

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT13

Introducción al estudio de las estructuras hadrónica

Introduction to the study of hadron structure

Miguel Pérez Martínez

Grado en Física

Curso académico 2023-2024

Convocatoria ordinaria

Calificación: 9,3

Introducción al estudio de las estructuras hadrónicas por medio del método de los campos de fondo

Resumen:

El *Background Field Method* (a partir de ahora, método de los campos de fondo) es una técnica para cuantizar teorías de campos sin perder la invariancia gauge. Facilita el entendimiento de las teorías gauge y simplifica en gran medida los cálculos. En este trabajo se hará hincapié en los conceptos necesarios para abordar este método (integral de caminos, generadores, funciones de Green...), así como se expondrá un ejemplo de su uso en la factorización de distribuciones dependientes del momento transversal (TMD's) en el proceso de Drell-Yan ($h_a + h_b \rightarrow l + \bar{l}$).

Abstract:

The Background Field Method is a technique for quantizing gauge field theories without losing explicit gauge invariance. It makes gauge theories easier to understand and greatly simplifies computations. In this bachelor thesis we will work through the necessary concepts in order to understand the method (path integral, generators, Green functions...), as well as exhibiting its use, studying the Transverse Momentum Dependant (TMD) distribution factorization of a Drell-Yan process ($h_a + h_b \rightarrow l + \bar{l}$).

Índice

1. Introducción	2
2. La integral de caminos	2
2.1. La integral de caminos en el caso más simple.	3
2.2. La integral de caminos en espacio de fases	4
2.3. La integral de caminos en espacio de configuraciones	6
2.4. Productos T-ordenados y funciones de Green para operadores cuánticos	7
2.5. Funcionales generadores	7
2.6. La integral de caminos para campos escalares.	8
3. Secciones eficaces y matriz S	9
4. Interpretación funcional	9
4.1. Funciones de Green de una partícula irreducible	10
5. Método de los campos de fondo	11
6. Teorías Gauge	13
6.1. Método de los campos de fondo en teorías gauge.	13
7. Reglas de Feynman	15
8. Factorización TMD: ejemplo del método de campos de fondo	17
9. Modelo computacional del gauge de los campos de fondo	19
10. Conclusiones	20

1. Introducción

La teoría cuántica de campos es una disciplina que combina a dos de los grandes protagonistas de la física moderna: la teoría cuántica y relatividad especial. Es la base de la física de partículas; así como encuentra aplicaciones en física nuclear, física atómica, física de la materia condensada... Uno de los pilares fundamentales de la teoría cuántica de campos es la llamada segunda cuantización. En mecánica cuántica promovemos las cantidades clásicas a operadores hermíticos en la primera cuantización. Con ello llegamos a una teoría no relativista, que, por ejemplo, no permite estudiar procesos que impliquen un cambio en el número o el tipo de partículas de un sistema. Una forma de solucionar este problema es pasar de ecuaciones de onda, en las que encontramos una sola partícula cuantizada, a una teoría cuántica de campos, en la que identificamos las partículas con modos de un campo, y se cuantiza el campo [4].

La teoría que tratamos en este trabajo es la llamada *QCD* o *cromodinámica cuántica*. Junto a la teoría electrodébil forma el Modelo Estándar, que a día de hoy es la mejor forma que tenemos de reproducir los resultados experimentales en física de partículas. La representación fundamental del grupo gauge $SU(3)$ son los quarks, y la teoría es llamada cromodinámica porque al índice o carga del grupo se le denomina color. La interacción fuerte es mediada por los gluones, que, al igual que los fotones, son no masivos y de espín 1. En conjunto, quarks y gluones forman los llamados *partones*. La estructura hadrónica no es tan simple como para ser descrita por tres quarks no interactuantes, sino que se habla de que estos tres quarks de valencia se encuentran *sumergidos* en un mar de pares quark y antiquark virtuales generados por los gluones, que los mantienen dentro del hadrón. La mejor forma de estudiar esta estructura de partones es mediante procesos de *scattering*, considerando un marco en el que las partículas involucradas en la dispersión tienen momentos muy grandes, lo que nos permite aproximar que el momento de los partones es casi colineal al momento de los nucleones incidentes. Las distribuciones de momento que siguen los partones dentro del nucleón se llaman Funciones de Distribución de Partones (PDF's) [2]. Para ciertos procesos, las PDF contienen toda la información no perturbativa de estos; pero no es el caso para todos. En algunos casos hay efectos no perturbativos que no se pueden añadir en las funciones de distribución de partones, por lo que hay que recurrir a otro tipo de funciones: las dependientes del momento transversal (TMD's) [9].

En este trabajo se hará un recorrido por las herramientas necesarias para poder ver los procesos en cromodinámica cuántica bajo el punto de vista del método de los campos de fondo; una técnica para cuantizar teorías gauge que simplifica los cálculos y las hace más fáciles de entender. Con este fin, es de vital importancia el formalismo de la integral de caminos [10]. Por último, se exhibirá un ejemplo del uso del método de los campos de fondo en el cálculo de la acción efectiva del proceso de *Drell-Yan*, desarrollando los cálculos del artículo [11], cuyo fin es calcular la factorización de las distribuciones dependientes del momento transversal para el tensor hadrónico.

2. La integral de caminos

El primer concepto que debemos estudiar será el de la integral de caminos. Las teorías Gauge localmente invariantes son difíciles de cuantizar, porque los campos con los que trabajamos son dependientes del gauge que escojamos, y por ende poseen un grado extra de libertad no dinámico del que hay que hacerse cargo. El método más conveniente para superar esta dificultad es el formalismo de la integral de caminos [5]. Este formalismo es en cierto modo una generalización del *principio de mínima acción* que encontramos en mecánica clásica. La idea principal consiste en abandonar la idea clásica de una única trayectoria posible, y sustituirla por la suma o integral de la infinidad de trayectorias posibles en una teoría cuántica. Podemos pensar en el *principio de superposición* de

mecánica cuántica, que nos dice que, cuando un proceso puede darse de varias maneras diferentes, su amplitud total de probabilidad es la suma de todas las amplitudes que contribuyen al proceso.

2.1. La integral de caminos en el caso más simple.

Supongamos que tenemos el Hamiltoniano H que describe a un electrón en el experimento de la doble rendija. Queremos calcular la amplitud de transición de esta partícula entre dos puntos, x_a y x_b , en un tiempo T . Llamaremos a esta amplitud $U(x_a, x_b; T)$:

$$U(x_a, x_b, T) = {}_H\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle_H = {}_S\langle x_b, t_b | e^{-\frac{iH(t_b-t_a)}{\hbar}} | x_a, t_a \rangle_S, \quad (1)$$

con $T = t_b - t_a$ y con $U(x_a, x_b; T)$, ya sea en imagen de Schrödinger o de Heisenberg, el núcleo de Feynman [10]. Teniendo en cuenta que las dos imágenes se relacionan de la forma

$$|x(t)\rangle_S = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |x, t\rangle_H, \quad (2)$$

vemos que el núcleo de Feynman controla la evolución temporal de todos los estados, ya que cada uno de los $|x, t\rangle_H$ está completamente definido en el espacio de Hilbert. En la imagen de Schrödinger, la evolución de las funciones de onda viene dada por:

$$\psi(x_b, t_b) = \int dx_a U(x_a, x_b, T) \psi(x_a, x_b), \quad (3)$$

con $\psi(x, t) \equiv {}_S\langle x(t) | \psi(t) \rangle_S$, siendo $|x(t)\rangle_S$ una autofunción de la posición en imagen de Schrödinger. A partir de ahora, nos referiremos siempre a esta imagen, por lo que omitiremos el subíndice S .

