

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Estadística e Investigación Operativa



TESIS DOCTORAL

Modelo y control de un polo de desarrollo sometido a perturbaciones aleatorias

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Ángel Sarabia Viejo

DIRECTOR:

Ildefonso Yáñez de Diego

Madrid, 2015

TP
195
013

Angel Antonio Sarabia Viejo



* 5 3 0 9 8 6 7 6 0 6 *
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

x-52-10000-1

MODELO Y CONTROL DE UN POLO DE DESARROLLO SOMETIDO A
PERTURBACIONES ALFATORIAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1985



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. Nº

13/85

© Angel Antonio Sarabia Viejo
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 28015 Madrid
Madrid, 1985
Xerox 9400 X 721
Depósito Legal: M-2347-1985

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE MATEMATICAS

MODELO Y CONTROL DE UN POLO
DE DESARROLLO SOMETIDO A
PERTURBACIONES ALEATORIAS

por

Angel Antonio Sarabia Viejo

Trabajo que, realizado bajo
la dirección del
Dr. D. Ildelfonso Yáñez de Diego,
Catedrático de la U.N.E.D., se
presenta para optar al Título de
Doctor.

Madrid, Marzo de 1983

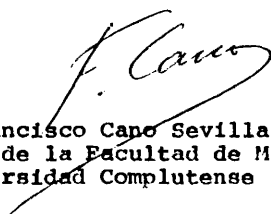
D. FRANCISCO CANO SEVILLA, Catedrático del Departamento de Estadística e Investigación Operativa, de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense.

C E R T I F I C O :

Que el trabajo titulado "Modelo y control de un polo de desarrollo sometido a perturbaciones aleatorias" que ha sido realizado por D. ANGEL A. SARABIA VIEJO bajo la Dirección de D. ILDEFONSO YANEZ DE DIEGO, Catedrático de la Facultad de Ciencias de la U.N.E.D., y del que he sido designado Ponente en la Junta de Facultad celebrada el 4 de Marzo de 1983, tiene, en mi opinión, los méritos necesarios para optar al título de Doctor tras su lectura ante el Tribunal que designe la Facultad.

Lo que hago constar a efecto de los trámites que, para la colación del grado de Doctor, establece la normativa actual.

Madrid, ocho de Marzo de mil novecientos ochenta y tres.



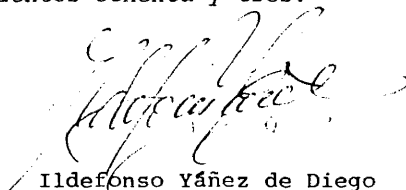
Francisco Cano Sevilla
Catedrático de la Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense

D. ILDEFONSO YAÑEZ DE DIEGO, Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Educación a Distancia

C E R T I F I C O :

Que el trabajo "Modelo y control de un polo de desarrollo sometido a perturbaciones aleatorias" ha sido realizado bajo mi dirección por D. ANGEL SARABIA VIEJO, y su contenido reúne, en mi opinión, los méritos precisos para optar al título de Doctor tras ser leída ante el Tribunal correspondiente.

Y para que así conste, expido el presente en Madrid, a veinticinco de Febrero de mil novecientos ochenta y tres.



Ildefonso Yáñez de Diego
Catedrático de la U.N.E.D.

INDICE

	<u>Página</u>
PROLOGO	
CAPITULO I: Un Modelo de Polo de Desarrollo y su Control Optimo	1
1.1. Antecedentes Inmediatos del Modelo.	2
1.2. Descripción del Modelo	2
1.3. Generalizaciones del Modelo	4
CAPITULO II: El Modelo Determinista. Caso General	7
2.1. Formulación del Modelo	8
2.2. Teorema Fundamental	9
2.3. Determinación de $S(t)$ y $m(t)$ en el caso de que el generador A sea autoadjunto con autovalores de espectro simple	32
2.4. Controlabilidad y Observabilidad del Sistema	36
2.5. Simulación del Sistema	40
2.6. Casos de Sistemas Estables y Estabilizables	43
CAPITULO III: El Modelo Determinista Propuesto. Estudio del Modelo Y Tratamiento Numérico	47
3.1. Planteamiento del Problema en Términos de la Teoría de Semigrupos	48
3.2. Determinación del Operador $S(t)$ y de $m(t)$	53
3.3. Cálculo de los Coeficientes de Fourier de $z(t,x)$ respecto del Sistema $\{g_n(x)\}$	56
3.4. El Funcional de Coste bajo Control Optimo	59
3.5. Un Caso Particular	61
3.6. Consideración de una Inversión Inicial Concentrada en una Zona Reducida	64
3.7. Análisis de los Resultados Obtenidos con el Programa	66
3.8. Una Variante del Anterior Método Numérico	68
3.9. Controlabilidad, Observabilidad y Estabilidad del Modelo	79
CAPITULO IV: El Modelo Estocástico. Caso General	83
4.1. Formulación del Modelo	84
4.2. Propiedades de la Integral Estocástica Poissoniana	86
4.3. Proposición IV.1	94
4.4. Existencia de una Unica Solución Fuerte para la Dinámica del Modelo	97
4.5. Control Optimo para Observaciones Completas	99
4.6. Control Optimo para Observaciones Incompletas. Aplicación del Principio de Separación	108
4.7. Cálculo Numérico del Operador $P(t)$	114
CAPITULO V: El Modelo Estocástico Propuesto. Estudio del Modelo y Tratamiento Numérico	116
5.1. Descripción del Modelo	117
5.2. El Proceso de Wiener de Perturbaciones	119
5.3. El Proceso de Poisson de Perturbaciones	120

II

5.4.	Existencia y Unicidad de Solución para la Ecuación del Modelo	123
5.5.	El Proceso de Observaciones	125
5.6.	Solución Numérica del Modelo	126
5.7.	Cálculo de los Coeficientes $P_{n,m}(t)$ por Truncamiento	130
5.8.	Análisis de los Resultados Obtenidos por el Ordenador	131
APENDICE A:	Notaciones Utilizadas	133
APENDICE B:	Tres Proposiciones Relativas a las Recurrencias II.32.	136
APENDICE C:	Teoremas Básicos Utilizados	146
APENDICE D:	Programas de Ordenador para el Caso Determinista	155
APENDICE E:	Selección de Resultados Obtenidos para el Caso Determinista	168
APENDICE F:	Programas de Ordenador para el Caso Aleatorio	190
APENDICE G:	Resultados Obtenidos en el Caso Aleatorio	205
APENDICE H:	Bibliografía	211
	Textos Consultados:	212
	Artículos:	214

III

PROLOGO

En este trabajo se propone un modelo de evolución de un polo de desarrollo controlado. El estudio se lleva a cabo a lo largo de cinco capítulos y una serie de apéndices, cuyo contenido básico se describe a continuación.

En el Capítulo I se hace una reseña de los antecedentes inmediatos del modelo, se introduce el modelo justificando sus diversos elementos y finalmente se sugieren algunas posibles generalizaciones o modificaciones.

En el Capítulo II se obtiene, para el caso determinista y un modelo muy general, la solución óptima. Se determinan asimismo los distintos operadores que conforman dicha solución y finalmente se estudia la controlabilidad, observabilidad y estabilidad del modelo; los resultados más importantes del final de este segundo capítulo son un método de simulación del sistema para el caso en que se desconozca la situación inicial del mismo y un resultado, intermedio entre la llamada propiedad de separación de los sistemas deterministas y el principio de separación de los sistemas estocásticos, para aquellos casos en los que el estado del sistema no es directamente observable.

En el Capítulo III se particularizan los resultados del anterior al modelo concreto propuesto en su versión determinista y en el caso de que el estado del sistema sea directamente observable. Se proponen algunos métodos numéricos y se analizan los resultados obtenidos con el ordenador a partir de los programas expuestos en los apéndices.

En el Capítulo IV se estudia un modelo estocástico de carácter general. Se analizan algunas propiedades de la integral estocástica poissoniana siguiendo el camino clásico descrito para la integral de Ito, se establece la solución del modelo para el caso de observaciones completas y se utiliza este resultado para, con ayuda del clásico principio de separación de los sistemas estocásticos con funcional de coste cuadrático, obtener la solución en el caso de observaciones incompletas y perturbaciones modeladas por procesos que no son solo de tipo Wiener.

Finalmente, en el Capítulo V, se aplican los resultados del anterior al caso particular propuesto, previa descripción pormenorizada de los elementos aleatorios del modelo. Termina el capítulo con un análisis de los resultados proporcionados por el ordenador.

En cuanto a los apéndices, en el A se proporciona una lista de las notaciones utilizadas mientras que los listados de los programas de ordenador que permitieron el tratamiento numérico del modelo y una selección de las soluciones obtenidas aparecen en los apéndices D, E, F y G.

En el apéndice B se presentan las demostraciones de dos proposiciones de R.F. Curtain, relacionadas y utilizadas en el análisis del modelo propuesto, por una vía distinta a la original.

El apéndice C muestra una lista de teoremas ya conocidos y cuya utilización en el análisis del modelo ha jugado un papel fundamental.

Finalmente en el apéndice H se indica la bibliografía, textos o artículos, que, en mayor o menor medida, ha sido manejada. Las llamadas que se hacen a lo largo del trabajo señalan cual ha sido la importancia de cada referencia, aunque en la bibliografía han sido resaltadas con un asterisco aquellas que, de manera más notoria, han tenido influencia en el trabajo.

Por lo que respecta a notaciones, la derivada de una función z respecto del tiempo, sea parcial o total, se simboliza por \dot{z} .

IV

Los capítulos están designados por números romanos de I a V, y cada uno de ellos está dividido en secciones que son identificadas por dos números separados por un punto, indicando el primero el capítulo (I a V) al que pertenece y el segundo el orden de la sección dentro del capítulo.

Las fórmulas son identificadas por dos números, el primero, romano, para indicar el capítulo (I a V) y el segundo para establecer el orden de posición de la fórmula en el capítulo en cuestión.

Por lo que respecta a la bibliografía, tanto textos como artículos son identificados por un número. En el caso de textos la referencia es de la forma [n] y en el caso de artículos [n].

Por último, y no solo por razones de tradición y cortesía sino por un elemental sentido de justicia, quiero mostrar mi gratitud hacia dos personas que han influido de manera notoria en mi vida profesional, mis maestros D. Francisco Marcos de Lanuza y D. Sixto Ríos García. Asimismo quiero hacerla presente a D. Alberto Dou Mas de Xexás, cuya ayuda fué inapreciable cuando la tesis andaba en sus balbucesos, y a mis compañeros de trabajo o promoción, muchos de ellos Profesores de esta Universidad, que me animaron constantemente a emprender esta pequeña aventura y me ayudaron a vencer la inercia que para éllo tenemos aquellos que, por una y otra razón, no hicimos la tesis a más temprana edad.

Quiero también manifestar mi cariño y gratitud a mi esposa que ha visto como más de un fin de semana era sacrificado sin que por éllo se produjera ningún drama familiar. Por el contrario, recibí estímulo.

Un párrafo aparte para el Rectorado y la Dirección de las Escuelas de Ingeniería Industrial de la Universidad Pontificia Comillas por la ayuda de todo tipo recibida de ellos, así como dejar constancia de la colaboración prestada por el Centro de Cálculo de la citada Universidad al poner a mi disposición toda la configuración del mismo, gracias a lo cual he podido obtener resultados numéricos concretos para una serie de casos, circunstancia que en otro centro de cálculo me hubiera resultado imposible por razones de tiempo y económicas.

No debo ni quiero olvidar tampoco a mis compañeros del Departamento de Publicaciones de la U.P.C., D. José Díaz García, D^a María José García Cerrillo, D^a M^a del Carmen Galán Pérez, D. Félix Hernández Martín y D. José Antonio Alonso Valera a los que corresponde lo mejor de la tesis, su mecanografiado y composición, labor en la que pusieron grandes cantidades de paciencia y capacidad, solo explicables por la relación de amistad que nos une.

He dejado para el final, y no por olvido, a mi Profesor, Director y sobre todo amigo, el Dr. Idefonso Yáñez de Diego, pues sin sus críticas, orientaciones y sobre todo sus ideas y sugerencias, esta tesis estaría tan en el limbo como su autor.

A todos muchas gracias.

1

CAPITULO PRIMERO

**Un Modelo de Polo de Desarrollo
y su Control Optimo**

Un Modelo de Polo de Desarrollo
y su Control Optimo

1.1.- Antecedentes inmediatos del modelo

Desde hace una década uno de los objetivos de los métodos econométricos ha sido la construcción de modelos válidos para representar fenómenos de crecimiento económico de carácter regional, tales como los polos de desarrollo.

Partiendo de un artículo clásico de A. Kuclinski, "Growth Poles and Growth Centres in Regional Planning", publicado en 1972 en el volumen quinto de Regional Planning Series, y de unos trabajos de Isard y Liossatos, Hilhorst y Olsder, en el artículo de la referencia [13], presentan un modelo determinista de desarrollo controlado cuya dinámica es gobernada por una ecuación en derivadas parciales de primer orden no lineal y cuya solución, por aplicación del principio de máximo de Pontryagin, se describe en términos de las curvas características de la ecuación.

Por otro lado, en el Control Theory Center de la universidad inglesa de Warwick, en Coventry, a partir principalmente de los trabajos de R.F. Curtain y de las aportaciones de Pritchard, Ichikawa, Jerczyk y otros, se ha desarrollado durante los últimos años una muy elegante teoría del control, tanto en el caso determinista como en el aleatorio, que tiene como base la teoría de los semigrupos.

A partir de estas dos líneas de investigación, se presenta en este trabajo un modelo de polo de desarrollo controlado que abarca los casos determinista y aleatorio. El control va dirigido a minimizar un funcional de coste cuadrático, con lo que se establece una diferencia esencial con el modelo de Hilhorst y Olsder y una analogía con el modelo del regulador establecido por Curtain y Pritchard en [12]. Este tipo de funcional permitirá, en el caso aleatorio, una generalización del conocido principio de separación a perturbaciones modeladas por procesos poissonianos.

1.2.- Descripción del modelo

El modelo que se propone pretende analizar la evolución e influencia dentro de una zona, asimilable a un intervalo unidimensional, de un "polo de desarrollo" localizado en un punto interior de la misma. Tal modelo puede responder a situaciones geográficas, muy concretas pero reales, correspondientes a zonas en las que las comunicaciones se realizan básicamente por una vía única, sea carretera, río, etc.

Bajo la hipótesis de que la influencia del polo vendrá medida por la riqueza que el mismo distribuya por la zona en cuestión, y que esta riqueza es función uniforme de la inversión realizada, parece lógico tomar como variable de estado $z(t,x)$, la cantidad invertida por todos los conceptos en el instante t en el punto de abscisa x . Supondremos que el polo está ubicado en el origen y, sin que ello implique pérdida de generalidad, que la zona de influencia está definida por el intervalo $[-c,c]$.

En el caso determinista, la dinámica de la variable de estado $z(t,x)$ es modelada por la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x)$$

siendo el significado de cada término el siguiente:

a) El miembro izquierdo puede interpretarse como el incremento de la inversión en el punto x entre los instantes t y $t + \Delta t$, con $\Delta t \rightarrow 0$, ésto es, lo que en términos económicos recibe el nombre de tasa de inversión en el instante t ,

b) el primer sumando de la derecha modela el flujo de la inversión entre los distintos puntos de la zona de influencia, siendo q una constante positiva característica de la zona que puede interpretarse como la velocidad de propagación y

c) $u(t,x)$ refleja la inversión adicional a realizar en el punto x en el instante t .

La variable de estado deberá satisfacer además un conjunto de condiciones, unas de contorno y otras iniciales, que reflejen ciertos aspectos de la naturaleza del polo. En el modelo escogido estas condiciones son

$$a) z(t,c) = z(t,-c) = 0, \forall t$$

$$b) z(0,x) = f(x), \text{ con } f(c) = f(-c) = 0$$

La primera caracteriza a los puntos de abscisa $-c$ y c como los límites de la zona de influencia del polo, mientras la segunda, junto con la condición de compatibilidad $f(c) = f(-c) = 0$, refleja la situación inicial del polo y su zona de influencia. El polo queda así modelado por un proceso de difusión.

El objetivo de polo es alcanzar un determinado nivel de inversión, y por tanto de riqueza, en un instante t_1 ; dicho nivel vendrá dado por una función $h(x)$ definida en $[-c,c]$ que satisfaga, por razones de compatibilidad, la condición $h(c) = h(-c) = 0$.

La medida en que dicho objetivo es alcanzado será evaluada por el criterio de minimizar el funcional de coste cuadrático

$$W(u,f,h) = \int_{-c}^c (h(x) - z(t_1, x))^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{-c}^c (h(x) - z(t,x))^2 dx dt + \\ + \int_0^{t_1} \int_{-c}^c u^2(t,x) dx dt$$

en donde el primer sumando representa el intento de minimizar la diferencia final en el instante t_1 entre el objetivo propuesto y la situación realmente alcanzada; el segundo refleja el intento de alcanzar el objetivo final de la forma más "suave" posible, es decir, al menor coste social y el último representa el intento de minimizar la inversión adicional, ya que ello permitiría su eventual uso en otros campos; el hecho de considerar $u^2(t,x)$ en lugar de $u(t,x)$ se debe al hecho de que $u(t,x)$ jugará el papel de variable de control y, eventualmente, podrá tomar valores negativos lo que deberá interpretarse en el sentido de que una parte de la inversión es retirada de la zona de influencia del polo.

La solución al problema determinista ha sido obtenida tomando como punto de partida la encontrada para el caso finito-dimensional por Barnett, Arbib y otros clásicos del control determinista, utilizando como instrumento de trabajo el desarrollado por

Curtain y Pritchard en [12], que tiene como base la teoría de los semigrupos.

Ahora bien, la limitación al caso determinista no parece proporcionar un modelo demasiado adecuado a lo que es un polo de desarrollo, ya que en la realidad el polo y su zona están sometidos a perturbaciones aleatorias. Los primeros estudios sobre el tema del control aleatorio y su resultado fundamental, el principio de separación, datan de una quincena de años mereciendo citarse el artículo de W.M. Wonham de la referencia [1] y los textos de Aström y Bensoussan de la bibliografía. En otros artículos citados en la bibliografía se resuelve el problema del control óptimo bajo perturbaciones derivadas de un ruido blanco gaussiano y diferentes criterios de optimización.

Para nuestro modelo hemos supuesto que la dinámica del sistema está afectada por dos tipos de perturbaciones. Uno de ellos, modelado por un ruido blanco gaussiano derivado de un proceso de Wiener $W(t,x)$ centrado, refleja la existencia de pequeñas, y difícilmente controlables y medibles, oscilaciones en la magnitud de la inversión.

El otro tipo engloba a aquellas perturbaciones que, sin llegar a alterar la dinámica del modelo ni sus parámetros característicos, representan modificaciones impulsivas y de magnitud considerable de la inversión, tales como huelgas, dificultades temporales en la adquisición de materias primas o energía, hallazgo de fuentes de materias primas, innovaciones tecnológicas, etc. Estas perturbaciones se introdujeron en el modelo mediante un ruido blanco poissoniano derivado de un proceso de Poisson $P(t,x)$ centrado, compuesto e independiente del proceso de Wiener antes citado.

De esta forma la dinámica del polo queda modelada por

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) + dW(t,x) + dP(t,x)$$

Finalmente, y para reflejar que en la realidad la observación de la variable de estado en cada punto y en cada instante es en la práctica imposible, se ha introducido el modelo de observaciones k -dimensional

$$y(t,x) = \int_0^t C z(s,x) ds + v(t)$$

mediante el que se representa el hecho de que las observaciones se concentran en k puntos, u "observatorios", del intervalo $[-c,c]$ y que estos canales de información se ven perturbados por alteraciones modeladas según el proceso de Wiener k -dimensional $v(t)$. C es un operador valorado sobre R^k que será analizado con más detalle en el capítulo V.

Asimismo en los capítulos III y V se hace una descripción a fondo de todos los elementos del modelo.

1.3.- Generalizaciones del modelo

En esta sección se analizan algunas generalizaciones y modificaciones plausibles del modelo propuesto cuyo estudio no ha sido abordado en este trabajo.

De forma natural la primera generalización consiste en considerar que la zona de influencia del polo es bidimensional, con lo que la dinámica del mismo podría venir dada por una ecuación en derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial z(t,x,y)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 z(t,x,y)}{\partial x \partial y} + u(t,x,y)$$

Una segunda posible generalización sería considerar que la velocidad q de propagación es función de t y de x ; por ejemplo, del tipo

$$q(t,x) = e^{at-b|x|}, \quad a, b > 0$$

donde la constante a puede considerarse como una medida de los adelantos o mejoras tecnológicas y del nivel de comunicaciones de la zona, mientras b da una medida de las diferencias locales en cultura y tecnología que se suponen son más acusadas a medida que nos alejamos de la localización del polo. Existen en Econometría métodos adecuados para estimar estas constantes.

Una tercera generalización establecería para $z(t,x)$ un conjunto de condiciones iniciales y de contorno diferente al propuesto, como por ejemplo:

$$a) \quad z(t,c) = z(t,-c) = 0, \quad \forall t$$

b) $z(t,0) = f(t)$, con lo que se planifica explícitamente el nivel de inversión en el polo en cada instante. Esto obligaría a una condición adicional de compatibilidad para la función $h(x)$ que define el estado final de la zona de influencia del polo, que es $h(0) = f(t_1)$

$$c) \quad \frac{\partial z(t,c)}{\partial x} = \frac{\partial z(t,-c)}{\partial x} = 0,$$

que garantiza la idea intuitiva de que la influencia del polo se difuminará a medida que nos alejemos de él.

Podría considerarse también la posibilidad de que el objetivo del polo no quedara establecido para un tiempo t_1 , sino que quedara determinado para todo instante, esto es, considerar $h(t,x)$. No parece una generalización muy realista.

Sí en cambio lo sería la adición al modelo de un factor forzante que representaría una inversión planificada desde el principio e independiente del control $u(t,x)$. La dinámica del modelo vendría gobernada por la ecuación

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) + g(t,x)$$

En el capítulo IV se estudia tal posibilidad en el caso general, aunque no fué considerada en el modelo ya que no aporta un especial interés teórico, complicando por contra los cálculos de manera notable.

Otra vía de generalización afectaría a la elección del criterio de optimización. Hilhorst y Olsder, por ejemplo, en su modelo, maximizan un funcional no cuadrático, que podríamos denominar funcional de máxima prosperidad, definido por una expresión que, para nuestro modelo, se formularía como

$$J(s) = \int_0^{t_1} \int_{-c}^c s(t,x) p(t,x) e^{l(t,x) - rt} dx dt$$

donde se supone que la ley de control es de la forma

$$u(t,x) = (1 - s(t,x)) p(t,x), \quad 0 \leq s(t,x) \leq 1$$

siendo

$$p(t,x) = e^{at-b|x|} z^a(t,x)$$

La justificación de tal criterio deriva de la consideración de un polo autosuficiente en el que la inversión es una fracción de la producción $p(t,x)$, destinándose el resto de la misma al consumo interno. La producción es a su vez función de la inversión, siendo la constante que se supone específica de toda la zona de influencia del polo, tal que $0 < a < 1$, en virtud de una ley bien conocida en microeconomía (ver los textos clásicos de Castañeda y Spencer) llamada de las productividades o rendimientos marginales decrecientes. Las constantes a y b ya fueron descritas antes, mientras que $l(t,x)$ ponderaría el grado de bienestar que un consumo determinado proporciona a los habitantes de un punto dado en un cierto instante, mientras r mide la influencia negativa de la inflación o de una tasa de natalidad excesiva. Con ésto el integrando de $J(s)$ se puede interpretar como una ponderación del bienestar que el consumo $s(t,x) p(t,x)$ proporciona en la zona infinitesimal dx durante el tiempo dt . Con $J(s)$ se trataría de optimizar la prosperidad total, pero con este modelo no hay objetivo final concreto definido lo que no parece estar muy en consonancia con la práctica usual de establecer planes de desarrollo con objetivo concreto a plazo determinado. Por otra parte, así como hay métodos econométricos para determinar r no existen para la determinación de $l(t,x)$, siendo ésta una razón para abandonar dicho modelo.

Finalmente, en el caso aleatorio, podría buscarse una generalización en el sentido de modelar las perturbaciones por procesos más generales y considerar como continuo en el espacio el proceso de observaciones y, aunque ésto último no parece muy realista, en el capítulo cuarto se considera tal posibilidad.

CAPITULO SEGUNDO
El Modelo Determinista
Caso General

El Modelo Determinista
Caso General

2.1.- **Formulación del modelo**

Supongamos el sistema controlado

$$\text{II.1} \quad z(t) = A(t)z(t) + B(t,u(t)), \quad z(0) = z_0$$

o bien

$$\text{II.2} \quad z(t) = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} B(s,u(s)) ds, \quad t < t_1 < \infty$$

donde

- T_t es el semigrupo generado por A ,

- $z, z_0 \in H, u \in L^2([0, t_1], E)$, siendo H y E espacios de Hilbert reales y

- $B(t, u(s)) \in \mathcal{B}_{\infty}([0, t_1]; L(E, H)) = \{ \text{Espacio de funciones definidas en el intervalo } [0, t_1] \text{ con valores en el espacio de aplicaciones lineales continuas entre } E \text{ y } H, \text{ que son fuertemente medibles y uniformemente acotadas en norma} \}$.

En particular B puede ser independiente de t y $L^2([0, t_1]; E)$ puede ser concebido como el espacio de leyes de control admisibles.

Al dominio de definición de A lo simbolizaremos por $D(A)$.

A este sistema controlado le asociaremos un funcional de coste dado por la expresión

$$\begin{aligned} \text{II.3} \quad W(u; z_0) = & \langle h - z(t_1), K(h - z(t_1)) \rangle + \\ & + \int_0^{t_1} \langle h - z(s), F(s; (h - z(s))) \rangle ds + \\ & + \int_0^{t_1} \langle u(s), G(s; u(s)) \rangle ds \end{aligned}$$

donde $\langle \bullet, \bullet \rangle$ es el producto escalar definido sobre H o sobre E , siendo la distinción obvia en cada caso. Los operadores que aparecen en la expresión de W son tales que

- $G \in \mathcal{B}_{\infty}([0, t_1]; L(E))$ y, para todo valor de t en el intervalo considerado, es autoadjunto, definido positivo y además G satisface la relación

$$\langle U(t), G(t, u(t)) \rangle \geq c^2 \|u\|^2$$

para casi todo t , todo $u(t)$ y algún c^2 . El que G sea definida positiva refleja el hecho de que todo control acarrea un coste,

- $K \in L(H)$ y $F \in \mathcal{B}_{\infty}([0, t_1], L(H))$ y ambos son autoadjuntos y definidos positivos. No hay ninguna dificultad adicional en suponerlos semidefinidos lo que reflejaría la posibilidad de que algunos estados no tuvieran asociado coste alguno. Tanto F como G pueden ser independientes de t .

- $h \in H$.

Se trata de encontrar la ley de control óptima $u^* \in L^2([0, t_1], E)$ que minimice $W(u; z_0)$.

En lo que sigue, y para facilitar la notación, expresiones tales como

$$G(t, u(t))$$

u otras que representen composición de aplicaciones serán representadas como

$$G(t) u(t)$$

salvo que pueda inducirse error.

La solución al problema de encontrar la ley de control óptima viene dada por el siguiente teorema

2.2. Teorema fundamental

La ley de control que minimiza $W(u; z_0)$ es la dada por

$$\text{II.4} \quad u^0(t) = -G^{-1} B^* S(t) z(t) - G^{-1} B^* m(t)$$

es decir, la combinación de la ley de control por retroalimentación

$$\text{II.5} \quad -G^{-1} B^* S(t) z(t)$$

con la ley de control de bucle abierto

$$\text{II.6} \quad -G^{-1} B^* m(t)$$

siendo $S(t)$ un operador continuo en el intervalo $[0, t_1]$, perteneciente a $L(H)$ y autoadjunto y que es la única solución de la ecuación de Riccati definida sobre $[0, t_1]$ en la siguiente formulación de producto escalar

$$\text{II.7} \quad \left\langle \frac{d}{dt} S(t) y, w \right\rangle + \langle S(t) y, Aw \rangle + \langle Ay, S(t) w \rangle + \langle Fy, w \rangle -$$

$$- \langle S(t) B G^{-1} B^* S(t) y, w \rangle = 0, \text{ con } y, w \in D(A)$$

y con la condición

$$\text{II.8} \quad S(t_1) = K$$

Por su parte $m(t) \in H$ satisface la ecuación diferencial

$$\text{II.9} \quad \left\langle \frac{d}{dt} m(t), w \right\rangle - \left\langle Fh, w \right\rangle + \left\langle (A^* - S(t) B G^{-1} B^* (t)) m(t), w \right\rangle = 0$$

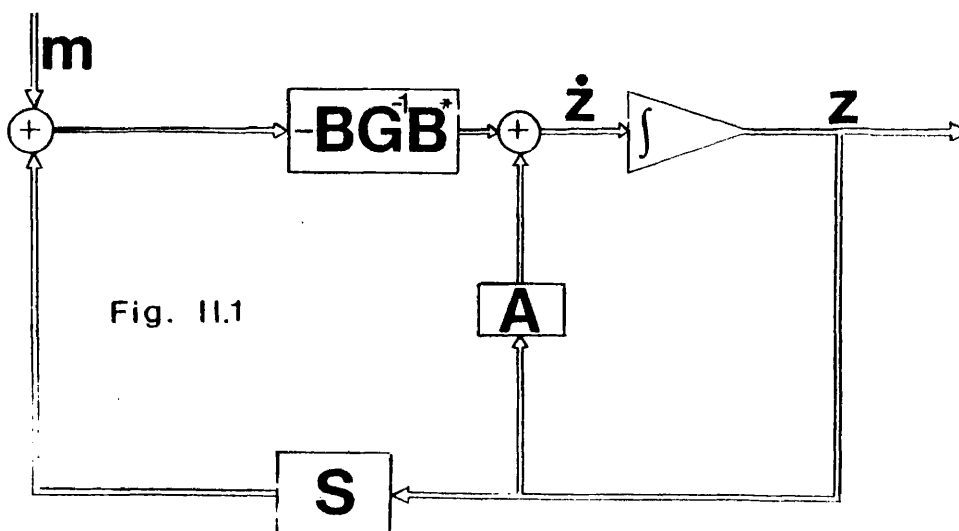
con la condición

$$\text{II.10} \quad m(t_1) = -Kh$$

El valor mínimo de $W(u; z_0)$ viene dado por

$$\text{II.11.} \quad W(u^0; z_0) = \langle h, Kh \rangle + \int_0^{t_1} \langle h, F(s) h \rangle ds + \langle z_0, S(0) z_0 \rangle + \\ + 2 \langle z_0, m(0) \rangle - \int_0^{t_1} \langle m(s), B G^{-1} B^* m(s) \rangle ds$$

El diagrama de bloques del sistema correspondiente al control óptimo es entonces el representado en la figura II.1



Utilizaremos el método de Pontryagin y su principio de máximo para la demostración. Dada la particular estructura de la función a minimizar formamos el siguiente hamiltoniano.

$$\text{II.12} \quad \mathcal{J} = \langle h - z(t), F(h - z(t)) \rangle + \langle u(t), G u(t) \rangle + \langle p(t), Az(t) \rangle + \langle p(t), Bu(t) \rangle$$

al que asociamos el sistema de ecuaciones diferenciales con estructura formal de producto escalar

$$\langle \dot{z}(t), w \rangle = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p} = \langle Az(t) + Bu(t), w \rangle \equiv \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$$

II.13

$$\langle \dot{p}(t), w \rangle = 2 \langle F(h - z(t)), w \rangle - \langle A^* p(t), w \rangle = - \frac{\partial}{\partial z} \text{ con } w \in H$$

con las condiciones iniciales

$$\text{II.14} \quad z(0) = z_0, \langle p(t_1), w \rangle = \left. \frac{\langle h - z(t), K(h - z(t)) \rangle}{dz} \right|_{t=t_1} = -2 \langle K(h - z(t_1)), w \rangle$$

El principio de máximo de Pontryagin establece que $W(u; z_0)$ será mínimo si elegimos u de forma que maximice \mathcal{J} . Para ello anulamos la derivada de \mathcal{J} respecto a u

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u} = 2 \langle G u(t), w \rangle + \langle B^* p(t), w \rangle = 0$$

y, como lo anterior se cumple para todo $w \in H$, se ha de verificar

$$2 G u(t) + B^* p(t) = 0$$

de donde el control óptimo es de la forma

$$\text{II.15} \quad u(t) = - \frac{1}{2} G^{-1} B^* p(t)$$

Sustituyendo II.15 en II.1 obtenemos

$$z(t) = A z(t) - B G^{-1} B^* p(t)$$

II.16

$$\langle p(t), w \rangle = 2 \langle F(h - z(t)), w \rangle - \langle A^* p(t), w \rangle$$

Siguiendo la pauta marcada para el problema del regulador en el caso finito-dimensional, consideremos una solución de la forma

$$\text{II.17} \quad p(t) = 2(S(t) z(t) + m(t))$$

donde $S(t) \in L(H)$ es autoadjunto.

Substituyendo II.17 en II.16 y desarrollando obtenemos

$$2 \left\langle \left(\frac{dS(t)}{dt} \right) z(t), w \right\rangle + 2 \left\langle S(t) \dot{z}(t), w \right\rangle + 2 \left\langle \frac{dm(t)}{dt}, w \right\rangle = 2 \left\langle F(h - z(t)), w \right\rangle - 2 \left\langle A^* (S(t) z(t) + m(t)), w \right\rangle$$

de donde $\left\langle \left(\frac{dS(t)}{dt} \right) z(t), w \right\rangle + \left\langle S(t) A z(t), w \right\rangle - \left\langle S(t) B G^{-1} B^* S(t) z(t), w \right\rangle - \left\langle S(t) B G^{-1} B^* m(t), w \right\rangle + \left\langle \frac{dm(t)}{dt}, w \right\rangle = \left\langle Fh, w \right\rangle - \left\langle Fz(t), w \right\rangle - \left\langle A^* S(t) z(t), w \right\rangle - \left\langle A^* m(t), w \right\rangle$

Como lo anterior ha de cumplirse para todo $w \in D(A)$, se deducen de inmediato las dos relaciones

$$\text{II.18} \quad \left\langle \frac{dS(t)}{dt} y, w \right\rangle + \left\langle A y, S(t) w \right\rangle + \left\langle S(t) y, A w \right\rangle + \left\langle F y, w \right\rangle - \left\langle S(t) B G^{-1} B^* S(t) z(t), w \right\rangle = 0 \quad \forall y, w \in D(A)$$

$$\text{II.19} \quad \left\langle \frac{dm(t)}{dt}, w \right\rangle - \left\langle Fh, w \right\rangle + \left\langle (A^* - S(t) B G^{-1} B^*) m(t), w \right\rangle = 0$$

Por su parte la condición inicial II.14 se traduce en

$$\frac{1}{2} p(t_1) = S(t_1) z(t_1) + m(t_1) = -K(h - z(t_1))$$

y, como ésto ha de cumplirse para toda función z , se ha de verificar

$$S(t_1) = K, m(t_1) = -Kh$$

y obtenemos como ley de control óptima

$$u^0(t) = -G^{-1} B^* (S(t) z(t) + m(t))$$

con un valor final

$$\text{II.20} \quad u^0(t_1) = -G^{-1} B^* (S(t_1) z(t_1) + m(t_1)) = -G^{-1} B^* K(h - z(t_1))$$

y un valor inicial

$$\text{II.21} \quad u^0(0) = -G^{-1} B^* (S(0) z_0 + m(0))$$

donde $S(0)$ y $m(0)$ los determinaremos mas adelante.

Ahora bien, en [12] Curtain y Pritchard prueban que la ecuación II.18 tiene solución única en la clase de los operadores autoadjuntos, por lo que el operador $S(t)$ coincide con el operador obtenido por ellos por medio de relaciones de recurrencia análogas a las utilizadas más adelante en esta misma sección. Por consiguiente podemos utilizar el principal resultado obtenido en [12] y abordar luego el estudio del término $m(t)$.

Dicho resultado establece que $S(t)$ satisface la ecuación integral

$$\text{II.22} \quad S(t)y = U^*(t_1, t) K U(t_1, t)y + \int_t^{t_1} U^*(s, t) \{ F(s) + S(s) B(s) G^{-1} B^*(s) S(s) \} U(s, t) y \, ds$$

donde $U(s, t)$ es el operador de evolución suave correspondiente a la perturbación de T_t por $-BG^{-1} B^* S(s)$

A partir de II.22 se demuestra que el operador $S(t)$, tal como se prueba en la siguiente proposición, satisface algunas importantes relaciones.

Proposición II.1

El operador $S(t)$ satisface la relación

$$\text{II.23} \quad S(t)y = U^*(T_1, t) K T_{t_1-t} y + \int_t^{t_1} U^*(S, t) F T_{s-t} y \, ds$$

donde $U(t, s)$ es la perturbación de T_t por $-BG^{-1} B^* S(s)$.

En efecto dado que

$$S(t)y = U^*(t_1, t) K U(t_1, t) y + \int_t^{t_1} U^*(s, t) (F(s) + S(s) BG^{-1} B^* S(s)) U(s, t) y \, ds$$

y

$$U(s, t) y = T_{s-t} y - \int_t^s T_{s-v} BG^{-1} B^* S(v) U(v, t) y \, dv$$

resulta, por substitución, que

$$\begin{aligned} S(t)y &= U^*(t_1, t) K T_{t_1-t} y - U^*(t_1, t) K \int_t^{t_1} T_{t_1-s} BG^{-1} B^* S(s) U(s, t) y \, ds + \\ &+ \int_t^{t_1} U^*(s, t) (F(s) + S(s) BG^{-1} B^* S(s)) T_{s-t} y \, ds - \\ &- \int_t^{t_1} U^*(s, t) (F(s) + S(s) BG^{-1} B^* S(s)) \left[\int_t^s T_{s-v} BG^{-1} B^* S(v) U(v, t) y \, dv \right] ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U^*(t_1, t) K T_{t_1-t} y + \int_t^{t_1} U^*(s, t) F(s) T_{s-t} y \, ds \\
&+ \int_t^{t_1} U^*(s, t) S(s) B G^{-1} B^* S(s) T_{s-t} y \, ds \\
&- U^*(t_1, t) K \int_t^{t_1} T_{t_1-s} B G^{-1} B^* S(s) U(s, t) y \, ds - \\
&- \int_t^{t_1} \int_s^{t_1} U^*(v, t) (F(v) + S(v) B G^{-1} B^* S(v)) T_{v-s} B(s) G^{-1}(s) B^*(s) S(s) U(s, t) y \, dv \, ds \\
&= U^*(t_1, t) K T_{t_1-t} y + \int_t^{t_1} U^*(s, t) F(s) T_{s-t} y \, ds + \\
&+ \int_t^{t_1} U^*(s, t) S(s) B G^{-1} B^* S(s) T_{s-t} y \, ds - \\
&- \int_t^{t_1} U^*(s, t) \left\{ U^*(t_1, s) K T_{t_1-s} B G^{-1} B^* S(s) U(s, t) y + \right. \\
&+ \left. \int_s^{t_1} U^*(v, s) (F(v) + S(v) B G^{-1} B^* S(v)) T_{v-s} B G^{-1} B^* S(s) U(s, t) y \, dv \right\} ds = \\
&= U^*(t_1, t) K T_{t_1-t} y + \int_t^{t_1} U^*(s, t) F(s) T_{s-t} y \, ds + \\
&+ \int_t^{t_1} U^*(s, t) S(s) B G^{-1} B^* S(s) T_{s-t} y \, ds \\
&- \int_t^{t_1} U^*(s, t) \left\{ U^*(t_1, s) K U(t_1, s) B G^{-1} B^* S(s) T_{s-t} y + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_t^{t_1} U^*(v,s) (F(v) + S(v) BG^{-1} B^* S(v)) U(v,s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-t} y \, dv \, ds = \\
& = U^*(t_1,t) K T_{t_1-t} y + \int_t^{t_1} U^*(s,t) F(s) T_{s-t} y \, ds
\end{aligned}$$

como se quería demostrar ya que el interior de la llave es precisamente

$$S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-t}$$

Es inmediato, teniendo en cuenta el carácter autoadjunto de S , K y F , que también se satisfacen las relaciones

$$\text{II.24} \quad S(t) y = T_{t_1-t}^* K U(t_1,t) y + \int_t^{t_1} F(s) U(s,t) y \, ds$$

$$\begin{aligned}
\text{II.25} \quad S(t) y &= T_{t_1-t}^* K T_{t_1-t} y + \\
& + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* (F(s) - S(s) BG^{-1} B^* S(s)) T_{s-t} y \, ds
\end{aligned}$$

Vamos a volver de nuevo a nuestro problema para intentar establecer una ley de recurrencia para $m(t)$ que permita analizar por un lado las propiedades de la ley de control óptima y por otro facilitar un posterior tratamiento numérico del problema.

Determinación de $m(t)$

Siguiendo la pauta marcada en [12] para la determinación de $S(t)$ consideramos la sucesión de leyes de control admisibles definida por

$$\text{II.26} \quad u_n(t) = L_n(t, z(t)) - G^{-1} B^* m_{n-1}(t) = L_n(t) z(t) - G^{-1} B^* m_{n-1}(t)$$

y sugerida por la expresión obtenida para la ley de control óptima. Con esta ley de control la salida del sistema II.1 la designaremos por $z_n(t)$ y tendremos

$$\text{II.27} \quad z_n(t) = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} B(s) (L_n(s) z_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds$$

que podemos también expresar como

$$\text{II.28} \quad z_n(t) = U_n(t, 0) z_0 - \int_0^t U_n(t, s) B G^{-1} B^* m_{n-1}(s) ds$$

donde $U_n(t, 0)$ es el operador de evolución suave perturbado correspondiente a la perturbación de T_t por $B(t) L_n(t)$, es decir, la solución única de la ecuación integral

$$\text{II.29} \quad U_n(t, 0) z_0 = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} B(s) L_n(s) U_n(s, 0) z_0 ds$$

La expresión II.28 es ciertamente la representación de un sistema libre cuya versión controlada es

$$\begin{aligned} \text{II.30} \quad z_n(t) = & U_n(t, 0) z_0 - \int_0^t U_n(t, s) B G^{-1} B^* m_{n-1}(s) ds + \\ & + \int_0^t U_n(t, s) B(s) B(s) \bar{u}_n(s) ds \end{aligned}$$

donde $\bar{u}_n \in L^2([0, t_1]; E)$ viene definida por

$$\text{II.31} \quad \bar{u}_n(t) = u(t) - u_n(t)$$

El operador $L_n(t)$ se define, en forma análoga a la expuesta en [12] por la recurrencia

$$L_n(t; y(t)) = L_n(t) y(t) = -G^{-1} (t; B^*(t; S_{n-1}(t, y(t)))) , L_0(t) = 0$$

$$F_n(t; y(t)) = F(t, y(t)) + L_n^*(t; G(t; L_n(t; y(t))))$$

$$S_n(t; y(t)) = U_n^* \left[(t_1, t); K (U_n \left[(t_1, t); y(t) \right]) \right] + \\ + \int_t^{t_1} U_n^* \left[(s, t); F_n (s, U_n((s, t); y(s))) \right] ds$$

donde por U_n^* designamos al operador adjunto de U_n , como es usual. Las anteriores fórmulas de recurrencia, con el convenio establecido inicialmente, adoptan la siguiente más cómoda expresión

$$\text{II.32.1} \quad L_n(t) = -G^{-1}(t) B^*(t) S_{n-1}(t), \quad L_0(t) = 0$$

$$\text{II.32.2.} \quad F_n(t) = F(t) + L_n^*(t) G(t) L_n(t)$$

$$\text{II.32.3.} \quad S_n(t) y = U_n^* (t_1, t) K U_n (t_1, t) y +$$

$$+ \int_t^{t_1} U_n^* (s, t) F_n (s) U_n (s, t) y ds$$

Teniendo en cuenta las condiciones exigidas a los operadores B , K , F y G , F_n y S_n son autoadjuntos.

De II.32.1 se deduce además que

$$G(t) L_n(t) = -B^*(t) S_{n-1}(t)$$

$$L_n^*(t) G(t) = -S_{n-1}(t) B(t)$$

Partiendo de sistemas no perturbados por $m_n(t)$, es decir, sistemas de la forma

$$\text{II.33} \quad z_n(t) = U_n(t, 0) z_0 + \int_0^t U_n(t, s) B(s) \bar{u}(s) ds$$

se prueba en [12] que

$$\text{II.34} \quad \langle z_n(t), S_n(t) z_n(t) \rangle = \langle z_n(t_1), K z_n(t_1) \rangle +$$

$$+ \int_t^{t_1} \left\{ \langle z_n(s), F_n(s) z_n(s) \rangle - 2 \langle z_n(s), S_n(s) B(s) \bar{u}(s) \rangle \right\} ds$$

y que para la ley de control $u_n(t) = L_n(t) z_n(t)$ y z_0 fijo se cumple

$$\text{II.35} \quad W^0(u_n; z_0) = \langle z_0, S_n(0) z_0 \rangle$$

y que $W^0(u_n; z_0)$ decrece monotonamente con n .

Estos resultados son probados en el apéndice B por una vía diferente a la utilizada en [12] con el resultado adicional de la proposición B1.

Las siguientes proposiciones caracterizan las propiedades de $m(t)$

Proposición II.2

La relación II.19 sugiere la idea de considerar la ecuación de evolución

$$\text{II.36} \quad \begin{cases} \dot{m}(t) = -(A^* - S(t) B G^{-1} B^*) m(t) + Fh \\ m(t_1) = -Kh \end{cases}$$

Como $-(A^* - S(t) B G^{-1} B^*)$ genera el semigrupo $U^*(t_1, t)$, dual del semigrupo $U(s, t)$ generado por $(A - B G^{-1} B^* S(t))$, tenemos que

$$\text{II.37} \quad m(t) = -U^*(t_1, t) Kh - \int_t^{t_1} U^*(s, t) Fh ds$$

es la solución suave de II.36. Vamos a probar que II.37 satisface la relación II.19 y es además la única solución fuerte de II.36.

En efecto, considerando el carácter diferenciable de $U(t, s)$ respecto a su segunda variable y el teorema de 3 de la lista, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dm(t)}{dt}, w \right\rangle &= \left\langle - \left[-(A^* - S(t) B G^{-1} B^*) U^*(t_1, t) Kh + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \int_t^{t_1} -(A^* - S(t) B G^{-1} B^*) U^*(s, t) Fh ds - Fh \right], w \right\rangle = \\ &= \left\langle -(A^* - S(t) B G^{-1} B^*) \left\{ -U^*(t_1, t) Kh - \int_t^{t_1} U^*(s, t) Fh ds \right\} + Fh, w \right\rangle = \\ &= - \left\langle (A^* - S(t) B G^{-1} B^*) m(t), w \right\rangle + \left\langle Fh, w \right\rangle \end{aligned}$$

tal como se quería probar.

La segunda parte de la proposición es algo más delicada. Por aplicación de la relación II.34 se tiene que

II.38

$$T_{t-s}^* S(s) y = T_{t_1-t}^* K U(t_1, s) y + \int_s^{t_1} T_{v-t}^* F U(v, s) y dv$$

Supongamos entonces que $T_t^* K$ y $T_t^* F$ aplican H en $D(A^*)$, que A^* es cerrado y que para todo $y \in H$ son finitas las integrales

$$\int_0^{t_1} \|A^* T_t^* K y\| dt \quad y \quad \int_0^{t_1} \|A^* T_t^* F y\| dt$$

Bajo las anteriores condiciones se tiene que

$$T_{t-s}^* S(s) : H \rightarrow D(A^*)$$

y

$$A^* T_{t-s}^* S(s) y = A^* T_{t_1-t}^* K U(t_1, s) y + \int_s^{t_1} A^* T_{v-t}^* F U(v, s) y dv$$

y además el primer miembro es integrable sobre $[0, t_1]$ ya que, por hipótesis, lo son los dos sumandos que lo configuran.

Entonces, en virtud del teorema 4 de la lista de los utilizados de la teoría general de semigrupos, se tiene que el operador $(A^* - S(t))^{-1} B^*$ genera un operador de evolución casi fuerte y, por el teorema 6 de la lista, éste es suficiente para que II.36 tenga una única solución fuerte.

Esta proposición sugiere, en forma análoga a la establecida por Curtain y Pritchard en [12], una ley de recurrencia cuyo límite fuerte sea precisamente $m(t)$ tal como se explicita en la proposición siguiente.

Proposición II.3

Consideremos las recurrencias

$$\text{II.39.1} \quad u_n(t) = L_n(t) z(t) - G^{-1} B^* m_{n-1}(t)$$

$$\text{II.39.2} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_n(t) = -U_n^*(t_1, t) Kh - \int_t^{t_1} U_n^*(s, t) \left[F(s)h + (S_n(s) - S_{n-1}(s))BG^{-1} B^* m_{n-1}(s) \right] ds \\ m_0(t) = 0 \end{array} \right.$$

donde L_n , S_n y U_n son definidos por las recurrencias de las fórmulas II.32.

La sucesión $m_n(t)$ satisface, para todo $h \in D(A)$, la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \text{II.40} \quad & \langle m_n(t), y \rangle = - \langle m_n(t), (A - BG^{-1} B^* S_{n-1}(t)) y \rangle + \langle F(t)h, y \rangle \\ & + \langle (S_n(t) - S_{n-1}(t)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(t), y \rangle \end{aligned}$$

con $m_n(t_1) = -Kh$, para todo n

y para $n \rightarrow \infty$ converge fuertemente a $m(t)$.

