

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Análisis Matemático



TESIS DOCTORAL

Espacios modulares de sucesiones vectoriales : subespacios

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Vicente Peirats Cuesta

DIRECTOR:

Francisco Luis Hernández Rodríguez

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

TP
1988
012



x-53-164997-x

**ESPACIOS MODULARES DE SUCESIONES
VECTORIALES. SUBESPACIOS**

Vicente Peirats Cuesta

Madrid, 1988



BIBLIOTECA

Colección Tesis Doctorales. N.º 17/88

© Vicente Peirats Cuesta

**Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3. 28015 Madrid
Madrid, 1988
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-1613-1988**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO
MADRID

"ESPACIOS MODULARES DE SUCESSIONES
VECTORIALES. SUBESPACIOS".

Memoria presentada para optar
al Grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas.

VICENTE PEIRATS CUESTA.

La presente Memoria ha sido realizada bajo la dirección del Prof. Dr. D. Francisco Luis Hernández Rodríguez a quien agradezco su orientación y apoyo profesional, preciándome de considerarme un amigo suyo.

Extiendo este agradecimiento a los compañeros y profesores del Departamento de Análisis Matemático cuyos consejos y ánimo me han servido para completar esta tarea, especialmente a los Profs. Drs. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero y Fernando Bombal Gordón por su contribución a mi formación. Esta Memoria está dedicada a los que la hicieron posible y en particular a mi familia por su aliento y ayuda.

INDICE

INTRODUCCION	I
CAPITULO I	
Subespacios isomorfos a ℓ^p de un retículo de sucesiones vectoriales $\lambda(E)$	1
CAPITULO II	
Propiedades Riesz-isomorfas de espacios modula res de sucesiones vectoriales.....	30
CAPITULO III	
Espacios de Orlicz de sucesiones con peso. Subespacios en espacios modulares	56
CAPITULO IV	
Espacios de Orlicz minimales. Copias complemen tadas de ℓ^p	101
BIBLIOGRAFIA	133

INTRODUCCION

En esta Memoria nos ocupamos principalmente de la estructura y propiedades isomorfas de subespacios para una amplia clase de espacios de funciones medibles o de sucesiones denominados espacios de Musielak-Orlicz ([Mu], [Mu-0]) ó también modulares en la terminología de [Wo₁], [L-T₄].

Dados dos espacios funcionales E y F, el estudiar si existe o no un subespacio cerrado de F que sea isomorfo a E es un problema clásico del Análisis Funcional. El propio Banach ([Ba], Cap. XII) inició el estudio de este problema, denominado de la "dimensión lineal", para los espacios $L^p([0,1])$ y l^q , y a partir de él se ha originado un gran desarrollo de la Teoría (véase p.e. [Pl]).

A pesar de que los espacios l^p poseen propiedades intrínsecas muy notables (p.e. son primos, es decir isomorfos a sus subespacios complementados, y su base canónica es simétrica y equivalente a todas sus bases bloque), no se conocen caracterizaciones de los espacios de Banach que contienen una copia isomorfa de l^p salvo en casos muy concretos. Así, James determina ([Ja]) cuando un espacio de Banach con una base incondicional posee una copia de c_0 ó l^1 en términos de propiedades de la base (acotadamente completa o reductora).

En el marco de los espacios de Orlicz de sucesiones, Lindenstrauss y Tzafriri caracterizan los espacios l^p que pueden sumergirse en un espacio de Orlicz de sucesiones l^ϕ prefijado en términos de los índices asociados α_ϕ y β_ϕ (en el caso no convexo Kalton [K₁]). Así, l^p contiene una copia de l^p si y solo si $\alpha_\phi \leq p \leq \beta_\phi$. Introduciendo subconjuntos de $C([0,1])$ relacionados con ϕ ($E_{\phi,1}$ y $C_{\phi,1} = \overline{\text{co}}(E_{\phi,1})$), también Lindenstrauss y Tzafriri caracterizaron las copias isomorfas de l^p en un espacio l^ϕ y probaron la existencia de espacios de Orlicz de sucesiones que a pesar de contener copias de l^p para p variando en un intervalo, no contienen ninguna copia complementada de l^p . Esto último denota que la estructura de los espacios de Orlicz de sucesiones es más compleja que la de otros espacios "clásicos" de sucesiones, como los de Lorentz $d(w,p)$ en los que siempre se tiene una copia complementada de l^p (véase [L-T₄]).

La clase de los espacios de Musielak-Orlicz fue introducida por Musielak y Orlicz ([Mu-O]) y Nakano ([Na]) y representa a una amplia colección de espacios modulares abstractos en el sentido de Nakano ([Na]) vía el Teorema de Drewnowski-Orlicz ([Mu], [W₁]). Los espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones λ^M engloban varios tipos de espacios de sucesiones como los de Orlicz λ^ϕ ([L-T₁]), de Orlicz de sucesiones con pesos $\lambda^\phi(w_n)$ ([D], [Wa], [H₁]), de Nakano λ^{p_n} ([Si], [Na]), de Rosenthal $X_{p,r,w}$ ([Wo₂], [L-T₅]) etc ...

El estudio de subespacios de los espacios modulares de sucesiones es más difícil y complicado que el de los espacios de Orlicz de sucesiones (véase [Wo₁], [L-T₄]), debido en parte a que la base canónica es una base incondicional no simétrica.

Uno de los problemas tratados en esta Memoria es determinar si en espacios modulares de sucesiones vectoriales $\lambda^M(E)$ pueden "separarse" las copias de λ^p . Mientras que para los espacios de funciones vectoriales no es en general cierto (p.e. para $L^p(\mathcal{L}^q)$ con $2 < p < q$ - [Ra], [L-T₅] -) se alcanza un resultado afirmativo para F-retículos de sucesiones vectoriales localmente acotados y orden continuos $\lambda(E)$ incluyendo este marco a los espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales cuya estructura es diferente del caso escalar.

Una segunda opción ante los problemas anteriores consiste en suponer que el espacio de Banach E es un retículo de Banach y estudiar entonces las propiedades Riesz-isomorfas (p.e. contener una copia Riesz-isomorfa de λ^p) de los F-retículos $\lambda(E)$ o $\lambda^M(E)$ correspondientes. Esta forma de considerar el tema está en la línea de los trabajos de Zaanen, Class, Wnuk etc... ([Z], [W₁], [C-Z]).

El estudio de los subespacios de espacios de Orlicz de funciones L^ϕ , fue iniciado por Lindenstrauss y Tzafriri (véase también [Ni] y [J-M-S-T]) y presenta mayores dificultades que el caso de sucesiones. En particular, es interesante determinar que espacios λ^p son isomorfos o no a subespacios complementados de un espacio de Orlicz $L^\phi([0,1])$ prefijado. Uno de los objetivos de esta Memoria será probar que la solución en algunos casos se reduce a $p=2$. Es bien conocido que utilizando las funciones de Rademacher podemos sumergir λ^2 de forma complementada en cualquier espacio de Orlicz

reflexivo $L^\phi([0,1])$ ([L-T₅]).

Al considerar los espacios de Orlicz de funciones $L^\phi([0,1])$, es importante estudiar los subespacios generados por una sucesión básica formada por funciones características disjuntas. Estos subespacios, complementados si ϕ es convexa, admiten una representación mediante espacios de Orlicz de sucesiones con pesos de suma finita $\ell^\phi(w_n)$. Por ello, un objetivo más de esta Memoria es establecer cuando dichos espacios son isomorfos a espacios de Orlicz de sucesiones ℓ^ψ y en particular a ℓ^p , y la relación con los subconjuntos E_ϕ^∞ y C_ϕ^∞ de funciones de Orlicz introducidos por Lindenstrauss y Tzafriri. Recordemos que un espacio de Orlicz convexo de funciones $L^\phi([0,1])$ tiene una copia de un espacio de Orlicz de sucesiones ℓ^ψ , generada por una sucesión básica de elementos disjuntos si y solo si ψ es equivalente a una función de C_ϕ^∞ ; si además ψ pertenece salvo equivalencia a E_ϕ^∞ , la copia es complementada.

El último problema planteado aumenta en complejidad si sustituimos los espacios de Orlicz de sucesiones con peso por otros espacios modulares de sucesiones, debiendo particularizar a espacios de Musielak-Orlicz concretos como los de Nakano ([Na], [Si]).

A continuación resumimos los contenidos principales de cada uno de los cuatro capítulos en que se divide la Memoria.

En el primer Capítulo se determinan condiciones necesarias y suficientes para que un F-retículo de sucesiones vectoriales $\lambda(E)$ tenga una copia isomorfa de ℓ^p , para $0 < p < \infty$, o de c_0 .

Si λ es un retículo de sucesiones escalares localmente acotado dotado de una F-norma ρ orden continua y $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach entonces $\lambda(E)$ es el espacio de las sucesiones vectoriales $(x_n)_1^\infty$ tales que $(\|x_n\|)_1^\infty \in \lambda$ provisto de la F-norma definida por $\rho((\|x_n\|)_1^\infty)$. Los espacios de Orlicz $\ell^\phi(E)$, de Musielak-Orlicz $\ell^M(E)$ y de Lorentz $d(w,p)(E)$ de sucesiones vectoriales quedan incluidos, entre otros, en esta definición.

Imponemos a E , en una primera aproximación que posea una base incondicional con lo que el espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones $\ell^M(E)$ también la tiene. Entonces utilizando la caracterización de James de los espacios con una base incondicional que poseen una copia de c_0 o ℓ^1 , se determina cuando el espacio $\ell^M(E)$ tiene una copia de c_0 o de ℓ^1 .

A continuación, estudiamos las copias isomorfas de ℓ^p para p arbitrario en $\lambda(E)$, mediante técnicas de perturbación de bases. Así, establecemos que para espacios de Banach arbitrarios E las copias de ℓ^p y c_0 en $\lambda(E)$ se pueden separar; es decir $\lambda(E)$ tiene una copia isomorfa de ℓ^p si y solo si λ o E tienen una copia de ℓ^p . Su demostración se basa en que un subespacio cerrado de $\lambda(E)$ es isomorfo a un subespacio de $E \otimes \dots \otimes E$ para algún j o contiene un subespacio isomorfo al generado por una base bloque canónica de λ . Se dan luego aplicaciones a los casos concretos de espacios de Orlicz y de Müsielak-Orlicz. En particular, la separación de copias de c_0 en $\ell^M(E)$ mejora un resultado de Kaminska ([Ka]).

El resto del Capítulo se dedica a obtener otras propiedades isomorfas de los espacios $\lambda(E)$. Así, utilizando un resultado de Raynaud ([Ra]), se prueba que aunque el espacio de Orlicz de sucesiones $\ell^p(\ell^q)$ posee las mismas copias de ℓ^p que ℓ^p , dichos espacios no son isomorfos. Más aún, en un caso muy general el espacio $\ell^p(\ell^q)$ no es un espacio de Orlicz de sucesiones escalares.

En el segundo Capítulo, estudiamos propiedades Riesz-isomorfas de los espacios $\lambda(E)$ y $\ell^M(E)$ cuando E es un retículo de Banach.

Si E_a designa el máximo ideal de E en que la norma es orden continua, se tiene que $\ell^M(E)_a = h^M(E_a)$ donde $h^M = \ell^M_a$. Se deduce entonces que el espacio $\ell^M(E)$ tiene una copia Riesz-isomorfa de ℓ^∞ si y solo si ℓ^M o E la tienen. A continuación suponiendo que ℓ^M sea un espacio de Banach damos condiciones suficientes para que la norma de Luxemburg canónica en $\ell^M(E)$ sea de Fatou y para que el espacio $\ell^M(E)$ posea la propiedad de Levi (vease [Al]). Esto permite conocer que espacios $\ell^M(E)$ poseen copias Riesz-isomorfas de c_0 o ℓ^1 y en particular por un resultado de Niculescu ([N]) copias complementadas de ℓ^1 .

A continuación probamos que los subretículos X separables, σ -orden continuos y no σ -Levi de un retículo de Banach Y que sea σ -Levi, no son complementados. Aplicamos este resultado a la situación de los espacios $h^M(E)$ y $\ell^M(E)$ cuando $h^M \neq \ell^M$ es decir M no verifica la condición Δ_2 generalizada ([Mu]).

En la parte final, se caracterizan los ideales de $h^M(E)$ y se determina que algún ideal de $h^M(E)$ es isomorfo a ℓ^p si y solo si

h^M o E poseen un ideal isomorfo a l^p .

En la primera parte del tercer Capítulo se considera una clase importante de espacios de Musielak-Orlicz, la de los espacios de Orlicz de sucesiones con pesos $l^\phi(w_n)$ donde $w_n \rightarrow 0$, ó $w_n \rightarrow \infty$ ($[D]$, $[W_a]$, $[H_1]$, ...). Nuestro propósito es, fijada una función de Orlicz ϕ , analizar los espacios de Orlicz de sucesiones l^ψ (en particular los espacios l^p) que pueden ser representados isomórficamente como espacios de Orlicz de sucesiones con pesos $l^\phi(w_n)$ para $\sum w_n < \infty$. En esa situación, l^ψ se obtiene como subespacio del espacio de Orlicz de funciones $L^\phi([0,1])$, siendo además complementado cuando nos restringimos al caso de funciones de Orlicz convexas ϕ .

Se establece que, dado $0 < p < \infty$, el espacio l^p es isomorfo a un cierto $l^\phi(w_n)$ con $\sum w_n < \infty$ (y decimos que ϕ tiene la propiedad W^p en ∞) si y sólo si existe una función $F \in E_\phi^\infty$ tal que F es equivalente a t^p en 0 . Esta caracterización es válida también para espacios l^ψ cuando el conjunto E_ϕ^∞ no contiene funciones convexas en un entorno de 0 . A continuación, estudiamos el conjunto P_ϕ^∞ de los números reales $p > 0$ tales que ϕ tiene la propiedad W^p en ∞ , dando ejemplos de funciones ϕ sin variación regular para las que P_ϕ^∞ es todo el intervalo $[\alpha_\phi^\infty, \beta_\phi^\infty]$ (posteriormente se probará que P_ϕ^∞ puede ser también vacío o no conexo). Se muestran varias condiciones analíticas sobre la función ϕ que aseguran la propiedad W^p en ∞ como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \phi'(x)}{\phi(x)} = p$.

Los resultados obtenidos para espacios de Orlicz de sucesiones con pesos $l^\phi(w_n)$ no se extienden directamente a otros espacios modulares de sucesiones. Sin embargo, si l^{M_1} es un espacio de Musielak-Orlicz convexo tal que $M = (\phi_n)_1^\infty$ verifica la condición Δ_2 -uniforme, introducida por Woo, se dan condiciones suficientes para que l^{M_1} tenga una copia Riesz-isomorfa de un espacio de Orlicz l^ϕ o una copia isomorfa de algún espacio l^p . Esto se efectúa introduciendo un conjunto convexo de funciones de Orlicz incluido en $C([0,1])$ y relacionado con las funciones ϕ_n . Cuando en particular consideramos los espacios de Nakano de sucesiones $l^{(p_n)}$ se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que un espacio l^p este contenido isomórficamente y completamente en $l^{(p_n)}$.

El Capítulo concluye estableciendo relaciones entre los espa

cios modulares de funciones y de sucesiones en el sentido siguiente: todo subespacio cerrado de un espacio modular de funciones convexo $L^M([0,1])$ posee una copia isomorfa de un espacio modular de sucesiones ℓ^N y en particular de algún ℓ^P , utilizando un resultado de Woo ([Wo₁]). Asimismo se dan condiciones suficientes para que un espacio de Nakano de funciones $L^{p(t)}$ tenga una copia isomorfa de ℓ^P .

En el cuarto y último capítulo se introduce la clase de las funciones de Orlicz minimales, a las que se asocian los correspondientes espacios de sucesiones y de funciones minimales: $\ell^\phi, \ell^\phi(w_n)$ y $L^\phi([0,1])$. El comportamiento de estos espacios resuelve algunas cuestiones planteadas anteriormente y muy especialmente en lo que hace referencia a la existencia de subespacios complementados isomorfos a ℓ^P .

La idea para la introducción de estas funciones de Orlicz minimales es considerar a $E_{\phi,1}^\infty$ como subconjunto de $C([0, \infty))$ dotado de la topología compacta-abierta. Una función minimal es aquella que verifica $E_{\phi,1}^\infty = E_{\psi,1}^\infty, \forall \psi \in E_{\phi,1}^\infty$. Además de comprobar su existencia se establece la relación con el concepto dado previamente por Lindenstrauss y Tzafriri en [L-T₄] para espacios de sucesiones ℓ^ϕ y ϕ convexa.

En una primera parte del Capítulo se obtienen diversas propiedades de las funciones minimales sin hacer referencia a los espacios que generan y que serán utilizadas posteriormente. Por ejemplo, si ϕ es una función de Orlicz minimal entonces $E_\phi^\infty = E_{\phi,1}^\infty = E_{\phi,1} = E_\phi$ y los índices de la función en el 0 y en el ∞ coinciden ($\alpha_\phi^\infty = \alpha_\phi$ y $\beta_\phi^\infty = \beta_\phi$). Más aún mientras que en el caso general si $\psi \in E_\phi^\infty$ entonces $[\alpha_\psi^\infty, \beta_\psi^\infty] \subset [\alpha_\phi^\infty, \beta_\phi^\infty]$ aquí los índices de las funciones de E_ϕ^∞ son los mismos que los de ϕ . También se establece la relación de este concepto con el de conjugada de Young o el de simétrica de una función de Orlicz.

Los espacios de Orlicz de sucesiones con peso $\ell^\phi(w_n)$ para una función de Orlicz minimal no equivalente a t^p no son nunca isomorfos a ℓ^P para ningún $0 < p < \infty$. Además, si ϕ es equivalente a una función convexa o a t^p para $0 < p < 1$, todos los espacios $\ell^\phi(w_n)$ son isomorfos al propio ℓ^ϕ ; en el caso contrario hay infinitos no isomorfos entre sí e incluso no tienen por qué ser necesariamente isomorfos.

VII.-

a espacios de Orlicz de sucesiones ℓ^ψ . En ambos casos, los espacios de Orlicz minimales $\ell^\phi(w_n)$ y ℓ^ϕ no son localmente α_ϕ^∞ -convexos (lo que resuelve como consecuencia un problema planteado en la teoría de Galbes ([H₁])).

Pasamos después a estudiar los espacios de Orlicz de funciones $L^\phi([0,1])$ para ϕ minimal. Por la relación existente entre los espacios L^ϕ y $\ell^\phi(w_n)$ para $\sum w_n < \infty$ se obtiene para funciones de Orlicz minimales convexas que el espacio $L^\phi([0,1])$ tiene una copia complementada de ℓ^ϕ (como ocurre para L^p con $p \geq 1$). Asimismo se ofrece un resultado fundamental sobre la estructura de los subespacios de $L^\phi([0,1])$, para ϕ minimal convexa, que son isomorfos a un espacio de Orlicz de sucesiones ℓ^ψ ; si $L^\phi([0,1])$ tiene una copia isomorfa de ℓ^ψ con $\psi > 2$ entonces existe en $C_{\psi,1} = \overline{\text{co}} E_{\psi,1}$ una función F equivalente en 0 a alguna función de $C_{\phi,1}$. La demostración de este Teorema se basa en el método generalizado de Kadec-Pelczyński ([L-T₅]) y en técnicas de perturbación de bases. Particularizando al caso $\psi(t) = t^p$ y analizando la prueba del resultado anterior, se obtiene que $L^\phi([0,1])$ tiene una copia isomorfa (resp. complementada) de ℓ^p para $p > 2$ si y solo si ℓ^ϕ la posee.

Utilizando ese hecho, resultados anteriores ([L-T₄]) y argumentos de dualidad se prueba la existencia de espacios de Orlicz de funciones $L^\phi([0,1])$ que no contienen ninguna copia complementada de ℓ^p excepto para $p=2$. Este resultado constituye una extensión del de Lindenstrauss y Tzafriri ([L-T₄]) para espacios de sucesiones.

Las notaciones y terminología empleadas son las usuales en los textos de Análisis Funcional. Las referencias bibliográficas se citan de modo literal. En cuanto a las referencias internas, se remite al capítulo y apartado, omitiéndose el primero cuando se trata del mismo capítulo.

CAPITULO I

SUBESPACIOS ISOMORFOS A \mathbb{Z}^p DE UN RETICULO DE
SUCESIONES VECTORIALES $\lambda(E)$.

Comenzamos este Capítulo precisando algunas definiciones y resultados básicos relativos a la teoría de bases de Schauder y a los espacios de Orlicz y Musielak-Orlicz de sucesiones y funciones. Los espacios vectoriales que consideramos lo son siempre sobre un cuerpo $K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} .

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de un F-espacio X , es decir un espacio vectorial topológico metrizable y completo, es una base de Schauder (o simplemente una base) si cada elemento $x \in X$ se puede representar de forma única como suma de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ para una sucesión de escalares $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es una sucesión básica si y solo si es base de Schauder de $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$. Dos bases $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de Y son equivalentes si tienen el mismo dominio de convergencia es decir si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge en X si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ converge en Y . En ese caso $T(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ define un isomorfismo topológico de X sobre Y . Una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es incondicional si para $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge incondicionalmente. Entonces, $(x_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X para cada permutación π de los enteros. Si además, las bases $(x_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes para cualquier permutación, diremos que la base es simétrica. Si una base es incondicional y equivalente a sus subsucesiones, es subsimétrica. Se tienen las siguientes implicaciones:

base simétrica \implies base subsimétrica \implies base incondicional \implies
 \implies base de Schauder.

Una base bloque de la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X es una sucesión

básica u_i definida por

$$u_i = \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} a_j x_j$$

para alguna sucesión creciente $(n_i)_1^\infty$ de naturales, y escalares $a_j \in \mathbb{K}$. Caracterizaciones para los diferentes tipos de bases así como propiedades generales de los F-espacios o de los espacios de Banach que poseen una base de Schauder se hallan en los textos de Marti ([M]), Lindenstrauss y Tzafriri ([L-T₄]) y Rolewicz ([R]).

Una función de Orlicz es una función ϕ de $[0, \infty)$ en $[0, \infty)$ no decreciente, continua a la izquierda en $(0, \infty)$ y continua en 0 tal que $\phi(t) > 0$ si $t > 0$ y $\phi(0) = 0$. Salvo mención expresa suponemos pues que no es degenerada (es decir no nula en un entorno de 0 ni tomando valores infinitos).

Diremos que ϕ cumple la condición Δ_2 ó condición Δ_2 en $[0, \infty)$ si y solo si existe $K > 0$ tal que $\phi(2t) \leq K\phi(t)$ si $t \geq 0$. Si la desigualdad anterior se verifica para $t \geq t_0 > 0$ (respectivamente $t \leq t_0$), diremos que la función ϕ cumple la condición Δ_2 en ∞ (respectivamente en 0). Dos funciones de Orlicz son equivalentes ó equivalentes en $[0, \infty)$ (respectivamente en ∞ , en 0) si y solo si existen $K, s > 0$ tales que $K^{-1} \psi(s^{-1}t) \leq \phi(t) \leq K \psi(st)$ para todo $t \geq 0$ (respectivamente $t \geq t_0, t \leq t_0$). Lo denotaremos por $\phi \sim \psi$ (respectivamente $\phi \overset{\infty}{\sim} \psi$, $\phi \overset{0}{\sim} \psi$).

Una función de Orlicz es p-convexa (respectivamente p-cóncava) para algún $0 < p < \infty$ si y solo si la función $\phi(t^{1/p})$ es convexa (respectivamente cóncava). Estas propiedades pueden definirse también en un entorno de 0 ó de ∞ . Los índices de una función ϕ en 0, inferior α_ϕ y superior $\beta_\phi([L-T_4], [K_1])$ están definidos por:

$$\begin{aligned} \alpha_\phi &= \sup\{ p > 0: \sup_{\lambda, t \leq 1} \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)t^p} < \infty \} \\ \beta_\phi &= \inf\{ p > 0: \inf_{\lambda, t \leq 1} \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)t^p} > 0 \} \end{aligned} \quad (1)$$

De la misma forma se definen los índices en ∞ , α_ϕ^∞ y β_ϕ^∞ :

$$\begin{aligned} \alpha_\phi^\infty &= \sup\{ p > 0: \sup_{\lambda, t \geq 1} \frac{\phi(\lambda)t^p}{\phi(\lambda t)} < \infty \} \\ \beta_\phi^\infty &= \inf\{ p > 0: \inf_{\lambda, t \geq 1} \frac{\phi(\lambda)t^p}{\phi(\lambda t)} > 0 \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Una función de Orlicz ϕ cumple la condición Δ_2 en 0 (respectivamente en ∞) si y solo si $\beta_\phi < \infty$ (respectivamente $\beta_\phi^\infty < \infty$). La función ϕ es de variación regular de potencia p en 0 (respectivamente ∞) si y solo si $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)}$ (respectivamente $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)}$) es de la forma t^p en un entorno de 0 (respectivamente de ∞). En ese caso $\alpha_\phi = \beta_\phi = p$ (respectivamente $\alpha_\phi^\infty = \beta_\phi^\infty = p$). Las definiciones (1) y (2) coinciden con los índices definidos por Matuszewska y Orlicz en [M-O] (véase [M1] pag. 20). Los índices de una función de Orlicz, por ejemplo en el 0, están determinados también por :

$$\alpha_\phi = \sup \left\{ a_\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\psi'(t)}{\psi(t)} : \psi \text{ es derivable y } \psi \stackrel{a}{\sim} \phi \right\}$$

$$\beta_\phi = \inf \left\{ b_\psi = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{t\psi'(t)}{\psi(t)} : \psi \text{ es derivable y } \psi \stackrel{a}{\sim} \phi \right\}$$

Obsérvese que en general $a_\phi \neq \alpha_\phi$ y $b_\phi \neq \alpha_\phi$ (véase por ejemplo [M1], Ejemplo 10).

Si ϕ es una función convexa, definimos su conjugada de Young ϕ^* por:

$$\phi^*(t) = \sup_{0 < s < \infty} \{ ts - \phi(s) \}$$

La función ϕ^* es convexa. Además $(\phi^*)^* = \phi$. Los índices de una función y los de su conjugada están ligados por la siguiente relación:

$$\frac{1}{\alpha_\phi} + \frac{1}{\beta_{\phi^*}} = 1, \quad \frac{1}{\alpha_{\phi^*}} + \frac{1}{\beta_\phi} = 1$$

Si $M = (\phi_n)_1^\infty$ es una sucesión de funciones de Orlicz decimos que M es una función de Musielak-Orlicz definida sobre $\mathbb{N} \times [0, \infty)$. El espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones ℓ^M $([Mu], [wo_1])$ es el espacio vectorial de las sucesiones escalares $x = (x_n)_1^\infty$ verificando que:

$$m\left(\frac{x}{s}\right) = \sum_1^\infty \phi_n\left(\frac{|x_n|}{s}\right) < \infty$$

para algún $s > 0$, con la topología inducida por la F-norma:

$$\|x\|_M = \inf \{s > 0: m(\frac{x}{s}) \leq s\}.$$

En el subespacio separable $h^M = \{(x_n)_1^\infty \in l^M: m(\frac{x}{s}) < \infty, \forall s > 0\}$ de l^M , los vectores canónicos $(e_n)_1^\infty$ (que en los espacios de sucesiones identificamos con los vectores $(0, \dots, 1, 0, \dots)$) forman una base incondicional. Si $\phi_n = \phi$, $\forall n=1, 2, \dots$ obtenemos los espacios de Orlicz de sucesiones l^ϕ y h^ϕ . La sucesión $(e_n)_1^\infty$ es una base simétrica de h^ϕ . Si $\phi(t) = t^p$, obtenemos los espacios de sucesiones l^p para $0 < p < \infty$.

Una condición necesaria y suficiente para que $l^M = h^M$ es que M cumpla la condición Δ_2 generalizada esto es que existan $\delta, K > 0$ y una sucesión $\sum_1^\infty a_n < \infty$ tal que si $0 \leq \phi_n(t) < \delta$ entonces:

$$\phi_n(2t) \leq K \phi_n(t) + a_n$$

para $n=1, 2, \dots$. De la misma forma $l^\phi = h^\phi$ si y solo si ϕ cumple la condición Δ_2 en 0. Si $l^M \neq h^M$ entonces el espacio l^M (resp. h^M) tiene una copia isomorfa de l^∞ (resp. c_0).

En el estudio de las propiedades isomorfas de los espacios de Orlicz y de Musielak-Orlicz pueden añadirse hipótesis adicionales sobre el comportamiento de las funciones de Orlicz sin perder generalidad. Por ejemplo suponer que los espacios están generados por funciones derivables estrictamente crecientes. También podemos admitir implícitamente que $\phi_n(1) = 1$, $\forall n=1, 2, \dots$. En efecto, si $\phi_n(b_n) = 1$ y definimos ψ_n por $\psi_n(t) = \phi_n(b_n t)$, $\forall t \geq 0$, entonces $\psi_n(1) = 1$ y el operador $T((\lambda_n)_1^\infty) =$

$= (b_n \lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ define un isomorfismo topológico de $\ell^{(\psi_n)}$ sobre $\ell^{(\phi_n)}$.

Si M y N son dos funciones de Musielak-Orlicz entonces $\ell^M = \ell^N$ en sentido conjuntista y topológico si y solo si M y N son equivalentes en sentido generalizado, es decir existen $\delta, K_1, K_2, K_3, K_4 > 0$ tales que:

$$0 \leq \phi_n(t) < \delta \Rightarrow \psi_n(t) \leq K_1 \phi_n(K_2 t) + a_n$$

$$0 \leq \psi_n(t) < \delta \Rightarrow \phi_n(t) \leq K_3 \psi_n(K_4 t) + b_n$$

para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. En el caso de espacios de Orlicz $\ell^\phi = \ell^\psi$ si y solo si $\phi \sim \psi$ y si solo si las bases canónicas de h^ϕ y h^ψ son equivalentes.

Si las funciones ϕ_n son convexas para cada natural n diremos que M es una función de Musielak-Orlicz convexa. En ese caso ℓ^M es un espacio de Banach cuya topología viene definida por la norma de Luxemburg que denotaremos igualmente por $\|\cdot\|_M$:

$$\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_M = \inf \left\{ s > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \left(\frac{|x_n|}{s} \right) \leq 1 \right\}.$$

Si M es una función de Musielak-Orlicz convexa, entonces el dual de h^M es canónicamente isomorfo a ℓ^{M^*} siendo $M^* = (\phi_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la función de Musielak-Orlicz formada por las conjugadas de Young de las funciones componentes de M . En particular $(h^\phi)' \cong \ell^{\phi^*}$. Además, el espacio ℓ^ϕ es reflexivo si y solo si $1 < \alpha_\phi \leq \beta_\phi < \infty$.

Un F-espacio X es localmente acotado (resp. p-convexo para $0 < p \leq 1$) si posee una base de entornos de 0 acotados (respectivamente p-convexos). La topología de un espacio localmente p-convexo puede determinarse por una p-norma ([R], pag.90). El teorema de Aoki-Rolewicz nos dice que un F-espacio es localmente acotado si y solo si es localmente p-convexo para algún $0 < p \leq 1$. Un espacio de Orlicz L^ϕ es localmente acotado si $\alpha_\phi > 0$ y localmente p-convexo si y solo si ϕ es equivalente en 0 a una función p-convexa (Teorema de Mazur-Orlicz, vease p.e. [R] pag. 116).

