

UNIVERSIDAD DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS POLÍTICAS, ECONÓMICAS Y COMERCIALES



TESIS DOCTORAL

**Las decisiones secuenciales en la empresa : aplicaciones de la
programación dinámica a los sistemas de gestión**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Leandro Cañibano Calvo

DIRECTOR:

José María Fernández-Pirla

Madrid, 2015

R.13.495

T. 368

UNIVERSIDAD DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS POLITICAS

ECONOMICAS Y COMERCIALES

**las decisiones secuenciales en la empresa:
aplicaciones de la programacion dinamica
a los sistemas de gestion**

TESIS DOCTORAL DIRIGIDA POR EL

DR. D. JOSE MARIA fernandez pirla

Y PRESENTADA POR

D. LEANDRO cañibano calvo

curso 1970-1971

I N D I C E

I N D I C E

	<u>Página</u>
<u>INTRODUCCION</u>	1
<u>PRIMERA PARTE: DECISIONES, PROGRAMACION DINAMICA Y SISTEMAS DE GESTION.</u>	7
<u>Capítulo I. - LAS DECISIONES EN LA EMPRESA</u>	8
1. Introducción	9
2. Diversos enfoques de las decisiones del empresario	13
2.1. La teoría marginalista	15
2.2. La teoría de la organización	24
2.3. La teoría del comportamiento	26

	<u>Página</u>
2.4. La Investigación Operativa	36
3. Estructura de las decisiones	45
3.1. Análisis de actividades	45
3.2. El marco económico e institucional	48
3.3. Resultados	50
3.4. Criterios de decisión	51
3.5. Perspectiva temporal	55
<u>Capítulo II.</u> - LOS PROCESOS SECUENCIALES DE DECISION	56
1. Características generales	57
2. Clasificación de los procesos secuenciales	60
3. Precisiones terminológicas	61
4. Procesos discretos	63
4.1. Procesos discretos deterministas	63
4.1.1. Procesos discretos deterministas limitados	64
4.1.2. Procesos discretos deterministas ilimitados	67
4.2. Procesos discretos estocásticos	70
4.2.1. Procesos discretos estocásticos limitados	70
4.2.2. Procesos discretos estocásticos ilimitados	72

	<u>Página</u>
5. Procesos continuos	73
5.1. Procesos continuos deterministas	74
5.1.1. Procesos continuos deterministas limitados	74
5.1.2. Procesos continuos deterministas ilimitados	75
5.2. Procesos continuos estocasticos	76
6. Esquema general para el cálculo de un programa dinámico	76
<u>Capítulo III.</u> - SISTEMAS DE GESTION	80
1. Introducción	81
2. Sistemas y subsistemas	83
3. Elementos de los sistemas	84
4. Clases de sistemas	89
5. La empresa como sistema	90
5.1. El subsistema de Financiación	94
5.2. El subsistema de Inversión	97
5.3. El subsistema de Producción	100
5.4. El subsistema Comercial	103
5.5. El subsistema de Investigación	106

<u>SEGUNDA PARTE:</u> APLICACIONES DE LA PROGRAMACION DINAMICA A LOS SISTEMAS DE GES- TION	111
<u>Capítulo IV.</u> - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTE MA DE FINANCIACION	112
1. Introducción	113
2. Análisis de la estructura óptima del Capital en Funcionamiento	114
2.1. Formulación por Programación Dinámi ca	118
2.2. Comentarios al modelo expuesto	123
3. La Planificación financiera a corto plazo	125
3.1. Formulación por Programación Dinámi ca	129
3.2. Método de aproximaciones sucesivas	133
3.3. Utilización del método de aproximacio- nes sucesivas en el espacio de las po líticas	137
3.4. Comentarios al modelo expuesto	138
<u>Capítulo V.</u> - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTE- MA DE INVERSION	139
1. Introducción	140

Página

2. Los criterios de elección	141
2.1. Criterios para el caso de procesos de- terministas	143
2.1.1. Criterio del beneficio actual má- ximo	143
2.1.2. Criterio del tipo de rentabilidad máximo	144
2.1.3. Criterio del tiempo de recupera- ción mínimo	145
2.1.4. Criterio del enriquecimiento en capital	147
2.1.5. Otros criterios	148
2.2. Criterios para el caso de procesos alea- torios	148
2.2.1. Criterio de la esperanza matemá- tica máxima del beneficio actuali- zado	149
2.2.2. Criterio del tipo de rentabilidad esperado máximo	150
2.2.3. Criterio del riesgo de ruina	151
2.2.4. Otros criterios	152
2.3. Comentarios en torno a los criterios ex- puestos	152

	<u>Página</u>
3. Inversiones de expansión	154
3.1. Formulación por Programación Dinámica	156
3.1.1. Criterio del valor actual máximo	159
3.1.2. Criterio del tipo de rentabilidad máximo	160
3.1.3. Criterio del enriquecimiento en capital	161
3.2. Interpretación de los resultados de los modelos	162
3.3. Extensión probabilística	164
4. Inversiones de renovación	166
4.1. Envejecimiento físico	167
4.1.1. Formulación por Programación Dinámica	171
4.1.2. Comentarios al supuesto de economía estacionaria	173
4.2. Envejecimiento económico	174
4.2.1. Formulación por Programación Dinámica	176

Página

4.2.2. Comentarios al supuesto de economía dinámica	178
4.3. Consideración de nuevas hipótesis	179
4.3.1. Compra de un equipo de ocasión	180
4.3.2. Revisión general del equipo antiguo	181
4.3.3. Reemplazamiento preventivo para evitar averías	182

<u>Capítulo VI.</u> - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTEMA DE PRODUCCION	187
1. Introducción	188
2. Modelo determinista para la optimización de los niveles periódicos de producción y de los stocks en un horizonte limitado	189
2.1. Formulación por Programación Dinámica	194
2.2. Análisis de Sensibilidad	199
2.3. Planificación a largo plazo mediante políticas a corto plazo	203
2.4. Comentarios y extensiones del modelo	204
3. Modelo determinista para la optimización de los niveles periódicos de producción y de los stocks en un horizonte ilimitado	208

	<u>Página</u>
3.1. Formulación por Programación Dinámica I. - Minimización del Coste Total	208
3.1.1. Características del grafo asociado	210
3.1.2. Utilización del método de aproximaciones sucesivas	212
3.2.2.1. Aproximación en el espacio de la función objetivo	213
3.2.2.2. Aproximación en el espacio de las políticas	216
3.2. Formulación por Programación Dinámica II. Minimización del Coste Medio por período.	219
3.2.1. Aproximaciones sucesivas en el espacio de las políticas	223
3.3. Comentarios al modelo expuesto	227
4. Modelo probabilístico para la optimización del volumen de pedido	228
4.1. Formulación por Programación Dinámica	230
4.2. Comentarios al modelo expuesto	232

<u>Capítulo VII.</u> - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTE- MA COMERCIAL	235
1. Introducción	236
2. Modelo dinámico del problema del transporte	237
2.1. Formulación por Programación Dinámica	240
2.2. Utilización del multiplicador de Lagrange	243
2.3. Utilización del método de aproximaciones sucesivas	247
3. Análisis dinámico de la localización de almacenes	248
3.1. Naturaleza de los modelos existentes	250
3.2. Formulación por Programación Dinámica	253
3.3. Comentarios al modelo expuesto	259
4. Control del riesgo y de los ingresos de un equipo de ventas	261
4.1. Evaluación de la clientela	263
4.2. Formulación por Programación Dinámica	268
4.3. Comentarios al modelo expuesto	273
<u>Capítulo VIII.</u> - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTE- MA DE INVESTIGACION	275
I. Introducción	276

Página

2. Programación temporal de un proyecto de <u>in</u> investigación	278
2.1. Formulación por Programación Dinámica	279
2.2. Utilización del método de aproximaciones sucesivas	280
2.3. Determinación de los caminos subcríticos	282
2.4. Análisis de Sensibilidad	283
2.5. Comentarios al modelo expuesto	289

TERCERA PARTE: PROCESOS ADAPTATIVOS Y CONTROL

FEED-BACK	291
-----------	-----

Capítulo IX. - PROCESOS ADAPTATIVOS 292

1. Introducción	293
2. De cara a la incertidumbre	296
2.1. Primer nivel de incertidumbre	298
2.2. Segundo nivel de incertidumbre	299
2.3. Tercer nivel de incertidumbre	300
3. El control de los procesos adaptativos	300
3.1. Patrón de información	302
3.2. Algunos supuestos básicos	303
3.3. Formulación por Programación Dinámica	305

	<u>Página</u>
<u>Capítulo X. - CONTROL FEED-BACK</u>	311
1. Introducción	312
2. Modelo para el control de un proceso <u>secuen</u> cial	316
2.1. Proceso de control determinista	316
2.2. Proceso de control estocástico	318
2.3. Proceso de control adaptativo	319
3. La política de concesión de créditos	322
3.1. Formulación por Programación Dinámica	325
3.2. Revisión del modelo anterior. El impor- te total de los créditos	326
3.3. Comentarios al modelo expuesto	328
 <u>CONCLUSIONES</u>	 331
 <u>BIBLIOGRAFIA</u>	 341

INTRODUCCION

I N T R O D U C C I O N

La toma de decisiones en la empresa constituye sin duda un proceso secuencial. Una decisión que afecte a las variables que actúan dentro del campo de la unidad económica de producción no puede ser considerada - como un hecho aislado, sino como el eslabón de una cadena, cuya importancia no puede ser evaluada en forma aislada, sino conjuntamente con el resto de las que integran el proceso. Más que con una serie de decisiones aisladas, la empresa se enfrenta con un conjunto de procesos secuenciales de decisión, en los que el concepto de optimización ha de rebasar, lógicamente, el estrecho marco de un tratamiento estático, pues, evidentemente, las mejores elecciones para cada período, aisladamente considerado, no tienen por qué suponer el óptimo buscado para todo el horizonte temporal objeto de estudio.

Esta característica secuencial de las decisiones empresariales se da también en otros procesos adscritos al campo de diversas ciencias y técnicas, es decir, que constituye un fenómeno con manifestaciones en diferentes áreas científicas y que, por supuesto, puede ser tratado con total in-

dependencia de tales campos, o sea, dentro del terreno de la pura abstracción. No resulta extraño pues, en modo alguno, que haya sido un matemático, Richard E. Bellman, el que a partir de 1949 comenzara las investigaciones en este campo publicando su primer trabajo en 1953 en la monografía de la Rand Corporation "An Introduction to the Theory of Dynamic Programming". A partir de esta fecha los trabajos del autor mencionado y otros muchos han tomado un incremento tal, que hoy día se cuenta con una bibliografía francamente extensa.

Como fecha de comienzo de las aplicaciones prácticas de la Programación Dinámica puede fijarse el año 1955, y no puede decirse que el campo de la Economía y más concretamente el de la Economía de la Empresa haya sido poco desmenuzado con este nuevo y poderoso instrumental matemático. Bien al contrario, las revistas especializadas en esta temática han visto llenarse sus páginas, cada vez más intensamente, con nuevas aplicaciones, que tratan de mostrar la utilidad del método antedicho a quien ha de tomar las decisiones en la empresa, pues con él se consigue un conocimiento mucho más perfecto de la realidad observada, resultando por tanto más factible la optimización de los objetivos señalados.

Ahora bien, la empresa es un campo evidentemente amplio, en el que se dan problemas de diversa índole, incluso dentro de su vertiente estrictamente económica, sin embargo, la característica secuencial sigue siendo una constante en todos ellos, de ahí que su estudio pueda ser realizado mediante la Programación Dinámica.

En esta Tesis se pretende abordar el estudio de las decisiones secuenciales en la empresa mediante la aplicación de la Programación Dinámica a

los sistemas de gestión que se integran en el más amplio sistema que abarca a la unidad económica en su conjunto. Para ello dividimos su contenido en tres partes, que podemos esquematizar como se muestra en la Figura 1.

En la primera, compuesta de tres Capítulos, se aborda en primer término, el estudio de las Decisiones en la Empresa con un breve repaso a las diversas teorías que han efectuado formulaciones al respecto y un análisis de la estructura del proceso decisorio. En segundo lugar, se exponen las bases de la Programación Dinámica para el tratamiento de los procesos secuenciales de decisión y, por último, se trata de ofrecer una visión de la empresa como un sistema integrado por un conjunto de sistemas de nivel inferior o subsistemas, que sintetizamos en los siguientes: financiación, inversión, producción, comercial e investigación.

La segunda parte, dividida en cinco Capítulos, está destinada a mostrar diversas aplicaciones de la Programación Dinámica a los sistemas de gestión antes mencionados. Como el número de los problemas que podrían plantearse en cualesquiera de ellos desborda unas lógicas posibilidades de recopilación y síntesis, nos vemos obligados a ofrecer los que consideramos más significativos por su carácter de generalidad, o sea, porque pueden darse en cualquier tipo de empresa.

La tercera parte estudia en dos Capítulos los procesos adaptativos y el control feed-back, tema del máximo interés, puesto que los supuestos sobre los que se basa la elaboración de cualquier modelo, cual son un conocimiento determinista o probabilístico de la evolución futura del proceso examinado, no se dan en un buen número de casos, siendo preciso

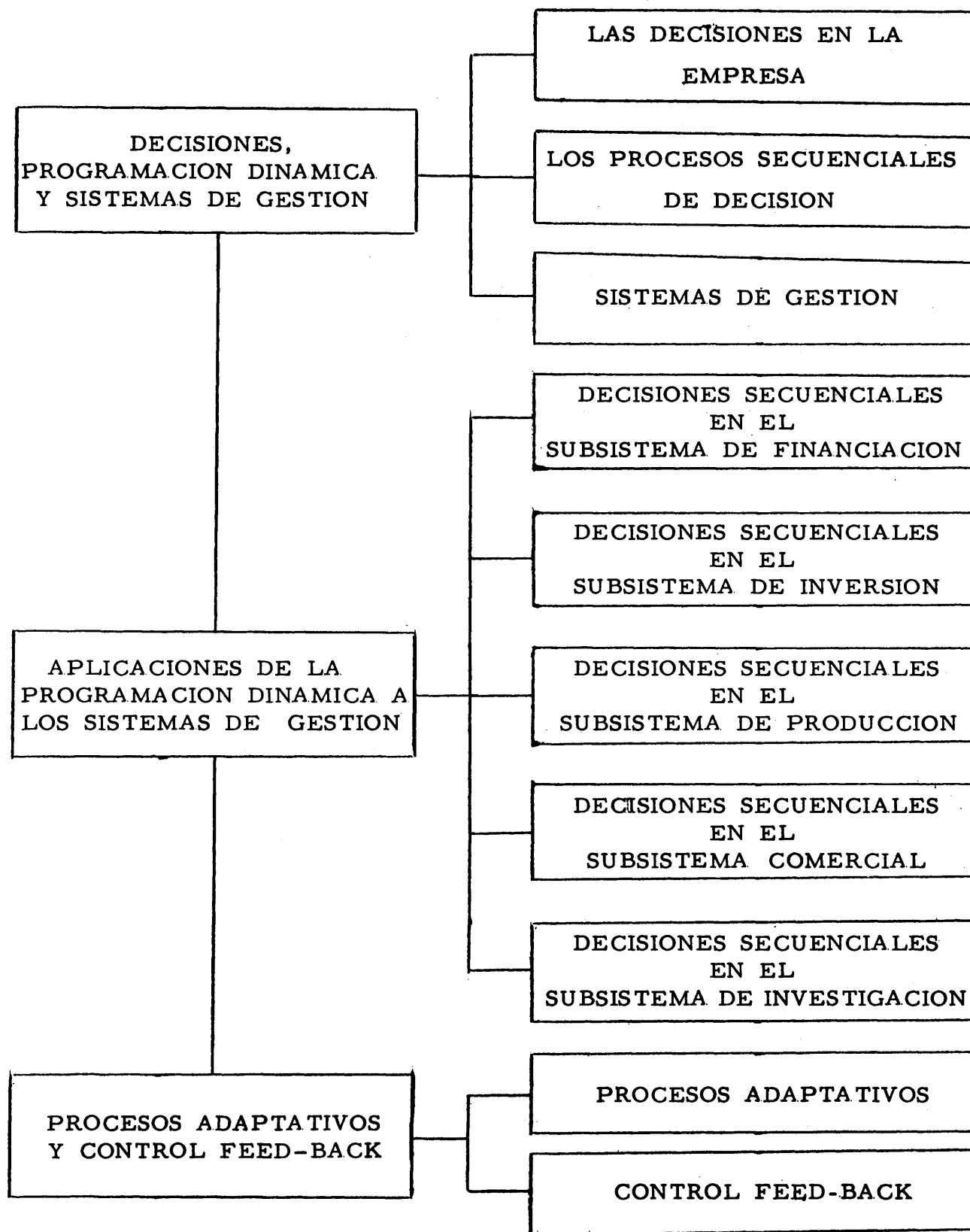


Fig. 1

por tanto, ir aprendiendo a medida que transcurren períodos de tiempo, introduciendo automáticamente las rectificaciones a que hubiera lugar.

A pesar de las dificultades que supone el dividir la Bibliografía por Capítulos, preferimos presentarla en esta forma, pues aunque muchos de los trabajos integrantes de la misma resultan difícilmente adscribibles a uno u otro Capítulo, su utilización más destacada se refiere en no pocos casos a un problema concreto, de ahí que nos inclinemos por esta alternativa.

PRIMERA PARTE

DECISIONES

PROGRAMACION DINAMICA

Y SISTEMAS DE GESTION

CAPITULO I

LAS DECISIONES

EN LA EMPRESA

CAPITULO I. - LAS DECISIONES EN LA EMPRESA

1. - INTRODUCCION

Tradicionalmente ha venido considerándose como un arte la aptitud del hombre para emprender acciones económicas. Sus decisiones se basaban por completo en la llamada "intuición para los negocios", la cual era fruto de las experiencias acumuladas en el ejercicio de las actividades decisorias.

Esta confianza en los juicios subjetivos no puede decirse que haya sido totalmente abandonada en nuestros días, pues su arraigo en el estamento empresarial es francamente fuerte, y, de otra parte, la rentabilidad de los métodos científicos no es suficientemente conocida, de ahí que un autor de la categoría de Starr haya afirmado que "el papel de los métodos científicos en la empresa se encuentra todavía en su infancia". (1).

(1) M. K. STARR. -Las decisiones de los empresarios. -Incluido en el estudio internacional dirigido por F. Bloch-Lainé y F. Perroux, La empresa y la economía del S. XX, Tomo II. La formación de decisiones en la empresa. - Deusto. Bilbao 1970, Pag. 28.

Ahora bien, hay un hecho evidente, y es éste, que la empresa se encuentra inmersa en un mundo económico cuya complejidad guarda evidente relación con el continuo avance científico y tecnológico del momento en que nos ha tocado vivir. La diferencia entre los mecanismos reguladores de la actividad económica de nuestros días y la de épocas pasadas es realmente importante. Entonces nos preguntamos, ¿cómo es posible que el empresario siga guiándose por cánones idénticos o parecidos a aquellos que orientaron sus tomas de decisiones en épocas radicalmente distintas?.

Pensamos que, evidentemente, el método científico no está, ni mucho menos, suficientemente aplicado al estudio de las decisiones en la empresa, pero eso no quiere decir que resulte absolutamente desconocido en dicho campo, y mucho menos que el nivel actual de investigación sea escaso. Creemos que hoy día se da ya una coexistencia entre intuición y método científico en el enfoque de las decisiones por parte de las empresas. La combinación entre ambos quizá no resulte suficientemente favorable a este último, sin embargo, los continuos avances de los estudiosos y la ingente tarea divulgadora están dando como fruto, la creación de una indudable preocupación por el tema. El empresario va conociendo día a día la existencia de modelos que tratan de optimizar sus decisiones, que pretenden ofrecer a su vista los resultados finales de una política de acción, siempre y cuando se mantengan determinadas hipótesis.

Esto no supone la eliminación absoluta de la intuición del empresario, pues los mecanismos lógicos no pueden reemplazarla completamente, pero sí pueden situarla en el plano que realmente le corresponde y que, desde luego, no es el de un instrumento que, por si so

lo, consigue la optimización de la conducta del empresario.

El método científico toma como instrumental básico para sus elaboraciones a las matemáticas. Pretende encerrar los distintos su puestas y alternativas que la realidad ofrece, en el marco de un modelo matemático que constituya una representación abstracta - del sistema estudiado y lo que es más importante, que permita - contemplar la evolución del mismo, obteniendo de esta forma un conocimiento "a priori" de las mutaciones que sufrirá el sistema objeto de estudio y los consiguientes resultados derivados de tal evolución.

Este nuevo campo de conocimientos sitúa al responsable de la em presa ante una gama de posibles políticas o estrategias ofrecidas por los modelos representativos de los distintos sistemas que se integran en la unidad económica. Tales modelos brindan una información sobre el acontecer empresarial, que en absoluto pueden ser objeto de comparación con las restringidas aportaciones que - el empirismo derivado del simple conocimiento de hechos pasados ponía a disposición del empresario en orden a la elaboración de sus decisiones.

¿Donde queda sitio para la intuición dentro de un contexto como el señalado, si estamos afirmando que los modelos representativos de los distintos sistemas de gestión van a ser capaces de indicar al empresario cual es la conducta óptima a seguir?.

Anteriormente hemos puesto de manifiesto la complejidad del entramado económico actual. Así pues, nada debe extrañarnos que

al proyectar acciones futuras la empresa que desenvuelve su actividad dentro de ese marco, tenga en cuenta unas u otras variables descriptivas de este o aquel comportamiento del sistema en que se inscribe. Sobre el desenvolvimiento futuro de tal sistema, el empresario no puede sino opinar en términos de expectativas, las cuales radican a veces en lo más profundo de la psicología humana.

El modelo que contempla un sistema de gestión, ofrece una norma de comportamiento, que será óptima siempre que se cumplan unos supuestos externos a su propia actividad. El empresario tendrá que seguir uno de los caminos que se le ofrecen, tendrá que señalar una política basada en la información aportada por el modelo y en sus propias expectativas sobre el marco económico e institucional, las cuales llevan sin duda alguna incorporado ese ingrediente que anteriormente hemos denominado intuición del empresario.

Ese es el papel que debe jugar la intuición, el de quedar encuadrada dentro de la alta política decisoria, y no como elemento que acompañe con carácter prioritario todas cuantas decisiones hayan de ser tomadas en los distintos niveles de la empresa.

Queremos cerrar esta exposición introductoria, señalando que las preferencias del empresario habrán forzosamente de orientarse por aquellos métodos que más le ayuden a tomar sus decisiones en forma acertada. Como los métodos científicos proporcionan esta ayuda, cada vez a costes menores, no cabe duda que poco a poco se irán incorporando al quehacer de la empresa. Superada la etapa de organización convencional, que indudablemente ha tenido utilidad

dentro de un preciso marco y dimensión, se hace necesario caminar hacia un sistema integrado de gestión que permita la puesta en práctica del método científico en la toma de decisiones del empresario.

2. - DIVERSOS ENFOQUES DE LAS DECISIONES DEL EMPRESARIO

La empresa de nuestros días puede sin duda caracterizarse por su complejidad, tanto en el ámbito interno como en el externo. Sus funciones principales son desarrolladas por un conjunto de secciones o divisiones más o menos coordinadas entre sí, que tratan de dar respuesta a los problemas de diversa índole que confluyen en la misma. Generalmente, este tipo de empresa opera en un régimen de multiproducción y multimercado, ésto es, elabora una amplia gama de productos y compra y vende en diversos mercados. La información canalizada a través de sus distintos órganos pone en marcha el proceso decisorio, surgiendo como resultado del mismo una normativa de acción orientada al logro de los objetivos que la empresa pretende cubrir. Que duda cabe que si el mercado o mercados en que la empresa se mueve determinara su comportamiento económico, todo el proceso decisorio interno carecería de interés, pero es que ésto no es así. "La empresa moderna ejerce algún control sobre el mercado, tiene poder discrecional dentro del mercado, y ve el mercado a través de un filtro organizativo"(2).

(2) R. M. CYERT; J. G. MARCH. - Teoría de las decisiones económicas en la empresa. - Herrero Hermanos Sucesores S.A. - México 1965. - Pag. 2

Ahora bien, esta situación descrita responde a una configuración actual, distinta por supuesto a la existente en otras épocas, en las cuales se formularon teorías que desde luego no pueden servirnos hoy para describir la realidad en que se haya inmersa la empresa. El mercado y sus leyes de equilibrio fue una concepción propia de un determinado tipo de organización económica, en una época en la que los hechos de la realidad garantizaban su existencia. Fue la época del marginalismo.

Todo el instrumental que dicha teoría elaboró para el análisis de la formación del precio, ha quedado reducido a fuerza de abstracción a la categoría de ejemplo ilustrativo, de caso teórico. En la actualidad puede afirmarse, en términos generales, que el monopsonio provee la soberanía del consumidor y el monopolio la del productor, y que, por tanto, los precios son formados bien por los empresarios en el interior de sus fábricas o bien por las asociaciones de consumidores para la venta minoritaria (3).

Esta situación confiere una importancia a la empresa muy distinta de la atribuida en otras épocas, puesto que entra a formar parte, en algunos casos de forma decisiva, del conjunto de instituciones donde se toman las decisiones económicas. El proceso decisivo en la empresa ya no puede ser considerado como algo carente

(3) Sobre este interesante tema de la fijación de los precios puede verse el artículo de A. SANTILLANA DEL BARRIO, "La polémica sobre la conducta del empresario respecto a la fijación del precio y cantidad: aportaciones teóricas y empíricas". - Revista de Economía Política, nº 55. - Mayo-Agosto 1970. - Pags. 111-132.

de interés, como algo subordinado a un ente superior que señala las magnitudes principales del proceso y a las cuales no cabe sino adaptarse, sino como el principal factor de cuantos entran en el juego.

El paso de una situación a otra ha venido jalonado por una serie de teorías que han tratado de dar respuesta al comportamiento a seguir por la empresa para alcanzar sus objetivos económicos.

2.1. La teoría marginalista.

Las teorías formuladas por los marginalistas sobre lo que ha venido denominándose equilibrio económico tienen de hecho su formalización a partir de la década de los 70 del pasado siglo, puesto que las especulaciones ético-económicas propias de la escolástica o las implicaciones de política comercial surgidas del propio marginalismo nada tienen que ver con lo que ahora se entiende por equilibrio económico. Los cimientos del mismo hay que buscarlos en Gossen (4), Dupuit (5), y sobre todo Cournot (6).

(4) H. H. GOSSEN. - *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs*, 1858.

(5) A. DUPUIT. - *De la mesure de l'utilité des travaux publics*. - 1.844; y, *De l'influence des péages sur l'utilité des voies de communication*, 1849. - Fueron publicados ambos trabajos en *Annales des Ponts et Chaussées*.

(6) A. COURNOT. - *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, 1838; y, *Principes de la théorie des richesses*, 1863.

Pero como hemos señalado este movimiento de pensamiento, que se inició conjuntamente en la Europa continental e Inglaterra, surge a partir de 1870 con tres aportaciones que sin duda procrearon este movimiento intelectual: La "Theory" de Jevons (7), el 'Grunddaetze de Menger (8) y los "Elements" de Walras (9).

Estos autores causaron un influjo decisivo sobre sus continuadores, lo que dió lugar a ese curioso fenómeno psíquico-intelectual que denominamos escuelas. Donde este calificativo puede ampliarse en menor medida es en el caso de Jevons, puesto que ni Edgeworth, ni Wicksteed ni mucho menos Marshall pueden considerarse específicamente discípulos suyos. Ahora bien, el caso de Menger y Walras es completamente distinto, puesto que al primero le siguieron Bhöm-Bawerk y Wieser, y al segundo Pareto.

Lo importante y a la vez novedoso de este movimiento, fue que su puso una ruptura con la tradición clásica y con la tendencia historicista entonces imperante. Con ésta discrepó en el método, con aquella otra rompieron al introducir un nuevo concepto de la teoría del valor. El precio no se determinaba solamente por consideraciones inherentes a la oferta, sino que también la demanda jugaba un papel, e importante por cierto. Visto el problema de este modo, el marco adecuado en donde los precios debían formarse no

(7) W. S. JEVONS. - Theory of Political Economy, 1863.

(8) K. MENGER. - Grundsaetze der Volkswirtschaftlehre, 1871.

(9) L. WALRAS. - Elements d'Economie Politique Pure, 1874-7.

era otro que el ofrecido por la concepción tradicional de mercado con las caracterizaciones propias de la libre competencia. Oferentes y demandantes no pretendían sino lograr, en virtud de sus propias concepciones hedonísticas, la máxima satisfacción con el mínimo esfuerzo.

Establecida esta dualidad, lo importante era estructurar el correspondiente equilibrio, y como la metodología imperante era eminentemente deductiva, fueron las subtendencias propensas al análisis matemático las que explicitaron en términos de gran perfección lógica las correspondientes premisas configuradores del mencionado equilibrio. Partiendo de la formulación Walrasiana del equilibrio general, Marshall, en sus "Principles" (10), elaboró un nuevo concepto restringiendo los supuestos de partida: el equilibrio parcial.

Ambas concepciones del equilibrio, teleológicamente hablando, no pretendían sino ser a la vez instrumentos y conceptos. Instrumentos para llegar a un fin y conceptos que señalaban lo que debía ser en el mundo de la realidad. Efectivamente, se trataba de configurar equilibrios, idea en torno a la cual gira toda la teoría, una idea bella y ética, como bello y lógico era su esquema de abstracción intelectual. Se dió de esta forma el equilibrio a diferentes niveles. Equilibrio entre consumidores, con objeto de adecuar sus necesidades a las disponibilidades; equilibrio entre productores, para encontrar los precios capaces de cubrir los costes inherentes al

(10) Hay traducción castellana de Emilio de Figueroa: Principios de Economía. Aguilar. Madrid 1963.

proceso de producción; pero sobre todo un equilibrio definitivo entre productores y consumidores en el marco estructural del mercado, el cual quedaba determinado perfectamente con base en las funciones de utilidad, en las de producción y en las de coste, y de acuerdo con las identidades de Balance y de las utilidades marginales ponderadas.

Todo este marco instrumental se acomodó a la más pura esencia del marginalismo y fue defendido por todos sus seguidores, que a partir del primer momento proliferaron por doquier, perfeccionando cada vez más las bases analíticas del equilibrio a lo largo y ancho de la geografía mundial, siendo buen exponente de ello, el pensamiento de Wicksell en Suecia, las obras de Irving Fisher y J. B. Clark en EE.UU. y la tradición italiana vinculada a Pantaleoni.

En síntesis, las implicaciones más sobresalientes derivadas del equilibrio general suponían una serie de caracterizaciones para la unidad económica que podemos concretar en las siguientes:

- Para hallar las cantidades óptimas de factores y productos (n en total) utilizados por la empresa, se puede establecer y resolver un sistema de n ecuaciones.
- En la situación de equilibrio, la relación marginal de sustitución entre dos factores o entre dos productos es igual a la relación por cociente de sus respectivos precios.
- La productividad marginal física de un factor respecto a un producto es igual al inverso de la relación entre sus precios.

- La cantidad producida de un bien queda determinada en aquel momento en que su coste marginal se iguala al precio (dado) de dicho bien.
- El incremento del precio de un producto hace aumentar su oferta mientras que una variación de igual sentido en el precio de un factor hace disminuir su demanda.
- Los efectos cruzados del precio son simétricos, es decir, que la tasa de variación del bien A con respecto al precio de B es igual a la tasa de variación de B con respecto al precio de A.
- Al subir el precio de un bien, descienden las cantidades elaboradas de los demás productos y ascienden las aplicadas de factor al primero (11).

La teoría ha sido ampliada, pasando al análisis de los mercados imperfectos de factores y productos, aislada y conjuntamente, si bien el acuerdo en tales formulaciones es menos general que en el caso de la competencia perfecta. Estas elaboraciones siguen conservado, no obstante su mayor amplitud de miras, la estructura fundamental y el proceso decisorio señalados para la empresa de competencia perfecta. Otro tanto podemos decir de las teorías de la competencia monopolística y oligopolística, puesto que ambas toman a la empresa como cosa dada y se limitan simplemente a cambiar los supuestos sobre los que descansa el mercado (12)

(11) R. M. CYERT; J. G. MARCH. Op. Cit. Pags. 6-7.

(12) J. ROBINSON. - The Economics of Imperfect Competition. - Macmillan. Londres, 1933. (Hay traducción española de Aguilar. Madrid, 1946).

En la controversia surgida con respecto a las formulaciones antes expuestas, cabe destacar dos dificultades:

- Los supuestos motivacionales y cognoscitivos parecen poco realistas. La maximización del beneficio -se suele argüir- es uno de los fines buscados por la empresa, pero no exclusivo, pues el empresario, como señala Katona (13), puede actuar impelido por un conjunto de motivos personales, uno de los cuales puede ser precisamente el benéfico. Por lo que se refiere al aspecto cognoscitivo, el supuesto clásico de la certidumbre ha sido sustituido por el conocimiento del futuro en términos probabilísticos, si bien esta nueva versión ha sido también puesta en tela de juicio, sobre todo en lo que se refiere a su consideración externa a la empresa. La información no es un dato para la misma, sino que ha de procurársela, conseguirla con sus propios medios. Esta es una alternativa para la utilización de sus propios recursos, pues da lugar a unos costes y de su puesta en práctica cabe esperar unos ingresos, ya que el conocimiento del medio am biente, contribuirá al acierto de las decisiones que sucesivamente y con carácter secuencial vayan siendo tomadas (14).
- La empresa que sirve de base a las formulaciones teóricas reúne pocas de las características identificadoras de la empresa en la realidad, o mejor aún, ignora la existencia de tales caracte-

(13) G. KATONA. - Psychological analysis of economic behavior. - MacGraw Hill Book Co. - New York, 1951.

(14) A. CHARNES; W. W. COOPER. - The theory of search: Optimum distribution of search effort. - Management Science, Vol V, 1959. Pags. 450-458.

rísticas. Así, no se plantea los problemas que sin género de duda, se derivan de una organización compleja, como pueden ser: problemas de control, de personal, de aprovisionamientos, etc. Todo el proceso decisorio quedaba circunscrito a la fijación de la cantidad a producir o del precio, según los casos, cuando en realidad, como señalaron Hall y Hitch en 1939, las empresas no igualan el coste marginal al ingreso marginal para tomar tales decisiones, sino que siguen una política de mark-up (15) De otra parte también resulta interesante señalar aquí el divorcio existente entre Contabilidad de Costes y Teoría Económica -tan acertadamente señalada por Manuel de Torres (16)- que daba lugar a que quienes llevaban a cabo el cálculo de costes en las empresas no siguieran en absoluto las formulaciones elaboradas por los estudiosos de la Teoría Económica. Así a fuerza de una ausencia de contraste con la realidad de las elaboraciones de estos últimos, y de una práctica mecanicista carente de todo embrión científico en los trabajos de los primeros, las decisiones del empresario eran fruto pura y simplemente de la tan traída y llevada "intuición para los negocios", al margen, por tanto, de toda argumentación científica (17).

(15) R. L. HALL; C. J. HITCH. - Price theory and business behavior. - Contenido en Oxford Studies in the price mechanism, dirigido por T. Wilson y P. W. S. Andrews. - Oxford University Press. - Oxford, 1951. - Pags. 107-138.

(16) Vid. E. SCHNEIDER. - Contabilidad Industrial. - Aguilar. - Madrid 1962. - Prólogo (3ª edición.)

(17) La obra de SCHNEIDER supone un intento bastante acabado de unir las formulaciones económicas y las elaboraciones contables, en suma de que la Contabilidad sirva como efectivo instrumento informativo de la realidad que estudia: La realidad económica. El método contable del "Direct Costing" se suma a esta línea teleológicamente hablando, siendo destacable la obra de G. DE BODT, Análisis de Márgenes (Direct Costing). - Deusto. - Bilbao 1966.

Con estas disquisiciones no cabe pensar quedó cerrada la discusión, bien al contrario, puesto que la misma parece estar dotada de fuertes poderes de reencarnación (18). Las principales réplicas dirigidas a las propuestas de revisión, se han centrado contra su pertinencia metodológica, sus premisas reales o su utilización teórica.

La réplica metodológica, cuyo principal defensor es Friedman (19) se basa en que no tiene importancia que los supuestos sean reales o no, pues la misión de la Teoría Económica es construir unas proposiciones que sirvan para analizar el mundo real, no para describirlo. Sostiene que las formulaciones actuales dan buenos resultados en la predicción aun cuando los testimonios son difíciles de reunir por encontrarse dispersos en distintas monografías, artículos y trabajos, que tratan fundamentalmente de problemas concretos y no de poner a prueba las hipótesis de partida.

Otra línea de defensores de la teoría convencional, entre los que cabe destacar a Earley (20), tratan de demostrar empíricamente que los supuestos teóricos son válidos. El autor mencionado se basa en que las nuevas técnicas contables, como el Direct Costing,

-
- (18) T. C. KOOPMANS. - Three essays on the state of economic science. - McGraw-Hill Book Co. - New York, 1957. - Pags 137-142.
- (19) M. FRIEDMAN. - The methodology of positive economics. In: *Essays in positive economics*. - University of Chicago Press. Chicago, 1953. - Pags. 3-46.
- (20) J. S. EARLEY. - Marginal policies of excellently managed companies. - *American Economic Review*, Vol XLVI, 1956. - Pags. 44-70.

y las englobadas bajo la denominación de Investigación Operativa, permiten a los hombres de empresa comportarse en idéntica forma a la señalada por el análisis marginalista de la teoría de la empresa. Esto puede que sea cierto, pero es conveniente señalar que las técnicas de Investigación Operativa, en su aplicación a la empresa no consideran a esta última con idéntico criterio al análisis marginal, bien al contrario, profundizan en sus problemas estructurales, para resaltar cuantas variables pueden incidir en el proceso de decisión.

Por último, en lo que concierne a la utilidad teórica de los cambios propuestos por las teorías revisionistas, los defensores de la ortodoxia argumentan que dichos cambios no pueden ser manejados analíticamente, pues los instrumentos matemáticos disponibles no pueden desarrollar las propuestas formuladas (21). Esta tesis ha sido fácilmente acallada con la elaboración y contraste de modelos utilizando los modernos ordenadores electrónicos.

Como resumen de este breve repaso a la aportación del análisis marginal a la toma de decisiones del empresario, podemos afirmar que el mismo, se centró en un conjunto particular de dichas decisiones -por ejemplo, el precio y la cantidad a producir- que se consideraban funciones de un reducido número de variables integradoras de todas las existentes -por ejemplo, la demanda y los costes-. El proceso que en la realidad siguen las empresas para tomar sus de-

(21) A. PAPANDREOU; J. WHEELER. -Competition and its regulation. - Prentice Hall, Englewood Clifs. -New Jersey, 1954. -Pags. 73-74.

(22) K. J. COHEN; R. M. CYERT. - Computer models in dynamic economics. -Quarterly Journal of Economics, Vol LXXV, 1961. - Pags. 112-127.

cisiones, permanece al margen de las elaboraciones formuladas por la teoría de referencia.

2.2. La teoría de la organización

La teoría de la organización tiene distintos significados para los diferentes autores, pues la misma ha sido abordada desde diversos puntos de vista. Los primeros escritores sobre organización eran, sin duda, aficionadas a la exhortación, tenían la esperanza de convencer a sus lectores de ciertos principios que su personal experiencia les hacía creer útiles, pero, sin embargo, su punto débil residía en el análisis crítico de sus planteamientos, y en el razonamiento lógico que daba lugar a sus corolarios y prescripciones. Los teóricos de hoy intentan ser prácticos, o sea, buscan expresar sus conclusiones de manera que sea posible verificar o contrastar las mismas, son pues, en principio, más partidarios del género descriptivo que del obligatorio, puesto que buscan como antecedente a la formulación de cualquier tipo de conclusión, el estudio empírico del comportamiento seguido en las distintas estructuras organizativas (23).

Contemplada la teoría de la organización desde nuestro particular punto de vista, no podemos sino centrarnos en las corrientes de base empírica, puesto que lo que nos interesa es examinar su contribución efectiva al proceso de toma de decisiones. Bajo esta óptica

(23) El método seguido para el establecimiento de conclusiones es el hipotético-deductivo, por lo que éstas son contempladas bajo una óptica de permanente provisionalidad. Vid. K. R. POPPER. La lógica de la Investigación Científica. -Tecnos. -Madrid, 1962

podemos diferenciar tres ramas dentro del campo estudiado por la teoría de la organización. En primer término la que ha sido descrita con el calificativo de sociología, cuyos antecedentes básicos han de buscarse en Weber, Durkheim, Pareto y Michels, la segunda es socio-psicología y en tercer lugar la que mayor importancia tiene para nosotros puesto que orienta los problemas ejecutivos en el seno de la organización, que responde al calificativo de administrativa.

No vamos a entrar en el análisis de los planteamientos sociológicos y socio-psicológicos, puesto que los mismos dedican su mayor atención a cuestiones que resultan marginales para el principal objetivo que nos hemos fijado, como es el predecir el comportamiento de una empresa determinada, en orden a la más acertada toma de decisiones. Por el contrario, en cuanto se refiere a la tercera de las tendencias señaladas, cabe mencionar que gran parte de los trabajos que pueden ser incluidos dentro de la misma, toman el proceso decisorio como objeto de estudio, explicando cómo discurre la elaboración de las decisiones dentro del marco de una organización (24). Algunos autores conciben la organización como una red de comunicación, es decir, como una colección de puntos en los que se transmite información, con lo que bajo este prisma cualquier organización grande constituye un sistema enormemente

(24) H. A. SIMON. - Administrative Behavior. - Macmillan, New York 1947. - C. I. BARNARD. - Functions of the executive. - Harvard University Press. - Cambridge, U.S.A., 1938.

intrincado de eslabones de comunicación, por los que constantemente circula una gran cantidad de información de diferentes tipos (25).

Aunque una parte de esta teoría se centra en el estudio del proceso decisorio, de lo que ocurre dentro del seno de la empresa, no puede decirse que el mismo haya sido contemplado desde un punto de vista económico, puesto que tal teoría no ha sido aplicada ni a las condiciones específicas de ambiente en que opera la empresa de nuestros días, ni a las variables de decisión que caracterizan el funcionamiento de dicha empresa.

Ha habido intentos de lograr la integración de las formulaciones marginalistas de la teoría de la empresa con la teoría de la organización (26), pero difícilmente pueden aunarse ambas, dados los distintos objetivos perseguidos por una y otra. Más que esto lo que se necesita es una teoría que parta de bases firmes y reales a la hora de enfocar desde una vertiente económica las decisiones en la empresa.

2.3. La Teoría del Comportamiento

Teniendo en cuenta las características señaladas para las teorías

-
- (25) D. W. MILLER; M. K. STARR. - Acuerdos ejecutivos e Investigación de operaciones. - Herrero Hermanos. - México, 1961. Pags. 10-11.
- (26) H. LEIBENSTEIN. - Economic theory and organizational analysis. Harper. - New York, 1960.

examinadas y sus evidentes limitaciones, no es de extrañar que surgieran nuevas propuestas para el análisis de las decisiones económicas que continuamente han de ser tomadas por los empresarios para tratar de conseguir sus objetivos.

El enfoque de la teoría del comportamiento se diferencia fundamentalmente de las anteriormente examinadas en que pretende realizar un análisis acabado del proceso que siguen las empresas para tomar sus decisiones en la práctica. Sus formuladores Cyert y March parten de premisas que no podemos por menos de juzgar como realistas, puesto que la característica anteriormente señalada no puede recibir otro calificativo. La complejidad de las empresas de nuestros días, sus cuantiosos problemas de toda índole, el gran número de personas que tratan de unir sus esfuerzos para lograr un objetivo común, son algunos de los factores que han de ser tenidos en cuenta para abordar el estudio de las decisiones empresariales.

Estas circunstancias dan lugar a que la teoría que ahora examinamos considere que su elaboración ha de estar sustentada sobre los siguientes puntos básicos:

1. La empresa ha de ser tomada como unidad fundamental.
2. El objetivo perseguido ha de dirigirse hacia la predicción del comportamiento de la empresa con respecto a decisiones tales como las referentes al precio, la cantidad producida y la aplicación de los recursos.

3. El proceso real seguido en las organizaciones para tomar una decisión ha de ser reconocido explícitamente como materia principal de investigación (27).

La elaboración de la teoría a partir de los anteriores puntos de partida ha dado lugar al establecimiento de una serie de conceptos, cuatro concretamente, los cuales podemos decir que constituyen su armazón teórico fundamental. Son éstos:

- 1) Cuasi resolución del conflicto
- 2) Evitación de la incertidumbre
- 3) Investigación de los Problemas
- 4) Aprendizaje por parte de la organización.

Trataremos de explicar a continuación en forma resumida los aspectos tratados en cada uno de los puntos anteriores, examinando su función intrínseca y la coordinación con los restantes, puesto que, como ya pusimos de manifiesto con anterioridad, la teoría de referencia trata de examinar el proceso decisorio en su totalidad, y por lo tanto, la armonización de las distintas funciones que componen el mismo supone un tema trascendental para la validez de dicha teoría.

(27) R. M. CYERT; J. G. MARCH. - Op. cit. Pag. 22.

En el primer concepto se postula la necesidad de definir los distintos objetivos perseguidos como condiciones independientes, -beneficio, cifra de ventas, fracción de mercado servida por la empresa, nivel de existencias y aprovisionamientos, etc. -, a cuyo conocimiento en forma precisa puede llegarse aplicando el principio de racionalidad local, ésto es, subdividiendo el conflicto de fines en un número reducido de problemas, cada uno de los cuales puede ser estudiado por una unidad de las que integran la empresa. Delegando y especializando las funciones que atañen a las decisiones y a los objetivos, la organización ve reducirse la maraña de problemas y objetivos contradictorios con que se enfrenta. A esta optimización local le sigue una optimización a nivel general, la cual debe contar con las características secuenciales que los fines presentan. Cada decisión no supone algo aislado, sino que forma parte de una cadena de decisiones, y así como los hechos pasados condicionan la decisión a tomar, ésta incide sobre las posteriores, y por lo tanto, se ve condicionada por ellas, si lo que se pretende es la optimización de la conducta del empresario a lo largo del tiempo.

Su enfoque del segundo apartado, evitación de la incertidumbre, no está basado en ningún procedimiento para hallar equivalentes de certidumbre -por ejemplo: el de la esperanza matemática- ni en enunciar reglas de convivencia con la incertidumbre -por ejemplo: la teoría de juegos- sino, por un lado, en evitar los supuestos de poder prever correctamente un futuro a largo plazo, sirviéndose, por tanto, de reglas de decisión basadas en la reacción a corto plazo ocasionada por la retroacción, también de corto plazo -el típico modelo de "feedback"- y, por otro, en eliminar las reacciones futuras de

otras partes del medio que rodea a la empresa, llegando a un acuerdo con las mismas, con lo que el medio ambiente pasa a tener un carácter determinista. Es conveniente aclarar, por lo que se refiere al primer punto, que las previsiones a largo plazo no se suprimen automáticamente, pero pasan a tener una importancia secundaria, por lo que no es preciso afinar en ellas, sirven solo de orientación; las decisiones deben basarse en datos de última hora, elaborados dentro de una estructura "que opera casi a manera de un parque de bomberos" (28). En cuanto al segundo punto, también es de destacar que la negociación con el medio ambiente no implica el llegar a acuerdos expresos sobre determinados enunciados, sino más bien en procurar, si es que no existen, el establecimiento de unas prácticas convencionales que alcancen al sector o sectores en que la empresa opera, con lo que se consigue una estabilidad en la actuación de la competencia.

La investigación de los problemas, se refiere a aquella que es preciso realizar en la empresa y que va encaminada a resolver un problema generalmente concreto y específico. No es la profundidad su principal característica, puesto que no pretende llegar a un conocimiento minucioso de todas cuantas circunstancias concurren en el caso estudiado, sino, simplemente, se ocupa de comprender, en la medida en que esa comprensión facilite la acción. Como características principales de este tipo de investigación cabe señalar: 1) es motivada 2) es sencilla y, 3) es sesgada. En cuanto a su motivación es clara, el problema que surge en el seno de la empresa y que hay que compatibilizar con los objetivos perseguidos por la misma.

(28) Ibid. Pag. 144.

La sencillez en la investigación es conseguida mediante la aplicación de estas dos reglas: a) investigar en los alrededores adonde surgió el problema y, b) investigar en las proximidades de la alternativa que se está considerando en ese preciso momento, Ni que decir tiene que la falta de resultados positivos hará que la investigación vaya abandonando paulatinamente las proximidades señaladas y dirigiéndose hacia áreas más alejadas. Junto a estas dos normas puede señalarse otra no menos importante, sobre todo al producirse el efecto ultimamente mencionado, es ésta, la de que la investigación debe dirigirse hacia aquellas partes de la empresa cuya organización se considere más vulnerable. Por lo que se refiere a la última de las características señaladas, el sesgo de la investigación, puede ser de tres clases: a) debido a la formación especial o a la experiencia de las distintas partes de la organización, b) introducido por la interacción de las esperanzas y las expectativas, y c) los resultantes de conflictos no resueltos que se dan en el interior de la estructura orgánica.

El último de los conceptos que la teoría del comportamiento considera como básicos, es el que hace referencia al aprendizaje de la organización. La empresa puede ser considerada como un ser vivo (29), por lo que no resulta extraño que la organización -elemento aglutinador de cuantos concurren en la empresa- aprenda, no como un ser humano, sino en la forma que le es propia, ésto es, adaptándose a las necesidades emanadas del proceso decisorio de la empresa. Esta

(29) Vid. M. BERLANGA BARBA. - Economía de la Empresa. - Biblioteca de Comercio y Finanzas. - Madrid 1954. - Pag. 13.

adaptación de la organización puede ser contemplada en tres diferentes etapas: a) Adaptación a los fines, b) Adaptación a las reglas de atención y c) Adaptación a las reglas de investigación. Los objetivos de la organización cambian, a lo largo del tiempo, a la luz de la información ofrecida por el contraste de los previamente fijados -tanto por la empresa objeto de análisis como por sus competidoras- con los resultados alcanzados. Los fines de la organización para un período determinado son función de los correspondientes al período anterior, del contraste de dichos objetivos con la realidad y de la experiencia proporcionada por empresas con características similares. Pero no sólo aprende la organización a qué puede aspirar dentro del marco ambiental en que se desenvuelve, sino que también aprende a concretar su atención en unas específicas partes de ese ambiente y no en otras; así por ejemplo, para juzgar sus éxitos emplea unos determinados criterios de medición, elabora unos concretos índices que requieren fijar la atención en determinadas magnitudes de la realidad económica de la empresa, prescindiendo de otras cuyo conocimiento no proporciona una información tan precisa como las escogidas. Por último, la adaptación de las reglas de investigación, vendrá dada en función de los éxitos o fracasos conseguidos con las vigentes, para resolver los problemas que sucesivamente se le han ido planteando a la empresa.

Cyert y March esquematizan gráficamente el proceso decisorio que responde a las características señaladas, en la forma recogida en la Figura 1. (30)

(30) R:M. CYERT; J. G. MARCH. - Op. cit. - Pag. 152

CUASI RESOLUCION DEL CONFLICTO	EVITACION DE LA INCERTIDUMBRE	INVESTIGACION DE LOS PROBLEMAS	APRENDIZAJE DE LA ORGANIZACION
LOS OBJETIVOS COMO LIMITACIONES INDEPENDIENTES. RACIONALIDAD LOCAL. REGLAS DE DECISION SEGUN LOS NIVELES ACEPTABLES. CONSIDERACION SUCESIVA DE LOS OBJETIVOS.	PROCEDIMIENTOS DE DECISION POR RETROACCION. MEDIO AMBIENTE NEGOCIADO.	INVESTIGACION MOTIVADA. INVESTIGACION SENCILLA. SESGO EN LA INVESTIGACION.	ADAPTACION DE LOS OBJETIVOS, DE LAS REGLAS DE ATENCION Y DE LAS REGLAS DE INVESTIGACION.

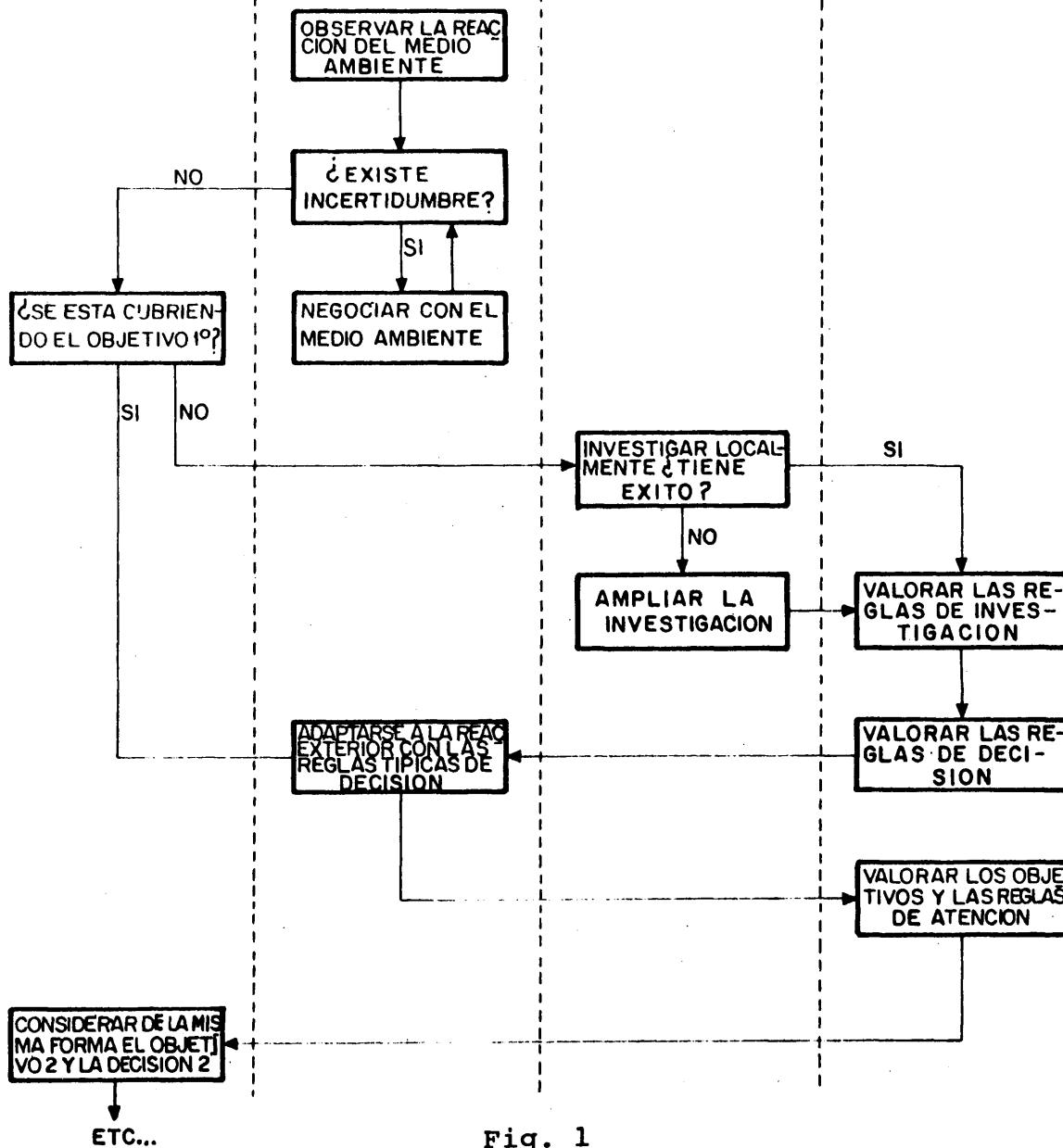


Fig. 1

Ponen de manifiesto que en dicho esquema quedan plasmados en forma abstracta todos los pasos requeridos por el proceso de decisión y la relación existente entre los conceptos básicos señalados y las etapas de dicho proceso.

No cabe duda que este análisis de las decisiones empresariales tiene más visos de realidad que el abordado por las teorías anteriormente señaladas. No obstante, queremos destacar en ella un matiz a nuestro juicio desproporcionado, la reacción de sus formuladores contra las técnicas cuantitativas. La teoría del comportamiento tiene un contenido eminentemente descriptivo, pretende poner de manifiesto los cauces internos por los que discurren las decisiones empresariales. Indudablemente este conocimiento es decisivo, no es posible hablar de las decisiones en la empresa sin conocer en función de que factores -externos e internos- son tomadas las mismas, que efectos pueden producir, etc. Ahora bien, el conocimiento de esta estructura interna facilita una información sobre las variables del problema y sobre los datos con que se cuenta para ser resuelto, lo cual, en lugar de evitar la utilización de las técnicas operativas, aboca al uso de las mismas. ¿Qué dificultad existe en tratar de hallar una solución que en lugar de ser aceptable sea óptima?. Se puede argüir que no puede alcanzarse tal optimización, puesto que el conocimiento de los datos para la elaboración del modelo no será exacto en un elevado número de casos, ahora bien, tal situación llevará a decisiones desacertadas o por lo menos poco acertadas, tanto si se recogen el conjunto de dichos datos y variables en el contexto de un modelo cuantitativo como en caso contrario. Los autores mencionados (31) critican los resultados prácticos de los modelos de

(31) Ibid. - Pags. 338-39.

Investigación Operativa, basándose en los dos siguientes supuestos:

- 1) Las dificultades con que tropieza la organización para establecer un orden de preferencias perfectamente definido.
- 2) Las dificultades que supone pasar de la aceptación por parte de la organización a la puesta en práctica.

Indudablemente, no vamos a pensar que los objetivos, datos y variables de los modelos de Investigación Operativa puedan ser recogidos por la organización de la empresa sin dificultades, pero que existan no quiere decir que no se puedan superar, y que si la organización se fija como objetivo el de posibilitar cada día en mayor medida la aplicación de tales modelos, las dificultades apuntadas irán cediendo en número e intensidad. El control de su puesta en práctica y el contraste de los programas con la realidad será otra misión a fijar a la organización, cuya aplicación efectiva permitirá ir perfeccionando la elaboración de modelos y, por tanto, la predicción científica del comportamiento empresarial. Esta tesis es reconocida por los propios Cyert y March -aun cuando la subvaloran-, pues acaban reconociendo el interés de la teoría del comportamiento para los modelos de Investigación Operativa, según sus palabras, que según las muestras y en relación con su enfoque, más bien habría que enunciarlo al contrario, es decir, el interés de los modelos de Investigación Operativa para la teoría del comportamiento, pues las misiones asignadas a éstos se centran en contribuir al conocimiento estructural del problema y a las restricciones que la organización presenta para enfrentarse con él. El enfoque descriptivo, como puede apreciarse, predomina en todos sus planteamientos. Al

final no pueden menos de reconocer la posibilidad de tratamiento normativo eficaz de una decisión, si bien supeditada al conocimiento de los límites institucionales y de comportamiento que rodean la estructura de la organización, con lo que sus anteriores dificultades acababan no pareciéndoles tan insalvables, si bien se cuidan mucho de explicitarlo.

2.4. La Investigación Operativa

Parece lógico que antes de examinar el impacto que la Investigación Operativa ha causado en el proceso de toma de decisiones del empresario, nos planteásemos el dar una definición de la misma, para así poder examinar nuestro tema con una mayor concreción. Ahora bien, si el problema de las definiciones no resulta fácil de superar en buen número de ocasiones, en la que hace referencia a la Investigación Operativa parece que va adquiriendo proporciones francamente grandes.

Morse y Kimball dan la siguiente definición: "La Investigación Operativa es un método científico que proporciona a los departamentos ejecutivos una base cuantitativa para tomar las decisiones referentes a aquellas actividades que quedan bajo su respectivo control" (32).

Otras muchas definiciones dadas por diferentes autores no son sino variantes de ésta, que tomamos como más representativa.

No cabe duda que la anterior definición es cierta, sobre todo en la

(32) P. M. MORSE; G. E. KIMBALL. - Methods of Operations Research. - John Wiley and Sons. - New York, 1951. - Pag. 1

en la vertiente cuyo estudio estamos tratando de acometer, pero no logra la distinción entre el campo que le es propio y el de otros métodos científicos, puesto que idénticos objetivos a los especificados pudieran ser señalados, por ejemplo, a la Contabilidad de Costes.

Hay otro núcleo de autores que definen la Investigación Operativa como el conjunto de técnicas integrantes de la misma, y así se limitan a enumerarlas una por una: Teoría de Colas, Teoría de Juegos, Programación Lineal, Programación Dinámica, Método de Monte Carlo, etc., puntualizando sus respectivas vertientes de aplicación. Quizá esta descripción consiga el efecto deseado, poner de manifiesto sus posibilidades en los distintos campos, pero en absoluto puede afirmarse que la misma constituya una definición.

Por último, hay otra definición que parece dejar muy satisfechas a ciertas agrupaciones profesionales y sociedades de Investigación Operativa, pero que en absoluto puede ser tomada como tal, puesto que afirmar que la "Investigación Operativa es lo que hacen los investigadores profesionales de operaciones" es una perogrullada que no necesita mayor comentario.

A la vista de cuanto antecede podemos afirmar, sin lugar a dudas, que con la Investigación Operativa ocurre lo que con otras ramas del conocimiento, que es algo fácil de indicar pero difícil de definir.

No cabe duda que presenta unas características diferenciadores de otras técnicas y ciencias que centran su atención sobre la empresa y las decisiones en ella adoptadas. El hecho de que antes señalára-

mos, a título de ejemplo, que la Contabilidad de Costes cumplía los objetivos señalados a la Investigación Operativa hay que ponerlo rigurosamente en relación con la definición entonces comentada. Para nosotros están bien claros los objetivos que cabe atribuir a una y otra.

El papel que viene asumiendo la Contabilidad dentro del mundo empresarial es el de captar, representar y medir los fenómenos económicos que tienen lugar dentro del mismo. La gestión de la empresa se vale de ella en alto grado, puesto que brinda al empresario la oportunidad de conocer en forma numérica y sintética tanto los resultados derivados de sus acciones como la composición cualitativa y cuantitativa de su patrimonio. De este conocimiento se derivan múltiples decisiones encaminadas a alcanzar los objetivos perseguidos por el empresario. Ahora bien, este conocimiento de una situación pasada, no basta para poder inferir con fundamento suficiente el desarrollo futuro. Este estado de necesidad ha dado lugar al desenvolvimiento y puesta en práctica de la Contabilidad preventiva, la cual no pretende captar el desenvolvimiento de una realidad económica pasada, sino al contrario, reflejar inicialmente el plan de acción previsto y poner de manifiesto los desajustes que entre la realidad y aquél se vayan produciendo a lo largo de la ejecución del mismo. El análisis de tales desajustes pone al alcance del empresario un caudal informativo sobre la actuación de las diferentes unidades o secciones de su empresa, permitiendo asignar responsabilidades de una forma concreta y precisa.