En efecto; por aplicación del teorema 3 de la lista de teoremas generales a II.39.2. tenemos que

$$\begin{aligned} \langle m_n(t), y \rangle &= \langle (A^* - S_{n-1}(t) BG^{-1} B^*(t)) U_n^*(t_1, t) Kh, y \rangle + \\ &+ \int_t^{t_1} \langle (A^* - S_{n-1}(t) BG^{-1} B^*(t)) U_n^*(s, t) \left[F(s)h + \right. \\ &\quad \left. + (S_n(s) - S_{n-1}(s)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(s) \right], y \rangle ds \\ &+ \langle F(t)h + (S_n(t) - S_{n-1}(t)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(t), y \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle U_n^*(t_1, t) K h, (A - BG^{-1} B^* S_{n-1}(t)) y \rangle + \\
&+ \int_t^{t_1} \langle U_n^*(s, t) [F(s)h + (S_n(s) - S_{n-1}(s)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(s)], (A - BG^{-1} B^* S_{n-1}(t)) y \rangle ds \\
&+ \langle F(t)h, y \rangle + \langle (S_n(t) - S_{n-1}(t)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(t), y \rangle = \\
&= - \langle -U_n^*(T_1, t) K h - \int_t^{t_1} U_n^*(s, t) [F(s)h + (S_n(s) - S_{n-1}(s)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(s)], \\
&\quad (A - BG^{-1} B^* S_{n-1}(t)) y \rangle ds + \\
&+ \langle F(t)h, y \rangle + \langle (S_n(t) - S_{n-1}(t)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(t), y \rangle = \\
&= - \langle m_n(t), (A - BG^{-1} B^* S_{n-1}(t)) y \rangle + \langle F(t)h, y \rangle + \\
&+ \langle (S_n(t) - S_{n-1}(t)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(t), y \rangle
\end{aligned}$$

tal como se quería demostrar. La condición $m_n(t_1) = -Kh$ se obtiene por evaluación inmediata sobre II.39.2

De las propiedades deducidas por Curtain y Pritchard para $S_n(t)$ y $U_n(s, t)$, entre las que se encuentra las de ser uniformemente acotados en norma en n , deducimos de la definición de $m_n(t)$ que éste es también uniformemente acotado para todo $t \in [0, t_1]$. Aplicando entonces el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para $n \rightarrow \infty$ obtenemos la convergencia fuerte de $m_n(t)$ a $m(t)$.

Volvamos de nuevo a la sucesión de sistemas controlados definida por la expresión II.30 para utilizarla en la demostración de la proposición siguiente.

Proposición II.4

Con $z_n(t)$ definido por II.30 se satisfacen las dos relaciones siguientes

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad &\langle z_n(t), S_n(t) z_n(t) \rangle = \langle z_n(t_1), K z_n(t_1) \rangle + \int_t^{t_1} \langle z_n(s), F_n(s) z_n(s) \rangle ds \\
&- 2 \int_t^{t_1} \langle z_n(s), S_n(s) B (\bar{u}(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) \rangle ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \langle z_n(t), m_n(t) \rangle &= - \langle z_n(t_1), Kh \rangle - \int_t^{t_1} \langle B(\bar{u}(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), m_n(s) \rangle ds \\
 &- \int_t^{t_1} \langle z_n(s), F(s)h + (S_n(s) - S_{n-1}(s)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(s) \rangle ds
 \end{aligned}$$

La relación (a) es inmediata pues es la particularización de II.34 al sistema II.30.

La relación (b) la probaremos substituyendo los elementos del primer miembro por las expresiones II.30 y II.39.1. respectivamente.

Resultará así

$$\begin{aligned}
 \langle z_n(t), m_n(t) \rangle &= \langle U_n(t,0) z_0 + \int_0^t U_n(t,s) B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds, \\
 &- U_n^*(t_1,t) Kh - \int_t^{t_1} U_n^*(r,t) [F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(r)] dr \rangle = \\
 &= - \langle U_n(t,0) z_0, U_n^*(t_1,t) Kh \rangle \\
 &- \int_0^t \langle U_n(t,s) B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), U_n^*(t_1,t) Kh \rangle ds \\
 &- \langle U_n(t,0) z_0, \int_t^{t_1} U_n^*(r,t) [F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(r)] dr \rangle \\
 &- \langle \int_0^t U_n(t,s) B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds, \\
 &\quad \int_0^{t_1} U_n^*(r,t) [F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) BG^{-1} B^* m_{n-1}(r)] dr \rangle \\
 &= - \langle U_n(t_1,0) z_0 + \int_0^{t_1} U_n(t_1,s) B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds, Kh \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\langle \int_t^{t_1} U_n(t_1, s) B(s) (\tilde{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds, -Kh \right\rangle \\
& - \int_t^{t_1} \left\langle U_n(r, 0) z_0, F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \right\rangle dr \\
& - \int_t^{t_1} \left\langle \int_0^r U_n(r, s) B(s) (u_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds, F(r)h + \right. \\
& \quad \left. + (S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \right\rangle dr \\
& + \int_t^{t_1} \left\langle \int_t^r U_n(r, s) B(s) (\tilde{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds, \right. \\
& \quad \left. F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \right\rangle dr = \\
& = - \left\langle z_n(t_1), Kh \right\rangle \\
& - \int_t^{t_1} \left\langle U_n(r, 0) z_0 + \int_0^r U_n(r, s) B(s) (\tilde{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)) ds, \right. \\
& \quad \left. F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \right\rangle dr \\
& - \int_t^{t_1} \left\langle B(s) (u_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), -U_n^*(t_1, s) Kh \right\rangle ds \\
& - \int_t^{t_1} \int_t^r \left\langle B(s) (\tilde{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), \right. \\
& \quad \left. -U_n^*(r, s) \left[F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \right] \right\rangle ds dr = \\
& = - \left\langle z_n(t_1), Kh \right\rangle - \int_t^{t_1} \left\langle z_n(r), F(r)h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \right\rangle dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_t^{t_1} \langle B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), -U_n^*(t_1, s) K h \rangle ds \\
& - \int_t^{t_1} \langle B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), - \int_s^{t_1} U_n^*(r, s) [F(r) h + \\
& \quad + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r)] dr \rangle ds = \\
& = - \langle z_n(t_1), K h \rangle - \int_t^{t_1} \langle z_n(r), F(r) h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \rangle dr \\
& - \int_t^{t_1} \langle B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), - U_n^*(t_1, s) K h - \\
& \quad \int_s^{t_1} U_n^*(r, s) [F(r) h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r)] dr \rangle ds = \\
& = - \langle z_n(t_1), K h \rangle - \int_t^{t_1} \langle z_n(r), F(r) h + (S_n(r) - S_{n-1}(r)) B G^{-1} B^* m_{n-1}(r) \rangle dr \\
& - \int_t^{t_1} \langle B(s) (\bar{u}_n(s) - G^{-1} B^* m_{n-1}(s)), m_n(s) \rangle ds
\end{aligned}$$

tal como se quería demostrar. En particular y cuando $n \rightarrow \infty$, como

$$u_n(t) \longrightarrow -G^{-1} B^* (S(t) z(t) + m(t))$$

si tomamos como entrada este valor límite, tendremos $\bar{u}_n(t) = 0$ y las expresiones (a) y (b), para $t = 0$, toman en el límite los valores

$$\begin{aligned}
\text{II.41} \quad \langle z_0, S(0) z_0 \rangle & = \langle z(t_1), K z(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z(s), (F + S B G^{-1} B^* S(s)) z(s) \rangle ds \\
& + 2 \int_0^{t_1} \langle z(s), S(s) B G^{-1} B^* m(s) \rangle ds
\end{aligned}$$

$$\text{II.42} \quad \langle z_0, m(0) \rangle = - \langle z(t_1), Kh \rangle + \int_0^{t_1} \langle BG^{-1}B^*m(s), m(s) \rangle ds \\ - \int_0^{t_1} \langle z(s), F(s)h \rangle ds$$

Proposición II.5

El coste mínimo para la ley de control óptima

$$u^0(t) = -G^{-1}B^*(S(t)z(t) + m(t))$$

viene dado por

$$\text{II.43} \quad W(u^0; z_0) = \langle h, Kh \rangle + \int_0^{t_1} \langle h, F(s)h \rangle ds + \langle z_0, S(0)z_0 \rangle +$$

$$+ 2 \langle z_0, m(0) \rangle - \int_0^{t_1} \langle m(s), BG^{-1}B^*m(s) \rangle ds$$

En efecto:

$$W(u^0; z_0) = \langle h-z(t_1), K(h-z(t_1)) \rangle + \int_0^{t_1} \langle h-z(s), F(s)(h-z(s)) \rangle ds$$

$$+ \int_0^{t_1} \langle G^{-1}B^*S(s)z(s) + G^{-1}B^*m(s), B^*S(s)z(s) + B^*m(s) \rangle ds$$

$$= \langle h, Kh \rangle + \int_0^{t_1} \langle h, F(s)h \rangle ds +$$

$$+ \int_0^{t_1} \langle G^{-1}B^*m(s), B^*m(s) \rangle ds - 2 \langle h, Kz(t_1) \rangle - 2 \int_0^{t_1} \langle h, F(s)z(s) \rangle ds +$$

$$+ 2 \int_0^{t_1} \langle z(s), SBG^{-1}B^*m(s) \rangle ds + \langle z(t_1), Kz(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z(s), F(s)z(s) \rangle ds +$$

$$+ \int_0^{t_1} \langle G^{-1}B^*S(s)z(s), B^*S(s)z(s) \rangle ds = \langle h, Kh \rangle + \int_0^{t_1} \langle h, F(s)h \rangle ds -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{t_1} \langle m(s), BG^{-1}B^* m(s) \rangle ds + 2 \left[- \langle h, Kz(t_1) \rangle - \right. \\
& - \int_0^{t_1} \langle h, F(s) z(s) \rangle ds + \int_0^{t_1} \langle BG^{-1}B^* m(s), m(s) \rangle ds \left. \right] \\
& + \langle z(t_1), Kz(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z(s), (F(s) + SBG^{-1}B^*S(s))z(s) \rangle ds + \\
& + 2 \int_0^{t_1} \langle z(s), S(s)BG^{-1}B^* m(s) \rangle ds \\
& = \langle h, Kh \rangle + \int_0^{t_1} \langle h, F(s)h \rangle ds - \int_0^{t_1} \langle m(s), BG^{-1}B^* m(s) \rangle ds \\
& + 2 \langle z_0, m(0) \rangle + \langle z_0, S(0) z_0 \rangle
\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Vamos por último a establecer en cuanto se incrementa este coste mínimo cuando en vez de la ley de control óptima u^0 alimentamos el sistema con la entrada

$$\bar{u}(t) = u^0(t) + u(t)$$

A tal efecto adoptaremos la siguiente notación

$$z(t) = U(t,0) z_0$$

$$z^0(t) = z(t) - \int_0^t U(t,s) BG^{-1} B^* m(s) ds$$

$$\bar{z}(t) = z^0(t) + \int_0^t U(t,s) Bu(s) ds$$

para las salidas de los sistemas cerrados, abierto con alimentación dada por la ley de control óptima y abierto con alimentación regida por la entrada $\bar{u}(t)$ respectivamente.

Proposición II.6

$$\text{II.44} \quad W(u^0+u; z_0) - W(u^0; z_0) = \int_0^{t_1} \langle u(s), Gu(s) \rangle ds$$

En efecto; designemos por $D(u; z_0)$ al primer miembro de II.44.

Se tiene

$$\begin{aligned} D(u; z_0) &= \langle h - \bar{z}(t_1), K(h - \bar{z}(t_1)) \rangle + \int_0^{t_1} \langle h - \bar{z}(s), F(h - \bar{z}(s)) \rangle ds + \\ &+ \int_0^{t_1} \langle -G^{-1}B^*(S(s)\bar{z}(s)+m(s))+u(s), -B^*(S(s)\bar{z}(s)+m(s)) + Gu(s) \rangle ds \\ &- \langle h - z^0(t_1), K(h - z^0(t_1)) \rangle - \int_0^{t_1} \langle h - z^0(s), F(h - z^0(s)) \rangle ds - \\ &- \int_0^{t_1} \langle -G^{-1}B^*(S(s)z^0(s)+m(s)), -B^*(S(s)z^0(s)+m(s)) \rangle ds \\ &= \langle \int_0^{t_1} U(t_1, s) Bu(s) ds, K \int_0^{t_1} U(t_1, s) Bu(s) ds \rangle \\ &- 2 \langle K(h - z^0(t_1)), \int_0^{t_1} U(t_1, s) Bu(s) ds \rangle \\ &+ \int_0^{t_1} \langle \int_0^s U(s, r) Bu(r) dr, F \int_0^s U(s, r) Bu(r) dr \rangle ds \\ &- 2 \int_0^{t_1} \langle F(h - z^0(s)), \int_0^s U(s, r) Bu(r) dr \rangle ds \\ &+ \int_0^{t_1} \langle G^{-1}B^*S(s) \int_0^s U(s, r) Bu(r) dr, B^*S(s) \int_0^s U(s, r) Bu(r) dr \rangle ds \\ &+ 2 \int_0^{t_1} \langle G^{-1}B^*(S(s)z^0(s)+m(s)), B^*S(s) \int_0^s U(s, r) Bu(r) dr \rangle ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \int_0^{t_1} \langle B^*(S(s) z^0(s) + m(s)), u(s) \rangle ds \\
& - 2 \int_0^{t_1} \langle B^*S(s) \int_0^s U(s,r) Bu(r) dr, u(s) \rangle ds \\
& + \int_0^{t_1} \langle u(s), Gu(s) \rangle ds
\end{aligned}$$

Ahora bien, consideremos la suma de los términos primero, tercero y quinto. Dicha suma es igual a

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \langle U(t_1,s) Bu(s), KU(t_1,r) Bu(r) \rangle dr ds + \\
& + \int_0^{t_1} \langle \int_0^s U(s,r) Bu(r) dr, (F+SBG^{-1}B^*S(s)) \int_0^s U(s,r) Bu(r) dr \rangle ds = \\
& = 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \langle U(t_1,s) Bu(s), KU(t_1,r) Bu(r) \rangle dr ds + \\
& + 2 \int_0^{t_1} \int_0^s \langle U(s,r) Bu(r), \int_r^s (F+SBG^{-1}B^*S(s)) U(s,w) Bu(w) dw \rangle dr ds = \\
& = 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \langle U(t_1,s) Bu(s), KU(t_1,r) Bu(r) \rangle dr ds + \\
& + 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \int_r^{t_1} \langle U(w,s) Bu(s), (F+S(w)BG^{-1}B^*S(w)) U(w,r) Bu(r) \rangle dw dr ds = \\
& = 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \langle U(r,s) Bu(s), U^*(t_1,r) KU(t_1,r) Bu(r) \rangle dr ds \\
& + 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \langle U(r,s) Bu(s), \int_r^{t_1} U^*(w,r) (F+S(w)BG^{-1}B^*S(w)) U(w,r) Bu(r) dw \rangle dr ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \langle U(r,s) Bu(s), U^*(t_1,r) K U(t_1,r) Bu(r) \\
&\quad + \int_r^{t_1} U^*(w,r) (F+S(w) B G^{-1} B^* S(w)) U(w,r) Bu(r) dw \rangle dr ds \\
&= 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \langle U(r,s) Bu(s), S(r) Bu(r) \rangle dr ds \\
&= 2 \int_0^{t_1} \int_s^{t_1} \langle B^* S(r) U(r,s) Bu(s), u(r) \rangle dr ds \\
&= 2 \int_0^{t_1} \int_0^s \langle B^* S(s) U(s,r) Bu(r), u(s) \rangle dr ds \\
&= 2 \int_0^{t_1} \langle B^* S(s) \int_0^s U(s,r) Bu(r) dr, u(s) \rangle ds
\end{aligned}$$

expresión que se anula al sumarla con el noveno sumando de $D(u, z_0)$. Así, la expresión de $D(u, z_0)$ queda reducida a

$$\begin{aligned}
D(u, z_0) = & - 2 \langle K(h-z^0(t_1)), \int_0^{t_1} U(t_1,s) Bu(s) ds \rangle \\
& - 2 \int_0^{t_1} \langle F(h-z^0(s)), \int_0^s U(s,r) Bu(r) dr \rangle ds \\
& - 2 \int_0^{t_1} \langle B^* (S(s) z^0(s) + m(s)), u(s) \rangle ds \\
& + 2 \int_0^{t_1} \langle B^* (S(s) z^0(s) + m(s)), G^{-1} B^* S(s) \int_0^s U(s,r) Bu(r) dr \rangle ds \\
& + \int_0^{t_1} \langle u(s), Gu(s) \rangle ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{t_1} \langle B^* (-U^*(t_1, s) K h - \int_s^{t_1} U^*(r, s) F h \, dr), u(s) \rangle \, ds \\
&+ 2 \int_0^{t_1} \langle B^* (U^*(t_1, s) K z^0(t_1) + \int_s^{t_1} U^*(r, s) (F + S(r) B G^{-1} B^* S(r)) z^0(r) \, dr), u(s) \rangle \, ds \\
&- 2 \int_0^{t_1} \langle B^* m(s), u(s) \rangle \, ds - 2 \int_0^{t_1} \langle B^* S(s) z^0(s), u(s) \rangle \, ds \\
&+ 2 \int_0^{t_1} \langle \int_s^{t_1} B^* U^*(r, s) S(r) B G^{-1} B^* m(r) \, dr, u(s) \rangle \, ds \\
&+ \int_0^{t_1} \langle u(s), G u(s) \rangle \, ds \\
&= 2 \int_0^{t_1} \langle B^* m(s), u(s) \rangle \, ds \\
&- 2 \int_0^{t_1} \langle B^* \left\{ U^*(t_1, s) K \int_0^{t_1} U(t_1, r) B G^{-1} B^* m(r) \, dr + \right. \\
&+ \left. \int_s^{t_1} U^*(r, s) (F + S(r) B G^{-1} B^* S(r)) \left[\int_0^r U(r, w) B G^{-1} B^* m(w) \, dw \right] \, dr \right\}, u(s) \rangle \, ds \\
&- 2 \int_0^{t_1} \langle B^* m(s), u(s) \rangle \, ds \\
&+ 2 \int_0^{t_1} \langle B^* S(s) \int_0^s U(s, r) B G^{-1} B^* m(r) \, dr, u(s) \rangle \, ds \\
&+ 2 \int_0^{t_1} \langle \int_s^{t_1} B^* U^*(r, s) S(r) B G^{-1} B^* m(r) \, dr, u(s) \rangle \, ds \\
&+ \int_0^{t_1} \langle u(s), G u(s) \rangle \, ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \int_0^{t_1} \langle B^* \left\{ U^*(t_1, s) K U(t_1, s) \int_0^s U(s, r) B G^{-1} B^* m(r) dr + \right. \\
&+ \left. \int_s^{t_1} U^*(r, s) (F + S(r) B G^{-1} B^* S(r)) \left[\int_0^r U(r, w) B G^{-1} B^* m(w) dw \right] dr \right\}, u(s) \rangle ds \\
&+ 2 \int_0^{t_1} \langle B^* S(s) \int_0^s U(s, r) B G^{-1} B^* m(r) dr, u(s) \rangle ds \\
&+ 2 \int_0^{t_1} \langle B^* \int_s^{t_1} U^*(r, s) S(r) B G^{-1} B^* m(r) dr, u(s) \rangle ds \\
&+ \int_0^{t_1} \langle u(s), G u(s) \rangle ds = \\
&= -2 \int_0^{t_1} \langle B^* S(s) \int_0^s U(s, r) B G^{-1} B^* m(r) dr, u(s) \rangle ds \\
&+ 2 \int_0^{t_1} \langle B^* \int_0^s S(s) U(s, r) B G^{-1} B^* m(r) dr, u(s) \rangle ds \\
&+ \int_0^{t_1} \langle u(s), G u(s) \rangle ds = \\
&= \int_0^{t_1} \langle u(s), G u(s) \rangle ds
\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Con la demostración de esta proposición queda completada la del teorema-base de este capítulo, pasando a continuación a analizar un método para determinar $S(t)$ y $m(t)$ en un caso particular pero íntimamente conectado con el problema propuesto.

2.3.- Determinación de $S(t)$ y $m(t)$ en el caso de que el generador A sea autoadjunto con autovalores de espectro simple.

Vamos a basarnos en el teorema 7 de la lista para determinar $S(t)$ a partir de la ecuación II.18 en el supuesto de que los autovalores de A son simples. Designaremos por g_n a la autofunción asociada a λ_n

Tendremos entonces que

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, g_n \rangle g_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n g_n \text{ con } y_n = \langle y, g_n \rangle$$

y por otro lado

$$S(t) g_n = \sum_{m=1}^{\infty} \langle S(t) g_n, g_m \rangle g_m = \sum_{m=1}^{\infty} s_{nm}(t) g_m$$

por lo que, supuestos posibles todos los desarrollos, se tiene

$$\text{II.45} \quad S(t) y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n S(t) g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_n s_{nm}(t) g_m$$

Como $A g_n = \lambda_n g_n$ y A es autoadjunto, la ecuación II.18 puede expresarse

$$\text{II.46} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \frac{d}{dt} S(t) y, w \rangle + \langle A S(t) y, w \rangle + \langle S(t) A y, w \rangle + \langle F y, w \rangle = \\ \quad \quad \quad = \langle S(t) B G^{-1} B^* S(t) y, w \rangle \\ S(t_1) = K \end{array} \right.$$

Pero dado que se cumplen las relaciones

$$\text{II.47.1. } A S(t) y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_n s_{nm}(t) \lambda_m g_m$$

$$\text{II.47.2. } S(t) A y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_n s_{nm}(t) \lambda_n g_m$$

$$\text{II.47.3. } Fy = F \sum_{n=1}^{\infty} y_n g_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n Fg_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_n \langle Fg_n, g_m \rangle g_m$$

$$\text{II.47.4. } S(t) B G^{-1} B^* S(t) y = S(t) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_n s_{ni}(t) B G^{-1} B^* g_i =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_n s_{ni}(t) S(t) B G^{-1} B^* g_i =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_n s_{ni}(t) S(t) \sum_{k=1}^{\infty} \langle B G^{-1} B^* g_i, g_k \rangle g_k =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_n s_{ni}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \langle B G^{-1} B^* g_i, g_k \rangle S(t) g_k =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_n s_{ni}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \langle B G^{-1} B^* g_i, g_k \rangle \cdot$$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} s_{km}(t) g_m \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} s_{ni}(t) s_{km}(t) \langle B G^{-1} B^* g_i, g_k \rangle \right) g_m$$

$$\text{II.47.5.} \quad S(t_1) y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_n s_{nm}(t_1) g_m = K y$$

$$K y = \sum_{n=1}^{\infty} v_n K g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_n \langle K g_n, g_m \rangle g_m$$

y teniendo en cuenta la unicidad de los desarrollos en serie de Fourier, la ecuación II.46 puede substituirse por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\text{II.48} \quad \begin{cases} \dot{s}_{nm}(t) + (\lambda_m + \lambda_n) s_{nm}(t) + \langle F g_n, g_m \rangle - a_{nm}(t) = 0 \\ s_{nm}(t_1) = \langle K g_n, g_m \rangle \end{cases}$$

donde $n, m = 1, 2, 3, \dots$ y

$$a_{nm}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} s_{ni}(t) s_{km}(t) \langle B G^{-1} B^* g_i, g_k \rangle$$

De forma similar para determinar $m(t)$ comenzaremos por expresar la relación II.36 en la forma

$$\text{II.36.1.} \quad \begin{cases} \dot{m}(t) = - (A - S(t) B G^{-1} B^*) m(t) + F h \\ m(t_1) = - K h \end{cases}$$

basándonos en el carácter autoadjunto de A . Supuesto que $m(t)$ es desarrollable en serie de Fourier

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle m(t), g_n \rangle g_n = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) g_n$$

y dado que se tienen las relaciones

$$\text{II.49.1.} \quad A m(t) = A \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n(t) g_n,$$

$$\begin{aligned} \text{II.49.2.} \quad S(t) B G^{-1} B^* m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle S(t) B G^{-1} B^* m(t), g_n \rangle g_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle m(t), B G^{-1} B^* S(t) g_n \rangle g_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle m(t), B G^{-1} B^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_{nk}(t) g_k \right) \rangle g_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B G^{-1} B^* s_{nk}(t) \langle m(t), g_k \rangle g_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B G^{-1} B^* s_{nk}(t) m_k(t) g_n \end{aligned}$$

y

$$\text{II.49.3.} \quad F h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F h, g_n \rangle g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, F g_n \rangle g_n$$

podemos, en virtud de la unicidad del desarrollo de Fourier en términos del sistema ortonormal $\{g_n\}$, establecer un sistema de ecuaciones diferenciales para los coeficientes de Fourier del desarrollo de $m(t)$, en las que la condición para $t = t_1$ se obtiene de la relación

$$\begin{aligned} \text{II.49.4} \quad m(t_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t_1) g_n = -Kh = - \sum_{n=1}^{\infty} \langle Kh, g_n \rangle g_n = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, K g_n \rangle g_n \end{aligned}$$

y el sistema de ecuaciones antes citado es

$$\text{II.50} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_n(t) = -\lambda_n m_n(t) + \sum_{k=1}^{\infty} B G^{-1} B^* s_{nk}(t) m_k(t) + \langle h, F g_n \rangle \\ m_n(t_1) = -\langle h, K g_n \rangle \end{array} \right.$$

2.4. Controlabilidad y observabilidad del sistema

Resulta importante también estudiar la posibilidad de poder dirigir el sistema hacia cualquier situación final que se proponga como objetivo, ésto es, analizar la controlabilidad del sistema.

Esto es importante desde el punto de vista de no proponer como objetivo una situación inalcanzable lo que, si bien es una práctica habitual de los políticos, no parece admisible desde el punto de vista de nuestro modelo.

En la teoría del control finito-dimensional, caracterizado por la utilización de operadores acotados, los conceptos de controlabilidad, observabilidad y estabilidad son desarrollados por métodos propios del Algebra, con los cuales se obtenían unos resultados tan sencillos e intuitivos como espectaculares.

Para sistemas distribuidos, ésto es, regidos por ecuaciones diferenciales surgen serias complicaciones debidas a la aparición de operadores no acotados. En el caso concreto de la controlabilidad del sistema, ésto significa que el sistema no puede ser dirigido hacia todo $h \in H$ en el sentido estricto implicado por el concepto de controlabilidad definido para sistemas finito-dimensionales; éllo ha obligado a la introducción de diversos conceptos de controlabilidad, de los cuales nos interesan los conocidos como controlabilidad exacta, que coincide en esencia con el concepto de controlabilidad finito-dimensional, y el de controlabilidad aproximada (ver (9))

Así, diremos que el sistema forzado

$$\text{II.51} \quad \dot{z} = Az + Bu \quad , \quad z(0) = z_0$$

donde los operadores y sus correspondientes dominios son los definidos al comienzo de esta parte, es **exactamente controlable** sobre $[0, t_1]$ si, para cualesquiera $z_0, z_1 \in H$, existe $u \in L^2([0, t_1], E)$ tal que

$$\text{II.52} \quad z_1 = z(t_1) = T_{t_1} z_0 + \int_0^{t_1} T_{t_1-s} B u(s) ds$$

Observemos entonces en II.52 que $T_{t_1} z_0$ es un elemento de H , por lo que para que exista controlabilidad exacta es necesario que

$$\text{rango} \left(\int_0^{t_1} T_{t_1-s} B(\cdot) ds \right) \supset H$$

ya que ésto equivale a decir que todo estado de H es alcanzable utilizando como entrada un control adecuado. Esta condición permite establecer la siguiente proposición

Proposición II.7

El sistema II.51 es exactamente controlable si y solo si existe una constante $\alpha > 0$ tal que, para todo $h \in H$,

$$\text{II.53} \quad \alpha \|B^* T^* h^*\|_{L^2([0, t_1], E)} \geq \|h^*\|_{H^*}$$

En efecto, consideremos que

$$R(\cdot) = \int_0^{t_1} T_{t_1-s} B(\cdot) ds$$

es un operador de $L^2([0, t_1], E)$ en H que es inyectivo. Por tanto R^{-1} es un operador definido entre

$$\text{rango}(R) \longrightarrow L^2([0, t_1], E)$$

Como además R es cerrado, R^{-1} también lo es y, por tanto, es acotado ([4]).

Esto significa que el adjunto de R^{-1} también lo es y, en consecuencia, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\text{II.54} \quad \|(R^{-1})^* x^*\|_{H^*} \leq \alpha \|x^*\|_{(L^2([0, t_1], E))^*}, \quad \forall x^* \in (L^2([0, t_1], E))^*$$

donde

$$(L^2([0, t_1], E))^* = L^2([0, t_1], E^*)$$

Sean entonces $h^* \in H^*$ y $x^* = R^*h^*$. Para todo $k \in H$ se cumplirá

$$\begin{aligned} \langle (R^{-1})^*x^*, k \rangle_{H^*, H} &= \langle (R^{-1})^*R^*h^*, k \rangle_{H^*, H} = \\ &= \langle R^*h^*, R^{-1}k \rangle_{L^2([0, t_1], R^*), L^2([0, t_1], E)} = \\ &= \langle h^*, RR^{-1}k \rangle_{H^*, H} = \langle h^*, k \rangle_{H^*, H} \end{aligned}$$

y por tanto II.54 se transforma en

$$\text{II.55} \quad \|h^*\|_{H^*} \leq a \|R^*h^*\|_{L^2([0, t_1], E^*)}$$

Por otro lado, (([15]) y ([16])), sabemos que T_t^* es un semigrupo fuertemente continuo definido sobre H^* por lo que, para todo $u \in E$,

$$\begin{aligned} \langle h^*, Ru \rangle_{H^*, H} &= \langle h^*, \int_0^{t_1} T_{t_1-s} Bu(s) ds \rangle_{H^*, H} = \\ &= \int_0^{t_1} \langle B^*T_{t_1-s}h^*, u(s) \rangle_{E^*, E} ds = \langle R^*h^*, u \rangle_{E^*, E} \end{aligned}$$

es decir, $R^*h^* = B^*T_{t_1-s}^* h^*$ y II.55 se convierte en

$$\|h^*\|_{H^*} \leq a \|B^*T_{t_1-s}^* h^*\|_{L^2([0, t_1], E^*)}$$

que era la condición buscada. El carácter suficiente de la condición se prueba volviendo paso a paso hacia atrás sobre la demostración anterior.

Por otro lado se dice que el sistema II.51 es **aproximadamente controlable** sobre $[0, t_1]$ si, para todo $z_1 \in H$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe un control $u \in L^2([0, t_1], E)$ tal que

$$\|z(t_1) - z_1\|_H \leq \epsilon$$

es decir, es posible "acercarnos" a z_1 tanto como queramos aunque no llegemos a "alcanzarla". Esto significa que

$$\overline{\text{rango } R} = H$$

Ahora bien, en virtud del teorema 8 de la lista ésto significa que

$$\text{Ker } (R^*) = 0$$

y en función de la proposición anterior podemos establecer como condición necesaria y suficiente para la controlabilidad aproximada el que sobre $[0, t_1]$

$$B^* T_t^* h^* = 0 \Rightarrow h^* = 0$$

Por lo que respecta a la observabilidad también se introducen nuevos conceptos en forma análoga a como se hace para la controlabilidad para que, utilizando la dualidad entre controlabilidad y observabilidad, pueda establecerse una en función de la otra. Supongamos a tal efecto que nuestro sistema no es directamente observable sino a través de un espacio Y de salida, que supondremos es también un espacio de Hilbert, por medio de un operador $C \in L(H, Y)$. Es decir, la dinámica del sistema viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu, & z(0) &= z_0 \\ y &= Cz \end{aligned} \quad \text{II.56}$$

y al sistema lo representaremos por (A, B, C) . Se llama sistema dual del anterior al definido por la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^* x + C^* v, & x(0) &= x_0 \\ w &= B^* x \end{aligned}$$

y lo representaremos por (A^*, B^*, C^*) . Triggiani, en (9), considera cuatro conceptos de observabilidad y ha probado que

- (A, B, C) es inicialmente observable si y solo si (A^*, C^*, B^*) es aproximadamente controlable. Utilizando la proposición II.8 esto equivale a establecer que

$$\text{Ker } (C T_t) = 0$$

- (A, B, C) es inicialmente observable con continuidad si y solo si (A^*, C^*, B^*) es exactamente controlable; es decir, si existe $a > 0$ tal que

$$\|h\|_H \leq a \|C T_{t_1-s} h\|_{L^2([0, t_1], E)}$$

2.5. Simulación del sistema

Como ya se indicó en el apartado anterior, en muchas ocasiones, el estado del sistema solo se conoce a través de un espacio de salida Y , de forma que el sistema es gobernado por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bu, & z(0) &= z_0 \\ y &= Cz\end{aligned}$$

Si (A, B, C) es observable y z_0 es conocido podemos, a partir de la salida observada, determinar con ayuda de un operador de reconstrucción continuo el estado $z(t)$ del sistema, pero si z_0 no es conocido, es imposible semejante alternativa. No obstante podemos simular el funcionamiento del sistema dado analizando otro sistema, gobernado por la misma dinámica, pero del que conozcamos su situación inicial, es decir,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + Bu \\ \hat{y} &= C\hat{z}\end{aligned}$$

con $\hat{z}(0)$ conocido. Si utilizamos $\hat{z}(t)$ para estimar $z(t)$ cometeremos un error

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

que satisface la ecuación

$$\dot{e}(t) = A e(t)$$

o lo que es igual

$$e(t) = T_t e(0)$$

por lo que la magnitud del error aumentará o no en función de la naturaleza del semigrupo T_t sobre el que no podemos ejercer ningún control. Si el semigrupo es tal que todos sus autovalores tienen parte real negativa, el error decrecerá exponencialmente y el modelo será cada vez mejor. Si no es así, podríamos intentar aprovechar la salida \hat{y} para compararla con la salida y , de la cual disponemos, utilizando la diferencia $(y - \hat{y})$ como término corrector en una retroalimentación por medio de un operador N adecuado, tal como se refleja en el diagrama de bloques, de la figura II.2, que corresponde a un sistema en bucle cerrado definido por

$$\begin{aligned}\text{II.57} \quad \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + N(y - \hat{y}) + Bu \\ \hat{y} &= C\hat{z}\end{aligned}$$

donde el error vendrá gobernado por

$$\dot{e} = (A - NC) e$$

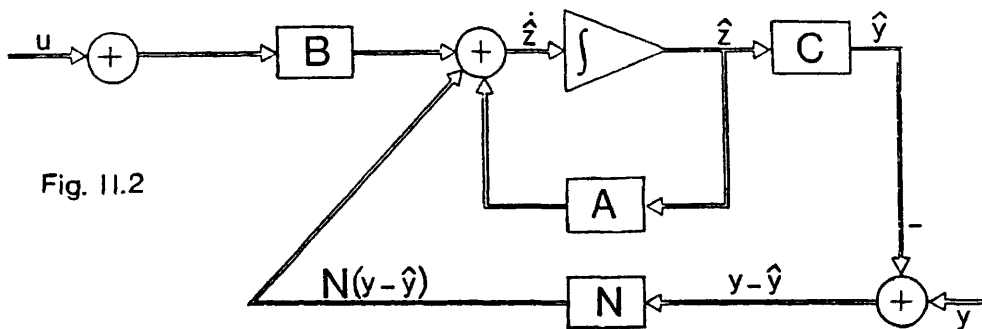


Fig. II.2

dependiendo su evolución de la naturaleza del operador $(A-NC)$. Si podemos encontrar un operador N tal que el semigrupo asociado a $(A-NC)$ tenga sus autovalores con parte real negativa tendremos un estimador cada vez más preciso y ello sucederá si el sistema

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Cu$$

es exponencialmente estabilizable y el operador C admite inverso. Supuesto ésto, tenemos el diagrama de un estimador asintótico de estados u observador descrito en la figura II.3.

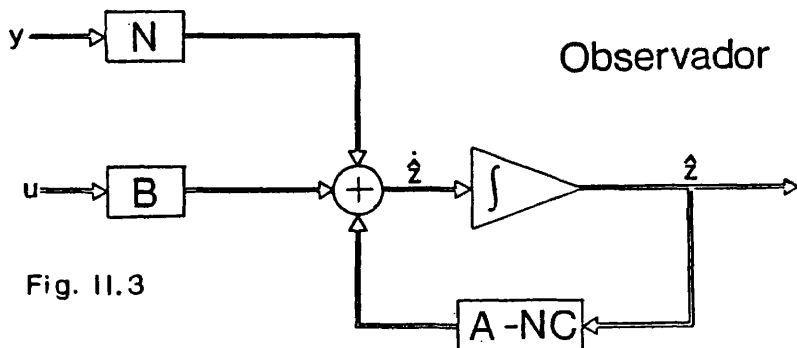


Fig. II.3

Si el sistema (A,B,C) es observable, a partir de la salida \hat{y} del simulador, y dado que conocemos su estado inicial, podemos determinar su estado $\hat{z}(t)$ y observar $z(t)$ con precisión creciente con el tiempo.

En el caso de nuestro modelo tenemos, para el control óptimo,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) - BG^{-1}B^* (S(t) z(t) + m(t)) \\ \text{II.58} \quad y(t) &= Cz(t) \end{aligned}$$

o bien

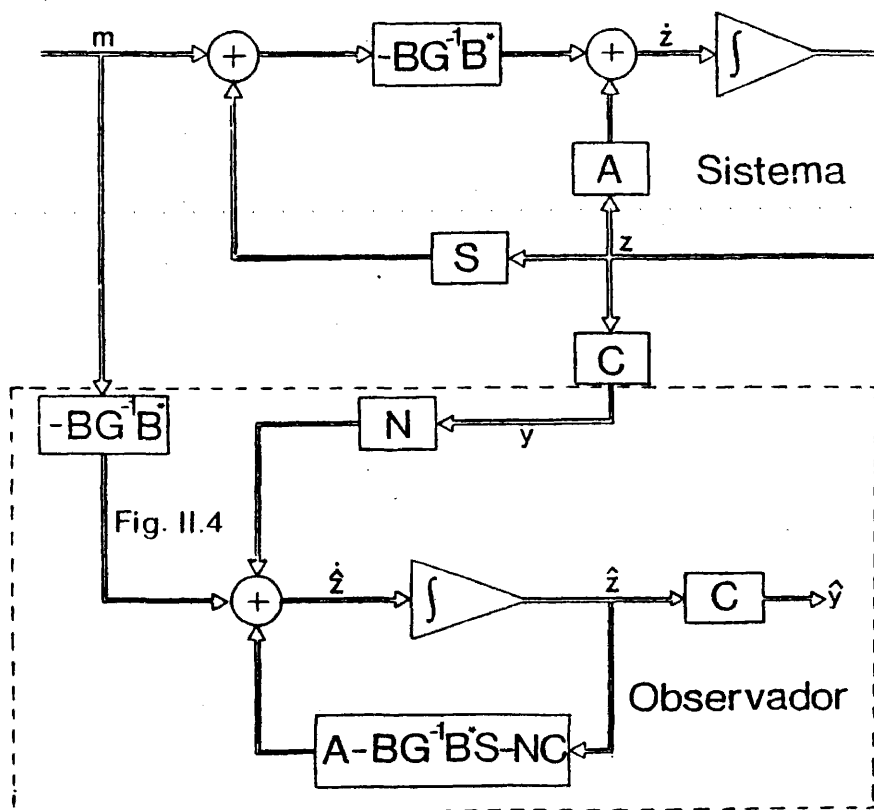
$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A - BG^{-1}B^*S(t)) z(t) - BG^{-1}B^*m(t) \\ y(t) &= Cz(t) \end{aligned}$$

El sistema simulador será entonces

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) &= (A - BG^{-1}B^*S(t)) \hat{z}(t) - BG^{-1}B^*m(t) + N (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \text{II.59} \quad \hat{y}(t) &= C\hat{z}(t) \end{aligned}$$

con $\hat{z}(0) = \hat{z}_0$ conocido, y el funcionamiento del observador vendrá gobernado por la dinámica representada en el diagrama de bloques de la figura II.4.

En la práctica, para llevar a cabo la simulación expuesta precisaremos la utilización de un ordenador analógico, pues la utilización de un digital, al no poder trabajar de forma continua, daría resultados menos fiables.



2.6. Caso de sistemas estables y estabilizables

Aunque desde el punto de vista conceptual el análisis de la estabilidad del sistema es idéntico en los casos finito e infinito-dimensional, vamos a ver una primera generalización de ciertas propiedades bien conocidas de los sistemas finito-dimensionales. A tal efecto, consideremos una vez más el sistema

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bu \\ y &= Cz\end{aligned}$$

Supongamos que, por intentar obtener un operador más manejable que el inicial A o por estabilizar el sistema, caso que éllo sea posible, pretendemos substituir el generador A por otro de más simples propiedades. Si estamos en condiciones de acceder al estado z del sistema, existe entonces un operador K con el que retroalimentar el sistema para conseguir el resultado apetecido que es el clásico de la teoría de la estabilización (figura II.5)

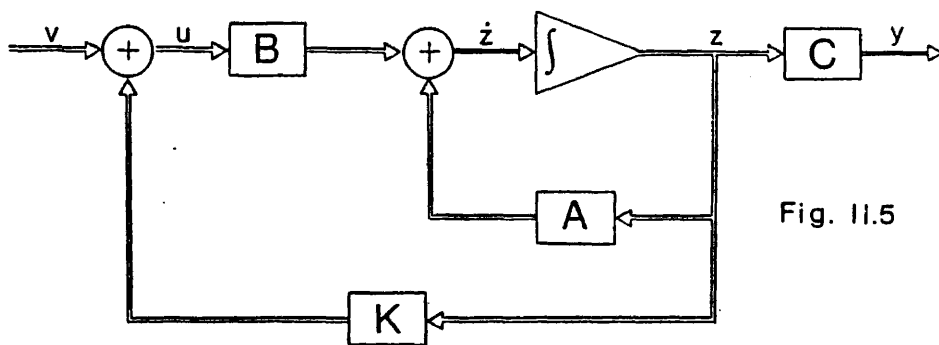


Fig. II.5

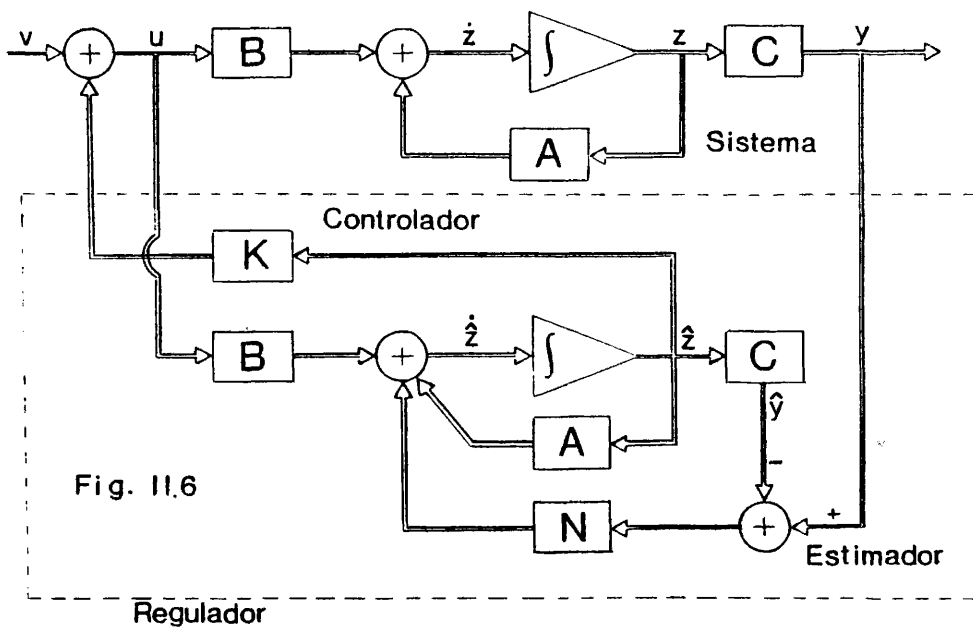
La generalización no aparece tan clara en el caso de que el estado z del sistema no sea conocido o accesible, aunque se puede obtener una aproximación en el caso de que los operadores A y B sean autoadjuntos y positivos y C sea autoadjunto y admita operador inverso. Consiste en diseñar un estimador del tipo visto en el apartado anterior, tal y como se representa en el diagrama de bloques de la figura II.6.

Tenemos así un sistema cuya dinámica viene gobernada por

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + BK\hat{z} + Bv \\ \text{II.60} \quad \dot{\hat{z}} &= NCz + (A - NC + BK)\hat{z} + Bv \\ y &= Cz\end{aligned}$$

Para analizar las propiedades de este sistema consideramos el cambio de variable

$$e = z - \hat{z}$$



donde e representa el error de estimación. Tenemos así un sistema regido por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A+BK)z - BKe + Bv \\ \dot{e} &= (A-NC)e \\ y &= Cz \end{aligned} \quad \text{II.61}$$

cuyo diagrama de bloques viene representado en la figura II.7 en línea gruesa.

El sistema II.61 lo podemos expresar también como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gv \\ w &= Lx \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x &= (z, e) \in H \times H, \quad w = (y, 0) \in H \times H \\ Fx &= ((A+BK)z - BKe, (A-NC)e) \\ Gv &= (Bv, 0) \\ Lx &= (Cz, 0) \end{aligned}$$

Si consideramos que $(A+BK)$, BK y $(A-NC)$ son autoadjuntos y positivos y en $H \times H$ definimos el producto escalar

$$\langle x, s \rangle_{H \times H} = \langle x_1, s_1 \rangle_H + \langle x_2, s_2 \rangle_H$$

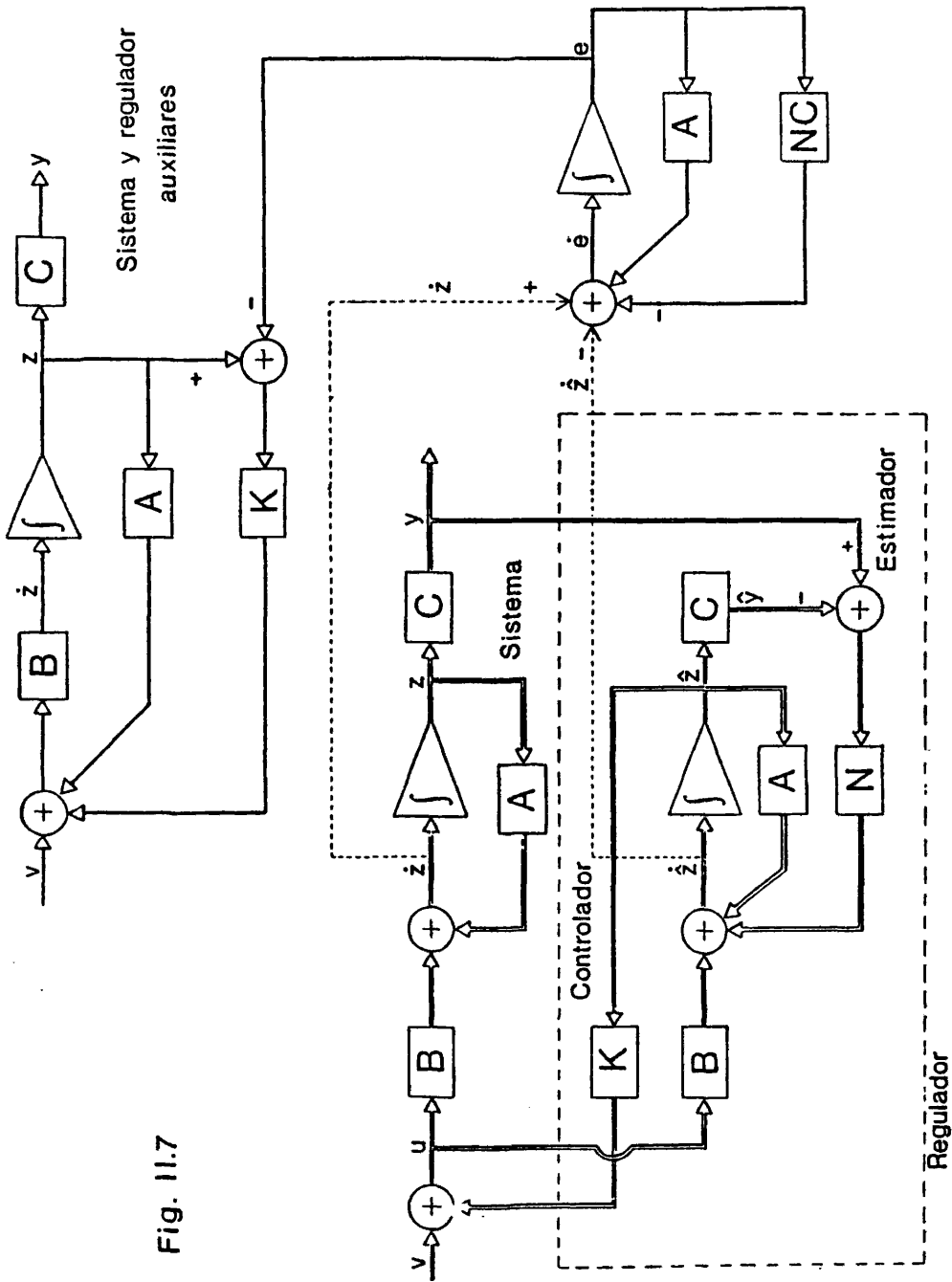


Fig. 11.7

tenemos que, para todo $x = (z, e) \in H \times H$,

$$\langle x, Fx \rangle_{H \times H} \geq c \langle z, z \rangle_H + \langle e, e \rangle_H = c \langle x, x \rangle_{H \times H}$$

donde c es una constante positiva, por lo que F , que es también autoadjunto, genera un semigrupo fuertemente continuo.

Supongamos ahora que z_0 es una autofunción del operador $(A + BK)$, es decir, existe una constante λ_0 tal que

$$(A + BK) z_0 = \lambda_0 z_0$$

Consideremos entonces la función $x_0 = (z_0, 0) \in H \times H$. Tenemos que

$$F x_0 = ((A+BK)z_0, 0) = (\lambda_0 z_0, 0) = \lambda_0 x_0$$

es decir, λ_0 es un autovalor del operador F . Por otro lado si e_0 es una autofunción del operador $(A-NC)$ existe una constante β_0 tal que

$$(A-NC) e_0 = \beta_0 e_0$$

y si consideramos la función

$$w_0 = ((A+BK - \beta_0 I)^{-1} B K e_0, e_0) \in H \times H$$

donde β_0 no es autovalor de $(A+BK)$, lo que siempre puede darse puesto que los operadores K y N de retroalimentación pueden siempre elegirse de forma que satisfagan esa condición, tenemos que

$$F w_0 = F(u_0, e_0) = \beta_0 (u_0, e_0)$$

(donde $u_0 = (A + BK - \beta_0 I)^{-1} B K e_0$), es decir β_0 pertenece también al espectro de F .

Recíprocamente si δ_0 es un autovalor de F pertenece o bien al espectro de $(A+BK)$ o al de $(A-NC)$.

Se obtiene así un resultado intermedio entre la llamada propiedad de separación de los sistemas deterministas, que establece que las dinámicas del observador y controlador son independientes, y el conocido principio de separación de los sistemas estocásticos.

CAPITULO TERCERO

El Modelo Determinista Propuesto
Estudio del Modelo y Tratamiento Numérico

El Modelo Determinista Propuesto
Estudio del Modelo y Tratamiento Numérico

3.1.- Plantenamiento del problema en términos de la teoría de semigrupos.

