Tema 7. Variable aleatoria bidimensional continua

Recordando que una variable aleatoria bidimensional es una función medible para el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Se define la función $(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ como una variable aleatoria bidimensional si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica que:

$$B_{XY} = \{w \in \Omega:\ X(w_1) \leq x,\ Y(w_2) \leq y\} = X^{-1}((-\infty, x]), Y^{-1}((-\infty, y]) \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es *continua* cuando toma valores en todo el plano real ($\mathbb{R}^2$) o en un subconjunto (no numerable) del mismo.

7.1. Concepto y función de densidad

Una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es absolutamente continua cuando existe una función $f_{X,Y}(x, y)$, tal que la función de distribución continua de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) se puede escribir como:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

a $f_{X,Y}(x, y)$ se le denomina la *función de densidad conjunta* de la variable aleatoria bidimensional (X, Y). Esta función debe satisfacer las siguientes propiedades:

- $f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$

Ejemplo 7.1

Dado la variable aleatoria bidimensional (X, Y) absolutamente continua con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k & si\ 0 < y < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$.

Se pide: Calcular el valor de k para que sea función de densidad.

$$\int_0^1 \int_0^x k\, dy dx = \int_0^1 k\left(\int_0^x dy\right) dx = k \int_0^1 [y]_0^x dx = k \int_0^1 x dx = k \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2} = 1$$

$$\Rightarrow\ k = 2$$

https://dx.doi.org/10.5209/docm.004.07
Jugando con el azar: fundamentos para la estadística aplicada y la ciencia de datos. María Ángeles Medina Sánchez, Ziwei Shu, Rosario Susi García y Rosa Espínola Vílchez. © Ediciones Complutense, 2025.

7.2. Distribuciones marginales continuas

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua, entonces tanto la variable X como la variable Y, serán variables aleatorias unidimensionales absolutamente continuas. La *función de densidad marginal* de cada una de las variables aleatorias que componen la variable aleatoria (X, Y) se expresa como:

- Función de densidad marginal de la variable aleatoria X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$

- Función de densidad marginal de la variable aleatoria Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx$$

Una vez se obtienen las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X e Y, se podrán calcular sus momentos de la siguiente manera:

- Momentos respecto al origen:

$$\alpha_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s\, f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

1) La esperanza matemática de la variable aleatoria X se calcula cuando $r = 1$ y $s = 0$, $E[X] = \alpha_{10} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^1 y^0\, f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx$
2) La esperanza matemática de la variable aleatoria Y se calcula cuando $r = 0$ y $s = 1$, $E[Y] = \alpha_{01} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^0 y^1\, f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)dy$
3) Cuando $r = 1$ y $s = 1$, $E[XY] = \alpha_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^1 y^1\, f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y)dxdy$

- Momentos respecto a la media:

$$\mu_{rs} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s\, f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

1) La varianza de la variable aleatoria X se calcula cuando $r = 2$ y $s = 0$,
$V(X) = \mu_{20} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2(y-\mu_Y)^0 f_{X,Y}(x,y)dxdy$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy$$
$$= E[X^2]-(E[X])^2 = \alpha_{20}-{\alpha_{10}}^2$$

2) La varianza de la variable aleatoria Y se calcula cuando $r = 0$ y $s = 2$,
$V(Y) = \mu_{02} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^0(y-\mu_Y)^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy =$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_Y)^2 f_{X,Y}(x,y)dxdy$$
$$= E[Y^2]-(E[Y])^2 = \alpha_{02}-{\alpha_{01}}^2$$

3) Cuando $r = 1$ y $s = 1$, se calcula la covarianza $\mu_{11} = S(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10}\cdot\alpha_{01}$. La covarianza mide el grado de *dependencia lineal* entre las variables aleatorias X e Y. Si $S(X,Y) > 0$, indica que existe una relación directa entre X e Y. Si $S(X,Y) < 0$, indica que existe una relación inversa entre X e Y. Si $S(X,Y) = 0$, indica que no hay relación lineal entre X e Y.