Así, para un sistema general, podemos escribir la amplitud total de trasladarnos de un punto x_a a otro x_b como:

$$U(x_a, x_b) = \sum_{\text{todos los caminos}} e^{i \cdot (\text{fase})}, \quad (4)$$

que para ir entrando en contacto con el formalismo escribiremos como:

$$\int \mathcal{D}[x(t)] e^{i \cdot (\text{fase})}.$$

La notación $\int \mathcal{D}[x(t)]$ es simplemente otra forma de referirnos a una suma sobre todos los caminos, ya que hay un camino distinto para cada función $x(t)$ que conecte x_a y x_b . Cabe destacar que hemos escrito la amplitud de cada camino como una fase pura, para que ninguno tenga más peso que otro. En el límite clásico deberíamos encontrar un sólo camino: el que sigue el principio de mínima acción; a la que llamaremos trayectoria clásica. Siendo esta x_{cl} , evaluamos la fase de la exponencial:

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} (\text{fase}[x(t)]) \Big|_{x_{cl}} = 0,$$

y la identificamos como:

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} (S[x(t)]) \Big|_{x_{cl}} = 0,$$

con S la acción clásica. Como la aproximación de acción estacionaria debería ser válida en el límite clásico (es decir, $S \gg \hbar$) usaremos como fase $\frac{S}{\hbar}$. Por ende, tenemos:

$$\langle x_b | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | x_a \rangle = U(x_a, x_b; T) = \int \mathcal{D}[x(t)] e^{i \frac{S[x(t)]}{\hbar}}. \quad (5)$$

El caso más sencillo en el que podemos verificar esta fórmula es el previamente mencionado experimento de la doble rendija (Véase la figura 1). El camino 2 es más largo que el camino 1 en una cantidad d , por lo que su fase será mayor una cantidad $\frac{2\pi d}{\lambda}$, con $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ la longitud de onda de Broglie. La interferencia constructiva se da en $d = 0, \lambda, \dots$, mientras que la destructiva se da en $d = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$. La acción para cada uno de los caminos mostrados en la figura 1 es:

$$S = \frac{1}{2}mv^2t. \quad (6)$$

En el caso del camino más corto, la velocidad es $v_1 = \frac{D}{t}$, así como $v_2 = \frac{D+d}{t}$. Entonces, tenemos:

$$S_1 = \frac{mD^2}{2\hbar t}, \quad (7)$$

$$S_2 = \frac{m(D+d)^2}{2\hbar t}. \quad (8)$$

Asumiendo que $d \ll D \rightarrow v_1 \approx v_2$:

$$S_2 = \frac{m(D+d)^2}{2\hbar t} = S_1 + \frac{mDd}{\hbar t} = S_1 + \frac{pd}{\hbar} = S_1 + \frac{2\pi d}{\lambda}, \quad (9)$$

con $p = \frac{mD}{t} = \frac{\hbar}{\lambda}$, el momento. Hecho todo esto vemos que, efectivamente, (9) concuerda con la expresión para el desfase que provoca la interferencia en el experimento de la doble rendija.

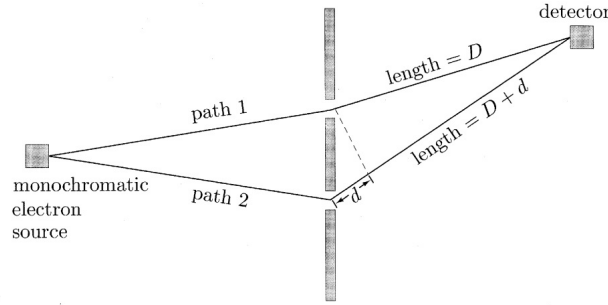


Figura 1: Experimento de la doble rendija [7].

2.2. La integral de caminos en espacio de fases

Consideremos ahora el caso general. Podemos reescribir la exponencial de la ecuación (1) como un producto infinito de la forma:

$$U(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_b(t_b) | \left(1 - \frac{iH}{\hbar} \frac{(t_b - t_a)}{n} \right)^n | x_a(t_a) \rangle, \quad (10)$$

donde hemos usado la identidad matricial [10]:

$$e^{i\sum_a \beta_a t_a^{(R)}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mathbb{1} + \frac{i}{N} \sum_a \beta_a t_a^{(R)} \right]^N, \quad (11)$$

en la que el superíndice (R) se refiere a la representación a la que pertenecen los generadores $\{t_a^{(R)}\}$. Esto nos permite insertar el operador identidad en forma de conjuntos completos de autoestados de la posición, $\mathbb{1} = \int dx(t) |x(t)\rangle \langle x(t)|$. Introducimos esto entre cada uno de los términos del producto (10), y nos queda:

$$U(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=1}^n \int dx_i \langle x_i | \left(1 - \frac{iH(t_b - t_a)}{\hbar n} \right) |x_{i-1}\rangle \delta(x_n - x_b) \right], \quad (12)$$

con $x_0 \equiv x_a$. El subíndice aquí está relacionado con el tiempo. Si existe, el límite en $n \rightarrow \infty$ de esta expresión es la integral de caminos.

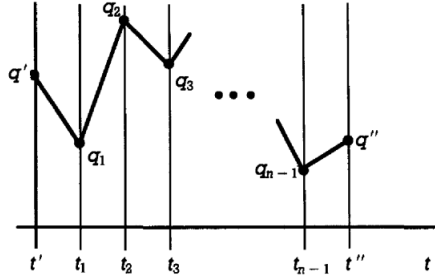


Figura 2: Camino que contribuye a la expresión (12), [10].

En el límite, todos los caminos que conectan (x_a, t_a) y (x_b, t_b) están incluidos. La ventaja de esta expansión de la exponencial en un producto infinito es que nos permite eliminar los operadores y elementos de matriz de nuestra teoría, y trabajar con cantidades clásicas solamente. Para esto, tenemos que introducir de nuevo la unidad, pero esta vez en la forma de un conjunto completo de autoestados del momento: $\mathbb{1} = \int dp |p\rangle \langle p|$, a la izquierda de cada uno de los elementos de matriz de (12).

$$U(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(2\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \int dx_i dp_i \int dp_0 e^{i\frac{p_0 q_1}{\hbar}} \times \langle p_i | \left(1 - \frac{iH(t_b - t_a)}{\hbar n} \right) |x_i\rangle e^{i\frac{p_i x_{i+1}}{\hbar}} \right] \\ \times \langle p_0 | \left(1 - \frac{iH(t_b - t_a)}{\hbar n} \right) |x_a\rangle \quad (13)$$

Donde hemos usado la expresión:

$$\langle x_i | p_{i-1} \rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{p_{i-1} x_i}{\hbar}}. \quad (14)$$

Sabiendo que los operadores momento y posición P y X siguen las relaciones de conmutación [10]:

$$[Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, [Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0 \quad (15)$$

Sólo podemos conocer el Hamiltoniano cuando se especifica el orden relativo de todos los factores X y P . Esto es de especial importancia en casos en los que encontramos Hamiltonianos que involucran productos entre operadores posición y momento. La forma de enfrentarnos a este problema, es reescribir el Hamiltoniano en su forma *normal*, en la que todos los operadores posición se encuentran en la derecha. Para los elementos de matriz de la ecuación (13), tenemos:

$$\langle p_i | \left(1 - \frac{iH(P, X)(t_b - t_a)}{\hbar n} \right) |x_i\rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{i\hbar(p_i, x_i)(t_b - t_a)}{\hbar n} \right] e^{-i\frac{p_i x_i}{\hbar}}, \quad (16)$$

donde hemos usado el complejo conjugado de la expresión (14), con $h(p_i, x_i)$ una función dada por el remplazamiento de los operadores P y X por sus análogos clásicos p_i, x_i , en la forma *normal* de H . Introduciendo esta expresión en el núcleo (13), y volviendo a reexpresar el producto infinito como una exponencial, encontramos la expresión puramente clásica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=1}^{n-1} 1 - ih(p_i, x_i) \frac{(t_b - t_a)}{n\hbar} \right] = e^{-i \frac{(t_b - t_a)}{n\hbar} \sum_{i=1}^{n-1} h(p_i, x_i)}. \quad (17)$$

Para obtener, finalmente:

$$U(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(2\pi\hbar)^{-n} \prod_{i=1}^{n-1} \int dx_i dp_i \int dp_0 \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{n-1} \delta t \left[p_j \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\delta t} - h(p_j, x_j) \right] \right) \right] \\ \equiv \boxed{\int [dx][dp] e^{\frac{i}{\hbar} \int dt [p(t)\dot{x} - H(p(t), x(t))]} \quad (18)$$

Como antes, $\int [dx][dp]$ representa la suma sobre todos los caminos, incluyendo factores de normalización. También hemos introducido la notación $\frac{t_b - t_a}{n} = \delta t$. Esta ecuación nos da la integral de caminos como suma de trayectorias en el *espacio de fases*, ya que se integra sobre posiciones y momentos. Sin embargo, para otros sistemas podemos manejar la expresión de forma que volvamos al espacio de posiciones exclusivamente.