Nos habíamos propuesto el estudio del sistema modelado por la ecuación en derivadas parciales.

$$\text{III.1} \quad \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x), \quad q > 0$$

satisfaciendo la condición inicial

$$\text{III.2} \quad z(0, x) = z_0 = f(x)$$

la de contorno

$$\text{III.3} \quad z(t, c) = z(t, -c) = 0 \quad (c > 0)$$

y la condición de compatibilidad

$$\text{III.4} \quad f(c) = f(-c) = 0$$

y se trataba de determinar la ley de control óptimo $u^0(t, x)$ que gobernara la dinámica del sistema de forma que se minimizara el funcional de coste definido por

$$\begin{aligned} \text{III.5} \quad W(u, f, h) = & \int_{-c}^c (h(x) - z(t_1, x))^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{-c}^c (h(x) - z(t, x))^2 dx dt + \\ & + \int_0^{t_1} \int_{-c}^c u^2(t, x) dx dt \end{aligned}$$

donde $h, f, z, u \in L^2[-c, c]$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \in L^2[-c, c]$

En este caso, y equiparando con el modelo general, tenemos que

$$\text{III.6-a} \quad Az = q \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \text{con } D(A) = L^2[-c, c], \quad q > 0$$

$$\text{III.6-b} \quad B = K = F = I \quad (I \text{ operador identidad})$$

$$\text{III.6-c} \quad u^0(t,x) = -S(t) z(t,x) - m(t,x)$$

y

$$\begin{aligned} \text{III.6-d} \quad W(u^0, f, h) = & \int_{-c}^c h^2(x) dx + \int_0^{t_1} \int_{-c}^c h^2(x) dx dt + \int_{-c}^c f(x) \cdot S(0) f(x) dx + \\ & + 2 \int_{-c}^c f(x) m(0, x) dx - \int_0^{t_1} \int_{-c}^c m^2(t, x) dx dt \end{aligned}$$

donde se ha considerado como expresión del producto escalar de dos funciones la clásica

$$\langle g(x), h(x) \rangle = \int_{-c}^c g(x) h(x) dx$$

y los espacios de Hilbert son los de las funciones de variable real fuertemente medibles y de cuadrado integrable.

Vamos a tratar de determinar $S(t)$, $m(t,x)$, $z(t,x)$ y $u^0(t,x)$ utilizando los resultados obtenidos al final de la segunda parte. Para ello, y con la siguiente proposición, demostraremos en primer lugar que el operador A con el que trabajamos cumple las condiciones exigidas por el teorema 7 de la lista.

Proposición III.1

El operador A tiene autovalores simples, es autoadjunto y tiene resolvente compacto.

Comencemos calculando los autovalores y autofunciones asociados al operador A , ésto es, las constantes para las que existe alguna función distinta de 0, $w(t,x) \in D(A)$, tal que

$$\text{III.7} \quad Aw = q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda w$$

Considerando por el momento a w como función de la sola variable x , la ecuación característica de la ecuación diferencial de segundo orden definida por III.7 es

$$qr^2 - \lambda = 0 \quad \equiv \quad r^2 - \alpha = 0$$

y las tres situaciones posibles son

a) $\alpha > 0$

La solución $w(x)$ es entonces de la forma

$$w = C e^{\sqrt{\alpha} x} + D e^{-\sqrt{\alpha} x}$$

e imponiendo las condiciones de contorno resulta

$$C e^{c\sqrt{a}} + D e^{-c\sqrt{a}} = 0$$

$$C e^{-c\sqrt{a}} + D e^{c\sqrt{a}} = 0$$

de donde obtenemos $C = D = 0$ y al ser $w = 0$ resulta que no existe ningún autovalor real positivo

b) $a = 0$

La solución $w(x)$ es de la forma

$$w(x) = ax + b$$

y, al igual que en el caso anterior, las condiciones de contorno conducen a la anulación de a y b

c) $a < 0$

La solución $w(x)$ es de la forma

$$w(x) = C \cos\sqrt{-a} x + D \sin\sqrt{-a} x$$

conduciéndonos las condiciones de contorno al sistema homogéneo

$$C \cos(c\sqrt{-a}) + D \sin(c\sqrt{-a}) = 0$$

$$C \cos(c\sqrt{-a}) - D \sin(c\sqrt{-a}) = 0 \quad |$$

para el que la existencia de una solución no trivial exige la anulación del determinante asociado, ésto es,

$$2 \cos(c\sqrt{-a}) \sin(c\sqrt{-a}) = \sin(2c\sqrt{-a}) = 0$$

lo que implica que

$$2c\sqrt{-a} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

y, designando por λ_n al autovalor asociado a n , obtenemos como expresión para los autovalores

$$\text{III.8} \quad \lambda_n = -q \frac{n^2 \pi^2}{4 c^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

siendo la expresión general de las autofunciones asociadas a él

$$\text{III.9} \quad w_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi}{2c} x + D_n \sin \frac{n\pi}{2c} x$$

Las condiciones de contorno obligan a que de forma simultánea se cumplan las condiciones

$$C_n \cos \frac{n\pi}{2} + D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = 0$$

$$C_n \cos \frac{n\pi}{2} - D_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = 0$$

de donde obtenemos

$$C_n = k \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}, \quad D_n = k \cos \frac{n\pi}{2}$$

es decir

$$\begin{aligned} w_n(x) &= k \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2c} x + k \cos \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2c} x = \\ &= k \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) \end{aligned}$$

Vamos a determinar un sistema ortonormal de autofunciones para lo que comenzaremos por determinar k de forma que la norma de todas las autofunciones sea 1, es decir,

$$k^2 \int_{-c}^c \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx = 1$$

de donde resulta $k = \frac{1}{\sqrt{c}}$. La ortogonalidad de las autofunciones asociadas a autovalores

distintos es de sobra conocida en este caso. Hemos obtenido el sistema ortonormal de autofunciones

$$\text{III.10} \quad \left\{ g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right), n = 1, 2, \dots \right\}$$

El carácter autoadjunto del operador A es inmediato. Supongamos a tal efecto $z_1, z_2 \in D(A)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \langle Az_1, z_2 \rangle &= \int_{-c}^c q \frac{\partial^2 z_1(t, x)}{\partial x^2} z_2(t, x) dx = \\ &= q \frac{\partial z_1(t, x)}{\partial x} z_2(t, x) \Big|_{-c}^c - \int_{-c}^c q \frac{\partial z_1(t, x)}{\partial x} \frac{\partial z_2(t, x)}{\partial x} dx = \end{aligned}$$

(el primer sumando se anula por las condiciones de contorno impuestas a los elementos de $D(A)$)

$$= -q z_1(t, x) \frac{\partial z_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{-c}^c + \int_{-c}^c z_1(t, x) \cdot q \frac{\partial^2 z_2(t, x)}{\partial x^2} dx =$$

(el primero de los sumandos se anula por la razón antes expuesta)

$$= \langle z_1, Az_2 \rangle$$

y esta es la condición para que A sea autoadjunto.

Para establecer la segunda condición exigida en el teorema 7 de la lista recordemos que el espectro de A es

$$\rho(A) = \left\{ \lambda_n \mid \lambda_n = -q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2}, n = 1, 2, \dots \right\}$$

y consideremos un número real no perteneciente al espectro. La elección natural recae en el valor $\lambda = 0$. En este caso

$$R(0) = A^{-1}$$

es decir

$$R(0)v = A^{-1}v = \int_Y^X \int_\beta^Y v \, du \, dy$$

con las condiciones adicionales, que particularizan la solución,

$$(A^{-1}v)(c) = (A^{-1}v)(-c) = 0$$

o equivalentemente,

$$R(0)v = A^{-1}v = \int_c^x \int_\beta^y v \, du \, dy$$

y la condición adicional

$$(A^{-1}v)(-c) = 0,$$

y el carácter compacto de este operador es inmediato pues responde a la bien conocida propiedad de la integral de que dada una sucesión de funciones $\{v_n\}$ tal que

$$\{v_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v, \quad v_n, v \in L_2[-c, c]$$

excepto, quizás, en un conjunto de medida nula, se tiene que la sucesión

$$A^{-1}v_n = \int_c^x \int_\beta^y v_n \, du \, dy, \quad \text{con } (A^{-1}v_n)(-c) = 0$$

converge a la integral

$$(A^{-1}v)(x) = \int_c^x \int_\beta^y v \, du \, dy, \quad \text{con } (A^{-1}v)(-c) = 0$$

Así pues, las condiciones del teorema citado son satisfechas y estamos en situación de determinar $S(t)$ y $m(t, x)$

3.2.- Determinación del operador $S(t)$ y de $m(t)$

El sistema de ecuaciones diferenciales definido en II.48 queda, en nuestro caso, convertido en

$$\text{III.11} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_{nm}(t) - q \frac{\pi^2}{4c^2} (n^2 + m^2) s_{nm}(t) + \delta_{nm} - \sum_{i=1}^{\infty} s_{ni}(t) s_{im}(t) = 0 \\ s_{nm}(t_1) = \delta_{nm} \end{array} \right.$$

Para $n \neq m$ (n y m fijos), la función

$$s_{nm}(t) = 0$$

es una solución de la ecuación III.11 y es además la única. Por tanto, y para $n = m$, el sistema III.11 se transforma en el conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado definido por

$$\text{III.12} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{s}_{nn}(t) - q \frac{n^2 \pi^2}{2c^2} s_{nn}(t) + 1 - s_{nn}^2(t) = 0 \\ s_{nn}(t_1) = 1 \end{array} \right. \quad n = 1, 2, \dots$$

En adelante designaremos a $q \frac{n^2 \pi^2}{2c^2}$ por k_n y a $s_{nn}(t)$ por $s_n(t)$. Las sucesivas transformaciones

$$w_n(t) = s_n(t) + \frac{k_n + \sqrt{k_n^2 + 4}}{2}$$

$$v_n(t) = \frac{1}{w_n(t)}$$

convierten a las ecuaciones III.12 en el conjunto de ecuaciones lineales de primer orden definido por

$$\text{III.13} \quad \dot{v}_n - \sqrt{k_n^2 + 4} v_n(t) + 1 = 0$$

cuya solución es

$$v_n(t) = \frac{1}{\sqrt{k_n^2 + 4}} + C_n e^{\sqrt{(k_n^2 + 4)} t}$$

de donde resulta como solución general de III.12

$$s_n(t) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k_n^2 + 4}} + C_n e^{\sqrt{(k_n^2 + 4)} t}} - \frac{k_n + \sqrt{k_n^2 + 4}}{2}$$

e imponiendo la condición $s_n(t_1) = 1$ obtenemos como solución buscada

$$\text{III.14} \quad s_n(t) = \frac{b_n}{1 - d_n e^{-b_n(t_1 - t)}} - \frac{k_n + b_n}{2}$$

donde

$$\text{III.15.1.} \quad k_n = q \frac{n^2 \pi^2}{2c^2}$$

$$\text{III.15.2.} \quad b_n = \sqrt{k_n^2 + 4}$$

$$\text{III.15.3} \quad a_n = 2 + k_n + b_n$$

$$\text{III.15.4.} \quad d_n = \frac{2 + k_n - b_n}{a_n}$$

Como $|s_n(t)|$ está uniformemente acotado tanto en n como en t queda garantizado que

$$\text{III.16} \quad S(t) \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \langle \gamma, g_n(\mathbf{x}) \rangle g_n(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \gamma_n(t) g_n(\mathbf{x})$$

está bien definido.

Por lo que respecta a los coeficientes del desarrollo de Fourier de $m(t, \mathbf{x})$ el sistema de ecuaciones II.50 se reduce a resolver el conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales lineales de primer orden dado por

$$\text{III.17} \quad \begin{cases} \dot{m}_n(t) = \left(q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} + s_{nn}(t) \right) m_n(t) + \langle h(\mathbf{x}), g_n(\mathbf{x}) \rangle \\ m_n(t_1) = - \langle h(\mathbf{x}), g_n(\mathbf{x}) \rangle \end{cases}$$

o, con las notaciones adoptadas,

$$\text{III.18} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_n(t) = \left(\frac{k_n}{2} + s_n(t) \right) m_n(t) + h_n \\ m_n(t_1) = -h_n \end{array} \right.$$

que, con la solución obtenida en III.15, se convierte en

$$\text{III.19} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_n(t) = \left(\frac{b_n e^{b_n(t_1-t)}}{e^{b_n(t_1-t)} + \frac{b_n - (2+k_n)}{b_n + (2+k_n)}} - \frac{b_n}{2} \right) m_n(t) + h_n \\ m_n(t_1) = -h_n \end{array} \right.$$

La solución de estas ecuaciones viene dada por

$$\text{III.20} \quad m_n(t) = 2 \frac{h_n}{b_n} \frac{(k_n - k_n^2) e^{-\frac{b_n}{2}(t_1-t)} - a_n(1 + d_n e^{-b_n(t_1-t)})}{a_n(1 - d_n e^{-b_n(t_1-t)})}$$

Con estos resultados podemos abordar la determinación de $z(t)$ y, como consecuencia, la del control óptimo $u^0(t)$.

Nótese que ni $S_n(t)$ ni $m_n(t)$ dependen de $z(0)$.

3.3.- Cálculo de los coeficientes de Fourier de $z(t,x)$ respecto del sistema $\{g_n(x)\}$

Supuesto, una vez más, que todos los desarrollos de Fourier utilizados son válidos, la ecuación que gobierna la dinámica de nuestro sistema

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} - S(t) z(t,x) - m(t,x)$$

$$z(0,x) = f(x)$$

puede ser expresada, si escribimos

$$z(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z(t,x), g_n(x) \rangle g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) g_n(x)$$

en la forma

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) g_n(x) &= q \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \frac{d^2 g_k(x)}{dx^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(t) z_n(t) + m_n(t)) g_n(x) = \\
 &= q \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{d^2 g_k(x)}{dx^2}, g_n(x) \right\rangle g_n(x) \right\} - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(t) z_n(t) + m_n(t)) g_n(x) = \\
 &= q \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \left\langle \frac{d^2 g_k(x)}{dx^2}, g_n(x) \right\rangle \right) g_n(x) - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(t) z_n(t) + m_n(t)) g_n(x)
 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
 z(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle z(0, x), g_n(x) \rangle g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0) g_n(x) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f(x), g_n(x) \rangle g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n(x)
 \end{aligned}$$

de donde, por la unicidad del desarrollo y ser ortonormal el sistema $\{g_n(x)\}$, obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$\text{III.21} \quad \begin{cases} \dot{z}_n(t) = q \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \left\langle \frac{d^2 g_k(x)}{dx^2}, g_n(x) \right\rangle - (s_n(t) z_n(t) + m_n(t)) \\ z_n(0) = f_n \end{cases}$$

Ahora bien

$$\frac{d^2 g_n(x)}{dx^2} = - \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) = - \frac{k_n}{2q} g_n(x)$$

por lo que el sistema anterior se reduce al conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\text{III.22} \quad \begin{cases} \dot{z}_n(t) = -\left(\frac{k_n}{2} + s_n(t)\right) z_n(t) - m_n(t) \\ z_n(0) = f_n \end{cases}$$

o bien

$$\text{III.23} \quad \begin{cases} z_n(t) = -\left(\frac{b_n e^{b_n(t_1-t)}}{e^{b_n(t_1-t)} - d_n} - \frac{b_n}{2}\right) z_n(t) \\ -2 \frac{h_n}{b_n} \frac{(2k_n - k_n^2) e^{\frac{b_n}{2}(t_1-t)} - a_n (e^{b_n(t_1-t)} + d_n)}{a_n (e^{b_n(t_1-t)} - d_n)} \\ z_n(0) = f_n \end{cases}$$

La solución de estas ecuaciones diferenciales viene dada por

$$\text{III.24} \quad z_n(t) = C_n e^{\frac{b_n t}{2}} \left(e^{\frac{b_n(t_1-t)}{2}} - d_n \right) - 2 \frac{h_n}{b_n^2} \left(\frac{2k_n - k_n^2}{a_n} e^{-\frac{b_n}{2}(t_1-t)} - 2 \right)$$

con la constante C_n definida por

$$\text{III.25} \quad C_n = \frac{f_n + 2 \frac{h_n}{b_n^2} \left(\frac{2k_n - k_n^2}{a_n} e^{-\frac{b_n}{2} t_1} - 2 \right)}{e^{b_n t_1} - d_n}$$

A efectos del tratamiento con ordenador $z_n(t)$ puede ser expresada en la forma

$$\text{III.24-bis } z_n(t) = \frac{f_n + 2 \frac{h_n}{b_n^2} \left(\frac{2k_n - k_n^2}{a_n} e^{-\frac{b_n}{2} t_1} - 2 \right)}{1 - d_n e^{-b_n t_1}} e^{-\frac{b_n}{2} t} (1 - d_n e^{b_n (t_1 - t)}) - 2 \frac{h_n}{b_n^2} \left(\frac{2k_n - k_n^2}{a_n} e^{-\frac{b_n}{2} (t_1 - t)} - 2 \right)$$

Finalmente los coeficientes del desarrollo de $u^0(t)$, la ley de control óptima, vendrán dados por

$$\text{III.26 } u_n^0(t) = -s_n(t) z_n(t) - m_n(t)$$

3.4.- El funcional de coste bajo control óptimo

Cuando la ley de control utilizada es la de control óptimo $u^0(t)$ la expresión del funcional de coste se reduce a

$$W(u^0; f, h) = \langle h(x), h(x) \rangle + \int_0^{t_1} \langle h(x), h(x) \rangle dt +$$

$$+ \langle f(x), \sum_{n=1}^{\infty} s_n(0) \langle f(x), g_n(x) \rangle g_n(x) \rangle +$$

$$+ 2 \langle f(x), \sum_{n=1}^{\infty} m_n(0) g_n(x) \rangle -$$

$$- \int_0^{t_1} \langle m(t, x), m(t, x) \rangle dt$$

$$= (1+t_1) \langle h(x), h(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(0) (\langle f(x), g_n(x) \rangle)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} m_n(0) \langle f(x), g_n(x) \rangle - \int_0^{t_1} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) g_n(x), \sum_{k=1}^{\infty} m_k(t) g_k(x) \right\rangle dt = \\
& = (1+t_1) \langle h(x), h(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(0) f_n^2 + \\
\text{III.27} \quad & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} m_n(0) f_n - \int_0^{t_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m_n^2(t) \right) dt
\end{aligned}$$

y particularizando esta expresión para nuestro problema tenemos como valor del funcional de coste

$$\begin{aligned}
W(u^0, f, h) &= (1+t_1) \langle h(x), h(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n e^{b_n t_1}}{e^{b_n t_1} - d_n} - \frac{k_n + b_n}{2} \right) f_n^2 \\
\text{III.27-bis} \quad & + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n f_n}{b_n} \frac{(2k_n - k_n^2) e^{\frac{b_n}{2} t_1} - a_n (e^{b_n t_1} + d_n)}{a_n (e^{b_n t_1} - d_n)} - \\
& - \int_0^{t_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m_n^2(t) \right) dt
\end{aligned}$$

Dadas $f(x)$ y $h(x)$, y considerado el funcional de coste como función de t_1 que es continua y derivable, vamos a establecer el valor de t_1 para el que el coste se hace mínimo. Así, trabajando con la expresión III.27 obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt_1} = 0 &= \langle h(x), h(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \frac{ds_n(0)}{dt_1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{dm_n(0)}{dt_1} \\
& - \frac{d}{dt_1} \int_0^{t_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m_n^2(t) \right) dt = \\
& = \langle h(x), h(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \frac{ds_n(0)}{dt_1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{dm_n(0)}{dt_1} - \sum_{n=1}^{\infty} m_n^2(t_1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $m_n^2(t_1) = h_n^2$, los sumandos primero y cuarto de esta última expresión se anulan y queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n^2 \frac{ds_n(0)}{dt_1} + 2f_n \frac{dm_n(0)}{dt_1} \right) = 0$$

que, desarrollada, da como valor de t_1 que minimiza el coste el que satisface la relación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n^2 b_n^2 - 8 f_n h_n) d_n e^{-\frac{b_n}{2} t_1} + 2 \frac{h_n f_n}{a_n} (2k_n - k_n^2) (1 + d_n e^{-b_n t_1})}{e^{\frac{b_n}{2} t_1} (1 - d_n e^{-b_n t_1})^2} = 0$$

Esta expresión se mostró, a la hora de su tratamiento numérico, muy poco práctica, dado que cae en numerosas compensaciones de errores, por lo que hubo que utilizar procedimientos de cálculo numérico que actuaran directamente sobre la expresión de W .

3.5.- Un caso particular

El interés del caso particular que vamos a analizar, y aparte del resultado un poco curioso al que llega, radica en que su cálculo manual es muy simple y sirvió como elemento de contraste con el programa de ordenador que, desarrollado en el apéndice D, permite el tratamiento numérico del problema.

Supongamos pues que

$$c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad f(x) = g_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x \quad \text{y} \quad h(x) = 2g_1(x) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$$

con lo que los coeficientes f_n y h_n son

$$f_n = \delta_{1n} \quad \text{y} \quad h_n = 2 \delta_{1n}$$

Las expresiones de k_n , b_n , a_n y d_n adoptan ahora la forma

$$k_n = 2n^2q$$

$$b_n = 2 \sqrt{n^4 q^2 + 1}$$

$$a_n = 2(1 + n^2q + \sqrt{q^2 n^4 + 1})$$

III.32

$$\begin{aligned}
W(u^0) &= 4(1 + t_1) + \frac{b_1}{1 - d_1 e^{-b_1 t_1}} - \frac{k_1 + b_1}{2} \\
&+ \frac{8}{b_1^2} \frac{(2k_1 - k_1^2) e^{-\frac{b_1}{2} t_1} - a_1(1 + d_1 e^{-b_1 t_1})}{a_1(1 - d_1 e^{-b_1 t_1})} \\
&- \frac{16}{b_1^2} \int_0^{t_1} \frac{(2k_1 - k_1^2) e^{-\frac{b_1}{2} t} - a_1(1 + d_1 e^{-b_1 t})}{a_1(1 - d_1 e^{-b_1(t-t_1)})} dt = \\
&= 4(1 + t_1) + \frac{b_1}{1 - d_1 e^{-b_1 t_1}} - \frac{k_1 + b_1}{2} \\
&+ \frac{8}{b_1} \frac{(2k_1 - k_1^2) e^{-\frac{b_1}{2} t_1} - a_1(1 + d_1 e^{-b_1 t_1})}{a_1(1 - d_1 e^{-b_1 t_1})} \\
&- \frac{32}{a_1^2 b_1^3} \left[\frac{a_1 b_1 t_1}{2} + \frac{1}{2} \frac{4 h_1 a_1 e^{\frac{b_1}{2} t_1} - 4 a_1^2 d_1 - h_1^2}{(e^{b_1 t_1} - d_1)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(4 h_1 a_1 - 4 a_1^2 d_1 - h_1^2)}{2(1 - d_1)} \right]
\end{aligned}$$

(donde $h_1 = 2k_1 - k_1^2$)

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{4q^2}{1 + q^2} t_1 \\
&+ \frac{64(q-1)}{a_1^2 b_1^3} \frac{1}{e^{b_1 t_1} - d_1} \left\{ \frac{(q+1) b_1^2 a_1^2 e^{b_1 t_1}}{16} - \right. \\
&\quad \left. - 2q(q-1) a_1 e^{\frac{b_1}{2} t_1} + 4q(q^2 - 2q - 1) \right\} \\
&+ 2 \frac{(1-q) \{ b_1 (q^3 + 2q + 2) + 2(q^4 + 3q^2 + 5q + 1) \}}{(q-1) \{ b_1 (q^2 + 2q + 3) + 2(q^3 + q^2 + 3q + 3) + 4(b_1 + 2) \}}
\end{aligned}$$

Si particularizamos aún más haciendo $q = 1$ encontraremos, para una duración t_1 del control, las expresiones

$$m_1(t) = -\sqrt{2} \frac{1 + (3+2\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}(t_1-t)}}{1 - (3-2\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}(t_1-t)}}$$

$$z_1(t) = 1$$

$$z(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$$

$$W(u^0) = 1 + 2 t_1$$

es decir, el sistema no evoluciona, permaneciendo en su situación inicial, y por tanto el incremento del coste a lo largo del tiempo y su carácter lineal son perfectamente lógicos.

3.6.- Consideración de una inversión inicial concentrada en una zona reducida

Dado que la idea intuitiva de un polo de desarrollo responde a una inversión inicial muy concentrada, parece natural considerar la posibilidad de modelar este caso. En principio se puede intentar representar dicha inversión por medio de una distribución de Dirac pero ello supone dos inconvenientes; uno es una falta de adaptación a la realidad de un polo de desarrollo ya que por muy concentrada que esté la inversión inicial, no tiene el sentido físico de un impulso, y el otro es que, desde el punto de vista de la teoría desarrollada en este trabajo, no tiene sentido hablar del desarrollo en serie de una distribución δ de Dirac.

Por consiguiente, y tanto para responder a la idea de concentración como en consideración al operador concreto que se maneja en el trabajo, parece adecuado modelar la inversión inicial mediante una función de la forma

$$\text{III. 33} \quad R(x, x_0, v) = \frac{k}{2\sqrt{\pi v}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4v}} \quad (v > 0, -\infty < x < \infty, k > 0)$$

pues, como es conocido, cuando $v \rightarrow 0$, $R(x, x_0, v)$ tiende precisamente a la distribución $k \cdot \delta(x-x_0)$, siendo x_0 el punto donde se concentra la inversión inicial.

Una generalización del problema ya analizado de buscar el valor de t_1 para el que W se minimiza, consistiría en, dadas unas situaciones inicial y final, determinar el tiempo t_1 , la ubicación x_0 del punto donde debe concentrarse la inversión inicial y el valor v del grado de concentración para los cuales el valor de W , considerada como función de t_1, x_0 y v , es mínimo. No obstante se presenta el problema de una enorme complicación de los cálculos relacionados con el sistema de ecuaciones a tratar y que, incluso con ordenador, representa una ingente cantidad de tiempo.

Un tanto más asequible parece el problema en el caso de que solo pretendamos establecer los valores de t_1 y x_0 que optimizan W considerando v fijo. Designando por $R_n(x_0)$ al n -simo coeficiente de Fourier de $R(x, x_0)$ respecto a nuestro sistema ortonormal y siendo $f(x)$ la función que representa la situación inicial, la expresión del funcional de coste viene a ser

$$\text{III.34} \quad W(u^0; f, h; x_0, t_1) = (1+t_1) \langle h(x), h(x) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(0) \left[f_n + R_n(x_0) \right]^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} m_n(0) (f_n + R_n(x_0)) - \int_0^{t_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} m_n^2(t) \right) dt$$

y las ecuaciones que nos dan los valores de x_0 y t_1 para los que W se hace mínimo son

$$\frac{\partial W}{\partial t_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n + R_n(x_0) \right]^2 \frac{ds_n(0)}{dt_1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n + R_n(x_0) \right] \frac{dm_n(0)}{dt_1} = 0$$

III.35

$$\frac{\partial W}{\partial x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[s_n(0) (f_n + R_n(x_0)) + m_n(0) \right] \frac{\partial R_n(x_0)}{\partial x_0} = 0$$

donde $R_n(x_0)$, para $k = 1$, viene definido por

$$\begin{aligned} R_n(x_0) &= \int_{-c}^c \frac{1}{2\sqrt{\pi v}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4v}} \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx = \\ &= \frac{c}{\sqrt{\pi v c} \times n\pi} \left[(-1)^{n+1} e^{-\frac{(c-x_0)^2}{4v}} + e^{-\frac{(c+x_0)^2}{4v}} \right] - \\ &\quad - \frac{4c^2}{n^2 \pi^2} \frac{d^2 R_n(x_0)}{dx_0^2} \end{aligned}$$

tal como se prueba por cálculos elementales.

Las ecuaciones III.35, donde $R_n(x_0)$ satisface la ecuación diferencial

$$\text{III.36} \quad \frac{d^2 R_n(x_0)}{dx_0^2} + \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} R_n(x_0) = \frac{n\pi}{\sqrt{\pi c v} \times 4c} \left[(-1)^{n+1} e^{-\frac{(c-x_0)^2}{4v}} + e^{-\frac{(c+x_0)^2}{4v}} \right]$$

con condiciones iniciales $R_n(0)$ y $\left. \frac{d R_n(x_0)}{dx_0} \right|_{x_0=0}$,

cuyos valores pueden ser obtenidos por el programa con la subrutina COEFICIENTES-DE-FOURIER, permiten obtener los valores de x_0 y t_1 pedidos.

3.7.- Análisis de los resultados obtenidos con el programa

El programa con sus módulos se presenta en el apéndice D en sus dos versiones: interactivo y batch. El bloque de resultados se presenta aparte y corresponden al análisis de dos casos; en ambos, la situación final viene definida por la función.

$$h(x) = 4 - x^2, \quad -2 \leq x \leq 2$$

mientras la inicial venía dada por

$$f(x) = 0, \quad \forall x$$

en el primer caso, y por

$$f(x) = 0.25(4-x^2), \quad -2 \leq x \leq 2$$

en el segundo. En los dos casos se consideraba un impulso inicial definido por una función del tipo establecido en III.33 en la que los parámetros se definieron como

$$x_0 = 0, \quad k = 1, \quad v = 0.01$$

Se obtuvieron resultados para diversos valores del parámetro q , velocidad de propagación. Se trabajó en precisión simple y aprovechando todas las posibilidades del sistema informático descrito al comienzo del apéndice D. Aún con todo se invirtió en la ejecución del programa una cantidad muy considerable de tiempo de U.C.P (Unidad de Control de Procesos)

Para diversos valores de q , el tiempo óptimo de control del programa y el coste mínimo asociado se resumen en las tablas I y II para cada uno de los casos estudiados. Llama la atención la escasa sensibilidad del sistema a las variaciones de q por lo que respecta al correspondiente tiempo óptimo y mas aún en lo relativo al coste mínimo.

Por lo demás los resultados son coherentes con lo que intuitivamente se esperaba y muestran una aceptable coincidencia con leyes y principios económicos y econométricos. Las conclusiones más importantes que se deducen del análisis de los resultados son las siguientes:

a) El centro del polo, ésto es, el punto donde se centra el impulso inicial, se convierte en un principio en un emisor de riqueza para ir "recuperándose" a medida que transcurre el tiempo, aunque esta recuperación suele producirse después de transcurrido el tiempo óptimo y por tanto a un coste superior.

b) La dinámica del polo hace que resulte más interesante emitir al mundo exterior parte de la riqueza generada (realimentación negativa) y admitir una mayor inversión externa.

c) Como era de esperar, a medida que aumenta la velocidad de transmisión disminuye tanto el tiempo que tarda el sistema en aproximarse a la situación final alcanzando una situación determinada como el coste.

d) Para una velocidad de transmisión dada, a medida que transcurre el tiempo la situación del polo va aproximándose a la situación final prevista, aunque naturalmente a un coste superior al correspondiente al tiempo óptimo.

e) Para una situación final y velocidad de transmisión dadas, y diferentes situaciones iniciales, los resultados son coherentes en el sentido de que se alcanza una situación mas "próxima" a la final en menos tiempo y a menor coste cuando se parte de la situación inicial mas "favorable". Así, en nuestro modelo los costes y tiempos son

inferiores cuando la situación inicial era $f(x) = 0.25(4-x^2)$ que cuando $f(x) = 0$.

Velocidad de propagación	Tiempo óptimo	Coste mínimo
.25	.15404	27.3794
.5	.09455	27.3004
.75	.07013	27.2649
1.0	.05670	27.2442
1.25	.04696	27.2304
1.5	.04078	27.2206

TABLA I

$$h(x) = 4 - x^2$$

$$f(x) = 0$$

Velocidad de propagación	Tiempo óptimo	Coste mínimo
0.1	.25266	14.6691
0.2	.14559	14.6072
0.25	.11991	14.5923
0.3	.10301	14.5817
0.35	.08986	14.5738
0.4	.08078	14.5676
0.45	.07232	14.5627
0.5	.06575	14.5587
0.55	.06074	14.5553
0.6	.05604	14.5525
0.65	.05135	14.5500

TABLA II

$$h(x) = 4 - x^2$$

$$f(x) = 0.25(4-x^2)$$

3.8.- Una variante del anterior método numérico

Una variante del método numérico desarrollado anteriormente para calcular el valor de $z(t,x)$ está basado en los teoremas 2,4 y 6 de la lista de teoremas básicos utilizados y en una variante de la recurrencia definida por II.29

Como hemos hechos hasta ahora designaremos por T_t al semigrupo fuertemente continuo generado por el operador

$$A = q \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Nosotros tratamos de encontrar la solución de

$$\text{III.37} \quad \frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} - S(t)z(t,x) - m(t,x)$$

Por el teorema 2 sabemos que el operador

$$q \frac{\partial^2}{\partial x^2} - S(t)$$

genera un semigrupo fuertemente continuo definido por

$$\text{III.38} \quad U_t z_0 = T_t z_0 - \int_0^t T_{t-s} S(s) U_s z_0 ds$$

al que está asociado un operador de evolución suave definido por

$$\text{III.39} \quad U(t,s) z_0 = T_{t-s} z_0 - \int_s^t T_{t-u} S(u) U(u,s) z_0 du$$

Por el teorema 4 llegamos a que $U(t,s)$ es un operador de evolución fuerte (salvo quizás en un conjunto de medida nula) y finalmente el teorema 6 garantizará que

$$\text{III.40} \quad z(t,x) = U(t,0) z_0 - \int_0^t U(t,s) m(s) ds$$

es la única solución de III.37 .

Suponiendo por ahora que se satisfacen las condiciones exigidas en los citados teoremas vamos a dar un procedimiento de obtención del semigrupo U_t definido por III.38 Este procedimiento consiste en la recurrencia dada por

$$U_{t,0} = T_t$$

III.41

$$U_{t,n} z_0 = - \int_0^t T_{t-u} S(u) U_{u,n-1} z_0 du$$

y la consideración del operador definido por

III.42

$$U_t z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{t,n} z_0$$

Vamos a probar en primer lugar que, bajo las condiciones exigidas a T_t y $S(t)$ en los citados teoremas de la lista, el operador de III.40 está bien definido y es la única solución de la ecuación integral III.38. Comenzaremos probando dos proposiciones relativas a las normas de los operadores T_t y $S(t)$ que garantizarán el cumplimiento de las citadas condiciones.

Proposición III.2

La norma del operador T_t viene dada por

III.43

$$\|T_t\| = e^{-\frac{q \pi^2}{4c^2} t} < 1$$

En efecto: el operador T_t se define en nuestro caso como

$$T_t z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \langle z_0, g_n(x) \rangle g_n(x)$$

y, partiendo de la definición de norma dada por

$$\|T_t\| = \sup_{\|z_0\|=1} \|T_t z_0\|$$

resulta

$$\|T_t\| = \sup_{\|z_0\|=1} \|T_t z_0\| = \sup_{\|z_0\|=1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \langle z_0, g_n(x) \rangle g_n(x) \right\|$$

donde

$$\|z_0\| = \sum_{n=1}^{\infty} z_{0,n}^2$$

Ahora bien

$$\sup_{\|z_0\|=1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} z_{0,n} g_n(x) \right\| = \sup_{\|z_0\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2n^2 \pi^2}{4c^2} tq} z_{0,n} \right)^{1/2} = e^{-q}$$

ya que el supremo se obtiene para

$$z_{0,n} = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$$

Proposición III.3

III.44

$$\|S(t)\| < \frac{2c^2}{\pi^2 q}$$

En efecto; tal como obtuvimos en la expresión III.16

$$S(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \langle z_0, g_n(x) \rangle g_n(x)$$

con $s_n(t)$ definido por III.14. Entonces

$$\|S(t)\| = \sup_{\|z_0\|=1} \|S(t)z_0\| =$$

$$\sup_{\|z_0\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(t) z_{0,n}^2 \right)^{1/2} < \sup_{\|z_0\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b_n - k_n}{2} \right]^2 z_{0,n}^2 \right)^{1/2}$$

$$\sup_{\|z_0\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} z_{0,n}^2 \right)^{1/2} = \sup_{\|z_0\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4c^4}{q^2 \pi^4 n^4} z_{0,n}^2 \right)^{1/2} = \frac{2c^2}{q\pi^2}$$

En lo que sigue designaremos por R a la cota obtenida para la norma de $S(t)$. Vamos a ver que el operador de III.42 está bien definido. Para ésto tenemos que

$$\|U_{t,0}\| = \|T_t\| = e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t}$$

$$\begin{aligned} \|U_{t,1}\| &\leq \int_0^t \|T_{t-u} S(u) U_{u,0}\| du < \int_0^t e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}(t-u)} R e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}u} du = \\ &= R t e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t} \end{aligned}$$

y por inducción, supuesto que

$$\|U_{t,n-1}\| < R^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \|U_{t,n}\| &\leq \int_0^t \|T_{t-u} S(u) U_{u,n-1}\| du < \int_0^t e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t} R \cdot R^{n-1} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}u} du \\ &= R^n \frac{t^n}{n!} e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \|U_t\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} U_{t,n} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|U_{t,n}\| < \\ &e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Rt)^n}{n!} = e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t} \cdot e^{Rt} = e^{-\frac{t}{2R}} \cdot e^{Rt} \\ &= e^{(R - \frac{1}{2R})t} < \infty \end{aligned}$$

y en consecuencia $\sum_{n=0}^{\infty} U_{t,n}$ es absolutamente convergente en la topología uniforme de $L(H)$ para t finito y establece un operador perfectamente definido.

Este operador es solución de la ecuación integral III.38 ya que

$$\begin{aligned} U_t z_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{t,n} z_0 = T_t z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{t,n} z_0 = T_t z_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t T_{t-u} S(u) U_{u,n-1} z_0 du = \\ &= T_t z_0 - \int_0^t T_{t-u} S(u) \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_{u,n} z_0 \right) du \\ &= T_t z_0 - \int_0^t T_{t-u} S(u) U_u z_0 du \end{aligned}$$

tal como se quería probar.

Es además la única solución. Si V_t fuera otra solución tendríamos

$$(U_t - V_t) z_0 = \int_0^t T_{t-u} S(u) (V_u - U_u) z_0 du$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \|(U_t - V_t) z_0\| &< \int_0^t e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}(t-u)} R \|(U_u - V_u) z_0\| du = \\ &= e^{-\frac{q\pi^2}{4c^2}t} R \int_0^t e^{\frac{q^2 \pi^2}{4c^2}u} \|(U_u - V_u) z_0\| du \end{aligned}$$

o lo que es igual, para todo z_0 se cumple la desigualdad

$$e^{\frac{q\pi^2}{4c^2}t} \|(U_t - V_t) z_0\| < R \int_0^t e^{\frac{q\pi^2}{4c^2}u} \|(U_u - V_u) z_0\| du$$

y, por el lema de Gronwall, esto se cumplirá si, para todo z_0 ,

$$\|(U_t - V_t) z_0\| = 0 \implies U_t = V_t$$

como queríamos probar. La aplicación directa de los teoremas 4 y 6 de la lista garantiza que el operador $U(t,s)$ definido por

$$U(t,s)z_0 = U_{t-s}z_0 = T_{t-s}z_0 - \int_s^t T_{t-u} S(u) U(u,s) z_0 du$$

es un operador de evolución fuerte tal que

$$z(t,x) = U(t,0)z_0 - \int_0^t U(t,u) m(u) du$$

es la única solución de

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = q \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} - S(t)z(t,x) - m(t,x)$$

Estos resultados sugieren un procedimiento numérico para resolver esta última ecuación. Como veremos a continuación, este método no presenta demasiadas ventajas respecto al utilizado en la primera parte de esta sección en relación con el problema particular que nos ocupa, pero tiene interés por lo que representa de generalización para otros problemas al ser un procedimiento standard.

En nuestro problema $z_0 = f$. El valor de $z(t,x)$ vendrá dado por

$$\begin{aligned} \text{III.45} \quad z(t,x) &= U(t,0) f - \int_0^t U(t,s) m(s,x) ds = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t,0) f - \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t,s) m(s,x) ds = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (U_k(t,0) f - \int_0^t U_k(t,s) m(s,x) ds) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (U_k(t,0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n(x) \right) - \int_0^t U_k(t,s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} m_n(s) g_n(x) \right) ds) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(U_k(t,0) f_n - \int_0^t U_k(t,s) m_n(s) ds \right) \right) g_n(x) \end{aligned}$$

es decir, el coeficiente de Fourier $z_n(t)$ de $z(t,x)$ viene dado por

$$z_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(U_k(t,0) f_n - \int_0^t U_k(t,s) m_n(s) ds \right)$$

Vamos entonces a analizar cada uno de los sumandos que aparecen en la expresión III-45. Comencemos por los elementos de la forma $U_k(t,0) f$; tenemos

$$U_0(t,0) f = T_t f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} f_n g_n(x)$$

$$U_1(t,0) f = - \int_0^t T_{t-u} S(u) U_0(u,0) f \, du = - \int_0^t T_{t-u} S(u) \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} uq} f_n g_n(x) \right] du =$$

$$= - \int_0^t T_{t-u} \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(u) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} uq} f_n g_n(x) \right) du =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t T_{t-u} (s_n(u) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} uq} f_n g_n(x)) \, du =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} (t-u)q} s_n(u) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} uq} f_n g_n(x) \, du \right) =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \left(\int_0^t s_n(u) \, du \right) f_n g_n(x)$$

y, suponiendo que

$$U_{k-1}(t,0) f = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \left(\int_0^t s_n(u_1) \left[\int_0^{u_1} s_n(u_2) \left\{ \int_0^{u_2} s_n(u_3) \dots \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \int_0^{u_{k-2}} s_n(u_{k-1}) du_{k-1} \right\} du_{k-2} \dots \right] du_1 \right) f_n g_n(x)$$

obtenemos por inducción

$$U_k(t,0) f = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \left(\int_0^t s_n(u_1) \int_0^{u_1} s_n(u_2) \dots \dots \dots \right.$$

$$\left. \dots \int_0^{u_{k-1}} s_n(u_k) du_k du_{k-1} \dots du_2 du_1 \right) f_n g_n(x)$$

y como además

$$|s_n(t)| < \frac{b_n - k_n}{2} < \frac{2c^2}{n^2 \pi^2 q}$$

obtenemos

$$|U_k(t,0) f| < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \left(\frac{2c^2}{n^2 \pi^2} \right)^k \frac{t^k}{k!} |f_n| \frac{1}{\sqrt{c}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\left(\frac{2c^2 t}{\pi^2 q} \right)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \frac{1}{n^{2k}} |f_n|$$

$$< \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\left(\frac{2c^2 t}{\pi^2 q} \right)^k}{k!} e^{-\frac{\pi^2}{4c^2} tq} \left(\max_n |f_n| \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\left(\frac{2c^2 t}{\pi^2}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\pi^2}{4c^2} t q} \left(\text{Max}_n |f_n|\right) \frac{2^{2k-1} \pi^{2k} B_k}{(2k)!}$$

donde B_k es el k -simo número de Bernoulli, números que, como es sabido, se definen por una cualquiera de las dos siguientes series

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + B_3 \frac{x^6}{6!} - \dots \quad |x| < 2\pi$$

$$1 - \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = B_1 \frac{x^2}{2!} + B_2 \frac{x^4}{4!} + B_3 \frac{x^6}{6!} + \dots \quad |x| < \pi$$

y cuyos valores pueden encontrarse en los manuales de fórmulas y tablas matemáticas.

Por lo que respecta a los sumandos de la forma $\int_0^t U_k(t,s) m(s,x) ds$, obtenemos en forma análoga a la recién expuesta

$$U_0(t,s) m(s,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} (t-s)q} m_n(s) g_n(x)$$

$$U_k(t,s) m(s,x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} (t-s)q} \left(\int_s^t s_n(u_1) \int_s^{u_1} s_n(u_2) \dots \right)$$

$$\dots \int_s^{u_{k-1}} s_n(u_k) du_k du_{k-1} \dots du_2 du_1 \Big) m_n(s) g_n(x)$$

y como cota

$$|U_k(t,s) m(s,x)| < \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\left(\frac{2c^2 (t-s)}{\pi^2 q}\right)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} (t-s)q} \frac{|m_n(s)|}{n^{2k}} \right) <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{\left(\frac{2c^2 (t-s)}{\pi^2 q}\right)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} (t-s)q} \frac{|h_n|}{n^{2k}} \right)$$

ya que, en efecto,

$$\begin{aligned}
 |m_n(t)| &= 2 \frac{|h_n|}{b_n} \left| 1 + \frac{k_n (k_n - 2) e^{\frac{b_n}{2}(t_1 - t)} + 2a_n d_n}{a_n (e^{b_n(t_1 - t)})} \right| < \\
 &< 2 \frac{|h_n|}{b_n} \left| 1 + \frac{k_n (k_n - 2) + 2a_n d_n}{a_n (1 - d_n)} \right| = 2 \frac{|h_n|}{b_n} \left| 1 + \frac{k_n^2 + 4 - 2b_n}{2b_n} \right| \\
 &= 2 \frac{|h_n|}{b_n} \frac{k_n^2 + 4}{2b_n} = |h_n|
 \end{aligned}$$

En virtud de los resultados anteriores obtenemos como expresión para $z(t,x)$ la siguiente

$$\begin{aligned}
 \text{III.46} \quad z(t,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} t^q} \left[f_n \int_0^t s_n(u_1) \int_0^{u_1} s_n(u_2) \dots \right. \right. \\
 &\dots \int_0^{u_{k-1}} s_n(u_k) du_k \dots du_2 du_1 + \\
 &\left. \left. + \int_0^t e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} t^q} m_n(s) \int_s^t s_n(u_2) \dots \int_s^{u_{k-1}} s_n(u_k) du_k \dots du_1 ds \right] g_n(x) \right)
 \end{aligned}$$

Los procedimientos habituales de cálculo numérico exigirían una gran cantidad de memoria para resolver estas integrales a pesar del carácter iterativo de los mismos. No obstante como la serie definida en III.45 o III.46 es alternada y de términos decrecientes el error cometido, en valor absoluto, es inferior al valor absoluto del primer término despreciado. Si éste es el k -simo, el error absoluto es

$$\begin{aligned}
e &= \left| U_k(t,0) f - \int_0^t U_k(t,s) m(s,x) ds \right| < \\
&< \left| U_k(t,0) f \right| + \int_0^t \left| U_k(t,s) m(s,x) \right| ds < \\
&< \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{2c^2}{\pi^2 q} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} tq} \frac{|f_n|}{k! n^{2k}} t^k + |h_n| \frac{1}{n^{2k}} \left(\frac{4c^2}{n^2 \pi^2} \right)^{k+1} \right) < \\
&< \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{2c^2}{\pi^2 q} \right)^k \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi^2}{4c^2} tq}}{k!} \left(\text{Max}_n |f_n| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) t^k + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{4c^2}{q \pi^2} \right)^{k+1} \left(\text{Max}_n |h_n| \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+2}} \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{2c^2}{\pi^2 q} \right)^k \left\{ e^{-\frac{\pi^2}{4c^2} tq} \frac{t^k}{k!} \left(\text{Max}_n |f_n| \right) \frac{2^{2k} \cdot 1 \cdot \pi^{2k} B_k}{(2k)!} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{4c^2}{\pi^2 q} \right)^{k+1} \left(\text{Max}_n |h_n| \right) \frac{2^{4k+1} \pi^{4k+2} B_{2k+1}}{(4k+2)!} \right\}
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{2c^2 (t-s)}{\pi^2 q} \right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{n \pi^2}{4c^2} (t-s)q} \frac{|h_n|}{n^{2k}} \right) ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{2c^2}{\pi^2 q} \right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h_n|}{n^{2k}} \int_0^t (t-s)^k e^{-\frac{n \pi^2}{4c^2} (t-s)q} ds = \\
&= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{2c^2}{\pi^2 q} \right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h_n|}{n^{2k}} \frac{4c^2}{n^2 \pi^2 q}^{k+1} \int_0^{\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} q} u^k e^{-u} du < \\
&< \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{2c^2}{\pi^2 q} \right)^k \left(\frac{4c^2}{\pi^2 q} \right)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h_n|}{n^{4k+2}}
\end{aligned}$$

3.9.- Controlabilidad, observabilidad y estabilidad del modelo

Un problema importante en relación con el modelo es el de su controlabilidad, ésto es, la posibilidad de alcanzar cualquier situación final $h(x)$, del espacio $L^2[-c, c]$, a partir de una situación inicial $f(x)$ del mismo espacio.

Tomando como punto de partida la proposición II.4, tenemos que en nuestro sistema, con $H = H^*$, $B = I$ y A autoadjunto con semigrupo asociado definido por

$$T_{t,z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} t} \left\{ \int_{-c}^c z(x) \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right\} \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx,$$

la controlabilidad exacta en un tiempo t_1 hacia una función $h(x) \in L^2[-c, c]$ vendrá determinada por la existencia de una constante a positiva tal que

$$a \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left(\int_0^{t_1} e^{-2q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} t} dt \right) \int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right\}^2 \geq$$

III.47

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left(\int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

o bien

$$a \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4c^2}{2q n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-2q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} t_1} \right) \left[\int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right]^2 \right\}^{1/2} \geq$$

III.48

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2 \right]^{1/2}$$

Pero no existe una constante a positiva que cumpla esta condición, por lo que el modelo no es exactamente controlable sobre $L^2[-c, c]$. No obstante, el lado derecho de la desigualdad sugiere la posibilidad de que el modelo sea exactamente controlable a algún subespacio de $L^2[-c, c]$ sobre el que podamos definir una norma de la forma

$$\|z\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (bn^2 \int_{-c}^c h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c}x\right) dx)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

donde b es una constante, ya que en dicho caso el segundo miembro de la desigualdad II.53 tomaría la forma

$$\|h^*\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{bn^2} \left(\int_{-c}^c h^*(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c}x\right) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la condición III.48 permitiría la obtención de a . Como tal subespacio tomaremos el

conjunto $C_0^1[-c, c]$, de funciones con derivadas primeras continuas definidas en $[-c, c]$ y soporte compacto, tal como ocurría con las dos funciones finales que se han utilizado en el tratamiento con ordenador. A tal subespacio de $L^2[-c, c]$ le dotamos de la norma (ver ([18]))

$$\|h\| = \left\{ \int_{-c}^c (h(x)^2 + h'(x)^2) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \langle h(x), h(x) \rangle + \langle h'(x), h'(x) \rangle \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Ahora bien, el sistema trigonométrico

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c}x\right) \right\}$$

es ortonormal y completo ([1]), y por tanto

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-c}^c h'(x) \frac{1}{\sqrt{c}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c}x\right) dx \right] \frac{1}{\sqrt{c}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2c} \left[\int_{-c}^c h(x) \frac{1}{\sqrt{c}} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c}x\right) dx \right] \frac{1}{\sqrt{c}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c}x\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\langle h'(x), h'(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} \left(\int_{-c}^c h(x) \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2$$

Análogamente, y considerando el sistema trigonométrico constituido por las autofunciones del sistema, que es también ortonormal y completo, tendríamos

$$\langle h(x), h(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-c}^c h(x) \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2$$

Así pues

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} \right) \left(\int_{-c}^c h(x) \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2$$

Con ésto, la condición III.48 es reemplazada por

III.49

$$a^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c}{qn^2\pi^2} \left(1 - e^{-2q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} t_1} \right) \left(\int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2 \right\} \geq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c} \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} \right)} \left(\int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2$$

El lado izquierdo de III.49 es mayor que

$$a^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c}{q n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-2q \frac{\pi^2}{4c^2} t_1} \right) \left[\int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right]^2 \right.$$

y el derecho menor que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4c}{n^2 \pi^2} \left(\int_{-c}^c h(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x \right) dx \right)^2$$

por lo que a será obtenida de forma que

$$\frac{a^2}{2q} \left(1 - e^{-2q \frac{\pi^2}{4c^2} t_1} \right) \geq 1$$

ésto es,

$$a^2 \geq \frac{2q}{1 - e^{-2q \frac{\pi^2}{4c^2} t_1}}$$

y el modelo es así exactamente controlable en el tiempo t_1 a cualquier función de $C_0^1[-c, c]$.