Ejemplo 7.2

Considere la variable aleatoria bidimensional continua(X,Y) del Ejemplo 7.1 y calcule las funciones de densidad marginales, así como la esperanza matemática de cada variable.

Sabiendo que $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & si\ 0<y<x<1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$, entonces:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^x 2\,dy = [2y]_0^x = 2x$$
$$\Rightarrow\ f_X(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0<x<1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)dx = \int_0^1 x\cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_y^1 2\,dx = [2x]_y^1 = 2-2y$$
$$\Rightarrow\ f_Y(y) = \begin{cases} 2-2y & si\ 0<y<1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y) dy = \int_0^1 y \cdot (2 - 2y) dy = 2 \int_0^1 (y - y^2)\, dy =$
$2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

7.3. Distribuciones condicionadas continuas

En la sección 1.5 se define la probabilidad del suceso B condicionada al suceso A de la siguiente forma:

$$P(B\ /\ A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siempre que } P(A) \neq 0$$

Este concepto puede extenderse al caso de variables aleatorias bidimensionales. En el caso de las variables aleatorias bidimensionales discretas, sea una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua (X, Y) con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ y funciones de densidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Entonces, la función de densidad de la variable X sabiendo que la variable Y ha tomado el valor $Y = y_0$ viene dada por la siguiente expresión:

$$f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

Similarmente, la función de densidad de la variable Y, sabiendo que la variable X ha tomado el valor $X = x_0$, viene dada por la siguiente expresión:

$$f_{Y|X=x_0}(y) = \frac{f_{X,Y}(x_0, y)}{f_X(x_0)}$$

Ejemplo 7.3

Considere la variable aleatoria bidimensional continua(X, Y) *del Ejemplo 7.1 y calcule las funciones de densidad condicionadas.*

Sabiendo que $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & si\ 0 < y < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$, $f_X(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$,

y $f_Y(y) = \begin{cases} 2 - 2y & si\ 0 < y < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$ entonces:

$$f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{2}{2 - 2y_0} = \frac{1}{1 - y_0} \qquad si\ \ 0 < y_0 < 1, y_0 < x < 1$$

$$f_{Y|X=x_0}(y) = \frac{f_{X,Y}(x_0, y)}{f_X(x_0)} = \frac{2}{2x_0} = \frac{1}{x_0} \qquad si\ \ 0 < x_0 < 1, 0 < y < x_0$$

7.4. Independencia de variables aleatorias continuas

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ y funciones de densidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, entonces X e Y son *independientes* si y solo si:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 7.4

Considere la variable aleatoria bidimensional continua (X, Y) del Ejemplo 7.1 y verifique si las variables aleatorias X e Y son independientes.

Sabiendo que las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X e Y son:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

y,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 - 2y & si\ 0 < y < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Entonces,

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) = 2x \cdot (2 - 2y) = 4x - 4xy \quad si\ 0 < y < x < 1$$

Esto implica que las variables aleatorias X e Y no son independientes.

7.5. Transformación de variables aleatorias continuas

En ocasiones, dada una variable aleatoria bidimensional (X, Y), puede interesar conocer la función de densidad o función de probabilidad de una función de la variable aleatoria bidimensional (X, Y). Por ejemplo, si un individuo quiere saber la cuota mensual que tiene que pagar por una hipoteca Z se tiene en cuenta la cantidad por la que solicita dicha hipoteca X y el número de años que va a pagar la hipoteca Y. En este caso, la variable aleatoria de interés Z es función de las variables X e Y, es decir $Z = h(X, Y)$. Por tanto, el objetivo en este caso se centra en la función de densidad o función de probabilidad de la variable aleatoria Z.

A continuación, se presentan algunos resultados que permiten describir una variable en función de (X, Y).