Sin lugar a dudas el problema de la adopción de decisiones en la empresa quedará reducido, puesto que si las misiones señaladas son -

cumplidas por la Contabilidad de la empresa, el empresario contará con un adecuado orden informativo sobre la circulación económica en su unidad de producción. Pero con ésto no puede considerarse zanjada la cuestión, estamos anclados dentro del campo de la descripción, se dispone, eso si, de una amplia información susceptible de ser aprovechada, pero esos planteamientos corresponden ya a otro campo.

El problema que ahora debemos plantearnos es el de optimizar la conducta del empresario, es decir, lograr que las decisiones que ha de tomar sean, desde un punto de vista económico, máximas o mínimas, según los casos. La elaboración de modelos económicos de empresa ha venido a llenar este vacío ya que mediante la utilización del instrumental matemático (33) representan, en primer término, una concreta estructura empresarial en sus aspectos fundamentales, y de otra parte ofrecen la posibilidad de llegar a determinar una política óptima, consiguiendo con ello señalar una normativa de acción basada en términos absolutamente científicos y racionales.

Las técnicas más utilizadas para la elaboración y resolución de modelos económicos de empresa son las que quedan englobadas dentro del nombre genérico de Investigación Operativa. Su nacimiento tuvo

(33) La noción de modelo no está de por sí ligada al uso de las matemáticas, puesto que puede hablarse de modelos cualitativos. - Vid. D.W. MILLER; M.K. STARR. Op. Cit. Pags. 126-59. - Sin embargo el verdadero impacto de los modelos económicos corresponde a los cuantitativos, por lo que muchos autores identifican la noción de modelo con el uso de las matemáticas. - Vid. - S. CHAKRAVARTY. - Lógica de la Planificación de Inversiones. - Tecnos. - Madrid, 1966. - Pags. 29-30. - D. BLONDE. - La Gestión Programada. - Sagitario. - Barcelona, 1965. - Pag. 42

lugar ante una necesidad de acción, se pretendía encontrar soluciones inmediatas a los gigantescos problemas existentes, no el llegar a elaboraciones de elevado carácter científico pero sin posibilidades de aplicación práctica. Esto tuvo lugar durante la época de la Segunda Guerra Mundial dentro de las Fuerzas Aéreas de los Estados Unidos de Norteamérica, si bien hay que señalar que existían algunos trabajos anteriores, configuradores junto con los realizados en los años indicados, de lo que viene llamándose economía lineal, por ser esta última la característica aglutinadora de tales modelos. Primero se creó la Teoría de Juegos (34), después el análisis Input-Output (35) y por último la Programación Lineal (36). López Moreno (37) pone de relieve que los primeros antecedentes del conjunto de técnicas que denominamos Investigación Operativa, no radican precisamente en los

-
- (34) J. VON NEUMAN; O. MORGESTERN. -Zur theorie der Gesellschafts-
spiele. -Mathematische Annalen 100. - 1928. -Pags. 295-320. -Theory
of games and Economic Behavior. -Princeton University Press. -
Princeton, 1944.
- (35) W. W. LEONTIEF. -Quantitative Input and Output Relations in the
Economic Systems of the United States. Review of Economic
Statistics, 18, Agosto 1936. - Pags. 105-125. - The Structure of
American Economy, 1919-1929. -Harvard University Press. -
Cambridge, Mass. 1941.
- (36) G. B. DANTZIG. -Maximization of a Linear Function of Variables
Subject to Linear Inequalities, 1947. Incluido en la recopilación
dirigida por T. C. KOOPMANS, Activity Analysis of Production
and Allocation. - John Wiley and Sons. -New York 1951. -Pags.
339-347.
- (37) M. J. LOPEZ MORENO. - La llamada Investigación Operativa y
la Ciencia Económica. -Primera Reunión Científica de I. T. E. C. A.
León, 1959.

trabajos llevados a cabo durante la pasada conflagración mundial, sino en los realizados por los matemáticos Weil y Kolmogorof, por su formulación del Teorema fundamental de las pirámides convexas el primero, y por el desarrollo de los procesos estocásticos el segundo.

Después de estas primeras manifestaciones, y durante el escaso - cuarto de siglo que nos separa de la última de ellas, han surgido - multitud de técnicas (38), cuyo denominador común a la hora de contemplar su proyección en el campo de las decisiones empresariales es el siguiente:

- Permiten una representación esquematizada y abstracta de la estructura del problema, con lo que se logra un conocimiento más profundo del mismo, al ponerse de relieve las principales relaciones entre los datos y las variables configuradores de dicho - problema, así como la incidencia de las mismas. Conviene señalar aquí, de acuerdo con Bross (39), que la estructura del modelo supone una referencia para el estudio del problema, de forma tal que sus fallos nos indican en muchas ocasiones la dirección a seguir.

(38) No entramos en su estudio histórico, puesto que con ello nada aportaríamos al objetivo perseguido en esta tesis, que es su incidencia en el proceso decisional en la empresa. - A ese respecto puede verse el interesante artículo de E. J. BUENO CAMPOS, Del Método Operativo en el comportamiento económico de la empresa y un ensayo sobre los orígenes de la Investigación Operativa. -Anales de Economía. - En prensa.

(39) I. D. BROSS. -La Decisión Estadística. -Aguilar. -Madrid, 1958. Pag. 167.

- Posibilitan el paso del campo descriptivo al normativo, puesto que su formulación matemática va encaminada, no simplemente a lograr una facilidad de expresión mediante el uso del lenguaje simbólico, sino a lograr una solución óptima de la estructura representada. Con ello orientan las decisiones empresariales de una forma eficaz, sobre la base de una argumentación científica.

- Cuando la estructura del problema no está previamente determinada, sino que depende de algún acontecimiento futuro, pueden representarse a priori todas las posibles estrategias, para, llegado el momento, conocer el camino a seguir, e incluso al saber de antemano la gama de soluciones posibles, tratar de forzar el acontecimiento condicionante hacia aquella situación que conduce a la posibilidad óptima.

No es extraño que los modelos económico-empresariales construidos con la ayuda de las técnicas de la Investigación Operativa hayan sufrido críticas, puesto que sus finalidades son ambiciosas, y todo planteamiento atrevido, no está exento de riesgos y de comentarios adversos. Lógicamente todas se han centrado contra las posibilidades de representar la realidad en el modelo, argumentando que esto solo podría lograrse a través de una excesiva simplificación, o bien que no resulta tan fácil aislar los datos y variables que forman parte del mismo, ofreciendo una información cuantitativa exacta de los primeros.

Indudablemente toda abstracción de la realidad exige una simplificación de la misma, pero esto puede suponer tanto una ventaja como un inconveniente. Con ello logramos reducir el problema a su esque

leto principal, eliminamos lo accesorio y nos centramos en lo fundamental, lo cual repercute favorablemente en nuestra aprehensión del mismo. El inconveniente se deriva de que la simplificación sea excesiva, con lo que la contemplación del modelo no nos ofrece una visión reducida de la realidad, sino algo muy alejado de la complejidad de aquella. Contra esta argumentación solo cabe recurrir a la contrastación empírica, y ésta demuestra que la simplificación exigida por toda abstracción no supone obligatoriamente alejamiento de la realidad representada y que las predicciones basadas en los modelos de Investigación Operativa responden a unos supuestos perfectamente factibles. En cuanto a la necesidad de datos cuantitativos para el establecimiento de los modelos plantea, indudablemente, un problema a la organización de la empresa en sus diversas vertientes: contable financiera, administrativa, etc. Para el establecimiento de los modelos es necesaria una información, por lo que los canales por donde discurre la misma, deben estar dispuestos en forma que suministren la requerida en cada caso. Esto exige, sin duda, un replantamiento de los diversos medios que proporcionan información en la empresa, pero en modo alguno supone una dificultad insalvable. Desde luego, no puede pensarse en la elaboración de un modelo empresarial aplicando una determinada técnica de Investigación Operativa, en una empresa sin un adecuado Plan Contable, puesto que la información previa para su planteamiento sería inadecuada; ahora bien, si la planificación de la Contabilidad es tal que permite disponer de los datos adecuados en el momento preciso, el planteamiento del modelo podría llevarse a cabo prescindiendo de esta dificultad (40).

(40) Vid. A. CHARNES; W. W. COOPER. -Some Network Characterizations for Mathematical Programming and Accounting Approaches to Planning and Control. - The Accounting Review, vol. XLII, nº 1,

Cerraremos el presente comentario con el resumen que Miller y Starr hacen sobre las posibilidades de aplicación de la Investigación Operativa a la Teoría de las Decisiones Empresariales.

Son las siguientes:

- Mediante el empleo de la representación matemática se pueden manejar un gran número de estrategias.
- Cuando el ejecutivo no conoce las principales variables, los modelos de Investigación Operativa pueden ayudarle a descubrirlas.
- Cuando el ejecutivo conoce las principales variables pero no sabe como relacionarlas entre sí ni con el resultado, la Investigación Operativa puede proporcionar el análisis necesario para la resolución del problema.
- Cuando al ejecutivo no le es posible examinar las innumerables alternativas que se le presentan para poder aplicar su criterio decisivo, pueden establecerse, a menudo, modelos matemáticos que lo hagan en lugar de él. (41).

Creemos que los anteriores párrafos sintetizan con gran acierto el papel de la Investigación Operativa en el campo de las decisiones em

Enero 1967, Pags. 24-52. -En dicho artículo los autores ofrecen una muestra de las interrelaciones entre Contabilidad e Investigación Operativa apuntadas.

(41) R. D. MILLER; M. K. STARR. - Op. Cit. Pags. 115-123.

presariales, por ello no insistimos con nuevas exposiciones que no harían sino reiterar lo ya dicho.

3. - ESTRUCTURA DE LAS DECISIONES

Anteriormente hemos dicho que el planteamiento científico de las decisiones suponía la representación del problema mediante un modelo, en forma más o menos generalizada. La elaboración de dicho modelo requiere un conocimiento detallado de los componentes de las decisiones, de ahí que en este apartado nos planteemos explícitamente el análisis de dichos componentes.

3.1. Análisis de actividades

Constituye la primera etapa del proceso decisorio, y consiste en la toma de razón por parte del empresario de aquellas actividades que se ofrecen a su vista, hacia alguna de las cuales puede encaminar sus acciones y sus recursos escasos.

Tales actividades constituyen factores controlables para el empresario, es decir, que su evolución en el sistema empresarial queda bajo el control del que dirige la empresa.

Indudablemente la aprehensión de tales actividades lleva consigo el establecimiento de objetivos, aun cuando en esta primera etapa ten-

gan todavía un carácter más bien aproximado. Lo que resulta totalmente lógico es que al plantearse al empresario una nueva actividad la asocie en forma inmediata a un objetivo que pretende conseguir, aunque éste último no esté delimitado de una forma precisa y concreta.

Timms afirma que no puede hablarse de un problema sin que previamente haya un objetivo. Los problemas no son sino obstáculos que se anteponen en el logro de objetivos. "La elección de los objetivos determina los tipos de problemas que surgirán y tendrán que resolverse (42).

La importancia de los objetivos y su relación con las actividades nos lleva a plantear el problema de su jerarquización. La existencia de un objetivo en un determinado nivel de la organización plantea evidentes problemas al nivel inmediatamente inferior, puesto que a su vez éste tiene que fijarse objetivos inmediatos para resolver los citados problemas. Con esto queremos poner de manifiesto que el desarrollo de cualquier actividad exige una compatibilidad entre objetivos, no basta con que el correspondiente al último escalón de la pirámide, o sea a la Dirección General, sea deseable y factible al mismo tiempo, sino que es preciso que lo sean los objetivos que pudiéramos llamar inducidos y que corresponden a los niveles inferiores. Las posibles actividades que se ofrecen al empresario como caminos de acción a seguir, quedan reducidas a aquellas que presenten una compatibilidad clara con los objetivos que los diferentes niveles

(42) H. L. TIMMS. - Sistemas de decisión gerencial. - El Ateneo. - Buenos Aires, 1970. - Pag. 58.

de la organización han de plantearse.

Resulta de gran interés, a fin de tener una idea clara de las distintas alternativas que se ofrecen al empresario y sus posteriores posibilidades, el llevar a cabo un análisis formal de las mismas. Magee, apoyándose en el valioso instrumental de la Teoría de Grafos, introdujo el concepto de árbol de decisión que tanta utilidad tiene para este tipo de análisis. Distingue entre puntos de alternativas y puntos de decisión. A los primeros se llega como consecuencia de decisiones, pero a partir de éstos se pueden derivar diversos resultados, precisamente en función de nuevas decisiones (43).

Un árbol de decisión podría ser el que aparece en la Figura 2.

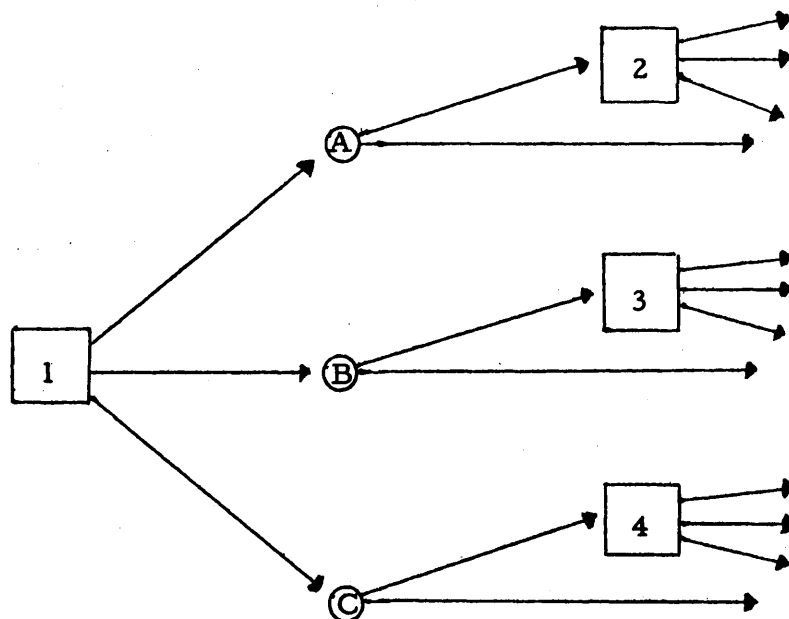


Fig. 2

(43) J. F. MAGEE. -Decision Trees for Decision Making. -Harvard Business Review, Vol 42, nº 4, Jul-Agosto, 1964. Pags. 126-138.

A través de dicho árbol se puede tener una idea clara tanto de las alternativas iniciales A, B y C, como de las implicaciones posteriores, según que se den o no determinados hechos. La elección inicial debe contar con todos estos eventos, puesto que aunque en principio la decisión A parezca la más favorable, no quiere decir que esta situación se siga manteniendo una vez examinadas sus últimas consecuencias.

El problema que indudablemente se presenta es el de que, por ejemplo, a partir de B, se siga uno u otro camino no es algo que quede dentro del control del empresario sino de circunstancias ajenas al mismo, del medio en que se mueve, pero ésto constituye ya otro de los componentes de las decisiones, al que nos vamos a referir a continuación.

3.2. El marco económico e institucional

Toda empresa desarrolla sus actividades en relación constante con el mundo que la rodea, mercado de factores (materias primas, personal, capital, etc.), mercado de salida de sus productos. A diferencia de las actividades antes examinadas que caen de lleno bajo el control del empresario, los hilos que mueven el contexto externo son ajenos en todo o en parte a él.

Estos factores caracterizadores del marco económico e institucional o, en otras palabras, del medio ambiente en que la empresa se mue-

ve son llamados frecuentemente "estados de naturaleza" (44), expresión acertada sin duda alguna, puesto que en definitiva son el reflejo de unos fenómenos naturales exteriores a la empresa (45).

Puesto que el control que el empresario ejerce sobre tales "estados de naturaleza" puede ser nulo o en todo caso parcial, ha de limitarse a la formulación de unas previsiones que expresen la probabilidad que tiene cada uno de sus factores componentes de sobrevivir o desaparecer.

La consideración de la probabilidad de que aparezca un medio ambiental u otro nos lleva a un nuevo problema, pues bien pueden existir experiencias pasadas o por el contrario carecer de ellas. En el primer supuesto las distribuciones de probabilidad son elaboradas en base de los datos relativos al pasado ofrecidos por el sistema de información de la empresa; tales distribuciones habrán de ser contrastadas posteriormente a fin de calibrar su aplicabilidad. En el segundo supuesto, en el cual no se dispone de datos del pasado para establecer la distribución de probabilidades que podamos asociar a un acontecimiento futuro, hay forzosamente que recurrir al juicio de personas familiarizadas con los factores objeto de estudio. Tales juicios (muy probable, medianamente probable, poco probable, etc.) pueden ser cuantificados y utilizados igual que las distribuciones obtenidas en el anterior supuesto. La diferencia estará en que las primeras

(44) D. W. MILLER; M. K. STARR. -Acuerdos ejecutivos e Investigación de operaciones. -Op. cit. Pags. 80-83.

(45) En relación con este tema presenta enorme interés el artículo de STAFFORD BEAR. The place of nature in Operational Research Science. -Operational Research Quaterly, Vol 13, March 1961, Pags. 61 y sigs., y la obra del mismo autor, Decision and Control. - John Wiley and Sons. -London, 1966. Pags. 283-289.

ofrecen probabilidades objetivas y las segundas subjetivas. Un ejemplo típico de utilización de las probabilidades subjetivas lo constituye el lanzamiento de un nuevo producto al mercado, cuyos "estados de naturaleza" serán los futuros niveles de la demanda, sobre los cuales no se posee experiencia pretérita alguna en que basar los cálculos, como ocurre cuando se trata de productos ya existentes.

3.3. Resultados

La combinación actividad-estado de naturaleza da lugar a que se obtenga un cierto resultado. Indudablemente, la elección de unas u - - otras actividades da lugar a la obtención de distintos resultados, pero hay que tener en cuenta que el ejercicio de tal actividad tiene que ser llevado a cabo en un estado de naturaleza más o menos favorable de ahí la incidencia de ambos en los resultados esperados.

En una visión simplista pudiera parecer que ha de resultar fácil la determinación de tales resultados, pero a poco que se profundice pueden encontrarse dos serias dificultades. La primera consiste en que habitualmente pueden seguirse diversos criterios para calibrar los resultados de una operación (volumen de ventas, beneficios, rapidez en la recuperación de liquidez, etc.) y la segunda en el elevado coste a que puede dar lugar el conocimiento detallado en términos cuantitativos de todos los componentes de la decisión. La primera circunstancia expuesta no supone sino otro elemento más de coste del análisis de la decisión, por lo que centrándonos en este problema, podemos decir que la mayor o menor profundidad de su estudio puede estar -

presidida por el criterio coste-beneficio. Un conocimiento más detallado exigirá un incremento del primero que puede encontrar una contrapartida favorable en el incremento del segundo; cuando ésto no ocurra, o sea, cuando la mayor información supone inclinar la balanza del lado de los costes, indudablemente el empresario seguirá prefiriendo carecer de ella.

Ahora bien, ya sea científica o intuitivamente el empresario debe examinar los componentes antes aludidos. Hasta donde sea posible debe emplearse la racionalidad y a partir de ahí puede completarse el análisis con la intuición y el buen juicio, cosa que a nuestro modo de ver no anula en absoluto el valor de lo expuesto hasta aquí.

3.4. Criterios de decisión

Para elegir entre las distintas actividades que se ofrecen a la consideración del empresario se necesita una regla de decisión, de forma tal que seleccione la óptima para sus intereses.

El problema empieza a plantearse cuando queremos matizar el término "actividad óptima". Anteriormente hemos visto que el desarrollo de tales actividades tenía que contar con un medio exterior a la empresa y cuyo conocimiento exacto era practicamente imposible, había entonces que recurrir a su descripción probabilística, pero con ésto no acababan las dificultades ya que ésta podía tener un sustento objetivo o subjetivo. Ante este estado de cosas no tiene nada de extraño que los criterios para seleccionar el óptimo sean diversos según que

la decisión haya de ser tomada en estados de certidumbre, en estados de riesgo o en estados de incertidumbre.

En el primer caso, o sea, en estado de certidumbre, la actividad elegida será aquella que reporte mayor compensación, el problema es - que ésta, como ya dijimos, puede ser medida teniendo en cuenta diferentes puntos de vista, pero lógicamente éstos serán función de diversos objetivos, por tanto habrá que elegir entre ellos (por ejemplo, - mayor beneficio con liquidez a largo plazo o menor beneficio con liquidez inmediata) el que tenga carácter prioritario.

Caso de que las decisiones hayan de ser tomadas en estado de riesgo, el problema es mayor, puesto que, supuesto definido el criterio para establecer los resultados, nos encontramos con que cada posible actividad no tiene un solo resultado asociado, sino tantos como estados de naturaleza posibles. Como en el caso de riesgo existe una experiencia pasada y por tanto unas probabilidades objetivas, el criterio más lógico es el de seleccionar la actividad cuya esperanza matemática de los resultados esperados sea superior.

El verdadero problema se plantea en los casos en que se opera en estado de incertidumbre, puesto que en tal caso no existen experiencias pasadas sobre las que apoyarse. En esta circunstancia no hay ningún criterio mejor que otro para la elección de estrategias, cada uno de los que resulta posible manejar se apoya en una base lógica que lo justifica. La elección de uno u otro criterio entonces depende de la política que pretende seguir la empresa. Expondremos a continuación muy sucintamente cada uno de estos criterios.

El primero, de tipo pesimista, lo sugirió Abraham Wald (46) y se llama "maximin", consistente en elegir la estrategia que proporcione mayores resultados contando con el "estado de naturaleza" más favorable.

Posteriormente, Leonid Hurwicz (47) propuso una variante de este criterio, puesto que a su juicio la naturaleza no tiene por qué mostrarse siempre malévolas. Su criterio no consiste en pasarse totalmente al campo optimista suponiendo el "estado de naturaleza" más favorable, sino que parte de asignar a éste una probabilidad o coeficiente de optimismo, e igualmente al "estado de naturaleza" más desfavorable, siendo la suma de ambas igual a la unidad. Después calculará, basándose en tales probabilidades, la esperanza matemática de los resultados esperados para cada una de las posibles actividades y elegirá la correspondiente a los mayores resultados. Más tarde, Luce y Raiffa (48) sugirieron una forma de determinar el coeficiente de optimismo mencionado en aquellos casos en que quien ha de tomar la decisión lo desconozca.

(46) A. WALD. - A New Foundation of the Method of Maximum Likelihood in Statistical Theory. - Cowles Commission for Research in Economics. Report of the Sixth Annual Research Conference on Economics and Statistics, 1940.

(47) L. HURWICZ. - Optimaly Criteria for Decision Making under Ignorance. - Statistics, nº 370, 1951.

(48) R. D. LUCE; H. RAIFFA. - Games and Decisions. - John Wiley and Sons. - New York, 1957. Pag. 283.

Por su parte, Savage (49) sugirió un criterio completamente distinto. Se basa en que después de ser tomada la decisión y conocido ya, por tanto, el "estado de naturaleza", el decisor experimenta una aflicción igual a la diferencia entre los resultados realmente obtenidos y los que habría conseguido si hubiese sabido el estado natural que habría de producirse. Su propuesta no consiste en escoger la estrategia productora de una menor aflicción, sino que a partir de este punto sigue el criterio "minimax" que supone una variante del de Wald. Selecciona la aflicción máxima para cada estrategia y elige luego la menor entre todas ellas.

Por último, vamos a referirnos al criterio más antiguo en el tiempo, pues data de hace unos 2.500 años, y es conocido con el nombre de criterio de Laplace. Su planteamiento es el más sencillo de todos y está basado en suponer que todos los "estados de naturaleza" posibles son equiprobables. La estrategia seleccionada será aquella para la que la esperanza matemática de los resultados esperados sea mayor. Este criterio está en conexión con el principio de Bayes, quien enunció la hipótesis de que cuando no tenemos o no conocemos ningún motivo que dé lugar a que las probabilidades sean distintas, debe suponerse que son iguales; claro que igual podía enunciarse el principio al contrario con idéntica justificación.

(49) L. J. SAVAGE. - The Theory of Statistical Decision. - Journal of the American Statistical Association. Nº 46, 1951. Pags. 55-67

3. 5. Perspectiva temporal

Las decisiones del empresario están siempre conectadas a una perspectiva temporal, a una relación con el futuro. Que duda cabe que la previsión más deseable sería aquella que abarcara un mayor período temporal, a fin de poder interpretar y predecir durante un plazo lo suficientemente amplio como para garantizarse una eficacia en la acción futura, pero hay que tener en cuenta que la incertidumbre crece cuanto más nos alejemos. Las experiencias pasadas pueden servir para explicar el futuro inmediato no para el mediano, ya que a tal plazo las circunstancias pueden variar totalmente.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que las decisiones han de ser tomadas a diferentes niveles y que cada uno de ellos persigue diferentes objetivos, cuya limitación crece cuanto más bajo es el nivel orgánico. Indudablemente que no puede ser idéntica la perspectiva temporal considerada a niveles inferiores que a los superiores, ésta crecerá con el nivel.

Señalar un límite a este plazo no es tarea fácil, puesto que éste será función de los diferentes tipos de problemas sometidos a examen. Una característica bastante generalizada hoy día es que las decisiones para resolver un problema no se toman de una vez para siempre, sino que ese problema se divide, por así decirlo, en subproblemas, posiblemente localizados en diferentes períodos de tiempo. Estamos entonces frente a decisiones de carácter secuencial, tema que constituye el objeto principal de nuestra tesis y que abordaremos con todo detalle a partir de este momento.

CAPITULO II

LOS PROCESOS SECUENCIALES

DE DECISION

CAPITULO II. - LOS PROCESOS SECUENCIALES DE DECISION

1. CARACTERISTICAS GENERALES

Como ya hemos puesto de manifiesto una de las características más comunes de la empresa de nuestros días, es la de que se enfrenta con problemas interrelacionados entre sí, tanto en lo que se refiere a su aspecto funcional como en su vertiente temporal. Un mismo problema puede plantearse repetidamente durante un número determinado o indeterminado de períodos de tiempo, produciéndose, lógicamente, un encadenamiento de las variables configuradores del mismo.

La actividad empresarial tiene por objeto cubrir una determinada etapa del proceso económico, pero no con un carácter puramente ocasional, sino en unas condiciones de permanencia, de ahí el enfrentamiento período tras período con una serie de problemas que operan en el mismo contexto, condicionados por la situación de la empresa en el área específica de referencia, y condicionantes de dicho área en períodos venideros.

Las decisiones a tomar por el empresario no pueden ser estudiadas bajo una consideración aislada del problema, sino teniendo en cuenta su evolución dinámica. Más que con una decisión, el empresario ha de enfrentarse con un "proceso secuencial de decisión" en el que la relativa a cada período es, como antes dijimos, condicionada por la situación pasada y condicionante de la futura.

Aislando artificialmente un eslabón de la cadena formada por un proceso secuencial de decisión, y representado gráficamente el mismo mediante una caja negra, obtenemos la Figura 1.

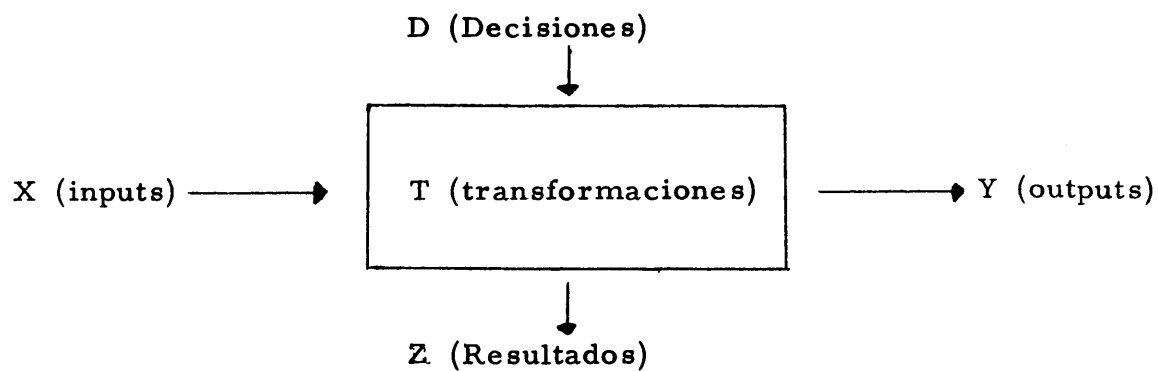


Fig. 1

Pueden apreciarse en dicha figura cinco factores característicos:

1. Un estado de entrada X que da toda la información precisa sobre los inputs en la caja negra. X será llamado estado inicial puesto que da una descripción del sistema al comienzo del período.

2. Un estado de salida Y que da toda la información sobre los outputs de la caja. Y es llamado estado final, puesto que da una descripción del sistema al final del período.
3. Una variable de decisión D que controla la operación que tiene lugar en el interior de la caja negra.
4. Un resultado periódico Z que mide la utilidad de la caja como una única función de valor de los inputs, decisiones y outputs.
5. Una transformación periódica T , que expresa cada componente del estado de salida Y como una función del estado de entrada X y la decisión D ¹.

De acuerdo con lo anterior podemos señalar como características fundamentales de los mencionados procesos de decisión las siguientes².

- En cada período tenemos un sistema caracterizado en cualquiera de sus posibles estados por un pequeño conjunto de parámetros: Las "variables de estado".
- En cada posible estado del proceso tenemos que elegir entre una gama de decisiones factibles.
- El efecto que produce una decisión es una transformación de las va

(1) G. L. NEMHAUSER. - Introduction to Dynamic Programming. - John Wiley and Sons, New York, 1966. - Pags. 22-23

(2) R. BELLMAN. - Dynamic Programming. - Princeton University Press. - Princeton, New Jersey, 1957. - Pags. 81-82.

riables de estado.

- La historia pasada del sistema no tiene importancia al determinar las acciones futuras, puesto que aquella se encuentra subsumida en el estado actual del referido sistema.
- El propósito del proceso es optimizar -maximizar o minimizar- alguna función de las variables de estado.

No puede decirse que esta descripción resulte excesivamente concreta, más bien pudiera calificársela de todo lo contrario, es decir, de un tanto vaga, pero ello es obligado por la multitud de peculiaridades que pueden confluir en los procesos estudiados, cuyo espíritu de aproximación es, desde luego, más significativo que la estrechez de una rígida formulación.

2. - CLASIFICACION DE LOS PROCESOS SECUENCIALES

Vamos a tratar de agrupar tales características para poder abordar - con mayor detalle los procesos resultantes. Queremos significar sin embargo, que tal clasificación no tiene un carácter exhaustivo, puesto que deliberadamente abandonamos de momento una categoría marcadamente importante de los mismos y que será abordada en un Capítulo posterior. Con tales reservas podemos efectuar tal clasificación, atendiendo a:

- La forma en que se conoce su evolución.

- El horizonte temporal al que se extienden
- Que el conjunto de posibles valores que puedan tomar las variables de estado sean o no numerables.

Atendiendo al primer punto los procesos pueden ser deterministas o estocásticos, según que su evolución dependa única y exclusivamente de las decisiones tomadas o que intervenga también el azar. Desde el segundo punto de vista pueden ser limitados o ilimitados según se señale o no una concreta duración al horizonte temporal contemplado. Por último, desde la tercera perspectiva, pueden resultar discretos o continuos según que sean o no numerables los posibles valores que puedan tomar las variables de estado.

Para el estudio que nos planteamos tienen mayor importancia los procesos discretos, puesto que las decisiones a tomar en las distintas vertientes de la Economía de la Empresa hacen referencia a variables de tal carácter, como más adelante podremos apreciar, por lo que serán estos procesos discretos los examinados con mayor detalle³.

3. PRECISIONES TERMINOLOGICAS

Ahora bien, antes de entrar en su estudio es necesario precisar la terminología a emplear:

(3) I.GUMOWSKI; CH.MIRA. - L'optimisation: La théorie et ses problèmes. -Dunod. - Paris, 1970. - Pag. 239.

- Una política es una regla para tomar decisiones, la cual da lugar a una secuencia de decisiones. Una política óptima es una política que optimiza -maximiza o minimiza- una función predeterminada - de las variables de estado.
- La función objetivo es precisamente la función predeterminada de las variables de estado que se trata de optimizar siguiendo una política óptima.

La determinación de la política óptima está basada en la aplicación de un principio intuitivo conocido bajo el nombre de PRINCIPIO DE OPTIMIDAD, que Bellman enuncia como sigue⁴:

"Una política óptima tiene la propiedad de que cualesquiera que sean el estado y las decisiones iniciales, aquellas que quedan por tomar deben constituir una política óptima con relación al estado resultante de la primera decisión"⁵.

La ecuación funcional que gobernará cada proceso se obtiene como consecuencia del principio enunciado, y mediante la misma se podrá ir diseñando la política que optimiza la función objetivo, o sea la

(4) GUMOWSKI y MIRA, en su obra citada, consideran a la Programación Dinámica como un caso particular de la formulación que Carathéodory realizó en 1905 para el tratamiento de los problemas de optimización, Pags. 245-246.

(5) R. BELLMAN. - Op. Cit. Pag. 83. - Vid. también: Adaptive Control Processes: A guided tour. - Princeton University Press. - Princeton, New Jersey, 1961. - Pag. 57.

política óptima⁶.

4. PROCESOS DISCRETOS

Ya dijimos anteriormente que estos procesos son los que presentan mayor interés dentro del sistema de la empresa, pues la práctica totalidad de las decisiones que han de ser tomadas dentro del mismo - se refieren a variables perfectamente numerables. Diferenciaremos dichos procesos según sean deterministas o estocásticos y dentro de ellos limitados o ilimitados.

4.1. Procesos discretos deterministas

Son aquellos cuyas variables de estado son numerables y cuya evolución depende únicamente del decisor. Examinaremos los dos casos - que pueden plantearse según sea o no limitado el horizonte temporal objeto de planificación.

(6) El "principio de maximización" de PONTRYAGIN guarda una estrecha relación con el método de Programación Dinámica de BELLMAN, si bien es más restringido que éste. Vid. L.S. PONTRYAGIN; V.G. BOL'TANSKII; R.S. GAMKRELIDZE; E.F. MISHCHENKO. - The Mathematical Theory of Optimal Processes. - Pergamon Press Ltd. New York, 1964, Pags. 8-71.

4.1.1. Procesos discretos deterministas limitados

El estado del sistema en cualquiera de los períodos de tiempo considerados es descrito por el vector M -dimensional $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ comprendido en la región R . Sea $T = \{T_d\}$ un conjunto de transformaciones, donde d forma parte de un conjunto H que puede ser finito, enumerable y bajo control continuo o una combinación de conjuntos de este tipo, con la propiedad de que $x \in R$ implica que $T_d(x) \in R$ para todo $d \in H$, lo cual equivale a decir que cualquier transformación T_d es una aplicación de R en si mismo.

Una política para el proceso estudiado consiste en una selección de N transformaciones $T = (T_{d_1}, T_{d_2}, \dots, T_{d_N})$ que produce sucesivamente la secuencia de estados:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= T_{d_1}(x) \\
 x_2 &= T_{d_2}(x_1) \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_N &= T_{d_N}(x_{N-1})
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

donde las transformaciones son elegidas de forma tal que se optimice la función objetivo Z , la cual al ser determinada por una política óptima, será una función del vector inicial x y del número de estados N , con lo que obtendremos la siguiente función auxiliar básica:

$$(2) \quad f_N(x) = \underset{x}{\text{Opt}} Z(x_N)$$

expresiva de que el estado N es alcanzado comenzando con un estado inicial x , y siguiendo después una política óptima, y en la que el símbolo "Opt" significa, según el problema concreto de que se trate, uno de los operadores max. o min.

La secuencia anterior es definida por $N = 1, 2, \dots$, y por $x \in R$.

El establecimiento de la función anterior representa un paso fundamental en el análisis del "principio de optimidad". Para resolver el problema planteado, que parte de un vector inicial x y sigue un proceso secuencial de un número definido de estados (N), tendremos en cuenta el conjunto total de problemas que provienen de asignar valores arbitrarios a x y de tomar un número arbitrario de estados.

El proceso original ha sido incluido de esta forma, dentro de una familia de procesos similares. En lugar de atender a la determinación de las características de una política óptima para un proceso aisladamente considerado, trataremos de deducir las propiedades comunes poseidas por los miembros de la familia de procesos, para un conjunto de políticas óptimas.

Podemos mostrar ahora graficamente el desarrollo del proceso estudiado en la Figura 2.

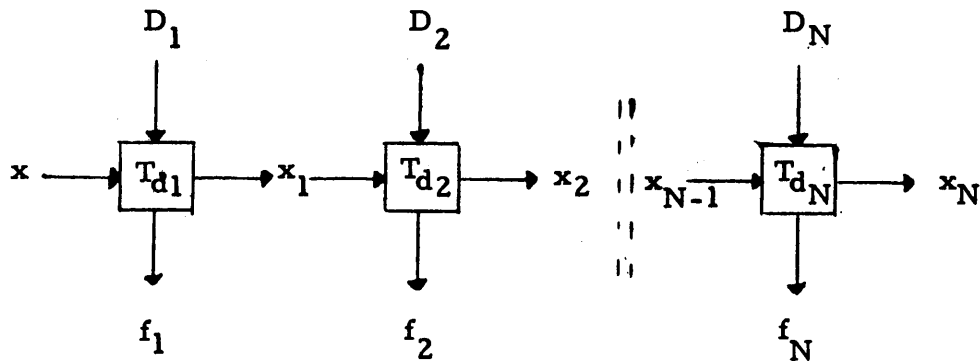


Fig. 2

En dicha figura puede apreciarse el efecto de las decisiones tomadas (política) sobre las transformaciones y por lo tanto sobre los sucesivos estados finales, así como sobre los resultados acumulativamente alcanzados con cada una de ellas.

Para obtener una relación de recurrencia que ponga en conexión a los miembros de la secuencia $f_N(x)$ emplearemos el "principio de optimidad". Supongamos que la transformación elegida como resultado de nuestra primera decisión es T_d , con lo que obtenemos un nuevo vector de estado $T_d(x)$. El valor máximo de la función objetivo para los siguientes $(N - 1)$ estados es, por definición:

$$(3) \quad f_{N-1}(T_d(x))$$

Continuaremos de forma tal que si deseamos maximizar el valor de la función objetivo correspondiente al total de los N estados, d debe aho-

ra ser elegido igual que para maximizar el valor de la función objetivo correspondiente al estado $(N - 1)$. El resultado es la relación de recurrencia básica:

$$(4) \quad f_N(x) = \text{Max}_{d \in H} f_{N-1}(T_d(x))$$

para $N \geq 2$, con

$$(5) \quad f_1(x) = \text{Max}_{d \in H} Z(T_d(x))$$

Es conveniente tener presente que mientras $f_N(x)$ es única, el d que da lugar a la maximización puede no serlo, con lo que podemos afirmar que puede haber varias políticas conducentes al valor óptimo de Z .

4.1.2. Procesos discretos deterministas ilimitados

En este caso, la secuencia $\{f_N(x)\}$ es reemplazada por una única función $f(x)$, el valor total de la función objetivo, siguiendo una política óptima, comienza en el estado x , y la relación de recurrencia es reemplazada por la ecuación funcional.

$$(6) \quad f(x) = \text{Max}_d f(T_d(x))$$

Ahora bien, conviene tener presente que en este caso la secuencia de transformaciones es ilimitada, con lo que el valor de la función objetivo bien pudiera ser infinito. Podríamos considerar como óptima la política que diera lugar a un resultado tal, pero, evidentemente, carecería de interés, puesto que tal circunstancia -crecimiento ilimitado de la función objetivo- excluiría toda comparación entre las políticas.

Pudiera darse el caso de que se produjera una convergencia por reducción del dominio de decisión, ésto es, que a partir de un momento determinado, el conjunto de los posibles estados del sistema se redujera a un punto y que precisamente el valor de la función objetivo en ese punto fuera cero.

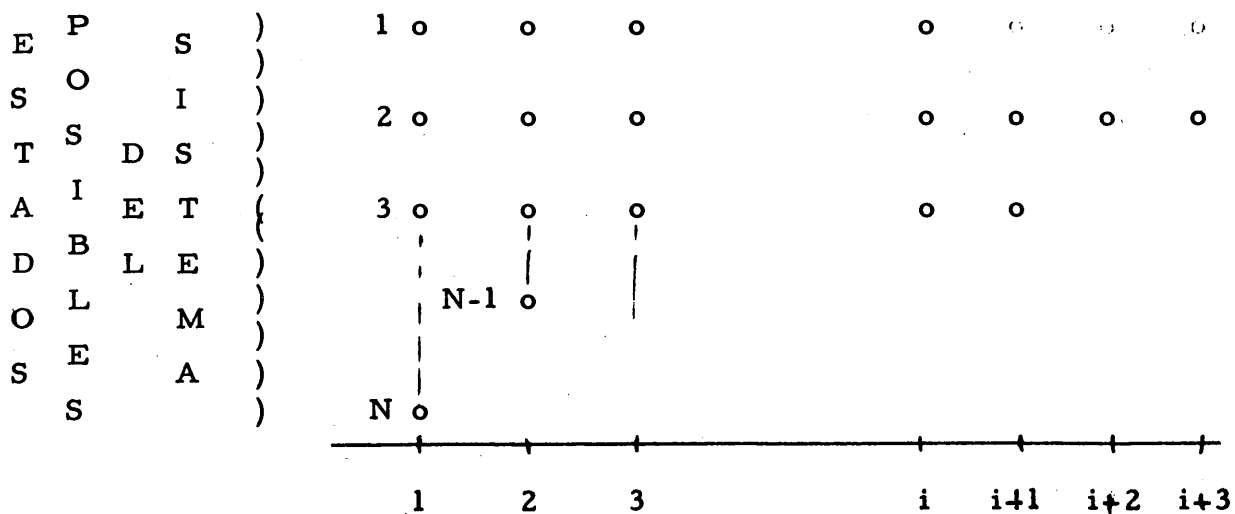


Fig. 3

Ni que decir tiene que este tipo de procesos representan un caso muy particular de los que estamos considerando en este epígrafe, ya que lo más frecuente es que el valor de la función objetivo se haga infinito -

cuando el número de períodos aumenta indefinidamente, con lo que nos encontraremos con las dificultades antes apuntadas.

Afortunadamente existe un método que permite superar este obstáculo, el cual parecería un tanto artificial si no estuviera justificado por consideraciones de carácter económico. Nos estamos refiriendo a la ac--tualización, cuya validez en este contexto no nos planteamos, por haber sido suficientemente estudiada por autores tales como Massé⁷ y - Lesourne⁸.

La aplicación de este método, con el consiguiente paso al límite para procesos tales como los estudiados, nos permitirá efectuar una compa--ración entre los distintos valores que tomarán las funciones objetivo de las distintas políticas, si bien los mismos estarán condicionados al tipo de actualización i utilizado. No obstante, es conveniente señalar que ésto no presenta grandes dificultades, puesto que en definitiva, dicha tasa de actualización no es sino un reflejo de las circuns--tancias económicas vividas en el momento en que el problema es some--tido a estudio.

Existe también otro método susceptible de ser aplicado en estos casos, sobre todo cuando los períodos que separan una decisión de otra son - bastante cortos, pues en ese caso el tipo de actualización tiene que -

(7) P. MASSE. - Les Choix des Investissements. - Dunod. París, 1959. (Hay traducción española de Sagitario. Barcelona, 1963).

(8) J. LESOURNE. - Technique Economique et Gestion Industrielle. - Dunod. París, 1960. (Existe traducción española de Aguilar. Madrid 1964).

ser forzosamente muy bajo. Tal método es el del valor medio por período, consistente, como su nombre indica, en hallar el valor medio de la función objetivo para cada uno de los períodos estudiados. No hace falta entrar en muchas consideraciones para poder afirmar que tal criterio llega a conclusiones idénticas que el del valor total de dicha función objetivo para el caso de procesos finitos, lo que nos permite su utilización con las consiguientes operaciones de paso al límite para procesos tales como los estudiados⁹.

4.2. Procesos discretos estocásticos

Las variables de estado continúan siendo numerables pero las transformaciones que dan lugar a los sucesivos estados del sistema no solamente dependen del decisor, sino también de elementos aleatorios ajenos al mismo. Como en el caso determinista vamos a tratar tanto los procesos que contemplan un horizonte limitado como aquellos otros relativos a un horizonte ilimitado.

4.2.1. Procesos discretos estocásticos limitados

La representación gráfica que podría hacerse de tales procesos es la que mostramos en la Figura 4.

(9) R. HOWARD ha indicado un algoritmo para el cálculo del valor medio por período en aquellos casos en que las sucesivas transformaciones de los posibles estados del sistema se ajusten a una cadena finita de Markov. Vid. *Dynamic Programming and Markov Processes*. The Technology Press of the M. I. T. y John Wiley. New York, 1960.

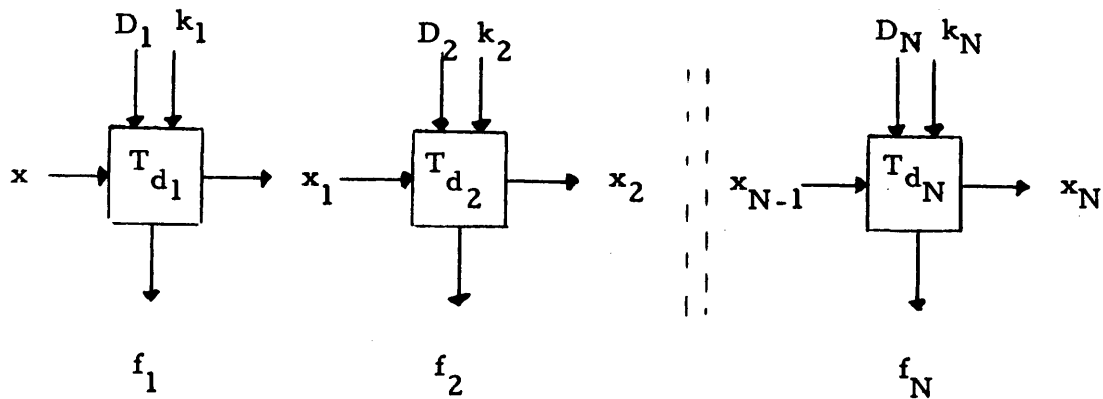


Fig. 4

Cada decisión no da lugar a una transformación como en el caso determinista antes contemplado, sino que se convierte ahora en una distribución de transformaciones. El vector inicial x es convertido en este caso en un vector estocástico k con una función de distribución asociada $d G_d(x, k)$ que depende de x y de la decisión d .

Podemos llegar a dos distintos tipos de procesos según que supongamos que k es conocido después de que la decisión ha sido tomada y antes de que lo sea la próxima (procesos decisión-azar), o bien que partamos de la hipótesis de que solamente es conocida la función de distribución (procesos azar-decisión). Este segundo tipo de procesos son funcionales, puesto que implican el concepto de función de función.

En el caso de procesos estocásticos resultaría totalmente falto de significado hablar de maximizar el valor de la función objetivo, puesto que el mismo obedecerá a causas que caen fuera del control del decisor. Más bien debe convenirse la medición del valor de una política en términos asociados al criterio probabilístico manejado para la consideración de la misma, cual es el de su esperanza matemática. f_N será

pues, en este caso, el valor esperado de la función objetivo, definida en forma análoga a (2). Si k es un estado que resulta de alguna transformación inicial T_d , el valor esperado de la función objetivo de los pasados $N-1$ estados será $f_{N-1}(k)$, supuesto el empleo de una política óptima. El valor esperado como resultado de la elección inicial de T_d es:

$$(7) \quad \int_{k \in R} f_{N-1}(k) d G_d(x, k)$$

En consecuencia la relación de recurrencia para la secuencia $\{f_N(x)\}$ será:

$$(8) \quad f_N(x) = \text{Max}_{d \in H} \int_{k \in R} f_{N-1}(k) d G_d(x, k)$$

para $N \geq 2$ y

$$(9) \quad f_1(x) = \text{Max}_{d \in S} \int_{k \in R} Z(k) d G_d(x, k).$$

4.2.2. Procesos discretos estocásticos ilimitados

La relación funcional anterior queda convertida ahora, al introducir

una nueva perspectiva en cuanto al horizonte temporal contemplado, en la siguiente:

$$(10) \quad f(x) = \text{Max}_{d \in H} \int_{k \in R} f(k) d G_d(x, k)$$

Los criterios del valor total actual o del valor medio por período, son susceptibles de ser aplicados aquí, igualmente que en los procesos deterministas discretos ilimitados, si bien en su consideración estocástica, por lo que en este caso debe hablarse del criterio de la esperanza matemática del valor total actual y del criterio del valor medio por período de la esperanza matemática del valor¹⁰.

5. PROCESOS CONTINUOS

A pesar de que no son estos procesos los más representativos de las decisiones tomadas dentro del sistema empresarial, según ya pusimos de manifiesto, vamos a hacer una breve mención de los mismos. Las variables de estado correspondientes no son numerables y al igual que los discretos pueden ser calificados como deterministas o estocásticos y limitados o ilimitados.

(10). A. KAUFMANN; R. CRUON. - La Programmation Dynamique. -Dunod Paris, 1964. (Hay traducción española de CECSA. - México, 1967).

5.1. Procesos continuos deterministas

Son aquellos cuyas variables de estado no son numerables y cuya evolución depende tan solo del decisor. Examinaremos, de acuerdo con el horizonte temporal objeto de planificación, dos casos según sea éste limitado o ilimitado.

5.1.1. Procesos continuos deterministas limitados

Existen algunos procesos en los que las decisiones han de ser tomadas en cada punto de un espacio continuo, tales como un intervalo de tiempo. Llamaremos:

$$(11) \quad f(x, T)$$

al valor de la función objetivo en un intervalo $(0, T)$ que comienza con el estado inicial x y sigue una política óptima.

Aunque el proceso debe considerar todas las posibles elecciones en cada punto t comprendido en el intervalo $(0, T)$, es preferible empezar eligiendo políticas, o sea funciones, relativas a intervalos, para después pasar al límite, como si esos intervalos se redujeran a puntos.

La relación de recurrencia básica será en este caso:

$$(12) \quad f(x, L + T) = \text{Max}_{D [0, L]} f(x_D, T)$$

en la que el máximo es hallado teniendo en cuenta todas las decisiones posibles en el intervalo $0, L$

5.1.2. Procesos continuos deterministas ilimitados

Tal y como apuntamos anteriormente, las dificultades se centran ahora en la existencia o no de un máximo de la función objetivo, pues caso que tenga lugar un crecimiento ilimitado de la misma, no existe posibilidad de establecer comparaciones entre las distintas políticas, con lo que no habría forma de calificar una como óptima.

Puesto que este problema ya ha sido tratado y expuestos los métodos existentes para solucionarlo, vamos simplemente a exponer la relación de recurrencia básica para estos procesos como una variante de la de los anteriores, pues dada su actual consideración de ilimitados, L ha de tender a cero, luego

$$(13) \quad f(x, L+T) = \underset{D}{\text{Max}} (x_D, T)$$

Es de hacer notar que en estos casos puede a veces parecer que el problema está resuelto por haber encontrado un máximo, y ser éste simplemente un máximo relativo, cuando en definitiva es el máximo absoluto el buscado. Para evitarlo basta con que los valores dados a L sean efectivamente reducidos¹¹.

(11) R. E. BELLMAN; S. E. DRELFUS. - La Programmation Dynamique et ses applications. - Dunod, París, 1965. - Pags. 88-89

5.2. Procesos continuos estocásticos

Constituyen sin duda una interesante cuestión dentro del contexto dinámico examinado. Ahora bien, dado que su formulación general requiere un tratamiento riguroso en extremo y que, de otra parte, no van a ser objeto de aplicación en la gestión de los distintos subsistemas de la empresa, creemos poco interesante el enfrascarnos en tal exposición¹².

6. ESQUEMA GENERAL PARA EL CALCULO DE UN PROGRAMA DINAMICO

Cada uno de los distintos procesos examinados anteriormente presenta características diferenciadas en los aspectos calculatorios. Ahora bien, como el problema que nos hemos planteado no consiste en desmenuzar toda esta serie de peculiaridades, sino en ofrecer una visión de conjunto previa, que sirva de base para poder luego examinar su aplicabilidad en la gestión de la empresa, vamos a referirnos a los aspectos más generales que presenta el cálculo de un programa dinámico.

Supongamos la función objetivo siguiente:

$$(14) \quad f_n(x_n) = \underset{D_n}{\text{Max}} V_n(x_n, D_n)$$

(12) El propio BELLMAN (Vid Dynamic Programming. Op. Cit Pag. 87) así lo reconoce explícitamente y tan solo examina en la obra mencionada algún caso particular de dichos procesos (Vid. Pags. 222-242).

en la que x_n es la variable de estado y D_n la variable de decisión.

Para $n = 1$ tendremos

$$(15) \quad V_1(x_1, D_1) = C_1(x_1, D_1)$$

y para $n = 2, \dots, N$, esta otra:

$$(16) \quad V_n(x_n, D_n) = C_n(x_n, D_n) + f_{n-1}(x_{n-1})$$

siendo:

$$(17) \quad x_{n-1} = t_n(x_n, D_n)$$

El ordinograma de la Figura 5 ilustra el esquema general de cálculo a seguir. Las instrucciones contenidas en los rectángulos de líneas continuas hacen referencia a los cálculos, las que están en círculos guardan relación con el ajuste del subíndice n y las contenidas en rombos plantean cuestiones alternativas. De otra parte, los rectángulos de líneas discontinuas representan almacenes de información, que se obtiene como resultado de las operaciones de cálculo antes mencionadas, y cuyo traslado se refleja por líneas discontinuas. Aquellas otras líneas discontinuas que parten de los almacenes de información eviden-

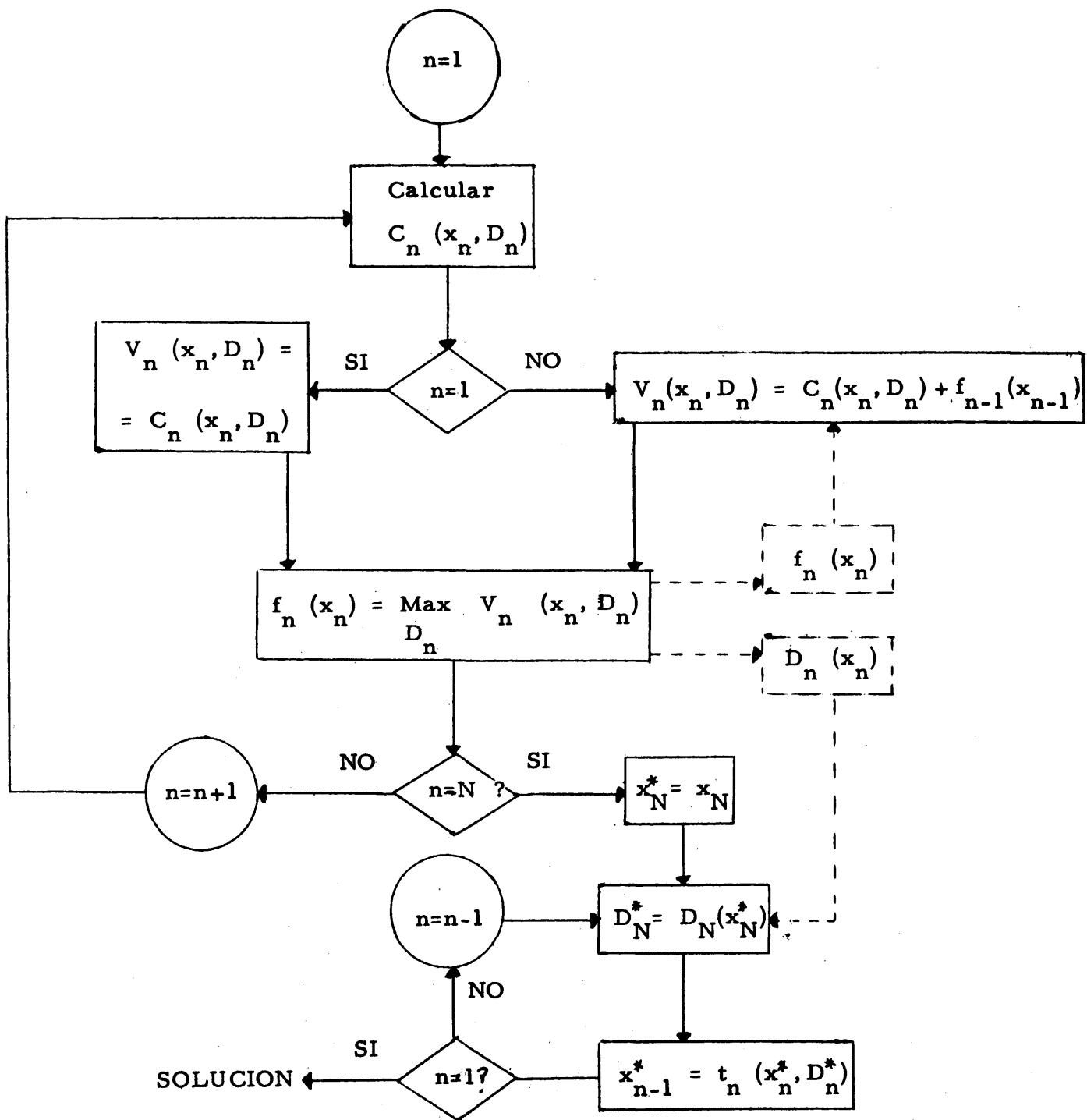


Fig. 5

cian el uso de la misma para otros cálculos posteriores.

Se comienza con $n = 1$ y se calcula $C_1(x_1, D_1)$. Puesto que $n = 1$, $V_1(x_1, D_1) = C_1(x_1, D_1)$. El paso siguiente consiste en aplicar la ecuación (13) para obtener $f_1(x_1)$ y $D_1(x_1)$. Ambas son almacenadas para futuros cálculos. Como $n \neq N$ incrementamos n en una unidad, haciendo $n = 2$ y calculando $C_2(x_2, D_2)$. A continuación determinamos V_2 según la ecuación (16), sumando C_2 y f_1 . El máximo de V_2 con respecto a D_2 nos dará $f_2(x_2)$ y $D_2(x_2)$ que almacenamos para futuros cálculos. Continuaremos de esta forma para $n = 3, \dots, N$, con lo que llegaremos a obtener $f_N(x_N)$ y $D_N(x_N)$.

El próximo paso consiste en determinar los valores óptimos de las variables de estado x_n^* ($n = 1, \dots, N-1$) y las decisiones óptimas D_n^* ($n = 1, \dots, N$). En este momento hemos alcanzado el punto del ordinograma en el que, por vez primera, la respuesta a la pregunta, "¿Es $n = N$?" ha sido sí. Si suponemos que existe un valor predefinido para x_N que representamos por x_N^* , D_N^* es obtenida en forma inmediata aplicando la información contenida en el almacén de funciones: $D_N(x_N)$. Después x_{N-1}^* es calculada a partir de $x_{N-1}^* = t_N(x_N^*, D_N^*)$. Puesto que n no es igual a uno, calculamos D_{N-1}^* a partir de x_{N-1}^* y de la función almacenada $D_{N-1}(x_{N-1})$. Cuando la contestación a la pregunta "¿Es $n = 1$?" es sí, hemos completado la solución óptima.

CAPITULO III

SISTEMAS DE GESTION

CAPITULO III. - SISTEMAS DE GESTION

1. INTRODUCCION

La Teoría de Sistemas puede ser considerada como una extensión lógica de la Teoría de la Decisión, puesto que las decisiones dan lugar a una serie de acciones, que han de ser desarrolladas, como hemos visto, dentro de la empresa y en conexión constante con el medio ambiente que la rodea.

La empresa supone el desarrollo de un conjunto de funciones, que son llevadas a cabo dentro del marco de una organización. Cada una de ellas guarda relación con las restantes, brindan y reciben mutuamente una valiosa información que permite que se desarrollen en forma más acertada.

Ahora bien, no cabe pensar en compartimentos estancos en el seno de la empresa; funciones, informaciones y decisiones han de ser enfoca-

das, no aisladamente, sino como integrantes de un todo que es la empresa. Esta concepción es precisamente la que ofrece la Teoría de -
Sistemas¹ cuya aplicación al campo empresarial es tratada por un sin-
fín de autores cada día en forma más extensa y detallada².

Nosotros no pretendemos una exposición acabada del tema, sino simple-
mente sentar unos puntos de apoyo, para llegar a los "sistemas de --
gestión" de mayor relevancia en la empresa, y, posteriormente, exami-
nar algunas de las decisiones secuenciales que tienen lugar dentro de -
su campo de acción.

(1) Su primer formulador fue L. BERTALANFFY en su artículo, Gene-
ral System Theory: A New Approach to Unity of Science. - Human
Biology, December 1951, Pags. 303-361.

(2) Entre los trabajos más conocidos, pueden ser destacados:

K. E. BOULDING: -General Systems Theory. - The Skeleton of Science.
Incluído en: Management Information (A Quantitative Accent) dirigi-
do por T.H. WILLIAMS y C.H. GRIFFIN. - R.D. Irwin, Inc. - Home-
wood. Illinois, 1967. - Pags. 602-613.

S. L. OPTNER. - Análisis de sistemas para empresas y solución de
problemas industriales. Diana S.A. - México, 1968.

T. R. PRINGE. - Information Systems for Management Planning and
control. - R. D. Irwin, Inc. Homewood. Illinois, 1966.

R. A. JOHNSON; F. E. KAST; J. E. ROSENZWEIG. - Teoría, Integra-
ción y Administración de Sistemas. - Limusa-Wiley. - México.
1966.

2. - SISTEMAS Y SUBSISTEMAS

Empezaremos preguntándonos ¿que es un sistema?. La multitud de definiciones dadas hace difícil realizar una síntesis de las mismas. Timms nos ofrece una muy simplificada pero realmente poco aclaratoria, puesto que nos dice que un sistema puede concebirse "como un ente que engloba partes interrelacionadas llamadas subsistemas"³. La consecuencia lógica de tal definición sería definir los subsistemas, cosa que haremos más adelante, cuando hayamos profundizado algo más en el tema.

Una definición más precisa nos la ofrece Optner, cuando dice que un sistema supone "una reunión de objetos con un conjunto determinado de relaciones entre los objetos y sus atributos"⁴. Consciente de la distinción entre sistemas y subsistemas, delimita el contexto de uno y otros asignando al primero todos los objetos, atributos y relaciones precisos para lograr un objetivo, mientras que los segundos contemplarían solamente una parcela de los anteriores, que posteriormente habrá de ser integrada con el resto a efectos de lograr la visión global⁵.