En particular, y como $h(x) = 0 \in C_0^1[-c, c]$, el modelo es exactamente controlable al estado nulo.

Por otro lado, y aunque no se puede garantizar la controlabilidad a toda función de $L^2[-c, c]$, como

$$T_t h(x) = 0 \implies h(x) = 0, \forall t \in [0, t_1]$$

el modelo es aproximadamente controlable.

Finalmente, el hecho de que todos los autovalores sean negativos garantiza la estabilidad del modelo, por lo que el uso de un control tipo retroalimentación como el empleado tiene por objeto solamente minimizar el funcional de coste.

43

CAPITULO CUARTO

El Modelo Estocástico

Caso General

El Modelo Estocástico

Caso General

4.1.- Formulación del modelo

En este capítulo se analiza un sistema cuya dinámica es similar a la del estudiado en el capítulo II, pero contemplándose la posibilidad tanto de perturbaciones que afecten a la dinámica del sistema como la de que haya también dificultades en la observación de la variable de estado $z(t,x)$, tanto por lo que se refiere a la observación directa de la misma como por una posible perturbación del proceso de observación.

Se considera pues, en primer lugar, el análisis del modelo general que tiene como "proceso de señales" a

$$\begin{aligned} \text{IV.1} \quad \dot{z}(t) &= A z(t) + B u(t) + V \dot{w}(t) + N \dot{P}(t) + g(t) \\ z_0 &= z(0) \end{aligned}$$

como "proceso de observaciones"

$$\text{IV.2} \quad y(t) = \int_0^t C z(s) ds + Lv(t)$$

y como criterio minimizar el funcional de coste definido por

$$\begin{aligned} \text{IV.3} \quad W(u, z_0, h) &= E \left\{ \langle h - z(t_1), K(h - z(t_1)) \rangle + \right. \\ &+ \int_0^{t_1} \langle h - z(s), F(h - z(s)) \rangle ds + \\ &\left. + \int_0^{t_1} \langle u(s), Gu(s) \rangle ds \right\} \end{aligned}$$

para un funcionamiento del sistema durante el intervalo $[0, t_1]$.

En todo lo anterior la estructura de los espacios sobre los que están definidos y valorados los diferentes operadores y funciones es la misma que fué descrita al comienzo del capítulo II, así como los convenios utilizados.

Por lo que respecta a las nuevas entidades que aparecen en el modelo, y sin que esta presentación descarte un análisis posterior más detallado de las mismas, su naturaleza es la siguiente:

- $dw(t)$ es un ruido blanco gaussiano, de cuya integración resulta un proceso de Wiener $W(t)$ definido sobre H y centrado.

- $dP(t)$ es un ruido blanco poissoniano, cuya integración conduce a un proceso de Poisson compuesto, definido sobre H , con incrementos independientes e independiente del anterior y centrado.

- $V, N \in \mathcal{B}_\infty([0, t_1]; L(k, H))$;

- $g \in L^2([0, t_1]; H)$ es un término forzante,

- $z_0 \in L^2((\Omega, \mathcal{F}, P); H)$ es una variable aleatoria que supondremos normal e independiente de los diversos procesos estocásticos del modelo, mientras que (Ω, \mathcal{F}, P) es el espacio probabilístico sobre el que están definidas las componentes aleatorias del modelo.

- $v(t)$ es un proceso de Wiener definido sobre R^k e independiente de los anteriores.

- $C \in \mathcal{B}_\infty(0, t_1]; L(H, R^k)$

Supondremos también la existencia de L^{-1} , que w_0, v_0 y c_0 son los operadores de covarianza incremental de W, v y z_0 respectivamente, siendo

$$v_0, v_0^{-1}, L, L^{-1} \in L_\infty([0, t_1]; L(R^k)).$$

El que el espacio de observaciones sea finito-dimensional es un requisito necesario para la existencia de v^{-1} (ver [7]). Esta restricción no afecta al modelo que nos proponemos analizar pero no siempre es la situación real.

Se trata de minimizar IV.3 sobre un subconjunto E_a del conjunto de leyes de control $L^2([0, t_1]; E_0)$, donde $E_0 = L^2((\Omega, \mathcal{F}, P); E)$. E_a constituirá el conjunto de controles admisibles.

Supondremos, siguiendo la pauta marcada en [7] y [12] para procesos de Wiener centrados y definidos sobre H por

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) g_n$$

donde $w_n(t)$ son procesos de Wiener mutuamente independientes y centrados con

$$E \{ w_n(t)^2 \} = t \sigma_n^2 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty, \text{ en tanto que } \{ g_n \} \text{ es una base ortonormada para}$$

H , que el proceso poissoniano centrado de nuestro modelo puede representarse como

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) g_n$$

donde $P_n(t)$ son procesos poissonianos centrados y mutuamente independientes con $E\{P_n(t)\} = \lambda_n t$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. Supondremos que $\text{Cov}(P(t), P(s)) = \lambda \text{Min}(s, t)$.

En ([12]) se prueba que, para un proceso de Wiener centrado y valorado sobre H , la integral estocástica

$$\text{IV.4} \quad I(t) = \int_0^t f(s) dW(s)$$

es un proceso estocástico centrado, valorado sobre H , con las propiedades

$$\text{a) } E \left\{ \int_0^t \|f(s) dW(s)\|^2 \right\} \leq \text{traza}(W_0) \int_0^t \|f(s)\|^2 ds$$

b) $\{I(t), \mathcal{F}_t\}$, donde \mathcal{F}_t es la sigma algebra generada por $\{w(s)\} (0 \leq s \leq t)$, es una martingala.

c) $I(t)$ tiene una versión separable con trayectorias continuas

$$\text{d) } \text{Cov} \{I(t) - I(s)\} = \int_s^t f(s) w_0 f^*(s) ds.$$

En el siguiente apartado analizaremos las propiedades de la integral estocástica

$$\text{IV.5} \quad X(t) = \int_0^t f(s) dP(s)$$

siguiendo la via clásica de la integral de Itô. Supondremos en primer lugar que $P(s)$ es un proceso de Poisson no centrado y particularizaremos luego los resultados al caso de procesos centrados.

4.2.- Propiedades de la integral estocástica poissoniana

Sea $P(t)$ un proceso de Poisson valorado sobre un espacio de Hilbert H , del que $\{g_n\}$ es una base ortonormada, de la forma

$$IV.6 \quad P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) g_n$$

donde $\{P_n(t)\}$ es una familia de procesos poissonianos reales, del mismo tipo e independientes y de parámetro λ_n , con $\sum \lambda_n = \lambda_1^* < \infty$ y $\sum \lambda_n^2 = \lambda_2^*$.

Se tiene entonces que

$$E \{ P(t) \} = r(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n \right) t = \lambda t$$

$$E \{ \| P(t) - P(s) \|^2 \} = (t-s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\lambda_n + 1) \right) = (t-s)(\lambda_2^* + \lambda_1^*)$$

y el proceso

$$P^*(t) = P(t) - r(t)$$

es un proceso centrado cuyo operador de covarianza es

$$E \{ (P^*(t) - P^*(s)) \circ (P^*(t) - P^*(s)) \} = M(t-s)$$

siendo $Mg_n = \lambda_n g_n$.

Definimos entonces la integral de $f(t) \in B^2([0, t], L(H))$ respecto a tal proceso de Poisson como

$$IV.7 \quad X(t) = \int_0^t f(s) dP(s) = \lim_{\delta_k \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} f(s_i) (P(s_{i+1}) - P(s_i))$$

donde δ_k representa la norma de una partición del intervalo $[0, t]$ y donde el límite debe entenderse en media cuadrática. Si el proceso es representable en la forma IV.6, la integral IV.7 puede expresarse como

$$IV.8 \quad X^0(t) = \int_0^t f(s) dP(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f(s) dP_n(s)$$

Analicemos la consistencia de la definición IV.7 y las propiedades de $X(t)$. Comenzaremos suponiendo que $f(t)$ es una función simple tal que

$$f(s) = c_n, \quad s \in [s_n, s_{n+1}]$$

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t$$

Para estas funciones la integral poissoniana se define de forma natural como

$$X(t) = \int_0^t f(s) dP(s) = \sum_{n=0}^{k-1} c_n (P(s_{n+1}) - P(s_n))$$

y tiene las siguientes propiedades:

$$a) E \{ X(t) \} = \sum_{n=0}^{k-1} c_n E (P(s_{n+1}) - P(s_n)) = \lambda \sum_{n=0}^{k-1} c_n (s_{n+1} - s_n) = \lambda \int_0^t f(s) ds$$

donde λ^* es el parámetro característico del proceso $P(s)$

$$b) E \{ \|X(t)\|^2 \} = E \left[\left\langle \int_0^t f(s) dP(s), \int_0^t f(s) dP(s) \right\rangle \right] =$$

(ya que $P(t)$ tiene incrementos ortogonales)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{k-1} \langle c_n, c_n \rangle E \{ \|P(s_{n+1}) - P(s_n)\|^2 \} = \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} (\lambda_1^* + \lambda_2^*) (s_{n+1} - s_n) \langle c_n, c_n \rangle = \\ &= (\lambda_1^* + \lambda_2^*) \int_0^t \langle f(s), f(s) \rangle ds \end{aligned}$$

En el caso de que $P(s)$ sea un proceso centrado los resultados de a) y b) se reducen a

$$E \{ X(t) \} = 0, \quad E \{ \|X(t)\|^2 \} = \lambda_1^* \int_0^t \langle f(s), f(s) \rangle ds$$

Entonces

c) Sean ahora $f_1(s)$ y $f_2(t)$ dos funciones simples y supongamos $t_1 < t_2$.

$$E \left[\left\langle \int_0^{t_1} f_1(s) dP(s), \int_0^{t_2} f_2(s) dP(s) \right\rangle \right] =$$

$$= E \left[\left\langle \sum_{n=0}^{k_1-1} c_{1,n} (P(s_{n+1}) - P(s_n)), \sum_{n=0}^{k_2-1} c_{2,i} (P(s'_{i+1}) - P(s'_i)) \right\rangle \right] =$$

(tomando una partición constituida por las dos particiones de cada integral)

$$= E \left[\left\langle \sum_{j=0}^{r_1-1} c_{1,j} (P(t'_{j+1}) - P(t'_j)), \sum_{j=0}^{r_2-1} c_{2,j} (P(t'_{j+1}) - P(t'_j)) \right\rangle \right] =$$

(por la ortogonalidad de los incrementos de $P(t)$)

$$= E \left[\left\langle \sum_{j=0}^{r_1-1} c_{1,j} (P(t'_{j+1}) - P(t'_j)), \sum_{j=0}^{r_1-1} c_{2,j} (P(t'_{j+1}) - P(t'_j)) \right\rangle \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{r_1-1} \langle c_{1,j}, c_{2,j} \rangle E \left\{ \left\| P(t'_{j+1}) - P(t'_j) \right\|^2 \right\} =$$

$$= (\lambda_1^* + \lambda_2^*) \sum_{j=0}^{r_1-1} (t'_{j+1} - t'_j) \langle c_{1,j}, c_{2,j} \rangle = (\lambda_1^* + \lambda_2^*) \int_0^{t_1} \langle f_1(s), f_2(s) \rangle ds$$

d) Por un razonamiento análogo a este último, tenemos que si $g_1, g_2 \in H$, $f_1(s)$ y $f_2(s)$ son dos funciones simples y $t_1 < t_2$

$$E \left[\left\langle \int_0^{t_1} f_1(s) dP(s), g_1 \right\rangle \left\langle \int_0^{t_2} f_2(s) dP(s), g_2 \right\rangle \right] =$$

$$= (\lambda_1^* + \lambda_2^*) \int_0^{t_1} \langle f_1(s), g_1 \rangle \langle f_2(s), g_2 \rangle ds$$

Para procesos centrados los resultados de c) y d) se convierten en

$$E \left[\left\langle \int_0^{t_1} f_1(s) dP(s), \int_0^{t_2} f_2(s) dP(s) \right\rangle \right] = \lambda_1^* \int_0^{\min(t_1, t_2)} \langle f_1(s), f_2(s) \rangle ds$$

$$\begin{aligned}
& E \left[\left\langle \int_0^{t_1} f_1(s) dP(s), g_1 \right\rangle \left\langle \int_0^{t_2} f_2(s) dP(s), g_2 \right\rangle \right] = \\
& = \lambda_1^* \int_0^{\text{Min}(t_1, t_2)} \langle f_1(s), g_1 \rangle \langle f_2(s), g_2 \rangle ds
\end{aligned}$$

Sea ahora una función $f(s) \in B^2([0, t_1], L(H))$, es decir, una función

fuertemente medible tal que $\int_0^{t_1} \|f\|^2 ds < \infty$. Como las funciones simples son

densas en $B^2([0, t_1], L(H))$, existirá una sucesión $\{f_n\}$ de funciones convergente a f , tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} \|f - f_n\|^2 ds = 0$$

Entonces los procesos

$$X(t) = \int_0^t f(s) dP(s)$$

$$X_n(t) = \int_0^t f_n(s) dP(s) \quad (n=1, 2, \dots)$$

son medibles respecto a la σ -álgebra \mathcal{F}_t generada por $\{P(s); 0 \leq s \leq t\}$ y

$$\begin{aligned}
& E \left[\|X(t) - X_n(t)\|^2 \right] = E \left[\left\| \int_0^t (f(s) - f_n(s)) dP(s) \right\|^2 \right] = \\
& = E \left\{ \left\langle \int_0^t (f(s) - f_n(s)) dP(s), \int_0^t (f(s) - f_n(s)) dP(s) \right\rangle \right\} = \\
& = \lambda_1^* \int_0^t \langle f(s) - f_n(s), f(s) - f_n(s) \rangle ds = \\
& = \lambda_1^* \int_0^t \|f(s) - f_n(s)\|^2 ds \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Por tanto

$$X(t) = \int_0^t f(s) dP(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(s) dP(s)$$

donde el límite debe entenderse en media cuadrática.

El proceso $X(t)$ tiene las mismas propiedades que las obtenidas para las funciones paso.

d) $\forall t \in [0, t_1]$ y $0 \leq s \leq t$, se tiene que

$$E \left[X(t) / \mathcal{F}_s \right] = X(s) + \lambda \int_0^t f(t) dt$$

donde \mathcal{F}_s es la σ -álgebra generada por $P(s)$ y $X(t)$ es la integral poissoniana de $f(t)$.

En efecto, en el caso de que $f(t)$ sea una función simple se tiene que

$$X(t) = X(s) + \int_s^t f(s) dP(s) = X(s) + \sum_{s \leq s_r \leq t}^{k-1} c_r (P(s_{r+1}) - P(s_r))$$

de donde

$$\begin{aligned} E \left[X(t) / \mathcal{F}_s \right] &= X(s) + \sum_{s \leq s_r \leq t}^{k-1} c_r E (P(s_{r+1}) - P(s_r) / \mathcal{F}_s) = \\ &= X(s) + \sum_{s \leq s_r \leq t}^{k-1} c_r E (P(s_{r+1}) - P(s_r)) = X(s) + \lambda \int_s^t f(x) dx \end{aligned}$$

por la independencia de los incrementos de $P(t)$, y por la misma razón expuesta en la propiedad c), lo anterior es también cierto para toda función $f \in B^2([0, t_1], L(H))$.

En el caso particular de que $P(s)$ sea centrado el resultado anterior se convierte en

$$E \left[X(t) / \mathcal{F}_s \right] = X(s)$$

es decir, integral $X(t)$ es una martingala respecto a \mathcal{F}_t valorada sobre H , para todo $t \in [0, t_1]$.

e) $X(t)$ tiene una versión separable con trayectorias continuas a la derecha.

En efecto:

$$P \left[\| X(t+\delta) - X(t) \| > k \right] = P \left[\| X(t+\delta) - X(t) \|^2 > k^2 \right] \leq \\ \frac{1}{k^2} E \left[\| X(t+\delta) - X(t) \|^2 \right]$$

(en aplicación del teorema de Tchebychef)

$$= \frac{1}{k^2} E \left[\left\| \int_t^{t+\delta} f(s) dP(s) \right\|^2 \right] = \\ = \frac{1}{k^2} E \left[\left\| \sum_{t \leq s_r \leq t+\delta}^{k-1} f(s_r) (P(s_{r+1}) - P(s_r)) \right\|^2 \right] = (\text{por propiedad c}) \\ = \frac{\lambda_1^* \lambda_2^*}{k^2} \int_t^{t+\delta} \langle f(s), f(s) \rangle ds = \frac{\lambda_1^* \lambda_2^*}{k^2} \int_t^{t+\delta} \|f(s)\|^2 ds < \\ \frac{(\lambda_1^* + \lambda_2^*)}{k^2} \delta \text{ Max } \|f(t)\|^2 \rightarrow 0, \text{ cuando } \delta \rightarrow 0.$$

Por tanto, $X(t)$ es continua en probabilidad. Por otro lado como el conjunto

$$J = \left\{ \frac{mt_1}{2^n}, m = 0, 1, \dots, 2^n; n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

es denso en $[0, t_1]$, existe una versión separable (ver ([14])) $\tilde{X}(t)$ de $X(t)$, que tiene a J como separador.

El que no tenga trayectorias continuas es debido precisamente a la naturaleza de los fenómenos físicos que modela el proceso de Poisson: fenómenos en los que existe la posibilidad de perturbaciones impulsivas. Ahora bien, como la probabilidad de uno o más impulsos en un intervalo $t, t+\delta$ tiende a 0 cuando lo hace δ , tenemos que, con probabilidad 1, $X(t)$ tiene trayectorias continuas a la derecha que poseen, como máximo, un número finito de saltos en todo subintervalo de $[0, t_1]$.

Para el proceso poissoniano $P(t)$ definido en IV.6 vamos a estudiar las propiedades de la integral IV.8 para funciones pertenecientes a $B^2([0, t_1]; L(H))$, aunque de hecho bastará probar que el proceso

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n P_n(t)$$

está bien definido. En efecto

$$\begin{aligned} E \left[\left\| \int_0^t f(s) dP(s) \right\|^2 \right] &= E \left[\left\langle \int_0^t f(s) dP(s), \int_0^t f(s) dP(s) \right\rangle \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E \left[\left\langle g_n \int_0^t f(s) dP_n(s), g_k \int_0^t f(s) dP_k(s) \right\rangle \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\left\langle g_n \int_0^t f(s) dP_n(s), g_n \int_0^t f(s) dP_n(s) \right\rangle \right] = (\text{por propiedad c}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_n^2) \int_0^t \langle f(s) g_n, f(s) g_n \rangle ds = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_n^2) \int_0^t \|f(s) g_n\|^2 ds \leq \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_n^2) \int_0^t \|f(s)\|^2 \|g_n\|^2 ds < \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_n^2) \right) \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

lo que demuestra que $X^0(t) \in L^2([0, t_1] \times (\Omega, \mathcal{F}, P); H)$.

El carácter lineal del operador esperanza matemática garantiza, supuesto el carácter regular del proceso que acabamos de demostrar, que $X^0(t)$ tiene todas las propiedades antes analizadas para la integral estocástica de tipo poissoniano.

Para procesos representables de esta forma se prueba la siguiente proposición.

4.3. Proposición IV.1

Sea A un operador lineal y cerrado de H en H . Si $\forall n, V(s)g_n, N(s)g_n \in D(A)$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \int_0^{t_1} AV(s)g_n^2 ds < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_0^{t_1} AN(s)g_n^2 ds < \infty$$

entonces:

a) $\int_0^{t_1} V(s) dW(s), \int_0^{t_1} N(s) dP(s) \in D(A)$ con probabilidad 1 y tienen

esperanzas finitas.

b) $A \int_0^{t_1} V(s) dW(s) = \int_0^{t_1} AV(s) dW(s)$ con probabilidad 1 y tiene

trayectorias continuas.

c) $A \int_0^{t_1} N(s) dP(s) = \int_0^{t_1} AN(s) dP(s)$ con probabilidad 1 y tiene

trayectorias continuas a la derecha.

Comenzaremos probando que

$$A \int_0^{t_1} V(s) g_n dW_n(s) = \int_0^{t_1} AV(s) g_n dW_n(s).$$

Esto es cierto en el caso de que $V(s)$ sea una función simple por la definición de integral estocástica y el carácter lineal de A , cumpliéndose además que

$$\int_0^{t_1} V(s) g_n dW_n(s) \in D(A)$$

y, por ser A cerrado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t_1} V(s) g_n dw_n(s) \in D(A)$$

Si $V(s)$ no es una función simple, dado que las funciones simples son densas en $L^2([0, t_1], D(A))$ y que A es cerrado, existe una sucesión de funciones simples $\{f_{n,k}\}$ convergentes a $V(s)g_n$ tales que

$$\int_0^t \|V(s)g_n - f_{n,k}\|^2 ds \rightarrow 0, \quad \int_0^t \|AV(s)g_n - Af_{n,k}\|^2 ds \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$. Si

$$X_{n,k} = \int_0^{t_1} f_{n,k} dw_n(s)$$

se tiene que

$$X_{n,k} \longrightarrow X_n = \int_0^{t_1} V(s)g_n dw_n(s), \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

ya que, considerando la norma en el espacio $L^2((\Omega, \mathcal{F}, P); H)$ y en virtud de las propiedades de la integral estocástica para procesos de Wiener (en ([11]))

$$E \left\| \int_0^{t_1} V(s)g_n dw_n(s) - \int_0^{t_1} f_{n,k} dw_n(s) \right\|^2 \leq$$

$$\left(\int_0^{t_1} \|V(s)g_n - f_{n,k}\|^2 ds \right) \sigma_n^2 \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

por la condición IV.8. Entonces, por ser A cerrado y lineal y las hipótesis de partida,

$$A \int_0^{t_1} f_{n,k} dw_n(s) = \int_0^{t_1} Af_{n,k} dw_n(s) \rightarrow$$

$$A \int_0^{t_1} V(s)g_n dw_n(s) = \int_0^{t_1} AV(s)g_n dw_n(s)$$

de donde, por el carácter lineal de $AV(s)$,

$$\begin{aligned} A \int_0^{t_1} V(s) dw(s) &= A \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t_1} V(s) g_n dw_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A \int_0^{t_1} V(s) g_n dw_n(s) \\ &= \int_0^{t_1} \sum_{n=1}^{\infty} AV(s) g_n dw_n(s) = \int_0^{t_1} AV(s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n dW_n(s) \right) = \int_0^{t_1} AV(s) dw(s) \end{aligned}$$

En ([12]) se prueba el carácter de $\int_0^t AV(s) dw(s)$ como martingala con trayectorias continuas.

Una demostración análoga, ya que solo hemos utilizado la propiedad del proceso de Wiener de tener incrementos independientes, sirve para la parte correspondiente al proceso $P(t)$ en el caso de que sea centrado exceptuando el que la martingala integral tiene trayectorias solo continuas a la derecha. Para procesos poissonianos no centrados esta última propiedad se pierde.

Se define la solución suave de IV.1 como

$$\begin{aligned} \text{IV.9} \quad z(t) &= T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} Bu(s) ds + \int_0^t T_{t-s} V dw(s) + \int_0^t T_{t-s} NdP(s) + \\ &+ \int_0^t T_{t-s} g(s) ds \end{aligned}$$

donde T_t es el semigrupo generado por A .

En ([3]) y ([12]) se demuestra que IV.9 es un proceso estocástico bien definido valorado sobre H y, $\forall h \in H$, $\langle h, z(t) \rangle$ es continuo en probabilidad sobre $[0, t_1]$, e incluso, si solo hubiera perturbaciones gaussianas, continuo en media cuadrática.

La ecuación IV.1 tiene una solución fuerte $z(t)$ si

$$z(t) \in C([0, t]; L^2[(\Omega, \mathcal{F}, P); H]); z(t) \in D(A)$$

y $z(t)$ satisface IV.1 sobre $[0, t_1] \times (\Omega, \mathcal{F}, P)$ con probabilidad 1. La solución se considera

única si cualquier otra solución fuerte $z_1(t)$ es tal que

$$P \left[\sup_{[0, t_1]} \|z(t) - z_1(t)\| \neq 0 \right] = 0$$

La siguiente proposición da condiciones para la existencia de una única solución fuerte de IV.1

4.4. Existencia de una única solución fuerte para la dinámica del modelo.

Proposición IV.2

Sea A un operador cerrado y lineal de H en H y T_t el semigrupo fuertemente continuo generado por él. Supongamos que, $\forall n$ y con probabilidad 1, se cumple

$$a) T_{t-s} V(s)g_n, T_{t-s} N(s)g_n, T_{t-s} B u(s), T_t z_0 \in D(A), \quad s, t \in [0, t_1]$$

$$b) \int_0^t \|A T_{t-s} B u(s)\| ds < \infty$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \int_0^t \|A T_{t-s} V(s)g_n\|^2 ds + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_0^t \|A T_{t-s} N(s)g_n\|^2 ds < \infty$$

Entonces IV.9 es la única solución fuerte de IV.1

En efecto, las hipótesis b) y c) garantizan la aplicación de la proposición IV.1, en virtud de la cual las dos integrales estocásticas de IV.9 son continuas en probabilidad por lo que también lo será $z(t)$ definida por IV.9.

La hipótesis a) y la proposición IV.1 permiten establecer que, con probabilidad 1,

$$\int_0^t T_{t-s} V(s) dW(s), \quad \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s) \in D(A)$$

mientras que la misma hipótesis a) y el ser A cerrado establecen que, con probabilidad 1,

$$\int_0^t T_{t-s} B u(s) ds \in D(A)$$

y, en consecuencia y con probabilidad 1, $z(t) \in D(A)$.

Finalmente, por la proposición IV.1 y una generalización, ([12]), del teorema de Fubini a integrales estocásticas, tenemos que

$$IV.10 \quad A \int_0^t T_{t-s} V(s) dW(s) = \int_0^t AT_{t-s} V(s) dW(s)$$

y, con probabilidad 1,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\int_0^s AT_{s-r} V(r) dW(r) \right) ds = \int_0^t \left(\int_r^t AT_{t-r} V(r) ds \right) dW(r) = \\ & = \int_0^t (T_{t-r} V(r) - V(r)) dW(r) = \int_0^t T_{t-r} V(r) dW(r) - \int_0^t V(r) dW(r) \end{aligned}$$

y por la misma razón

$$\int_0^t \left(\int_0^s AT_{s-r} N(r) dP(r) \right) ds = \int_0^t T_{t-r} N(r) dP(r) - \int_0^t N(r) dP(r)$$

mientras que, por el teorema de Fubini ordinario,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\int_0^s AT_{s-r} Bu(r) dr \right) ds = \int_0^t T_{t-r} Bu(r) dr - \int_0^t Bu(r) dr \\ & \int_0^t \left(\int_0^s AT_{s-r} g(r) dr \right) ds = \int_0^t T_{t-r} g(r) dr - \int_0^t g(r) dr \end{aligned}$$

Con IV.10 y estos resultados hemos establecido que

$$\begin{aligned} & \int_0^t A \left\{ \int_0^t T_{s-r} Bu(r) dr + \int_0^t T_{s-r} V(r) dW(r) + \int_0^t T_{s-r} N(r) dP(r) + \right. \\ & \left. + \int_0^t T_{t-s} g(r) dr \right\} = \int_0^t (T_{t-r} Bu(r) dr + T_{t-r} V(r) dW(r) + T_{t-r} N(r) dP(r) + \\ & + T_{t-r} g(r) dr - Bu(r) dr - V(r) dW(r) - N(r) dP(r) - g(r) dr) \end{aligned}$$

Pero el primer miembro de la anterior igualdad es

$$\int_0^t A(z(s) - T_s z_0) ds = \int_0^t Az(s) ds - T_t z_0 + z_0$$

mientras que el segundo es

$$z(t) - T_t z_0 - \int_0^t Bu(s) ds - \int_0^t V(s) dW(s) - \int_0^t N(s) dP(s) - \int_0^t g(s) ds$$

de donde $z(t)$, definida por IV.9, es expresable como

$$z(t) = z_0 + \int_0^t Az(s) ds + \int_0^t Bu(s) ds + \int_0^t V(s) dW(s) + \int_0^t N(s) dP(s) + \int_0^t g(s) ds$$

que satisface IV.1 y es, por tanto, una solución fuerte con trayectorias continuas a la derecha.

La unicidad está garantizada porque la solución de

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad z(0) = z_0$$

es única y por la linealidad de A .

Este tipo de demostración es el utilizado por R.F. Curtain en [7] para demostrar el teorema fundamental sobre el problema de la estimación bajo control cero, y sobre el cual descansará la aplicación del teorema de separación, que es el número 9 de la lista.

Curtain e Ichikawa en [14] abordan el problema del control óptimo bajo perturbaciones ocasionadas por procesos de Wiener. Nosotros analizaremos el caso del control óptimo bajo perturbaciones ocasionadas por procesos de Poisson.

4.5. Control óptimo para observaciones completas

Se trata de determinar el control óptimo para el proceso de señales definido por

$$IV.11 \quad z(t) = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} Bu(s) ds + \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s) + \int_0^t T_{t-s} g(s) ds$$

que minimice el funcional de coste definido por

$$\text{IV.12} \quad W(u, z_0, h) = E \left\{ \langle z(t_1) - h, K(z(t_1) - h) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z(s) - h, F(z(s) - h) \rangle ds + \int_0^{t_1} \langle u(s), Gu(s) \rangle ds \right\}$$

Llamaremos $U = L^2(\Omega, \mathcal{P}; E)$ y $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{P}; H)$. \mathcal{H} es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{H}} = E \left\{ \langle y_1(w), y_2(w) \rangle_H \right\}$$

mientras que $U_1 = L^2([0, t_1]; U)$ y $\mathcal{H}_1 = L^2([0, t_1]; \mathcal{H})$ son espacios de Hilbert con productos escalares definidos respectivamente por

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{U_1} = \int_0^{t_1} E \left(\langle u_1(t, w), u_2(t, w) \rangle_E \right) dt$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} = \int_0^{t_1} E \left(\langle v_1(t, w), v_2(t, w) \rangle_H \right) dt$$

donde la esperanza es la condicionada por \mathcal{F}_s , la σ -álgebra engendrada por $P(s)$, ($0 \leq s \leq t$). Con estas notaciones IV.12 se expresa como

$$\text{IV.13} \quad W(u, z_0, h) = \langle z(t_1) - h, K(z(t_1) - h) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle z(t) - h, F(z(t) - h) \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle u(t), Gu(t) \rangle_{U_1}$$

y, siguiendo una técnica desarrollada por Balakrishnan en [5], definimos

$$s(t) = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s) + \int_0^t T_{t-s} g(s) ds - h$$

$$J_t u = \int_0^t T_{t-s} Bu(s) ds$$

donde $J_t \in L(U_1, \mathcal{K}_1)$ y $J_{t_1} \in L(u_1, H)$; con é llo IV.13 se reescribe como

$$\begin{aligned} \text{IV.14} \quad W(u, z_0, h) = & \int_{\mathcal{K}} \langle s(t_1) + J_{t_1} u, K(s(t_1) + J_{t_1} u) \rangle + \int_{\mathcal{K}_1} \langle s(t) + J_t u, F(s(t) + J_t u) \rangle + \\ & + \int_{U_1} \langle u(t), G u(t) \rangle \end{aligned}$$

Balakrishnan prueba que este tipo de funcionales son convexos e inferiormente semicontinuos, existiendo un ú nico control u^0 , funci3n medible respecto a \mathcal{F}_s , que lo minimiza. En nuestro caso, el m3nimo de la forma cuadr3tica IV.14 viene dado por

$$\text{IV.15} \quad G u^0 + J_{t_1}^* K(s(t_1) + J_{t_1} u^0) + J_t^* F(s(t) + J_t u^0) = 0$$

El problema es pues el c3lculo de $J_{t_1}^*$ y J_t^* . Para J_t^* tenemos que, $\forall x \in \mathcal{K}_1$,

$$\begin{aligned} \langle J_t^* x, u^0 \rangle &= \langle x, J_t u^0 \rangle = \int_0^{t_1} E \left(\langle x(t), \int_0^t T_{t-s} B u^0(s) ds \rangle_H \right) dt = \\ &= \int_0^{t_1} E \left(\int_0^t \langle x(t), T_{t-s} B u^0(s) \rangle_H ds \right) dt = \\ &= \int_0^{t_1} E \left(\int_s^{t_1} \langle x(t), T_{t-s} B u^0(s) \rangle_H dt \right) ds = \\ &= \int_0^{t_1} E \left(\int_s^{t_1} \langle B^* T_{t-s}^* x(t), u^0(s) \rangle_E dt \right) ds = \\ &= \int_0^{t_1} E \left(\langle \int_s^{t_1} B^* T_{t-s}^* x(t) dt, u^0(s) \rangle_E \right) ds = \int_0^{t_1} E \langle i(s), u^0(s) \rangle_E ds \end{aligned}$$

Ahora bien

$$E \langle i(s), u^0(s) \rangle_E = E \left\{ E \left(\langle i(s), u^0(s) \rangle / \mathcal{F}_s \right) \right\} = E \left\{ \langle E(i(s) / \mathcal{F}_s), u^0(s) \rangle \right\}$$

dado que $u^0(s)$ es medible respecto a \mathcal{F}_s . Por tanto

$$\begin{aligned} \langle J_t^* x, u^0 \rangle_{U_1} &= \int_0^{t_1} E \left\langle E \left(\int_t^{t_1} B^* T_{s-t}^* x(s) ds / \mathcal{F}_t \right), u^0(s) \right\rangle_E ds = \\ &= \langle E \left(\int_t^{t_1} B^* T_{s-t}^* x(s) ds / \mathcal{F}_t \right), u^0(s) \rangle_{U_1} \end{aligned}$$

y así

$$IV.16 \quad J_t^* x = E \left(\int_t^{t_1} B^* T_{s-t}^* x(s) ds / \mathcal{F}_t \right)$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \langle J_{t_1}^* x, u^0 \rangle_{U_1} &= \langle x, J_{t_1} u^0 \rangle_{\mathcal{H}} = E \langle x, J_{t_1} u^0 \rangle_H = \\ &= E \left\langle x, \int_0^{t_1} T_{t_1-t} B u^0(t) dt \right\rangle = \int_0^{t_1} E \langle B^* T_{t_1-t}^* x, u^0(t) \rangle_E dt = \\ &= \langle B^* T_{t_1-t}^* x, u \rangle_{U_1} \end{aligned}$$

de donde

$$IV.17 \quad J_{t_1-t}^* x = B^* T_{t_1-t}^* x$$

Supuesta entonces la existencia de G^{-1} , resulta

$$\begin{aligned} IV.18 \quad u^0(t) &= -G^{-1} B^* \left[T_{t_1-t}^* K(s(t_1) + J_{t_1} u^0) + E \left(\int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s(r) + J_r u^0) dr / \mathcal{F}_t \right) \right] = \\ &= -G^{-1} B^* \left[T_{t_1-t}^* K(s(t_1) + J_{t_1} u^0) + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F E(s(r) + J_r u^0(r) / \mathcal{F}_t) dr \right] \end{aligned}$$

Como para $r > t$, $E(s(r) + J_r u^0(r) / \mathcal{F}_t) = z^0(r) - h$, ya que debido a la ortogonalidad de los incrementos de $P(t)$ lo anterior equivale a hacer intervenir la dinámica del sistema a partir de $z^0(t)$, valor de la variable de estado bajo el control u^0 , como valor original, podemos poner

$$\begin{aligned}
\text{IV.19} \quad u^0(t) &= -G^{-1}B^* \left\{ T_{t_1-t}^* K(z^0(t_1)-h) + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) (z^0(s)-h) ds \right\} = \\
&= -G^{-1}B^* \left\{ T_{t_1-t}^* K z^0(t_1) + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) z^0(s) ds - \right. \\
&\quad \left. - (T_{t_1-t}^* K h + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* f(s) h ds) \right\} = -G^{-1}B^* (q(t)-k(t))
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $s > t$ y bajo el control $u^0(t)$

$$\begin{aligned}
\text{IV.20} \quad z^0(s) &= T_{s-t} z^0(t) - \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* q(x) ds + \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* K(x) dx + \\
&+ \int_t^s T_{s-x} N(x) dP(x) + \int_t^s T_{s-x} g(x) dx
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\text{IV.21} \quad q(t) &= \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) \left\{ T_{s-t} z^0(t) - \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* q(x) dx + \right. \\
&+ \left. \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* k(x) dx + \int_t^s T_{s-x} N(x) dP(x) + \int_t^s T_{s-x} g(x) dx \right\} ds + \\
&+ T_{t_1-t}^* K \left\{ T_{t_1-t} z^0(t) - \int_t^{t_1} T_{t_1-x} B G^{-1} B^* q(x) dx + \int_t^{t_1} T_{t_1-x} B G^{-1} B^* k(x) dx + \right. \\
&+ \left. \int_t^{t_1} T_{t_1-x} N(x) dP(x) + \int_t^{t_1} T_{t_1-x} g(x) dx \right\}
\end{aligned}$$

Ahora bien, recordando que

$$E_{\mathcal{F}_t} \left\{ \int_t^s T_{s-x} N(x) dP(x) \right\} = \lambda \int_t^s T_{s-x} N(x) dx$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 \text{IV.22} \quad E_{\mathcal{F}_t} \{ z^0(s) \} &= \bar{z}^0(s) = T_{s-t} z^0(t) - \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* \bar{q}(x) + \\
 &+ \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* k(x) dx + \int_t^s T_{s-x} N(x) dx + \int_t^s T_{s-x} g(x) dx
 \end{aligned}$$

donde $\bar{z}^0(t) = z^0(t)$ y $\bar{q}(s) = E_{\mathcal{F}_t} \{ q(s) \}$ con $\bar{q}(t) = q(t)$. De aquí resulta

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \left(\int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) T_{s-t} ds + T_{t_1-t}^* K T_{t_1-t} \right) z^0(t) - \\
 &- \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) \left[\int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) dx \right] ds - \\
 &- T_{t_1-t}^* K \int_t^{t_1} T_{t_1-x} B G^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) dx + \\
 &+ \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) \left(\int_t^s T_{s-x} (\lambda N(x) + g(x)) dx \right) ds + \\
 &+ T_{t_1-t}^* K \int_t^{t_1} T_{t_1-x} (\lambda N(x) + g(x)) ds = \\
 &= \left(\int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) T_{s-t} ds + T_{t_1-t}^* K T_{t_1-t} \right) z^0(t) - \\
 &- \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) \left[\int_x^{t_1} T_{s-x} B G^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) ds \right] dx - \\
 &- T_{t_1-t}^* K \int_t^{t_1} T_{t_1-x} B G^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) dx + \\
 &+ \int_t^{t_1} \left(T_{s-t}^* F(s) \int_x^{t_1} T_{s-x} (\lambda N(x) + g(x)) ds \right) dx + \\
 &+ T_{t_1-t}^* K \int_t^{t_1} T_{t_1-x} (\lambda N(x) + g(x)) dx
 \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta el resultado II.35, podemos poner

$$\begin{aligned}
q(t) = & \left(T_{t_1-t}^* K T_{t_1-t} + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* \left[F(s) - S(s) BG^{-1} B^* S(s) \right] T_{s-t} ds + \right. \\
& + \left. \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-t} ds \right) z^0(t) - \int_t^{t_1} T_{x-t}^* \left[T_{t_1-x}^* K T_{t_1-x} + \right. \\
& + \left. \int_x^{t_1} T_{s-x}^* \left[F(s) - S(s) BG^{-1} B^* S(s) \right] T_{s-x} ds + \right. \\
& + \left. \int_x^{t_1} T_{s-x}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-x} ds \right] BG^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) dx + \\
& + \int_t^{t_1} T_{x-t}^* \left[T_{t_1-x}^* K T_{t_1-t} + \int_x^{t_1} T_{s-x}^* \left[F(s) - S(s) BG^{-1} B^* S(s) \right] T_{s-x} ds + \right. \\
& + \left. \int_x^{t_1} T_{s-x}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-x} ds \right] (\lambda N(x) + g(x)) dx
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
q(t) = & S(t) + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-t} ds z^0(t) - \\
& - \int_t^{t_1} T_{x-t}^* \left[S(x) + \int_x^{t_1} T_{s-x}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-x} ds \right] BG^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) dx + \\
& + \int_t^{t_1} T_{x-t}^* \left[S(x) + \int_x^{t_1} T_{s-x}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-x} ds \right] (\lambda N(x) + g(x)) dx = \\
= & S(t) z^0(t) + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) BG^{-1} B^* (S(s) T_{s-t} z^0(t) - (\bar{q}(s) - k(s))) ds - \\
& - \int_t^{t_1} T_{x-t}^* \left[\int_t^s T_{s-x}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-x} BG^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) dx \right] ds \\
& + \int_t^{t_1} T_{x-t}^* \left[\int_t^s T_{s-x}^* S(s) BG^{-1} B^* S(s) T_{s-x} (\lambda N(x) + g(x)) dx \right] ds + \\
& + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) (\lambda N(s) + g(s)) ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S(t)z^0(t) + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) B G^{-1} B^* \left[S(s) (T_{s-t} z^0(t) - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* (q(x) - k(x)) dx - (\bar{q}(s) - k(s)) \right] ds + \\
&\quad + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) B G^{-1} B^* S(s) \left(\int_t^s T_{s-x} (\lambda N(x) + g(x)) dx \right) ds + \\
&\quad + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) (\lambda N(s) + g(s)) ds
\end{aligned}$$

Pero

$$T_{s-t} z^0(t) - \int_t^s T_{s-x} B G^{-1} B^* (\bar{q}(x) - k(x)) dx + \int_t^s T_{s-x} (\lambda N(x) + g(x)) dx$$

es, para $s > t$, $E_{\mathcal{F}_t} \{ z^0(s) \} = \bar{z}^0(s)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\text{IV.23} \quad q(t) - k(t) - S(t)z^0(t) &= - \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) B G^{-1} B^* \{ \bar{q}(s) - k(s) - S(s)\bar{z}^0(s) \} ds - \\
&\quad - (T_{t_1-t}^* K h + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* F(s) h ds) + \\
&\quad + \int_t^{t_1} T_{s-t}^* S(s) (\lambda N(s) + g(s)) ds
\end{aligned}$$

que, considerando el resultado II.33 e introduciendo la perturbación $U(t,s)$ de T_t por $-B G^{-1} B^* S(s)$, podemos expresar como

$$\begin{aligned}
\text{IV.24} \quad q(t) - k(t) - S(t)z^0(t) &= \int_t^{t_1} U^*(s,t) \left[S(s) (\lambda N(s) + g(s)) - F(s) h \right] ds - U^*(t_1,t) K h \\
&= m(t) + \int_t^{t_1} U^*(s,t) S(s) (\lambda N(s) + g(s)) ds
\end{aligned}$$

donde $m(t)$ viene definido por II.38 .

Substituyendo IV.24 en IV.18 obtenemos como expresión del control óptimo

$$IV.25 \quad u^0(t) = -G^{-1}B^* \left\{ S(t)z^0(t) + m(t) + \int_t^{t_1} U^*(s,t) S(s) (\lambda N(s) + g(s)) ds \right\}$$

mientras que el valor correspondiente de la variable de estado viene dado por

$$IV.26 \quad z^0(t) = T_t z_0 - \int_0^t T_{t-s} B G^{-1} B^* S(s) z^0(s) ds - \int_0^t T_{t-s} B G^{-1} B^* m(s) ds \\ - \int_0^t T_{t-s} B G^{-1} B^* \left(\int_s^{t_1} U^*(x,s) S(x) (\lambda N(x) + g(x)) dx \right) ds + \\ + \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s) + \int_0^t T_{t-s} g(s) ds$$

o, introduciendo de nuevo la perturbación $U(t,s)$,

$$IV.27 \quad z^0(t) = U(t,0) z_0 - \int_0^t U(t,s) B G^{-1} B^* \left(m(s) + \int_s^{t_1} U^*(x,s) S(x) (\lambda N(x) + g(x)) dx \right) ds + \\ + \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s) + \int_0^t T_{t-s} g(s) ds$$

En general, para procesos centrados con incrementos ortogonales y no forzados ($g=0$), tenemos

$$IV.28 \quad u^0(t) = -G^{-1}B^* (S(t)z^0(t) + m(t))$$

que es, formalmente, el mismo resultado que el obtenido para el caso determinista, mientras que

$$IV.29 \quad z^0(t) = U(t,0)z_0 - \int_0^t U(t,s) B G^{-1} B^* m(s) ds + \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s) = \\ = T_t z_0 - \int_0^t T_{t-s} B G^{-1} B^* (S(s)z^0(s) + m(s)) ds + \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s)$$

Los resultados obtenidos en esta sección constituyen un componente básico de la siguiente

4.6.- Control óptimo para observaciones incompletas. Aplicación del principio de separación

El principio de separación es el principal resultado de la teoría de control para sistemas lineales estocásticos con funcional de coste cuadrático cuando el proceso que define la variable de estado no es conocido sino en función de un proceso de observaciones. Dicho principio establece que el problema puede separarse en un problema de filtro que permite estimar el estado actual del sistema en términos de las observaciones, y después en un problema de control determinista con funcional de coste cuadrático, siendo el control óptimo una retroalimentación de tipo determinista de la estimación del estado.

Considerando entonces el proceso de señales definido por IV.11 que expresaremos como

$$\text{IV.30} \quad z(t) = k(t) + z_1(t)$$

donde

$$k(t) = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} N(s) dP(s) + \int_0^t T_{t-s} g(s) ds$$

IV.31

$$z_1(t) = \int_0^t T_{t-s} B(s) u(s) ds$$

con un proceso de observaciones definido por

$$\text{IV.32} \quad y(t) = \int_0^t C z(s) ds + Lv(t) = x(t) + y_1(t)$$

donde

$$x(t) = \int_0^t C k(s) ds + Lv(t)$$

IV.33

$$y_1(t) = \int_0^t C z_1(s) ds$$

(es decir, $x(t)$ es el proceso de observaciones bajo control cero), y se trata de minimizar el funcional de coste definido en IV.12. La naturaleza de las distintas entidades fué descrita en la sección 4.1.

El que las leyes de control sean de tipo retroalimentadas es un hecho que viene impuesto por consideraciones prácticas de tipo físico, y nos obliga a restringir la clase de controles a un subconjunto de controles admisibles, U_{ad} , de U_1 .

Para caracterizar a este subconjunto y preparar el camino a la aplicación del principio de separación estableceremos las siguientes notaciones:

I) y_t es la restricción de $y(\cdot, w)$ sobre $[0, t]$ y es una variable aleatoria con valores en $C_d([0, t]; \mathbb{R}^k)$, conjunto de funciones continuas por la derecha.

$$II) U_{x_t} = \{ u(w) \in U \mid u(w) = \beta(x_t(w)), \text{ donde } \beta: \mathbb{R}^k \rightarrow E \}$$

y elegiremos U_{ad} de forma que para todo $t \in [0, t_1]$, salvo quizás un conjunto de medida nula de $[0, t_1]$ que en nuestro caso serían los instantes en que producen las perturbaciones impulsivas, sea

$$U_{ad} = U_{x_t}$$

con lo cual, y como veremos a continuación, se propicia la aplicación del principio de separación, utilizando el teorema fundamental de [7] primero y los resultados de la sección anterior después.

Para éllo definimos por una parte

$$IV.34 \quad \hat{z}(t) = E_{i(t)} \{ z(t) \} = \hat{k}(t) + z_1(t)$$

donde

$$IV.35 \quad i(t) = x(t) - \int_0^t C \hat{k}(s) ds, \quad \hat{k}(t) = E_{x(t)} \{ k(t) \} = E_{i(t)} \{ k(t) \}$$

es el proceso innovaciones para el par $\{ k(t), x(t) \}$, y por otro lado el proceso de error

$$IV.36 \quad e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

y, antes de aplicar el principio de separación, consideremos que

$$\begin{aligned} E \left[\langle z(t)-h, F(z(t)-h) \rangle \right] &= E \left[\langle \hat{z}(t)+e(t)-h, F(\hat{z}(t)+e(t)-h) \rangle \right] = \\ &= E \left[\langle \hat{z}(t)-h, F(\hat{z}(t)-h) \rangle \right] + E \left[\langle e(t), Fe(t) \rangle \right] \end{aligned}$$

pues, como se prueba en [7], error y estimación son incorrelados.

Por tanto el problema de minimizar IV.12 es equivalente al de minimizar

$$\text{IV.37} \quad W_1(u, z_0, h) = E \langle \hat{z}(t_1) - h, K(\hat{z}(t_1) - h) \rangle + \int_0^{t_1} \langle \hat{z}(s) - h, F(\hat{z}(s) - h) \rangle ds + \\ + \int_0^{t_1} \langle u(s), Gu(s) \rangle ds$$

donde los productos escalares están definidos sobre los mismos espacios que en la sección anterior.