Teorema jacobiano

Sean (X_1, X_2) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ que es estrictamente positiva en cierto recinto S. Sea $(Y_1, Y_2) = g(X_1, X_2)$ una transformación *continua y biyectiva* de dicha variable aleatoria bidimensional (X_1, X_2) tal que $g(S) = T$. Por tanto, T es el recinto en el que la función de densidad de (Y_1, Y_2) es estrictamente positiva. Entonces:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}\big(x_1(y_1, y_2),\ x_2(y_1, y_2)\big)\ |J|$$

siendo J el jacobiano de la transformación, es decir,

$$J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

Esta función de densidad $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ alcanza el valor obtenido en la expresión $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}\big(x_1(y_1, y_2),\ x_2(y_1, y_2)\big)\ |J|$ para $(y_1, y_2) \in T$, siendo nula fuera del recinto T.
Se recuerda que $x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)$ es la transformación inversa de g, es decir, se obtiene despejando las X en función de las Y, esto es:

$$f\big(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)\big) = f\big(g^{-1}(y_1, y_2)\big)$$

El teorema anterior se aplica en el caso de variables bidimensionales *absolutamente continuas*. Además, la transformación debe ser *continua y biyectiva*.

Ejemplo 7.5

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con función de densidad uniforme en el cuadrante unitario $[0,1] \times [0,1]$. Calcular la función de densidad de la variable (U, V) siendo $U = X + Y$ y $V = X - Y$.

La transformación es biyectiva, porque fijados x e y, u y v quedan definidos unívocamente y recíprocamente fijados u y v, $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$ quedan unívocamente determinados. Además, sabemos que:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces es una matriz invertible.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se puede concluir que es aplicable el *teorema jacobiano*.

Transformación directa: $u = x + y;\ \ v = x - y$.
Transformación inversa: $x = \frac{u+v}{2};\ \ y = \frac{u-v}{2}$.
El dominio de la variable (U, V) es el que se muestra en la Figura 3.1:

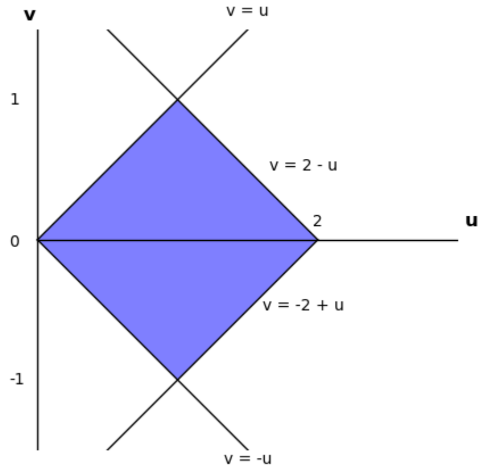


Figura 3.1. Dominio de la variable $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$.

El dominio para las variables X e Y son:

$$\frac{u+v}{2} \in [0,1] \rightarrow 0 \leq u + v \leq 2$$
$$\frac{u-v}{2} \in [0,1] \rightarrow 0 \leq u - v \leq 2$$

$$f_{u,v}(u, v) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_{u,v}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2} & en\ el\ recinto\ coloreado\ de\ azul \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con función de densidad $f_{X,Y}(x, y)$ y se quiere calcular la función de densidad de la variable aleatoria $U = X + Y$. En este caso, el teorema del jacobiano *no es directamente aplicable*, dado que la transformación *no tiene la misma dimensión*, es decir, partimos de una variable aleatoria bidimensional y la transformación es unidimensional.

Lo que se hace en este tipo de situaciones es elegir una variable auxiliar lo más sencilla posible, como puede ser $V = X$, a continuación, se aplica el teorema del jacobiano a la variable aleatoria bidimensional (U, V) y para terminar se calcula la función de densidad marginal de U.

