \varphi(s)) \mid \begin{array}{l} A: [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \quad \varphi: [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ abso-} \\ \text{lutamente continua} \text{ \& casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad 1+A(s) \geq 0 \text{ \&} \\ \text{\& } V_i(A, \varphi) < +\infty, V_e(A, \varphi) < +\infty \end{array} \right\} \quad (101)$$

y dada una función g de distorsión, llamaremos respectivamente energía elástica distorsionada y módulo de potencial externo distorsionado a los funcionales V_{ig}, V_{eg} definidos en el conjunto \mathcal{M}_{ab} de los pares $(D(s), \varphi(s))$ de funciones, medible la primera y absolutamente continua la segunda, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \forall (D, \varphi) \in \mathcal{M}_{ab} \quad V_{ig}(D, \varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} W_i(g(D(s)), \varphi'(s), s) ds \\ V_{eg}(D, \varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} Q(s) (1+g(D(s))) \text{sen}(\varphi(s) - f(s)) ds \end{aligned} \quad (102)$$

Llamaremos conjunto distorsionado de significación a la fa-

milia \mathcal{F}_g de pares de funciones de \mathcal{M}_{ab} tales que

$$\mathcal{F} = \{ (D, \varphi) \in \mathcal{M}_{ab} \mid V_i g(D, \varphi) < +\infty \quad V_e g(D, \varphi) < +\infty \} \quad (103)$$

y llamaremos finalmente operador de distorsión a la aplicación g definida por

$$\forall (D, \varphi) \in \mathcal{M}_{ab} \quad g(D(s), \varphi(s)) = (g(D(s), \varphi(s))) \quad (104)$$

donde debe sobreentenderse que $g(-\infty) = -1$ y $g(+\infty) = +\infty$.

Lema 2.2.6.- Con las definiciones anteriores se verifica que \mathcal{F} está contenido en $L^\alpha(s_0, s_1) \times W^1_p(s_0, s_1)$ y que el mínimo del funcional $V_i + qV_e$ en $\text{ex } \mathcal{E}$ (alcanzado según el teorema 2.2.4) coincide con su mínimo en $(\text{ex } \mathcal{E}) \cap \mathcal{F}$, que también es alcanzado.

En efecto, la primera afirmación resulta inmediatamente razonando por contradicción, pues si un par de funciones $(A(s), \varphi(s))$ de \mathcal{F} no perteneciese a $L^\alpha \times W^1_p$, es decir si fuese

$$\int_{s_0}^{s_1} |A(s)|^\alpha ds = +\infty \quad \text{o} \quad \int_{s_0}^{s_1} |\varphi'(s)|^p ds = +\infty \quad (105)$$

la condición de crecimiento (50) implicaría, previa integración en s , que $V_i(A, \varphi) = +\infty$ lo que contradice la pertenencia a \mathcal{F} del par $(A(s), \varphi(s))$

Que el mínimo alcanzado en un cierto par $(A_*(s), \varphi_*(s))$ de $\text{ex } \mathcal{E}$ pertenece a \mathcal{F} es trivial, puesto que por su condición de mínimo

$$V_i(A_*(s), \varphi_*(s)) + qV_e(A_*(s), \varphi_*(s)) \leq V_i(o, \psi_o) + qV_e(o, \psi_o) < +\infty$$

siendo ψ_0 la función constante tal que

$$e^{i\psi_0} \int_{s_0}^{s_1} \exp\left(-i \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)}\right) ds = x(s_1) - x(s_0) + i y(s_1) - i y(s_0) \quad (106)$$

Tal constante existe como se comprueba al sustituir en la fórmula (36) las funciones idénticamente nulas $u(s)=w(s)=A(s)=B(s)=0$, debiendo notarse por otra parte que el par de funciones constantes $(0, \psi_0)$ pertenece a la variedad $\text{ex } \mathcal{L}$ definida en la (89).

Hipótesis 2.2.7. - El grado de crecimiento hacia infinito de la función $W_1(A, B, s)$ cuando $A \rightarrow -1$ supondremos que verifica las condiciones siguientes

- a) Existe una función de distorsión g y existen números reales $H_1 > 0$ $K_1 > 0$ $\alpha_1 > 1$ $\beta_1 > 1$ tales que para cualesquiera D, B, s en $\mathbb{R}^2 \times [s_0, s_1]$ se cumple

$$W_1(g(D), B, s) \geq H_1 |D|^{\alpha_1} + H_1 |B|^{\beta_1} - K_1 \quad (107)$$

- b) Para cualquier $D(s)$ en $L^{\alpha_1}(s_0, s_1)$ es $g(D(s))$ perteneciente a $L^1(s_0, s_1)$. Ello sucede (ver referencia 5, pp. 147-155) si g satisface una acotación de la forma $|g(D)| \leq c_1 + c |D|^{\alpha_1}$ con c_1 real y $c > 0$.
- c) Para cualquier $D(s)$ en $L^1(s_0, s_1)$ es $g'(D(s))$ perteneciente a $L^{\alpha'_1}(s_0, s_1)$ donde $(1/\alpha_1) + (1/\alpha'_1) = 1$. Ello sucede si g' satisface una acotación de la forma $|g'(D)| \leq d_1 + d |D|^{\alpha_1/\alpha'_1}$ con d_1 real y $d > 0$.

- d) Supondremos en resumen:

$$\exists c_1 \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R}^+ \quad \forall D \in \mathbb{R} \quad (108)$$

$$|g(D)| \leq c_1 + c |D|^{\alpha_1} \quad |g'(D)| \leq c_1 + c |D|^{\alpha_1 - 1}$$

Lema 2.2.8. - En la hipótesis (107), \mathcal{F}_g es un conjunto contenido en $L^{\alpha_1}(s_0, s_1) \times W_{\beta_1}^1(s_0, s_1)$ y el operador g define una biyección entre \mathcal{F} y \mathcal{F}_g .

En efecto, la primera afirmación se deduce de la desigualdad (107) previa integración en s , mientras que la segunda resulta de que toda función continua de una función medible es a su vez medible (ver referencia 3, p. 10) y de la particular definición de los funcionales V_{ig} , V_{eg} como aquellos que toman, respectivamente, los mismos valores en \mathcal{F}_g que los V_i , V_e en \mathcal{F} .

Llegamos ahora a la reformulación de nuestro problema variacional, lo que hacemos del siguiente modo:

Teorema 2.2.9. - Para todo q real, el funcional $V_g = V_{ig} + qV_{eg}$ definido (en 102-103) por la fórmula

$$\forall (D, \varphi) \in \mathcal{M}_{ab} \quad V_g = \int_{s_0}^{s_1} W_i(g(D(s)), \varphi'(s), s) ds + q \int_{s_0}^{s_1} Q(s) \{1 + g(D(s))\} \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) ds \quad (109)$$

alcanza un mínimo en el conjunto \mathcal{L}_g definido por

$$\mathcal{L}_g = \left\{ (D, \varphi) \in \mathcal{M}_{ab} \mid \int_{s_0}^{s_1} \{1 + g(D(s))\} \exp i(\varphi(s) - f(s)) ds = x(s_1) - x(s_0) + iy(s_1) - iy(s_0) \ \& \ V_{ig}(D, \varphi) + qV_{eg}(D, \varphi) < +\infty \right\} \quad (110)$$

En efecto, la afirmación de este teorema es consecuencia in

mediata del lema anterior, previo recordatorio de que $\mathcal{F}g$ es el conjunto $\{(D\varphi) \in \mathcal{K}ab \quad V_{ig}(D, \varphi) + q V_{eg}(D, \varphi) < +\infty\}$, así como de observar que el lema 2.2.6 equivale a decir que el funcional $V_1 + qV_0$ alcanza su mínimo en el conjunto

$$\{(A, \varphi) \in \mathcal{F} \mid \int_{s_0}^{s_1} (4A(s)) \exp i(\varphi(s) - f(s)) ds = x(s) x(s_0) + y(s) - l y(s_0)\} \quad (111)$$

SECCION 2.3 REGULARIDAD DE LA SOLUCION GENERALIZADA. - Llegados a este punto, el último teorema 2.2.9 nos sitúa en condiciones de abordar la prueba de regularidad de la configuración de equilibrio. Ello requiere una preparación un tanto laboriosa, la que desarrollamos en los próximos lemas y definiciones.

Lema 2.3.1. - Sea $F(s)$ una función continua cualquiera en $[s_0, s_1]$ y sea η_0 un número real arbitrario. En estas condiciones y con todas las hipótesis y notaciones de los apartados previos, se verifica que el funcional G definido en $L^{\alpha_1}(s_0, s_1) \times W_{\beta_1}^1(s_0, s_1)$ por la fórmula

$$V(D\varphi) \in L^{\alpha_1} \times W_{\beta_1}^1 \quad G(D, \varphi) = \int_{s_0}^{s_1} F(s) \{1 + g(D(s))\} \cos(\varphi(s) - f(s) + \eta_0) ds \quad (113)$$

es finito y diferenciable en el sentido de Gateaux (ver referencia 5, pp. 35-43) en cada elemento y en cada dirección del espacio $L^{\alpha_1} \times W_{\beta_1}^1$.

La finitud resulta, en efecto, de la acotación de F como consecuencia de su continuidad así como de la función coseno, junto con la hipótesis 2.2.7 d) que asegura $g(D(s)) \in L^1(s_0, s_1)$.

Para demostrar la diferenciability hay que establecer, pa-

ra cualesquiera (D_*, φ_*) y (D, φ) en $L^{\alpha 1}(s_0, s_1) \times W^1_1(s_0, s_1)$, la existencia de la derivada

$$\frac{d}{dt} G(D_* + tD, \varphi_* + t\varphi) \Big|_{t=0} \quad (114)$$

lo que haremos utilizando su definición directa como límite. Consideremos a tal efecto, la diferencia II .

$$\begin{aligned} \text{II} = F(s) \{ 1 + g(D_*(s) + tD(s)) \} \cos(\varphi_*(s) + t\varphi(s) - f(s) + \eta_0) - \\ - F(s) \{ 1 + g(D_*(s)) \} \cos(\varphi_*(s) - f(s) + \eta_0) \end{aligned} \quad (115)$$

que según el teorema del Cálculo elemental, del incremento finito, se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \text{II} = F(s) D(s) g'(D_*(s) + t\theta(s) D(s)) \cos(\varphi_*(s) + t\theta(s)\varphi(s) - f(s) + \eta_0) - \\ - F(s) \{ 1 + g(D_*(s) + t\theta(s) D(s)) \} \varphi(s) \operatorname{sen}(\varphi_*(s) + t\theta(s)\varphi(s) - f(s) + \eta_0) \end{aligned} \quad (116)$$

donde $\theta(s)$ es una cierta función que verifica $0 < \theta(s) < 1$, de modo que podemos escribir

$$\frac{1}{t} \{ G(D_* + tD, \varphi_* + t\varphi) - G(D_*, \varphi_*) \} = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{t} \text{II}(s) ds \quad (117)$$

Observamos ahora que la expresión (116) tiende puntualmente, si $t \rightarrow 0$, a la función

$$\begin{aligned} F(s) D(s) g'(D_*(s)) \cos(\varphi_*(s) - f(s) + \eta_0) - \\ - F(s) \{ 1 + g(D_*(s)) \} \varphi(s) \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s) + \eta_0) \end{aligned} \quad (118)$$

la cual es integrable, en virtud de las hipótesis 2.2.7 y de la desigualdad de Hölder. Veamos ahora que se dan las condiciones del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (ver referen

cia 3, p. 26) para la convergencia de la integral (117), cuyo integrando es la expresión (116) con límite puntual la última (118). Consideremos a tal efecto una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ de reales positivos cuyo límite sea 0 y que verificará por tanto, para todo n mayor que un cierto n_0 , la condición $|t_n| < 1$; con lo cual la expresión (116) y las desigualdades (108) implican:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t_n} \text{II} \right| &\leq |F(s)| |D(s)| |g'(D_*(s) + t_n \theta(s) D(s))| + |F(s) \varphi(s)| |1 + g(D_*(s) + t_n \theta(s) D(s))| \\ &\leq |F(s)| |D(s)| (|c_1| + c |D_*(s) + t_n \theta(s) D(s)|^{\alpha_1 - 1}) + |F(s) \varphi(s)| (1 + |c_1| + \\ &+ c |D_*(s) + t_n \theta(s) D(s)|^{\alpha_1}) \leq |F(s)| |D(s)| (|c_1| + c \{ |D_*(s)| + |t_n \theta(s) D(s)| \}^{\alpha_1 - 1}) + \\ &+ |F(s) \varphi(s)| (1 + |c_1| + c \{ |D_*(s)| + |t_n \theta(s) D(s)| \}^{\alpha_1}) \leq |F(s)| |D(s)| (|c_1| + \\ &+ c \{ |D_*(s)| + |D(s)| \}^{\alpha_1 - 1}) + |F(s) \varphi(s)| (1 + |c_1| + c \{ |D_*(s)| + |D(s)| \}^{\alpha_1}) \end{aligned}$$

Si ahora sustituimos el factor $|D(s)|$, del primer sumando del último miembro de las sucesivas desigualdades, por su mayorante $|D(s)| + |D_*(s)|$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t_n} \text{II} \right| &\leq (1 + |c_1|) |F(s) \varphi(s)| + |c_1| |F(s)| |D(s)| + \\ &+ (1 + |F(s) \varphi(s)|) c \{ |D_*(s)| + |D(s)| \}^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (119)$$

Para α_1 fijo > 1 , la función real x^{α_1} es convexa en $x > 0$ (derivada segunda positiva) lo que implica:

$$\left(\frac{1}{2} |D_*(s)| + \frac{1}{2} |D(s)| \right)^{\alpha_1} \leq \frac{1}{2} |D_*(s)|^{\alpha_1} + \frac{1}{2} |D(s)|^{\alpha_1} \quad (120)$$

con lo cual la desigualdad (119) se modifica así:

$$\left| \frac{1}{t_n} \Pi \right| \leq (1+|c_1|) |F(s)| |\varphi(s)| + |c_1| |F(s)| |D(s)| + (1+|F(s)| |\varphi(s)|) \times c 2^{\alpha_1} \frac{1}{2} |D_*(s)|^{\alpha_1} + (1+|F(s)| |\varphi(s)|) c 2^{\alpha_1} \frac{1}{2} |D(s)|^{\alpha_1} \quad (121)$$

Como $|F(s)|$ y $|\varphi(s)|$ son funciones continuas en $[s_0, s_1]$ cerrado, sus máximos que denotaremos respectivamente por M_1 y M_2 son números reales positivos (finitos) de modo que

$$\left| \frac{1}{t_n} \Pi(s) \right| \leq (1+|c_1|) M_1 M_2 + |c_1| M_1 |D(s)| + 2^{\alpha_1-1} c (1+M_1 M_2) (|D_*(s)|^{\alpha_1} + |D(s)|^{\alpha_1})$$

lo que prueba finalmente que la convergencia del integrando de (117) está dominada por una función con integral finita, puesto que tanto $|D(s)|$ como $|D_*(s)|^{\alpha_1}$ y $|D(s)|^{\alpha_1}$ tienen tal carácter. Podemos entonces tomar límites cuando $t_n \rightarrow 0$ y escribir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(D_* + tD, \varphi_* + t\varphi) \Big|_{t=0} &= \int_{s_0}^{s_1} ds F(s) D(s) g'(D_*(s)) \cos(\varphi_*(s) - f(s) + \eta_0) - \\ &- \int_{s_0}^{s_1} ds F(s) \varphi(s) \{1 + g(D_*(s))\} \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s) + \eta_0) \end{aligned} \quad (122)$$

quedando así demostrado el lema que nos ocupa.

Corolario 2.3.2. - Los funcionales M_g , N_g , V_{eg} definidos en $L^{\alpha_1}(s_0, s_1) \times W_{\beta_1}^1(s_0, s_1)$ respectivamente por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \psi(D, \varphi) &\in L^{\alpha_1}(s_0, s_1) \times W_{\beta_1}^1(s_0, s_1) \quad M_g(D, \varphi) = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} ds \{1 + g(D(s))\} \cos(\varphi(s) - f(s)) ; \quad N_g(D, \varphi) = \int_{s_0}^{s_1} ds \{1 + g(D(s))\} \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) \\ V_{eg}(D, \varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} Q(s) \{1 + g(D(s))\} \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) ds \end{aligned} \quad (123)$$

son finitos y diferenciables en el sentido de Gateaux en todo

$L^{\alpha_1} \times W_{\beta_1}^1$

En efecto, cada uno de estos funcionales resulta como un caso particular del funcional G del lema 2.2.2 previo, para determinadas elecciones de $F(s)$ y η_0 , a saber

$$\begin{aligned} M_g & \text{ para } F(s)=1, \eta_0=0 \quad ; \quad N_g & \text{ para } F(s)=1, \eta_0=-\frac{\pi}{2} \\ V_{eg} & \text{ para } F(s)=Q(s), \eta_0=-\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (124)$$

debiendo notarse que $Q(s)$ es continua, dada su definición por (44) y (91). Las derivadas de estos funcionales resultan de particularizar adecuadamente en la fórmula (122).

Hipótesis 2.3.3. - El crecimiento de la función W_1 cuando $|D| + |B| \rightarrow \infty$ viene acotado inferiormente por la desigualdad (107). Ahora supondremos además, que tal crecimiento está acotado superiormente del modo que sigue:

$$\begin{aligned} \exists k_1 > 0 \quad \exists k_2 > 0 \quad \forall (D, B, s) \in \mathbb{R}^2 \times [s_0, s_1] \\ \left| \frac{\partial W_1}{\partial D}(g(D), B, s) \right| \leq k_1 |D|^{\alpha_1} + k_2 |B|^{\beta_1} + k_3 \end{aligned} \quad (125)$$

siendo importante observar que la primera derivada parcial se entiende respecto a la variable D y no respecto a $A = g(D)$.

Lema 2.3.4. - Si $(D_*(s), \varphi_*(s))$ es un elemento del espacio \mathcal{M} tal que $\int_{s_0}^{s_1} W_1(g(D_*(s)), \varphi_*(s), s) ds < +\infty$, es decir, según la notación (103) y el lema 2.2.8, si $(D_*(s), \varphi_*(s))$ pertenece al subconjunto \mathcal{F}_g de $L^{\alpha_1}(s_0, s_1) \times W_{\beta_1}^1(s_0, s_1)$ y si por otra parte, $D(s)$ es continua en $[s_0, s_1]$ cerrado, entonces el funcional V_{ig} definido en (102) es derivable- Gateaux en el elemento

$(D_*(s), \varphi_*(s))$ y según el vector $(D(s), \varphi(s))$. Además, dado cualquier t real se verifica que el funcional V_{ig} toma valor finito en $(D_*(s)+t D(s), \varphi_*(s)+t \varphi(s))$.

Para la demostración seguimos un método similar al del lema 2.3.1. Introducimos por comodidad la notación

$$\forall (D, B, s) \in \mathbb{R}^2[s_0, s_1] \quad \Omega_i(D, B, s) = W_i(g(D), B, s) \quad (126)$$

y dado cualquier t real escribimos la diferencia Π .

$$\Pi = \Omega_i(D_*(s)+t D(s), \varphi'_*(s)+t \varphi'(s), s) - \Omega_i(D_*(s), \varphi'_*(s), s) \quad (127)$$

que con las reglas más clásicas del Cálculo elemental se expresa del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \Pi &= D(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial D} (D_*(s)+t \theta(s) D(s), \varphi'_*(s)+t \theta(s) \varphi'(s), s) + \\ &+ \varphi'(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial B} (D_*(s)+t \theta(s) D(s), \varphi'_*(s)+t \theta(s) \varphi'(s), s) \end{aligned} \quad (128)$$

donde $\theta(s)$ es una función tal que $0 < \theta(s) < 1$. La condición

(125) permite ahora escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t|} |\Pi(s)| &\leq (|D(s)| + |\varphi'(s)|) (k_1 |D_*(s)+t \theta(s) D(s)|^{\alpha_1} + \\ &+ k_1 |\varphi'_*(s)+t \theta(s) \varphi'(s)|^{\beta_1} + k_1) \end{aligned} \quad (129)$$

y dado que $|D(s)|$, $|\varphi'(s)|$ son funciones continuas, sus máximos que notaremos M_1 y M_2 respectivamente son finitos, con lo cual

$$|\Pi(s)| \leq (M_1 + M_2) |t| (k_1 |D_*(s)+t \theta(s) D(s)|^{\alpha_1} + k_1 |\varphi'_*(s)+t \theta(s) \varphi'(s)|^{\beta_1}) \quad (130)$$

La función $D_*(s)$ pertenece al espacio $L^{\alpha_1}(s_0, s_1)$ y también (trivialmente) la $t \theta(s) D(s)$, con lo que la conocida pro-

propiedad de linealidad de este espacio (referencia 3, pp. 62-65) asegura la integrabilidad (finita) de la función $|D_*(s) + t\theta(s) D(s)|^{\alpha_1}$ y análogamente para la integrabilidad de $|\varphi'_*(s) + t\theta(s) \varphi'(s)|^{\beta_1}$. En resumen $\Pi(s)$ es una función con integral finita, con lo cual la última afirmación del lema (de finitud de V_{ig}) se obtiene a partir de la (127) del modo que sigue:

$$\begin{aligned} V_{ig}(D_* + tD, \varphi_* + t\varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} \Omega_i(D_*(s) + tD(s), \varphi'_*(s) + t\varphi'(s), s) ds = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \{ \Omega_i(D_*(s), \varphi'_*(s), s) + \Pi(s) \} ds = V_{ig}(D_*, \varphi_*) + \int_{s_0}^{s_1} \Pi(s) ds < +\infty \end{aligned} \quad (131)$$

Volviendo al tema de la derivación, utilizamos la (128) para el cálculo del cociente incremental

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \{ V_{ig}(D_* + tD, \varphi_* + t\varphi) - V_{ig}(D_*, \varphi_*) \} &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{t} \Pi(s) ds = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} D(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial D} (D_*(s) + t\theta(s)D(s), \varphi'_*(s) + t\theta(s)\varphi'(s), s) ds + \\ &\quad + \int_{s_0}^{s_1} \varphi'(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial B} (D_*(s) + t\theta(s)D(s), \varphi'_*(s) + t\theta(s)\varphi'(s), s) ds \end{aligned} \quad (132)$$

observando que los integrandos del último miembro tienden puntualmente, en virtud de la continuidad de $W_i(A, B, s)$ y de $\Omega_i(D, B, s)$, a la función:

$$D(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial D} (D_*(s), \varphi'_*(s), s) + \varphi'(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial B} (D_*(s), \varphi'_*(s), s) \quad (133)$$

Para comprobar que esta convergencia está dominada por una función integrable, utilizamos la (130) suponiendo $|t| < 1$, lo que es permisible dado que $t \rightarrow 0$. Tenemos así

$$\left| \frac{1}{t} \Pi \right| \leq (M_1 + M_2) \left\{ k_1 + k_2 \left(|D(s)| + |D_*(s)| \right)^{\alpha_1} + k_3 \left(|\varphi'(s)| + |\varphi'_*(s)| \right)^{\beta_1} \right\} \quad (134)$$

y utilizando desigualdades convexas similares a la (120) se obtiene

$$\left| \frac{1}{t} \Pi \{ k_1(M_1+M_2) + k_2(M_1+M_2) \} \left\{ 2^{\alpha_1-1} |D_*(s)|^{\alpha_1} + 2^{\beta_1-1} |\varphi'_*(s)|^{\beta_1} + 2^{\alpha_1-1} M_1^{\alpha_1} + 2^{\beta_1-1} M_2^{\beta_1} \right\} \right|$$

lo que prueba que la convergencia está dominada y, en consecuencia, podemos tomar límites en la (132) si $t \rightarrow 0$, concluyendo finalmente

$$\begin{aligned} & \forall (D_*, \varphi_*) \in L^{\alpha_1}(s_0, s_1) \times W_{\beta_1}^{-1}(s_0, s_1) \quad V_{ig}(D_*, \varphi_*) < +\infty \Rightarrow \\ & \Rightarrow \forall (D, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \quad \left. \frac{d}{dt} V_{ig}(D_* + tD, \varphi_* + t\varphi) \right|_{t=0} = \\ & = \int_{s_0}^{s_1} \left\{ D(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial D}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) + \varphi'(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial B}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) \right\} ds \end{aligned} \quad (135)$$

Lema 1.3.5. - Sea $(D_*(s), \varphi_*(s))$ el elemento de $L^{\alpha_1}(s_0, s_1) \times W_{\beta_1}^{-1}(s_0, s_1)$ para el cual el funcional $V_{ig} + qV_{eg}$ alcanza un mínimo en el conjunto g (ver teorema 2.2.9) y sean $D_1(s), D_2(s), D_3(s)$ tres funciones continuas cualesquiera y $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s)$ tres funciones continuas cualesquiera con derivada continua en $[s_0, s_1]$ cerrado. En estos supuestos y con las notaciones de (123) para M_g, N_g se verifica que las cuatro funciones reales m, n, v_i, v_e de las tres variables reales (z_1, z_2, z_3) definidas por

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \quad m(z_1, z_2, z_3) = M_g(D_* + z_1 D_1 + z_2 D_2 + z_3 D_3, \varphi_* + z_1 \varphi_1 + z_2 \varphi_2 + z_3 \varphi_3)$$

$$n(z_1, z_2, z_3) = N_g(D_* + z_1 D_1 + z_2 D_2 + z_3 D_3, \varphi_* + z_1 \varphi_1 + z_2 \varphi_2 + z_3 \varphi_3)$$

$$v(z_1, z_2, z_3) = V_{ig}(D_* + z_1 D_1 + z_2 D_2 + z_3 D_3, \varphi_* + z_1 \varphi_1 + z_2 \varphi_2 + z_3 \varphi_3)$$

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \quad V_e(z_1, z_2, z_3) = \\ = V_{eg}(D_* + z_1 D_1 + z_2 D_2 + z_3 D_3; \varphi_* + z_1 \varphi_1 + z_2 \varphi_2 + z_3 \varphi_3) \quad (136)$$

son funciones continuas con derivadas parciales primeras todas continuas en un cierto entorno de $(0, 0, 0)$.