Los resultados obtenidos en [7], con la introducción del término forzante como elemento excepcional, dan, como estimación de $z(t)$

$$\text{IV.38} \quad \hat{z}(t) = \hat{k}(t) + z_1(t) = \int_0^t T_{t-s} \bar{P}(s) C^* (L v_0 L^*)^{-1} di(s) + \int_0^t T_{t-s} g(s) ds + \\ + \int_0^t T_{t-s} N(s) r(s) ds + \int_0^t T_{t-s} B u(s) ds$$

donde $\bar{P}(t)$, supuesto se cumplen las condiciones expuestas en el teorema 9 de la lista, es la solución única de la ecuación de Riccati

$$\text{IV.39} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \bar{P}(t)f, h \rangle - \langle \bar{P}(t)f, Ah \rangle - \langle \bar{P}(t)h, Af \rangle + \langle \bar{P}(t)C^*C\bar{P}(t)f, h \rangle = \\ = \langle B(t)MB^*(t)f, h \rangle \\ \bar{P}(0) = c_0 \end{array} \right.$$

En la misma referencia se prueba que el proceso de innovaciones es un proceso centrado con incrementos ortogonales y matriz de covarianza $L v_0 L^*$. Por tanto podemos aplicar al modelo definido por IV.38 y IV.37 lo visto en la sección anterior para observaciones completas, y de esa forma garantizar la existencia de un control óptimo $u^0(t)$ definido por

$$\text{IV.40} \quad u^0(t) = -G^{-1}B^* \left(S(t)z(t) + m(t) + \int_t^{t_1} U^*(s, t)S(s) (N(s)r(s) + g(s)) ds \right)$$

con el correspondiente valor de $\hat{z}(t)$ dado por

$$\begin{aligned} \text{IV.41} \quad \hat{z}^0(t) &= \int_0^t T_{t-s} \bar{P}(s) C^* (L v_0 L^*)^{-1} di(s) + \int_0^t T_{t-s} (g(s) + N(s)r(s)) ds \\ &- \int_0^t T_{t-s} B G^{-1} B^* \left(S(s) \hat{z}(s) + m(s) + \int_s^{t_1} U^*(x,s) S(x) (g(x) + N(x)r(x)) dx \right) ds \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \text{IV.42} \quad \hat{z}^0(t) &= - \int_0^t U(t,s) B G^{-1} B^* \left(m(s) + \int_s^{t_1} U^*(x,s) S(x) (g(x) + N(x)r(x)) dx \right) ds + \\ &+ \int_0^t U(t,s) \bar{P}(s) C^* (L v_0 L^*)^{-1} di(s) + \int_0^t U(t,s) (g(s) + N(s)r(s)) ds \end{aligned}$$

Ahora bien

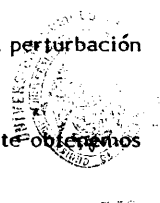
$$\begin{aligned} &\int_0^t U(t,s) \bar{P}(s) C^* (L v_0 L^*)^{-1} di(s) = \\ &= \int_0^t U(t,s) \bar{P}(s) C^* (L v_0 L^*)^{-1} d(x^0(s)) - \int_0^t C \hat{k}(s) ds \\ &= \int_0^t U(t,s) \bar{P}(s) C^* (L v_0 L^*)^{-1} (dy^0(s) - C \hat{z}^0(s) ds) \end{aligned}$$

resultado que, substituido en IV.41, proporciona

$$\begin{aligned} \text{IV.43} \quad \hat{z}^0(t) &= \int_0^t U_I(t,s) \bar{P}(s) C^* (L v_0 L^*)^{-1} dy^0(s) + \int_0^t U_I(t,s) (g(s) + N(s)r(s)) ds - \\ &- \int_0^t U_I(t,s) B G^{-1} B^* \left(m(s) + \int_s^{t_1} U_I^*(x,s) S(x) (g(x) + N(x)r(x)) dx \right) ds \end{aligned}$$

donde $y^0(s)$ es el proceso de observaciones bajo control óptimo y $U_I(t,s)$ la perturbación de T_t por $-B G^{-1} B^* S(t) - P(t) C^* (L v_0 L^*)^{-1} C$.

En el caso de procesos centrados y ausencia de término forzante obtenemos el resultado



$$IV.44 \quad u^0(t) = -G^{-1}B^*(S(t)z^0(t) + m(t))$$

$$IV.45 \quad z^0(t) = \int_0^t U_1(t,s)P(s)C^*(L_V L^*)^{-1} dy^0(s) - \int_0^t U_1(t,s)BG^{-1}m(s)ds$$

que tiene la estructura de un filtro del tipo Kalman-Bucy.

Este resultado es válido para cualesquiera procesos ortogonales siempre que sean centrados.

El control queda pues totalmente definido por $S(t)$ y $P(t)$ y, tal como establece la formulación general del principio de separación, es introducido estimando primero el estado del sistema por IV.45 y obteniendo luego la ley de control definida por VI.44.

Para procesos centrados y ausencia de término forzante, el valor del funcional de coste viene dado por

$$IV.46 \quad W(u^0, z_0, h) = W_1(u^0, z_0, h) + E \left[\langle e(t_1), Ke(t_1) \rangle \right] + E \left[\int_0^{t_1} \langle e(s), Fe(s) \rangle ds \right] = \\ = W_1(u^0, z_0, h) + \text{traza} \{ K\bar{P}(t_1) \} + \int_0^{t_1} \text{traza} \{ F\bar{P}(s) \} ds$$

ya que, como se prueba en [7], $\bar{P}(t) = \text{Cov} \{ e(t) \}$ y $E \left[\langle Dx, x \rangle \right] = \text{traza} (D \cdot \text{Cov} \{ x \})$ mientras que

$$IV.47 \quad W_1(u^0, z_0, h) = E \left\{ \langle \hat{z}(t_1) - h, K(\hat{z}(t_1) - h) \rangle \right\} + \int_0^{t_1} E \left\{ \langle \hat{z}(s) - h, F(\hat{z}(s) - h) \rangle \right\} ds + \\ + \int_0^{t_1} E \left\{ \langle S(s)\hat{z}(s) + m(s), BG^{-1}B^*(S(s)\hat{z}(s) + m(s)) \rangle \right\} ds = \\ = \langle h, Kh \rangle + \int_0^{t_1} \langle h, F(s)h \rangle ds + \int_0^{t_1} \langle m(s), BG^{-1}B^*m(s) \rangle ds + \\ + 2E \left\{ \int_0^{t_1} \langle \hat{z}(s), S(s)BG^{-1}B^*m(s) - F(s)h \rangle ds - \langle h, K\hat{z}(t_1) \rangle \right\} \\ + E \left\{ \langle \hat{z}(t_1), K\hat{z}(t_1) \rangle \right\} + E \left\{ \int_0^{t_1} \langle \hat{z}(s), (F(s) + S(s)BG^{-1}B^*S(s))\hat{z}(s) \rangle ds \right\}$$

Ahora bien la ley de control obtenida es retroalimentada y de la forma

$$u(t) = c(t) + \int_0^t K(t,s) dy(s)$$

con $K(t,\cdot) \in \mathcal{B}_{\infty}([0,t]; L(\mathbb{R}^k, \mathbb{H}))$ y $c(t)$ determinista, y, en general no hay garantía de que para una ley de la forma $u(t) = \psi(T, y(t))$, IV.30 y IV.32 tengan solución única. La siguiente proposición da condiciones sobre la función ψ para garantizar ésto último, condiciones que satisface el control hallado.

Proposición IV.3

Supongamos la ley de control para IV.30 y IV.32 definida por

$$u(t) = \psi(t, y(t))$$

donde ψ satisface la condición de Lipschitz

$$\|\psi(t, h) - \psi(t, f)\| \leq c \sup \|h(s) - f(s)\|_{\mathbb{R}^k}$$

para cualesquiera $h, f \in C([0, t_1]; \mathbb{R}^k)$. Entonces IV.30 y IV.32 tiene solución única.

En efecto, podemos expresar $y(t)$ en la forma

$$y(t) = x(t) + \int_0^t C \int_0^s T_{s-r} B \psi(r, y(r)) dr ds$$

y considerar la sucesión

$$Y_0(t) = x(t)$$

$$Y_n(t) = x(t) + \int_0^t C \int_0^s T_{s-r} B \psi(r, Y_{n-1}(r)) dr ds$$

Entonces

$$\sup \|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \int_0^t C \int_0^s T_{s-r} B \|\psi(r, Y_{n-1}(r)) -$$

$$- \psi(r, Y_{n-2}(r))\| dr ds \leq c_1 \int_0^s \sup \|Y_{n-1}(r) - Y_{n-2}(r)\|_{\mathbb{R}^k} dr$$

y aplicando la condición un número n suficientemente elevado de veces obtenemos

$$\text{IV.48} \quad \sup \| Y_{nm}(s) - Y_{(n-1)m}(s) \|_{R^k} \leq c_2 \sup \| Y_{(n-1)m}(s) - Y_{(n-2)m}(s) \|_{R^k}$$

donde c_2 , al englobar la norma de los operadores C y B que son acotados y la de T_t que es inferior a la unidad y por tanto tiende a 0 al elevarlo a una potencia suficientemente alta, es un número comprendido entre 0 y 1. La aplicación definida en IV.48 es pues contractiva y así existirá un límite $Y(t)$, al que converge la sucesión $Y_n(t)$, tal que

$$\text{IV.49} \quad Y(t) = x(t) + \int_0^t C \int_0^s T_{s-r} B \psi(r, Y(r)) dr ds$$

que es el proceso de observaciones precisamente. El control así obtenido depende además de $x(t)$, proceso de observaciones bajo control cero, por lo que es un control admisible.

La unicidad de la solución para IV.30 y IV.32 se deduce ya inmediatamente aplicando la proposición IV.2.

4.7. Cálculo numérico del operador $P(t)$

Para resolver la ecuación IV.39 que satisface el operador $P(t)$ expresaremos los distintos elementos de la misma en términos del sistema ortonormal de las autofunciones del generador A en el caso de que éste sea autoadjunto. En efecto, podemos expresar

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle g_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \\ Af &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n g_n \\ \bar{P}(t)g_n &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle \bar{P}(t)g_n, g_m \rangle g_m = \sum_{m=1}^{\infty} p_{n,m}(t) g_m \\ \bar{P}(t)f &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n (\bar{P}(t)g_n) = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n p_{n,m}(t) g_m \end{aligned}$$

con $p_{n,m}(t) = p_{m,n}(t)$.

Por otro lado el carácter autoadjunto de A permite expresar la ecuación IV.39 en la forma

$$\text{IV.50} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \bar{P}(t)f, h \rangle - \langle \Lambda \bar{P}(t)f, h \rangle - \langle \bar{P}(t)Af, h \rangle + \\ + \langle \bar{P}(t)C*(Lv_0L^*)^{-1}CP(t)f, h \rangle = \langle BMB^*f, h \rangle \\ \bar{P}(0) = P_0 \end{array} \right.$$

Ahora bien,

$$A\bar{P}(t)f = \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_m f_n p_{n,m}(t) g_m$$

$$\bar{P}(t)Af = \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n f_n p_{n,m}(t) g_m$$

$$\bar{P}(t)C*(Lv_0L^*)^{-1}C\bar{P}(t)f = \bar{P}(t)C*(Lv_0L^*)^{-1}C \left(\sum_{n,i=1}^{\infty} f_n p_{n,i}(t) g_i \right) =$$

$$= \sum_{n,i=1}^{\infty} f_n p_{n,i}(t) \bar{P}(t)C*(Lv_0L^*)^{-1}Cg_i =$$

$$= \sum_{n,i=1}^{\infty} f_n p_{n,i}(t) \bar{P}(t) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle C*(Lv_0L^*)^{-1}Cg_i, g_j \rangle g_j \right) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{j,i=1}^{\infty} p_{n,i}(t) p_{j,m}(t) \langle C*(Lv_0L^*)^{-1}Cg_i, g_j \rangle \right) g_m$$

$$BMB^*f = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n \langle BMB^*g_n, g_m \rangle g_m$$

$$\bar{P}(0)f = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n p_{n,m}(0) g_m = P_0 f = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n \langle P_0 g_n, g_m \rangle g_m$$

por lo que IV.50 es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales definido por

$$\text{IV.51} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{n,m}(t) - (\lambda_m + \lambda_n)p_{n,m}(t) + \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{n,i}(t) p_{m,j}(t) \langle C*(Lv_0L^*)^{-1}Cg_i, g_j \rangle = \\ \langle BMB^*g_n, g_m \rangle \\ p_{n,m}(0) = \langle P_0 g_n, g_m \rangle \\ p_{n,m}(t) = p_{m,n}(t) \end{array} \right.$$

que resolveremos en particular para el modelo concreto propuesto en el siguiente capítulo.

CAPITULO QUINTO

El Modelo Estocástico Propuesto

Estudio del Modelo y Tratamiento Numérico

El Modelo Estocástico Propuesto
Estudio del Modelo y Tratamiento Numérico

5.1. Descripción del modelo

Vamos a suponer que el modelo descrito en el capítulo tercero está sujeto a dos tipos de perturbaciones de carácter aditivo y aleatorio: por un lado una perturbación estacionaria y de densidad espectral constante que permita modelar el amplio conjunto de pequeñas, y técnicamente difíciles de controlar, causas de azar; por otro lado perturbaciones de tipo impulsivo y "raro". Las primeras las modelaremos mediante un ruido blanco gaussiano, derivado de un proceso de Wiener que describiremos a continuación; las segundas lo serán por un ruido blanco poissoniano, derivado de un proceso de Poisson cuya naturaleza también estudiaremos.

Por otra parte, se considera que la variable de estado no es observable directamente sino a través de un modelo de observaciones que supondremos solo pueden realizarse en una serie de puntos determinados del polo. Consideraremos también que este modelo de observaciones se ve perturbado por un ruido blanco gaussiano.

Así pues, el modelo que asociaremos al polo de sarrollo vendrá gobernado por la ecuación

$$V.1. \quad \dot{z}(t,x) = q \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) + \dot{w}(t,x) + P(t,x), \quad q > 0$$

satisfaciendo la condición inicial, que supondremos constante,

$$V.2 \quad z(0,x) = z_0 = f(x)$$

y las de contorno y compatibilidad establecidas en III.3 y III.4 .

El modelo de observaciones será

$$V.3 \quad y(t,x) = \int_0^t C z(s,x) ds + v(t)$$

donde $v(t)$ es un proceso de Wiener k -dimensional con matriz de covarianza unidad y

$C \in L(L^2[-c,c]; R^k)$ lo definiremos de forma que la m -sima componente de $Cz(s,x)$ sea

$$V.4 \quad (Cz(s,x))_m = \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_{m-\epsilon}}^{x_{m+\epsilon}} z(s,x) dx, \text{ para } \epsilon > 0,$$

donde x_1, x_2, \dots, x_k son los puntos del polo donde puede observarse la evolución del mismo.

Los diferentes procesos del modelo se suponen independientes.

El objetivo es establecer la ley de control óptimo $u^0(t,x)$ que gobierne la dinámica del sistema de forma que se minimice el funcional de coste definido por

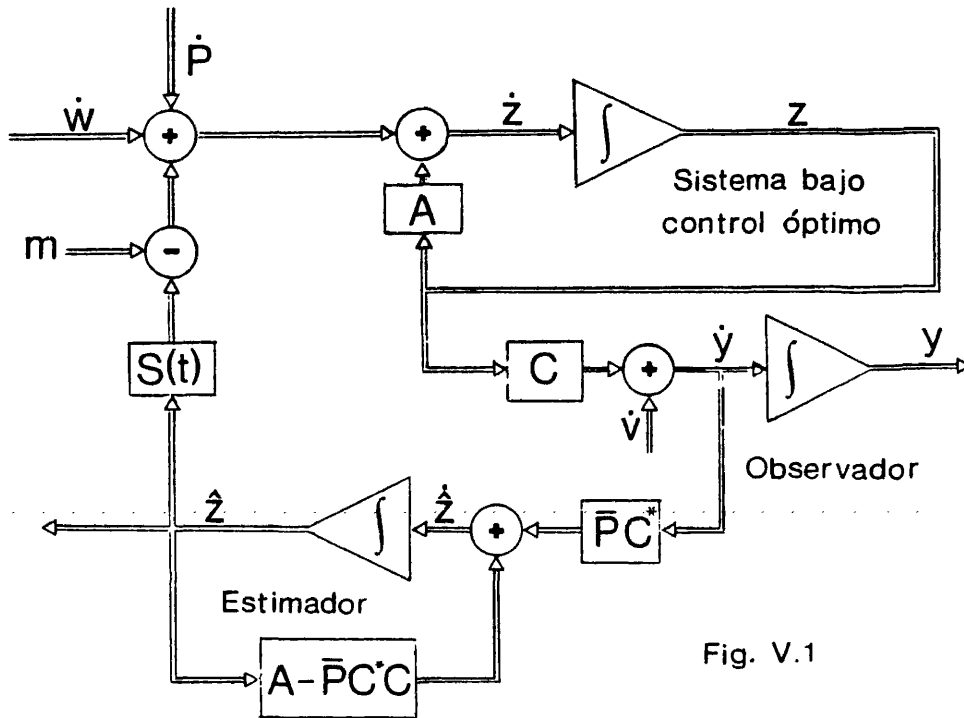


Fig. V.1

$$W(u, z_0, h) = E \left\{ \int_{-c}^c (h(x) - z(t_1, x))^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{-c}^c (h(x) - z(t, x))^2 dx dt + \right.$$

V.5.

$$\left. + \int_0^{t_1} \int_{-c}^c u^2(t, x) dx dt \right\}$$

donde $h, f = z_0, z, u \in L^2 [-c, c]$, al igual que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

En las siguientes secciones estudiaremos con detalle los distintos elementos del sistema, cuyo diagrama de bloques bajo control óptimo se representa en la figura V.1, habiéndose tenido en cuenta que en este caso las fórmulas IV.44 y IV.45 se convierten en

$$u^0(t) = - (S(t) \hat{z}^0(t) + m(t))$$

$$\dot{\hat{z}}^0(t) = (A - \bar{P}(t)C^*C) \hat{z}(t) + \bar{P}(t)C^* y(t)$$

5.2.- El proceso de Wiener de perturbaciones

Supondremos que $W(t, x)$ puede expresarse como

$$V.6 \quad W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) g_n(x)$$

donde $\{g_n(x)\}$ son las autofunciones del operador A definidas en III.10 y los $w_n(t)$ son procesos de Wiener mutuamente independientes, con covarianza incremental σ_n^2 , gaussianos (lo que implica que tienen una versión separable con trayectorias continuas) y centrados.

Dada la independiencia de los $w_n(t)$ y que cada uno de ellos tiene incrementos independientes resultan las siguientes propiedades para $W(t, x)$:

a) $E \{ W(t, x) \} = 0$

b) Para $t > s$

$$\begin{aligned} \text{Cov} \{ W(t, x) - W(s, x) \} &= \text{Cov} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (w_n(t) - w_n(s)) g_n(x) \right] = \\ &= E \left(\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (w_n(t) - w_n(s)) g_n(x) \right\}^2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(x) E \{ (w_n(t) - w_n(s))^2 \} \\ &= (t-s) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 g_n^2(x) \end{aligned}$$

por lo que será preciso exigir que $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 < \infty$.

c) $W(t,x)$ tiene incrementos independientes.

d) $W(t,x)$, como combinación lineal de procesos gaussianos, es también un proceso gaussiano.

5.3.- El proceso de Poisson de perturbaciones

Supongamos que el número de impulsos en el intervalo espacial $[x, x + dx]$ es una variable poissoniana con parámetro $\lambda(x)$ y que el número de impulsos en intervalos no solapados son variables independientes. La intensidad $Y(x)$ de un impulso en el punto x es una variable $N(0, \sigma(x))$ y las magnitudes de los distintos impulsos son variables independientes entre sí. Tenemos así el proceso de perturbaciones

$$V.7 \quad P(t,x) = \sum_{k=1}^{n(t,x)} Y_k(x)$$

donde $n(t,x)$ sigue una distribución de Poisson con media $m(t,x) = \lambda(x)t$.

Ahora bien

$$\begin{aligned} P(t,x) &= \sum_{k=1}^{n(t,x)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-c}^c Y_k(x) g_n(x) dx \right) g_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n(t,x)} \int_{-c}^c Y_k(x) g_n(x) dx \right] g_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) g_n(x) \end{aligned}$$

donde los $\{P_n(t)\}$, con

$$V.8 \quad P_n(t) = \int_{-c}^c \left[\sum_{k=1}^{n(t,x)} Y_k(x) \right] g_n(x)$$

constituyen una sucesión de procesos de Poisson compuestos e independientes, que, basándonos en ([2]), ([3]) y ([10]) tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} a) \quad E \{ P_n(t) \} &= r_n(t) = E \left[\int_{-c}^c \left(\sum_{k=1}^{n(t,x)} Y_k(x) \right) g_n(x) dx \right] = \\ &= \int_{-c}^c E \left[\sum_{k=1}^{n(t,x)} Y_k(x) \right] g_n(x) dx = \int_{-c}^c E \{ n(t,x) \} \cdot E \{ Y_k(x) \} g_n(x) dx = 0 \end{aligned}$$

V.9

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lambda_n^*(t) &= \text{Var} \{ P_n(t) \} = \\
 &= E \left[\text{Var} \left(\sum_{k=1}^{n(t,x)} \int_{-c}^c Y_k(x) g_n(x) dx \mid n(t,x) \right) \right] + \text{Var} \left[E(Y \mid n(t,x)) \right] = \\
 &= E \left[\int_{-c}^c \text{Var} \left(\sum_{k=1}^{n(t,x)} Y_k(x) g_n(x) \right) dx \right] + \text{Var} \left[\int_{-c}^c n(t,x) E(Y(x)) g_n(x) dx \right] \\
 &= E \left[\int_{-c}^c n(t,x) \text{Var}(Y(x)) g_n^2(x) dx \right] + \text{Var} \left[\int_{-c}^c n(t,x) E(Y(x)) g_n(x) dx \right] = \\
 &= \int_{-c}^c E(n(t,x)) \cdot \text{Var}(Y(x)) g_n^2(x) dx + \\
 &+ \int_{-c}^c \text{Var}(n(t,x)) E(Y(x))^2 g_n^2(x) dx = \\
 &= t \left[\int_{-c}^c \lambda(x) \text{Var}(Y(x)) g_n^2(x) dx + \int_{-c}^c \lambda(x) E(Y(x))^2 g_n^2(x) dx \right] = \\
 &= t \int_{-c}^c \lambda(x) E(Y^2(x)) g_n^2(x) dx = t \int_{-c}^c \lambda(x) \sigma^2(x) g_n^2(x) dx
 \end{aligned}$$

c) Para $s < t$, es núcleo de covarianza de $P_n(t)$ es

V.10

$$\begin{aligned}
 K_n(s,t) &= \text{Cov} \{ P_n(t), P_n(s) \} = \\
 &= E \left[\left\{ \int_{-c}^c \left(\sum_{k=1}^{n(t,x)} Y_k(x) g_n(x) dx \right) \right\} \left\{ \int_{-c}^c \left(\sum_{h=1}^{n(s,x)} Y_h(x) g_n(x) dx \right) \right\} \right] = \\
 &= E \left[\left(\int_{-c}^c \left(\sum_{k=1}^{n(s,x)} Y_k(x) g_n(x) dx \right) \right)^2 \right] = \text{Var}(P_n(s)) \\
 &= s \int_{-c}^c \lambda(x) \sigma^2(x) g_n^2(x) dx
 \end{aligned}$$

d) El carácter independiente de los incrementos queda garantizado por tenerlos ortogonales los procesos $n(t,x)$ y ser las $Y_k(x)$ independientes e idénticamente distribuidas. Para analizar el carácter estacionario de los incrementos tenemos que, para $t > s$,

$$\begin{aligned}
 \phi_{P_n(t)-P_n(s)}(u) &= E \left[e^{iu(P_n(t)-P_n(s))} \right] = \\
 &= E_x \left\{ E \left[e^{iu(P_n(t)-P_n(s))} \mid n(t,x)-n(s,x)=k, P(n(t,x)-n(s,x)=k) \right] \right\} = \\
 \text{V.11} \quad &= E_x \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \phi_{I_n}(u) \right\}^k e^{-\lambda(x)(t,s)} \frac{[\lambda(x)(t-s)]^k}{k!} \right\} = \\
 &= E_x \left[e^{-\lambda(x)(t-s)} \cdot e^{\lambda(x)(t-s) \phi_{I_n}(u)} \right] = \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^c e^{-\lambda(x)(t-s)(1-\phi_{I_n}(u))} dx
 \end{aligned}$$

donde

$$\phi_{I_n}(u) = E \left\{ e^{iu I_n} \right\} = E \left\{ e^{iu \int_{-c}^c Y(x) g_n(x) dx} \right\}$$

siendo

$$I_n = \int_{-c}^c Y(x) g_n(x) dx$$

la integral de un proceso estocástico normal $Y^*(x) = Y(x) g_n(x)$, que tiene a x como parámetro. El proceso Y^* no tiene incrementos estacionarios e incluso, según la naturaleza de $\sigma^2(x)$, pueden no ser siquiera independientes.

De V.11 se deduce que

1.- La función característica de $P_n(t)$ viene dada por

$$\phi_{P_n(t)}(u) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c e^{-\lambda(x)t(1-\phi_{I_n}(t))} dx$$

2.- $P_n(t)$ tiene incrementos estacionarios.

e) Si designamos por $\mathcal{F}_{n,t}$ a la σ -álgebra generada por $\{P_n(s), 0 \leq s \leq t\}$, el carácter independiente de los incrementos de $P_n(t)$ y el hecho de ser centrado el proceso garantizan que, para $s < t$, $P_n(t)-P_n(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_{n,s}$ y, por tanto,

$$E \{ P_n(t) - P_n(s) \mid \mathcal{F}_{n,s} \} = E \{ P_n(t) - P_n(s) \} = 0$$

de donde:

$$E \{ P_n(t) \mid \mathcal{F}_{n,s} \} = P_n(s)$$

ésto es, $P_n(t)$ es una martingala respecto a $\mathcal{F}_{n,t}$ sobre $[0, t_1]$.

De estas propiedades de los procesos $P_n(t)$ se deducen las siguientes para el proceso $P(t,x)$:

a) $E \{ P(t,x) \} = 0$, es decir, $P(t,x)$ es centrado

$$b) \text{Var} \{ P(t,x) \} = \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^* g_n^2(x)$$

y para que $\lambda < \infty$ tendrá que cumplirse que $\lambda(x) \sigma^2(x) \in L^2[-c,c]$ y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^* < \infty.$$

c) Para $s < t$ su núcleo de covarianza es

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \text{Cov}(P(s,x), P(t,x)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(x) \text{Cov}(P_n(s), P_n(t)) = \\ &= s \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(x) \int_{-c}^c \lambda(x) \sigma^2(x) g_n^2(x) dx \right) \end{aligned}$$

d) Su función característica es

$$\phi_{P(t,x)}(u) = \prod_{i=1}^n \phi_{P_n(t)}(u g_n(x))$$

e) Por ser una combinación lineal de procesos independientes, cada uno de ellos con incrementos independientes y estacionarios, $P(t,x)$ tiene también incrementos independientes y estacionarios.

f) $P(t,x)$ es una martingala respecto a $\mathcal{F}_{t,x}$, la σ -álgebra generada por $\{P(s,x), 0 \leq s \leq t\}$, sobre $[0, t_1]$.

5.4.- Existencia y unicidad de solución para la ecuación del modelo

Emplearemos la proposición IV.2 para aprovechar la condición allí establecida.

Ya vimos en el capítulo segundo que

$$A = q \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

era cerrado y lineal y que generaba un semigrupo fuertemente continuo T_t tal que

$$T_{t-s} z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} (t-s)q} \left[\int_{-c}^c z(t,x) g_n(x) dx \right] g_n(x)$$

Entonces, si $u(t,x) \in D(A)$, es claro que la parte a) de la citada proposición se cumple.

Por otro lado y como $B = V = N = I$ y A y T son permutables tenemos que

$AT_{t-s} u(t,x) = T_{t-s} Au(t,x) \in D(A)$, y si $u(t,x)$ es de cuadrado integrable y por el resultado obtenido en la proposición III.2 para la norma de T_t , tenemos que

$$\| AT_{t-s} u(s,x) \| \leq e^{-\frac{q \pi^2}{4c^2} t} \| Au(s,x) \|$$

siendo pues necesario para que se cumpla la segunda condición que $Au(s,x)$ sea de cuadrado integrable.

Por último y para la tercera condición, que en nuestro problema se traducirá en

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n + \lambda_n^*) \int_0^t \| A T_{t-s} g_n \|^2 ds < \infty,$$

tenemos que

$$A g_n = -\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} g_n$$

y

$$\| T_{t-s} A g_n \|^2 = \left\| e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4c^2} (t-s)q} \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} g_n \right\|^2 = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{2c^2} (t-s)q} \frac{n^4 \pi^4}{16c^5}$$

$$\int_0^t \| A T_{t-s} g_n \|^2 ds = \frac{n^2 \pi^2}{8c^3 q} \left[1 - e^{-\frac{n^2 \pi^2}{2c^2} tq} \right] < \frac{n^2 \pi^2}{8c^3 q}$$

y será por tanto necesario imponer una condición adicional a las varianzas de los procesos $w_n(t)$ y $P_n(t)$, la de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sigma_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda_n^* < \infty$$

para que haya una única solución de V.1 .

5.5.- El proceso de observaciones

El modelo de observaciones

$$y(t,x) = \int_0^t C z(s,x) ds + v(t)$$

es un proceso k -dimensional, suma de dos procesos k -dimensionales, que refleja el hecho de que las observaciones se concentran en k puntos del intervalo $[-c,c]$ y que estas observaciones sufren perturbaciones modeladas según el proceso de Wiener k -dimensional $v(t)$, que supondremos tiene por matriz de covarianza incremental la matriz unidad.

El número k de puntos de observación u "observatorios" lo consideraremos impar, con uno de ellos situado en el centro del polo y los demás simétricos y equidistantes, de manera que la distancia entre ellos sea 2ϵ , siendo ϵ el radio de observación de cada observatorio. En los extremos del polo no se colocarán observatorios. Con esto, toda la amplitud del polo podrá ser observada o, en todo caso quedarán fuera de observación los intervalos $[-c, -c+\epsilon]$ y $[c-\epsilon, c]$. Para conseguir ésto el número k de observatorios a establecer viene dado por

$$k = 2 \left\lceil \frac{c-\epsilon}{2\epsilon} \right\rceil + 1$$

donde $\lceil x \rceil$ es la función "parte entera de x ". Consideramos como observatorio número 1 el situado más próximo al extremo $x = -c$ del polo, el número 2 el situado a la derecha del anterior y así sucesivamente; así pues la ubicación del observatorio i -simo será el punto $x_i = (2i-k-1)\epsilon$, con $i = 1, 2, \dots, k$.

El operador C es tal que la i -sima componenete de $Ch(x)$ viene definida por

$$(Ch(x))_i = \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} h(x) dx$$

Esta definición es, obviamente, coherente con las características ya citadas para el proceso de observaciones.

5.6.- Solución numérica del modelo

a) Cálculo del operador P(t)

El sistema IV.51 se convierte en nuestro caso particular en

$$V.12 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{n,m}(t) + q \frac{\pi^2}{4c^2} (n^2 + m^2) p_{n,m}(t) + \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{n,i}(t) p_{j,m}(t) \langle C_{gi}, C_{gj} \rangle = \langle M_{gn}, g_m \rangle \\ p_{n,m}(0) = 0; \quad p_{n,m}(t) = p_{m,n}(t) \end{array} \right.$$

donde

$$M = \text{Cov}((W(t)+P(t)), (W(t)+P(t))) = \text{Cov}(W(t), W(t)) + \text{Cov}(P(t), P(t)) = \sigma_n^2 + \lambda_n^*(t)$$

con $\lambda_n^*(t)$ definida por V.9 .

Por otro lado

$$c_{ij} = \langle C_{gi}, C_{gj} \rangle = \sum_{h=1}^k (C_{gi})_h (C_{gj})_h = \sum_{h=1}^k a_{i,h} a_{j,h}$$

donde

$$V.13 \quad \begin{aligned} (C_{gn})_h = a_{n,h} &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_h-\epsilon}^{x_h+\epsilon} g_n(x) dx = \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_h-\epsilon}^{x_h+\epsilon} \frac{1}{c} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi}{2c} x\right) dx = \\ &= \frac{2\sqrt{c}}{n\pi\epsilon} \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{n\pi x_h}{2c}\right) \sin\frac{n\pi\epsilon}{2c} = \frac{2c}{n\pi\epsilon} \sin\frac{n\pi\epsilon}{2c} g_n(x_h) \end{aligned}$$

resultando

$$V.14 \quad c_{ij} = \frac{4c^2}{\epsilon^2 \pi^2 i j} \sin\left(\frac{i\pi\epsilon}{2c}\right) \sin\left(\frac{j\pi\epsilon}{2c}\right) \sum_{h=1}^k g_i(x_h) g_j(x_h)$$

Con todo ésto el sistema V.12 adopta la forma definitiva

$$V.15 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{n,m}(t) + q \frac{\pi^2}{4c^2} (n^2 + m^2) p_{n,m}(t) + \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{n,i}(t) p_{j,m}(t) c_{ij} = \delta_{n,m} (\sigma_n^2 + \lambda_n^*(t)) \\ p_{n,m}(0) = 0; p_{n,m}(t) = p_{m,n}(t) \end{array} \right.$$

La dificultad que presenta la resolución de este sistema es que, a diferencia de los que ocurría con el cálculo de $S(t)$ en el capítulo III, para $i = j$, $p_{i,j}(t) = 0$ no es solución de la ecuación diferencial correspondiente, por lo que para resolverlo se hace necesario recurrir a un procedimiento de truncamiento, basado en la idea intuitiva, que luego justificaremos, de que al ser los $p_{i,j}(t)$ coeficientes de Fourier su "influencia" en el sistema decrece al crecer i y j . La validez del método, que es necesario probar para su tratamiento con ordenador, se muestra en la sección siguiente.

Observamos que para valores muy pequeños de ϵ , ésto es, para un número elevado de observatorios, tenemos que

$$c_{i,j} \approx \delta_{i,j}/2\epsilon$$

con lo que V.15 se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{n,m}(t) + q \frac{\pi^2}{4c^2} (n^2 + m^2) p_{n,m}(t) + \frac{1}{2\epsilon} \sum_{r=1}^{\infty} p_{n,r}(t) p_{r,m}(t) = \delta_{n,m} (\sigma_n^2 + \lambda_n^*(t)) \\ p_{n,m}(0) = 0; p_{n,m}(t) = p_{m,n}(t) \end{array} \right.$$

que admite, para $n = m$, la solución $p_{n,m}(t) = 0$ y el sistema queda reducido, llamando $p_{n,n}(t) = p_n(t)$, al de ecuaciones independientes

$$V.16 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_n(t) + q \frac{\pi^2 n^2}{2c^2} p_n(t) + \frac{p_n^2(t)}{2\epsilon} = \sigma_n^2 + \lambda_n^*(t) \\ p_n(0) = 0 \end{array} \right.$$

b) Determinación del filtro óptimo $z(t)$

Para determinar el filtro óptimo $z(t)$, que será estable ya que el semigrupo T_t generado por el operador $q - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ lo es, utilizaremos el teorema 9 de la lista según el cual

$$\hat{z}(t) = b(t) + X(t)$$

donde $b(t)$, en nuestro caso, es la solución única de la ecuación determinista

$$\begin{aligned} \text{V.17} \quad \dot{b}(t) &= (A - \bar{P}(t) C^* C) b(t) \\ b(0) &= 0 \end{aligned}$$

mientras $X(t)$ es la solución única de la ecuación de evolución estocástica

$$\begin{aligned} \text{V.18} \quad dX(t) &= (A - \bar{P}(t) C^* C) X(t) dt + \bar{P}(t) C^* dy(t) \\ X(0) &= 0 \end{aligned}$$

Vamos a expresar estas ecuaciones en términos de sus coeficientes de Fourier. Para ello consideremos que

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) C^* C f &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{P}(t) C^* C g_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{P}(t) \sum_{m=1}^{\infty} \langle C^* C g_n, g_m \rangle g_m = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} f_n c_{n,m} \bar{P}(t) g_m = \sum_{n,m,r=1}^{\infty} f_n c_{n,m} p_{m,r}(t) g_r \\ \bar{P}(t) C^* dy(t) &= \bar{P}(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle C^* dy(t), g_n \rangle_H g_n \right] = \bar{P}(t) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle dy(t), C g_n \rangle_{R^k} g_n \right] = \\ &= \sum_{n,r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^k dy_s(t) \cdot (C g_n)_s \right) p_{n,r}(t) g_r \\ &= \sum_{n,r=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^k a_{ns} dy_s(t) \right) p_{n,r}(t) g_r \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} (dy(t))_s &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_s-\epsilon}^{x_s+\epsilon} z(t,x) dx + (dv(t))_s = \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{x_s-\epsilon}^{x_s+\epsilon} \left(\sum_{m=1}^{\infty} z_m(t) g_m \right) dx + (dv(t))_s = \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \left(\sum_{\bar{m}=1}^{\infty} (b_{\bar{m}}(t) + X_{\bar{m}}(t)) \int_{x_s-\epsilon}^{x_s+\epsilon} g_{\bar{m}} dx \right) + (dv(t))_s = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (b_m(t) + X_m(t)) a_{ms} + (dv(t))_s$$

por lo que

$$\begin{aligned} \bar{P}(t)C * dy(t) &= \sum_{m,n,r=1}^{\infty} (b_m(t) + X_m(t)) \left(\sum_{s=1}^k a_{ns} a_{ms} \right) p_{n,r}(t) gr + \\ &+ \sum_{n,r=1}^{\infty} p_{n,r}(t) \left(\sum_{s=1}^k a_{ns} (dv(t))_s \right) \end{aligned}$$

y los sistemas V.17 y V.18 son equivalentes respectivamente a

$$V.19 \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{b}_n(t) &= \lambda_n b_n(t) - \sum_{s,r=1}^{\infty} b_s(t) c_{s,r} p_{r,n}(t) = \\ &= -q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} b_n(t) - \sum_{s,r=1}^{\infty} b_s(t) c_{s,r} p_{r,n}(t) \\ b_n(0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

que admite la solución $b_n(t) = 0$, y

$$V.20 \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{X}_n(t) &= \lambda_n X_n(t) - \sum_{s,r=1}^{\infty} X_s(t) c_{s,r} p_{r,n}(t) + \sum_{r=1}^{\infty} p_{n,r}(t) \left(\sum_{j=1}^k a_{r,j} y_j(t) \right) \\ &= -q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} X_n(t) + \sum_{s,r=1}^{\infty} p_{n,r}(t) c_{s,r} b_s(t) + \sum_{r=1}^{\infty} p_{n,r}(t) \left(\sum_{j=1}^k a_{r,j} v_j(t) \right) \\ X_n &= 0 \end{aligned} \right.$$

En el caso general de procesos poissonianos no centrados el sistema V.19 se convertiría en

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{b}_n(t) &= -q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} b_n(t) - \sum_{r,s=1}^{\infty} b_s(t) c_{s,r} p_{r,n}(t) + r_n(t) \\ b_n(0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

con $r_n(t)$ definido en la sección 5.3.

Por lo que respecta a los sistemas V.19 y V.20 y para $\varepsilon \rightarrow 0$, quedan reducidos a

$$V.19 \text{ bis} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{b}_n(t) &= -q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} b_n(t) - p_n(t) \sum_{s=1}^{\infty} b_s(t) c_{s,n} + r_n(t) \\ b_n(0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$5.20\text{-bis} \left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_n(t) = -q \frac{n^2 \pi^2}{4c^2} X_n(t) + \frac{1}{2\epsilon} p_n(t) \left(\sum_{j=1}^k a_{n,j} v_j(t) \right) \\ X_n(0) = 0 \end{array} \right.$$

respectivamente, supuesto no centrados los procesos poissonianos.

5.7.- Cálculo de los coeficientes $p_{n,m}(t)$ por truncamiento

Dado que el sistema V.15 tiene solución única, por ser una simple reformulación de la ecuación IV.39 y tender a 0 los coeficientes de Fourier, parece natural el intento de encontrar dicha solución por una técnica de truncamiento calculando, no la solución de V.15 directamente, sino la del sistema de número finito de ecuaciones diferenciales definido por

$$V.21 \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{n,m}^*(t,M) + q \frac{\pi^2}{4c^2} (n^2+m^2) p_{n,m}^*(t,M) + \\ \quad + \sum_{i,j=1}^M p_{n,i}^*(t,M) p_{m,j}^*(t,M) c_{i,j} = \delta_{n,m} (\sigma_n^2 + \lambda_n^*(t)) \\ p_{n,m}^*(t,M) = p_{m,n}^*(t,M); p_{n,m}^*(0,M) = 0; n,m = 1,2, \dots, M \end{array} \right.$$

tomando como valor de $p_{n,m}(t)$ el del correspondiente $p_{n,m}^*(t,M)$. A continuación probamos que la substitución anterior es correcta en el sentido de que para $M \rightarrow \infty$ el error cometido tiende a 0.

En efecto, restando V.21 a V.15 tenemos

$$\begin{aligned} & \dot{p}_{n,m}(t) - \dot{p}_{n,m}^*(t,M) + q \frac{\pi^2}{4c^2} (n^2+m^2) (p_{n,m}(t) - p_{n,m}^*(t,M)) + \\ & + \sum_{i,j=1}^M (p_{n,i}(t) p_{m,j}(t) - p_{n,i}^*(t,M) p_{m,j}^*(t,M)) c_{i,j} + \sum_{i,j=M+1}^{\infty} p_{n,i}(t) p_{m,j}(t) c_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

o bien

$$V.22 \left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_{n,m}(t) - \dot{p}_{n,m}^*(t,M) + q \frac{\pi^2}{4c^2} (n^2+m^2) (p_{n,m}(t) - p_{n,m}^*(t,M)) + \\ \quad + \sum_{i,j=1}^M p_{n,i}(t) (p_{m,j}(t) - p_{m,j}^*(t,M)) c_{i,j} + \sum_{i,j=1}^M p_{m,j}^*(t,M) (p_{n,i}(t) - p_{n,i}^*(t,M)) c_{i,j} + \\ \quad + \sum_{i,j=M+1}^{\infty} p_{n,i}(t) p_{m,j}(t) c_{i,j} = 0 \end{array} \right.$$

Ahora bien,

$$c_{i,j} < \frac{4c^{2k}}{\epsilon^2 \pi^2} \quad \text{para } i,j \leq M$$

$$c_{i,j} < \frac{4c^{2k}}{\epsilon^2 \pi^2 (M+1)^2} \quad \text{para } i,j \leq M$$

$$\sum_{i,j=M+1}^{\infty} p_{n,i}(t) p_{m,j}(t) < \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |p_{i,j}(t)| \right)^2 = \|\bar{P}(t)\|^2$$

puesto que $P(t)$ es acotado. Por tanto, si designamos por

$$d(t,M) = \max_{n,m=1\dots M} \left\{ |p_{n,m}(t) - p_{n,m}^*(t,M)| \right\}$$

al mayor de los errores absolutos, se deduce de V.22 que

$$V.23 \quad d(t,M) + \left(q \frac{\pi^2}{2c^2} M^2 + 8Mk_1 \frac{c^{2k}}{\epsilon^2 \pi^2} \right) d(t,M) + \frac{4c^{2k}}{\epsilon^2 \pi^2 (M+1)^2} \|\bar{P}(t)\|^2 > 0$$

lo que implica, junto con $d(0,M)=0$, que

$$V.24 \quad d(t,M) < \frac{4c^{2k}}{\epsilon^2 \pi^2 (M+1)^2} \|\bar{P}(t)\|^2 \left| e^{-\left(q \frac{\pi^2}{2c^2} M^2 + 8Mk_1 \frac{c^{2k}}{\epsilon^2 \pi^2} \right) t} - 1 \right|$$

siendo $k_1 = \max_{n,m} \{ p_{n,m}(t) \}$. Este resultado nos dice que $d(t,M) \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$ y que, por el contrario, el error crece para M fijo cuando aumenta t .

5.8.- Análisis de los resultados obtenidos por el ordenador

A diferencia del programa único utilizado en el caso determinista, en el aleatorio se ha empleado una técnica de programas y ficheros de datos encadenados.

Las situaciones inicial y final consideradas han sido

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad h(x) = 4-x^2$$

respectivamente, la zona de influencia del polo es el intervalo $[-2,2]$ como en el caso determinista y se tomó 0.01 como alcance de los observatorios, lo que implicaba la consideración de 199 de éstos. Este pequeño alcance permitió la consideración de las ecuaciones diferenciales simplificadas definidas por las ecuaciones V.16, V.19-bis y V.20-bis, cuya solución se determinó por los métodos de Runge-Kutta y Milne.

Se consideró que las perturbaciones impulsivas de la variable de estado estaban caracterizadas por procesos poissonianos con tasa $\lambda(x) = \frac{1}{1+x^2}$ siendo la magnitud del impulso en el punto de abscisa x una variable aleatoria $N(0, (1+x^2)^{-\frac{1}{2}})$. Los procesos w_n que definían el proceso de Wiener de perturbaciones eran tales que $\sigma_n = \frac{1}{n^2}$, para garantizar las condiciones que aseguran la existencia y unicidad de soluciones.

Por lo que respecta al proceso de observaciones la perturbación en el punto de abscisa x se consideró $N(0, 0.1(1+x^2)^{-\frac{1}{2}})$. La simulación de estas perturbaciones se hizo aplicando el teorema central del límite, en virtud de cual si el ordenador genera n números aleatorios a_i en el intervalo $[0,1]$, para lo que se construyó la subrutina adecuada, el valor

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

puede considerarse como una desviación $N(0,1)$.

Los programas para calcular los coeficientes de Fourier de $S(t)$ y $m(t)$ son los mismos que en el caso determinista, utilizando para el cálculo de integrales la fórmula de Simpson cerrada con un paso suficientemente pequeño para garantizar la precisión.

En la salida de resultados se observa una pérdida de simetría en los cuadros correspondientes a la estimación de la variable de estado y a la ley de control que es debida a las perturbaciones, no así en el caso del cuadro correspondiente a la financiación externa que es de carácter determinista. La ley de control y la financiación externa incrementan sus valores lo que es lógico dado que el objetivo de las mismas es lisar la influencia de las perturbaciones.

Esta influencia se manifiesta en los comienzos del proceso por la aparición de algunos valores negativos de la variable de estado, debidos al hecho de haber considerado nula la situación inicial y a que las perturbaciones pueden ser negativas. Por lo demás, y en los tres casos analizados, la dinámica del polo es expansiva como en el caso determinista y los costes son menores para una mayor velocidad de propagación.

113

APENDICE A

NOTACIONES UTILIZADAS

APENDICE A

NOTACIONES UTILIZADAS

Las notaciones utilizadas en este trabajo han sido tomadas de los textos de Yosida y Taylor citados en la bibliografía.

$B^2([0,t]; H) \equiv$ Funciones de $[0,t]$ en H , fuertemente medibles sobre $[0,t]$ y tales que

$$\int_0^t \|h(s)\|^2 ds < \infty$$

$B_\infty([0,t]; H) \equiv$ Funciones definidas en el intervalo $[0,t]$ valoradas sobre H , fuertemente medibles y uniformemente acotadas en norma.

$C(X,Y) \equiv$ Funciones continuas de X en Y .

$C^k(B) \equiv$ Funciones real o complejo-valoradas definidas en el subconjunto abierto B de \mathbb{R}^n que tienen derivadas parciales continuas hasta de orden k inclusive.

$C^k_0(B) \equiv$ Subconjunto de $C^k(B)$ formado por aquellas funciones cuyos soportes son subconjuntos compactos de B .

$L(H) \equiv$ Funciones lineales de H en H .

$\mathcal{L}(H) \equiv$ Funciones lineales continuas de H en H .

$L(K,H) \equiv$ Funciones lineales de K en H .

$\mathcal{L}(K,H) \equiv$ Funciones lineales continuas de K en H .

$L^1(A,m; X) \equiv$ Clases de funciones equivalentes de A en X y de norma integrable respecto a la medida m .

$L^2(A, m; X) \equiv$ Clases de funciones equivalentes de A en X y de norma de cuadrado integrable respecto a la medida m .

$L^p(S, \mathcal{B}, m), (1 \leq p < \infty) \equiv$ Espacio vectorial de funciones real o complejo valoradas, \mathcal{B} -medibles respecto a la medida m , definidas sobre S (excepto quizás para un conjunto de medida nula respecto a m) y tales que $|h(s)|^p$ es m -integrable sobre S .

$L^p(S), (1 \leq p < \infty) \equiv$ Es el caso anterior cuando m es la medida de Lebesgue .

$L_\infty([0, t], H) \equiv$ Espacio de funciones medibles respecto a la medida de Lebesgue que son esencialmente acotadas .

APENDICE B**TRES PROPOSICIONES RELATIVAS A LAS RECURRENCIAS II.32**

En este apéndice se demuestran, en las proposiciones B.2 y B.3, los resultados II.34 y II.35 ,obtenidos en la referencia [12] , por un procedimiento diferente al utilizado en la misma basado en la proposición B.1.

APENDICE B

Proposición B.1.

El operador de evolución suave perturbado correspondiente a la perturbación de $U_{n-1}(t,s)$ por $B(t)(L_n(t)-L_{n-1}(t))$ coincide con $U_n(t,s)$ el operador de evolución suave perturbado correspondiente a la perturbación de T_t por $B(t)L_n(t)$.

En efecto; designemos por $C_{n-1}(t,s)$ al operador de evolución suave perturbado correspondiente a la perturbación de $U_{n-1}(t,s)$ por $B(t)(L_n(t)-L_{n-1}(t))$. Se tendrá entonces que

$$\begin{aligned}
 C_{n-1}(t,s)y &= U_{n-1}(t,s)y + \int_s^t U_{n-1}(t,r) B(r)(L_n(r)-L_{n-1}(r)) C_{n-1}(r,s)y \, dr = \\
 &= T_{t-s}y + \int_s^t T_{t-r} B(r) L_{n-1}(r) U_{n-1}(r,s)y \, dr + \\
 &+ \int_s^t T_{t-r} B(r) (L_n(r)-L_{n-1}(r)) C_{n-1}(r,s)y \, dr + \\
 &+ \int_s^t \int_r^t T_{t-v} B(v) L_{n-1}(v) U_{n-1}(v,r) \{ B(r)(L_n(r)-L_{n-1}(r)) C_{n-1}(r,s)y \} \, dv \, dr = \\
 &= T_{t-s} + \int_s^t T_{t-r} B(r)(L_n(r)-L_{n-1}(r)) C_{n-1}(r,s)y \, dr + \\
 &+ \int_s^t \int_s^r T_{t-r} B(r) L_{n-1}(r) U_{n-1}(r,v) B(v)(L_n(v)-L_{n-1}(v)) C_{n-1}(v,s)y \, dv \, dr = \\
 &= T_{t-s}y + \int_s^t T_{t-r} B(r)(L_n(r)-L_{n-1}(r)) C_{n-1}(r,s)y \, dr + \\
 &+ \int_s^t T_{t-r} B(r) L_{n-1}(r) \left[U_{n-1}(r,s)y + \int_s^r U_{n-1}(r,v) B(v)(L_n(v)-L_{n-1}(v)) C_{n-1}(v,s)y \, dv \right] \, dr = \\
 &= T_{t-s}y + \int_s^t T_{t-r} B(r)(L_n(r)-L_{n-1}(r)) C_{n-1}(r,s)y \, dr + \\
 &+ \int_s^t T_{t-r} B(r) L_{n-1}(r) C_{n-1}(r,s)y \, dr = \\
 &= T_{t-s}y + \int_s^t T_{t-r} B(r) L_n(r) C_{n-1}(r,s)y \, dr = U_n(t,s)y
 \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Esto significa que la salida del (n-1) sistema controlado (supuesto $m_n(t) = 0$ para todo n) de la recurrencia definida por II.30 cuando la ley de control es

$(L_n(t) - L_{n-1}(t))z_n(t)$ y la correspondiente al sistema n-simo cuando la entrada es nula coinciden. Este resultado jugará un papel importante en la demostración de la proposición B.3.