Se tiene: $\begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases}$. La transformación inversa sería $\begin{cases} X = V \\ Y = U - V \end{cases}$

$$f_{u,v}(u, v) = f_{x,y}(v, u - v) \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| = f_{x,y}(v, u - v) \cdot |1|$$

$$f_u(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{x,y}\,(v, u - v)dv$$

Ejemplo 7.6

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, cada una de ellas con distribución exponencial de parámetro uno. Calcular la función de densidad de la variable aleatoria $X + Y$.

Las funciones de densidad de las variables X e Y son:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si} \quad y > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Como X e Y son dos variables aleatorias independientes, entonces, la función de densidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional es:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & si\ x > 0,\ y > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La transformación a aplicar es $\begin{cases} U = X + Y \\ V = X \end{cases}$, siendo $x > 0$ e $y > 0$. Entonces, $u > 0;\ v > 0$ y $u > v$.

Aplicando el *teorema del jacobiano* se tiene que:

$$f_{u,v}(u,v) = f_{x,y}(v, u-v) \cdot \left\| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right\| = f_{x,y}(v, u-v) \cdot |1| = e^{-u} \cdot 1 = e^{-u}$$

$$f_{u,v}(u,v) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si} \quad u > 0;\ v > 0\ \ y\ \ u > v \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Lo que se quiere obtener es la función de densidad de la variable aleatoria $U = X + Y$, por lo que se calcula la función de densidad marginal de U.

$$f_u(u) = \int_0^u e^{-u}\, dv = [v \cdot e^{-u}]_0^u = u \cdot e^{-u}$$

$$f_u(u) = \begin{cases} u \cdot e^{-u} & \text{si} \quad u > 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

7.6. Ejercicios

Ejercicios resueltos

Ejercicio R. 7.1

Dado la variable aleatoria bidimensional (X, Y) absolutamente continua con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kx^2y & \text{si} \quad x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$. Se pide:

1. Calcular el valor de la constante k.
2. Calcular $P(X \geq Y)$.
3. Calcular las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X e Y.

Solución:

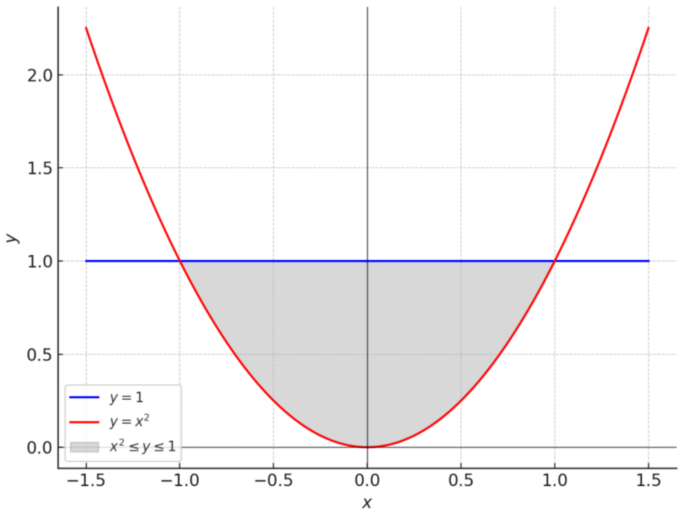
1. Para el cálculo de la constante k se procede del siguiente modo:

   sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$, entonces:

   $$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(kx^2y)\,dydx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{kx^2y^2}{2}\right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{kx^2}{2} - \frac{kx^6}{2}\right) dx = k\left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^7}{14}\right]_{-1}^{1}$$

   $$=k\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{14} + \frac{1}{6} - \frac{1}{14}\right) = 1$$

   $$\Rightarrow k\frac{4}{21} = 1 \Rightarrow\ k = \frac{21}{4}$$



2. $P(X \geq Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(\frac{21}{4}x^2y\right) dydx = \int_0^1 \left[\frac{21}{4}\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \frac{21}{4}\left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2}\right] dx = \frac{21}{4}\left[\frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{14}\right]_0^1 = \frac{21}{140}$

3. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2ydy = \left[\frac{21}{4}x^2\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1} = \frac{21}{4}\frac{x^2}{2}(1-x^4)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{21}{4}\dfrac{x^2}{2}(1-x^4) & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4}x^2ydx = \left[\frac{21}{4}y\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$$

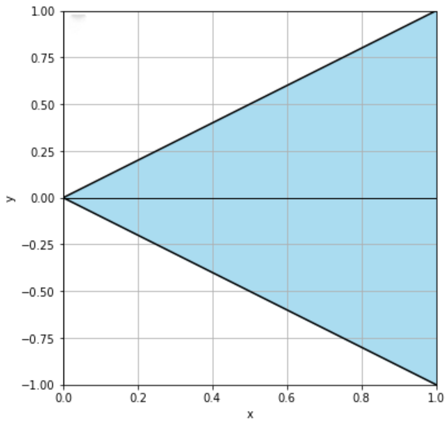
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & \text{si} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Ejercicio R. 7.2

Dado la variable aleatoria bidimensional (X, Y) absolutamente continua con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \ |y| < x;\ \ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$. Se pide:

1. Calcular las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X e Y.
2. Calcular las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias X e Y.
3. Calcular las probabilidades $P\left(X < \frac{1}{2}, Y < 0\right)$ y $P\left(X > \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right)$.

Solución:



1. Sabiendo que $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & si \;\; |y| < x; \;\; 0 < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$, entonces:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\,(x,y)\,dy = \int_{-x}^{x} 1\,dy = [y]_{-x}^{x} = 2x$$
$$\Rightarrow \; f_X(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\,(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{-y}^{1} 1\,dx = [x]_{-y}^{1} = 1 + y, & si \;\; -1 < y < 0 \\ \int_{y}^{1} 1\,dx = [x]_{y}^{1} = 1 - y, & si\ 0 < y < 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \; f_Y(y) = \begin{cases} 1 + y & -1 < y < 0 \\ 1 - y & 0 < y < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

2. $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)dy = \int_{-1}^{0} y \cdot (1+y)dy + \int_0^1 y \cdot (1-y)dy =$$
$$= \int_{-1}^{0} (y + y^2)\,dy + \int_0^1 (y - y^2)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 =$$
$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

3. $P\left(X < \frac{1}{2}, Y < 0\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-x}^{0} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-x}^{0} 1\,dy\right) dx =$
$\int_0^{\frac{1}{2}} [y]_{-x}^{0} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0}{2} = \frac{1}{8}$

$P\left(X > \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dy\right) dx =$
$\int_{\frac{1}{2}}^{1} [y]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1dx = [x]_{\frac{1}{2}}^{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Ejercicio R. 7.3

Sea la variable aleatoria bidimensional absolutamente continua (X, Y) con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+2}{4} & si \;\; 0 < x < 1, -1 < y < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$.

Se pide:

1. Calcular las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X e Y.
2. Calcular las funciones de densidad condicionadas de las variables aleatorias X e Y.
3. Se considera la transformación $Z = X - Y$ y $W = X + 2Y$, calcular la función de densidad de la variable (Z, W).

Solución:

1. Sabiendo que $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+2}{4} & si\ \ 0 < x < 1, -1 < y < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$, entonces:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_{-1}^{1} \frac{xy+2}{4} dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{xy}{4} + \frac{1}{2}\right) dy = \frac{x}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}[y]_{-1}^{1} = 1$

$\Rightarrow\ f_X(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_{0}^{1} \frac{xy+2}{4} dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{xy}{4} + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{y}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} + \frac{1}{2}[x]_{0}^{1} = \frac{y+4}{8}$