Para la demostración comenzamos observando que las cuatro funciones están bien definidas, pues si (z_1, z_2, z_3) es un punto cualquiera de \mathbb{R}^3 basta aplicar el corolario 2.2.2 o el lema 2.3.4 y $D(s) = z_1 D_1(s) + z_2 D_2(s) + z_3 D_3(s)$. Similar observación resuelve sobre la existencia de derivadas parciales, pues cada derivada $\partial/\partial z_j$ (donde $j = 1$ ó 2 ó 3) en un cierto (z_1, z_2, z_3) se obtiene de la (122) o de la (135) reemplazando $D_*(s)$ por $D_*(s) + z_1 D_1(s) + z_2 D_2(s) + z_3 D_3(s)$ y $D(s)$ por $D_j(s)$ y similarmente para $\varphi_*(s)$ y $\varphi(s)$.

En cuanto a la continuidad de las derivadas parciales, tomemos, por ejemplo, el funcional G (del que Mg , Ng , V_{eg} son casos particulares) y sea (a_1, a_2, a_3) un punto cualquiera de \mathbb{R}^3 , j uno cualquiera de los tres índices $1, 2, 3$ y finalmente sea (t_{1n}, t_{2n}, t_{3n}) una sucesión cualquiera en \mathbb{R}^3 con límite el punto $(0, 0, 0)$. Se trataría de probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial z_j} G(D_*(s) + \sum_{k=1}^3 z_k D_k(s); \varphi_*(s) + \sum_{k=1}^3 z_k \varphi_k(s)) \Big|_{z_k = a_k + t_{kn}} = \\ = \frac{\partial}{\partial z_j} G(D_*(s) + \sum_{k=1}^3 z_k D_k(s); \varphi_*(s) + \sum_{k=1}^3 z_k \varphi_k(s)) \Big|_{z_k = a_k} \quad (137)$$

Para ello observamos que el segundo miembro se obtendría en la expresión (122) de dG/dt reemplazando en el integrando las funciones $D(s)$, $\varphi(s)$, $D_*(s)$, $\varphi_*(s)$ respectivamente por

$$D_j(s), \varphi_j(s), D_*(s) + \sum_{k=1}^3 a_k D_k(s), \varphi_*(s) + \sum_{k=1}^3 a_k \varphi_k(s) \quad (138)$$

Asimismo, para el cálculo del primer miembro de la igualdad propuesta (137) deberían reemplazarse en el integrando de (122), las $D(s)$, $\varphi(s)$, $D_*(s)$, $\varphi_*(s)$ respectivamente por:

$$D_j(s), \varphi_j(s), D_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) D_k(s), \varphi_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) \varphi_k(s) \quad (139)$$

y luego tomar límites para $n \rightarrow \infty$. El integrando que corresponde al reemplazo (139) converge puntualmente si $n \rightarrow \infty$, al integrando que corresponde al reemplazo (138), de modo que para probar la igualdad (137) bastaría con demostrar que tal convergencia está dominada por una función integrable, lo que se logra de modo totalmente similar al lema 2.3.1 suponiendo n superior a un cierto n_0 para que sea $|t_{1n}| < 1$, $|t_{2n}| < 1$, $|t_{3n}| < 1$.

Si utilizamos la notación

$$\begin{aligned} J_n(s) = & F(s) D_j(s) g' \left(D_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) D_k(s) \right) \cos(\eta_0 - f(s) + \varphi_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) \varphi_k(s)) \\ & - F(s) \varphi_j(s) \left\{ 1 + g \left(D_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) D_k(s) \right) \right\} \sin(\eta_0 - f(s) + \varphi_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) \varphi_k(s)) \end{aligned} \quad (140)$$

se obtiene sin dificultad exactamente como en las (119), la acotación:

$$|J_n(s)| \leq (1 + |c_1|) |F(s) \varphi_j(s)| + |c_1| |F(s)| |D_j(s)| + \quad (141)$$

$$+ c \left(1 + |F(s) \varphi_j(s)| \right) \left\{ |D_*(s)| + |D_1(s)| + |D_2(s)| + |D_3(s)| \right\}^{\alpha_1}$$

lo que prueba la convergencia dominada, ya que $|D_*(s)|$ y las

$|D_k(s)|$ $k = 1, 2, 3$ pertenecen al espacio $L^1(s_0, s_1)$, que al ser lineal contiene también la función $|D_*(s)| + |D_1(s)| + |D_2(s)| + |D_3(s)|$, cuya potencia α_1 resulta por tanto integrable.

En resumen, las funciones m, n, v_e definidas en (136) tienen derivadas parciales primeras, todas continuas en R^3 . En virtud de resultados típicos del Cálculo elemental son funciones diferenciables y continuas en R^3 .

Pasamos finalmente a considerar la continuidad de las derivadas parciales de la función v_i , la que se comprueba demostrando la igualdad análoga a la (137) pero con el funcional V_{ig} en vez del G y siguiendo un razonamiento similar al efectuado con este último. Para ello sustituiríamos en (135) las funciones $D(s), \varphi(s), D_*(s), \varphi_*(s)$ respectivamente por las indicadas en (138) y, alternativamente, por las indicadas en (139) y utilizamos la notación

$$K_m(s) = D_j(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial D} (D_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) D_k(s), \varphi'_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) \varphi'_k(s), s) + \varphi'_j(s) \frac{\partial \Omega_i}{\partial B} (D_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) D_k(s), \varphi'_*(s) + \sum_{k=1}^3 (a_k + t_{kn}) \varphi'_k(s), s) \quad (142)$$

obtendríamos de modo completamente similar a las (128) a (134) y en en el supuesto $|t_{1n}| < 1$ $|t_{2n}| < 1$ $|t_{3n}| < 1$, la acotación

$$|K_m(s)| \leq (M_{1j} + M_{2j}) \left\{ k_1 + k_1 (|D_*(s)| + \sum_{k=1}^3 |D_k(s)|)^{\alpha_1} + k_1 (|\varphi'_*(s)| + \sum_{k=1}^3 |\varphi'_k(s)|)^{\beta_1} \right\} \quad (143)$$

donde M_{1j} M_{2j} son los respectivos máximos (finitos) de las funciones continuas $|D_j(s)|$, $|\varphi'_j(s)|$. La última desigualdad obtenida prueba que la convergencia está dominada, puesto que la

integrabilidad de $(|D_*(s)| + \sum_k |D_k(s)|)^{\alpha_1}$ se probó en (141) y la de $(|\varphi'_*(s)| + \sum_k |\varphi'_k(s)|)^{\beta_1}$ se probaría de modo totalmente análogo.

En resumen, la función v_1 definida en (136) admite en \mathbb{R}^3 derivadas parciales primeras todas continuas y es, por tanto, diferenciable y continua en \mathbb{R}^3 .

Lema 2.3.6. - Con las notaciones del lema anterior, es posible elegir las funciones $D_2(s)$, $D_3(s)$ en $C[s_0, s_1]$ y las funciones $\varphi_2(s)$, $\varphi_3(s)$ en $C^1[s_0, s_1]$, de modo que se verifique la no anulación del jacobiano que sigue:

$$\left. \frac{\partial(m, n)}{\partial(z_2, z_3)} \right|_{(0,0,0)} \neq 0 \quad (144)$$

En efecto, comenzamos demostrando que los funcionales lineales que notaremos por M'_g , N'_g y definidos por

$$\begin{aligned} \forall (D, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \quad M'_g(D, \varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} D(s) g'(D_*(s)) \times \\ &\times \cos(\varphi_*(s) - f(s)) ds - \int_{s_0}^{s_1} \varphi(s) \{1 + g(D_*(s))\} \sin(\varphi_*(s) - f(s)) ds \quad (145) \\ N'_g(D, \varphi) &= \int_{s_0}^{s_1} D(s) g'(D_*(s)) \sin(\varphi_*(s) - f(s)) ds + \int_{s_0}^{s_1} \varphi(s) \{1 + g(D_*(s))\} \cos(\varphi_*(s) - f(s)) ds \end{aligned}$$

son funcionales no idénticamente nulos. Para la demostración limitándonos al caso de M'_g (el caso de N'_g se trata de modo completamente análogo) observamos que, según las hipótesis 2.2.7 b, c, d, de las funciones: $g'(D_*(s)) \cos(\varphi_*(s) - f(s))$ y $(1 + g(D_*(s))) \sin(\varphi_*(s) - f(s))$ pertenecen a $L^1(s_0, s_1)$ por lo cual, restringiendo el funcional al subdominio de definición

$C_0^\infty(s_0, s_1) \times C_0^\infty(s_0, s_1)$, la teoría de distribuciones indica (ver referencia 8, vol. 2, pp. 83,84) que si (razonando por contradicción) supusiéramos M'_g idénticamente nulo, las dos funciones aludidas serían nulas casi por doquier en (s_0, s_1) , lo que expresamos simbólicamente:

$$\text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad g'(D_*(s)) \cos(\varphi_*(s) - f(s)) = \{1 + g(D_*(s))\} \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s)) = 0 \quad (146)$$

Por otra parte, las funciones $g'(D_*(s))$ y $1 + g(D_*(s))$ se anulan en un conjunto cuya medida es, a lo más, cero pues en caso contrario la definición 2.2.5 y las hipótesis 2.2.7, 2.1.1 implicarían $V_{ig} = +\infty$, lo que contradiría que $V_{ig} + qV_{eg}$ alcanza un mínimo en C_g en el par $(D_*(s), \varphi_*(s))$. Tenemos así

$$\text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad \cos(\varphi_*(s) - f(s)) = \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s)) = 0$$

lo que es manifiestamente contradictorio.

Para continuar con la demostración del lema, observamos que según las definiciones (136) y la fórmula (122) se verifica

$$\forall j=2,3 \quad \left(\frac{\partial m}{\partial z_j}\right)_{0,0,0} = M'_g(D_j, \varphi_j) \quad \left(\frac{\partial n}{\partial z_j}\right)_{0,0,0} = N'_g(D_j, \varphi_j) \quad (147)$$

por lo cual el jacobiano (144) se escribe

$$\frac{\partial(m,n)}{\partial(z_2, z_3)} \Big|_{0,0,0} = M'_g(D_2, \varphi_2) N'_g(D_3, \varphi_3) - M'_g(D_3, \varphi_3) N'_g(D_2, \varphi_2) \quad (148)$$

Elegimos ahora (D_2, φ_2) , en virtud de lo anterior, de modo que se verifique $M'_g(D_2, \varphi_2) \neq 0$ y $N'_g(D_2, \varphi_2) \neq 0$.

Llegados a este punto, razonemos por contradicción suponiendo que el jacobiano (148) fuese nulo para cualquiera otra elección del par (D_3, φ_3) , lo que significaría que el funcional N'_g sería nulo siempre que lo fuese el M'_g y viceversa. Según un resultado de la teoría de espacios vectoriales (de dimensión finita o infinita, ver referencia 9, pp.32, 33) existiría un número c real y no nulo tal que $N'_g = c M'_g$, por lo cual comparando las definiciones (145) y razonando como anteriormente en este lema, en el subdominio de definición $C_0^\infty(s_0, s_1) \times C_0^\infty(s_0, s_1)$ se deduciría

$$\begin{aligned} \text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad \text{sen}(\varphi_{**}(s) - f(s)) &= C_1 \cos(\varphi_{**}(s) - f(s)) \\ \cos(\varphi_{**}(s) - f(s)) &= -C_1 \text{sen}(\varphi_{**}(s) - f(s)) \end{aligned} \quad (149)$$

de donde resulta inmediatamente

$$\text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad (1+C_1^2) \cos(\varphi_{**}(s) - f(s)) = (1+C_1^2) \text{sen}(\varphi_{**}(s) - f(s)) = 0 \quad (150)$$

lo que es evidentemente contradictorio

En resumen, hay una elección de pares $(D_2(s), \varphi_2(s))$, $(D_3(s), \varphi_3(s))$ para la cual el jacobiano de (148) es diferente de cero.

Teorema 2.3.7. - Sea q un número real cualquiera. El par de funciones $(D_*(s), \varphi_*(s))$ del conjunto \mathcal{L}_g en el cual el funcional $V_g = V_{ig} + qV_{eg}$ alcanza (según el teorema 2.2.9) su mínimo, es un par que verifica las condiciones que diremos de regularidad:

$$D_*(s) \in C^1[s_0, s_1] \quad \varphi_*(s) \in C^2[s_0, s_1] \quad (151)$$

Para la demostración y con las notaciones del lema 2.3.5 , elegimos $(D_2(s), \varphi_2(s))$, $(D_3(s), \varphi_3(s))$ de modo que se verifique la condición del lema anterior 2.3.6 , es decir del jacobiano no nulo

$$\frac{\partial(m, n)}{\partial(z_2, z_3)} \Big|_{0,0,0} \neq 0 \quad (152)$$

En tal situación y en virtud del teorema 2.2.9 y de la definición de las funciones m , n , v_i , v_e se verifica que, cualquiera que sea el par $(D_1(s), \varphi_1(s))$ en $C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1]$, la función $v(z_1, z_2, z_3) = v_i(z_1, z_2, z_3) + q v_e(z_1, z_2, z_3)$ alcanza en el conjunto c_g de \mathbb{R}^3 definido por

$$c_g = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid m(z_1, z_2, z_3) = x(s_1) - x(s_0) \quad n(z_1, z_2, z_3) = y(s_1) - y(s_0) \} \quad (153)$$

su mínimo absoluto, precisamente en el punto $(0, 0, 0)$. Por tanto, y en virtud de los lemas 2.3.5 y 2.3.6 se dan las condiciones de aplicabilidad del teorema del Cálculo elemental, de los multiplicadores de Lagrange (en referencia 7, pp. 109-112 hay una elegante demostración de este teorema, según un método debido a Bolza) que en nuestro caso, tomará la forma:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \forall j=1,2,3$$

$$\lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \lambda_1 \frac{\partial v_e}{\partial z_j} + \lambda_1 \frac{\partial m}{\partial z_j} + \lambda_2 \frac{\partial n}{\partial z_j} \Big|_{(z_1, z_2, z_3) = (0,0,0)} = 0 \quad (154)$$

El uso de las derivadas (122) y (135) permite que escribamos esta última ecuación de los multiplicadores en la forma:

$$\begin{aligned}
0 = & \lambda_0 \int_{s_0}^{s_1} \left\langle D_j(s) \left\{ \frac{\partial Q_i}{\partial D} (D_*(s), \varphi'_*(s), s) + q Q(s) g'(D_*(s)) \times \right. \right. \\
& \times \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s)) \left. \right\} + \varphi'_j(s) \frac{\partial Q_i}{\partial B} (D_*(s), \varphi'_*(s), s) + \varphi_j(s) q Q(s) \times \\
& \times \left. \left\{ 1 + g(D_*(s)) \right\} \cos(\varphi_*(s) - f(s)) \right\rangle ds + \lambda_1 \int_{s_0}^{s_1} \left\langle D_j(s) g'(D_*(s)) \times \right. \\
& \times \left. \cos(\varphi_*(s) - f(s)) - \varphi_j(s) \left\{ 1 + g(D_*(s)) \right\} \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s)) \right\rangle ds + \\
& + \lambda_2 \int_{s_0}^{s_1} \left\langle D_j(s) g'(D_*(s)) \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s)) + \varphi_j(s) \left\{ 1 + g(D_*(s)) \right\} \times \right. \\
& \times \left. \cos(\varphi_*(s) - f(s)) \right\rangle ds
\end{aligned} \tag{155}$$

donde puede ser $j = 1 \ 6 \ 2 \ 6 \ 3$. Si consideramos $j = 1$, dado que la pareja $(D_1(s), \varphi_1(s))$ puede elegirse arbitrariamente y que $\lambda_0 \neq 0$ ello significa que el funcional lineal que notaremos $V'_{ig} + qV'_{eg}$ definido en $C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1]$ en la forma:

$$\begin{aligned}
V(D, \varphi) \in C \times C^1 \quad (V'_{ig} + qV'_{eg})(D, \varphi) = & \int_{s_0}^{s_1} \left\langle D(s) \left\{ \frac{\partial Q_i}{\partial D} (D_*(s), \varphi'_*(s), s) + \right. \right. \\
& + q Q(s) g'(D_*(s)) \operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s)) \left. \right\} + \varphi'_j(s) \frac{\partial Q_i}{\partial B} (D_*(s), \varphi'_*(s), s) + q \varphi_j(s) Q(s) \left. \left\{ 1 + g(D_*(s)) \right\} \cos(\varphi_*(s) - f(s)) \right\rangle ds
\end{aligned} \tag{156}$$

es un funcional que se anula para aquellos pares $(D(s), \varphi(s))$ que anulan simultaneamente a los dos funcionales $M'_g \ N'_g$ (lo que resulta evidente de comparar las definiciones (145) con la anterior igualdad (156) de los multiplicadores). En virtud de un resultado sobre espacios vectoriales que invocamos anteriormente (referencia 9, pp. 32,33) el funcional $V'_{ig} + qV'_{2g}$ resulta ser una combinación lineal de los dos M'_g, N'_g (nótese que eso no puede asegurarse simplemente con la (155) incluso siendo $\lambda_0 \neq 0$, ya que $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ son números reales que, en princi-

pio pueden depender de la elección de los pares $(D_j(s), \varphi_j(s))$
 $j = 1, 2, 3$. En resumen, hemos demostrado hasta ahora:

$$\exists \mu, \nu \in \mathbb{R} \quad \forall (D, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \quad (157)$$

$$(V'_g + qV'_{eg})(D, \varphi) = \mu M'_g(D, \varphi) + \nu N'_g(D, \varphi)$$

Definamos ahora las funciones $\Delta(s)$, $\Pi(s)$ respectivamente en $C[s_0, s_1]$ y $L^1(s_0, s_1)$ del modo siguiente:

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \Delta(s) = (q\alpha(s) - \nu) \sin(\varphi_*(s) - f(s)) - \mu \cos(\varphi_*(s) - f(s)) \quad (158)$$

$$\Pi(s) = (q\alpha(s) - \nu) \{1 + g(D_*(s))\} \cos(\varphi_*(s) - f(s)) + \mu \{1 + g(D_*(s))\} \sin(\varphi_*(s) - f(s))$$

con lo cual la ecuación (157) se reescribe, cuenta habida de las definiciones (145) y (156) en la forma:

$$\forall (D, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \quad 0 = \int_{s_0}^{s_1} D(s) \left\{ \frac{\partial Q}{\partial D}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) + \right. \quad (159)$$

$$\left. + g'(D_*(s)) \Delta(s) \right\} ds + \int_{s_0}^{s_1} \varphi'(s) \frac{\partial Q}{\partial B}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) ds + \int_{s_0}^{s_1} \varphi(s) \Pi(s) ds$$

y si consideramos la función absolutamente continua $\int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma$,
 el procedimiento de integración por partes aplicado a tal clase
 de funciones convierte la última ecuación en esta otra:

$$\forall (D, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \quad 0 = \int_{s_0}^{s_1} D(s) \left\{ \frac{\partial Q}{\partial D}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) + \right. \quad (160)$$

$$\left. + g'(D_*(s)) \Delta(s) \right\} ds + \varphi(s_1) \int_{s_0}^{s_1} \Pi(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_{s_0}^{s_1} \varphi'(s) \left[\frac{\partial Q}{\partial B}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) - \int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma \right] ds$$

La ecuación ahora obtenida puede restringirse a pares (D, φ) en $C_0^\infty(s_0, s_1) \times C_0^\infty(s_0, s_1)$ para los que es, evidentemente $\varphi(s_1) = 0$. Un resultado ya citado (referencia 8, vol. II, pp. 83, 84) de la teoría de distribuciones indica entonces que:

$$\text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad \frac{\partial \Omega_i}{\partial D}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) = -g'(D_*(s)) \Delta(s)$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial B}(D_*(s), \varphi'_*(s), s) = \int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma \quad (161)$$

y la definición (126) de Ω_i , junto con las reglas de derivación compuesta $(\partial \Omega_i / \partial D) = (\partial W_i / \partial A) g'(D)$, $(\partial \Omega_i / \partial B) = (\partial W_i / \partial B)$ permiten escribir las ecuaciones previas (recuérdese el razonamiento que sigue a la (146) justificativo de que es $g'(D_*(s)) = 0$ en un conjunto de valores de s cuya medida es nula) del modo siguiente:

$$\text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad \frac{\partial W_i}{\partial A}(g(D_*(s)), \varphi'_*(s), s) = -\Delta(s)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial B}(g(D_*(s)), \varphi'_*(s), s) = \int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma \quad (162)$$

La hipótesis (S1) sobre la función $W_i(A, B, s)$ equivale a decir que el jacobiano de $\partial W_i / \partial A$ y $\partial W_i / \partial B$ respecto al par A, B es estrictamente positivo para cualquier s del intervalo $[s_0, s_1]$; por lo que la existencia y continuidad de todas las derivadas de W_i hasta el orden dos inclusive (ver 1.6.1) y el clásico teorema de las funciones implícitas permiten asegurar la existencia de dos funciones reales $\Theta(a, b, s)$ y $\Psi(a, b, s)$,

definidas en un cierto subconjunto \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 y tales que permiten despejar $g(D_*(s))$ y $\varphi'_*(s)$ en las (162) en la forma que sigue:

$$\begin{aligned} \text{casi } \forall s \in (s_0, s_1) \quad g(D_*(s)) &= \Theta(\Delta(s), \int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma, s) \\ \varphi'_*(s) &= \Psi(\Delta(s), \int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma, s) \end{aligned} \quad (163)$$

En este momento podemos razonar así: la función $\Delta(s)$ definida en (158) es continua así como la $\varphi_*(s)$ y la $\int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma$, por lo que al ser las funciones Θ, Ψ de clase uno, las (163) aseguran la continuidad de $\varphi'_*(s)$ y de $g(D_*(s))$ (por tanto también de $D_*(s)$ ya que g^{-1} es función de clase uno). De aquí se deduce de nuevo: la función $\Delta(s)$ es de clase uno, ya que $\varphi_*(s)$ acaba de probarse con esta propiedad y la $Q(s)$ definida por (44) y (91) es también de clase uno. La definición (158) indica ahora que $\Pi(s)$ es continua, por lo que la $\int_{s_0}^s \Pi(\sigma) d\sigma$ será de clase uno, carácter que también comparten las Θ, Ψ en sus argumentos, de modo que las (163) aseguran esta vez que $g(D_*(s))$ y $\varphi'_*(s)$ son de clase uno y lo mismo sucede con $D_*(s)$, ya que g^{-1} es función de clase uno.

En resumen, obtenemos

$$D_*(s), g(D_*(s)) \in \mathcal{C}^1[s_0, s_1] \quad \varphi_*(s) \in \mathcal{C}^2[s_0, s_1] \quad (164)$$

con lo que el teorema queda completamente demostrado.

Corolario 2.3.8. - Sea $(A_*(s), \varphi_*(s))$ el par de funciones que minimiza el funcional $V_i + qV_e$ en el conjunto $\text{ex } \mathcal{E}$ (recon-

dar las notaciones 2.2.3 y el teorema 2.2.4). Se verifica:

$$I) A_*(s) \in C^1[s_0, s_1] \quad \& \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad A_*(s) > -1 \quad (165)$$

$$II) \left. \begin{aligned} \exists \mu, \nu \in \mathbb{R} \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad \frac{\partial W_i}{\partial A} (A_*(s), \varphi'_*(s), s) + q Q(s) \times \\ \times \sin(\varphi_*(s) - f(s)) = \mu \cos(\varphi_*(s) - f(s)) + \nu \sin(\varphi_*(s) - f(s)) \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial W_i}{\partial B} (A_*(s), \varphi'_*(s), s) = q Q(s) \{1 + A_*(s)\} \cos(\varphi_*(s) - f(s)) = \\ = \mu \{1 + A_*(s)\} \sin(\varphi_*(s) - f(s)) - \nu \{1 + A_*(s)\} \cos(\varphi_*(s) - f(s)) \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

$$III) \left. \begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} \{1 + A_*(s)\} \cos(\varphi_*(s) - f(s)) ds = x(s_1) - x(s_0) \\ \int_{s_0}^{s_1} \{1 + A_*(s)\} \sin(\varphi_*(s) - f(s)) ds = y(s_1) - y(s_0) \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

$$IV) \left. \begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial B} (A_*(s_0), \varphi'_*(s_0), s_0) = 0 \\ \frac{\partial W_i}{\partial B} (A_*(s_1), \varphi'_*(s_1), s_1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

En efecto, la función $A_*(s)$ se relaciona con la $D_*(s)$ del teorema anterior 2.3.7 por la ecuación $A_*(s) = g(D_*(s))$ de modo que la primera de (165) es la segunda de (164). De la primera de (164) se deduce que existe una cota inferior real (finita) h tal que: $\forall s \in [s_0, s_1] \quad -h < h \leq D_*(s)$ con lo cual y debido a la continuidad, crecimiento monótono y rango de la función de distorsión g , se verifica $\forall s \in [s_0, s_1] \quad -1 < g(h) \leq g(D_*(s)) = A_*(s)$ que expresa la segunda de (165).

La regularidad (164) implica, por otra parte, que las (162) son válidas en todo $[s_0, s_1]$ y no simplemente casi por doquier. Con esta observación la primera de las (166) es la primera de

las (162) y la segunda de éstas puede diferenciarse, con lo que obtendremos la segunda de las ecuaciones (166). Las dos ecuaciones (167) no hacen sino expresar que el par minimizante $(A_*(s), \varphi_*(s))$ pertenece a la variedad $\text{ex } \mathcal{L}$ descrita por la (89), o bien el par $(g(D_*(s), \varphi_*(s)))$ pertenece a la variedad \mathcal{L}_g definida en (110).