Lo anterior nos lleva a que, en definitiva, existen sistemas dentro de sistemas, etc. Cada uno a su vez puede ser considerado como un subsistema de otro subsistema de orden superior, que se integra en otro posteriormente, etc., ascendiendo así a través de una jerarquía de sub

(3) H. L. TIMMS. - Sistemas de decisión gerencial. -Op. cit. Pag. 88.

(4) S. L. OPTNER. - Análisis de sistemas para empresas y solución de problemas industriales. - Op. cit. Pag. 43.

(5) Ibid. Pag. 54.

sistemas hasta el sistema final: el universo. La consideración como sistema o subsistema depende entonces del punto de vista con que se enfoque la realidad objeto de estudio, puesto que en definitiva nuestra perspectiva de análisis global puede estar situada a diferentes niveles. Hablamos así del sistema económico y del sistema de la empresa, cuando en definitiva este último puede contemplarse también como un subsistema del primero.

Resulta de interés poner ahora de manifiesto que la integración de un conjunto de subsistemas en un sistema produce generalmente un efecto sinérgico, de forma tal que el todo obtenido es superior a la suma de las partes integrantes. La información, por ejemplo, obtenida de un sistema suele ser superior al conjunto de informaciones procedentes de cada uno de los subsistemas que forman parte del mismo⁶.

3. ELEMENTOS DE LOS SISTEMAS

La anterior definición de Optner nos ha puesto de manifiesto tres elementos de los sistemas: objetos o parámetros, atributos y relaciones. Vamos a examinar cada uno de ellos.

Los parámetros del sistema son: los inputs, el proceso, los outputs, el control feed-back y las restricciones. Cada uno de estos paráme--

(6) S. TILLES. - The Manager's Job - A System Approach. - Harvard Business Review, Vol 41, nº 1, Enero-Febrero, 1963. - Pag. 74

tros puede tomar diversos valores, dando lugar con ello a distintos estados del sistema.

Los inputs constituyen el impulso inicial que proporciona al sistema sus posibilidades de acción. Dichos inputs pueden ser los outputs de un proceso previo que constituye subsistema anterior.

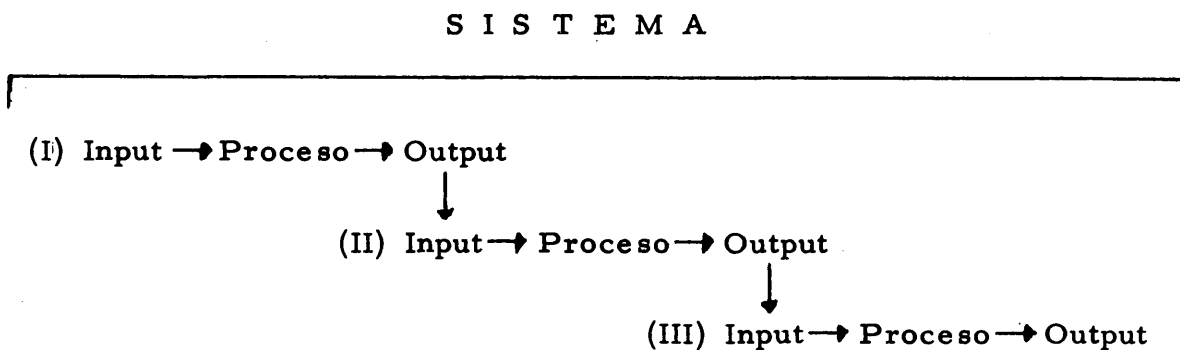


Fig. 1

En la Figura 1 puede apreciarse como los outputs de los subsistemas I y II constituyen los inputs de los subsistemas II y III respectivamente. Podíamos haber representado el sistema más simplemente como se muestra en la Figura 2.

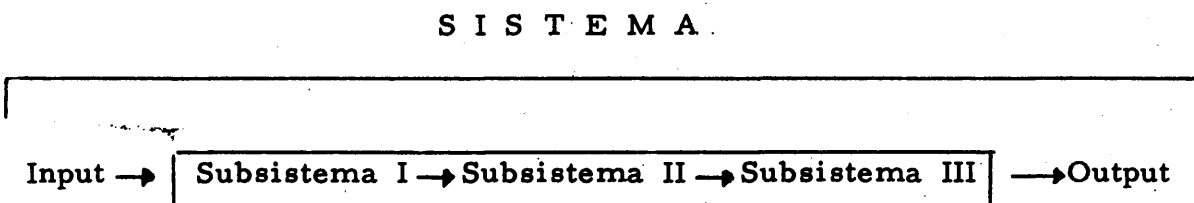


Fig. 2

Los inputs pueden proceder también de un proceso anterior pero no determinado, sino designado aleatoriamente. La Figura 3 representa un sistema cuyos subsistemas reciben inputs de los dos tipos señalados.

S I S T E M A

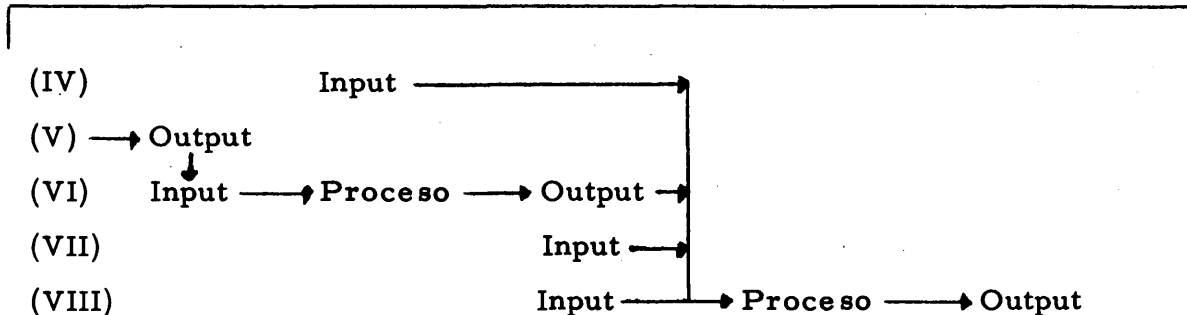


Fig. 3

Los inputs (IV) y (VII) han sido introducidos al azar, mientras que entre (V) y (VI), y (VI) con (VIII) existe una relación predeterminada.

Otra clase de inputs la constituyen los debidos al feed-back de un proceso. La Figura 4 muestra un sistema con tal clase de inputs. En dicha figura los inputs (X), (XIV) y (XV) son los que proceden del feed-back de algún proceso y diferentes por tanto del resto.

Los outputs constituyen el propósito para el cual los objetos, los atributos y las relaciones del sistema se han unido. El output resulta así congruente con los objetivos señalados. La diferencia entre los outputs de los subsistemas y el del sistema estriba en que los primeros son intermedios y el segundo es definitivo.

S I S T E M A

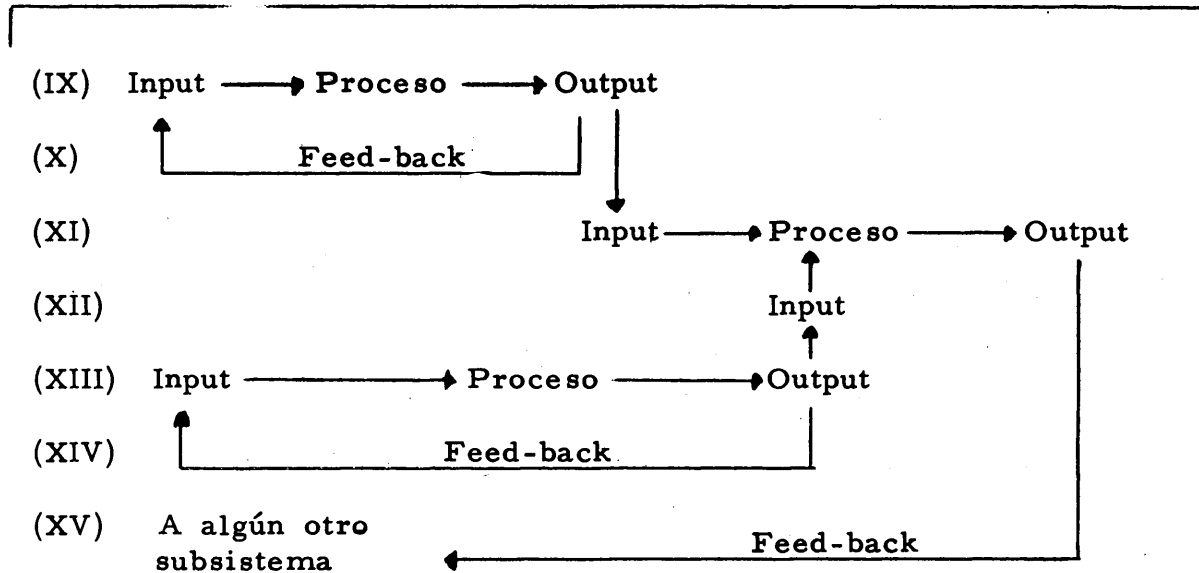


Fig. 4

El feed-back puede ser definido como la función del subsistema que compara el output con un criterio. El control constituye, pues, el objetivo del feed-back, a través del cual se pueden medir las desviaciones del output real con respecto al proyectado, de forma tal que se puede mantener o mejorar la ejecución del subsistema. Ahora bien, el control no tiene por qué ir forzosamente asociado al feed-back, puesto que puede efectuarse un control previo de los inputs antes de ser utilizados en el proceso, como por ejemplo se muestra en la Figura 5.

S I S T E M A

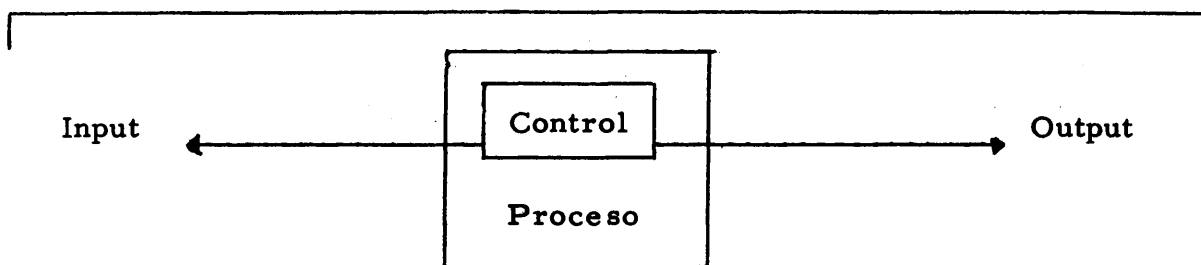


Fig. 5

Las restricciones del sistema se derivan de la existencia de un receptor de sus outputs. Dicho receptor impone restricciones al sistema - que éste trata de recoger de acuerdo con su capacidad y posibilidades. En la empresa, por ejemplo, pudieran ser sus clientes, quienes condicionan el proceso de producción al orientarse sus gustos hacia unos productos de una calidad determinada. En la Figura 6 se recoge el - impacto de dicho receptor.

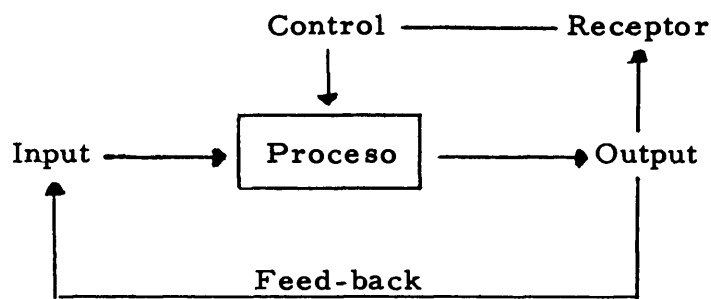


Fig. 6

Examinados los parámetros vamos ahora a referirnos a los atributos, los cuales son simplemente las propiedades de los citados parámetros, entendiendo por propiedades las manifestaciones externas por las que los mismos son conocidos, observados o introducidos en un proceso. Dichos atributos pueden ser alterados como resultado de las operaciones del sistema.

Por último, las relaciones son los nexos que unen los parámetros y sus atributos con el proceso del sistema. Existen relaciones entre todos los elementos del sistema, entre sistemas y subsistemas y entre subsistemas. No todas las relaciones tienen el mismo grado, dependiendo éste de la necesidad del nexo que establece la unión, podemos

hablar así de relaciones de primer orden cuando son estrictamente necesarias, de segundo cuando son complementarias pero no totalmente esenciales y de tercero cuando son contradictorias o redundantes.

4. CLASES DE SISTEMAS

Los sistemas pueden ser clasificados teniendo en cuenta sus analogías y sus diferencias. Puesto que tanto unas como otras pueden ser contempladas desde diversos puntos de vista, podríamos hablar de muchas clases de sistemas. Ahora bien, siguiendo en nuestra línea de contemplar tan solo aquellos aspectos que, de acuerdo con nuestros objetivos, resultan más sobresalientes, no hablaremos más que de sistemas físicos y abstractos, naturales y artificiales, adaptables y no adaptables y abiertos y cerrados.

Los sistemas físicos son aquellos que tratan con equipos o máquinas, o, en términos más generales, con objetos reales, mientras que en los sistemas abstractos los objetos no tienen por qué existir sino en la mente del investigador. Los conceptos, planes e hipótesis en fase de investigación pueden ser descritos como sistemas abstractos. Tanto unos como otros sistemas tienen unas limitaciones dentro de las cuales sus objetos, atributos y relaciones son adecuadamente explicados y manejables. De aquí se infiere que los objetos han de ser finitos, aun cuando en los sistemas abstractos tal circunstancia sea a veces difícil de conseguir. Todos los sistemas -físicos o abstractos- desarrollan su actividad en un determinado medio y con fronteras delimitadas.

Otra clase de sistemas se obtiene en atención al origen de los mismos, pudiendo hablar así de sistemas naturales y artificiales. Los primeros son aquellos que surgen de un proceso natural, como el clima y el ambiente, mientras que los artificiales se deben a procesos que existen como consecuencia del hombre, como la sociedad y la empresa. Tanto unos como otros pueden ser físicos y abstractos.

Podríamos hablar también de sistemas adaptables y no adaptables según que se produzca o no constantemente un reajuste en los inputs. Este hecho puede darse tanto en los sistemas naturales como en los artificiales; ejemplo de los primeros pudiera ser un frente meteorológico y de los segundos el proceso de autoorganización que se opera en la empresa como consecuencia del aprendizaje continuo que supone el desarrollo de sus actividades.

Por último, vamos a referirnos a los sistemas abiertos y cerrados. Los primeros son los que cambian los inputs con el medio de una manera regular y comprensible. Los segundos operan con un escaso intercambio de inputs con el medio ambiente. Ejemplos de sistemas abiertos podrían serlo la mayoría de las actividades empresariales y de sistema cerrado parcialmente lo sería un monopolio.

5. LA EMPRESA COMO SISTEMA

Según lo expuesto hasta aquí, la empresa bien pudiera ser considerada como un todo integrado, como un sistema en el cual confluyen una multitud de factores internos y externos. Esto, como señala Harvey, no es

nuevo en absoluto, puesto que antes de que se hubiera acuñado el término análisis de sistemas, algunos ejecutivos venían ya ejerciendo esta práctica, considerando a la empresa como un conjunto de subsistemas integrados⁷.

Esta consideración de la empresa como sistema no quita el que desde otra perspectiva más amplia sea vista como un subsistema, dentro de un sistema más amplio que engloba una serie de empresas como subsistemas interrelacionados. Tal es el caso, por ejemplo, de un sector industrial, en el que una empresa concreta se encuentra estrechamente relacionada con sus competidoras, integrándose todas ellas en el mismo sector del mercado cuyas necesidades pretenden satisfacer con los productos que lanzan. Este sector del mercado también constituye otro subsistema desde la perspectiva del mercado global, en cuyo sistema se integrará junto con los restantes sectores del mismo.

Nuestra perspectiva no va a estar situada a distinto nivel de la empresa, es decir vamos a considerar a la misma como un sistema, y por ello nos vemos precisados a concretar cuales son los subsistemas que se integran en ella. Esto no es tan fácil puesto que el establecimiento de unos u otros subsistemas depende del particular punto de vista con que se enfoque a la empresa. Vemos así que los distintos autores hablan de subsistema social, económico y tecnológico, de subsistemas funcionales, de subsistemas de información, de subsistemas de decisión,

(7) A. HARVEY. - Systems can be too practical. - Business Horizons, Vol 7, nº 2, 1964. - Pag. 59

de macro y micro-sistemas, de subsistemas de inversión y de recursos humanos, etc.⁸.

Que duda cabe que todos ellos tienen algo en común, de lo contrario no pertenecerían al mismo sistema, pero es que algunos de los citados, pensamos, tienen que superponerse prácticamente. Los subsistemas denominados funcionales consideran las distintas operaciones interrelacionadas que se dan en la empresa, a saber: financiación, inversión, producción, distribución e investigación. Los subsistemas informativos tendrán que incidir sobre tales operaciones, y la forma más lógica de conseguir la mejor información es la de adaptarse al sistema funcional sobre el que ha de elaborarse la información. Otro tanto puede decirse de los subsistemas de decisión, pues éstos tienen que hacer referencia a las operaciones en base de la información recibida. La distinción entre subsistema social, económico y tecnológico resulta evidentemente acertada, puesto que no obstante sus constantes interrelaciones cada uno de ellos atiende un matiz perfectamente diferenciado.

Nosotros vamos a hablar de subsistemas de gestión, constituyendo cada uno de ellos un área específica de operaciones, información y decisión en la empresa. Nuestro enfoque, lógicamente, ha de ser económi

(8) Vid. S. L. OPTNER. - Análisis de Sistemas para empresas y solución de problemas industriales. - Op. Cit. Pags. 45-55.

H. L. TIMMS. - Sistemas de decisión gerencial. - Op. cit. Pags. 91-92

D. B. HERTZ. - New Power for Management. - Mc Graw-Hill Book Co. New York, 1969. Pags. 30-45.

P. G. MOORE. - La empresa como Sistema Total. - Estudios Empresariales. Vol 18, nº 3, 1970. Pags. 5-70

co, aspecto que, en suma, condensa los aciertos o desaciertos logrados en los planos social y tecnológico, al menos en la empresa económica del llamado mundo occidental. Los subsistemas de gestión empresarial que vamos a contemplar son los siguientes:

- Financiación
- Inversión
- Producción
- Comercial
- Investigación.

La interrelación entre los mencionados subsistemas queda expuesta en términos simplificados en la Figura 7.

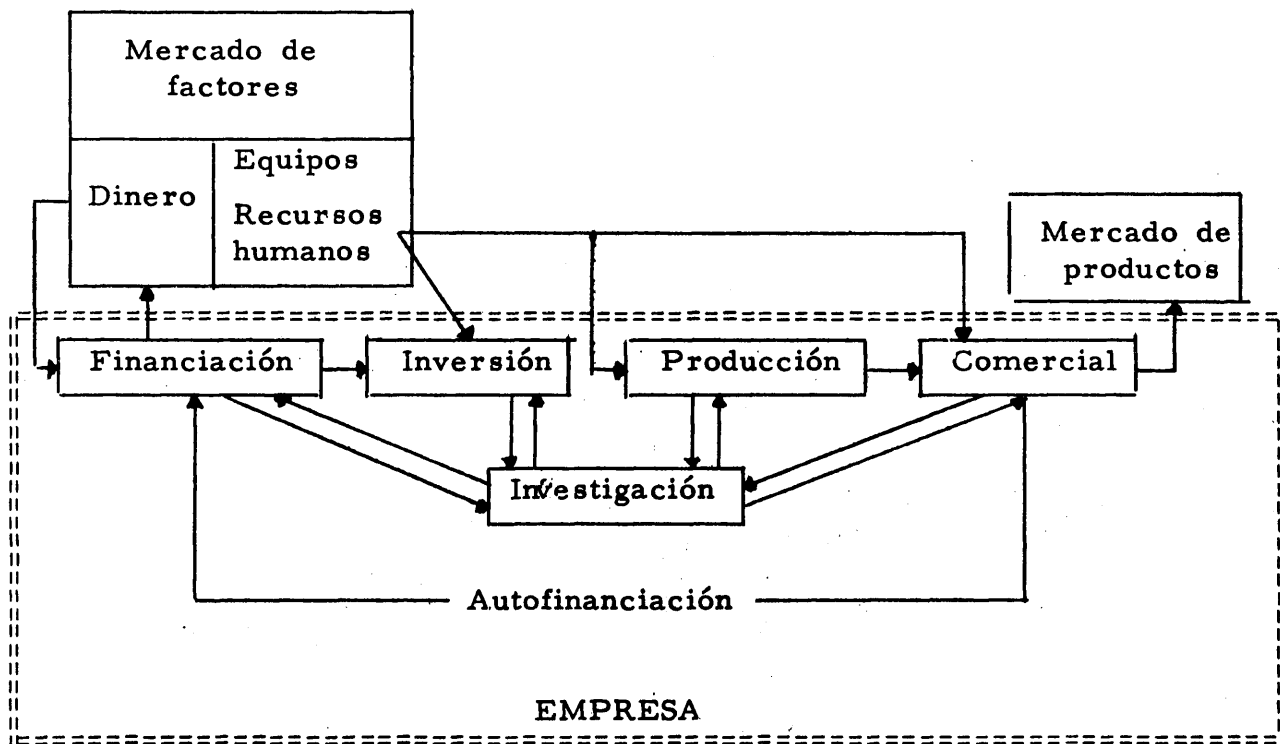


Fig. 7

5.1. El subsistema de Financiación

De acuerdo con el esquema anterior los primeros inputs que precisa la empresa para el desarrollo de sus actividades son los recursos financieros. Dichos recursos pueden proceder del exterior o bien generarse dentro de la propia empresa como consecuencia de sus operaciones, produciéndose el fenómeno de feed-back antes comentado.

Los recursos financieros procedentes del exterior pueden ser de índole muy diversa, que tratamos de sintetizar en el esquema que sigue a continuación:

- Financiación a corto plazo
 - Operaciones de descuento comercial
 - Factoring
 - Créditos con garantía personal
 - Créditos con garantía de mercaderías
 - Créditos con garantía de valores
 - Créditos con garantía de imposiciones a plazo

- Financiación a largo plazo
 - Aportaciones de capital (constitución y ampliaciones)
 - Préstamos (privados u oficiales)
 - Empréstitos
 - Leasing
 - Compras a plazos de bienes de equipo

Los recursos financieros generados dentro de la propia empresa como consecuencia de los ingresos retenidos en la misma, pueden aparecer

bajo la forma de Amortizaciones, Reservas o Provisiones⁹.

Los problemas que el subsistema de financiación ha de plantearse pueden resumirse en los siguientes:

- Seleccionar las distintas fuentes financieras teniendo en cuenta los costes que comporta la utilización de cada una de ellas¹⁰

(9) No podemos plantearnos ni la descripción de cada uno de los componentes señalados ni el enjuiciamiento de la relación Financiación externa-Autofinanciación, puesto que a pesar de su indudable interés, ello nos alejaría de nuestro objetivo principal. Sobre este particular pueden consultarse entre otras las siguientes obras:

J. ALVARO CUERVO. - Las Fuentes de Crédito en España. - Acción Social Empresarial. Madrid, 1969.

L: CAÑIBANO CALVO. - Financiación de la Empresa. - Colegio de Titulares Mercantiles, Madrid, 1970.

J. COILLOT. - Initiation a leasing on credit-bail. - J. Delmas. - Paris, 1968.

Chambre Nationales de Conseillers Financiers. - Le Factoring. - Societé d'Editions Economiques et Financières. - París, 1966.

S. GARCIA ECHEVARRIA. - Significado e importancia de la autofinanciación para el desarrollo y crecimiento de las empresas (La autofinanciación en la Economía de la Empresa). - Boletín de Estudios Económicos, nº 74, Agosto 1968, Pags. 323-394.

A. A. ROBICHEK; S. C. MYERS. - Decisiones óptimas financieras. - Herrero Hermanos. México, 1968.

(10) Nótese que decimos costes y no gastos, puesto que a nuestro juicio la utilización de cualquier recurso comporta un coste, con independencia de su procedencia interna o externa a la empresa.

- Conseguir ampliar la capacidad de aquellas fuentes cuyos costes sean más escasos.
- Señalar las políticas de dividendos y autofinanciación de mayor conveniencia para la empresa, habida cuenta del sistema económico en que opera.
- Matizar en cada intervalo del tiempo la política de liquidez o beneficios máximos a seguir.
- Informar sobre las posibilidades de incremento de dimensión de la empresa y sobre el ritmo a seguir.
- Informar sobre la composición de activos que más se ajusta a su estructura y situación financiera.

Los outputs del subsistema financiero están señalados por las necesidades del subsistema de inversión y por inherentes al propio subsistema financiero motivadas por la devolución de los fondos obtenidos de terceros, así como los intereses motivados por la financiación externa.

La importancia de la función financiera en la empresa es totalmente destacable, puesto que en cierto modo constituye el sustento de otras posteriores, de forma tal que éstas no podrían ser llevadas a cabo sin los recursos proporcionados por el subsistema de financiación. Su integración con los restantes subsistemas es totalmente necesaria, puesto que el dinero constituye un bien demasiado preciado como para no darle la más eficaz aplicación y en el momento más conveniente. A este respecto queremos señalar la importancia que tiene el que el estado del

subsistema de financiación tenga su oportuna correlación temporal con el estado de los restantes subsistemas de la empresa, puesto que la falta de ella, comporta unos costes de oportunidad, que no por no ser considerados en la práctica por muchas empresas, dejan de tener un destacado relieve.

5.2. El subsistema de Inversión

En una etapa posterior los fondos obtenidos han de ser invertidos en aquellos bienes que la empresa necesita para la elaboración y venta de sus productos. Tales inversiones pueden ser fijas o circulantes, según que condicionen a la empresa durante un largo período de tiempo o por el contrario, su reconversión en fondos líquidos tenga lugar a corto plazo.

Los inputs del subsistema de inversión serán pues, aquellos outputs procedentes del subsistema de financiación que han de dedicarse a la adquisición de los bienes anteriormente señalados, los cuales constituyen a su vez el output del subsistema ahora estudiado.

Esta noción de inversión tiene, indudablemente, un contenido más amplio que el que algunos autores se empeñaban en señalarle, considerando como tal solamente los bienes de equipo, o sea, las inversiones fijas. Nosotros, por el contrario, consideramos como inversión toda materialización de los recursos financieros en bienes necesarios para que la empresa consiga los objetivos previstos. Por ello, y de acuerdo con autores

tales como Pack¹¹ y Depallens¹² creemos que las inversiones abarcan:

- Las inmovilizaciones (terrenos, edificios, maquinaria, material y utillaje, instalaciones, equipo de transporte, mobiliario, good-will, patentes y marcas de fabricación, depósitos y fianzas, etc.)
- La cartera de control
- Los stocks normales y de seguridad
- Los créditos concedidos a clientes
- Las inversiones en investigación
- Las inversiones comerciales.

Nosotros pensamos que además de estos capítulos habrá que considerar también tanto las inversiones realizadas en carteras de renta o especulativas como en liquidez, puesto que, en definitiva, aunque a primera vista no suponga la obtención de bienes necesarios para llevar a cabo el proceso de producción de la empresa, sí puede ir encaminada a lograr el objetivo de obtención del mayor beneficio posible, al aplicar unos fondos líquidos existentes en exceso momentáneamente. La propia liquidez puede ser considerada también como una auténtica inversión,

(11) L. PACK. - Betriebliche Investition. - Wiesbaden, 1959. Pags. 83-84

(12) G. DEPALLENS. - Gestion Financière de l'Entreprise. - Sirey, París 1963. Pag. 466.

pues sus costes de oportunidad pueden ser inferiores a los derivados de otras fuentes alternativas externas a la empresa en aquellos momentos en que tal liquidez sea necesaria.

Los problemas, pues, que el subsistema de inversión de la empresa ha de examinar son, fundamentalmente los siguientes:

- Vinculación temporal de la empresa a las distintas inversiones.
- Cálculo del montante de inversiones fijas y circulantes
- Análisis de alternativas entre inversiones fijas y circulantes.
- Selección de inversiones en base a su rentabilidad, ritmo de conversión en liquidez, riesgo que comporta su realización, etc¹³.

La interrelación de los subsistemas de financiación e inversión es notoria, puesto que obtención de recursos, inversión de los mismos y expectativas de su conversión en liquidez son problemas que difícilmente pueden aislarse excepto por imperativos de orden metodológico.

Los outputs del subsistema de inversión, o sea, los bienes en que se encuentran materializadas las citadas inversiones, se canalizarán hacia los subsistemas de producción, comercialización e investigación. Ni que

(13) Como obras de interés que se planteen el examen específico de estos problemas, podemos mencionar, además de las antes citadas y entre otras diversas, las siguientes:

C. ABRAHAN; A. THOMAS. - Microéconomie. Décisions optimales dans l'entreprise et dans la nation. Dunod. - Paris, 1966.

J. M. DETHOOR; J. L. GROBOILLOT. - La vie des équipements. - Dunod París, 1968.

P. MASSE. - Les Choix des Investissements. - Op. cit.

H. PEUMANS. - Valoración de Proyectos de Inversión. Deusto. Bilbao 1967.

decir tiene que las especificaciones de índole técnica de tales bienes, así como la información de orden económico relativa a los mismos tiene que proceder de experiencias previas o juicios subjetivos acuñados en los subsistemas receptores mencionados. El tratamiento de tal información corresponde al subsistema de inversiones, donde se acometerán los problemas anteriormente expuestos.

5.3. El subsistema de Producción

La transformación de factores en productos corresponde al subsistema de producción. Sus inputs serán por lo tanto los diferentes factores necesarios para llevar a cabo la producción, que podemos sintetizar en los siguientes: Inmovilizaciones, técnicas, materiales, recursos humanos y aprovisionamientos diversos. Los outputs serán los distintos productos obtenidos como consecuencia del proceso de transformación. Una característica, ya apuntada con anterioridad, estriba en que la empresa de nuestros días no lanza un solo producto al mercado, sino una diversidad de ellos, de ahí que la complejidad del subsistema de producción sea mayor, puesto que a su vez se escindirá en una amplia gama de subsistemas de orden menor, con problemas similares sin duda, pero también con aspectos peculiares distintos para cada uno de ellos.

El subsistema de producción se encuentra condicionado, aparte de por diversas circunstancias externas que tendremos ocasión de comentar, por las características de la producción propiamente dicha. Ya hemos expuesto que el caso de producción simple, o sea un solo producto, no reviste grandes dificultades y resulta, hoy día, un tanto improbable. La producción compuesta, o sea varios productos, puede ser al-

ternativa cuando hay que paralizar la elaboración de un producto para introducir otro en el proceso, conjunta cuando la elaboración de uno y otro producto resultan inseparables y paralela cuando ambas tienen lugar al mismo tiempo pero siguiendo procesos independientes. En cualquiera de las anteriores modalidades puede darse también la existencia de subproductos.

Otros problemas se derivan de la existencia de secciones auxiliares y de prestaciones mutuas entre las diversas unidades o secciones que componen el proceso de producción. Este último problema que ha sido examinado a nivel empresa por diversos autores¹⁴, basándose fundamentalmente en las elaboraciones de Leontief.

Las anteriores características de los procesos de producción y de la producción en sí, junto con las restricciones derivadas de los restantes subsistemas, como por ejemplo, limitación de los recursos financieros, capacidad de las inversiones fijas y nivel de demanda del mercado, dan lugar a un conjunto de problemas inherentes a la producción, abstracción hecha de las de carácter puramente tecnológico, que esquemizamos en las siguientes:

(14) Como más significativos pueden ser citados:

E. SHNEIDER. - Contabilidad Industrial. -Op. cit. Pags. 52-60.

V. CAO PINNA. - Posibles aplicaciones del modelo de contabilidad "Input-Output" en el ámbito de la empresa. - Técnica Económica. - Madrid, Mayo 1959. Pags. 148 y sigs.

Y. IJIRI. - An application of Input-Output Analysis to some problems in cost accounting. - Management Accounting N.A.A., Abril, 1968. Pags. 49-61

- Determinación del proceso o procesos óptimos de producción
- Nivel de utilización de cada uno de los procesos
- Cantidad a elaborar de cada uno de los productos
- Volumen óptimo de las sucesivas tandas de producción
- Nivel óptimo de los stocks de factores y productos
- Periodicidad de las revisiones a efectuar en los equipos.
- Asignación de tareas a hombres y máquinas
- Distribución en planta
- Valoración de la producción
- Determinación del rendimiento de las secciones.

Cada uno de estos problemas supone un amplio campo en el que puede tener lugar una gran diversificación debido a las diferentes características examinadas anteriormente para la producción y sus procesos ¹⁵.

(15) Lo que apuntamos para anteriores subsistemas de la empresa en cuanto a lo esquemático de nuestro examen, lo hacemos extensivo a éste, sobre el que pueden ser consultados entre otras las siguientes obras:

R. H. BOCK; W. K. HOLSTEIN. - Planeación y control de la producción. Limusa-Wiley S. A. - México, 1966.

C. C. HOLT; F. MODIGLIANA; J. F. MUTH; H. A. SIMON. - Planeamiento de la producción, inventarios y mano de obra. - Herrero Hermanos. México 1963.

D. W. MILLER; M. K. STARR. - Acuerdos ejecutivos e investigación de operaciones. Op. cit. Pags. 268-348

G. NADLER. - Diseño de sistemas de producción. - El Ateneo. - Buenos Aires, 1970.

M. K. STARR. - Dirección de la Producción. Sistemas y Síntesis. - Herrero Hermanos. - Mexico, 1968.

Si anteriormente hablamos de las fuertes interrelaciones existentes entre los subsistemas de financiación e inversión ahora nos toca explicitarlo para los de producción y comercial, puesto que en ambos hay tres extremos de interacción recíproca, cual son: la calidad del producto, el precio del mismo y el nivel de las existencias. Ni que decir tiene que el proceso de producción es determinante de la calidad del producto y que los costes directos de éste deben constituir un límite infranqueable de su precio de venta. Pero dado que las limitaciones de la producción por lo que a calidad y costes se refiere, representan en cualquier momento dado un hecho que el subsistema comercial ha de aceptar, consideramos entonces estos problemas dentro del último subsistema mencionado. Por el contrario, como el nivel de la demanda en un momento dado es un hecho con el que el subsistema de producción ha de contar, hemos incluido la determinación de los niveles de stocks dentro del referido subsistema.

5.4. El subsistema comercial

La colocación de la producción, una vez terminada, constituye el objetivo primordial del subsistema comercial. Los inputs que recibe del subsistema de producción ha de convertirlos en liquidez real o potencial para poder continuar de esta forma el ciclo productivo de la empresa.

Si anteriormente al tratar el subsistema de producción dijimos que las actuales circunstancias habían conferido a la misma gran complejidad, otro tanto o más aun podemos decir para el subsistema comer-

cial. La empresa comercializa varios productos en distintos mercados, el tratamiento que ha de llevar cada producto en cada mercado puede ser evidentemente distinto, debido a sus diferentes características intrínsecas y a las ambientales que configuran los gustos de los diversos consumidores. De otra parte la política de expansión comercial, abarcando cada vez áreas más alejadas es una constante de nuestros días, e igual ocurre con las cada vez más intensas campañas de publicidad que tratan de crear nuevas necesidades al consumidor, para así dar salida a un sinnúmero de productos que, paradójicamente, llegamos a apreciar como portadores de nuevas moléculas de felicidad.

La complejidad, pues, de los parámetros, de sus atributos y de las relaciones que ha de considerar el subsistema comercial no solo son amplias, sino que nos atreveríamos a decir que son crecientes con el tiempo. Pensemos que en la aceptación del producto juegan detalles como su diseño, el de su envase o envoltura, el nombre que se le asigne, el precio fijado, la orientación de la propaganda, la postura de la competencia, etc. Por ello vamos a renunciar a plantearnos todo el cúmulo de problemas apuntados, tratando de sintetizar, al igual que con los subsistemas anteriores, los problemas generales de mayor relieve e importancia. Podemos concretarlos en los siguientes:

- Análisis del mercado o mercados
- Campañas de promoción de los productos
- Determinación de las características cualitativas de los productos.
- Fijación de precios de venta
- Establecimiento de la red comercial.
- Programas de transportes con costes mínimos.
- Análisis de los costes de distribución.

- Contrastación de la política comercial con los objetivos de la empresa.

Queremos destacar que en ocasiones los objetivos perseguidos por el subsistema comercial pueden entrar en colisión con los de otros subsistemas, por ejemplo con el de financiación. Si para el subsistema comercial lo importante es vender para el financiero es cobrar. Que duda cabe que sin ventas no hay cobros, pero también es cierto que en mercados enrarecidos, venta no es sinónimo de cobro, o sin llegar a estos límites extremos, los cobros pueden no tener lugar en los momentos que cabría desear. La armonización de todos estos objetivos, el de ventas con el de liquidez, el de calidad en los productos sin distorsionar la producción, el de servicio inmediato al cliente con el mínimo nivel posible de existencias, etc., es tarea que incumbe a quien tiene la posibilidad de contemplar los anteriores subsistemas como tales, no a quien por encontrarse sumergido en ellos los ve como auténticos sistemas de gestión empresarial, es decir, a la persona o personas que ejercen la facultad decisoria al nivel de Dirección General en la empresa, puesto que ellos son quienes han de tratar en todo momento de conseguir la integración armónica de todos sus subsistemas, a fin de que el efecto sinérgico de que antes hablamos se produzca realmente ¹⁶.

(16) Destacamos como obras básicas de consulta para la concepción del subsistema comercial en sus diversos aspectos, las siguientes:

G. TAGLIACARNE. - Técnica y práctica de las investigaciones de mercados. Ariel. - Barcelona, 1960.

J. J. LAMBIN. - Información, decisión y eficacia comercial. Deusto Bilbao, 1967.

.../...

5.5. El subsistema de investigación

Un poco al margen de los subsistemas examinados, pese a sus indudables interrelaciones con todos ellos, se encuentra el subsistema de investigación, puesto que el mismo permanece un poco a espaldas de esta problemática del corto plazo con que día tras día ha de enfrentarse la empresa tanto en su interior como de cara al mercado.

Con esto no queremos en modo alguno minusvalorar el importantísimo papel que la investigación juega en el desarrollo y crecimiento de las empresas. Sin investigación no hay progreso y, por tanto, la economía acabaría estancándose, de ahí la preocupación creciente de las empresas que en nuestros días cuentan ya con una respetable dimensión, por avanzar en este campo de la investigación, por asignar recursos a la misma para poder disfrutar de beneficios mañana.

La contribución de la tarea investigadora al desarrollo de la economía nacional y de la de las empresas que se integran en esa unidad de mayor amplitud, ha sido suficientemente estudiada por autores de

-
- G. H. EVANS. - The product manager's job. -AMA. -New York, 1960.
 W. PHELPS; G. WESTING. - Marketing Management. - R. D. Irwin, Inc Homewood, Illinois, 1967. Part V: Pricing and Price Policies.
 J. F. MAGEE. - Sistemas de distribución. -El Ateneo. Buenos Aires, 1969.
 D. P. LOCKLEN. - Economies of Transportation. -R. D. Irwin, Inc. Homewood. Illinois, 1960.
 G. TRIOLAIRE. - Costes de la Distribución y Formación de los Precios. Sagitario. - Barcelona, 1965.

reconocido prestigio¹⁷, por ello no vamos a insistir sobre este particular que, por otra parte, nos desviaría de nuestro objetivo principal, que es el de apuntar unos rasgos de esta actividad considerada como un subsistema del conjunto empresarial.

Las interrelaciones entre el subsistema de investigación y los restantes de la empresa son patentes, primero porque aquel necesita medios que éstos le proveen e igualmente información, segundo porque no cabe una concepción estrecha de la investigación en la empresa, ésta ha de ir dirigida hacia todas aquellas áreas susceptibles de mejora en su actual concepción y, por último, porque la experimentación y contrastación de los nuevos procedimientos han de ser llevados a cabo en el medio para el que fueron concebidos.

No cabe duda que la investigación tecnológica ocupa un papel primordial, puesto que la concepción de nuevos productos y de nuevos procesos de producción tiene una importancia fuera de toda duda, pero no es menos cierto que tales productos han de ser lanzados a un mercado en el que deben encontrar salida si la empresa quiere seguir sub-

(17) Podemos mencionar entre otros:

D. USHER. - The Welfare Economics of Invention. - Económica. Agosto, 1964. Pags. 279-287.

J. SCHMOOKLER. - Invention and Economic Growth. - Harvard University Press, 1966.

E. MANSFIELD: - Industrial Research and Development: Characteristics, Cost and Diffusion of Results. - American Economic Review, Mayo, 1969. Pags. 65-71

sistiendo. De otra parte, el binomio financiación-inversión no puede quedar al margen de esta tarea, puesto que por lo general la introducción de innovaciones tecnológicas comporta mayores riesgos, de ahí la necesidad de mejorar las herramientas disponibles para el análisis de las inversiones correspondientes. Otro tanto podría decirse con respecto a la acometividad de nuevas fórmulas financieras, dado que las crecientes necesidades en este orden imponen ampliar la gama existente sin producir efectos desfavorables. Tanto las acciones llevadas a cabo en cada uno de los subsistemas de gestión, como la integración de todas ellas a un nivel superior, da lugar de día en día a nuevas perspectivas en el campo de la empresa, derivadas en su mayor parte, no de la investigación puramente tecnológica, sino de aquella otra encaminada a lograr un mejoramiento efectivo de los sistemas de gestión.

Chorafas señala como campos de investigación en la empresa, que por supuesto pueden ser cambiantes al considerar distintas unidades económicas, los siguientes¹⁸

"1. Ciencias físicas

- a) Ciencia pura, descubrimiento de las leyes
- b) Ciencia aplicada, aplicaciones generales

2. Especificaciones. Aplicaciones particulares de leyes físicas a especificaciones deseadas.

(18) D. N. CHORAFAS. - La Investigación en la Empresa. - Aguilar. Madrid, 1964. Pags. 16-17

- a) Especificaciones de los productos
 - b) Equipos y servicios
3. Investigación comercial
- a) Estudios de mercado para los productos industriales
 - b) Investigación publicitaria
4. Ingeniería industrial u oficina de estudios
- a) Análisis de las interacciones hombres-máquina
 - b) Mejora de métodos
 - c) Proceso de constitución de los sistemas
 - d) Procedimientos de fabricación
5. Psicología.
- a) Estudio de relaciones humanas
 - b) Arte de mandar
 - c) Disminución de la resistencia a los cambios
 - d) Coordinación de las funciones de estado mayor y explotación
6. Problemas de dirección
- a) Contabilidad, asuntos fiscales
 - b) Finanzas
 - c) Organización
 - d) Relaciones públicas
 - e) Relaciones con la clientela
 - f) Política de producción
 - g) Búsqueda del mayor beneficio"

El mayor o menor papel que la investigación juegue en la empresa tiene múltiples condicionantes, entre otros queremos destacar como

más importantes, su dimensión, la tendencia que sigue en el campo económico y el desarrollo económico general.

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES DE LA

PROGRAMACION DINAMICA

A LOS SISTEMAS DE GESTION

CAPITULO IV

DECISIONES SECUENCIALES

EN EL SUBSISTEMA

DE FINANCIACION

CAPITULO IV. - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTEMA DE FINANCIACION

1. INTRODUCCION

En el Capítulo anterior han quedado apuntados los principales problemas con que cada uno de los subsistemas de la empresa ha en enfrentarse. Ni que decir tiene que no podemos plantearnos un análisis exhaustivo de cada uno de ellos ni en este subsistema de financiación ni en los que le siguen,, simplemente trataremos de seleccionar algún problema que juzguemos suficientemente representativo, y cuya estructura presente unas características secuenciales que aconsejen su tratamiento por Programación Dinámica.

Para el estudio de las decisiones secuenciales en el subsistema de financiación, hemos seleccionado tres problemas, el primero de ellos - hace relación a la vinculación de los fondos financieros a los distintos

tipos de inversiones -liquidez, circulante o inmovilizado-, en el segundo se pretende establecer un plan financiero a corto plazo contando tan to con las restricciones financieras propiamente dichas como con las derivadas de la capacidad de producción y de absorción del mercado, - finalmente, en el tercero, se examina la política de concesión de créditos de la empresa en base a las últimas experiencias, circunstancia que dota al proceso de unas características muy peculiares, que son examinadas en la tercera parte de nuestra Tesis, por ello ~~de~~ mos para el Capítulo X la exposición de este problema.

2. ANALISIS DE LA ESTRUCTURA OPTIMA DEL CAPITAL EN FUNCIONAMIENTO

Los fondos financieros captados por la empresa pueden tener diversas aplicaciones a lo largo de los distintos períodos de tiempo, concretamente:

$F_e(n)$ = Conservarse como liquidez dentro de la empresa

$F_c(n)$ = Invertirse en capital circulante

$F_f(n)$ = Invertirse en capital fijo

En un determinado momento del tiempo las variables definidoras del estado del subsistema financiero de la empresa pueden ser las siguientes:

$x_e(n) = \text{liquidez existente}$

$x_f(n) = \text{capacidad financiera}$

Las interrelaciones que se dan entre unos y otros podemos sintetizarlas como sigue:

$$(1) \quad x_e(n) = F_e(n) + F_c(n) + F_f(n)$$

siendo:

$$(2) \quad F_c(n) \leq a_1 x_e(n) \quad 0 < a_1 < 1$$

y

$$(3) \quad F_e(n) \leq x_f(n)$$

La igualdad (1) pone de manifiesto que la liquidez existente en un determinado momento puede tener los tres destinos anteriormente señalados, o sea, conservarse como liquidez, invertirse en circulante o invertirse en fijo. La identidad entre origen de los fondos y aplicación de los mismos tiene forzosamente que producirse. La restricción (2) expresa que no es posible utilizar más de un cierto porcentaje de los fondos disponibles en las inversiones circulantes durante el período (n, n+1), puesto que tales inversiones estarán condicionadas a la dimensión de la es-

estructura fija, y la (3) indica que el límite inferior de la capacidad financiera de la empresa viene dada por los fondos líquidos conservados en la misma.

Supondremos ahora que la liquidez existente en un momento $(n+1)$ es proporcional a la conservada en el momento inmediatamente anterior, o sea:

$$(4) \quad x_e(n+1) = a_2 F_e(n) \quad a_2 > 1 \quad x_e(0) = c_1$$

Esta hipótesis no se daría cuando la empresa obtuviera pérdidas en repetidos ejercicios, en cuyo caso a_2 sería inferior a uno, sin embargo consideramos que nos movemos en un supuesto de obtención de beneficios.

También vamos a introducir la hipótesis de que el incremento de la capacidad financiera de un período $(n + 1)$ es proporcional al incremento de la capacidad de producción de la empresa, definida fundamentalmente por sus nuevas inversiones fijas, o sea que podemos escribir:

$$(5) \quad x_f(n + 1) = x_f(n) + a_3 F_f(n) \quad a_3 > 0 \quad x_f(0) = c_2$$

El problema se centra ahora en elegir unos concretos valores para $F_e(n)$, $F_c(n)$ y $F_f(n)$, $n = 0, 1, \dots, T$, de forma tal que maximicen un determinado objetivo que la empresa se proponga alcanzar¹. Este

(1) Este es un típico problema de los llamados de "estrangulamiento" o

objetivo bien pudiera ser conseguir el máximo beneficio, pero la mayor dificultad deviene de que es necesario conocer la relación existente entre los beneficios y las variables de estado definidoras del subsistema financiero que anteriormente hemos señalado, o sea: liquidez y capacidad.

Se han realizado algunos estudios empíricos sobre la relación existente entre las estructuras económica y financiera de la empresa y los beneficios alcanzados por la misma, así el llevado a cabo, ya hace tiempo, por Ceccherelli en Italia². Ni que decir tiene que tales trabajos están condicionados en el tiempo y en el espacio, e incluso presentan variaciones para los distintos sectores. Estas circunstancias traen como consecuencia el que no puedan ser utilizadas sus conclusiones nada más que por aquellas empresas inmersas en un concreto sistema económico durante un cierto período de tiempo y que tengan este o aquel concreto tipo de actividad. El estudio del autor antes mencionado hacía referencia a cuatro tipos de empresas: comerciales, industriales, bancarias y de servicios, y tomó como base para su elaboración más de 100 empresas para cada uno de los tipos señalados.

Creemos que no es necesario hacer mucho hincapié para caer en la cuenta de la dificultad que reviste elaborar un estudio de este tipo, más que por sus dificultades intrínsecas, por la escasa información

"cuello de botella". Vid. R. BELLMAN. - Dynamic Programming. - Op. cit. Pags. 183-221, donde se exponen complejos problemas de este tipo.

(2) Vid. V. MASSI. *Statica Patrimoniale*, Vol II, - Dottore Antonio Milano. Padua, 1945. - Pags. 293 y sigs.

que prestan las empresas a este respecto. Dadas las dificultades de una comparación en el espacio, podría restringirse a una sola empresa tomando como base datos de la misma en diversos momentos del tiempo.

Si resultara harto dificultoso el elaborar la función objetivo señalada, podría sustituirse en ella el beneficio por el volumen de producción, habida cuenta de que el primero es normalmente función del segundo, salvo casos esporádicos que puedan presentarse, como una inesperada reducción en el ritmo de ventas por cambios en los gustos de los consumidores, baja calidad de las últimas tandas de productos, etc.

2.1. Formulación por Programación Dinámica

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, podemos señalar la siguiente función objetivo:

$f_N(c_1, c_2)$ = Beneficios totales alcanzados durante N períodos, comenzando con una liquidez inicial de c_1 y una capacidad financiera inicial de c_2 , y siguiendo una política óptima.
($N = 1, 2, \dots$; $c_1 \geq 0$; $c_2 \geq 0$)

Tendremos entonces para el período primero:

$$(6) \quad f_1(c_1, c_2) = a_1 c_1$$

puesto que ni el mantenimiento de liquidez ni la realización de nuevas inversiones fijas consideramos que influyen en los beneficios de dicho período.

En general para el período N tendremos:

$$(7) \quad f_N(c_1, c_2) = \text{Max}_F \left[F_c + f_{N-1}(a_2 F_e, c_2 + a_3 F_f) \right]$$

siendo $N = 2, 3, \dots, T$, y estando definida la región del espacio F por las siguientes desigualdades:

$$F_e, F_c, F_f \geq 0$$

$$F_e + F_c + F_f = c_1$$

(8)

$$F_c \leq a_1 c_1$$

$$F_e \leq c_2$$

La región del espacio (8) tiene la forma de la Figura 1.

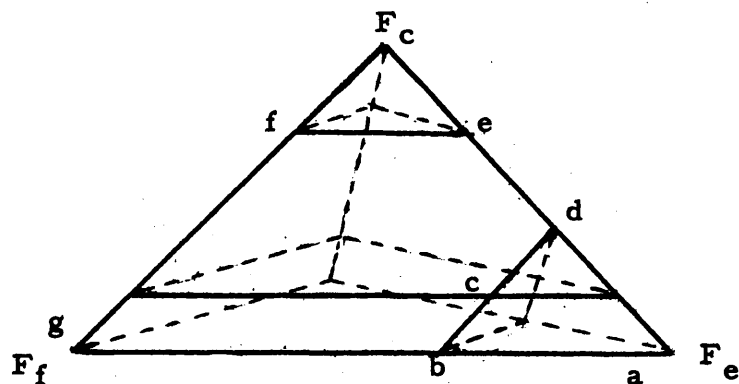


Fig. 1

Los puntos señalados tienen, desde el punto de vista del proceso examinado, el significado siguiente:

- a. En el caso en que la capacidad financiera no suponga una restricción, se puede retener toda la liquidez disponible en la empresa.
- b. Se retiene en la empresa la mayor cantidad de liquidez posible, o sea hasta que se igualan liquidez y capacidad, y el resto de liquidez se destina a inversiones fijas.
- c. Se presenta cuando la capacidad financiera es insuficiente. Supone una asignación de fondos a los tres fines señalados, o sea: liquidez, circulante y fijo.
- d. Se retiene en la empresa la mayor cantidad de liquidez posible y el resto se destina a inversiones circulantes.
- e. El porcentaje máximo permitido está destinado a inversiones circulantes y el resto se retienen como liquidez.
- f. El porcentaje máximo posible está destinado a inversiones circulantes y el resto a inversiones fijas.
- g. Todos los fondos se asignan a inversiones fijas.

La maximización sobre el conjunto de puntos de la región F nos conducirá al óptimo o a una aproximación muy buena, a medida que se incrementa el número de períodos considerados.

La relación (7) puede escribirse también en la forma siguiente:

$$(9) \quad f_N(c_1, c_2) = \text{Max}_F \left[\min(a_1 c_1 - F_e - F_f) + f_{N-1}(a_2 F_e, c_2 + a_3 F_f) \right]$$

La región F quedará ahora definida por:

$$F_e, F_f \geq 0$$

$$(10) \quad F_e + F_f \leq c_1$$

$$F_e \leq c_2$$

El anterior problema puede quedar reducido a una serie de problemas de una sola dimensión, debido a la linealidad de todas las restricciones y de la función objetivo, que es una función homogénea de primer grado en c_1 y c_2 .

Puesto que $c_1, c_2 > 0$, tendremos:

$$(11) \quad f_N(c_1, c_2) = c_1 f_N\left(1, \frac{c_2}{c_1}\right) = c_2 f_N\left(\frac{c_1}{c_2}, 1\right)$$

por tanto, necesitamos tan solo calcular $f_N(1, x)$ o $f_N(x, 1)$.

A partir de (7), tendremos:

$$(12) \quad f_N(1, c_2) = \text{Max}_F \left[F_c + f_{N-1}(a_2 F_e, c_2 + a_3 F_f) \right] =$$

$$= \text{Max}_F \left[F_c + a_2 F_e f_{N-1} \left(1, \frac{c_2 + a_3 F_f}{a_2 F_e} \right) \right]$$

Vemos que el cálculo de $f_N(1, c_2)$ para $c_2 \geq 0$ depende ahora solamente de $f_{N-1}(1, c_2)$ para $c_2 \geq 0$. Esto constituye la reducción de dimensiones buscada. No obstante, conviene señalar que hemos introducido una nueva dificultad, derivada del crecimiento del intervalo de variación de c_2 , pues el término:

$$\frac{c_2 + a_3 F_f}{a_2 F_e}$$

puede ser mucho más grande que $\frac{c_2}{c_1}$.

Para evitar esta dificultad, mostraremos que se puede calcular $f_N(1, x)$ y $f_N(x, 1)$ para $0 \leq x \leq 1$, conociendo $f_{N-1}(1, x)$ y $f_{N-1}(x, 1)$ para $0 \leq x \leq 1$. Es interesante introducir dos funciones en lugar de una para conservar el intervalo deseado.

Volviendo a (12) tendremos:

$$(13) \quad f_N(1, c_2) = \text{Max}_F \left[F_c + a_2 F_e f_{N-1} \left(1, \frac{c_2 + a_3 F_f}{a_2 F_e} \right) \right]$$

para $a_2 F_e \geq c_2 + a_3 F_f$

$$= \text{Max}_F \left[F_c + (c_2 + a_3 F_f) f_{N-1} \left(\frac{a_2 F_e}{c_2 + a_3 F_f}, 1 \right) \right]$$

para $a_2 F_e \leq c_2 + a_3 F_f$

Las simplificaciones introducidas a través de las transformaciones efectuadas en (7) permiten realizar los cálculos con una facilidad notoriamente mayor, al haberse reducido el número de dimensiones³.

2.2. Comentarios al modelo expuesto

Es una realidad incuestionable, el que la política financiera de la empresa no debe operar tan solo a corto plazo, sino que sus miras deben orientarse siempre hacia una acción a más largo plazo.

El modelo expuesto abarca esta última panorámica, puesto que se plantea el problema de la vinculación de los fondos financieros a inversiones fijas o circulantes, o bien su mantenimiento como liquidez, durante un amplio período de tiempo.

Esta última asignación señalada, o sea, el mantenimiento de la liquidez en la empresa es un problema eminentemente dinámico y, por supuesto, íntimamente relacionado con la realización de inversiones. Ahora bien, esta interdependencia solo se pone de relieve en su pleno significado en un programa dinámico, en un programa que pretende la optimización durante un conjunto de períodos, pues de esta forma queda claro que la

(3) La técnica seguida en este caso no tiene un gran carácter de generalidad, pues está condicionada por la linealidad de las funciones y por el pequeño número de variables de estado. Posteriormente, se expondrán dos métodos más generalizados para la reducción del número de dimensiones, que son: el multiplicador de Lagrange y las aproximaciones sucesivas.

liquidez en un período supone la renuncia a unas inversiones en el mismo, posibilitando otras de mayor interés en períodos subsiguientes. - Contrariamente a esto, cabe decir que la práctica de inversiones y por tanto la vinculación de fondos líquidos en un momento del tiempo, conduce en el futuro, a la liberación de dicho capital, dando con ello lugar a la posibilidad de nuevas inversiones.

Existe en suma un proceso: liquidez-inversión-liquidez, cuyas etapas se encuentran fuertemente vinculadas en el tiempo, y por lo tanto un análisis riguroso del primero ha de ser planteado tomando al segundo como algo esencial. En el modelo anteriormente presentado, hemos pretendido ofrecer una simplificación de la realidad tomando como variables de estado capaces de definir el subsistema financiero la liquidez y la capacidad del mismo, y como variables de decisión la conservación de los fondos en liquidez o su vinculación a dos tipos de inversiones, fijas y circulantes, ambas condicionadas también mutuamente, puesto que su aprovechamiento eficaz requiere un crecimiento proporcionado de las mismas.

La Programación Dinámica supone un valioso instrumento para el análisis temporal de un problema como el expuesto, dado que permite la optimización del resultado y señala las decisiones que constituirán la política óptima y en consecuencia el nivel al que han de situarse las variables de estado definidoras del sistema objeto de estudio.

3. LA PLANIFICACION FINANCIERA A CORTO PLAZO

Anteriormente hemos examinado un modelo cuya perspectiva temporal abarcaba un plazo suficientemente amplio. Ahora nos vamos a plantear el problema de la planificación financiera a corto plazo, tema ya abordado por numerosos autores, los cuales han sintetizado sus elaboraciones en el marco de diversos modelos, fundamentalmente de carácter lineal. Entre ellos queremos destacar a Albach⁴, de cuyas formulaciones vamos a partir, para, posteriormente, convertirlas en un programa dinámico que pueda superar las estrictas limitaciones con que ha sido contemplado anteriormente.

Distinguiremos dentro de cada corriente financiera dos componentes: el procedente del giro del período y el procedente de las operaciones meramente financieras. Podremos así hablar de cobros y pagos del giro y cobros y pagos financieros.

Toda planificación ha de mantener un equilibrio, por lo que:

$$(14) \quad \sum_{t=1}^T (C_{gt} - P_{gt}) + \sum_{t=1}^T (C_{ft} - P_{ft}) \geq 0$$

siendo:

C_{gt} y P_{gt} = Cobros y Pagos del giro en el período t

(4) H. ALBACH. - Kapitalbindung und optimale Kassenhaltung. - Incluido en el "Finanzierungs-Handbuch" dirigido por H. Janberg. - Betriebswirtschaftlicher Verlag. - Wiesbaden, 1964. - Pags. 361-413

C_{ft} y P_{ft} = Cobros y Pagos financieros en el período t .

La empresa puede utilizar diversas líneas financieras: Crédito bancario (x_1), crédito de letra de cambio (x_2), crédito privado (x_3), aportaciones de los socios (x_4), etc. Cada una de dichas fuentes tendrá señalado un límite máximo, de ahí que podamos formular:

$$\begin{aligned} & x_1 \leq b_1 \\ (15) \quad & x_2 \leq b_2 \\ & x_3 \leq b_3 \\ & \dots \end{aligned}$$

El mantenimiento del equilibrio financiero y la capacidad limitada de las distintas fuentes de crédito que se le ofrecen a la empresa, suponen las restricciones del problema que estamos considerando, solo nos falta pues, señalar un objetivo en términos de costes o beneficios para completar el planteamiento.

La función objetivo podría ser enfocada en términos de costes, si pretendiéramos minimizar los costes de financiación de las diversas fuentes financieras. De igual forma, podría también utilizarse el criterio de maximizar los beneficios financieros, lo cual requiere el conocimiento de los rendimientos netos de cada línea de financiación.

Representado por c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) los rendimientos netos de cada línea de crédito, y suponiendo la invariabilidad de los mismos sea cual fuere el nivel de utilización de los distintos recursos, se podría establecer un modelo lineal, cuya función objetivo sería:

$$(16) \quad Z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

Las restricciones a las que habría de sujetarse serían las (14) y (15) más las derivadas de que todas las variables -principales y de holgura- habrían de ser positivas o nulas.

El programa expuesto nos daría como resultado las fuentes a emplear, su nivel óptimo de utilización y los beneficios financieros máximos.

Ahora bien, resulta conveniente señalar que los medios financieros en la empresa no figuran aislados, sino vinculados a unas inversiones, según quedó expuesto en el apartado anterior. Por ello, para que el plan financiero sea óptimo ha de comprender no solo la rentabilidad meramente financiera sino también su rentabilidad genuinamente económica o rentabilidad del giro.

La rentabilidad total de la empresa posee, pues, bajo nuestro actual punto de vista, dos componentes principales: el resultado del giro y el resultado financiero.

En el anterior modelo, el resultado del giro fué considerado como un dato y, por tanto, el resultado total máximo se derivaba de maximizar el resultado financiero. Pero interesa poner de manifiesto que, aparte de las fuentes crediticias contempladas, existen también los fondos que la empresa obtiene a través de la autofinanciación y que, por tanto, el anterior planteamiento debe ser revisado, en el sentido de dar entrada no solo a las decisiones de financiación sino también a las de producción, y no solo a las restricciones puramente financieras, sino también

a las que dimanar de las capacidades limitadas del mercado y de la producción.

De acuerdo con ésto, podemos presentar el siguiente modelo:

$$\begin{array}{ll}
 (17) & R_{\max} = c' p + v' f \quad \text{Plan de Beneficios} \\
 & B^* p + C^* f \leq W^* \quad \text{Restricciones financieras} \\
 & f \leq 1 \\
 & p \leq q \quad \text{Restricciones de mercado} \\
 & A p \leq k \quad \text{Restricciones de producción} \\
 & p, f \geq 0
 \end{array}$$

Siendo:

- c' = Vector de las aportaciones de resultados de las decisiones en la esfera del giro (medido en valor capital)
- v' = Vector de las aportaciones de resultados de las decisiones en la esfera financiera (medido en valor capital)
- p = Decisiones de producción
- f = Decisiones financieras
- R = Cifra de resultados del programa (medido en valor capital)
- B^* = Plan financiero acumulativo de posibilidades de decisión en la esfera del giro

- C^* = Plan financiero acumulativo de posibilidades de decisión en la esfera financiera
- W^* = Plan acumulativo de tesorería.
- l = Vector de cantidades disponibles de las posibilidades de decisión de la financiación externa
- q = Vector de cantidades de saturación de los distintos productos en el mercado.
- A = Matriz de coeficientes técnicos de producción
- k = Vector de cantidades disponibles de factores productivos.