2.3. La integral de caminos en espacio de configuraciones

Para ver el cambio a una integral funcional que sólo dependa del espacio de posiciones, consideraremos un Hamiltoniano del tipo:

$$\frac{P^2}{2m} + V(X) \quad (19)$$

que describe el movimiento de una partícula no relativista sobre un potencial que no depende de la velocidad. En este caso, las integrales de momento en (18) son todas Gaussianas de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha p^2 + \beta p} = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad (20)$$

con $\alpha = i \frac{\delta t}{2m\hbar}$ y $\beta = i \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\hbar}$. Usando este resultado en la ecuación (18), obtenemos:

$$U(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \int dx_i e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{n-1} \delta t \left\{ \frac{m}{2} \left[\frac{(x_{j+1} - x_j)}{\delta t} \right]^2 - V(x_j) \right\}} \right] = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \int dx_i e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{n-1} \delta t L(x_j, \dot{x}_j)} \right] \quad (21)$$

Con $L(x, \dot{x})$ el Lagrangiano de la teoría. A esta integral se le llama integral de caminos en el espacio de configuraciones, y es un caso específico de la anterior. Su utilidad depende de si la integral sobre todos los caminos está mayoritariamente formada por trayectorias *suaves*, para las cuales la suma en la exponencial se aproxima a una integral sobre el Lagrangiano clásico. Si tomamos este límite, la expresión anterior toma la forma:

$$U(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{x_a}^{x_b} [dx] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(x(t), \dot{x}(t))} = \int_{x_a}^{x_b} [dx] e^{\frac{i}{\hbar} S(x_b, t_b; x_a, t_a)} \quad (22)$$

2.4. Productos T-ordenados y funciones de Green para operadores cuánticos

Antes de seguir, convendría hablar del producto ordenado en el tiempo. Este se define (tanto para funciones como para campos) como [4]:

$$T\{\phi(y)\phi(x)\} = \begin{cases} \phi(y)\phi(x) & y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y) & y^0 < x^0 \end{cases} . \quad (23)$$

O lo que es lo mismo:

$$T\{\phi(x, t)\phi(x', t')\} = \theta(t - t')\phi(x, t)\phi(x', t') + \theta(t' - t)\phi(x', t')\phi(x, t), \quad (24)$$

con $\theta(t)$ la función escalón ($\theta(t) = 1, t > 0$ y $\theta(t) = 0, t < 0$). En el caso de tener un producto T-ordenado de operadores de las coordenadas:

$$\begin{aligned} {}_H\langle x_b, t_b | T[X_H(t_1)X_H(t_2)] | x_a, t_a \rangle_H &= \\ &= \theta(t_2 - t_1) \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 \langle x_b, t_b | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_a, t_a \rangle + \\ &+ \theta(t_1 - t_2) \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 \langle x_b, t_b | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_a, t_a \rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

donde hemos reemplazado los operadores por integrales sobre las variables clásicas x_1 y x_2 , introduciendo estados en tiempos intermedios. Este proceso nos recuerda al que seguimos para construir la integral de caminos. Repitiendo ese razonamiento, llegamos a:

$${}_H\langle x_b, t_b | T[X_H(t_1)X_H(t_2)] | x_a, t_a \rangle_H = \int_{x_a}^{x_b} [dx] x_1(t_1) x_2(t_2) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(t)}. \quad (26)$$

Este procedimiento es fácilmente generalizable a más de dos operadores, de la forma:

$${}_H\langle x_b, t_b | T[\prod_i X_H(t_i)] | x_a, t_a \rangle_H = \int_{x_a}^{x_b} [dx] \prod_i x_i(t_i) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L(t)}. \quad (27)$$

Con esto, podemos definir las funciones de Green como valores de expectación en el vacío de productos T-ordenados de un número arbitrario de campos:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \left[\prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right] | 0 \rangle, \quad (28)$$

que estarán estrechamente relacionadas con la matriz S , de la que hablaremos más adelante.

2.5. Funcionales generadores

Ahora desarrollaremos una forma conveniente de organizar los productos T-ordenados de cualquier operador. Consideremos el Hamiltoniano modificado:

$$H_j(P, X) = H(P, X) + j(t)O(P, X), \quad (29)$$

con $O(P, X)$ cualquier función del momento y la posición, y $j(t)$ una función del tiempo. Si consideramos este Hamiltoniano en el núcleo (13), cada elemento de matriz tendrá un término

$$j(t_a + l\delta t) \langle p_l | O(P, X) | x_l \rangle \left(\frac{i\delta t}{\hbar} \right) = j(t_a + l\delta t) o(p_l, x_l), \quad (30)$$

donde $o(p_l, x_l)$ viene dado por la ordenación normal del operador O . Derivando con respecto a la fuente j en el tiempo σ y repitiendo el razonamiento que seguimos con la integral de caminos, tenemos:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{i\hbar}{\delta t} \frac{\partial}{\partial j(\sigma)} U(t_b, t_a)^{(j)} \right] = {}_H \langle x_b, t_b | O(P_H(\sigma) X_H(\sigma)) | x_a, t_a \rangle_H^{(j)}. \quad (31)$$

Aquí el superíndice (j) , indica que el elemento de matriz se calcula en presencia de la fuente. En ausencia de ella, se vuelve al elemento de matriz original. Además de ver cómo la derivada nos devuelve productos T-ordenados, reconocemos que la expresión $\frac{1}{\delta t} \frac{\partial}{\partial j}$ es equivalente en el límite continuo a una derivada variacional [10]. Teniendo esto en cuenta:

$$\begin{aligned} {}_H \langle x_b, t_b | T \left[\prod_i O_H(P(t_i), X(t_i)) \right] | x_a, t_a \rangle_H &= \int [dp][dx] \prod_i o(p(t_i), x(t_i)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (p\dot{x} - H - jO)} \Big|_{j=0} = \\ &= \prod_i \left[i\hbar \frac{\delta}{\delta j(t_i)} \right] \int [dp][dx] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt (p\dot{x} - H - jO)} \Big|_{j=0} \end{aligned} \quad (32)$$

La integral de caminos con un término de fuente $jO(P, X)$ sirve entonces como un funcional generador para todos los productos T-ordenados involucrados en el operador $O(P, X)$. De forma análoga, la versión en el espacio de configuraciones de la integral de caminos sirve como funcional generador para los productos T-ordenados del operador posición $X(t)$.

2.6. La integral de caminos para campos escalares.

Ahora daremos el salto desde un sistema con un solo grado de libertad hacia una teoría de campos. Para ello, podremos usar generalizaciones directas de las ecuaciones (18) y (22). Las coordenadas de una teoría de campos son los valores del campo en cada punto del espacio, considerados como una función del tiempo. Así, $dp dq$ en cada tiempo en (18) pasará a ser un producto infinito sobre todas las coordenadas, $\prod_x d\pi(\vec{x}, t) d\phi(\vec{x}, t)$, con $\pi(\vec{x}, t)$ y $\phi(\vec{x}, t)$ el momento conjugado y el campo en el punto \vec{x} . El conjunto completo de todos los diferenciales, teniendo cuenta tiempo y espacio será: $\prod_t \prod_{\vec{x}} d\pi(\vec{x}, t) d\phi(\vec{x}, t)$. El límite continuo de este producto, asumiendo que existe, será denotado por $\int [\mathcal{D}\pi][\mathcal{D}\phi]$. Proponemos entonces como generador funcional de las funciones de Green del campo escalar libre:

$$Z_{\mathcal{L}_0}[J] = \int [\mathcal{D}\pi][\mathcal{D}\phi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi, \pi, J]}, \quad \text{con } S[\phi, \pi, J] = \int d^4x (\pi\dot{\phi} - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi). \quad (33)$$

Nótese que, para estas integrales, $\dot{\phi}(x)$ no equivale a $\pi(x)$. Las integrales $\pi(x)$ son Gaussianas, y podemos llegar integrándolas a una expresión en *espacio de configuraciones*:

$$Z[J] = \int [\mathcal{D}\phi] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y [\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi]} \equiv \int [\mathcal{D}\phi] e^{i[S[\phi] + J \cdot \phi]^1}, \quad (34)$$

que es probablemente la forma más común en la que se presenta la integral de caminos, y sirve como generador funcional de las funciones de Green (28) del campo escalar libre:

$$G(x_1, \dots, x_n)_{\text{free}} = \langle 0 | T \left[\prod_i^n \phi(x_i) \right] | 0 \rangle_{\text{free}} = \prod_i^n \left[i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right] Z_{\mathcal{L}_0}[J] \Big|_{J=0} \quad (35)$$

¹Observamos un cambio de signo acompañando a la corriente J . Esto es meramente un cambio de notación. Mientras que en [10] se usa un signo positivo, en [1] se utiliza un signo negativo, sin pérdida de generalidad. Más adelante veremos desarrollos en los que se ha usado este cambio de notación.

Integrando por partes la exponencial de (34) y haciendo un cambio de variable [10], llegamos a la expresión:

$$Z_{\mathcal{L}_0} = e^{\frac{-i}{2\hbar} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} Z_{\mathcal{L}_0}[0], \quad (36)$$

con Δ_F , propagador de Feynman, y $Z_{\mathcal{L}_0}$ la amplitud del vacío en ausencia de fuentes. En una teoría en la que tengamos en cuenta la interacción, el generador funcional $Z_{\mathcal{L}}$ será de la forma:

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{L}} &= \frac{1}{Z[0]} \int [\mathcal{D}\phi] e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4y [\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - V(\phi) - J\phi]} = \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int [\mathcal{D}\phi] e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4y [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + J\phi]} = \frac{1}{Z[0]} e^{-\frac{i}{\hbar} \int d^4z V(i\hbar \frac{\delta}{\delta J})} Z_{\mathcal{L}_0}, \end{aligned} \quad (37)$$

con V el potencial, o la parte interactuante de la acción en función de las derivadas de la fuente.