En cuanto a las fórmulas (168), la primera resulta de sustituir s por s_0 en la segunda de las (162), una vez que se ha constatado la regularidad indicada en (164). Si ahora reconsideramos la expresión (160), podemos reducirla en virtud de ambas (162) a la expresión:

$$\forall (D, \varphi) \in \mathcal{C}[s_0, s_1] \times \mathcal{C}^1[s_0, s_1] \quad 0 = \varphi(s_1) \int_{s_0}^{s_1} \prod(\sigma) d\sigma \quad (169)$$

y eligiendo un par (D, φ) que verifique $\varphi(s_1) \neq 0$ se concluye la anulación de la integral que figura en la fórmula previa; lo que teniendo en cuenta en la segunda de las (162) proporciona, por la sustitución $s = s_1$ y las condiciones (164) de regularidad, la segunda igualdad de las (168).

Queda así demostrado el corolario que nos ocupa, siendo interesante constatar que en sus afirmaciones II y III expresa las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional

$$\int_{s_0}^{s_1} \{ W_1(A_*(s), \varphi_*(s), s) + Q Q(s) (1 + A_*(s)) \sin(\varphi_*(s) - f(s)) \} ds$$
 con las dos condiciones de enlace

$$\int_{s_0}^{s_1} ds (1 + A_*(s)) \cos(\varphi_*(s) - f(s)) = x(s_1) - x(s_0) \quad \int_{s_0}^{s_1} ds (1 + A_*(s)) \sin(\varphi_*(s) - f(s)) = y(s_1) - y(s_0)$$

(en referencia 7, pp. 112- hay una deducción, con rigor poco habitual, de tales ecuaciones).

CAPITULO 3

CONTINUACION UNIVOCA DE LA CONFIGURACION INICIAL

SECCION 3.1 UNICIDAD LOCAL DE LA CONTINUACION. - En el capítulo anterior establecimos que, para cada valor real de q , el funcional $V = V_i + qV_e$ alcanzaba su mínimo absoluto en el conjunto que notábamos \mathcal{L} , para un par de funciones $(A_*(s), \varphi_*(s))$ que satisficieran ciertas condiciones y ecuaciones. De hecho como este par de funciones depende del valor q , sería más apropiada una notación del tipo $A(s, q), \varphi(s, q)$.

Nuestro propósito en este apartado es establecer la existencia de un intervalo J de valores de q , abierto, no vacío y conteniendo el valor $q = 0$ en su interior, de modo que para cada q de J el par minimizante $(A(s, q), \varphi(s, q))$ es aislado en el sentido de que en un cierto entorno suyo (en una topología a definir adecuadamente) no hay ningún otro par minimizante para igual valor de q y que, por otra parte, la dependencia en q del par $(A(s, q), \varphi(s, q))$ es continua en todo el intervalo J . Para establecer lo anterior supondremos que la configuración inicial $A(s) = 0, \varphi(s) = \psi_0$ (ver la fórmula (106) y comentario subsiguiente para la definición de ψ_0) es una configuración minimizante. Esta suposición conllevará alguna nueva hipótesis, sobre el mero convenio de elegir una configuración minimizante para $q = 0$, como configuración inicial de referencia.

3.1.1 Hipótesis adicionales. - Supondremos que el par de funciones $(A(s), \varphi(s))$ definidos por

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad A(s) = 0 \quad \varphi(s) = \psi_0 \quad \text{con} \quad 0 \leq \psi_0 < 2\pi \quad (181)$$

$$e^{i\psi_0} \int_{s_0}^{s_1} \exp\left(-i \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{\rho(\sigma)}\right) ds = x(s_1) - x(s_0) + iy(s_1) - iy(s_0)$$

es un par minimizante del funcional V_i (definido por (90)) en el subconjunto $\text{ex } \mathcal{L}$ (definido por (89)).

Supondremos, por otra parte, que la función $W_i(A, B, s)$ (del potencial elástico por unidad de arco) verifica las igualdades:

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad \frac{\partial W_i}{\partial A}(0, 0, s) = \frac{\partial W_i}{\partial B}(0, 0, s) = 0 \quad (182)$$

3.1.2 Consecuencias inmediatas y comentarios. - El par minimizante $(0, \psi_0)$ descrito en (181) corresponde a la configuración llamada inicial, para la cual $u(s) = w(s) = 0$. Ello es en efecto, una consecuencia inmediata de las fórmulas (36) y (86) de modo que la hipótesis admitida equivale a decir, que la configuración inicial proporciona un mínimo del funcional $V = V_i + qV_e$ en el caso $q = 0$.

En cuanto a la hipótesis (182), su interpretación física consiste en suponer que los llamados esfuerzos $\partial W_i / \partial A$, $\partial W_i / \partial B$ son nulos cuando las deformaciones son nulas. En términos matemáticos la citada hipótesis significa que, para $q = 0$, las ecuaciones de Euler-Lagrange (166) a (168) tienen como solución $A_*(s) = 0$, $\varphi_*(s) = \psi_0$, $\mu = \nu = 0$.

3.1.3 Notaciones. - El espacio real $C_{[s_0, s_1]}$ es normado y completo (referencia 3, pp. 36, 69) con la clásica norma $\| \cdot \|$ del

máximo, definida para cada b de $[s_0, s_1]$ por

$$\|b\| = \max_{s \in [s_0, s_1]} |b(s)| . \text{ Por tanto, también será normado y completo}$$

el quíntuple producto cartesiano $C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \times R^3$ que notaremos con el símbolo $\hat{\beta}$. Para un elemento genérico de $\hat{\beta}$ usaremos a menudo la notación $(A(s), B(s), \mu, \nu, h)$, donde $A(s), B(s)$ son funciones de $C[s_0, s_1]$ mientras que μ, ν, h serán números reales. En forma más abreviada nos referiremos a la quíntupla $(A(s), B(s), \mu, \nu, h)$ con el símbolo \bar{F} . La quíntupla particular $A(s) = 0, B(s) = 0, \mu = \nu = 0, h = \psi_0$ (ver (181)) se notará por \bar{F}_0 .

3.4.1 Lema. - Sea D un cierto dominio (abierto y conexo) de R^2 y sea W una función de $D \times [s_0, s_1]$ en R , que sea continua y con derivadas parciales primeras continuas. En tales condiciones se verifica que el subconjunto \hat{D} de $C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1]$ definido por:

$$\hat{D} = \left\{ (A, B) \in C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \mid \forall s \in [s_0, s_1] (A(s), B(s)) \in D \right\} \quad (183)$$

es un subconjunto abierto. Se puede asegurar, por otra parte, que el operador \hat{W} de \hat{D} en $C[s_0, s_1]$ y definido por:

$$\forall (A, B) \in \hat{D} \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad \hat{W}(A, B)(s) = W(A(s), B(s), s) \quad (184)$$

es un operador diferenciable en el sentido de Frechet (referencia 5, pp. 40-41) en todo el subconjunto \hat{D} . Puede asegurarse, además que existe, para cada elemento $(A_0(s), B_0(s))$ en \hat{D} , un entorno en el cual el operador \hat{W} es una función uniformemente continua.

En efecto, sea $(A_0(s), B_0(s))$ un par de funciones del subconjunto \hat{D} . Según propiedades de la topología elemental, el subconjunto $\{(A_0(s), B_0(s)) \mid s \in [s_0, s_1]\}$ es compacto en \mathbb{R}^2 , por lo que existe un real positivo estricto d de modo que el subconjunto

$$\{(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in [s_0, s_1] \mid |A - A_0(s)| + |B - B_0(s)| \leq d\} \quad (185)$$

está contenido en \hat{D} . En consecuencia, el subconjunto

$$\{(A(s), B(s)) \in C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \mid \|A(s) - A_0(s)\| + \|B(s) - B_0(s)\| \leq d\} \quad (186)$$

está contenido en \hat{D} que resulta, por tanto, ser abierto.

En cuanto a la diferenciabilidad del operador \hat{W} en un elemento $(A_0(s), B_0(s))$ cualquiera de \hat{D} escribimos, en virtud de la definición (184) y del teorema de los incrementos finitos del Cálculo elemental:

$$\begin{aligned} & \hat{W}(A_0 + A, B_0 + B)(s) - \hat{W}(A_0, B_0)(s) = \\ & = A(s) \frac{\partial W}{\partial A}(A_0(s), B_0(s), s) + B(s) \frac{\partial W}{\partial B}(A_0(s), B_0(s), s) + \\ & + A(s) \epsilon_1(A(s), B(s), s) + B(s) \epsilon_2(A(s), B(s), s) \end{aligned} \quad (187)$$

donde, para cada s de $[s_0, s_1]$ es $\lim \epsilon_1 = \lim \epsilon_2 = 0$ si $(A(s), B(s)) \rightarrow (0, 0)$. Ahora bien, por una parte, el operador que a cada par $(A(s), B(s))$ asigna la función

$$A(s) \frac{\partial W}{\partial A}(A_0(s), B_0(s), s) + B(s) \frac{\partial W}{\partial B}(A_0(s), B_0(s), s) \quad (188)$$

es claramente lineal y, además, acotado en virtud de

$$\max_{s \in [s_0, s_1]} \left| A(s) \frac{\partial W}{\partial A}(A_0(s), B_0(s), s) + B(s) \frac{\partial W}{\partial B}(A_0(s), B_0(s), s) \right| \leq$$

$$\leq \|A(s)\| \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \frac{\partial W}{\partial A}(A_0(s), B_0(s), s) \right| + \|B(s)\|$$

$$\times \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \frac{\partial W}{\partial B}(A_0(s), B_0(s), s) \right| \leq (\|A(s)\| + \|B(s)\|) \times \quad (189)$$

$$\times \max \left\{ \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \frac{\partial W}{\partial A}(A_0(s), B_0(s), s) \right|, \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \frac{\partial W}{\partial B}(A_0(s), B_0(s), s) \right| \right\}$$

Por otra parte, de la fórmula (187) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\|A(s)\| + \|B(s)\|} \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| A(s) \varepsilon_1(A(s), B(s), s) + B(s) \varepsilon_2(A(s), B(s), s) \right| \leq \\ & \leq \frac{\|A(s)\|}{\|A(s)\| + \|B(s)\|} \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \varepsilon_1(A(s), B(s), s) \right| + \frac{\|B(s)\|}{\|A(s)\| + \|B(s)\|} \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \varepsilon_2(A(s), B(s), s) \right| \quad (190) \\ & \leq \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \varepsilon_1(A(s), B(s), s) \right| + \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \varepsilon_2(A(s), B(s), s) \right| \end{aligned} \right\}$$

El primer miembro de la (187) se puede escribir, por otra parte, utilizando el teorema de los incrementos finitos con la forma de Lagrange del resto:

$$\begin{aligned} & W(A_0(s) + A(s), B_0(s) + B(s), s) - W(A_0(s), B_0(s) + B(s), s) + \\ & + W(A_0(s), B_0(s) + B(s), s) - W(A_0(s), B_0(s), s) = \\ & = A(s) \frac{\partial W}{\partial A}(A_0(s) + \theta_1(A(s), B(s), s) A(s), B_0(s) + B(s), s) + \\ & + B(s) \frac{\partial W}{\partial B}(A_0(s), B_0(s) + \theta_2(B(s), s) B(s), s) \end{aligned}$$

donde las funciones $\theta_1(A, B, s)$ $\theta_2(B, s)$ están acotadas en valor absoluto por la unidad. Comparando ahora con el segundo miembro de (187) se obtiene para cada s de $[s_0, s_1]$ y en un adecuado entorno de $A = 0$, $B = 0$, las identidades:

$$\epsilon_1(A, B, s) = \frac{\partial W}{\partial A}(A_0 + \theta_1(A, B, s)A, B_0 + B, s) - \frac{\partial W}{\partial A}(A_0, B_0, s)$$

$$\epsilon_2(A, B, s) = \frac{\partial W}{\partial B}(A_0, B_0 + \theta_2(B, s)B, s) - \frac{\partial W}{\partial B}(A_0, B_0, s)$$

Elegido ahora d , de modo que el compacto

$$\{(A_0 + A, B_0 + B) \in \mathbb{R}^2 \mid |A| + |B| \leq d\} \times [s_0, s_1]$$

esté contenido en $\mathcal{D} \times [s_0, s_1]$, la continuidad de $\partial W / \partial A$ y $\partial W / \partial B$ es uniforme en tal compacto, en el cual ϵ_1 y ϵ_2 tienen, en consecuencia, límite cero uniformemente si $|A| + |B| \rightarrow 0$

Si ahora suponemos que $\|A(s)\| + \|B(s)\| \rightarrow 0$ se concluye que el último miembro de las desigualdades sucesivas (190) tiene por límite cero y se cumplen, finalmente, todas las condiciones de existencia de la diferencial de Frechet.

En cuanto a la continuidad uniforme de \hat{W} , en un cierto entorno de cada elemento $(A_0(s), B_0(s))$ en que está definido, basta señalar que esta propiedad sería consecuencia de la acotación de la diferencial (ver referencia 10, vol. 2, pp. 50-52) que según la (189) admite en $(A_0(s), B_0(s))$ una norma, de la que una cota superior K viene dada por

$$K = \max \left\{ \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \frac{\partial W}{\partial A}(A_0(s), B_0(s), s) \right|, \max_{s \in [s_0, s_1]} \left| \frac{\partial W}{\partial B}(A_0(s), B_0(s), s) \right| \right\}$$

Ahora bien, si $d > 0$ verifica que el subconjunto (compacto) \mathcal{S} de \mathbb{R}^2 definido por la (185) está contenido en \mathcal{D} , el entorno de $(A_0(s), B_0(s))$ definido por (186) está contenido en $\hat{\mathcal{D}}$. Resulta entonces que la norma de la diferencial está acotada por el número

$$\max_{(A, B, s) \in \mathcal{S} \times [s_0, s_1]} \left| \frac{\partial W}{\partial A}(A, B, s) \right|, \left| \frac{\partial W}{\partial B}(A, B, s) \right|$$

que es finito por ser \mathcal{S} compacto.

3.1.5 Lema. - Sea $F(s)$ una función continua cualquiera en $[s_0, s_1]$ y sea η_0 un número real arbitrario. En tales condiciones, se verifica que el operador \hat{F} del espacio producto $\mathcal{C}[s_0, s_1] \times \mathcal{C}[s_0, s_1] \times \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}[s_0, s_1]$ y definido por

$$\begin{aligned} \forall (A, B) \in \mathcal{C}[s_0, s_1] \times \mathcal{C}[s_0, s_1] \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad \hat{F}(A, B, h)(s) = \\ = F(s) \left(1 + A(s) \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) \right) \end{aligned} \quad (191)$$

es un operador diferenciable Frechet en cualquier elemento $(A_0(s), B_0(s), h_0)$ de $\mathcal{C}[s_0, s_1] \times \mathcal{C}[s_0, s_1] \times \mathbb{R}$ y donde $f(s)$ es la función definida en (91) por $f(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{p(\sigma)} d\sigma$

Puede asegurarse, además, que para cualquier subconjunto \mathcal{A} acotado en $\mathcal{C}[s_0, s_1]$, el operador \hat{F} es una función uniformemente continua en $\mathcal{A} \times \mathcal{C}[s_0, s_1] \times \mathbb{R}$.

En efecto, procedemos como en el lema anterior escribiendo el incremento del operador; en este caso:

$$\begin{aligned}
& \widehat{F}(A_0+A, B_0+B, h_0+h)(s) - \widehat{F}(A_0, B_0, h_0)(s) = \\
& = F(s) [1+A_0(s)] \left[\cos(\eta_0+h_0+h-f(s) + \int_{s_0}^s (B_0(\sigma)+B(\sigma)) d\sigma) - \right. \\
& \quad \left. - \cos(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma) \right] + F(s) A(s) \times \\
& \quad \times \cos(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s (B_0(\sigma)+B(\sigma)) d\sigma)
\end{aligned} \tag{192}$$

Según fórmulas elementales del Cálculo Diferencial, escribimos

$$\begin{aligned}
& \cos(\eta_0+h_0+h-f(s) + \int_{s_0}^s (B_0(\sigma)+B(\sigma)) d\sigma) = \cos(\eta_0+h_0-f(s) + \\
& \quad + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) - h \operatorname{sen}(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma) - \left(\int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma\right) \times \\
& \quad \times \operatorname{sen}(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma) - \frac{1}{2!} \left(h + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma\right)^2 \times \cos(\eta_0+h_0-f(s) + \\
& \quad - f(s) + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma) + \frac{1}{3!} \left(h + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma\right)^3 \operatorname{sen}(\eta_0+h_0-f(s) + \\
& \quad + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma) + \frac{1}{4!} \left(h + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma\right)^4 \cos(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma)
\end{aligned} \tag{193}$$

de modo que la diferencia (192) se puede descomponer en la suma de un resto que analizaremos en breve y del operador lineal \mathcal{L} aplicado a la terna $A(s), B(s), h$ y definido por

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(A, B, h)(s) = A(s) F(s) \cos(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma) - \\
& \quad - \left(\int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma\right) F(s) [1+A_0(s)] \operatorname{sen}(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma) - \\
& \quad - h F(s) [1+A_0(s)] \operatorname{sen}(\eta_0+h_0-f(s) + \int_{s_0}^s B_0(\sigma) d\sigma)
\end{aligned} \tag{194}$$

operador que se muestra similarmente al lema previo, ser acotado en virtud de la desigualdad

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(A, B, h)(s)\| \leq & (\|A(s)\| + \|B(s)\| + |h|) \{ \|F(s)\| + \\ & + |s_1 - s_0| \|F(s)\| (1 + \|A_0(s)\|) + \|F(s)\| (1 + \|A_0(s)\|) \} \end{aligned} \quad (195)$$

cuya prueba es inmediata a partir de la fórmula (194) anterior.

En cuanto al resto antes mencionado, es fácil comprobar que su orden infinitesimal garantiza la existencia de la diferencial de Frechet. En efecto, de las fórmulas (192), (193), (194) se deduce de forma inmediata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|A(s)\| + \|B(s)\| + |h|} & \left| \hat{F}(A_0 + A, B_0 + B, h_0 + h)(s) - \hat{F}(A_0, B_0, h_0)(s) - \right. \\ & \left. - \mathcal{L}(A, B, h)(s) \right| \leq \frac{\|A(s)\|}{\|A(s)\| + \|B(s)\| + |h|} \|F(s)\| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} (|h| + \\ & + |s_1 - s_0| \|B(s)\|)^m + \|F(s)\| (1 + \|A_0(s)\|) \frac{1}{\|A(s)\| + \|B(s)\| + |h|} \times \\ & \times \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} (|h| + |s_1 - s_0| \|B(s)\|)^m \end{aligned} \quad (196)$$

y las reglas del Cálculo elemental (convergencia de la serie exponencial, etc...) nos permiten concluir que el segundo miembro de la desigualdad escrita tiende a cero, si $\|A(s)\| + \|B(s)\| + |h| \rightarrow 0$.

En cuanto a la continuidad uniforme de \hat{F} en $\mathcal{A} \times C[s_0, s_1] \times \mathbb{R}$ (donde \mathcal{A} es acotado en $C[s_0, s_1]$) razonamos como en el lema precedente, demostrando la acotación de la diferencial cuya norma en un elemento $(A_0(s), B_0(s), h_0)$ es menor, en virtud de (195), que la cota superior

$$\|F(s)\| + (1 + \|A_0(s)\|) \|F(s)\| (1 + |s_1 - s_0|)$$

la cual es inferior a un número fijo, si la norma $\|A_0(s)\|$ permanece acotada.

Lema 3.1.6. - Sea \tilde{D} el conjunto del espacio de Banach $\hat{B} \times \mathbb{R}$ (recordar notación 3.1.3) definido del siguiente modo:

$$\tilde{D} = \left\{ (A(s), B(s), \mu, \nu, h, q) \in \hat{B} \times \mathbb{R} \mid \forall s \in [s_0, s_1] (A(s), B(s)) \in (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \right\} \quad (197)$$

y sea \tilde{V} el funcional definido en \tilde{D} por la fórmula

$$\begin{aligned} \forall (A, B, \mu, \nu, h, q) \in \tilde{D} \quad \tilde{V}(A, B, \mu, \nu, q, h) = \\ = \int_{s_0}^{s_1} \left[W(A(s), B(s), s) + q \Omega(s) (1 + A(s)) \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) \right] ds + \\ + \mu \left[\chi(s_1) - \chi(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) ds \right] + \\ + \nu \left[\gamma(s_1) - \gamma(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) ds \right] \end{aligned} \quad (198)$$

En estas condiciones \tilde{D} es un conjunto abierto de $\hat{B} \times \mathbb{R}$ y el funcional \tilde{V} es finito y diferenciable Frechet hasta el orden dos inclusive en todo \tilde{D} .

En efecto, \tilde{D} es abierto como consecuencia directa de su definición (197) y de la primera parte del lema 3.1.4. En cuanto a la diferencial primera de \tilde{V} observamos que este funcional resulta de la composición de operadores de los tipos descritos en los lemas 3.1.4 y 3.1.5 por medio de adiciones y productos y con el funcional (lineal) que asigna a cada función $b(s)$ de $\mathcal{C}[s_0, s_1]$ su integral definida $\int_{s_0}^{s_1} ds b(s)$. Este funcional lineal es evidentemente acotado, en virtud de la desigualdad

$\left| \int_{s_0}^{s_1} b(s) ds \right| \leq |s_1 - s_0| \times \|b(s)\|$ y, por tanto, las reglas operativas de diferenciación Frechet (ver referencia 10, vol. 2, pp. 37-41) nos indican que \tilde{V} admite diferencial de primera cuya expresión $\delta \tilde{V}$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \delta \tilde{V} = & \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \left\{ \frac{\partial W_i}{\partial A}(A(s), B(s), s) + q Q(s) \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) - \right. \\
 & \left. - \mu \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) - \nu \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) \right\} ds + \\
 & + \int_{s_0}^{s_1} \delta B(s) \frac{\partial W_i}{\partial B}(A(s), B(s), s) ds + \int_{s_0}^{s_1} \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) \times \left\{ q Q(s) - \right. \\
 & \times (1+A(s)) \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) + \mu (1+A(s)) \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) - \\
 & \left. - \nu (1+A(s)) \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) \right\} ds + (\delta h) \int_{s_0}^{s_1} \left\{ q Q(s) \times \right. \\
 & \times (1+A(s)) \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) + \mu (1+A(s)) \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) - \\
 & \left. - \nu (1+A(s)) \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) \right\} ds + (\delta \mu) \left[x(s_1) - x(s_0) - \right. \\
 & \left. - \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \cos \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) ds \right] + (\delta \nu) \left[y(s_1) - y(s_0) - \right. \\
 & \left. - \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) ds \right] + (\delta q) \int_{s_0}^{s_1} Q(s) \times \\
 & \times (1+A(s)) \operatorname{sen} \left(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) ds
 \end{aligned} \tag{199}$$

donde se ha adoptado la notación clásica del Cálculo Variacional, que comporta el reemplazar en los lemas 3.1.4 y 3.1.5 los símbolos $A_0(s)$, $B_0(s)$, h_0 por $A(s)$, $B(s)$, h respectivamente y, por otra parte, los símbolos $A(s)$, $B(s)$, h por $\delta A(s)$, $\delta B(s)$, h , respectivamente.

En resumen, y de acuerdo con los conceptos del Cálculo Diferencial en espacios normados, podemos decir que para cada

$(A(s), B(s), \mu, \nu, h, q)$ en \tilde{D} , la diferencial primera de \tilde{V} es un funcional lineal en $(\delta A(s), \delta B(s), \delta \mu, \delta \nu, \delta h, \delta q)$ que es acotado y cuya expresión es la (199). Este funcional lineal se identifica con un elemento del dual $(\hat{\beta} \times R)^*$, elemento que varía al hacerlo la séxtupla $(A(s), B(s), \mu, \nu, h, q)$ definiendo así un operador \tilde{V}' (no lineal) del espacio normado $\hat{\beta} \times R$ en el espacio $(\hat{\beta} \times R)^*$ también normado. La diferencial de \tilde{V}' constituye por definición, la diferencial segunda de \tilde{V} .

Para estudiar la diferencial de \tilde{V}' comenzamos observando que no es necesario razonar en el contexto del dual $(\hat{\beta} \times R)^*$ (descrito sin embargo, en referencia 3, pp. 130-133) ya que en nuestro caso particular, una simple inspección de la fórmula (199) indica que la imagen de \tilde{V}' está contenida en $\hat{\beta} \times R$. (el cual a su vez está contenido en su dual). Consideraremos así \tilde{V}' como un operador no lineal de $\hat{\beta} \times R$ en sí mismo, operador cuya expresión explícita se puede obtener con una pequeña modificación de la (199), mediante integración por partes de su tercer sumando integral que se transforma así en

$$\begin{aligned}
 & - \int_{s_0}^{s_1} \delta B(s) ds \int_{s_0}^s \left\{ q \cos(\sigma) (1+A(s)) \cos(h-f(\sigma)) + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda \right\} + \mu (1+A(\sigma)) \sin(h-f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) - \\
 & \quad - \nu (1+A(\sigma)) \cos(h-f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) \left\} d\sigma
 \end{aligned} \tag{200}$$

de modo que podemos escribir:

$$\tilde{V}'(A(s), B(s), \mu, \nu, h, q) = (\mathcal{X}(s), \mathcal{Y}(s), k_1, k_2, k_3, k_4)$$

donde :

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{\partial W_i}{\partial A}(A(s), B(s), s) + q Q(s) \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) - \\
&\quad - \mu \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) - \nu \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \\
Y(s) &= \frac{\partial W_i}{\partial B}(A(s), B(s), s) - \int_{s_1}^s q Q(\sigma) (1 + A(\sigma)) \times \cos(h - f(\sigma) + \\
&\quad + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) d\sigma - \mu \int_{s_1}^s (1 + A(\sigma)) \operatorname{sen}(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) d\sigma + \\
&\quad + \nu \int_{s_1}^s (1 + A(\sigma)) \cos(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) d\sigma \\
k_1 &= x(s_1) - x(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds \\
k_2 &= y(s_1) - y(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds \\
k_3 &= q \int_{s_0}^{s_1} Q(s) (1 + A(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds + \\
&\quad + \mu \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds - \\
&\quad - \nu \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds \\
k_4 &= \int_{s_0}^{s_1} Q(s) (1 + A(s)) \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds
\end{aligned} \tag{201}$$

El funcional \tilde{V}' resulta ahora diferenciable, en virtud de los lemas 3.14 y 3.15 (identificando la función \tilde{W} de 3.1.4 alternativamente con $\partial W_i / \partial A$ ó $\partial W_i / \partial B$) combinados con el teorema de derivación compuesta en espacios normados (por ejemplo, la composición con el funcional lineal de integración, que a cada $b(s)$ en $[s_0, s_1]$ asigna su integral definida en el intervalo (s_0, s_1) , es una composición que se utiliza al definir k_1, k_2, k_3, k_4). En cada elemento $(A(s), B(s), \mu, \nu, h, q)$ de \tilde{D} la diferencial $\delta \tilde{V}'$, o bien utilizando la notación $\delta^2 \tilde{V}$, es un operador lineal de $\hat{\beta} \times \mathbb{R}$ en $\hat{\beta} \times \mathbb{R}$ cuya expresión explícita

omitimos, si bien se obtiene de forma inmediata a partir de las (201), (188), (194).