En un contexto más general pueden definirse los espacios de Musielak-Orlicz $L^M(\Omega, \Sigma, \mu)$ siendo en este caso M una función de Musielak-Orlicz definida sobre $\Omega \times [0, \infty)$ ([Mu], [Mu-0]). Si μ es la medida discreta en \mathbb{N} obtenemos los espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones y si μ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ (resp. en $[0, \infty)$) obtenemos los espacios de Musielak-Orlicz de funciones $L^M([0, 1]) = L^M$ (resp. $L^M([0, \infty))$). Los espacios de funciones que consideraremos con mayor amplitud serán los de Orlicz $L^\phi([0, 1]) \equiv L^\phi$. Más concretamente, el espacio L^ϕ (resp. L^ϕ_μ) es el de las funciones escalares μ -medibles (siendo μ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$), con la igualdad en c.t.p., tales que

$$\int_0^1 \phi\left(\frac{|f(t)|}{s}\right) dt < \infty$$

para algún $s > 0$ (resp. para todo $s > 0$). El espacio L^ϕ está

dotado de la topología inducida por la F-norma:

$$\|f\|_F = \inf \left\{ s > 0 : m\left(\frac{f}{s}\right) \leq s \right\}$$

El subespacio cerrado L_0^ϕ coincide con L^ϕ cuando ϕ verifica la condición Δ_2 en ∞ . El espacio L^ϕ es localmente acotado si y solo si $\alpha_\phi^\infty > 0$ y localmente p-convexo si ϕ es equivalente en ∞ a una función p-convexa. Si ϕ es convexa, el dual de L_0^ϕ es canónicamente isomorfo a L^{ϕ^*} . Más aún, el espacio L^ϕ es reflexivo cuando $1 < \alpha_\phi^\infty \leq \beta_\phi^\infty < \infty$.

En la terminología de diversos autores ([Mu-O], [Wq]), los espacios de Musielak-Orlicz se denominan espacios modulares (una acepción más general de este concepto puede encontrarse en [Mu] ó [R]).

En este capítulo por λ designamos un subretículo sólido de $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dotado de una topología vectorial que hace a λ un F-retículo. Es decir en λ está definida una F-norma (de Riesz) ρ que verifica para $a = (x_n)_1^\infty$, $b = (y_n)_1^\infty \in \omega$ que

$$\left. \begin{array}{l} |x_n| \leq |y_n| \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ b \in \omega \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in \omega \\ \rho(a) \leq \rho(b) \end{array} \right.$$

Como ejemplo de espacios de sucesiones λ podemos citar los espacios de sucesiones de Lorentz ([L-4] 4d) y los ya

definidos de Musielak-Orlicz que incluyen los de Orlicz, los de Rosenthal $x_{p,r,\omega}$ ($[L-T_4]$, $[W_0]$) y los de Nakano ($[Na]$), (véase también $[K\ddot{O}]$ y $[K-G]$).

Suponemos siempre que el retículo λ es localmente acotado es decir que la topología está definida por el p-funcional de Minkowski de un entorno sólido, p-convexo y acotado de 0 para algún $0 < p \leq 1$. Para los espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones h^M condiciones concretas que garantizan que es localmente acotado aparecen en $[T_3]$.

El espacio λ es orden continuo cuando para cualquier sucesión $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ en λ se tiene que:

$$|a_{j_n}| \rightarrow 0, \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0 \text{ en } \lambda.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ denota un espacio de Banach arbitrario, consideramos el espacio de sucesiones $\lambda(E)$ con valores en E definido por:

$$\lambda(E) = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}} : (\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \in \lambda \} \quad ((1))$$

y dotados de la F-norma natural:

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \rho((\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}).$$

En particular si λ es un espacio de Banach también $\lambda(E)$ lo es. Para $\lambda = \ell^M$ o h^M , obtenemos los espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales, $\ell^M(F)$ y $h^M(E)$.

Estudiamos primero propiedades generales de $\lambda(E)$:

1. Proposición.

Sea E un espacio de Banach. Entonces:

- 1.1. El espacio $\lambda(E)$ tiene copias complementadas de λ y de E.
- 1.2. Si λ es orden continuo, entonces $\lambda(F)$ es separable si y solo si F lo es.

Demostración.

1.1. Sea u un vector unitario de E. Entonces por la definición (1), se tiene para $(\lambda_n)_1^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que:

$$(\lambda_n)_1^\infty \in \lambda \text{ si y solo si } (\lambda_n u)_1^\infty \in \lambda(E)$$

De esta forma, la aplicación T de λ en $\lambda(F)$ dada por $T((\lambda_n)_1^\infty) = (\lambda_n u)_1^\infty$ define un isomorfismo de λ sobre $T(\lambda)$. La copia de λ es complementada. En efecto, si P es una proyección continua de E sobre $[u] = \mathbb{K}u$ entonces:

$$S((x_n)_1^\infty) = (P(x_n))_1^\infty$$

para $(x_n)_1^\infty \in \lambda(F)$, define una proyección continua de $\lambda(E)$ sobre $T(\lambda)$. El resultado para E es inmediato.

1.2. Supongamos que $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión densa en E. Sea $a = (a_n)_1^\infty \in \lambda(E)$. Como $(0, \dots, 0, \|a_n\|, \|a_{n+1}\|, \dots) \neq 0$ y λ es orden continuo, existe $n(\epsilon)$ tal que:

$$\rho(a - (a_1, \dots, a_{n(\epsilon)}, 0, \dots)) = \rho((0, \dots, 0, \|a_{n(\epsilon)+1}\|, \dots)) < \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora bien, al ser $(x_i)_1^\infty$ denso en E y ser $E \otimes \dots \otimes E$ isomorfo a $\{(u_1, \dots, u_{n(\epsilon)}, 0, \dots, 0) ; u_i \in E\} \subset \lambda(E)$, existen $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n(\epsilon)}}$ tales que:

$$\rho((a_1, \dots, a_{n(\epsilon)}, 0, \dots) - (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n(\epsilon)}}, 0, \dots)) < \frac{\epsilon}{2}$$

En definitiva $\rho(a - (x_{i_1}, \dots, x_{i_{n(\epsilon)}}, 0, \dots)) < \epsilon$. Por tanto $\lambda(E)$ tiene un conjunto denso indexado por \mathbb{N} y es separable. ///

Consideremos a continuación espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales $\lambda^M(E)$ cuando M es una función de Musielak-Orlicz convexa y F posee una base de Schauder.

2. Proposición.

Sea E un espacio de Banach con una base de Schauder (resp. incondicional) y M una función de Musielak-Orlicz convexa. Entonces, el espacio $h^M(E)$ posee una base de Schauder (resp. incondicional).

Demostración.

Si $(x_i)_1^\infty$ es una base de Schauder de E, denotamos entonces a $(0, \dots, x_i^j, 0, \dots)$ por x_{ij} . Las combinaciones lineales de los elementos x_{ij} son densa en $h^M(E)$ con la misma demostración que en la Proposición 1.2. Sea ahora α la constante base de $(x_i)_1^\infty$ y supongamos $s > 0$. Se tiene entonces, si $M = (\phi_r)_1^\infty$ que:

$$\sum_{n=1}^r \phi_n(s \|\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_{i_n} x_i\|) \leq \sum_{n=1}^r \phi_n(s\alpha \|\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_{i_n} x_i + \sum_{i=k_n+1}^{h_n} \lambda_{i_n} x_i\|) + \sum_{n=r+1}^m \phi_n(s\alpha \|\sum_{i=1}^{h_n} \lambda_{i_n} x_i\|),$$

y por tanto que:

$$\|(\sum_{i=1}^{k_1} \lambda_{i_1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{k_r} \lambda_{i_r} x_i, 0, \dots)\|_M \leq \alpha \|(\sum_{i=1}^{h_1} \lambda_{i_1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{h_m} \lambda_{i_m} x_i, 0, \dots)\|_M$$

Del criterio 1.a.3 de [L-T₄] se deduce entonces que $(x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de $h^M(E)$ (consideramos la ordenación convencional 11,12,21,22,13 etc ...).

Supongamos ahora que la base $(x_i)_1^{\infty}$ es incondicional. Recordemos que una base es incondicional si son base de Schauder cada una de sus permutaciones. Efectuemos una reordenación de $(x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$. La sucesión obtenida así es total y es base pues, para $s > 0$ y F_n, F'_n, L, L' subconjuntos finitos de \mathbb{N} con $F_n \subset F'_n$ y $L \cap L' = \emptyset$ se tiene que:

$$\sum_{n \in L} \phi_n(s \|\sum_{i \in F_n} \lambda_{i_n} x_i\|) \leq \sum_{n \in L} \phi_n(s\beta \|\sum_{i \in F'_n} \lambda_{i_n} x_i\| + \sum_{n \in L'} \phi_n(s\beta \|\sum_{i \in F'_n} \lambda_{i_n} x_i\|),$$

siendo β la constante base incondicional de $(x_i)_1^{\infty}$ ($\beta \geq \alpha$). En definitiva, $(x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ es una base incondicional con la misma

constante base incondicional que $(x_i)_1^\infty$. ///

Una base $(x_i)_1^\infty$ de un espacio de Banach E es reductora si los funcionales biortogonales $(x_i^*)_1^\infty$ de $(x_i)_1^\infty$ definidos por:

$$x_j^*(x_i) = \delta_i^j \quad \forall i, j = 1, \dots$$

forman una base de Schauder de E' . Una base $(x_i)_1^\infty$ es acotadamente completa si para cada sucesión de escalares $(\lambda_i)_1^\infty$ tal que $\sup_n \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\| < \infty$ la serie $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i x_i$ converge.

Necesitamos la siguiente caracterización, (vease [Ka]), del dual de un espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales $h^M(E)$ para una función de Musielak-Orlicz convexa: si E' es el dual de E y M^* es la conjugada de Young de M entonces $h^M(E)' \cong \mathcal{L}^{M^*}(E')$. Más concretamente si $z \in h^M(E)'$, existe $(y_n)_1^\infty \in \mathcal{L}^{M^*}(E')$ tal que:

$$z((x_n)_1^\infty) = \sum_{n=1}^\infty y_n(x_n) \quad \forall (x_n)_1^\infty \in h^M(E).$$

3. Proposición.

Sea E un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_1^\infty$ y M una función de Musielak-Orlicz convexa. Si las bases de E y h^M son reductoras (resp. acotadamente completa), entonces la base canónica de $h^M(E)$ lo es también.

Demostración.

Si las bases de E y h^M son reductoras, entonces $E' = \overline{[(x_i^*)_1^\infty]}$

y $(h^M)' \sim \ell^{M^*} = h^{M^*}$ donde $M^* = (\phi_n^*)_1^\infty$ es la función de Musielak-Crlicz formada por las conjugadas de Young de las funciones componentes de M . Utilizando la caracterización del dual de $h^M(E)$ y siguiendo la misma notación que en la Proposición 2., se obtiene así que:

$$\overline{[(x_{ij}^*)_{i,j=1}^\infty]} \sim h^{M^*}(\overline{[(x_i^*)_1^\infty]}) = h^{M^*}(E') = \ell^{M^*}(E') \sim (h^M(E))'$$

Por tanto la base canónica de $h^M(E)$ es reductora.

Supongamos que las bases de E y h^M sean acotadamente completas. Entonces por la Proposición 1.b.4 de [L-T₄], se tiene que:

$$\overline{[(x_{ij}^*)_1^\infty]} \sim E \quad \text{y} \quad (h^{M^*})' \sim h^M$$

y por tanto:

$$\overline{[(x_{ij}^*)_{i,j=1}^\infty]} \sim (h^{M^*}(\overline{[(x_i^*)_1^\infty]}))' \sim h^M(E).$$

Utilizando de nuevo el criterio [L-T₄] (pag. 9) se sigue que la base canónica de $h^M(E)$ es acotadamente completa. ///

4. Corolario.

Sea E un espacio de Banach con una base incondicional y M una función de Musielak-Crlicz convexa. Entonces, el espacio $h^M(E)$ tiene una copia isomorfa de ℓ^1 (resp. c_0) si y solo si E ó h^M la tienen.

Demostración.

Una de las implicaciones es inmediata por la Proposición 1.1. Supongamos ahora que el espacio $h^M(E)$ tiene una copia de, ℓ^1 (resp. c_0) y que ni E ni h^M la poseen. Entonces por un resultado de James ([Ja], [L-T₄] pag. 21-22), las bases incondicionales de F y h^M son reductoras (resp. acotadamente completas). Por la Proposición anterior esto implica que la base canónica de $h^M(E)$ es reductora (resp. acotadamente completa) y contradice que ℓ^1 (resp. c_0) es isomorfo a un subespacio vectorial de $h^M(E)$. ///

En particular, se deduce de aquí por el Teorema 1.c.13 de [I-T₄] y en las hipótesis del Corolario el siguiente resultado conocido: $h^M(E)$ es reflexivo si y solo si h^M y E lo son.

Mejoramos a continuación el resultado anterior, caracterizando en un contexto más general los retículos de sucesiones vectoriales que contienen una copia isomorfa de c_0 o ℓ^p .

Concretamente, consideramos desde aquí un retículo λ de sucesiones escalares orden continuo y localmente acotado cuya topología está inducida entonces por una p -norma de Riesz $\| \cdot \|_p$. Si $(F, \| \cdot \|)$ es un espacio de Banach, la F -norma de Riesz en $\lambda(F)$ está definida aquí por:

$$\| (x_n)_1^\infty \|_p = \| \| x_n \| \|_1 \|_p$$

para $x = (x_n)_1^\infty \in \lambda(F)$. Necesitamos el siguiente lema que es una

versión del Teorema 9.4.5 de [M] para sucesiones básicas:

5. Lema.

Sea E un subespacio cerrado de un F-espacio $(G, \| \cdot \|)$. Si $(x_i)_1^\infty$ es una base de Schauder de F e $(y_i)_1^\infty$ es una sucesión en G tal que para algún $0 < \alpha < 1$:

$$\| \sum_{i=1}^n a_i (x_i - y_i) \| < \alpha \| \sum_{i=1}^n a_i x_i \| \quad (1)$$

para cada natural n y cada $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $(y_i)_1^\infty$ es una base de Schauder de $[(y_i)_1^\infty]$ equivalente a $(x_i)_1^\infty$.

Demostración.

De la relación (1) se obtiene para $n < m$ aplicando la desigualdad triangular que:

$$(1 - \alpha) \| \sum_{i=n}^m a_i x_i \| \leq \| \sum_{i=n}^m a_i y_i \| \leq (1 + \alpha) \| \sum_{i=n}^m a_i x_i \| \quad (2)$$

Definimos entonces el operador S de $[(x_i)_1^\infty]$ en G por $S(\sum_{i=1}^m a_i x_i) = \sum_{i=1}^m a_i y_i$. Por las desigualdades (2), se deduce que \tilde{S} determinado por:

$$\tilde{S} \left(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^\infty a_i y_i,$$

es una extensión lineal continua de S a E. En efecto $(\sum_{i=1}^n a_i y_i)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en el subespacio cerrado E, que converge a $\sum_{i=1}^\infty a_i y_i$. Por otra parte si $(\sum_{i=1}^\infty a_i^j x_i)_{j=1}^\infty$ converge a 0

entonces para $\epsilon > 0$ existe un natural $j(\epsilon)$ tal que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^j x_i \right\| < \frac{\epsilon}{(1 + \alpha)}$$

para $j \geq j(\epsilon)$ y por tanto $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^j y_i \right\| < \epsilon$ para $j \geq j(\epsilon)$.
 En definitiva, $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^j y_i)_{j=1}^{\infty}$ converge a 0. Más aún, la aplicación \tilde{S} es inyectiva y su rango es cerrado. Utilizando entonces el teorema de la gráfica cerrada se concluye que \tilde{S} es un isomorfismo topológico que transforma la base $(x_i)_1^{\infty}$ en la base equivalente $(y_i)_1^{\infty}$ de $[(y_i)_1^{\infty}]$. ///

6. Proposición.

Si Y es un subespacio cerrado de $\lambda(E)$, entonces Y es isomorfo a un subespacio de $E \oplus \dots \oplus E$ para algún natural j o contiene un subespacio isomorfo a un subespacio generado por una base bloque de la base canónica de λ .

Demostración.

Suponemos sin pérdida de generalidad que las proyecciones π_k de λ sobre las diferentes coordenadas son todas no nulas. En las condiciones impuestas al F-retículo λ , tenemos que la sucesión de vectores unitarios $(e_n)_1^{\infty}$ es una base de Schauder de λ (véase por ejemplo [M], Teorema 9.5.2).

Sea P_j la proyección natural de $\lambda(E)$ sobre $E \oplus \dots \oplus E$ definida por:

$$P_j((x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, \dots)) = (x_1, \dots, x_j, 0, \dots)$$

para $x = (x_n)_1^\infty \in \lambda(E)$. Si $P_j|_Y$ es un isomorfismo para algún j , entonces claramente Y es isomorfo a un subespacio de $E \oplus \dots \oplus E$. Supongamos que esto no ocurre. Si $(\epsilon_j)_1^\infty$ es una sucesión de escalares positivos tal que $\sum_1^\infty \epsilon_j < \frac{1}{8}$, entonces para cada natural j existe $x_j \in Y$ con $\|x_j\|_p = M_j > r_j$ y $\|P_j(x_j)\|_p < \epsilon_j r_j$. En efecto, si P_j no es inyectivo, esto es obvio. En el otro caso, la inversa de $P_j|_Y$ no es continua. Por tanto, existe un entorno V de 0 en Y tal que para cada entorno W de 0 en $P_j(Y)$ existe un vector $x_j \notin V$ pero con $P_j(x_j) \in W$.

Consideramos $y_j = \left(\frac{1}{M_j^{1/n}}\right) x_j$ de forma que $\|y_j\|_p = 1$ y $\|P_j(y_j)\|_p < \frac{\epsilon_j r_j}{M_j} < \epsilon_j$. Ahora bien, como:

$$1 - \epsilon_1 < \|y_1 - P_1(y_1)\|_p < 1 + \epsilon_1,$$

se puede encontrar por la orden continuidad de λ , un entero $j_2 > j_1 = 1$ tal que:

$$1 - 2\epsilon_1 < \|P_{j_2}(y_1) - P_{j_1}(y_1)\|_p < 1 + 2\epsilon_1$$

Iterando esta construcción, obtenemos una sucesión $(v_k)_1^\infty$ definida por:

$$\pi_i(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j_k \text{ ó } i > j_{k+1} \\ \pi_i(y_{j_k}) & \text{si } j_k < i \leq j_{k+1} \end{cases}$$

y que satisface:

$$1 - 2\epsilon_{j_k} < \|v_k\|_p < 1 + 2\epsilon_{j_k} \quad \text{y} \quad \|v_k - y_{j_k}\| < 2\epsilon_{j_k}$$

El subespacio cerrado $\overline{[(v_k)_1^\infty]}$ de $\lambda(E)$ está caracterizado entonces por:

$$\overline{[(v_k)_1^\infty]} = \left\{ \sum_1^\infty a_k v_k : (0, |a_1| \|\pi_2(v_1)\|, \dots, |a_1| \|\pi_{j_2}(v_1)\|, |a_2| \|\pi_{j_2+1}(v_2)\|, \dots) \in \lambda \right\}$$

Por tanto los vectores $(v_k)_1^\infty$ forman una base de Schauder de $\overline{[(v_k)_1^\infty]}$ (aplicando el Teorema 9.5.2 de [M]), que es equivalente a una base bloque $(w_k)_1^\infty$ de la base canónica de λ definida por:

$$\pi_i(w_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j_k \text{ ó } i > j_{k+1} \\ \|\pi_i(y_{j_k})\| & \text{si } j_k < i \leq j_{k+1} \end{cases}$$

porque ambas tienen el mismo dominio de convergencia.

Finalmente, veamos que si $u_k = y_{j_k}$ entonces $\overline{[(u_k)_1^\infty]}$ y $\overline{[(v_k)_1^\infty]}$ son isomorfos. En efecto, como $\|v_k\|_p > \frac{3}{4}$ y $\|a_i v_i\|_p \leq \left\| \sum_1^n a_k v_k \right\|_p$ para $i=1, 2, \dots, n$ se tiene para cada natural n y cada $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ que:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^n a_k (u_k - v_k) \right\|_p &\leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^p \right) \left(\sum_1^n \|u_k - v_k\|_p \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^p \leq \frac{1}{3} \max_{1 \leq k \leq n} (|a_k|^p \|v_k\|_p) \\ &= \frac{1}{3} \max_{1 \leq k \leq n} (|a_k| \|v_k\|_p) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{j} \left\| \sum_{k=1}^n a_k v_k \right\|_p$$

El resultado se obtiene entonces por el Lema5. ///

7. Observación.

Por λ entendemos un retículo real $\lambda = \lambda(\mathbb{R})$ o complejo $\lambda = \lambda(\mathbb{C})$ según que los escalares sean reales o complejos. Asimismo puede comprobarse que $\lambda(\mathbb{R})$ tiene una copia isomorfa de $\ell^p(\mathbb{R})$ si y solo si $\lambda(\mathbb{C})$ tiene una copia isomorfa de $\ell^p(\mathbb{C})$. Lo mismo ocurre para $c_0(\mathbb{R})$ y $c_0(\mathbb{C})$.

8. Teorema.

Sea λ_{C_0} un F-retículo orden continuo y E un espacio de Banach. Entonces, $\lambda(E)$ tiene una copia isomorfa de ℓ^p , $0 < p < \infty$ (resp. de c_0) si y solo si λ ó E tienen una copia isomorfa de ℓ^p (resp. de c_0).

Demostración.

Sea Y un subespacio de $\lambda(E)$ isomorfo a ℓ^p . Por la Proposición 6, existe un natural j tal que Y es isomorfo a un subespacio cerrado de $E \otimes \mathbb{R}^j$. $\otimes E$ ó Y contiene un subespacio Z isomorfo a un subespacio infinito dimensional de λ . El primer caso es solo posible para $p \geq 1$. Pero si F y G son espacios de Banach, entonces la suma directa $F \otimes G$ tiene una copia de ℓ^p si y solo si F ó G la tienen ([Sa], Teorema 1). Por tanto, el espacio E debe contener una copia de ℓ^p . En la segunda

situación, el retículo λ tendrá una copia isomorfa de ℓ^p ya que cada subespacio cerrado de dimensión infinita de ℓ^p (y en consecuencia Z) contiene un subespacio isomorfo al propio ℓ^p (para $p \geq 1$ vease [L-T₄]; para $0 < p < 1$ vease el resultado de Stiles [St₁]).

La implicación en otro sentido es consecuencia directa de la Proposición 1.1 y la demostración para c_0 es similar. ///

Apliquemos directamente el Teorema anterior al caso concreto de un espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales:

9. Corolario.

Sea h^M un espacio de Musielak-Orlicz localmente acotado y E un espacio de Banach. Entonces, el espacio $h^M(E)$ tiene una copia isomorfa de ℓ^p , para $0 < p < \infty$, (resp. de c_0) si y solo si h^M ó E tienen una copia de ℓ^p (resp. de c_0).

El resultado anterior para c_0 fue probado por Kaminska bajo condiciones adicionales ([Ka]).

Cuando en particular h^M es un espacio de Orlicz de sucesiones, utilizando los resultados de Lindenstrauss-Tzafriri y de Kalton ([L-T₂] y [K₁]) se obtiene este segundo Corolario:

10. Corolario.

Sea h^ϕ un espacio de Orlicz con $\alpha_\phi > 0$ y E un espacio de

Banach. Entonces el espacio de Orlicz de sucesiones vectoriales $h^\phi(E)$ tiene una copia isomorfa de l^p , para $0 < p < \infty$, (resp. de c_0) si y sólo si E tiene una copia isomorfa de l^p (resp. de c_0) ó $p \in [\alpha_\phi, \beta_\phi]$ (resp. $\beta_\phi = \infty$).

Es interesante observar que los resultados anteriores no pueden extenderse a los espacios de funciones vectoriales $L^\phi(E)$ ($[L-T_5]$). Para copias isomorfas de l^1 el resultado es cierto (véase $[P]$ y $[B_2]$).

11. Observación.

El Teorema 8 así como sus Corolarios 9 y 10 admiten una generalización natural a los retículos de sucesiones vectoriales $\lambda(\{E_i\})$, definidos por:

$$\lambda(\{E_i\}) = \{(x_i)_1^\infty : x_i \in E_i \text{ y } (\|x_i\|_{E_i})_1^\infty \in \lambda\}$$

donde $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})$ es un espacio de Banach para $i=1,2,\dots$. El espacio $\lambda(\{E_i\})$ está dotado de la F-norma natural:

$$\rho((x_i)_1^\infty) = \rho((\|x_i\|_{E_i})_1^\infty),$$

siendo ρ la F-norma de Riesz de λ .

12. Ejemplo.

Un espacio de Banach que no tiene copias de ningún l^p ($p \geq 1$) ó de c_0 pero contiene copias isométricas de l_n^q para $n=1,2,\dots$ para un $q \geq 1$ fijo.

Consideremos un espacio de Banach de sucesiones T tal que los vectores canónicos forman una base incondicional y que no contiene copias de ℓ^p para $p \geq 1$ ó de c_0 (por ejemplo el espacio de Tsirelson o su dual ([L-T₄] pag. 95)). Entonces para $q \geq 1$, el retículo de Banach de sucesiones vectoriales $T(\{\ell_n^q\})$ es un espacio que no contiene tampoco, por la observación anterior, ninguna copia de ℓ^p ó c_0 aunque posee copias isométricas de ℓ_n^q para $n=1,2,\dots$

Una cuestión interesante es determinar en que condiciones el retículo de sucesiones vectoriales $\lambda(\lambda)$ es isomorfo a λ , en el caso natural de poseer λ una base simétrica. La proposición siguiente responde negativamente en el caso de espacios de Orlicz de sucesiones $\lambda = \ell^{\hat{\phi}}$ separables.

13. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz convexa cuyos índices verifican $1 \leq \alpha_\phi < \rho_\phi < \infty$. Entonces el espacio $h^{\hat{\phi}(h^\phi)}$ no es isomorfo a h^ϕ .

Demostración.

Escogemos números p, q de forma que $p > q \neq 2$ en $[\alpha_\phi, \beta_\phi]$. Por el Teorema 4.a.9 de [L-T₄] y su demostración, el espacio ℓ^p es isomorfo a un subespacio vectorial X de h^ϕ generado por una base bloque $(u_n)_1^\infty$ de la base canónica $(e_n)_1^\infty$ de h^ϕ . El espacio $X(h^\phi)$ definido por:

$$X(h^\phi) = \{ (x_n)_1^\infty : x_n \in h^\phi \text{ y } (\|x_n\|)_1^\infty \in X \},$$

es un subespacio vectorial de $h^{\hat{\phi}(h^\phi)}$ y es canónicamente isomorfo a $\ell^p(h^\phi)$. Razonando de igual modo, el espacio ℓ^q es isomorfo

a un s.e.v. Y generado por una base bloque $(v_n)_1^\infty$ de la base canónica de h^ϕ . Por tanto, el espacio $X(Y)$ definido por:

$$X(Y) = \{ (x_n)_1^\infty : x_n \in Y \text{ y } (\|x_n\|)_1^\infty \in X \},$$

es un s.e.v. de $X(h^\wedge)$ y de $h^\phi(h^\wedge)$ y además es canónicamente isomorfo a $\mathcal{L}^p(\mathcal{L}^q)$.

Si $h^\wedge(h^\wedge)$ fuera isomorfa a h^ϕ , entonces estaría sumergido en $L^\phi(\mathbb{R}) \cong L^\phi([0, \infty))$. En efecto, la base canónica de h^ϕ es equivalente a la sucesión básica $(x_{[n, n+1]})_1^\infty$ de $L^\phi([0, \infty))$. Pero por un resultado de Raynaud (Corolario 2, [Ra]), si ϕ es una función que verifica la condición Δ_2 , entonces el espacio $L^\phi(\mathbb{R})$ tiene una copia de $\mathcal{L}^r(\mathcal{L}^s)$ si y solo si $r \leq s$ ó $s=2$. Llegamos pues a contradicción y por tanto $h^\phi(h^\wedge) \not\cong h^\phi$. ///

El resultado citado de Raynaud y el Corolario 9 permiten afinar la Proposición 13 anterior, incidiendo en la diferente estructura de los espacios de Orlicz de sucesiones vectoriales y escalares.

14. Proposición.

Sean ϕ y ψ funciones de Orlicz convexas con índices verificando $1 < \alpha_\phi < \beta_\phi < \infty$ y $1 < \alpha_\psi < \beta_\psi < \infty$. Entonces el espacio $h^\phi(h^\psi)$ no es isomorfo a un espacio de Orlicz h^ξ para ninguna función de Orlicz ξ .

Demostración.

Supongamos que los espacios $h^\psi(h^\psi)$ y h^ξ sean isomorfos. Como $h^\psi(h^\psi)$ es reflexivo podemos afirmar que ξ debe verificar la condición Δ_2 ($\beta_\xi < \infty$).

Por el Corolario.9, las únicas copias de \mathcal{L}^p (con $p \geq 1$) que posee $h^\phi(h^\psi)$ son las que verifican $p \in [\alpha_\phi, \beta_\phi] \cup [\alpha_\psi, \beta_\psi]$. Como el espacio de Orlicz h^ξ tiene copias de \mathcal{L}^p únicamente

para el intervalo $[\alpha_\xi, \beta_\xi]$, una condición necesaria para que $h^\phi(h^\psi) \sim h^\xi$ es que $\beta_\phi > \alpha_\psi$. Distinguimos dos casos:

Si $\beta_\phi > \alpha_\psi$, elegimos $q \in [\alpha_\psi, \beta_\psi]$ verificando $2 \neq q < \beta_\phi$. En ese caso, el espacio $\ell^{\beta_\phi}(\ell^q)$ puede sumergirse por el mismo razonamiento que en la proposición anterior en $h^\phi(h^\psi) \approx h^\xi$ que es a su vez isomorfo a un s.e.v. de $L^\xi(\mathbb{R})$. Esto último contradice el Corolario 2 de [Ra].

Si $\beta_\phi = \alpha_\psi$, razonamos por dualidad. El espacio dual de $h^\phi(h^\psi)$ es isomorfo a $\ell^{\phi^*}(\ell^{\psi^*})$, donde ϕ^* y ψ^* designan a las conjugadas de Young de ϕ y ψ . De igual modo el dual de h^ξ es isomorfo a ℓ^{ξ^*} . Ahora bien, como $\alpha_\phi < \beta_\psi$ se deduce que $\beta_{\phi^*} > \alpha_{\psi^*}$, por la relación existente entre los índices de una función y los de su conjugada ([L-T₄], Teorema 4.b.3):

$$\frac{1}{\alpha_\phi} + \frac{1}{\beta_{\phi^*}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\alpha_{\phi^*}} + \frac{1}{\beta_\phi} = 1$$

Sea $2 \neq q < \beta_{\phi^*}$. El espacio $\ell^{\beta_{\phi^*}}(\ell^q)$ es entonces isomorfo a ℓ^{ξ^*} . Como $\alpha_{\psi^*} > 1$, se tiene que $\beta_{\psi^*} < \infty$ por lo que el espacio $\ell^{\xi^*} = h^{\xi^*}$ es separable. Aplicamos de nuevo el resultado de Raynaud, llegándose igualmente a contradicción. ///

Obsérvese que en la demostración anterior puede suponerse sin pérdida de generalidad que la función ξ está definida en un entorno de ∞ de forma que verifique la condición Δ_2 en $0 \leq \infty$ tal y como es preciso en el Corolario 2 de [Ra].