3. Secciones eficaces y matriz S

Los experimentos que buscan estudiar la naturaleza de las partículas elementales son llamados de dispersión o *scattering*, en los que se hace chocar dos haces de partículas con momento bien definido y se observa cuáles son los productos de ese *choque*. La probabilidad de que ese producto sea cierto estado final se puede expresar en función de la sección eficaz, que es una cantidad intrínseca de las partículas que chocan. Para calcular la sección eficaz de un proceso, debemos estudiar la matriz S (o de *scattering*).

Supongamos que tenemos un estado con dos paquetes de ondas construidos en el pasado lejano, representando un estado inicial $|k_A k_B\rangle$, y un estado final en el futuro asintótico, formado por varios paquetes de onda $\langle p_1 p_2 \dots |$. Si queremos relacionar la amplitud de transición entre estos estados de momento bien definido, tenemos:

$$\text{out} \langle p_1 p_2 \dots | k_A k_B \rangle_{\text{in}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle p_1 p_2 \dots |}_{T} \underbrace{|k_A k_B\rangle}_{-T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle p_1 p_2 \dots | e^{-iH(2T)} |k_A k_B\rangle \equiv \boxed{\langle p_1 p_2 \dots | S |k_A k_B\rangle}. \quad (38)$$

Donde vemos que los estados iniciales y finales están relacionados por el límite de una secuencia de operadores unitarios, siendo el límite la llamada matriz S . Si las partículas no interactúan, esta es simplemente el operador identidad. Para aislar la parte que nos importa de la matriz S , es decir, la parte interactuante, definimos la matriz T como:

$$S = \mathbb{1} + iT \quad (39)$$

Y el elemento invariante de matriz \mathcal{M} como:

$$\langle p_1 p_2 \dots | iT |k_A k_B\rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum p_{\text{out}}) \cdot i\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_{\text{out}}), \quad (40)$$

donde hemos tenido en cuenta la conservación del cuadrimomento [7].

4. Interpretación funcional

En pocas palabras, en cualquier teoría de campos, el fin último de los cálculos es computar la matriz S . Esta se puede obtener a partir de las funciones de Green de la teoría. Como podemos

ver en (35), desde el punto de vista funcional, estas funciones pueden ser determinadas tomando derivadas funcionales respecto al término de fuente J del generador funcional. Las funciones que hemos definido en (35) son las llamadas funciones de Green *inconexas*, que no contribuyen a la matriz S . Las funciones de Green conexas se generan tomando derivadas de J sobre:

$$W[J] = -i \ln Z[J]. \quad (41)$$

El porqué las funciones conexas son generadas por el logaritmo del generador funcional, se muestra a continuación. Si tomamos la primera derivada con respecto a la fuente, tenemos:

$$\left. \frac{\delta W[J]}{\delta J} \right|_{J=0} = \left. \frac{\delta}{\delta J} [-i \ln Z[J]] \right|_{J=0} = \frac{-i}{Z[0]} \left[\left. \frac{\delta}{\delta J} Z[J] \right|_{J=0} \right] \stackrel{(35)}{=} \frac{\langle 0 | \phi | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle}, \quad (42)$$

con ϕ el campo al que se aplica el producto T-ordenado ($\langle 0 | T \{ \overbrace{\phi \dots \phi}^{n \text{ veces}} \} | 0 \rangle$), y donde hemos usado la ecuación (35) para identificar términos. El resultado es el valor normalizado de expectación en el vacío de ϕ , en presencia de la fuente J . Si tomamos la segunda derivada:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J^2} = \left[\frac{\langle 0 | T \{ \phi \phi \} | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} - \left(\frac{\langle 0 | \phi | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \right)^2 \right], \quad (43)$$

donde encontramos la función de Green de dos puntos, menos su parte desconectada. Esto se ilustra gráficamente en la figura 3.

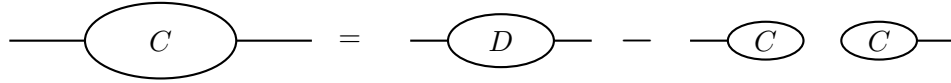


Figura 3: Función de Green de dos puntos, (43), [1]

4.1. Funciones de Green de una partícula irreducible

La expresión de las funciones de Green conexas puede ser simplificada en términos de funciones de una partícula irreducible (1-PI). Un diagrama es 1-PI si puede ser separado en dos piezas disjuntas cortando una sola línea interna. Lo más económico es calcular sólo grafos de este tipo y conectarlos; mucho más que calcular todas las funciones de Green conexas directamente. Las funciones de Green de una partícula irreducible son generadas por un funcional llamado acción efectiva, que se define como:

$$\Gamma[\bar{Q}] = W[J] - J \cdot \bar{\phi} \quad , \quad \bar{\phi} \equiv \frac{\delta W}{\delta J} \quad (44)$$

Las funciones de una partícula irreducible se conseguirán a partir de las derivadas de la acción efectiva con respecto a la variable $\bar{\phi}$, que ya hemos visto anteriormente en (42). La primera derivada de esta acción es:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\phi}} = -J. \quad (45)$$

²El signo menos por la notación de [1] previamente mencionada; con la corriente precedida de un signo positivo

Tomando la segunda derivada:

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\phi}^2} = -\frac{\delta J}{\delta \bar{\phi}} = \left[-\frac{\delta \bar{\phi}}{\delta J} \right]^{-1} = \left[-\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right]^{-1} = iD^{-1}, \quad (46)$$

donde D es el propagador del campo. Como vemos, la segunda derivada de Γ es el inverso del propagador. Se puede ver fácilmente si escribimos la ecuación anterior en la forma:

$$D \frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\phi}^2} D = D \quad (47)$$

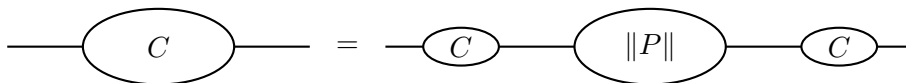


Figura 4: Ecuación (47) de forma gráfica.

Como vemos en la figura 4, la ecuación (47) se refiere a que el propagador se obtiene de la función de una partícula irreducible, imponiendo propagadores en las dos patas externas. Si seguimos manejando la variable $\bar{\phi}$:

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\phi}} = \frac{\delta J}{\delta \bar{\phi}} \frac{\delta}{\delta J} = \frac{1}{i} D^{-1} \frac{\delta}{\delta J}, \quad (48)$$

que es la verdadera razón por la que la acción efectiva genera diagramas de una partícula irreducible. Cuando operamos sobre el generador W , cada derivada J añade una pata externa a la función de Green. Es por esto que cuando se deriva la acción efectiva con respecto a la variable $\bar{\phi}$, añade una línea externa y amputa el propagador de esa misma línea. Esta amputación continua de propagadores externos es lo que mantiene los diagramas como irreducibles.

5. Método de los campos de fondo

En la sección anterior hemos visto que la acción efectiva es una cantidad de gran importancia a calcular. Una vez la conocemos, la matriz S puede construirse conectando diagramas de funciones de una partícula irreducible para generar las funciones de Green conexas, amputando los propagadores externos, poniendo los momentos en capa de masas, y añadiendo los correspondientes factores de función de onda. El método de los campos de fondo es una manera bastante conveniente de calcular esta acción efectiva. Primero, consideraremos teorías no gauge. Para estas teorías, el método de los campos de fondo equivale a un realizar desplazamiento de los campos. Si tenemos el generador funcional (34), generador de diagramas desconectados, definamos una cantidad análoga en la que la acción sea función del campo B más un campo de fondo arbitrario al que llamaremos ϕ .

$$\tilde{Z}[J, \phi] = \int [\mathcal{D}B] e^{iS[B+\phi]+J \cdot B}. \quad (49)$$

Escribimos ahora, por analogía con el generador de los diagramas conectados W , (41), y la nueva variable \tilde{B} :

$$\tilde{W}[J, \phi] = -i \ln \tilde{Z}[J, \phi] \quad , \quad \tilde{B} = \frac{\delta \tilde{W}}{\delta J}, \quad (50)$$

con la acción efectiva del campo de fondo definida como:

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{B}, \phi] = \tilde{W}[J, \phi] - J \cdot \tilde{B}. \quad (51)$$

Una vez definidas estas nuevas variables, vemos su aplicación desplazando la variable de integración de (49), de la forma $B \rightarrow B - \phi$. De esta forma, se hace inmediata la relación:

$$\tilde{Z}[J, \phi] = Z[J]e^{-iJ\phi}. \quad (52)$$

Si tomamos el logaritmo:

$$\tilde{W}[J, \phi] = W[J] - J \cdot \phi. \quad (53)$$

Y, derivando la expresión anterior con respecto a J :

$$\tilde{B} = \frac{\delta \tilde{W}}{\delta J} = \frac{\delta W}{\delta J} - \phi \stackrel{(44)}{=} \bar{B} - \phi. \quad (54)$$