Proposición B.2

$$z_n(t), S_n(t)z_n(t) = \langle z_n(t_1), Kz_n(t_1) \rangle + \int_t^{t_1} \left\{ \langle z_n(s), F_n(s)z_n(s) \rangle - 2 \langle z_n(s), S_n(s)B(s)\bar{u}(s) \rangle \right\} ds$$

Para probar la proposición desarrollaremos el lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} \langle z_n(t), S_n(t)z_n(t) \rangle &= \langle U_n(t,0)z_0 + \int_0^t U_n(t,s)B(s)\bar{u}(s) ds, \\ U_n^*(t_1,t)K U_n(t_1,t) \left\{ U_n(t,0)z_0 + \int_0^t U_n(t,s)B(s)\bar{u}(s) ds \right\} + \\ &+ \int_t^{t_1} U_n^*(s,t)F_n(s) U_n(s,t) \left\{ U_n(s,0)z_0 + \int_0^t U_n(s,r)B(r)\bar{u}(r) dr \right\} ds \rangle = \\ &= \langle U_n(t,0)z_0, U_n^*(t_1,t) K U_n(t_1,t) U_n(t,0) z_0 \rangle + \\ &+ \langle U_n(t,0)z_0, U_n^*(t_1,t) K U_n(t_1,t) \int_0^t U_n(t,s)B(s)\bar{u}(s) ds \rangle + \\ &+ \left\langle \int_0^t U_n(t,s) B(s)\bar{u}(s) ds, U_n^*(t_1,t) K U_n(t_1,t) U_n(t,0)z_0 \right\rangle + \\ &+ \left\langle \int_0^t U_n(t,s) B(s)\bar{u}(s) ds, U_n^*(t_1,t) K U_n(t_1,t) \int_0^t U_n(t,s)B(s)\bar{u}(s) ds \right\rangle + \\ &+ \langle U_n(t,0)z_0, \int_t^{t_1} U_n^*(s,t) F_n(s) U_n(s,t) U_n(t,0)z_0 ds \rangle + \\ &+ \langle U_n(t,0)z_0, \int_t^{t_1} U_n^*(s,t)F_n(s)U_n(s,t) \left[\int_0^t U_n(t,r)B(r)\bar{u}(r)dr \right] ds \rangle + \\ &+ \left\langle \int_0^t U_n(t,s)B(s)\bar{u}(s)ds, \int_t^{t_1} U_n^*(s,t)F_n(s)U_n(s,t)U_n(t,0)z_0 ds \right\rangle + \\ &+ \left\langle \int_0^t U_n(t,s)B(s)\bar{u}(s)ds, \int_t^{t_1} U_n^*(s,t)F_n(s)U_n(s,t) \left[\int_0^t U_n(t,r)B(r)\bar{u}(r)dr \right] ds \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle U_n(t_1, t) U_n(t, 0) z_0, K U_n(t_1, t) U_n(t, 0) z_0 \rangle + \\
&+ \langle U_n(t_1, t) U_n(t, 0) z_0, K U_n(t_1, t) \int_0^t U_n(t, s) B(s) \bar{u}(s) ds \rangle + \\
&+ \langle U_n(t_1, t) \int_0^t U_n(t, s) B(s) \bar{u}(s) ds, K U_n(t_1, t) U_n(t, 0) z_0 \rangle + \\
&+ \langle U_n(t_1, t) \int_0^t U_n(t, s) B(s) \bar{u}(s) ds, K U_n(t_1, t) \int_0^t U_n(t, s) B(s) \bar{u}(s) ds \rangle + \\
&+ \int_t^{t_1} \langle U_n(s, t) U_n(t, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, t) U_n(t, 0) z_0 \rangle ds + \\
&+ \int_t^{t_1} \int_0^t \langle U_n(s, t) U_n(t, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, t) U_n(t, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr ds + \\
&+ \int_t^{t_1} \int_0^t \langle U_n(s, t) U_n(t, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, t) U_n(t, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr ds + \\
&+ \int_t^{t_1} \int_0^t \int_0^t \langle U_n(s, t) U_n(t, w) B(w) \bar{u}(w), F_n(s) U_n(s, t) U_n(t, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr dw ds = \\
&= \langle U_n(t_1, 0) z_0, K U_n(t_1, 0) z_0 \rangle + \\
&+ 2 \int_0^t \langle U_n(t_1, 0) z_0, K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \rangle ds + \\
&+ \int_0^t \int_0^t \langle U_n(t_1, r) B(r) \bar{u}(r), K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \rangle dr ds + \\
&+ \int_t^{t_1} \langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, 0) z_0 \rangle ds + \\
&+ 2 \int_t^{t_1} \int_0^t \langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr ds + \\
&+ \int_t^{t_1} \int_0^t \int_0^t \langle U_n(s, w) B(w) \bar{u}(w), F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr dw ds = \\
&= \langle U_n(t_1, 0) z_0, K U_n(t_1, 0) z_0 \rangle +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^{t_1} \langle U_n(t_1, 0) z_0, K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \rangle ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \langle U_n(t_1, 0) z_0, K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \rangle ds + \\
& + \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \langle U_n(t_1, r) B(r) \bar{u}(r), K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \rangle dr ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \int_0^s \langle U_n(t_1, r) B(r) \bar{u}(r), K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \rangle dr ds + \\
& + \int_t^{t_1} \langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, 0) z_0 \rangle ds + \\
& + 2 \int_t^{t_1} \int_0^s \langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr ds + \\
& + \int_t^{t_1} \int_0^s \int_0^s \langle U_n(s, w) B(w) \bar{u}(w), F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr dw ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \int_0^s \langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr ds - \\
& - \int_t^{t_1} \int_0^s \int_0^s \langle U_n(s, w) B(w) \bar{u}(w), F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr dw ds + \\
& + 2 \int_t^{t_1} \int_0^t \langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dr ds + \\
& + \int_t^{t_1} \int_0^s \int_0^s \langle U_n(s, w) B(w) \bar{u}(w), F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dw dr ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \int_t^s \int_0^r \langle U_n(s, w) B(w) \bar{u}(w), F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \rangle dw dr ds = \\
& = \langle U_n(t_1, 0) z_0, K U_n(t_1, 0) z_0 \rangle + \\
& + \langle U_n(t_1, 0) z_0, K \int_0^{t_1} U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) ds \rangle + \\
& + \langle \int_0^{t_1} U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) ds, K U_n(t_1, 0) z_0 \rangle +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\langle \int_0^{t_1} U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) ds, K \int_0^{t_1} U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) ds \right\rangle - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \left\langle U_n(t_1, 0) z_0 + \int_0^s U_n(t_1, r) B(r) \bar{u}(r) dr, K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \right\rangle ds + \\
& + \int_t^{t_1} \left\langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, 0) z_0 \right\rangle ds + \\
& + \int_t^{t_1} \left\langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) \int_0^s U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) dr \right\rangle ds + \\
& + \int_t^{t_1} \left\langle \int_0^s U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) dr, F_n(s) U_n(s, 0) z_0 \right\rangle ds + \\
& + \int_t^{t_1} \left\langle \int_0^s U_n(s, w) B(w) \bar{u}(w) dw, F_n(s) \int_0^s U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) dr \right\rangle ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \int_t^s \left\langle U_n(s, 0) z_0, F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \right\rangle dr ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \int_t^s \int_0^r \left\langle U_n(s, w) B(w) \bar{u}(w), F_n(s) U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) \right\rangle dw dr ds = \\
& = \left\langle U_n(t_1, 0) z_0 + \int_0^{t_1} U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) ds, K \left\{ U_n(t_1, 0) z_0 + \int_0^{t_1} U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) ds \right\} \right\rangle \\
& - 2 \int_t^{t_1} \left\langle U_n(s, 0) z_0 + \int_0^s U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) dr, U_n^*(t_1, s) K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \right\rangle ds + \\
& + \int_t^{t_1} \left\langle U_n(s, 0) z_0 + \int_0^s U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) dr, F_n(s) \left\{ U_n(s, 0) z_0 + \int_0^s U_n(s, r) B(r) \bar{u}(r) dr \right\} \right\rangle \\
& - 2 \int_t^{t_1} \left\langle U_n(r, 0) z_0, \int_s^{t_1} F_n(s) U_n(r, s) B(s) \bar{u}(s) ds \right\rangle ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \left\langle \int_0^s U_n(r, w) B(w) \bar{u}(w) dw, \int_s^{t_1} F_n(r) U_n(r, s) B(s) \bar{u}(s) ds \right\rangle ds = \\
& = \left\langle z_n(t), K z_n(t) \right\rangle + \int_t^{t_1} \left\langle z_n(s), F_n(s) z_n(s) \right\rangle ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \left\langle z_n(s), U_n^*(t_1, s) K U_n(t_1, s) B(s) \bar{u}(s) \right\rangle ds -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \int_t^{t_1} \langle U_n(s,0)z_0 + \int_0^s U_n(s,w)B(w)\bar{v}(w)dw, \int_s^{t_1} U_n^*(r,s)F_n(r)U_n(r,s)B(s)\bar{u}(s) \rangle ds = \\
& = \langle z_n(t), K z_n(t) \rangle + \int_t^{t_1} \langle z_n(s), F_n(s)z_n(s) \rangle ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \langle z_n(s), U_n^*(t_1,s)K U_n(t_1,s)B(s)\bar{u}(s) + \int_s^{t_1} U_n^*(r,s)F_n(r)U_n(r,s)B(s)\bar{u}(s) \rangle ds = \\
& = \langle z_n(t), K z_n(t) \rangle + \int_t^{t_1} \langle z_n(s), F_n(s)z_n(s) \rangle ds - \\
& - 2 \int_t^{t_1} \langle z_n(s), S_n(s)B(s)\bar{u}(s) \rangle ds
\end{aligned}$$

tal como se quería demostrar.

Si designamos ahora por $W^0(u_n, z_0)$ al funcional de coste correspondiente a la ley de control dada por la recurrencia

$$u_n(t) = L_n(t) z_n(t)$$

es decir, para $m_n(t) = 0$, se satisface la siguiente proposición

Proposición B.3

Para la ley de control dada por la recurrencia

$$u_n(t) = L_n(t) z_n(t)$$

y para z_0 fijo, se cumple

$$W^0(u_n; z_0) = \langle z_0, S_n(0) z_0 \rangle$$

y además $W^0(u_n; z_0)$ decrece monotonamente con n .

En efecto:

$$\begin{aligned}
W^0(u_n; z_0) &= \langle z_n(t_1), K z_n(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z_n(s), F(s) z_n(s) \rangle ds + \\
&+ \int_0^{t_1} \langle u_n(s), G(s) u_n(s) \rangle ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle z_n(t_1), K z_n(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z_n(s), F(s) z_n(s) \rangle ds + \\
&+ \int_0^{t_1} \langle L_n(s) z_n(s), G(s) L_n(s) z_n(s) \rangle ds = \\
&= \langle z_n(t_1), K z_n(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z_n(s), F(s) z_n(s) \rangle ds + \\
&+ \int_0^{t_1} \langle z_n(s), L_n^*(s) G(s) L_n(s) z_n(s) \rangle ds = \\
&= \langle z_n(t_1), K z_n(t_1) \rangle + \\
&+ \int_0^{t_1} \langle z_n(s), F(s) + L_n^*(s) G(s) L_n(s) z_n(s) \rangle ds = \\
&= \langle z_n(t_1), K z_n(t_1) \rangle + \int_0^{t_1} \langle z_n(s), F_n(s) z_n(s) \rangle ds =
\end{aligned}$$

(por la aplicación de la proposición B.2 y tomando $\bar{u}(s) = 0$)

$$= \langle z_0, S_n(0) z_0 \rangle$$

tal como establece la primera parte de la proposición y donde al tomar $\bar{u}(s) = 0$ estamos considerando la ley de control

$$u(s) = u_n(s) = L_n(s) z(s)$$

Vamos entonces a probar que, para $z_0 \in H$ fijo, $W^0(u_n; z_0)$ decrece monotonamente y además, y como consecuencia,

$$\langle z_0, S_n(0) z_0 \rangle \leq \langle z_0, S_0(0) z_0 \rangle$$

Tenemos que probar que, para todo n ,

$$W^0(u_{n-1}; z_0) \geq W^0(u_n; z_0)$$

o lo que es igual, en virtud de la primera parte de la proposición, que

$$\langle z_0, S_{n-1}(0) z_0 \rangle \geq \langle z_0, S_n(0) z_0 \rangle$$

La diferencia entre el primero y segundo miembro de la desigualdad anterior es

$$\begin{aligned}
 D^0 &= W^0(u_{n-1}; z_0) - W^0(u_n; z_0) = \\
 &= \int_0^{t_1} \langle z_{n-1}(s), F_{n-1}(s) z_{n-1}(s) \rangle ds - \int_0^{t_1} \langle z_n(s), F_n(s) z_n(s) \rangle ds - \\
 &- 2 \int_0^{t_1} \langle z_{n-1}(s), S_{n-1}(s) B(s) u_{n-1}(s) \rangle ds + 2 \int_0^{t_1} \langle z_n(s), S_n(s) B(s) u_n(s) \rangle ds
 \end{aligned}$$

Aplicamos ahora al sistema n la entrada $u_n(t) = 0$ y al sistema $n-1$ la entrada $u_{n-1}(t) = (L_n(t) - L_{n-1}(t)) z_{n-1}(t)$.

Con ésto, la diferencia anterior se convierte, en función de la proposición B.1. y dado que ambos sistemas tienen una misma salida a la que designaremos por $z^0(t)$, en

$$\begin{aligned}
 D^0 &= \int_0^{t_1} \langle z^0(s), F(s) z^0(s) \rangle ds + \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_{n-1}^*(s) G(s) L_{n-1}(s) z^0(s) \rangle ds - \\
 &- \int_0^{t_1} \langle z^0(s), F(s) z^0(s) \rangle ds - \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_n^*(s) G(s) z^0(s) \rangle ds - \\
 &- 2 \int_0^{t_1} \langle z^0(s), S_{n-1}(s) B(s) (L_n(s) - L_{n-1}(s)) z^0(s) \rangle ds = \\
 &= \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_{n-1}^*(s) G(s) L_{n-1}(s) z^0(s) \rangle ds - \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_n^*(s) G(s) L_n(s) z^0(s) \rangle ds - \\
 &- 2 \int_0^{t_1} \langle z^0(s), S_{n-1}(s) B(s) L_n(s) z^0(s) \rangle ds + 2 \int_0^{t_1} \langle z^0(s), S_{n-1}(s) B(s) L_{n-1}(s) z^0(s) \rangle ds =
 \end{aligned}$$

(al ser $S_{n-1}(t) B(t) = -L_n^*(t) G(t)$)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_{n-1}^*(s) G(s) L_{n-1}(s) z^0(s) \rangle ds - \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_n^*(s) G(s) L_n(s) z^0(s) \rangle ds + \\
 &+ 2 \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_n^*(s) G(s) L_n(s) z^0(s) \rangle ds - 2 \int_0^{t_1} \langle z^0(s), L_n^*(s) G(s) L_{n-1}(s) z^0(s) \rangle ds = \\
 &= \int_0^{t_1} \langle L_{n-1}(s) z^0(s), G(s) L_n(s) z^0(s) \rangle ds + \int_0^{t_1} \langle L_n(s) z^0(s), G(s) L_n(s) z^0(s) \rangle ds -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \int_0^{t_1} \langle L_n(s)z^0(s), G(s) L_{n-1}(s) z^0(s) \rangle ds = \\
& = \int_0^{t_1} \langle L_{n-1}(s)z^0(s), G(s)L_n z^0(s) \rangle ds + \int_0^{t_1} \langle L_n(s)z^0(s), G(s)L_n(s)z^0(s) \rangle ds - \\
& - \int_0^{t_1} \langle L_n(s)z^0(s), G(s)L_{n-1}(s)z^0(s) \rangle ds - \int_0^{t_1} \langle L_{n-1}(s)z^0(s), G(s)L_n(s)z^0(s) \rangle ds = \\
& = \int_0^{t_1} \langle (L_n(s)-L_{n-1}(s))z^0(s), G(s) (L_n(s)-L_{n-1}(s))z^0(s) \rangle ds = \\
& = \int_0^{t_1} \langle \bar{u}_n(s), G(s) u_n(s) \rangle ds > 0, \text{ con } \bar{u}_n(t)=(L_n(t)-L_{n-1}(t))z^0(t)
\end{aligned}$$

ya que G es definido positivo y tal como se quería demostrar.

En particular tenemos que

$$\langle z_0, S_n(0)z_0 \rangle < \langle z_0, S_0(0)z_0 \rangle$$

donde

$$S_0(0) y = T_{t_1}^* K T_{t_1} y + \int_0^{t_1} T_s^* F(s) T_s y ds$$

AN

APENDICE C

TEOREMAS BASICOS UTILIZADOS

APENDICE C

TEOREMAS BASICOS UTILIZADOS

Teorema 1 (de Curtain y Pritchard en (12)).

La sucesión $S_n(t)$ definida en II.28.3 converge fuertemente, cuando $n \rightarrow \infty$, a un operador autoadjunto $S(t) \in L(H)$, para todo $t \in [0, t_1]$, que satisface la ecuación integral

$$a) \quad S(t)y = U^*(t_1, t)K U(t_1, t)y + \int_t^{t_1} U^*(s, t)(F(s) + S(s)B(s)G^{-1}(s)B^*(s)S(s)) U(s, t)y \, ds$$

(donde $U(s, t)$ es la perturbación de T_t por $-BG^{-1}B^*S(t)$, y es fuertemente continuo en t para $t \in [0, t_1]$). Además, y dentro de la clase de operadores autoadjuntos fuertemente continuos en $L(H)$, $S(t)$ es la única solución de a) y de la ecuación de Riccati en producto escalar, con $\langle S(t)y, w \rangle$ diferenciable para $y, w \in D(A)$, definida por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle S(t)y, w \rangle + \langle S(t)y, Aw \rangle + \langle Ay, S(t)w \rangle + \langle Fy, w \rangle = \\ = \langle S(t)BG^{-1}B^*S(t)y, w \rangle, \quad t \in [0, t_1] \end{aligned}$$

con $S(t_1) = K$.

Por otro lado las sucesiones II.28.1 y II.28.2 convergen fuertemente, cuando $n \rightarrow \infty$, a los operadores

$$L(t) = -G^{-1}(t)B^*(t)S(t)$$

$$F_0(t) = F(t) + S(t)B(t)G^{-1}(t)B^*(t)S(t)$$

respectivamente, mientras que la sucesión $U_k(s, t)$ de operadores perturbados lo hace a $U(s, t)$.

Los teoremas 2,3,4,5 y 6 aparecen en el texto ([15]) de Kato.

Teorema 2 Sea $\dot{z}(t) = Az(t)$ y T_t el semigrupo fuertemente continuo generado por A . Consideremos el sistema

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B(t)z(t)$$

donde $B(t) \in L(H)$. Entonces $A + B(t)$ genera un semigrupo fuertemente continuo S_t definido por

$$S_t z_0 = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} B(s) z_0 ds$$

al que está asociado un operador de evolución suave definido por

$$U(t,s) z_0 = T_{t-s} z_0 + \int_s^t T_{t-u} B(u) U(u,s) z_0 du$$

Teorema 3

Si T_t es un semigrupo fuertemente continuo sobre H y $B(t) \in \mathcal{B}_\infty([0, t_1]; L(H))$, el operador de evolución suave resultante de la perturbación de T_t por $B(t)$ satisface, para todo $z_0 \in D(A)$, la relación

$$\int_s^t U(t,r) (A+B(r)) z_0 dr = U(t,s) z_0 - z_0$$

y además, salvo quizás en un conjunto de medida nula del intervalo $[0, t_1]$, las relaciones

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t,s) z_0 = -U(t,s) (A+B(s)) z_0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} U^*(t,s) z_0 = -(A^* - B^*(s)) U^*(t,s) z_0$$

donde A es el generador de T_t .

Teorema 4

Sea T_t un semigrupo fuertemente continuo definido sobre H y generado por A y supongamos que $B(t) \in \mathcal{B}_\infty([0, t_1]; L(H))$ satisface las condiciones

$$T_{t-s} B(s): H \rightarrow D(A), \text{ para casi todo } t > s \in [0, t_1]$$

$$A T_{t-(\cdot)} B(\cdot) \in \mathcal{B}_1([0, t_1]; L(H))$$

es decir, $A T_{t-s} B(s) z_0$ es fuertemente medible en s para todo $z_0 \in H$

$$\text{y } \int_0^{t_1} \|A T_{t-s} B(s)\|_{L(H)} ds < \infty .$$

Entonces el operador de evolución suave $U(t,s)$ generado por $A + B(t)$ es un operador de evolución fuerte, salvo quizás sobre un conjunto de medida nula.

Teorema 5

Si $U(t,s)$ es un operador de evolución fuerte y $U(t,s) f(s) \in D(A)$ para casi todo $t > s \in [0, t_1]$ y $U(t, \cdot) f(\cdot)$ es integrable en el sentido de Bochner, entonces

$$b) \quad z(t) = U(t,0) z_0 + \int_0^t U(t,s) f(s) ds$$

es la única solución de

$$c) \quad \dot{z}(t) = (A + B(t)) z + f(t), \quad z(0) = z_0 \in D(A)$$

Teorema 6.

Si T_t y $B(t)$ satisfacen las condiciones del teorema 4, $T_t z_0, T_{t-s} f(s) \in D(A)$ para casi todo $t > s \in [0, t_1]$ y $T_{t-s} f(s)$ es integrable en el sentido de Bochner sobre $(0, t)$, $b)$ es la única solución de $c)$

Teorema 7. (de A. Taylor en (4).

Supongamos que el generador A es autoadjunto y que para algún valor $\lambda^* \in \rho(A)$ el resolvente $R(\lambda^*)$ es compacto. Entonces se cumple que

$$a) \quad R(\lambda) \text{ es compacto para todo } \lambda \in \rho(A),$$

$b)$ existe una sucesión infinita $\{\lambda_n\}$ de autovalores de A tales que $\lambda_n \rightarrow \infty$ y cuyas autofunciones asociadas tienen la misma dimensión que la multiplicidad del autovalor correspondiente. Si además

$$\sup_n \operatorname{Re} |\lambda_n| < \infty$$

A genera un semigrupo fuertemente continuo,

$c)$ es posible determinar un conjunto ortonormal completo de autofunciones asociadas a A ,

$$d) \quad \text{el espectro de } A \text{ se reduce al espectro puntual,}$$

e) si la multiplicidad del autovalor λ_n es s_n y son $\{g_{njn}\}$ ($j_n = 1, \dots, s_n$) las autofunciones asociadas al autovalor λ_n , tenemos para $z \in D(A)$ que

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j_n=1}^{s_n} \langle z, g_{njn} \rangle g_{njn}$$

y

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{j_n=1}^{s_n} \langle z, g_{njn} \rangle g_{njn}$$

y f) el semigrupo generado por A viene dado por

$$z(t) = T_t z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{j_n=1}^{s_n} \langle z_0, g_{njn} \rangle g_{njn}, \quad z_0 \in H, t \geq 0$$

y es analítico, supuesto en la anterior expresión que la condición inicial z_0 admite desarrollo en serie de Fourier respecto al sistema ortonormal $\{g_{njn}\}$.

Teorema 8 (de A. Taylor en (4)).

Sea $F \in L(V, Z)$, $G \in L(X, Z)$, donde V, X, Z son espacios de Banach. Las dos condiciones siguientes son equivalentes

$$\text{Ker}(G^*) \subset \text{Ker}(F^*)$$

$$\overline{\text{Rango}(G)} \supset \overline{\text{Rango}(F)}$$

Teorema 9 (de R.F. Curtain en (7))

Sean los procesos de señales y observaciones definidos por

$$z(t) = T_t z_0 + \int_0^t T_{t-s} B(s) dq(s)$$

$$y(t) = \int_0^t C(s) z(s) ds + \int_0^t F(s) dw(s)$$

donde T_{t-s} es un operador de evolución fuerte generado por $A(t)$ definido sobre un espacio H de Hilbert, $B \in \mathcal{B}_{\infty}([0, t_1], L(K, H))$, $C \in \mathcal{B}_{\infty}([0, t_1], L(H, R^k))$, $F, F^{-1} \in L_{\infty}([0, t_1], L(R^k))$,

z_0 es una variable aleatoria con media 0 y operador de covarianza P_0 , w es un proceso de Wiener k -dimensional con matriz de covarianza incremental W y $q(t)$ es un proceso con incrementos ortogonales valorado sobre K con

$$r(t) = E\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i e_i p(t)$$

donde $p(t)$ es una función real no decreciente, $\{e_i\}$ es una base ortonormada para H y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 < \infty$.

El proceso

$$m(t) = q(t) - r(t)$$

tiene la función de covarianza $Mf(t)$, con $Me_i = \lambda_i e_i$, $f(t)$ es función real no decreciente, y $\sum \lambda_i < \infty$. Se supone que $q(t)$, $w(t)$ y z_0 son mutuamente independientes y que $q(t)$ es de la forma

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) e_n$$

donde $\{q_n(t)\}$ es una familia de procesos independientes, del mismo tipo, con incrementos ortogonales, y tales que

$$E\{q_n(t)\} = \mu_n p(t)$$

$$E\{(\bar{q}_i(t) - \bar{q}_i(s)) \circ (\bar{q}_i(t) - \bar{q}_i(s))\} = \lambda_i (f(t) - f(s))$$

donde $\bar{q}_n(t) = q_n(t) - \mu_n p(t)$

Supongamos entonces que

I) $T_{t-s} B(t) g_n \in D(A(t))$ para $t > s$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \int_0^t \|A(t) T_{t-s} B(s) g_n\|^2 ds < \infty$$

II) $T_{t-s} B(s) g_n \in D(A(s))$ para casi todo $t > s \in [0, t_1]$ y para todo n , y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \int_0^t \|A(t) T_{t-s} B(s) g_n\|^2 dp(s) < \infty$$

III) $T_t P_0 g_n \in D(A(t))$ para $t > 0$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(t) T_t P_0 g_n\|^2 < \infty$$

Bajo estas condiciones el mejor filtro insesgado del estado $z(t)$ bajo las observaciones $y(t)$, de la forma

$$\hat{z}(t) = \int_0^{t_0} \mathcal{K}(t,s) dy(s) + c(t)$$

donde $\mathcal{K}(t, \cdot) \in B^2(0, t; (R^k, H))$ para todo $t \in T$, y tal que $E\{\langle h, \hat{z}(t) \rangle^2\}$ sea mínima para todo $h \in H$, viene dado por

$$\hat{z}(t) = x(t) + b(t)$$

donde $b(t)$ es la solución única de la ecuación determinista

$$db(t) = (A(t) - \bar{P}(t)C^*(t)(F(t)WF^*(t))^{-1}C(t))b(t)dt + B(t)dr(t)$$

$$b(0) = 0$$

mientras que $x(t)$ es la solución única de la ecuación de evolución estocástica

$$dx(t) = (A(t) - \bar{P}(t)C^*(t)(F(t)WF^*(t))^{-1}C(t))x(t)dt + \bar{P}(t)C^*(t)(F(t)WF^*(t))^{-1}dy(t)$$

$$x(0) = 0$$

mientras que $\bar{P}(t)$ es la solución única de la ecuación de Riccati

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{P}(t)f, h \rangle = - \langle \bar{P}(t)f, Ah \rangle - \langle \bar{P}(t)h, Af \rangle + \langle \bar{P}(t)C^*C\bar{P}(t)f, h \rangle =$$

$$= \langle B(t)MB^*(t)f, h \rangle$$

$$\bar{P}(0) = P_0$$

y $f, h \in D(A)$. El operador $\bar{P}(t)$ es autoadjunto y definido positivo.

Lema 1.- Lema de Gronwall

Sea $f \in L^1(t_1, t_2)$, $f(t) \geq 0$ y h absolutamente continua sobre $[t_1, t_2]$.

Si $g \in L^\infty(t_1, t_2)$ satisface

$$g(t) \leq b(t) + \int_{t_1}^{t_2} f(s) g(s) ds$$

entonces

$$g(t) \leq b(t_1) e^{\int_{t_1}^{t_2} f(s) ds} + \int_{t_1}^t b(s) e^{\int_s^t f(u) du} ds$$

CONTROL OPTIMO DE UN POLO DE DESARROLLO

*****_*****_**_**_****_**_*****

Este programa se diseñó para el tratamiento numérico del modelo desarrollado por Angel Sarabia Viejo en su tesis. Fue ejecutado en un ordenador del Centro de Cálculo de la Universidad Pontificia 'Comillas' con las siguientes características.

SISTEMA ECLIPSE MV/3000 de DATA GENERAL.

32 BITS. Memoria virtual.

HARDWARE

Memoria 1 MB. Ampliable a 4 MB.
 1 Disco 277 MB. (Controlador para 4 discos.
 Admite 4 controladores).
 Cinta magnética 800 / 1600 BPI.
 Diskette doble cara doble densidad: 1.28 MB.
 Puede soportar 128 terminales.
 Actualmente: 11 pantallas
 2 impresoras seriales
 1 plotter CALCOMP 81

SOFTWARE

Sistema Operativo: AOS/VS
 CLI lenguaje de órdenes
 SED y SPEEⁿ editores de texto
 FORTRAN, COBOL y BASIC
 SWAT depurador de programas
 SORT / MERGE
 AZ-TEXT procesador de palabras
 DBMS gestión de Base de Datos

El programa fue escrito en el lenguaje FORTRAN 77 (F77) standard utilizando además extensiones propias de la Data General.

165

APENDICE D

PROGRAMAS DE ORDENADOR PARA EL CASO DETERMINISTA

PROGRAM CONTROL_OPTIMO

```

C      El programa calcula para una serie de instantes en el
C      intervalo de tiempo (0,t1) y en puntos equidistantes del
C      intervalo espacial (-c,c) en el que esta definido el sis-
C      tema a controlar el valor de la variable de estado z(x,t),
C      el control optimo u(x,t) y la financiacion externa m(x,t).
C      Da ademas para el instante final t1, el coste correspon-
C      diente al control optimo.
C      Se han utilizado, para verificar la validez del pro-
C      grama, los casos particulares analizados en el tratamiento
C      teorico de este capitulo.
C      El programa esta preparado para proceso interactivo y
C      trabaja en precision simple.

C      Definimos el numero 'pi'
      PARAMETER (PI=3.14159265)

C      Las siguientes sentencias definen dos tablas que con-
C      tendran respectivamente los valores de z(x,t),u(x,t) y
C      m(t,x) para diversos valores,101, de las variables espacio
C      y tiempo.

      DIMENSION VARIABLE_ESTADO(-50:50,0:100)
      DIMENSION CONTROL(-50:50,0:100)
      REAL INVERSION_EXTERNA(-50:50,0:100)

      EXTERNAL SITUACION_INICIAL,SITUACION_FINAL
C      Son datos definidos en subprogramas FUNCTION.

C      Las matrices COEF_SIT_INICIAL y COEF_SIT_FINAL con-
C      tendran los coeficientes de Fourier de las situaciones
C      inicial y final respectivamente.
      DIMENSION COEF_SIT_INICIAL(150),COEF_SIT_FINAL(150)
      COMMON/AMOR/COEF_SIT_INICIAL
      COMMON/ROMA/COEF_SIT_FINAL

C      M contendra valores en el tiempo y en el espacio de
C      los coeficientes de Fourier de m(t,x).
      COMMON/BLOQUE/M(150,0:1000)
      REAL M

C      S contendra los valores que a lo largo del tiempo
C      tomen los coeficientes asociados al operador S(t).
      COMMON/SOTA/S(150,0:100)

C      C es la semiamplitud del intervalo de definicion.
C      C1 es la distancia entre dos puntos sucesivos del in-
C      tervalo espacial para los que van a ser calculadas las
C      caracteristicas del sistema, T1 es el tiempo durante el
C      que el sistema va a ser controlado y T1/100 el interva-
C      lo entre dos instantes consecutivos del tiempo.
C      Empezamos dando el valor de C por el terminal.

```

```

PRINT *,"C, SEMIAMPLITUD DEL INTERVALO ESPACIAL: "
READ *,C
C1=C/1000.

C   Coeficientes de Fourier de las situaciones inicial
C   y final definidas en los subprogramas FUNCTION del
C   mismo nombre.
DO 2 N=1,150
  CF=0.0
  CALL COEF_DE_FOURIER(CF,N,SITUACION_INICIAL,C,C1)
  COEF_SIT_INICIAL(N)=CF
  CF=0.0
  CALL COEF_DE_FOURIER(CF,N,SITUACION_FINAL,C,C1)
  COEF_SIT_FINAL(N)=CF
2  CONTINUE

C   Ahora se da la "velocidad de propagacion" q.
29 PRINT *,"VALOR DE Q, VELOCIDAD DE PROPAGACION: "
   READ *,Q

C   Las cuatro matrices siguientes contienen los valo-
C   res de las constantes K(N),B(N),A(N) y D(N).
DIMENSION K(150),B(150),A(150),D(150)
REAL K
COMMON/BETA/B/DELTA/D
DO 1 N=1,150
  K(N)=2.*Q*((N*PI)/(2.*C))**2
  B(N)=SQRT(K(N)**2+4.)
  A(N)=2.+K(N)+B(N)
  D(N)=(2.+K(N)-B(N))/A(N)
1  CONTINUE

LORO=0 !Controla la impresion del tiempo optimo.
CHARACTER*2 LITERAL
PRINT*,"SI VA A INTRODUCIR LA DURACION DEL CONTROL"
PRINT*,"ESCRIBA 'SI' Y SI QUIERE QUE EL ORDENADOR "
PRINT*,"SEA EL QUE CALCULE LA DURACION OPTIMA ES- "
PRINT*,"CRIBA 'NO'. "
READ*,LITERAL
IF(LITERAL.EQ.'NO') GOTO 63
PRINT*,"VALOR DE T1,DURACION DEL CONTROL: "
READ *,T1
GO TO 66
63  CONTINUE

C   Calculo del tiempo optimo de ejecucion del modelo
C   utilizando el metodo de Fibonacci.
C   A8 y A9 son los extremos del intervalo de tiempo don-
C   de esta localizado el minimo; la longitud de este inter-
C   valo debe ser no mayor que 10 con lo que se puede tener
C   una precision del orden de la milésima como minimo. Esta

```

```

C  precision esta contenida en la variable PRECISION.

      PRINT *,"INTERVALO DE TIEMPO Y EL ERROR "
      READ *,A8,A9,PRECISION
      T1=0.
      LORO=1
      CALL FIBONACCI(A8,A9,T1,PRECISION)
66   T2=T1/100.

C  Valores en el tiempo de los coeficientes de Fou-
C  rier de la componente financiacion externa.
      DO 14 N=1,150
      DO 4 J=0,1000    ! J=h equivale al instante h*t2
      M(N,J)=FINANC_EXTERNA (J,T1,COEF_SIT_FINAL(N),
+      K(N),B(N),A(N),D(N))
4     CONTINUE
14   CONTINUE

C  Coeficientes asociados al operador S(t).Sus valo-
C  res en el tiempo estaran contenidos en la matriz S.
      DO 15 N=1,150
      DO 5 J=0,100    ! J=h es el instante h*T1/100
      T=J*T1/100.
      V1=EXP(-B(N)*(T1-T)) !
      V2=(K(N)+B(N))/2.
      V3=1.-D(N)*V1
      S(N,J)=B(N)/V3-V2
5     CONTINUE
15   CONTINUE

C  ZETA contendra los valores que en el tiempo toma-
C  ran los coeficientes de Fourier de la variable de es-
C  tado del sistema z(t,x).
C  La constante CONS es la que aparece en la expre-
C  sion III.25 de z(x,t), EXPR1 es la funcion de t que
C  la multiplicaba y EXPR2 es el sumando positivo.
      DIMENSION ZETA(150,0:100)
      DO 6 N=1,100    ! Calculo de los valores de ZETA
      DO 6 J=0,100    ! J=h es el instante h*t1/100
      CONS=CONSTANTE (J,T1,COEF_SIT_INICIAL(N),
+      COEF_SIT_FINAL(N),K(N),B(N),A(N),D(N))
      EXPR1=EXPRES1(J,T1,B(N),D(N))
      EXPR2=EXPRES2(J,T1,COEF_SIT_FINAL(N),K(N),
+      B(N),A(N),D(N))
      ZETA(N,J)=CONS*EXPR1+EXPR2
6     CONTINUE

C  Valores de la variable de estado z(x,t), del
C  control u(x,t) y de la inversion externa m(x,t).

```

```

C1=C/50.
DO 8 I=-49,49 ! I=k equivale al punto k*c1
    Y1=-C+(I+50)*C1
DO 8 J=0,100 ! J=h es el instante h*t2
    ACUMULO=0.0
    ADITOR=0.0
    SUMADOR=0.0
    DO 7 N=1,150
        ANGULO=N*PI/2.+(N*PI*Y1)/(2.*C)
        U=SIN(ANGULO)
        V=ZETA(N,J)*U
        ACUMULO=ACUMULO+V
        ADITOR=ADITOR-M(N,10*J)*U
        SUMADOR=SUMADOR-S(N,J)*V
7    CONTINUE
        VARIABLE_ESTADO(I,J)=ACUMULO/(C**.5)
        CONTROL(I,J)=SUMADOR+ADITOR
        INVERSION_EXTERNA(I,J)=ADITOR
8    CONTINUE

C    Calculo del funcional de coste.
    COSTE=0.0
    CALL COSTO(COSTE,T1)

C    Comienza la salida de informacion.
    PRINT*,"LA IMPRESORA VA A IMPRIMIR LOS VALORES DE"
    PRINT*,"LA VARIABLE DE ESTADO,LA INVERSION EXTER-"
    PRINT*,"NA Y LALEY DE CONTROL OPTIMA EN ALGUNOS "
    PRINT*,"PUNTOS Y VALORES DEL TIEMPO. SI QUIERE EL"
    PRINT*,"VALOR DE ESTAS CARACTERISTICAS EN ALGUN "
    PRINT*,"PUNTO E INSTANTE CONCRETOS TECLEE 'SI' Y "
    PRINT*,"DESPUES, SEPARADOS POR BLANCOS, LOS VALO-"
    PRINT*,"RES DEL ESPACIO Y DEL TIEMPO COMO CONS- "
    PRINT*,"TANTES REALES. SI ESTOS VALORES NO COIN- "
    PRINT*,"CIDEN CON UN PUNTO DEL RETICULADO SE TEN-"
    PRINT*,"DRA COMO RESPUESTA UN VALOR PROMEDIO. SI "
    PRINT*,"SE CONFORMA CON LA INFORMACION STANDARD "
    PRINT*,"ESCRIBA 'NO' . "
    PRINT*,"QUIERE INFORMACION NO STANDARD? "
    CHARACTER*2 COPA
9    READ *,COPA
    IF(COPA.NE."SI") GO TO 10
    PRINT *,"ABCISA DEL PUNTO E INSTANTE DEL TIEMPO. "
    READ *,X,T

C    Situacion del valor de X en el reticulo.
    IF(X.LT.0.) THEN
        I=INT(X*50./C)-1
    ELSE IF(X.GT.0.) THEN
        I=INT(X*50./C)
    ELSE I=0
    END IF

```

```

C      Ahora situamos el valor de T en el reticulo.
      J=INT(T*100./T1)
C      U y V ponderan la distancia del punto (X,T) a
C      vertices proximos.
      U=ABS((X*50./C)-REAL(I))
      V=T*100./T1-REAL(J)

C      Las variables S1,S2 y S3 contienen los datos pedidos
      S1=(1.-U)*(1.-V)*VARIABLE_ESTADO(I,J)
      S1= S1+U*(1.-V)*VARIABLE_ESTADO(I+1,J)
      S1= S1+(1.-U)*V*VARIABLE_ESTADO(I,J+1)
      S1= S1+U*V*VARIABLE_ESTADO(I+1,J+1)
      S2=(1.-U)*(1.-V)*INVERSION_EXTERNA(I,J)
      S2= S2+U*(1.-V)*INVERSION_EXTERNA(I+1,J)
      S2= S2+(1.-U)*V*INVERSION_EXTERNA(I,J+1)
      S2= S2+U*V*INVERSION_EXTERNA(I+1,J+1)
      S3=(1.-U)*(1.-V)*CONTROL(I,J)+U*(1.-V)*CONTROL(I+1,J)
      S3= S3+(1.-U)*V*CONTROL(I,J+1)+U*V*CONTROL(I+1,J+1)
      PRINT*,"LOS VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO,INVERSION"
      PRINT*,"EXTERNA Y LEY DE CONTROL PEDIDOS SON:"
      PRINT *,S1," ",S2," ",S3
      PRINT*," " " " "
      PRINT*,"LOS QUIERE EN OTRO PUNTO E INSTANTE? "
      GO TO 9

C      Comienza la salida por impresora. De los 10201 puntos
C      de que consta el reticulo solo apareceran los valores de
C      189 distanciados 10 "unidades" en el espacio y 5 en el
C      tiempo de z(x,t), u(x,t) y m(t,x).
10     OPEN(3,FILE=' LPT',CARRIAGECONTROL='FORTRAN')
      WRITE(3,100)
100    FORMAT("1",28X,"VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO",/)
      WRITE(3,200)
200    FORMAT(35X,"VARIABLE ESPACIAL",/)
      WRITE(3,50)
50     FORMAT(1X,10H          )
      H=-C+2.*C/10.
      DO 25 IL=1,9
          WRITE(3,110) H
          H=H+2.*C/10.
25     CONTINUE
110    FORMAT("E",F7.2)
      WRITE(3,210)
210    FORMAT(13X,63(1H*),/)
      DO 12 J=0,100,5
          F=J*T1/100.
          WRITE(3,300) F,(VARIABLE_ESTADO(I,J),I=-40,40,10)
12     CONTINUE
300    FORMAT(1X,"T=",F6.3,2X,9F7.2)
      WRITE(3,51)
51     FORMAT(1X,' ',/,/ )
      WRITE(3,101)

```

```

101  FORMAT(28X,"VALORES DE LA LEY DE CONTROL",/)
      WRITE(3,200)
      WRITE(3,50)
      H=-C+2.*C/10.
      DO 27 IK=1,9
          WRITE(3,110) H
          H=H+2.*C/10.
27    CONTINUE
      WRITE(3,211)
211  FORMAT(13X,63(1H*),/)
      DO 13 J=0,100,5
          F=J*T1/100.
          WRITE(3,300) F,(CONTROL(I,J),I=-40,40,10)
13    CONTINUE
      WRITE(3,225)
225  FORMAT("1",32X,"FINANCIACION EXTERNA",/)
      WRITE(3,200)
      WRITE(3,50)
      H=-C+2.*C/10.
      DO 33 IJ=1,9
          WRITE(3,110) H
          H=H+2.*C/10.
33    CONTINUE
      WRITE(3,210)
      DO 17 J=0,100,5
          F=J*T1/100.
          WRITE(3,300) F,(INVERSION_EXTERNA(I,J),I=-40,40,10)
17    CONTINUE
      WRITE(3,400) COSTE
400  FORMAT(1X,/,/,/,18X,'El coste es:',F9.4)
      WRITE(3,401) Q
401  FORMAT(1X,/,/,18X,'La velocidad de propagacion es:',F3.1)
      IF (LORO.EQ.0) GOTO 75
      WRITE(3,426) T1
426  FORMAT(1X,/,/,18X,'El tiempo optimo es:',F12.4)
75    CLOSE(3)
      PRINT *,"QUIERE ANALIZAR EL PROCESO EN OTRO INSTANTE?  "
      READ *,LITERAL
      IF(LITERAL.EQ.'NO') GO TO 70
      PRINT *,"VALOR DE T1,NUEVA DURACION DEL CONTROL  "
      READ *,T1
      LORO=0
      GO TO 66
70    PRINT *,"QUIERE ANALIZAR EL PROCESO PARA OTRA VELOCIDAD?  "
      READ *,LITERAL
      IF(LITERAL.EQ.'NO') GOTO 71
71    STOP
      END

```

SUBROUTINE FIBONACCI(A8,A9,T1,PRECISION)

C Calcula el tiempo optimo de ejecucion del modelo
 C para unas situaciones inicial y final dadas, deter-
 C minando el minimo de la expresion III.27-bis por el
 C metodo de Fibonacci con error inferior a la milésima.

```
COMMON/ROMA/COEF_SIT_FINAL(150)
COMMON/AMOR/COEF_SIT_INICIAL(150)
COMMON/BLOQUE/M(150,0:1000)
COMMON/SOTA/S(150,0:100)/BETA/B(150)
COMMON/KOLA/K(150)/DELTA/D(150)/AULA/A(150)
REAL M,K
```

C MATFIBO contendra los valores de la sucesion de
 C Fibonacci. G es una matriz auxiliar.

```
DIMENSION G(2),MATFIBO(0:20)
```

C PIVOTE es el "paso" del metodo de Fibonacci.
 C El valor de PIVOTE se calcula previamente divi-
 C diendo la longitud del intervalo donde esta locali-
 C zado el minimo por el primer elemento de la sucesion
 C de Fibonacci para el que el cociente es inferior a
 C la precision requerida. Se supone que la longitud
 C del intervalo donde esta localizado el optimo no es
 C superior a 10.

C Calculo de coeficientes de Fibonacci y de PIVOTE.

```
DO 3 I=0,20
  IF (I.GT.2) GO TO 1
  MATFIBO(I)=I
  GO TO 3
1  MATFIBO(I)=MATFIBO(I-1)+MATFIBO(I-2)
2  PIVOTE=(A9-A8)/MATFIBO(I)
  IF (PIVOTE.LE.PRECISION) GO TO 13
3  CONTINUE
13 J1=I
```

C Aplicacion del metodo de Fibonacci.

```
I4=1
I5=2
4  DO 6 L=I4,I5
  T1=A8+MATFIBO(J1-L)*PIVOTE
  DO 20 N=1,150
  DO 10 J=0,1000
    M(N,J)=FINANCIACION_EXTERNA (J,T1,COEF_SIT_
+FINAL(N),K(N),B(N),A(N),D(N))
10  CONTINUE
20  CONTINUE
  DO 30 N=1,150
    V1=EXP(-B(N)*T1)
    V2=(K(N)+B(N))/2.
```

```

          V3=1.0(N)*V1
          S(N,0)=B(N)/V3-V2
30      CONTINUE
          COSTE=0.0
          CALL COSTO(COSTE,T1)
          G(3-L)=COSTE
6      CONTINUE          !Localizacion del minimo.
          IF (G(2).EQ.G(1)) THEN
              IF (J1.GT.4) GO TO 5
              T1=T1+0.5*PIVOTE
              GO TO 15
5          A8=A8+MATFIBO(J1-2)*PIVOTE
              J1=J1-3
              I4=1
              I5=2
              GO TO 4
          ELSE F(G(1).LT.G(2)) THEN
              IF (J1.GT.2) GO TO 7
              T1=T1+0.5*PIVOTE
              GO TO 15
7          J1=J1-1
              G(2)=G(1)
              I5=2
              I4=2
              GO TO 4
          ELSE
              IF(J1.GT.2) GO TO 8
              T1=T1+PIVOTE
              GO TO 15
8          A8=A8+MATFIBO(J1-2)*PIVOTE
              J1=J1-1
              I4=1
              I5=1
              G(1)=G(2)
              GO TO 4
15      END IF
          RETURN
          END

```

```

FUNCTION CONSTANTE(J,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7)
C Este subprograma calcula el valor de la constante
C de la expresion III.24-bis de z(t,x).
  U=A4*(2.-A4) ! Las U's son variables auxiliares.
  U2=EXP(-A5*A1/2.)
  U3=2.-U*U2/A6
  U4=2.*A3/(A5**2)
  U5=A2-U4*U3
  U6=1.-A7*U2*U2
  CONSTANTE=U5/U6
  RETURN
END

FUNCTION EXPRES1(J,T1,A1,A2)
C Calcula la funcion de t que multiplica al termino
C constante de la expresion III.24-bis de z(t,x).
  T=J*T1/100.
  U=1.-A2*EXP(-A1*(T1-T))
  EXPRES1=EXP(-A1*T/2.)*U
  RETURN
END

FUNCTION EXPRES2(J,T1,COEF_SIT_FINAL,A1,A2,A3,A4)
C Calcula el segundo sumando de la expresion de z(x,t)
  T=J*T1/100.
  U=A1*(2.-A1)
  U1=U/A3
  U2=2.-U1*EXP(-A2*(T1-T)/2.)
  U3=2.*COEF_SIT_FINAL*U2/(A2**2)
  EXPRES2=U3
  RETURN
END

SUBROUTINE COSTO(COSTE,T1)
C Calculo del funcional de coste definido en III.27.
  SUMA1=0.0 !Calculo del primer sumatorio.
  CALL PRIM_SUM(SUMA1,T1)
  SUMA2=0.0 !Calculo del segundo sumatorio.
  CALL SEG_SUM(SUMA2)
  SUMA3=0.0 !Calculo del tercer sumatorio.
  CALL TERC_SUM(SUMA3)
  VALOR_INTEGRAL=0.0 !Integral del cuarto sumando.
  CALL INTEGRAL(T1,VALOR_INTEGRAL)
  COSTE=SUMA1+SUMA2+SUMA3-VALOR_INTEGRAL
  RETURN
END

```

```
FUNCTION FINANC_EXTERNA(J,T1,A2,A3,A4,A5,A6)
T=J*T1/1000.
U1=A3*(2.-A3) !Las U's son variables auxiliares
U=EXP(-A4*(T1-T))
U2=U1*SQRT(U)-A5*(1.+A6*U)
U3=A5*(1.-A6*U)
U4=2.*A2*U2
FINANCIACION_EXTERNA=(U4/A4)/U3
RETURN
END
```

3

```
FUNCTION SITUACION_FINAL(X)
C Este subprograma define la situacion final. La
C sentencia 1 debe ser cambiada en cada caso.
1 Q1=4.-X*X
SITUACION_FINAL=Q1
RETURN
END
```

1

```
FUNCTION SITUACION_INICIAL(X)
C Este subprograma define la situacion inicial. La
C sentencia 1 debe ser cambiada en cada caso
PI=3.14159265
Q1=EXP(-X*X/.04)/(.2*SQRT(PI))
SITUACION_INICIAL=Q1
RETURN
END
```

C

C

```

SUBROUTINE PRIM_SUM(SUMA,T1)
C   Calcula el primer sumando de la expresion de W.

COMMON/ROMA/PEPE(150)
DO 1 N=1,150
    SUMA=SUMA+PEPE(N)**2
1   CONTINUE
    SUMA=SUMA*(1.+T1)
    RETURN
    END
```

```

SUBROUTINE SEG_SUM(SUMA)
C   Calcula el segundo sumando de la expresion de W.

COMMON/AMOR/PEPE(150)/SOTA/S(150,0:100)
DO 1 N=1,150
    SUMA=SUMA+S(N,0)*PEPE(N)**2
1   CONTINUE
    RETURN
    END
```

```

SUBROUTINE TERC_SUM(SUMA)
C   Calcula el tercer sumando de la expresion de W

COMMON/AMOR/PEPE(150)
COMMON/BLOQUE/M(150,0:1000)
REAL M
DO 1 N=1,150
    SUMA=SUMA+PEPE(N)*M(N,0)
1   CONTINUE
    SUMA=2.*SUMA
    RETURN
    END
```

```

SUBROUTINE COEF_DE_FOURIER(CF,N,FUNC_DATO,C,C1)
C   Calcula el n-simo coeficiente de Fourier de una
C   funcion respecto del sistema ortonormal de autofun-
C   ciones asociado al generador A del semigrupo del
C   sistema. CF devolvera al programa principal el va-
C   lor del coeficiente de Fourier. Para el calculo de
C   ficientes se desea calcular. Para el calculo de las
C   integrales utiliza la formula cerrada de Simpson.

PARAMETER (PI=3.14159265)
EXTERNAL FUNC_DATO
INTEGER PUNTO
PUNTO=1
Y1=-C+C1
1  IF (Y1.GT.(C-C1)) GO TO 2
    ANGULO=N*PI/2.+(N*PI*Y1)/(2.*C)
    MULTIPLICADOR=3+((-1)**(PUNTO+1))
    Z=REAL(MULTIPLICADOR)
    CF=CF+Z*SIN(ANGULO)*FUNC_DATO(Y1)
    PUNTO=PUNTO+1
    Y1=Y1+C1
    GO TO 1
2  CF=C1*CF/(3.*(C**(1.5)))
    RETURN
END

SUBROUTINE INTEGRAL(T1,SUMA)
C   Calcula la integral que aparece en la expresion de W.

COMMON/BLOQUE/M(150,0:1000)
REAL M
DIMENSION CUADRADO(0:1000)
SUMA=0.
DO 3 J=0,1000
    CUADRADO(J)=0.
    DO 1 N=1,150
        CUADRADO(J)=CUADRADO(J)+M(N,J)**2
1    IF((J.EQ.0).OR.(J.EQ.1000)) THEN
        GO TO 2
        ELSE IF (2*(J/2).EQ.J) THEN
            CUADRADO(J)=2.*CUADRADO(J)
        ELSE
            CUADRADO(J)=4.*CUADRADO(J)
        END IF
2    SUMA=SUMA+CUADRADO(J)
3 CONTINUE
SUMA=T1*SUMA/3000.
RETURN
END

```

128

APENDICE E

**SELECCION DE RESULTADOS
OBTENIDOS PARA EL CASO DETERMINISTA**

PARTE Iª

Resultados correspondientes a la situación inicial

$$f(x) = 0$$

y velocidades de propagación

$$q = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.50$$

Los resultados de las tablas correspondientes a la ley de control y a la financiación externa aparecen multiplicados por el coeficiente $\sqrt{2}$.