3.1.7. Observaciones y comentarios.- Con las notaciones de 3.1.3 el funcional \tilde{V} se puede escribir como $\tilde{V}(\bar{F}, q)$ y admite en \tilde{D} la derivada parcial (según el concepto definido en referencia 10, vol. 2, pp. 56, 56) $\partial\tilde{V}/\partial\bar{F}$ que en cada elemento $(A(s), B(s), \mu, \nu, h, q)$ es un funcional lineal, cuya expresión explícita se obtiene si en la (199) se suprime el último sumando, coeficiente de (δq) .

Es interesante notar que si se busca, para un q real cualquiera, el elemento $(A(s), B(s), \mu, \nu, h)$ para el cual $\partial\tilde{V}/\partial\bar{F} = 0$ se obtienen las ecuaciones (166) a (168) de Euler-Lagrange. En efecto, la condición $\partial\tilde{V}/\partial\bar{F} = 0$ equivale a las cinco ecuaciones que resultan, al igualar a cero los segundos miembros de las igualdades (201) con exclusión de la última. La primera de tales ecuaciones es la primera de las (166) y la tercera y cuarta coinciden con las dos de (167). La segunda de las (201) equivale claramente a la segunda de las (166) junto con la segunda de las (168). Finalmente, la segunda y quinta de las (201), implican, por la sustitución $s = s_0$, la primera de las (168) y, recíprocamente, la segunda de (166) junto con las dos (168) implican, por integración en $[s_0, s_1]$, la quinta de las (201).

Los comentarios 3.1.2 se expresan ahora parcialmente en la forma $\partial\tilde{V}/\partial\bar{F}(\bar{F}_0, 0) = 0$

3.1.8 Proposición.- Escrito el funcional \tilde{V} con la notación $\tilde{V}(\bar{F}, q)$ se verifica que la derivada parcial segunda $\partial^2\tilde{V}/\partial\bar{F}^2$ es en $\bar{F} = \bar{F}_0, q = 0$ un operador lineal acotado y biyectivo de

$\hat{\beta}$ sobre $\hat{\beta}$ (ver notación 3.1.3)

Para la demostración escribimos primero una expresión explícita, para cualquier (\bar{F}, q) en \tilde{D} , de la derivada parcial mencionada y de acuerdo con la notación:

$$\left(\frac{\delta^2 \tilde{V}}{\delta \bar{F}^2}(\bar{F}, q) \right) (\delta A(s), \delta B(s), \delta \mu, \delta \nu, \delta h) = (\delta X(s), \delta Y(s), \delta k_1, \delta k_2, \delta k_3) \quad (202)$$

La expresión explícita deseada se obtiene por diferenciación de las cinco primeras (201), consideradas como una aplicación de $\hat{\beta}$ en $\hat{\beta}$ y según las reglas proporcionadas por los lemas 3.1.4 y 3.1.5 más la derivación compuesta con el funcional lineal de integración en $[s_0, s_1]$ o bien con el operador lineal de integración en $[s_1, s]$. Se obtiene sin dificultad:

$$\begin{aligned} \delta X(s) &= \delta A(s) \frac{\delta^2 W_i}{\delta A^2}(A(s), B(s), s) + \delta B(s) \frac{\delta^2 W_i}{\delta B^2}(A(s), B(s), s) + \\ &+ \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) \left\{ (-\nu + q Q(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \mu \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \right\} - \\ &- (\delta \mu) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) - (\delta \nu) \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \\ &+ (\delta h) \left\{ (-\nu + q Q(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \mu \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \right\} \\ \delta Y(s) &= \delta A(s) \frac{\delta^2 W_i}{\delta B \delta A}(A(s), B(s), s) - \int_{s_1}^s \delta A(\sigma) (-\nu + q Q(\sigma)) \cos(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) d\sigma - \\ &- \mu \int_{s_1}^s \delta A(\sigma) \operatorname{sen}(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) d\sigma + \delta B(s) \frac{\delta^2 W_i}{\delta B^2}(A(s), B(s), s) + \\ &+ \int_{s_1}^s d\sigma \left(\int_{s_0}^{\sigma} \delta B(\lambda) d\lambda \right) \left[(1 + A(\sigma)) \left[(-\nu + q Q(\sigma)) \cos(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) - \right. \right. \\ &- \left. \left. \mu \operatorname{sen}(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) \right] - (\delta \mu) \int_{s_1}^s (1 + A(\sigma)) \operatorname{sen}(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) d\sigma + \right. \\ &+ (\delta \nu) \int_{s_1}^s (1 + A(\sigma)) \cos(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) d\sigma + (\delta h) \int_{s_1}^s (1 + A(\sigma)) \times \\ &\times \left[(-\nu + q Q(\sigma)) \cos(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) - \mu \operatorname{sen}(h - f(\sigma) + \int_{s_0}^{\sigma} B(\lambda) d\lambda) \right] d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta k_1 &= - \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds + \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) (1 + A(s)) \times \\
&\quad \times \sin(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + (\delta h) \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \sin(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds \\
\delta k_2 &= - \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \sin(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds - \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) (1 + A(s)) \times \\
&\quad \times \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) - (\delta h) \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds \\
\delta k_3 &= \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \left[(\nu + q Q(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \mu \sin(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \right] ds + \\
&\quad + \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) (1 + A(s)) \left[(\nu + q Q(s)) \sin(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \mu \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \right] + \\
&\quad + (\delta \mu) \int_{s_0}^{s_1} ds (1 + A(s)) \sin(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) - (\delta \nu) \int_{s_0}^{s_1} ds (1 + A(s)) \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \\
&\quad + (\delta h) \int_{s_0}^{s_1} ds (1 + A(s)) \left[(\nu + q Q(s)) \sin(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \mu \cos(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \right]
\end{aligned} \tag{203}$$

En el caso $\bar{F} = \bar{F}_0$, $q = 0$ las fórmulas anteriores deben particularizarse para $A(s) = B(s) = 0$, $\mu = \nu = 0$, $h = \psi_0$, $q = 0$, con lo cual

$$\begin{aligned}
\delta X(s) &= \delta A(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial A^2}(0, 0, s) + \delta B(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial A \partial B}(0, 0, s) - \\
&\quad - (\delta \mu) \cos(\psi_0 - f(s)) - (\delta \nu) \sin(\psi_0 - f(s)) \\
\delta Y(s) &= \delta A(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial B \partial A}(0, 0, s) + \delta B(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial B^2}(0, 0, s) - \\
&\quad - (\delta \mu) \int_{s_1}^s \sin(\psi_0 - f(\sigma)) d\sigma + (\delta \nu) \int_{s_1}^s \cos(\psi_0 - f(\sigma)) d\sigma \\
\delta k_1 &= - \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \cos(\psi_0 - f(s)) ds + \int_{s_0}^{s_1} \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) \times \\
&\quad \times \sin(\psi_0 - f(s)) ds + (\delta h) \int_{s_0}^{s_1} \sin(\psi_0 - f(s)) ds
\end{aligned} \tag{204}$$

$$\delta k_2 = - \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \operatorname{sen}(\psi_0 - f(s)) ds - \int_{s_0}^{s_1} \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) \times$$

$$\times \cos(\psi_0 - f(s)) ds - (\delta h) \int_{s_0}^{s_1} \cos(\psi_0 - f(s)) ds$$

$$\delta k_3 = (\delta \mu) \int_{s_0}^{s_1} \operatorname{sen}(\psi_0 - f(s)) ds - (\delta v) \int_{s_0}^{s_1} \cos(\psi_0 - f(s)) ds$$

Comprobemos en primer lugar que este operador lineal (204) ahora escrito es inyectivo, es decir que de las condiciones $\delta X(s) = \delta Y(s) = 0$, $\delta k_1 = \delta k_2 = \delta k_3 = 0$ se deduce forzosamente $\delta A(s) = \delta B(s) = 0$, $\delta \mu = \delta v = \delta h = 0$. En efecto, después de reemplazar todos los primeros miembros de las (204) por cero, constatamos que los coeficientes de $\delta \mu, \delta v$ en la última ecuación son, en virtud de (106) y (91), iguales a $y(s_1) - y(s_0)$, $x(s_0) - x(s_1)$ respectivamente, por lo que al menos uno de ellos es no nulo, dada la condición $\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0) \neq \vec{0}$. Supongamos por ejemplo $x(s_1) - x(s_0) \neq 0$, de modo que si ϵ es el ángulo que verifica $x(s_1) - x(s_0) = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \cos \epsilon$, $y(s_1) - y(s_0) = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \operatorname{sen} \epsilon$, se cumple $\cos \epsilon \neq 0$ y se puede sustituir (δv) por $(\delta \mu) \operatorname{sen} \epsilon / \cos \epsilon$ en las dos primeras (204) para obtener, después de utilizar algunas identidades trigonométricas sencillas y en el caso $\delta X(s) = \delta Y(s) = 0$

$$0 = \delta A(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial A^2}(q, q, s) + \delta B(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial A \partial B}(q, q, s) - \frac{\delta \mu}{\cos \epsilon} \cos(\psi_0 - \epsilon - f(s))$$

$$0 = \delta A(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial B \partial A}(q, q, s) + \delta B(s) \frac{\partial^2 W_i}{\partial B^2}(q, q, s) - \frac{\delta \mu}{\cos \epsilon} \int_{s_1}^s \operatorname{sen}(\psi_0 - \epsilon - f(\sigma)) d\sigma$$
(205)

La eliminación de (δh) entre la tercera y cuartas de las

(204) conduce, después de cálculos simples y en el caso

$$\delta k_1 = \delta k_2 = 0$$

$$0 = - \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \cos(\psi_0 - \epsilon - f(s)) ds + \int_{s_0}^{s_1} \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) \sin(\psi_0 - \epsilon - f(s)) ds \quad (206)$$

Integramos ahora por partes el segundo sumando integral, de modo que:

$$0 = \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \cos(\psi_0 - \epsilon - f(s)) ds + \int_{s_0}^{s_1} \delta B(s) ds \int_{s_1}^s \sin(\psi_0 - \epsilon - f(\sigma)) d\sigma \quad (207)$$

Llegados a este punto adoptamos las siguientes notaciones:

$$g_1(s) = \cos(\psi_0 - \epsilon - f(s)) \quad g_2(s) = \int_{s_1}^s \sin(\psi_0 - \epsilon - f(\sigma)) d\sigma$$

$$J(s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W_i}{\partial A^2}(0,0,s) & \frac{\partial^2 W_i}{\partial A \partial B}(0,0,s) \\ \frac{\partial^2 W_i}{\partial B \partial A}(0,0,s) & \frac{\partial^2 W_i}{\partial B^2}(0,0,s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (208)$$

debiendo notarse que la matriz inversa escrita $J(s)$, existe y es definida positiva en virtud de la hipótesis (51) sobre $W_i(A,B,s)$. Con la notación adoptada, pueden despejarse $\delta A(s)$, $\delta B(s)$ de las (205) y sustituir en la (207), para obtener, finalmente:

$$\frac{\delta \mu}{\omega \epsilon} \int_{s_0}^{s_1} (g_1(s), g_2(s)) \left[J(s) \right] \begin{bmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \end{bmatrix} ds = 0 \quad (209)$$

donde el integrando es una forma cuadrática en $g_1(s), g_2(s)$ escrita en forma matricial, forma que es definida positiva según se acaba de indicar. Como $g_1(s), g_2(s), J(s)$ son funciones continuas y $g_1(s)$ no es idénticamente nula (en otro caso sería $x(s_1) - x(s_0) = 0$ contra lo supuesto) se concluye que la integral (209) es estrictamente positiva, es decir, que debe ser $\delta\mu = 0$. De aquí resulta $\delta v = (\delta\mu) \operatorname{sen} \epsilon / \cos \epsilon = 0$ y, por sustitución en las (205) $\delta A(s) = \delta B(s) = 0$, de modo que una última sustitución en la penúltima (204) con $\delta k_2 = 0$ indica $\delta h = 0$ y queda comprobada así la inyectividad del operador lineal $\delta^2 \tilde{V} / \delta \bar{x}^2(\bar{x}_0, 0)$.

Para terminar la prueba de la proposición que nos ocupa, resta comprobar que la imagen del citado operador lineal es todo $\hat{\beta}$, es decir, el espacio producto $C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^3$. A tal efecto consideramos en las (204) una quintupla arbitraria $(\delta X(s), \delta Y(s), \delta k_1, \delta k_2, \delta k_3)$ y por medio de la matriz $J(s)$ despejamos el par $\delta A(s), \delta B(s)$ en las dos primeras (204) como función (lineal) de $\delta X(s), \delta Y(s), \delta\mu, \delta v$. Por sustitución en las tres últimas (204) obtenemos un sistema algebraico lineal de tres ecuaciones con las tres incógnitas $\delta\mu, \delta v, \delta h$. Dado que ahora tenemos un número finito de incógnitas (tres) en el cuerpo \mathbb{R} , la teoría elemental de Álgebra nos indica que el sistema propuesto tiene solución si y solo si, el sistema homogéneo asociado admite únicamente la solución trivial. Pero este es precisamente nuestro caso, ya que el sistema homogéneo se obtendría reemplazando $\delta X(s), \delta Y(s)$ por 0, así como $\delta k_1, \delta k_2, \delta k_3$ por 0, reemplazo que en virtud de la inyectividad anteriormen-

te demostrada conduciría forzosamente al resultado $\delta\mu = \delta\nu = \delta h = 0$. Por tanto, fijados cualesquiera $\delta Y(s), \delta V(s), \delta k_1, \delta k_2, \delta k_3$ existen únicos $\delta\mu, \delta\nu, \delta h, \delta A(s), \delta B(s)$ que satisfacen las (204).

En resumen, el operador lineal acotado $\partial^2 \tilde{V} / \partial \bar{F}^2(\bar{F}_0, 0)$ es biyectivo de $\hat{\beta}$ en $\hat{\beta}$ y la proposición 3.1.8 queda probada. Teorema de la unicidad local 3.1.9. - Existe un r real estrictamente positivo y existe una función \bar{F} de $[-r, r]$ en $C^1[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^3$ continua en la norma "del máximo", de modo que para cualquier q en el intervalo cerrado $[-r, r]$ hay un entorno E_q de $\bar{F}(q)$ con las dos propiedades siguientes:

- $\bar{F}(q)$ es un quintupla $(A(s, q), B(s, q), \mu(q), \nu(q), h(q))$ que satisface las ecuaciones (166), (168) de Euler-Lagrange para el funcional $V_i + qV_e$ (en las que se reemplaza $\varphi_i(s)$ por $B(s, q)$ y $\varphi_*(s)$ por $h + \int_{s_0}^s B(\sigma, q) d\sigma$) con las condiciones de enlace (167).
- Ninguna otra quintupla del entorno E_q , aparte de la $\bar{F}(q)$, satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange y condiciones de enlace mencionadas.

Para la demostración utilizaremos el teorema de la función implícita en espacios de Banach, en la versión de la referencia 10, pp. 64-68 y que transcribimos literalmente:

"Sea M un espacio métrico y sea Y un espacio normado completo. Sea $z = \Phi(x, y)$ una función definida en el producto (cartesiano) de M por una bola $V_r = \{y \in Y \mid \|y - b\| \leq r\}$, función con valores en un espacio normado Z . Supongamos que esta fun-

ción sea acotada, uniformemente continua y posea una derivada (parcial) acotada uniformemente continua $\partial\Phi(x,y)/\partial y$. Supongamos además que, para cierto $a \in M$ se tenga $\Phi(a,b) = 0$ y que el operador $\partial\Phi(a,b)/\partial y$ (de Y en Z) sea invertible. Entonces existe una bola $U_\delta = \{x \in M \mid \text{dist}(x,a) \leq \delta\}$ y existe una función $f(x): U_\delta \rightarrow V$ definida y continua en la bola U_δ , tal que $f(a) = b$ y que $\Phi(x, f(x)) = 0$ para todos los x de U_δ . Esta función es única en el sentido siguiente: para cualquier otra función $f_1(x)$, de valores en Y , definida y continua en un entorno de $a \in M$, tal que $f_1(a) = b$ y que $\Phi(x, f_1(x)) = 0$ (en el citado entorno de $a \in M$), existe una bola $\{x \in M \mid \text{dist}(x,a) \leq \delta'\}$ en la cual $f_1(x) = f(x)$.

Aplicaremos el teorema enunciado cuando, utilizando las notaciones anteriores, reemplazamos por $[-1+1] \subset \mathbb{R}$, Z e Y por $\hat{\beta}$, es decir, $C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^3$; V_T por $\{\bar{F} \in \hat{\beta} \mid \|\bar{F} - \bar{F}_0\| \leq d\}$ y, de modo acorde, x por q , a por 0 , y por \bar{F} es decir $(A(s), B(s), \mu, \nu, h)$, b por \bar{F}_0 es decir $(0, 0, 0, 0, \psi_0)$ así como $\Phi(x,y)$ por $(\partial\tilde{v}/\partial\bar{F})(\bar{F}, q)$, δ por r_1 , z por $(\mathcal{X}(s), \mathcal{Y}(s), k_1, k_2, k_3)$.

En un examen de las condiciones de validez del teorema, constatamos que $(\partial\tilde{v}/\partial\bar{F})(\bar{F}, q)$ es acotada en algún entorno del tipo $\{\bar{F} \in \hat{\beta} \mid \|\bar{F} - \bar{F}_0\| \leq d\} \times [-1, +1]$, en virtud de su expresión dada por las cinco primeras (201). También constatamos que $(\partial\tilde{v}/\partial\bar{F})(\bar{F}, q)$ es uniformemente continua en el mencionado $\{\bar{F} \in \hat{\beta} \mid \|\bar{F} - \bar{F}_0\| \leq d\} \times [-1, +1]$ como se deduce inmediatamente de los lemas 3.1.4 y 3.1.5. Asimismo se verifica $(\partial\tilde{v}/\partial\bar{F})(\bar{F}_0, 0) = 0$ según se examinó en los comentarios 3.1.7 y 3.1.2. La invertibi-

lidad del operador lineal acotado $(\partial/\partial \bar{F})(\partial \tilde{V}/\partial \bar{F})(\bar{F}_0, 0)$ es, precisamente, lo que afirma la proposición 3.1.8.

Las únicas condiciones de validez que restan por constatar son las de acotación y continuidad uniforme de la derivada parcial $(\partial^2 V/\partial \bar{F}^2)(\bar{F}, q)$ en un cierto conjunto de la forma $\{\bar{F} \in \hat{\beta} \mid \|\bar{F} - \bar{F}_0\| \leq d\} \times [-1, +1]$, lo que se comprueba de forma fácil y directa, aunque larga y tediosa, por medio de las fórmulas (203) que definen $(\partial^2 \tilde{V}/\partial \bar{F}^2)(\bar{F}, q)$. Para facilitar la comprobación mencionada, establecemos previamente varios sencillos lemas:

Lema 3.1.10. - Sea A un operador lineal acotado de un cierto producto cartesiano $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$ de espacios de Banach, en otro producto $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$, también de espacios de Banach y en el supuesto de que ambos productos tienen un número finito de factores, respectivamente denotados por B_i $i = 1, 2, \dots, m$ y C_k $k = 1, 2, \dots, n$. En tales condiciones, para cada $i = 1, 2, \dots, m$ y cada $k = 1, 2, \dots, n$ definamos el operador lineal notado A_{ki} , de B_i en C_k , del modo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \forall \bar{u}_i \in B_i \quad A_{ki}(\bar{u}_i) &= k\text{-ésima componente de } A(\bar{0}, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{0}) \\ \text{donde } (\bar{0}, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{0}) &\text{ es el vector de } B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m \\ \text{cuya } i\text{-ésima componente es } \bar{u}_i &\text{ y las demás son } \bar{0} \end{aligned} \right\} \quad (210)$$

Se verifica entonces:

$$\forall i = 1, \dots, m \quad \forall k = 1, \dots, n \quad \|A_{ki}\| \leq \|A\| \leq \sum_{i,k=1}^{m,n} \|A_{ki}\| \quad (211)$$

En efecto, se pueden escribir las desigualdades sucesivas que siguen:

$$\begin{aligned}
\forall i=1, \dots, m \quad \forall k=1, \dots, n \quad \|A_{ki}\| &= \sup_{\bar{u}_i \in B_i} \frac{\|A_{ki} \bar{u}_i\|}{\|\bar{u}_i\|} \leq \\
&\leq \sup_{\bar{u}_i \in B_i} \frac{\sum_{k=1}^n \|A_{ki} \bar{u}_i\|}{\|\bar{u}_i\|} \leq \sup_{(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \in B_1 \times \dots \times B_m} \frac{\sum_{k=1}^n \left\| \sum_{i=1}^m A_{ki} \bar{u}_i \right\|}{\sum_{i=1}^m \|\bar{u}_i\|} = \\
&= \sup_{k=1}^n \frac{\sum_{i=1}^m \left\| (A_{ki} \bar{u}_1, \dots, A_{ki} \bar{u}_m) \right\|}{\sum_{i=1}^m \|\bar{u}_i\|} = \|A_k\| \leq \sup_{k=1}^n \frac{\sum_{i=1}^m \|A_{ki} \bar{u}_i\|}{\sum_{i=1}^m \|\bar{u}_i\|} \leq \\
&\leq \sup_{k=1}^n \frac{\sum_{i=1}^m \|A_{ki}\| \|\bar{u}_i\|}{\sum_{i=1}^m \|\bar{u}_i\|} \leq \sum_{k,i} \|A_{ki}\|
\end{aligned} \tag{212}$$

lo que prueba la afirmación del lema.

Lema 3.1.11. - Sea $G(s)$ una función cualquiera de $C[s_0, s_1]$ y sean $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$ los operadores lineales de $C[s_0, s_1]$ ó \mathbb{R} en $C[s_0, s_1]$ ó \mathbb{R} definidos en la forma siguiente:

$$\forall \delta B \in C[s_0, s_1] \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad A_1(\delta B)(s) = G(s) \delta B(s) \tag{213}$$

$$\forall \delta B \in C[s_0, s_1] \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad A_2(\delta B)(s) = G(s) \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma$$

$$\forall \delta A \in C[s_0, s_1] \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad A_3(\delta A)(s) = \int_{s_0}^s G(\sigma) \delta A(\sigma) d\sigma$$

$$\forall \delta B \in C[s_0, s_1] \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad A_4(\delta B)(s) = \int_{s_1}^s d\sigma G(\sigma) \int_{s_0}^{\sigma} \delta B(\lambda) d\lambda$$

$$\forall \delta y \in \mathbb{R} \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad A_5(\delta y)(s) = (\delta y) G(s)$$

$$\begin{aligned}
\forall \delta v \in \mathbb{R} \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad A_6(\delta v)(s) &= (\delta v) \int_{s_1}^s G(\sigma) d\sigma \\
\forall \delta A \in C[s_0, s_1] \quad A_7(\delta A) &= \int_{s_0}^{s_1} G(s) \delta A(s) ds \\
\forall \delta B \in C[s_0, s_1] \quad A_8(\delta B) &= \int_{s_0}^{s_1} G(s) ds \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \\
\forall \delta h \in \mathbb{R} \quad A_9(\delta h) &= (\delta h) \int_{s_0}^{s_1} G(s) ds
\end{aligned} \tag{214}$$

son operadores cuyas normas respectivas (con la norma usual en \mathbb{R} y la del máximo en $C[s_0, s_1]$) verifican

$$\begin{aligned}
\|A_1\| &\leq \|G\|, \quad \|A_2\| \leq |s_1 - s_0| \|G\|, \quad \|A_3\| \leq |s_1 - s_0| \|G\| \\
\|A_4\| &\leq |s_1 - s_0|^2 \|G\|, \quad \|A_5\| \leq \|G\|, \quad \|A_6\| \leq |s_1 - s_0| \|G\| \\
\|A_7\| &\leq |s_1 - s_0| \|G\|, \quad \|A_8\| \leq |s_1 - s_0|^2 \|G\|, \quad \|A_9\| \leq |s_1 - s_0| \|G\|
\end{aligned} \tag{215}$$

En efecto, las acotaciones anteriores son consecuencia trivial de la definición de norma de un operador lineal A y de la acotación del módulo de una integral, por la integral del módulo del integrando.

Lema 3.1.12. - Sea i uno cualquiera de los índices $1, 2, \dots, g$ y sea $E(A, B, b, \mu, \nu, h; s)$ una función continua en todo $\mathbb{R}^6 \times [s_0, s_1]$ y, con las notaciones del lema previo y del 3.1.3 sea O el operador (no lineal) que a cada elemento \hat{F} de $\hat{\beta}$ asigna el operador A_i definido por (213)-(214) que corresponde a la función continua

$$G(s) = E(A(s), B(s), \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma, \mu, \nu, h, s) \quad (216)$$

En tales condiciones se verifica que \mathcal{O} es un operador de $\hat{\mathcal{B}}$ en el espacio de los operadores \mathcal{L}_i , que es acotado y uniformemente continuo en cada subconjunto Σ acotado en $\hat{\mathcal{B}}$.