Finalmente, obtenemos la relación deseada con el desplazamiento que hemos propuesto:

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{B}, \phi] = W[J] - J \cdot \phi - J \cdot \tilde{B} = W[J] - J \cdot \phi - J \cdot \bar{B} + J \cdot \phi = \Gamma[\bar{B}]. \quad (55)$$

Y, por (54), $\bar{B} = \tilde{B} + \phi$, entonces:

$$\boxed{\tilde{\Gamma}[\tilde{B}, \phi] = \Gamma[\tilde{B} + \phi]}, \quad (56)$$

que es nuestro resultado principal. Si tomamos esta relación e imponemos $\tilde{B} = 0$, tenemos:

$$\tilde{\Gamma}[0, \phi] = \Gamma[\phi], \quad (57)$$

lo que quiere decir, que la acción efectiva puede ser determinada calculando la acción efectiva en presencia del campo de fondo $\tilde{\Gamma}[0, \phi]$. Las derivadas de esta acción con respecto de \tilde{B} generarían las funciones de Green de una partícula irreducible en presencia del campo ϕ . Como la acción (57) no tiene dependencia en \bar{B} , no genera diagramas con líneas externas. En su lugar, es la suma de todos los diagramas de vacío de una partícula irreducible en presencia del campo ϕ . Aquí tenemos una gran ventaja del método de los campos de fondo: permite calcular la acción efectiva sumando sólo diagramas de vacío (diagramas que no contienen líneas externas).

Hay dos maneras bastante diferentes de calcular esta acción. La primera es tratando el campo ϕ de forma exacta, para generar las reglas de Feynman, usando el propagador de B correspondiente en presencia del campo de fondo. El problema de esta manera de abordarlo, es que sólo es posible para campos de fondo muy simples, como por ejemplo teorías de campos escalares, donde ϕ se toma como una constante. La segunda manera, que es la que se tratará en este trabajo, es manejarlo de manera perturbativa. Consideramos los diagramas de vacío de una partícula irreducible para el campo B , con los campos ϕ apareciendo como líneas externas. De esta forma, el campo de fondo es arbitrario y no necesita ser definido. Para ello, usaremos la acción $S[B + \phi]$ para generar las reglas de Feynman de la teoría. Las componentes no cuadráticas de la acción S son las que generarán las interacciones. Las interacciones entre los campos B vendrán dadas por las líneas internas, mientras que las que involucren campos dinámicos con campos de fondo, serán usadas para generar líneas externas. De esta forma, podremos calcular cualquier función de Green de una partícula irreducible. Mediante el método de los campos de fondo terminas calculando diagramas idénticos a los que se calcularían de manera convencional, con la salvedad de que en las reglas de Feynman para los vértices dentro de los diagramas son distintas con respecto a los vértices conectados a líneas externas. Más adelante veremos estas reglas de Feynman, en el marco de las teorías gauge.

6. Teorías Gauge

La sección anterior trataba sobre teorías no gauge. En el caso de las teorías Gauge, hay sutilezas en la cuantización de campos vectoriales debido a la naturaleza singular de sus Lagrangianos que provocan problemas en la formulación de su integral de caminos. Propongamos una integral de caminos para bosones gauge de la forma:

$$Z[J^\mu] = \int [\mathcal{D}B] e^{i[S[B]+J \cdot B]}, \quad (58)$$

con $[\mathcal{D}B] = \prod_{\mu=0}^3 [\mathcal{D}B_\mu^a(x)]$, $S = -\frac{1}{4}F^2$, siendo $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + gf^{abc}B_\mu^b B_\nu^c$ el tensor intensidad de campo y donde vemos que la corriente ahora es una cantidad vectorial $J \equiv J_a^\mu$. Debido a la invariancia gauge de F^2 bajo transformaciones locales, no todas las componentes de B^μ en la ecuación (58) tienen significado físico. La acción es invariante bajo transformaciones gauge, por lo que es constante en las órbitas³ del grupo gauge, formado por todas las transformaciones gauge del campo B_μ^a . La integral de caminos propuesta diverge, ya que la acción no permite amortiguar las oscilaciones que ocurren a lo largo de estas órbitas. Para los campos gauge, la integral de caminos no debería realizarse sobre todas las variaciones de los campos, sino sobre todas las órbitas de B_μ^a . Para lidiar con esto, tenemos que establecer una condición de fijación gauge $G_a[B_\mu^b; x] = 0$ ($a = 1, 2, \dots, (N^2 - 1)$). Esta describe la hipersuperficie de la variedad formada por todos los campos que interseca una sola vez con cada órbita. Teniendo en cuenta las sutilezas de la fijación gauge, así como las observaciones hechas por Faddeev y Popov [5], podemos reescribir el generador funcional como:

$$W[J_\mu^a] = \int [\mathcal{D}B][\mathcal{D}\bar{\eta}_b][\mathcal{D}\eta_a] \prod_{x,a} \delta[G_a\{B_\mu^b(x); x\}] e^{i[S[B]+J_\mu^a B_\mu^a] + i \int d^4x d^4y \bar{\eta}_b(x) M_{f,bc}(x,y) \eta_c(x)}, \quad (59)$$

con $M_{f,bc}$ la condición de admisibilidad para la fijación gauge [5].

6.1. Método de los campos de fondo en teorías gauge.

Una vez discutida la necesidad de escoger un gauge cuando trabajamos con este tipo de teorías, podemos presentar el generador funcional para QCD: [1]

$$W[J] = \int [\mathcal{D}B] \det \left(\frac{\delta G_a}{\delta \omega_b} \right) e^{i[S[B] - \frac{1}{2a} G \cdot G + J \cdot B]}, \quad (60)$$

con $J \cdot B \equiv \int d^4x J_\mu^a B_\mu^a$, $G \cdot G \equiv \int d^4x G^a G^a$, y $\frac{\delta G_a}{\delta \omega^b}$ es la derivada del término de fijación gauge con respecto a la transformación gauge:

$$\delta B_\mu^a = f^{abc} \omega^b B_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (61)$$

El generador de los campos de fondo es, para una teoría gauge:

$$\tilde{Z}[J, A] = \int [\mathcal{D}B] \det \left(\frac{\delta \tilde{G}^a}{\delta \omega} \right) e^{i[S[B+A] - \frac{1}{2a} \tilde{G} \cdot \tilde{G} + J \cdot B]}. \quad (62)$$

³Dado un punto $x \in M$ se define la órbita de x como el conjunto de puntos de M en los que se transforma x bajo la acción de G : $\mathcal{O}_x = \{gx : g \in G\}$; siendo en nuestro caso M la formada por todos los campos, y G el grupo de transformación gauge. [8]

A partir de este generador funcional, es directo relacionar todos los conceptos de la sección 5 con sus análogos en una teoría gauge. La acción efectiva, en relación con la ecuación (57), la podemos definir como:

$$\tilde{\Gamma}[0, A] = \Gamma[A]. \quad (63)$$

La pequeña diferencia entre el caso gauge y el escalar se encuentra en el cálculo. En la ecuación anterior, si calculamos la acción $\tilde{\Gamma}[0, A]$ con el término de fijación $\tilde{G}^a = \tilde{G}^a(B, A)$, esta será igual a la acción efectiva convencional $\Gamma[\tilde{B}]$ con el término de fijación $G^a = \tilde{G}^a(B - A, A)$, evaluado en $\tilde{B} = A$. La condición gauge con la que trabajaremos en el método de los campos de fondo toma la forma:

$$\tilde{G}^a = \partial_\mu B_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b B_\mu^c. \quad (64)$$

Haciendo el cambio de variable

$$B_\mu^a \longrightarrow B_\mu^a + g f^{abc} \omega^b B_\mu^c, \quad (65)$$

se demuestra fácilmente que $\tilde{W}[J, A]$ es invariante bajo las transformaciones infinitesimales:

$$\delta A_\mu^a = g f^{abc} \delta \omega^b A_\mu^c - \partial_\mu \delta \omega^a \quad ; \quad \delta J_\mu^a = g f^{abc} \delta \omega^b J_\mu^c. \quad (66)$$

Vemos que (66) representa una rotación en el grupo; por lo que el término $J \cdot Q$ es invariante, así como la suma

$$\delta(B_\mu^a + A_\mu^a) = g f^{abc} \delta \omega^b (B_\mu^c + A_\mu^c) - \partial_\mu \delta \omega^a, \quad (67)$$

que es simplemente la transformación gauge sobre la variable $B_\mu^a + A_\mu^a$; así que la acción $S[B + A]$ también es invariante. El término de fijación gauge \tilde{G}^a es invariante por definición, ya que se define como la derivada covariante de B sobre la variedad. Por último, la invariancia del determinante $\det \left(\frac{\delta G_a}{\delta \omega_b} \right)$ viene demostrada por el desarrollo:

$$\delta G^a = g f^{abc} \delta \omega^b (\partial_\mu B_\mu^c) - g^2 f^{adc} f^{ceb} A_\mu^b \delta \omega^d B_\mu^e = g f^{abc} \delta \omega^b G^c \quad (68)$$

con

$$\delta(G_a^2) = 0, \quad (69)$$

que describe una transformación ortogonal en el espacio del índice adjunto a . El determinante de una transformación ortogonal es siempre igual a 1, y por lo tanto, es invariante.