A pesar de las Proposiciones anteriores, algunos espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales comparten propiedades con los espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones esca-

lares. Por ejemplo:

15. Proposición.

Sean M y N funciones de Musielak-Orlicz convexas. Entonces todo subespacio vectorial cerrado de $h^M(h^N)$ tiene una copia isomorfa de ℓ^p para algún $p \geq 1$ ó de c_0 .

Demostración.

Sea Y un subespacio cerrado de $h^M(h^N)$. Aplicamos la Proposición 6 al s.e.v. Y .

Supongamos primero que Y es isomorfo a un s.e.v. en $h^N \otimes \dots \otimes h^N$ para algún natural j . La suma directa de h^N , j veces, es claramente isomorfa a un espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones escalares. En efecto, si $N = (\phi_n)_1^\infty$ entonces definiendo $\psi_m = \phi_n$ para $(n-1)j+1 \leq m \leq nj$ se tiene que $h^{(\psi_m)} \cong h^N \otimes \dots \otimes h^N$. Por un resultado de Woo ([Woo], pag. 283), el subespacio Y posee entonces una copia de ℓ^p ó de c_0 .

Si suponemos ahora que Y contiene un s.e.v. generado por una base bloque de la base canónica de h^M , es claro aplicando el teorema de [Wq] que Y posee una copia de ℓ^p ó de c_0 . ///

Los espacios $\ell^p(\ell^q)$ son isomorficamente diferentes (vease p.e. [Tr]) cuando se hacen variar p y q . Una consecuencia más del Corolario 9 es la siguiente:

16. Proposición.

Sean $p, q, p', q' \geq 1$. Si los espacios $L^p(L^q)$ y $L^{p'}(L^{q'})$ son isomorfos entonces $p=p'$ y $q=q'$.

Demostración.

Supongamos que $L^p(L^q) \cong L^{p'}(L^{q'})$. Por el Corolario 9, el espacio $L^p(L^q)$ (resp. $L^{p'}(L^{q'})$) contiene copias isomorfas de L^r unicamente para $r=p$ ó $r=q$ (resp. $r=p'$ ó $r=q'$).

Si $p=q$, entonces es inmediato que $L^{p'}(L^{q'})$ es isomorfo a $L^p(L^q) \cong L^p$ y aplicando el Corolario 9 una vez más $p=p'=q'$. De igual forma razonamos si $p'=q'$.

Si $p \neq q$ y $p' \neq q'$, tenemos dos únicas posibilidades:

- i) $p = p'$ y $q = q'$
- ii) $p = q'$ y $q = p'$

Estudiemos este segundo caso, esto es $L^p(L^q) \cong L^q(L^p)$, considerando por ejemplo que $p > q$. Por el resultado de Raynaud ([Ra], Corolario 2) si $p > q$ y $q \neq 2$, entonces $L^p(L^q)$ y $L^q(L^p)$ no son isomorfos pues uno está sumergido en $L^\phi(\mathbb{R})$, para una función de Orlicz convexa que cumple la condición Δ_2 en 0 e ∞ , y el otro no. Si finalmente $q=2$, entonces tomando duales se obtiene que:

$$L^{p^*}(L^2) \cong L^2(L^{p^*})$$

donde p^* es el exponente conjugado de p . Como $p > 2$ se tiene que $p^* < 2$. Así pues, existe un espacio de Orlicz

$L^\psi(\mathbb{R}) \simeq (L^{\psi^*}(\mathbb{R}))'$. para una función de Orlicz convexa ψ de índices $1 < \alpha_\psi < \beta_\psi < \infty$, que contiene copias isomorfas de $l^{\beta^*}(l^2)$ y no de $l^2(l^{\beta^*})$, llegándose a contradicción. ///

CAPITULO II

PROPIEDADES RIESZ-ISOMORFAS DE ESPACIOS MODULARES
DE SUCESSIONES VECTORIALES

En el Capítulo II, vamos a estudiar temas similares a los tratados en el Capítulo anterior aunque aquí en el marco de la teoría de espacios de Riesz localmente sólidos. En general vamos a considerar espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales $\lambda^M(E)$ definidos sobre un retículo de Banach E . Suponemos además siempre que el retículo de sucesiones λ^M es localmente acotado. (Algunos de los resultados que presentamos aquí pueden generalizarse con razonamientos semejantes sustituyendo λ^M por un retículo de sucesiones λ localmente acotado y sólido de ω).

Comenzamos por precisar algunas notaciones y definiciones básicas que utilizaremos en lo concerniente a espacios de Riesz localmente sólidos, ya que no existe una terminología universal, (véase por ejemplo los textos de Aliprantis y Burkinshaw ([A-B]), Luxemburg y Zaanen ([L-Z]), Zaanen ([Z]), Kantorovitch y Akilov ([K-A]) ó Lindenstrauss y Tzafriri ([L-T₂])).

Un espacio de Riesz $(L, <)$ es un espacio vectorial ordenado de forma que todo subconjunto finito no vacío tiene supremo en L . Por tanto los escalares son reales, lo que supondremos a lo largo del capítulo. Los símbolos \vee y \wedge designan en L supremo e ínfimo respectivamente. El valor absoluto $|u|$ de un elemento u de L está definido por:

$$|u| = u \vee (-u)$$

Dos elementos u y v de L son disjuntos (y lo denotaremos

por $u \perp v$) cuando:

$$|u| \wedge |v| = 0$$

El complementado disjunto S^\perp de un subconjunto S de L viene dado por:

$$S^\perp = \{ u \in L : u \perp v, \forall v \in S \}$$

Un espacio de Riesz L es arquimediano si se tiene que:

$$n u \leq v \text{ para } n=1,2,\dots \implies u = 0$$

para $u, v \geq 0$ arbitrarios. Un espacio de Riesz es de tipo numerable si para cada conjunto $S \subset L$ que admite un supremo existe un subconjunto $S_0 \subset S$ lo más numerable, tal que $\sup S = \sup S_0$. Un espacio de Riesz es completo (resp. σ -completo) si toda red (resp. sucesión) en L acotada superiormente tiene un supremo. Esta propiedad se designará también como orden completitud o Dedekind-completitud cuando pueda existir confusión con la completitud topológica.

Un subretículo de L es un subconjunto S que es a su vez espacio de Riesz para la misma estructura de orden. Un subconjunto S de L es sólido si

$$|u| \leq |v| \implies u \in S$$

para cualquier $v \in S$. Un ideal de L es un s.e.v. sólido de L y una banda es el complemento disjunto S^\perp de algún subconjunto S de L .

Una banda Y en L está caracterizada por la siguiente propiedad:

Y es un ideal orden cerrado i.e. tal que:

$$\forall S \subset Y \text{ tal que existe } \sup S \text{ en } L, \text{ también } \sup S \in Y.$$

En particular ideales y bandas de L son subretículos como consecuencia de la identidad:

$$u + v = u \wedge v + u \vee v \quad \forall u, v \in L$$

Una topología vectorial τ determina en L una estructura de retículo vectorial localmente sólido o espacio de Riesz localmente sólido (en abreviatura e.l.s.) si τ posee una base de entornos de 0 formada por subconjuntos de L sólidos. Una topología localmente sólida τ en L es de Lebesgue si para toda red $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ en L se tiene que :

$$0 \leq u_\alpha \uparrow 0 \implies u_\alpha \xrightarrow{\tau} 0 \quad (1)$$

(donde $u_\alpha \uparrow 0$ indica que $u_\alpha \leq u_\beta$ si $\alpha > \beta$ y que $\inf_{\alpha \in I} (u_\alpha) = 0$).

Una topología l.s. τ en L es de Levi (o posee la propiedad débil de Fatou en la terminología de [Z], pag. 390) si para toda red $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ en L se tiene que :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_\alpha \uparrow y \quad (u_\alpha)_{\alpha \in I} \quad \tau\text{-acotada} &\implies \text{existe } u \in L \\ \text{tal que } u_\alpha \uparrow u &\quad (2) \end{aligned}$$

Si τ es una topología l.s. normada y topológicamente completa, es decir L es un retículo de Banach, podemos suponer siempre que la norma $\| \cdot \|$ de L es monótona i.e. que si

$|u| \leq |v|$ entonces $\|u\| \leq \|v\|$ para $u, v \in L$. Si un retículo de Banach cumple las propiedades (1) ó (2) diremos que es respectivamente orden continuo o que es monótonamente completo. La norma del retículo de Banach L es Fatou si y solo si para toda red $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ en L se tiene que:

$$0 \leq u_\alpha + u \longrightarrow \sup_{\alpha \in I} \|u_\alpha\| = \|u\| \quad (3)$$

Si en (1), (2) ó (3) sustituimos red por sucesión obtenemos las respectivas σ -propiedades.

Finalmente, dos e.l.s. L y S son Riesz isomorfos si existe un isomorfismo topológico de L sobre S que conserva la estructura de orden, es decir que transforma elementos disjuntos de L en elementos disjuntos de S . Los isomorfismos de Riesz transforman subretículos en subretículos e ideales en ideales. Concretamente, un isomorfismo topológico T de L sobre S es de Riesz si verifica una de las propiedades equivalentes siguientes:

- (i) $T(u \wedge v) = T(u) \wedge T(v) \quad \forall u, v \in L$.
- (ii) $T(u \vee v) = T(u) \vee T(v) \quad \forall u, v \in L$.
- (iii) $T(|u|) = |T(u)| \quad \forall u \in L$.

Diremos que L posee una copia Riesz-isomorfa de S si existe un isomorfo de Riesz de S sobre un subretículo R de L .

1. Proposición.

Si E es un retículo de Banach y M una función de Musielak-

-Orlicz, entonces el espacio $\ell^M(E)$ es un espacio de Riesz localmente sólido.

Demostración

El orden natural en el espacio $\ell^M(E)$ es el inducido por $F^{\mathbb{N}}$, definido por:

$$a \leq b \text{ si y solo si } a_n \leq b_n$$

para cada natural n y siendo $a=(a_n)_1^{\infty}$ y $b=(b_n)_1^{\infty}$ elementos de $\ell^M(E)$. Si $a=(a_n)_1^{\infty} \in \ell^M(E)$, el valor absoluto $|a|$ de a es claramente el elemento $(|a_n|)_1^{\infty}$ de $\ell^M(E)$. Por lo tanto, al ser la norma $\|\cdot\|$ de E monótona, se tiene que $|a| + |b| \in \ell^M(E)$, para $a, b \in \ell^M(E)$. En particular, tomando coordenadas obtenemos para cada natural n que:

$$|a_n \wedge b_n| \leq |a_n| + |b_n| \text{ y } |a_n \vee b_n| \leq |a_n| + |b_n|$$

De nuevo por ser monótona la norma de E , se deduce que $a \wedge b = (a_n \wedge b_n)_1^{\infty}$ y $a \vee b = (a_n \vee b_n)_1^{\infty}$ pertenecen a $\ell^M(E)$, que es pues un espacio de Riesz. Además, los conjuntos $U_s = \{a \in \ell^M(E) : \|a\|_M < s\}$ cuando hacemos variar $s > 0$ forman una base de entornos de 0 sólidos. En efecto, si $a, b \in \ell^M(E)$ y $b \in U_s$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |a| \leq |b| &\rightarrow |a_n| \leq |b_n|, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\rightarrow \|a_n\| \leq \|b_n\|, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\rightarrow m(\lambda a) \leq m(\lambda b), \forall \lambda > 0 \\ &\rightarrow \|a\|_M \leq \|b\|_M \end{aligned}$$

y entonces $a \in U_s$. ///

Observese que si ℓ^M es un espacio de Banach entonces la topología l.s. de $\ell^M(E)$ es normada por lo que $\ell^M(E)$ es un retículo de Banach.

El espacio $\ell^M(E)$ tiene además copias Riesz-isomorfas canónicas de ℓ^M y de E . Como $\ell^M(E)$ es un e.l.s. y Hausdorff es también un espacio de Riesz arquimediano ([A-B], Teorema 5.6.(i)). Varias propiedades básicas de la estructura de orden de $\ell^M(E)$ se recogen en la siguiente:

2. Proposición.

Sea M una función de Musielak-Orlicz y E un retículo de Banach.

- 2.1. El espacio $h^M(E)$ es un ideal de $\ell^M(E)$. Además es una banda si y solo si $h^M = \ell^M$.
- 2.2. Si el retículo E es completo (resp. σ -completo, de tipo numerable) entonces $\ell^M(E)$ y $h^M(E)$ lo son también.

Demostración.

2.1. El subespacio $h^M(E)$ de $\ell^M(E)$ es un ideal por tener E una norma monótona y ser h^M un ideal de ℓ^M . Si $h^M = \ell^M$, entonces $h^M(E) = \ell^M(E)$ es trivialmente una banda. Si $h^M \neq \ell^M$, veamos que $h^M(E)$ no es una banda, es decir un ideal orden cerrado de $\ell^M(E)$ ([A-B] par. 5). Sea $a = (a_n)_1^\infty$ un elemento de $\ell^M(E) \setminus h^M(E)$. Consideremos $u_i = (|a_1|, \dots, |a_i|, 0, \dots, 0, \dots)$ perteneciente a $h^M(E)$ para $i=1, 2, \dots$. Es claro que $0 \leq u_i \uparrow |a|$ y sin embargo

$|a| \notin h^M(E)$. (Nótese que el espacio $h^M(E)$ no es tampoco σ -orden cerrado y que el complemento disjunto de $h^M(E)$ en $l^M(E)$ es $\{0\}$).

2.2. Supuesto ahora E completo y $0 \leq |a_\alpha| \leq b \in l^M(E)$ para una red $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ en $l^M(E)$, tenemos coordenada a coordenada que $|a_{\alpha n}| \leq b_n \in E$, por lo que existe $c_n = \sup_\alpha (a_{\alpha n})$. Como $0 \leq c_n \leq b_n$ deducimos que $c = (c_n)_{n=1}^\infty \in l^M(E)$ y que es el supremo de los $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ en $l^M(E)$, que es en consecuencia completo.

Si ahora el espacio E es de tipo numerable y $\sup a_\alpha = a$ en $l^M(E)$, existe para cada natural n una sucesión $(a_{n,j})_{j=1}^\infty$ verificando $\sup_j (a_{n,j}) = a_n$. Por tanto $\sup_{j,n} (a_{n,j}) = a$ y el espacio $l^M(E)$ es también de tipo numerable.

Los resultados anteriores son ciertos para $h^M(E)$ por ser ideal de $l^M(E)$. ///

A continuación, estudiando en que condiciones el e.l.s. $l^M(E)$ posee una topología de Lebesgue, de Levi o una norma de Fatou, se van a obtener caracterizaciones (en casos muy generales) de los espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales que poseen copias Riesz isomorfas de l^∞ , C_0 y l^1 .

3. Definición.

Si (L, τ) es un e.l.s. designamos por L_a (resp. $L_{a\sigma}$) al máximo ideal de L donde la topología restringida es de Lebes-

que (respectivamente σ -Lebesgue).

El ideal L_a es τ -cerrado y está caracterizado por la siguiente igualdad ([A-B] pag. 317, [W₂] pag. 139):

$$L_a = \{ u \in L : |u| \geq u_\alpha + 0 \rightarrow u_\alpha \xrightarrow{I} 0 \}$$

4. Proposición.

Sea M una función de Musielak-Orlicz y E un retículo de Banach. El máximo ideal de $\ell^M(E)$ en que la topología restringida es de Lebesgue es $h^M(E_a)$.

Demostración.

Utilizamos la caracterización de $(\ell^M(E))_a$ expuesta en la Definición 3 para probar que $(\ell^M(E))_a \subset h^M(E_a)$. Sea $a \in (\ell^M(E))_a \setminus h^M(E)$ y consideremos $u_n = (0, \dots, 0, |a_n|, |a_{n+1}|, \dots)$. Es claro que $u_n \neq 0$. Sin embargo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_M$ no es 0 pues como $a \notin h^M(E)$ existe $s > 0$ tal que $m(sa) = \infty$ y por tanto tal que $m(s u_n) = \infty$ para $n=1, 2, \dots$. Luego $(\ell^M(E))_a \subset h^M(E)$.

Si ahora $a \in h^M(E) \setminus h^M(E_a)$, escogemos entonces $x \in E \setminus E_a$. Para alguna red $(x_\alpha)_\alpha$ en F será $0 \neq x_\alpha \leq |x|$ y sin embargo $\|x_\alpha\| \not\rightarrow 0$. Obviamente entonces $(|x|, 0, \dots, 0, \dots) \geq (x_\alpha, 0, \dots, 0, \dots) \neq 0$ y $\|(x_\alpha, 0, \dots, 0, \dots)\|_M \not\rightarrow 0$. En definitiva $(\ell^M(E))_a \subset h^M(E_a)$.

Recíprocamente, sea $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red monótona decreciente a 0 de elementos positivos de $h^M(E_a)$. Coordenada a coordenada:

$0 \leq a_{\alpha n} \rightarrow 0$. Por estar la red $(a_{\alpha n})_{\alpha \in I}$ en F_a , converge a 0. Puesto que $m(s a_\alpha) < \infty$ para cada $s > 0$ y $\alpha \in I$, si fijo $s > 0$ y $\alpha(1)$, puedo elegir un natural k de forma que, siendo $M = (\phi_n)_1^\infty$:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \phi_n \left(\frac{\|a_{\alpha(1)n}\|}{s} \right) \leq \frac{s}{2}$$

Como las funciones $(\phi_n)_1^\infty$ son continuas en 0 y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_{\alpha n}\| = 0$ para cada α , existe $\alpha(2) > \alpha(1)$ tal que:

$$\sum_{n=1}^k \phi_n \left(\frac{\|a_{\alpha(2)n}\|}{s} \right) \leq \frac{s}{2}$$

Luego para cada $\alpha > \alpha(2)$, se tiene que $m\left(\frac{a_\alpha}{s}\right) \leq s$, es decir $\|a_\alpha\|_M \leq s$. Esto prueba que $\lim_{\alpha} \|a_\alpha\|_M = 0$ y que $(\ell^M(E))_a = h^M(E_a)$. ///

5. Observación.

Una consecuencia inmediata de la Proposición 4. es que la topología del espacio de Riesz $\ell^M(E)$ cuando M es una función de Musielak-Orlicz que no toma valores infinitos, es de Lebesgue si y solo si $\ell^M = h^M$ y $F = E_a$. Cuando admitimos que una función de Musielak Orlicz toma valores infinitos puede ocurrir que $h^M \subsetneq \ell_a^M \subsetneq \ell^M$, no siendo ya válida la Proposición 4. El siguiente ejemplo se obtiene modificando uno debido a Wnuk ([W₁] pag. 17):

Sea $M = (\phi_n)_1^\infty$ la función de Musielak-Orlicz definida por:

$$\phi_n(t) = \begin{cases} (e^{\frac{1}{t}} - 1)^{-1} = \phi(t) & \text{si } n \geq 2 \text{ y } t \in [0, \infty) \\ \frac{t^2}{1-t} & \text{si } n = 1 \text{ y } t \in [0, 1) \\ \infty & \text{si } n = 1 \text{ y } t \in [1, \infty) \end{cases}$$

Entonces : $l^M = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : (x_n)_{n=2}^{\infty} \in l^{\phi} \}$
 $l_a^M = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : (x_n)_{n=2}^{\infty} \in h^{\phi} \}$ y $h^M = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_1 = 0 \text{ y } (x_n)_{n=2}^{\infty} \in h^{\phi} \}$. En efecto:

$$m(s, x) = \sum_1^{\infty} \phi_n(s |x_n|) = \phi_1(s |x_1|) + \sum_2^{\infty} \phi_n(s |x_n|)$$

para $s > 0$ y $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Luego, $m(s, x) < \infty$ para algún $s > 0$ si y solo si $(x_n)_{n=2}^{\infty} \in l^{\phi}$ y $m(s, x) < \infty$ para todo $s > 0$ si y solo si $(x_n)_{n=2}^{\infty} \in h^{\phi}$ y $x_1 = 0$. Supongamos ahora que $x \in l_a^M$. Como $l_a^{\phi} = h^{\phi}$ es claro que $(x_n)_{n=2}^{\infty} \in h^{\phi}$. Recíprocamente, si $(x_n)_{n=2}^{\infty} \in h^{\phi}$, probemos que $x \in l_a^M$. Sea $0 < u_{\alpha} \leq x$. Fijado $s > 0$, existe α_1 tal que si $\alpha \geq \alpha_1$ entonces $\sum_2^{\infty} \phi_n\left(\frac{|u_{\alpha n}|}{s}\right) \leq \frac{s}{2}$. Así mismo existe α_2 tal que si $\alpha \geq \alpha_2$ entonces $\frac{|u_{\alpha 1}|}{s} < 1$ y $\phi_1\left(\frac{|u_{\alpha 1}|}{s}\right) \leq \frac{s}{2}$. Luego si $\alpha \geq \alpha_1, \alpha_2$ se tiene que $m\left(\frac{u_{\alpha}}{s}\right) \leq s$ y por tanto $\lim_{\alpha} u_{\alpha}$ en $l^M(E)$ es 0. Finalmente como ϕ no verifica la condición Δ_2 en 0: $l^{\phi} \neq h^{\phi}$ y $l_a^M \neq l^M$.

6. Teorema.

Sea M una función de Musielak-Orlicz y E un retículo de Banach orden completo. Las siguientes propiedades son equivalentes:

6.1. $l^M(E)$ tiene una copia Riesz-isomorfa de l^{∞} .

6.2. ℓ^M o F tienen una copia Riesz-isomorfa de ℓ^∞ .

6.3. ℓ^M o E tienen una copia isomorfa de ℓ^∞ .

Si además ℓ^M es un espacio de Banach, también son equivalentes a :

6.4. $\ell^M(E)$ tiene una copia isomorfa de ℓ^∞ .

Demostración.

Como tanto ℓ^M como E son Riesz-isomorfos a subespacios de $\ell^M(F)$, es inmediato que $6.2. \rightarrow 6.1.$

Por el Teorema 10.8 de [A-B], el espacio $\ell^M(E)$ completo, tanto en el sentido del orden como en el topológico, tiene una copia Riesz-isomorfa de ℓ^∞ si y solo si $\ell^M(E)$ no dispone de una topología de Lebesgue. Por la Proposición.4., ello es equivalente a que $E \neq E_a$ ó $h^M = \ell_a^M \neq \ell^M$, es decir a que E o ℓ^M no estén dotados de una topología de Lebesgue. De nuevo por el Teorema 10.8 de [A-B] se deduce que $6.1 \rightarrow 6.2.$

Utilizamos ahora un criterio de Lozanovski ([K-A] pag.394): un retículo de Banach orden completo tiene una copia isomorfa de ℓ^∞ si y solo si su norma no es orden continua. Por otra parte se conoce que ℓ^M tiene una copia isomorfa de ℓ^∞ si y solo si $h^M \neq \ell^M([w_0])$, y por tanto ℓ^M posee también entonces una copia Riesz-isomorfa de ℓ^∞ . Aplicando estos resultados se obtiene la equivalencia de 6.2 y 6.3. Finalmente la de 6.1 y 6.4 se obtiene por el criterio de Lozanovski, cuando ℓ^M y por tanto $\ell^M(E)$ son retículos de Banach ya que por la

Proposición 2.2 ambos son orden completos. ///

7. Observación.

Puesto que la Proposición 2. también caracteriza la topología de Lebesgue en $h^M(E)$, se obtiene una versión de la Proposición 6 para este espacio:

Si E es un retículo de Banach orden completo son equivalentes las siguientes propiedades:

7.1 $h^M(E)$ tiene una copia Riesz-isomorfa de l^∞ .

7.2 E tiene una copia Riesz-isomorfa de l^∞ .

7.3 E tiene una copia isomorfa de l^∞ .

Si además l^M es un espacio de Banach, también son equivalentes a:

7.4 $h^M(E)$ tiene una copia isomorfa de l^∞ .

En lo sucesivo nos limitamos a espacios de Musielak-Orlicz l^M localmente convexos, o con más precisión a funciones de Musielak-Orlicz convexas. La topología l.s. de $l^M(E)$ viene entonces definida por la norma de Luxemburg que denotamos así mismo por $\| \cdot \|_M$.

8. Proposición.

Sea M una función de Musielak-Orlicz convexa y $(E, \| \cdot \|)$ un retículo de Banach.

8.1 Si $\| \cdot \|$ es una norma de Fatou en E , entonces la norma de

Luxemburg $\| \cdot \|_M$ es una norma de Fatou en $\mathcal{L}^M(E)$.

8.2 Si E tiene la propiedad de Levi y $\| \cdot \|$ es una norma de Fatou en E entonces $\mathcal{L}^M(E)$ tiene la propiedad de Levi.

Demostración.

8.1. Si $0 \leq a_\alpha \uparrow a$ para una red $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ en $\mathcal{L}^M(E)$, entonces coordenada a coordenada se tiene que $0 \leq a_{\alpha n} \uparrow a_n$. Por ser $\| \cdot \|$ una norma de Fatou en E obtenemos que:

$$s \|a_{\alpha n}\| + s \|a_n\|$$

para cada $s > 0$. Aplicando el teorema de la convergencia monótona para redes se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (s \|a_{\alpha n}\|) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n (s \|a_n\|)$$

para cada $s > 0$ y por tanto $\|a_\alpha\|_M \uparrow \|a\|_M$.

8.2 Sea $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red acotada en norma en $\mathcal{L}^M(E)$ verificando $0 \leq a_\alpha \uparrow$. En cada coordenada $(a_{\alpha n})_{\alpha \in I}$ es una red acotada en norma y que cumple $0 \leq a_{\alpha n} \uparrow$. Por tener E la propiedad de Levi, existe para cada natural n : $a_n = \sup_{\alpha} a_{\alpha n}$. Además $\|a_{\alpha n}\| \uparrow \|a_n\|$ por ser $\| \cdot \|$ una norma de Fatou. De nuevo por el teorema de la convergencia monótona se tiene que:

$$\sum_1^{\infty} \phi_n (s \|a_{\alpha n}\|) + \sum_1^{\infty} \phi_n (s \|a_n\|)$$

para cada $s > 0$. Como $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ es acotada en norma podemos encontrar

trar $r > 0$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \left(\frac{\|a_{\alpha n}\|}{r} \right) \leq 1$$

para cada $\alpha \in I$. Por tanto $m\left(\frac{(a_n)_1}{r}\right) \leq 1$, con lo que $a = (a_n)_1 = \sup_{\alpha \in I} (a_\alpha)$ pertenece a $\ell^M(E)$. ///

Esta última Proposición tiene una versión análoga para la propiedad σ -Levi y para normas σ -Fatou.

9. Teorema:

Sea M una función de Musielak-Orlicz convexa y E un retículo de Banach. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- 9.1 $\ell^M(E)$ tiene una copia Riesz-isomorfa de c_0 .
- 9.2 $\ell^M(E)$ tiene una copia isomorfa de c_0 .
- 9.3 ℓ^M o E tienen una copia Riesz-isomorfa de c_0 .
- 9.4 ℓ^M o E tienen una copia isomorfa de c_0 .

Demostración.

Es inmediato que $9.1 \rightarrow 9.2$ y que $9.3 \rightarrow 9.4$. Los recíprocos son una propiedad general de los retículos de Banach. En efecto, un retículo de Banach no tiene ninguna copia isomorfa de c_0 si y solo si su norma es σ -orden continua y monótonamente completa (Teorema 10.4.9 de [K-A]). Como en [Z] (apartados 114.7 y 117.4) se caracterizan los retículos de Banach que no contiene un subretículo Riesz-isomorfo a c_0 por estas mismas condiciones, es decir tener una topología σ -Le-

besgue y Levi, se deduce que $9.2 \rightarrow 9.1$ y que $9.4 \rightarrow 9.3$ (véase también [L-T₅], pag. 35).

La implicación $9.4. \rightarrow 9.2$ es consecuencia de poseer $\ell^M(E)$ copias isomorfas de ℓ^M y de E . Finalmente, veamos que $9.2 \rightarrow 9.4$. En efecto, si ℓ^M y E no tienen copias isomorfas de c_0 , entonces tanto ℓ^M como E verifican las propiedades de Lebesgue y de Levi. Luego por la Observación.5, el espacio $\ell^M(E)$ posee la propiedad de Lebesgue y la norma es orden continua y por tanto de Fatou. Por el resultado de la Proposición 8.2, el espacio $\ell^M(E)$ tiene entonces también la propiedad de Levi. En definitiva, $\ell^M(E)$ no contiene subespacios isomorfos a c_0 . ///

En particular, por la caracterización de la completitud débil secuencial en retículos de Banach ([L-T₄] Teorema 1.c.10) obtenemos el siguiente:

10. Corolario.

Sea M una función de Musielak-Orlicz convexa y E un retículo de Banach. Entonces el espacio $\ell^M(E)$ es débilmente secuencialmente completo si y solo si $\ell^M = h^M$ y además E es débilmente secuencialmente completo.

Podemos sustituir $\ell^M(E)$ por $h^M(E)$ en el Teorema 9 obteniéndose de esta forma un resultado análogo.

A continuación estudiamos las copias de ℓ^1 en $h^M(E)$.

11. Teorema.

Sea M una función de Musielak-Orlicz convexa y E un retículo de Banach. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- 11.1 $h^M(E)$ tiene una copia Riesz-isomorfa de l^1 .
- 11.2 $h^M(E)$ tiene una copia isomorfa complementada de l^1 .
- 11.3 E o h^M tienen una copia Riesz-isomorfa de l^1 .
- 11.4 E o h^M tienen una copia isomorfa complementada de l^1 .

Demostración.

La implicación 11.3 \rightarrow 11.1 es inmediata. Un resultado de Niculescu ([N] Corolario 1.9) afirma que en un retículo de Banach son equivalentes tener un subretículo Riesz-isomorfo a l^1 , tener un s.e.v. isomorfo a l^1 y complementado, y que el dual del retículo no sea débilmente secuencialmente completo. Por tanto es claro que 11.1 \leftrightarrow 11.2 y que 11.3 \leftrightarrow 11.4.

Finalmente, 11.1 \leftrightarrow 11.3. En efecto, según observamos en el Capítulo I, el dual de $h^M(E)$ es canónicamente isomorfo a $l^{M^*}(E')$ siendo $M^* = (\phi_n^*)_1^\infty$ la función de Musielak-Orlicz formada por las conjugadas de Young de las funciones ϕ_n , siendo $M = (\phi_n)_1^\infty$. Si el espacio $l^{M^*}(E')$ no es débilmente secuencialmente completo entonces $l^{M^*} \not\sim (h^M)'$ o E' no lo son, aplicando el Corolario 10. De nuevo por el mismo criterio de Niculescu, obtenemos que h^M o E tienen entonces copias Riesz-isomorfas de l^1 . ///

12. Observación.

Un resultado de Meyer-Nieberg ([S], pag. 153), establece que en un retículo de Banach orden continuo contener a ℓ^1 como s.e.v. isomorfo o como subretículo Riesz-isomorfo son equivalentes. En particular, si ϕ es una función de Orlicz convexa, el espacio de Orlicz h^ϕ tiene una copia complementada de ℓ^1 si y solo si el índice α_ϕ es 1 (aplicando el Teorema 4.a.9 de [L-T₄]).