Las limitaciones que presenta este modelo, reconocidas por el propio Albach, se derivan de considerar que los resultados responden a una función lineal, supuesto un tanto irreal a tenor de los cálculos que pueden efectuarse con los datos ofrecidos por la contabilidad de la empresa.

Precisamente para poder superar esta limitación, vamos a efectuar seguidamente una reformulación del modelo utilizando la técnica de la Programación Dinámica, para la cual no supone un obstáculo la no linealidad de la función objetivo.

3.1. Formulación por Programación Dinámica

Cualquier modelo de Programación Lineal puede ser también resuelto por Programación Dinámica. Cada restricción del modelo lineal supone una variable de estado para el programa dinámico y cada variable del primero equivale a un período del segundo y, por supuesto, constituyen

las variables de decisión⁵.

Supongamos, primeramente, que el modelo lineal establecido tiene solamente tres variables y dos restricciones por resultar las demás inoperantes. Su formulación podría ser la siguiente:

$$Z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1$$

(19)

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La formulación de este mismo problema por Programación Dinámica supondría contar con dos variables de estado definidoras del sistema, que representamos por y_1 e y_2 , las cuales pueden tomar valores enteros desde cero hasta b_1 y b_2 respectivamente, y serían precisas tres etapas o períodos para completar el cálculo. Para el primero de ellos, tendríamos:

$$(20) \quad f_1(y_1, y_2) = \text{Max}_{x_1} c_1 x_1$$

La región en la que habrá de encontrarse x_1 vendrá definida por las siguientes restricciones:

(5) H. P. KUNZI; O. MULLER; E. NIEVERGELT. -Einführungskursus in die dynamische Programmierung. -Springer Verlag. -Berlín-Heidelberg, 1968. Pags. 96-102.

$$(21) \quad \begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq y_1/a_{11} \\ 0 &\leq x_1 \leq y_2/a_{12} \end{aligned}$$

Para el segundo período, tendríamos:

$$(22) \quad f_2(y_1, y_2) = \text{Max}_{x_2} \left[c_2 x_2 + f_1(y_1 - a_{12} x_2, y_2 - a_{22} x_2) \right]$$

con:

$$(23) \quad \begin{aligned} 0 &\leq x_2 \leq y_1/a_{12} \\ 0 &\leq x_2 \leq y_2/a_{22} \end{aligned}$$

Por último para el tercero, quedará:

$$(24) \quad f_3(y_1, y_2) = \text{Max}_{x_3} \left[c_3 x_3 + f_2(y_1 - a_{13} x_3, y_2 - a_{23} x_3) \right]$$

con:

$$(25) \quad \begin{aligned} 0 &\leq x_3 \leq y_1/a_{13} \\ 0 &\leq x_3 \leq y_2/a_{23} \end{aligned}$$

Ni que decir tiene que a medida que se incrementen las variables de

decisión se incrementarán el número de secuencias a considerar, de forma tal que si en este caso fueran N , tendríamos:

$$(26) \quad f_N(y_1, y_2) = \text{Max}_{x_N} \left[c_N x_N + f_{N-1}(y_1 - a_{1N} x_N, y_2 - a_{2N} x_N) \right]$$

con:

$$(27) \quad \begin{aligned} 0 &\leq x_N \leq y_1/a_{1N} \\ 0 &\leq x_N \leq y_2/a_{2N} \end{aligned}$$

Pero no es éste el problema fundamental con que se tropieza para la resolución de un programa dinámico, sino el derivado del incremento en el número de variables de estado o restricciones del modelo lineal anterior. A medida que se produce dicho incremento en el número de dimensiones consideradas, son precisos útiles más poderosos que permitan encarar la solución, pues el mismo problema financiero estudiado vemos que en ningún caso puede comportar tan solo dos variables de estado, ya que es prácticamente imposible encuadrar en un marco tan reducido las restricciones derivadas del mercado y de la producción y las financieras.

Por ello vamos a exponer un método que nos permitirá abordar estos problemas, conocido con el nombre de "Aproximaciones Sucesivas" y que tendremos ocasión de aplicar tanto en este caso como en otros examinados en capítulos posteriores.

3.2. Método de aproximaciones sucesivas

Podemos describir este método en términos abstractos, de la forma siguiente: dada una ecuación funcional, ensayaremos una solución; si no es buena haremos una corrección determinada por la propia ecuación funcional y obtendremos una mejor estimación de la solución; continuaremos así hasta obtener la solución buscada o una aproximación con una precisión prefijada de antemano y considerada como tolerable.

Supongamos que la ecuación que queremos resolver tiene la forma:

$$(28) \quad L(u) = 0$$

y sea $G(u) = H$ una ecuación de más fácil solución.

Podemos escribir la ecuación (28) de la forma:

$$(29) \quad G(u) = G(u) - L(u)$$

Ensayaremos primeramente una solución u_0 de $G(u) = 0$. Determinaremos la segunda aproximación de u_1 por la ecuación:

$$(30) \quad G(u_1) = G(u_0) - L(u_0)$$

e igualmente la $(n+1)$ -ésima aproximación $u_n + 1$ por la ecuación:

$$(31) \quad G(u_{n+1}) = G(u_n) - L(u_n)$$

Si $G(u)$ es elegido convenientemente y si $L(u)$ posee ciertas propiedades, la serie $\{u_n\}$ converge hacia una solución límite de $L(u) = 0$

Sentadas estas ideas básicas, pasemos ahora a la aplicación de este método a la programación dinámica. Una ecuación tipo de un proceso dinámico podría ser la siguiente:

$$(32) \quad f(s) = \text{Max}_x \left[c(x, s) + f(T(x, s)) \right]$$

donde s , es la variable de estado y x la variable de decisión.

La manera habitual de abordar esta ecuación en el caso actual, en el que no se puede encontrar una solución analítica explícita, consiste en ensayar una primera función $f_0(s)$, y determinar luego una serie de funciones por medio de la relación de recurrencia:

$$(33) \quad f_{n+1}(s) = \text{Max}_x \left[c(x, s) + f_n(T(x, s)) \right] \quad n = 0, 1, \dots$$

No resulta difícil establecer que, en general, esta serie converge hacia una solución de (32) y que las condiciones de convergencia entrañan

también la unicidad de la solución.

Observemos que, de hecho, hay dos funciones desconocidas que aparecen en (32), la función objetivo $f(s)$ y la función de la política $x(s)$. Ambas funciones no son independientes, puesto que la una determina a la otra. La función de la política se determinará conociendo $f(s)$, por la operación de maximización que aparece en el segundo miembro de (32). La función $f(s)$ se determina conociendo la función de la política $x(s)$, por la resolución de :

$$(34) \quad f(s) = c(x, s) + f(T(x, s))$$

El conocimiento de la correspondencia existente entre $f(s)$ y $x(s)$ nos permite incrementar las posibilidades del método de aproximaciones sucesivas. En esta situación podemos examinar además del tipo de aproximación presentado aquí en (33) y que denominaremos "aproximación en el espacio de la función objetivo", otro tipo de aproximación específico de los procesos secuenciales de decisión, que es llamado "aproximación en el espacio de las políticas".

Comenzaremos ahora ensayando un valor de $x(s)$ en lugar de uno de $f(s)$. Probaremos, en primer término $x_0(s)$. La función objetivo correspondiente $f_0(s)$, es determinada como solución de :

$$(35) \quad f_0(s) = c(x_0, s) + f_0(T(x_0, s))$$

Para obtener una aproximación mejor, determinaremos $x_1 = x_1(s)$ de forma tal que maximice la función:

$$(36) \quad c(x, s) + f_0(T(x, s))$$

y después $f_1(s)$ por la relación:

$$(37) \quad f_1(s) = c(x_1, s) + f_1(T(x_1, s))$$

Continuaremos así, y obtendremos dos series: $\{x_n(s)\}$ y $\{f_n(s)\}$, la última de las cuales converge, en la mayor parte de los casos, de manera monótona⁶.

$$(38) \quad f_0(s) \leq f_1(s) \leq f_2(s) \leq \dots$$

La aproximación en el espacio de las políticas dará, generalmente, una aproximación monótona. El interés de este concepto se concreta en que puede ser aplicado a numerosas acciones sin relación con los procesos de decisión que representan. Constituye bajo esta forma la

(6) Esta afirmación y en general todo el método de "aproximación en el espacio de las políticas" puede ser examinado con todo detalle en:

R. BELLMAN. - Dynamic Programming: op. cit. Pags. 16-30. (Procesos deterministas) y Pags. 63-66 (Procesos estocásticos)

R. Bellman. - Adaptive Control Processes. - Op. cit. Pags. 232-248

base de una técnica llamada cuasi-linearización.

3.3. Utilización del método de aproximaciones sucesivas en el espacio de las políticas

Comenzaremos asignando los recursos definidos por las variables de estado y_3, y_4, \dots, y_m en una forma arbitraria cualquiera entre los diferentes procesos. Las disponibilidades de los recursos y_1 e y_2 se asignarán de forma que den lugar a un rendimiento máximo, o sea, según quedó, señalado en (26) y (27).

Lo expresado en el párrafo anterior consiste precisamente en ensayar una política de prueba, puesto que la asignación de recursos en la forma expuesta da lugar a unos valores de las variables de decisión que se toman como punto de partida.

Seguidamente se mantendrán las anteriores asignaciones para y_4, \dots, y_m , y la resultante de la optimización precedente para y_1 . Las correspondientes a y_2 e y_3 se determinarán de forma que den lugar a un rendimiento máximo.

La tercera etapa será idéntica a las anteriores, o sea, mantener las asignaciones de y_5, \dots, y_m, y_1 e y_2 y calcular las de y_3 e y_4 de acuerdo con lo ya indicado.

El proceso seguirá en forma exacta a la descrita hasta que se hayan realizado las asignaciones de todos los recursos a los distintos proce-

Los sucesivos rendimientos que se han ido obteniendo al maximizar las funciones objetivo correspondientes, similares a (26), habrán sido crecientes de acuerdo con (38), puesto que lo contrario no supondría aproximación a la política óptima

3.4. Comentarios al modelo expuesto

Hasta aquí no hemos apuntado ninguna ventaja con respecto a la resolución del modelo a través del método Simplex u otro cualquiera de los seguidos por los modelos lineales, pero queremos recordar que después de su planteamiento, apuntamos una limitación de importancia, derivada del carácter homogéneo de primer grado que tenía la función objetivo.

A pesar de que para el cálculo por programación dinámica hemos mantenido ese supuesto, no es preciso en modo alguno, los rendimientos pueden ser lineales, cóncavos o convexos sin que ello afecte o dificulte la solución del problema por el método expuesto. Entonces podríamos introducir en el anterior modelo hipótesis más realistas, puesto que ya no estamos condicionados en modo alguno por las posibilidades de solución.

De otra parte, interesa destacar que el cálculo de un programa dinámico no encuentra las dificultades con que chocan otros métodos de programación matemática, cuando se quiere imponer la condición de que las soluciones sean números enteros. También conviene señalar

que las necesidades de ordenador provocadas por los problemas resueltos por programación dinámica suelen ser menores que las derivadas de otros métodos de solución.

CAPITULO V

DECISIONES SECUENCIALES

EN EL SUBSISTEMA

DE INVERSION

CAPITULO V. - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTEMA DE INVERSION

1. INTRODUCCION

No vamos a plantearnos el problema, sin duda existente, que supone la sistematización acabada de las distintas decisiones que pueden ser tomadas en el subsistema de inversión de la empresa. Tampoco vamos a entrar en la clasificación de dichas inversiones según los puntos de vista susceptibles de manejar, ya que, indudablemente, ello nos apartaría de nuestro objetivo primordial, cual es el de optimizar la política del decisor desde un punto de vista económico y a lo largo de una serie de períodos de tiempo.

La única clasificación que en lo sucesivo vamos a utilizar dentro de este apartado se refiere a considerar las inversiones como de expansión o renovación según que las mismas vayan dirigidas a incrementar la ca-

pacidad existente en las empresas o al mantenimiento de la misma¹.

Ahora bien, antes de entrar en el análisis particularizado de cada uno de estos tipos de inversiones, conviene plantearnos un problema de gran importancia dentro de este contexto, cual es el del criterio a manejar para asignar un valor a las sucesivas transformaciones de las variables de estado, ocurridas como resultado de la política del decisor o de la acción conjunta de éste y los elementos aleatorios existentes. Cada vez que se presenta una gama de posibles inversiones, el decisor ha de inclinarse por una u otra en virtud de un criterio que, desde luego, ha de ser económico. Pero he aquí que no existe uno solo sino varios, según sea la perspectiva bajo la que se contemple el problema, de ahí que un análisis riguroso deba contar con la existencia de todos ellos, ya que de lo contrario la política que resultaría óptima, estaría sometida a unas hipótesis difícilmente alcanzables en la realidad. El valor de la función objetivo y por tanto, la política óptima que dió lugar a la misma, no serán únicos, sino cambiantes con el criterio manejado para valorar las sucesivas transformaciones en el tiempo.

2. LOS CRITERIOS DE ELECCION

La sola circunstancia de que existan varios criterios para elegir entre diversas inversiones, con resultados contradictorios en algunos casos,

(1) En relación con la clasificación de las inversiones, vid: H. PEUMANS. Valoración de Proyectos de Inversión. - Op. Cit. Pags. 25-35

ya pone al descubierto la dificultad que entraña la solución rigurosa del problema². Dethoor y Groboillot³ hablan de medir la "calidad económica" de uno u otro programa de inversiones, resaltando la ambigüedad del término calidad ya que la misma puede tener en cuenta:

- El beneficio que reporta dicho programa
- La rapidez con que se recuperan los gastos efectuados
- El interés del programa para la colectividad.
- El rendimiento del programa, etc.

Una medida conveniente sería aquella capaz de ponderar suficientemente los distintos aspectos expuestos, de ahí que sea prácticamente imposible el elaborar tal medida. Los criterios que se utilizan ponen énfasis en uno u otro aspecto, con lo que pueden entrar en colisión al llegar a resultados contradictorios.

No resulta fácil en absoluto el elaborar una norma que precise cuando ha de ser utilizado uno con preferencia al resto, puesto que ello depende de diversos factores, fundamentalmente el tipo de inversión estudiada, la política económica de la empresa y las circunstancias específicas por las que atraviesa el sistema económico. La complejidad de situaciones

(2) A.S. SUAREZ SUAREZ. - Los criterios clásicos de determinación de la rentabilidad y selección de inversiones. Crítica y esbozo de un nuevo modelo de programación de inversiones. - Racionalización. - Marzo-Abril 1969. - Pags. 73-79. - En dicho artículo se ilustran con algunos ejemplos representativos las diferencias apuntadas entre varios criterios.

(3) J.M. DETHOOR; J. L. GROBOILLOT. - La vie des équipements. - Dunod. Paris, 1968. Pag. 77.

que se resumen en estos enunciados es tal, que no podemos ni siquiera tratar de esbozar una respuesta a este problema, pues ello supondría alejarnos excesivamente de los objetivos que nos hemos señalado. De ahí, que nos limitemos simplemente a detallar los distintos criterios, primero para el caso de procesos deterministas y después para los aleatorios.

2.1. Criterios para el caso de procesos deterministas

Tales criterios se basan en el supuesto de un perfecto conocimiento de las corrientes de ingresos y gastos motivadas por la inversión o, al menos, en que la predicción que de las mismas se realiza, tiene un error despreciable y, por lo tanto, pueden ser tomadas con todo rigor para los cálculos posteriores.

2.1.1. Criterio del beneficio actual máximo

Un programa de inversiones puede ser resumido como un programa de gastos e ingresos. Denominando $Q(t)$ a la cuasi-renta (diferencia entre ingresos y gastos) correspondiente al período t , tendremos que el beneficio actualizado para un período comprendido entre t_0 y t_N será:

$$(1) \quad B_{t_0}(i) = \sum_{t=t_0}^{t_N} \frac{Q(t)}{(1+i)^{t-t_0}}$$

El programa cuyos beneficios actualizados sean negativos, no presentará interés alguno su puesta en práctica. En cuanto a aquellos otros con valores positivos, resultará más interesante el mayor de todos ellos.

Tiene interés el aplicar este criterio tomando distintos tipos de interés calculatorio (i), en orden a contemplar si la variación de éste afecta a la calificación otorgada a cada uno de los programas examinados.

2.1.2. Criterio del tipo de rentabilidad máximo

Denominamos tipo de rentabilidad de un programa de inversión que comprende el período (t_0, t_N) , al tipo de actualización por la que el beneficio actualizado correspondiente es nulo.

El tipo de rentabilidad mencionado será, pues, el valor que tome r en la ecuación:

$$(2) \quad B_{t_0}(r) = \sum_{t=t_0}^{t_N} \frac{Q(t)}{(1+r)^{t-t_0}} = 0$$

Es de hacer notar que r es la raíz de un polinomio de grado $t_N - t_0$, lo que quiere decir que admite otras tantas soluciones, si bien es tomada como solución la primera de ellas, al carecer el resto de significado económico preciso.

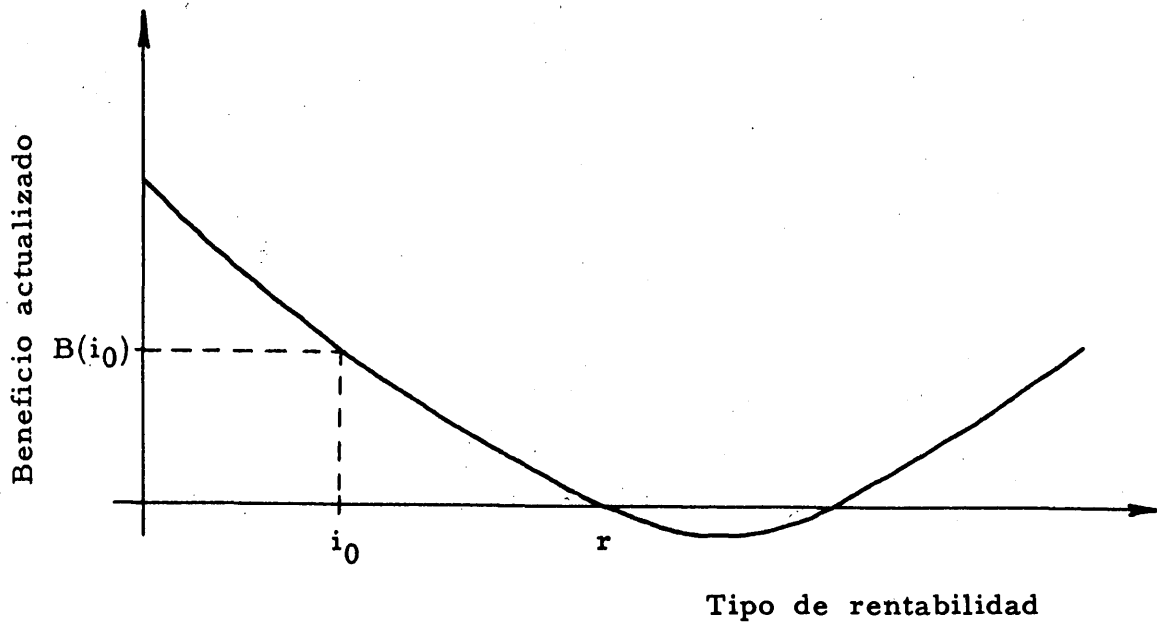


Fig. 1

De una manera global ante un conjunto de programas de posibles inversiones se puede adoptar aquel que proporciona la tasa de rentabilidad más alta.

2.1.3. Criterio del tiempo de recuperación mínimo

Cuando debido a circunstancias políticas o de cualquier otro orden, las inversiones presentan riesgos importantes, puede parecer interesante considerar el lapso de tiempo en el cual el beneficio actualizado se convierte en positivo, es decir el tiempo necesario para la recuperación de los capitales invertidos.

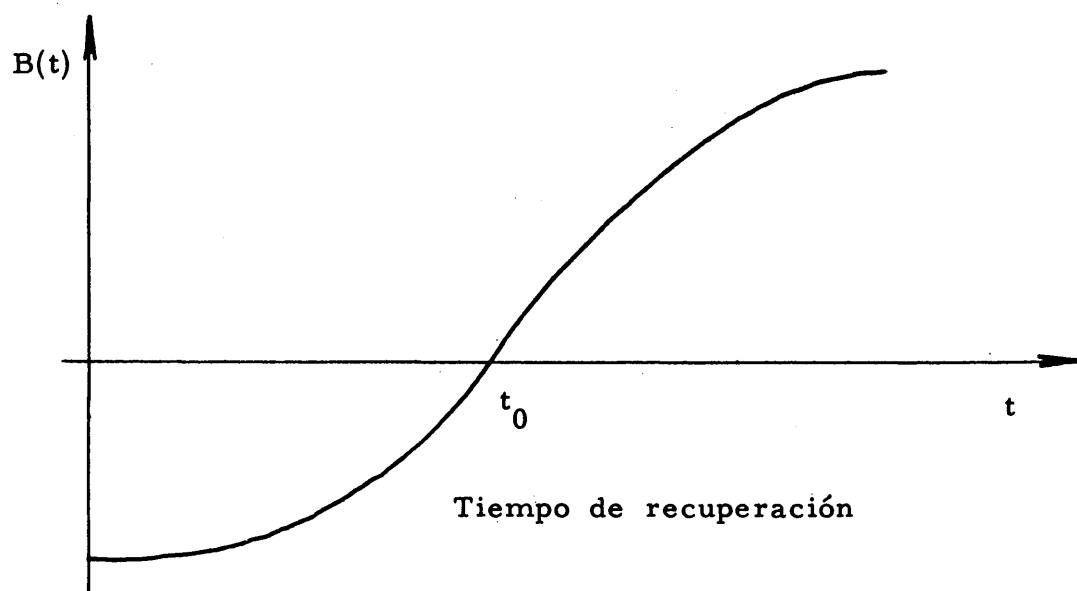


Fig. 2

Entre dos inversiones concurrentes se elige la que comporta un plazo de recuperación menor.

Este criterio tiene sentido cuando los gastos iniciales son importantes, y carece de él cuando se trata de una cadena de inversiones ya que en dicho caso al tener el programa una evolución como la que se recoge en la Figura 3 resulta difícil definir un tiempo de recuperación para el conjunto de dicho programa.

Ni que decir tiene que para nuestro estudio, que como se sabe comporta una cadena sucesiva de inversiones, este criterio presenta escaso interés.

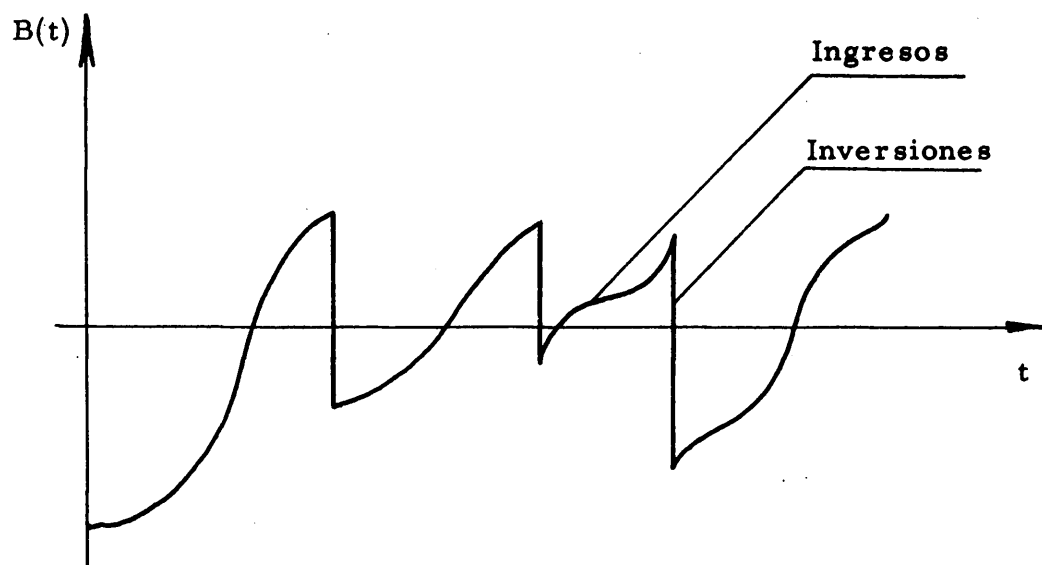


Fig. 3

2.1.4. Criterio del enriquecimiento en capital

Se llama enriquecimiento relativo en capital al cociente:

$$\frac{\text{Beneficio actualizado hasta el fin de la explotación}}{\text{Montante actualizado de los gastos durante el mismo período}}$$

Este criterio es aconsejable para la comparación de aquellos proyectos concurrentes cuyos gastos iniciales son muy cuantiosos.

2.1.5. Otros criterios

No suponen los criterios expuestos hasta aquí una relación exhaustiva; existen otros pero de menor importancia que los ya mencionados. Podríamos citar entre ellos.

- La rentabilidad marginal de una pequeña inversión
- El precio de venta medio de los productos acabados o servicios prestados⁴.

2.2. Criterios para el caso de procesos aleatorios

Aunque el estudio de los procesos deterministas suele estar frecuentemente más acabado en términos teóricos, no es menos cierto que la evolución de una magnitud económico-empresarial no suele responder a esas premisas, puesto que su porvenir, por efecto de la demanda y los precios suele estar sometido al azar.

Las previsiones de gastos e ingresos dejan de tener bajo esta nueva perspectiva, el carácter de seguridad absoluta, se consideran variables aleatorias, generalmente discretas, puesto que el tomarlas como continuas conduce a cálculos excesivamente complejos incluso en el caso de la distribución uniforme; cuya simplicidad comparada con el resto de distribuciones es francamente manifiesta. Además la información adicional

(4) J. M. DETHOOR; J. L. GROBOILLOT. - Op. cit. Pags. 86-87.

que se obtendría no compensa la mayor complejidad y el consiguiente incremento de costes que acarrea su puesta en práctica.

2.2.1. Criterio de la esperanza matemática máxima del beneficio actualizado

Entre un conjunto de programas de inversiones alternativos, este criterio conduce a adoptar aquel en el que la esperanza matemática del beneficio actualizado sea más elevada.

Se base este criterio en la ley de los grandes números, según la cual la empresa tendría una cuasi-certidumbre de obtener el beneficio calculado si repitiera sistemáticamente sus decisiones utilizando siempre este criterio para un gran número de casos.

Una tentación en la que muy bien podría caerse, consistiría en maximizar el beneficio modal, eligiendo el programa de inversiones cuyo beneficio más probable sea máximo. Pero tal criterio no resultaría suficientemente manejable, además de que al no tener en cuenta la dispersión de los valores puede llevarnos a decisiones poco acertadas, circunstancia que resulta más difícil con el criterio de la esperanza matemática, que sí considera tal dispersión aun cuando sea en forma indirecta.

La esperanza matemática de los beneficios para un período t comprendido entre t_0 y t_N será:

$$(3) \quad E [Q(t)] = \sum_{j=1}^n P_j Q_j$$

y la esperanza matemática de los beneficios actualizados para el período t_0, t_N será:

$$(4) \quad E [B_{t_0}(i)] = \sum_{t=t_0}^{t_N} \left[\frac{\sum_{j=1}^n P_j Q_j}{(1+i)^{t-t_0}} \right] = \sum_{t=t_0}^{t_N} \left[\frac{E [Q(t)]}{(1+i)^{t-t_0}} \right]$$

Como ya pusimos de manifiesto al examinar este criterio en el caso de procesos deterministas, tiene interés considerar diferentes tipos de interés calculatorio (i) en orden a contemplar las variaciones que se producen en la calificación de los programas examinados.

2.2.2. Criterio del tipo de rentabilidad esperado máximo

En un proceso de los ahora contemplados, el tanto de rentabilidad se convierte en una variable aleatoria y, por tanto, llamaremos "tipo de rentabilidad esperado" a aquel que da lugar a que la esperanza matemática de los beneficios actualizados sea nula. La clasificación de los proyectos de inversión alternativos por tantos de rentabilidad esperados crecientes supone la ordenación cualitativa de dichos proyectos en el sentido de este criterio.

Interesa destacar que el tipo de rentabilidad esperado no es idéntico a la esperanza matemática del tanto de rentabilidad, cuyo cálculo es realmente dificultoso, puesto que en un programa de inversiones como el

supuesto, que se extiende a n años, sería preciso calcular la esperanza de la raíz de un polinomio de grado n con coeficientes aleatorios⁵.

El tanto de rentabilidad esperado será el valor que tome r en la ecuación:

$$(5) \quad E \left[B_{t_0}(r) \right] = \sum_{t=t_0}^{t_N} \left[\frac{E [Q(t)]}{(1+r)^{t-t_0}} \right]$$

2.2.3. Criterio del riesgo de ruina

La elección de inversiones supone en la empresa decisiones a largo plazo y, por tanto, no se suceden muy repetidamente. Esta circunstancia puede dar lugar a que la ley de los grandes números antes mencionada no se cumpla, con lo cual el criterio de la esperanza matemática de los beneficios actualizados entraña un riesgo importante en no pocos casos.

Se denomina "riesgo de ruina" la probabilidad de que los beneficios actualizados sean menores que el montante máximo de pérdidas que puede soportar la empresa llamando a este último D y al "riesgo de ruina" R , tendremos:

$$(6) \quad R = P \left[B(i) < -D \right]$$

(5) Ibid. Pag. 88. Hay un ejemplo aclaratorio de ambos tantos de rendimiento.

Con este criterio clasificaríamos los proyectos de inversiones para expresar su calidad decreciente de acuerdo con los valores tomados por R, de menor a mayor.

Como facilmente puede colegirse, el empleo de este criterio es bastante delicado, por lo que suele ser utilizado como complemento de los anteriores, rechazando un programa previamente elegido por los otros criterios, si el riesgo de ruina que le corresponde es muy fuerte.

2.2.4. Otros criterios

Podríamos considerar los siguientes:

- La esperanza matemática del tiempo de recuperación.
- La esperanza matemática del enriquecimiento en capital.
- La esperanza matemática del precio de venta, etc.

La realidad es que estos criterios son muy poco manejables, por lo que son raramente utilizados, además, a diferencia del "riesgo de ruina" no traducen una preocupación mayor en el programa analizado.

2.3. Comentarios en torno a los criterios expuestos

Hemos visto que cada uno de los criterios anteriormente examinados trataba de medir la calidad de un programa de inversiones de acuerdo con su peculiar punto de vista. Ahora bien, todos ellos no son radical-

mente opuestos, tan sólo contienen diferentes matices, por ello quizá convenga agruparles nuevamente, de acuerdo con los objetivos que unos u otros persiguen fundamentalmente, y que podemos sintetizar en dos:

- Contemplar los beneficios a obtener.
- Contemplar los riesgos de pérdidas.

Dentro del primer grupo, o sea los encaminados a efectuar previsiones sobre los beneficios, tenemos:

- Para el análisis de procesos deterministas
 - El criterio del beneficio actual máximo
 - El criterio del tipo de rentabilidad máximo
 - El criterio del enriquecimiento en capital
- Para el análisis de procesos aleatorios
 - El criterio de la esperanza matemática máxima del beneficio actualizado
 - El criterio del tipo de rentabilidad esperado máximo.

Dentro del segundo grupo, o sea los que centran su atención en el examen de los posibles riesgos por pérdidas, tenemos:

- Para el caso de procesos deterministas
 - El criterio del tiempo de recuperación mínimo
 - El criterio del precio de venta
- Para el caso de procesos aleatorios

- El criterio del riesgo de ruina.

Indudablemente el tratar de someter al conocimiento actual lo que aún está por acontecer entraña no pocas dificultades. La empresa se tendrá que enfrentar con determinados cambios, coyunturales unos y estructurales otros. Es precisamente el pensar en los primeros, lo que da lugar a la introducción de los criterios probabilísticos para calcular los beneficios a obtener. Los segundos producen profundas modificaciones en las condiciones de funcionamiento de la empresa y raramente son probabilizables, de ahí que cuando sean previsibles convenga la utilización del criterio del tiempo de recuperación mínimo, y en todo caso el del riesgo de ruina, al menos con carácter complementario.

El primero de los dos últimos criterios mencionados, o sea, el del tiempo de recuperación mínimo ha tenido y tiene actualmente gran ascendiente entre los empresarios, quizá motivado por lo que anteriormente exponíamos, o sea, por los profundos cambios con que en los últimos tiempos ha tenido que enfrentarse la empresa, debidos fundamentalmente a los factores que impulsan el desarrollo económico, preocupación hoy fundamental en la economía de todos los países.

3. INVERSIONES DE EXPANSION

Se entiende generalmente por inversiones de expansión aquellas que permiten a las empresas hacer frente al desarrollo de la demanda en los sectores dinámicos de la economía⁶. Dicha expansión puede entenderse

(6) J. DEAN, - Capital Budgeting. - McGraw Hill Book Co. New York, 1951. Pags. 82 y sigs.

tanto en sentido cualitativo como cuantitativo, según que suponga la adición de nuevos productos a la gama de fabricados o simplemente el incremento de los ya existentes.

Las opciones alternativas que se presentan en este tipo de inversiones consisten en acometer la producción de los nuevos bienes o incrementar la de los antiguos o, por el contrario, renunciar a ella. Una u otra opción dependerá de un factor clave: la rentabilidad esperada de la nueva inversión. Supuesta ésta, entramos en el segundo problema consistente en elegir entre todas aquellas inversiones capaces de llevar a efecto el plan de expansión previsto.

Los criterios examinados con anterioridad nos permiten disponer del instrumental básico para el estudio detallado de los diferentes programas, en orden a orientar la decisión hacia aquel cuya calidad económica sea más elevada, vista ésta no solo bajo el prisma de un único criterio, sino de acuerdo con el conjunto de todos ellos.

Es interesante señalar ahora que las características de este tipo de inversiones responden a lo que hemos denominado un proceso secuencial, puesto que igual que el incremento de la producción no tiene lugar de una vez para siempre, sino en diversas ocasiones sucesivas, el de las inversiones precisas para posibilitar dicha producción, ha de responder a idénticas características, esto es, incrementarse a lo largo del tiempo. Las inversiones realizadas hoy condicionan las futuras y a su vez son condicionadas por las pasadas, circunstancia que como vimos es peculiar de todos los procesos secuenciales.

3.1. Formulación por Programación Dinámica

Teniendo en cuenta el principio de optimidad de Bellman y demás aspectos fundamentales de la programación dinámica señalados con anterioridad, y los criterios expuestos en este Capítulo para valorar la calidad de las inversiones entre las que hay que elegir, vamos a elaborar un modelo que contemple un proceso secuencial de inversiones durante N años. El hecho de fijar una limitación al horizonte temporal contemplado se debe a que en la realidad difícilmente puede ser concebida la planificación en la empresa sin la delimitación de un plazo temporal si bien para lograr una visión más completa de los problemas tratados, en el Capítulo posterior examinaremos un modelo con horizonte temporal ilimitado.

Las decisiones a tomar consistirán en señalar el número de equipos que deben ser adquiridos en cada período de tiempo. La valoración asignable a tales decisiones, elemento básico para definir distintos estados al sistema que puedan ser objeto de comparación, habrá de ser llevada a cabo en función de los distintos criterios anteriormente expuestos.

Tenemos pues como variables de decisión a las representativas del número de equipos a adquirir en cada período y como variables de estado a las que hacen referencia a los costes, rendimientos o beneficios imputables a cada estado del sistema.

El programa de inversiones deberá tener señalados para su tratamiento los diferentes datos que caracterizan el mismo, como por ejemplo pueden ser:

- Previsiones de producción durante el período considerado $\left[D (t) \right]$
($t = 1, 2, \dots, M$).
- Tipos de equipos que pueden ser adquiridos $\left[x_h (t) \right]$ ($h = 1, 2, \dots, H$)
- Precio de compra de los equipos $\left[P_h (t) \right]$
- Costes de entretenimiento de cada equipo $\left[C_h (t) \right]$
- Capacidad de producción de cada equipo $\left[K_h (t) \right]$
- Ingresos correspondientes a la producción de cada equipo $\left[I_h (t) \right]$
- Tanto o tantos de interés calculatorio (i).

De acuerdo con los anteriores datos podríamos delimitar, primeramente, el dominio de variación de las variables de estado, y después elaborar la función objetivo para cada uno de los distintos períodos examinados.

En cuanto al primer punto, o sea el dominio de variación de las variables de estado, quedará delimitado teniendo en cuenta los siguientes extremos:

- Capacidad de producción

$$(7) \quad \sum_{h=1}^H K_h (t) x_h (t) \geq D_t \quad (t = 1, 2, \dots, M)$$

La capacidad total de producción en cada uno de los períodos estudiados no puede ser inferior a la producción prevista.

- Incremento de la capacidad

$$(8) \quad x_h(t) \leq x_h(t+1) \quad (h = 1, 2, \dots, H)$$

$$(t = 1, 2, \dots, M)$$

El carácter expansivo del programa examinado da lugar al paulatino incremento del número de equipos.

- Límite de la capacidad

$$(9) \quad \sum_{h=1}^H x_h(t) \leq K \quad (t = 1, 2, \dots, M)$$

El número de equipos a adquirir puede encontrar una limitación en función de determinados factores.

Los valores de $x_h(t)$ que cumplen las condiciones señaladas diremos que pertenecen al conjunto A, es decir:

$$(10) \quad x_h(t) \in A$$

La elaboración de la función objetivo requiere definir previamente el criterio para valorar las transformaciones de uno a otro estado del sistema, por ello resulta necesario tener en cuenta los criterios que anteriormente hemos examinado para calibrar la calidad económica de las inversiones estudiadas.

3.1.1. Criterio del valor actual máximo

Suponiendo una duración para los equipos de M años y haciendo:

$$\begin{aligned}
 Q_h(0) &= P_h \\
 Q_h(1) &= I_h(1) - C_h(1) \\
 &\dots\dots\dots \\
 Q_h(M) &= I_h(M) - C_h(M)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

tendremos que el valor actual de un equipo del tipo h sera:

$$B_0(i) = \sum_{t=0}^M \frac{Q_h(t)}{(1+i)^t}
 \tag{12}$$

con lo que la función objetivo para el primer período examinado será:

$$f_1(B_0) = \text{Max}_{x_h(1) \in A} \sum_{t=0}^M \sum_{h=1}^H \frac{Q_h(t)}{(1+i)^t} x_h(1)
 \tag{13}$$

y para el período N

$$f_N(B_0) = \text{Max}_{x_h(N) \in A} \sum_{t=N-1}^{N+M-1} \sum_{h=1}^H \frac{Q_h(t)}{(1+i)^t} x_h(N) + f_{N-1}(B_0)
 \tag{14}$$

Los valores tomados por x_h para $h = 1, 2, \dots, H$, en cada uno de los diferentes períodos de tiempo $(1, 2, \dots, M)$ comprendidos en el conjun

to A y maximizando la función objetivo considerada, constituyen las soluciones del programa estudiado.

Para apreciar la sensibilidad del mismo, será interesante estudiar su optimización para distintos valores de i , e igualmente, para valores cambiantes de P_h , I_h y C_h , o lo que es lo mismo de Q_h , con lo cual podría apreciarse si una alteración en el tipo de interés calculatorio, o en los precios de adquisición, costes de entretenimiento e ingresos esperados consigue alterar la estructura de la solución óptima hallada.

También resulta de interés ampliar el plazo señalado para el programa, incluso hasta considerar un horizonte temporal ilimitado, ya que también pueden presentarse diferencias en la estructura de la solución óptima por este motivo.

3.1.2. Criterio del tipo de rentabilidad máximo

La valoración de las transformaciones de uno a otro estado del sistema son realizadas de acuerdo con el tipo de rentabilidad de las inversiones, que como vimos, queda determinado por el valor de r_h obtenido de la siguiente ecuación.

$$(15) \quad B_0(r_h) = \sum_{t=0}^M \frac{Q_h(t)}{(1+r_h)^t} = 0$$

La función de rendimiento a maximizar para el primer período será:

$$(16) \quad f_1(r) = \sum_{h=1}^H r_h(1)$$

$$x_h(1) \in A$$

y para el período N, tendremos:

$$(17) \quad f_N(r) = \text{Max}_{x_h(N) \in A} \sum_{h=1}^H r_h(N) + f_{N-1}(r)$$

Igual que al manejar el criterio anterior, podemos suponer distintos valores en los parámetros P_h , C_h e I_h de una parte, y de otra diversos horizontes temporales, a fin de calibrar la sensibilidad de la solución obtenida para aquella situación que nosotros juzgamos como más probable.

3.1.3. Criterio del enriquecimiento en capital

Presenta como diferencia con relación al del valor actual máximo, el que los beneficios actualizados son tomados en relación al montante de gastos también actualizado, o sea que para un equipo del tipo h tendríamos:

$$(18) \quad E_0(i) = \frac{\sum_{t=0}^M Q_h(t) (1+i)^{-t}}{P_h + \sum_{t=0}^M C_h(t) (1+i)^{-t}}$$

La función objetivo correspondiente al primer período será:

$$(19) \quad f_1(E_0) = \sum_{h=1}^H \frac{\sum_{t=0}^M Q_h(t) (1+i)^{-t}}{P_h + \sum_{t=0}^M C_h(t)(1+i)^{-t}}$$

$$x_h(1) \in A$$

y para el período N, tendremos:

$$(20) \quad f_N(E_0) = \text{Max}_{x_h(N) \in A} \sum_{h=1}^H \frac{\sum_{t=N-1}^{N+M-1} Q_h(t) (1+i)^{-t}}{P_h + \sum_{t=0}^M C_h(t) (1+i)^{-t}} + f_{N-1}(E_0)$$

La sensibilidad del programa puede ser apreciada en idéntica forma a la descrita para los anteriores, por ello no reiteramos nuevamente el camino a seguir para su puesta en práctica.

3.2. Interpretación de los resultados del modelo

Supongamos que los resultados obtenidos para los distintos x_h en cada período, han sido los que siguen, según cada uno de los criterios expuestos:

Período	Valor actualizado	Tipo de rentabilidad	Enriquecimiento en capital
1	(a_1, a_2, \dots, a_H)	$(a'_1, a'_2, \dots, a'_H)$	$(a''_1, a''_2, \dots, a''_H)$
2	(b_1, b_2, \dots, b_H)	$(b'_1, b'_2, \dots, b'_H)$	$(b''_1, b''_2, \dots, b''_H)$

M	(m_1, m_2, \dots, m_H)	$(m'_1, m'_2, \dots, m'_H)$	$(m''_1, m''_2, \dots, m''_H)$

El problema que se presenta ahora es el de elegir entre una de las tres políticas óptimas halladas. No cabe duda que un factor interesante a considerar sería el coste de cada uno de los programas, no porque los criterios anteriores no lo hayan tenido implícitamente en cuenta, sino para evaluar el riesgo de cada uno de ellos. Mejor que esto sería hallar la política óptima correspondiente a un coste mínimo y compararla con las ya obtenidas.

La ecuación de recurrencia para la determinación de tal política óptima sería:

$$(21) \quad f_N(C) = \text{Min}_{x_h(N) \in A} \left\{ \sum_{h=1}^H P_h \left[x_h(N) - x_h(N-1) \right] + \sum_{h=1}^H C_h x_h(N-1) + f_{N-1}(x) \right\}$$

Anteriormente ya dijimos que estos criterios no son sustancialmente opuestos, de ahí que en aquellos supuestos caracterizados por parecidas circunstancias, todos ellos pueden llegar a una solución idéntica, es decir, que pudiera darse lo siguiente:

$$a_1 = a'_1 = a''_1 ; \quad a_2 = a'_2 = a''_2 ; \quad \dots ; \quad a_H = a'_H = a''_H$$

$$b_1 = b'_1 = b''_1 ; \quad b_2 = b'_2 = b''_2 ; \quad \dots ; \quad b_H = b'_H = b''_H$$

En tanto exista una determinada estabilidad en los parámetros considerados por los anteriores criterios, la política óptima puede ser única

para todos ellos. Pero la variación de alguno de tales parámetros (por ejemplo los ingresos esperados) a partir de un determinado período, puede dar lugar a la aparición de distintas políticas óptimas. En un caso así, resulta conveniente posponer el análisis de este período de inestabilidad hasta tanto se acumule una mayor información que, lógicamente, podrá ser obtenida en mayor grado a medida que nos acerquemos a su momento de comienzo. Inicialmente puede tomarse aquel programa cuyas expectativas ofrezcan mayores visos de cumplirse (por ejemplo: mantenimiento de los precios de los productos vendidos frente a su caída).

3.3. Extensión probabilística

Los criterios manejados son todos ellos para el caso de procesos deterministas. Ahora bien, conviene tener presente que el conocimiento previo de ingresos y gastos no tiene por qué ser ni perfectamente conocido, ni con un error que pudiéramos calificar de despreciable.

En tales casos, lo que pueden ser conocidas son las distribuciones de probabilidad de tales ingresos y gastos, con lo que la aplicación de los criterios basados en la esperanza matemática no presentan dificultad alguna. La diferencia respecto a los anteriores estriba en la introducción de este concepto de probabilidad, pero esto no altera la sustancia de las ecuaciones de recurrencia expuestas, simplemente hay que introducir el anterior concepto.

La ecuación de recurrencia correspondiente al período N , aplicando el

criterio de la esperanza matemática máxima del beneficio actualizado sería:

$$(22) \quad f_N(B_0) = \text{Max}_{x_h(N) \in A} \sum_{t=N-1}^{N+M-1} \sum_{h=1}^H \left[\frac{E Q_h(t)}{(1+i)^t} \right] x_h(N) + f_{N-1}(B_0)$$

con:

$$(23) \quad f_1(B_0) = \sum_{t=0}^M \sum_{h=1}^H \left[\frac{E [Q_h(t)]}{(1+i)^t} \right] x_h(1)$$

$$x_h(1) \in A$$

Si el criterio a aplicar fuera el del tipo de rentabilidad esperado máximo tendríamos:

$$(24) \quad f_N(r) = \text{Max}_{x_h(N) \in A} \sum_{t=N-1}^{N+M-1} \sum_{h=1}^H \left[\frac{E [Q_h(t)]}{(1+r)^t} \right] + f_{N-1}(r)$$

siendo:

$$(25) \quad f_1(r) = \sum_{t=0}^M \sum_{h=1}^H \left[\frac{E [Q_h(t)]}{(1+r)^t} \right]$$

$$x_h(1) \in A$$

Si se siguiera el criterio del riesgo de ruina la ecuación de recurren-

cia sería:

$$(26) \quad f_N (R) = \text{Min}_{x_h(N) \in A} \sum_{h=1}^H R_h (N) + f_{N-1} (R)$$

con:

$$(27) \quad f_1 (R) = \sum_{h=1}^H R_h (1)$$

$$x_h (1) \in A$$

4. INVERSIONES DE RENOVACION

Uno de los problemas básicos de nuestra sociedad insutrial lo constituye la renovación de los equipos anticuados por otros más modernos⁷. A medida que se va produciendo el envejecimiento de un equipo, tanto por su desgaste propiamente físico, como por el efecto que denominamos obsolescencia o envejecimiento económico, motivado por la aparición de otros nuevos, llega un momento en que compensa la sustitución del primero por los recientemente aparecidos, a pesar de los cuantiosos desembolsos iniciales que ésto trae consigo, dado lo elevado de los costes de adquisición y puesta en marcha, de la pérdida que supone el deshacerse del equipo antiguo, de los paros que indudablemente se producirán en el trabajo y de los costes ocasionados por el nuevo aprendi-

(7) Vid. J.A. SCHUMPETER. -Capitalismo, Socialismo y Democracia. - Aguilar. Madrid, 1968. Pags. 118-124

zaje de la mano de obra, pues tales efectos son suficientemente compensados con el crecimiento de la productividad y la consiguiente reducción de los precios de coste de los productos fabricados.

Como las decisiones relativas a la reparación de los equipos antiguos o sustitución de éstos por otros nuevos tienen que ser tomadas cada determinados períodos de tiempo, no cabe duda que se trata de un proceso secuencial de decisión.

Nuestro objetivo se centra, pues, en la determinación de políticas óptimas de reparación y reemplazamiento, partiendo de diversas hipótesis relativas a los costes y características de empleo actuales y futuras⁸.

A efectos de lograr una mayor claridad expositiva vamos a deslindar el envejecimiento físico del económico, por ello examinaremos en primer término el puramente físico, y posteriormente daremos entrada al económico derivado del progreso tecnológico.

4.1. Envejecimiento físico

Con el fin de simplificar la discusión, supondremos la existencia de un solo equipo, que anualmente produce un determinado rendimiento y requiere un cierto entretenimiento. Dicho equipo puede ser reemplazado

(8) R. BELLMAN. - Equipment replacement policy. - Journal of Society of Industrial Applied Mathematics, vol 3. 1955. -Pags. 133-136

en todo momento por otro nuevo. Se supone que tanto el rendimiento como los costes de entretenimiento como el valor de reposición del equipo antiguo son funciones conocidas que dependen de la edad del mencionado equipo.

Representando gráficamente estas funciones tendremos:

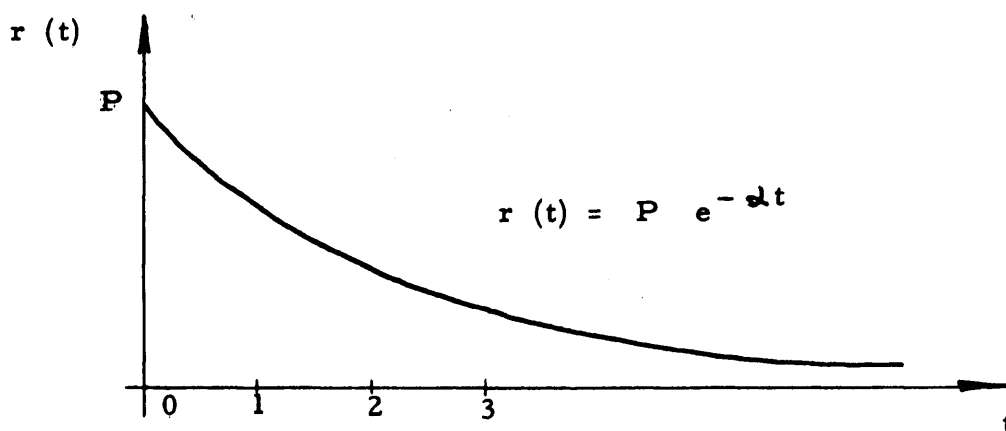


Fig. 4

donde:

$r(t)$ = Rendimiento anual de un equipo de t años de edad

P = Rendimiento de un equipo nuevo

α = Rapidez con que el rendimiento tiende a su límite

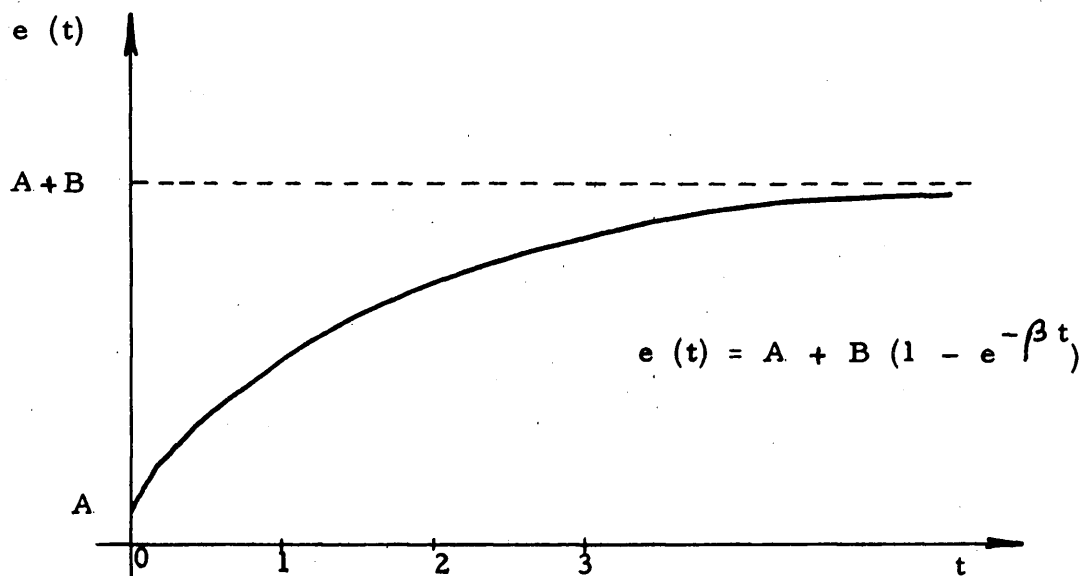


Fig. 5

donde:

$e(t)$ = Coste de entretenimiento anual de un equipo de t años de edad

A = Coste de entretenimiento de un nuevo equipo

$A+B$ = Límite hacia el que tiende el coste de entretenimiento cuando el equipo envejece.

β = Rapidez con que el coste de entretenimiento tiende a su límite

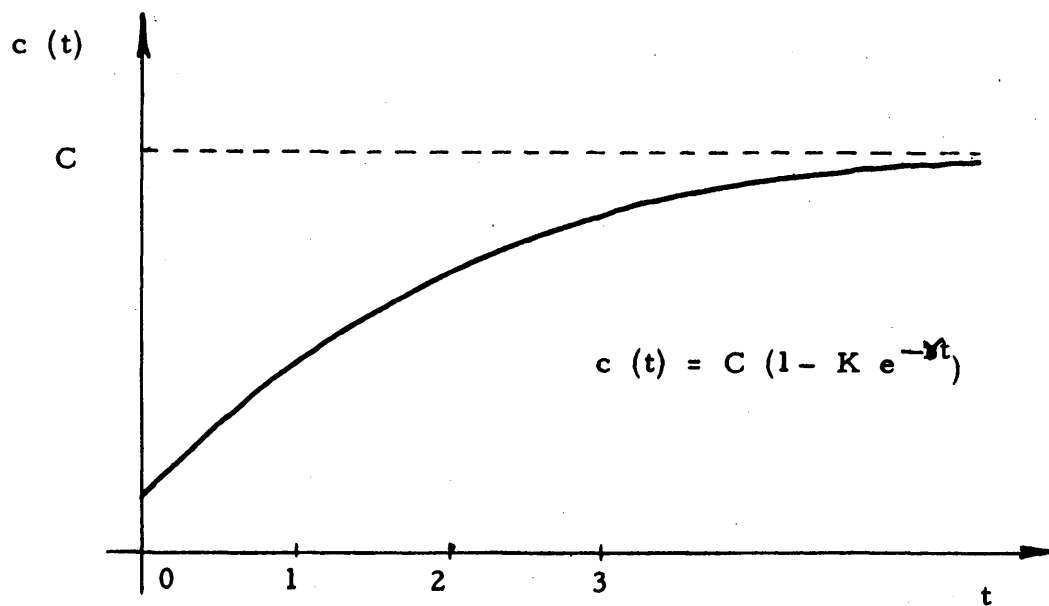


Fig. 6

Donde:

$c(t)$ = Coste de reemplazamiento de una máquina de t años

C = Precio de adquisición de un equipo nuevo

γ = Rapidez con que el coste de reemplazamiento tiende a su límite.

K = Fracción de C que queda como valor de reposición después de la adquisición.

4.1.1. Formulación por programación dinámica

Las decisiones que han de ser tomadas en los instantes $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ han de elegir entre conservar o mantener el equipo antiguo o reemplazarle por el nuevo. Designaremos estas elecciones por las letras M (mantener) y R (reemplazar).

La función objetivo a considerar será aquella que represente el beneficio total en el período considerado, suponiendo la existencia en principio de un equipo de t años de edad. La maximización de tal función supondrá seguir una política óptima.

El tipo de actualización que introducimos, cuya conveniencia de utilización en el caso de que el horizonte temporal contemplado sea ilimitado, ya fue puesta de manifiesto al estudiar genéricamente tales procesos, da lugar a que un beneficio unitario realizado T períodos después del actual, sea igual a $\frac{1}{(1+i)^{-T}}$ que a partir de este momento representamos por v^T .

La ecuación funcional representativa de la función objetivo será:

$$(28) \quad f(t) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} \text{R: } r(0) - e(0) - c(t) + v f(1) \\ \text{M: } r(t) - e(t) + v \cdot f(t+1) \end{array} \right]$$

expresiva de que entre las dos alternativas, reemplazar o conservar, resulta más interesante aquella que produce los mayores beneficios, tomando como elementos para el cálculo de los beneficios ocasionados

por la renovación, los rendimientos correspondientes al equipo nuevo en el período examinado, los costes de entretenimiento de dicho equipo en el mismo período, los costes de reemplazamiento del equipo antiguo que tiene actualmente t años de edad y los beneficios acumulados en ejercicios posteriores una vez actualizados. Los beneficios derivados de conservar el equipo antiguo serán iguales al rendimiento de dicho equipo en el período estudiado menos los costes de entretenimiento del mismo en tal intervalo, más los beneficios acumulados en ejercicios posteriores previamente actualizados.

La política óptima será aquella que suponga conservar el equipo antiguo hasta el momento T en el cual $R > M$.

Denominando:

$$(29) \quad P(t) = r(t) - e(t)$$

podemos formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$f(0) = P(0) + v f(1)$$

$$f(1) = P(1) + v f(2)$$

- - - - -

$$f(T-1) = P(T-1) + v f(T)$$

$$f(T) = -C(T) + f(0) = -C(T) + P(0) + v f(1)$$

Resolviendo el sistema (30) obtenemos la relación:

$$(31) \quad f(1) = \frac{[P(1) + v P(2) + \dots + v^{T-2} P(T-1) + v^{T-1} P(0)] - v^{T-1} C(T)}{1 - v^T}$$

El valor de T para el que se hace máxima la expresión $f(1)$ es el momento en el que resulta interesante llevar a cabo la renovación estudiada. El valor de T que maximiza $f(1)$ también maximiza, obviamente, $f(0)$.

4.1.2. Comentarios al supuesto de economía estacionaria

El caso contemplado responde a los típicos supuestos de una economía estacionaria, puesto que en los diferentes períodos que comprende el mismo, no existe progreso tecnológico alguno. Los nuevos equipos fabricados son idénticos a los que salen de servicio, de ahí que la renovación sea función del deterioro físico sufrido por el equipo a lo largo del tiempo.

Este modelo que ha tenido muy diversas formulaciones no responde actualmente a las características del sistema económico, puesto que el progreso tecnológico es uno de los factores determinantes del desarrollo, que todos los países tratan de conseguir.

Dicho progreso produce un impacto en los equipos existentes en funcionamiento, al hacer posible la puesta en servicio de otros más perfeccionados y que, por tanto, producen mejor calidad a costes menores. En suma, constituye un factor determinante de la renovación de los equipos mencionados, al producir en éstos un envejecimiento económico u obsolescencia.

4.2. Envejecimiento económico

Superando las limitaciones que acabamos de apuntar basadas en el supuesto de que tanto el rendimiento como los costes de entretenimiento y reemplazamiento eran función únicamente de la edad del equipo, vamos ahora a considerar la incidencia del progreso tecnológico.

Un equipo fabricado N años más tarde producirá un rendimiento superior a P , tendiendo finalmente a un rendimiento inicial $P + Q$. La mejora del rendimiento inicial, es pues, función de la fecha de fabricación. Puesto que dicha fecha está determinada por la diferencia entre la fecha N en la que el equipo es tenido en consideración y la edad t que tiene el mencionado equipo, podemos escribir ahora la siguiente función de rendimiento:

$$(32) \quad r_N(t) = \left[P + Q (1 - e^{-\eta(N-t)}) \right] e^{-\alpha t}$$

en la que η es el factor explicativo de la rapidez con que el incremento de rendimiento debido al progreso tecnológico tiende a su límite.

Por lo que se refiere a los costes de entretenimiento han de tenerse en cuenta los siguientes impactos producidos por el progreso tecnológico:

- Que el coste de entretenimiento de un equipo nuevo tiende a cero.
- Que el crecimiento del coste de entretenimiento debido al paso del tiempo es menor cada año.

Teniendo en cuenta estos hechos, podemos escribir ahora la función representativa del coste de entretenimiento como sigue:

$$(33) \quad e_N(t) = A e^{-\lambda(N-t)} + B(1 - e^{-\beta t}) S^{N-t}$$

en la que λ expresa la rapidez con que el coste de entretenimiento de un equipo nuevo tiende a cero, y S es el factor representativo del menor crecimiento del coste de entretenimiento a lo largo del tiempo.

Podemos representar gráficamente estos efectos en la forma que puede apreciarse en la Figura 7.

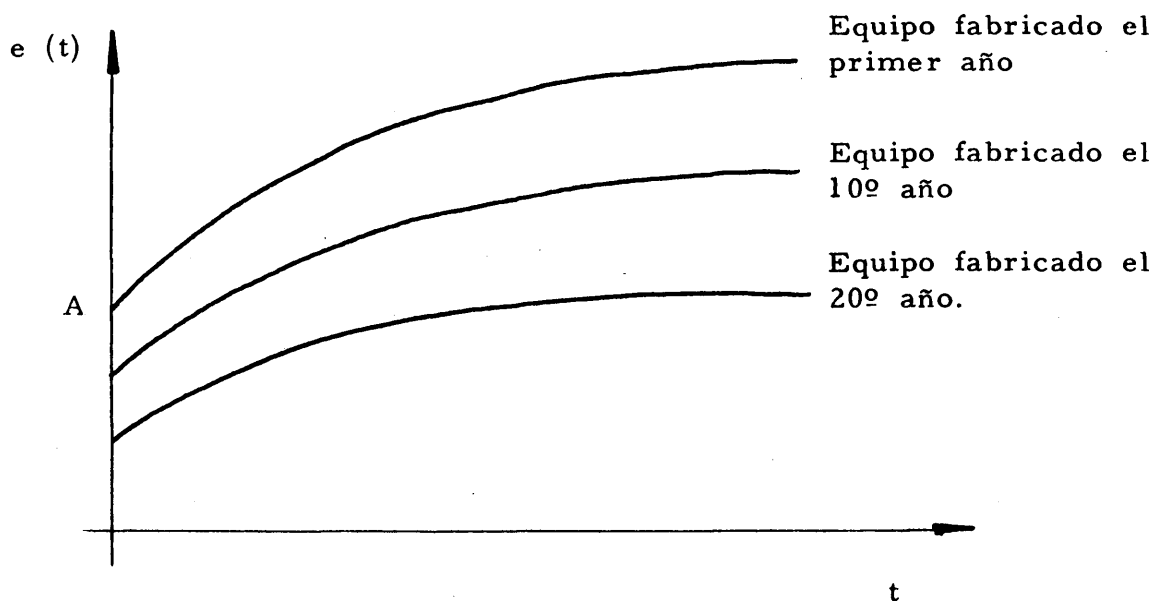


Fig. 7

A medida que nos alejamos en el tiempo, los costes de entretenimiento de los equipos nuevos se aproxima más al eje de coordenadas. De otra parte el crecimiento de dichos costes es tanto menor cuanto más ampliamos la perspectiva temporal.