Es directo demostrar la invariancia de $\tilde{\Gamma}[\tilde{B}, A]$ a partir de la de \tilde{Z} con (66), sabiendo que \tilde{B} es la variable conjugada de J . La cantidad $\tilde{\Gamma}[0, A]$ es un invariante funcional de A al que llamaremos la acción efectiva invariante gauge. Con todo, hemos conseguido lo que queríamos; las funciones de Green de una partícula irreducible serán generadas derivando dicha acción con respecto a A .

Para poder determinar las reglas de Feynman en el gauge de los campos de fondo, nos queda expresar el determinante que aparece en la integral funcional en términos de los campos *fantasma*. Damos con que:

$$\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} = -\delta_{ab} \square + g f^{abc} A_\mu^c \partial_\mu - g f^{abc} \overleftarrow{\partial}_\mu (A_\mu^c + B_\mu^c) + g^2 f^{amc} f^{cbn} A_\mu^m (A_\mu^n + B_\mu^n). \quad (70)$$

De la ecuación (59), sabemos que $\mathcal{L}_{\text{fantasma}} = \bar{\eta}_a M_{B,ab} \eta_b$, e identificamos $M_{B,ab}$ con $\frac{\delta G_a}{\delta \omega^b}$, ya que hemos expresado el determinante como una integral gaussiana de variables de Grassman [10].

7. Reglas de Feynman

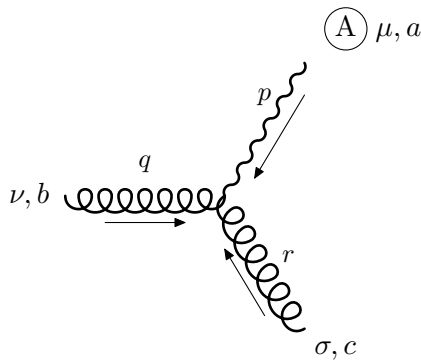
Ahora que hemos desarrollado todos los términos que involucran las funciones de una partícula irreducible en el método de los campos de fondo, podemos estudiar las reglas de Feynman. Se llama así a una serie de pautas que nos permiten asociar a cada proceso una serie de diagramas de Feynman, y así calcular de forma casi inmediata en los procesos más simples la contribución de cada diagrama a la amplitud total. Hay que tener en cuenta que los vértices que involucren campos Q serán líneas internas de nuestros diagramas, mientras que los vértices que involucren campos de fondo, serán usados como líneas externas. Todos los propagadores que aparecerán en estos diagramas de funciones de una partícula irreducible serán propagadores de Q . Este último punto es esencial, ya que el propagador del campo de fondo no está definido, pues la invariancia gauge de A no se ha roto en ningún momento. En el gauge covariante, la densidad Lagrangiana para QCD es [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}[\partial_\mu B_\nu^a][\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a] - \frac{1}{2a}[\partial_\mu B_\mu^a][\partial_\nu B_\nu^a] + \frac{i}{2}\bar{q}_\alpha^A \gamma_\mu \partial_\mu q_\alpha^A - \frac{i}{2}[\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A] \gamma_\mu q_\alpha^A - m_A \bar{q}_\alpha^A q_\alpha^A + \\ & + \frac{1}{2}g\bar{q}_\alpha^A \lambda_{\alpha\beta}^a \gamma^\mu q_\beta^A B_\mu^a - \frac{1}{2}g f^{abc}[\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a]B_\mu^b B_\nu^c - \frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{ade} B_\mu^b B_\nu^c B_\mu^d B_\nu^e - [\partial_\mu \bar{\eta}_a] \partial_\mu \eta_a + g f^{abc}[\partial_\mu \bar{\eta}^a] \eta^b B_\mu^c, \end{aligned} \quad (71)$$

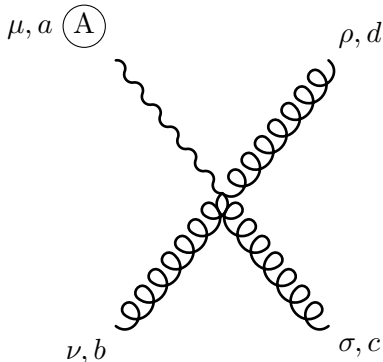
con B_μ el campo dinámico. Cuando cambiamos de gauge, teniendo en cuenta la acción desplazada $S[B + A]$ nos queda una densidad lagrangiana de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{cov.}} + \mathcal{L}_{\text{quark}} + \mathcal{L}(\mathcal{O}(B^2)) + g f^{abc} A_\mu^a ((\partial_\mu B_\nu^b) B_\nu^c - (\partial_\nu B_\mu^b) B_\nu^c) - \frac{1}{a} (\partial_\nu B_\nu^b) B_\mu^c - \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^a B_\mu^b B_\nu^c - \\ & - g^2 f^{abc} f^{ade} (A_\mu^b B_\nu^c A_\mu^d B_\nu^e - A_\mu^b B_\nu^c A_\nu^d B_\mu^e) + \frac{1}{a} A_\mu^b B_\mu^c A_\nu^d B_\nu^e - g f^{abc} A_\mu^a \bar{\eta}^b \overleftrightarrow{\partial} \eta^c - g^2 f^{abr} f^{r cd} \bar{\eta}^a (A_\mu^b + B_\mu^b) A_\mu^c \eta^d, \end{aligned} \quad (72)$$

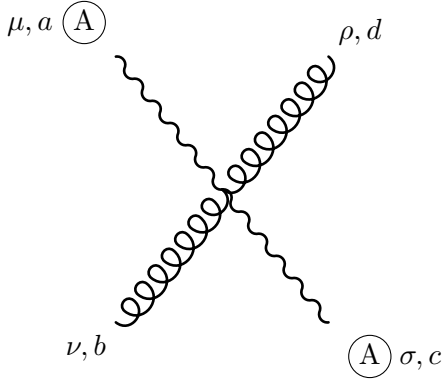
donde hemos agrupado los términos que involucran los campos quark en $\mathcal{L}_{\text{quark}}$, por conveniencia, ya que no vamos a calcular esos vértices. Una vez expresado así el Lagrangiano, podemos calcular las reglas de Feynman de la teoría:



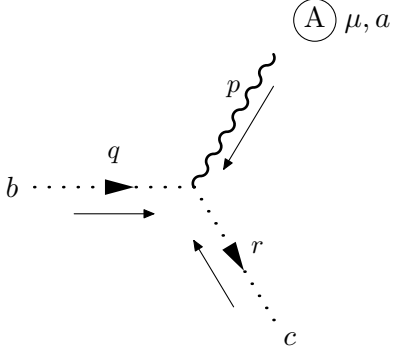
$$\begin{aligned} & -ig f_{abc} \left[g_{\mu\nu} \left(p - q - \frac{1}{a} r \right)_\sigma + g_{\nu\sigma} (q - r)_\mu + \right. \\ & \left. + g_{\sigma\mu} \left(r - p + \frac{1}{a} q \right)_\nu \right] \end{aligned} \quad (73)$$



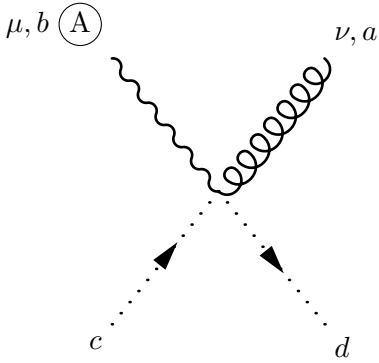
Este vértice es igual a su análogo de cuatro gluones en el gauge covariante.