Sin embargo, si el retículo X no es orden continuo, es decir $X \neq X_a$, la situación es distinta. En efecto, el espacio ℓ^2 (ℓ^∞) tiene copias isomorfas de ℓ^1 y no obstante no son nunca complementadas. En efecto, si lo fuesen, por el Teorema anterior ℓ^2 o ℓ^∞ deberían tener una copia complementada de ℓ^1 , lo cual no ocurre al ser ℓ^2 y ℓ^∞ espacios primos ([L-T₄]. Teoremas 2.a.3 y 2.a.7), es decir que todos los subespacios complementados de dimensión infinita son isomorfos al total.

Nótese que las copias de ℓ^∞ en $\ell^M(E)$ son complementadas y las de c_0 en $h^M(E)$ también cuando E es separable. En efecto, recordamos que un espacio de Banach X es inyectivo si para cualquier espacio de Banach Y que contiene isomorficamente a X, existe una proyección lineal acotada de Y sobre X. El espacio ℓ^∞ es inyectivo ([L-T₄], pag. 105). Asimismo, el espacio c_0 está caracterizado por la siguiente propiedad: un espacio de Banach separable infinito-dimensional que es complementado

en cada espacio de Banach separable que lo contiene es necesariamente isomorfo a c_0 . ($[Z_i]$).

A continuación vamos a probar que el subespacio $h^M(E)$ no es complementado en $\ell^M(E)$; para ello utilizaremos el siguiente resultado mas general:

13. Teorema.

Sea E un retículo de Banach σ -Levi verificando que $E \neq E_a$ y que el ideal E_a es separable y no es σ -Levi. Entonces el ideal E_a no es complementado en E .

Demostración.

Como E_a no es un retículo σ -Levi, por el Teorema 117.4 de $[Z]$ tiene un subretículo Riesz-isomorfo a c_0 . Existe pues una sucesión básica $(z_n)_1^\infty$ en E_a formada por elementos disjuntos y positivos equivalente a la base canónica de c_0 . Podemos suponer que $\|z_n\|=1$. La sucesión $(\sum_{n=1}^m z_n)_{m=1}^\infty$ es no decreciente y acotada en norma pues:

$$\left\| \sum_{n=1}^m z_n \right\| \leq M \left\| (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots) \right\|_\infty = M$$

para algún $M > 0$. Por ser E σ -Levi se deduce la existencia de $\sup_m \left(\sum_{n=1}^m z_n \right)$. Asimismo existe $\sup_n z_n$ pues $z_n \leq \sup_m \left(\sum_{n=1}^m z_n \right)$ para $n=1, 2, \dots$ y el retículo E es σ -completo (en efecto, la propiedad secuencialmente débil de Fatou implica la σ -completitud). Por ser los z_n disjuntos es inmediato que

$$\sup_n z_n = \sup_m \left(\sum_1^m z_n \right).$$

Definimos entonces un operador lineal T de ℓ^∞ en E por:

$$T(a) = (0) - \sum_1^\infty a_n z_n$$

para $a = (a_n)_1^\infty \in \ell^\infty$, donde la notación (0) -indica que $T(a)$ es la suma según el orden de $\sum_1^m a_n z_n$, es decir que existe $y_m + 0$ tal que $\left| \sum_1^m a_n z_n - T(a) \right| \leq y_m$ para $m=1,2,\dots$

Establezcamos la existencia de $T(a)$. Si los a_n son no negativos, la sucesión $\left(\sum_{n=1}^m a_n z_n \right)_{m=1}^\infty$ es no decreciente y acotada en norma por $M \| (a_n)_{n=1}^\infty \|_\infty$. Razonando como antes obtenemos la existencia de $\sup_m \left(\sum_1^m a_n z_n \right) = T(a)$. Además

$$\left| \sum_1^m a_n \cdot z_n - T(a) \right| = \left| \sum_{m+1}^\infty a_n z_n \right| + 0.$$

y por tanto $T(a) = (0) - \sum_1^\infty a_n z_n$. En el caso general basta definir $T(a)$ como:

$$T(a) = \left((0) - \sum_1^\infty (a_n)^+ z_n \right) - \left((0) - \sum_1^\infty (a_n)^- z_n \right)$$

para $(a_n)^+ = \max(a_n, 0)$ y $(a_n)^- = -\min(a_n, 0)$.

La inyectividad y la linealidad de T son inmediatas. Además, T es un isomorfismo topológico de ℓ^∞ sobre $T(\ell^\infty)$ porque:

$$\begin{aligned} |a_k z_k| &\leq |T(a)| \leq \| (a_n)_1^\infty \|_\infty \sup_n z_n \\ \text{para } k=1,2,\dots \text{ y por tanto} \\ \| (a_n)_1^\infty \|_\infty &\leq \| T(a) \| \leq \left\| \sup_n z_n \right\| \| (a_n)_1^\infty \|_\infty \end{aligned}$$

En particular, si $\|\cdot\|$ en una norma σ -Fatou y $M=1$ entonces T es una isometría pues entonces:

$$\left\| \sup_n z_n \right\| = \left\| \sup_m \sum_{n=1}^m z_n \right\| = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^m z_n \right\| \leq M = 1$$

También T es un isomorfismo de Riesz pues se tiene que:

$$T(|a|) = (0) - \sum_1^{\infty} |a_n| z_n = |(0) - \sum_1^{\infty} a_n z_n| = |T(a)|$$

ya que $\sum_1^m |a_n| z_n = \left| \sum_1^m a_n z_n \right|$ para $m=1,2,\dots$. En definitiva el retículo E posee una copia Riesz-isomorfa de l^{∞} . Por ser E_a separable, el subespacio $\overline{[(z_n)_1^{\infty}]}$ isomorfo a c_0 es complementado en E_a . Si ahora E_a fuese complementado en E , entonces $\overline{[(z_n)_1^{\infty}]}$ sería complementado en E y por tanto en $T(l^{\infty}) \approx l^{\infty}$ pues $T(l^{\infty}) \supset \overline{[(z_n)_1^{\infty}]}$. Como l^{∞} es un espacio de Banach primo llegamos finalmente a contradicción. ///

14. Observación.

Con la misma demostración anterior se obtiene que si X es un subretículo de Banach separable Lebesgue y no σ -Levi de un retículo de Banach Y que sea σ -Levi entonces X no es complementado en Y . En particular:

15. Corolario.

Si E es un retículo de Banach separable Lebesgue y no σ -Levi entonces, $J(E)$, la copia isométrica y Riesz-isomorfa canónica de E en E'' , no es complementada en E'' .

Demostración.

Como el bidual E'' del retículo E es σ -Levi (véase [K-A] pag. 396), puede aplicarse la observación anterior a $J(E)$ y a E'' . ///

16. Proposición.

Sea M una función de Musielak-Orlicz convexa tal que $h^M \neq l^M$ y E un retículo de Banach. Entonces el subespacio $h^M(E)$ no es complementado en $l^M(E)$.

Demostración.

El espacio h^M no es complementado en l^M , como consecuencia del Teorema 13, pues si $l^M \neq h^M$ entonces l^M es σ -Levi y $h^M = (l^M)_a$ es un retículo Lebesgue, no σ -Levi y separable. Ahora bien si el espacio $h^M(E)$ estuviera complementado en $l^M(E)$ entonces $l^M(E)$ tendría una copia canónica U de h^M complementada. El subespacio U estaría por tanto complementado en una copia V de l^M , llegándose a contradicción con el Teorema 13. ///

No ha sido posible obtener resultados similares a los Teoremas 6, 9 y 11 para copias de l^p con $p \neq 1$ y $p \neq \infty$ porque no existen caracterizaciones en el caso general de los e.l.s. que contienen copias Riesz-isomorfas de l^p . Sin embargo, restringiéndonos a los subretículos que sean ideales podemos obtener el siguiente resultado:

17. Teorema.

Sea M una función de Musielak-Orlicz convexa, E un retículo de Banach y $1 \leq p < \infty$. El espacio $h^M(E)$ tiene un ideal isomorfo a ℓ^p si y solo si h^M o E tienen un ideal isomorfo a ℓ^p .

Demostración.

Probemos la implicación no inmediata. Sea Y un ideal cerrado de $h^M(E)$ y designemos por π_i a la proyección canónica de $h^M(E)$ sobre E definida por:

$$\pi_i ((a_n)_{n=1}^\infty) = a_i$$

para $(a_n)_1^\infty \in h^M(E)$. Si $M = (\phi_n)_1^\infty$, es claro que $Y \subset (\pi_1(Y) \oplus \dots \oplus \pi_n(Y) \oplus \dots)_{h^M} = \{ (a_n)_1^\infty : a_n \in \pi_n(Y) \text{ y } \sum_1^\infty \phi_n(s \|a_n\|) < \infty ; \forall s > 0 \}$. Por otra parte si $a = (a_n)_1^\infty \in (\pi_1(Y) \oplus \dots \oplus \pi_n(Y) \oplus \dots)_{h^M}$, entonces para cada natural n existe $y_n \in Y$ tal que $\pi_n(y_n) = a_n$. Por ser Y un ideal, el elemento $(0, \dots, 0, a_n, 0, \dots) = x_n$, que verifica $|x_n| \leq |y_n|$, pertenece a Y . Por linealidad también $(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots)$ pertenece a Y . Como Y es cerrado y $a \in h^M(E)$, se tiene finalmente que:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots) \in Y$$

$$\text{Luego } Y = (\pi_1(Y) \oplus \dots \oplus \pi_n(Y) \oplus \dots)_{h^M}.$$

Supongamos entonces que $Y \not\sim \ell^p$. Como los subespacios $\pi_n(Y) = Y_n$ son complementado en Y , son por tanto cerrados en E .

Si algún Y_n es de dimensión infinita, el subespacio

$(\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\} \oplus Y_n \oplus \{0\} \oplus \dots)_{h^M}$ es isomorfo a Y_n y complementado en Y . Al ser ℓ^p un espacio primo, necesariamente $Y_n \cong \ell^p$ y concluimos que E tiene un ideal cerrado isomorfo a ℓ^p .

Si los Y_n son todos de dimensión finita, existe una sucesión $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $Y_{n_i} \neq \{0\}$ para $i=1,2,\dots$ y $n_1 < n_2 < \dots$. Los subespacios Y_{n_i} son espacios de Riesz normados de dimensión finita, es decir Riesz-isomorfos a algún \mathbb{R}^s con su orden natural para algún s . Un elemento $u \neq 0$ de un espacio de Riesz es discreto si el mínimo ideal que contiene a u coincide con el subespacio unidimensional $[u]$ que este genera. Al ser E arquimediano, por el Teorema 2.17 de [A-B], los Y_{n_i} son espacios de Riesz discretos, i.e. tienen una colección de elementos positivos y discretos $(e_j)_j$ disjuntos dos a dos tal que si $u \wedge e_j = 0$, $\forall j$, entonces $u=0$. Escogemos $a_i \in Y_{n_i}$ discreto y de norma 1. y consideramos $(X_1 \oplus \dots \oplus X_n \oplus \dots)_{h^M}$ donde:

$$X_n = \begin{cases} \{0\} & \text{si } n \neq n_1, n_2, \dots \\ \mathbb{K} a_{n_i} = [a_{n_i}] & \text{si } n=n_i \end{cases}$$

Con esta definición $(X_1 \oplus \dots \oplus X_n \oplus \dots)_{h^M}$ es un ideal cerrado de Y y es isomorfo al espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones h^K donde $K = (\phi_{n_i})_{i=1}^{\infty}$. Por tanto, ℓ^p tiene una copia isomorfa de h^K y este espacio no tiene ningún s.e.v. isomorfo a c_0 . Por un resultado debido a Woo ([Wq], Teorema 3.5), el espacio h^K coincide entonces con un espacio h^N para una

función de Musielak-Orlicz convexa $N = (\psi_i)_{i=1}^{\infty}$ que verifica la condición Δ_2 uniforme. Es decir existe $q \geq 1$ y un natural k tal que:

$$\frac{t \psi_i'(t)}{\psi_i(t)} \leq q$$

para $t \in (0,1)$, $i \geq k$. El conjunto $\{\psi_i : i \geq k\} \subset C([0,1])$ es entonces relativamente compacto. En efecto, suponiendo sin pérdida de generalidad que $\psi_i(1)=1$ obtenemos la acotación puntual de las funciones $(\psi_i)_{i \geq k}$. Además son equicontinuas en cada $t \in (0,1)$ ya que:

$$\begin{aligned} |\psi_i(t) - \psi_i(s)| &= \psi_i'(\theta) |t-s| \leq q \frac{\psi_i(\theta)}{\theta} |t-s| \\ &\leq q |t-s| \end{aligned}$$

para $t, s \in (0,1)$, $i \geq k$. Finalmente la equicontinuidad en 0 es inmediata por ser las ψ_i convexas.

Por lo tanto, existe una subsucesión $(\psi_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en $[0,1]$ a una función de Orlicz ϕ de forma que:

$$\psi_{i_j}(t) - \frac{1}{j^2} \leq \phi(t) \leq \psi_{i_j}(t) + \frac{1}{j^2}$$

para $t \leq 1$. Así pues las bases canónicas de $h^{(\psi_{i_j})}$ y de h^ϕ son equivalentes; en consecuencia $h^{(\psi_{i_j})} \sim h^\phi$. Como ℓ^p no contiene isomórficamente espacios de Orlicz que no sean el propio ℓ^p ($[L-T_2]$, Teorema 1) y por el razonamiento seguido h^ϕ es isomorfo a un subespacio de Y , se deduce que $h^\phi \sim \ell^p$. Por tanto h^M tiene una copia isomorfa de ℓ^p . Como además la identidad

es un isomorfismo de Riesz de h^N sobre h^K y $h^{(\psi_{1j})}$ es un ideal de h^N , dicha copia es también un ideal de h^K y por tanto de h^M . ///

18. Observaciones.

18.1 Sea E un retículo de Banach orden completo. La demostración anterior es válida si sustituimos $h^M(E)$ por $l^M(E)$ en el caso de que $h^M \neq l^M$. En efecto, todo ideal cerrado Y de $l^M(E)$ no contenido en $h^M(E)$ no es orden continuo por la Proposición 4. y por tanto al poseer una copia isomorfa de l^∞ no puede ser isomorfo a ningún l^p .

18.2 Por otra parte, como los ideales cerrados del tipo $(Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n \otimes \dots)_{h^M}$ son separables si $\dim Y_n < \infty$ para $n=1,2,\dots$ y el espacio l^∞ es primo se obtiene el siguiente resultado: el espacio $h^M(E)$ tiene un ideal cerrado isomorfo a l^∞ si y solo si E tiene un ideal cerrado isomorfo a l^∞ .

CAPITULO III

ESPACIOS DE ORLICZ DE SUCESSIONES CON PESO.
SUBESPACIOS EN ESPACIOS MODULARES.

En este Capítulo, por ϕ designamos una función de Orlicz estrictamente creciente, continua, con $\phi(1) = 1$ y cuyos índices verifican $0 < \alpha_\phi^\infty \leq \beta_\phi^\infty < \infty$ y $0 < \alpha_\phi \leq \beta_\phi < \infty$. Los espacios de Orlicz de funciones L^ϕ y de sucesiones l^ϕ son por tanto localmente acotados (véase p.e. [R] pag. 107 y siguientes, [K₁] pag. 258).

Dada una sucesión de escalares $(w_n)_1^\infty$, el espacio de Orlicz de sucesiones con pesos $l^{\phi(w_n)}$ se define como el conjunto de las sucesiones escalares $x = (x_n)_1^\infty$ verificando que el modular m de finido por:

$$m\left(\frac{x}{s}\right) = \sum_1^\infty \phi\left(\frac{|x_n|}{s}\right) w_n.$$

sea convergente para algún $s > 0$. El subespacio $h^\phi(w_n)$ de $l^{\phi(w_n)}$ es el formado por los $x = (x_n)_1^\infty$ tales que $m\left(\frac{x}{s}\right) < \infty$ para todo $s > 0$. El espacio $l^{\phi(w_n)}$ dotado de la F-norma:

$$\|x\| = \inf \{ s > 0: m\left(\frac{|x|}{s}\right) \leq s \}$$

es un F-espacio del que $h^\phi(w_n)$ es un s.e.v. cerrado. Puesto que β_ϕ y β_ϕ^∞ son finitos, la función ϕ verifica la Δ_2 condición en 0 y en ∞ y es fácil comprobar que $l^{\phi(w_n)} = h^\phi(w_n)$. Los espacios de Orlicz de sucesiones con peso son un caso particular de espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones.

El espacio $l^{\phi(w_n)}$ posee una base incondicional canónica. En general no simétrica, como ocurre en los espacios de Orlicz de sucesiones. Más aún, si dicha base es simétrica, entonces

necesariamente $\ell^\phi(w_n)$ es isomorfo a un espacio de Orlicz de sucesiones ([W_Q], Corolario 3.9 en el caso convexo σ como con secuencia directa de la Proposición III.6 en el caso general).

Observemos también que si ϕ y ψ son funciones de Orlicz equivalentes, entonces los espacios de sucesiones $\ell^\phi(w_n)$ y $\ell^\psi(w_n)$ coinciden en el sentido conjuntista y la identidad determina un isomorfismo entre ellos. Sin embargo, el recíproco en general no es cierto. Estos espacios han sido previamente estudiados en [Lu], [D-K], [Wa], [W₃], [H₁], [F-H] etc...

A continuación, tratamos de determinar que espacios de Orlicz de sucesiones ℓ^ψ (y en particular que espacios ℓ^p) pueden sumergirse en espacios de Orlicz de funciones L^ϕ a través de una representación del tipo $\ell^\phi(w_n)$ para sucesiones con pesos de suma finita i.e. $\sum_1^\infty w_n < \infty$. El siguiente resultado es básico:

1. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz. El espacio de Orlicz de funciones L^ϕ contiene una copia de $\ell^\phi(w_n)$ para cualquier sucesión $(w_n)_1^\infty$ de suma finita. Si además ϕ es equivalente a una función convexa, entonces dicha copia es complementada.

Demostración.

Suponiendo sin pérdida de generalidad que $\sum_1^\infty w_n = 1$, puede establecerse un isomorfismo T entre $\ell^\phi(w_n)$ y el subespacio

cerrado de L^ϕ generado por las funciones características χ_{A_n} de subconjuntos mutuamente disjuntos A_n de $[0,1]$ y de medida de Lebesgue $\mu(A_n) = w_n$. El operador T viene determinado por:

$$T\left(\sum_1^\infty \lambda_n e_n\right) = \sum_1^\infty \lambda_n \chi_{A_n}$$

siendo $(e_n)_1$ los vectores canónicos de $L^\phi(w_n)$, cuyas F -normas respectivas son $\|e_n\| = \frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{w_n}\right)}$ para $\psi(t) = t \phi(t)$.

Nótese que T es también un isomorfismo de Riesz.

Si suponemos que ϕ es además convexa, entonces la proyección "en media" P de L^ϕ sobre $\overline{[(\chi_{A_n})_1^\infty]}$ definida por

$$P(f) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\left(\int_{A_n} f\right)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}, \quad \forall f \in L^\phi,$$

es continua. En efecto, por la desigualdad de Jensen (véase p.e. $[K_u]$), se tiene que:

$$\phi(|P(f)(x)|) = \phi\left(\frac{\int_{A_n} f}{\mu(A_n)}\right) \leq \frac{\int_{A_n} \phi(|f|)}{\mu(A_n)} \quad (1)$$

para cada $x \in A_n$. Integrando la expresión (1) en $[0,1]$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(|P(f)|) &\leq \int_0^1 \phi\left(\sum_1^\infty \frac{\int_{A_n} |f|}{\mu(A_n)}\right) \leq \sum_1^\infty \left(\frac{\int_{A_n} \phi(|f|)}{\mu(A_n)}\right) \mu(A_n) = \\ &= \int_0^1 \phi(|f|). \end{aligned}$$

Por tanto, P es una proyección de norma 1, considerando que el espacio de Banach L^ϕ tiene definida su topología por la norma de Luxemburg, y concluimos que dicho espacio L^ϕ posee una copia complementada de $l^\phi(w_n)$. ///

2. Observación.

Si la función de Orlicz ϕ no es equivalente a una función convexa, el espacio de funciones L^ϕ no contiene necesariamente una copia complementada de $l^\phi(w_n)$ para $\sum_1^\infty w_n < \infty$. Este es el caso si $0 < \alpha_\phi^\infty \leq \beta_\phi^\infty < 1$, pues entonces el dual de L^ϕ es nulo ([P], Teorema 4.2.2) ya que $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi(s)}{s} = 0$.

Cuando la sucesión $(w_n)_1^\infty$ converge a ∞ y la función ϕ es equivalente a una convexa, se tiene que $l^\phi(w_n)$ es complementado en l^ϕ . Estudiemos el caso no convexo. Para ello recordemos que si $w_n \uparrow \infty$ el espacio $l^\phi(w_n)$ es isomorfo al generado por una base bloque $(u_n)_1^\infty$ de coeficientes constantes de la base canónica de l^ϕ , definida por $u_n = \sum_{j=i_n+1}^{j_n} e_k$ para $i_n \leq j_n \leq i_{n+1} \leq j_{n+1}$ y $j_n - i_n = E(w_n)$, donde $E(w_n)$ es la parte entera de w_n . En un F -espacio se define la topología de Mackey como la topología localmente convexa más fina entre las que son menos finas que la inicial. Si ϕ es una función de Orlicz, entonces la topología de Mackey en l^ϕ es inducida por la del espacio $l^{\hat{\phi}} \supset l^\phi([k_1])$, Teorema 3.3) siendo $\hat{\phi}$ la función convexa minorante de ϕ definida por:

$$\hat{\phi}(t) = \inf \left\{ \sum_1^n \phi(t_i) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_i \leq 1, \frac{1}{n} \sum_1^n t_i = t \right\}$$

si $0 \leq t \leq 1$ y $\hat{\phi}(t) = \phi(t)$ para $t > 1$. Se tiene entonces el siguiente resultado:

3. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz. Una condición suficiente para que las bases bloque de coeficientes constantes y cuyo número de elementos tiende a ∞ de la base canónica de ℓ^ϕ no sean complementadas es que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\hat{\phi}^{-1}(\phi(s))} = 0 \quad (1)$$

Demostración.

Supongamos que una base bloque $(u_n)_1^\infty$ con $u_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{w_n}, 0, \dots)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty$ sea complementada. Por un resultado de Kalton ([K₁] Proposición 3.2), se deduce que para cualquier sucesión de escalares $(\lambda_n)_1^\infty$ se tiene que $\lambda_n u_n \rightarrow 0$ en ℓ^ϕ si y solo si $\lambda_n u_n \rightarrow 0$ en $\ell^{\hat{\phi}}$. Escojamos:

$$\lambda_n = \phi^{-1} \left(\frac{1}{w_n} \right)$$

Obtenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \|\lambda_n u_n\|_\phi &= \inf \left\{ s > 0 : \phi \left(\frac{|\lambda_n|}{s} \right) w_n \leq s \right\} = 1 \\ \|\lambda_n u_n\|_{\hat{\phi}} &= \inf \left\{ s > 0 : \hat{\phi} \left(\frac{|\lambda_n|}{s} \right) w_n \leq 1 \right\} = \frac{\phi^{-1} \left(\frac{1}{w_n} \right)}{\hat{\phi}^{-1} \left(\frac{1}{w_n} \right)} \end{aligned}$$

Como $(\frac{1}{w_n})_1^\infty$ converge a 0, esto contradice el resultado de Kalton pues por (1) se tiene que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(\frac{1}{w_n})}{\hat{\phi}^{-1}(\frac{1}{w_n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(\frac{1}{w_n})}{\phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(\frac{1}{w_n})))} = 0 \quad (2)$$

Observese que la condición (2) , menos general que (1) , es suficiente para que la base bloque elegida $(u_n)_1^\infty$ no sea complementada en \mathcal{L}^ϕ . En particular , si $\hat{\phi}(s)=s$, la condición (1) se convierte en:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(s)}{s} = \infty \quad . ///$$

4. Observación.

En lo sucesivo nos ceñiremos esencialmente al caso de espacios de Orlicz de sucesiones con pesos de suma finita por su relación con los espacios de Orlicz de funciones L^ϕ . La mayor parte de los resultados y definiciones pueden enunciarse y probarse de modo similar para espacios de Orlicz de sucesiones con pesos tendiendo a ∞ . En el primer caso se utilizan propiedades de la función ϕ en un entorno de ∞ y en el segundo propiedades equivalentes en un entorno de 0.

Consideramos los siguientes subconjuntos compactos, relacionados con ϕ , de $C([0,1])$ dotados de la topología de la convergencia uniforme e introducidos por Lindenstrauss y Tzafriri en $[L-T_1]$, $[L-T_2]$ y $[L-T_3]$ en el caso convexo y por Kalton

en $[K_1]$ en el caso no convexo para espacios de sucesiones:

$$F_{\phi, s} = \left\{ \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} : \lambda \leq s \right\} ; \quad F_{\phi} = \bigcap_{s>0} E_{\phi, s}$$

$$F_{\phi, s}^{\infty} = \left\{ \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} : \lambda \geq s \right\} ; \quad F_{\phi}^{\infty} = \bigcap_{s>0} E_{\phi, s}^{\infty}$$

$$C_{\phi, s} = \overline{\text{co}} (E_{\phi, s}) \quad ; \quad C_{\phi} = \overline{\text{co}} (E_{\phi})$$

$$C_{\phi, s}^{\infty} = \overline{\text{co}} (E_{\phi, s}^{\infty}) \quad ; \quad C_{\phi}^{\infty} = \overline{\text{co}} (E_{\phi}^{\infty}).$$

para cada $s > 0$. Las funciones de estos conjuntos son de Orlicz.

Citemos que el espacio de Orlicz de sucesiones l^{ϕ} tiene una copia de l^{ψ} para una función de Orlicz ψ si y solo si la función ψ es equivalente en 0 a una función de $C_{\phi, 1}([L-T_2])$, Teorema 1 y $[K_1]$ Teorema 4.6). Si ϕ es convexa, el espacio de Orlicz de funciones l^{ϕ} tiene una copia isomorfa de l^{ψ} generada por una sucesión básica, formada por funciones de soportes disjuntos entre sí, si y solo si ψ es equivalente en 0 a una función de $C_{\phi}^{\infty}([L-T_3])$ (Proposición 4).

A continuación estudiamos condiciones necesarias y suficientes para que un espacio l^{ψ} pueda representarse como $l^{\phi}(w_n)$ para $\sum_1^{\infty} w_n < \infty$, a través del conjunto F_{ϕ}^{∞} .

5. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz. Para cada función ψ de $F_{\phi}^{\infty} \subset C([0, 1])$ existe una sucesión de pesos $(w_n)_1^{\infty}$ con $\sum_1^{\infty} w_n < \infty$

tal que $\ell^\phi(w_n)$ es isomorfo a ℓ^ψ .

Demostración.

Dada $\psi \in E_\phi^\infty$ existe una sucesión de escalares $(c_n)_1^\infty$ tendiendo a ∞ , tal que $\frac{\phi(c_n \cdot)}{\phi(c_n)}$ converge uniformemente a ψ en el intervalo $[0,1]$. Es decir existe $c_n > 0$ con $\phi(c_n) > 2^n$ verificando que:

$$\left| \frac{\phi(c_n t)}{\phi(c_n)} - \psi(t) \right| < \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

para todo $t \in [0,1]$. Definimos $w_n = \frac{1}{\phi(c_n)}$; el espacio $\ell^\phi(w_n)$ tiene una base de Schauder formada por los vectores $(c_n e_n)_1^\infty$. De la relación (1), se deduce entonces que $\sum_1^\infty \lambda_n e_n$ converge en ℓ^ψ , es decir $\sum_1^\infty \psi(|\lambda_n|) < \infty$, si y solo si $\sum_1^\infty \lambda_n c_n e_n$ converge en $\ell^\phi(w_n)$, es decir si:

$$\sum_1^\infty \phi(|\lambda_n| c_n) w_n = \sum_1^\infty \frac{\phi(|\lambda_n| c_n)}{\phi(c_n)} < \infty$$

Por lo tanto, la base canónica $(e_n)_1^\infty$ de ℓ^ψ y la base $(c_n e_n)_1^\infty$ de $\ell^\phi(w_n)$ son equivalentes. ///

6. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz. Para cada sucesión de pesos $(w_n)_1^\infty$ de suma finita, existe una función $\psi \in E_\phi^\infty$ tal que ℓ^ψ es isomorfo a un subespacio $\ell^\phi(w_{n_k})$ de $\ell^\phi(w_n)$.

Demostración.

Denotemos por c_n a $\phi^{-1}(\frac{1}{w_n})$. A partir de un cierto natural n_0 se tiene que $c_n \geq 1$. El conjunto S de $C([0,1])$ definido por:

$$S = \left\{ \frac{\phi(c_{n_k})}{\phi(c_{n_k})} : n \geq n_0 \right\} = \{ \phi_{n_k} \}_{n \geq n_0}$$

está incluido en $E_{\phi,1}^\infty = \{ \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)} : \lambda \geq 1 \}$, subconjunto compacto de $C([0,1])$. Luego existe una subsucesión $(\phi_{n_k})_{k=1}$ que converge uniformemente a alguna función de Orlicz ψ en $[0,1]$. Dicha subsucesión puede elegirse para que:

$$\left| \frac{\phi(c_{n_k})}{\phi(c_{n_k})} - \psi(t) \right| \leq \frac{1}{2^k}$$

si $t \leq 1$. Si consideramos ahora el espacio de sucesiones con pesos $\ell^{\phi(w_{n_k})}$ para $w_{n_k} = \frac{1}{\phi(c_{n_k})}$, se tiene que la base canónica de ℓ^ψ y la base $(c_{n_k} e_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $\ell^{\phi(w_{n_k})}$ son equivalentes lo cual implica que ℓ^ψ y $\ell^{\phi(w_{n_k})}$ son isomorfos. ///

Los resultados anteriores consiguen mejorarse en los Corolarios siguientes imponiendo condiciones adicionales a las funciones ϕ y ψ .

7. Corolario.

Sea $0 < p < \infty$ y ϕ una función de Orlicz. Se verifica que existe una sucesión de pesos $(w_n)_1^\infty$ de suma finita tal que $\ell^{\phi(w_n)}$ es isomorfo a ℓ^p si y solo si existe alguna función $\psi \in \pi_\phi^\infty$ que es equivalente a la función t^p en el 0.

Demostración.

son equivalentes en 0, entonces $\mathcal{L}^{\phi}(w_n)$ es isomorfo a $\mathcal{L}^{\psi} \mathcal{L}^P$ para alguna sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} w_n < \infty$.