Para las velocidades $q = 0.25$ y $q = 0.5$ se proporciona, junto con las tablas correspondientes al tiempo óptimo, la asociada a la duración del control $t_1 = 1$

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	-.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.0154	.02	.04	.05	.18	2.44	.18	.05	.04	.02
T=.0308	.04	.08	.10	.25	2.31	.25	.10	.08	.04
T=.0462	.06	.11	.14	.44	2.12	.44	.14	.11	.06
T=.0616	.08	.15	.19	.56	1.94	.56	.19	.15	.08
T=.0770	.10	.18	.24	.66	1.87	.66	.24	.18	.10
T=.0924	.12	.22	.29	.74	1.81	.74	.29	.22	.12
T=.1078	.14	.25	.34	.82	1.77	.82	.34	.25	.14
T=.1232	.16	.29	.39	.89	1.74	.89	.39	.29	.16
T=.1386	.18	.32	.45	.96	1.71	.96	.45	.32	.18
T=.1540	.20	.35	.50	1.02	1.70	1.02	.50	.35	.20

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.95	3.52	4.48	4.51	4.09	4.51	4.48	3.52	1.95
T=.0154	1.94	3.48	4.43	4.45	4.02	4.45	4.43	3.48	1.94
T=.0308	1.91	3.44	4.39	4.38	3.95	4.38	4.39	3.44	1.91
T=.0462	1.89	3.40	4.34	4.32	3.88	4.32	4.34	3.40	1.89
T=.0616	1.87	3.36	4.30	4.27	3.80	4.27	4.30	3.36	1.87
T=.0770	1.85	3.32	4.25	4.21	3.72	4.21	4.25	3.32	1.85
T=.0924	1.83	3.28	4.21	4.16	3.64	4.16	4.21	3.28	1.83
T=.1078	1.81	3.24	4.17	4.11	3.55	4.11	4.17	3.24	1.81
T=.1232	1.79	3.20	4.13	4.07	3.46	4.07	4.13	3.20	1.79
T=.1386	1.78	3.16	4.09	4.03	3.36	4.03	4.09	3.16	1.78
T=.1504	1.76	3.12	4.05	4.00	3.26	4.00	4.05	3.12	1.76

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.95	3.53	4.67	5.34	5.57	5.34	4.67	3.53	1.95
T=.0154	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0308	1.97	3.55	4.68	5.35	5.58	5.35	4.68	3.55	1.97
T=.0462	1.97	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.97
T=.0616	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0770	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0924	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.1078	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.1232	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.1386	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.1504	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 27.3794

La velocidad de propagacion es: .25

El tiempo optimo es: .15404

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0	.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.1	.12	.22	.30	.79	1.82	.79	.30	.22	.12
T=.2	.23	.42	.61	1.18	1.75	1.18	.61	.42	.23
T=.3	.32	.60	.91	1.44	1.82	1.44	.91	.60	.32
T=.4	.44	.77	1.16	1.66	1.94	1.66	1.16	.77	.44
T=.5	.49	.93	1.38	1.84	2.07	1.84	1.38	.93	.49
T=.6	.56	1.08	1.56	2.00	2.20	2.00	1.56	1.08	.56
T=.7	.63	1.21	1.72	2.15	2.33	2.15	1.72	1.21	.63
T=.8	.69	1.32	1.86	2.28	2.44	2.28	1.86	1.32	.69
T=.9	.75	1.42	1.99	2.32	2.55	2.32	1.99	1.42	.75
T=1.0	.80	1.51	2.09	2.49	2.64	2.49	2.09	1.51	.80

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0	1.80	3.26	4.22	4.59	4.50	4.59	4.22	3.26	1.80
T=.1	1.66	2.99	3.85	4.18	4.19	4.18	3.85	2.99	1.66
T=.2	1.53	2.75	3.52	3.83	3.87	3.83	3.52	2.75	1.53
T=.3	1.41	2.53	3.22	3.51	3.57	3.51	3.22	2.53	1.41
T=.4	1.31	2.33	2.96	3.23	3.28	3.22	2.96	2.33	1.31
T=.5	1.22	2.15	2.71	2.96	3.02	2.96	2.71	2.15	1.22
T=.6	1.13	1.99	2.50	2.72	2.77	2.72	2.50	1.99	1.13
T=.7	1.06	1.84	2.30	2.49	2.54	2.49	2.30	1.84	1.06
T=.8	1.00	1.71	2.11	2.28	2.32	2.28	2.11	1.71	1.00
T=.9	.95	1.59	1.95	2.09	2.12	2.09	1.95	1.59	.95
T=1.0	.90	1.48	1.79	1.90	1.92	1.90	1.79	1.48	.90

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0	1.86	3.43	4.57	5.26	5.49	5.26	4.57	3.43	1.86
T=.1	1.86	3.43	4.57	5.26	5.49	5.26	4.57	3.43	1.86
T=.2	1.86	3.43	4.57	5.25	5.48	5.25	4.57	3.43	1.86
T=.3	1.86	3.43	4.57	5.25	5.48	5.25	4.57	3.43	1.86
T=.4	1.87	3.43	4.57	5.26	5.48	5.26	4.57	3.43	1.87
T=.5	1.88	3.44	4.58	5.26	5.49	5.26	4.58	3.44	1.88
T=.6	1.89	3.46	4.59	5.27	5.50	5.27	4.59	3.46	1.89
T=.7	1.91	3.48	4.62	5.29	5.52	5.29	4.62	3.48	1.91
T=.8	1.93	3.52	4.65	5.33	5.55	5.33	4.65	3.52	1.93
T=.9	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=1.0	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 29.184

La velocidad de propagacion es: .25

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.0095	.01	.02	.03	.18	2.35	.18	.03	.02	.01
T=.0189	.03	.05	.06	.32	2.08	.32	.06	.05	.03
T=.0284	.04	.07	.09	.44	1.90	.44	.09	.07	.04
T=.0378	.05	.09	.12	.53	1.77	.53	.12	.09	.05
T=.0473	.06	.11	.16	.61	1.68	.61	.16	.11	.06
T=.0567	.07	.14	.19	.68	1.61	.68	.19	.14	.07
T=.0662	.09	.16	.23	.74	1.55	.74	.23	.16	.09
T=.0756	.10	.18	.27	.79	1.51	.79	.27	.18	.10
T=.0851	.11	.20	.31	.83	1.48	.83	.31	.20	.11
T=.0946	.12	.22	.35	.87	1.45	.87	.35	.22	.12

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.93	3.47	4.39	4.48	4.23	4.48	4.39	3.47	1.93
T=.0095	1.92	3.46	4.37	4.44	4.18	4.44	4.37	3.46	1.92
T=.0189	1.91	3.44	4.36	4.41	4.14	4.41	4.36	3.44	1.91
T=.0284	1.90	3.42	4.34	4.37	4.08	4.37	4.34	3.42	1.90
T=.0378	1.90	3.41	4.32	4.34	4.03	4.34	4.32	3.41	1.90
T=.0473	1.89	3.39	4.31	4.31	3.97	4.31	4.31	3.39	1.89
T=.0567	1.88	3.37	4.30	4.28	3.91	4.28	4.30	3.37	1.88
T=.0662	1.88	3.36	4.29	4.26	3.84	4.26	4.29	3.36	1.88
T=.0756	1.87	3.34	4.27	4.23	3.77	4.23	4.27	3.34	1.87
T=.0851	1.87	3.32	4.26	4.21	3.69	4.21	4.26	3.32	1.87
T=.0946	1.86	3.31	4.25	4.20	3.61	4.20	4.25	3.31	1.86

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.93	3.50	4.64	5.31	5.54	5.31	4.64	3.50	1.93
T=.0095	1.94	3.51	4.65	5.32	5.55	5.32	4.65	3.51	1.94
T=.0189	1.94	3.52	4.66	5.34	5.56	5.34	4.66	3.52	1.94
T=.0284	1.95	3.54	4.67	5.35	5.57	5.35	4.67	3.54	1.95
T=.0378	1.96	3.55	4.68	5.36	5.58	5.36	4.68	3.55	1.96
T=.0473	1.98	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0567	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0662	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.0756	2.01	3.59	4.73	5.40	5.63	5.40	4.73	3.59	2.01
T=.0851	2.02	3.61	4.74	5.42	5.64	5.42	4.74	3.61	2.02
T=.0946	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 27.3004

La velocidad de propagacion es: .5

El tiempo optimo es: .09455

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0	.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.1	.11	.20	.35	.89	1.46	.89	.35	.20	.11
T=.2	.21	.41	.70	1.17	1.45	1.17	.70	.41	.21
T=.3	.30	.61	.98	1.37	1.56	1.37	.98	.61	.30
T=.4	.39	.79	1.19	1.55	1.70	1.55	1.19	.79	.39
T=.5	.48	.94	1.38	1.71	1.85	1.71	1.38	.94	.48
T=.6	.55	1.07	1.53	1.86	1.99	1.86	1.53	1.07	.55
T=.7	.61	1.18	1.66	2.00	2.12	2.00	1.66	1.18	.61
T=.8	.67	1.28	1.78	2.11	2.23	2.11	1.78	1.28	.67
T=.9	.72	1.36	1.88	2.22	2.33	2.22	1.88	1.36	.72
T=1.0	.76	1.44	1.97	2.31	2.42	2.31	1.97	1.44	.76

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0	1.63	3.02	4.00	4.51	4.57	4.51	4.00	3.02	1.63
T=.1	1.51	2.79	3.70	4.17	4.30	4.17	3.70	2.79	1.51
T=.2	1.41	2.49	3.42	3.88	4.02	3.88	3.42	2.49	1.41
T=.3	1.31	2.41	3.18	3.61	3.75	3.61	3.18	2.41	1.31
T=.4	1.23	2.25	2.96	3.37	3.49	3.37	2.96	2.25	1.23
T=.5	1.15	2.10	2.76	3.14	3.25	3.14	2.76	2.10	1.15
T=.6	1.09	1.97	2.58	2.92	3.03	2.92	2.58	1.97	1.09
T=.7	1.03	1.86	2.42	2.72	2.82	2.72	2.42	1.86	1.03
T=.8	.99	1.76	2.26	2.53	2.61	2.53	2.26	1.76	.99
T=.9	.96	1.67	2.11	2.35	2.42	2.35	2.11	1.67	.96
T=1.0	.96	1.59	1.97	2.17	2.23	2.17	1.97	1.59	.96

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0	1.73	3.23	4.37	5.07	5.30	5.07	4.37	3.23	1.73
T=.1	1.73	3.23	4.36	5.06	5.29	5.06	4.36	3.23	1.73
T=.2	1.73	3.23	4.36	5.06	5.29	5.06	4.36	3.23	1.73
T=.3	1.74	3.24	4.37	5.06	5.29	5.06	4.37	3.24	1.74
T=.4	1.75	3.25	4.38	5.07	5.30	5.07	4.38	3.25	1.75
T=.5	1.76	3.27	4.40	5.09	5.32	5.09	4.40	3.27	1.68
T=.6	1.78	3.30	4.43	5.12	5.34	5.12	4.43	3.30	1.78
T=.7	1.81	3.35	4.48	5.16	5.39	5.16	4.48	3.35	1.81
T=.8	1.85	3.41	4.54	5.22	5.45	5.22	4.54	3.41	1.85
T=.9	1.92	3.50	4.63	5.31	5.54	5.31	4.63	3.50	1.92
T=1.0	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 31.3554

La velocidad de propagacion es: .5

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.0070	.01	.02	.02	.19	2.30	.19	.02	.02	.01
T=.0140	.02	.03	.04	.32	2.01	.32	.04	.03	.02
T=.0210	.03	.05	.07	.44	1.82	.44	.07	.05	.03
T=.0281	.04	.07	.09	.53	1.69	.53	.09	.07	.04
T=.0351	.05	.08	.12	.60	1.59	.60	.12	.08	.05
T=.0421	.06	.10	.16	.66	1.51	.66	.16	.10	.06
T=.0491	.06	.12	.19	.71	1.45	.71	.19	.12	.06
T=.0561	.07	.13	.22	.75	1.40	.75	.22	.13	.07
T=.0631	.08	.15	.26	.78	1.36	.78	.26	.15	.08
T=.0701	.09	.17	.30	.81	1.33	.81	.30	.17	.09

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.91	3.44	4.34	4.47	4.29	4.47	4.34	3.44	1.91
T=.0070	1.91	3.44	4.34	4.44	4.26	4.44	4.34	3.44	1.91
T=.0140	1.91	3.43	4.33	4.42	4.22	4.42	4.33	3.43	1.91
T=.0210	1.91	3.43	4.33	4.40	4.18	4.40	4.33	3.43	1.91
T=.0281	1.91	3.42	4.33	4.38	4.13	4.38	4.33	3.42	1.91
T=.0351	1.90	3.42	4.32	4.36	3.08	4.36	4.32	3.42	1.90
T=.0421	1.90	3.41	4.32	4.34	3.03	4.34	4.32	3.41	1.90
T=.0491	1.91	3.40	4.33	4.32	3.97	4.32	4.33	3.40	1.91
T=.0561	1.91	3.40	4.33	4.31	3.91	4.31	4.33	3.40	1.91
T=.0631	1.91	3.39	4.33	4.29	3.85	4.29	4.33	3.39	1.91
T=.0701	1.91	3.38	4.33	4.29	3.77	4.29	4.33	3.38	1.91

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.91	3.49	4.62	5.30	5.52	5.30	4.62	3.49	1.91
T=.0070	1.92	3.50	4.63	5.31	5.54	5.31	4.63	3.50	1.92
T=.0140	1.93	3.51	4.64	5.32	5.55	5.32	4.64	3.51	1.93
T=.0210	1.94	3.52	4.66	5.33	5.56	5.33	4.66	3.52	1.94
T=.0281	1.96	3.54	4.67	5.35	5.57	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0351	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0421	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0491	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0561	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.73	3.59	2.01
T=.0631	2.02	3.61	4.74	5.42	5.64	5.42	4.74	3.61	2.02
T=.0701	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 27.2649

La velocidad de propagacion es: .75

El tiempo optimo es: .0701

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.0057	.01	.01	.02	.19	2.27	.19	.02	.01	.01
T=.0113	.02	.03	.04	.33	1.97	.33	.04	.03	.02
T=.0170	.02	.04	.06	.44	1.77	.44	.06	.04	.02
T=.0227	.03	.05	.08	.53	1.63	.53	.08	.05	.03
T=.0283	.04	.07	.11	.60	1.53	.60	.11	.07	.04
T=.0340	.04	.08	.14	.65	1.45	.65	.14	.08	.04
T=.0397	.05	.09	.17	.69	1.38	.69	.17	.09	.05
T=.0454	.06	.11	.20	.72	1.33	.72	.20	.11	.06
T=.0510	.07	.12	.23	.75	1.29	.75	.23	.12	.07
T=.0567	.07	.14	.27	.77	1.26	.77	.27	.14	.07

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.90	3.42	4.31	4.46	4.33	4.46	4.31	3.42	1.90
T=.0057	1.90	3.42	4.31	4.45	4.30	4.45	4.31	3.42	1.90
T=.0113	1.90	3.42	4.31	4.43	4.27	4.43	4.31	3.42	1.90
T=.0170	1.90	3.42	4.31	4.41	4.23	4.41	4.31	3.42	1.90
T=.0227	1.91	3.43	4.32	4.40	4.19	4.40	4.32	3.43	1.91
T=.0283	1.91	3.43	4.33	4.38	4.15	4.38	4.33	3.43	1.91
T=.0340	1.91	3.43	4.33	4.37	4.11	4.37	4.33	3.43	1.91
T=.0397	1.92	3.43	4.34	4.36	4.06	4.36	4.34	3.43	1.92
T=.0454	1.92	3.43	4.35	4.35	4.00	4.35	4.35	3.43	1.92
T=.0510	1.93	3.43	4.36	4.34	3.94	4.34	4.36	3.43	1.93
T=.0567	1.93	3.43	4.37	4.34	3.87	4.34	4.37	3.43	1.93

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.90	3.47	4.60	5.28	5.51	5.28	4.60	3.47	1.90
T=.0057	1.91	3.49	4.62	5.30	5.52	5.30	4.62	3.49	1.91
T=.0113	1.92	3.50	4.63	5.31	5.54	5.31	4.63	3.50	1.92
T=.0170	1.94	3.51	4.65	5.32	5.55	5.32	4.65	3.51	1.94
T=.0227	1.95	3.53	4.66	5.34	5.57	5.34	4.66	3.53	1.95
T=.0283	1.96	3.54	4.68	5.35	5.58	5.35	4.68	3.54	1.96
T=.0340	1.98	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0397	1.99	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0454	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.73	3.59	2.01
T=.0510	2.02	3.60	4.74	5.41	5.64	5.42	4.74	3.60	2.02
T=.0567	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 27.2442

La velocidad de propagacion es: 1.0

El tiempo optimo es: .0567

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.0047	.01	.01	.01	.12	2.49	.12	.01	.01	.01
T=.0094	.01	.02	.03	.33	1.94	.33	.03	.02	.01
T=.0141	.02	.03	.05	.44	1.74	.44	.05	.03	.02
T=.0188	.02	.04	.07	.53	1.60	.53	.07	.04	.02
T=.0235	.03	.06	.09	.59	1.49	.59	.09	.06	.03
T=.0282	.04	.07	.12	.64	1.41	.64	.12	.07	.04
T=.0329	.04	.08	.15	.67	1.35	.67	.15	.08	.04
T=.0376	.05	.09	.18	.70	1.30	.70	.18	.09	.05
T=.0423	.06	.10	.21	.73	1.25	.73	.21	.10	.06
T=.0470	.06	.12	.24	.75	1.22	.75	.24	.12	.06

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.89	3.40	4.29	4.46	4.35	4.46	4.29	3.40	1.89
T=.0047	1.89	3.41	4.30	4.45	4.32	4.45	4.30	3.41	1.89
T=.0094	1.90	3.42	4.30	4.43	4.29	4.43	4.30	3.42	1.90
T=.0141	1.90	3.42	4.31	4.42	4.26	4.42	4.31	3.42	1.90
T=.0188	1.91	3.43	4.32	4.41	4.23	4.41	4.32	3.43	1.91
T=.0235	1.92	3.44	4.33	4.40	4.19	4.40	4.33	3.44	1.92
T=.0282	1.92	3.44	4.34	4.39	4.15	4.39	4.34	3.44	1.92
T=.0329	1.93	3.45	4.36	4.39	4.10	4.39	4.36	3.45	1.93
T=.0376	1.94	3.45	4.37	4.38	4.08	4.38	4.37	3.45	1.94
T=.0423	1.94	3.45	4.39	4.38	4.00	4.38	4.39	3.45	1.94
T=.0470	1.95	3.46	4.41	4.38	3.94	4.38	4.41	3.46	1.95

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.90	3.47	4.60	5.28	5.51	5.28	4.60	3.47	1.90
T=.0047	1.91	3.48	4.61	5.29	5.52	5.29	4.61	3.48	1.91
T=.0094	1.92	3.50	4.63	5.31	5.53	5.31	4.63	3.50	1.92
T=.0141	1.93	3.51	4.64	5.32	5.55	5.32	4.64	3.51	1.93
T=.0188	1.94	3.53	4.66	5.34	5.56	5.34	4.66	3.53	1.94
T=.0235	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0282	1.97	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.97
T=.0329	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0376	2.00	3.59	4.72	5.40	5.62	5.40	4.73	3.59	2.00
T=.0423	2.02	3.60	4.74	5.41	5.64	5.42	4.74	3.60	2.02
T=.0470	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 27.2304

La velocidad de propagacion es: 1.25

El tiempo optimo es: .04696

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.00	.00	.00	.05	2.82	.05	.00	.00	.00
T=.0041	.01	.01	.01	.20	2.23	.20	.01	.01	.01
T=.0082	.01	.02	.03	.34	1.92	.34	.03	.02	.01
T=.0122	.02	.03	.04	.45	1.71	.45	.04	.03	.02
T=.0163	.02	.04	.06	.53	1.57	.53	.06	.04	.02
T=.0204	.03	.05	.09	.59	1.46	.59	.09	.05	.03
T=.0245	.03	.06	.12	.63	1.38	.63	.12	.06	.03
T=.0285	.04	.07	.14	.66	1.31	.66	.14	.07	.04
T=.0326	.04	.08	.17	.69	1.26	.69	.17	.08	.04
T=.0367	.05	.09	.20	.71	1.22	.71	.20	.09	.05
T=.0408	.05	.10	.23	.73	1.18	.73	.23	.10	.05

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.88	3.39	4.27	4.46	4.37	4.46	4.27	3.39	1.88
T=.0041	1.89	3.40	4.28	4.45	4.34	4.45	4.28	3.40	1.89
T=.0082	1.90	3.41	4.29	4.44	4.32	4.44	4.29	3.41	1.90
T=.0122	1.90	3.42	4.30	4.43	4.29	4.43	4.30	3.42	1.90
T=.0163	1.91	3.43	4.32	4.42	4.26	4.42	4.32	3.43	1.91
T=.0204	1.92	3.44	4.33	4.41	4.22	4.41	4.33	3.44	1.92
T=.0245	1.93	3.45	4.35	4.41	4.19	4.41	4.35	3.45	1.93
T=.0285	1.93	3.45	4.36	4.40	4.15	4.40	4.36	3.45	1.93
T=.0326	1.94	3.46	4.38	4.40	4.10	4.40	4.38	3.46	1.94
T=.0367	1.95	3.47	4.40	4.40	4.05	4.40	4.40	3.47	1.95
T=.0408	1.96	3.48	4.42	4.40	3.99	4.340	4.42	3.48	1.96

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.89	3.46	4.59	5.27	5.49	5.27	4.59	3.46	1.89
T=.0041	1.90	3.47	4.60	5.28	5.51	5.28	4.60	3.47	1.90
T=.0082	1.91	3.49	4.62	5.30	5.53	5.30	4.62	3.49	1.91
T=.0122	1.93	3.50	4.64	5.31	5.54	5.31	4.64	3.50	1.93
T=.0163	1.94	3.52	4.65	5.33	5.56	5.33	4.65	3.52	1.94
T=.0204	1.96	3.54	4.67	5.35	5.57	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0245	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0285	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0326	2.00	3.59	4.72	5.40	5.62	5.40	4.73	3.59	2.00
T=.0367	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.42	4.73	3.60	2.02
T=.0408	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 27.2206

La velocidad de propagacion es: 1.5

El tiempo optimo es: .04078

114

PARTE 2ª

Resultados correspondientes a la situación inicial

$$f(x) = 0.25(4 - x^2)$$

y velocidades de propagación

$$q = 0.1, 0.2, 0.25, 0.30, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65$$

Los resultados de las tablas correspondientes a la ley de control y a la financiación externa aparecen multiplicados por el coeficiente $\sqrt{2}$.

Solo se han incluido las tablas correspondientes al tiempo óptimo.

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0253	.39	.69	.90	1.06	3.68	1.06	.90	.69	.39
T=.0505	.41	.73	.96	1.23	3.38	1.23	.96	.73	.41
T=.0758	.43	.78	1.02	1.34	3.25	1.34	1.02	.78	.43
T=.1011	.46	.82	1.07	1.45	3.15	1.45	1.07	.82	.46
T=.1263	.48	.86	1.13	1.55	3.08	1.55	1.13	.86	.48
T=.1516	.50	.90	1.18	1.64	3.02	1.64	1.18	.90	.50
T=.1769	.52	.94	1.23	1.72	2.97	1.72	1.23	.94	.52
T=.2021	.54	.98	1.28	1.80	2.93	1.80	1.28	.98	.54
T=.2274	.56	1.02	1.34	1.87	2.90	1.87	1.34	1.02	.56
T=.2527	.58	1.05	1.39	1.94	2.88	1.94	1.39	1.05	.58

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.50	2.69	3.46	3.28	2.38	3.28	3.46	2.69	1.50
T=.0253	1.47	2.63	3.39	3.20	2.32	3.20	3.39	2.63	1.47
T=.0505	1.44	2.57	3.32	3.12	2.25	3.12	3.32	2.57	1.44
T=.0758	1.41	2.51	3.25	3.05	2.18	3.05	3.25	2.51	1.41
T=.1011	1.38	2.45	3.18	2.99	2.11	2.99	3.18	2.45	1.38
T=.1263	1.35	2.40	3.11	2.92	2.03	2.92	3.11	2.40	1.35
T=.1516	1.32	2.34	3.04	2.87	1.95	2.87	3.04	2.34	1.32
T=.1769	1.29	2.29	2.98	2.81	1.86	2.81	2.98	2.29	1.29
T=.2021	1.26	2.24	2.91	2.76	1.78	2.76	2.91	2.24	1.26
T=.2274	1.24	2.18	2.85	2.72	1.68	2.72	2.85	2.18	1.24
T=.2527	1.21	2.13	2.79	2.68	1.58	2.68	2.79	2.13	1.21

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0253	1.99	3.57	4.71	5.38	5.61	5.38	4.71	3.57	1.99
T=.0505	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0758	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.1011	2.00	3.59	4.72	5.40	5.62	5.40	4.72	3.59	2.00
T=.1263	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.1516	2.01	3.60	4.73	5.41	5.63	5.41	4.73	3.60	2.01
T=.1769	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.2021	2.02	3.61	4.74	5.42	5.64	5.42	4.74	3.61	2.02
T=.2274	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.2527	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.6691

La velocidad de propagacion es: .10

El tiempo optimo es: .25266

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0146	.37	.67	.87	1.06	3.65	1.06	.87	.67	.37
T=.0291	.39	.69	.91	1.20	3.29	1.20	.91	.69	.39
T=.0437	.40	.72	.94	1.30	3.13	1.30	.94	.72	.40
T=.0582	.41	.74	.97	1.38	3.02	1.38	.97	.74	.41
T=.0728	.43	.77	1.00	1.47	2.92	1.47	1.00	.77	.43
T=.0874	.44	.79	1.04	1.54	2.85	1.54	1.04	.79	.44
T=.1019	.45	.81	1.07	1.60	2.79	1.60	1.07	.81	.45
T=.1165	.46	.84	1.11	1.66	2.74	1.66	1.11	.84	.46
T=.1310	.48	.86	1.14	1.72	2.70	1.72	1.14	.86	.48
T=.1456	.49	.88	1.18	1.77	2.66	1.77	1.18	.88	.49

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.49	2.68	3.41	3.22	2.56	3.22	3.41	2.68	1.49
T=.0146	1.48	2.65	3.38	3.18	2.51	3.18	3.38	2.65	1.48
T=.0291	1.46	2.62	3.35	3.14	2.46	3.14	3.35	2.62	1.46
T=.0437	1.45	2.59	3.31	3.10	2.40	3.10	3.31	2.59	1.45
T=.0582	1.43	2.55	3.28	3.07	2.34	3.07	3.28	2.55	1.43
T=.0728	1.42	2.52	3.25	3.04	2.28	3.04	3.25	2.52	1.42
T=.0874	1.40	2.49	3.22	3.01	2.21	3.01	3.22	2.49	1.40
T=.1019	1.39	2.46	3.18	2.98	2.14	2.98	3.18	2.46	1.39
T=.1165	1.37	2.43	3.15	2.96	2.06	2.96	3.15	2.43	1.37
T=.1310	1.36	2.40	3.12	2.95	1.98	2.95	3.12	2.40	1.36
T=.1456	1.35	2.37	3.09	2.93	1.89	2.93	3.09	2.37	1.35

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.97	3.55	4.69	5.36	5.59	5.36	4.69	3.55	1.97
T=.0146	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0291	1.98	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.0437	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0582	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0728	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.0874	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.1019	2.01	3.60	4.73	5.41	5.63	5.41	4.73	3.60	2.01
T=.1165	2.02	3.60	4.74	5.41	5.64	5.41	4.74	3.60	2.02
T=.1310	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.1456	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.6072

La velocidad de propagacion es: .2

El tiempo optimo es: .14559

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0120	.37	.66	.87	1.10	3.49	1.10	.87	.66	.37
T=.0240	.38	.68	.89	1.19	3.27	1.19	.89	.68	.38
T=.0360	.39	.70	.92	1.28	3.11	1.28	.92	.70	.39
T=.0480	.40	.72	.95	1.37	2.98	1.37	.95	.72	.40
T=.0600	.41	.74	.98	1.44	2.89	1.44	.98	.74	.41
T=.0719	.42	.76	1.00	1.51	2.81	1.51	1.00	.76	.42
T=.0839	.43	.78	1.03	1.57	2.74	1.57	1.03	.78	.43
T=.0959	.44	.89	1.06	1.63	2.69	1.63	1.06	.89	.44
T=.1079	.45	.82	1.09	1.68	2.64	1.68	1.09	.82	.45
T=.1199	.46	.84	1.12	1.72	2.61	1.72	1.12	.84	.46

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.49	2.68	3.40	3.21	2.59	3.21	3.40	2.68	1.49
T=.0120	1.48	2.65	3.38	3.18	2.55	3.18	3.38	2.65	1.48
T=.0240	1.47	2.63	3.35	3.15	2.50	3.15	3.35	2.63	1.47
T=.0360	1.46	2.60	3.33	3.12	2.45	3.12	3.33	2.60	1.46
T=.0480	1.44	2.58	3.30	3.09	2.40	3.09	3.30	2.58	1.44
T=.0600	1.43	2.55	3.28	3.07	2.34	3.07	3.28	2.55	1.43
T=.0719	1.42	2.53	3.26	3.05	2.27	3.05	3.26	2.53	1.42
T=.0839	1.41	2.51	3.24	3.03	2.24	3.03	3.24	2.51	1.41
T=.0959	1.40	2.48	3.21	3.01	2.13	3.01	3.21	2.48	1.40
T=.1079	1.39	2.46	3.19	3.00	2.06	3.00	3.19	2.46	1.39
T=.1199	1.38	2.43	3.17	3.00	1.97	3.00	3.17	2.43	1.38

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0120	1.97	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.97
T=.0240	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0360	1.98	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.0480	1.99	3.57	4.71	5.38	5.61	5.38	4.71	3.57	1.99
T=.0600	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.0719	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.0839	2.01	3.60	4.73	5.41	5.63	5.41	4.73	3.60	2.01
T=.0959	2.02	3.60	4.74	5.41	5.64	5.41	4.74	3.60	2.02
T=.1079	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.1199	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5923

La velocidad de propagacion es: .25

El tiempo optimo es: .11991

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0090	.37	.66	.86	1.10	3.48	1.10	.86	.66	.37
T=.0180	.38	.67	.88	1.19	3.24	1.19	.88	.67	.38
T=.0270	.38	.69	.90	1.27	3.07	1.27	.90	.69	.38
T=.0359	.39	.70	.92	1.35	2.94	1.35	.92	.70	.39
T=.0449	.40	.72	.94	1.42	2.83	1.42	.94	.72	.40
T=.0539	.41	.73	.96	1.48	2.75	1.48	.96	.73	.41
T=.0629	.41	.74	.99	1.54	2.68	1.54	.99	.74	.41
T=.0719	.42	.76	1.01	1.59	2.62	1.59	1.01	.76	.42
T=.0809	.43	.77	1.03	1.63	2.57	1.63	1.03	.77	.43
T=.0899	.44	.79	1.06	1.67	2.53	1.67	1.06	.79	.44

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.49	2.67	3.38	3.20	2.65	3.20	3.38	2.67	1.49
T=.0090	1.48	2.65	3.37	3.18	2.61	3.18	3.37	2.65	1.48
T=.0180	1.47	2.64	3.35	3.16	2.57	3.16	3.35	2.64	1.47
T=.0270	1.47	2.62	3.34	3.14	2.52	3.14	3.34	2.62	1.47
T=.0359	1.46	2.61	3.33	3.12	2.47	3.12	3.33	2.61	1.46
T=.0449	1.45	2.58	3.32	3.10	2.39	3.10	3.32	2.58	1.45
T=.0539	1.45	2.57	3.31	3.09	2.36	3.09	3.31	2.57	1.45
T=.0629	1.44	2.56	3.29	3.08	2.30	3.08	3.29	2.56	1.44
T=.0719	1.43	2.54	3.28	3.07	2.23	3.07	3.28	2.54	1.43
T=.0809	1.43	2.52	3.27	3.07	2.16	3.07	3.27	2.52	1.43
T=.0899	1.42	2.51	3.25	3.07	2.08	3.07	3.25	2.51	1.42

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.97	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.97
T=.0090	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0180	1.97	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.97
T=.0270	1.98	3.56	4.70	5.37	5.60	5.37	4.70	3.56	1.98
T=.0359	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0449	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.0539	2.00	3.59	4.72	5.40	5.62	5.40	4.72	3.59	2.00
T=.0629	2.01	3.60	4.73	5.41	5.63	5.41	4.73	3.60	2.01
T=.0719	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0809	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.0899	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5738

La velocidad de propagacion es: .35

El tiempo optimo es: .08986

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0103	.37	.66	.86	1.10	3.48	1.10	.86	.66	.37
T=.0206	.38	.68	.89	1.19	3.25	1.19	.89	.68	.38
T=.0309	.39	.69	.91	1.28	3.08	1.28	.91	.69	.39
T=.0412	.40	.71	.93	1.36	2.96	1.36	.93	.71	.40
T=.0515	.41	.73	.96	1.43	2.85	1.43	.96	.73	.41
T=.0618	.41	.74	.98	1.50	2.77	1.50	.98	.74	.41
T=.0721	.42	.76	1.01	1.55	2.71	1.55	1.01	.76	.42
T=.0824	.43	.78	1.03	1.60	2.65	1.60	1.03	.78	.43
T=.0927	.44	.79	1.06	1.65	2.60	1.65	1.06	.79	.44
T=.1030	.45	.81	1.09	1.69	2.56	1.69	1.09	.81	.45

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.49	2.67	3.39	3.20	2.63	3.20	3.39	2.67	1.49
T=.0103	1.48	2.65	3.37	3.18	2.59	3.18	3.37	2.65	1.48
T=.0206	1.47	2.63	3.35	3.15	2.54	3.15	3.35	2.63	1.47
T=.0309	1.46	2.61	3.33	3.13	2.49	3.13	3.33	2.61	1.46
T=.0412	1.45	2.59	3.32	3.11	2.44	3.11	3.32	2.59	1.45
T=.0515	1.44	2.57	3.30	3.09	2.38	3.09	3.30	2.57	1.44
T=.0618	1.44	2.55	3.28	3.07	2.32	3.07	3.28	2.55	1.44
T=.0721	1.43	2.54	3.27	3.06	2.26	3.06	3.27	2.54	1.43
T=.0824	1.42	2.52	3.25	3.05	2.19	3.05	3.25	2.52	1.42
T=.0927	1.41	2.50	3.23	3.04	2.11	3.04	3.23	2.50	1.41
T=.1030	1.40	2.48	3.22	3.04	2.03	3.04	3.22	2.48	1.40

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.97	3.55	4.68	5.36	5.58	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0103	1.97	3.56	4.68	5.37	5.59	5.37	4.68	3.56	1.97
T=.0206	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0309	1.98	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.0412	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0515	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.0618	2.00	3.59	4.72	5.40	5.62	5.40	4.72	3.59	2.00
T=.0721	2.01	3.60	4.73	5.41	5.63	5.41	4.73	3.60	2.01
T=.0824	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0927	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.1030	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5817

La velocidad de propagacion es: .30

El tiempo optimo es: .10301

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0081	.37	.65	.86	1.10	3.47	1.10	.86	.65	.37
T=.0162	.37	.67	.88	1.19	3.23	1.19	.88	.67	.37
T=.0242	.38	.68	.89	1.27	3.05	1.27	.89	.68	.38
T=.0323	.39	.69	.91	1.35	2.92	1.35	.91	.69	.39
T=.0404	.39	.71	.93	1.42	2.81	1.42	.93	.71	.39
T=.0485	.40	.72	.95	1.48	2.73	1.48	.95	.72	.40
T=.0565	.41	.73	.97	1.53	2.66	1.53	.97	.73	.41
T=.0646	.41	.75	.99	1.58	2.60	1.58	.99	.75	.41
T=.0727	.42	.76	1.02	1.62	2.55	1.62	1.02	.76	.42
T=.0808	.43	.77	1.04	1.65	2.50	1.65	1.04	.77	.43

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.49	2.67	3.37	3.19	2.67	3.19	3.37	2.67	1.49
T=.0081	1.48	2.65	3.36	3.17	2.63	3.17	3.36	2.65	1.48
T=.0162	1.47	2.64	3.35	3.16	2.59	3.16	3.35	2.64	1.47
T=.0242	1.47	2.63	3.34	3.14	2.55	3.14	3.34	2.63	1.47
T=.0323	1.46	2.61	3.33	3.12	2.50	3.12	3.33	2.61	1.46
T=.0404	1.46	2.60	3.33	3.11	2.45	3.11	3.33	2.60	1.46
T=.0485	1.45	2.59	3.32	3.10	2.39	3.10	3.32	2.59	1.45
T=.0565	1.45	2.57	3.31	3.09	2.33	3.09	3.31	2.57	1.45
T=.0646	1.44	2.56	3.30	3.09	2.27	3.09	3.30	2.56	1.44
T=.0727	1.44	2.55	3.29	3.09	2.20	3.09	3.29	2.55	1.44
T=.0808	1.43	2.53	3.28	3.09	2.12	3.09	3.28	2.53	1.43

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0081	1.96	3.55	4.68	5.36	5.58	5.36	4.68	3.55	1.96
T=.0162	1.97	3.55	4.69	5.36	5.59	5.36	4.69	3.55	1.97
T=.0242	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0323	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0404	1.99	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0485	2.00	3.59	4.72	5.40	5.62	5.40	4.72	3.59	2.00
T=.0565	2.01	3.59	4.73	5.41	5.63	5.41	4.73	3.59	2.01
T=.0646	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0727	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.0808	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5676

La velocidad de propagacion es: .40

El tiempo optimo es: .08078

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0072	.37	.65	.86	1.09	3.46	1.09	.86	.65	.37
T=.0145	.37	.66	.87	1.18	3.22	1.18	.87	.66	.37
T=.0217	.38	.68	.89	1.27	3.04	1.27	.89	.68	.38
T=.0289	.38	.69	.90	1.34	2.91	1.34	.90	.69	.38
T=.0362	.39	.70	.92	1.41	2.80	1.41	.92	.70	.39
T=.0434	.39	.71	.94	1.47	2.71	1.47	.94	.71	.39
T=.0506	.40	.72	.96	1.52	2.64	1.52	.96	.72	.40
T=.0579	.41	.73	.98	1.56	2.58	1.56	.98	.73	.41
T=.0651	.41	.74	1.00	1.60	2.53	1.60	1.00	.74	.41
T=.0723	.42	.76	1.02	1.64	2.48	1.64	1.02	.76	.42

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.49	2.67	3.37	3.19	2.68	3.19	3.37	2.67	1.49
T=.0072	1.48	2.66	3.36	3.17	2.65	3.17	3.36	2.66	1.48
T=.0145	1.48	2.64	3.35	3.16	2.61	3.16	3.35	2.64	1.48
T=.0217	1.47	2.63	3.35	3.15	2.56	3.15	3.35	2.63	1.47
T=.0289	1.47	2.62	3.34	3.13	2.52	3.13	3.34	2.62	1.47
T=.0362	1.46	2.61	3.34	3.12	2.47	3.12	3.34	2.61	1.46
T=.0434	1.46	2.60	3.33	3.12	2.41	3.12	3.33	2.60	1.46
T=.0506	1.46	2.59	3.33	3.11	2.35	3.11	3.33	2.59	1.46
T=.0579	1.45	2.58	3.32	3.11	2.29	3.11	3.32	2.58	1.45
T=.0651	1.45	2.56	3.31	3.11	2.22	3.11	3.31	2.56	1.45
T=.0723	1.45	2.55	3.31	3.11	2.14	3.11	3.31	2.55	1.45

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.96	3.54	4.67	5.35	5.57	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0072	1.96	3.55	4.68	5.36	5.58	5.36	4.68	3.55	1.96
T=.0145	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0217	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0289	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.0362	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0434	2.00	3.59	4.71	5.40	5.62	5.40	4.71	3.59	2.00
T=.0506	2.01	3.59	4.73	5.40	5.63	5.40	4.73	3.59	2.01
T=.0579	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0651	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.0723	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5627

La velocidad de propagacion es: .45

El tiempo optimo es: .07232

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0066	.37	.65	.85	1.09	3.46	1.09	.85	.65	.37
T=.0131	.37	.66	.87	1.18	3.21	1.18	.87	.66	.37
T=.0197	.38	.67	.88	1.27	3.03	1.27	.88	.67	.38
T=.0263	.38	.68	.90	1.34	2.90	1.34	.90	.68	.38
T=.0329	.39	.69	.91	1.41	2.79	1.41	.91	.69	.39
T=.0394	.39	.70	.93	1.46	2.70	1.46	.93	.70	.39
T=.0460	.40	.71	.95	1.51	2.63	1.51	.95	.71	.40
T=.0526	.40	.72	.97	1.55	2.57	1.55	.97	.72	.40
T=.0592	.41	.73	.99	1.59	2.51	1.59	.99	.73	.41
T=.0657	.41	.74	1.01	1.62	2.47	1.62	1.01	.74	.41

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.48	2.66	3.36	3.19	2.69	3.19	3.36	2.66	1.48
T=.0066	1.48	2.66	3.36	3.17	2.66	3.17	3.36	2.66	1.48
T=.0131	1.48	2.65	3.36	3.16	2.62	3.16	3.36	2.65	1.48
T=.0197	1.47	2.64	3.35	3.15	2.58	3.15	3.35	2.64	1.47
T=.0263	1.47	2.63	3.35	3.14	2.53	3.14	3.35	2.63	1.47
T=.0329	1.47	2.62	3.34	3.13	2.48	3.13	3.34	2.62	1.47
T=.0394	1.47	2.61	3.34	3.13	2.43	3.13	3.34	2.61	1.47
T=.0460	1.46	2.60	3.34	3.12	2.37	3.12	3.34	2.60	1.46
T=.0526	1.46	2.59	3.34	3.12	2.31	3.12	3.34	2.59	1.46
T=.0592	1.46	2.58	3.33	3.13	2.24	3.13	3.33	2.58	1.46
T=.0657	1.46	2.57	3.33	3.14	2.17	3.14	3.33	2.57	1.46

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.95	3.54	4.67	5.35	5.57	5.35	4.67	3.54	1.95
T=.0066	1.96	3.54	4.68	5.35	5.58	5.35	4.68	3.54	1.96
T=.0131	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0197	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0263	1.98	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.0329	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0394	2.00	3.58	4.72	5.39	5.62	5.39	4.72	3.58	2.00
T=.0460	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.0526	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0592	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.0657	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5587

La velocidad de propagacion es: .50

El tiempo optimo es: .06575

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0061	.36	.65	.85	1.09	3.45	1.09	.85	.65	.36
T=.0121	.37	.66	.87	1.18	3.20	1.18	.87	.66	.37
T=.0182	.37	.67	.88	1.27	3.02	1.27	.88	.67	.37
T=.0243	.38	.68	.89	1.34	2.89	1.34	.89	.68	.38
T=.0304	.38	.69	.91	1.40	2.78	1.40	.91	.69	.38
T=.0364	.39	.70	.92	1.46	2.69	1.46	.92	.70	.39
T=.0425	.39	.71	.95	1.53	2.58	1.53	.95	.71	.39
T=.0486	.40	.72	.96	1.55	2.55	1.55	.96	.72	.40
T=.0547	.40	.73	.98	1.58	2.50	1.58	.98	.73	.40
T=.0607	.41	.73	1.00	1.62	2.45	1.62	1.00	.73	.41

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.48	2.66	3.36	3.19	2.71	3.19	3.36	2.66	1.48
T=.0061	1.48	2.66	3.35	3.17	2.67	3.17	3.35	2.66	1.48
T=.0121	1.48	2.65	3.35	3.16	2.64	3.16	3.35	2.65	1.48
T=.0182	1.48	2.64	3.35	3.15	2.60	3.15	3.35	2.64	1.48
T=.0243	1.47	2.63	3.35	3.14	2.55	3.14	3.35	2.63	1.47
T=.0304	1.47	2.62	3.35	3.14	2.50	3.14	3.35	2.62	1.47
T=.0364	1.47	2.62	3.35	3.13	2.45	3.13	3.35	2.62	1.47
T=.0425	1.47	2.61	3.35	3.13	2.39	3.13	3.35	2.61	1.47
T=.0486	1.47	2.60	3.35	3.13	2.33	3.13	3.35	2.60	1.47
T=.0547	1.46	2.59	3.34	3.14	2.27	3.14	3.34	2.59	1.46
T=.0607	1.46	2.58	3.34	3.15	2.19	3.15	3.34	2.58	1.46

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.95	3.53	4.67	5.34	5.57	5.34	4.67	3.53	1.95
T=.0061	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0121	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0182	1.98	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.0243	1.98	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.0304	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0364	2.00	3.58	4.72	5.39	5.62	5.39	4.72	3.58	2.00
T=.0425	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.0486	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0547	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.0607	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5553

La velocidad de propagacion es: .55

Al tiempo optimo es: .06074

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0051	.36	.65	.85	1.09	3.45	1.09	.85	.65	.36
T=.0103	.37	.66	.86	1.18	3.20	1.18	.86	.66	.37
T=.0154	.37	.66	.87	1.26	3.02	1.26	.87	.66	.37
T=.0205	.37	.67	.88	1.33	2.88	1.33	.88	.68	.37
T=.0257	.38	.68	.90	1.39	2.77	1.39	.90	.68	.38
T=.0308	.38	.69	.91	1.45	2.68	1.45	.91	.69	.38
T=.0359	.39	.69	.92	1.49	2.60	1.49	.92	.69	.39
T=.0411	.39	.70	.94	1.53	2.54	1.53	.94	.70	.39
T=.0462	.39	.71	.96	1.57	2.48	1.57	.96	.71	.39
T=.0513	.40	.72	.98	1.59	2.43	1.59	.98	.72	.40

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.48	2.66	3.35	3.18	2.71	3.18	3.35	2.66	1.48
T=.0051	1.48	2.66	3.35	3.17	2.68	3.17	3.35	2.66	1.48
T=.0103	1.48	2.65	3.36	3.17	2.65	3.17	3.36	2.65	1.48
T=.0154	1.48	2.65	3.36	3.16	2.61	3.16	3.36	2.65	1.48
T=.0205	1.48	2.64	3.36	3.15	2.56	3.15	3.36	2.64	1.48
T=.0257	1.48	2.64	3.36	3.15	2.52	3.15	3.36	2.64	1.48
T=.0308	1.48	2.63	3.36	3.15	2.47	3.15	3.36	2.63	1.48
T=.0359	1.48	2.62	3.37	3.15	2.41	3.15	3.37	2.62	1.48
T=.0411	1.48	2.62	3.37	3.15	2.35	3.15	3.37	2.62	1.48
T=.0462	1.48	2.61	3.37	3.16	2.29	3.16	3.37	2.61	1.48
T=.0513	1.48	2.61	3.37	3.18	2.22	3.18	3.37	2.61	1.48