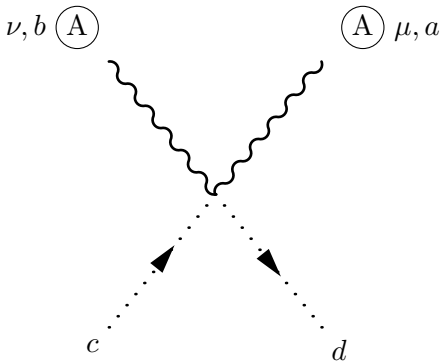
$$-g^2 \left[f_{abe} f_{cde} \left(g_{\mu\nu} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + \frac{1}{a} g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} \right) + f_{ace} f_{bde} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) + f_{ade} f_{cbe} \left(g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} + \frac{1}{a} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \right) \right] \quad (74)$$



$$-ig f_{abc} (r + q)^\mu \quad (75)$$



$$g^2 f_{ace} f_{dbe} g_{\mu\nu} \quad (76)$$



$$g^2 g_{\mu\nu} (f_{ace} f_{dbe} + f_{bce} f_{dae}) \quad (77)$$

Un ejemplo de cálculo que facilita esta teoría puede encontrarse en [1]. La función β de QCD puede ser calculada fácilmente ya que sólo es necesario saber la renormalización de la función de dos puntos del campo de fondo. Esto viene dado por la relación

$$Z_g = Z_A^{-\frac{1}{2}}, \quad (78)$$

donde Z_g es la constante de renormalización de la constante de acoplo y Z_A la del parámetro de fijación gauge. Esta relación, que es una identidad vista en *QED* [5], nos hace saber que en el gauge del campo de fondo, la renormalización de una teoría gauge no abeliana es análoga a la de una teoría gauge abeliana.

8. Factorización TMD: ejemplo del método de campos de fondo

Para finalizar, pondremos en práctica el método de los campos de fondo, calculando la acción efectiva en el proceso de Drell-Yan. El propósito del cálculo de esta acción es sentar las bases para derivar las ecuaciones de evolución de operadores dependientes del momento transversal [11].

La factorización TMD (*transverse momentum dependent*) describe procesos inelásticos con dos estados detectados (iniciales o finales). El ejemplo que seguiremos será un Drell-Yan $h_1 + h_2 \rightarrow \gamma^* + X$. Estudiamos su tensor hadrónico:

$$W_{\mu\nu} = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-i(yq)} \sum_X \langle p_1, p_1 | J_\mu^\dagger(y) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | p_1, p_2 \rangle, \quad (79)$$

con $J_\mu(y)$ la corriente electromagnética, en la que omitimos la carga eléctrica por brevedad:

$$J_\mu(y) = \bar{q}\gamma_\mu q(y), \quad (80)$$

y $q(y)$ un campo quark.

Para poder aplicar el método de los campos de fondo, primero tenemos que escribir el tensor hadrónico (79) como una integral funcional. Para ello, introducimos dos copias de los campos de QCD, que llamaremos campos causales (+) y anti causales (-), que actuarán bajo las reglas de cuantización usuales, bajo el operador de evolución temporal T-ordenado o anti T-ordenado, respectivamente. De esta forma, el tensor hadrónico, se escribe como:

$$W_{\mu\nu} = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-i(yq)} \int [\mathcal{D}\bar{q}^{(+)}\mathcal{D}q^{(+)}\mathcal{D}A^{(+)}] \int [\mathcal{D}\bar{q}^{(-)}\mathcal{D}q^{(-)}\mathcal{D}A^{(-)}] \times \\ \times \Psi_{p_1}^{*(-)}\Psi_{p_2}^{*(-)} e^{iS_{\text{QCD}}^{(+)} - iS_{\text{QCD}}^{(-)}} J_\mu^\dagger(-)(y) J_\nu^{(+)}(0) \Psi_{p_1}^{(+)}\Psi_{p_2}^{(+)}, \quad (81)$$

con Ψ_p la función de onda hadrónica, y teniendo en cuenta que todos los factores de normalización necesarios están incluidos en la medida de la integración funcional.

Como hemos mencionado previamente, el método de los campos de fondo consiste en separar los campos de *QCD* en componentes dinámicas y de fondo. En el caso de la factorización TMD, el campo de fondo tiene dos componentes independientes, la colineal y anticolineal; dependiendo de la dirección del momento de los hadrones incidentes:

$$p_1^\mu = \bar{n}^\mu p_1^+, \quad p_2^\mu = n^\mu p_2^-, \quad (82)$$

con p_1, p_2 el momento de los hadrones, y n^μ, \bar{n}^μ las direcciones de los dos conos de luz definidos por el momento. También se hace uso de la notación para la descomposición en cono de luz de un vector:

$$v^\mu = \bar{n}^\mu v^+ + n^\mu v^- + v_T^\mu. \quad (83)$$

Una vez introducida la notación, podemos separar los campos causales y anticausales de la integral funcional (81) en la forma:

$$q^{(\pm)}(x) = \psi^{(\pm)}(x) + q_n^{(\pm)}(x) + \bar{q}_n^{(\pm)}(x) \quad (84)$$

$$A_\mu^{(\pm)}(x) = B_\mu^{(\pm)}(x) + A_{n,\mu}^{(\pm)}(x) + A_{\bar{n},\mu}^{(\pm)}(x), \quad (85)$$

con ψ y B las componentes dinámicas. La medida de integración puede ser separada de la forma:

$$[\mathcal{D}\bar{q}^{(\pm)}\mathcal{D}q^{(\pm)}\mathcal{D}A^{(\pm)}] = [\mathcal{D}\bar{\psi}^{(\pm)}\mathcal{D}\psi^{(\pm)}\mathcal{D}B^{(\pm)}][\mathcal{D}\bar{q}_n^{(\pm)}\mathcal{D}q_n^{(\pm)}\mathcal{D}A_n^{(\pm)}][\mathcal{D}\bar{q}_{\bar{n}}^{(\pm)}\mathcal{D}q_{\bar{n}}^{(\pm)}\mathcal{D}A_{\bar{n}}^{(\pm)}]. \quad (86)$$

El lagrangiano es invariante sólomente bajo transformaciones gauge de todos los campos por el mismo parámetro de transformación. Sin embargo, la transformación gauge para el campo dinámico y el campo de fondo puede desacoplarse si se use el gauge de fondo. En este caso, la condición de fijación gauge es, modificando (64):

$$[\partial_\mu\delta^{ac} + gJ^{abc}(A_{\bar{n},\mu}^{b(\pm)} + A_{n,\mu}^{b(\pm)})]B_\mu^{c(\pm)} = D_\mu[A_{\bar{n}}^{(\pm)} + A_n^{(\pm)}]B_\mu^{(\pm)} = 0, \quad (87)$$

con D_μ la derivada covariante. Con esto hemos conseguido que los campos de fondo se transformen independientemente del resto, y podemos fijar el gauge de forma conveniente. Ahora, podemos reescribir el tensor hadrónico en la forma:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-i(yq)} \int [\mathcal{D}\bar{q}_n^{(+)}\mathcal{D}q_n^{(+)}\mathcal{D}A_n^{(+)}][\mathcal{D}\bar{q}_n^{(-)}\mathcal{D}q_n^{(-)}\mathcal{D}A_n^{(-)}] e^{iS_{QCD}^{(+)}[\bar{q}_n, q_n, A_n] - iS_{QCD}^{(-)}[\bar{q}_n, q_n, A_n]} \times \\ & \times \int [\mathcal{D}\bar{q}_{\bar{n}}^{(+)}\mathcal{D}q_{\bar{n}}^{(+)}\mathcal{D}A_{\bar{n}}^{(+)}][\mathcal{D}\bar{q}_{\bar{n}}^{(-)}\mathcal{D}q_{\bar{n}}^{(-)}\mathcal{D}A_{\bar{n}}^{(-)}] e^{iS_{QCD}^{(+)}[\bar{q}_n, q_n, A_n] - iS_{QCD}^{(-)}[\bar{q}_n, q_n, A_n]} \times \\ & \times \int [\mathcal{D}\bar{\psi}^{(+)}\mathcal{D}\psi^{(+)}\mathcal{D}B^{(+)}][\mathcal{D}\bar{\psi}^{(-)}\mathcal{D}\psi^{(-)}\mathcal{D}B^{(-)}] e^{iS_{QCD}^{(+)}[\bar{\psi}, \psi, B] - iS_{QCD}^{(-)}[\bar{\psi}, \psi, B]} \times \\ & \times \Psi_{p_1}^{*(-)}\Psi_{p_2}^{*(-)}J_\mu^{\dagger(-)}[\bar{\psi} + \bar{q}_{\bar{n}} + \bar{q}_n, \dots](y)J_\nu^{(+)}[\bar{\psi} + \bar{q}_{\bar{n}} + \bar{q}_n, \dots](0)\Psi_{p_1}^{(+)}\Psi_{p_2}^{(+)} e^{iS_{\text{int}}^{(+)} - iS_{\text{int}}^{(-)}}. \quad (88) \end{aligned}$$