Recíprocamente, supongamos que el espacio $\mathcal{L}^{\phi}(w_n)$ sea isomorfo a \mathcal{L}^P para alguna sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ de suma finita. Se tiene por la Proposición 6 que existe una función ψ en E_{ϕ}^{∞} y una subsucesión (w_{n_k}) de forma que $\mathcal{L}^{\phi}(w_{n_k})$ es isomorfo a \mathcal{L}^{ψ} . Como el espacio \mathcal{L}^P posee entonces una copia isomorfa de \mathcal{L}^{ψ} se deduce por el Teorema 1 de [L-T₂] que ψ y t^P son equivalentes en el 0 y por tanto que $\mathcal{L}^{\psi} = \mathcal{L}^P$. ///

8, Corolario.

Sean ϕ y F funciones de Orlicz tal que F_{ϕ}^{∞} no contiene funciones equivalentes en 0 a funciones convexas. Entonces, existe una sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} w_n < \infty$ verificando que $\mathcal{L}^{\phi}(w_n)$ es isomorfo a \mathcal{L}^F si y solo si existe alguna función $\psi \in F_{\phi}^{\infty}$ equivalente a F en 0.

Demostración.

Si F es equivalente a $\psi \in F_{\phi}^{\infty}$, entonces por la Proposición 5 es claro que $\mathcal{L}^F \sim \mathcal{L}^{\phi}(w_n)$ para alguna sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ de suma finita.

Recíprocamente, si $\mathcal{L}^{\phi}(w_n)$ es isomorfo a \mathcal{L}^F , por la Proposición 6 existe una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ verificando $\mathcal{L}^{\phi}(w_{n_k}) \sim \mathcal{L}^{\psi}$ para alguna función $\psi \in F_{\phi}^{\infty}$. Luego, el espacio de Orlicz de sucesiones \mathcal{L}^F tiene una copia complementada de \mathcal{L}^{ψ} .

Como $\ell^{\phi}(w_n)$ es separable (pues es isomorfo a un s.e.v. de L^{ϕ}), la función F debe verificar la condición Δ_2 y por un resultado de Kalton ([K₁], Proposición 7.1) concluimos que F y ψ son equivalentes en 0 (ya que por las hipótesis la función ψ no es equivalente en 0 a una convexa). ///

Una condición suficiente para que F_{ϕ}^{∞} no contenga funciones equivalentes en 0 a funciones convexas es que $\beta_{\phi}^{\infty} < 1$. En efecto, sea $\psi \in F_{\phi}^{\infty}$. Existe $(w_n)_1^{\infty}$ de suma finita tal que $\ell^{\psi} \sim \ell^{\phi}(w_n)$. Por el Teorema 1.2 de [H₂], el espacio $\ell^{\phi}(w_n)$ no es localmente convexo; el espacio ℓ^{ψ} no es de Banach y por el Teorema de Mazur-Orlicz ([R], Teorema 3.4.10) la función ψ no es equivalente en el 0 a una convexa.

Los apartados anteriores nos llevan a introducir la siguiente notación:

9. Definición.

Dado $0 < p < \infty$, una función de Orlicz ϕ tiene la propiedad W^p en ∞ si existe una sucesión de pesos $(w_n)_1^{\infty}$ con $\sum_1^{\infty} w_n < \infty$ tal que $\ell^{\phi}(w_n)$ es isomorfo a ℓ^p .

Con esta terminología, el corolario 7 establece que una función ϕ tiene la propiedad W^p en ∞ si y solo si existe una función $\psi \in F_{\phi}^{\infty}$ tal que $\psi \sim t^p$ en 0.

Para cada función ϕ definimos además el conjunto P_{ϕ}^{∞} como:

$P_\phi^\infty = \{p > 0 : \phi \text{ tiene la propiedad } W^p \text{ en } \infty\}$

10. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz. Se verifica que $P_\phi^\infty \subset C[\alpha_\phi^\infty, \beta_\phi^\infty]$.

Demostración.

En efecto, si ϕ tiene la propiedad W_p en ∞ , entonces el espacio de Orlicz de funciones L^ϕ tiene una copia isomorfa de L^p de la forma $L^{\phi(w_n)}$ para alguna sucesión $(w_n)_1^\infty$ de suma finita. Caso de ser ϕ equivalente a una función convexa, deducimos que $p \in [\alpha_\phi^\infty, \beta_\phi^\infty]$ como consecuencia de una proposición de Lindenstrauss y Tzafriri ([L-T₃] pag.386). Cuando ϕ no es equivalente a una función convexa, podemos remitirnos al caso anterior sin más que observar que si ϕ posee la propiedad W^p en ∞ entonces la función $\psi = t\phi$ tiene la propiedad W^{p+1} en ∞ . En efecto si la sucesión $(\frac{\phi(\lambda_n t)}{\phi(\lambda_n)})_1^\infty$ converge a una función F equivalente a t^p en el 0 para alguna sucesión $\lambda_n \rightarrow \infty$, entonces es claro que $(\frac{\psi(\lambda_n t)}{\psi(\lambda_n)} = \frac{t \phi(\lambda_n t)}{\phi(\lambda_n)})_1^\infty$ converge a tF , que es equivalente en el 0 a t^{p+1} . ///

11. Observación.

11.1. La propiedad W^p en ∞ es invariante por equivalencia de funciones, es decir si ϕ y ψ son funciones equivalentes en el ∞ entonces ϕ tiene la propiedad W^p en ∞ si y solo si ψ la tiene. En efecto, si $\phi \sim \psi$ entonces $L^{\phi(w_n)} = L^{\psi(w_n)}$ para

toda sucesión $(w_n)_1^\infty$ de suma finita. Comprobemos una de las dos inclusiones. Si

$$A \phi(t) \leq \psi(t) \leq B \phi(t)$$

para $t \geq t_0$. Y $\sum_1^\infty \phi(|\lambda_n|) w_n < \infty$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \psi(|\lambda_n|) w_n &= \sum_{|\lambda_n| \leq t_0} \psi(|\lambda_n|) w_n + \sum_{|\lambda_n| > t_0} \psi(|\lambda_n|) w_n \\ &\leq \psi(t_0) \sum_1^\infty w_n + B \sum_1^\infty \phi(|\lambda_n|) w_n < \infty \end{aligned}$$

Como consecuencia de todo esto, la propiedad se conserva por isomorfismos en el caso reflexivo pues si L^ϕ y L^ψ son espacios de Banach reflexivos isomorfos se tiene que $\phi \sim \psi$ (véase p. e. [J-M-S-T] Teorema 7.1).

11.2. Si ϕ es una función de Orlicz entonces el espacio $l^\phi(w_n)$ no es isomorfo a c_0 para ninguna sucesión de pesos de suma finita. En efecto, si $l^\phi(w_n) \sim c_0$, entonces por la Proposición 1, el espacio L^ϕ contiene un s.e.v. que no es orden continuo. Esto es contradictorio pues si $\beta_\phi < \infty$ entonces $L^\phi = L^\phi_\beta$ tiene una topología de Lebesgue (véase un resultado similar para espacios de sucesiones en la Proposición II.4).

Una condición analítica en términos de la función ϕ y de la sucesión de pesos $(w_n)_1^\infty$ para que $l^\phi(w_n)$ sea Riesz-isomorfo a l^∞ (resp. $h^\phi(w_n)$ sea Riesz-isomorfo a c_0) ha sido re-

cientemente dada por Wnuk en $[W_3]$ (eliminando las restricciones que hemos impuesto $\beta_\phi < \infty$ y $\beta_\phi^\infty < \infty$).

La caracterización de la propiedad W^p en ∞ en términos del conjunto E_ϕ^∞ resulta ardua de aplicar en cada caso concreto. Ello es debido a que en general el conjunto E_ϕ^∞ es difícil de computar explícitamente.

Damos ahora un criterio sobre ϕ , fácil de contrastar, que garantiza que tenemos la propiedad W^p en ∞ para funciones de variación regular en ∞ (que cumplen $\alpha_\phi^\infty = \beta_\phi^\infty = p$). En general esta condición suficiente no es necesaria.

12. Proposición.

Sea $0 < p < \infty$. Si ϕ es una función de Orlicz verificando que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \phi'(t)}{\phi(t)} = p, \quad (1)$$

entonces ϕ tiene la propiedad W^p en ∞ .

Demostración.

Por la condición (1), para un número real $\epsilon > 0$ arbitrario dado, existe $t_\epsilon > 0$ tal que:

$$\frac{p - \epsilon}{t} \leq \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \leq \frac{p + \epsilon}{t}$$

para $t > t_\epsilon$. Fijado $0 < x < 1$, tomamos $t > 0$ suficientemente

grande para que $t \geq tx > t_\epsilon$.

Entonces se tiene que:

$$\int_{tx}^t \frac{(p - \epsilon)}{s} ds \leq \int_{tx}^t \frac{\phi(s)}{\phi(s)} ds \leq \int_{tx}^t \frac{(p + \epsilon)}{s} ds$$

Luego:

$$\begin{aligned} (p - \epsilon) \log \frac{t}{tx} &= (p - \epsilon) \log \left(\frac{1}{x} \right) \leq \log \frac{\phi(t)}{\phi(tx)} \leq \\ &\leq (p + \epsilon) \log \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

y por tanto:

$$x^{p+\epsilon} \leq \frac{\phi(tx)}{\phi(t)} \leq x^{p-\epsilon}$$

Sea ahora $\psi \in F_\phi^\infty$. Existe entonces una sucesión $(c_n)_{n=1}^\infty$ convergente a ∞ tal que $\frac{\phi(c_n \cdot)}{\phi(c_n)}$ converge uniformemente a

ψ en $F_\phi^\infty \subset C([0,1])$. Es decir, dado $\delta > 0$ existe un natural n_0 tal que:

$$\left| \frac{\phi(c_n x)}{\phi(c_n)} - \psi(x) \right| < \delta$$

para $x \in [0,1]$ y $n \geq n_0$. Por tanto para n suficientemente grande se obtiene que:

$$\begin{aligned} x^{p+\epsilon} - \delta &\leq \frac{\phi(c_n x)}{\phi(c_n)} - \delta \leq \psi(x) \leq \frac{\phi(c_n x)}{\phi(c_n)} + \delta \leq \\ &\leq x^{p-\epsilon} + \delta \end{aligned}$$

Haciendo ahora tender ε y δ a 0, se deduce que $\psi(x) = x^p$.
 Luego $E_\phi^\infty = \{x^p\}$ y por el Corolario 7 concluimos que ϕ tiene
 la propiedad W^p en ∞ . ///

Los espacios $L^\phi(w_n)$, para pesos de suma finita y una función ϕ de variación regular verificando la condición (1) de la anterior Proposición, tienen interesantes propiedades que pasamos a considerar:

13. Corolario.

Sea $0 < p < \infty$ y ϕ una función de Orlicz verificando la condición 12.(1). Entonces para cada sucesión de pesos $(w_n)_{n=1}^\infty$ de suma finita, se tiene que $L^\phi(w_n) \otimes L^p$ es isomorfo a L^p .

Demostración.

Por la Proposición 6, para cada sucesión $(w_n)_1$ con $\sum_1^\infty w_n < \infty$ existe una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^\infty$ verificando que $L^\phi(w_{n_k}) \sim L^p$, ya que $E_\phi^\infty = \{t^p\}$. Luego L^p es complementado en $L^\phi(w_n)$ y por tanto:

$$L^\phi(w_n) \otimes L^p \sim (H \otimes L^\phi(w_{n_k})) \otimes L^p \sim H \otimes (L^p \otimes L^p) \sim \\ \sim H \otimes L^p \sim L^\phi(w_n). ///$$

14. Corolario.

Sea $0 < p < \infty$ con $p \neq 1$ y ϕ una función de Orlicz verificando la condición 12.(1). Entonces, para cualquier sucesión

$(w_n)_1^\infty$ de suma finita, si el espacio $L^\phi(w_n)$ no es isomorfo a L^p tampoco es isomorfo a ningún otro espacio de Orlicz de sucesiones L^ψ .

Demostración.

Sea ϕ de variación regular de potencia $p > 1$ y supongamos que $L^\phi(w_n)$ es isomorfo a L^ψ para alguna función de Orlicz ψ . El espacio L^ϕ tiene entonces un subespacio isomorfo a L^ψ , generado por una sucesión de funciones de soportes disjuntos entre sí. Como ϕ es equivalente a una función convexa, podemos aplicar un resultado de Lindenstrauss y Tzafriri ([L-T₃], pag. 336) y el conjunto $C_\phi^\infty = E_\phi^\infty = \{t^p\}$ contiene pues una función equivalente a ψ , es decir $L^\phi(w_n) \sim L^p$.

Supongamos ahora que $p < 1$. El conjunto E_ϕ^∞ no tiene funciones equivalentes a funciones convexas, ya que $E_\phi^\infty = \{t^p\}$. Sea $L^\phi(w_n) \sim L^\psi$ para alguna función de Orlicz ψ . Podemos pues aplicar el Corolario 8 y la función ψ es equivalente en 0 a t^p . ///

Si $p=1$ y la función ϕ es equivalente a una convexa, el resultado anterior también es cierto.

15. Corolario.

Sea $0 < p < \infty$ y ϕ una función de Orlicz verificando la condición 12(1). Entonces cada espacio $L^\phi(w_n)$ con $\sum_1^\infty w_n < \infty$, no isomorfo a L^p , tiene una cantidad no numerable de bases

incondicionales no equivalentes entre sí.

Demostración.

Probemos que si $\ell^\phi(w_n)$ no es isomorfo a ℓ^p no tiene una única base incondicional salvo equivalencias. Si fuese así, tendría también una única base simétrica salvo equivalencias pues las reordenaciones de la base canónica de $\ell^\phi(w_n)$ serían equivalentes entre sí. Ahora bien, por la Proposición 6 existe una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^\infty$ con $\ell^\phi(w_{n_k}) \sim \ell^p$. Como la base canónica de $\ell^\phi(w_n)$ es entonces subsimétrica, es decir equivalente a todas sus subsucesiones básicas, se tiene entonces que:

$$\ell^\phi(w_n) \sim \ell^\phi(w_{n_k})$$

Por tanto ℓ^p y $\ell^\phi(w_n)$ serían isomorfos en contradicción con la hipótesis.

Finalmente, podemos encontrar una cantidad no numerable de bases no equivalentes para $\ell^\phi(w_n)$, aplicando el mismo razonamiento que en [L-T₄] (pag. 118). ///

Analizando las demostraciones, es fácil comprobar que los tres Corolarios anteriores son válidos para funciones de Orlicz que verifican $E_\phi^\infty = \{t^p\}$, condición más general que la 12.(1).

16. Observación.

Es conocido que existen espacios $\ell^\phi(w_n)$ no isomorfos a

L^p para ϕ verificando la condición 12.(1). Así en el Corolario 4.2 de $[H_1]$, se establece que si ϕ no es equivalente a una función p -convexa en ∞ ($0 < p \leq 1$) entonces existe una sucesión $(w_n)_1^\infty$ con $\sum_1^\infty w_n < \infty$ de tal forma que el espacio $L^{\phi(w_n)}$ no es localmente p -convexo y por tanto que $L^{\phi(w_n)}$ no es isomorfo a L^p . Por ejemplo, consideremos la función ϕ definida por:

$$\phi(t) = \begin{cases} t^p & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{t^p}{\log(t + e - 1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Para esta función p -cóncava en ∞ que verifica la condición 12.(1), existen espacios con pesos de suma finita isomorfos a L^p y otros que no son isomorfos a ningún espacio de Orlicz L^ψ , (por el Corolario 1.4 y el resultado citado de $[H_1]$).

Cuando la función no es necesariamente de variación regular, se tiene la siguiente condición suficiente para la propiedad W^p en ∞ .

17. Proposición ($[H_2]$, Teoremas 2.1 y 2.2).

Sea $0 < p < \infty$ y ϕ una función de Orlicz.

17.1. Si ϕ es equivalente a una función p -cóncava en ∞ y $p = \beta_\phi^\infty$ entonces ϕ tiene la propiedad W^p en ∞ .

17.2. Si ϕ es equivalente a una función p -convexa en ∞ y $p = \alpha_\phi^\infty$ entonces ϕ tiene la propiedad W^p en ∞ .

La condición 12.(1) no es un caso particular de la condición de la Proposición anterior como muestra el siguiente ejemplo.

18. Ejemplo.

Una función de Orlicz ϕ con $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \phi'(t)}{\phi(t)} = p$ y que no es equivalente en el ∞ a una función p -cóncava ni a una p -convexa para $0 < p < \infty$.

Definimos ϕ en $[e^{2!}, \infty)$ por:

$$\phi(t) = \begin{cases} a_k \frac{t^p}{\log t} & \text{si } t \in [e^{2k!}, e^{(2k+1)!}] \\ b_k t^p \log t & \text{si } t \in [e^{(2k+1)!}, e^{(2k+2)!}] \end{cases}$$

para $k=1, 2, \dots$ y donde los coeficientes a_k y b_k hacen continua la función, i.e. son:

$$a_k = \frac{(2!)^2 (4!)^2 \dots ((2k)!)^2}{(3!)^2 (5!)^2 \dots ((2k-1)!)^2} = 2^2 4^2 \dots (2k)^2$$

$$b_k = \frac{(2!)^2 (4!)^2 \dots ((2k)!)^2}{(3!)^2 (5!)^2 \dots ((2k+1)!)^2} = \frac{1}{3^2 5^2 \dots (2k+1)^2}$$

Estudiemos diversas propiedades de la función ϕ :

a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t^p} = 0.$

En efecto, para $t = e^{(2k+1)!}$ se tiene que:

$$\frac{\phi(t)}{t^p} = b_k (2k+1)! = \frac{(2k+1)!}{3^2 \dots (2k+1)^2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}$$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t^p} = \infty :$

En efecto, para $t = e^{(2k)!}$ se tiene que:

$$\frac{\phi(t)}{t^p} = \frac{a_k}{(2k)!} = \frac{2 \cdot 4 \dots (2k)}{3 \cdot 5 \dots (2k-1)} = \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j-1}$$

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \phi'(t)}{\phi(t)} = p.$

En efecto, la función es derivable salvo en los puntos $e^{n!}$ para $n=3,4,\dots$ donde lo es a la izquierda y a la derecha. Más concretamente:

$$\frac{t \phi'(t)}{\phi(t)} = \begin{cases} p - \frac{1}{\log t} & \text{si } t \in (e^{2k!}, e^{(2k+1)!}) \\ p + \frac{1}{\log t} & \text{si } t \in (e^{(2k+1)!}, e^{(2k+2)!}) \end{cases}$$

En particular, de la condición c) se deduce que $\alpha_\phi^\infty = \beta_\phi^\infty = p$ y que ϕ cumple la condición Δ_2 en ∞ . Recordemos que por una caracterización de Turpán ([T₂], Proposición 1), una función ϕ es equivalente en el ∞ a una función p -cóncava en el ∞ (respectivamente p -convexa en el ∞) si y solo si existe $K > 0$ tal que en un entorno de ∞ y si $0 < x \leq y$ se tiene que:

$$\frac{\phi(y)}{y^p} \leq K \frac{\phi(x)}{x^p} \quad (\text{resp. } \frac{\phi(y)}{y^p} \geq K \frac{\phi(x)}{x^p})$$

La condición anterior implica que:

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \frac{\phi(y)}{y^p} < \infty \quad (\text{resp. } \underline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \frac{\phi(y)}{y^p} > 0).$$

Así pues por las condiciones a) y b) , la función ϕ no es equivalente en el ∞ a una función p-cóncava ni a una función p-convexa. Nótese que si $p=1$, el resultado para la convexidad es consecuencia de ser $(L^\phi)' = \{0\}$ pues $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t} = 0$ y ϕ verifica la condición Δ_2 en ∞ .

Abundando en la Observación.4 , podemos definir las propiedades W^p en 0 y el conjunto P_ϕ^0 para una función de Orlicz ϕ , y obtener resultados similares a los de los Corolarios 13 , 14 y 15 para funciones ϕ que verifican $E_\phi = \{t^p\}$ y espacios de sucesiones $l^\phi(w_n)$ para $(w_n)_1^\infty$ convergiendo a ∞ . Por ejemplo $l^\phi(w_n) \sim l^p$ para alguna sucesión $(w_n)_1^\infty$ tendiendo a ∞ si y solo si existe una función $\psi \in E_\phi$, equivalente a t^p en un entorno de 0.

En ocasiones, el estudio de los espacios $l^\phi(w_n)$ con $\sum_{n=1}^\infty w_n < \infty$ puede deducirse del análisis de los espacios $l^{\tilde{\phi}}(w_n)$ para una sucesión $(w_n)_1^\infty$ tendiendo a ∞ , donde $\tilde{\phi}$ viene dada por la siguiente definición:

19. Definición.

Si ϕ es una función de Orlicz definida en $[0, \infty)$, su simétrica $\tilde{\phi}$ está definida por:

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \frac{1}{\phi(\frac{1}{t})} & \text{si } t>0 \end{cases}$$

20. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz y designemos por \tilde{E}_ϕ al conjunto de las funciones simétricas de las de E_ϕ . Se tiene entonces que:

20.1. $E_\phi^\infty = \tilde{E}_\phi$

20.2. $\alpha_\phi^\infty = \alpha_\phi$ y $\beta_\phi^\infty = \beta_\phi$

Demostración.

20.1. Como los índices de ϕ son finitos no nulos, las funciones de E_ϕ ó E_ϕ^∞ pueden considerarse definidas en cualquier $t \geq 0$, sin más que sumergir a $(\frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} : 0 < \lambda < \infty)$ en $C([0, s])$ y hacer tender s a ∞ . Supongamos que $F \in E_\phi^\infty$. Por el comentario anterior, la función F es límite puntual en $[0, \infty)$ de una sucesión del tipo $(\frac{\phi(\lambda_n \cdot)}{\phi(\lambda_n)})_1^\infty$ para $\lambda_n \uparrow \infty$. Por tanto:

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{F(\frac{1}{t})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(\lambda_n)}{\phi(\frac{\lambda_n}{t})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(\frac{t}{\lambda_n})}{\phi(\frac{1}{\lambda_n})}$$

Vemos pues que \tilde{F} es límite puntual de una sucesión del tipo $(\frac{\phi(\mu_n \cdot)}{\phi(\mu_n)})$ para $\mu_n \uparrow 0$. Por tanto $\tilde{F} \in E_\phi$, es decir que $F \in \tilde{E}_\phi$. La otra inclusión es entonces inmediata. Obsérvese también que:

$$E_{\phi, 1}^\infty = \tilde{E}_{\phi, 1}$$

20.2. Recordemos ([L-T₄]) que:

$$\alpha_\phi = \sup \{ p > 0 : \sup_{0 < x, t < 1} \frac{\phi(tx)}{\phi(t) x^p} < \infty \}$$

$$y \quad \alpha_{\phi}^{\infty} = \sup \{ p > 0 : \sup_{y, s \geq 1} \frac{\tilde{\phi}(s) y^p}{\phi(s y)} < \infty \}$$

Haciendo $y = \frac{1}{x}$, $s = \frac{1}{t}$ se tiene que:

$$\frac{\phi(tx)}{\phi(t) x^p} = \frac{y^p \tilde{\phi}(\frac{1}{t})}{\tilde{\phi}(\frac{y}{t})} = \frac{y^p \tilde{\phi}(s)}{\phi(s y)} \quad (1)$$

De (1) se sigue inmediatamente $\alpha_{\tilde{\phi}}^{\infty} = \alpha_{\phi}^{\infty}$. De igual modo se prueba que $\beta_{\tilde{\phi}}^{\infty} = \beta_{\phi}^{\infty}$. ///

Apliquemos ahora lo obtenido en la Proposición anterior:

21. Ejemplo.

Consideremos la función ϕ definida por Lindberg en [Lb] (pag. 135). Su simétrica $\tilde{\phi}$ está definida por:

$$\tilde{\phi}(t) = t^{p+\text{sen}(\log |\log t|)}$$

si $t \geq 1$ y para $p > \sqrt{2}$. Se verifica entonces que:

$$E_{\tilde{\phi}}^{\infty} = E_{\phi}^{\infty} = \{t^q : q \in [p - \sqrt{2}, p + \sqrt{2}]\}, \text{ y que}$$

$$[\alpha_{\tilde{\phi}}^{\infty}, \beta_{\tilde{\phi}}^{\infty}] = [\alpha_{\phi}^{\infty}, \beta_{\phi}^{\infty}] = [p - \sqrt{2}, p + \sqrt{2}]$$

Por tanto ϕ verifica la propiedad w^p en ∞ para todo p del intervalo $[\alpha_{\tilde{\phi}}^{\infty}, \beta_{\tilde{\phi}}^{\infty}]$ y $P_{\phi}^{\infty} = [\alpha_{\tilde{\phi}}^{\infty}, \beta_{\tilde{\phi}}^{\infty}]$. Nótese que la función $\tilde{\phi}$ es $\alpha_{\tilde{\phi}}^{\infty}$ -convexa y $\beta_{\tilde{\phi}}^{\infty}$ -concava en ∞ .

Modificando un ejemplo de Lindenstrauss y Tzafriri ([L-T₂] Proposición 2) vamos a obtener funciones ϕ cuyo conjunto

asociado P_{ϕ}^{∞} es $\{p, q\}$ para $p \neq q$, $p, q > 0$, y por tanto no es conexo.

22. Ejemplo.

Sean $p, q > 1$ con $p \neq q$ y $t_n = 2^{-2^{n-1}}$ para $n=1, 2, \dots$. Definamos H en $[0, 1]$ por:

$$H(t) = \begin{cases} t^p & \text{si } t_1 \leq t \leq 1 \\ H(t_{2n-1}) \frac{t^q}{t_{2n-1}^q} & \text{si } t_{2n} \leq t \leq t_{2n-1} \\ H(t_{2n}) \frac{t^p}{t_{2n}^p} & \text{si } t_{2n+1} \leq t \leq t_{2n} \\ 0 & \text{si } t=0 \end{cases}$$

Por la Proposición 2 de $[L-T_2]$ el conjunto $E_H \subset C([0, 1])$ es igual salvo equivalencia en el 0 a $E_{t^p, 1} \cup E_{t^q, 1} = \{t^p, t^q\}$. Consideremos ahora la simétrica de H , definida en $[1, \infty)$. Probemos que $\{p, q\} = P_{\tilde{H}}^{\infty}$. Si una función ψ , que podemos suponer definida en $[0, \infty)$, pertenece a $E_{\tilde{H}}^{\infty}$, entonces $\tilde{\psi} \in E_H$ por la Proposición 20.1 y por tanto $\tilde{\psi}$ es equivalente en el 0 a t^p o a t^q . Su simétrica $\hat{\psi} = \tilde{\psi}$ es pues equivalente a t^p ó a t^q en el ∞ . Por ejemplo si:

$$A t^p \leq \psi(t) \leq B t^p$$

para $t \geq t_0$, entonces:

$$\left(\frac{A}{B}\right) t^p \leq \frac{\psi(\lambda t)}{\psi(\lambda)} \leq \left(\frac{B}{A}\right) t^p$$

para $\lambda \geq t_0$, y $\lambda t \geq t_0$. Luego escogiendo una sucesión $(\frac{\psi(\lambda_n \cdot)}{\psi(\lambda_n)})_1^\infty$ con $\lambda_n \rightarrow \infty$ convergente en $C([0, s])$ para $\forall s \in (0, \infty)$, concluimos que en E_ψ^∞ hay una función equivalente a t^p en $[0, \infty)$. Es fácil comprobar que $E_\psi^\infty \subset E_H^\infty$, obteniéndose que $p \in P_H^\infty$.

Recíprocamente, sea $r \in P_H^\infty$. Repitiendo en sentido inverso el razonamiento anterior llegamos a que existe una función en E_H equivalente en 0 a t^r y así necesariamente $r=p$ o $r=q$.

En definitiva, el conjunto $P_H^\infty = \{p, q\}$ no es conexo. Multiplicando la función \tilde{h} por t^s para un $s > 0$ conveniente, el ejemplo se generaliza al caso no localmente convexo. También se puede, iterando la construcción de la Proposición 2 de [L-T₂], obtener una función ϕ cuyo conjunto P_ϕ^∞ sea $\{p_1, \dots, p_n\}$ para $p_i > 0$ prefijados.

23. Observación.

Si ϕ es una función de Orlicz convexa que verifica la condición Δ_2 en ∞ , entonces el dual de $\ell^\phi(w_n)$ para $\sum_1^\infty w_n < \infty$ es precisamente isomorfo a $\ell^\psi(w_n)$ donde $\psi = \phi^*$ es la conjugada de Young de ϕ . Si suponemos además que ψ verifica la condición Δ_2 en ∞ (i.e. si $\alpha_\phi^\infty > 1$), entonces es claro que el espacio $\ell^\phi(w_n)$ es isomorfo a ℓ^p para $p > 1$ si y solo si $\ell^\psi(w_n)$ es isomorfo a ℓ^q siendo q el exponente conjugado de p :

$$q = \frac{p}{p-1}$$

En ese caso, se obtiene que:

$$P_{\psi}^{\infty} = \left\{ q > 1: p = \frac{q}{q-1} \in P_{\phi}^{\infty} \right\}$$

A continuación consideramos espacios de sucesiones de Musielak-Orlicz localmente acotados para $M = (\phi_n)_1^{\infty}$, donde las ϕ_n son funciones de Orlicz normalizadas, estableciendo algunos resultados relativos a los problemas ya tratados en este capítulo.

En primer lugar observamos que dada $M = (\phi_n)_1^{\infty}$, el que cada función ϕ_n sea equivalente a una misma función de Orlicz ϕ en $[0,1]$ no implica en general que ℓ^M esté relacionado con ϕ , como ocurre en el caso de espacios de sucesiones con peso. El siguiente ejemplo muestra que incluso las ϕ_n pueden ser equivalentes a una misma función convexa F y sin embargo ℓ^M no ser localmente p -convexo para ningún $0 < p < 1$.

24. Ejemplo.

Un espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones $\ell^{(\phi_n)}$ no localmente acotado, definido por una sucesión de funciones de Orlicz $(\phi_n)_1^{\infty}$ que son equivalentes a una misma función convexa en un entorno de 0.

Sean G y F funciones de Orlicz con $G(1)=F(1)=1$ que verifican la condición Δ_2 en $[0,1]$. Además la función F es convexa en $[0, \infty)$ y la función G de forma que ℓ^G no es un espacio localmente acotado (por ejemplo el espacio $\ell^{\frac{1}{|\log x|}}$).