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.95	3.53	4.66	5.34	5.57	5.34	4.66	3.53	1.95
T=.0051	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0103	1.97	3.55	4.68	5.36	5.59	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0154	1.97	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.97
T=.0205	1.98	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.0257	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0308	2.00	3.58	4.72	5.39	5.62	5.39	4.72	3.58	2.00
T=.0359	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.0411	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0462	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.0513	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5500

La velocidad de propagacion es: .65

Al tiempo optimo es: .05135

VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	.36	.64	.84	1.01	3.82	1.01	.84	.64	.36
T=.0056	.36	.65	.85	1.09	3.45	1.09	.85	.65	.36
T=.0112	.37	.66	.86	1.18	3.20	1.18	.86	.66	.37
T=.0168	.37	.67	.88	1.26	3.02	1.26	.88	.67	.37
T=.0224	.38	.68	.89	1.34	2.88	1.34	.89	.68	.38
T=.0280	.38	.68	.90	1.40	2.77	1.40	.90	.68	.38
T=.0336	.38	.69	.92	1.46	2.68	1.46	.92	.69	.38
T=.0392	.39	.70	.93	1.50	2.60	1.50	.93	.70	.39
T=.0448	.39	.71	.95	1.54	2.54	1.54	.95	.71	.39
T=.0504	.40	.72	.97	1.58	2.49	1.58	.97	.72	.40
T=.0560	.40	.73	.99	1.61	2.44	1.61	.99	.73	.40

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.48	2.66	3.35	3.18	2.72	3.18	3.35	2.66	1.48
T=.0056	1.48	2.66	3.35	3.17	2.68	3.17	3.35	2.66	1.48
T=.0112	1.48	2.65	3.35	3.16	2.65	3.16	3.35	2.65	1.48
T=.0168	1.48	2.64	3.35	3.15	2.61	3.15	3.35	2.64	1.48
T=.0224	1.48	2.64	3.35	3.15	2.56	3.15	3.35	2.64	1.48
T=.0280	1.47	2.63	3.35	3.14	2.51	3.14	3.35	2.63	1.47
T=.0336	1.47	2.62	3.35	3.14	2.46	3.14	3.35	2.62	1.47
T=.0392	1.47	2.62	3.36	3.14	2.41	3.14	3.36	2.62	1.47
T=.0448	1.47	2.61	3.36	3.14	2.35	3.14	3.36	2.61	1.47
T=.0504	1.47	2.60	3.36	3.15	2.28	3.15	3.36	2.60	1.47
T=.0560	1.47	2.59	3.36	3.16	2.21	3.16	3.36	2.59	1.47

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.0000	1.95	3.53	4.66	5.34	5.57	5.34	4.66	3.53	1.95
T=.0056	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.0112	1.97	3.55	4.68	5.36	5.58	5.36	4.68	3.55	1.97
T=.0168	1.97	3.56	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.56	1.97
T=.0224	1.98	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.0280	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.0336	2.00	3.58	4.72	5.39	5.62	5.39	4.72	3.58	2.00
T=.0392	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.0448	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.0504	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.0560	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

El coste es: 14.5525

La velocidad de propagacion es: .60

Al tiempo optimo es: .05604

J'0

APENDICE F

PROGRAMAS DE ORDENADOR PARA EL CASO ALEATORIO

```

PROGRAM PERTURBACION_DE_OBSERVACIONES
C Este programa almacena en PERTURBAR un conjunto
C simulado de posibles perturbaciones de tipo ruido
C blanco gaussiano para el proceso de observaciones.
  INTEGER T2
  DIMENSION SIGMA(200)

C Creacion del fichero PERTURBAR.
OPEN(5,FILE='PERTURBAR',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')

C Valores de la semiamplitud C del intervalo espacial
C y de alcance E de los "observatorios".
  DATA C,E/2.,0.01
C K es el numero de observatorios a establecer. Su numero
C no debe exceder de 200 y viene dado por la formula de
C la seccion 5.5.
  K=2*INT((C-E)/(2*E))+1

C Simulamos ahora una serie de observaciones nor-
C males. La varianza de las perturbaciones simuladas
C es la indicada en la seccion 5.8.
  K1=K-K/2
  DO 20 I=1,K
    X=2.*(I-K1)*E
    SIGMA(I)=0.1/(1+X*X)
20

C Generacion de las perturbaciones aleatorias.
DO 500 T=TO,T1,PASO/2.
  DO 400 I=1,K
    S=0.
    SEMILLA=ENTRALEA( )
    DO 300 L=1,48
      S=S+RANDOM( )
    PERT=SIGMA(I)*(S-24.)/2.
    WRITE(5,FMT="(G16.8)",REC=I+K*T2) PERT
300
400
500 CONTINUE
CLOSE(5)
STOP
END

FUNCTION ENTRALEA ( )
C Este subprograma genera numeros aleatorios.
DIMENSION KUKU(3)
EXTERNAL TIME
SAVE KIKI
CALL TIME (KUKU)
KIKI = KUKU(1)*10000+KUKU(2)*100+KUKU(3)
ENTRALEA = KIKI
ENTRY RANDOM ( )
KIKI = MOD (KIKI * 899 + 24298, 199017)
RANDOM = KIKI/199017.
RETURN
END

```

```

PROGRAM COVARIANZA PROCESO POISSON
C     Este programa calcula los valores de la cova-
C     rianza del proceso de Poisson y los almacena en un
C     fichero de datos creado por el programa. Contendra
C     los valores de las integrales definidas en V.9 para
C     el caso particular descrito en la seccion 5.8.

PARAMETER(PI=3.1415926,NUM=20)

C     Creacion del fichero LAMBDA
OPEN(3,FILE='LAMBDA',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+  FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')

C     La variable H es el paso de la integral del me-
C     todo de Simpson utilizada para calcular V.9 .
H=0.01
COMMON C
PRINT*,"C,SEMIAMPLITUD DEL INTERVALO ESPACIAL  "
READ*,C

DO 20 N=1,NUM
  S=0.
  L=0
  DO 10 X=-C,C,H
    IF ((X.EQ.(-C)).OR.(X.EQ.C)) THEN
      S=S+FUNSEN(N,X)
    ELSE IF(2*(L/2).NE.L) THEN
      S=S+4.*FUNSEN(N,X)
    ELSE
      S=S+2.*FUNSEN(N,X)
    END IF
  10  L=L+1
  RESULT=H*S/3.
  20  WRITE(3,FMT="(G16.8)",REC=N) RESULT

CLOSE(3)
STOP
END

FUNCTION FUNSEN(N,X)
C     Es un auxiliar para el calculo de los coeficien-
C     tes de Fourier de la covarianza del proceso de Pois-
C     son analizado en la seccion 5.8.
COMMON C
PARAMETER(PI=3.14159625)
R=SIN((N*PI/2.)*(1.+X/C))

C     La funcion D es la Lambda(x) de la teoria.
D=1./(1.+X*X)
FUNSEN=((R*D)**2)/C
RETURN
END

```

```

PROGRAM FICHEROS_BASE
C   Este programa crea los ficheros ANM Y CIJ
C   ANM contendra los coeficientes a(n,m) de la
C   formula V.13 para n y m tomando valores maximos 20
C   y K.El numero maximo de "observatorios" sera 200.
C   Esta cantidad no sea rebasada.

PARAMETER(PI=3.1415926,NUM=20)
DIMENSION A(NUM,200)

C   Creacion del fichero ANM.
OPEN(3,FILE='ANM',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+ FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
10 PRINT*,"DA C,SEMIAMPLITUD DEL INTERVALO ESPACIAL "
PRINT*,"Y EL ALCANCE DE LOS OBSERVATORIOS E "
READ*,C,E

C   K es el numero de observatorios a establecer.
K=2*INT((C-E)/(2*E))+1
IF (K.LE.200) GO TO 15
PRINT*,"REVISE LOS VALORES DE C Y E"
GO TO 10

C   Calculo de los coeficientes a(n,m) y escritura de
C   los mismos en el fichero de datos ANM.
15 DO 50 I=1,NUM
DO 30 L=1,K
T=SIN(PI*I*(1.-(K-2*L+1)*E/C)/2.)
T=T*SIN(PI*I*E/(2.*C))
A(I,L)=2*T*SQRT(C)/(E*I*PI)
30 WRITE(3,FMT="(G16.8)",REC=K*(I-1)+L) A(I,L)
50 CONTINUE
CLOSE(3)

C   CIJ contendra los coeficientes c(i,j) de la for-
C   mula V.14 para i y j tomando el valor maximo 100.
OPEN(4,FILE='CIJ',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+ FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
DO 80 I=1,NUM
DO 70 J=I,NUM
S=0.
DO 60 L=1,K
60 S=S+A(I,L)*A(J,L)
NUMREG=(J-I+1)+(I-1)*(2*(NUM+1)-I)/2
70 WRITE(4,FMT="(G16.8)",REC=NUMREG) S
80 CONTINUE
CLOSE(4)
STOP
END

```

```

PROGRAM CREACION DEL FICHERO PN
C   Crea el fichero PN para almacenar los coeficien-
C   tes definidos en V.15 truncando n en el valor 100.

PARAMETER(PI=3.1415926,NUM=20)
DIMENSION P(NUM,0:1000),P1(NUM),P2(NUM),P3(NUM),P4(NUM)
REAL LAMBDA(NUM),INTEGER T2
DATA Q,C,E,T2,TO,T1/1.,2.,0.01,0,0.,0.1
PASO=T1/1000.
QC=Q*((PI/C)**2)/2.

OPEN(5,FILE='LAMBDA',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')
DO 30 I=1,NUM
30  READ(5,FMT="(G16.8)",REC=I) LAMBDA(I)
CLOSE(5)

C   Comienza el calculo de los coeficientes p(n).
DO 700 I=1,NUM
P(I,0)=0.
Z=1./I
CALCULO=QC*(I**2)
DO 600 T2=0,999
T=T2*PASO
P1(I)=CALCULO*P(I,T2)
S1=(P(I,T2)**2)/(2.*E)
P1(I)=-P1(I)-S1+(Z**4+T*LAMBDA(I))
S2=P(I,T2)+P1(I)*PASO/2.
P2(I)=-CALCULO*S2-S2*S2/(2.*E)
P2(I)=P2(I)+(Z**4+(T+PASO/2.)*LAMBDA(I))
S3=P(I,T2)+P2(I)*PASO/2.
P3(I)=-CALCULO*S3-S3*S3/(2.*E)
P3(I)=P3(I)+(Z**4+(T+PASO/2.)*LAMBDA(I))
S4=P(I,T2)+P3(I)*PASO
P4(I)=-CALCULO*S4-S4*S4/(2.*E)
P4(I)=P4(I)+(Z**4+(T+PASO)*LAMBDA(I))
SUMPEND=P1(I)+2*(P2(I)+P3(I))+P4(I)
P(I,T2+1)=P(I,T2)+SUMPEND*PASO/6.
600  PAUSE
700  CONTINUE

C   Escritura de los valores de p(n,t) en el fichero PN.
OPEN(1,FILE='PN',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+ FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
DO 800 I=1,NUM
DO 750 N=0,1000,100
L=N/100
750  WRITE(1,FMT="(G16.8)",REC=L+1+11*(I-1)) P(I,N)
800  CONTINUE
CLOSE(1)
STOP
END

```

PROGRAM COEFICIENTES_B
 C Este programa calcula los coeficientes b(n,t) definidos
 C en la ecuacion V.19 y los almacena en el fichero BN.

```
PARAMETER(PI=3.14159625,N=20)
DIMENSION B(N,0:10),B1(N),B2(N),B3(N),B4(N)
DIMENSION COEF(N,N),P(N,0:10)
INTEGER T2
```

C La variable T2 esta asociada al tiempo y a la locali-
 C zacion de datos en ficheros. Las variables T0 y T1 son
 C los instantes inicial y final del estudio del polo. Q
 C es la velocidad de propagacion y C la semiamplitud del
 C intervalo espacial.

```
DATA Q,C,T0,T1,B/1.,2.,0.,0.1,220*0.
CONSTANTE=-Q*((PI/(2*C))**2)
PASO=T1/10.
```

C Lectura de la matriz P desde el fichero PN.
 OPEN(3,FILE='PN',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
 + RECL=16,FORM='FORMATTED')
 DO 30 I=1,N
 DO 20 T2=0,10
 20 READ(3,FMT="(G16.8)",REC=T2+1+11*(I-1)) P(I,T2)
 30 CONTINUE
 CLOSE(3)

C Lectura de COEF desde el fichero CIJ.
 OPEN(4,FILE='CIJ',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
 + RECL=16,FORM='FORMATTED')
 DO 50 I=1,N
 DO 40 J=I,N
 NUMREG=J-I+1+(I-1)*(2*(N+1)-I)/2
 READ(4,FMT="(G16.8)",REC=NUMREG) COEF(I,J)
 40 COEF(J,I)=COEF(I,J)
 50 CONTINUE
 CLOSE(4)

C Comienza el calculo de los elementos b(n,t).
 DO 400 T2=0,9
 DO 100 I=1,N
 B1(I)=CONSTANTE*I*I*B(I,T2)
 S=0.
 DO 90 J=1,N
 90 S=S+COEF(I,J)*B(J,T2)
 100 B1(I)=B1(I)-P(I,T2)*S

 DO 150 I=1,N
 B2(I)=CONSTANTE*I*I*(B(I,T2)+B1(I)*PASO/2.)
 S=0.
 DO 130 J=1,N

```

130         S=S+COEF(I,J)*(B(J,T2)+B1(J)*PASO/2.)
150         B2(N)=B2(N)-(B(I,T2)+B1(I)*PASO/2.)*S

DO 200 I=1,N
  B3(I)=CONSTANTE*I*I*(B(I,T2)+B2(I)*PASO/2.)
  S=0.
DO 180 J=1,N
  S=S+COEF(I,J)*(B(J,T2)+B2(J)*PASO/2.)
200         B3(I)=B3(I)-S*(P(I,T2)+P(I,T2+1))/2.

DO 250 I=1,N
  B4(I)=CONSTANTE*I*I*(B(I,T2)+B3(I)*PASO)
  S=0.
DO 230 J=1,N
230         S=S+COEF(I,J)*(B(J,T2)+B3(J)*PASO)
250         B4(I)=B4(I)-S*P(I,T2+1)

DO 300 I=1,N
  SUMA=(B1(I)+2*B2(I)+2*B3(I)+B4(I))/6.
300         B(I,T2+1)=B(I,T2)+SUMA
400 CONTINUE

C   Almacenamiento de los valores b(n) en el fichero BN.
OPEN(6,FILE='BN',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+  FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
DO 600 T2=0,10
  DO 500 I=1,N
    WRITE(6,900,REC=I+N*T2) B(I,T2)
500 CONTINUE
600 CONTINUE
CLOSE(6)
900 FORMAT(G16.8)

STOP
END

```

```

PROGRAM COEFICIENTES_X
C   Calcula los coeficientes x(n,t) definidos en la ecuacion
C   V.20 y los almacena en el fichero XN. Calcula tambien
C   los de la estimacion de la variable de estado. Usa
C   los metodos de Runge-Kutta y Milne.
PARAMETER(PI=3.14159625,N=20)
COMMON CONSTANTE,E,K
DIMENSION X1(N),X2(N),X3(N),X4(N),Z(N,0:10)
COMMON/SOL/P(N,0:10),A(N,200),V(200,0:20),
+ B(N,0:10),X(N,0:10)

C   Las variables T2,T0,T1,Q,C y K estan definidas en
C   programas anteriores.
INTEGER T2
DATA Q,C,E,T0,T1/1.,2.,0.01,0.,0.1
CONSTANTE=-Q*((PI/(2*C))**2)
K=2*INT((C-E)/(2.*E))+1
DATA X,Z/220*0.,220*0.
PASO=T1/10.

OPEN(3,FILE='PN',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')

C   Lectura de la matriz P desde el fichero PN.
DO 30 I=1,N
DO 20 T2=0,10
20 READ(3,FMT="(G16.8)",REC=T2+1+11*(I-1)) P(I,T2)
30 CONTINUE
CLOSE(3)

C   Lectura de los elementos de B desde el fichero BN.
OPEN(6,FILE='BN',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')
DO 40 T2=0,10
DO 37 L=1,N
37 READ(6,FMT="(G16.8)",REC=L+N*T2) B(L,T2)
40 CONTINUE
CLOSE(6)

C   Lectura de los elementos de A desde el fichero ANM.
OPEN(7,FILE='ANM',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')
DO 45 I=1,N
DO 42 L=1,K
42 READ(7,FMT="(G16.8)",REC=L+K*(I-1)) A(I,L)
45 CONTINUE
CLOSE(7)

C   Lectura de los elementos de V desde PERTURBAR.
OPEN(8,FILE='PERTURBAR',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')
DO 50 T2=0,20
DO 47 I=1,K

```

```

47         READ(8,FMT="(G16.8)",REC=I+K*T2) V(I,T2)
50     CONTINUE
        CLOSE(8)
C     Comienza el calculo de los coeficientes x(n,t)
DO 400 T2=0,2
    DO 100 I=1,N
        X1(I)=CONSTANTE*I*I*X(I,T2)
        X1(I)=X1(I)+B(I,T2)*P(I,T2)/(2.*E)
        S=0.
        DO 90 L=1,K
90         S=S+A(I,L)*V(L,2*T2)
        X1(I)=X1(I)+P(I,T2)*S
100    CONTINUE

        DO 150 I=1,N
            X2(I)=CONSTANTE*I*I*(X(I,T2)+X1(I)*PASO/2.)
            SUMA=B(I,T2)*P(I,T2)+B(I,T2+1)*P(I,T2+1)
            X2(I)=X2(I)+SUMA/(4.*E)
            S=0.
            DO 130 L=1,K
130         S=S+A(I,L)*V(L,2*T2+1)
            X2(I)=X2(I)+(P(I,T2)+P(I,T2+1))*S/2.
150    CONTINUE

            DO 200 I=1,N
                X3(I)=CONSTANTE*I*I*(X(I,T2)+X2(I)*PASO/2.)
                SUMA=B(I,T2)*P(I,T2)+B(I,T2+1)*P(I,T2+1)
                X3(I)=X3(I)+SUMA/(4.*E)
                S=0.
                DO 180 L=1,K
180         S=S+A(I,L)*V(L,2*T2+1)
                X3(I)=X3(I)+S*(P(I,T2)+P(I,T2+1))/2.
200    CONTINUE

                DO 250 I=1,N
                    X4(I)=CONSTANTE*I*I*(X(I,T2)+X3(I)*PASO)
                    X4(I)=X4(I)+B(I,T2+1)*P(I,T2+1)/(2.*E)
                    S=0.
                    DO 230 L=1,K
230         S=S+A(I,L)*V(L,2*T2+2)
                    X4(N)=X4(N)+S*P(I,T2+1)
250    CONTINUE

                    DO 300 I=1,N
                        SUM=PASO*(X1(I)+2*(X2(I)+X3(I))+X4(I))/6.
                        X(I,T2+1)=X(I,T2)+SUM
300         Z(I,T2+1)=X(I,T2+1)+B(I,T2+1)
400    CONTINUE

        DO 500 T2=4,10
            DO 450 I=1,N

```

```

X1(I)=DERX(I,T2-3)
X2(I)=DERX(I,T2-2)
X3(I)=DERX(I,T2-1)
SUM=(2*X1(I)-X2(I)+2*X3(I))*4*PASO/3.
X(I,T2)=X(I,T2-4)+SUM
X4(I)=DERX(I,T2)
X(I,T2)=X(I,T2-2)+(X4(I)+4*X3(I)+X2(I))*PASO/2.
450 Z(I,T2)=X(I,T2)+B(I,T2)

500 CONTINUE

C Almacenamiento de los valores x(n,t) y z(n,t) en
C los ficheros XP y ZP.
OPEN(2,FILE='XN',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+ FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
OPEN(3,FILE='ZN',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+ FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
DO 420 T2=0,10
DO 410 L=1,N
WRITE(2,FMT="(G16.8)",REC=L+N*T2) X(L,T2)
410 WRITE(3,FMT="(G16.8)",REC=L+N*T2) Z(L,T2)
420 CONTINUE
CLOSE(2)
CLOSE(3)
STOP
END

```

```

FUNCTION DERX(I,J)
C Calcula el valor de la derivada de x(n,t).

PARAMETER(N=20)
COMMON CONSTANTE,E,K
COMMON/SOL/P(N,0:10),A(N,200),V(200,0:20),
+ B(N,0:10),X(N,0:10)
CALC=CONSTANTE*I*I*X(I,J)+P(I,J)*B(I,J)/(2*E)
SUM=0.
DO 1 L=1,K
1 SUM=SUM+A(I,L)*V(L,2*J)
DERX=CALC+P(I,J)*SUM
RETURN

```

```

PROGRAM OPERADORES_S_Y_M

C   El programa calcula para una serie de instantes en
C   el intervalo de tiempo (0,t1) los valores de los coefi-
C   cientes de Fourier de los operadores S(t) y m(t). Es el
C   programa utilizado en el caso determinista con pequenas
C   modificaciones.
C   El programa esta preparado para proceso interactivo
C   y trabaja en precision simple.

PARAMETER (PI=3.1415926,NUM=20)
EXTERNAL SITUACION_INICIAL,SITUACION_FINAL

C   COEF_SIT_INICIAL y COEF_SIT_FINAL contendran los coe-
C   ficientes de Fourier de las situaciones inicial y final
C   respectivamente.
DIMENSION COEF_SIT_INICIAL(NUM),COEF_SIT_FINAL(NUM)

C   La matriz M contendra valores en el tiempo y en el
C   espacio de los coeficientes de Fourier de la financiacion
C   externa. S contendra los valores que a lo largo del tiem-
C   po tomen los coeficientes de Fourier del operador S(t).
DIMENSION M(NUM,0:10),S(NUM,0:10)
REAL M

PRINT *,"VALOR DE C, SEMIAMPLITUD INTERVALO ESPACIAL,"
PRINT *,"Q,VELOCIDAD DE PROPAGACION Y T1, DURACION"
PRINT *,"DEL CONTROL.  "
READ *,C,Q,T1
C1=C/1000.

C   Coeficientes de Fourier de las situaciones inicial y-
C   final definidas en subprogramas FUNCTION del mismo nombre.
DO 1 N=1,NUM
  CF=0.0
  CALL COEF_DE_FOURIER(CF,N,SITUACION_INICIAL,C)
  COEF_SIT_INICIAL(N)=CF
  CF=0.0
  CALL COEF_DE_FOURIER(CF,N,SITUACION_FINAL,C)
1  COEF_SIT_FINAL(N)=CF

C   Las cuatro matrices siguientes contienen los valores
C   de las constantes K(N),B(N),A(N) y D(N).
DIMENSION K(NUM),B(NUM),A(NUM),D(NUM)
REAL K
DO 2 N=1,NUM
  K(N)=2.*Q*((N*PI)/(2.*C))**2
  B(N)=SQRT(K(N)**2+4.)
  A(N)=2.+K(N)+B(N)
2  D(N)=(2.+K(N)-B(N))/A(N)

```

```

C      Calculo y almacenamiento de los valores en el tiempo
C de los coeficientes de Fourier de m(t) y de S(t).
      DO 4 N=1,NUM
        DO 3 J=0,10
          M(N,J)=FINANC_EXTERNA(J,T1,COEF_SIT_FINAL(N)
+           ,K(N),B(N),A(N),D(N))
3        CONTINUE
4        CONTINUE
      DO 6 N=1,NUM
        DO 5 J=0,10
          T=J*T1/10.
          V1=EXP(-B(N)*(T1-T))
          V2=(K(N)+B(N))/2.
          V3=1.-D(N)*V1
5          S(N,J)=B(N)/V3-V2
6        CONTINUE

C      Almacenamiento de los coeficientes de Fourier de S(t)
C y m(t) en los ficheros SN y MN respectivamente.
      OPEN(2,FILE='SN',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+     FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
      OPEN(3,FILE='MN',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='DIRECT',
+     FORM='FORMATTED',RECL=16,BLANK='NULL',RECFM='FIXED')
      DO 8 I=0,10
        DO 7 N=1,NUM
          WRITE(2,900,REC=N+NUM*I) S(N,I)
          WRITE(3,900,REC=N+NUM*I) M(N,I)
7        CONTINUE
8      CONTINUE
      CLOSE(2)
      CLOSE(3)
900   FORMAT(G16.8)
      STOP
      END

```

```

FUNCTION FINANC_EXTERNA(J,T1,A2,A3,A4,A5,A6)
T=J*T1/10.
U1=A3*(2.-A3)
U=EXP(-A4*(T1-T))
U2=U1*SQRT(U)-A5*(1.+A6*U)
U3=A5*(1.-A6*U)
U4=2.*A2*U2
FINANC_EXTERNA=(U4/A4)/U3
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEF_DE_FOURIER(CF,N,FUNC_DATO,C)
C   Esta subrutina calcula el n-simo coeficiente de
C   Fourier de una funcion respecto del sistema ortonormal
C   de autofunciones asociado al generador A del semigrupo
C   del sistema. El argumento CF devolvera al programa principal
C   el valor del coeficiente de Fourier. El argumento FUNC_DATO
C   esta asociado a la funcion cuyos coeficientes se desea
C   calcular. Para el calculo de las integrales utiliza la
C   formula cerrada de Simpson.

```

```

PARAMETER (PI=3.1415926)
EXTERNAL FUNC_DATO
INTEGER PUNTO
PUNTO=1
C1=C/1000.
Y1=-C+C1
1  IF (Y1.GT.(C-C1)) GO TO 2
    ANGULO=N*PI/2.+(N*PI*Y1)/(2.*C)
    MULTIPLICADOR=3+((-1)**(PUNTO+1))
    Z=REAL(MULTIPLICADOR)
    CF=CF+Z*SIN(ANGULO)*FUNC_DATO(Y1)
    PUNTO=PUNTO+1
    Y1=Y1+C1
    GO TO 1
2  CF=C1*CF/(3.*(C**(.5)))
    RETURN
END

```

```

FUNCTION SITUACION_INICIAL(X)
C   Define la situacion inicial del sistema. La sentencia 1
C   debe ser cambiada en cada caso
PI=3.14159265
1  Q1=0.
    SITUACION_INICIAL=Q1
    RETURN
END

```

```

FUNCTION SITUACION_FINAL(X)
C   Define la situacion final del sistema. La sentencia 1
C   debe ser cambiada en cada caso.
1  Q1=4.-X*X
    SITUACION_FINAL=Q1
    RETURN
END

```

```

PROGRAM RESULTADOS_Y_SALIDA
C   El programa calcula, para una serie de instantes en
C   el intervalo de tiempo [0,t1] y en puntos equidistantes
C   del intervalo espacial [-c,c] en el que esta definido
C   el sistema a controlar, el valor de la variable de es-
C   tado z(t,x), el control optimo u(t,x) y la financiacion
C   externa m(x,t).

PARAMETER (PI=3.14159265,NU=20)
DIMENSION VARIABLE_ESTADO(-5:5,0:10)
DIMENSION CONTROL(-5:5,0:10)
REAL INVERSION_EXTERNA(-5:5,0:10)

C   M y S estan definidas en el programa anterior.ZETA
C   contendra los coeficientes de z(t,x).
REAL M(NU,0:10),S(NU,0:10),ZETA(NU,0:10)

PRINT *,"VALORES DE C, SEMIAMPLITUD DEL INTERVALO"
PRINT *,"ESPACIAL, LA VELOCIDAD DE PROPAGACION Q"
PRINT *,"Y LA DURACION DEL CONTROL T1.   "
READ *,C,Q,T1

OPEN(2,FILE='MN',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')
OPEN(3,FILE='SN',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')
OPEN(4,FILE='ZN',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',
+ RECL=16,FORM='FORMATTED')
DO 2 J=0,10
  DO 1 N=1,NU
    READ(2,FMT="(G16.8)",REC=N+NU*J) M(N,J)
    READ(3,FMT="(G16.8)",REC=N+NU*J) S(N,J)
    READ(4,FMT="(G16.8)",REC=N+NU*J) ZETA(N,J)
1
2  CONTINUE
  CLOSE(2)
  CLOSE(3)
  CLOSE(4)

C   Calculo de los valores de la variable de estado
C   z(t,x), del control u(x,t) y de la inversion o finan-
C   cion externa m(x,t).
C1=C/5.
DO 5 I=-5,5 ! I=k equivale al punto k*c1
  Y1=-C+(I+5)*C1
  DO 4 J=0,10
    ACUMULO=0.0
    ADITOR=0.0
    SUMADOR=0.0
    DO 3 N=1,NU
      ANGULO=N*PI/2.+(N*PI*Y1)/(2.*C)
      U=SIN(ANGULO)
      V=ZETA(N,J)*U
      ACUMULO=ACUMULO+V
      ADITOR=ADITOR-M(N,J)*U
      SUMADOR=SUMADOR-S(N,J)*V
3
5

```

```

          VARIABLE ESTADO(I,J)=ACUMULO/(C**.5)
          CONTROL(I,J)=SUMADOR+ADITOR
          INVERSION_EXTERNA(I,J)=ADITOR
4
5  CONTINUE

C  Comienza la salida por impresora.
  OPEN(3,FILE='_LPT',CARRIAGECONTROL='FORTRAN')
  WRITE(3,100)
100  FORMAT("1",28X,"VALORES DE LA VARIABLE DE ESTADO",/)
     WRITE(3,200)
200  FORMAT(35X,"VARIABLE ESPACIAL",/)
     WRITE(3,300)
300  FORMAT(1X,10H          )
     H=-C+2.*C/10.
     DO 6 IL=1,9
         WRITE(3,350) H
         H=H+2.*C/10.
350  FORMAT("E",F7.2)
     WRITE(3,FMT="(13X,63(1H*),/)" )
     DO 7 J=0,10
         F=J*T1/10.
7         WRITE(3,400) F,(VARIABLE_ESTADO(I,J),I=-4,4)
400  FORMAT(2X,"T=",F5.2,2X,9F7.2)
     WRITE(3,FMT="(1X,'          ',/,/)" )
     WRITE(3,FMT="(28X,'VALORES DE LA LEY DE CONTROL',/)" )
     WRITE(3,200)
     WRITE(3,300)
     H=-C+2.*C/10.
     DO 8 IK=1,9
         WRITE(3,350) H
         H=H+2.*C/10.
8         WRITE(3,FMT="(13X,63(1H*),/)" )
         DO 9 J=0,10
             F=J*T1/10.
9             WRITE(3,400) F,(CONTROL(I,J),I=-4,4)
             WRITE(3,500)
500  FORMAT("1",32X,"FINANCIACION EXTERNA",/)
             WRITE(3,200)
             WRITE(3,300)
             H=-C+2.*C/10.
             DO 10 IJ=1,9
                 WRITE(3,350) H
                 H=H+2.*C/10.
10                WRITE(3,FMT="(13X,63(1H*),/)" )
                 DO 11 J=0,10
                     F=J*T1/10.
11                    WRITE(3,400) F,(INVERSION_EXTERNA(I,J),I=-4,4)
                     WRITE(3,600) Q
600  FORMAT(1X,/,/,18X,'La velocidad de propagacion es:',
+      F3.1)
     CLOSE(3)
     STOP
     END

```

APENDICE G

RESULTADOS OBTENIDOS EN EL CASO ALEATORIO

VALORES ESTIMADOS DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
***	*****								
T=.00	-.05	.01	-.02	-.15	2.73	.04	.03	-.09	-.03
T=.01	-.01	-.01	-.00	-.09	2.75	-.01	-.02	-.02	-.04
T=.02	-.03	.00	.04	-.03	2.28	.09	-.03	-.05	-.01
T=.03	-.00	.04	.01	-.01	2.36	.16	.08	.02	.00
T=.04	.01	.02	.09	.08	2.04	.24	.17	.05	.01
T=.05	.03	.11	.17	.19	2.17	.40	.12	.09	.04
T=.06	.07	.08	.28	.40	2.02	.52	.19	.15	.06
T=.07	.06	.16	.24	.31	1.80	.66	.29	.11	.05
T=.08	.10	.24	.30	.58	1.96	.70	.27	.14	.04
T=.09	.08	.21	.27	.50	1.76	.92	.31	.16	.07
T=.10	.11	.27	.33	.76	1.84	.84	.47	.17	.10

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
***	*****								
T=.00	2.14	3.95	4.97	4.95	4.01	4.91	4.86	3.78	2.13
T=.01	2.12	3.97	4.91	4.92	4.03	4.96	4.88	3.75	2.15
T=.02	2.11	3.90	4.88	4.90	3.89	4.86	4.89	3.74	2.10
T=.03	2.09	3.83	4.82	4.86	3.82	4.83	4.80	3.72	2.09
T=.04	2.06	3.78	4.78	4.83	3.76	4.81	4.77	3.68	2.07
T=.05	2.05	3.71	4.72	4.81	3.72	4.79	4.74	3.65	2.05
T=.06	2.03	3.67	4.68	4.80	3.63	4.76	4.71	3.61	2.04
T=.07	2.01	3.63	4.66	4.78	3.55	4.72	4.68	3.62	2.05
T=.08	1.99	3.58	4.61	4.75	3.49	4.70	4.66	3.59	2.03
T=.09	1.98	3.54	4.58	4.72	3.44	4.67	4.63	3.56	2.01
T=.10	1.96	3.50	4.55	4.69	3.38	4.65	4.59	3.52	1.99

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
***	*****								
T=.00	1.98	3.56	4.69	5.37	5.60	5.37	4.69	3.56	1.98
T=.01	1.98	3.56	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.56	1.98
T=.02	1.99	3.57	4.70	5.38	5.61	5.38	4.70	3.57	1.99
T=.03	1.99	3.58	4.71	5.39	5.61	5.39	4.71	3.58	1.99
T=.04	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.05	2.00	3.59	4.72	5.40	5.62	5.40	4.72	3.59	2.00
T=.06	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.07	2.02	3.60	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.60	2.02
T=.08	2.02	3.61	4.74	5.42	5.64	5.42	4.74	3.61	2.02
T=.09	2.03	3.61	4.74	5.42	5.65	5.42	4.74	3.61	2.03
T=.10	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

La velocidad de propagacion es 0.25

VALORES ESTIMADOS DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	-.04	-.05	.01	.04	3.02	-.09	.02	-.06	.01
T=.01	-.01	-.00	-.01	.14	2.20	.10	.05	-.01	-.01
T=.02	.02	-.02	.04	.32	1.95	.22	.09	-.04	.00
T=.03	.03	.03	.09	.40	2.08	.45	.11	.02	.02
T=.04	.07	.06	.11	.67	1.64	.40	.14	.08	.05
T=.05	.06	.10	.15	.60	1.78	.67	.18	.13	.06
T=.06	.10	.08	.20	.71	1.42	.60	.29	.12	.05
T=.07	.08	.12	.18	.85	1.60	.69	.25	.20	.08
T=.08	.10	.19	.24	.80	1.38	.82	.34	.18	.07
T=.09	.13	.16	.34	.90	1.52	.76	.45	.22	.09
T=.10	.15	.22	.31	.98	1.35	.87	.41	.24	.10

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	2.17	3.75	4.83	5.16	4.88	5.11	4.90	3.66	2.18
T=.01	2.19	3.60	4.84	5.07	4.81	4.96	4.84	3.64	2.21
T=.02	2.12	3.64	4.79	5.02	4.75	4.84	4.79	3.62	2.20
T=.03	2.10	3.57	4.71	4.91	4.71	4.77	4.72	3.57	2.18
T=.04	2.07	3.52	4.66	4.85	4.60	4.71	4.65	3.56	2.15
T=.05	2.06	3.48	4.63	4.80	4.52	4.68	4.61	3.54	2.14
T=.06	2.03	3.49	4.64	4.76	4.41	4.65	4.57	3.52	2.12
T=.07	2.04	3.47	4.60	4.71	4.29	4.60	4.50	3.50	2.09
T=.08	2.03	3.45	4.56	4.68	4.21	4.56	4.45	3.47	2.05
T=.09	2.00	3.41	4.54	4.65	4.10	4.52	4.41	3.44	2.02
T=.10	1.98	3.39	4.52	4.60	4.02	4.49	4.38	3.42	2.00

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	1.92	3.50	4.63	5.31	5.54	5.31	4.63	3.50	1.92
T=.01	1.93	3.51	4.64	5.32	5.55	5.32	4.64	3.51	1.93
T=.02	1.94	3.52	4.65	5.33	5.56	5.33	4.65	3.52	1.94
T=.03	1.95	3.53	4.66	5.34	5.57	5.34	4.66	3.53	1.95
T=.04	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.05	1.97	3.55	4.69	5.37	5.59	5.37	4.69	3.55	1.97
T=.06	1.98	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.07	2.00	3.58	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.58	2.00
T=.08	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.72	3.59	2.01
T=.09	2.02	3.61	4.74	5.42	5.64	5.42	4.74	3.61	2.02
T=.10	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

La velocidad de propagacion es 0.50

VALORES ESTIMADOS DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	-.02	.03	.02	-.06	2.96	-.10	.03	-.04	.02
T=.01	.00	-.01	-.01	.08	3.18	.22	-.06	-.00	-.01
T=.02	-.01	-.02	.03	.02	1.81	.47	.04	-.02	.00
T=.03	.04	.03	.12	.17	1.60	.70	.10	.09	.01
T=.04	.05	.05	.10	.44	1.71	.65	.15	.05	.02
T=.05	.07	.10	.15	.76	1.47	.76	.19	.09	.03
T=.06	.09	.08	.25	.62	1.42	.84	.16	.10	.04
T=.07	.08	.17	.22	.73	1.45	.97	.21	.13	.07
T=.08	.10	.19	.36	.86	1.30	.90	.20	.12	.06
T=.09	.12	.18	.31	.80	1.13	1.08	.27	.18	.08
T=.10	.11	.24	.37	.95	1.20	1.00	.32	.16	.09

VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	1.92	3.52	4.56	4.73	4.81	4.68	4.42	3.44	1.90
T=.01	1.90	3.54	4.57	4.71	4.50	4.60	4.48	3.43	1.92
T=.02	1.89	3.56	4.55	4.70	4.27	4.55	4.45	3.42	1.91
T=.03	1.87	3.49	4.53	4.68	4.19	4.52	4.42	3.41	1.90
T=.04	1.86	3.46	4.54	4.67	4.18	4.50	4.42	3.39	1.88
T=.05	1.84	3.43	4.51	4.63	4.12	4.47	4.41	3.37	1.86
T=.06	1.85	3.41	4.48	4.62	4.11	4.45	4.38	3.36	1.85
T=.07	1.82	3.37	4.46	4.59	4.08	4.42	4.37	3.34	1.83
T=.08	1.81	3.34	4.43	4.57	4.06	4.41	4.35	3.37	1.84
T=.09	1.80	3.31	4.42	4.56	4.02	4.38	4.33	3.32	1.83
T=.10	1.79	3.29	4.40	4.55	3.98	4.36	4.32	3.31	1.82

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	1.87	3.44	4.56	5.26	5.48	5.26	4.56	3.44	1.87
T=.01	1.89	3.46	4.57	5.28	5.49	5.28	4.57	3.46	1.89
T=.02	1.90	3.48	4.59	5.30	5.50	5.30	4.59	3.48	1.90
T=.03	1.92	3.50	4.61	5.32	5.52	5.32	4.66	3.50	1.92
T=.04	1.93	3.52	4.62	5.34	5.54	5.34	4.62	3.52	1.93
T=.05	1.95	3.54	4.65	5.36	5.56	5.36	4.65	3.54	1.95
T=.06	1.96	3.56	4.67	5.37	5.58	5.37	4.67	3.56	1.96
T=.07	1.98	3.58	4.69	5.38	5.60	5.38	4.69	3.58	1.98
T=.08	2.00	3.60	4.71	5.39	5.62	5.39	4.71	3.60	2.00
T=.09	2.02	3.61	4.73	5.41	5.64	5.41	4.73	3.61	2.02
T=.10	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

La velocidad de propagacion es 0.75

VALORES ESTIMADOS DE LA VARIABLE DE ESTADO

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	-.03	.01	.02	-.11	2.64	.03	-.05	-.04	.02
T=.01	-.01	-.03	-.02	.05	1.69	.14	-.01	.00	.02
T=.02	.03	-.01	.01	.16	1.84	.32	-.00	-.01	-.01
T=.03	.04	.02	.07	.30	1.56	.69	.03	.02	.00
T=.04	.05	.05	.11	.42	1.60	.58	.09	.06	.02
T=.05	.04	.08	.17	.66	1.48	.82	.16	.11	.03
T=.06	.07	.12	.20	.55	1.54	.76	.14	.09	.05
T=.07	.07	.10	.16	.72	1.40	.84	.24	.08	.04
T=.08	.09	.12	.29	.68	1.44	.89	.22	.12	.06
T=.09	.08	.19	.25	.76	1.38	.96	.30	.15	.08
T=.10	.12	.22	.35	.83	1.32	1.04	.36	.19	.09

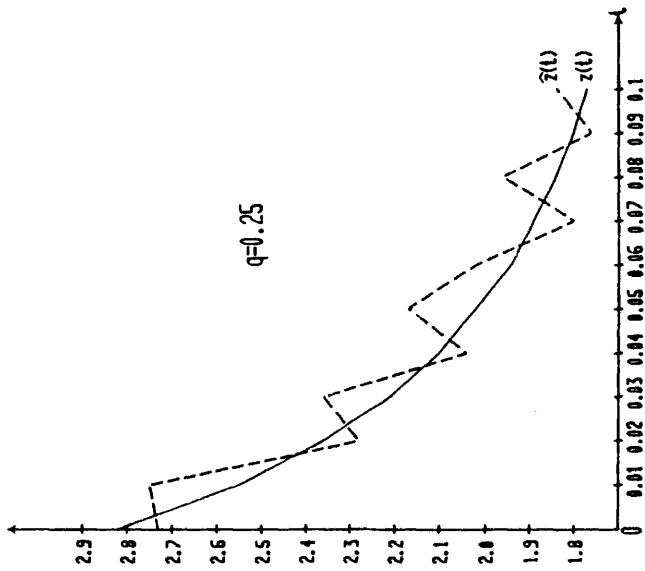
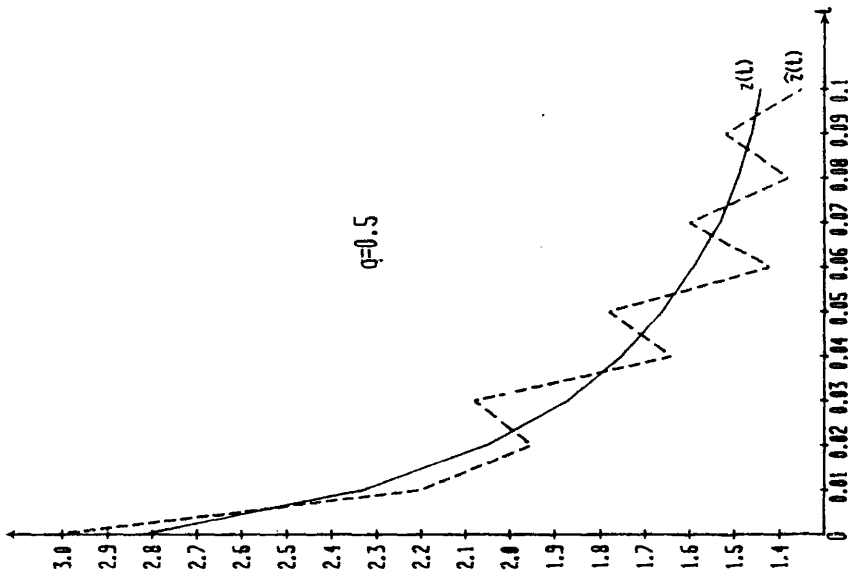
VALORES DE LA LEY DE CONTROL

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	1.80	3.48	4.62	5.08	5.82	4.97	4.71	3.72	1.75
T=.01	1.82	3.50	4.71	5.29	5.74	4.95	4.75	3.65	1.76
T=.02	1.78	3.52	4.58	5.21	5.69	4.91	4.60	3.57	1.75
T=.03	1.76	3.48	4.52	5.16	5.61	4.89	4.49	3.52	1.71
T=.04	1.67	3.44	4.49	5.09	5.55	4.86	4.42	3.45	1.68
T=.05	1.63	3.38	4.39	5.02	5.48	4.84	4.36	3.39	1.66
T=.06	1.58	3.29	4.38	5.03	5.42	4.76	4.25	3.31	1.64
T=.07	1.57	3.27	4.40	4.90	5.31	4.69	4.08	3.20	1.61
T=.08	1.56	3.18	4.21	4.78	5.29	4.63	3.99	3.13	1.57
T=.09	1.54	3.06	4.09	4.55	5.20	4.56	3.91	3.06	1.52
T=.10	1.48	2.99	3.95	4.42	5.16	4.51	3.86	3.01	1.52

FINANCIACION EXTERNA

X=	-1.60	-1.20	-.80	-.40	.00	.40	.80	1.20	1.60
T=.00	1.83	3.38	4.51	5.19	5.41	5.19	4.51	3.38	1.83
T=.01	1.85	3.40	4.53	5.21	5.43	5.21	4.53	3.40	1.85
T=.02	1.86	3.42	4.55	5.23	5.46	5.23	4.55	3.42	1.86
T=.03	1.88	3.44	4.57	5.25	5.48	5.25	4.57	3.44	1.88
T=.04	1.90	3.47	4.60	5.28	5.50	5.28	4.60	3.47	1.90
T=.05	1.91	3.49	4.62	5.30	5.53	5.30	4.62	3.49	1.91
T=.06	1.94	3.51	4.65	5.32	5.55	5.32	4.65	3.51	1.94
T=.07	1.96	3.54	4.67	5.35	5.58	5.35	4.67	3.54	1.96
T=.08	1.98	3.57	4.70	5.38	5.60	5.38	4.70	3.57	1.98
T=.09	2.01	3.59	4.72	5.40	5.63	5.40	4.75	3.59	2.01
T=.10	2.04	3.62	4.75	5.43	5.66	5.43	4.75	3.62	2.04

La velocidad de propagacion es 1.00



APENDICE H

BIBLIOGRAFIA

TEXTOS CONSULTADOS

- * ([1]) **A. Kolmogoroff y S. Fomin:** Elements of the theory of functions and functional analysis. Graylock Press, 1961.
- ([2]) **S. Karlin:** A first course in stochastic processes. Academic Press, 1966.
- * ([3]) **J.L. Doob:** Stochastic Processes. J. Wiley & Sons, 1967.
- * ([4]) **A. Taylor:** Functional Analysis. J. Wiley & Sons, 1967.
- ([5]) **J.L. Lions:** Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des equations aux dérivées partielles. Dunod & Gauthier-Villars, 1968.
- * ([6]) **K.J. Aström:** Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, 1970.
- ([7]) **A. Dou:** Ecuaciones en derivadas parciales. Dossat, S.A., 1970.
- * ([8]) **A. Bensoussan:** Filtrage optimal des systèmes lineaires. Dunod, 1971.
- ([9]) **S. Barnett:** Matrices in control theory. Van Nostrand Reinhold Co., 1971.
- * ([10]) **E. Parzen:** Procesos estocásticos. Paraninfo, 1972.
- * ([11]) **A. Dou y A. Mendizábal:** Ecuaciones en derivadas parciales y su resolución numérica. Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos, de Madrid, 1973.

- ([12]) L. Arnold: Stochastic differential equations.**
J. Wiley & Sons, 1974.
- ([13]) K. Itô y H.P. Mc Kean, Jr.: Diffusion Processes and their
Sample Paths.**
Springer-Verlag, 1974.
- * ([14]) L. Padulo y M.A. Arbib: System Theory.**
W.B. Saunders Company, 1974.
- ([15]) A. Friedman: Stochastic differential equations and applications**
Academic Press, 1976.
- ([16]) T. Kato: Perturbation theory for linear operators.**
Springer-Verlag, 1976.
- * ([17]) R.F. Curtain y A.J. Pritchard: Functional Analysis in Modern
Applied Mathematics.**
Academic Press, 1977.
- * ([18]) K. Yosida: Functional Analysis.**
Springer-Verlag, 1978.
- ([19]) I.I. Gihman y A.V. Skorohod: Controlled Stochastic Processes.**
Springer-Verlag, 1979.
- ([20]) J.W.S. Cassels: Economics for mathematicians.**
London Mathematical Society Lecture
Lecture Note Series Cambridge
University Press, 1981.
- ([21]) A.M. Sinclair: Continuous semigroups in Banach algebras.**
London Mathematical Society
Lecture Notes Series Cambridge
University Press, 1981.

ARTICULOS

- * [1] **W.M. Wonham:** On the separation principle of stochastic control, SIAM Journal Control and Optimization, Noviembre 1968.
- * [2] **W.M. Wonham:** Random differential equations in control theory, Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol 2, 1970. Academic Press.
- * [3] **A. Bensoussan:** On the separation principle for distributed parameter systems, IFAC Conference on Distributed Parameter Systems, Banff, Canada, 1971.
- [4] **A. Lindquist:** On feedback control of linear stochastic systems, SIAM Journal Control and Optimization, Mayo 1973.
- [5] **A.V. Balakrishnan:** Stochastic Optimization Theory in Hilbert Spaces, Applied Mathematics & Optimization, Vol 1, Nº 2, 1974.
- [6] **R.F. Curtain:** Infinite-dimensional filtering, SIAM Review, Julio 1975.
- * [7] **R.F. Curtain:** Infinite-dimensional estimation theory for linear systems, Control Theory Center, Rep 38, University of Warwick, Coventry, Inglaterra, 1975.
- [8] **A. Bensoussan y M. Viot:** Optimal control of stochastic linear distributed parameter systems, SIAM Journal Control, Julio 1975.
- * [9] **R. Triggiani:** Controllability and observability in Banach spaces with bounded operators, SIAM Journal Control, 1975
- * [10] **R. Triggiani:** On the stabilization in Banach spaces, Journal of Applied Mathematics & Mechanics, 1975.

- [11] M.H. Davis: The separation principle for stochastic control via Girsanov solutions, *SIAM Journal Control and Optimization*, Enero 1976.
- * [12] R.F. Curtain y A.J. Pritchard: The infinite-dimensional Riccati equations for systems defined by evolution operator, *SIAM Journal Control and Optimization*, Agosto 1976.
- * [13] M.T. Hilhorst y G.J. Olsder: Optimal control of regional economic growth, *Optimization Techniques*, 8ª IFIP Conference. Würzburg 1977. Springer-Verlag, 1978.
- * [14] R.F. Curtain y A. Ichikawa: The separation principle for stochastic evolution equations, *SIAM Journal Control*, Mayo 1977.
- [15] A. Bagchi y H. Kwakernaak: The separation principle for the control of linear stochastic systems with arbitrary information structure, 8ª IFIP Conference on Optimization Techniques, Würzburg 1977. Springer-Verlag, 1977.
- [16] C.B. Wang y M.H. Davis: Existence of optimal controls for stochastic jump processes, *SIAM Journal Control*, Julio 1979.