En cuanto al impacto que el progreso tecnológico causa en los costes de reemplazamiento podemos formular diversos supuestos, que crezcan, decrezcan o permanezcan constantes. Esto nos lleva a mantener la hipótesis formulada anteriormente al tratar el envejecimiento físico.

4.2.1. Formulación por Programación Dinámica

Denominaremos $f_N(t)$ al valor actual en el año N de los beneficios totales producidos por un equipo que tiene t años de edad y que es reemplazado siguiendo una política óptima.

La forma de actualizar los beneficios futuros es idéntica a la ya descrita. Supondremos un plazo de duración del proceso igual a N_0 períodos, después de los cuales se encuentra finalizado. Tendremos pues, que:

$$(34) \quad f_{N_0+1}(t) \equiv 0$$

Caso de que se decida la adquisición de un nuevo equipo que reemplace al antiguo los beneficios actualizados en el momento N serán:

$$(35) \quad f_N^{(R)}(t) = r_N(0) - e_N(0) - C_N(t) + v f_{N+1}(1)$$

Si por el contrario, la decisión tomada consiste en conservar el equipo antiguo, los mencionados beneficios actualizados serán:

$$(36) \quad f_N^{(M)}(t) = r_N(t) - e_N(t) + v f_{N+1}(t+1)$$

Considerando ambas hipótesis, obtenemos la ecuación funcional, representativa de la función objetivo buscada, que será:

$$(37) \quad f_N(t) = \text{Max} \left[f_N^{(R)}(t), f_N^{(M)}(t) \right]$$

o sea:

$$(38) \quad f_N(t) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} \text{R: } r_N(0) - e_N(0) - C_N(t) + v f_{N+1}(1) \\ \text{M: } r_N(t) - e_N(t) + v f_{N+1}(t+1) \end{array} \right]$$

Como antes hemos puesto de manifiesto, $f_N(t)$ será igual a cero para $N \geq N_0 + 1$. Dando valores a N comprendidos entre N_0 y 1, iremos obteniendo sucesivamente $f_{N_0}(t)$, $f_{N_0-1}(t)$, ..., $f_2(t)$, $f_1(t)$. Esta última representa los beneficios óptimos de un proceso que comienza en el año 1 y se extiende hasta el N_0 . La serie de elecciones óptimas -R ó M- realizadas después de cada una de las $f_N(t)$ halladas para los distintos valores de N , constituyen la política óptima buscada.

4.2.2. Comentarios al supuesto de economía dinámica

El supuesto de obsolescencia que hemos introducido, supone una versión más cercana a la realidad, por cuanto que implica la existencia de progreso tecnológico, factor que como sabemos constituye una de las auténticas fuerzas económicas de nuestro tiempo⁹.

El modelo anterior pretende recoger unicamente este impacto, pero que duda cabe que sus efectos pueden verse alterados por la presencia de otros factores que no hemos tenido presentes.

J. Desrousseau¹⁰ pone de manifiesto la importancia que puede tener el efecto inflacionista, el cual puede compensar en todo o en parte las reducciones experimentadas en los costes de reemplazamiento y de entretenimiento de los nuevos equipos. Como por otra parte, es lógico pensar, que los costes de entretenimiento de los equipos en servicio se incrementarán con el proceso inflacionista nos encontramos con que el supuesto de economía dinámica puede verse reducido a un caso de economía estacionaria.

El tipo de interés calculatorio real i se corresponde con unos costes reales, luego los costes nominales presentarán correspondencia con di-

(9) J. L. SAMPEDRO. -Las fuerzas económicas de nuestro tiempo. - Guadarrama. Madrid, 1967.

(10) J. DESROUSSEAU. - Le coût du temps et le rythme des matériels, Quelques problèmes de gestion des entreprises. -Annales des Mines. Noviembre, 1961. Etude évolutive des productions capitalistiques. - Note Charbonnages de France, 1961-62. -Théorie du déclassement et du prix de revient réel dans les industries capitalistiques. -Revue Française de Recherche Opérationelle, nº 26, 1^{er} trimestre, 1963.

cho tipo de interés más la tasa de inflación k , o sea con $i + k$. Otro tanto podría decirse de los costes de entretenimiento que se convertirían ahora en $e(t) + k$.

Suponiendo que el ritmo de progreso es igual al de inflación, nos encontramos con que los supuestos de economía estacionaria y dinámica podrían relacionarse de la forma siguiente:

	<u>Tipo de actualización</u>	<u>Costes de entretenimiento</u>	<u>Ritmo de progreso</u>
Economía dinámica	i	$e(t)$	k
Economía estacionaria	$i + k$	$e(t) + k$	$k - k = 0$

Ni que decir tiene que el supuesto examinado no tiene muchas posibilidades de darse en la práctica, ya que es muy aventurado pensar en una total coincidencia entre ritmo de progreso y de inflación. No obstante, tal supuesto no llevado a tales extremos, es consustancial de nuestra época pues estos dos factores aparecen como inseparables compañeros del desarrollo económico.

4.3. Consideración de nuevas hipótesis

La técnica de solución descrita posee la suficiente generalidad como para ser aplicada a la numerosa gama de variedades que pudiera presentarse a la hora de renovar el equipo, sin embargo, vamos a introducir

otros nuevos supuestos limitativos a fin de obtener modelos que traten de acercarse a la realidad en una mayor medida. La contrapartida lógica será una complicación superior en la formulación y resolución de tales modelos, debido al mayor número de restricciones consideradas.

Examinaremos tres casos; primeramente supondremos que existe una nueva posibilidad de elección, la de comprar un equipo de ocasión, en segundo término consideraremos que dicha posibilidad consiste en efectuar una revisión general del equipo antiguo y, por último, examinaremos la posibilidad de reemplazamiento preventivo para evitar averías suponiendo que el sistema evoluciona a la manera de un proceso markoviano.

4.3.1. Compra de un equipo de ocasión

Representaremos esta posibilidad de elección por O y supondremos conocida la función de costes para este equipo, $g_N(t, m)$, de forma tal que quede determinado el coste de reemplazamiento de un equipo de t años por otro de m años en el momento N .

La ecuación de recurrencia para este caso será:

$$(39) \quad f_N(t) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} \text{R: } r_N(0) - e_N(0) - C_N(t) + v f_{N+1}(1) \\ \text{O: } r_N(m) - e_N(m) - g_N(t, m) + v f_{N+1}(m+1) \\ \text{M: } r_N(t) - e_N(t) + v f_{N+1}(t+1) \end{array} \right]$$

Si diéramos a m el valor cero e hiciéramos:

$$(40) \quad C_N(t) = g_N(t, 0)$$

tendríamos que el reemplazamiento por un equipo nuevo no es sino un caso particular de un equipo de m años.

4.3.2. Revisión general del equipo antiguo

El efectuar esta nueva alternativa, que representaremos por (G) , da lugar a que un equipo de t años sometido a revisión tendrá las características de uno no revisado de una edad inferior igual a t' años.

La inclusión de esta posibilidad da lugar a una nueva dimensión del problema examinado. La función objetivo deberá considerar ahora el valor actual en el año N de los beneficios totales producidos por un equipo de t_1 años que ha sido revisado por última vez cuando contaba con t_2 años.

Los rendimientos y costes serán ahora función tanto de la edad actual t_1 como de t_2 , fecha en la que fue revisado el equipo por última vez.

Teniendo ésto en cuenta y apoyándonos en las elaboraciones anteriores, escribimos la relación de recurrencia siguiente:

$$(41) \quad f_N(t_1, t_2) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} \text{R: } r_N(0,0) - e_N(0,0) - C_N(t_1, t_2) + v f_{N+1}(1,0) \\ \text{M: } r_N(t_1, t_2) - e_N(t_1, t_2) + v f_{N+1}(t_1 + 1, t_2) \\ \text{G: } r_N(t_1, t_1) - e_N(t_1, t_1) - G_N(t_1, t_2) + v f_{N+1}(t_1 + 1, t_1) \end{array} \right]$$

siendo $G_N(t_1, t_2)$ la función de costes de la revisión general de un equipo de t_1 años, efectuada por última vez a los t_2 años.

4.3.3. Reemplazamiento preventivo para evitar averías

Nos planteamos ahora el caso de que el equipo pueda sufrir ciertas averías ocasionando con ello una serie de pérdidas, derivadas de la reparación, del tiempo perdido para la producción, etc.¹¹

La evolución del sistema de un estado a otro suponemos que se ajusta a un Proceso de Markov, siendo la matriz de transición $P = (p_{ij})$ independiente del tiempo, con:

p_{ij} = Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j en el momento $t + 1$, cuando en el momento t se encontraba en el estado i .

Si ahora denominamos:

$x_t(i)$ = Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado i en el momento t .

(11) S. DREYFUS. - A note on an industrial replacement process. -Operational Research Quarterly, Vol 8. 1957. Pags. 190-193

tendremos que:

$$(42) \quad x_{t+1}(j) = \sum_{i=1}^M p_{ij} x_t(i) \quad j = 1, 2, \dots, M$$

siendo $x_0(i) = E_i$ el estado inicial del sistema.

Cada período se encuentra asociado no solamente a un cambio de estado sino también a un rendimiento, dependiente de los estados inicial y final y de la decisión d , lo cual da lugar a la matriz de rendimiento

$$R(d) = \begin{bmatrix} r_{ij}(d) \end{bmatrix}$$

El problema que se plantea es el de elegir la serie de decisiones $\{d\}$ que maximizará la esperanza matemática de los rendimientos esperados de un proceso de N períodos, conociendo el estado inicial del sistema. La ecuación general de recurrencia será:

$$(43) \quad f_N(x) = \max_d \left\{ \sum_{i=1}^M p_{ij} \left[r_{ij}(d) + f_{N-1}(x) \right] \right\} \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Pasemos ahora al caso que nos ocupa, y supongamos que se trata de determinar la política óptima de reemplazamiento preventivo de un equipo con dos terminales que produce simultáneamente un producto sobre cada uno de ellos. Si uno de los terminales no funciona se obtiene un producto defectuoso cuyo coste es igual a c_1 . El desmontar el equipo para efectuar el reemplazamiento del terminal ocasiona un coste de c_2 , el tiempo perdido para la producción da lugar a un coste igual a c_3 y, por último, el terminal nuevo cuesta c_4 .

Si el reemplazamiento de los terminales se efectúa antes de que se estropeen se pueden evitar los costes c_1 de un producto defectuoso y los c_3 correspondientes al tiempo perdido para la producción. Como contrapartida esta política de reemplazamiento preventivo exigirá la adquisición de un número de terminales más elevado y traerá consigo unos mayores costes c_2 por el mayor número de reemplazamientos realizados. El objetivo perseguido consistirá, por tanto, en encontrar la política óptima de reemplazamiento, o sea, en qué períodos han de ser estos realizados, para que los costes totales sean mínimos.

Denominaremos:

$f_N(i, j)$ = Esperanza matemática del coste total de N productos adicionales, cuando el terminal 1 ha lanzado ya i productos y el terminal 2 ha fabricado j , siguiendo una política óptima de reemplazamiento.

p_i = Probabilidad que existe de fabricar un producto correcto con un terminal que ha servido para fabricar ya i productos
($i = 1, 2, \dots$)

Las opciones alternativas que en cada período pueden presentarse son las siguientes: continuar la fabricación de productos (F), reemplazar el terminal 1 (R_1), reemplazar el terminal 2 (R_2) y reemplazar ambos terminales (R_{12}).

La relación de recurrencia que nos mostrará la política óptima será la siguiente:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad f_N(i, j) = \text{Min} \quad & \left[\begin{aligned}
 & F : p_i p_j f_{N-2}(i+1, j+1) + \\
 & + (1-p_i)(1-p_j) \left[2c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 + f_N(0, 0) \right] + \\
 & + (1-p_i) p_j \min \left[c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + f_{N-1}(0, j+1), \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 + f_{N-1}(0, 0) \right] + \\
 & + p_i(1-p_j) \min \left[c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + f_{N-1}(i+1, 0), \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 + f_{N-1}(0, 0) \right] \\
 & R_1: c_2 + c_4 + f_N(0, j) \\
 & R_2: c_2 + c_4 + f_N(i, 0) \\
 & R_{12}: c_2 + 2c_4 + f_N(0, 0).
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

La esperanza matemática del coste ocasionado por la primera alternativa, o sea continuar la fabricación hasta alcanzar N productos, será igual a la esperanza matemática del coste de producción de $N-2$ productos, más la esperanza del coste de que se estropeen ambos terminales, más la esperanza de que se estropeen alternativamente el 1 ó el 2, considerando en ambos casos la posibilidad de sustituir solamente el terminal estropeado o los dos. Las alternativas de reemplazamiento solo consideran los costes derivados de desmontar el equipo y los del terminal o terminales nuevos más la esperanza matemática de los costes totales de N productos adicionales en los supuestos que marca

el correspondiente reemplazamiento.

Para determinar la política óptima deberá comenzarse calculando $f_1(i, j)$ para los distintos valores de i y de j , posteriormente $f_2(i, j)$ y así sucesivamente.

CAPITULO VI

DECISIONES SECUENCIALES

EN EL SUBSISTEMA

DE PRODUCCION

CAPITULO VI. - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTEMA DE PRODUCCION

1. INTRODUCCION

Al esquematizar anteriormente los problemas peculiares del subsistema de gestión empresarial que es ahora objeto de nuestro estudio, tuvimos ocasión de poner de manifiesto la variedad de los mismos. Esta circunstancia hace que no podamos plantearnos un modelo globalizador del tema, ya que para ello sería preciso establecer previamente un sinnúmero de hipótesis caracterizadoras tanto del tipo de producción como del proceso seguido para su obtención.

Vamos, por tanto, a seleccionar de entre los problemas apuntados aquel que, a nuestro juicio, tiene un carácter más general, resultando entonces compatible con la inmensa mayoría de circunstancias específicas de cada caso particular. Trataremos el problema de la determina-

ción del volumen óptimo de producción y niveles de stocks, primero durante un conjunto limitado de períodos y, posteriormente, consideraremos un horizonte temporal ilimitado.

2. MODELO DETERMINISTA PARA LA OPTIMIZACION DE LOS NIVELES PERIODICOS DE PRODUCCION Y DE LOS STOCKS EN UN HORIZONTE LIMITADO

Consideraremos una empresa que desea establecer un programa de producción para la elaboración de un producto durante los próximos N períodos de tiempo. El conocimiento que dicha empresa tiene de las cantidades demandadas puede considerarse que encaja dentro de los cauces de una previsión perfecta.

Dado que la demanda será distinta en cada período, puede resultar más económico para la empresa producir más de lo necesario en un período, almacenando el exceso hasta que más tarde sea requerido. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que el stock resultante dará lugar a unos costes de entretenimiento que, según las circunstancias, serán atribuibles a factores tales como el interés de la inmovilización financiera, los costes fijos de almacenamiento, seguros, costes de mantenimiento, etc. Tales costes de entretenimiento de los stocks, deben ser tenidos en cuenta a la hora de determinar el programa de producción.

El objetivo asignable al subsistema de producción vendrá fijado en este caso, por la elaboración de un programa que minimice los costes de la

producción y los de entretenimiento de los stocks, sujetándose a las restricciones derivadas tanto del campo de la propia producción -capacidad de almacenamiento y producción, por ejemplo- como del de la demanda.

Comenzaremos el análisis trasladando estos aspectos cualitativos del problema a un modelo matemático.

Las políticas a delinear serán:

x_t = Cantidad producida en el período t

s_t = Stock al final del período t .

La demanda correspondiente al período t , que representaremos por D_t , será un número entero no negativo y conocido en el momento en que tratamos de establecer el plan de producción.

En cada período t el coste dependerá, abstracción hecha de otras variables, de la cantidad producida x_t y del nivel de las existencias finales s_t . La función $C_t(x_t, s_t)$ expresa el coste relativo al período t . La función objetivo será entonces:

$$(1) \quad \text{Min} \quad \sum_{t=1}^N C_t(x_t, s_t)$$

Varias son las restricciones impuestas a las políticas variables x_t y s_t . En primer lugar restringiremos la producción a valores enteros:

$$(2) \quad x_t = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{para cada período } t$$

Las restricciones derivadas de las capacidades limitadas de producción y almacenamiento serán:

$$(3) \quad x_t \leq A \quad \text{y} \quad s_t \leq B$$

siendo A y B las respectivas capacidades límite.

La política económica de la empresa tiene señalada la conveniencia de que sea cual fuere la política óptima trazada, el nivel de las existencias al final del período N ha de ser cero, o sea:

$$(4) \quad s_N = 0$$

La demanda de cada período debe ser completamente satisfecha en el mismo. Esta condición puede ser impuesta a través de dos restricciones. La primera, a la que podríamos llamar una "identidad contable", sería la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Stock al final del período } t &\equiv \text{Stock al comienzo del período } t \\ &+ \\ &\text{Producción del período } t \\ &- \\ &\text{Demanda en el período } t \end{aligned}$$

que simbólicamente quedará:

$$(5) \quad s_t = s_{t-1} + x_t - D_t \quad (t = 1, 2, \dots, N)$$

siendo s_0 un concreto nivel de las existencias iniciales al comienzo del programa de producción.

La segunda restricción que asegura el cumplimiento a tiempo de los compromisos por parte de la empresa será aquella que ponga de relieve el que en cada período el stock inicial y la producción deben ser suficientemente grandes para abastecer dicha demanda, o lo que es lo mismo, que el stock final planeado para dicho período no puede ser negativo, es decir:

$$(6) \quad s_t = 0, 1, 2, 3, \dots, \text{ en cada período } t, \text{ para} \\ t = 1, 2, \dots, N-1$$

Obsérvese que todas las restricciones impuestas son lineales, por lo que si la función objetivo $C_t(x_t, s_t)$ fuera lineal, el modelo podría ser resuelto fácilmente mediante la aplicación de aquellas técnicas de Investigación Operativa específicas para los casos de linealidad de las funciones. Tal caso no resulta muy probable, ya que en la mayoría de las actuales aplicaciones de los modelos de producción las funciones de coste no son lineales.

Sintetizamos ahora las anteriores restricciones, delimitativas del cam-

po de variación de x_t y s_t .

De acuerdo con (2) y (3) podemos escribir:

$$(7) \quad 0 \leq x_t \leq A$$

y conforme a (3), (4) y (6):

$$(8) \quad 0 \leq s_t \leq B$$

Pero teniendo presente (5), (8) quedará:

$$(9) \quad 0 \leq s_{t-1} + x_t - D_t \leq B$$

de donde:

$$(10) \quad D_t - s_{t-1} \leq x_t \leq B + D_t - s_{t-1}$$

Con lo que podemos concluir:

$$(11) \quad \text{Max}(0, D_t - s_{t-1}) \leq x_t \leq \text{Min}(A, B + D_t - s_{t-1})$$

expresión que recoge el campo de variación de x_t .

2.1. Formulación por Programación Dinámica

Para solucionar el problema planteado, comenzaremos de final a principio, entendiendo por final cuando queda solo un período dentro del horizonte planificado, y por principio cuando quedan N períodos.

Vamos a cambiar entonces nuestra notación, utilizando los subíndices temporales para indicar la distancia al momento final, con lo que el 1 representa el final del horizonte estudiado y el N el comienzo.

Denominaremos:

d_n = Demanda en un período situado a n períodos del momento final.

$c_n(x, s')$ = Coste de producción de x, siendo s' el stock al comienzo de un período situado a n períodos del momento final.

Con la notación expuesta, $d_1 \equiv D_N$ y $d_N \equiv D_1$, e igualmente:

$c_1(x, s') \equiv C_N(x, s')$.

Conviene ahora poner de manifiesto que lo que determina el estado del sistema de producción al comienzo de cada período es el stock inicial. Sabiendo como se llegó a este nivel del stock, no tienen importancia alguna las decisiones relativas a la corriente de producción. Bajo estas bases definimos:

$f_n(s')$ = Coste mínimo asociado a una política cuando el stock inicial es s' y faltan n períodos.

$x_n (s')$ = Nivel de producción conducente a $f_n (s')$

Ya que los stocks son nulos al final del horizonte planificado, según quedó expuesto en (4), podemos escribir:

$$(12) \quad f_0 (0) = 0 \quad (n = 0)$$

El próximo paso consistirá en hacer $n = 1$. Puesto que al final de este período todas las existencias son colocadas, la existencia inicial correspondiente al mismo tiene que estar comprendida entre cero y $\text{Min} (d_1, B)$. Supuesto que d_1 es menor que B , la cantidad producida será igual a $d_1 - s'$, siempre y cuando cumpla la condición (11). Tendremos, pues:

$$(13) \quad f_1 (s') = c_1 (d_1 - s', 0)$$

$$x = d_1 - s' \in K$$

en donde la pertenencia de x al conjunto K es expresiva del cumplimiento de (11).

Continuando con $n = 2$, tendremos que el coste asociado a la política óptima será igual al mínimo del coste asociado al período más el correspondiente al período siguiente ($n = 1$) ya hallado. Tendremos entonces:

$$(14) \quad f_2 (s') = \text{Min}_{x \in K} \left[c_2 (x, s' + x - d_2) + f_1 (s) \right]$$

Sucesivamente podríamos ir obteniendo $f_3 (s')$, $f_4 (s')$ hasta llegar a $f_N (s_0)$, siendo s_0 la existencia inicial señalada.

La expresión general de recurrencia puede escribirse así:

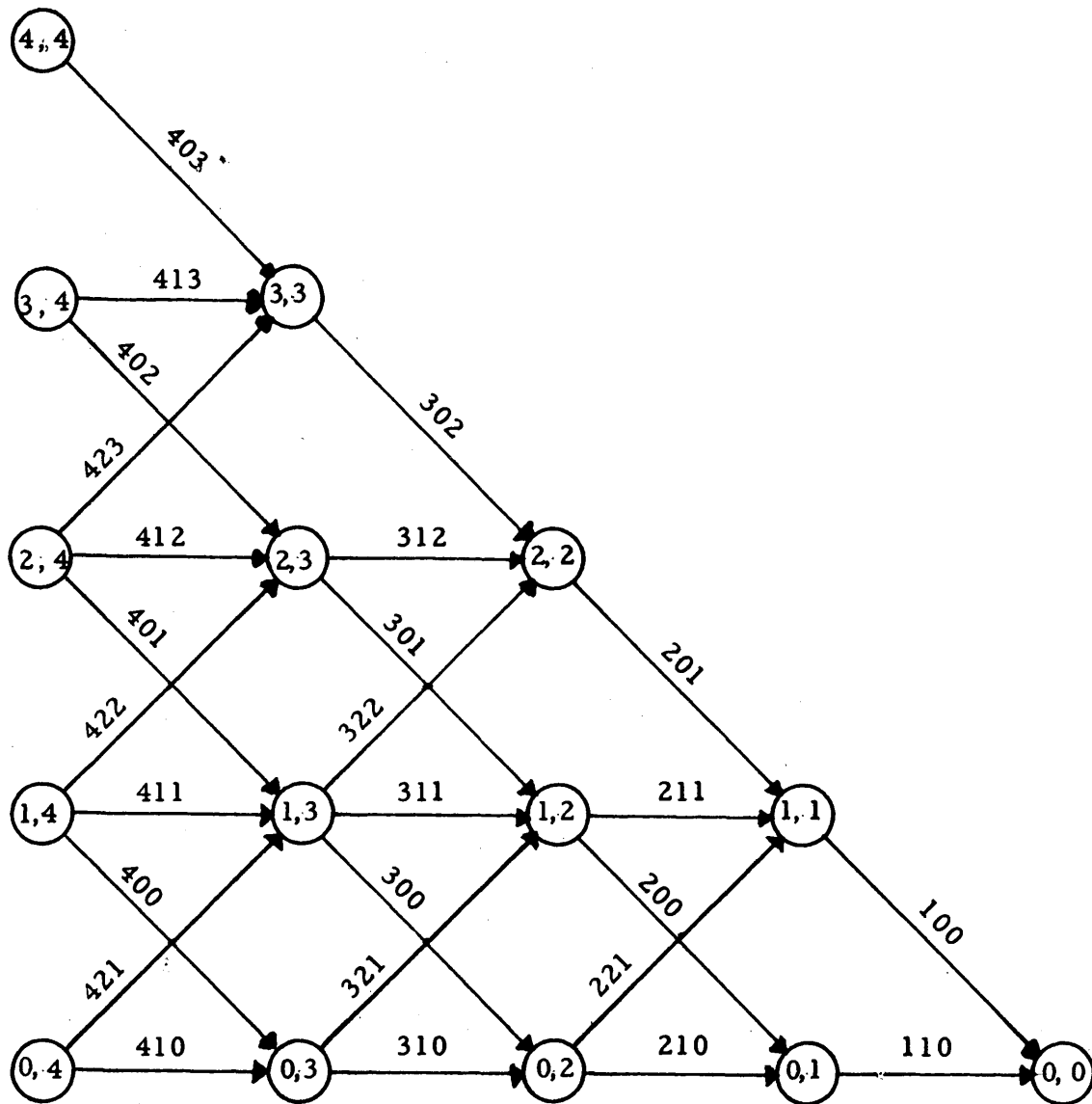
$$(15) \quad f_n (s') = \text{Min}_{x \in K} \left[c_n (x, s' + x - d_n) + f_{n-1} (s) \right]$$

La recurrencia (15) puede ser representada mediante un grafo, con lo que el problema podía plantearse diciendo que se trataba de encontrar el camino más corto del grafo que, por supuesto, no contendría ciclos. Hay que destacar la complejidad de dicho grafo, dado el elevado número de arcos y vértices. A fin de poder apreciar la estructura fundamental del mismo, vamos a considerar el sencillo caso en que:

$$d_n = 1 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{demanda estacionaria})$$

$$x = 0, 1, 2 \quad (\text{posibles niveles de producción})$$

El grafo asociado sería: el que indicamos a continuación. Cada vértice queda identificado por los dígitos correspondientes a (s, n) y hace relación a un posible nivel de la variable de estado s cuando faltan todavía n períodos. Los cinco vértices de comienzo representan las distintas posibilidades del stock inicial ($s_0 = 0, 1, 2, 3, 4$). El vértice final pone de manifiesto la restricción consistente en hacer la existencia final igual a cero.



Los arcos representan cada una de las acciones o políticas posibles. El coste asociado $c_n(x, s)$ es representado con el símbolo abreviado $n \times s$, por ejemplo $c_3(1, 2)$ se indica con 312.

El algoritmo antes elaborado va de atrás hacia adelante, o sea, que los cálculos comenzaban con el último período del horizonte temporal contemplado y, posteriormente, se iba avanzando hacia el primero. De igual

forma podríamos haberlo planteado en sentido inverso, o sea, comenzar por el primero para finalizar con el último, en cuyo caso precisamos suponer un determinado nivel para las existencias iniciales¹. Supongamos que $s_0 = 0$. Tendremos entonces:

$g_n(s)$ = Coste mínimo asociado a una política, cuando el stock final del período es s .

De aquí, podemos escribir:

$$(16) \quad g_0(0) = 0$$

$$(17) \quad g_1(s) = C_1(D_1 + s, s)$$

$$x = D_1 + s \in K$$

y generalizando:

$$(18) \quad g_n(s) = \min_{x \in K} \left[C_n(x, s) + g_{n-1}(s) \right]$$

(1) Vid. L. CAÑIBANO CALVO. - Perspectivas dinámicas de los programas de almacén. De Economía, nº 106, abril-junio, 1969. Pags 319-333. El modelo que se examina en este artículo responde a las características señaladas.

2.2. Análisis de Sensibilidad

La aplicación de las recurrencias (15) ó (18) daría lugar a la obtención de la política óptima de producción y, consiguientemente, de la de niveles óptimos de stocks. Ahora bien, conviene tener presente que la política hallada puede verse alterada con la variación de los supuestos valores de algunos parámetros del modelo, tales como la duración del horizonte temporal objeto de planificación y el nivel de las existencias iniciales. A continuación comentaremos estos dos casos, puesto que otros que teóricamente podríamos considerar, resultan menos factibles, sobre todo a corto plazo, como ocurre con la capacidad límite de producción y almacenamiento.

Por lo que se refiere a la duración del horizonte planificado conviene conocer las distintas políticas de producción óptimas en los períodos 1, 2, ..., N, considerando sucesivamente distintos límites para el horizonte temporal mencionado. Tendríamos así que la producción óptima para el período podría ser distinta según que el horizonte planificado fuera igual a 1, 2, ..., N. Exactamente igual podría hacerse para los restantes períodos, pudiendo resumir los resultados como aparecen expuestos en la Tabla 1.

La política óptima de producción para el período 1 será $x_1^{(1)}$ cuando el horizonte temporal objeto de planificación sea igual a 1, $x_1^{(2)}$ cuando sea igual a 2, y así sucesivamente hasta llegar a $x_1^{(N)}$. Para el período 2 tendremos como políticas óptimas $x_2^{(2)}$ cuando el horizonte planificado es 2, $x_2^{(3)}$ cuando es 3 y así hasta $x_2^{(N)}$ cuando el horizonte de referencia es N. Otro tanto puede decirse para los restantes períodos.

T A B L A 1

Períodos Horizonte Planificado	1	2	3	...	N	Coste total	Coste medio por período (c_n/n)
1	$x_1^{(1)}$	—	—	—	—	c_1	c_1
2	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	—	—	—	c_2	$\frac{c_2}{2}$
3	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_3^{(3)}$	—	—	c_3	$\frac{c_3}{3}$

N	$x_1^{(N)}$	$x_2^{(N)}$	$x_3^{(N)}$...	$x_N^{(N)}$	c_N	$\frac{c_N}{N}$

El valor de la función objetivo, en este caso los costes de producción y entretenimiento de los stocks, dependerá como es lógico del horizonte planificado, incrementándose a medida que crece el mismo. Ahora bien, este incremento no tiene por qué ser proporcional, es decir, que el alargamiento del horizonte planificado puede dar lugar, por ejemplo, a una reducción en los costes por período, de forma indefinida o, más probablemente, hasta un cierto límite, después del cual se estabiliza o vuelve a incrementarse.

El anterior análisis de sensibilidad pone a nuestra disposición la posibilidad de considerar un horizonte de planificación óptimo, que será aquel cuyo c_n/n resulte mínimo.

El otro parámetro cuyas variaciones vamos a examinar es el stock inicial. Relacionaremos los mismos con la duración del horizonte planificado, y así tendremos que la producción en un período depende de las existencias iniciales y de la duración del horizonte antedicho. Para el período 1 obtendríamos los resultados que aparecen detallados en la Tabla 2.

En ella puede apreciarse que la producción óptima para el período mencionado varía al considerar distintos niveles para el stock inicial - - - ($s_0 = 1, 2, \dots, B$) y horizontes de planificación más alejados ($1, 2, \dots, N$). Así cuando dicho stock sea igual a cero y el horizonte planificado abarque un período, la producción óptima para el período 1, será $x_{1,0}^{(1)}$, cuando el stock sea 1 y el horizonte 2, $x_{1,1}^{(2)}$, y así sucesivamente.

La función objetivo, o sea, los costes de producción y entretenimiento

Horizonte planificado	Producción en el período 1				Coste de oportunidad del stock			
	$S_0 = 0$	$S_0 = 1$	$S_0 = 2$	$S_0 = B$	$S_0 = 1$	$S_0 = 2$	- - -	$S_0 = B$
1	$x_{1,0}^{(1)}$	$x_{1,1}^{(1)}$	$x_{1,2}^{(1)}$	$x_{1,B}^{(1)}$	$v_{1,1}^{(1)}$	$v_{1,2}^{(1)}$	- - -	$v_{1,B}^{(1)}$
2	$x_{1,0}^{(2)}$	$x_{1,1}^{(2)}$	$x_{1,2}^{(2)}$	$x_{1,B}^{(2)}$	$v_{1,1}^{(2)}$	$v_{1,2}^{(2)}$	- - -	$v_{1,B}^{(2)}$
3	$x_{1,0}^{(3)}$	$x_{1,1}^{(3)}$	$x_{1,2}^{(3)}$	$x_{1,B}^{(3)}$	$v_{1,1}^{(3)}$	$v_{1,2}^{(3)}$	- - -	$v_{1,B}^{(3)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	- - -	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	- - -	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	- - -	⋮
N	$x_{1,0}^{(N)}$	$x_{1,1}^{(N)}$	$x_{1,2}^{(N)}$	$x_{1,B}^{(N)}$	$v_{1,1}^{(N)}$	$v_{1,2}^{(N)}$	- - -	$v_{1,B}^{(N)}$

del stock, serán distintos para los diversos niveles de dicho stock, ya que al incrementarse éste, crecen los costes de entretenimiento pero disminuyen los de producción. Como tales incremento y decremento serán cuantitativamente distintos, nos encontramos con que podemos establecer una valoración en términos de costes de oportunidad para cada una de las unidades adicionales del stock inicial, que será igual a la diferencia entre el valor de la función objetivo para un concreto horizonte de planificación cuando el stock inicial es nulo, cuando es igual a una unidad, cuando es igual a dos, y así sucesivamente hasta el límite de capacidad del almacén, o sea hasta B. Tendremos pues, que cuando el horizonte planificado abarca un período, el coste de oportunidad de mantener un stock inicial igual a una unidad es $v_{1,1}^{(1)}$, para un horizonte de dos períodos y un stock igual a B sería $v_{1,2}^{(2)}$, etc.

Este análisis nos permite añadir nuevas consideraciones a las examinadas anteriormente, pues podemos volver a revisar la política de costes mínimos teniendo en cuenta los costes de oportunidad hallados. Con ello obtendremos un conocimiento más amplio, pues podremos contemplar las políticas óptimas para distintos horizontes de planificación y para diversos niveles del stock inicial.

2.3. Planificación a largo plazo mediante políticas a corto plazo

Se puede acometer la planificación a largo plazo mediante la consideración constante de un determinado horizonte temporal o, en otras palabras, siguiendo un sistema de planificación rotativa. De esta forma en el período 1 la política óptima quedaría señalada teniendo en cuenta un horizonte temporal igual a N, pongamos por caso. En el período 2, pa-

ra mantener el mismo horizonte de planificación, habrá que considerar hasta el período $N - 1$, en el 3 hasta el $N - 2$, y así sucesivamente.

El procedimiento descrito, conocido en la terminología anglosajona como "rolling schedule", es frecuentemente usado en la práctica, aunque de hecho no suponga una política óptima a largo plazo. Lo es a corto plazo, o sea, considerando tan solo los N períodos como si más allá no existiera ya actividad. A largo plazo obtendríamos pues una política de suboptimización.

El compatibilizar las políticas de optimización a corto y a largo plazo, puede lograrse tomando como horizonte de planificación el más interesante desde el punto de vista del análisis de sensibilidad antes expuesto. Por otra parte conviene tener presente que al revisar cada período el plan trazado, se pueden introducir nuevas consideraciones, lo cual hace más útil, si cabe, este práctico sistema.

2.4. Comentarios y extensiones del modelo

La situación descrita por el modelo formulado no supone un forzado alejamiento de la realidad, antes bien, pensamos que es bastante razonable. Los costes de producción están formados por un componente fijo y otro variable, los costes de entretenimiento son proporcionales al stock final y existen una restricciones derivadas de las limitaciones de capacidad existentes en la producción y en los almacenes. No obstante, hemos visto que una política óptima puede cambiar cuando se introducen variaciones en el horizonte planificado. Es imposible, muy frecuentemente,

conocer con exactitud los límites de tal horizonte, con lo que existe un riesgo al adoptar una política, pues luego puede no resultar óptima. Sin embargo, con el análisis de sensibilidad propuesto, se está al menos en posesión de unos conocimientos relativos a una amplia gama de posibilidades y, por tanto, se dispone de una mayor información en el momento de tomar las decisiones.

Queremos destacar ahora los supuestos básicos sobre los que se apoya el anterior modelo. Son éstos los siguientes:

a) La previsión de la demanda es perfecta.

Aunque una empresa raramente puede prever la demanda de varios meses sin error en los cálculos, el margen de error puede resultar a menudo bastante reducido, por lo que un modelo determinista puede conducir a una razonable aproximación. Cuando los errores de previsión sean sustanciales, hay que recurrir a modelos de tipo probabilístico.

b) El tiempo de producción es siempre regular.

Tal supuesto requiere que el tiempo de producción pueda ser predeterminado con un error despreciable. En el modelo anterior suponíamos que la producción del período n se destinaba a abastecer la demanda de dicho período, no obstante, queremos ahora matizar que para que dicha producción esté disponible en tal momento, habrá de ser iniciada 1, 2, 3, 4, . . . períodos antes, según la duración del ciclo de producción, que precisamente por ser siempre idéntica, no tiene por qué ser explicitada en el modelo.

Otra faceta de esta hipótesis es que el tiempo de producción no entra en colisión con el relativo a otras órdenes procesadas, ya por producirse una perfecta armonización de ambos, ya por ser independientes. Si varios productos diversos son elaborados por el mismo equipo, el cual lógicamente tendrá una capacidad limitada, puede darse una aglomeración de programas si cada uno de ellos ha sido obtenido con independencia del resto, pudiendo entonces no resultar factibles las respectivas políticas óptimas independientes.

- c) El coste de cada período depende de la cantidad producida y del stock final; la demanda de cada período es completamente satisfecha.

Si la variedad de situaciones que se pueden presentar aconsejara no enmarcar al modelo en unos cauces tan estrictos como los anteriores, se podrían alterar los mismos sin muchas complicaciones.

Así, si el coste de entretenimiento dependiera tanto del stock final como del inicial, la recurrencia (15) quedaría:

$$(19) \quad f_n(s) = \text{Min}_{x \in K} \left[c_n(x, s', s' + x - d_n) + f_{n-1}(s) \right]$$

Cuando sea concretamente el stock medio del período (\bar{s}) tendremos:

$$(20) \quad \bar{s} = \frac{s' + (s' + x - d_n)}{2} = s' + \frac{x - d_n}{2}$$

con lo que (19) será:

$$(21) \quad f_n(\bar{s}) = \min_{x \in K} \left[c_n(x, s') + \frac{x - d_n}{2} + f_{n-1}(\bar{s}) \right]$$

Por lo que se refiere a la demanda, podríamos considerar el caso en que ésta es dejada insatisfecha hasta períodos posteriores, con lo que s podría tomar valores negativos si seguimos manteniendo (5). Precisamente estos valores negativos de s representarían la demanda insatisfecha. El introducir este supuesto precisa simplemente retocar el campo de variación de s expuesto en (8), pues en el caso actualmente comentado, el límite inferior desaparecería.

También podríamos considerar que la demanda insatisfecha en un período no se recupera en los posteriores sino que se pierde, en cuyo caso, el límite de (8) comentado en el párrafo precedente sí resultaría operante.

En ambos casos de demanda insatisfecha la función de costes debe incluir una penalización por los pedidos no cumplimentados, que guardará relación con la demanda no servida en el período y con la caída que pueden experimentar las ventas totales por esta circunstancia.

También podría ocasionar nuevos costes adicionales el traslado de la producción de un período al próximo, situación ésta que puede ser tenida en cuenta al establecer el oportuno modelo de programación dinámica.

3. MODELO DETERMINISTA PARA LA OPTIMIZACION DE LOS NIVELES PERIODICOS DE PRODUCCION Y DE LOS STOCKS EN UN HORIZONTE ILIMITADO

En el modelo anterior hemos podido apreciar la influencia que el horizonte planificado ejercía en la determinación de la política óptima, pero siempre dentro de un contexto temporal limitado. Ahora bien, es cuestionable que una gran parte de las decisiones inmersas en el subsistema empresarial estudiado en estos momentos, forman parte de una interminable historia de acciones. Las decisiones tomadas en etapas pasadas están condicionando el presente, y las actuales influenciarán el futuro y así sucesivamente. Esta perspectiva hace que nos planteemos nuevamente el modelo antes estudiado en el contexto de un horizonte temporal ilimitado.

Las características fundamentales de estos procesos ilimitados ya fueron puestas de manifiesto en el Capítulo II, por ello nos limitaremos aquí a aplicar alguno de los criterios entonces apuntados. Pero además, de lo expuesto, precisamos nuevas herramientas de cálculo en comparación con el modelo anteriormente expuesto, por lo que en la solución vamos a hacer uso del método de "Aproximaciones Sucesivas" que ya expusimos en el Capítulo IV.

3.1. Formulación por Programación Dinámica I. - Minimización del Coste Total

El modelo que vamos a tratar en este epígrafe guarda grandes analogías

con el expuesto anteriormente en el apartado segundo, si bien contiene algunas diferencias, siendo la mayor de ellas la relativa a la ilimitación del horizonte temporal planificado, que constituye ahora nuestra premisa fundamental.

Al igual que antes consideramos que x (cantidad producida) es la variable de decisión y que debe ser un número entero no negativo. La función de costes de producción asociada a cada período la representamos por $c(x)$ y por $h(s)$ la función de costes de entretenimiento, siendo s el nivel de las existencias finales. Suponemos que la demanda, que representamos por d , permanece constante en todos los períodos y es un número entero y positivo y, además, que debe ser satisfecha a su debido tiempo. Tomaremos como factor de descuento:

$$(22) \quad v = \frac{1}{1 + i}$$

que debe cumplir la condición:

$$(23) \quad 0 \leq v \leq 1$$

Teniendo en cuenta lo anterior, definimos:

$f_n(s')$ = Valor actual de una política de producción óptima, cuando el stock inicial es s' y faltan n períodos.

La ecuación de recurrencia para un modelo con horizonte limitado será:

$$(24) \quad f_n (s') \pm \underset{x}{\text{Min}} \left[c (x) + h (s' + x - d) + v f_{n-1} (s) \right]$$

donde el mínimo se busca teniendo en cuenta las restricciones de x que quedaron apuntadas para el modelo anterior.

La ecuación de recurrencia análoga a (24) para un horizonte temporal ilimitado es:

$$(25) \quad f (s') = \underset{x}{\text{Min}} \left[c (x) + h (s' + x - d) + v f (s) \right]$$

En este caso $f (s')$ es el valor actual de una política óptima para un horizonte ilimitado, siendo s' el stock inicial del período en curso y s el stock final del mismo período. La diferencia más importante entre (24) y (25) estriba en que $f (s')$ aparece en ambos miembros de (25), por cuyo motivo se la denomina ecuación funcional o extrema. De hecho es un conjunto de ecuaciones, una para cada posible valor de la variable de situación, siendo s' el stock inicial. Por tanto, (25) es la función total $f (s')$ de la variable de situación.

Observemos que (25) puede asociarse a un grafo, en el cual se nos presenta un problema de optimización. Supongamos que el número de posibles niveles del stock inicial es finito, y hagamos corresponder cada vértice del grafo con uno de dichos niveles. Tomando el vértice s' podemos indicar la decisión para producir x sobre un arco que vaya de s' a $s = s' + x - d$. El coste asociado a dicho arco será $c (x) + h (s)$. Sustituimos $f (s')$ por y_i en (25) y de esta forma y_i es el valor actual

asociado con s' . Este grafo es similar al que expusimos en el punto anterior, si bien ahora no existe fin, siendo el camino abierto por el valor y_i realmente ilimitado.

3.1.1. Características del grafo asociado

Consideremos un grafo compuesto por P vértices y un conjunto de arcos conectando algunos de dichos vértices. Supongamos que de cada vértice sale al menos un arco, es decir, que resulta posible ir desde cada vértice al menos a otro. Cada arco (i, j) tiene un ingreso asociado o un coste c_{ij} y un tiempo igual a un período. El factor de descuento sigue siendo v .

Imaginemos que partimos de un i cualquiera y que pasamos de i a j incurriendo en un coste c_{ij} . Una vez en este punto pasamos al punto k - añadiendo el coste descontado $v c_{ij}$. Si continuamos el proceso indefinidamente no acabaríamos nunca, añadiríamos más y más costes con potenciales cada vez más elevados del factor v . Consideremos a y_i como el valor actual de un camino óptimo sin fin que comienza en i .

Si adoptáramos una política estacionaria, cada vez que lleguemos a una intersección seguiríamos el mismo arco que la vez anterior. Si dicha política estacionaria es óptima, el y_i correspondiente satisface la ecuación funcional:

$$(26) \quad y_i = \text{Min}_{i, j \in P} (v y_j + c_{ij}) \quad \text{para cada vértice } i$$

Debe tenerse en cuenta que ningún vértice es considerado como terminal, dada la ilimitación del horizonte contemplado. La utilización de (26) está condicionada al conocimiento de las respuestas a las siguientes preguntas:

- a) ¿Es posible resolver siempre las ecuaciones funcionales (26) para valores finitos y únicos de cada y_i ?
- b) Si ésto ocurre, ¿ es la estrategia estacionaria correspondiente verdaderamente óptima?

En otras palabras, debemos estar seguros de si las ecuaciones funcionales (26) tienen invariablemente una solución, antes de pasar a su aplicación. Cuando la tienen, un arco (i, j) que proporciona el mínimo coste para el vértice i , es un componente de una política estacionaria, o sea que debe discurrirse por el arco (i, j) cada vez que nos encontremos en i . Debido a que hay un número finito de vértices, utilizaremos repetidas veces una serie de arcos. El camino a seguir dependerá del vértice de partida, o sea del nivel del stock inicial.

La segunda cuestión planteada, consiste en averiguar si no es posible actuar mejor siguiendo otra política estacionaria o siguiendo una política no estacionaria, ésto es, una que conserve la huella de los sucesos previos que conducen al vértice i .

Tanto a) como b) tienen respuestas afirmativas. Puede demostrarse rigurosamente que siempre que existe una y_i única y finita que satisface (26) y su correspondiente política estacionaria, es la óptima entre todas -

las posibles².

Con unas leves modificaciones podríamos generalizar el modelo, de forma tal que incluyera aquella situación en la que resulta necesario que transcurra más de un período para atravesar un arco. Consideremos un grafo en el que cada arco (i, j) tiene un tiempo de recorrido asociado igual a h_{ij} períodos, y que todos los h_{ij} no son necesariamente iguales a 1. Sea el factor de descuento:

$$(27) \quad v_{ij} \equiv v^{h_{ij}}$$

entonces, en lugar de (26), la ecuación funcional para este problema más general sería:

$$(28) \quad y_i = \min_{i, j \in P} (v_{ij} y_j + c_{ij}) \quad \text{para cada vértice } i$$

3.1.2. Utilización del método de aproximaciones sucesivas

Vamos a utilizar ahora el método antes descrito para abordar la solución del modelo planteado. Como anteriormente vimos, las aproximaciones sucesivas pueden tener lugar bien en el espacio de la función objetivo, bien en el de las políticas, por lo que vamos a examinar separadamente cada uno de ellos.

(2) D. BLACKWELL. - Discrete Dynamic Programming. - Annals of Mathematical and Statistics. - Vol. 33, 1962. - Pags. 719-726.

3.1.2.1. Aproximación en el espacio de la función objetivo

Escogemos como supuesto arbitrario para y_i el valor y_i^0 y aplicamos posteriormente el algoritmo de iteración del valor:

$$(29) \quad y_i^{n+1} = \text{Min}_{i, j \in P} (v y_j^n + c_{ij}) \quad \text{para cada } i$$

Así cada y_i^n tiende al límite, pero la convergencia de y_i^n no tiene por qué ocurrir necesariamente en un número finito de iteraciones. Es más, el que una política sea la misma para diferentes iteraciones de (29), no quiere decir que sea verdaderamente óptima para un horizonte ilimitado. De hecho, incluso aunque el número de iteraciones n se haga excesivamente grande no implica que exista una política que sea óptima para cualquier valor finito $n \gg N$, por elevado que sea dicho N .

Si en un principio consideramos $y_i^0 = 0$, el proceso es el mismo que se daría si el modelo examinado tuviera un horizonte limitado. Específicamente y_i^n representa el valor actual de un camino óptimo que comienza en el vértice i y atraviesa n arcos, pero existe un n^* tal que para cada $n > n^*$, cualquier política óptima en el modelo con horizonte limitado de n períodos, es también una política estacionaria óptima para el modelo con horizonte ilimitado. Es posible calcular n^* teniendo los datos c_{ij} y v . Si todo $c_{ij} \geq 0$ y todo $y_i^0 = 0$, y_i^n aumenta de forma acompasada.

La prueba de que y_i^n converge con y_i para un y_i^0 arbitrario puede hacerse como sigue. Para cada vértice i , consideramos óptimo el arco (i, j^*) para el caso de un horizonte ilimitado, y el arco (i, j) para la iteración n de (29). Así:

$$(30) \quad y_i = v_{ij^*} y_{j^*} + c_{ij^*} \quad \text{para cada } i$$

$$(31) \quad y_i^n = v_{ij^*} y_{j^*}^{n-1} + c_{ij^*} \quad \text{para cada } i$$

de tal modo que:

$$(32) \quad y_i^n - y_i \leq v_{ij^*} (y_{j^*}^{n-1} - y_{j^*}) \leq v d_{n-1}$$

Donde:

$$(33) \quad d_{n-1} \equiv \max_k \left| y_k^{n-1} - y_k \right|$$

De manera similar:

$$(34) \quad y_i^n = v_{ij} y_j^{n-1} + c_{ij}$$

$$(35) \quad y_i = v_{ij} y_j + c_{ij}$$

de tal forma que:

$$(36) \quad y_i - y_i^n \leq v_{ij} (y_j - y_j^{n-1}) \leq v d_{n-1}$$

Por tanto:

$$(37) \quad \left| y_i^n - y_i \right| \leq v d_{n-1} \leq v^n d_0$$

La convergencia continúa ya que $0 \leq v \leq 1$

Supongamos ahora que $c_{ij} \geq 0$ y que $y_i^0 = 0$. Podemos entonces establecer que y_i^n aumenta de forma acompasada por el siguiente argumento inductivo: Para $n = 1$ y cualquier valor de i tendremos:

$$(38) \quad y_i^1 = \text{Min}_{i,j \in P} (v_{ij} \cdot 0 - c_{ij}) \geq 0 = y_i^0$$

Por tanto, $y_i^1 \geq y_i^0$. Supongamos que $y_i^n \geq y_i^{n-1}$ para $n = 1, 2, \dots, m$, y cualquier valor de i . Si el arco (i, j) es óptimo para la iteración m , tendremos:

$$(39) \quad y_i^{m+1} = v_{ij} y_j^m + c_{ij} \geq v_{ij} y_j^{m+1} + c_{ij} \geq \text{Min}_{i,j \in P} (v_{ij} y_j^{m+1} + c_{ij}) = y_i^m$$

y por tanto, $y_i^n \geq y_i^{n+1}$ para $n = m+1$

3.1.2.2. Aproximación en el espacio de las políticas

La ecuación funcional (29) puede ser resuelta mediante aproximaciones sucesivas en el espacio de las políticas, siguiendo los siguientes pasos:

- 1) Seleccionar la política arbitraria inicial siendo $n = 0$
- 2) Dada una política de prueba, calcular y_i^n de acuerdo con las ecuaciones:

$$(40) \quad y_i^n = v y_j^n + c_{ij} \quad \text{ó} \quad y_i^n - v y_j^n = c_{ij} \quad \text{para cada } i$$

siendo el arco (i, j) la decisión en el vértice i , indicada por la política específica que estamos evaluando:

- 3) Probamos una mejora en la política, calculando:

$$(41) \quad \text{Min}_{i, j \in P} (v y_j^n + c_{ij}) \equiv Y_i^n \quad \text{para cada } i$$

- 4) Finalizamos las iteraciones si $Y_i^n = y_i^n$ para cada i . Si no, revisamos la política en cada vértice k , en el que $Y_k^n < y_k^n$, utilizando un arco que proporcione Y_k^n en (41). Tomamos $n + 1$ en lugar de n y volvemos al segundo paso con la nueva política.

Observe mos que la determinación del valor (40) requiere la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas lineales. Debúdo a que existe una

solución y una variable y_i^n para cada vértice i , y $0 \leq v \leq 1$, (40) tiene siempre una única solución. Al aplicar (40) veremos que es más fácil resolverla primero para y_i^n incluida en un ciclo y después para las restantes variables en términos de las cantidades ya halladas. El método termina cuando $Y_i^n = y_i^n$ para todo i , ya que y_i^n satisface las ecuaciones funcionales.

Para $i = k$ en (41) podemos interpretar la cantidad $(v y_j^n + c_{kj})$ como el valor actual del camino de k a j , utilizando después la política que estamos probando en una iteración n , incluyendo el arco indicado anteriormente para el vértice k .

Si para algunos valores de k , vemos que $Y_k^n < y_k^n$, siguiendo el arco (k, j) , es posible que la mejor solución sea seguir dicho arco cada vez que nos encontremos en el vértice k . Esta política revisada se refleja en un nuevo valor de y_k^{n+1} .

La conclusión más importante es que podemos probar que una política que sigue el arco (k, j) con regularidad, puede ser mejorada empleando un criterio que suponga que (k, j) se sigue solamente para una decisión normal.

La aproximación en el espacio de las políticas tiene las siguientes propiedades:

$$1) \quad y_i^{n+1} \leq y_k^n \quad \text{si} \quad Y_k^n < y_k^n$$

2) El algoritmo termina en un número finito de iteraciones.

3) Al final la política conseguida es óptima.

El método de aproximación en el espacio de las políticas tiene estas propiedades debido a las analogías que presenta con el método Simplex. Para cada iteración es factible una política normal, sin embargo los valores correspondientes de la variable y_i^n pueden no ser factibles porque no satisfagan las ecuaciones funcionales. La regla de detención representa una comprobación de dicha posibilidad. Una prueba de la convergencia finita para una solución óptima por aproximación en el espacio de las políticas se asemeja a una prueba para comprobar que el método Simplex se detiene en un número finito de iteraciones. El eje del argumento está en que, a consecuencia de la primera propiedad expuesta, no volvemos a una política que ya ha sido probada. Teniendo en cuenta que hay un número finito de posibles políticas, las iteraciones encuentran un fin³.

Si comparamos las aproximaciones sucesivas en el espacio de la función objetivo y en el de las políticas, vemos que aparece el mismo tipo de cálculo en el segundo miembro de (29) y en el primero de (41). En el método de aproximación en el espacio de la función objetivo, los valores resultantes representan las nuevas aproximaciones de y_i en la iteración siguiente. En contraste, las nuevas aproximaciones de y_i en el método de aproximación en el espacio de las políticas, resultan ser los cálculos adicionales necesarios para resolver las ecuaciones de determinación del valor (40) en la iteración siguiente. Esta serie de cálculos adicionales es

(3) J. F. SHAPIRO. - Shortest Route Methods for Finite State Space Deterministic Dynamic Programming Problems. - SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol 16, 1968. Pags. 1.232-1.250

el precio que pagamos por asegurar la convergencia en un número finito de iteraciones.

La convergencia de y_i^n puede ser probada en forma análoga a como se hizo al tratar la aproximación en el espacio de la función objetivo, si y_i^0 se calcula siguiendo una política inicial. Para $n=1$ y cualquier valor de i , tendremos:

$$(42) \quad y_i^1 = \text{Min}_{i,j \in P} (v_{ij} y_j^0 + c_{ij}) \leq v_{ik} y_k^0 + c_{ik} = y_i^0$$

donde (i,k) es el arco en la política inicial y, por tanto, $y_i^1 \leq y_i^0$.

Supongamos que $y_i^n \leq y_i^{n-1}$ para $n=1,2,\dots,m$, y cualquier valor de i . Sea el arco (i,j) el óptimo para la iteración m , entonces:

$$(43) \quad y_i^{m+1} \leq v_{ij} y_j^m + c_{ij} \leq v_{ij} y_j^{m-1} + c_{ij} = y_i^m$$

de donde $y_i^n \leq y_i^{n-1}$ para $n = m+1$

3.2. Formulación por Programación Dinámica II. - Minimización del Coste Medio por período

La ecuación funcional (25) no puede resultar de utilidad en aquellos casos en que $v = 1$, ya que entonces el valor de la función objetivo a lo

largo de un horizonte ilimitado puede ser infinito. Para hallar la ecuación funcional precisa, vamos a efectuar una reformulación en términos del Coste Medio por período y considerando $v = 1$.

Comenzaremos calculando el Coste Medio por período para cada posible ciclo del grafo, siendo \bar{c} el menor valor para $v = 1$. Es obvio que no resulta preciso calcular todos los valores medios citados y que, por tanto, desconocemos el valor de \bar{c} hasta tanto no se lleve a cabo la optimización. Ahora bien, el desarrollo que vamos a exponer a continuación requiere que consideremos a \bar{c} como un símbolo representativo de dicha constante y que además de hecho existe.

Para evitar el análisis de un sinnúmero de casos especiales, supondremos que el grafo tiene una propiedad adicional: Que existe una cadena entre cada vértice i y al menos uno de los vértices asociados con un ciclo que produce \bar{c} .

Queremos advertir que el desarrollo que sigue no utiliza unos recursos matemáticos excesivamente rigurosos, pues lo único que intentamos explicar son los resultados.

Comenzaremos relacionando el coste medio $(1 - v) y_i$ en cada vértice con \bar{c} a través de la siguiente relación definida por w_i :

$$(44) \quad (1 - v) y_i \equiv (1 - v) w_i + \bar{c}$$

de donde:

$$(45) \quad y_i \equiv w_i + \frac{\bar{c}}{1 - v}$$

Podemos interpretar w_i como la diferencia entre y_i y $\frac{\bar{c}}{1 - v}$, que es el valor actual de \bar{c} durante cada período en un horizonte ilimitado.

La ecuación funcional (25) podemos escribirla ahora como sigue:

$$(46) \quad w_i + \frac{\bar{c}}{1 - v} = \underset{i, j \in P}{\text{Min}} \left[v \left(w_j + \frac{\bar{c}}{1 - v} \right) + c_{ij} \right] \quad \text{para cada } i$$

Teniendo en cuenta que \bar{c} es constante, podemos pasar la expresión en \bar{c} del primer miembro al segundo, con lo que (46) quedaría como sigue:

$$(47) \quad w_i = \underset{i, j \in P}{\text{Min}} (v w_j + c_{ij} - \bar{c}) \quad \text{para cada } i$$

Cuando $v = 1$, tendremos:

$$(48) \quad w_i = \underset{i, j \in P}{\text{Min}} (w_j + c_{ij} - \bar{c}) \quad \text{para cada } i$$

Pasando \bar{c} ahora al primer miembro, quedará:

$$(49) \quad w_i + \bar{c} = \underset{i, j \in P}{\text{Min}} (w_j + c_{ij}) \quad \text{para cada } i$$

El transformar la ecuación funcional previa para $v < 1$ en la (48) para $v = 1$, presupone la existencia de una política estacionaria óptima, en el sentido de que contiene un ciclo que posee un coste medio mínimo por período.⁴ No abordaremos la justificación de dicho supuesto, pues ello nos alejaría de nuestro objetivo principal, que no pasa de ser el de ofrecer algunas posibilidades de aplicación.

Así en el caso de que $v < 1$, un arco cuyo valor asociado mínimo se determina según (48) ó (49), indica la acción a seguir si nos encontramos en el vértice i . Tal política debe contener al menos un ciclo. Si una política estacionaria óptima contiene más de un ciclo, el coste medio por período debe ser el mismo para todos los ciclos. Esto se deduce de nuestro anterior supuesto de que siempre encontraríamos un camino que va de i a un vértice asociado con un ciclo que produce \bar{c} . Teniendo en cuenta que \bar{c} está asociado con un ciclo y que c_{ij} es estacionario, el valor \bar{c} es también el coste medio mínimo por período, para todos los ciclos posibles. Esto es, la aproximación del "coste medio equivalente por período" produce una política que es óptima para el criterio del "coste medio por período".

Aparte de la gran importancia que w_i reviste para el cálculo, ya que es precisa su obtención para obtener \bar{c} y la política óptima, existen diversos significados económicos para el mismo. Expondremos el de mayor aceptación.

De (45) podemos deducir que para cada pareja de i y j :

(4) Vid. D. BLACKWELL. - Op. cit. Pags. 719-726.

$$(50) \quad y_i - y_j \cong w_i - w_j$$

Cuando v tiende a 1 el límite de la diferencia entre los valores actuales para los vértices i y j viene dado por $w_i - w_j$, por tanto, podemos considerar a dicha diferencia como el incremento del coste de permanencia en i en lugar de j .

3.2.1. Aproximaciones sucesivas en el espacio de las políticas

Cuando $v = 1$, puede usarse la técnica de aproximaciones sucesivas en el espacio de las políticas para resolver (48) y (49). Para mayor facilidad supondremos en principio, que la política de prueba consta de un solo ciclo.

Si encontramos valores para w_i que satisfacen las ecuaciones funcionales (48) ó (49), con la simple adición de una constante a estos valores obtendremos otras nuevas que también satisfarán dichas ecuaciones. Por tanto, los valores de w_i no son únicos y en el algoritmo que exponemos a continuación es conveniente que uno de los valores se iguale a cero. Seguiremos, por tanto, la norma de que $w_1 = 0$.

El método a aplicar implica los siguientes pasos:

- 1) Seleccionar una política inicial, siendo $n = 0$
- 2) Con una política de prueba dada, calcular w_i^n y \bar{c}^n de acuerdo con las ecuaciones de determinación del valor:

$$(51) \quad w_i^n - w_j^n + \bar{c}^n = c_{ij} \quad \text{para cada } i$$

$$w_1^n = 0$$

siendo el arco (i, j) la decisión en i indicada por la política que estamos evaluando.

3) Probamos una mejora en la política, calculando:

$$(52) \quad \text{Min}_{i, j \in P} (w_j^n + c_{ij} - \bar{c}^n) \equiv W_i^n \quad \text{para cada } i$$

4) Concluyen las iteraciones si $W_i^n = w_i^n$ para todo i . Caso contrario, se revisa la política para cada vértice k donde $W_k^n < w_k^n$, siguiendo el arco que produce W_k^n en (52). Tomamos $n + 1$ en lugar de n y volvemos al paso segundo.

Observemos que (51) requiere la solución de un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas. Teniendo en cuenta que la política de prueba tiene un solo ciclo, siempre existe una única solución para (51). Si sumamos las ecuaciones (51) para los vértices contenidos en el ciclo, w_i^n se elimina y tendremos:

$$(53) \quad \bar{c}^n = \sum_{i, j \in L} \frac{c_{ij}}{h}$$

siendo L el conjunto de arcos del ciclo y h el número de arcos de dicho ciclo.