Consideremos una sucesión numérica $(r_n)_1^\infty$ cumpliendo que:

$$0 < r_{n+1} \leq r_n \quad \text{y} \quad \sum_1^\infty G(r_n) < \infty$$

Se define para cada $n \in \mathbb{N}$ una función de Orlicz ϕ_n por:

$$\phi_n(t) = \begin{cases} G(t) & \text{si } t \geq r_n \\ \frac{G(r_n)}{F(r_n)} F(t) & \text{si } t \leq r_n \end{cases}$$

Es claro que las funciones ϕ_n son equivalentes a F en un entorno de 0. Además las funciones de Orlicz ϕ_n verifican la condición Δ_2 uniforme. En efecto, para $t \leq 1$:

$$\frac{\phi_n(2t)}{\phi_n(t)} = \begin{cases} \frac{G(2t)}{G(t)} \leq \sup_{t \leq 1} \frac{G(2t)}{G(t)} = A < \infty & \text{si } t \geq r_n \\ \frac{F(2t)}{F(t)} \leq \sup_{t \leq 1} \frac{F(2t)}{F(t)} = B < \infty & \text{si } t \leq r_n/2 \\ \frac{G(2t)}{F(t)} \frac{F(r_n)}{G(r_n)} \leq \frac{G(2r_n)}{G(r_n)} \frac{F(r_n)}{F(r_n/2)} < AB < \infty & \text{si } \frac{r_n}{2} \leq t \leq r_n \end{cases}$$

Por esta acotación, se obtiene que $\ell^{(\phi_n)} = h^{(\phi_n)}$ y que los vectores canónicos $(e_n)_1^\infty$ forman una base de Schauder de $\ell^{(\phi_n)}$. Además $\sum_1^\infty \lambda_n e_n$ converge en $\ell^{(\phi_n)}$ si y solo si $\sum_1^\infty \phi_n(|\lambda_n|) < \infty$. Observemos que:

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \phi_n(|\lambda_n|) &= \sum_{|\lambda_n| \leq r_n} \phi_n(|\lambda_n|) + \sum_{|\lambda_n| > r_n} \phi_n(|\lambda_n|) = \\ &= \sum_{|\lambda_n| \leq r_n} \frac{G(r_n)}{F(r_n)} F(|\lambda_n|) + \sum_{|\lambda_n| > r_n} G(|\lambda_n|) \quad (1) \end{aligned}$$

Supongamos que $(\lambda_n)_1^\infty \in \ell^G$. Entonces $\sum_{|\lambda_n| \geq r_n} G(|\lambda_n|) < \infty$

Por otra parte $\frac{F(|\lambda_n|)}{F(r_n)} \leq 1$ si $|\lambda_n| \leq r_n$. Luego:

$$\sum_{|\lambda_n| \leq r_n} \frac{G(r_n)}{F(r_n)} F(|\lambda_n|) < \sum_{|\lambda_n| \leq r_n} G(r_n) \leq \sum_1^{\infty} G(r_n) < \infty$$

En consecuencia, $(\lambda_n)_1^{\infty} \in \ell^{(\phi_n)}$. Recíprocamente, si se da esta pertenencia entonces $\sum_{|\lambda_n| > r_n} G(|\lambda_n|) < \infty$ por (1).

Asimismo $\sum_{|\lambda_n| \leq r_n} G(|\lambda_n|) < \sum_{|\lambda_n| \leq r_n} G(r_n) \leq \sum_1^{\infty} G(r_n) < \infty$,

con lo que $(\lambda_n)_1^{\infty} \in \ell^G$. En definitiva los espacios $\ell^{(\phi_n)}$ y ℓ^G son isomorfos y por tanto $\ell^{(\phi_n)}$ no es localmente acotado; luego por el Teorema de Aoki-Rolewicz ([R], Teorema 3.2.1, [Kö]) no es localmente p -convexo para ningún $0 < p \leq 1$.

25. Observación.

Si definimos γ_n y δ_n como:

$$\gamma_n = \sup_{t \leq 1} \frac{\phi_n(t)}{F(t)} < \infty$$

$$\delta_n = \inf_{t \leq 1} \frac{\phi_n(t)}{F(t)} > 0,$$

para cada natural n , estos números miden el grado de equivalencia entre la sucesión $(\phi_n)_1^{\infty}$ y la función F en un entorno de 0. Como:

$$\frac{\phi_n(t)}{F(t)} = \begin{cases} \frac{G(t)}{F(t)} & \text{si } t \geq r_n \\ \frac{G(r_n)}{F(r_n)} & \text{si } t \leq r_n \end{cases}$$

se tiene que:

$$\gamma_n = \sup_{r_n \leq t \leq 1} \frac{G(t)}{F(t)}, \quad \delta_n = \inf_{r_n \leq t \leq 1} \frac{G(t)}{F(t)}$$

Por ejemplo si $F(t)=t$ y $G(t)=t^q$ (para $0 < q < 1$), se obtiene que $\ell^{(\phi_n)} \approx \ell^q$ y que:

$$\gamma_n = r_n^{q-1} \quad \text{y} \quad \delta_n = 1$$

Tomando $r_n = \frac{1}{2^n}$ para $n=1,2,\dots$, es claro que $\sum_1^\infty G(r_n) < \infty$ y que $\gamma_n \rightarrow 0$ lentamente, pues:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{n+1}}{r_n} \right)^{q-1} = 2^{1-q} < \infty$$

Así pues el resultado anterior se mantiene válido incluso cuando la equivalencia entre las ϕ_n y F no difiere excesivamente. Conviene observar que $(\phi_n)_1^\infty$ no puede ser uniformemente equivalente a F (es decir $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \gamma_n < \infty$) ya que entonces $\ell^{(\phi_n)}$ coincide con ℓ^F y por tanto es un espacio de Banach.

Pasemos ahora a dar condiciones para que un espacio de Orlicz de sucesiones sea isomorfo a un s.e.v. de un espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones convexo, limitandonos primero al caso de copias Riesz-isomorfas.

26. Definición.

Si $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos de $C([0,1])$, designamos por $\Gamma((B_\alpha)_{\alpha \in I})$ al conjunto de las sumas finitas convexas, de la forma:

$$\sum_i a_i f_{\alpha_i}$$

para $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, $f_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i}$, $a_i \geq 0$ y $\sum_i a_i = 1$.

Consideramos ahora una sucesión de funciones de Orlicz $(\phi_n)_1^\infty$ y definimos $C_{(\phi_n),1}$ por:

$$C_{(\phi_n),1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Gamma((E_{\phi_j,1})_{j=n}^{\infty})},$$

tomando las adherencias en $C([0,1])$ con la topología de la convergencia uniforme. Nótese que si $\phi_n = \phi, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $C_{(\phi_n),1} = C_{\phi,1}$.

27. Proposición.

Sea $(\phi_n)_1^\infty$ una sucesión de funciones de Orlicz convexas que verifican la Δ_2 uniforme. Si un espacio de Orlicz l^ϕ es Riesz-isomorfo a un s.e.v. de $l^{(\phi_n)}$ entonces ϕ es equivalente a 0 a una función de $C_{(\phi_n),1}$.

Demostración.

Sea T el isomorfismo de Riesz, entre l^ϕ y $T(l^\phi)$ s.e.v. de $l^{(\phi_n)}$, que es separable. Si $(e_i)_1$ es la base canónica de $l^\phi = h^\phi$ entonces:

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_j = u_i$$

para $i=1,2,\dots$ siendo los elementos u_i disjuntos en $l^{(\phi_n)}$. Podemos encontrar $(v_i)_1^\infty$ en $l^{(\phi_n)}$, de forma que

$$v_i = \sum_{j \leq i(i)} a_{ij} e_j,$$

y que además las sucesiones básicas $(v_i)_1^\infty$ y $(u_i)_1^\infty$ sean equivalentes, utilizando para ello una perturbación como se ha hecho en la Proposición I.6, utilizando el Lema I.5. Por tanto

$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i$ converge si y solo si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \leq j(i)} \phi_j(|\lambda_i| |a_{ij}|) < \infty$$

Sean $w_i = b_i v_i$ donde los b_i son escalares positivos que verifican $\sum_{j \leq j(i)} \phi_j(b_i |a_{ij}|) = 1$. Ahora los vectores $(w_i)_1^{\infty}$ forman una base normalizada de $\overline{[(v_i)_1^{\infty}]} \approx \mathcal{L}^{\phi}$, equivalen te a $(u_i)_1^{\infty}$ y además $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i w_i$ converge si y solo si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \leq j(i)} \frac{\phi_j(|\lambda_i| |b_i| |a_{ij}|)}{\phi_j(b_i |a_{ij}|)} \phi_j(b_i |a_{ij}|) < \infty.$$

Definimos una función de Orlicz ψ_i en $[0, \infty)$ por:

$$\psi_i(t) = \sum_{j \leq j(i)} \left(\frac{\phi_j(b_i |a_{ij}| t)}{\phi_j(b_i |a_{ij}|)} \right) \phi_j(b_i |a_{ij}|)$$

para $t \geq 0$. Por tanto $\mathcal{L}^{(\psi_i)}$ es un espacio isomorfo a \mathcal{L}^{ϕ} . Como las funciones $(\phi_n)_1^{\infty}$ verifican la condición Δ_2 uniforme, el conjunto $\{\psi_i, i=1,2,\dots\}$, cuyos elementos son combinación lineal convexa de funciones de los conjuntos $E_{(\phi_n),1}$, es equi continuo y puntualmente acotado en $C([0,1])$. En efecto, se tiene que:

$$\psi_i(t) = \sum_{j \leq j(i)} \phi_j(b_i |a_{ij}| t) \leq \sum_{j \leq j(i)} \phi_j(b_i |a_{ij}|) = 1$$

para $t \leq 1$. Además si $0 \leq s, t \leq 1$:

$$|\psi_i(t) - \psi_i(s)| \leq \sum_{j \leq j(i)} |\phi_j(b_i |a_{ij}| t) - \phi_j(b_i |a_{ij}| s)|$$

Como $(\phi_n)_1^\infty$ verifica la condición Λ_2 uniforme ([Wo₁] pag.276) existen $p \geq 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $t < 1$ y $n \geq n_0$ se tiene que

$\frac{t \phi'_n(t)}{\phi_n(t)} \leq p$. Tomando si es preciso $i \geq i_0$ para que todas las funciones ϕ_j verifiquen la anterior condición, se obtiene entonces que:

$$\begin{aligned} |\psi_i(t) - \psi_i(s)| &\leq \sum_{j \leq j(i)} \phi'_j(b_i |a_{ij}| \theta) b_i |a_{ij}| |t-s| \leq \\ &\leq \sum_{j \leq j(i)} \left(\frac{\phi'_j(b_i |a_{ij}| \theta)}{\phi_j(b_i |a_{ij}| \theta)} b_i |a_{ij}| \theta \right) \frac{\phi_j(b_i |a_{ij}| \theta)}{\theta} \\ |t-s| &\leq \sum_{j \leq j(i)} p \phi_j(b_i |a_{ij}| \theta) |t-s| = p |t-s| \end{aligned}$$

para $\theta \in (0,1)$, comprobándose así la equicontinuidad de $\{\psi_i : i=1,2,\dots\}$.

Por tanto, existe una subsucesión $(\psi_{i_k})_{k=1}^\infty$ uniformemente convergente en $[0,1]$ a una función de Orlicz ψ modo que:

$$|\psi(t) - \psi_{i_k}(t)| \leq \frac{1}{2^k}$$

para $t \leq 1$ y $k=1,2,\dots$. Como consecuencia, las bases canónicas de \mathcal{L}^ψ y de $\mathcal{L}^{\psi_{i_k}}$ son equivalentes. Asimismo como toda base simétrica es también subsimétrica ([L-T₄] Proposición 3.a.3), las bases de \mathcal{L}^ψ y de $\mathcal{L}^{\phi_{i_k}} \mathcal{L}^{\psi_{i_k}}$ son entonces equivalentes. Por tanto por la Proposición 4.a.5 de [L-T₄], se tiene que $\psi \sim \phi$. Además las funciones ψ_{i_k} pueden escogerse de forma que sean combinación lineal convexa de funciones de los conjuntos $F_{\phi_j,1}$ para $j \geq k$. En efecto, supuesta elegida $\psi_{i_{k-1}}$ y

suponiendo como caso más desfavorable que $k \in \text{sop}(\psi_{j_k})$ para algún natural j_k , basta elegir i_k con la condición adicional $i_k > \max(i_{k-1}, j_k)$. Luego,

$$\psi = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{i_k} \in C_{(\phi_n), 1} . \quad ///$$

Para copias isomorfas obtenermos con razonamientos análogos el siguiente resultado.

28. Proposición.

Sea $(\phi_n)_1^\infty$ una sucesión de funciones de Orlicz convexas que verifican la condición Δ_2 uniforme. Si un espacio de Orlicz l^ϕ es isomorfo a un s.e.v. de $l^{(\phi_n)}$ entonces en $C_{\phi, 1}$ hay una función equivalente en el 0 a una de $C_{(\phi_n), 1}$.

Demostración.

Supongamos que $l^{(\phi_n)}$ tenga un s.e.v. X isomorfo a l^ϕ . Por un resultado de Bessaga y Pelczynski ([L-T₄] Proposición 1.a.11), X tiene un s.e.v. Y generado por una sucesión básica equivalente a una base bloque de la base canónica de $l^{(\phi_n)}$. Dicha base bloque es del tipo:

$$u_i = \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} a_j e_j$$

para $n_i < n_{i+1}$, $i=1, 2, \dots$. Por tanto, $\sum_1^\infty \lambda_i u_i$ converge en $l^{(\phi_n)}$ si y solo si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} |\lambda_i| |a_j| =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \frac{\phi_j(|\lambda_i| |a_j|)}{\phi_j(|a_j|)} \phi_j(|a_j|) < \infty$$

Suponiendo que la base es normalizada, i.e. $\sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \phi_j(|a_j|) = 1$,

obtenemos que $\overline{[(u_i)_1^\infty]}$ es isomorfo a un espacio de Musielak-Orlicz $\ell^{(\psi_i)}$ donde ψ_i está definido por:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \frac{\phi_j(|a_j| t)}{\phi_j(|a_j|)} \phi_j(|a_j|)$$

para $t \leq 1$. Razonando como en la proposición anterior existe una subsucesión $(\psi_{i_k})_{k=1}^\infty$ convergente a una función de Orlicz ψ de $C_{(\phi_n),1}$ de forma que $\ell^{(\psi_{i_k})}$ y ℓ^ψ son isomorfos. Luego $X \approx \ell^\phi$ tiene un s.e.v. isomorfo a ℓ^ψ y por el Teorema 1 de [L-T₂] concluimos que ψ es equivalente en el 0 a una función de $C_{\phi,1}$. ///

29. Corolario.

Sea $(\phi_n)_1^\infty$ una sucesión de funciones de Orlicz convexas que verifican la condición Δ_2 uniforme. Si $\ell^{(\phi_n)}$ contiene una copia isomorfa de ℓ^p para algún $p \geq 1$, entonces la función t^p es equivalente en 0 a una función de $C_{(\phi_n),1}$.

Demostración.

Aplicamos la Proposición.28 a la función $\phi(t)=t^P$ para la que $C_{\phi,1} = \{t^P\}$. ///

30. Observación.

Observese que si en $C_{(\phi_n),1}$ hay una función ψ equivalente en el 0 a t^P de forma que en $C([0,1])$ se tenga que:

$$\psi(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \in \sigma_i} \frac{\phi(\lambda_n t)}{\phi(\lambda_n)} a_n \right)$$

$$y a_n = \phi(\lambda_n).$$

siendo σ_i una sucesión de subconjuntos disjuntos de \mathbb{N} tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} (\min \sigma_i) = \infty$, entonces ℓ^P es isomorfo a un s.e.v. de $\ell^{(\phi_n)}$.

Vamos a utilizar ahora el Corolario anterior para dar condiciones afín de que determinadas clases de espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones escalares tengan una copia de ℓ^P .

Los espacios de Nakano de sucesiones $\ell^{(p_n)}$ (Nakano [Na], Simmons [Si]) son un caso particular de espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones ℓ^M . En esos espacios, $M = \{\phi_n\}_1^\infty$ para $\phi_n(t) = t^{p_n}$ siendo $(p_n)_1^\infty$ una sucesión de números reales positivos.

31. Proposición.

Sea $\ell^{(p_n)}$ un espacio de Nakano con $1 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} p_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n < \infty$. Entonces el espacio $\ell^{(p_n)}$ contiene una copia isomorfa de ℓ^p si y solo si p es un punto de acumulación de la sucesión $(p_n)_1^\infty$.

Demostración.

La condición es suficiente. En efecto, si $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k}$ entonces la función t^p es límite uniforme en $C([0,1])$ de una sucesión de funciones de Orlicz ϕ_j que verifican $\phi_j(t) = t^{p_{n_k j}}$ para $t \leq 1$, y además:

$$\phi_j(t) - \frac{1}{2j} \leq t^p \leq \phi_j(t) + \frac{1}{2j}$$

Por tanto si $(\lambda_j)_1^\infty$ es una sucesión de escalares tiene que:

$$\sum_1^\infty \phi_j(|\lambda_j|) - 1 \leq \sum_1^\infty |\lambda_j|^p \leq \sum_1^\infty \phi_j(|\lambda_j|) + 1$$

Luego las bases canónicas de $\ell^{(\phi_j)}$ y ℓ^p son equivalentes y dichos espacios son isomorfos con lo que $\ell^{(p_n)}$ tiene una copia isomorfa de ℓ^p .

Recíprocamente, si ℓ^p es isomorfo a un s.e.v. de $\ell^{(p_n)}$ entonces por el Corolario.29, la función t^p es equivalente en 0 a una función de $C_{(p_n),1}$. Supongamos que p no es un punto de acumulación de $(p_n)_1^\infty$. Entonces existe $\epsilon > 0$ y un natural

n_0 tal que si $n > n_0$:

$$p_n \notin [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$$

Consideremos la subsucesión $(\phi_k)_1^\infty$ (respectivamente $(\psi_k)_1^\infty$) formada por las funciones t^{p_n} tales que $p_n > p + \varepsilon$ (respectivamente $p_n < p - \varepsilon$). Las funciones ϕ_k son $(p + \varepsilon)$ -convexas y $F_{\phi_k, 1} = \{\phi_k\}$. Además, las combinaciones lineales convexas y los límites uniformes de funciones $(p + \varepsilon)$ -convexas son también $(p + \varepsilon)$ -convexas. Por tanto, todas las funciones del conjunto $C_{(\phi_k), 1}$ son $(p + \varepsilon)$ -convexas y ninguna puede ser equivalente en el 0 a la función t^p . Aplicando el Corolario 29, el espacio $\ell^{(\phi_k)}$ no tiene copias isomorfas de ℓ^p . De la misma forma, utilizando la $(p - \varepsilon)$ -concavidad se deduce que $\ell^{(\psi_k)}$ no posee s.e.v. isomorfos a ℓ^p . Por un resultado de Samuel ([Sa], Teorema.1), el espacio de Banach $\ell^{(\phi_k)} \oplus \ell^{(\psi_k)}$ tampoco tiene copias isomorfas de ℓ^p . Finalmente, concluimos la demostración observando que $\ell^{(p_n)} \cong \ell^{(\phi_k)} \oplus \ell^{(\psi_k)}$. En efecto, llamando A a $\{n \in \mathbb{N} : p_n > p + \varepsilon\}$ y B a $\{n \in \mathbb{N} : p_n < p - \varepsilon\}$, se tiene, para cada sucesión de escalares $(\lambda_n)_1^\infty$, que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{p_n} = \sum_{n \in A} |\lambda_n|^{p_n} + \sum_{n \in B} |\lambda_n|^{p_n} + \sum_{n \in B} |\lambda_n|^{p_n}$$

Así pues, la sucesión $(\lambda_n)_1^\infty \in \ell^{(p_n)}$ si y solo si $(\lambda_n)_{n \in A} \in \ell^{(\phi_k)}$ y $(\lambda_n)_{n \in B} \in \ell^{(\psi_k)}$, por lo que puede establecerse

un isomorfismo entre $l^{(p_n)}$ y $l^{(\phi_k)} \otimes l^{(\psi_k)}$. ///

Nótese que las copias canónicas de l^p en $l^{(p_n)}$ son complementadas y por tanto que $l^{(p_n)}$ tiene una copia isomorfa y complementada de l^p si y solo si $l^{(p_n)}$ tiene una copia isomorfa de l^p .

Para terminar este capítulo establecemos algunos resultados que relacionan los espacios de Musielak-Orlicz de funciones y de sucesiones en el caso convexo.

Consideremos (ϕ_t) , para $t \in [0,1]$, funciones de Orlicz convexas tales que la función ϕ_s definida por

$$\phi_s(t) = \phi_t(s), \text{ para todo } s \geq 0,$$

sea una función medible en t respecto de la medida μ de Lebesgue en $[0,1]$. Entonces $M \equiv (\phi_t)_{t \in [0,1]}$ es una función de Musielak-Orlicz y L^M (resp. L_0^M) es el espacio de Musielak-Orlicz formado por las funciones f μ -medibles escalares finitas en c.t.p. de $[0,1]$, tales que:

$$\int_0^1 \phi_t(|f(t)|s) dt < \infty$$

para algún $s > 0$ (resp. todo $s > 0$), con la igualdad en c.t.p. de funciones. Dicho espacio está dotado de la norma:

$$\|f\|_M = \inf\{s > 0: \int_0^1 \phi_t\left(\frac{|f(t)|}{s}\right) dt \leq 1\}$$

Propiedades básicas de estos espacios pueden verse en Musielak ([M₀] Capítulo II).

Los espacios de Nakano $L^{p(t)}$ en los que ϕ_t es una función multiplicativa $\forall t \in [0,1]$ definida por $\phi_t(s) = s^{p(t)}$, son ejemplos de espacios de Musielak-Orlicz de funciones no contenidos en la clase de los espacios de Orlicz de funciones.

Una condición necesaria y suficiente para que $L^M = L_0^M$ es que se cumpla la condición Δ_2 generalizada, es decir que existan $h \in L^1$ y $K > 0$ tales que:

$$\phi_t(2s) \leq K \phi_t(s) + h(t)$$

para todo $s > 0$ y casi todo $t \in [0,1]$.

30. Teorema.

Sea L^M un espacio de Musielak-Orlicz definido por $M = (\phi_t)_{t \in [0,1]}$ de forma que ϕ_t es convexa y $\phi_t(1) = 1$. Entonces, todo s.e.v. cerrado de L_0^M contiene un s.e.v. isomorfo a un espacio de Musielak-Orlicz de sucesiones $l^{(\psi_n)}$.

Demostración.

El espacio L_0^M es un retículo de Banach dotado de una norma orden continua. En efecto, sea $(f_n)_1^\infty$ una sucesión de funciones de L_0^M de forma que $0 \leq f_n \uparrow 0$. Fijado f_{n_0} y un natural $k \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\int_0^1 \phi_t \left(2^k \frac{|f_n(t)|}{\|f_{n_0}\|_M} \right) dt < \infty$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el teorema de la convergencia monótona a la sucesión no decreciente $\left(\frac{2^k f_n}{\|f_{n_0}\|_M} \right)_1$ se concluye

que existe $n_k \in \mathbb{N}$ verificando que:

$$\int_0^1 \phi_t \left(2^k \frac{|f_n(t)|}{\|f_{n_0}\|_M} \right) dt \leq 1$$

para $n \geq n_k$, y por tanto que $\|f_n\|_M \leq \frac{\|f_{n_0}\|_M}{2^k}$; con esto probamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_M = 0$. Además $X[0,1]$ es una unidad débil de L^M pues $\int_0^1 \phi_t(1) dt = 1 < \infty$.

Utilizamos entonces la Proposición 1.c.8 de [L-T₅]. Sea Y un s.e.v. cerrado de L_0^M . O bien Y es isomorfo a un s.e.v. del espacio \mathcal{L}^1 y contiene por lo tanto una copia de \mathcal{L}^p para algún $p \geq 1$ ([A1]), o bien Y contiene una sucesión básica $(x_n)_1^\infty$ equivalente a una sucesión básica normalizada de L_0^M formada por elementos disjuntos $(y_n)_1^\infty$. En este último caso, llamamos λ_n al soporte de y_n . Entonces $\sum_1^\infty \lambda_n y_n$ converge si y solo si:

$$\sum_1^\infty \int_{\lambda_n} \phi_t (|\lambda_n| |y_n(t)|) dt < \infty$$

Definimos entonces una función de Orlicz ψ_n por:

$$\psi_n(\lambda) = \int_{A_n} \phi_t(\lambda | y_n(t)) dt$$

Por estar la sucesión $(y_n)_1^\infty$ normalizada se tiene que $\psi_n(1)=1$.
 Por tanto $[(x_n)_1^\infty]_{(\psi_n)}$ es isomorfo al espacio de Musielak-Orlicz
 de sucesiones $l^p_{(\psi_n)}$. ///

31. Corolario.

En las hipótesis del Teorema anterior, todo subespacio cerrado del espacio de Musielak-Orlicz de funciones L_0^M contiene una copia de algún l^p para $1 \leq p < \infty$ o de c_0 .

Demostración.

Es consecuencia del Teorema anterior y del Corolario 3.7 de $[W_0]_1$: todo espacio de Musielak Orlicz de sucesiones convexo $l^{(\phi_n)} = h^{(\phi_n)}$ contiene una copia de l^p para algún $p \geq 1$, (o de c_0 si $l^{(\phi_n)} \neq h^{(\phi_n)}$). ///

Finalmente, utilizando las funciones ψ_n construidas en la prueba del Teorema 30, vamos a dar una condición suficiente para que un espacio de Nakano $L^{p(t)}$ contenga una copia isomorfa de l^q .

32. Proposición.

Sea $L^{p(t)}([0,1]) = L^{p(t)}$ un espacio de Nakano de funciones de forma que la función $p(t) \geq 1$ sea continua en $[0,1]$. Entonces, $L^{p(t)}$ tiene una copia de l^q para todo $q \in p([0,1])$.

Demostración.

Para $t_0 \in [0,1)$ definimos una sucesión de funciones de

Orlicz $(\psi_n)_{n=n_0}^\infty$ (cuando $t_0 + \frac{1}{2^n} \leq 1$) por:

$$\psi_n(s) = 2^{n+1} \int_{t_0 + \frac{1}{2^{n+1}}}^{t_0 + \frac{1}{2^n}} s^p(t) dt$$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(s) = s^p(t_0)$$

y por tanto $(\psi_n)_1^\infty$ converge puntualmente a la función $s^p(t_0)$.

Por otra parte como:

$$\min_{0 \leq t \leq 1} p(t) \leq \frac{s \psi'_n(s)}{\psi_n(s)} = \frac{\int_{t_0 + \frac{1}{2^{n+1}}}^{t_0 + \frac{1}{2^n}} p(t) s^p(t) dt}{\int_{t_0 + \frac{1}{2^{n+1}}}^{t_0 + \frac{1}{2^n}} s^p(t) dt} \leq \max_{0 \leq t \leq 1} p(t)$$

es inmediato que las funciones $(\psi_n)_{n=n_0}^\infty$ verifican la condición Δ_2 uniforme y por tanto que el conjunto que forman es compacto en $C([0,1])$. Así pues existe una subsucesión $(\psi_{n_k})_1^\infty$ que converge uniformemente a $s^p(t_0)$. Tomando adecuadamente la subsucesión, por un razonamiento ya varias veces empleado, concluimos que la base canónica de $s^p(t_0)$ y la sucesión básica

$$(g_k = \frac{1}{1/2 \cdot \frac{n_k+1}{p(t)}} \chi_{[t_0 + \frac{1}{2^{n_k+1}}, t_0 + \frac{1}{2^{n_k}})})_{k=1}^\infty$$

son equivalentes ya que $\sum_1^\infty \lambda_k g_k$ converge si y solo si:

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{t_0 + \frac{1}{2^{n_k+1}}}^{t_0 + \frac{1}{2^{n_k}}} \frac{|\lambda_k| p(t)}{1/2 \cdot \frac{n_k+1}{p(t)}} dt = \sum_{k=1}^\infty \psi_{n_k}(|\lambda_k|) < \infty$$

es decir si $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| p(t_0) < \infty$ ya que escogemos ψ_{n_k} , de forma que $|\psi_{n_k}(s) - s^{p(t_0)}| \leq \frac{1}{2^k}$ si $s \leq 1$.

Para $t=1$, se procede de forma similar.///

CAPITULO IV

ESPACIOS DE ORLICZ MINIMALES.

COPIAS COMPLEMENTADAS DE l^p .

En este capítulo, por ϕ designaremos una función de Orlicz definida en $[0, \infty)$ con índices finitos no nulos y tal que $\phi(1)=1$. En este caso consideramos los siguientes conjuntos relacionados con ϕ y definidos en el capítulo III:

$$E_{\phi, s}, E_{\phi}, C_{\phi, s}, C_{\phi},$$

$$E_{\phi, s}^{\infty}, E_{\phi}^{\infty}, C_{\phi, s}^{\infty}, C_{\phi}^{\infty},$$

para cada $s > 0$, como subconjuntos de $C([0, \infty))$ dotado de la topología compacta-abierta. De esta inclusión se derivan algunas de las propiedades que a continuación estudiamos.

1. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz de índices finitos no nulos en 0 e ∞ . Los conjuntos $E_{\phi}, E_{\phi, s}, E_{\phi}^{\infty}$ y $E_{\phi, s}^{\infty}$ son subconjuntos compactos de $C([0, \infty))$ formados por funciones de Orlicz.

Demostración.

Recordemos que en $C([0, \infty))$, un subconjunto X es relativamente compacto si y solo si las funciones de X son equicontinuas en cada punto de $[0, \infty)$ y puntualmente acotadas. Distinguiamos entonces según que ϕ sea o no convexa.

Si ϕ es convexa se tiene, suponiendo sin pérdida de generalidad que ϕ es derivable, que:

$$\left| \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} - \frac{\phi(\lambda s)}{\phi(\lambda)} \right| \leq \frac{\phi'((\alpha t + (1-\alpha)s)\lambda)\lambda |t-s|}{\phi(\lambda)}$$

$$\leq \frac{\phi'(\lambda T)\lambda T}{\phi(\lambda)} |t-s| = (1) .$$

para $t, s \leq T$ siendo $T \geq 1$. Fijado T , puesto que ϕ cumple la condición Δ_2 en $[0, \infty)$ existe $K > 0$ tal que $\phi(\lambda T) \leq K\phi(\lambda)$. Por tanto:

$$(1) \leq \frac{\phi'(\lambda T) \lambda T}{\phi(\lambda T)} K |t - s|$$

Como los índices β_ϕ y β_ϕ^∞ son finitos, se tiene que

$$\sup_{0 < t < \infty} \frac{t \phi'(t)}{\phi(t)} < \infty. \text{ Esto implica directamente que}$$

$$\left\{ \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} : 0 < \lambda < \infty \right\} \text{ es equicontinuo en cada punto de } (0, \infty).$$

Cuando ϕ no es convexa, basta aplicar el razonamiento anterior a la función equivalente a una convexa $t\phi = \psi$; entonces:

$$\frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} = \frac{1}{t} \frac{\psi(\lambda t)}{\psi(\lambda)}$$

Como además $\alpha_\phi, \alpha_\phi^\infty > 0$, existe $H > 0$ tal que:

$$\frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda) t^p} \leq H$$

para algún $p > 0$ y cada $t \leq 1$ y $\lambda > 0$. Por tanto, $\left\{ \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} : 0 < \lambda < \infty \right\}$

es equicontinua también en 0. De nuevo por la condición Δ_2 (es decir $\sup_{0 < \lambda < \infty} \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)} < \infty$ para cada $t > 0$), es clara la acotación puntual de las funciones $\frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda)}$. Finalmente es fácil compro-

bar que las funciones de los conjuntos definidos, que son límite uniforme sobre compactos de funciones de Orlicz son también funciones de Orlicz.///

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos propiedades interesantes de las funciones de Orlicz definidas en $[0, \infty)$.