La interacción entre los modos cruzados se describe como:

$$S_{\text{int}} = S_{\text{QCD}}[\bar{\psi} + \bar{q}_{\bar{n}} + \bar{q}_n, \dots] - S_{\text{QCD}}[\bar{q}_{\bar{n}}, q_n, A_{\bar{n}}] - S_{\text{QCD}}[\bar{q}_n, q_n, A_n] - S_{\text{QCD}}[\bar{\psi}, \psi, B]. \quad (89)$$

El primer término de esta acción puede ser separada en cuatro términos: $S_{nh(\bar{n}h)}$, que describen la interacción entre campos colineales (anticoloneales) con los campos dinámicos. $S_{n\bar{n}}$ describe la interacción entre campos colineales y anticoloneales, y $S_{n\bar{n}h}$ la de todos los campos simultáneamente. Todo esto con la intención de expresar funciones de onda hadrónicas de forma que sean independientes de los campos dinámicos, para poder realizar una integración sobre estos últimos. En este trabajo nos centraremos en el cálculo de $S_{nh(\bar{n}h)}$. Cabe mencionar que, para facilitar los cálculos, y aprovechándonos de las facilidades que nos brinda trabajar con campos de fondo, vamos a elegir una fijación conveniente para los campos colineales y anticoloneales. En nuestro caso, usaremos el gauge cono de luz para estos campos:

$$n^\mu A_{\bar{n},\mu}^{(\pm)}(z) = 0 \quad , \quad \bar{n}^\mu A_{n,\mu}^{(\pm)}(z) = 0, \quad (90)$$

y también imponemos las condiciones de contorno:

$$\lim_{z^- \rightarrow -\infty} A_n^\mu(z) = 0 \quad , \quad \lim_{z^+ \rightarrow -\infty} A_n^\mu(z) = 0. \quad (91)$$

Sabiendo esto, podemos ponernos manos a la obra. Recordamos que tenemos la acción de QCD [1]:

$$S = \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{QCD}}[q + \psi, A + B] + \mathcal{L}_{\text{ghost}}[A, B] + \mathcal{L}_{\text{fix}}[A, B]), \quad (92)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}}[q, a] &= i\bar{q}\not{D}q - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a[A])^2, & \mathcal{L}_{\text{ghost}}[A, B] &= -\eta^\dagger D_\mu[A + B]D^\mu[A]\eta, \\ \mathcal{L}_{\text{fix}}[A, B] &= \frac{1}{2\alpha}B^\mu D_\mu[A]D_\nu[A]B^\nu. \end{aligned} \quad (93)$$

Si contamos con que los campos de fondo se separan en sus componentes colineales y anticolineales, la acción puede pasar a describirse como (89). A su vez, la acción de interacción que nos introduce el método de los campos de fondo:

$$S_{\text{int}} = S_{1h} + S_{2h} + S_{12} + S_{12h}. \quad (94)$$

Desarrollando (93) tenemos que tener en cuenta el contado de potencias (al orden en el que trabajamos sólo sobreviven los términos $\mathcal{O}(\lambda^4)$) y eliminar también términos que satisfagan las ecuaciones de movimiento de la forma $\not{D}q(x) = 0$. En este trabajo, hemos computado la acción $S_{1(2)h}$. Dicho esto, llegamos a nuestro resultado para la interacción entre términos colineales (anticolineales) con los campos dinámicos:

$$\begin{aligned} S_{1(2)h} &= g \int d^4x \{ \bar{q}\not{B}\psi + \bar{\psi}\not{A}\psi + \bar{\psi}\not{B}q + f_{abc}\bar{\eta}_a A_\mu^b (\vec{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)\eta_c - gf_{amb}f_{bnc}\bar{\eta}_a A_\mu^m (A_n^\mu + B_n^\mu)\eta_c - \\ &\quad - f_{abc}A_\mu^a \left[2(\partial_\nu B_\mu^b)B_\nu^c - (\partial_\mu B_\nu^b)B_\nu^c - \frac{1+\alpha}{\alpha}(\partial_\nu B_\nu^b)B_\mu^c \right] - \\ &\quad - \frac{g}{2}f_{abr}f_{rcd} \left[A_\mu^a A_\nu^b B_\mu^c B_\nu^d + A_\mu^a B_\nu^b A_\mu^c B_\nu^d + A_\mu^a B_\nu^b B_\mu^c A_\nu^d + \frac{1}{\alpha}A_\mu^b B_\mu^c A_\nu^d B_\nu^e \right] \}, \end{aligned} \quad (95)$$

donde se han suprimido los subíndices en los campos de fondo, ya que es la misma expresión para colineales que para anticolineales.

9. Modelo computacional del gauge de los campos de fondo

En el marco de este trabajo, se ha creado un modelo computacional del gauge de los campos de fondo para ayudar con los cálculos de las reglas de Feynman en teorías derivadas de este gauge, así como para completar la base de modelos del software FeynMaster [3]. Con este objetivo, se han tenido que hacer varias actualizaciones al código base del programa para que este tenga en cuenta las interacciones cuárticas de las partículas fantasma. En versiones previas del software, sólo se tenían en cuenta interacciones cúbicas en los vértices en los que se veían involucrados los *ghosts*. En nuestro caso, hemos creado un modelo para el gauge general, así como para las acciones derivadas para la factorización TMD en el proceso Drell-Yan del artículo [11]. Para ello, se han empleado lenguajes como Mathematica, Python o Fortran.

Como pequeño ejemplo, se exhibe cómo aplicar el software para separar el campo gluónico en una componente dinámica y otra de fondo (usando el campo dinámico B como representación del grupo gauge $SU(3)_C$, y añadiendo otro campo A como contrapartida). Podemos encontrar el código completo del modelo en [6] (/Background-Field-Gauge-in-Feynmaster/Models/QCD_BFG)

```

1 IndexRange[Index[Gluon]] =
2     NoUnfold[Range[8]]
3
4 M$GaugeGroups = {
5   SU3C == {
6     Abelian          -> False,
7     CouplingConstant -> gs,
8     GaugeBoson       -> B,
9     StructureConstant -> f,
10    Representations   -> {T,Colour},
11    SymmetricTensor   -> dSUN
12  }
13 }
14 M$ClassesDescription = {
15
16   V[4] == {ClassName -> A,
17           SelfConjugate -> True,
18           TeXName -> "A",
19           Indices -> {Index[Gluon]},
20           Mass -> 0},
21
22   V[5] == {ClassName -> B,
23           SelfConjugate -> True,
24           TeXName -> "B",
25           Indices -> {Index[Gluon]},
26           Mass -> 0},
27
28   ...}

```

Todas las modificaciones que se le han hecho al software, así como los modelos creados pueden ser consultados en el resto de carpetas del repositorio [6].

10. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha hecho una revisión del método de los campos de fondo, desde las herramientas necesarias para poder desarrollarlo hasta cálculos, como los hechos para replicar los resultados para la acción efectiva de interacción entre los campos de fondo con los hadrónicos en [11], o el desarrollo de las funciones de Green de [5] o [10]. Se ha hecho ver que el enfoque de la cuantización por medio de la integral de caminos es necesario cuando tratamos con problemas más allá de los que podemos encontrar en electrodinámica cuántica, ya que supera las posibilidades de cálculo que ofrece la cuantización canónica con el formalismo Hamiltoniano. En general, se han replicado de forma fiel todos los cálculos propuestos, y se ha expuesto la necesidad de seguir desarrollando este formalismo, del que cabe destacar también sus usos en teorías de gravedad y supergravedad. Como meta futura para este trabajo, se prevee completar el repositorio [6], con la posibilidad de usar el software para cálculos de renormalización.

Referencias

- [1] L.F Abbott. *Introduction to the background field method*. CERN-Geneve, 1981.
- [2] Joël Feltesse. *Introduction to Parton distribution Functions*. 2012.
- [3] Duarte Fontes y Jorge C. Romão. *FeynMaster: a plethora of Feynman tools*. Comp.Phys.Commun, 2020.
- [4] Michele Maggiore. *A Modern introduction to Quantum Field Theory*. Oxford Uni. Press, 2005.
- [5] Pedro Pascual y Rolf Tarrach. *QCD: Renormalization for the practitioner*. Springer, 1984.
- [6] Miguel Pérez Martínez. *Background Field Gauge in FeynMaster*. URL: <https://github.com/Miguelon-Martinez/Background-Field-Gauge-in-Feynmaster>.
- [7] M. E. Peskin y D. V. Schroeder. *A Modern Introduction To Quantum Field Theory*. 1995.
- [8] Miguel Ángel Rodríguez González. *Simetrías y grupos*. UCM, 2023.
- [9] Ignazio Scimemi. *TMD factorization: status and implications*. CERN, 2018.
- [10] George Sterman. *An Introduction To Quantum Field Theory*. 1993.
- [11] Alexey Vladimirov, Ignazio Scimemi y Valentin Moos. *Transverse momentum dependent operator expansion at next-to-leading power*. 2021.