Veamos ahora el valor de prueba (52) que se deriva de las ecuaciones funcionales (48) y observemos que el término \bar{c}^n en (52) no ejerce ninguna influencia sobre la minimización. Así pues, no tendremos que restarlo cuando encontremos el mínimo, sino cuando calculemos el valor resultante de W_i^n . Vemos pues, que resulta útil expresar la prueba según (52) ya que esta forma es general para el caso en que los tiempos que se tarda en atravesar los diversos arcos sean diferentes.

Con las debidas reservas para evitar fenómenos de ciclo, como ocurre en el método Simplex, el algoritmo expuesto tiene las siguientes propiedades:

- 1) Para cada iteración, $\bar{c}^n \leq \bar{c}^{n-1}$
- 2) El algoritmo termina en un número finito de iteraciones
- 3) Al final, la política conseguida es óptima.

Si suponemos ahora que los tiempos para atravesar los diversos arcos (h_{ij}) son diferentes y que el factor de descuento ($v_{ij} \equiv v^{h_{ij}}$) también es cambiante con los distintos arcos, podemos reformular nuevamente (46), (47) y (48) como sigue:

$$(54) \quad w_i + \frac{\bar{c}}{1-v} = \text{Min}_{i,j \in P} \left[v_{ij} \left(w_j + \frac{\bar{c}}{1-v} \right) + c_{ij} \right]$$

$$(55) \quad w_i = \text{Min}_{i,j \in P} \left[v_{ij} w_j + c_{ij} - (1 + v + \dots + v^{h_{ij}-1}) \bar{c} \right]$$

$$(56) \quad w_i = \text{Min}_{i,j \in P} (w_j + c_{ij} - h_{ij} \bar{c})$$

De idéntica forma, el coeficiente h_{ij} modifica a \bar{c}^n en (51) y (52), y el denominador en (53) es la suma de los h_{ij} para los arcos (i,j) contenidos en el ciclo.

A pesar de que la política inicial tiene que constar solamente de un ciclo, una política de prueba en una iteración posterior puede tener dos o más ciclos. En dicho caso el algoritmo debe ser ligeramente modificado.

Puesto que una política de prueba indica que cada vértice i se encuentra bien en un ciclo o bien en el camino a un ciclo, todos los vértices pueden ser divididos en dos grupos, uno para cada ciclo. Sea \bar{c}_i^n el coste medio por período para el ciclo al cual está asociado el vértice i . Con una política de prueba dada, tendríamos:

$$(57) \quad w_i^n - w_j^n + h_{ij} \bar{c}_j^n = c_{ij} \quad \text{para cada } i$$

donde consideramos iguales todas las \bar{c}_j^n asociadas con el mismo ciclo, y escogemos de forma arbitraria un i en cada ciclo para que $w_i^n = 0$.

Después de (57) calcularemos:

$$(58) \quad \text{Min}_{i,j \in P} (\bar{c}_j^n) \equiv \bar{C}_i^n \quad \text{para cada } i$$

Si $\bar{C}_k^n < \bar{c}_k^n$ para cualquier k revisamos la política a partir de (58); si la nueva política sigue teniendo más de un ciclo volvemos a los cálculos (57) y si no volvemos a (51). Si $\bar{C}_k^n = \bar{c}_k^n$ para cualquier valor de k , \bar{c}_k^n será igual para todo valor de k ; consideramos a \bar{c}^n como el valor común y aplicamos (52) de igual forma que antes.

3.3. Comentarios al modelo expuesto

El tratar de abarcar un horizonte temporal ilimitado como período de planificación, produce unas serias dificultades de cálculo. No queremos decir con ello que no puede encontrarse la solución, pues hemos visto como mediante la utilización del método de aproximaciones sucesivas podemos llegar a alcanzarla. Sin embargo, no podemos menos de reconocer unas dificultades superiores al modelo anterior.

Hemos abordado en primer término, la minimización del coste total, sin embargo, tal objetivo puede no conducirnos a una política óptima cuando el horizonte temporal es ilimitado, puesto que en ciertos casos, la función objetivo puede crecer ininterrumpidamente período tras período hasta alcanzar un valor infinito, con lo que ya no habrá posibilidad alguna de comparación entre las distintas políticas. Para obviar este inconveniente se propone la minimización del coste medio por período, con lo que las dificultades apuntadas pueden superarse.

No podemos plantearnos ahora un análisis de sensibilidad basado en la consideración de un horizonte planificado de mayor o menor duración, sin embargo, el factor de descuento o actualización v puede jugar un papel

importante, de ahí que resulte de interés estudiar si se produce una alteración en la política óptima delineada como consecuencia de una variación de v .

Interesa destacar que muchas veces puede ser más conveniente el uso de los modelos vistos en el epígrafe anterior, o sea con horizonte limitado, por la sencilla razón de que para ese plazo que estudian, la política resultante será óptima, mientras que la derivada de un modelo con horizonte ilimitado lo será para todo el ámbito temporal analizado. Ahora bien, ¿quién nos garantiza la permanencia de las condiciones de las que depende la validez del modelo durante un plazo ilimitado?. Esta circunstancia puede llevarnos a considerar de mayor conveniencia la planificación temporal limitada, aunque a largo plazo la política que va ya siendo diseñada no sea estrictamente óptima.

4. MODELO PROBABILISTICO PARA LA OPTIMIZACION DEL VOLUMEN DE PEDIDO

Consideremos ahora el caso de una empresa que fabrica ciertos productos industriales altamente especializados, cuya elaboración requiere unos elementos de elevado coste y delicada manufactura. Como la producción se hace contra pedido en firme, no se considera necesario mantener stock de los elementos mencionados, dada la alta inmovilización financiera que ello supondría. En ciertas ocasiones y debido al alto grado de calidad exigido, los elementos citados no son aptos para la correcta terminación de los productos, en cuyo caso el proveedor se hace cargo de los mismos reintegrando la totalidad de su valor. Para evitar retrasos en el

servicio de los pedidos, la empresa demanda los referidos elementos en cantidades superiores a las necesidades reales, pero si dichas cantidades son excesivamente grandes puede encontrarse con demasiados elementos, lo cual le supondrá un determinado coste de penalización, que puede alcanzar hasta el coste total de dichos elementos, pues si bien en algunos casos el proveedor se hará cargo de los mismos a un precio inferior, en otros no los comprará ya que debido a su extrema especialización pueden resultar inutilizables para cualquier otro cliente.

El problema que se plantea nuestra empresa, consiste, pues, en determinar el volumen óptimo de pedido de los elementos citados. Si se conociera con exactitud el número de elementos que fallarían en cada pedido, el problema evidentemente se simplificaría, pero no es éste el caso, con lo que el análisis resulta algo más complejo.

Denominaremos:

c = Coste por elemento comprado al proveedor

v = Valor de recuperación por elemento comprado por encima de la cantidad requerida ($0 \leq v \leq c$)

k = Gastos que implica el efectuar un nuevo pedido, caso de necesitar elementos adicionales.

$P_x(j)$ = Probabilidad de que en un pedido de x elementos fallen j durante el proceso de inspección ($P_x(j) < 1$).

Examinando ahora la forma en que un proceso de decisión como el señalado se desarrollará a lo largo del tiempo, descubriremos cómo tras-

ladar el problema al marco de un modelo de optimización secuencial. Sea N el número de elementos válidos requeridos y supongamos que se efectúa un pedido de $x \geq N$. Si j componentes son defectuosos y $j \leq x - N$, habremos satisfecho nuestras necesidades, y $x - N - j$ serán los elementos sobrantes. Por el contrario si $j > x - N$, serán necesarios $N - x + j$ elementos más.

Por tanto, cuando $j > x - N$ tendremos que hacer un nuevo pedido. El problema de decisión será idéntico al anterior, salvo que ahora son necesarios menos elementos, a menos que todos los recibidos en la primera ocasión hayan fallado, caso más que improbable. Sea cual fuere esta circunstancia, la información que se necesita respecto al pedido anterior, es el número de elementos válidos que siguen siendo necesarios. Este número de elementos válidos será la variable de estado del sistema estudiado.

4.1. Formulación por Programación Dinámica

La búsqueda de la política óptima necesita, como sabemos, el establecimiento de un objetivo, que en este caso será la minimización del coste total esperado de pedir x elementos, siendo n la cantidad necesaria de los mismos.

El camino a seguir para establecer la función de costes será el siguiente. Primeramente hay que restar al coste total de compra el coste estimado de los elementos defectuosos, ya que los mismos pueden ser devueltos a un precio idéntico al de adquisición. En segundo término, caso

de que haya elementos en exceso, habrá que restar al coste total el valor de recuperación estimado de dichos elementos. Por último, caso de que con el pedido primitivo no se hubieran atendido las necesidades de la producción, habría que adicionar el coste k del nuevo pedido que debe ser formulado y los costes de adquisición de los elementos que componen dicho pedido.

Así pues, si denominamos $f(n)$ al coste mínimo estimado cuando se necesitan n elementos válidos, tendremos que:

$$(59) \quad f(n) = \underset{x \geq n}{\text{Min}} \left\{ c \left[x - \sum_{j=0}^x j P_x(j) \right] - v \sum_{j=0}^{x-n} (x-n-j) P_x(j) + \right. \\ \left. + \sum_{j=x-n+1}^x \left[k + f(n-x+j) \right] P_x(j) \right\} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

El valor de $x(n)$ que satisfaga $f(n)$ será el volumen de pedido óptimo. Los valores de $x(n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ suponen una política óptima.

Si se necesitan N elementos, será preciso calcular $f(n)$ para $n = 1, 2, 3, \dots, N$ sucesivamente. Es conveniente advertir que el término $f(n)$ puede aparecer en ambos lados de la ecuación cuando $j = x$, sin embargo ya dijimos anteriormente que la probabilidad de que fallen todos los elementos componentes del pedido primitivo puede muy bien igualarse a cero, no obstante, podemos contemplar esta posibilidad, y haciendo operaciones en (59) tendremos:

$$(60) \quad f(n) = \text{Min}_{x \geq n} \left\{ c \left[x - \sum_{j=0}^x j P_x(j) \right] - v \sum_{j=0}^{x-n} (x-n-j) P_x(j) + \right. \\ \left. + k \sum_{j=x-n+1}^x P_x(j) + \sum_{j=x-n+1}^{x-1} f(n-x+j) P_x(j) + \right. \\ \left. + f(n) P_x(x) \right\}$$

de donde:

$$(61) \quad f(n) = \text{Min}_{x \leq n} \left[1 - P_x(x) \right]^{-1} \left\{ c \left[x - \sum_{j=0}^x j P_x(j) \right] - \right. \\ \left. - v \sum_{j=0}^{x-n} (x-n-j) P_x(j) + k \sum_{j=x-n+1}^x P_x(j) + \sum_{j=x-n+1}^{x-1} f(n-x+j) P_x(j) \right\}$$

4.2. Comentarios al modelo expuesto

La aplicación de la ecuación de recurrencia (61) nos permitirá calcular el volumen de pedido óptimo, según los elementos necesarios para llevar a cabo el programa de producción. Ni que decir tiene que la probabilidad de fallo que se estime viene a ser un condicionante decisivo de la política óptima. Así, si supusiéramos que los fallos se ajustan a una distribución binomial en la que P es la probabilidad de que falle un elemento, podríamos delinear diferentes políticas para valores de P iguales a $1/4$, $1/2$, $3/4$, etc. por ejemplo. Con ello se aumenta el nivel

de información disponible, resultando factible adaptarse a una u otra política a medida que transcurre el tiempo, si se observa que las características del momento son diferentes de las de partida.

Otro elemento de coste decisivo para la delineación de la política es k . A medida que este aumenta, la conveniencia de hacer un segundo pedido complementario disminuirá, de ahí que presente interés el plantearse a priori diversas opciones según los actuales y previsibles valores de k .

También puede resultar de interés conocer el componente de seguridad inmerso en cada pedido. Supongamos \bar{x} es la cantidad de elementos demandados y que la probabilidad de fallo se ajusta a la distribución binomial antedicha, entonces los elementos útiles serían $(1-p)\bar{x}$, que anteriormente hemos designado con n . De aquí deducimos que para obtener n elementos útiles será preciso pedir $\bar{x} = n/(1-p)$. La diferencia entre la política óptima $x(n)$ y \bar{x} constituye el componente de seguridad mencionado.

Por último, no podemos dejar de plantearnos el conocer el impacto económico del riesgo, que mediremos por la diferencia $[f(n) - c n]$ y que puede ser interpretada como el coste que la empresa ha de soportar para garantizarse la cumplimentación de sus programas de producción en los plazos fijados. Mientras que $[f(n) - c n]$ se incrementa con n , el coste medio del riesgo $[f(n) - c n]/n$ va disminuyendo paulatinamente.

CAPITULO VII

DECISIONES SECUENCIALES

EN EL SUBSISTEMA

COMERCIAL

CAPITULO VII. - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTEMA COMERCIAL

1. INTRODUCCION

Cuando anteriormente esquematizamos los problemas básicos del subsistema comercial de la empresa, tuvimos ocasión de resaltar la gran amplitud de los mismos, de ahí que ahora no podamos examinar con todo detalle la variedad de decisiones que tienen lugar en dicho subsistema.

Esta circunstancia da lugar a que nos veamos obligados a seleccionar entre los problemas apuntados aquellos que consideramos como de mayor importancia y cuyo tratamiento puede ser llevado a cabo mediante la programación dinámica.

En este orden de cosas hemos juzgado conveniente abordar primeramente un problema ya clásico, el del transporte entre lugares de pro-

ducción o almacenamiento y centros de consumo, cuya formulación inicial en 1939, se debe a Kantarovich¹, si bien su divulgación en el mundo occidental es posterior al tratamiento que del mismo hizo Hitchcock². Las extensiones sobre el tema son muchas y existen actualmente numerosas técnicas para el tratamiento de diversos casos particulares del problema debidas a prestigiosos autores, tales como Dantzig³, Flood⁴, Ford y Fulkerson⁵, etc. Posteriormente y como una extensión de este modelo, efectuaremos un análisis dinámico de la localización de almacenes. Por último, expondremos un modelo dinámico para controlar el riesgo que implica la prospección de posibles clientes llevada a cabo por un equipo de ventas.

2. MODELO DINAMICO DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

En lo que sigue denominaremos puntos de almacenamiento a los lugares

-
- (1) L. V. KANTAROVICH. - Mathematical methods of organizing and planning production. - Management Science, Vol. 6, 1960. Pags. 366-422.
 - (2) F. L. HITCHCOCK. - The distribution of a product from several sources to numerous localities. - Journal of Mathematics and Physics, Vol. 20, 1941. Pags. 224-230.
 - (3) G. B. DANTZIG. - Applications of the Simplex method to a transportation problem. Incluido en Activity Analysis of Production and Allocation dirigida por T. C. KOOPMANS. J. Wiley and Sons. - New York, 1951, Cap. 23.
 - (4) M. M. FLOOD. - On the Hitchcock distribution problem. - Pacific Journal of Mathematics. Vol 3, 1953. Pags. 369-396.
 - (5) L. FORD; D. R. FULKERSON. - Maximal flow through a network. - Canadian Journal of Mathematics, Vol 8, 1956. Pags. 399-404

res donde se encuentran los recursos, y centros de consumo aquellos donde existe una demanda de tales recursos. Representamos los primeros por A_1, A_2, \dots, A_M , y por C_1, C_2, C_N los segundos.

Aunque más tarde formularemos el modelo en términos generales, vamos a examinar de momento el caso en que ya el número de puntos de almacenamiento, ya el de centro de consumo sea pequeño, Siendo pequeño uno de los dos, el otro puede ser arbitrariamente grande sin que la posibilidad de solución se vea afectada. Supondremos que no existe más que un solo tipo de recursos y denominaremos:

x_i = oferta de recursos disponible en el i -ésimo punto de almacenamiento.

y_j = demanda de estos recursos en el j -ésimo centro de consumo.

Suponiendo una perfecta coincidencia entre la oferta y demanda totales tendremos:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^M x_i = \sum_{j=1}^N y_j$$

Denominaremos:

x_{ij} = cantidad de recursos enviados desde el punto de almacenamiento i al centro de consumo j .

$c_{ij}(x_{ij})$ = coste de la operación.

Las cantidades x_{ij} deben satisfacer las siguientes restricciones:

- No ser negativas, o sea:

$$(2) \quad x_{ij} \geq 0$$

- La cantidad total expedida por un punto de almacenamiento debe ser igual a la oferta del mismo, o sea:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^N x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, M)$$

- La cantidad total recibida en un centro de consumo cualquier debe ser igual a la demanda en ese punto, es decir:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^M x_{ij} = y_j \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Es conveniente señalar otra hipótesis que vamos a manejar, la de que no puede haber transferencias de recursos ni entre puntos de almacenamiento ni entre centros de consumo.

El problema que nos planteamos es el de determinar las x_{ij} que satisfaciendo las anteriores restricciones, minimizan el coste total de transporte, o sea:

$$(5) \quad \text{Min } C_{MN} = \text{Min} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} (x_{ij})$$

Este problema no deja de presentar complejidad, debido a la forma de las funciones $c_{ij} (x_{ij})$. El caso más simple es el que contempla la Programación Lineal, en el que los costes de transporte desde un al-

macén cualquiera a cualquier centro de consumo son directamente proporcionales a la cantidad transportada. Cuando esta circunstancia no se da, la utilización de los algoritmos de la Programación Dinámica permite la optimización del modelo expuesto.

2.1. Formulación por Programación Dinámica

Vamos a tratar de resolver bajo esta óptica el problema expuesto, si bien como ya apuntamos anteriormente, consideraremos en principio, dos puntos de almacenamiento y un número arbitrario de puntos de consumo. Tendremos pues:

Puntos de almacenamiento.	Oferta de recursos.	Centros de consumo	Demanda de recursos.
A_1	x_1	C_1	y_1
		C_2	y_2
		-	-
A_2	x_2	-	-
		C_{N-1}	y_{N-1}
		C_N	y_N

El punto de partida para el tratamiento dinámico, consiste en considerar que las demandas pueden ser satisfechas unas después de otras, comenzando por la correspondiente a C_N , siguiendo con la de C_{N-1} , y así sucesivamente.

La función objetivo será la correspondiente al mínimo coste del transporte, o sea, el vinculado a una política óptima. Dicha función será representada por $f_N(x_1, x_2)$.

El satisfacer la demanda del N-ésimo centro de consumo dará lugar a los costes siguientes:

$$(6) \quad c_{1N}(x_{1N}) + c_{2N}(x_{2N})$$

con lo que los stocks de recursos en los almacenes A_1 y A_2 se verán reducidos a $x_1 - x_{1N}$ y $x_2 - x_{2N}$, respectivamente.

La ecuación de recurrencia que, por aplicación del principio de optimalidad podemos obtener, es la que sigue:

$$(7) \quad f_N(x_1, x_2) = \underset{\{S_N\}}{\text{Min}} \left[c_{1N}(x_{1N}) + c_{2N}(x_{2N}) + f_{N-1}(x_1 - x_{1N}, x_2 - x_{2N}) \right] \quad \text{para } N \geq 2$$

S_N es el conjunto determinado por las relaciones:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_{1N} + x_{2N} &= y_N \\ 0 &\leq x_{1N} \leq x_1 \\ 0 &\leq x_{2N} \leq x_2 \end{aligned}$$

Cuando $N = 1$, tendremos:

$$(9) \quad f_1(x_1, x_2) = c_{11}(x_1) + c_{21}(x_2)$$

De idéntica forma podría ser tratado un problema análogo pero con mayor número de dimensiones, como ocurre si consideramos tres o más puntos de almacenamiento, si bien hay que destacar que las dificultades de cálculo serían mayores. Como remontarlas es el problema que nos vamos a plantear a continuación.

Anteriormente no hemos hecho uso de la información suplementaria de que la oferta se iguala a la demanda, por lo que si ahora lo tenemos en cuenta, tendremos que:

$$(10) \quad x_1 + x_2 = \sum_{j=1}^N y_j$$

lo cual da lugar a que x_2 quede determinada cuando x_1 es conocida. Por esta razón podría ser eliminada la variable de estado x_2 de la anterior función de costes, con lo que tendríamos:

$$(11) \quad f_N(x_1, x_2) = f_N(x_1)$$

de donde la ecuación de recurrencia(7) quedará:

$$(12) \quad f_N(x_1) = \min_{x_{1N}} \left[c_{1N}(x_{1N}) + c_{2N}(y_N - x_{1N}) + f_{N-1}(x_1 - x_{1N}) \right]$$

estando x_{1N} sometida a las restricciones siguientes:

$$(13) \quad 0 \leq x_1 - x_{1N}$$

$$0 \leq y_N - x_{1N} \leq \sum_{j=1}^N y_j - x_1$$

El intervalo de variación de x_1 en $f_N(x_1)$ es $(0, \sum_{j=1}^N y_j)$

De esta forma, el problema general que plantearía la existencia de M puntos de almacenamiento puede ser reducido al cálculo de una serie de funciones de $M-1$ variables. Ahora bien, ésto no altera en grandes términos las dificultades antedichas más que en el caso de dos y tres puntos de almacenamiento, los cuales quedan reducidos a una y dos dimensiones y, por tanto, resultan fácilmente abordables. Necesitamos por ello herramientas más potentes que nos permitan abordar la solución general del problema expuesto, de ahí que a continuación examinemos el problema utilizando el multiplicador de Lagrange y el método de aproximaciones sucesivas.

2.2. Utilización del multiplicador de Lagrange

Si el problema lo planteáramos con tres almacenes, veríamos reducirse el número de dimensiones a dos en virtud de lo ya expuesto. Ahora mediante la utilización del multiplicador de Lagrange se puede disminuir en una más, con lo que se verá reducido al cálculo de una serie de funciones de una variable.

Consideremos la existencia de tres puntos de almacenamiento, con recursos iguales a x_1 en el primero e ilimitados en los dos restantes.

El número de centros de consumo lo seguimos considerando arbitrario. Tendremos, por tanto:

Puntos de almacenamiento	Oferta de recursos	Centros de consumo	Demanda de recursos
A_1	x_1	C_1	y_1
A_2	∞	C_2	y_2
		-	-
A_3	∞	C_{N-1}	y_{N-1}
		C_N	y_N

Supondremos que los costes de transporte son dados, al igual que antes por $c_{ij}(x_{ij})$ y que se paga además un precio λ por cada unidad expedida por A_2 y un precio igual a 1 por cada unidad expedida por A_3 .

El coste total quedara entonces representado por la expresión:

$$(14) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N c_{ij}(x_{ij}) + \lambda \sum_{j=1}^N x_{2j} + \sum_{j=1}^N x_{3j}$$

Podría parecer a primera vista, que era preciso utilizar dos multiplicadores de Lagrange, pero veremos en lo que sigue que tan solo uno es necesario. Supongamos que se hacen variar a λ hasta que los

valores óptimos de x_{1j} sean tales que:

$$(15) \quad \sum_{j=1}^N x_{2j} = x_2$$

Automáticamente se tendrá:

$$(16) \quad \sum_{j=1}^N x_{3j} = \sum_{j=1}^N y_j - x_1 - x_2$$

que es fijo, puesto que la oferta ha de igualarse a la demanda. Se podría entonces eliminar el tercer término de (14).

Designemos por $f_N(x_1)$ el valor mínimo de la función (14) sobre la región:

$$(17) \quad \sum_{j=1}^N x_{1j} = x_1$$

$$x_{1j}, x_{2j}, x_{3j} \geq 0$$

La ecuación de recurrencia será la siguiente:

$$(18) \quad f_N(x_1) = \text{Min}_{S_N} \left[c_{1N}(x_{1N}) + c_{2N}(x_{2N}) + c_{3N}(x_{3N}) + \lambda x_{2N} + x_{3N} + f_{N-1}(x_1 - x_{1N}) \right]$$

estando determinada la región S_N por las relaciones:

$$\begin{aligned}
 & x_{1N} + x_{2N} + x_{3N} = y_N \\
 (19) \quad & 0 \leq x_{1N} \leq x_1 \\
 & x_{2N}, x_{3N} \geq 0
 \end{aligned}$$

Consideremos:

$$(20) \quad c_N(x_{1N}, \lambda) = \text{Min}_{R_N} \left[c_{2N}(x_{2N}) + c_{3N}(x_{3N}) + \lambda x_{2N} + x_{3N} \right]$$

siendo R_N la nueva región determinada por:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & x_{2N} + x_{3N} = y_N - x_{1N} \\
 & x_{2N}, x_{3N} \geq 0
 \end{aligned}$$

La ecuación de recurrencia (18) quedará ahora:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad f_N(x_1) &= \text{Min} \left[c_{1N}(x_{1N}, \lambda) + c_N(x_{1N}, \lambda) + f_{N-1}(x_1 - x_{1N}) \right] \\
 & 0 \leq x_{1N} \leq y_N
 \end{aligned}$$

Haciendo variar λ entre $+\infty$ y $-\infty$ hasta que la cantidad total expedida desde A_2 sea igual a x_2 , o sea, igual al nivel inicial del stock considerado en A_2 , obtendremos la política óptima. La cantidad expedida desde A_3 quedará automáticamente determinada por (16). Hemos reducido de esta forma las tres variables de estados que inicialmente consideramos, a una sola.

2.3. Utilización del método de aproximaciones sucesivas

Ya expusimos en términos generales el método de aproximaciones sucesivas en el Capítulo IV al tratar del subsistema de financiación. Ahora vamos a referirnos simplemente a su aplicación a la resolución del problema del transporte.

Hasta aquí hemos visto que un problema que contenía M puntos de almacenamiento podía ser tratado directamente empleando funciones de $M-1$ variables o a través de los multiplicadores de Lagrange, empleando funciones de $M-K$ variables.

Vamos ahora a indicar qué procedimiento debe seguirse para tratar el problema empleando una serie de funciones de una variable, gracias al método de aproximaciones sucesivas.

Se comenzará distribuyendo las disponibilidades de los puntos de almacenamiento A_3, A_4, \dots, A_M , en una forma cualquiera, para satisfacer una parte de las necesidades de los centros de consumo. Las disponibilidades correspondientes a A_1 y A_2 se distribuyen entonces de forma que satisfagan las necesidades restantes a un coste mínimo. Esta operatoria, como ya sabemos, no necesita más que el tratamiento de funciones de una sola variable y, por tanto, puede ser considerada como simple.

Después de esta primera etapa, continuaremos utilizando las mismas asignaciones anteriores para A_4, A_5, \dots, A_M y la asignación determinada por la minimización precedente para A_1 . Las correspondientes a A_2 y A_3 se determinarán de forma que satisfagan las restantes necesidades a un coste mínimo.

Completada la segunda etapa, continuaremos con la tercera en idéntica forma, o sea manteniendo las mismas asignaciones para A_5 , A_6 , A_M y A_1 y la obtenida en la segunda etapa para A_2 . Las que corresponden a A_3 y A_4 se obtendrán minimizando los costes correspondientes.

El proceso seguirá de manera idéntica a la descrita hasta completar la asignación de los recursos existentes en todos los almacenes, minimizando la función de costes que corresponda. Dichos costes mínimos deben converger, puesto que los obtenidos en la etapa siguiente serán siempre menores a los de la precedente, ya que lo contrario no implicaría aproximación hacia una política óptima en modo alguno.

Para que no exista duda sobre si el mínimo obtenido es un mínimo absoluto o un mínimo relativo, sería preciso ensayar todas las posibles combinaciones de dos puntos de almacenamiento para saber si se ha obtenido efectivamente el mínimo absoluto.

3. ANÁLISIS DINAMICO DE LA LOCALIZACION DE ALMACENES

En una economía dinámica, la localización de los almacenes no puede ser tratada mediante modelos estáticos, es preciso tener en cuenta las previsibles oscilaciones de la demanda y las cambiantes condiciones económicas antes de tomar las decisiones relativas a la localización o relocalización de los almacenes. Considerando las múltiples alternativas de localización, el problema se centra en hallar la combinación de dichas alternativas que maximice los beneficios acumulativos de un período de planificación dado.

Un sistema físico de distribución puede ser considerado como un conjunto de puntos interconectados por una red de transporte, tal y como se muestra en la Figura 1.

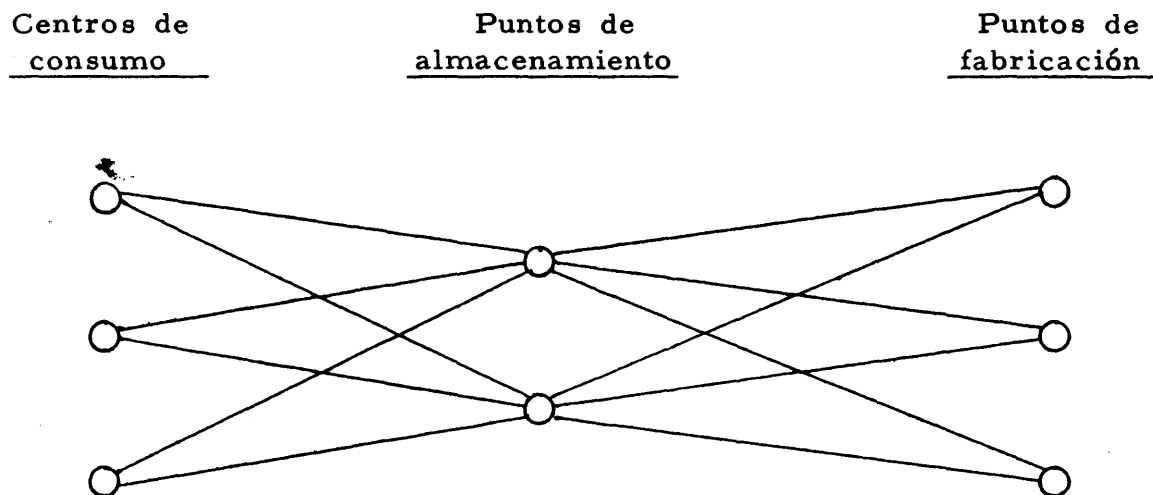


Fig. 1

La localización de los almacenes, la elección del servicio de transportes y la determinación del nivel de los stocks, son las tres áreas de decisión de mayor importancia dentro del subsistema de distribución física. Una vez que se ha decidido donde deben estar situados los puntos de almacenamiento, el servicio de transporte y los niveles de stocks pueden ser calculados de forma que produzcan un beneficio máximo. Teniendo en cuenta que la localización de los almacenes produce una cierta pérdida de libertad, a la hora de delinear el sistema se establece un límite máximo en los beneficios que puede generar el mencionado sistema de distribución.

Cuando la localización del almacén, resulta en principio correcta, no

supone una restricción al sistema, siempre y cuando la demanda y las condiciones económicas permanezcan relativamente invariables a lo largo del tiempo. Sin embargo, si las referidas condiciones cambian de forma significativa, mientras que la localización del almacén permanece constante, la restricción que dicha localización implicaría daría lugar a que los beneficios que se obtengan estarían situados por debajo del óptimo, o sea que podrían existir otros puntos de localización que produjeran beneficios superiores.

Una prudente relocalización de los almacenes asegura el mantenimiento de un sistema físico de distribución que proporcione un balance óptimo entre los ingresos producidos por el servicio al cliente y el coste de proporcionar dicho nivel de servicio.

El problema decisorio consiste, pues, en determinar el plan de localización -la inicial y las relocalizaciones subsiguientes- de forma tal que los beneficios acumulativos de la localización y la relocalización se maximicen durante el período en que necesitamos el almacén, o sea durante el horizonte temporal objeto de planificación.

3.1. Naturaleza de los modelos existentes

Aunque una característica común a la mayor parte de los modelos existentes es la de su complejidad, sin embargo no suelen incluir la variable tiempo en los mismos como algo fundamental, a pesar de que cualquier decisión de localización puede ser efectiva durante un crecido número de años. Como en casi todos los modelos estáticos, se supone -

que la solución será revisada periódicamente al aparecer datos más exactos sobre los inputs. Podría entonces hablarse de relocalización de almacenes en base a esta revisión⁶.

La puesta al día de la solución de un modelo y la relocalización del almacén, pueden ser un procedimiento razonable cuando:

- a) Se pueda predecir con exactitud la demanda y los datos económicos únicamente para un corto período de tiempo (el nivel de la demanda se supone constante durante el resto del horizonte planificado) y
- b) Cuando la decisión de relocalización requiera un espacio de tiempo más corto para ser implantada que el necesario para realizar una previsión más exacta. Teniendo en cuenta que una puesta al día periódica tiene poca sensibilidad para reflejar futuras tendencias en la decisión normal, cualquier relocalización debe estar justificada por la comparación de las soluciones normales con los modelos de localización estática.

(6) Vid. por ejemplo:

W. J. BAUMOL; P. WOLFE. - A Warehouse Location Problem. - *Operación Research*. Marzo-Abril, 1958. Pags. 252-263.

A. A. KUENH; M. J. HAMBURGER. - A Heuristic Program for locating Warehouses. - *Management Science*. Julio 1963. Pags. 643-666.

R. C. VERGIN; J. D. ROGERS. - An Algorithm and Computational Procedure for Locating Economic facilities. - *Management Science*, 13. Febrero, 1967. Pags. 240-254.

Sin embargo, cuando se pueden realizar predicciones para períodos más largos, ofrece mayores garantías un procedimiento analítico más complejo. Se supone que un plan de localización que anticipe cuando y donde tendrá lugar la relocalización proporcionará, por diferentes razones, unos beneficios más elevados.

Como crítica a los supuestos manejados por los modelos estáticos podemos destacar las siguientes objeciones:

- a) La relocalización de un almacén puede necesitar un año o más entre la toma de la decisión y su puesta en práctica. La compra del terreno, la construcción del edificio, la negociación de la financiación y el cerrar un almacén y abrir otro, llevan su tiempo. Por tanto, este intervalo de tiempo puede ocasionar que los datos originales en los que se basó la decisión no estén vigentes en el momento de su puesta en práctica.
- b) A pesar de que una puesta al día periódica puede utilizar potencialmente datos presentes y, por tanto, más exactos, las decisiones de cuando y donde relocalizar son arbitrarias. Por ejemplo, sería una decisión arbitraria el número de años a lo largo de los cuales se amortizarían los costes fijos de la relocalización, ya que no se conoce cuando tendrá lugar la próxima relocalización. El peligro que entraña este procedimiento es que, obviamente, no se seguirá el plan de beneficio máximo durante el horizonte temporal planificado.

Lo importante del problema radica en determinar el plan de localización que indique cuando y donde se debe realizar la relocalización. El plan se establece en el momento inicial para la totalidad del horizonte

temporal contemplado y supone el óptimo para los ingresos y costes previstos.

3.2. Formulación por Programación Dinámica

Basándonos en el modelo estático de Mossman y Morton⁷, podemos determinar los beneficios esperados del sistema de distribución, según que adopte una u otra de las alternativas de localización a través de la fórmula siguiente:

$$(23) \quad P_t(A_i) = \sum_{j=1}^N p_j v_{oj} b_j - a_{jj} t_j / t_{oj} - (R_j d_{ij} + R_i d_i) v_{oj} b_j - a_{jj} t_j / t_{oj}$$

para todo i

siendo:

$P_t(A_i)$ = Beneficio esperado del sistema de distribución en el período t cuando la localización elegida es A_i ($i=1, 2, \dots, M$)

p_j = Precio medio del producto en los distintos mercados.
($j = 1, 2, \dots, N$)

x_j, y_j = Coordenadas de los mercados

\bar{x}, \bar{y} = Coordenadas de los puntos de fabricación

(7) F. H. MOSSMAN; N. MORTON. - Logistics of Distribution Systems. Allynand Bacon, Inc. Boston 1965. Págs. 245-256.

x_i, y_i = Coordenadas de los almacenes

$d_{ij} = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{1/2}$ = Distancia desde el almacén i al mercado j.

$d_i = \left[(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 \right]^{1/2}$ = Distancia entre la fábrica y el almacén i.

t_{oj} = Plazo de entrega en el mercado j de un almacén que opere en dicho mercado.

t_j = Plazo de entrega en el mercado j, estando el almacén localizado en d_j / v_j , siendo v_j la velocidad de un vehículo en el mercado j.

v_{oj} = Cantidad pedida en el mercado j con un plazo de entrega $t_j = 0$

a_j = Factor de proporcionalidad para un área específica de mercado y unos productos dados.

R_j = Media de transporte del almacén al mercado j.

R_i = Media de transporte, de la fábrica al almacén i.

b_j = Constante (≥ 1) para un área específica de mercado y unos productos dados.

El anterior modelo se basa, fundamentalmente, en el conocimiento riguroso de la elasticidad de la demanda y del coste del transporte. Mientras que se considera que los costes de promoción y la producción no ejercen una gran influencia en la localización del almacén, los ingresos, los costes de transporte y el nivel de servicio al cliente son tenidos

como los factores más importantes.

La aplicación de (23) nos mostrará los beneficios de cada localización en cada momento del tiempo estudiado. Cada uno de tales períodos - tendrá un lugar para la localización del almacén que de lugar a los - máximos beneficios. Resulta evidente que la solución del problema no puede consistir en moverse cada año al punto de localización que produce un beneficio máximo, debido al coste de relocalización en que se incurriría y que, hasta ahora, no hemos tenido presente, y además no - mover el almacén puede suponer el que en determinados momentos la localización inicial puede resultar más beneficiosa para los períodos venideros.

Esta circunstancia nos lleva a que para determinar el plan de localización óptimo, tengamos que tener presentes los beneficios acumulados en el horizonte temporal planificado, previamente actualizados, y los costes de relocalización de cada uno de los almacenes objeto de estudio. El método ideal para llevar a cabo este análisis lo encontramos en la Programación Dinámica.

La función objetivo deberá considerar para cada período las dos alternativas que se presentan, o sea: mantener la localización inicial (M) o bien trasladar el almacén a otro lugar (T). Entre ambas la elección se orientará por aquella que de lugar a unos mayores beneficios acumulados netos.

Comenzaremos el estudio del proceso por el último período de los que abarca el horizonte temporal objeto de planificación, de ahí que el subíndice temporal n exprese la distancia al momento final que suponemos

es N. La ecuación de recurrencia será la siguiente:

$$(24) \quad f_n(A_i) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} \text{M: } v^{N-n} P_n(A_i) + v^{N-n+1} f_{n-1}(A_i) \\ \text{T: } v^{N-n} P_n(A_j) v^{N-n} F_n + v^{N-n+1} f_{n-1}(A_j) \end{array} \right]$$

Siendo:

A_i = Localización evaluada

A_j = Localización alternativa distinta de A_i

v = factor de actualización $\left(\frac{1}{1+i}\right)$

F_n = Coste de relocalización en el momento n

$P_n(A_i)$ = Resultado determinado según (23)

La aplicación de (24) a cada una de las A_i nos irá mostrando en cada momento la conveniencia o no de trasladarse a otra localización en el momento que se efectúa la evaluación, así como los beneficios netos actualizados correspondientes a dicha localización A_i . Deberá seleccionarse como óptima aquella que de lugar a los máximos beneficios netos actualizados en el momento inicial, o sea:

$$(25) \quad \text{Max } f_N(A_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

y a partir de ese momento, se irá examinando para cada período, si en los cálculos anteriores la política señalada fue M ó T, y en este último caso a que localización, procediendo en consecuencia.

T A B L A 1

Períodos Localizaciones alternativas	1		2		N	
	$f_N(A_i)$	Política M_{A1}	$f_{N-1}(A_i)$	Política M_{A1}	$f_1(A_i)$	Política
A_1	$f_N(A_1)$	M_{A1}	$f_{N-1}(A_1)$	M_{A1}	$f_1(A_1)$	T_{A2}
A_2	$f_N(A_2)$	M_{A2}	$f_{N-1}(A_2)$	M_{A2}	$f_1(A_2)$	M_{A2}
A_3	$f_N(A_3)$	M_{A3}	$f_{N-1}(A_3)$	T_{A2}	$f_1(A_3)$	M_{A3}
.....
A_N	$f_N(A_N)$	M_{AN}	$f_{N-1}(A_N)$	T_{A2}	$f_1(A_N)$	T_{A2}

Resumimos en la Tabla 1 los posibles resultados obtenidos con la aplicación de (24). Puede apreciarse que en cada período tenemos tanto los beneficios netos acumulados máximos para cada localización, como la política que conduce a tales beneficios.

Si suponemos que la aplicación de (25) da lugar a que elijamos A_3 , tenemos que durante el primer período convendrá ubicar el almacén en tal localización. En el segundo nos encontramos con que la política señalada para A_3 consiste en trasladarse a A_2 , pues a pesar de los costes de relocalización, dicho lugar es el más beneficioso. En el tercer período procederíamos de idéntica forma, es decir observar si la política señalada para A_2 es la de mantener o trasladar, actuando en consecuencia, y así hasta llegar al período N.

Si por alguna circunstancia la localización inicial estuviera predeterminada, el punto de partida no resultaría de aplicar (25), sino que sería precisamente el indicado. En dicho caso, es ésto lo único que varía, puesto que a partir de entonces el proceso seguiría según ha quedado expuesto. Supongamos que A_N es la localización inicial, pues bien, en el período segundo puede verse que la política óptima para dicho almacén consiste en trasladarse a A_2 . El período tercero habría de considerarse ya para A_2 , y así sucesivamente hasta el último período examinado.

Este nuevo planteamiento dinámico nos permite trazar el plan de localización-relocalización desde el momento inicial, eliminando los inconvenientes que comentábamos al hablar de los modelos estáticos, pues es posible plantearse con tiempo suficiente la necesidad del traslado, solucionando previamente cuantos inconvenientes puedan surgir para

efectuarlo en el momento preciso.

3.3. Comentarios al modelo expuesto

Los supuestos en que se basa la aplicación de la programación dinámica al anterior problema de localización son los siguientes:

- Supuestos sobre los datos de los inputs
- Supuestos sobre el uso de la técnica.

Los datos de los inputs, hemos visto que se derivan de un modelo estático de localización, el cual afecta al plan de localización dinámica final, ya haga referencia el primero a uno o más puntos de localización, ya - busque o no el óptimo. No entraremos en el examen de este problema, puesto que, en definitiva, no altera la técnica dinámica expuesta, simplemente se producirá un cambio en los resultados y políticas óptimas como consecuencia del distinto criterio seguido para valorar la función objetivo.

Tiene mayor importancia el supuesto que hacemos para aplicar la técnica matemática al problema expuesto, consistente en que las cargas fijas -especialmente las derivadas de la inversión inicial- asignadas a cada año del período de planificación son constantes e independientes del número de años durante los cuales se usa realmente el almacén, o sea que para un almacén tendríamos:

$$(26) \quad D = \frac{I_0 - S_T}{T}$$

donde:

D = Cargas fijas derivadas de la amortización de la inversión inicial

I_0 = Coste de la inversión inicial

S_T = Valor residual en el período T

T = Número de períodos durante los que se utiliza el almacén.

Dado que T no puede ser conocido antes de determinar el plan de localización dinámico, hacemos el anterior supuesto para lograr una mayor simplicidad en los cálculos. No obstante, una superior rigurosidad nos exigiría la eliminación del mismo, lo cual puede ser realizado utilizando el método de aproximaciones sucesivas, hasta que se iguale el T su puesto con el real⁸.

Otra hipótesis de importancia es que el óptimo estático para cada año proporciona la localización alternativa para ese año. De esta forma limitamos el número de situaciones a considerar y simplificamos la búsqueda del plan óptimo de localización. El peligro de este supuesto estriba en que quizás otras alternativas pudieran proporcionar beneficios más elevados. A pesar que no consideramos esta posibilidad, podemos afirmar que la solución que hallaríamos con el camino expuesto estaría muy cerca de la obtenida teniendo en cuenta la posibilidad apuntada.

Los supuestos basados en el perfecto conocimiento de los datos estima-

(8) El método de aproximaciones sucesivas ha quedado descrito en el Capítulo IV, apart. 3.2. Aplicaciones del mismo pueden verse en el Capítulo citado, apart. 3.3 y en los Capítulos VI, apart. 3.1.2. y 3.2.1., VII, apart. 2.3. y VIII apart. 2.2

dos y en la duración del horizonte temporal planificado, condicionan sin duda la solución del modelo. No obstante, podría ser alterados los mismos, asignando probabilidades a los posibles beneficios de los distintos años y ampliando el horizonte objeto de planificación hasta considerarlo como ilimitado, según se ha visto ya en casos expuestos con anterioridad.

El análisis dinámico de la localización de almacenes que hemos expuesto, no es sino una ampliación del análisis estático que proporciona datos sobre los beneficios y alternativas de localización de los almacenes para el mencionado análisis dinámico. La programación dinámica sirve de instrumento para hallar un plan de localización-relocalización que produzca el máximo beneficio durante el horizonte temporal planificado. Como el análisis dinámico proporciona planes de localización que anticipan donde y cuando relocalizar, el plan así trazado brinda una base más amplia para la toma de decisiones que la que se desprende de una simple puesta al día de la localización fijada según un plan estático.

Si bien nos hemos centrado aquí en el problema de la localización de almacenes, de igual forma podría aplicarse el método expuesto a la localización de las plantas de fabricación, ya que en definitiva los problemas locacionales tienen una amplia base común.

4. CONTROL DEL RIESGO Y DE LOS INGRESOS DE UN EQUIPO DE VENTAS

Cuando nos encontramos en un mercado de costes elevados, de gastos

de capital o de servicios complejos, surge un interesante problema, con sistente en conocer qué cantidad de esfuerzos deben dedicarse a un clien te en expectativa para convertirlo en cliente efectivo. Se han sugerido diversas soluciones, desde las que señalan un servicio a los posibles - clientes en orden cronológico, hasta los que prefieren aplicar un cr ite rio firme de selección. La mayoría de estas soluciones han fallado a la hora de aclarar el problema antes apuntado, es decir, de mostrar la compensación entre el riesgo que se corre y la posibilidad de percibir unos ingresos, como medio de selección entre una lista de posibles clien tes.

Nuestro interés se centrará, pues, en el conocimiento de los posibles gastos que implica la prospección de cada cliente en expectativa y de los compromisos de compra que adquirirán cada uno de ellos. La clase de información que necesitamos es un conjunto de juicios y hechos que el subsistema comercial debe poseer al fijar los posibles clientes. El procedimiento a desarrollar debe proporcionar un cierto grado de consistencia a las elecciones del decisor.

De acuerdo con lo expuesto dividiremos nuestro análisis en dos partes:

- Una primera en la que se identifican los hechos y juicios para cada posible cliente.

- Una segunda en la que se utiliza la programación dinámica para seleccionar aquellos a los que deben dirigirse los esfuerzos, así como la cuantía de estos últimos que debe dedicarse a cada cliente.

Como supuestos básicos hacemos dos: Que en el subsistema comercial de la empresa se revisa periódicamente la lista de posibles clientes y que los períodos para los que se toman las decisiones, después de cada revisión, son lo suficientemente amplios como para manejar al - - cliente más difícil e importante.

4.1. Evaluación de la clientela

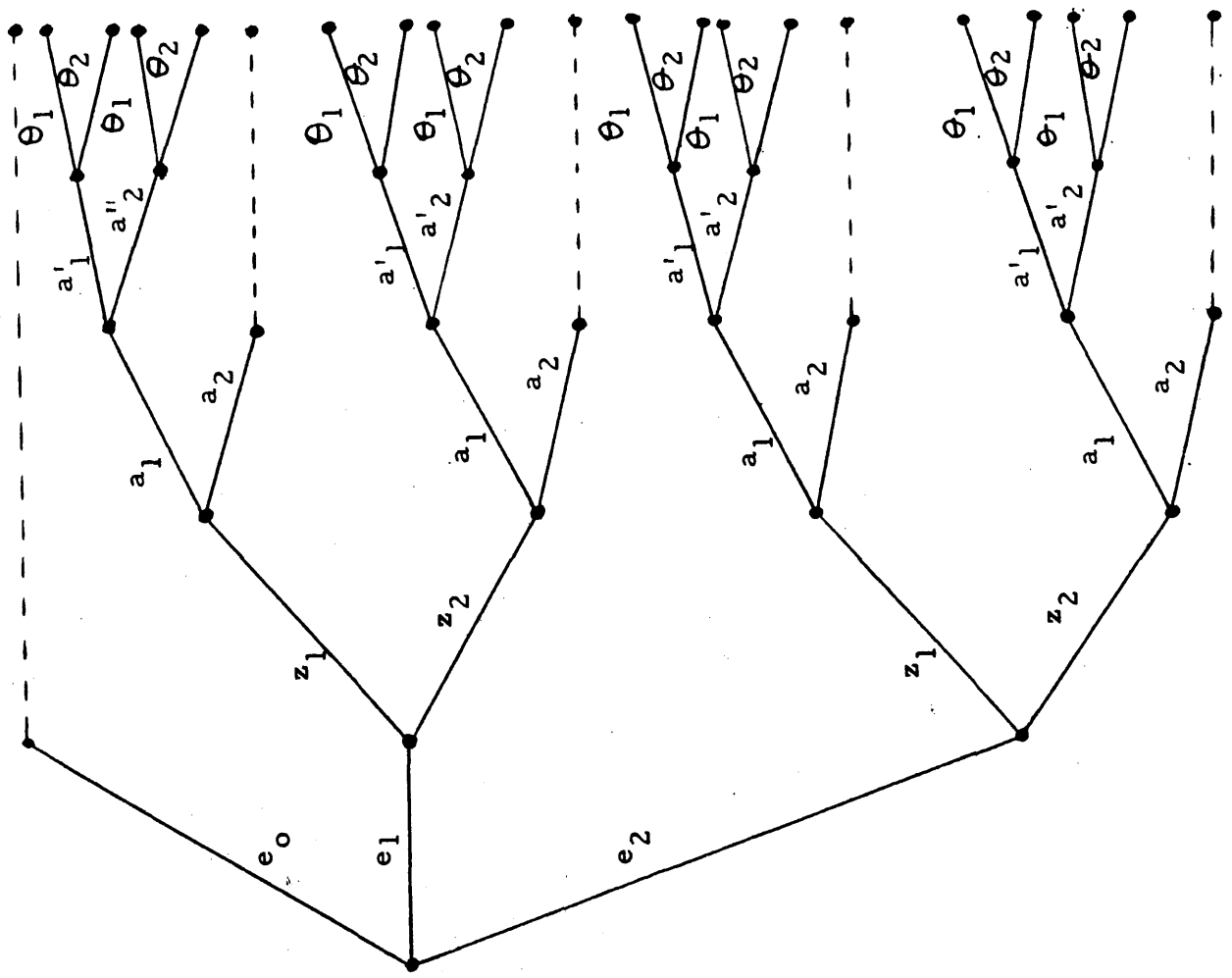
Supongamos que C es uno de los clientes de nuestra lista. En la próxima revisión debe decidirse si merece o no la pena dedicar parte de - nuestros recursos a su servicio. Esta decisión envolverá un estudio de diversos factores, tales como su dimensión, su posición en la industria, el total del posible pedido y el esfuerzo que se le debe dedicar.

Si aceptamos a C como un posible cliente, tendremos que decidir la can- tidad del compromiso de venta inicial. Dicho compromiso nos conducirá a sentirnos cada vez más envueltos, hasta que finalmente haya que to-- mar una decisión sobre si se sigue o no con la prospección iniciada. El cliente C por su parte aceptará o rechazará nuestras propuestas.

El problema con el que se enfrenta el subsistema comercial de la em-- presa consiste en decidir el total al que puede llegar el compromiso - - inicial, considerando todas las posibilidades que resulte de la elección. El árbol de decisión que se muestra en la Figura 2 recoge una gama de posibilidades factibles en un problema de este tenor, en una empresa de investigación de mercados (M).

Ingresos
estimados

Compromiso
horas/hombre



w^0

w^1

w^2

w^z

r^0

r^1

r^2

r^z

Fig. 2

Los elementos del problema decisorio quedan detallados en la Tabla 2.

ELEMENTOS	NOTACION	ALTERNATIVAS
Investigación	e_0 e_1 e_2 --- --- e_n	C renuncia a la prospección Pequeña investigación del problema Amplia investigación del problema ----- ----- Investigación detallada del problema
Resultados	z_1 z_2	C necesita los servicios de M C no necesita los servicios de M
Acciones	a_1 a_2 a'_1 a'_2	Prosigue con rendimiento No consigue rendimiento Investigación a bajo precio Investigación a un precio medio
Características de C	θ_1 θ_2	Acepta los resultados Rechaza los resultados

Tabla 2

A través de la Figura 1 podemos ver que algunas de las alternativas están al alcance de cualquier organización de ventas, como por ejemplo la elección de una investigación preliminar. Los actos subsiguientes son posibilidades que dependen del camino escogido (los resultados de la investigación y la reacción de C), llevando implícita una mayor inseguridad en el problema de decisión. El paso inmediato en el desarrollo del problema consistirá en identificar los juicios inseguros y los gastos e ingresos correspondientes.

Estos juicios inseguros pueden venir frecuentemente expresados como posibilidades subjetivas, ya que normalmente se dispone de pocos datos objetivos relevantes. Estas probabilidades deben reflejar los puntos de vista de las personas que conocen relativamente bien a C.

En el árbol de decisión de la Figura 1, podemos identificar algunos de los juicios de probabilidad condicionales más típicos, concretamente:

- La probabilidad de que una investigación nos muestre que C es un candidato para los servicios que M ofrece, esto es: $P(z_1/e_1)$. Esta probabilidad está condicionada a la escala de la investigación y dependerá del tamaño de C, del conocimiento de sus problemas comerciales, etc.
- La probabilidad de que C acepte la propuesta de M, proporcionando los resultados de la investigación elegida, o sea: $P(\theta_1/z_1, e_1)$. El evaluar esta probabilidad requiere la consideración de ciertos factores, como la posible competencia, la política de negocios, los resultados de la investigación, etc. A pesar de que algunos datos obtenidos en el pasado pueden suponer una cierta ayuda, la probabilidad es bastante

subjetiva y puede cambiar de una revisión a otra al disponer de nueva información.

Aparte de estos juicios inseguros, es necesario determinar los costes probables, los beneficios y los compromisos de compra que implica cada cadena de sucesos. Esto requiere calcular los ingresos brutos para cada combinación de investigación, acción y resultados de las relaciones de M con C. Además de este flujo monetario, es preciso evaluar los probables compromisos de recursos, o sea, el número de horas de trabajo del personal especializado en ventas para cada intento de venta a C durante el período de planificación.

Existen en este punto algunas dificultades de orden práctico, derivadas principalmente de la variación en la calidad del personal, sin embargo, se puede averiguar normalmente, pese a la dificultad antedicha, un índice medio horas/hombre que refleje la composición del esfuerzo de venta. Dicho índice puede ser utilizado para comparar acciones alternativas.

Una vez recopilada toda la información, pueden ser calculados los ingresos estimados y el compromiso horas/hombre por cada acción emprendida por M. Si las pérdidas o las ganancias derivadas de cada acción son relativamente pequeñas comparadas con los recursos de M, simplemente escogeremos aquella acción que maximice los ingresos estimados y ésta será aproximadamente la óptima. Sin embargo, si dichas pérdidas o ganancias son relativamente importantes, los ingresos monetarios estimados ya no son una guía adecuada y, en teoría, deben ser reemplazados por la utilidad estimada.

La estimación de la utilidad nos crea un indudable problema, que aquí

vamos a tratar de acometer suponiendo que la misma depende del ingreso estimado y del riesgo, midiendo este último por la varianza de la distribución de los ingresos inherentes a cada acción. Así, si comparamos dos acciones que tengan el mismo ingreso estimado, aquella en la que la varianza citada sea menor, será la preferida⁹.

En resumen, para cada acción posible asociada con C, M necesita la siguiente información:

- Un conjunto de juicios de probabilidad condicionales
- Un conjunto de cash-flows
- Las necesidades de recursos en horas/hombre

Con estos datos pueden ser calculados los ingresos monetarios estimados, la varianza y las necesidades horas/hombre estimadas que se derivan de cada acción. La acción preferida será aquella que implique un alto nivel de ingresos, una baja varianza y un porcentaje horas/hombre razonable.

4.2. Formulación por Programación Dinámica

Una vez completada la evaluación de cada posible cliente, podemos pasar a la segunda parte del análisis, consistente en determinar la mejor for-

(9) Vid. H. MARKOWITZ. - Portfolio Selection. - Cowles Commission Monograph, nº 16. John Wiley and Sons. - New York, 1959. En dicha obra se realiza una discusión más detallada del intento que exponemos, así como su aplicación al análisis de cartera.

ma de distribución del personal de ventas disponible entre los distintos clientes. El objetivo que se persigue con esta distribución es maximizar los beneficios estimados, sujetos a una restricción sobre el total horas/hombre de personal especializado disponible y a otra más amplia que especifica la varianza aceptada. Si esta última restricción varía, los resultados finales también variarán, con lo que se podrán obtener distintas políticas óptimas, según los diferentes niveles de riesgo considerados.

Las distribuciones de recursos que satisfagan las restricciones señaladas, formarán parte de un conjunto que bajo nuestro punto de vista puede calificarse como eficiente. Una vez formado éste para el grupo de clientes examinado en una revisión, el decisor puede considerar los riesgos que está dispuesto a correr y entonces escoger la solución más beneficiosa, o sea, que produzca el máximo de ingresos, dentro del nivel de riesgo que crea aceptable.

Así pues, podemos formular el problema de la forma siguiente:

$$(27) \quad \text{Max } E(R) = \text{Max} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K r_{ij} x_{ij}$$

sujeto a las siguientes condiciones:

$$(28) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K v_{ij} x_{ij} \leq V$$

$$(29) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K w_{ij} x_{ij} \leq W$$

$$(30) \quad \sum_{j=1}^K x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, N$$

$$(31) \quad x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N ; j = 1, \dots, K$$

Siendo:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el cliente } i (1, \dots, N) \text{ tiene un nivel de investigación } j \\ & (1, \dots, K) \\ 0, & \text{si el cliente } i \text{ no tiene dicho nivel } j. \end{cases}$$

$$r_{ij} = \text{Beneficio estimado correspondiente al nivel de investigación } j \text{ para el cliente } i.$$

$$v_{ij} = \text{Varianza de los ingresos asociados con el nivel } j \text{ para el cliente } i.$$

$$w_{ij} = \text{Horas/hombre requeridas por un nivel de investigación } j \text{ para un cliente } i$$

$$E(R) = \text{Beneficios totales estimados}$$

$$V = \text{Varianza máxima aceptable}$$

$$W = \text{Horas/hombre disponibles}$$

N = Número de posibles clientes

K = Número de los niveles posibles de investigación.

La restricción (30) muestra el hecho de que, solamente uno de los K niveles de investigación puede ser llevado a cabo para un cliente i . Si $x_{ij} = 0$ para cualquier j asociada con i , dicho cliente i es eliminado.

Como hemos mencionada anteriormente, la solución debe ser un conjunto eficiente, por ejemplo si V toma valores superiores a cero, se requiere una secuencia de soluciones eficientes, cada una de las cuales estará asociada a una gama de valores de V . Esto sugiere el uso del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de la varianza y, por tanto, con la maximización de:

$$(32) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K r_{ij} x_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K v_{ij} x_{ij}$$

sujeto a (29), (30) y (31).

Planteadas así las cosas, el modelo puede ser reformulado en forma similar a la expuesta anteriormente para el problema del transporte, siendo en este caso cada uno de los N clientes equivalente a los diversos períodos.

La relación de recurrencia básica será:

$$(33) \quad f_N(w) = \text{Max}_{x_{Nj}} \left[\sum_{j=1}^K r_{Nj} x_{Nj} - \lambda \sum_{j=1}^K v_{Nj} x_{Nj} + \right. \\ \left. + f_{N-1} \left(w - \sum_{j=1}^K w_{Nj} x_{Nj} \right) \right]$$

estando x_{Nj} sujeto a las siguientes restricciones:

$$(34) \quad x_{Nj} = 0, 1 \quad \forall j$$

$$(35) \quad x_{Nj} = 0 \quad \text{si } w < w_{Nj}$$

$$(36) \quad \sum_{j=1}^K x_{Nj} \leq 1$$

w aumenta para cada período de 0 a W y λ permanece constante a lo largo de los N períodos. El motivo de las restricciones (34) y (36) resulta evidente por sí mismo; (35) asegura que si w (horas/hombre disponibles) se encuentra en un nivel por debajo del requerido para la investigación j , por ejemplo w_{Nj} , dicha investigación no puede llevarse a efecto.

Cuando se haya encontrado la solución óptima para el valor inicial de λ repetiremos el cálculo para otros valores de λ superiores, hasta tener el conjunto eficiente completo. En efecto, una variación de λ es equivalente a un cambio en la restricción de la varianza. Cuando $\lambda = 0$

dicha restricción es inoperante (ésto es, podemos ignorar el riesgo) y al ir tomando λ valores superiores, el límite máximo de la varianza se va reduciendo gradualmente hasta llegar a cero.

4.3. Comentarios al modelo expuesto

Es interesante observar como cambia la solución óptima al cambiar la varianza. Al disminuir el nivel de riesgo aceptable, se ajusta la restricción de la varianza, y el conjunto de clientes, lógicamente, varía. Por ejemplo de un alto nivel de investigación para un cliente concreto cuando el riesgo no es considerado, puede pasarse sucesivamente a niveles medio, bajo o incluso nulo, a medida que se incrementa dicho riesgo y, por tanto, siendo más operante la restricción de la varianza.

A la vista de la información disponible, el decisor puede siempre optar por una política óptima, habida cuenta del nivel de riesgo que quiera correr. La iniciativa del decisor es en este caso, como facilmente puede apreciarse, fundamental.

También podría resultar interesante en algunas ocasiones investigar las consecuencias de dedicar los recursos disponibles a la atención de posibles clientes marginales por razones de prestigio. Para ello se puede elaborar un programa óptimo con y sin este cliente y establecer la oportuna comparación de resultados.

Otro punto de interés que queremos apuntar es la incompatibilidad que puede darse entre la minimización del riesgo y la utilización de todos

los recursos disponibles. Las grandes ventajas que puede proporcionar el empleo de un amplio equipo de vendedores no significa nada cuando la empresa no está preparada para aceptar un considerable nivel de riesgo. Teniendo en cuenta esta interrelación se puede decidir la amplitud más conveniente del equipo para el nivel de riesgo que la empresa esté dispuesta a correr.

El control del riesgo es tan importante como pueda serlo el de los ingresos estimados. Cuanto más tradicionales son los estudios del problema de distribución de recursos, menos importancia conceden al riesgo, por ello habida cuenta de su importancia actual, juzgamos muy conveniente la utilización de modelos que consideren a este factor en forma explícita.