En efecto, sea $K < +\infty$ el extremo superior de las normas de los elementos de Σ y sean $\bar{\mathcal{F}}_1 = (A_1(s), B_1(s), \mu_1, \nu_1, h_1)$ $\bar{\mathcal{F}}_2 = (A_2(s), B_2(s), \mu_2, \nu_2, h_2)$ dos cualesquiera de ellos. Denotemos por L el número $K \cdot \max \{1, |s_1 - s_0|\}$. La función

$E(A, B, b, \mu, \nu, h, s)$ es uniformemente continua y acotada en el subconjunto $[-L, L]^6 \times [s_0, s_1]$ que es acotado en $\mathbb{R}^6 \times [s_0, s_1]$.

Fijado entonces un $\epsilon > 0$ cualquiera, existe un $\delta_\epsilon > 0$ de modo que para cualquier par $(A_1, B_1, b_1, \mu_1, \nu_1, h_1, s)$ y $(A_2, B_2, b_2, \mu_2, \nu_2, h_2, s)$ en $[-L, L]^6 \times [s_0, s_1]$ las condiciones

$$\begin{aligned} |A_1 - A_2| < \delta_\epsilon \quad |B_1 - B_2| < \delta_\epsilon \quad |b_1 - b_2| < \delta_\epsilon \quad |\mu_1 - \mu_2| < \delta_\epsilon \\ |\nu_1 - \nu_2| < \delta_\epsilon \quad |h_1 - h_2| < \delta_\epsilon \quad \text{implican} \quad (217) \\ |E(A_1, B_1, b_1, \mu_1, \nu_1, h_1, s) - E(A_2, B_2, b_2, \mu_2, \nu_2, h_2, s)| < \epsilon |s_1 - s_0|^{-2} \end{aligned}$$

Supongamos por ejemplo, el caso $i = 4$ y elijamos $\bar{\mathcal{F}}_1, \bar{\mathcal{F}}_2$ en Σ con distancia $< \delta_\epsilon \min \{1, |s_1 - s_0|^{-1}\}$ notando por $\mathcal{A}_4^{(1)}$ y $\mathcal{A}_4^{(2)}$ los respectivos operadores asociados. Se verificará, según (214) hasta (217)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}(\bar{\mathcal{F}}_1) - \mathcal{O}(\bar{\mathcal{F}}_2)\| &= \|\mathcal{A}_4^{(1)} - \mathcal{A}_4^{(2)}\| \leq \\ &\leq |s_1 - s_0|^2 \max_{s \in [s_0, s_1]} |G^{(1)}(s) - G^{(2)}(s)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |s_1 - s_0|^2 \max_{S \in [s_0, s_1]} \left| E(A_1(s), B_1(s), \int_{s_0}^s B_1(\sigma) d\sigma, \mu_1, \nu_1, h_1, s) - \right. \\
&\quad \left. - E(A_2(s), B_2(s), \int_{s_0}^s B_2(\sigma) d\sigma, \mu_2, \nu_2, h_2, s) \right| < |s_1 - s_0|^2 \epsilon |s_1 - s_0|^{-2} = \epsilon
\end{aligned} \tag{218}$$

con lo que queda probada la continuidad uniforme de $\hat{\sigma}$ en subconjuntos acotados de $\hat{\beta}$, para el caso $i = 4$. En los restantes ocho casos del índice i la demostración es completamente similar, incluso más simple en sus detalles.

En cuanto a la acotación de $\hat{\sigma}$ en cada Σ acotado, la demostración es aún más sencilla. Por ejemplo si $i = 4$

$$\begin{aligned}
\max_{\tilde{F} \in \Sigma} \|\hat{\sigma}_{\tilde{F}}\| &\leq |s_1 - s_0|^2 \max_{\tilde{F} \in \Sigma} \left\| E(A(s), B(s), \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma, \mu, \nu, h, s) \right\| \leq \\
&\leq |s_1 - s_0|^2 \max_{[-L, L] \times [s_0, s_1]} \left| E(A, B, b, \mu, \nu, h, s) \right|
\end{aligned} \tag{219}$$

máximo este último que es $< +\infty$, según observamos anteriormente.

Lema 3.1.13. - Sea \mathcal{D} un dominio cualquiera de \mathbb{R}^2 y sea $\omega(A, B, s)$ una función continua de $\mathcal{D} \times [s_0, s_1]$ en \mathbb{R} . Con las notaciones de 3.1.4 sea \mathbb{T} el operador (no lineal) que a cada par de funciones $A(s), B(s)$ en $\hat{\mathcal{D}}$ asigna \mathcal{A} dado por:

$$\forall \delta A \in C[s_0, s_1] \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad \mathcal{A}(\delta A)(s) = \delta A(s) \omega(A(s), B(s), s) \tag{220}$$

En tales condiciones se verifica que existe, para cada elemento $(A_0(s), B_0(s))$ en $\hat{\mathcal{D}}$, un entorno de la forma

$$\left\{ (A(s), B(s)) \in C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \mid \|A(s) - A_0(s)\| + \|B(s) - B_0(s)\| \leq d \right\} \tag{221}$$

entorno que notaremos $\mathcal{E}(A_0(s), B_0(s); d)$ y en el cual el operador Π es acotado y uniformemente continuo.

En efecto, el conjunto \hat{D} es abierto según se constató en 3.1.4, por lo que, elegido un par $(A_0(s), B_0(s))$ cualquiera en \hat{D} , existe un entorno $\mathcal{E}(A_0(s), B_0(s); d)$ de la forma (221) completamente contenido en \hat{D} . Si $(A(s), B(s))$ pertenece a tal entorno, la norma de los operadores A definidos por (220) satisface la acotación evidente

$$\|A\| \leq \max_{s \in [s_0, s_1]} |\omega(A(s), B(s), s)| \quad (222)$$

Por otra parte, para cualquier $(A(s), B(s))$ en $\mathcal{E}(A_0(s), B_0(s); d)$ y para cualquier s' en $[s_0, s_1]$ es inmediato verificar que el par de números $(A(s'), B(s'))$ pertenece al subconjunto K compacto en \mathcal{D} (ver lema 3.1.4) y definido por

$$K = \{(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists s \in [s_0, s_1] \ |A - A_0(s)| + |B - B_0(s)| \leq d\} \quad (223)$$

de modo que la acotación (222) se interpreta ahora así:

$$\forall (A(s), B(s)) \in \mathcal{E}(A_0(s), B_0(s); d) \quad \|\Pi(A(s), B(s))\| \leq \max_{(A, B, s) \in K \times [s_0, s_1]} |\omega(A, B, s)| \quad (224)$$

lo que demuestra la acotación del operador Π .

La continuidad uniforme de Π en $\mathcal{E}(A_0(s), B_0(s); d)$ se razona análogamente a la acotación. Sea ε positivo cualquiera y $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para cualquier par de ternas (A_1, B_1, s) y (A_2, B_2, s) de $K \times [s_0, s_1]$ se verifique la implicación

$$|A_1 - A_2| < \delta_\varepsilon \text{ y } |B_1 - B_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |\omega(A_1, B_1, s) - \omega(A_2, B_2, s)| < \varepsilon \quad (226)$$

lo que siempre es posible dada la continuidad uniforme de la función $\omega(A, B, s)$ en el compacto $K \times [s_0, s_1]$. Cualquier par $(A_1(s), B_1(s))$ y $(A_2(s), B_2(s))$ de elementos de $\mathcal{E}(A_0(s), B_0(s))$; d) cuya distancia sea $< \delta_\varepsilon$ verifican, en virtud de (221, 222, 226) las relaciones:

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad (A_1(s), B_1(s), s) \in K \times [s_0, s_1] \quad (A_2(s), B_2(s), s) \in K \times [s_0, s_1] \quad (227)$$

$$\in K \times [s_0, s_1] \quad |\omega(A_1(s), B_1(s), s) - \omega(A_2(s), B_2(s), s)| < \varepsilon$$

de modo que si escribimos $A^{(1)} = \prod (A_1(s), B_1(s))$ y $A^{(2)} = \prod (A_2(s), B_2(s))$, la definición (220) y la acotación (222) permiten escribir, cuenta habida de la última (227), la desigualdad:

$$\|A^{(1)} - A^{(2)}\| \leq \sup_{s \in [s_0, s_1]} |\omega(A_1(s), B_1(s), s) - \omega(A_2(s), B_2(s), s)| < \varepsilon \quad (228)$$

que comprueba la continuidad uniforme de \prod en $\mathcal{E}(A_0(s), B_0(s), d)$

Llegados a este punto, los lemas 3.1.10 hasta 3.1.13 permiten la comprobación directa de que el operador $\partial^2 \tilde{V} / \partial \bar{E}^2 (\bar{E}, q)$ es acotado y uniformemente continuo en un cierto entorno de $A(s) = B(s) = 0 \quad \mu = \nu = 0 \quad h = \psi_0 \quad q = 0$. Se constata así la actualidad de todas las hipótesis suficientes para aplicar el teorema de la función implícita, por lo que podemos concluir la existencia de un $r_1 > 0$ y de una función $\bar{E}(q)$ continua de $[-r, r]$ en $\hat{\mathcal{B}}$, que es la única continua que verifica:

$$\bar{E}(0) = \bar{E} \quad \forall q \in [-r, r] \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \bar{E}} (\bar{E}(q), q) = 0 \quad (229)$$

Escribiremos también la función $\bar{F}(q)$ en la forma

$$\bar{F}(q) \equiv (A(s,q), \varphi(s,q), \mu(q), \nu(q), h(q)) \quad (230)$$

y denotaremos por $\bar{\xi}(q)$ la terna $\bar{\xi}(q) = (A(s,q), B(s,q), h(q))$.

Es evidente en virtud de las observaciones 3.1.7 que, para cada q en $[-r_1, r_1]$ la quintupla $\bar{F}(q)$ verifica las ecuaciones (166) hasta (168) de Euler-Lagrange.

Lo probado hasta ahora no es aún todo lo afirmado en el enunciado de este largo teorema 3.1.9. Veamos en primer lugar que

$\bar{F}(0) = \bar{F}_0$ es solución aislada de las ecuaciones de Euler-Lagrange para $q = 0$. Razonando por contradicción si $(\bar{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{F}_n - \bar{F}_0\| = 0 \quad \& \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{F}}(\bar{F}_n, 0) = 0 \quad (231)$$

la definición de derivada Frechet indica

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{F}}(\bar{F}_n, 0) - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{F}}(\bar{F}_0, 0) = \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}_0, 0) \right) (\bar{F}_n - \bar{F}_0) + \bar{\Omega}_n \quad (232)$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{F}_n - \bar{F}_0\|^{-1} \|\bar{\Omega}_n\| = 0$. La condición (231) junto con la proposición 3.1.8 de existencia y biyectividad de

$\left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}_0, 0) \right)^{-1}$ permiten escribir la (232) en la forma:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \bar{F}_n - \bar{F}_0 = - \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}_0, 0) \right)^{-1} (\bar{\Omega}_n) \quad (233)$$

es decir, en virtud de la acotación (referencia 6, pp. 47 a 49) del operador inverso:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \|\bar{F}_n - \bar{F}_0\| \leq \left\| \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}_0, 0) \right)^{-1} \right\| \|\bar{\Omega}_n\| \quad (234)$$

y si dividimos por $\|\bar{F}_n - \bar{F}_0\|$ y suponemos $n \rightarrow \infty$ se obtiene la contradicción: $1 \leq 0$.

De modo similar se puede probar, que en un cierto entorno $[-r_2, r_2]$ de $q = 0$ y para cualquier q_* en ese entorno, la quintupla $\bar{F}(q_*)$ es solución aislada de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al valor $q = q_*$. En efecto, todo se reduce a demostrar que el operador lineal

$\left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}(q_*), q_*) \right)^{-1}$ existe y es biyectivo. En el álgebra de Banach \mathcal{Q} de los operadores lineales de $\hat{\beta}$ sobre $\hat{\beta}$, el conjunto de los elementos invertibles es abierto (ver referencia 3, p. 353), de modo que existe un entorno \mathcal{E} del elemento invertible $\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}_0, 0)$ el cual está formado de elementos todos invertibles. Como la función $\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}(q), q)$ es continua en q , existe $r_2 > 0$ tal que para cualquier q_* en $[-r_2, r_2]$ el operador lineal $\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}(q_*), q_*)$ pertenece a \mathcal{E} y es, en consecuencia, invertible y biyectivo. La conclusión del teorema 3.1.9 se alcanza ahora con la definición

$$r = \min(r_1, r_2)$$

Comentario 3.1.14. - El teorema 3.1.9 asegura la existencia de un segmento de curva $\bar{F}(q)$ cuyos elementos satisfacen, para el correspondiente q , las ecuaciones de Euler-Lagrange y lo hacen en forma aislada. Podemos asegurar, por tanto, que en un entorno de cada $\bar{F}(q_*)$ no existe ningún elemento minimizante de

$V_{i+q_*}V_e$ en la variedad $\text{ex } \mathcal{L}$ (donde debe sobreentenderse que $\varphi(s) = h + \int_{s_0}^s B(\sigma, q_*) d\sigma$ para la concordancia con las notaciones 2.2.3) salvo a lo sumo el propio $\bar{F}(q_*)$, pues en otro caso el supuesto elemento minimizante satisfaría las ecuaciones de Euler-Lagrange. No hay garantía, sin embargo, de que $\bar{F}(q_*)$ corresponda a un mínimo absoluto de $V_{i+q_*}V_e$ en $\text{ex } \mathcal{L}$ (salvo si $q_* = 0$, dadas las hipótesis 3.1.1)

Podemos hacer para los elementos $\bar{F}(q_*)$ una afirmación más débil que la de mínimo absoluto, en la forma que indica el teorema siguiente:

Teorema 3.1.15. - Con las notaciones de los lemas previos, existe un número real $t > 0$, de modo que para todo q_* en el intervalo $[-t, t]$ el elemento $\bar{F}(q_*)$ del espacio $\hat{\mathcal{B}}$ proporciona un mínimo relativo (es decir, en el sentido de la norma de $C[s_0, s_1]$ del máximo) para los valores del funcional $V_{i+q_*}V_e$ en la variedad

$$\text{es } \mathcal{L} = \left\{ (A, B, h) \in C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \times \mathbb{R} \mid \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \times \right. \\ \left. \times \exp i \left(h - \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) ds = x(s_1) - x(s_0) + i y(s_1) - i y(s_0) \right\} \quad (235)$$

donde el funcional $V_{i+q_*}V_e$ que también notaremos $V(A, B, h; q_*)$ se define

$$\forall A, B \in C[s_0, s_1] \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad V(A, B, h; q_*) = \int_{s_0}^{s_1} \left\{ W_i(A(s), B(s), s) + q_* Q(s) (1+A(s)) \exp i \left(h - \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma \right) \right\} ds \quad (236)$$

Para la demostración, consideremos el funcional

$\hat{V}(A, B, h; q_*)$ definido en $C_{[s_0, s_1]} \times C_{[s_0, s_1]} \times \mathbb{R}$ en la forma:

$$\forall A, B \in C_{[s_0, s_1]} \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad \hat{V}(A, B, h; q_*) = V(A, B, h; q_*) + \quad (237)$$

$$+ \mu(q_*) \left[x(s_1) - x(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \sin(h - f(s)) B(s) ds \right] + \nu(q_*) \left[y(s_1) - y(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \cos(h - f(s)) B(s) ds \right]$$

donde $\mu(q_*)$, $\nu(q_*)$ están respectivamente definidas como la tercera y cuarta componentes de $\bar{F}(q_*)$. Probaremos a continuación que la terna $\bar{\xi}(q_*) = (A(s, q_*), B(s, q_*), h(q_*))$ constituida por la primera, segunda y quinta componentes de $\bar{F}(q_*)$ proporciona, para un cierto intervalo $[-t, t]$ de valores de q_* , un mínimo relativo (referencia 7, pp. 3, 5, 6) para los valores del funcional \hat{V} en el conjunto $\text{res } \mathcal{L}$. Comenzamos con el siguiente resultado preparatorio:

Lema 3.1.16. - Sean $(A(s), B(s), h)$ y $(A(s) + \delta A(s), B(s) + \delta B(s), h + \delta h)$ dos ternas que pertenecen a $\text{res } \mathcal{L}$. Existen en tal caso $a, d > 0$ de modo que si la norma (del máximo) verifica la acotación

$$\|\delta A(s)\| + \|\delta B(s)\| + |\delta h| < d \quad (238)$$

ello implica entonces

$$|\delta h|^2 \leq a \int_{s_0}^{s_1} |\delta A(s)|^2 ds + a \int_{s_0}^{s_1} |\delta B(s)|^2 ds \quad (239)$$

En efecto, para cada s en $[s_0, s_1]$ aplicamos el teorema de incrementos finitos a la expresión

$$(1+A(s)+\delta A(s)) \sin(h+\delta h - f(s)) + \int_{s_0}^s (B(\sigma) + \delta B(\sigma)) d\sigma \quad (240)$$

que resulta así igualar la suma:

$$\begin{aligned}
 & (1+A(s)) \cos(k-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \delta A(s) \cos(k-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) \times \\
 & \times (1+A(s)) \cos(k-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + (\delta k) (1+A(s)) \times \\
 & \times \cos(k-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + R_2(s)
 \end{aligned} \tag{241}$$

donde el resto $R_2(s)$ satisface una acotación del tipo:

$$R_2(s) < \frac{1}{2!} ((\delta A(s))^2 + (\delta B(s))^2 + (\delta k)^2) \eta \tag{242}$$

donde η depende de los valores $A(s)$, $B(s)$, h , $\delta A(s)$, $\delta B(s)$, δh pero está acotado si éstos lo están. Además, elegido por ejemplo $d = 1$ en (238), los valores $\delta A(s)$, $\delta B(s)$, δh son en valor absoluto y para cualquier s de $[s_0, s_1]$, menores que 1 por lo que la acotación de η es uniforme en s , una vez fijados $A(s)$, $B(s)$, h . Llamemos $2K$ a tal cota uniforme de $|\eta|$, e integremos en (241) utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener

$$\begin{aligned}
 |\delta k| |x(s_1) - x(s_0)| & \leq \sqrt{|s_1 - s_0|} \| \delta A \|_2 + |s_1 - s_0| \| \delta B \|_2 \| 1+A(s) \|_2 + \\
 & + K (\| \delta A \|_2^2 + \| \delta B \|_2^2 + |s_1 - s_0| |\delta k|^2)
 \end{aligned} \tag{243}$$

donde $\| \cdot \|_2$ denota la norma típica en $L^2(s_0, s_1)$ y se ha realizado cierto cómputo elemental de desigualdades, teniendo en cuenta las dos ecuaciones que definen res \mathcal{L} y que, también, debido a ellas, el valor de (240) es $y(s_1) - y(s_0)$.

Elijamos d en (238) de modo que en (243) se verifique:

$$K \| \delta A \|_2 < 1 \quad K \| \delta B \|_2 < 1 \quad K |s_1 - s_0| |\delta k| < \frac{1}{2} |x(s_1) - x(s_0)| \tag{244}$$

con lo cual la (243) implica

$$\frac{1}{2} |\delta h| |x(s_1) - x(s_0)| \leq (1 + \sqrt{|s_1 - s_0|}) \|\delta A\|_2 + (1 + |s_1 - s_0| \|1 + A(s)\|_2) \|\delta B\|_2 \quad (245)$$

y dado que venimos suponiendo $|x(s_1) - x(s_0)| \neq 0$, si adoptamos la notación:

$$b = \frac{2}{|x(s_1) - x(s_0)|} \max \left\{ 1 + \sqrt{|s_1 - s_0|}, 1 + |s_1 - s_0| \|1 + A(s)\|_2 \right\} \quad (246)$$

se verifica la desigualdad

$$|\delta h| \leq b \|\delta A\|_2 + b \|\delta B\|_2 \quad (247)$$

de la que se deduce

$$\begin{aligned} |\delta h|^2 &\leq b^2 (\|\delta A\|_2 + \|\delta B\|_2)^2 + b^2 (\|\delta A\|_2 - \|\delta B\|_2)^2 = \\ &= 2b^2 \|\delta A\|_2^2 + 2b^2 \|\delta B\|_2^2 \end{aligned} \quad (248)$$

es decir, se verifica la (239) con $a = 2b^2$ y queda así demostrado el lema

Proseguimos con la demostración general del teorema y adoptando las notaciones abreviadas $A(s, q_*) = A(s)$, $B(s, q_*) = B(s)$, $h(q_*) = h$, suponemos que tanto $(A(s), B(s))$ como $(A(s) + \delta A(s), B(s) + \delta B(s))$ pertenecen al subconjunto \hat{D} .

$$\hat{D} = \left\{ (A, B) \in C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \mid \forall s \in [s_0, s_1] (A(s), B(s)) \in (-1, \infty) \times \mathbb{R} \right\} \quad (249)$$

que ya se comprobó en el lema 3.1.4 ser abierto. Evaluamos el incremento $\Delta(s)$ de la función subintegral que define \hat{V} , al reemplazar $(A(s), B(s), h)$ por $(A(s) + \delta A(s), B(s) + \delta B(s), h + \delta h)$

por medio de las reglas usuales del Cálculo elemental y obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(s) = & \delta A(s) \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial A}(A(s), B(s), s) + \delta B(s) \frac{\partial \mathcal{W}_i}{\partial B}(A(s), B(s), s) + \\ & + \delta A(s) \left\{ (-\nu(q_*) + q_* Q(s)) \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) - \mu(q_*) \operatorname{cos}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \right\} + (\delta h + \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma) (1 + A(s)) \left\{ (-\nu(q_*) + q_* Q(s)) \operatorname{cos}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) + \mu(q_*) \operatorname{sen}(h - f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) \right\} + R(s) \end{aligned} \quad (250)$$

donde $R(s)$ tiene la típica expresión de Lagrange, en base a la forma cuadrática asociada a las derivadas segundas, computadas en un cierto "punto intermedio" $(A(s) + \theta(s) \delta A(s), B(s) + \theta(s) \delta B(s), h + \theta(s) \delta h)$ con $0 < \theta(s) < 1$.

Adoptemos, por brevedad, la notación

$$\forall s \in [s_0, s_1] \quad (A_I(s), B_I(s), h_I(s)) = (A(s), B(s), h) + \theta(s) (\delta A(s), \delta B(s), \delta h) \quad (251)$$

con lo cual expresamos:

$$\begin{aligned} R(s) = & (\delta A(s))^2 \frac{\partial^2 \mathcal{W}_i}{\partial A^2}(A_I(s), B_I(s), s) + 2(\delta A(s))(\delta B(s)) \times \\ & \times \frac{\partial^2 \mathcal{W}_i}{\partial A \partial B}(A_I(s), B_I(s), s) + (\delta B(s))^2 \frac{\partial^2 \mathcal{W}_i}{\partial B^2}(A_I(s), B_I(s), s) + R_1(s) \end{aligned} \quad (252)$$

donde $R_1(s)$ se escribe explícitamente así:

$$\begin{aligned} R_1(s) = & 2(\delta A(s)) \left(\delta h + \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right) \left\{ (-\nu(q_*) + q_* Q(s)) \operatorname{cos}(h_I - f(s) + \int_{s_0}^s B_I(\sigma) d\sigma) + \mu(q_*) \operatorname{sen}(h_I - f(s) + \int_{s_0}^s B_I(\sigma) d\sigma) \right\} + (\delta h + \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma)^2 \times \\ & \times (1 + A_I(s)) \left\{ (-\nu(q_*) + q_* Q(s)) \operatorname{sen}(h_I - f(s) + \int_{s_0}^s B_I(\sigma) d\sigma) + \mu(q_*) \operatorname{cos}(h_I - f(s) + \int_{s_0}^s B_I(\sigma) d\sigma) \right\} \end{aligned} \quad (253)$$

Consideremos fijos q_* en $[-r, r]$ (intervalo definido en el teorema 3.1.9) así como $A(s) = A(s, q_*)$ y $B(s) = B(s, q_*)$.

En tales condiciones puede reducirse, si ello es preciso, el real $d > 0$ de (238) para que el compacto K_p

$$K_p = \{ (A, B, s) \in \mathbb{R}^2 \times [s_0, s_1] \mid \exists s \in [s_0, s_1] \ |A - A(s)| + |B - B(s)| \leq d \} \quad (254)$$

sea interior a $(-1, +\infty) \times \mathbb{R} \times [s_0, s_1]$ (ver lema 3.1.4) la matriz hessiana de $W_i(A, B, s)$ será definida positiva (estrictamente, según la hipótesis (51)) por lo que al ser K_p compacto tendremos

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \quad \forall (A, B, s) \in K_p \quad \forall (\delta A, \delta B) \in \mathbb{R}^2 \\ (\delta A)^2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial A^2}(A, B, s) + 2(\delta A)(\delta B) \frac{\partial^2 W_i}{\partial A \partial B}(A, B, s) + \\ + (\delta B)^2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial B^2}(A, B, s) \geq c(\delta A)^2 + c(\delta B)^2 \end{aligned} \quad (255)$$

siendo interesante insistir en que el "módulo de coercividad" $c > 0$ es independiente de (A, B, s) en K_p .