2. Proposición.

Sean ϕ y ψ funciones de Orlicz equivalentes en el ∞ . Toda función M de E_ϕ^∞ es equivalente a una función N de E_ψ^∞ . En particular, si ϕ es equivalente a una función p -convexa (resp. p -cóncava) en el ∞ para algún $p > 0$ entonces todas las funciones de E_ϕ^∞ son equivalentes a funciones p -convexas (resp. p -cóncavas).

Demostración.

Supongamos que $M \in E_\phi^\infty$. Entonces existe una sucesión escalar $(\lambda_n)_1^\infty$ con $1 \leq \lambda_n \uparrow \infty$ tal que:

$$M(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(\lambda_n t)}{\phi(\lambda_n)},$$

uniformemente sobre compactos de $[0, \infty)$. Consideremos ahora la sucesión $(\frac{\psi(\lambda_n t)}{\psi(\lambda_n)})_1^\infty$ de funciones pertenecientes a $E_{\psi,1}^\infty$.

Escogemos una subsucesión $(\frac{\psi(\lambda_{n_k} t)}{\psi(\lambda_{n_k})})_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente sobre compactos de $[0, \infty)$ a una función N de E_ψ .

Como ψ y ϕ son equivalentes en ∞ , podemos encontrar $A, B > 0$ tales que:

$$B \psi(x) \leq \phi(x) \leq A \psi(x)$$

para $x \geq x_0$. Por tanto, fijado $t \in (0, \infty)$ se tendrá para n suficientemente grande que:

$$\frac{B}{A} \cdot \frac{\psi(\lambda_n t)}{\psi(\lambda_n)} \leq \frac{\phi(\lambda_n t)}{\phi(\lambda_n)} \leq \frac{A}{B} \cdot \frac{\psi(\lambda_n t)}{\psi(\lambda_n)}$$

Tomando límites obtenemos que:

$$\frac{B}{A} \cdot N(t) \leq M(t) \leq \frac{A}{B} \cdot N(t) ,$$

es decir que N y M son equivalentes.

Supongamos ahora que ψ es p-convexa en el ∞ , esto es que $\psi(t^{1/p})$ es convexa en el ∞ :

$$\psi((\lambda t + \mu s)^{1/p}) \leq \lambda \psi(t^{1/p}) + \mu \psi(s^{1/p})$$

para $\lambda + \mu = 1$ y $t, s \geq x_0$. En ese caso y con las mismas notaciones que antes:

$$\begin{aligned} N((\lambda t + \mu s)^{1/p}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda_{n_k} (\lambda t + \mu s)^{1/p})}{\psi(\lambda_{n_k})} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi((\lambda_{n_k}^p \lambda t + \lambda_{n_k}^p \mu s)^{1/p})}{\psi(\lambda_{n_k})} \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda \psi((\lambda_{n_k}^p t)^{1/p})}{\psi(\lambda_{n_k})} + \frac{\mu \psi((\lambda_{n_k}^p s)^{1/p})}{\psi(\lambda_{n_k})} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda \psi(\lambda_{n_k} t^{1/p})}{\psi(\lambda_{n_k})} + \frac{\mu \psi(\lambda_{n_k} s^{1/p})}{\psi(\lambda_{n_k})} = \lambda N(t^{1/p}) + \mu N(s^{1/p}), \end{aligned}$$

Así pues N es p-convexa. El método es válido también para la p-concavidad. ///

3. Corolario.

Sea ϕ una función de Orlicz y $\psi \in E_\phi^\infty$. Entonces se tiene que $[\alpha_\psi^\infty, \beta_\psi^\infty] \subset [\alpha_\phi^\infty, \beta_\phi^\infty]$.

Demostración.

Sea ψ una función de E_ϕ^∞ . Si $p < \alpha_\phi^\infty$, suponemos ϕ p-convexa en el ∞ . Por tanto, ψ es también p-convexa por la demostración anterior. Luego $\alpha_\psi^\infty > p$. En definitiva $\alpha_\phi^\infty < \alpha_\psi^\infty$. Un razonamiento similar nos da el resultado para los índices β_ϕ^∞ y β_ψ^∞ . ///

A continuación se define un concepto general de minimalidad que extiende el introducido por Lindenstrauss y Tzafriri en [L-T₂] y [L-T₄] , al considerar espacios de Orlicz convexos de sucesiones minimales.

4. Definición

La función de Orlicz ϕ es minimal en el ∞ (resp. en el 0) cuando para cada función ψ perteneciente a $E_{\phi,1}^{\infty}$ (resp. a $E_{\phi,1}$) se tiene que $E_{\phi,1}^{\infty} = E_{\psi,1}^{\infty}$ (resp. $E_{\phi,1} = E_{\psi,1}$) en $C([0, \infty))$.

Comprobemos la existencia de funciones minimales, por ejemplo en el ∞ . Introducimos en $E_{\phi,1}^{\infty}$ una relación $<$ definida por:

$$M < N \text{ si y solo si } M \in E_{N,1}^{\infty} .$$

La relación es reflexiva ya que $\frac{\phi(1,t)}{\phi(1)} = \phi(t)$ y por tanto $\phi \in E_{\phi,1}^{\infty}$. Es también transitiva. En efecto, sean M, N y P funciones de $E_{\phi,1}^{\infty}$ verificando $M < N$ y $N < P$. Existen por tanto sucesiones reales $(\lambda_k)_1^{\infty}$ y $(\mu_k)_1^{\infty}$ con $\lambda_k, \mu_k \geq 1$ de forma que las funciones $\frac{N(\lambda_k \cdot)}{N(\lambda_k)}$ y $\frac{P(\mu_k \cdot)}{P(\mu_k)}$ convergen uniformemente sobre compactos a M y a N respectivamente. Si fijamos ahora $\lambda \geq 1$, la función

$$\frac{P(\lambda \mu_k \cdot)}{P(\lambda \mu_k)} = \frac{P(\lambda \mu_k \cdot)}{P(\mu_k)} \cdot \frac{P(\mu_k)}{P(\lambda \mu_k)}$$

converge puntualmente a $\frac{N(\lambda \cdot)}{N(\lambda)}$. Por ser $E_{P,1}^{\infty} \subset E_{\phi,1}^{\infty}$ compacto, una subsucesión de $(\frac{P(\lambda \mu_k \cdot)}{P(\lambda \mu_k)})_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre compactos a $\frac{N(\lambda \cdot)}{N(\lambda)}$. Así pues, tanto

$\frac{N(\lambda \cdot)}{N(\lambda)}$ como M pertenecen al conjunto cerrado $E_{P,1}^{\infty}$. Luego $M < P$. Notese que esto prueba que si $N < M$ entonces se tiene que $E_{N,1}^{\infty} \subset E_{M,1}^{\infty}$.

Sea ahora $(M_{\alpha})_{\alpha \in I}$ una red totalmente ordenada de funciones de $E_{\phi,1}^{\infty}$ y consideremos $\bigcap_{\alpha \in I} E_{M_{\alpha},1}^{\infty} \neq \emptyset$. Si $(P_{\beta})_{\beta \in J}$ es una red parcialmente ordenada formada por los elementos de $\bigcap_{\alpha \in I} E_{M_{\alpha},1}^{\infty}$, extraemos una subred convergente a M que claramente cumple $E_{M,1}^{\infty} = \bigcap_{\alpha \in I} E_{M_{\alpha},1}^{\infty}$. El Lema de Zorn prueba entonces que en $E_{\phi,1}^{\infty}$ hay al menos una función minimal.

5. Proposición.

Sea ϕ una función minimal en el ∞ (resp. en el 0). Entonces en $C([0, \infty))$ se tiene que:

$$E_{\phi,1}^{\infty} = F_{\phi}^{\infty} = E_{\phi} = E_{\phi,1}.$$

Demostración.

Supongamos que ϕ es minimal en el ∞ , obteniéndose el otro caso de forma análoga. Si $\psi \in E_{\phi}^{\infty} \neq \emptyset$, es claro que $E_{\psi,1}^{\infty} \subset E_{\phi}^{\infty}$. Como $E_{\phi,1}^{\infty} = E_{\psi,1}^{\infty}$, deducimos de aquí que $E_{\phi,1}^{\infty} = E_{\psi}^{\infty}$. Luego existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ tendiendo a ∞ tal que $\frac{\phi(\lambda_n \cdot)}{\phi(\lambda_n)}$ converge a ϕ uniformemente sobre compactos. En consecuencia las funciones

$$\frac{\phi(\lambda_n \lambda \cdot)}{\phi(\lambda_n \lambda)} = \frac{\phi(\lambda_n \lambda \cdot)}{\phi(\lambda_n)} \cdot \frac{\phi(\lambda_n)}{\phi(\lambda_n \lambda)}$$

convergen puntualmente a $\frac{\phi(\lambda \cdot)}{\psi(\lambda)}$ para cada $\lambda \in (0, \infty)$. Ya que $\lambda \lambda_n \rightarrow \infty$, deducimos que $\left\{ \frac{\phi(\lambda \cdot)}{\phi(\lambda)} : \lambda \leq 1 \right\} = E_{\phi,1} \subset E_{\phi}^{\infty}$.

Ahora, tomando en $E_{\phi,1}$ una función M minimal en el 0 y, por los mismos argumentos que hemos indicado cambiando los papeles de 0 e ∞ , se obtiene que $E_{M,1} = E_M$ y $E_{M,1}^{\infty} \subset E_M$. Finalmente se tiene que:

$$E_{\phi,1} \supset E_{\phi} \supset E_M = E_{M,1} \supset E_{M,1}^{\infty} = E_{\phi,1}^{\infty} = E_{\phi}^{\infty} \supset E_{\phi,1} \quad .///$$

Como consecuencia del resultado anterior y de la Definición 4., una función es minimal en el ∞ si y solo si lo es en el 0. A partir de aquí las designaremos únicamente como funciones minimales.

Antes de proceder a estudiar propiedades generales de las funciones minimales, damos la relación que tienen con las definidas por Lindenstrauss y Tzafriri (solo en el caso convexo) para espacios de Orlicz de sucesiones l^{ϕ} en $[L - T_2]$:

Una función es L-T minimal si para cada ψ de $E_{\phi,1} \subset C([0,1])$ se tiene que $E_{\phi,1} = E_{\psi,1}$ en $C([0,1])$. En este caso, las funciones solo necesitan estar definidas en $[0,1]$.

6. Proposición.

- 6.1. Toda función minimal es L-T minimal.
- 6.2. Toda función L-T minimal definida en $[0,1]$ admite una extensión minimal a $[0, \infty)$.

Demostración.

6.1. Es inmediato.

6.2. Si ϕ es una función L-T minimal, en $E_{\phi,1} \subset C([0, \infty))$ escogemos una función minimal ψ . Como ψ es también L-T minimal, podemos elegir una sucesión $(\frac{\psi(\lambda_k \cdot)}{\psi(\lambda_k)})_{k=1}^{\infty}$ en $E_{\psi,1}$ que con-

verge a ϕ en $C([0,1])$. Una subsucesión adecuada del tipo

$(\frac{\psi(\lambda_{kj} \cdot)}{\psi(\lambda_{kj})})_{j=1}^{\infty}$ convergerá también a una función M en

$C([0, \infty))$. La función M obtenida es minimal y cumple $M|_{[0,1]} = \phi$. ///

7. Proposición.

Sea ϕ una función minimal. Entonces la función ϕ tiene los mismos índices en el 0 y en el ∞ , es decir:

$$\alpha_{\phi}^{\infty} = \alpha_{\phi} \quad \text{y} \quad \beta_{\phi}^{\infty} = \beta_{\phi}$$

Demostración.

Probémoslo simplemente en el caso de los índices inferiores, resultando el otro, es decir $\beta_{\phi}^{\infty} = \beta_{\phi}$, por simetría.

Supongamos que $p < \alpha_{\phi}$. Vamos a comprobar que también $p < \alpha_{\phi}^{\infty}$ i.e. que:

$$\sup_{\lambda, t \geq 1} \frac{\phi(\lambda) t^p}{\phi(\lambda t)} < \infty$$

Puesto que ϕ es minimal, elijamos una sucesión $\frac{\phi(\mu_k \cdot)}{\phi(\mu_k)}$

con $\mu_k \rightarrow 0$ que converja a ϕ uniformemente sobre compactos de

$[0, \infty)$. Entonces para λ y t fijos, se tiene haciendo $s = \frac{1}{t}$ que:

$$\frac{\phi(\lambda) t^p}{\phi(\lambda t)} = \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda/s) s^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi(\mu_k \lambda)}{\phi(\frac{\lambda}{s} \mu_k) s^p} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi(r_k s)}{\phi(r_k) s^p}$$

para $r_k = \frac{\lambda}{s} \mu_k$. Como $p < \alpha_\phi$, se tiene que $\sup_{0 < \mu, s \leq 1} \frac{\phi(\mu s)}{\phi(\mu) s^p} < M < \infty$. Por tanto $\sup_{\lambda, t \geq 1} \frac{\phi(\lambda) t^p}{\phi(\lambda t)} < M < \infty$ y $p < \alpha_\phi^\infty$. El mismo razonamiento prueba que si $p > \alpha_\phi$ entonces $p > \alpha_\phi^\infty$ y por tanto que $\alpha_\phi = \alpha_\phi^\infty$. ///

8. Proposición.

Sea ϕ una función minimal. Para cada real p que verifique $p + \alpha_\phi^\infty > 0$, la función $t^p \phi$ es minimal.

Demostración:

Los índices de $\psi = t^p \phi$ vienen determinados por:

$$0 < \alpha_\psi^\infty = \alpha_\phi^\infty + p \quad \text{y} \quad \beta_\psi^\infty = \beta_\phi^\infty + p < \infty,$$

ya que para cada $r > 0$ se tiene que :

$$\frac{\psi(\lambda t)}{\psi(\lambda) t^{r+p}} = \frac{\phi(\lambda t)}{\phi(\lambda) t^r}$$

De la misma forma se obtiene que:

$$E_{\psi, s}^\infty = \{ t^p M : M \in E_{\phi, s}^\infty \} = t^p E_{\phi, s}^\infty \quad \text{y}$$

$$E_\psi^\infty = \{ t^p M : M \in E_\phi^\infty \} = t^p E_\phi^\infty,$$

siendo $s > 0$. En efecto, basta observar que $(\frac{\phi(\lambda_k t)}{\phi(\lambda_k)})_{k=1}^\infty$

converge a $M(t)$ en $C([0, \infty))$ si y solo si $(t^p \frac{\phi(\lambda_k t)}{\phi(\lambda_k)})_{k=1}^{\infty} = \frac{\psi(\lambda_k t)}{\psi(\lambda_k)}_{k=1}^{\infty}$ lo hace a $t^p M(t)$.

De la definición 4. concluimos que si ϕ es minimal, todas las funciones de $F_{\phi,1}^{\infty}$ son entonces minimales. Por tanto, se tiene que $F_{\psi,1}^{\infty} = F_{p,1}^{\infty}$ para cada $p \in F_{\psi,1}^{\infty}$ y en definitiva ψ es una función minimal.///

Para las funciones minimales, utilizando el resultado anterior, pueden conocerse los índices de las funciones de $E_{\phi,1}^{\infty}$ mejorando el Corolario 3. en el siguiente sentido:

9. Proposición.

Sea ϕ una función minimal. Todas las funciones de $E_{\phi,1}^{\infty}$ poseen los mismos índices que ϕ .

Demostración.

En efecto, si la función ϕ es convexa, entonces es también L-T convexa minimal. En ese caso, por la Proposición III.5 y la Observación III.4, el espacio de sucesiones l^{ψ} es isomorfo para cualquier función $\psi \in E_{\phi,1}^{\infty} = E_{\phi}$ a algún espacio de Orlicz de sucesiones $l^{\phi}(w_n)$ con pesos verificando $w_n \uparrow \infty$. Este último espacio es isomorfo a $l^{\phi}(E(w_n))$, donde $E(w_n)$ designa la parte entera de los w_n , y por tanto al generado por una base bloque de coeficientes constantes $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ de l^{ϕ} definida por:

$$u_n = \sum_{k=i_n+1}^{j_n} e_k$$



siendo $i_n \leq j_n \leq i_{n+1} \leq j_{n+1}$ y $j_n - i_n = E(w_n)$. Así pues, según la Proposición 4.b.7 de [L-T₄] los espacios ℓ^ϕ y ℓ^ψ son isomorfos y en consecuencia tienen ϕ y ψ los mismos índices en 0. De la Proposición 7, se sigue que también coinciden en ∞ .

Si ϕ no es convexa, podemos escoger (salvo \bar{v}) un $p > 0$ de forma que $t^p \phi$ sí lo sea. En ese caso, sea $\psi \in E_{\phi,1}^\infty = E_{\phi,1}$. La función $t^p \psi$ pertenece a $E_{t^p \phi,1}^\infty$, como ya advertimos en la Proposición 8. Así mismo, $t^p \phi$ es minimal pues $\alpha_{\phi}^\infty + p \geq 1$. Al ser además $t^p \phi$ convexa, los espacios $\ell^{t^p \phi}$ y $\ell^{t^p \psi}$ son entonces isomorfos por la Proposición citada de [L-T₄], y las respectivas funciones tienen los mismos índices, es decir:

$$\alpha_{\phi} + p = \alpha_{\psi} + p \quad \text{y} \quad \beta_{\phi} + p = \beta_{\psi} + p. \quad ///$$

En las dos proposiciones siguientes, se estudia la relación entre el concepto de minimalidad y los de conjugada de Young ó simétrica de una función de Orlicz.

10. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz convexa minimal cuyos índices verifican $1 < \alpha_{\phi}^\infty \leq \beta_{\phi}^\infty < \infty$. Existe en E_{ϕ}^∞ una función N cuya conjugada de Young N^* es equivalente en el 0 a una función minimal.

Demostración.

Sea ϕ^* la conjugada de Young de ϕ . En $E_{\phi^*,1}$, podemos encontrar por el Lema de Zorn al menos una función minimal que designaremos por M . Por el Teorema 4.b.3 de [L-T₄] sabemos que, puesto que ℓ^ϕ es un espacio reflexivo, una función de

Orlicz es equivalente en 0 a una función de $E_{\phi,1}$ si y solo si su conjugada es equivalente en 0 a una función de $F_{\phi^*,1}$. Luego la función M^* es equivalente en el 0 a una función N de $E_{(\phi^*)^*,1} = E_{\phi,1}$. La función N es pues minimal y su conjugada N^* es equivalente en el 0 a $(M^*)^* = M$ que es minimal.

En efecto, las bases canónicas de ℓ^N y ℓ^{M^*} son equivalentes y los duales respectivos son canónicamente isomorfos a ℓ^{N^*} y ℓ^M . Por tanto, las bases canónicas de ℓ^{N^*} y ℓ^M son equivalentes y así las funciones N^* y M son equivalentes en el 0 ([L-T₄] Proposición 4.a.5). ///

En particular, por la Proposición 4.b.7 de [L-T₄], el resultado anterior prueba que si ℓ^ϕ es un espacio de Orlicz minimal reflexivo entonces su dual $(\ell^\phi)' \approx \ell^{\phi^*}$ es también un espacio de Orlicz de sucesiones minimal reflexivo.

11. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz. La función ϕ es minimal si y solo si su simétrica $\tilde{\phi}$ lo es.

Demostración.

En la Proposición III.20, constatamos que $E_{\phi,1}$ esta formado precisamente por las simétricas de las funciones de $E_{\phi,1}^\infty$. Sea ahora $M \in E_{\phi,1}^\infty$ y supongamos que ϕ es minimal. Entonces $\hat{M} = \psi$ pertenece a $E_{\phi,1}^\infty$ y verifica que $E_{\psi,1}^\infty = E_{\phi,1}^\infty$. Tomando las funciones simétricas en esta igualdad se obtiene que: $E_{M,1}$

= $F_{\phi, 1}^{\infty}$, probando que $\tilde{\phi}$ es minimal. ///

A partir de aquí comenzamos a estudiar propiedades de los espacios de Orlicz de sucesiones y de funciones minimales es decir generados por una función minimal, que en general los singularizan, como ocurre con la clase más reducida de los espacios l^p y L^p .

Para funciones minimales, la cuestión de la existencia de espacios de Orlicz de sucesiones con pesos $l^{\phi}(w_n)$ isomorfos a l^p tiene la siguiente solución:

12. Proposición.

Sea ϕ una función minimal y $0 < p < \infty$. Entonces, existe una sucesión de pesos $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $l^{\phi}(w_n)$ es isomorfo a l^p si y solo si la función ϕ es equivalente a t^p en $[0, \infty)$.

Demostración.

Probemos la implicación no evidente suponiendo que $l^{\phi}(w_n) \approx l^p$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, entonces elegimos una subsucesión $(w_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de forma que $\sum_{k=1}^{\infty} w_{n_k} < \infty$. El espacio $l^{\phi}(w_{n_k})$ es un subespacio complementado de $l^{\phi}(w_n) \approx l^p$. Por ser l^p un espacio primo, se deduce que $l^{\phi}(w_{n_k}) \approx l^p$. Utilizando el Corolario III.7, existe una función ψ en E_{ϕ}^{∞} equivalente en 0 a t^p . Luego para $t \leq t_0$ se tiene que:

$$H t^p \leq \psi(t) \leq K t^p \quad (1)$$

Como $\phi \in E_{\psi} = F_{\phi} = E_{\phi, 1}$, para alguna sucesión $\lambda_n \rightarrow 0$,

obtenemos que $(\frac{\psi(\lambda_n \cdot)}{\psi(\lambda_n)})_1^\infty$ converge a ϕ en $C([0, \infty))$. Una vez fijado t , se cumple, para valores grandes de n , como consecuencia de (1) que:

$$\frac{H}{K} t^p \leq \frac{\psi(\lambda_n t)}{\psi(\lambda_n)} \leq \frac{K}{H} t^p.$$

Por tanto ϕ es equivalente a t^p en $[0, \infty)$.

Si $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty$, el razonamiento es entonces simétrico del anterior. Finalmente si $0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w_n < \infty$, es inmediato que $\ell^\phi(w_n)$ y ℓ^ϕ son espacios isomorfos (más aún, las bases canónicas son equivalentes). Por tanto $\ell^p_{\mathcal{A}} \ell^\phi$ y como resultado de la Proposición 4.a.8 de [L-T₄] y su generalización por Kalton ([K₁] Teorema 4.6) se deduce que $\phi \dot{\sim} t^p$. De nuevo por pertenecer ϕ al conjunto E_ϕ , podemos extender dicha equivalencia a $[0, \infty)$. ///

En definitiva las funciones minimales ϕ no equivalentes a t^p constituyen un ejemplo de funciones para las que los conjuntos P_ϕ y P_ϕ^∞ son vacíos.

13. Observación.

Por un resultado de F.L. Hernández ([H₂] Teoremas 2.1 y 2.2.) se tiene que las funciones ϕ equivalentes a α_ϕ^∞ -convexas (resp. β_ϕ^∞ -cóncavas) verifican la propiedad W^p en ∞ para $p = \alpha_\phi^\infty$ (resp. $p = \beta_\phi^\infty$). Por tanto, como consecuencia de la Propo

sición.12, las funciones minimales no equivalentes a t^p no son equivalentes a α_ϕ^∞ -convexas ni a β_ϕ^∞ -cóncavas. Generalizamos así una observación de Lindenstrauss y Tzafriri ([L-T₃] pag. 381) que establece que si ϕ es minimal 1-convexa y $\alpha_\phi = 1$ entonces necesariamente $\phi \sim t$. Por otra parte la propiedad anterior aclara la no existencia de funciones minimales de índice $\alpha_\phi = 0$. En efecto, en ese caso t_ϕ sería una función minimal por la Prop.8 y convexa salvo \sim , de índice $\alpha_\phi = 1$; es decir $t_\phi \sim t$. Por lo cual existirían $H, K > 0$ tales que $H \leq \phi(t) \leq K$ para $0 < t \leq t_0$ y como consecuencia ϕ no sería continua en $t=0$.

Un problema abierto planteado por Lindenstrauss y Tzafriri en [L-T₄] es si existen espacios de Orlicz de sucesiones minimales convexos distintos de ℓ^p ($p \geq 1$) o de C_0 que sean primos.

Distinguimos ahora en el estudio de los espacios $\ell^\phi(w_n)$ para ϕ minimal el caso convexo y el no convexo. Necesitaremos la siguiente reformulación de un resultado de Kalton ([K₁] Teorema 7.1):

14. Lema:

Si F y G son dos funciones de Orlicz no equivalentes a una convexa y que cumplen la condición Δ_2 en el 0, entonces ℓ^F y ℓ^G son espacios isomorfos si y solo si F y G son equivalentes en 0.

Demostración.

Es suficiente observar si ℓ^F y ℓ^G son isomorfos cada uno

tiene una copia complementada del otro y aplicar el Teorema 7.1 de $[K_1]$. ///

Este resultado no es cierto si las funciones son convexas. Otra consecuencia del Teorema 7.1 de $[K_1]$ es que si F y G no son equivalentes en 0 ni equivalentes a una función de Orlicz convexa entonces la suma directa $\mathcal{L}^F \oplus \mathcal{L}^G$ no es isomorfa a ningún espacio de Orlicz de sucesiones. Si en particular F y G pertenecen a un mismo conjunto E_ϕ^∞ podemos construir por la Proposición III.5 un espacio de sucesiones $\mathcal{L}^\phi(w_n) \sim \mathcal{L}^F \oplus \mathcal{L}^G$, con $\sum_1^n w_n < \infty$, que no es isomorfo a ningún espacio de Orlicz de sucesiones. En efecto, puesto que existen $(b_n)_1^\infty$ y $(c_n)_1^\infty$ de suma finita verificando $\mathcal{L}^\phi(b_n) \sim \mathcal{L}^F$ y $\mathcal{L}^\phi(c_n) \sim \mathcal{L}^G$, basta escoger para $n=1,2,\dots$:

$$w_{2n} = b_n \quad \text{y} \quad w_{2n-1} = c_n.$$

15. Teorema.

Sea ϕ una función minimal.

15.1 Si ϕ es equivalente a una función convexa o a t^p para

$0 < p < \infty$, entonces para cada $(w_n)_1^\infty$ con $\sum_1^\infty w_n < \infty$, el espacio $\mathcal{L}^\phi(w_n)$ es isomorfo a \mathcal{L}^ϕ .

15.2 Si ϕ no es equivalente a una función convexa ni a t^p para

$0 < p < \infty$, entonces existe una cantidad no numerable de espacios del tipo $\mathcal{L}^\phi(w_n)$ no isomorfos entre si y que son isomorfos a espacios de Orlicz de sucesiones \mathcal{L}^ψ . Además, existen espacios $\mathcal{L}^\phi(w_n)$ de suma finita que no son isomorfos a ningún espacio de Orlicz de sucesiones \mathcal{L}^ψ .

Demostración.

15.1. Suponemos que ϕ es convexa y para una sucesión de pesos $(w_n)_1^\infty$ de suma finita, definimos λ_n cumpliendo $\frac{1}{\phi(\lambda_n)} = w_n$. Puesto que $E_\phi^\infty = E_\phi$ en $C([0, \infty))$ por la Proposición 5, para cada $n=1, 2, \dots$, existe $\mu_n > 0$ de forma que para $t \leq 1$:

$$\left| \frac{\phi(\lambda_n t)}{\phi(\lambda_n)} - \frac{\phi(\mu_n t)}{\phi(\mu_n)} \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

y además que $(\mu_n)_1^\infty$ converja a 0. Haciendo $b_n = \frac{1}{\phi(\mu_n)}$, la relación (1) implica que las bases canónicas de

$\ell^\phi(w_n)$ y $\ell^\phi(b_n)$ son equivalentes. Como la función ϕ es L-T minimal y $(b_n)_1^\infty$ tiende a ∞ , de la Proposición 4b.7 de [L-T₄] se deduce que $\ell^\phi(b_n) \cong \ell^\phi$. En definitiva, los espacios ℓ^ϕ y $\ell^\phi(w_n)$ son isomorfos. Los casos de ϕ equivalente a una convexa o a t^p son inmediatos.

15.2. Utilizando la Proposición 8, podemos elegir $p > 0$ tal que $t^p \phi = \psi$ sea una función convexa minimal (salvo \sim). Es también L-T minimal y según el Teorema 4.9 de [L-T₄], el conjunto E_ψ contiene una cantidad no numerable de funciones no equivalentes entre sí. Dividiendo entonces cada función por t^p , obtenemos en E_ϕ una cantidad no numerable de funciones F no equivalentes entre sí. Por la Proposición 2, si alguna fuera equivalente a una convexa todas las demás lo serían y también la función ϕ que es minimal. Luego aplicando el Lema 14, los correspondientes espacios ℓ^F (que poseen una representación del tipo $\ell^\phi(w_n)$ para $\sum_1^\infty w_n < \infty$) no son isomorfos.

Finalmente, elijamos funciones F y G de $E_\phi = E_\phi^\infty$ no equivalentes y espacios de sucesiones de suma finita $\ell^\phi(b_n)$ y $\ell^\phi(c_n)$ isomorfos a ℓ^F y ℓ^G respectivamente. Como ya hemos observado en el apartado 14, el espacio $\ell^F \otimes \ell^G$ no es un espacio de Orlicz de sucesiones ℓ^H y es del tipo $\ell^\phi(w_n)$ de suma finita cuando definimos $w_{2n} = b_n$ y $w_{2n-1} = c_n$ para $n=1,2,\dots$, obteniéndose así los requisitos del enunciado. ///

Observando que la función minimal ϕ es límite de una sucesión del tipo $(\frac{\phi(\lambda_n \cdot)}{\phi(\lambda_n)})_1^\infty$ para $\lambda_n \uparrow 0$ (resp. para $\lambda_n \uparrow \infty$) puede sustituirse la hipótesis de ser ϕ equivalente a una convexa por la más débil de ser ϕ equivalente en el 0 (resp. en el ∞) a una convexa.

16. Definición.

Sea X un F -espacio con una base simétrica $(x_n)_1^\infty$. La base $(x_n)_1^\infty$ es minimal simétrica si todas las bases bloque de coeficientes constantes de $(x_n)_1^\infty$ generan subespacios isomorfos a X .

La base canónica de un espacio minimal de sucesiones convexo ℓ^ϕ y la base canónica de ℓ^p para $0 < p < \infty$ son minimal simétricas. El resultado anterior prueba que la base simétrica canónica de un espacio minimal de sucesiones no convexo no es minimal simétrica.

17. Teorema

Sea ϕ una función de Orlicz minimal no equivalente a t^q

para $0 < q < 1$ ni a una función convexa. Entonces se tiene que cualquier espacio de sucesiones con peso $l^\phi(w_n)$ es localmente p -convexo para $p < \alpha_\phi^\infty$ y no es localmente p -convexo para $p \geq \alpha_\phi^\infty$.

Demostración.