CAPITULO VIII

DECISIONES SECUENCIALES

EN EL SUBSISTEMA

DE INVESTIGACION

CAPITULO VIII. - DECISIONES SECUENCIALES EN EL SUBSISTEMA
DE INVESTIGACION

1. - INTRODUCCION

La actividad investigadora comporta en gran parte de ocasiones una mul
tiplicidad de actividades interdependientes, cuya conexión en el momen-
to adecuado permite unos ahorros en tiempos y costes francamente cu
antiosos.

Una característica de los proyectos de investigación es su carácter uni-
tario y no repetitivo. Todas las actividades persiguen un objetivo común,
el cual no será logrado si alguna de dichas actividades encuentra ciertas
dificultades que impiden su finalización, y, por tanto, el comienzo de to
das aquellas conectadas con ésta, ya sea en forma mediata o inmediata.
En cuanto al carácter no repetitivo de dichos proyectos, puede en prin-
cipio ser un condicionante de su programación temporal, pero ya comen
tamos en la primera parte, que el uso de las probabilidades subjetivas,

trataba de superar los cauces de la previa experiencia acumulada por la observación de hechos análogos con anterioridad.

El continuo incremento de los proyectos de investigación, así como la necesidad urgente de disponer de los mismos en plazos cada día más breves, ha traído como consecuencia la extensión de la actividad programadora hacia este tipo de proyectos, datando los primeros trabajos sobre el tema del año 1957 en que se elaboraron las formulaciones sobre el CPM¹ y de 1958 en que se elaboró el método PERT². A partir de estas fechas los trabajos sobre el tema han sido numerosísimos lo cual evidencia su enorme interés.

-
- (1) El CPM (Critical Path Method) fue desarrollado por M. R. WALKER de la Du Pont y por J. E. KELLEY de la Remington Rand. La mayor parte del trabajo matemático fundamental fue publicado posteriormente por:

J. E. KELLEY. - Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis. - Operations Research, Vol 9, nº 3, Mayo-Junio 1961. Pags. 296.321.

D. FULKERSON. - A Network Flow Computation for Project Cost Curves. - Management Science, vol 7, Enero 1961. Pags. 167-178.

C. CLARK. - The Optimum Allocation of Resources Among Activities of a Network. - Journal of Industrial Engineering, Vol 12, Enero-Febrero 1961. Pags. 11-17.

- (2) El PERT (Program Evaluation and Review Technique) se desarrolló en la Oficina de Proyectos especiales de la Armada de los Estados Unidos bajo el patrocinio del Almirante W F. RABORN en el programa FBM (Fleet Ballistic Missile). Sus autores fueron: D. G. MALCOLM; J. H. ROSEBOOM; C. E. CLARK y W. FAZAR, los cuales publicaron su trabajo bajo el título: Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, Operations Research, Vol 7, nº 5 Septiembre-Octubre 1959. Pags. 646,- 670

En lo que sigue vamos a exponer la sistemática de programación temporal de un proyecto de investigación utilizando la técnica de la programación dinámica en combinación con el método de aproximaciones sucesivas.

2. PROGRAMACION TEMPORAL DE UN PROYECTO DE INVESTIGACION

Cualquier proyecto puede ser representado por un grafo en el que los vértices significan el comienzo de una o más actividades y la terminación de otra u otras. Cada uno de los arcos representa una actividad. A fin de lograr una simplificación en la simbología, dos actividades no pueden partir de un mismo vértice para confluir también en idéntico vértice. En tales casos es preciso introducir un vértice ficticio y una actividad virtual, a la cual corresponderá una duración nula. Los grafos utilizados para la representación de las actividades y sucesos de un proyecto han de ser conexos, es decir, que entre todo par de vértices exista una cadena, y sin circuitos, o sea, sin caminos que se inicien y terminen en el mismo vértice.

La valoración de cada uno de los arcos o actividades se hará según su duración temporal. La valoración temporal del proyecto estará en función del valor asignado a las diferentes actividades. Como existen diversas secuencias de actividades que discurren de forma paralela, la duración total del proyecto no puede ser la resultante de sumar la duración de todas las actividades. Entre los sucesos inicial y final existirán diversos caminos, pues bien, la duración del camino de valor máximo, o camino crítico, es la que corresponde al proyecto. Como el número de

caminos entre los mencionados sucesos será en todo caso muy numeroso, resulta prácticamente imposible ir calculando separadamente la duración de cada uno de ellos, hay que buscar, por tanto, un procedimiento iterativo que nos permita ir seleccionando paso a paso aquellas actividades que forman parte del camino crítico.

Existen diversos algoritmos que permiten efectuar estos cálculos, como por ejemplo los propuestos por Ford³ y Charnes y Cooper⁴, pero nosotros vamos a tratarlo aquí mediante la Programación Dinámica.

2.1. Formulación por Programación Dinámica

Supongamos que el número de vértices del grafo es N ($i = 1, 2, \dots, N$) y que la duración temporal de cada una de las actividades es t_{ij} , siendo i el suceso precedente y j el suceso siguiente.

Partiendo del suceso inicial, buscaremos un camino que conduzca al suceso final N en un tiempo máximo, sin tener en cuenta si pasa o no por unos u otros sucesos.

Denominaremos f_i al tiempo requerido para ir desde el suceso i hasta el N siguiendo el camino crítico.

(3) L. R. FORD. - Network flow theory. - Rand Corporation paper. - Pag. 923, 1956.

(4) A. CHARNES; W. W. COOPER. - A network interpretation and a Directed Subdural Algorithm for Critical Path Scheduling. - The Journal of Industrial Engineering, Julio-Agosto, 1961. - Pags. 213-219.

Podemos establecer la siguiente ecuación funcional:

$$(1) \quad f_i = \text{Max}_{j \neq i} (t_{ij} + f_j) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 ; f_N = 0$$

Al tratarse de una ecuación funcional, nos encontramos con que la función desconocida aparece en ambos miembros de la ecuación, de ahí que sea preciso utilizar, al igual que en ocasiones anteriores, el método de aproximaciones sucesivas.

2.2. Utilización del método de aproximaciones sucesivas

Comenzaremos primeramente con la aproximación en el espacio de la función objetivo. Tomaremos como primera aproximación:

$$(2) \quad f_i^0 = \text{Max}_{j \neq i} t_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 ; f_N^0 = 0$$

A continuación calcularemos:

$$(3) \quad f_i^1 = \text{Max}_{j \neq i} (t_{ij} + f_j^0) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 ; f_N^1 = 0$$

y luego sucesivamente:

$$(4) \quad f_i^K = \text{Max}_{j \neq i} (t_{ij} + f_j^{K-1}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 ; f_N^K = 0$$

que converge de manera monótona y en un número finito de etapas.

Si efectuamos la aproximación en el espacio de las políticas, consideraremos primeramente todos los caminos que conducen directamente a N, luego todos los que precisan un suceso intermedio y así sucesivamente. Esto da las ecuaciones de recurrencia siguientes:

$$(5) \quad v_i^0 = t_{iN} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad ; \quad v_N^0 = 0$$

luego:

$$(6) \quad v_i^1 = \text{Max}_{j \neq i} (t_{ij} + v_j^0) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad ; \quad v_N^1 = 0$$

y en general:

$$(7) \quad v_i^K = \text{Max}_{j \neq i} (t_{ij} + v_j^{K-1}) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad ; \quad v_N^K = 0$$

El cálculo se detiene cuando:

$$(8) \quad v_i^K = v_i^{K-1} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

El método de aproximación en el espacio de la función objetivo da a

cada iteración la solución óptima de un problema distinto al problema original. El método de aproximación en el espacio de las políticas, antes de llegar al resultado final, da una solución no óptima del problema original.

2.3. Determinación de los caminos subcríticos

Resulta de interés, sobre todo a efectos del control posterior, conocer no solamente el camino crítico, sino también el segundo en orden de criticidad, el tercero, y así sucesivamente, puesto que la probabilidad de que pasen a ser críticos en el desarrollo del proyecto puede ser elevada.

Denominaremos g_i al tiempo requerido para ir de i a N utilizando el segundo camino crítico.

Hemos de tener en cuenta al establecer la ecuación funcional para g_i , que si el primer suceso que conduce de i a N se encuentra en j , los restantes arcos de j a N deben ser bien un camino crítico que maximiza la duración temporal de j a N , o bien el segundo camino crítico de mayor valor de j a N .

Sean:

$$\text{Max}_1 v_i = \text{Máximo absoluto de } v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Max}_2 v_i = \text{Segundo valor de } v_i$$

Las ecuaciones funcionales serán:

$$(9) \quad g_i = \text{Min} \left\{ \text{Max}_1 \left(t_{ij} + f_j \right), \text{Max}_2 \left(t_{ij} + v_j \right) \right\}_{j \neq i}$$

siendo $i = 1, 2, \dots, N-1$; $g_N = 0$ y f_j igual a (1)

La obtención del tercer camino crítico y siguientes, dará lugar a ecuaciones semejantes a (9) pero de mayor complejidad⁵.

Es de hacer notar el interés que presenta el conocimiento de estos caminos subcríticos, sobre todo en aquellos casos en que la varianza de los mismos sea elevada, puesto que entonces existe una fuerte probabilidad de que en el transcurso del tiempo, al llevarse a cabo el proyecto, alguno de dichos caminos pase a convertirse en crítico, en cuyo caso, y a partir de tal momento, el control máximo se centrará sobre este camino, sustituyendo así al camino crítico planeado.

2.4. Análisis de Sensibilidad

La determinación de los caminos crítico y subcríticos de primero y segundo orden, no supone el conocimiento detallado del programa temporal

(5) Este problema puede verse en detalle en:

R. BELLMAN; R. KALABA. - On K-th best policies. - Journal of Society of Industrial Applied Mathematics. Vol 8, 1960. - Pags. 582-588.

establecido, es preciso observar la sensibilidad que presenta el mismo ante posibles cambios en las duraciones temporales asignadas a cada una de las distintas actividades.

Ni que decir tiene que cualquier incremento en la duración de una actividad crítica supone un alargamiento en la duración total del proyecto, por lo que el cumplimiento de éste en la fecha planeada exige la ausencia de retrasos en tales actividades.

Por el contrario, aquellas otras actividades que no forman parte del camino crítico pueden soportar algún incremento en su duración temporal, sin que ello afecte a la duración total del proyecto. Interesa, por tanto, conocer hasta donde pueden llegar tales incrementos y que repercusiones tienen sobre el resto de las actividades del proyecto.

La aplicación de la ecuación funcional (1) nos ofrece como resultado la "fecha más baja" en que pueden ser alcanzados los distintos sucesos componentes del proyecto. Para aquellos sucesos que forman parte del camino crítico dicha fecha se identificará con la "fecha más alta", puesto que al no existir posibilidad de retraso alguno en las actividades críticas, ambas fechas tienen forzosamente que coincidir. Esto no es así para los sucesos no críticos, por ello, resulta conveniente conocer "la fecha más alta" para cada suceso, más allá de la cual se produciría un retraso en la duración total del proyecto.

La ecuación funcional que nos permitirá la determinación de la "fecha más alta" será:

$$(10) \quad f_j^* = \underset{j \neq i}{\text{Min}} (f_i^* - t_{ij}) \quad i = 2, 3, \dots, N-1, N \quad ; \quad f_1^* = f_1$$

La diferencia $f_i^* - f_i$, que denominaremos intervalo de flotamiento, expresa el período temporal en que puede ser alcanzado el suceso i sin que se demore la fecha final planeada para el proyecto. Puesto que los sucesos 1 y N siempre se encontrarán en el camino crítico, tendremos que $f_1^* = f_1$ y $f_N^* = f_N$, o sea que el intervalo de flotamiento de dichos sucesos es cero. Igual ocurrirá con todos aquellos otros situados entre éstos, que formen parte del camino crítico.

A partir de las fechas más alta y más baja de cada suceso y las duraciones temporales correspondientes a cada una de las actividades del proyecto, podemos establecer para cada una de estas últimas una serie de márgenes, expresivos de las posibilidades de retraso. Cada uno de dichos márgenes se fija un objetivo más amplio o más riguroso, así hablamos de:

- Margen total. - Retraso máximo que puede sufrir el comienzo de una actividad, o sea:

$$(11) \quad f_j^* - f_i - t_{ij}$$

- Margen libre. - Retraso que puede sufrir el comienzo de la actividad ij sin peligro de retrasar la "fecha más baja" del suceso j , es decir:

$$(12) \quad f_j - f_i - t_{ij}$$

- Margen independiente. - Retraso que puede sufrir la iniciación de la actividad ij sin peligro de retrasar la "fecha más baja" del suceso j ,

cuando el suceso i se ha alcanzado en su "fecha más alta", o sea,

$$(13) \quad f_j - f_i^* - t_{ij}$$

Como fácilmente puede apreciarse, el margen más riguroso de los expuestos es el independiente, puesto que alcanzando i en la situación más desfavorable, se pretende alcanzar j en la posición más holgada posible. Le sigue en este orden el margen libre y, por último, el margin total, el cual si es agotado en una actividad, convierte a todas las que la suceden en dirección al suceso final en críticas.

También se habla de "Margen Programado" teniendo éste por objeto, la distribución del Margen total correspondiente a un camino no crítico, entre las distintas actividades que forman el mismo, de acuerdo con un criterio prefijado por quienes elaboran el programa temporal del proyecto.

El conocimiento de los Intervalos de Flotamiento de los sucesos y de los Márgenes, Total, Libre e Independiente de las actividades, permite el ejercicio del control con un detalle y rigurosidad francamente elevado, puesto que en todo momento se tiene la máxima información sobre la incidencia que los posibles retrasos pueden causar sobre la parte del proyecto pendiente de ejecución.

El análisis de los posibles retrasos en las actividades que forman parte del camino crítico, presenta también un indudable interés, puesto que a pesar de que si tal hecho se produce, la fecha final planeada no se

cumplirá, tales desajustes pueden ser muy diversos en el orden cuantitativo, de ahí que examinemos brevemente los mismos.

La duración de cada una de las actividades no puede ser conocida de antemano en un proyecto de investigación, sino todo lo más, estimada subjetivamente con los calificativos de muy probable, probable, poco probable, etc. Esto es precisamente lo que hace el método PERT, partir de una triple estimación temporal, que denomina: tiempo optimista, tiempo más probable y tiempo pesimista, y suponer que la duración temporal de cada actividad se ajusta a una distribución β , con lo que la esperanza matemática y la varianza quedan inmediatamente determinadas.

Como duración de cada actividad es tomada la esperanza matemática antedicha, y como en virtud del teorema central del límite una variable aleatoria suma de una serie de variables aleatorias independientes⁶ se distribuye normalmente, siendo su esperanza matemática igual a la suma de las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias independientes, y su varianza igual a la suma de las varianzas de dichas variables, nos encontramos con que la fecha final planeada del proyecto es la esperanza matemática de una distribución normal.

Denominando:

T_n = Fecha final del proyecto

$E [T_n]$ = Esperanza matemática del proyecto o fecha final planeada del mismo

(6) Han de ser un número de variables suficientemente elevado.

$\sigma_{T_n}^2$ = Varianza del proyecto

tendremos que:

$$(14) \quad \begin{aligned} P \left[T_n \leq E \left[T_n \right] \right] &= 0,5 \\ P \left[T_n \leq E \left[T_n \right] - \sigma_{T_n} \right] &= 0,84 \\ P \left[T_n \leq E \left[T_n \right] - 2 \sigma_{T_n} \right] &= 0,97 \\ P \left[T_n \leq E \left[T_n \right] - 3 \sigma_{T_n} \right] &= 0,995 \end{aligned}$$

Luego la probabilidad de que se cumpla la fecha final planeada es igual al 50 %. Si la dispersión entre las estimaciones temporales no es grande, σ_{T_n} no será un número elevado, por lo que la diferencia de fechas para probabilidades iguales a 0,5 y 0,84 será escasa, con lo que el garantizarse esta última probabilidad no resultará excesivamente difícil. Si, por el contrario, la dispersión es grande, el cubrir una probabilidad del 84 % exigiría ampliar considerablemente el plazo de duración.

Es conveniente destacar que el cálculo de la varianza en el método PERT incluye solo las correspondientes a actividades críticas, por lo que simplemente contempla la dispersión en éstas, cuando en realidad también puede afectar a la duración total del proyecto la dispersión que se prevea en las actividades no críticas, sobre todo si forman parte del 2º o 3º camino en orden de criticidad⁷.

(7) C. E. CLARK. - The Greatest of a Finit Set of Random Variables. - Operations Research, Vol 9, 1961.

2.5. Comentarios al modelo expuesto

Los modelos de programación temporal, habitualmente conocidos bajo la denominación de técnicas PERT, no son, desde luego, privativos de los proyectos de investigación. Sin embargo, hay que destacar que surgieron para lograr una mayor coordinación y eficacia en uno de ellos y que, posteriormente, al ser aplicados por las empresas, ha sido éste subsistema de las mismas, el que ha dado lugar a un mayor número de aplicaciones.

Pocock⁸ realizó un amplio estudio sobre las aplicaciones de estos modelos en distintas compañías norteamericanas y obtuvo los siguientes resultados porcentuales:

Investigación y Desarrollo	25 %
Programas de construcción	24 %
Programación de ordenadores	12 %
Preparación de ofertas y propuestas	12 %
Planificación del mantenimiento	12 %
Instalación de sistemas calculadores	8 %
Planificación de la distribución	5 %
Programas de reducción de costes	5 %
Varios	4 %

(8) J.W. POCOCK. - PERT as an Analytical Aid for Program Planning. Its Payoffs and Problems. - Operations Research. Vol 10, nº 6. - Noviembre-Diciembre 1962. - Pags. 893-904.

Como algunas de las compañías investigadas hacen uso de los modelos antedichos en más de uno de los campos contemplados, la suma de porcentajes supera al 100 %.

Puede apreciarse de la relación anterior que, a pesar de ser una minoría respecto al total, resulta sin embargo el mayor área de aplicación en comparación con el resto.

Las limitaciones que sucesivamente han ido siendo señaladas a las originarias formulaciones del método PERT, han dado lugar a un sinnúmero de técnicas que difieren de ésta en algún punto concreto, así podemos citar las: ABLE, COMET, CPA, HEPP, ICOM, LOB, LESS, PAAC, PAR, PEP, PLANNET, PRISM; RAMPS, SKED, SPERT, TOES, etc.⁹.

(9) Vid. R. W. MILLER. - Aplicación del Método PERT al Control de Programación, Costes y Beneficios. - Ediciones del Castillo S.A. Madrid, 1967. Pags. 245-257. Hace una síntesis de los sistemas más representativos.

TERCERA PARTE

PROCESOS ADAPTATIVOS

Y

CONTROL FEED-BACK

CAPITULO IX

PROCESOS ADAPTATIVOS

CAPITULO IX. - PROCESOS ADAPTATIVOS

1. INTRODUCCION

En el Capítulo II expusimos en términos generales dos tipos de procesos, los de naturaleza determinista y los estocásticos. Posteriormente, y a lo largo de los Capítulos que comprende la Segunda Parte de nuestra Tesis, hemos tenido ocasión de presentar diversas aplicaciones de la Programación Dinámica al estudio de los mencionados procesos en los distintos subsistemas de la empresa.

En esta parte queremos analizar un campo más difícil, evidentemente explorado por diferentes autores, pero no con la rigurosidad con que lo han sido los procesos ya contemplados. Bellman señala que este tema era totalmente desconocido hace 30 años en las matemáticas y que, incluso hoy día, su mapa no ha sido aún dibujado¹.

(1) R. BELLMAN. - Adaptive Control Processes. -Op. cit. Pag. 194

Descamps señala que los métodos de Programación Dinámica tienen unos límites, derivados de dos órdenes de cosas, cuando tratan los problemas de conjunto que se dan en los niveles superiores de gestión. Son éstos: los objetivos y las perturbaciones².

En no pocos casos, los objetivos son irreducibles a un único criterio, la información no es nunca tan perfecta como desearía la teoría de la utilidad, sino que varía con el tiempo y la evolución del proceso. Frecuentemente cambian de naturaleza tanto los resultados obtenidos como los riesgos estimados, por tanto, los problemas y las estructuras están jerarquizados. Los objetivos y restricciones de uno son las variables de otro problema de nivel superior si existe un objetivo absoluto, no puede ser expresado más que en términos de supervivencia y de variables esenciales, análogas al placer y al dolor biológicos ligados a las condiciones de supervivencia y destinados a señalar la aproximación a los límites de seguridad. Una forma posible de expresión consiste, pues, en definir estas variables esenciales, indicando para cada una de ellas los límites o valores extremos.

Las perturbaciones son generalmente muy diversas y muy mal conocidas para que puedan ser definidas por una distribución de probabilidad, sin embargo, existen otras formas de caracterizarlas. La más frecuente es la clasificación de las mismas en categorías, cada una de las cuales viene definida por dos parámetros fundamentales: la amplitud o el número de estados discretos posibles y la escala de tiempo ligada a la

(2) R. DESCAMPS. - Pour une Dynamique de la Gestion. - Revue Française de Recherche Opérationnelle. - 3^{er} trimestre. 1963, nº 28. - Pags. 215-236.

rapidez de las variaciones posibles en la categoría estudiada.

Lo que creemos que queda claro, es que la planificación ha de hacerse en muchas ocasiones sobre un sistema en constante evolución, la cual no responde ni a un conocimiento determinista ni siquiera estocástico, sino que puede resultarnos totalmente desconocida, por causas que examinaremos posteriormente. La única forma factible entonces de conocer el desenvolvimiento de estos sistemas, es a través de un "proceso de aprendizaje", es preciso recibir nuevas informaciones en cada etapa y de acuerdo con ella y los resultados ya obtenidos, ir tratando de adaptarse a la evolución del sistema a fin de conseguir la optimización deseada. Los procesos que responden a este tipo de características se conocen con el nombre de "Procesos adaptativos".

Nuestro actual análisis está orientado, pues, de cara a la incertidumbre, por ello será precisa una jerarquización de los modelos de incertidumbre en un nivel ascendiente de dificultades, cada uno de los cuales debe ser elaborado de tal forma que satisfaga las necesidades de los nuevos procesos secuenciales de decisión contemplados.

Ni que decir tiene que este nuevo campo en el que vamos a penetrar, requerirá una formulación nada simple, ya que ni el planteamiento de los problemas ni las respuestas a los mismos pueden lograrse con sencillos métodos. Nosotros vamos a tratar de ofrecer una muestra de cómo pueden ser abordados a través de la Programación Dinámica, si bien queremos dejar constancia de que el gran atractivo de estos procesos radica, fundamentalmente, no en resolver un problema siguiendo un determinado método, sino en encontrar nuevos métodos que permitan solucionar cualquier tipo de problemas.

2. DE CARA A LA INCERTIDUMBRE

En los Capítulos precedentes hemos estudiado diversos sistemas cuya situación quedaba expresada por un número finito de variables de estado. Los procesos de decisión inherentes a tales sistemas suponían una serie de transformaciones que partían de una situación inicial para conducir bien a una situación final precisa bien a una distribución concreta de situaciones finales. Lo que tratamos de estudiar ahora es qué puede hacerse cuando no se cuenta con parte de esta información tan esencial para predecir el desarrollo del sistema objeto de nuestra atención.

Volviendo a uno de los problemas ya planteados, el de la determinación de los niveles óptimos de la producción y de los stocks, nos encontramos con que su formulación general requiere conocer la distribución de probabilidad a la que se ajusta la demanda a través del tiempo, los costes de producción y entretenimiento para los diversos períodos de planificación y los costes ocasionados por un exceso o defecto de oferta. Ni que decir tiene que todos estos datos no tienen por qué ser conocidos a priori, que en muchos casos la información disponible puede no permitirnos alguno de los planteamientos anteriormente expuestos; en tales casos la información sobre la demanda y sobre los restantes datos ha de irse obteniendo a lo largo del proceso.

Para centrar más claramente las ideas, recordemos las características básicas de los modelos representativos de un proceso secuencial de decisión de tipo determinista:

- La situación del sistema en cada período del proceso era conocida con anterioridad a la toma de decisiones en ese período.

- El conjunto de decisiones posibles en cada período era también conocido.
- El efecto que produce la elección realizada era igualmente conocida para cada período.
- La duración del proceso era conocida de antemano
- La función objetivo estaba señalada en el momento inicial.

Este esquema no resultaba válido para analizar situaciones de riesgo, de ahí que se introdujeran nuevos conceptos como son las variables aleatorias y las distribuciones de probabilidad, encontrándonos entonces frente a los procesos secuenciales de decisión estocásticos, cuyas características principales pueden sintetizarse como sigue:

- La situación inicial del sistema era desconocida, pero no su distribución de probabilidad.
- La distribución de probabilidad de los conjuntos de posibles decisiones en cada período del proceso era conocida.
- Se conoce la distribución de probabilidad de los resultados derivados de cualquier decisión.
- Igualmente resulta conocida la distribución de la duración del proceso, o en su defecto, la probabilidad de que termine el mismo en cualquier período, dependiendo de la situación del sistema y de la decisión tomada.
- Se conoce la distribución de la función objetivo que se utilizará para evaluar la política óptima.

Las distribuciones anteriores pueden estar fijadas desde un principio o

bien dependen del desarrollo del proceso, pero en este último caso, debe ser conocida la dependencia con anterioridad.

Como fácilmente puede apreciarse, cualquiera de los dos tipos de procesos esquemáticamente descritos, puede ser objeto de distintas argumentaciones capaces de invalidar sus resultados, sobre todo en aquellos casos en que el sistema se mueve en un marco de incertidumbre, o sea, cuando no existe ninguna experiencia pretérita en la que basar los cálculos y estimaciones, según quedó descrito en el Capítulo I. Ahora bien, resulta conveniente matizar los diversos niveles de incertidumbre frente a los que puede encontrarse el proceso decisorio, tema en el que vamos a entrar a continuación.

2.1. Primer nivel de incertidumbre

Podemos empezar suponiendo que el sistema con el que estamos operando tiene propiedades definidas y bien determinadas, pero que no son conocidas para nosotros. En algunos casos estas propiedades no cambiarán en un principio, en otros, por el contrario, pueden cambiar de una forma conocida, dependiente o independiente de las decisiones que tomemos.

A partir de aquí hay un simple paso para el estudio de sistemas en situaciones desconocidas, las cuales cambian de una forma determinista, pero desconocida a lo largo del tiempo. Un caso de este tipo sería aquél en el que las decisiones tomadas producen efectos definidos pero desconocidos en el sistema objeto de observación.

La premisa básica del supuesto examinado es que el proceso sea determinista, pero no se entienda el mecanismo que lo regula, debido, por ejemplo, a que existan algunas variables de estado ocultas, que pueden ser descubiertas según se vaya desarrollando el proceso, o también, que a pesar de disponer de toda la información posible no haya habido tiempo de utilizarla.

2.2. Segundo nivel de incertidumbre

Un modelo del tipo anterior presentaría, sin lugar a dudas, bastantes dificultades. Por ello se utiliza generalmente un mecanismo estocástico en el que la distribución de probabilidad se considera como desconocida.

Este desconocimiento de la distribución de probabilidad puede sustituirse por otro supuesto menos problemático, en el que la mencionada distribución es miembro de una clase particular de distribuciones, si bien se desconocen sus parámetros característicos. Por ejemplo, la distribución puede ser normal con media y varianza desconocidas.

Partiendo de este punto puede dar comienzo el proceso, tomando los parámetros como fijos pero desconocidos o como estocásticos con distribuciones de probabilidad desconocidas. Continuando de esta forma podríamos establecer una jerarquía de procesos, cada uno de los cuales contendría a los del nivel siguiente, que iría resultando más y más complejo.

2.3. Tercer nivel de incertidumbre

Por supuesto que con lo anterior no se agotan nuestras posibilidades de desconocimiento de los sistemas que, desde luego, resultan de mayor amplitud que las contrarias.

Podemos no saber inicialmente si el proceso que estamos estudiando es determinista o estocástico, o incluso, si se trata de un proceso en el que nosotros somos los únicos tomadores de decisiones o, por el contrario, si en dichas decisiones intervienen fuerzas total o parcialmente opuestas a nuestros intereses.

3. EL CONTROL DE LOS PROCESOS ADAPTATIVOS

Hemos visto que en los procesos que son ahora objeto de nuestro estudio, la información disponible va desde la aproximación al conocimiento completo a la ignorancia más desbordante. Lo que evita que el análisis de los mismos sea estéril es el hecho de que a medida que el proceso se desarrolla puede disponerse de una mayor información a través de un mecanismo de control. Dicho dispositivo puede ser humano, inanimado o una combinación de ambos elementos, y podemos incrementar su eficacia basándonos en la experiencia, entendiendo por tal, una combinación adecuada de observación y análisis.

Es de suma importancia recalcar que no hay nada de esotérico en este tipo de aprendizaje, siempre y cuando nos refiramos a computadoras numéricas y analógicas. La forma en que las mismas irán aprendiendo un

un concreto proceso, forma parte del programa que regula sus operaciones desde el comienzo del mencionado proceso. Hay quien ha llamado a estas computadoras "máquinas inteligentes", al parecer deseando dar una satisfacción a su imaginación, pero el tratar de buscar un parecido entre el comportamiento de estos dispositivos y el del cerebro humano, no pasa de ser, hoy por hoy, pura fantasía.

El hablar de aprendizaje en términos humanos, supone entrar en un campo en el que los conceptos y las teorías, los resultados y los experimentos son sumamente vagos y no tienen, por tanto, una base profunda. La forma en que el cerebro humano almacena y utiliza los conocimientos es un misterio lejos de los actuales niveles de la ciencia. De momento, pues, el interés principal no es tanto estudiar las computadoras para aprender algo sobre el cerebro, sino al contrario, estudiar el cerebro para aprender a construir computadoras realmente eficientes.

Ni que decir tiene que si se pudiera combinar la memoria y la capacidad de raciocinio del cerebro humano con la exactitud de las computadoras, tendríamos un instrumento capaz de resolver algunos de los problemas fundamentales del universo.

Sin embargo, debemos contentarnos con recoger de los matemáticos los fundamentos que día tras día van elaborando para tratar las clases de procesos adaptativos más importantes y aplicarlos a la solución numérica de una serie de modelos simplificados.

Nosotros vamos a atacar aquí este problema utilizando la teoría de la Programación Dinámica, de forma similar a como ha quedado expuesta en el estudio de los procesos deterministas y estocásticos. Si en princi-

pio nos veremos obligados, como ya nos ocurrió en los procesos de referencia, a presentar una formulación matemática bastante abstracta de los procesos de control adaptativos, paso a paso trataremos de reducir la misma hasta llegar a un nivel en el que contemos con algoritmos constructivos para la solución de problemas numéricos.

3.1. Patrón de información

Un nuevo concepto que será básico para posteriores estudios en este campo es el de "patrón de información". No resulta fácil tratar de encontrar una definición, puesto que cualquiera nos conduciría inevitablemente a la introducción de otras muchas ideas, de naturaleza menos intuitiva y con mayor o igual complicación.

En cualquier momento del tiempo la situación del sistema la consideraremos definida por un punto x y por un patrón de información X . Dicho patrón representa la información sobre la historia pasada del proceso, que queremos retener como guía de nuestras acciones futuras. Veamos dos ejemplos:

Supongamos que nos encontramos en un proceso de tirar una moneda al aire. En cada período, tendremos que predecir lo que ocurrirá en la siguiente tirada, basándonos en las veces que anteriormente hayamos obtenido cara o cruz. El patrón de información podría ser la secuencia real de caras y cruces observadas a lo largo de las N tiradas previas, o sea:

Ca, Ca, Ca, Cr, Cr, , Ca, Cr

donde Ca significa Cara y Cr Cruz, o bien podría ser, simplemente, el total de caras y cruces observado. No hay una regla rígida que determine cual ha de ser el patrón de información, podemos, por tanto, escoger el que queramos.

Supongamos ahora un proceso económico en un sistema empresarial. Cuando se adquiere un nuevo equipo surgen una serie de preguntas sobre la calidad del mismo y, consecuentemente, sobre la cantidad de piezas de repuesto que es necesario mantener. A pesar de que la realización de pruebas preliminares puede proporcionar un conjunto de respuestas estimativas, podemos afirmar que, en general, la información sólo es posible obtenerla cuando el equipo ha estado funcionando durante algún tiempo. Las ideas preliminares serán, por tanto, revisadas constantemente, basándonos en la demanda real de piezas de repuesto que ha tenido lugar en los distintos períodos durante los cuales viene funcionando el equipo.

La elección de patrones de información de utilidad y la expresión de los mismos en forma analítica razonable, envuelve indudables problemas, de ahí su dificultad. Se requieren buenas dosis de experiencia e ingenio combinados.

3.2. Algunos supuestos básicos

El estudio de los procesos adaptativos requiere la introducción de una serie de supuestos básicos, que podemos concretar en los siguientes:

- a) La situación de un proceso viene especificada en cualquier período por un punto del espacio x y por un patrón de información X .
- b) El conjunto de decisiones o de transformaciones posibles viene determinado en cualquier período por la combinación (x, X) .
- c) Como resultado de una decisión d el punto (x, X) se transforma a priori en el punto (x_1, X_1) que es una variable estocástica cuya distribución viene determinada por el punto inicial (x, X) .
- d) Una vez que ha sido tomada la decisión, se observa a posteriori el punto (x_2, X_2) .
- e) La función objetivo que gobierna el proceso en cualquier período está determinada por (x, X) .

Con estos supuestos queremos cubrir una serie de situaciones que pueden surgir en la práctica. En primer lugar, puede que no conozcamos exactamente la situación real del sistema, pues mientras que alguno de los componentes pueden ser conocidos, otros pueden tener funciones de distribución precisas y otros pueden ser conocidos sólo en lo que respecta a los valores supuestos para estos parámetros. Este es el resumen del supuesto a).

En segundo lugar, en muchas situaciones pueden no ser conocidas inicialmente todas las posibles decisiones a tomar. A medida que el proceso avanza y como resultado de nuestras acciones, el conjunto de posibles decisiones varía. Este caso es típico de numerosos procesos experimentales.

El tercer supuesto pone de manifiesto que, una vez que la decisión ha sido tomada, la nueva variable de situación no necesita ser un punto de un espacio dimensional finito, sino que continúa siendo una combinación de la forma (x_1, X_1) .

El cuarto supuesto consiste en que a pesar de que se observa este nuevo punto (x_1, X_1) , puede no desearse una ampliación de los recursos utilizados para dicha observación y, por tanto, que se prefiera continuar tomando como base la información obtenida a priori.

Por último, el quinto supuesto está dedicado a aquellos procesos en los que el último propósito no está claro inicialmente. Según avanza el proceso, se procede a una revisión de los objetivos, tomando como base lo que realmente ocurre.

3.3. Formulación por Programación Dinámica

Consideremos un sistema especificado por un punto en el espacio x y por un patrón de información X , o sea por el punto (x, X) . Como resultado de una decisión d , x se transforma en un nuevo punto x_1 , conseguido a priori mediante la transformación estocástica siguiente:

$$(1) \quad x_1 = T_1(x, X; d, y)$$

y el patrón de información X se transforma en un nuevo X_1 que es el

siguiente:

$$(2) \quad X_1 = T_2(x, X; d, y)$$

siendo T_1 y T_2 las respectivas transformaciones estocásticas e y una variable estocástica especificada por la distribución de probabilidad, $d G(x, X; d, y)$.

Supongamos que las transformaciones T_1 y T_2 son conocidas, a pesar de que en muchos procesos adaptativos, la determinación de estas funciones y el mismo patrón de información, según indicamos anteriormente, son parte esencial del problema general asociado con el proceso de control.

Con esta salvedad, vamos a determinar una secuencia (d_1, d_2, \dots, d_N) que optimice el valor esperado de una función predeterminada de la situación final (x_N, X_N) . Dicho valor esperado se toma con respecto al conjunto de distribuciones de probabilidad a priori.

Siguiendo nuestro habitual sistema, introducimos la secuencia de funciones que exponemos a continuación:

$$(3) \quad f_N(x, X) = \text{Opt} \int (x_N, X_N)$$

siendo \int la función predeterminada antes indicada.

La aplicación del "principio de optimidad"³ nos lleva a la relación de re-

(3) Vid. Cap. II. - Los Procesos Secuenciales de Decisión

currencia siguiente:

$$(4) \quad f_N(x, X) = \text{Opt}_{d_1} \left\{ \int f_{N-1} \left[T_1(x, X; d, y), T_2(x, X; d, y) \right] dG(x, X; d, y) \right\}$$

para $N = 2, 3, \dots$, con :

$$(5) \quad f_1(x, X) = \text{Opt}_{d_1} \left\{ \int \left[T_1(x, X; d, y), T_2(x, X; d, y) \right] dG(x, X; d, y) \right\}$$

Como primer paso hacia una formulación más concreta, vamos a sustituir el patrón de información por una función de distribución.

Vamos a considerar una situación en la que se conoce el estado del sistema en cualquier período, el conjunto de decisiones que pueden ser tomadas y la función objetivo, pero no se sabe la transformación que resulta de una decisión d_1 . Tendremos:

$$x_0 \longrightarrow x_1$$

$$(6) \quad dG(z, x, d) \longrightarrow dH(z, x, d; x_0, G, d_1, x_1)$$

Esta anotación indica que las nuevas estimaciones a priori dependen de las anteriores, de la primera situación, de la nueva y de la decisión tomada. El sistema se encuentra entonces en la nueva situación x_1 y posee el nuevo patrón de información dH , que no puede sino resultar-nos familiar, ya que se trata de una función de distribución.

Consideremos ahora un proceso de control final en el que se parte de la situación $[x, G(z, x, d)]$ y se quiere establecer una secuencia de decisiones que maximicen el valor esperado de una función predeterminada, $\Phi(x_N, G_N)$ de la situación final. Suponemos que la duración del proceso es fija y conocida.

Denominaremos:

$f_N [x; G(z, x, d)]$ = Valor esperado de $\Phi(x_N, G_N)$ obtenido utilizando una política óptima para un proceso de N períodos, comenzando con la situación (x, G) .

La relación (4) nos lleva ahora a la siguiente:

$$(7) \quad f_N [x; G(z, x, d)] = \text{Max}_{d_1} \left\{ \int_w f_{N-1} [w; H(z, x, d; x, G, d_1, w)] dG(w, x, d_1) \right\}$$

para $N = 2, 3, \dots$ y:

$$(8) \quad f_1 [x, G(z, x, d)] = \text{Max}_{d_1} \left\{ \int_w \Phi [w, H(z, x, d; x, G, d_1, w)] dG(w, x, d_1) \right\}$$

para $N = 1$

Para seguir adelante debemos introducir nuevos supuestos, pues la existencia de funciones de funciones tales como la secuencia $f(x, G)$ impide encontrar una solución, siendo preciso, por tanto, reducir las relaciones

de recurrencia (7) a una forma más manejable.

Para ello supondremos que se conoce la estructura básica de la función de distribución. La incertidumbre surge solo en relación con ciertos parámetros, pero no en cuanto a la familia de funciones de distribución a la que la misma pertenece. En cualquier período del proceso, en lugar de una estimación a priori, suponemos que se posee una función de distribución a priori.

Si por ejemplo la distribución de referencia se ajustara a una distribución normal de parámetros α , σ , cuya función de distribución sería:

$$(9) \quad dG = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-1/2 \left(\frac{z-\alpha}{\sigma}\right)^2}$$

tendríamos que bien α , bien σ o ambos parámetros variarían de período en período según los valores observados de las variables estocásticas, z_1, z_2, \dots

El paso decisivo para reducir la función de función $f_N(x, G)$ a una función, parte de formular el problema de tal modo que la transformación del patrón de información $G(z, x, d)$ en el patrón $H(z, x, d; x, G, d_1, w)$ pueda ser representada por la transformación de un punto. Esto ocurrirá siempre y cuando G y H sean miembros de un grupo de funciones de distribución, $K(z, x, d, v)$ donde v es un parámetro vector, o sea que podemos escribir:

$$(10) \quad \begin{aligned} G(z, x, d) &\equiv K(z, x, d; v) \\ H(z, x, d; x, G, d_1, w) &\equiv K(z, x, d; u) \end{aligned}$$

donde u es una función determinada de x , d_1 , w y v , es decir:

$$(11) \quad u = \varphi(x, d_1, w, v)$$

Por tanto podemos decir que:

$$(12) \quad f_N \left[x, G(z, x, d) \right] \equiv f_N(x, v)$$

con lo que queda suprimida la dependencia funcional en la relación de recurrencia básica (7), que formulamos ahora nuevamente, como sigue:

$$(13) \quad f_N(x; v) = \text{Max}_{d_1} \int_w f_{N-1}(w; u) d K(x, w, d_1; v)$$

Poseemos ahora ya un algoritmo de cálculo que, en ciertos casos, no requiere dispositivos especiales, pudiendo ser desarrollado de igual forma a la mostrada en anteriores Capítulos para otras ecuaciones de recurrencia.

CAPITULO X

CONTROL FEED-BACK

CAPITULO X. - CONTROL FEED-BACK

1. INTRODUCCION

Una vez examinados los procesos adaptativos, su tratamiento por Programación Dinámica y los problemas que presenta el control de los mismos vamos a tratar de profundizar un poco más en los aspectos de este control.

¿Cuales son los objetivos principales que persigue el control de un proceso?. Sencillamente conseguir el gobierno o regulación de un sistema mediante el establecimiento de un mecanismo regulador o dispositivo de control. Hemos visto que los procesos secuenciales están compuestos por elementos unidos entre sí por una cadena de acciones causa-efecto. A esta relación de los elementos del sistema se le denomina "feedback" que se viene traduciendo como retroacción o retroalimentación¹.

(1) OSKAR LANGE estudia el sistema económico desde este punto de vista. Vid. Introducción a la Economía Cibernética. -Siglo XXI de España Editores, S.A. -Madrid, 1969.

El concepto fundamental de toda la teoría del control es precisamente el feed-back. Consideremos un determinado sistema S sobre el cual influyen ciertas acciones que producen unos efectos determinados que, a su vez, inciden sobre un mecanismo o dispositivo de control C, el cual influye sobre el sistema considerado. Gráficamente quedaría representado así:²

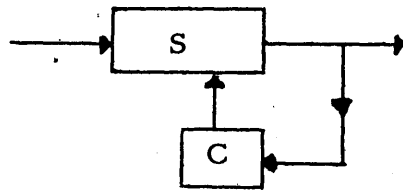


Fig. 1

El planteamiento que fundamentalmente perseguimos, va encaminado a mostrar como puede ser establecido el control de un sistema a través de la Programación Dinámica, fundamentalmente, de aquellos cuyo desenvolvimiento temporal responde a las características de los procesos adaptativos.

Con ésto ampliamos el posible campo de aplicación de la Programación Dinámica, el cual de acuerdo con Descamps³ puede abarcar aspectos tales como:

a) El lanzamiento de nuevos productos al mercado, siendo posible:

(2) No insistimos sobre este particular puesto que ya fue tratado al hablar de los sistemas en general en el Capítulo III.

(3) R. DESCAMPS. -Pour une dynamique de la gestion. -Op. cit. -Pags. 233-235.

- decidir la producción (eventualmente a distintos niveles)
- abandonar
- proseguir los estudios (técnicos, industriales, de mercado, etc) que incrementen la información disponible y eliminen los riesgos.

El problema es elaborar una estrategia que permita decidir en cada período, en función de los conocimientos adquiridos y de las posibilidades futuras, evolucionando con los primeros las probabilidades afectadas a estas últimas.

b) Los trabajos de reconocimiento de un yacimiento minero, que puede ser:

- explotado inmediatamente mediando un riesgo
- abandonado
- investigado más profundamente, mediante la realización de gastos suplementarios, a fin de disminuir la incertidumbre.

c) El establecimiento de una estrategia inversora de cara a una demanda en expansión. No hablamos ahora de un programa fijado de antemano sino de un conjunto de posibilidades entre las cuales serán realizadas las elecciones, dependiendo de los resultados ya obtenidos, reflejados por la evolución real constatada de la demanda y de los precios, por los costes registrados por la explotación de las unidades de producción sucesivas, etc.

d) La elección de un determinado sistema de distribución, entre diversas modalidades e intensidades de exportación, entre diversos medios publicitarios con rendimientos mal conocidos, etc.

- e) La estrategia de subastas y concursos ofrece igualmente un amplio campo de aplicación. La industria pesada, las grandes empresas de obras públicas deben frecuentemente someter sus ofertas a un contexto muy evolutivo en el que la información relativa a las ofertas precedentes y simultáneas (las de los competidores) juega un papel esencial.
- f) La política de almacenamiento y de venta de productos agrícolas, como por ejemplo: los cereales, patatas, cacahuetes, etc.
- g) La política inversora de una capital, la cual puede ir dirigida hacia campos diversos con rentabilidades diferentes e inciertas (inversiones duraderas, especulación en Bolsa, etc).
- h) Problemas económicos nacionales e internacionales de primera importancia, como pueden ser:
- equilibrio dinámico entre oferta y demanda (de profesores y alumnos, de viviendas y familias, de medios de transporte y usuarios, etc)
 - evolución de los sistemas económicos subdesarrollados, etc.

La amplitud pues, del campo de estudio que ahora nos planteamos es enorme, por ello no vamos a elaborar un modelo particularizado para cada una de las áreas específicas mencionadas, sino que, simplemente, consideraremos primeramente un sistema genérico cuyo desenvolvimiento da lugar a unos costes que trataremos de minimizar y, más tarde, examinaremos un modelo relativo al subsistema de financiación.

2. MODELO PARA EL CONTROL DE UN PROCESO SECUENCIAL

A fin de perfilar con mayor nitidez las diferencias existentes entre los diferentes tipos de procesos, según que se actúe en un estado de conocimiento pleno, de riesgo o de incertidumbre, vamos a plantear el problema en ambos casos. Así pues, examinaremos en primer lugar el tratamiento de un proceso de control determinista, luego uno estocástico y, por último, ya con más detalle, entraremos dentro de los procesos adaptativos.

2.1. Proceso de control determinista

Consideremos que el sistema se desenvuelve con arreglo a la siguiente relación de recurrencia:

$$(1) \quad s_{n+1} = a s_n + c_n \quad s_0 = k$$

siendo s_n la variable de situación o de estado y c_n la variable de control. La secuencia $\{c_n\}$ debe ser escogida de forma tal que minimice la función siguiente:

$$(2) \quad |s_N| + b \sum_{i=0}^{N-1} s_i^2$$

y contando con las siguientes restricciones:

$$(3) \quad |c_j| \leq h \quad j = 1, 2, \dots, N$$

La función objetivo cuya minimización se pretende conseguir será, pues:

$$(4) \quad f_N(k) = \text{Min}_{\{c_j\}} \left(|s_N| + b \sum_{i=0}^{N-1} s_i^2 \right)$$

La ecuación de recurrencia básica para la determinación del control óptimo será:

$$(5) \quad f_N(k) = \text{Min}_{|c_0| \leq h} \left[b (a k + c_0)^2 + f_{N-1}(a k + c_0) \right]$$

para $N \geq 2$ y

$$(6) \quad f_1(k) = \text{Min}_{|c_0| \leq h} \left[b (a k + c_0)^2 + |a k + c_0| \right]$$

para $N = 1$

Con (5) y (6) obtenemos una posibilidad de cálculo del problema de determinación del control óptimo de feed-back en un proceso determinista.

2.2. Proceso de control estocástico

En el desenvolvimiento del sistema intervienen ahora las variables aleatorias $\{y_n\}$, por lo que la ecuación de recurrencia (1) quedará ahora sustituida por esta otra:

$$(7) \quad s_{n+1} = a s_n + c_n + y_n \quad s_0 = k$$

Supondremos que la secuencia de variables aleatorias independientes $\{y_n\}$, se ajusta a una distribución binomial, por lo que solamente pueden tomar los valores 1 y 0, teniendo que:

$$(8) \quad \begin{aligned} y_n &= 1 && \text{con probabilidad } p \\ y_n &= 0 && \text{con probabilidad } 1-p \end{aligned}$$

La cantidad p se supone conocida e independiente de n y de la situación del sistema. Introducimos estas hipótesis para lograr una mayor simplificación, sin embargo, el problema podría ser perfectamente abordado sin contar con ellas.

El objetivo que ahora perseguimos, consistirá en la minimización del valor esperado de (2). La relación de recurrencia conducente al control óptimo será:

$$(9) \quad f_N(k) = \text{Min}_{|c_0| \leq h} \left\{ p \left[b(ak + c_0 + 1)^2 + f_{N-1}(ak + c_0 + 1) \right] + (1-p) \left[b(ak + c_0)^2 + f_{N-1}(ak + c_0) \right] \right\}$$

para $N \gg 2$ y

$$(10) \quad f_1(k) = \text{Min}_{|c_0| \leq h} \left\{ p \left[|ak + c_0 + 1| + b (ak + c_0 + 1)^2 \right] + \right. \\ \left. + (1-p) \left[|ak + c_0| + b (ak + c_0)^2 \right] \right\}$$

Para $N = 1$

Al igual que para los procesos deterministas hemos conseguido un esquema de cálculo simple para la determinación del control óptimo de feed-back.

2.3. Proceso de control adaptativo

Supongamos ahora que tenemos la información de que las variables aleatorias $\{y_n\}$ poseen distribuciones binomiales, según ha quedado descrito en (8), pero se desconoce el valor exacto de p . Sin embargo, consideraremos que se posee una distribución de probabilidad a priori del valor de p , $dG(p)$, que es tomada como verdadera a falta de una mayor información y que, posteriormente, a medida que se desarrolla el proceso, esta estimación a priori puede ser modificada mediante un procedimiento definido, que en nuestro caso será el expuesto por Bayes.

Si a través de los $m + n$ períodos precedentes observamos que las variables aleatorias $\{y_n\}$ han tomado el valor uno m veces y el valor

cero n veces, y habíamos supuesto en principio como distribución a priori para este conjunto de $m-n$ períodos, $dG(p)$, podemos ahora tomar como nueva distribución de probabilidad la siguiente:

$$(11) \quad dG_{m,n}(p) = \frac{p^m (1-p)^n dG(p)}{\int_0^1 p^m (1-p)^n dG(p)}$$

Una vez que hemos fijado una estimación a priori de la distribución de probabilidad $dG(p)$ al comienzo del proceso, la distribución a priori para cualquier período del proceso de control viene determinada por (11) según los valores de m y n . Esto nos permite reducir el patrón de información representado por la función $dG_{m,n}(p)$ a los números m y n . El resultado que hemos conseguido es que la especificación de la situación del proceso en cualquier período viene dada por k , m y n . Esto no supone más que una aplicación de lo expuesto con carácter general en el Capítulo anterior para reducir funcionales a funciones, que como se recordará no supone solo una ayuda para cualquier estudio analítico, sino que es esencial para acometer los cálculos.

La función objetivo quedará representada en este caso por $f_N(k, m, n)$, pudiendo definirse como el mínimo del valor esperado de (2), partiendo que han ocurrido m unos y n ceros, que el sistema se encuentra en una situación k y que continúan existiendo N períodos.

La ecuación de recurrencia que conducirá a la política de control óptimo será:

$$(12) \quad f_N(k, m, n) = \text{Min}_{|c_0| \leq h} \left\{ p_{m,n} \left[b(ak+c_0+1)^2 + f_{N-1}(ak+c_0+1; m+1, n) \right] \right. \\ \left. + (1-p_{m,n}) \left[b(ak+c_0)^2 + f_{N-1}(ak+c_0; m, n+1) \right] \right\}$$

Para $N \gg 2$, donde $p_{m,n}$ es la probabilidad esperada, obtenida a partir de la distribución de probabilidad (11), o sea:

$$(13) \quad p_{m,n} = \frac{\int_0^1 p^{m+1} (1-p)^n dG(p)}{\int_0^1 p^m (1-p)^n dG(p)}$$

Para $N = 1$ tendremos:

$$(14) \quad f_1(k, m, n) = \text{Min}_{|c_0| \leq h} \left\{ p_{m,n} \left[b(ak+c_0+1)^2 + |ak+c_0+1| \right] + \right. \\ \left. + (1-p_{m,n}) \left[b(ak+c_0)^2 + |ak-c_0| \right] \right\}$$

El que hayamos establecido un algoritmo de cálculo aceptable, no quiere decir que para determinadas políticas óptimas los detalles de cálculo sean triviales, puesto que en la secuencia $\{f_N(k, m, n)\}$ el valor de $f_N(m, n)$ depende de los valores de $f_{N-1}(m+1, n)$ y $f_{N-1}(m, n+1)$. El problema podría extenderse, por tanto, hasta el infinito, pudiendo ser resuelto a través del método de aproximaciones sucesivas, si bien introduciendo alguna variante a las aplicaciones que del mismo hemos realizado con anterioridad.

3. LA POLITICA DE CONCESION DE CREDITOS

La concesión de créditos constituye un importante área de decisiones en la empresa, puesto que ni una política en exceso restrictiva resulta conveniente, pues con ella se reducirán las ventas y los beneficios, ni tampoco es interesante la contraria, o sea, la concesión de unos riesgos excesivos, pues con ello aunque se incrementen las ventas, los beneficios pueden verse cuantiosamente disminuidos al producirse el impago de los saldos de algunos clientes.

Interesa pues diseñar una política de concesión de créditos que mantenga el ritmo de ventas y no suponga excesivos riesgos para la empresa, o en otros términos, que no afecte desfavorablemente a los beneficios de la misma.

Sobre este particular Bierman y Hausman⁴ acaban de publicar un interesante trabajo en el que tras una revisión de las investigaciones previamente realizadas por otros autores, parten del modelo presentado por Bellman⁵ en el contexto de la Teoría de las Comunicaciones para ofrecer una formulación dinámica adaptativa sobre la comentada política crediticia. Nuestra exposición la basaremos fundamentalmente en dicho modelo.

En un determinado período se ofrecen dos alternativas opuestas, conceder o denegar el crédito. ¿Cuándo debe éste ser o no concedido?. Para con- a esta pregunta necesitamos conocer el precio de venta (v), el de coste

(4) H. BIERMAN. Jr. ; W. H. HAUSMAN. - The credit granting decision. - Management Science. Vol 16, nº 8. Abril 1970. - Pags. 519-532.

(5) R. BELLMAN. - Adaptative Control Processes. - Op. cit. Pags. 228-229.

(c) y la probabilidad estimada de cobro (p). Una vez en posesión de estos datos usaremos el valor monetario esperado como guía de nuestra decisión, o sea que el crédito será concedido siempre que el cobro esperado supere al coste, es decir:

$$(15) \quad p v \geq c \quad \text{ó} \quad p \geq \frac{c}{v}$$

Ni que decir tiene que la concesión de créditos y cobro de los mismos a un cliente no supone una sola decisión sino una cadena de ellas, en las que las más cercanas en el tiempo gozan de una cierta ventaja con respecto a las anteriores, que se ha acumulado una experiencia previa sobre el particular. Puesto que el resultado de cada período supone una prueba dicotómica -o se cobra o no se cobra- siendo p la probabilidad desconocida de cobro, el resultado acumulado en un conjunto de períodos formará un proceso binomial. Usualmente el análisis Bayesiano hace el siguiente supuesto para un proceso binomial: que los juicios previos del decisor sobre el parámetro binomial p pueden ser representados considerando a p como una variable aleatoria que se distribuye conforme a una distribución Beta⁶ con algunos parámetros específicos c y n, que representan respectivamente el número de casos favorables (cobros) y el número total de casos (cobros + no cobros). El valor de p será pues c/n de hay la importancia que tiene la elección de estos parámetros para la distribución de partida.

La forma de la distribución Beta con los parámetros c y n será la si-

(6) Para examinar una discusión de esta propuesta, vid. H. BIERMAN, Jr.; C. P. BONINI y W. H. HAUSMAN. - Quantitative Analysis for Business Decisions. - R. D. Irwin, Homewood, Illinois, 1963. - Capítulo 10.

guiente:

$$(16) \quad f(p | c, n) = \frac{(n-1)!}{(c-1)! (n-c-1)!} p^{c-1} (1-p)^{n-c-1}$$

$$0 \leq p \leq 1, \quad n > c > 0$$

La revisión de la probabilidad de cobro basada en la última experiencia con el cliente, será como sigue: Si el crédito ha sido concedido n' veces -suponiendo una cantidad de crédito idéntica cada vez- y han sido observados c' cobros, los parámetros de la distribución revisada (n'' y c'') se calcularán de la forma siguiente:

$$(17) \quad c'' = c + c' ; \quad n'' = n + n'$$

La distribución revisada tiene en cuenta, pues, tanto nuestros juicios previos (c y n) como el comportamiento observado (c' y n'). El valor esperado de p es ahora c''/n'' . Volvemos a insistir en la importancia de la elección de los parámetros c y n iniciales, puesto que los mismos afectarán a las distribuciones revisadas que se vayan obteniendo; una misma probabilidad inicial $p = \frac{c}{n} = \frac{2c}{2n} = \frac{3c}{3n} = \dots$ se convertirá en diferentes probabilidades revisadas según los supuestos iniciales. Así a la primera observación supuesta favorable (cobro) tendremos:

$$(18) \quad p = \left(\frac{c+1}{n+1} \text{ ó } \frac{2c+1}{2n+1} \text{ ó } \frac{3c+1}{3n+1}, \text{ etc.} \right)$$

cuyos resultados son evidentemente distintos. La tarea del decisor antes

del comienzo del proceso se revela, por tanto, como de una gran sensibilidad, siendo preciso que éste no se limite simplemente a fijar una probabilidad p , sino que en virtud de toda la información disponible señale los correspondientes c y n .

Dado que el propósito que perseguimos es el de considerar un conjunto de períodos de tiempo, resulta necesario introducir el factor de descuento $v = \frac{1}{1+i}$, siendo i el tipo de interés anual del mercado.

3.1. Formulación por Programación Dinámica

Teniendo en cuenta lo anterior, o sea, que la probabilidad de cobro a priori a un cliente específico en el período N , se ajusta a una distribución Beta de parámetros c y n , y suponiendo que k_1 es el beneficio obtenido como consecuencia de cobrar el crédito concedido, y k_2 la pérdida ocasionada cuando el cobro de dicho crédito no tiene lugar, podemos formular un programa dinámico en el que:

c, n = variables de estado

$f_N(c, n)$ = beneficio máximo esperado desde el período N hasta el final, siguiendo una política óptima

$D_N(c, n)$ = decisión óptima a tomar en el período N ,

donde:

$$D_N(c, n) \begin{cases} = 1 & \text{supone concesión del crédito} \\ = 0 & \text{supone no concesión del crédito} \end{cases}$$

La ecuación de recurrencia será:

$$(19) \quad f_N(c, n) = \text{Max} \left\{ \frac{c}{n} \left[k_1 + v f_{N+1}(c+1, n+1) \right] + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{c}{n} \right) \left[k_2 + v f_{N+1}(c, n+1) \right]; 0 \right\}$$

El decisor elegirá la acción -conceder o no conceder el crédito- cuyos resultados esperados sean superiores. La primera expresión de (19) representa el producto de la probabilidad esperada de cobro por el resultado descontado esperado al conceder el crédito. La segunda expresión refleja el producto de la probabilidad de no cobrar por el resultado correspondiente, que en este caso recoge la pérdida k_2 en lugar del beneficio k_1 anterior, y la situación precedente está representada por $f_{N+1}(c, n+1)$ en lugar de por $f_{N+1}(c+1, n+1)$, puesto que el número de casos favorables será uno menos. Finalmente si el crédito no es concedido el resultado esperado será, lógicamente, nulo.

3.2. Revisión del modelo anterior. El importe total de los créditos

Hasta aquí hemos considerado solamente dos alternativas, conceder o no conceder el crédito, suponiendo que cada decisión se refería a un mismo importe crediticio, pero a poco que tratemos de acercarnos a la realidad, podemos facilmente comprobar que no ocurre eso, sino que a cada cliente le son concedidas sumas diferentes en los distintos períodos de tiempo. El problema que nos planteamos ahora es el de definir

el límite hasta el cual debe alcanzar la concesión de créditos a un cliente específico.

Para abordar este problema resulta conveniente explicitar la relación existente entre la cantidad de crédito ofrecida y la probabilidad de cobro, la cual puede apreciarse gráficamente en la Figura 2.

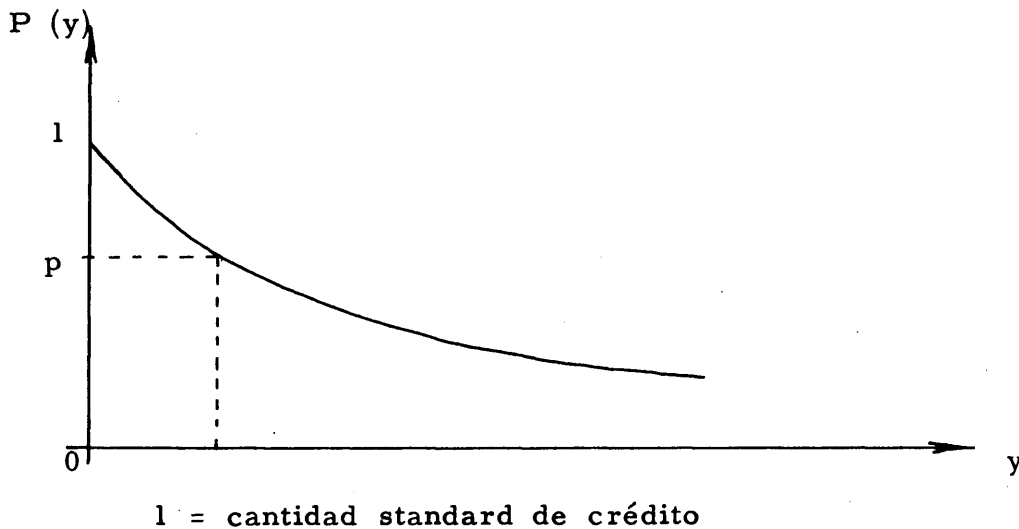


Fig. 2

En abscisas se mide el número de unidades standard de crédito ofrecidas (p.e. miles de pesetas) y en ordenadas la probabilidad de cobro. De acuerdo con esto p sería la probabilidad de cobro de 1 unidad de crédito y en general la función $P(y)$ sería igual a p^y .⁷

(7) El análisis de la relación exponencial expuesta puede verse en: K. J. COHEN; F. S. HAMMER. - Analytical Methods in Banking. - R. D. Irwin. Homewood, Illinois, 1966. Apéndice del Capítulo 6

Para incorporar a la anterior formulación por Programación Dinámica el nuevo problema planteado, debemos determinar previamente de que forma se revisa la probabilidad p establecida a priori, una vez concedido el crédito y . Supongamos que la probabilidad citada se ajusta a una distribución Beta cuya función de densidad a posteriori, o sea, una vez que el crédito y se ha concedido y cobrado en el período N , es la $f_{N+1}(p|c, n; y)$ la cual en virtud del Teorema de Bayes y teniendo en cuenta la función $P(y) = p^y$, sería igual a $f_{N+1}(p|c+y, n+y)$.⁸

La revisión de los parámetros c y n de la distribución Beta establecida a priori deberá tener en cuenta la concesión y cobro de la cantidad de crédito y . Los parámetros que se obtendrían serían los siguientes:

$$(20) \quad c'' = c + y \quad ; \quad n'' = n + y$$

La ecuación de recurrencia que podemos establecer para este caso es la que sigue:

$$(21) \quad f_N(c, n) = \text{Max}_{0 \leq y < \infty} \left\{ \left(\frac{c}{n}\right)^y \left[k_1 y + v f_{N+1}(c+y, n+y) \right] + \left[1 - \left(\frac{c}{n}\right)^y \right] k_2 y \right\}$$

3.3. Comentarios al modelo expuesto

Si en alguna de las áreas decisorias de la empresa resulta interesante el control feed-back no cabe duda que en el caso examinado resulta deci

(8) Vid. H. BIERMAN; W.H. HAUSMAN. -The Credit Granting Decisión. - Op. cit. Pag. 531.

sivo, pues la política de concesión de créditos debe basarse en la información de última hora.