Integramos ahora la (250) respecto a s , con lo que el primer miembro resulta en el incremento del funcional \hat{V} , mientras que el total de los sumandos del segundo miembro proporciona, si excluimos el $R(s)$, un resultado nulo si se tiene en cuenta como se han definido $\mu(q_*)$, $\nu(q_*)$ para que se satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange. Tenemos así:

$$\begin{aligned} \hat{V}(A(s, q_*), B(s, q_*), h(q_*), q_*) + \int_{s_0}^{s_1} R(s) ds = \\ = \hat{V}(A(s, q_*) + \delta A(s), B(s, q_*) + \delta B(s), h(q_*) + \delta h, q_*) \end{aligned} \quad (256)$$

y si ahora tenemos en cuenta la descomposición (252) así como la desigualdad (255) tendremos

$$\int_{s_0}^{s_1} R(s) ds \geq c \|\delta A(s)\|_2^2 + c \|\delta B(s)\|_2^2 - \int_{s_0}^{s_1} |R_1(s)| ds \quad (257)$$

Utilicemos las notaciones

$$Q_1 = \max_{s \in [s_0, s_1]} |Q(s)| \geq 0 \quad L_1 = \sup \{ |1 + A| \mid (A, B, s) \in K_p \} < +\infty > 0 \quad (258)$$

para acotar la expresión de $|R_1(s)|$ dada por (253) en la forma

$$\left. \begin{aligned} \forall s \in [s_0, s_1] \quad |R_1(s)| &\leq L_1 (|v(q_*)| + |q_*| Q_1 + |\mu(q_*)|) \times \\ &\times \left\{ (\delta A(s))^2 + 2(\delta A(s))(\delta h + \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma) + (\delta h + \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma)^2 \right\} = \\ &= L_1 (|v(q_*)| + |q_*| Q_1 + |\mu(q_*)|) (\delta A(s) + \delta h + \int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma)^2 \leq \\ &\leq 4 L_1 (|v(q_*)| + |q_*| Q_1 + |\mu(q_*)|) \left[(\delta A(s))^2 + (\delta h)^2 + \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (259)$$

Limitamos en primer lugar la norma de la función

$\int_{s_0}^{s_1} \delta B(\sigma) d\sigma$ en forma análoga a como se hizo en (243) del modo que sigue:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\int_{s_0}^s \delta B(\sigma) d\sigma \right)^2 &\leq \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\int_{s_0}^s |\delta B(\sigma)| d\sigma \right)^2 \leq \\ &\leq \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\int_{s_0}^{s_1} |\delta B(\sigma)| d\sigma \right)^2 = |s_1 - s_0| \left(\int_{s_0}^{s_1} |\delta B(\sigma)| d\sigma \right)^2 \leq \\ &\leq |s_1 - s_0| \left(\sqrt{|s_1 - s_0|} \|\delta B\|_2 \right)^2 = |s_1 - s_0|^2 \|\delta B(s)\|_2^2 \end{aligned} \quad (260)$$

con lo que la integración de (259) y la notación $L_2 = 4L_1 \times \max \{ 1, |s_1 - s_0|^2 \}$ permiten utilizar la (257) para establecer



$$\int_{s_0}^{s_1} R(s) ds \geq c \|\delta A(s)\|_2^2 + e \|\delta B(s)\|_2^2 -$$

$$- L_1 (|\mu(q_*)| + |\nu(q_*)| + |q_*| Q_1) (\|\delta A(s)\|_2^2 + \|\delta B(s)\|_2^2 + |s_1 - s_0| |\delta h|^2) \quad (261)$$

Supongamos finalmente, que no solo $(A(s, q_*), B(s, q_*), h(q_*))$ sino también $(A(s, q_*) + \delta A, B(s, q_*) + \delta B, h(q_*) + \delta h)$ pertenecen a la variedad \mathcal{E} . El lema 3.1-16 permite en tal caso, escribir la última (261) en la forma

$$\int_{s_0}^{s_1} R(s) ds \geq \frac{c}{2} \|\delta A(s)\|_2^2 + \frac{e}{2} \|\delta B(s)\|_2^2 + \frac{c}{2a} |\delta h|^2 -$$

$$- L_1 (|\mu(q_*)| + |\nu(q_*)| + |q_*| Q_1) (\|\delta A(s)\|_2^2 + \|\delta B(s)\|_2^2 + |s_1 - s_0| |\delta h|^2) \quad (262)$$

donde las constantes c, a, Q_1, L_2 son todas positivas, ninguna nula ni infinita.

Como $\mu(q_*)$ $\nu(q_*)$ son funciones continuas en $[-r, r]$, nulas en $q_* = 0$ (teorema 3.1.9) la (262) evidencia que existe un real $t > 0$, de modo que para todo q_* en el entorno $[-t, t]$ de $q_* = 0$ se verifica $\int_{s_0}^{s_1} R(s) ds \geq 0$, siempre que $\delta A(s)$, $\delta B(s)$, δh pertenezcan al entorno (238) definido por (244) y también se verifica $\int_{s_0}^{s_1} R(s) ds = 0$ solo si $\delta A(s) = \delta B(s) = 0$, $\delta h = 0$. En resumen, hemos probado cuenta habida de la (256) que, para cada q_* de un cierto intervalo $[-t, t]$ el funcional \hat{V} definido por (237) alcanza un mínimo relativo aislado, para los valores tomados en la variedad \mathcal{E} , precisamente en el elemento $(A(s, q_*), B(s, q_*), h(q_*))$ que define el teorema 3.1.9. El funcional V goza, por otra parte, de la misma propiedad, ya que las fórmulas (235) y (237) indican que V y \hat{V} coinciden sobre

res \mathcal{L} , con lo cual queda finalmente probado este teorema
3.1.15.

SECCION 3.2. APROXIMACION POR PROBLEMAS LINEALES. - Sea I un intervalo cerrado real, conteniendo el valor $q = 0$ en su interior y sea $\bar{F}: I \rightarrow B$ una aplicación continua que verifique, de acuerdo con todas las notaciones previas, las condiciones:

- a) $\bar{F}(0) = (0, 0, 0, 0, \psi_0)$ minimiza V_i en res \mathcal{L} .
- b) Para todo q_* en I la configuración $\bar{F}(q_*)$ es de equilibrio para $V_i + q_* V_e$ en res \mathcal{L} (ver 1.6.5) y es aislada respecto a las que tienen tal propiedad.
- c) Para todo q_* en I el operador lineal $(\partial^2 V / \partial \bar{F}^2)(\bar{F}(q_*), q_*)$ es acotado y biyectivo de \hat{B} sobre \hat{B} .

Que la clase de tales intervalos I , que llamaremos de unicidad, no es vacía ha sido el objeto de todo el apartado previo 3.1. En el actual apartado nos proponemos mostrar, que cada configuración de equilibrio $\bar{F}(q_*)$ se puede aproximar con precisión tan pequeña como se quiera, por una sucesión de configuraciones $(\bar{F}(n; q_*))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ con la notable particularidad de ser solución de un sistema de ecuaciones y condiciones lineales, en vez de las no lineales (166) a (168).

3.2.1 Motivación e ideas intuitivas .- En la práctica usual de la ingeniería civil, la gran rigidez de las piezas elásticas consideradas permite suponer que los esfuerzos $\partial w_i / \partial A$, $\partial w_i / \partial B$ son proporcionales a las deformaciones A, B en cada punto de la directriz. Estos esfuerzos tienen el significado

físico de fuerza axial y momento flector y se suponen actuantes según la configuración inicial de la pieza elástica, ya que los desplazamientos (u, w) se consideran suficientemente pequeños para desprestigiar el efecto adicional que tendría la actuación mencionada de los esfuerzos en su situación real, desplazada respecto a la inicial. Estos razonamientos intuitivos se traducen finalmente a unas ecuaciones aproximadas, que se obtienen de las (166) a (168) reemplazando $(\partial W_i / \partial A)(A_*(s), \varphi_*(s), s)$ por $\kappa_1 A_*(s)$ y $(\partial W_i / \partial B)(A_*(s), \varphi_*(s), s)$ por $\kappa_2 \varphi_*(s)$, donde κ_1, κ_2 son constantes elásticas que, a lo sumo, dependen del punto s considerado en la directriz. En el resto de los términos de tales ecuaciones A_* se reemplaza por 0 y $\varphi_*(s)$ por ψ_0 según la notación de (106); así por ejemplo, las ecuaciones (167) simplemente se ignoran pues se satisfacen idénticamente y los números μ, ν se tratan como incógnitas a determinar, a las que se asigna el significado físico de reacciones de sustentación en un extremo de la pieza convenientemente elegido.

Una generalización de este método, utilizada de hecho solo en cálculos ingenieriles que requieran gran precisión, consiste en tomar como referencia no la configuración inicial, sino otra deformada conocida del modo que sea y suponer, a partir de ésta, incrementos de esfuerzos axial y flector que sean proporcionales a sus correspondientes deformaciones. Ese es en efecto, el fundamento intuitivo del llamado método de las cargas incrementales, aplicable a piezas poco rígidas, pero supuestas sometidas a incrementos del factor de carga q , suficientemente pequeños para permitir la hipótesis de proporcionalidad entre (incrementos de)

esfuerzos y (aumentos de) deformaciones, así como la invarianza de la configuración de referencia. Así, el rango total $[0, q_*$] del factor de carga se particiona en subintervalos

$0 < q_1 < q_2 \dots < q_{n-1} < q_n = q_*$ y se calculan los esfuerzos y deformaciones incrementales relativos a cada factor q_i , a partir de la configuración correspondiente al q_{i-1} . Estas deformaciones incrementales permiten calcular la nueva configuración relativa a q_i y se supone, razonando en forma intuitiva no matemática, que la configuración correspondiente a q_n se aproximará tanto más, a la correspondiente a la solución de las ecuaciones (166) a (168), cuanto menor sea el máximo subintervalo $q_i - q_{i-1}$ de la partición $0 < q_1 < q_2 \dots < q_n = q_*$.

A continuación enunciamos un teorema que traduce en forma matemática, las consideraciones intuitivas anteriores.

Teorema 3.2.2. - Sea I un intervalo de unicidad de la forma $[0, q_*]$ con $q_* > 0$ y sea $\epsilon > 0$ real cualquiera. En tales condiciones existe $\delta > 0$ de modo que, para cualquier partición $0 = q_0 < q_1 < q_2 \dots < q_n = q_*$ de $[0, q_*]$ cuya máxima amplitud de subintervalos $q_k - q_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sea $< \delta$, se verifica:

a) El sistema recurrente lineal de ecuaciones integrodiferenciales con incógnitas $(\Delta_k A(s), \Delta_k \varphi(s), \Delta_k \mu, \Delta_k v)$ $k = 1, 2, \dots, n$ y también $(A_k(s), \varphi_k(s), \mu_k, v_k)$ $k = 0, 1, 2, \dots, n$ definido por:

$$\begin{aligned}
& A_0(s) = 0 \quad \varphi_0(s) = \varphi_0 \quad \mu_0 = \gamma_0 = 0 \quad ; \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \quad A_k(s) = \\
& = A_{k-1}(s) + \Delta_k A(s) \quad \varphi_k(s) = \varphi_{k-1}(s) + \Delta_k \varphi(s) \quad \mu_k = \mu_{k-1} + \Delta_k \mu \quad \gamma_k = \gamma_{k-1} + \Delta_k \gamma \\
& \frac{\partial^2 W_i}{\partial A^2} (A_{k-1}(s), \varphi_{k-1}'(s), s) \Delta_k A(s) + \frac{\partial^2 W_i}{\partial A \partial B} (A_{k-1}(s), \varphi_{k-1}'(s), s) \Delta_k \varphi'(s) - \\
& \quad - (\Delta_k \mu) \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) - (\Delta_k \gamma) \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) + \\
& \quad + \mu_{k-1} \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) - \gamma_{k-1} \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) + \frac{q}{\tau_k} Q(s) - \\
& \quad \times \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) = -(\frac{q}{\tau_k} - \frac{q}{\tau_{k-1}}) Q(s) \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \\
& \frac{\partial^2 W_i}{\partial B \partial A} (A_{k-1}(s), \varphi_{k-1}'(s), s) \Delta_k A(s) + \frac{\partial^2 W_i}{\partial B^2} (A_{k-1}(s), \varphi_{k-1}'(s), s) \Delta_k \varphi'(s) = \\
& = \int_{s_1}^s \left\{ (\frac{q}{\tau_k} - \frac{q}{\tau_{k-1}}) Q(s) \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) + \mu_{k-1} \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \right\} \Delta_k A(s) ds + \\
& + \int_{s_1}^s (1 + A_{k-1}(s)) \left\{ (\frac{q}{\tau_k} - \frac{q}{\tau_{k-1}}) Q(s) \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) + \mu_{k-1} \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \right\} \Delta_k \varphi(s) ds + \\
& + (\Delta_k \mu) \int_{s_1}^s (1 + A_{k-1}(s)) \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) ds + (\Delta_k \gamma) \int_{s_1}^s (1 + A_{k-1}(s)) \times \\
& \times \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) ds + (\frac{q}{\tau_k} - \frac{q}{\tau_{k-1}}) \int_{s_1}^s Q(s) (1 + A_{k-1}(s)) \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) ds \\
& \int_{s_0}^{s_1} \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k A(s) ds - \int_{s_0}^{s_1} (1 + A_{k-1}(s)) \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) ds = 0 \\
& \int_{s_0}^{s_1} \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k A(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} (1 + A_{k-1}(s)) \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) ds = 0 \\
& \frac{\partial^2 W_i}{\partial B \partial A} (A_{k-1}(s_0), \varphi_{k-1}'(s_0), s_0) \Delta_k A(s_0) + \frac{\partial^2 W_i}{\partial B^2} (A_{k-1}(s_0), \varphi_{k-1}'(s_0), s_0) \Delta_k \varphi'(s_0) = 0
\end{aligned}
\tag{263}$$

es un sistema con solución única en todo el intervalo $[s_0, s_1]$

b) $\forall s \in [s_0, s_1] \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \quad \forall q \in [q_{k-1}, q_k]$ se verifica

$$|A_*(s) - A_{k-1}(s) - (q - q_{k-1}) \Delta_k A(s)| < \epsilon, \quad |\mu - \mu_{k-1} - (q - q_{k-1}) \Delta_k \mu| < \epsilon \quad (264)$$

$$|v - v_{k-1} - (q - q_{k-1}) \Delta_k v| < \epsilon, \quad |\varphi_*(s) - \varphi_{k-1}(s) - (q - q_{k-1}) \Delta_k \varphi(s)| < \epsilon$$

donde $A_*(s), \varphi_*(s), \mu, v$ son las soluciones de (166) a (168) para el valor genérico q .

Hasta aquí el enunciado del teorema. Para la demostración conviene resumir mediante una adecuada notación abstracta.

El símbolo \bar{F} representará la cuaterna $(A(s), \varphi(s), \mu, v)$ que supondremos pertenece al subconjunto \tilde{D} del espacio $\hat{B} = C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\tilde{D} = \{ (A(s), \varphi(s), \mu, v) \in \hat{B} \mid \forall s \in [s_0, s_1] \quad -1 < A(s) \} \quad (265)$$

Los símbolos \bar{F}, \tilde{D} denotan así, en esencia los mismos objetos que en los apartados 3.1.3 a 3.1.8, aunque en forma algo distinta, principalmente debida a sustituir $h + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma$ por $\varphi(s)$. El subconjunto \tilde{D} es abierto en la norma del máximo, como se probó en 3.1.4 y en su producto cartesiano con la recta real \mathbb{R} , definimos el funcional \tilde{V} por la fórmula:

$$\begin{aligned} \forall (A, \varphi, \mu, v) \in \tilde{D} \quad \forall q \in \mathbb{R} \quad \tilde{V}(\bar{F}, q) = & \int_{s_0}^{s_1} W_c(A(s), \varphi'(s), s) ds + \\ & + q \int_{s_0}^{s_1} Q(s) (1 + A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) ds + \mu (x(s_1) - x(s_0)) + \\ & + v (y(s_1) - y(s_0)) - \mu \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) ds - \\ & - v \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) ds \end{aligned} \quad (266)$$

Si adoptamos también las notaciones
 $\Delta_k \bar{F} = (\Delta_k A(s), \Delta_k \varphi(s), \Delta_k \mu, \Delta_k \nu)$ con $k = 1, 2, \dots, n$, así como
 $\bar{F}_k = (A_k(s), \varphi_k(s), \mu_k, \nu_k)$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y
 $\bar{F}_0 = (0, \psi_0, 0, 0)$ resulta entonces de las fórmulas (201) a (203)
la equivalencia (que comprobaremos con más detalle en páginas posteriores) del sistema (263) con el siguiente:

$$\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \bar{F}_k = \bar{F}_{k-1} + \Delta_k \bar{F}$$

$$\left(\frac{\delta^2 \tilde{V}}{\delta \bar{F}^2}(\bar{F}_{k-1}, q_{k-1}) \right) \Delta_k \bar{F} + (q_k - q_{k-1}) \frac{\delta^2 \tilde{V}}{\delta q \delta \bar{F}}(\bar{F}_{k-1}, q_{k-1}) = 0 \quad (267)$$

sistema este último, que llamaremos versión abstracta del (263),
siendo casi evidente que si adoptamos en $\tilde{D} \times \mathbb{R}$ la norma
definida por:

$$\forall (\bar{F}, q) \in \tilde{D} \times \mathbb{R} \quad \|(\bar{F}, q)\| = \max_{s \in [s_0, s_1]} |A(s)| +$$

$$+ \max_{s \in [s_0, s_1]} |\varphi(s)| + \max_{s \in [s_0, s_1]} |\varphi'(s)| + |\mu| + |\nu| + |q| \quad (268)$$

el funcional \tilde{V} resulta derivable Frechet hasta el orden dos
(al menos) verificándose los resultados que serían correlativos
de 3.1.6, 3.1.9, 3.1.13 y 3.1.15 con la sustitución de
 $h + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma$ por $\varphi(s)$.

Nuestra intención es demostrar el teorema 3.2.2 mediante
el estudio del sistema abstracto (267) entendido como definitorio
de una "poligonal de Euler" (en el sentido usual de este tér-

mino en la teoría de existencia de ecuaciones y sistemas diferenciales) para la ecuación diferencial abstracta

$$\frac{d\bar{F}}{dq} = - \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2}(\bar{F}, q) \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F} \partial q}(\bar{F}, q) \right) \quad \bar{F}(0) = \bar{F}_0. \quad (269)$$

La dificultad principal consiste en encontrar "poligonales de Euler" que sean "soluciones aproximadas", pues ello depende de la continuidad uniforme y acotación (ver referencia 11, pp. 3,4,5) del segundo miembro de (269), lo que no es inmediato en espacios infinito dimensionales. Asimismo, el establecer las "soluciones aproximadas", como definidas en todo $[0, q_*]$ y no solo localmente, es una dificultad a resolver, junto con la continuidad-Lipschitz del segundo miembro de la (269). Desarrollamos este programa de trabajo en varios lemas y proposiciones.

Lema 3.2.3. - Sea B_n un espacio de Banach cualquiera y $q_* > 0$ un real positivo cualquiera. Con las notaciones previas sea $\bar{F}(q)$ una función continua de $[0, q_*]$ en \tilde{D} y $H(\bar{F}, q)$ una función de $\tilde{D} \times \mathbb{R}$ en B_n , tal que para todo q de $[0, q_*]$ existe un entorno E_q de $(\bar{F}(q), q)$ en el cual $H(\bar{F}, q)$ es continua. En tales condiciones existe un real estrictamente positivo K , de modo que H es acotada en el conjunto \mathcal{D}_K definido por

$$\mathcal{D}_K = \left\{ (\bar{F}, q) \in \hat{B} \times [0, q_*] \mid \|\bar{F} - \bar{F}(q)\| \leq K \right\} \quad (270)$$

el cual resulta contenido en $\tilde{D} \times [0, q_*]$

En efecto, la función real $\|H(\bar{F}(q), q)\|$ es continua en todo q de $[0, q_*]$ y tiene en tal intervalo un máximo finito

M , de modo que la continuidad de $H(\bar{F}, q)$ en cada E_q y el carácter abierto de \tilde{D} nos permiten afirmar que:

$$\forall q \in [0, q_*] \exists K_q > 0 \forall \bar{F} \in \hat{B} \quad \|\bar{F} - \bar{F}(q)\| \leq K_q \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{F} \in \tilde{D} \quad \& \quad \|H(\bar{F}, q)\| < 1 + M \quad (271)$$

y pretendemos probar que el mínimo de los K_q es un cierto K , con la propiedad $K > 0$. En caso contrario, la compacidad del intervalo $[0, q_*]$ permite asegurar la existencia de cierto valor $q^{(0)}$ de $[0, q_*]$ y de una sucesión $(q_n)_n \in \mathbb{Z}^+$ convergente a tal valor, de modo que:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \exists \bar{F}_n \in \tilde{D} \quad \|\bar{F}_n - \bar{F}(q_n)\| < \frac{1}{n} \quad \& \quad \|H(\bar{F}_n, q_n)\| > 1 + M \quad (272)$$

lo que cuenta habida de las convergencias $(q_n) \rightarrow q^{(0)}$ y de la continuidad de $\bar{F}(q)$ y de $H(\bar{F}, q)$ implica $(\bar{F}_n) \rightarrow \bar{F}(q^{(0)})$, así como $\|H(\bar{F}_n, q_n)\| \rightarrow \|H(\bar{F}(q^{(0)}), q^{(0)})\| \leq M$ (por definición de M) lo que contradice la (272) y demuestra así el lema.

Observación. - La conclusión del lema es válida con condiciones menos restrictivas, por ejemplo, basta con la continuidad de $H(\bar{F}, q)$ en los puntos $(\bar{F}(q), q)$. Sin embargo, la suposición de continuidad en todo un entorno E_q prepara la explicitación de condiciones naturales, para exponer posteriores resultados.

Definiciones 3.2.4. - Denotemos por \hat{B} el espacio de Banach $C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^2$ con la norma definida por (268) si se suprime el último sumando $|q|$ y, con las notaciones previas, sea \bar{F} una función continua de $\tilde{D} \times I$ en \hat{B} , donde I es un intervalo que contenga al $[0, q_*]$. Una función continua $\bar{F} : [0, q_*] \rightarrow \tilde{D}$ y derivable salvo a lo sumo en un conjunto finito \mathcal{F} de valores q se dirá respectivamente, que "es para la ecuación diferencial

$$\frac{d\bar{F}}{dq} = \bar{F}(\bar{F}, q) \quad q \in [0, q_*] \quad (273)$$

una solución exacta, o solución ϵ -aproximada con $\epsilon > 0$, o poligonal de Euler asociada, con valor inicial \bar{F}_0 si se verifica:

$$\bar{F}(0) = \bar{F}_0 \quad \forall q \in [0, q_*] \quad \frac{d\bar{F}}{dq} = \bar{F}(\bar{F}(q), q) \quad (274)$$

o bien

$$\bar{F}(0) = \bar{F}_0 \quad \forall q \in [0, q_*] - \mathcal{F} \quad \left\| \frac{d\bar{F}}{dq} - \bar{F}(\bar{F}(q), q) \right\| < \epsilon \quad (275)$$

o en último caso

$\bar{F}(0) = \bar{F}_0$ y existe partición $0 = q_0 < q_1 < \dots < q_n = q_*$ de $[0, q_*]$ de modo que: $\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \forall q \in (q_{k-1}, q_k)$

$$\bar{F}(q) = \bar{F}(q_{k-1}) + (q - q_{k-1}) \bar{F}(\bar{F}(q_{k-1}), q_{k-1}) \quad (276)$$

En este último caso diremos que la partición

$0 < q_1 < \dots < q_n = q_*$ es la partición base de la poligonal.

Lema 3.2.5. - Sea $\bar{F}(\bar{F}, q)$ una función de $\tilde{\mathcal{D}} \times [0, q_*]$ en $\hat{\beta}$ con la propiedad siguiente: para una determinada función $\bar{F}: [0, q_*] \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$, derivable con continuidad y para cada q de $[0, q_*]$ hay un entorno E_q de $(\bar{F}(q), q)$, en el cual existe la derivada F' y es continua (como función de E_q en el espacio de los operadores lineales $\mathcal{L}(\hat{\beta} \times \mathbb{R}, \hat{\beta})$). En tales condiciones, existe $K > 0$ de modo que: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$, tal que para cualquier β de $(0, q_*)$ toda poligonal \mathcal{P} de Euler asociada a la ecuación diferencial

$$\frac{d\bar{F}}{dq} = \bar{F}'(\bar{F}, q) \quad q \in [0, \beta] \quad (277)$$

con valor inicial $\bar{F}(0)$ y cuya imagen esté contenida en D_k definido por (270) verifica ser una solución ϵ -aproximada de la (277), siempre que la máxima amplitud de la partición $0 < q_1 < \dots < q_m = \beta$ base de la poligonal sea menor que δ_ϵ .

En efecto, por el lema 3.2.3 existe $K_1 > 0$ de modo que $F'(\bar{F}, q)$ es acotada en D_{k_1} (ver definición (270)). El conjunto $D_{(1/2)k_1}$ es interior a D_{k_1} en la topología relativa a $\hat{B} \times [0, q_*]$. Para establecerlo, sea $(\bar{F}', q') \in D_{(1/2)k_1}$ y consideremos el entorno definido por

$$\{(\bar{F}, q) \in \hat{B} \times [0, q_*] \mid \|\bar{F} - \bar{F}'\| + |q - q'| < k_1/4m\} \quad (278)$$

$$\text{donde } m = \max \left\{ 1; \max \left\{ \|d\bar{F}/dq\| \mid q \in [0, q_*] \right\} \right\} \quad (279)$$

Para cualquier punto de este entorno podemos establecer

$$\begin{aligned} \|\bar{F} - \bar{F}(q)\| &\leq \|\bar{F} - \bar{F}'\| + \|\bar{F}' - \bar{F}'(q')\| + \|\bar{F}'(q') - \bar{F}'(q)\| < \frac{k_1}{4m} + \frac{1}{2}k_1 + \\ &+ |q' - q| \max \left\{ \|d\bar{F}/dq\| \mid q \in [0, q_*] \right\} \leq \frac{k_1}{4} + \frac{1}{2}k_1 + \frac{k_1}{4m} \quad m = k_1 \end{aligned} \quad (280)$$

es decir que (\bar{F}, q) pertenece al interior de D_{k_1} . Resulta así, por la acotación de F' que \bar{F} es continua (y localmente lipschitziana) en $D_{(1/2)k_1}$ (ver referencia 10, vol. 2, p. 52) por lo que una nueva aplicación del lema 3.2.3 asegura la existencia de un $K > 0$, de modo que F' y \bar{F} son acotadas (cada una en el sentido de su propia norma) en el conjunto D_k .