Nótese que en las hipótesis del Teorema se tiene que $0 < \alpha_\phi^\infty \leq 1$. Sea $l^\phi(w_n)$ un espacio de Orlicz de sucesiones con peso. Puesto que:

$$\overline{\left\{ \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)} : \lambda \in (0, \infty) \right\}} = \overline{\left\{ \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)} : \lambda \leq 1 \right\}} \cup \overline{\left\{ \frac{\phi(\lambda)}{\phi(\lambda)} : \lambda \geq 1 \right\}} = E_{\phi,1}^\infty \cup E_{\phi,1}^\infty = E_\phi^\infty \subset C([0, \infty)),$$

un razonamiento como el utilizado en la demostración de 15.1 conduce a una sucesión $(b_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\sum_1^\infty b_n < \infty$ y las bases canónicas de $l^\phi(w_n)$ y $l^\phi(b_n)$ son equivalentes. Como se observó en la Proposición III.1, el espacio de Orlicz de funciones L^ϕ posee una copia isomorfa de $l^\phi(b_n)$. Por tanto, puesto que el espacio L^ϕ es localmente p -convexo para $p < \alpha_\phi^\infty$ y la p -convexidad es una propiedad hereditaria para subespacios se deduce que el espacio $l^\phi(w_n)$ es localmente p -convexo para $p < \alpha_\phi^\infty$.

Escojamos ahora, siguiendo la Proposición III.6, una sub-sucesión $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ de forma que $l^\phi(b_{n_k})$ sea isomorfo a l^ψ para alguna función de Orlicz minimal ψ de E_ϕ^∞ . Como ψ y ϕ tienen los mismos índices, el espacio l^ψ no es localmente p -convexo para $p > \alpha_\psi = \alpha_\phi$, (por la Proposición 9). Mas aún si l^ψ fuese localmente α_ψ -convexo sería, en virtud del Teorema de Mazur-

-Orlicz generalizado ([R].Teorema 3.4.10 y [M-O]), la función ψ equivalente en 0 a una función α_ψ -convexa. Por el criterio enunciado en el Teorema III.17, existe entonces una sucesión de pesos $(c_n)_1^\infty$ de suma finita de forma que $\ell^\phi(c_n) \sim \ell^p$. Puesto que ψ es minimal esto contradice la Proposición 12. Luego ni el espacio ℓ^ψ ni el espacio $\ell^\phi(b_n)$ que lo contiene son localmente α_ψ -convexos. Esto completa la demostración ya que $\alpha_\phi = \alpha_\phi^\infty$ por la Proposición 7. ///

18. Observación.

El resultado anterior responde en sentido negativo a una cuestión planteada en [H₁] (pág. 201) en el contexto de la teoría de galbes.

El galbe $G(E)$ de un F-espacio E , noción introducida por Turpin ([T₁]), es el espacio vectorial de las sucesiones $(\lambda_n)_1^\infty$ de escalares tal que para cada entorno U de 0 en E existe un entorno V de 0 en E tal que:

$$\bigcup_{N \geq 1} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n V \right) \subset U$$

Se tiene que $\ell^\circ \subset G(E) \subset \ell^1$, donde ℓ° designa el espacio de las sucesiones nulas salvo en un número finito de términos. Un F-espacio es localmente p -convexo para $0 < p \leq 1$ si y solo si $G(E) \supset \ell^p$. ([T₁] pág. 59). Además, si E es localmente acotado, E es estrictamente p -convexo (p -convexo y no q convexo para $q > p$) si y solo si $G(E) = \ell^p$ ([K₂]).

Una consecuencia del Teorema 17 y del Teorema 1.2 de [H₂]

es que existen funciones de Orlicz ϕ de índice $0 < \beta_\phi^\infty \leq 1$, que verifican que para cualquier sucesión de escalares $(w_n)_1^\infty$ de suma finita el galbe de $\ell^\phi(w_n)$ está estrictamente contenido en $\ell^{\beta_\phi^\infty}$, i.e.:

$$\bigcup_{p < \alpha_\gamma} \ell^p \subset G(\ell^\phi(w_n)) \subset \ell^{\beta_\phi^\infty}$$

para $(w_n)_1^\infty$ con $\sum_1^\infty w_n < \infty$.

Nos restringimos ahora al caso Banach, es decir a funciones minimales equivalentes a convexas. Lindenstrauss y Tzafriri, utilizando funciones L-T minimales, mostraron la existencia de espacios de Orlicz de sucesiones ℓ^ϕ que no contienen copias complementadas de ningún ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) ó de c_0 ([L-T₃] Ejemplos 1 y 2). El concepto generalizado de minimalidad nos va a conducir a un resultado semejante para espacios de Orlicz de funciones.

19. Observación.

Si ϕ es una función de Orlicz minimal equivalente a una convexa, entonces el espacio de funciones L^ϕ tiene una copia complementada de ℓ^ϕ . En efecto, basta tener en cuenta que L^ϕ tiene una copia complementada de $\ell^\phi(w_n)$ para cada $(w_n)_1^\infty$ de suma finita (Proposición III.1) y que los espacios $\ell^\phi(w_n)$ y ℓ^ϕ son isomorfos por la Proposición 15.1.

20. Proposición.

Sea ϕ una función de Orlicz minimal equivalente a una convexa. Si el espacio L^ϕ tiene una copia isomorfa de un espacio de

Orlicz de sucesiones ℓ^p con $p > 2$ entonces existe en $C_{\psi,1}$ una función F equivalente en 0 a alguna función de $C_{\phi,1}$.

Demostración.

El espacio de funciones L^ϕ es un retículo de Banach orden continuo con unidad débil $(X [0,1])$, para el orden natural definido en casi todo punto. Sea Y un subespacio del retículo de Banach L^ϕ , que sea isomorfo a ℓ^ψ . El espacio Y contiene una copia de ℓ^p para $p = p_{\psi} > 2$ por el Teorema 4.a.9 de [L-T₄]. Puesto que el espacio L^1 tiene cotipo 2 y cada espacio ℓ^p con $p > 2$ tiene cotipo p ([L-T₅] pag. 73), se deduce que Y no es isomorfo a ningún s.e.v. de L^1 . (Véase también el resultado de Aldous [A1]). Podemos aplicar entonces el método generalizado de Radec-Pelczynski ([L-T₅] pag. 38):

Consideremos los conjuntos:

$$\sigma(f, \epsilon) = \{t: |f(t)| \geq \epsilon \|f\|\} \text{ y } M(\epsilon) = \{f \in L^\phi : \mu(\sigma(f, \epsilon)) \geq \epsilon\}$$

para cada $f \in L^\phi$ y $\epsilon > 0$, donde μ designa la medida de Lebesgue en $[0,1]$ y $\|\cdot\|$ la norma de L^ϕ . Como $Y \not\subset L^1$, para cada natural $n > 2$ podemos elegir f_n en Y verificando:

$$\|f_n\| = 1 \text{ y } f_n \notin M\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Si T designa el isomorfismo entre Y y ℓ^ψ , y $(e_i)_1^\infty$ es la base canónica de ℓ^ψ entonces $(T(e_i))_1^\infty$ es una base de Y . Por tanto, existen funciones $u_n = \sum_{i=1}^n a_i T(e_i)$ en Y verificando:

$$1 - \frac{1}{2^n} \leq \|u_n\| \leq 1 + \frac{1}{2^n} \text{ y } |u_n(t) - f_n(t)| < \frac{1}{2^n}$$

salvo en un conjunto A_n de medida nula. Afirmamos que $u_n \notin M(\frac{1}{2^{n-2}})$. En efecto, es claro que:

$$\sigma(u_n, \frac{1}{2^{n-2}}) \subset \{t: |u_n(t)| > \frac{3}{2^n}\} = B_n.$$

Cuando t pertenece a $B_n \setminus A_n$, se tiene que $|f_n(t)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{1}{2^n}$ y por tanto que $t \in \sigma(f_n, \frac{1}{2^n})$. Así:

$$\mu(\sigma(u_n, \frac{1}{2^{n-2}})) \leq \mu(B_n) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$Y \quad u_n \notin M(\frac{1}{2^{n-2}})$$

La construcción anterior se hace en los términos expuestos para $n=3$ en primer lugar. Reemplazamos entonces Y por el subespacio $Y_4 = \overline{[(T(e_i))_{i=N_3+1}^\infty]}$, que es isomorfo a Y por ser submétrica la base $(T(e_i))_1^\infty$. Repetimos entonces el razonamiento para $n=4$. Iterando el procedimiento, obtenemos una base bloque de $(T(e_i))_1^\infty$ que designamos también por $(u_n)_{n=3}^\infty$. Puesto que $(T(e_i))_1^\infty$ es equivalente a la base canónica de ℓ^ψ , el razonamiento del Teorema 4.a.7 de [L-T₄] prueba que hay una subsucesión $(u_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(u_n)_{n=3}^\infty$ que genera en Y un espacio de Orlicz de sucesiones ℓ^F para alguna función $F \in C_{\psi,1}$. Siguiendo con el método de Radec-Pelczynski, podemos encontrar una subsucesión (n_{k_j}) de (n_k) y una sucesión $(\sigma_j)_1^\infty$ de funciones de L^ϕ con soportes mutuamente disjuntos que verifican:

$$\|\sigma_j - u_{n_{k_j}}\| < \frac{1}{2^{j-1}}$$

para $j=1,2,\dots$. Las sucesiones básicas $(g_j)_1^\infty$ y $(u_{nk_j})_{j=1}^\infty$ son equivalentes. En efecto, es suficiente probar que $(g_j)_1^\infty$ y $(v_j)_1^\infty$ son equivalentes, donde v_j está definido por:

$$v_j = \frac{u_{nk_j}}{\|u_{nk_j}\|}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j - v_j\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j - u_{nk_j}\| + \sum_{j=1}^{\infty} \|u_{nk_j} - v_j\| < \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left|1 - \frac{1}{\|u_{nk_j}\|}\right| \cdot \|u_{nk_j}\| \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{nk_j}}\right) \frac{1}{2^{nk_j}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{nk_j}}}\right) \end{aligned}$$

Si K es la constante base unicondicional de $(v_j)_1^\infty$, existe un natural m de forma que $\sum_{j=m}^{\infty} \|g_j - v_j\| < \frac{1}{2K}$. Como consecuencia del Teorema 1.a.9 de $[L-T_4]$ se deduce que $(g_j)_{j \geq m}$ y $(v_j)_{j \geq m}$ son equivalentes y naturalmente que $(g_j)_1^\infty$ y $(v_j)_1^\infty$ lo son también. Así pues $\overline{[(g_j)_1^\infty]} \sim \mathcal{E}^F$.

Finalmente, por ser las funciones simples densas en el espacio L^ϕ , para cada natural j existen conjuntos mutuamente disjuntos $B_{j,r} \subset \text{sop}(g_j)$ y números reales $(a_{j,r})$ para $r=1,2,\dots, k_j$ tales que

$$h_j = \sum_{r=1}^{k_j} a_{j,r} \times B_{j,r}$$

verifica que :

$$\|a_j - h_j\| < \frac{1}{2^j}$$

De nuevo por el mismo razonamiento de perturbación de bases, los espacios $\overline{[(h_j)_1^\infty]}$ y ℓ^F son isomorfos. Por otra parte,

$\overline{[(\chi_{B_{j,r}})_{j,r}]}$ es isomorfo canónicamente a un espacio de Orlicz de sucesiones con peso $\ell^\phi(w_n)$ para $\sum_1^\infty w_n < \infty$. Por tanto, por la Proposición 15.1 es también isomorfo a ℓ^ϕ . En conclusión, el espacio ℓ^ϕ contiene un subespacio isomorfo a ℓ^F y por el Teorema 1 de [J.-T₂] se obtiene que F es equivalente en 0 a una función de $C_{\phi,1}$. ///

21. Teorema.

Sea ϕ una función minimal equivalente a una convexa y $p > 2$. Entonces el espacio L^ϕ tiene una copia (resp. copia complementada) de ℓ^p si y solo si el espacio ℓ^ϕ tiene una copia (resp. copia complementada) de ℓ^p .

Demostración.

Una de las implicaciones es consecuencia de la Observación 19.

Si ahora el espacio L^ϕ tiene una copia de ℓ^p , sustituyendo ψ por t^p en el enunciado de la Proposición 20, se deduce que ℓ^ϕ tiene una copia de ℓ^p ya que $C_{t^p,1} = \{t^p\}$. Supongamos finalmente que L^ϕ tiene un subespacio complementado y isomorfo a ℓ^p . Podemos repetir la demostración de la Proposición 20 hasta

obtener, con las mismas notaciones, la base bloque $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de Y . Como todas las bases bloque de la base canónica de ℓ^p son complementadas ([L-T₄] Proposición 2.a.1), se tiene que el espacio $\overline{[(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}]} \cong \ell^p$ es complementado en Y y por tanto en L^{ϕ} . Ahora bien, escogiendo una perturbación adecuada (en el sentido de la Proposición 1.a.9(ii) de [L-T₄]), es posible obtener sucesiones básicas del tipo $(a_j)_1^{\infty}$ y $(h_j)_1^{\infty}$ que sean complementadas en L^{ϕ} . Luego el espacio ℓ^{ϕ} posee un subespacio complementado isomorfo a $\overline{[(h_j)_1^{\infty}]} \cong \ell^p$. ///

Antes de enunciar el próximo teorema, recordemos que en cualquier espacio de Orlicz separable L^{ϕ} , con índices $1 < \alpha_{\phi}^{\infty} < \rho_{\phi}^{\infty} < \infty$, las funciones de Rademacher $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ definidas por:

$$r_n(t) = \text{sign} \, \text{sen}(2^n \pi t)$$

para $0 \leq t \leq 1$, generan un subespacio complementado isomorfo a ℓ^2 ([L-T₄] pag. 134), como aplicación de la desigualdad de Khintchine.

22. Teorema.

Sea $1 < r \leq s \leq 2$ o bien $2 \leq r \leq s < \infty$. Entonces existe un espacio de Orlicz de funciones $L^{\phi} = L^{\phi}([0,1])$ con índices $\alpha_{\phi}^{\infty} = r$ y $\rho_{\phi}^{\infty} = s$ que no contiene subespacios complementados isomorfos a ℓ^p para ningún $p \neq 2$.

Demostración.

Fijados r y s cumpliendo $2 \leq r \leq s < \infty$, consideramos las funciones de Orlicz L - T minimales y convexas definidas en los Ejemplos 4.c.6 y 4.c.7 de [L-T₄] y escojamos una ϕ de índices $2 \leq r = \alpha_{\phi}^{\infty} \leq s = \rho_{\phi}^{\infty}$. Por tanto, el espacio de Orlicz de sucesiones

minimal ℓ^ϕ no contiene subespacios complementados isomorfos a ℓ^p para ningún $p \geq 1$. La función ϕ puede ser extendida, por la Proposición 6.2 a una función minimal en $C([0, \infty))$ que denotaremos también por ϕ . Los índices de esta función en el ∞ son:

$$\alpha_\phi = \alpha_\phi^\infty = r \quad \text{y} \quad \beta_\phi = \beta_\phi^\infty = s \quad (1)$$

Como $\alpha_\phi^\infty \geq 2$ se sigue del Corolario pag. 386 de [L-T₃] que el espacio L^ϕ no contiene copias de ℓ^p cuando $p \notin [\alpha_\phi^\infty, \beta_\phi^\infty] \cup \{2\}$. Luego como consecuencia del Teorema 21 y de (1), se concluye que el espacio de Orlicz L^ϕ no contiene subespacios complementados isomorfos a ℓ^p para $p \neq 2$.

El otro caso $1 < r \leq s \leq 2$, se comprueba utilizando argumentos de dualidad. En efecto, sea ψ la conjugada de Young de la función ϕ construida anteriormente y cuyos índices verifican:

$$\alpha_\psi = \frac{\beta_\phi}{\beta_\phi - 1} = r \quad \text{y} \quad \beta_\psi = \frac{\alpha_\phi}{\alpha_\phi - 1} = s.$$

Si el espacio L^ψ tuviese una copia complementada de ℓ^p con $p \neq 2$ entonces $L^\psi \cong \ell^p \oplus H$ para algún subespacio H de L^ψ . Por tanto, al ser L^ϕ reflexivo, el dual de L^ψ es isomorfo a L^ϕ y a $\ell^q \oplus H'$, siendo q el exponente conjugado de p , i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces el espacio L^ϕ tendría una copia complementada de ℓ^q con $q \neq 2$, llegándose a contradicción pues $2 \leq \alpha_\phi^\infty \leq \beta_\phi^\infty < \infty$. ///

23 Observación.

Para probar la existencia de espacios de Orlicz de sucesio

nes ℓ^ϕ que no tienen copias complementadas de ningún \mathcal{L}^p se utiliza que t^p es "fuertemente no equivalente a $E_{\phi,1}$ " para cada p . En el caso de funciones minimales esta propiedad puede mejorarse.

Decimos que una función F es fuertemente no equivalente a $E_{\phi,1}$ (resp. $F_{\phi,1}^\infty$) si y solo si:

$\forall \kappa > 1$, Existe m_κ puntos $t_i \in (0, \frac{1}{\kappa})$ tal que $\forall s \in (0,1)$ (resp. $(1, \infty)$), existe $i \in \{1, 2, \dots, m_\kappa\}$ tal que:

$$\frac{\phi(st_i)}{\phi(s) \cdot F(t_i)} \notin \left[\frac{1}{\kappa}, \kappa \right] \quad (1)$$

y m_κ puede ser elegido de forma que $m_\kappa = o(\kappa^\alpha)$ cuando $\kappa \rightarrow \infty$ para cada $\alpha > 0$. (véase [L-T₄] pag. 150).

Demostremos ahora que si F es fuertemente no equivalente a $F_{\phi,1}$ y la función ϕ es minimal entonces F es fuertemente no equivalente a $F_{\phi,1}^\infty$.

En efecto, por ser ϕ minimal se tiene que $F_{\phi,1} = F_{\phi,1}^\infty$ y por tanto para $r \in (1, \infty)$ podemos elegir $s = s(r, \epsilon) \in (0,1)$ de forma que

$$\left| \frac{\phi(st)}{\phi(s)} - \frac{\phi(rt)}{\phi(r)} \right| < \epsilon$$

para $t \leq 1$. Pero además, la función ϕ verifica (1) para $s \in (0,1)$

Si $T = \min \{t_1, \dots, t_{m_\kappa}\} > 0$, es claro que:

$$\left| \frac{\phi(st)}{\phi(s) F(t)} - \frac{\phi(rt)}{\phi(r) F(t)} \right| < \frac{\epsilon}{F(T)}$$

para $T \leq t \leq 1$. Escogemos $\epsilon > 0$ de forma que $\frac{\epsilon}{F(T)} < \frac{1}{K}$. Por lo tanto, si $\frac{\phi(st_i)}{\phi(s)F(t_i)} < \frac{1}{K}$ se tiene que:

$$\frac{\phi(rt_i)}{\phi(r)F(t_i)} < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K}$$

Y si $\frac{\phi(st_i)}{\phi(s)F(t_i)} > K$ se obtiene que:

$$\frac{\phi(rt_i)}{\phi(r)F(t_i)} > K - \frac{1}{K} \geq \frac{K}{2}$$

Haciendo $K' = \frac{K}{2}$ y escogiendo para K' los puntos correspondientes a K en la relación (1) se llega al resultado.

Concluimos el Capítulo con un ejemplo de función minimal en el ∞ deducido de los expuestos por Lindenstrauss y Tzafriri en [L-T₄] (pag. 161 y siguientes).

24 Ejemplo.

Sea $0 < r < 1$ y F y G funciones continuas, convexas y estrictamente crecientes en $[r, 1]$ tales que:

24.1. $F(1) = G(1) = 1$, $0 < F(r) < 1$, $0 < G(r) < 1$

24.2. $F'(1) = G'(1)$, $F'(1) \leq \frac{t F'(t)}{F(t)}$ y $G'(1) \leq \frac{t G'(t)}{G(t)}$

para $\forall t \in [r, 1]$.

24.3. $F(r) = r^{p_1}$ y $G(r) = r^{p_2}$ para $1 < p_1 < p_2$.

Para cada sucesión de dígitos $d=(d(n))_{n=1}$ con $d(n)$ igual a 0 ó a 1, definimos una función S_d en $[1, \infty)$ de la forma siguiente:

$$S_d(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=1 \\ \frac{S_d\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)}{F\left(\frac{1}{t r^{n-1}}\right)} & \text{si } \begin{cases} \frac{1}{r^{n-1}} < t \leq \frac{1}{r^n} \\ \text{y } d(n) = 0 \end{cases} \\ \frac{S_d\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)}{G\left(\frac{1}{t r^{n-1}}\right)} & \text{si } \begin{cases} \frac{1}{r^{n-1}} < t \leq \frac{1}{r^n} \\ \text{y } d(n) = 1 \end{cases} \end{cases}$$

para $n=1,2,\dots$. Estas funciones S_d están tomadas simetrizando las definidas en $[L-T_4]$ y por tanto son funciones de Orlicz que verifican la condición Δ_2 en ∞ . Por tanto por el resultado 4.c.5 de $[L-T_4]$ y la Proposición 11, se deduce que S_d es equivalente en ∞ a una función minimal si y solo si existe una constante K tal que para cada natural k , hay un natural $n(k)$ que verifica:

$\forall h \in \mathbb{N}$, existe $m \leq n(k)$ tal que

$$\left| \sum_{i=h+m+1}^{n+m+j} d(i) - \sum_{i=1}^j d(i) \right| \leq K$$

para $j=1,2,\dots,k$.

En los ejemplos 4.c.6 y 4.c.7 de $[L-T_4]$ se dan elecciones de $(d(n))_{n=1}^{\infty}$ para que los índices de $M_d = S_d$ sean $\alpha_{M_d} = \beta_{M_d} = p > 1$ ó $1 < \alpha_{M_d} < \beta_{M_d} < \infty$. Por tanto, por la Proposición III.20, los correspondientes índices de S_d en ∞

verifican $\alpha_{S_d}^\infty = \beta_{S_d}^\infty = p > 1$ ó $1 < \alpha_{S_d}^\infty < \beta_{S_d}^\infty < \infty$. Multiplicando por t^q para un q adecuado la función S_d , pueden obtenerse funciones de Orlicz $t^q S_d$ de índices finitos y no nulos arbitrarios en ∞ y que además son equivalentes en el ∞ a una función minimal razonando como en la Proposición 8.

BIBLIOGRAFIA

- [A1] Aldous, D. : Subspaces of L^1 via Random measures.
Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981), 445-463.
- [A-B] Aliprantis, C.D. y Burkinshaw, O. : Locally solid Riesz
Spaces. Academic Press 1978.
- [Ba] Banach, S. :Théorie des opérations, linéaires. Mon.
Mate. 1, Varsovia 1932.
- [B₁] Bombal, F.: Espacios de Orlicz de funciones vectoriales
débilmente secuencialmente completos. Rev. Acad.
Cienc. Madrid. (por aparecer).
- [B₂] Bombal, F. : On \mathcal{L}^1 subspaces of Orlicz vector-valued
functions spaces. Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.
(por aparecer).
- [B-D] Bretagnolle, J. y Dacunha-Castelle.:Application de
l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au
plongement d'espaces de Banach dans des espaces \mathcal{L}^p .
Ann. E.N.Sup. 2 (1969), 437-480.
- [C-Z] Class, W. y Zaanen, A.C. : Orlicz lattices . Comm. Math.
(in honorem L. Orlicz). Tomo 1 (1978) 77-93.
- [D-K] Denker, M. y Kombrik, R. : On B-convex Orlicz spaces.
Lec. Notes in Math. Springer 709 (1979), 87-95.
- [D] Drewnowski, L. : F-spaces with a basis which is shrinking
but not hiper-shrinking. Studia Math. 64, (1979),
197-204.
- [F-J-T] Figiel, T. Johnson, W.B. y Tzafriri, L. :On Banach lattices
and Spaces having local unconditional structure
with applications to Lorentz function spaces.
J. Approximation Theory. 13 (1975), 395-412.
- [F-H] Fuentes, F. y Hernández, F.L. : On weighted Orlicz
sequence spaces and their subspaces. Rocky Mountain
Math.J. (por aparecer).

- [H₁] Hernández, F.L. : On the Galb of weighted Orlicz sequence spaces I. Bull. Acad. Polo. Sci. 32 (1984) 193-202.
- [H₂] Hernández, F.L. : On the Galb of weighted Orlicz sequence spaces II. Arch. Math. 45, (1985), 158-168.
- [H-P₁] Hernández, F.L. y Peirats, V. : A remark on sequence F-spaces $\lambda(\mathbb{E})$ containing a copy of ℓ^p . Bull. Acad. Pol. Sci. (por aparecer).
- [H-P₂] Hernández, F.L. y Peirats, V. : Orlicz function spaces without complemented copies of ℓ^p . Israel J. Of Math. (por aparecer).
- [H-P₃] Hernández, F.L. y Peirats, V. : On certain complemented subspaces of Orlicz function spaces. Conf. on Probability and Banach Spaces. Zaragoza. Publicaciones Sem. García Galdeano Sección 1. 85, (1985), 57-60.
- [H-P₄] Hernández, F.L. y Peirats, V. : Minimal Orlicz function spaces. Proc. Int. Conf. Function Spaces. Poznań. Agosto 1986.
- [Ja] James, R.C. : Bases and reflexivity of Banach spaces. Ann. of Math. 52 (1950), 518-527.
- [J-M-S-T] Johnson, W.B. Maurey, B, Schechtmann, G. y Tzafriri, L. : Symmetric structures in Banach spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 217 (1979).
- [K₁] Kalton, N.J. : Orlicz sequence spaces without local convexity. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 81 (1977), 255-277.
- [K₂] Kalton, N.J. : The convexity type of quasi-Banach spaces. (por aparecer).
- [Ka] Kaminska, A. : Flat Orlicz-Musielak Sequence Spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. 30 (1982), 347-352.
- [K-G] Kamthan, P.K. y Gupta, M. : Sequence spaces and series. Lect. Notes in Math. M. Dēkker 65 (1981).
- [K-A] Kantorovitch, L. y Akilov, G. : Analyse Fonctionnelle. Tome 1. Ed. Mir (1981).
- [Kō] Köthe, G. : Topological vector spaces I. Springer 1969.

- [K-R] Krasnosel'skii, M.A. y Ruticki, Y.B. : Convex functions and Orlicz spaces. Groningen 1961.
- [Ku] Kufner, A. , John, O. y Fučík, S. :Function spaces. Praga, 1977.
- [Lb] Lindberg, K. :On subspaces of Orlicz sequence spaces. Studia Math. 45 (1973), 119-146.
- [L-T₁] Lindenstrauss, J y Tzafriri, L. : On Orlicz Sequence Spaces. Israel J. Of Math. 10, (1971), 379-390.
- [L-T₂] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. : On Orlicz Sequence Spaces II. Israel J. of Math. 11 (1972); 355-379.
- [L-T₃] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. : On Orlicz Sequence Spaces III. Israel J. of Math. 14 (1973), 368-389.
- [L-T₄] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. : Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. Springer, 1977.
- [L-T₅] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. : Classical Banach Spaces II. Function Spaces. Springer, 1979.
- [Lu] Luxemburg, W. : Banach function spaces. Thesis. Assen, 1955.
- [L-Z] Luxemburg, W. y Zaanen, A.C. : Riesz Spaces I. North Holland. Amsterdam 1971.
- [Ml] Maligranda, L. : Indices and interpolation. Dissert. Math. 234 (1985).
- [M] Marti, J.T. : Introduction to the Theory of Bases. Springer 1969.
- [M-O] Matuszewska, W. y Orlicz, W. : A note on the theory of s -normed spaces of ϕ -integrable functions. Studia Math. 21 (1961), 107-115.
- [Mu] Musielak, J. : Orlicz spaces and modular spaces. Lect. Notes in Math. 1034 . Springer 1983.
- [Mu-O] Musielak, J. y Orlicz, W. : On modular spaces. Studia Math. 18 (1959), 49-65.

- [Na] Nakano, H. : Modulare semi-ordered linear spaces.
Tokio, 1950.
- [N] Niculescu, C.: Weak Compactness in Banach lattices .
J. of Operator Theory (1981), 217-231.
- [Ni] Nielsen, N.J. : On the Orlicz Function Spaces $L_M(0, \infty)$.
Israel J. of Math. 20 (1975) 237-259.
- [Pe₁] Peirats, V. :Bases de Schauder en espacios de Orlicz.
Memoria de Licenciatura. Madrid 1982.
- [Pe₂] Peirats, V. : Sobre subespacios isomorfos a ℓ^p en espacios de Musielak-Orlicz de sucesiones vectoriales.
Rev. Acad. Cienc. Madrid .(por aparecer).
- [Pl] Pelczynski, A. : Some aspects of the present theory of
Banach Spaces. Oeuvres II. S. Banach. P.A.S.
Varsovia, 1979.
- [Pr] Pereda, M.P. :Espacios de Orlicz. Convexidad local.
Tesis doctoral. Madrid 1975.
- [P] Pisier, G. : Une propriété de stabilité de la classe des
espaces ne contenant pas ℓ^1 . C.R. Acad. Paris 286,
Série A (1978), 747-749.
- [Ra] Raynaud, Y. : Sous-espaces ℓ^x et géométrie des espaces
 $L^p(L^q)$ et L^ϕ . C.R. Acad. Sc. Paris 301 Série I
n° 6 (1985), 299-302.
- [R] Rolewicz, S.: Metric Linear Spaces. 2^a Edition.
Varsovia, 1984.
- [Sa] Samuel, C. : Sur la reproductibilité des espaces ℓ^p .
Sem. d'An. Fonct.(Paris). Exposé XXVI (1978-79).
- [S] Schaefer, H.H. : Banach lattices and positive operators.
Springer 1974.
- [Si] Simmons, S. : The sequence spaces $\ell(p_n)$ and $m(p_n)$.
Proc. London Math. Soc. 15 (1975), 422-436.

- [St₁] Stiles, W.J.: On properties of subspaces of ℓ^p , $0 < p < 1$.
Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970) , 405-415.
- [St₂] Stiles, W.J.: Some properties of ℓ^p , $0 < p < 1$.
Studia Math. 42 (1972), 109-119.
- [Tr] Triebel, J. : Interpolation theory, function spaces ,
differential operators. Berlin 1978.
- [Tu] Turett, B. : Frenchel-Orlicz spaces. Dissert. Math. 181
(1976), 1-60.
- [T₁] Turpin, Ph. : Convexités dans les espaces vectoriels to-
pologiques généraux. Dissert. Math. 131 (1976).
- [T₂] Turpin, Ph. : Operateurs linéaires entre espaces d'Orlicz
non localement convexes. Studia Math. 46 (1973),
153-265.
- [Wa] Waelbroek, L. : Topological vector spaces. Lect. Notes
in Math. Springer. 331 (1973) , 1-40.
- [W₁] Wnuk , W.: Representations of Orlicz lattices. Dissert.
Math. 235 (1984).
- [W₂] Wnuk , W.: On the order topological properties of the
quotient space L/L_A . Studia Math. 79 (1984), 139-149.
- [W₃] Wnuk , W. :Orlicz spaces which are Riesz-isomorphic to ℓ^∞ .
Rocky Mountain Math. J. (por aparecer).
- [Wo₁] Woo, J.Y.T. : On modular sequence spaces.
Studia Math. 48 (1973), 271-289.
- [Wo₂] Woo, J.Y.T. : On a class of universal modular sequence
spaces . Israel J. of Math. 30 (1975), 193-215.
- [Z] Zaanen, A.C. : Riesz Spaces II. North-Holland.
Amsterdam 1983.
- [Zi] Zippin, M. : The separable extension problem. Israel
of Math. 26 (1977), 372-387.