La probabilidad a priori de cobro debe ser inmediatamente revisada a medida que la información es obtenida, a fin de evitar las pérdidas que sin duda se derivarían si se tomaran como base de los cálculos previsiones incumplidas.

Según ha podido apreciarse el modelo anterior se basa en el control de las cuentas individuales, luego el nivel del total de créditos concedidos es tará en función de éste. Sin embargo, una verificación del total de las cuentas a cobrar puede evidenciar algún fallo en el control de las cuentas específicas.

De idéntica forma podemos afirmar que aunque el total de incobrables del período no supone una información suficiente para juzgar la política de crédito de la empresa, su verificación a nivel global resulta siempre conveniente. El tratamiento de dichos incobrables a nivel individual es primordial puesto que una política acertada como puede ser la mejora de la calidad de los clientes puede causar favorables efectos sobre los beneficios.

Por último queremos destacar una importante cuestión, cual es el grado de independencia estadística entre la economía de los clientes y la política crediticia de la empresa. Si la separación geográfica es grande y el tipo de industria relativamente diferente, puede suponerse que no existirá una gran dependencia. Este es el caso contemplado por los modelos antes expuestos. Pero si las circunstancias anteriores no se dan, la caída en la actividad de la empresa que no obtuvo el crédito, afectará a sus

empleados y, por tanto, a la demanda efectiva de la zona, con evidentes repercusiones sobre la empresa que no concedió el crédito. En este sentido las decisiones de concesión de créditos pueden asimilarse a las de selección de cartera. Un intento de recoger estos efectos es el realizado por Cyert y Thompson, pero muy limitado porque el efecto incluido en su modelo sigue partiendo del supuesto de independencia estadística de las variables.⁹

En resumen podemos afirmar que la política crediticia debe considerar de una parte los beneficios esperados de las ventas y de otro las pérdidas ocasionadas por los incobrables. Su análisis dinámico según se ha expuesto puede conducir a la obtención de la política óptima.

(9) R. M. CYERT; G. L. THOMPSON. - Selecting a Portfolio of Credit Risks by Markov Chains. - Journal of Business. Enero 1968. Pags. 39-46

CONCLUSIONES

C O N C L U S I O N E S

A través de los diez Capítulos en que hemos dividido nuestra Tesis, hemos tenido ocasión de exponer tanto los fundamentos básicos de orden técnico y conceptual, como una serie de aplicaciones de la Programación Dinámica a las decisiones secuenciales en la empresa, considerada ésta bajo la perspectiva de los diferentes subsistemas que se integran en la misma. Los matices y comentarios de índole diversa quedaron también apuntados.

Solo nos falta, pues, a modo de resumen, sentar una serie de conclusiones para los distintos problemas examinados, a fin de ofrecer en este momento una síntesis de cuanto hemos pretendido a lo largo de estas páginas.

Nuestras conclusiones son las siguientes:

1. Las decisiones en la empresa no quedan reducidas simplemente a la determinación del precio y la cantidad pues con ser importantes estos extremos, existen otros muchos que requieren constante atención de la función ejecutiva.
2. El conocimiento descriptivo del proceso decisorio resulta, sin duda, de interés, pero no puede pensarse que tal circunstancia conduzca por si sola a la optimización de los objetivos empresariales.
3. Los modelos de Investigación Operativa han brindado a la gestión empresarial la posibilidad de un mayor conocimiento estructural de sus problemas y de conseguir una optimización de los objetivos planteados por ellos.
4. La determinación de los criterios a manejar para el señalamiento de los objetivos, constituye una premisa básica, puesto que la optimización puede conducir a resultados distintos según los criterios respectivamente utilizados.
5. Dado que la empresa tiene una actuación en esencia dinámica, las decisiones tomadas en la misma más que hechos aislados, constituyen partes integrantes de un proceso, en el que las anteriores condicionan a las posteriores y a su vez se ven condicionadas por ellas. El objetivo, por tanto, no puede consistir en la optimización de una decisión sino de una secuencia de ellas.
6. El instrumento apto para la optimización de los procesos secuenciales de decisión lo constituye la Programación Dinámica. El objetivo que-

dará representado por una función de las variables de estado del sistema y las decisiones serán seleccionadas entre todas las estrategias existentes de forma tal que constituyan una política óptima, o sea, que optimicen la función objetivo.

7. Los procesos pueden ser discretos o continuos, siendo los primeros los de mayor interés para la Economía de la Empresa y su evolución puede tener un carácter determinista, estocástico o adaptativo. El horizonte temporal que contemplan puede ser limitado o ilimitado.
8. Nuestra concepción de la empresa es la de un sistema integrador de un conjunto de subsistemas, dentro de los cuales tienen lugar una serie de procesos de información-decisión-gestión, cuya armonía produce un efecto sinérgico.
9. Los subsistemas de gestión que consideramos en la empresa, al objeto de estudiar las decisiones secuenciales que tienen lugar dentro de los mismos son los siguientes: financiación, inversión, producción, comercial e investigación.
10. No resulta posible presentar una panorámica completa de todas las decisiones secuenciales que pueden tener lugar dentro de cada uno de los anteriores subsistemas, por ello, hemos seleccionado aquellas cuya importancia resulta más destacada, en función de que pueden tener lugar en un gran número de empresas. No descendemos, por tanto, a un casuismo exagerado, pues ello resulta incompatible con la síntesis que hemos pretendido realizar.

11. En el subsistema de financiación examinamos el problema de la estructura óptima del capital en funcionamiento y la planificación financiera a corto plazo. El primero de ellos supone la elección entre tres posibles alternativas -liquidez, inversiones circulantes e inversiones fijas- para la materialización de los recursos financieros disponibles; la optimización del proceso a lo largo del tiempo, contando con las limitaciones específicas del mismo, requiere su tratamiento a través de la Programación Dinámica.
12. La planificación financiera a corto plazo debe contar no solamente con las limitaciones específicamente financieras, sino también con las derivadas de otros subsistemas empresariales que inciden en el examinado; su tratamiento en el marco de un modelo de Programación Lineal supone evidentes restricciones, al tener que tomar una función objetivo de carácter lineal. Para obviar tal inconveniente hemos convertido el programa lineal en uno dinámico, en el cual puede prescindirse ya de tal característica de la función objetivo, por lo que éste último tratamiento se nos revela como más interesante para conseguir un paulatino acercamiento a la realidad.
13. Ninguno de los criterios manejados para efectuar la elección entre un conjunto de posibles inversiones, de las que resultan más interesantes en distintos momentos del tiempo, reúne unas características tales que elimine la importancia de todos los demás. Un estudio amplio del programa necesitará su examen dinámico a la luz de los diferentes criterios habitualmente manejados para llevar a cabo la selección de inversiones. La perspectiva temporal del mismo requiere que la optimización sea buscada a través de la Programación Dinámica.

14. La renovación de equipos industriales es uno de los problemas capitales de nuestros días. Contemplamos el mismo sin y con la incidencia que supone el progreso tecnológico, inclinándonos lógicamente - por este último supuesto, ya que el mismo es algo consustancial con nuestros días. La elección de alternativas -renovar o mantener fundamentalmente- puede ser objeto de tratamiento a través de la Programación Dinámica. Como una extensión de la política de renovación - abordamos el estudio de un modelo de reemplazamiento preventivo para evitar averías, suponiendo que el sistema tiene una evolución markoviana. La optimización buscada en todos los modelos de renovación se refiere a la minimización de los costes inherentes a dicha política, logrando con ello el establecimiento de la política óptima de renovación.

15. Como problemas típicos del subsistema de producción examinamos los de determinar el nivel de los stocks y de la producción o el volumen de pedido. Su tratamiento es realizado en tres modelos que parten de distintos supuestos: uno determinista con horizonte limitado, - otro determinista con horizonte ilimitado y otro estocástico.

16. Con el tratamiento por Programación Dinámica del modelo determinista con horizonte limitado, establecemos la política de producción y almacenamiento que da lugar a los costes mínimos. Sin embargo lo - más destacado en este caso, juzgamos que es el análisis de sensibilidad efectuado, observando las repercusiones que sobre los costes totales y sobre los costes medios por período tienen el alargamiento o acortamiento del horizonte temporal planificado y el partir de uno u otro nivel de los stocks. Con ello se amplían las posibilidades decisorias, pues no son solo el nivel de los stocks y de la producción -

las variables sobre las que cabe tomar decisiones, sino también las dos últimas mencionadas.

17. La consideración de un horizonte ilimitado adiciona nuevas y no pequeñas dificultades de cálculo, que pueden ser remontadas mediante la utilización del método de aproximaciones sucesivas, tanto en el espacio de la función objetivo como en el espacio de las políticas. Para superar los inconvenientes que en algunos casos supone la minimización del coste total, después de plantear ésta, acometemos la minimización del coste medio por período. Las desventajas derivadas de las dificultades de cálculo no compensan la más perfecta optimización lograda por este modelo, con respecto al anterior, en gran número de ocasiones, de ahí que, en la práctica, resulte preferible operar con este último tomando como horizonte de planificación aquél que dé lugar al menor coste medio por período, de entre los examinados por el correspondiente análisis de sensibilidad.

18. La revisión del supuesto de un perfecto conocimiento de la demanda, base sustentadora de los dos modelos anteriores, es efectuado en el que ahora comentamos. Dicho conocimiento perfecto es sustituido ahora por uno de carácter probabilístico. La optimización en este caso se dirige a minimizar la esperanza matemática del coste correspondiente, logrando con ello el diseño de la política óptima. También el análisis de sensibilidad tiene aquí gran interés, sobre todo considerando distintas probabilidades para los supuestos alternativos que pueden tener lugar, ya que ello permitirá la adaptación de la política óptima a medida que se van obteniendo experiencias reales.

19. En el subsistema comercial abordamos el estudio de tres problemas que consideramos de bastante relieve dentro del mismo. Primeramente tratamos el problema del transporte, básico para el diseño de una adecuada política de distribución física, en segundo término nos referimos al problema de la localización de almacenes y, por último, analizamos un modelo para controlar los riesgos e ingresos de un equipo de ventas.
20. El problema del transporte ha sido objeto de estudio por bastantes autores, muchos de ellos de gran prestigio. Sin embargo su formulación por Programación Dinámica no supone simplemente una nueva variedad de cálculo, sino que al no ser relevante para ella la linealidad, concavidad o convexidad de la función objetivo, amplía el campo de posibles planteamientos, más acordes en muchos casos con la realidad observada.
21. Las decisiones de localización condicionan a la empresa durante un largo plazo, de ahí que su tratamiento no deba ser realizado en el estrecho marco de los modelos estáticos. La previsión anticipada de las oportunas relocalizaciones exige considerar los efectos de unos y otros puntos de localización durante un amplio período de tiempo. La política óptima de localización-relocalización será aquella que minimize los costes totales ocasionados por una u otra alternativa.
22. La penetración en el mercado de determinados y costosos bienes y servicios exige el mantenimiento de un equipo de ventas suficientemente preparado. El coste ocasionado por sus prospecciones supone un riesgo, que ha de guardar estrecha relación con los ingresos esperados. El tratar de mantener un equilibrio entre ambos, para que los in

gresos esperados sean los máximos posibles, puede ser planificado a través de la Programación Dinámica.

23. Los proyectos de investigación en la empresa suponen la confluencia de un gran número de actividades. Dicha complejidad precisa una planificación temporal, que ha sido acometida por un gran número de técnicas. La Programación Dinámica permite tanto la determinación del camino crítico, como la de aquellos otros que le siguen en orden de criticidad, cuyo conocimiento es de gran importancia en aquellos proyectos cuya duración es sabida en términos de probabilidad, que por lo que se refiere al campo de la investigación son la totalidad.
24. La evolución de los procesos estudiados puede tener lugar de una forma desconocida, determinista o probabilística, pero tanto la una como la función de distribución de la otra nos resultan desconocidas en principio, de ahí que sea preciso un dispositivo de control, que captando la información correspondiente, nos permita algún aprendizaje en el transcurso del proceso. La Programación Dinámica se nos revela como un instrumento de gran utilidad para el control de dichos procesos.
25. Un ejemplo claro de un proceso de este tipo nos lo ofrece la política de concesión de créditos de una empresa, cuyas decisiones deben basarse en la información de última hora, no en supuestos de partida que pueden haberse visto alterados por los hechos reales. En el modelo que planteamos se persigue establecer la política crediticia óptima, mediante la maximización de los beneficios actualizados del horizonte temporal estudiado. Cada período recoge las experiencias ob-

servadas, modificando con ellas los supuestos de partida.

EPILOGO: El dinamismo empresarial requiere que el tratamiento de sus problemas sea realizado no dentro del estrecho marco de los modelos estáticos, sino considerando el tiempo y la evolución del sistema empresarial como algo decisivo y fundamental en todos ellos, logrando de esta forma que sus decisiones sean óptimas no para éste o aquél momento, sino para todo el horizonte temporal objeto de planificación.

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

CAPITULO I

1. BARNARD, C.I. - Functions of the executive. -Harvard University Press. - Cambridge USA, 1938.
2. BEAR, STAFFORD. - The Place of Nature in Operational Research Science. Operational Research Quarterly, Vol 13, Marzo 1962: Pags 61 y sigs.
3. Decision and Control. - John Wiley. - Londres, 1966.
- 4 .BERLANGA BARBA, M. - Economía de la Empresa. - Biblioteca de Comercio y Finanzas. - Madrid, 1954.
5. BLOCH-LAINE, F; PERROUX, F. - La empresa y la economía del S. XX. Tomo I. -Economía Nacional y Empresa. - Deusto. Bilbao. 1970.
- 6 . La empresa y la economía del S. XX. - Tomo II. La formación de decisiones en la empresa. - Deusto. Bilbao. 1970
7. BLONDE, D. - La Gestión Programada. -Sagitario. - Barcelona, 1965.

8. BODT, G. - Análisis de Márgenes (Direct Costing). - Deusto. - Bilbao. 1966.
9. BROSS, I. D. - La Decisión Estadística. - Aguilar. - Madrid, 1958.
10. BUENO CAMPOS, E. J. - Del Método Operativo en el comportamiento económico de la empresa y un ensayo sobre los orígenes de la Investigación Operativa. - Anales de Economía (En prensa).
11. CETRON, M; DAVIDSON, H. - Macro R y D. - Industrial Management Review. - Vol 10, nº 2. 1969. Pags. 87-100
12. CLANET, A. - Optimisation d'une structure. - Gestion. Abril 1967. Pags. 250-254
13. COHEN, K. J; CYERT R. M. - Computer models in dynamic economics. - Quarterly Journal of Economics. - Vol 75, 1961. Pags. 112-127
14. CYERT R. M.; MARCH, J. G. - Teoría de las decisiones económicas en la empresa. Herrero Hermanos Sucesores, S. A. - México, 1965.
15. CHAKRAVARTY, S. - Lógica de la Planificación de Inversiones. - Tecnos Madrid, 1966.
16. CHARNES, A; COOPER, W. W. - The Theory of Search: Optimum Distribution of search effort. - Management Science, Vol 5, 1959 Pags. 450-458.
17. Some Network Characterizations for Mathematical Programming and Accounting Approaches to Planning and Control. - The Accounting Review, Vol 42, nº 1. - Enero 1967. Pags. 24-52
18. CHURCHMAN, C. W. - Prediction and Optimal Decision: Philosophical Issues of a Science of Values. - Prentice Hall. - Englewood Cliffs. New Jersey, 1961.
19. DANTZIG, G. B. - Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities. - Incluido en la recopilación dirigida por T. C. Koopmans, "Activity Analysis of Production and Allocation. - John Wiley. - New York, 1951. Pags. 339-347
20. D'AUMALE, G. - La Programmation des Decisions. - P. U. F. - París, 1968

21. EARLEY, J.S. - Marginal policies of excellently managed companies. - American Economic Review. Vol 44, 1956. Pags. 44-70
22. EYLON, S. - What is a Decision?. - Management Science. Vol 16, nº 4. Diciembre 1969. Pags. B-172-B-189
23. FERNANDEZ PIRLA, J.M. - Economía y Gestión de la Empresa. - ICE. Madrid, 1970 (Cuarta edición)
24. FRIEDMAN, M. - The methodology of positive economics. - Incluido en "Essays in positive economics". - University of Chicago Press. - Chicago, 1953. Pags. 3-46
25. GARCIA, J. - La Investigación Operativa. - Clave. Vol 3, nº 25. Pags. 29-35
26. HALL, R.L.; HITC, C.J. - Price Theory and Business Behavior. - Contenido en Oxford Studies in the price mechanism, dirigido por T. Wilson y P.W.S. Andrews. - Oxford University Press. - Oxford, 1951. Pags. 107-138
27. HURWICZ, L. - Optimaly Criteria for Decision Making under Ignorance. - Statistics, nº 370, 1951.
28. KATONA, G. - Psychological Analysis of Economic Behavior. - Mc Graw Hill Book Co. - New York, 1951.
29. KAUFMANN, A. - La Ciencia y el Hombre de Acción (Introducción a la Praxeología). - Guadarrama. Madrid, 1967
30. KOOPMANS, T.C. - Three essays on the state of economic science. - Mc Graw Hill Book Co. - New York, 1957.
31. LANGE, E.O.; BELLARIA, C. - Principios de Dirección y Organización y otras técnicas aplicables a la Administración Pública y Privada. - Revista de la Universidad Argentina de la Empresa. Vol 5, nº 16, 1969. Pags. 49-51
32. LEIBENSTEIN, H. - Economic Theory and Organizational Analysis. - Harper New York, 1960
33. LUCE, R.D.; RAIFFA, H. - Games and Decisions. - John Wiley. - New York, 1957.

34. LEONTIEF, W. W. - Quantitative Input and Output Relations in the Economic Systems of the United States. - Review of Economic Statistics. Vol 18. Agosto 1936. - Pags. 105-125.
35. The Structure of American Economy 1919-1929. - Harvard University Press. - Cambridge. Massachusets, 1941.
36. LOPEZ MORENO, M. J. - La llamada Investigación Operativa y la Ciencia Económica. - Primera Reunión Científica ITECA. - León, 1959.
37. LLOYD, N. - Decisión: Su arte y su ciencia. - Alta Dirección, Vol 5, nº 26, 1969. - Pags. 11-18
38. MAGEE, J. F. - Decision Trees for Decision Making. - Harvard Business Review, Vol 42, nº 4. Julio-Agosto. 1964. Pags. 126-138
39. MANNE, A. S. - Economic Analysis for Business Decisions. - Mc Graw Hill Book Co. New York, 1961.
40. MARSHALL, A. - Principios de Economía. - Aguilar. Madrid, 1963
41. MC GUIRE, W. J. - Operation Research in Management Planning and Control. - The Journal of Industrial Engineering. Vol 10. Julio-Agosto, 1959. Pags. 308-312
42. MEYER, J. - Economie et organisation de l'entreprise. - Dunod. París 1969.
43. MILLER, D. W.; STARR, M. K. - Acuerdos ejecutivos e Investigación de Operaciones. - Herrero Hermanos. - México, 1961
44. MORSE, P. M.; KIMBALL, G. E. - Methods of Operations Research. - John Wiley. - New York, 1951.
45. NEUMAN, J. VON; MORGENSTERN, O. - Theory of Games and Economic Behavior. - Princeton University Press. - Princeton, 1944
46. PAPANDREOU, A.; WHEELER, J. - Competition and its regulation. - Prentice Hall. - Englewood Cliffs. - New Jersey, 1954

47. PERROUX, F. - La Economía del Siglo XX. - Ariel. - Barcelona, 1964.
48. POPPER, K. R. - La lógica de la Investigación Científica. - Tecnos. - Madrid, 1962.
49. SADOWSKI, W. - The Theory of Decision Making. - An Introduction to Operations Research. - Pergamon Press. - Oxford, 1965
50. SANTILLANA DEL BARRIO, A. - La polémica sobre la conducta del empresario respecto a la fijación del precio y cantidad: aportaciones teóricas y empíricas. - Revista de Economía Política, nº 55. - Mayo-Agosto, 1970. - Pags. 111-132.
51. SAVAGE, L. J. - The Theory of Statistical Decision. - Journal of the American Statistical Association, nº 46, 1951. - Pags. 55-67
52. SCHNEIDER, E. - Contabilidad Industrial. - Aguilar. - Madrid, 1962.
53. SCHUMPETER, J. A. - History of Economic Analysis. - Allen and Unwin. - Londres, 1954.
54. Síntesis de la Evolución de la Ciencia Económica y sus métodos. - Occidente S.A. - Barcelona, 1964.
55. Diez grandes economistas de Marx a Keynes. - Alianza. - Madrid, 1967.
56. SIMON, H. A. - Administrative Behavior. - MacMillan. - New York, 1947.
57. STARR, M. K. - Las decisiones de los empresarios. - Incluido en el estudio internacional dirigido por F. Bloch-Lainé y F. Perroux, "La empresa y la economía del S. XX", Tomo II, "La formación de decisiones en la empresa". - Deusto. - Bilbao, 1970. - Pags. 27-67
58. TIMMS, H. L. - Sistemas de Decisión Gerencial. - El Ateneo. - Buenos Aires, 1970.
59. WALD, A. - A New Foundation of the Method of Maximum Likelihood in Statistical Theory. - Cowles Commission for Research in Economics. Report of the Sixth Annual Research Conference on Economics and Statistics, 1940.

CAPITULO II

60. AKAMA, HACHIRO. - Un aspect de la programmation dynamique: Problème des mines d'or. - Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle. Institut de Statistique de l'Université de Paris, n° 2, 1957. - Pags. 27-36.
61. BECKMAN, M. J. - Dynamic Programming of Economic Decision. - Springer-Verlag. - Berlín, 1968.
62. BEIGHTLER, C. S.; MITTON, L. G.; NEMHAUSER, G. L. - A short-table of z-transferances and generating functions. - Operations Research. Vol 9, n° 4, 1961. - Pags. 574-78.
63. BELLMAN, R. - Some problems in the theory of dynamic programming. - Económetrica, Vol 22, n° 1. Enero 1954. - Pags. 37-48.
64. A markovian decision process. - Journal of Mathematics and Mechanics. Vol 6. n° 679. 1957.
65. Dynamic Programming. - Princeton University Press. - Princeton. New Jersey, 1957.
66. Adaptative Control Processes: A guided tour. - Princeton University Press. - Princeton, New Jersey, 1961.
67. Mathematical optimization techniques. - University of California Press, Berkeley, 1963.
68. BELLMAN R.; DREYFUS, S. - On the computational solution of dynamic programming processes .I. - On a tactical air warfare model of Mengel. - Operations Research. Vol 6. 1958. Pags. 65-78.
69. La Programmation Dynamique et ses aplicaciones. - Dunod. - Paris, 1965.
70. BLACKWELL, D. - Discrete Dynamic Programming. - Annals Mathematical Statistics. - Vol 33, 1962. Pags. 719-726.
71. Discounted Dynamic Programming. - Annals Mathematical Statistics. Vol. 36, 1965. Pags. 226-235.

72. BOGAARD, P. I. M. van den; MONREAL LUQUE, A.; PANNE, C. van de. - Etude sur les implications des horizons alternatifs dans la programmation quadratique dynamique. - Rev. Franc. R.O. nº 23, 2º trim. 1962. Pags. 163-183.
73. CANO, F. J. - Programación Secuencial en concurrencia. - Horizonte finito en etapas sin factor descuento. - Trabajos de Estadística e Investigación Operativa. - Vol. 22, nº 1. 1969. Págs. 35-46.
74. COMPANYS, R. - Procesos secuenciales de decisión. - Comunicación del Congreso Nacional de Investigación Operativa de Octubre de 1963. Incluido en "La Investigación Operativa en la Industria. - Deusto. - Bilbao, 1964.
75. DENARDO, E. V.; MILLER, B. L. - An Optimality Condition for Discrete Dynamic Programming with no Discounting. - Annals Mathematical Statistics. Vol 39. 1968. Pags. 1220-1227.
76. DERMAN, C.; STRAUCH, R. E. - A Note on Memoryless Rules for Controlling Sequential Decision Processes. - Annals Mathematical Statistics. Vol 37, 1966. - Pags. 276-279.
77. DREYFUS, S. E. - Computational aspects of dynamic programming. - Operations Research. Vol 5, nº 3, 1957. Pags. 409-415.
78. Dynamic programming en Progress in Operations Research. Vol 1, Capítulo 5. Editor: R. L. Ackoff. - John Wiley. New York, 1961.
79. FAURE, R. Eléments de la Recherche Opérationnelle. Gauthier. - Villars, París, 1968.
80. FORTET, R. - Propriétés des applications de transition des programmations dynamique. - Metra, Vol 2, nº 1. 1963. - Pags. 79-96.
81. GHELLINCK, G. de. Les problèmes de décisions séquentielles. - Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle. - Bruxelles, Vol 2, nº 2, 1960.
82. GUMOWSKI, I.; MIRA, C. - L'optimisation: La théorie et ses problèmes Dunod. - París, 1970.
83. HELLE, D. - Dynamic Programming. - Note Technique. - Insead, nº 5. 1969. - Pags. 1-12

84. HOWARD, R. A. Dynamic Programming and Markov Processes. - The Technology Press of M. I. T. y John Wiley. - New York 1960.
85. KARLIN, S. - The structure of dynamic programming models. - Naval Research Logistic Quarterly, Vol 2, nº 4. Diciembre, 1955. Pags 285-94
86. KARP, R. M.; HELD, M. - Finite State Processes and Dynamic Programming. - SIAM Journal on Applied Mathematics. - Vol. 15, 1967. Pags. 693-718.
87. KAUFFMANN, A.; CRUON, R. - La Programmation Dynamique. - Dunod París, 1964.
88. KAUFMANN, A. - Introducción a la Combinatoria y sus aplicaciones. - CECSA. Barcelona 1971.
89. KUNZI, H. P. y otros. - Einführungskursus in die dynamische Programmierung. - Springer-Verlag. - Berlín, 1968.
90. LEMONON, P. - Un problème de décision séquentielle: Calcul d'une série économique. - Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle. Institute de Statistique de l'Université de París. nº 3. Abril 1961.
91. LESOURNE, J. - Technique Economique et Gestion Industrielle- Dunod. Paris. 1960.
92. MASSE, P. - Les Choix des Investissements. - Dunod. - París, 1959.
93. MITTEN, L. G. - Composition Principles for Synthesis of Optimal Multi-Stage Processes. - Operations Research. Vol:12 1964. Pags. 610-619
94. NEMHAUSER, G. L. - Introduction to Dynamic Programming. - John Wiley. - New York, 1966.
95. PONTRIAGIN, L. S. y otros. - The Mathematical Theory of Optimal Processes. Pergamon Press. - New York. - 1964.
96. RIOS, S. - Problemas de Inversiones, Decisiones secuenciales, Programación Dinámica, Procesos Autoadaptativos. - Trimestre Estadístico, 15, 1964. Pags. 44-46.

97. ROSENSTIEHL, P.; GONILA-HOURI, A. - Les Choix Economiques, Décisions séquentielles et simulation. - Dunod. - Paris, 1960.
98. WAGNER, H.M. - On the Optimality of Pure Strategies. - Management Science. Vol 6. 1960. - Pags. 268-269.
99. WONG, P.J.; LUENBERGER, D.G. - Reducing the Memory Requirements of Dynamic Programming. - Operations Research. Vol. 16. 1968. Pags. 1115-1125.

CAPITULO III

100. ABRAHAM, C.; THOMAS, A. - Microéconomie. - Décisions optimales dans l'entreprise et dans la nation. - Dunod. Paris, 1966.
101. ANTHONY, R.N. - Planning and Control Systems: A Framework for Analysis. - Harvard University Press, Boston 1965.
102. BAUVING, G.; ELINA, P. - Exemple de construction d'un Système Intégré de Gestion. - Gestión. April 1967. Pags. 255-278.
103. BERTALANFFY, L. - General System Theory: A New Approach to Unity of Science. - Human Biology. Diciembre 1965. Pags. 303-361.
104. BIRRIEN, J. Y. - Information et Management: Initiation a la theorie des Systemes. Dunod. Paris, 1970.
105. BOCK, R.H. - HOLSTEIN, W.K. - Planeación y control de la producción. Limusa-Wiley. - México, 1966.
106. BONINI, C.P. - Simulation of Information and Decision Systems in the Firm. - Prentice Hall. - New York, 1963.
107. BOULDIN, K. E. General Systems Theory: The skeleton of Science. Incluido en: Management Information (A Quantitative Accent) dirigido por Th. H. Williams y C. H. Griffin. - R. D. Irwin. - Homewood, Illinois, 1967. Pags. 602-613.

108. CAOPINNA, V. - Posibles aplicaciones del modelo de contabilidad "Input-Output" en el ámbito de la empresa. - Técnica Económica. - Madrid, Mayo 1959. Pags. 148 y sigs.
109. CAÑIBANO CALVO, L. - Financiación de la Empresa. - Colegio de Titulares Mercantiles. Madrid, 1970.
110. CLELAND; D. I.; KING, W. R. - L'Analyse de Systèmes. Technique avancée de Management. - Entreprise Moderne d'Edition. París. 1971.
111. COILLOT, J. - Initiation au leasing ou credit-bail. - J. Delmas. París. 1968.
112. CHAMBRE NATIONAL DES CONSEILLERS FINANCIERS. - Le Factoring. - Société d'Editions Economiques et Financières. - París, 1966.
113. CHORAFAS, D. N. - La Investigación en la Empresa. - Aguilar. Madrid, 1964.
114. DEPALLENS, G. - Gestion financière de l'Entreprise. - Sirey. París, 1963.
115. DETHOOR, J. M.; GROBOILLOT, J. L. - La vie des équipements. - Dunod. - París, 1968.
116. EMERY, J. G. - Organizational Planning and Control Systems. - The MacMillan Co. - New York, 1969.
117. EVANS, G. H. - The Product Manager Job. - AMA. - New York, 1960.
118. FEUVRIER, C. V. - La simulation des Systèmes (Maîtrise d'informatique). - Dunod. - París, 1971.
119. GARCIA ECHEVARRIA, S. - Significado e importancia de la autofinanciación para el desarrollo y crecimiento de las empresas (La autofinanciación en la Economía de la Empresa). - Boletín de Estudios Económicos, nº 74. Agosto, 1968. Pags. 323-394

120. GREENWOOD, W. T. - Decision Theory and Information Systems. - An Introduction to Management Decision Making. - Edward Arnold. - South Western Pub. - Londres, 1969.
121. HARVEY, A. - Systems can be too practical. - Business Horizons, Vol 7, nº 2. 1964. Pags. 59 y sigs.
122. HERTZ, D. B. New Power for Management. - Mc. Graw Hill Book Co. - New York, 1969.
123. HOLDEN, I. R.; MC ILROY, P. K. - Network Planning in Management Control Systems. - Hutchinson Educational. - Londres, 1970.
124. HOLT, C. C. y otros. Planeamiento de la producción, inventarios y mano de obra. - Herrero Hermanos. - México, 1963.
125. IJIRI, Y. An application of Input-Output analysis to some problems in cost accounting. - Management Accounting. N. A. A. Abril 1968. - Pags. 49-61
126. JOHNSON, R. A.; KAST, F. E.; ROSENZWEIG, J. E. - Teoría, Integración y Administración de Sistemas. - Limusa-Wiley. - México, 1966.
127. KING, W. R. - The Systems Concept in Management. - Journal of Industrial Engineering. - Mayo, 1967. - Pags. 320-323.
128. KLIR, G. J. - An Approach to General Systems Theory. - Van Nostrand Reinhold Co. - New York, 1969.
129. LAMBIN, J. J. - Información, Decisión y Eficacia Comercial. - Deusto. - Bilbao, 1967.
130. LOCKLEN, D. P. - Economics of Transportation. - R. D. Irwin. - Homewood, Illinois, 1960.
131. MAGEE, J. F. - Sistemas de Distribución. - El Ateneo. - Buenos Aires, 1969.
132. MANSFIELD, E. - Industrial Research and Development. Characteristics, Cost and Diffusion of Results. - American Economic Review. Mayo 1969. Pags. 65-71

133. MARTENS, H.R.; ALLEN, D.R. - Introduction to Systems Theory. - C.E. Merriell Publications Co. - Columbus, Ohio, 1969.
134. MELESE, J. - La Gestion par les Systèmes (Essai de Praxéologie). - Editions Hommes et Techniques. - París, 1968.
135. MOORE, P.G. - La Empresa como Sistema Total. - Estudios Empresariales. Vol. 18, nº 3, 1970. Pags. 5-70
136. NADLER, G. - Diseño de sistemas de producción. - El Ateneo. - Buenos Aires, 1970.
137. NICOLAU, R. - Las tablas Input-Output en el análisis y programación de la empresa. - Alta Dirección, Vol 5, nº 26, 1969. Pags. 31-38.
138. O'BRIEN, J.O. - Management Information Systems. - Concept, Techniques and Applications. - Van Nostrand Reinhold Co. - New York, 1970.
139. OPTNER, S.L. - Análisis de Sistemas para empresas y solución de problemas industriales. - Diana. - México, 1968.
140. PACK, L. - Betriebliche Investition. - Wiesbaden, 1959.
141. PEDRAGLIO, G. - Systèmes d'Organisation et Management moderne. - Dunod. - París, 1970.
142. PEUMANS, H. - Valoración de Proyectos de Inversión. - Deusto. - Bilbao, 1967.
143. PHELPS, W.; WESTING, G. - Marketing Management. - R.D. Irwin. - Homewood, Illinois, 1967.
144. PRINCE, T.R. - Information Systems for Management Planning and Control. - R.D. Irwin. - Homewood. - Illinois, 1966.
145. RAPPAPORT, A. - Information for Decision. Making. - Quantitative and Behavioral Dimensions. - Prentice Hall, Englewood Cliffs. - New Jersey, 1970.
146. RIBEILL, G. - Recherche Opérationnelle et théorie des systèmes. - Metra, nº 2, 1969. - Pags. 243, 265.

147. ROBICHEK, A.A.; MYERS, S.C. - Decisiones óptimas financieras. - Herrero Hermanos. México, 1968.
148. SCHOMOOKLER, J. - Invention and Economic Growth. - Harvard University Press, 1966.
149. STARR, M.K. - Dirección de la Producción. Sistemas y Síntesis. - Herrero Hermanos. México, 1968.
150. STERN; H. - Information Systems in Management Science. - Management Science. -Vol. 16, nº 10, Junio, 1970. - Pags. 685-688.
151. TAGLIACARNE, G. - Técnica y Práctica de las Investigaciones de Mercados. - Ariel. - Barcelona, 1960.
152. TILLES; S. - The Manager's Job: A system approach. - Harvard Business Review. Vol 41, nº 1. - Enero-Febrero, 1963. Pags. 74 y sigs.
153. TRIOLAIRE, G. - Costes de la Distribución y Formación de los Precios. - Sagitario. - Barcelona, 1965.
154. USHER, D. - The Welfare Economics of Invention. - Económica. - Agosto, 1964. Pags. 279-287.

CAPITULO IV

155. ALBACH, H. - Kapitalbindung und optimale Kassenhaltung. - Incluido en el "Finanzierungs-Handbuch" dirigido por H. Janberg. - Betriebswirtschaftlicher Verlag. - Wiesbaden, 1964. - Pags. 361-413
156. BERANEK, W. - Analysis for Financial Decisions. - R.D. Irwin. - Home wood, Illinois, 1963.
157. BOWER, J.B. y otros. - Financial Information Systems. - Allyn and Bacon Inc. - Boston, 1970.

158. EPPEN, G. D.; FAMA, E. F. - Solutions for Cash-Balance and Simple Dynamic. - Portfolio Problems. - Journal of Business. - Vol. 41, 1968. Pags. 94-112.
159. GUILBAUD, G. T. - Programmes dynamiques et programmes linéaires. Note sure un modèle de R. Bellman. - Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle. Institute de Statistique de l'Université de Paris, nº 2, 1957.
160. KUNZI, H. P. y otros. - Einführungskursus in die dynamische program mierung. - Springer Verlag. - Berlín, Heidelberg, 1968.
161. MANNE, A. S. - Linear Programming and Sequential Decisions. - Manage ment Science. Vol 6, 1960. - Pags. 259-267.
162. MAO, J. T. C. - Quantitative Analysis of Financial Decisions. - Mc Millan and Collier Mc Millan. - Londres, 1968.
163. MASSI, V. - Statica Patrimoniale, Vol II. - Dottore Antonio Milano. - Padua, 1945.
164. RUSSELL, A. H. - Cash Flow in Networks. - Management Science. - Vol 16, nº 5. - Enero 1970. - Pags. 357-373.
165. RUTENBERG, D. P. - Maneuvering Liquid Assets in a Multi-National Company: Formulation and Deterministic Solution Proced ures. - Management Science. Vol. 16, nº 10. Junio, 1970. Pags. 671-684.
166. SABATER GILI, E. - Modelo Dinámico de Previsión, Gestión y Con trol de Autofinanciación. - Estudios Empresariales, nº 71/1 Vol 19, Abril 1971. Pags. 81-109.
167. WILLIAMS, A. C.; NASSAR, J. I. - Financial Measurement of Capital Investments. - Management Science. - Vol 12, 1966. - Pags 851-864.
168. ZIEMBA, W. T. - Transforming Stochastic Dynamic Programming into NonLinear Programs. - Management Science. - Vol 17. nº 7. Marzo 1971. - Pags. 450-462.

y también las obras ya citadas 65. 66. 69. 89. 109. 111. 112. 114. 119. 140. y 147.

CAPITULO V

169. BISHOP, A.; ROCKWHEEL, T.H. - A dynamic programming computational procedure for optimal manpower loading in a large aircraft company. - Operations Research. Vol 6 nº 6, 1958. Pags. 835-848.
170. BELLMAN, R. - Equipment Replacement Policy. - Journal of Society of Industrial Applied Mathematics. Vol 3, 1955. - Pags. 133-136.
171. BROSH, I. - The Policy Space Structure of Markovian Systems with two types of Services. - Management Science, Vol 16, nº 9. Mayo 1970. - Pags. 607-621.
172. BROWN; B. - On the Iterative Method of Dynamic Programming on a Finite Space Discrete Time Markov Process. - Annals Mathematical Statistics. Vol 36. 1965. Pags. 1279-1285.
173. CANI. J.S. de. - A Dyanmic Programming Algorithm for Embedded Markov Chains when the Planning Horizon is at infinity. Management Sicence, Vol 10-1964. Pags. 716-733.
174. CARRALLO MENDEZ, A. - La Programación Dinámica. - Situación actual. - Aplicación a los programas de Inversión. - Comunicación del Congreso Nacional de Investigación Operativa de Octubre de 1963. Incluido en "La Investigación Operativa en la Industria". - Deusto. Bilbao, 1964.
175. CRABILL, T.B. - Sufficient Conditions for Positive Recurrence and Recurrence of Specially Structured Markov Chains. - Operations Research. - Vol. 16, 1968. Pags. 858-867.
176. CHOVER, J. - Markov Processes and Potential Theory. - John Wiley New York. 1967.
177. DEAN, J. - Capital Budgeting. - Mc. Graw Hill Book. Co. New York, 1951.
178. DENARDO, E.V. - Separable Markovian Decision Problems. - Management Science. Vol 14. 1968. Pags. 451-462.

179. DENARDO, E.V.; FOX, B. B. - Multichain Markov Renewal Programs. - SIAM Journal on Applied Mathematics. Vol. 16, 1968. Pags. 468-487.
180. DERMAN, C. - On Sequential Decisions and Markov Chains. - Management Science. - Vol 9, nº 1, 1962. - Pags. 16-24.
181. Optimal replacement and Maintenance under Markovian deterioration with Probability bounds on Failure. - Management Science. Vol 9. 1963. - Pags. 478-481.
182. DERMAN, C.; KLEIN, M. - Some remarks on Finite Horizon Markovian Decision Models. - Operations Research. Vol 13, 1965 Pags. 278-288
183. DESROUSSEAUX, J. - Le coût du temps et le rithme des matériels. Quelques problèmes de gestion des entreprises. - Annales des Mines. - Novembre, 1961.
184. Etude évolutive des productions capitalistiques. - Note Charbonnages de France, 1961-62.
185. Théorie du déclassement et du prix de revient réel dans les industries capitalistiques. - Revue Française de Recherche Opérationnelle, nº 26, 1^{er} trimestre, 1963.
186. DREYFUS, S.E. - A note on an industrial replacement process. - Operational Research Quarterly, Vol 8, 1957. Pags. 190-193.
187. A generalized equipment study. - Journal of Society of Industrial Applied Mathematics. Vol 8, 1960. Pags. 425-435.
188. FISHER, J.L. - A Class of stochastic investment problems. - Operations Research. Vol 9, nº 1. 1961. Pags. 53-65.
189. FOX, B. - Markov Renewal Programming by Linear Fractional Programming. - SIAM Journal on Applied Mathematics. - Vol 14. 1966. Pags. 1418-1432.
190. GAVER, D.P. Jr. - Models for Appraising Investments Yielding Stochastic Returns. - Management Science. - Vol. 11, 1965. Pags. 815-830.

191. GHELLINCK, G. de; EPPEN, G.D. - Linear Programming Solutions for Separable Markovian Decision Problems. - Management Science. - Vol 13. 1967. Pags. 371-394
192. GUILBAUD, G. T. - Programmes dynamiques et programmes linéaires. Notes sur un modèle de R. Bellman. - Cahiers du bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle. - Institute. Henry Poincaré. - Paris, 1957.
193. JEWELL, W.S. - Markov - Renewal Programming I: Formulation. Finite Return Models. - Operations Research. Vol. 11, 1963. Pags. 938-948
194. Markov - Renewal Programming II : Infinite Return Models. Example - Operations Research. Vol II. 1963. Pags. 949-971
195. JORGENSON, D.W.; MC CALL, J.J. - Optimal replacement policies for a ballistic missile. - Management Science. Vol 9. nº 3. Abril, 1963. Pags. 358-379.
196. JORGENSON, D.W.; MC CALL, J.J.; RADNER, R. - Optimal Replacement Policy. - Rand Mc Nally. - 1967.
197. KARUSH, W. - A general algorithm for the optimal distribution of effort. - Management Science, Vol 9. nº 1. - Octubre, 1962. Pags. 50-72
198. KAUFMANN; A. - Métodos y Modelos de la Programación Dinámica. CECSA. - México 1966.
199. KLEIN, M. - Inspection - Maintenance - Replacement Schedules under Markovian Deterioration. - Management Science. Vol 9. 1962. Pags. 25-32.
200. KOLESAR, P. - Minimun Cost Replacement Under Markovian Deterioration. - Management Science. - Vol.12, 1966. - Pags. 694-706.
201. Randomized Replacement Rules which maximize the Expected Cycle Length of Equipment Subject to Markovian Deterioration. - Management Science, Vol 13, 1967. Pags. 867-876.

202. MC CALL, J.J. - Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment: A Survey. - Management Science. Vol II, 1965. Pags. 493. 524.
203. MAC QUEEN, J. - A Test for Suboptimal Actions in Markovian Decision Problems. - Operations Research. Vol 15, 1967. Pags. 559-561.
204. RADNER, R.; JORGENSON, D.W. - Opportunistic replacement of a single part in the presence of severed monitored parts. - Management Science. Vol 10, nº 1, 1963. - Pags. 70-97.
205. SAMPEDRO, J.L. Las fuerzas económicas de nuestro tiempo. - Guadarrama. - Madrid, 1967.
206. SHAPIRO, J.F.; WAGNER, H.M. - A Finite Renewal Algorithm for the Knapsack and Turnpike Models. - Operations Research. Vol 15, 1967. Pags. 319-341.
207. SCHUMPETER, J.A. - Capitalismo, Socialismo y Democracia. - Aguilar. - Madrid, 1968.
208. SUAREZ SUAREZ, A. - Los criterios clásicos de determinación de la rentabilidad y selección de inversiones. Crítica y esbozo de un nuevo modelo de programación de inversiones. - Racionalización, Marzo-Abril, 1969. Pags. 73-79.
209. TAYLOR, H.M. - Markovian Sequential Replacement Processes. Annals Mathematical Statistics. Vol 36. 1965. Pags. 1677-1694.
210. THOMPSON, G.L. - Optimal Maintenance Policy and Sale Date of a Machine. - Management Science. Vol 14. 1968. Pags. 543-550
211. TRUELOVE, A.J. Strategic reliability and preventive maintenance. Operations Research, Vol 9, 1961. Pags. 22-29.
212. WOLFE, P.; DANTZIG, G.B. - Linear Programming in a Markov Chain. - Operations Research. Vol 10, 1962. Pags. 702-710.

y también las obras ya citadas: 65. 66. 69. 74. 100. 115. y 142.

CAPITULO VI

213. ARROW, K.D. y otros. - Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. - Stanford University Press. - Standford. - California, 1958.
214. BAKSHI, M.S.; ARORA; S.R. - The Sequencing Problem. - Management Science, Vol 16, nº 4. Diciembre 1969. Pags. B-247-B-263.
215. BARBUT, M. Méthodes récurrentes dans les problèmes de renouvellement de stock. - Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle. Institute de Statistique de l'Université de Paris, nº 2, 1957. Pags. 11-26.
216. La programmation dynamique dans les problèmes de renouvellement de stock en avenir aléatoire. - Revue Française. Recherche Opérationnelle. Vol 1, nº 5. 4º trimestre. 1957. Pags. 209-216.
217. BECKMANN, M.J. - Production smoothing and inventory control. - Operations Research. Vol 9, nº 4. Julio-Agosto, 1961. Pags. 456-467.
218. BHATIH, A.; GARG, A. - Application of dynamic programming to a class of problems in inventory. - Journal of Industrial Engineering. Vol 11, nº 6. Noviembre-Diciembre, 1960. Pags. 509-512.
219. D'EPENOUX, F. - Sur un problème de production et de stockage dans l'aléatoire. - Revue Française de Recherche Opérationnelle. nº 14, 1960. Pags. 3-15.
220. A probabilistic production and inventory problem. Management Science. Vol, nº 1, 1963. Pags. 98-108.
221. DERMAN, C.; LIEBERMAN, G.J. A Markovian Decision Model for a Joint Replacement and Stocking Problem. Management Science. Vol 13, 1967. Pags. 609-617.
222. EPPEN, G.D. - A Dynamic Analysis of a class of Deteriorating Systems. Management Science. Vol 12, 1965. Pags. 223-240.

223. FALKNER, C.H. - Jointly Optimal Deterministic Inventory and Replacement Policies. - Management Science. Vol 16, nº 9, Mayo 1970. Pags. 622-635.
224. GALLIHER, H.P. - Production scheduling en Notes on Operations Research. 1959. Operations Research Center M.I.T. - Pags. 211-230.
225. GHELLINCK, G. - Application de la théorie des graphes: Matrices de Markov et programmes dynamiques. - Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle. Bruxelles Vol 3, nº 1. 1961. Pags. 5-35.
226. HADLEY, G.; WHITIN T.M. - A family of dynamic inventory models. - Management Science. Vol 8, nº 4. Julio 1962. Pags. 458-469.
227. HELD, M.; KARP, R.M. - A dynamic programming approach to sequencing problems. Journal of Society of Industrial Applied Mathematics. nº 10. 1962. Pags. 196-210.
228. HELD, M.; KARP, R.M.; SHARESHIAN, R. - Assembly-line balancing. Dynamic programming with precedence constraints. Operations Research. Vol 11, nº 3, 1963. Pags. 442-459.
229. HOCHSTAEDTER, D. - An Approximation of the Cost Function for Multiechelon Inventory Model. - Management Science. - Vol. 16, nº 11. Julio, 1970. Pags. 716-727
230. JACKSON, J.R. A computing procedure for a line balancing problem. Management Science. nº 2, 1956. Pags. 261-271.
231. JACKSON, D.M.; ZERBE, D.R. - Determination of Standard Sizes to be Manufactured Using Dynamic Programming. - The Journal of Industrial Engineering. - Vol. XIX, nº 8. Agosto 1968. Pags. 401-406.
232. KAPLAN, R.S. - A Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times. - Management Science. Vol 16, nº 7. Marzo, 1970. Pags. 491-507.
233. KARUSH, W. - On a Class of Minimum Cost Problems. - Management Science. - Vol 4. 1958. Pags. 136-153.

234. KLEIN, M. Markovian Decision Models for Reject Allowance Problems. - Management Science. - Vol 12, 1966. Pags. 349-358
235. LEVITAN, R. E. - The Optimun Reject Allowance Problem. - Management Science. - Vol 6, 1960. Pags. 172-186.
236. LIEBERMAN, G. J. - Lifo versus Fifo in Inventory Depletion Management. - Management Science. Vol 5, 1958. Pags. 102-105.
237. MC CALL, J. J. - The Economics of Information and Optimal Stopping Rules. Journal of Business, Vol 38, 1965. Pags. 300-317.
238. MC NAUGHTON, R. - Scheduling with Deadlines and Loss Functions. Management Science. Vol 6, 1959. - Pags. 1-12.
239. MC QUEEN, J.; MILLER, R. G. - Optimal Persistence Policies. - Operations Research. Vol 8, 1960. Pags. 362-380.
240. MARSCHAK, T. A.; YAHAV, J. A. - The Sequential Selection of Approaches to a Task. - Management Science. Vol 12, 1966. Pags. 627-647.
241. MOORE, J. M. - An n Job, one Machine Sequencing Algorithm for Minimizing the number of late Jobs. - Management Science. Vol 14, nº 1. Septiembre 1968. Pags. 102-109.
242. PIERSKALLA, W. P. Optimal Issuing Policies in Inventory Management - I. - Management Science. Vol 13. 1967. Pags. 395-412.
243. Inventory Depletion Management with Stochastic Field Life Functions. - Management Science. Vol 13, 1967. Pags. 877-886.
244. RANDOLPH, P. - An Optimal Stopping Rule. - Operations Research, Vol 15, 1967. Pags. 562-564.
245. ROOT, J. G. - Scheduling with Deadlines and Loss Functions on K Parallel Machines. - Management Science. Vol 11, 1965. Pags. 460-475.

246. SHAPIRO, J. F. - Shortest Route Methods for Finite State Space Deterministic Dynamic Programming Problems. - SIAM Journal of Applied Mathematics. Vol 16. 1968. Pags. 1232-1250.
247. SOBEL, M. J. - Smoothing Start-up and Shut Down Cost in Sequential Production. - Operations Research. Vol 17, nº 1, 1969. Pags. 133-144.
248. STURM, L. B. J. M. - A Simple Optimality Proof of Moore's Sequencing Algorithm. - Management Science. Vol 17. nº 1. Septiembre 1970. Pags. 116-118.
249. TAYLOR, H. M. - Optimal Stopping in a Markov Process. - Annals Mathematical Statistics. Vol 39, 1968. Pags. 1333-1344.
250. THOMAS, J. - Price-Production Decision with Deterministic Demand. Management Science. - Vol 16. nº 11, Julio, 1970. Pags. 747-750.
251. VENTURA, E. - Application of dynamic programming to maximum stock capacity.
252. Application of dynamic programming to the control of stock and to the calculation of a maximum stock capacity. - Operational Research Quarterly, nº 12, Mayo, 1961. Pags. 66-78.
253. VEINOTT, A. F.; WAGNER, H. M. Optimal Capacity Scheduling I. Operations Research. Vol 10. 1962. Pags. 518-532.
254. Optimal Capacity Scheduling II. - Operations Research. Vol 10. 1962. Pags. 533-546.
255. WAGNER, D. E.; SHETTY, C. M. - Solution to a production scheduling problem with fixed costs. - Operational Research Quarterly. Vol 13. nº 1. Marzo 1962. Pags. 87-94.
256. WHITE, L. S. - Markovian Decision Models for the Evaluation of a Large Class of Continuous Sampling Inspection Plans. Management Science. Vol 36, 1965. Pags. 1408-1420

257. WHITE, L.S. - The Analysis of a Simple Class of Multistage Inspection plans. - Management Science. Vol 12. 1966. Pags. 685-693.
258. Bayes' Markovian Decision Models for a Multiperiod Reject Allowance Problem. - Operations Research. - Vol. 15, 1967. Pags. 857-865.
259. Shortest Route Models for the Allocation of Inspection Effort on a Production Line. - Management Science. Vol 15. 1969. Pags. 249-259.

y también las obras ya citadas 65. 66. 69. 90. 96. 105. 107. 124. 125. 136. 149.

CAPITULO VII

260. BADIER, P.; NAHON G.; ROY, B. - Stockage et exportation des céréales françaises (Exemple d'application de la programmation dynamique). METRA Vol 2, nº 1, 1963. Pags. 49-78.
261. BAUMOL, W.J. - WOLFE, P. - A Warehouse-Location Problem. Operations Research. - Marzo-Abril, 1958. Pags. 252-263.
262. BELLMAN, R. - Notes on the theory of dynamic programming: transportation models. - Management Science. Vol 4. nº 2, 1958. Pags. 191-95.
263. Dynamic Programming treatment of the travelling salesman problem. - Journal Association Computing Machinery. Vol 9. nº 1, Enero 1962. Pags. 61-63.
264. BEJAR, J. - Aplicación de la Investigación Operativa a los Estudios de Mercados. Reuniones Nacionales de Investigación Operativa. Madrid, Diciembre, 1962. Pag. 449. y sigs.

265. DANTZIG, G. B. - Applications of the Simplex method to a transportation problem. - Incluido en Activity Analysis of Production and Allocation, dirigida por T.C. Doopmans. - John Wiley. - New York, 1951. Cap. 23
266. FABIAN, T.; FISHER, J.L. SASIENI, M.W.; YARDENI, A. - Purchasing raw material on a fluctuating market. - Operations Research. Vol. 7 nº 1, 1959. Pags. 107-122.
267. FLOOD, M.M. - On the Hitchcock distribution problem. - Pacific Journal of Mathematics. Vol 3. 1953. Pags. 369-396.
268. FORD, L.; FULKERSON, D.R. - Maximal flow through a network. - Canadian Journal of Mathematics. Vol 8. 1956. Pags. 399-404.
269. HITCHCOCK, F.L. - The distribution of a product from several sources to numerous localities. - Journal of Mathematics and Physics. Vol 20. 1941. Pags. 224-230.
270. KANTAROVICH, L.V. - Mathematical methods of organizing and planning production. - Management Science. Vol 6. 1960. Pags. 366-422.
271. KUENA, A.A.; HAMBURGER; M.J. - A Heuristic Program for Locating Warehouses. - Management Science. Vol 9. Julio 1963. Pags. 643-666.
272. MC GUIRE, C.B. - Some Team Models of a Sales Organization. - Management Science. Vol 7. 1961. Pags. 101-130.
273. MARKOWITZ; H. Portfolio Selection. - Cowles Commission Monograph nº 16. - John Wiley. - New York, 1959.
274. MEYER, G.F. - NEWETT, R.J. - Dynamic Programming for Feedlot Optimization. - Management Science. Vol 16, nº 6. Febrero 1970. Pags. 410-426.
275. MONTALBAN, F. Aplicaciones al Marketing de la Investigación Operativa. - Alta Dirección. Vol 5. nº 1, 1969. Pags. 103-109.

276. MOSSMAN, F.H.; MORTON, N. - Logistics of Distribution Systems. Allyn and Bacon, Inc.- Boston. 1965.
277. REVELL, C.; MARKS, D.; LIEBMAN, J.C. - An Analysis of Private and Public Sector Location Models. - Management Science. Vol 16, nº 11, Julio 1970. Pags. 692-707
278. SENGUPTA, S.S. - Operation Research in Sellers' Competition. - John Wiley and Sons. - New York, 1968.
279. VERGIN, R.C.; ROGERS, J.D. - An Algorithm and Computational Procedure for Locating Economic facilities. - Management Science. Vol 13. Febrero 1967. Pags. 240-254.

y también las obras ya citadas: 65. 66. 69. 117. 129. 130. 131. 143. 151. y 153.

CAPITULO VIII

280. ARCHIBALD, R.D.; VILLORIA, R.L. - Network based management systems (PERT/CPM). - John Wiley. - New York, 1967
281. BATTERSBY, A. - Planificación y programación de proyectos complejos. - Ariel. - Barcelona, 1970.
282. BELLMAN, R.; KALABA, R. On k^{th} best policies. - Journal of Society of Industrial Applied Mathematics. Vol 8. nº 4 Diciembre, 1960. Pags. 582-588.
283. CAÑIBANO CALVO, L. - Técnicas de Planificación y Control: PERT y CPM. - Colegio de Titulares Mercantiles. - Madrid, 1970.
284. CLARK, C.E. The Optimun Allocation of Resources Among Activities of a Network. - Journal of Industrial Engineering. Vol 12, Enero-Febrero, 1961. Pags. 11-17
285. The Greatest of a Finite Set of Random Variables. - Operations Research. Vol 9, 1961.

286. CHARNES, A.; COOPER, W.W. - A Network interpretation and a Directed Subdual Algorithm for Critical Path Scheduling. - The Journal of Industrial Engineering. - Julio-Agosto, 1962. Pags. 213-219.
287. ESPINOSA, M. - La investigación de la investigación científica. - Reuniones Nacionales de Investigación Operativa. - Madrid, Diciembre, 1962. Pag. 9 y sigs.
288. FIGUERA ANDU, J. - PERT, CPM, ROY. -S.A.E. T.A. - Madrid, 1969.
289. FORD, L.R. - Network flow theory. - Rand Corporation Paper, 1956.
290. FULKERSON, D. - A Network Flow Computation for Project Cost Curves. - Management Science. Vol 7. Enero 1961. Pags. 167-178.
291. KAUFMANN, A.; DESBAZEILLE, G. - Método del Camino Crítico. - Sagitario. - Barcelona, 1965.
292. KELLEY, J.E. - Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis. - Operations Research. Vol 9. nº 3. -Mayo-Junio, 1961. Pags. 296-321
293. LOCKYER, K.G. - Critical Path Analysis. - Pitman. - Londres, 1966.
294. MALCOLM, J.H. y otros. Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, - Operations Research. Vol 7. nº 5. Septiembre-Octubre, 1959. - Pags. 646-670.
295. MILLER, R.W. - Aplicación del método PERT al control de Programación, Costes y Beneficios. - Ediciones del Castillo. Madrid, 1967.
296. POCOCK, J.W. - PERT as an Analytical Aid for Program Planning Its Payoffs and Problems. - Operation Research. Vol 10 nº 6. Noviembre-Diciembre, 1962. Pags. 893-904.
297. WILLIAMS, D.J. - A Study of a Decision Model of Research and Development Project. - Operational Research Quarterly. - nº 3. Septiembre, 1969. Pags. 361 y sigs.

y también las obras ya citadas: 65. 66. 69. 113. 132. 148. 154.

CAPITULO IX Y X

298. ASHBY, W. R. - Introduction to Cybernetics. - John Wiley. - New York, 1957.
299. BEER, S. - Cybernetics and Management. - John Wiley. - New York. 1959.
300. BELLMAN, R.; ZADEH, L. A. - Decision-Making in a Fuzzy Environment. - Management Science. Vol 17, nº 4. Diciembre, 1970. Pags. B-141-B 164.
301. BIERMAN, H. Jr.; BONINI, C. P. - Quantitative Analysis for Business Decisions. - R. D. Irwin. - Homewood, Illinois, 1963.
302. BIERMAN, H. Jr.; HAUSMAN, W. H. - The Credit Granting Decisión. Management Science. Vol 16. nº 8. Abril 1970. Pags. 519-532.
303. BRYSON, A. E.; HO, Y. C. - Applied Optimal Control. - Blaisdell Co. Waltham, Massachusetts, 1969.
304. COHEN, K. J.; HAMMER, F. S. - Analytic Methods in Banking. - R. D. Irwin. - Homewood, Illinois, 1966.
305. COUFFIGNAL, L. - Les Machines à penser. De Minuit. - París, 1952.
306. La Cibernética, - A. Redondo. - Barcelona, 1970.
307. CYERT, R. M.; THOMPSON, G. L. - Selecting a Portfolio of Credit Risks by Markov Chains. - Journal of Business, Enero 1968. Pags. 39-46.
308. DERMAN, C. - Markovian Sequential Control Processes. - Denumerable State Space. - Journal of Mathematical Analysis and Applications. - Vol 10. 1965. Pags. 295-302.

309. DESCAMPS, R. - Pour une Dynamique de la Gestion. - Revue Française de Recherche Opérationnelle. - 3^{er} trimestre. 1963, nº 28. Pags. 215-236.
310. GREENBER, H. J. - Dynamic Programming with Linear Uncertainty. - Operations Research. Vol 16, 1968. Pags. 675-678.
311. KAO, R. C. - Note on Program Uncertainty in the Dynamic Programming Model. - Econometrica. Vol 30, 1962. Pags. 336-342.
312. LANGE, O. - Introducción a la Economía Cibernética. - Siglo XXI de España Editores S.A. - Madrid, 1969.
313. METAYER, G. - Cybernetique et Organizations: Nouvelle Technologie du Management. - Les Editions d' Organisation. - París, 1970.
314. MORGAN JONES, J. A Stochastic Model for Adaptive Behavior in a Dynamic Situation. - Management Science. - Vol 17, nº 7. Marzo 1971. Pags. 484-497.
315. WIENER, N. - Cibernética. Guadiana. Madrid, 1971.
316. WOLFF, J. P. - Etude d'un Système Cybernetique et application a un Système Economique. - Gestion. - Abril, 1967. - Pags. 236-243.
317. YING, C. C. - Learning by Doing-An adaptive Approach to Multi-period Decisions. - Operations Research. Vol 15. 1967. Pags. 797, 812.

y también las obras ya citadas: 65. 66. 69. 96.