Llegados a este punto, sea $\beta > 0$ y $\mathcal{P}(q)$ una poligonal

de Euler de (277) que esté contenida en D_k . Evaluemos la diferencia

$$\| \bar{F}(\mathcal{P}(q), q) - \frac{d\mathcal{P}}{dq} \| \quad (281)$$

en cada punto de $[0, \beta]$ diferente de los de la partición

$0 = q_0 < q_1 < \dots < q_n = \beta$. Tenemos así, por la definición (276)

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, \dots, n \quad \forall q \in (q_{i-1}, q_i) \quad \| \bar{F}(\mathcal{P}(q), q) - \frac{d\mathcal{P}}{dq} \| &= \\ &= \| \bar{F}(\mathcal{P}(q), q) - \bar{F}(\mathcal{P}_{i-1}, q_{i-1}) \| \end{aligned} \quad (282)$$

y dado que el segmento de $(\mathcal{P}(q), q)$ hasta $(\mathcal{P}_{i-1}, q_{i-1})$ está contenido en D_k podemos (según referencia 10, vol. 2, pp. 50-52) escribir

$$\begin{aligned} \| \bar{F}(\mathcal{P}(q), q) - \bar{F}(\mathcal{P}_{i-1}, q_{i-1}) \| &\leq \max_{D_k} \| F' \| \times \\ &\times [|q - q_{i-1}| + \| \mathcal{P}(q) - \mathcal{P}(q_{i-1}) \|] = \\ &= \max_{D_k} \| F' \| |q - q_{i-1}| \left[1 + \left\| \frac{d\mathcal{P}}{dq} \right\|_{i-1} \right] = \\ &= \max_{D_k} \| F' \| |q - q_{i-1}| \left[1 + \| \bar{F}(\mathcal{P}_{i-1}, q_{i-1}) \| \right] \leq \\ &\leq |q - q_{i-1}| \max_{D_k} \| F' \| [1 + \| F \|] \end{aligned} \quad (283)$$

con lo que la diferencia (281) es menor que ϵ si elegimos la amplitud máxima δ_ϵ , de la partición base de la poligonal, menor que $\epsilon / \max_{D_k} \| F' \| (1 + \| \bar{F} \|)$, quedando así probado el lema.

Lema 3.2.6. - Sea $\beta > 0$ y sea, con las notaciones de 3.2.4,

$\bar{F}_a(q)$ una solución ε -aproximada de

$$\frac{d\bar{F}}{dq} = \bar{F}(\bar{F}, q) \quad q \in [0, \beta] \quad (284)$$

para el valor inicial $\bar{F}_a(0) = \bar{F}_0$, solución que se supone contenida en un cierto D_k (ver definición (270)) en el que tanto \bar{F} como F' se suponen acotadas. En estas condiciones, si $\bar{F}(q)$ es solución exacta de (284) para el valor inicial $\bar{F}(0) = \bar{F}_0$, existe una constante $\chi > 0$ de modo que

$$\forall q \in [0, \beta] \quad \|\bar{F}_a(q) - \bar{F}(q)\| < \frac{\varepsilon}{\chi} (-1 + \exp \chi q) \quad (285)$$

En efecto, la acotación de F' en D_k implica trivialmente la de la derivada parcial F'_F (definición en referencia 10, vol. 2, pp. 55-58) por lo que si llamamos χ a esta cota podemos escribir

$$\begin{aligned} \forall q \in [0, \beta] \quad \forall \bar{F}_1, \bar{F}_2 \in \hat{B} \quad (\|\bar{F}(q) - \bar{F}_1\| < k \ \& \ \\ \|\bar{F}(q) - \bar{F}_2\| < k) \Rightarrow \|\bar{F}(\bar{F}_1, q) - \bar{F}(\bar{F}_2, q)\| < \chi \|\bar{F}_1 - \bar{F}_2\| \end{aligned} \quad (286)$$

(referencia 10, vol. 2, p. 52). Es decir que \bar{F} resulta ser lo que se llama "globalmente lipschitziana con respecto a \bar{F} " en el conjunto D_k .

El resto del lema es la clásica desigualdad de Peano-Gronwall de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en un caso particular (ver referencia 12, pp. 107-111) que se generaliza trivialmente del caso en que \bar{F} pertenezca a un espacio R^n , al de pertenencia a un espacio normado real, de dimensión no finita.

Proposición 3.2.7. - Con todas las notaciones previas sea

$\bar{\xi} : [0, q_*] \rightarrow \bar{D}$ una función derivable con continuidad y $\bar{F}(\bar{\xi}, q)$ una función de $\bar{D} \times [0, q_*]$ en $\hat{\beta}$ con las propiedades siguientes: para cada q de $[0, q_*]$ existe un entorno E_q de $(\bar{\xi}(q), q)$, contenido en $\bar{D} \times [0, q_*]$ y en el cual existe la derivada F' y es continua. Por otra parte, se supone que $\bar{\xi}(q)$ es solución exacta de la ecuación diferencial

$$\frac{d\bar{\xi}}{dq} = \bar{F}(\bar{\xi}, q) \quad q \in [0, q_*] \quad (287)$$

con valor inicial $\bar{\xi}(0) = \bar{\xi}_0$.

En estas condiciones, existe $K > 0$ de modo que: para todo $\sigma > 0$ hay un $\delta_\sigma > 0$ tal que, cualquier partición de $[0, q_*]$ cuya máxima amplitud sea menor que δ_σ es base de una poligonal \mathcal{P} de Euler contenida en \mathcal{D}_K , para la ecuación (287) con valor inicial igual a $\bar{\xi}(0)$ y tal que:

$$\forall q \in [0, q_*] \quad \|\mathcal{P}(q) - \bar{\xi}(q)\| < \sigma \quad (288)$$

En efecto, los lemas 3.2.5 y 2.3.6 aseguran la existencia de $K, \chi > 0$ tales que \bar{F} y F' son acotadas en \mathcal{D}_K y que se verifica la condición (286) de Lipschitz. De acuerdo con la fórmula (285) escribamos

$$\varepsilon = \frac{\chi}{2(-1 + \exp \chi q_*)} \min(\sigma, K) \quad (289)$$

y elijamos δ como en (283), es decir

$$\delta = \varepsilon / \max_{\mathcal{D}_K} \|F'\| [1 + \|\bar{F}\|] \quad (290)$$

Nuestro objetivo es probar que cualquier poligonal \mathcal{P} de

Euler, construída con base a una partición de amplitud menor que δ , es una poligonal contenida en D_K en todo el intervalo $[0, q_*$]. Evidentemente $(\mathcal{P}(q_0); q_0) = (\bar{\xi}(0), 0)$ pertenece al interior de D_K , es decir $\|\mathcal{P}(q_0) - \bar{\xi}(q_0)\| < K$ (desigualdad estricta, en este caso de primer miembro nulo). Supongamos, razonando por inducción, que para cierto j natural, menor que n se verifica:

$$\forall k=0, 1, \dots, j \quad (\mathcal{P}(q_j), q_j) \in \text{int } D_K \quad (291)$$

y consideremos, en el intervalo $[q_j, q_{j+1}]$ la función real continua $e(q)$, de variable real

$$\forall q \in [q_j, q_{j+1}] \quad e(q) = \|\bar{\xi}(q) - \mathcal{P}(q_j) - (q - q_j) \bar{F}(\mathcal{P}(q_j), q_j)\| \quad (292)$$

Por la (291) es claro que $e(q_j) < K$; si en todo q de $(q_j, q_{j+1}]$ es $e(q) < K$, resulta en particular $\|\bar{\xi}(q_{j+1}) - \mathcal{P}(q_{j+1})\| < K$ y hemos completado el razonamiento inductivo para la (291), pero si hay β de $(q_j, q_{j+1}]$ tal que $e(\beta) = K$, designando también con β el extremo inferior de tales valores resulta la partición $0 = q_0 < q_1 < \dots < q_j < \beta$ del intervalo $[0, \beta]$ y la poligonal de Euler $(\mathcal{P}(q), q)$ con $q \in [0, \beta]$ contenida en D_K , por lo que el lema 3.2.5 nos asegura que $\mathcal{P}(q)$ es solución ε -aproximada de

$$\frac{d\bar{\xi}}{dq} = \bar{F}(\bar{\xi}, q) \quad q \in [0, \beta] \quad (293)$$

por lo que el lema 3.2.6 y la (289) indican

$$\begin{aligned} \forall q \in (q_j, \beta] \quad e(q) = \|\bar{F}(q) - \mathcal{P}(q)\| &\leq \frac{\varepsilon}{\chi} (-1 + \exp \chi q) = \\ &= \frac{(-1 + \exp \chi q)}{2(-1 + \exp \chi q_*)} \min(\sigma, K) \leq \frac{1}{2} \min(\sigma, K) \end{aligned} \quad (294)$$

de modo que se contradice que $e(\beta) = K$ y en consecuencia, se puede suponer la poligonal \mathcal{P} , de amplitud de partición base $< \delta_\sigma$, contenida en interior de \hat{D}_K y definida en todo $[0, q_*]$, indicando entonces la (294) que

$$\forall q \in [0, q_*] \quad \|\bar{F}(q) - \mathcal{P}(q)\| \leq \frac{1}{2} \min(\sigma, K) < \sigma \quad (295)$$

lo que termina de demostrar la proporción que nos ocupa.

Nuestro objetivo a partir de ahora será comprobar, que los apartados 3.2.3 hasta 3.2.7 son aplicables al caso en que

$$\bar{F}(\bar{\xi}, q) = - \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{\xi}^2}(\bar{\xi}, q) \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial q \partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, q) \right) \quad (296)$$

donde \tilde{V} es el funcional definido por (266), en el subconjunto $\tilde{D} \times \mathbb{R}$ definido por (265) del espacio $\hat{\beta} \times \mathbb{R}$, con la norma dada por (268)

Lema 3.2.8. - El funcional \tilde{V} de (266) es derivable en $\tilde{D} \times \mathbb{R}$, hasta el orden dos inclusive. Si se impone la condición adicional de que la función $W_1(A, B, s)$ sea de clase tres en $(-1, +\infty) \times \mathbb{R} \times [s_0, s_1]$, entonces \tilde{V} admite derivada tercera continua en todo elemento de $\tilde{D} \times \mathbb{R}$.

Para la demostración, comenzamos recordando que los símbolos \tilde{V} , $\bar{\xi}$, $\hat{\beta}$, \tilde{D} denotan ahora objetos matemáticos que, si bien en esencia similares, son distintos de los que denotaban

en los apartados 3.1.3 a 3.1.6. En transcripción comparativa tendríamos:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= (A(s), B(s), \mu, \nu, h) \in C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^3 \\ \hat{B} &= C[s_0, s_1] \times C[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^3 \\ \bar{F}_0 &= (0, 0, 0, 0, \psi_0) \\ \tilde{D} &= \{ (A(s), B(s), \mu, \nu, h, q) \in \hat{B} \times \mathbb{R} \mid \forall s \in [s_0, s_1] \ -1 < A(s) \} \quad (297) \\ \tilde{V}(A, B, \mu, \nu, h, q) &= \int_{s_0}^{s_1} W_t(A(s), B(s), s) ds + \\ &+ q \int_{s_0}^{s_1} Q(s) (1+A(s)) \sin(h-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds + \mu (x(s_1) - x(s_0)) - \\ &- \mu \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \cos(h-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds + \nu (y(s_1) - y(s_0)) - \\ &- \nu \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \sin(h-f(s) + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma) ds \end{aligned}$$

para la notación antigua, mientras que para la actual

$$\begin{aligned} \bar{F} &= (A(s), \varphi(s), \mu, \nu) \\ \hat{B} &= C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \times \mathbb{R}^2 \\ \bar{F}_0 &= (0, \psi_0, 0, 0) \\ \tilde{D} &= \{ (A(s), \varphi(s), \mu, \nu) \in \hat{B} \mid \forall s \in [s_0, s_1] \ -1 < A(s) \} \quad (298) \\ \tilde{V}(A, \varphi, \mu, \nu, q) &= \int_{s_0}^{s_1} \{ W_t(A(s), \varphi(s), s) + q Q(s) (1+A(s)) \sin(\varphi(s) - f(s)) \} ds + \\ &+ \mu [x(s_1) - x(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) ds] + \nu [y(s_1) - y(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} (1+A(s)) \sin(\varphi(s) - f(s)) ds] \end{aligned}$$

Definamos ahora entre ambas versiones (antigua y actual) de B, la aplicación I, que llamaremos de identificación, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi(A(s), B(s), \mu, \nu, h) \in \hat{B}_{ant}. \quad I(A(s), B(s), \mu, \nu, h) = \\ = (A(s), h + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma, \mu, \nu) \end{aligned} \quad (299)$$

donde el subíndice ant. aplicado a cualquier símbolo indicará su versión (antigua) (297), mientras que el subíndice ac. indicará su versión (298).

Es evidente que I es lineal y también acotada en el par de normas 3.1.3 y (268) dado que

$$\begin{aligned} |A(s)| + |h + \int_{s_0}^s B(\sigma) d\sigma| + |B(s)| + |\mu| + |\nu| \leq \\ \leq |A(s)| + |h| + (1 + |s - s_0|) \max_{s \in [s_0, s_1]} |B(s)| + |\mu| + |\nu| \leq \\ \leq (1 + |s_1 - s_0|) \left[\max_{s \in [s_0, s_1]} |A(s)| + \max_{s \in [s_0, s_1]} |B(s)| + |\mu| + |\nu| + |h| \right] \end{aligned} \quad (300)$$

Por otra parte, I admite inversa I^{-1} expresada por

$$\begin{aligned} \Psi(A(s), \varphi(s), \mu, \nu) \in \hat{B}_{ac} \quad I^{-1}(A(s), \varphi(s), \mu, \nu) = \\ = (A(s), \varphi'(s), \mu, \nu, \varphi(s_0)) \end{aligned} \quad (301)$$

aplicación que es asimismo lineal y continua en virtud de

$$\begin{aligned} |A(s)| + |\varphi'(s)| + |\mu| + |\nu| + |\varphi(s_0)| \leq |A(s)| + |\varphi'(s)| + |\mu| + \\ + |\nu| + \max_{s \in [s_0, s_1]} |\varphi(s)| \leq \max_{s \in [s_0, s_1]} |A(s)| + \max_{s \in [s_0, s_1]} |\varphi(s)| + \\ \max_{s \in [s_0, s_1]} |\varphi'(s)| + |\mu| + |\nu| \end{aligned} \quad (302)$$

Es también de inmediata comprobación que entre los elemen-

tos de (297) y (298) se verifican las relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{ac} &= I(\hat{\beta}_{ant}) \quad (\bar{f}_0)_{ac} = I(\bar{f}_0)_{ant} \quad \tilde{D}_{ac} \times \mathbb{R} = \\ &= I(\tilde{D}_{ant}) \quad \tilde{V}_{ant}(\bar{f}_{ant}, q) = \tilde{V}_{ac}(I(\bar{f}_{ant}), q) \end{aligned} \quad (303)$$

por lo que al ser I e I^{-1} lineales y acotadas, son indefinidamente derivables (referencia 10, pp. 37, 144, que proporciona valor nulo para las derivadas de orden ≥ 2) y las reglas de derivación compuesta (pp. 39 a 42, 155, 156) indican, en consecuencia, que \tilde{V}_{ant} , \tilde{V}_{ac} son derivables igual número de veces, con iguales propiedades de continuidad en derivadas del mismo orden. El lema 3.1.6 estableció la derivabilidad de \tilde{V}_{ant} en los elementos de \tilde{D}_{ant} hasta el orden dos inclusive, y el lema 3.1.13 la continuidad de $(\partial^2 \tilde{V} / \partial \bar{f}^2)_{ant}$ en tales elementos, de modo que las consideraciones anteriores establecen de modo inmediato, la derivabilidad de \tilde{V}_{ac} en $\tilde{D}_{ac} \times \mathbb{R}$ hasta el orden dos y la continuidad de $(\partial^2 \tilde{V} / \partial \bar{f}^2)_{ac}$ en tal conjunto, que es lo que afirma en parte el lema 3.2.8 que estamos desarrollando.

Para estudiar la derivada tercera de \tilde{V} , escribimos su diferencial tercera como un operador trilineal de $\hat{\beta} \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} , lo que se puede realizar económicamente mediante una inversión del teorema de Taylor para operadores (ver referencia 10, vol. 2, p. 189) que escribe el incremento del funcional en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\bar{E} + \delta\bar{E}, q + \delta q) - \tilde{V}(\bar{E}, q) &= A_1(\bar{E}, q) (\delta\bar{E}, \delta q) + \\ &+ A_2(\bar{E}, q) ((\delta\bar{E}, \delta q), (\delta\bar{E}, \delta q)) + A_3(\bar{E}, q) ((\delta\bar{E}, \delta q), \\ &(\delta\bar{E}, \delta q), (\delta\bar{E}, \delta q)) + R_3(\bar{E}, q; \delta\bar{E}, \delta q) \end{aligned} \quad (304)$$

donde R_3 es un resto que verifica la condición

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall (\delta\bar{E}, \delta q) \in \hat{B}_\varepsilon \times \mathbb{R} \quad \|\delta\bar{E}\| + |\delta q| < \delta_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |R_3(\bar{E}, q; \delta\bar{E}, \delta q)| < \varepsilon (\|\delta\bar{E}\| + |\delta q|)^3 \end{aligned} \quad (305)$$

Con el fin de lograr la representación anterior del incremento de \tilde{V} , escribimos los términos de tercer orden del desarrollo limitado de Taylor, del integrando que en (298) define \tilde{V} , en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &W_{\tilde{e}}(A(s) + \delta A(s), \varphi'(s) + \delta\varphi'(s), s) - W_{\tilde{e}}(A(s), \varphi'(s), s) + (q + \delta q) Q(s) \times \\ &\times (1 + A(s) + \delta A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) + \delta\varphi(s) - f(s)) - q Q(s) (1 + A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) + \\ &+ (\mu + \delta\mu) \frac{x(s_1) - x(s_0)}{s_1 - s_0} - \mu \frac{x(s_1) - x(s_0)}{s_1 - s_0} + (\nu + \delta\nu) \frac{y(s_1) - y(s_0)}{s_1 - s_0} - \\ &- \nu \frac{y(s_1) - y(s_0)}{s_1 - s_0} - (\mu + \delta\mu) (1 + A(s) + \delta A(s)) \cos(\varphi(s) + \delta\varphi(s) - f(s)) + \\ &+ \mu (1 + A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) - (\nu + \delta\nu) (1 + A(s) + \delta A(s)) \times \\ &\times \operatorname{sen}(\varphi(s) + \delta\varphi(s) - f(s)) + \nu (1 + A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) = \\ &= \text{términos de 1}^{\text{er}} \text{ orden} + \text{términos de 2}^{\text{o}} \text{ orden} + \\ &+ \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 W_{\tilde{e}}}{\partial A^3}(A(s), \varphi'(s), s) (\delta A(s))^3 + 3 \frac{\partial^3 W_{\tilde{e}}}{\partial A^2 \partial B}(A(s), \varphi'(s), s) (\delta A(s))^2 (\delta q) + \right. \\ &+ 3 \frac{\partial^3 W_{\tilde{e}}}{\partial A \partial B^2}(A(s), \varphi'(s), s) (\delta A(s)) (\delta q)^2 + \left. \frac{\partial^3 W_{\tilde{e}}}{\partial B^3}(A(s), \varphi'(s), s) (\delta q)^3 \right] - \\ &- \frac{1}{2!} q Q(s) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) (\delta A(s)) (\delta\varphi(s))^2 + Q(s) \cos(\varphi(s) - f(s)) (\delta q) (\delta A(s)) (\delta\varphi(s)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2!} Q(s)(1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta q) (\delta \varphi(s))^2 - \frac{1}{3!} q Q(s)(1+A(s)) \times \\
& \times \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta \varphi(s))^3 + \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta \mu) (\delta A(s)) (\delta \varphi(s)) + \frac{M}{2!} \cos(\varphi(s)-f(s)) \times \\
& \times (\delta A(s)) (\delta \varphi(s))^2 + \frac{1}{2!} (1+A(s)) \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta \mu) (\delta \varphi(s))^2 - \frac{M}{3!} (1+A(s)) \times \\
& \times \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta \varphi(s))^3 - \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta v) (\delta A(s)) (\delta \varphi(s)) + \\
& + \frac{v}{2!} \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta A(s)) (\delta \varphi(s))^2 + \frac{1}{2!} (1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) \times \\
& \times (\delta v) (\delta \varphi(s))^2 + \frac{v}{3!} (1+A(s)) \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta \varphi(s))^3 + \\
& + r_3(A(s), \varphi(s), \mu, v, q; \delta A(s), \delta \varphi(s), \delta \mu, \delta v, \delta q)
\end{aligned} \tag{306}$$

donde el resto r_3 lo reescribiremos posteriormente, utilizando la clásica forma de Lagrange, con las derivadas terceras evaluadas en un adecuado "punto intermedio". Se verifica de modo evidente:

$$R_3(\bar{F}, q, \delta \bar{F}, \delta q) = \int_{s_0}^{s_1} r_3(s) ds \tag{307}$$

suponiendo que tanto \bar{F} como $\bar{F} + \delta \bar{F}$ pertenecen a \tilde{D} . Podemos poner por ahora la comprobación de que la R_3 de (307) verifica la (305), para constatar que una comparación entre (304) y (306) define inmediatamente el operador trilineal de $A_3(\bar{F}, q)$, cuya escritura explícita omitimos, pero que se obtendría de forma rutinaria por simetrización (ver referencia 10, vol. 2, pp. 146-148) del conjunto de sumandos explicitados en el segundo miembro de la fórmula (306). Obtendríamos así:

$$\begin{aligned}
A_3(\bar{F}, q) & \left((\delta_1 \bar{F}, \delta_1 q), (\delta_2 \bar{F}, \delta_2 q), (\delta_3 \bar{F}, \delta_3 q) \right) = \\
& = \frac{1}{3!} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial^3 W_i}{\partial A^3} (A(s), \varphi(s), s) \delta_1 A(s) \delta_2 A(s) \delta_3 A(s) ds + \\
& + \frac{1}{3!} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial^3 W_i}{\partial A^2 \partial B} (A(s), \varphi(s), s) \left[\delta_1 A(s) \delta_2 A(s) \delta_3 \varphi(s) + \right. \\
& \quad \left. + \delta_2 A(s) \delta_3 A(s) \delta_1 \varphi(s) + \delta_1 A(s) \delta_3 A(s) \delta_2 \varphi(s) \right] ds + \dots + \dots \\
& + \frac{1}{3!} \int_{s_0}^{s_1} \gamma (1+A(s)) \omega(\varphi(s) - f(s)) \delta_1 \varphi(s) \delta_2 \varphi(s) \delta_3 \varphi(s) ds
\end{aligned} \tag{308}$$

La fórmula que proporciona la norma de cualquier operador T_3 trilineal (referencia 10, vol. 2, p. 146) se expresa

$$\begin{aligned}
\|T_3\| & = \text{extr sup} \left\{ \|T_3((\delta_1 \bar{F}, \delta_1 q), (\delta_2 \bar{F}, \delta_2 q), (\delta_3 \bar{F}, \delta_3 q))\| \right. \\
& \quad \left. \left\| \|\delta_1 \bar{F}\| + \|\delta_1 q\| \leq 1, \|\delta_2 \bar{F}\| + \|\delta_2 q\| \leq 1, \|\delta_3 \bar{F}\| + \|\delta_3 q\| \leq 1 \right\} \right.
\end{aligned} \tag{309}$$

lo que permite comprobar, para cualquier (\bar{F}, q) en $\tilde{D} \times \mathbb{R}$, tanto la acotación como la continuidad de $A_3(\bar{F}, q)$. A tal efecto adoptamos provisionalmente una notación menos incómoda, introduciendo la función $E: (-1, +\infty) \times \mathbb{R}^5 \times [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula:

$$\begin{aligned}
& \forall (A, \varphi, \mu, \nu, q, B, s) \in (-1, +\infty) \times \mathbb{R}^5 \times [s_0, s_1] \\
E(A, \varphi, \mu, \nu, q, B, s) & = W_i(A, B, s) + q Q(s) (1+A) \text{sen}(\varphi - f(s)) + \\
& + \mu \left[\frac{x(s_1) - x(s_0)}{s_1 - s_0} - (1+A) \omega(\varphi - f(s)) \right] + \nu \left[\frac{y(s_1) - y(s_0)}{s_1 - s_0} - \right. \\
& \quad \left. - (1+A) \text{sen}(\varphi - f(s)) \right]
\end{aligned} \tag{310}$$

Esta función E se supone, según la hipótesis adicional in

roducida en el enunciado de este lema 3.2.8, ser de clase tres en todo su dominio de definición.

También introducimos las notaciones auxiliares

$$A = z_1, \quad \varphi = z_2, \quad \mu = z_3, \quad \nu = z_4, \quad q = z_5, \quad B = z_6$$

$$\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \quad (311)$$

de modo que el primer miembro de (306) se escribiría

$$E(\bar{z}(s) + \delta \bar{z}(s); z'_2(s) + \delta z'_2(s); s) - E(\bar{z}(s); z'_2(s); s) \quad (312)$$

con el convenio adicional de entender las funciones $z_i(s)$ del modo natural: $z_1(s) = A(s)$ $z_2(s) = \varphi(s)$ $z_3(s) = \mu$ $z_4(s) = \nu$ $z_5(s) = q$ $z_6(s) = \varphi'(s)$

El operador $A_3(\bar{z}, q)$ sería ahora:

$$\forall \delta^{(1)} \bar{z}(s), \delta^{(2)} \bar{z}(s), \delta^{(3)} \bar{z}(s) \in \hat{B} \times \mathbb{R} \quad (A_3(\bar{z}, q))(\delta^{(1)} \bar{z}, \delta^{(2)} \bar{z}, \delta^{(3)} \bar{z}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^6 \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial^3 E}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k}(\bar{z}(s), z'_2(s), s) \delta z_i^{(1)}(s) \delta z_j^{(2)}(s) \delta z_k^{(3)}(s) ds \quad (313)$$

La acotación se resuelve por uso combinado de las (309) y (313), para obtener entonces

$$\|A_3(\bar{z}, q)\| \leq \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^6 \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{\partial^3 E}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k}(\bar{z}(s), z'_2(s), s) \right| ds \quad (314)$$

La continuidad se constata mediante una conveniente acotación de la norma $\|A_3(\bar{z} + \delta \bar{z}, q + \delta q) - A_3(\bar{z}, q)\|$ en la métrica (268), obteniéndose así

$$\|A_3(\bar{z} + \delta\bar{z}, q + \delta q) - A_3(\bar{z}, q)\| \leq \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{\partial^3 E}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} (\bar{z}(s) + \delta\bar{z}(s), z'_2(s) + \delta z'_2(s), s) - \frac{\partial^3 E}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} (\bar{z}(s), z'_2(s), s) \right| ds \quad (315)$$

y mediante un razonamiento de análisis matemático elemental, completamente análogo de los lemas 3.1.4 y 3.1.13, se concluye la continuidad uniforme de cada uno de los sustraendos subintegrales en un cierto compacto K de R^6 , de la forma

$$K = \left\{ (x_1, \dots, x_6) \in R^6 \mid \exists s \in [s_0, s_1] \mid x_6 - z'_2(s) + \sum_{i=1}^5 |x_i - z_i(s)| \leq d \right\} \quad (316)$$

por lo que, en consecuencia, el segundo miembro de la desigualdad (315) tiende a cero, cuando lo mismo le ocurre a la norma

$$\|\delta z'_2(s)\| + \sum \|\delta z_i(s)\| \quad \text{es decir :} \quad \max_{s \in [s_0, s_1]} |\delta A(s)| + \max_{s \in [s_0, s_1]} |\delta \varphi(s)| + \max_{s \in [s_0, s_1]} |\delta \mu| + |\delta v| + |\delta q| \quad (317)$$

quedando así comprobada la continuidad de $A_3(\bar{z}, q)$

Para finalizar, comprobemos que la (307) verifica la condición (305). A tal efecto escribimos el resto $r_3(s)$ de la (306), utilizando la clásica forma de Lagrange del término complementario de 3^{er} orden. Tenemos así

$$r_3(s) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^6 \left[\frac{\partial^3 E}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} (\bar{z}(s) + \theta(s) \delta\bar{z}(s), z'_2(s) + \theta(s) \delta z'_2(s), s) - \frac{\partial^3 E}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} (\bar{z}(s), z'_2(s), s) \right] \delta z_i(s) \delta z_j(s) \delta z_k(s) \quad (318)$$

donde $\delta z_6(s) = \delta z'_2(s)$ y $\theta(s)$ es una adecuada función tal que $0 < \theta(s) < 1$. Fijado ahora $\varepsilon_1 > 0$, la ya mencionada continuidad uniforme de las derivadas terceras $\partial^3 E / \partial z_i \partial z_j \partial z_k$

en el compacto K de (316) permite asegurar la existencia de $\delta_1 > 0$ tal que cuando la norma (317) es menor que δ_1 se verifica

$$\begin{aligned}
 |R_3(s)| &\leq \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^6 \varepsilon_1 |\delta z_i(s) \delta z_j(s) \delta z_k(s)| \\
 &= \frac{\varepsilon_1}{3!} \left(\sum_{i=1}^6 |\delta z_i(s)| \right) \left(\sum_{j=1}^6 |\delta z_j(s)| \right) \left(\sum_{k=1}^6 |\delta z_k(s)| \right) \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon_1}{6} (\|\delta \bar{z}\| + |\delta q|)^3
 \end{aligned} \tag{319}$$

con lo que la integral de (307) proporciona inmediatamente

$$|R_3(\bar{z}, q, \delta \bar{z}, \delta q)| \leq \frac{\varepsilon_1}{6} |s_1 - s_0| (\|\delta \bar{z}\| + |\delta q|)^3 \tag{320}$$

y la (305) se obtiene con solo fijar $\varepsilon_1 = 6 \varepsilon |s_1 - s_0|^{-1}$

Lema 3.2.9. - Con la hipótesis adicional del lema 3.2.8 sobre $W_1(A, B, s)$ y con todas las notaciones previas, sea I un intervalo de valores de q , para el cual son válidos los teoremas 3.1.9 y 3.1.15 de la sección previa. Sea $[0, q_*]$ un subintervalo cerrado de I y $\bar{z}: [0, q_*] \rightarrow \tilde{D}$ la función descrita en tales teoremas, cuyos valores proporcionan los mínimos del funcional \tilde{V} (con las notaciones de \bar{z} , \tilde{V} , etc... según su versión actual (298)) y sea $\bar{F}(\bar{z}, q)$ la función

$$\bar{F}(\bar{z}, q) = - \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{z}^2}(\bar{z}, q) \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{z} \partial q}(\bar{z}, q) \right) \tag{321}$$

En todos los supuestos anteriores, podemos asegurar que \bar{z} y \bar{F} cumplen las hipótesis de la proposición 3.2.7.

En efecto, para cualquier q de $[0, q_*]$ es $\bar{z}(q) \in \tilde{D}$

que es abierto y en virtud del lema previo 3.2.8 existe la diferencial tercera, en particular la derivada parcial $\partial^3 \tilde{V} / \partial \bar{E}^3$ que es continua (con función operadora trilineal) en cada (\bar{E}, q) de $\tilde{D} \times \mathbb{R}$. Veamos, por lo tanto, si es posible diferenciar la (321) para probar así que \bar{F} admite derivada continua. Es sustancial al teorema 3.1.9, que $(\partial^2 \tilde{V} / \partial \bar{E}^2)$ es operador lineal invertible en cada $(\bar{E}(q), q)$ con $q \in]0, q_*[$; esta propiedad de inversibilidad se conserva (ver referencia 10, vol. 2, pp. 43, 44) en todo un entorno de cada $(\bar{E}(q), q)$. Las reglas de derivación de funciones compuestas e inversas (pp. 39 a 44) permiten escribir

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right)^{\dagger 1} &= \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right)^{\dagger 1} \cdot \left(\delta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right) \cdot \\ \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right)^{\dagger 1} &= \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right)^{\dagger 1} \cdot \left[\left(\frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^3}(\bar{E}, q) \right) (\delta \bar{E}) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2 \partial q}(\bar{E}, q) \right) \delta q \right] \cdot \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right)^{\dagger 1} \end{aligned} \quad (322)$$

Podemos ahora diferenciar (321) considerando \bar{F} como un producto generalizado (es decir, una cierta aplicación bilineal, ver pp. 41, 42) con lo cual

$$\begin{aligned} \delta \bar{F}(\bar{E}, q) &= \left[\delta \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right)^{\dagger 1} \right] \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E} \partial q}(\bar{E}, q) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2}(\bar{E}, q) \right)^{\dagger 1} \left[\frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial \bar{E} \partial q^2} \delta q + \left(\frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial \bar{E}^2 \partial q}(\bar{E}, q) \right) (\delta \bar{E}) \right] \end{aligned} \quad (323)$$

con lo que la (322) y el lema 3.2.8 sobre la continuidad de la

tercera derivada de \tilde{V} , permiten asegurar la existencia y continuidad de F' , en un entorno de cada $(\bar{F}(q), q)$ con $q \in [0, q_*]$.

Se ha comprobado así, solo una de las hipótesis de la proposición 3.2.7 y falta verificar la que indica que $\bar{F}(q)$ es solución de la ecuación diferencial (287). Pero esto es inmediato, ya que en virtud del teorema 3.1.9 y de los comentarios 3.1.7 se verifica:

$$\forall q \in [0, q_*] \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \bar{F}} (\bar{F}(q), q) = 0 \quad (324)$$

de donde resulta por derivación compuesta

$$\forall q \in [0, q_*] \quad \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2} (\bar{F}(q), q) \right) \frac{d\bar{F}}{dq} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F} \partial q} (\bar{F}(q), q) = 0 \quad (325)$$

que es la (287) cuando \bar{F} viene definida por (321), lo que termina de demostrar el lema.

El importante teorema 3.2.2 resultará ahora una consecuencia directa del lema previo 3.2.9 y de la proposición 3.2.7, si comprobamos que el sistema recurrente de ecuaciones integrales (263), se escribe en forma abstracta como en (267), es decir

$$\forall k = 1, 2, \dots, n \quad \bar{F}_k = \bar{F}_{k-1} + \Delta_k \bar{F} \\ \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2} (\bar{F}_{k-1}, q_{k-1}) \right) \Delta_k \bar{F} + (q_k - q_{k-1}) \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial q \partial \bar{F}} (\bar{F}_{k-1}, q_{k-1}) = 0 \quad (326)$$

Para efectuar lo menor incomodamente posible tal comprobación, escribimos la diferencial segunda del \tilde{V} de (298) por medio del teorema (inverso) de Taylor, como lo presentamos en

(304)-(306). Tenemos así con las notaciones de (298), (310) y (311) la expresión

$$\begin{aligned} (A_2(\bar{F}, q)) ((\delta\bar{F}, \delta q), (\delta\bar{F}, \delta q)) &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^6 \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial^2 E}{\partial z_i \partial z_j} (\bar{z}(s), z'_i(s), s) \times \\ &\times \delta z_i(s) \delta z_j(s) \quad \text{donde} \quad \delta z_6(s) = \delta z'_2(s) \end{aligned} \quad (327)$$

Desarrollamos ahora el segundo miembro de esta ecuación de acuerdo con la (310) para obtener

$$\begin{aligned} 2(A_2(\bar{F}, q)) ((\delta\bar{F}, \delta q), (\delta\bar{F}, \delta q)) &= \int_{s_0}^{s_1} \left\langle \frac{\partial^2 W_C}{\partial A^2} (A(s), \varphi'(s), s) (\delta A(s))^2 + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 W_C}{\partial A \partial B} (A(s), \varphi'(s), s) (\delta A(s)) (\delta \varphi'(s)) + \frac{\partial^2 W_C}{\partial B^2} (A(s), \varphi'(s), s) (\delta \varphi'(s))^2 - \\ &- q \dot{Q}(s) (1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta \varphi(s))^2 + 2q \dot{Q}(s) \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta A(s)) (\delta \varphi(s)) + \\ &+ 2\dot{Q}(s) \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta \varphi) (\delta A(s)) + \mu (1+A(s)) \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta \varphi(s))^2 \\ &+ \nu (1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta \varphi(s))^2 + 2\mu \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta A(s)) (\delta \varphi(s)) - \\ &- 2\nu \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta A(s)) (\delta \varphi(s)) - 2 \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta \mu) (\delta A(s)) - \\ &- 2 \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta \nu) (\delta A(s)) + 2(1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s)-f(s)) (\delta \mu) (\delta \varphi(s)) - \\ &\left. - 2(1+A(s)) \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta \nu) (\delta \varphi(s)) + 2\dot{Q}(s) (1+A(s)) \cos(\varphi(s)-f(s)) (\delta \dot{q}) (\delta \varphi(s)) \right\rangle ds \end{aligned} \quad (328)$$

Si tenemos en cuenta que (según referencia 10, vol. 2, pp. 57, 149, 150) podemos escribir idénticamente

$$\begin{aligned} 2(A_2(\bar{F}, q)) ((\delta\bar{F}, \delta q), (\delta\bar{F}, \delta q)) &= \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F}^2} (\bar{F}, q) \right) (\delta\bar{F}, \delta\bar{F}) + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{F} \partial \bar{q}} (\bar{F}, q) \right) (\delta\bar{F}) \delta q + \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \bar{q}^2} (\bar{F}, q) \right) (\delta q)^2 \end{aligned} \quad (329)$$

resulta que la primera componente de (326) se reescribe para cada $k = 1, 2, \dots, n$ en la forma:

$$\begin{aligned} A_k(s) &= A_{k-1}(s) + \Delta_k(s) \quad \varphi_k(s) = \varphi_{k-1}(s) + \Delta_k \varphi(s) \quad \mu_k = \mu_{k-1} + \Delta_k \mu \\ \nu_k &= \nu_{k-1} + \Delta_k \nu \end{aligned} \quad (\text{continua})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 W_i}{\partial A^2} (A_{k-1}(s), \varphi'_{k-1}(s), s) \Delta_k A(s) + \frac{\partial^2 W_i}{\partial A \partial B} (A_{k-1}(s), \varphi'_{k-1}(s), s) \Delta_k \varphi'(s) + \\
& + q_{k-1} Q(s) \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) + \mu_{k-1} \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) - \\
& - \nu_{k-1} \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) \Delta_k \varphi(s) - \cos(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) (\Delta_k \mu) - \\
& - \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) (\Delta_k \nu) + (q_k - q_{k-1}) Q(s) \operatorname{sen}(\varphi_{k-1}(s) - f(s)) = 0
\end{aligned} \tag{330}$$

lo que es una ecuación que coincide, salvo la ordenación de los términos, con la primera de las (263).

La tercera y cuarta componentes de (326) se escriben a partir de la (328) de modo inmediato, como los respectivos coeficientes de $(\delta\mu)$ y $(\delta\nu)$, siendo evidente que se obtienen ecuaciones coincidentes con las tercera y cuarta de las (263).

Llegados a este punto resta tan solo escribir la segunda componente de (326). Para ello explicitamos $A_2(\bar{F}, q)$ como forma bilineal simétrica, con dos argumentos $(\delta\bar{F}, \delta q)$, $(\delta^{(1)}\bar{F}, \delta^{(1)}q)$, escribiendo solo los términos T en que intervienen $\delta^{(1)}\varphi(s)$ o $\delta^{(1)}\varphi'(s)$, es decir

$$\begin{aligned}
T = \int_{s_0}^{s_1} & \left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial A \partial B} (A(s), \varphi'(s), s) (\delta A(s)) (\delta^{(1)}\varphi'(s)) + \frac{\partial^3 W_i}{\partial B^2} (A(s), \varphi'(s), s) \times \right. \\
& \times (\delta\varphi'(s)) (\delta^{(1)}\varphi'(s)) - q Q(s) (1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) (\delta\varphi(s)) (\delta^{(1)}\varphi(s)) + \\
& + q Q(s) \cos(\varphi(s) - f(s)) (\delta A(s)) (\delta^{(1)}\varphi(s)) + \mu (1+A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) \times \\
& \times (\delta\varphi(s)) (\delta^{(1)}\varphi(s)) + \nu (1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) (\delta\varphi(s)) (\delta^{(1)}\varphi(s)) + \\
& + \mu \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) (\delta A(s)) (\delta^{(1)}\varphi(s)) - \nu \cos(\varphi(s) - f(s)) (\delta A(s)) (\delta^{(1)}\varphi(s)) + \\
& + (1+A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) (\delta\mu) (\delta^{(1)}\varphi(s)) - (1+A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) \times \\
& \left. \times (\delta\nu) (\delta^{(1)}\varphi(s)) + Q(s) (1+A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) (\delta q) (\delta^{(1)}\varphi(s)) \right] ds
\end{aligned} \tag{331}$$

Efectuamos ahora una integración por parte de todos los su-

mandos que contienen $\delta^{(1)}\varphi(s)$, es decir, desde el tercer sumando en adelante. La expresión anterior, de la forma

$$T = \int_{s_0}^{s_1} [\Sigma(s) \delta^{(1)}\varphi'(s) + \Pi(s) \delta^{(1)}\varphi(s)] ds \quad (332)$$

resulta ser igual a esta otra

$$T = -\delta^{(1)}\varphi(s_0) \int_{s_0}^{s_1} \Pi(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} [\Sigma(s) - \int_{s_1}^s \Pi(\sigma) d\sigma] \delta^{(1)}\varphi'(s) ds \quad (333)$$

Con el reemplazo de (\bar{x}_{k-1}, q_{k-1}) por (\bar{x}, q) y de $\Delta_k \bar{x}, (q_k - q_{k-1})$ por $\delta \bar{x}, \delta q$ la segunda componente de (326) es una ecuación que, cuenta habida de la condición $(\partial^2 \tilde{V} / \partial q^2) = 0$ (recuérdese que \tilde{V} es lineal en q), resulta equivalente a

$$\forall \delta^{(1)}\varphi \in C^1[s_0, s_1] \quad T = 0 \quad (334)$$

lo que a su vez equivale según (333) (y en virtud de un razonamiento ya efectuado en el teorema 2.3.7, fórmula (160) y continuación) a las dos condiciones

$$\int_{s_0}^{s_1} \Pi(s) ds = 0 \quad \& \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad \Sigma(s) - \int_{s_1}^s \Pi(\sigma) d\sigma = 0 \quad (335)$$

que de modo evidente resultan equivaler a estas otras

$$\Sigma(s_0) = 0 \quad \& \quad \forall s \in [s_0, s_1] \quad \Sigma(s) - \int_{s_1}^s \Pi(\sigma) d\sigma = 0 \quad (336)$$

Una comparación de (332) con (331) permite escribir de modo inmediato las expresiones $\Sigma(s)$ y $\Pi(s)$, con lo que un mero contraste literal conduce a comprobar que la segunda (336) es la segunda (263) y la primera (336) es exactamente la última de

las (263). Todo ello en el supuesto antes señalado de que los símbolos $A_{k-1}(s)$, $\varphi_{k-1}(s)$, μ_{k-1} , ν_{k-1} , q_{k-1} , $\Delta_k A(s)$, $\Delta_k \varphi(s)$, $\Delta_k \mu$, $\Delta_k \nu$, $(q_k - q_{k-1})$ se reemplazan respectivamente por $A(s)$, $\varphi(s)$, μ , ν , q , $\delta A(s)$, $\delta \varphi(s)$, $\delta \mu$, $\delta \nu$, δq .

Efectuada así la última de las comprobaciones, queda completamente demostrado el teorema 3.2.2 de aproximación.

REFERENCIAS

1. J.J. Stoker "Differential Geometry". Wiley-Interscience. New York 1969.
2. S.S. Antman "The Theory of Rods", Handbuch der Physik, vol. VI a/2 (1972). Springer Verlag 641-703.
3. W. Rudin "Real and complex analysis". Mc Graw-Hill Inc. New York 1970.
4. H. Brezis and S.S. Antman "The existence or orientation preserving deformations in Nonlinear elasticity" from "Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Wat symposium" vol. II, pp. 1-29. Pitman, London 1978.
5. M.M. Vainberg "Variational methods for the study of non-linear operators". Holden-Day Inc., San Francisco 1964.
6. W. Rudin "Functional analysis". Mc Graw-Hill Inc. New York 1973.
7. N.I. Akhiezer "The Calculus of variations". Blaisdell Publ. Co. New York 1962
8. I.M. Gel'fand and G.E. Shilov "Generalized functions". Academic Press. New York 1964 y 1968.
9. A.P. Robertson and W.J. Robertson "Topological vector spaces". Cambridge University Press. London 1973.
10. G. Chilov "Analyse mathématique". Mir. Moscou 1973 y 75.
11. E. A. Coddington and N. Levinson "Theory of Ordinary Differential equations" Mc Graw-Hill Book Co. New York 1955
12. Miguel de Guzmán "Ecuaciones diferenciales ordinarias". Ed. Alhambra. Madrid 1975.

13. S.S. Antman "Existence of solutions of the Equilibrium Equations for Nonlinearly Elastic Rings and Arches" Journal of Math. and Mech. 20, (1970/71) 281-302.

INDICE

	págs.
PROLOGO	1
INTRODUCCION.....	3
CAPITULO 1: PRESENTACION Y FORMULACION	9
SECCION 1.1. PRIMERAS CONSIDERACIONES Y DEFINICIONES	9
1.1.1 Preliminares geométricos	10
SECCION 1.2 DEFINICION DE LAS DEFORMACIONES	12
SECCION 1.3 OBTENCION DE LAS DEFORMACIONES A PARTIR DE LOS DESPLAZAMIENTOS	14
SECCION 1.4 OBTENCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS A PARTIR DE LAS DEFORMACIONES	15
SECCION 1.5 UNICIDAD DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS ...	17
1.5.1 Resultado (de correspondencia biyectiva entre deformaciones y desplazamientos)	20
SECCION 1.6 DEFINICIONES BASICAS	21
1.6.1 Arco elástico	21
1.6.2 Energía elástica	23
1.6.3 Arco elástico en carga	23
1.6.4 Energía total	24
1.6.5 Configuración de equilibrio (para un cierto factor q de carga)	24
1.6.6 Comentarios e interpretaciones físicas	25
CAPITULO 2: EXISTENCIA DE SOLUCIONES	29
SECCION 2.1 EXISTENCIA DE CONFIGURACIONES GENERALIZADAS	29
2.1.1 Hipótesis sobre la densidad de potencial elástico (coercividad y hessiana positiva)	30

	pags.
2.1.2 Lema (sobre convexidad de las regiones de energía interna acotada)	31
2.1.4 Lema (sobre semicontinuidad débil del funcional de energía interna)	32
2.1.5 Lema (sobre divergencia en el infinito del funcional de energía total)	33
2.1.6 Lema (sobre continuidad débil del funcional de compatibilidad de deformaciones)	35
2.1.7 Lema (sobre continuidad débil del funcional de energía externa)	39
2.1.8 Lema (sobre clausura débil de la región de deformaciones admisibles)	41
2.1.9 Teorema (sobre alcanzabilidad del mínimo de la energía total en la variedad de deformaciones compatibles)	42
SECCION 2.2. MODIFICACION DEL PROBLEMA VARIACIONAL	44
2.2.1 Notación y definición (del ángulo de flexión y su correspondencia Σ con la deformación angular)	45
2.2.2 Lema (de biyectividad de Σ entre las adecuadas variedades de compatibilidad)	45
2.2.3 Notaciones (de la variedad de compatibilidad y de los funcionales de energía respecto al ángulo de flexión)	47
2.2.4 Teorema (que reformula el de alcanzabilidad del mínimo cuando se utiliza el ángulo de flexión)	47
2.2.5 Definiciones y notaciones (de función de distorsión y todos los conceptos por ella modificados) ..	50
2.2.6 Lema (de restricción del mínimo alcanzable a regiones de energía distorsionada finita)	51

	pags.
2.2.7 Hipótesis (de coercividad del potencial elástico distorsionado)	52
2.2.8 Lema (de biyectividad del operador g de distorsión)	53
2.2.9 Teorema (de alcanzabilidad del mínimo del funcional distorsionado de energía)	53
SECCION 2.3 REGULARIDAD DE LA SOLUCION GENERALIZADA	54
2.3.1 Lema (sobre la diferenciabilidad Gateaux de cierto tipo de funcionales)	54
2.3.2 Corolario (sobre la diferenciabilidad Gateaux de los funcionales de compatibilidad y energía externa)	57
2.3.3 Hipótesis (sobre dominación de las derivadas del potencial elástico distorsionado)	58
2.3.4 Lema (sobre derivabilidad Gateaux de la energía interna según direcciones privilegiadas)	58
2.3.5 Lema (sobre continuidad de clase uno de funciones especializadas de compatibilidad y energía)	61
2.3.6 Lema (sobre la existencia de cierto jacobiano de compatibilidad, no nulo)	65
2.3.7 Teorema (de regularidad de las deformaciones de equilibrio)	67
2.3.8 Corolario (de verificación de las ecuaciones de Euler-Lagrange y de admisibilidad de deformaciones) ...	72
CAPITULO 3: CONTINUACION UNIVUCA DE LA CONFIGURACION INICIAL	75
SECCION 3.1 UNICIDAD LOCAL DE LA CONTINUACION	75
3.1.1 Hipótesis adicionales (de mínimo y anulación de esfuerzos en la configuración original)	76

	pags.
3.1.2 Consecuencias inmediatas y comentarios	76
3.1.3 Notaciones (para la agrupación vectorial de las incógnitas de las ecuaciones de Euler-Lagrange)	77
3.1.4 Lema (sobre derivabilidad Frechet de cierto tipo de operadores en la región abierta de deformaciones admisibles)	77
3.1.5 Lema (diferenciabilidad Frechet de ciertos operadores de tipo compatibilidad o energía externa)	81
3.1.6 Lema (diferenciabilidad Frechet de orden dos, del funcional \tilde{V} de energía modificado con multiplicadores)	84
3.1.7 Observaciones y comentarios	88
3.1.8 Proposición (de biyectividad de la derivada parcial segunda de \tilde{V} en la configuración original)	88
3.1.9 Teorema de unicidad local (enunciado)	94
3.1.10 Lema (sobre normas de operadores lineales matriciales)	96
3.1.11 Lema (sobre normas de ciertos tipos sencillos de operadores integrales lineales)	97
3.1.12 Lema (sobre acotación y continuidad uniforme de ciertas funciones cuyos valores son operadores lineales)	98
3.1.13 Lema (de existencia de entornos de acotación y continuidad uniforme, para ciertas funciones operadoras)	100
Demostración del teorema 3.1.9 de unicidad local	102
3.1.14 Comentario	104

	pags.
3.1.15 Teorema (que identifica una rama de unicidad local como rama de configuraciones de equilibrio)	105
3.1.16 Lema (auxiliar, sobre cierta desigualdad verificada por normas en el espacio L_2 de Lebesgue)	106
Finalización de la prueba de existencia local de una rama de configuraciones de equilibrio	108
SECCION 3.2 APROXIMACION POR PROBLEMAS LINEALES	113
3.2.1 Motivación e ideas intuitivas	113
3.2.2 Teorema (que enuncia la resolubilidad y aproximación de cierto sistema recurrente de ecuaciones integrodiferenciales lineales)	115
3.2.3 Lema (sobre acotación de cierto tipo de funciones en un adecuado volumen tubular de un espacio de Banach)	119
3.2.4 Definiciones (de soluciones exactas y aproximadas de una cierta ecuación diferencial abstracta)	120
3.2.5 Lema (de comportamiento de ciertas poligonales de Euler, como soluciones aproximadas)	121
3.2.6 Lema (de extensión de la desigualdad de Peano-Gronwall, con ciertas hipótesis ad hoc)	124
3.2.7 Proposición (sobre existencia de poligonales aproximadas en todo un intervalo de unicidad)	125
3.2.8 Lema (que define condiciones para que el funcional de energía sea de clase tres en la región abierta de las deformaciones admisibles)	127

3.2.9 Lema (de construcción de una adecuada ecuación diferencial abstracta para la rama de unicidad)	136
Finalización de la prueba del teorema 3.2.2 de aproximación	138
REFERENCIAS	143
INDICE	145