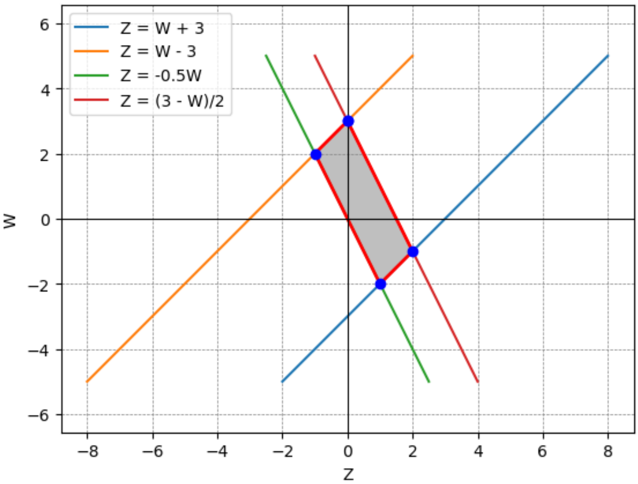
$\Rightarrow\ f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+4}{8} & si\ -1 < y < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

2. Las funciones de densidad condicionadas de las variables aleatorias X e Y se calculan como:

$$f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{\frac{xy_0+2}{4}}{\frac{y_0+4}{8}} = \frac{2xy_0+4}{y_0+4} \qquad \forall\ -1 < y_0 < 1, 0 < x < 1$$

$$f_{Y|X=x_0}(y) = \frac{f_{X,Y}(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{\frac{x_0y+2}{4}}{1} = \frac{x_0y+2}{4} \qquad \forall\ 0 < x_0 < 1, -1 < y < 1$$

3. La transformación $\begin{cases} Z = X - Y \\ W = X + 2Y \end{cases} \mapsto \begin{cases} X = \frac{2Z+W}{3} \\ Y = \frac{-Z+W}{3} \end{cases}$



$$J = \frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-(-1) = 3 \neq 0$$

Entonces, existe la función de densidad $g_{Z,W}(z,w)$.

$$J_1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Transformación directa: $\begin{cases} Z = X - Y \\ W = X + 2Y \end{cases}$

Transformación inversa: $\begin{cases} X = \frac{2Z+W}{3} \\ Y = \frac{-Z+W}{3} \end{cases}$

El dominio de las variables es:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 & \longmapsto & 0 < 2z + w < 3 \\ -1 < y < 1 & \longmapsto & -3 < -z + w < 3 \end{cases}$$

$$g_{Z,W}(z,w) = f_{X_1,X_2}\left(\frac{2z+w}{3}, \frac{-z+w}{3}\right) |J_1| = \frac{\left(\frac{2z+w}{3}\right)\left(\frac{-z+w}{3}\right)}{4}\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{(2z+w)(-z+w)}{108}$$

$$\Rightarrow g_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} \frac{(2z+w)(-z+w)}{108} & si \quad 0 < 2z+w < 3, -3 < -z+w < 3 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio P. 7.1

Sea la variable aleatoria bidimensional absolutamente continua (X, Y) con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx^2 & \text{si} \quad 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$. Se pide:

1. Calcular el valor de c y las funciones de densidad marginales de las variables X e Y.
2. Verificar si las variables aleatorias X e Y son independientes.
3. Calcular la esperanza matemática de X.
4. Calcular la varianza de Y.

Ejercicio P. 7.2

Las calificaciones en Estadísticas (X) y las calificaciones en Inglés (Y) de un alumno de primer año del grado están representadas por la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(4x + 3y) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 10;\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Se pide:

1. Calcular la proporción de alumnos que obtienen una calificación superior a 7 en Estadísticas.
2. Calcular la probabilidad de que un alumno obtenga una calificación superior a 7 en Estadísticas, dado que ha obtenido un 3 en Inglés.
3. Calcular la probabilidad de que un alumno obtenga una calificación superior a 7 en Inglés, dado que ha obtenido un 3 en Estadísticas.

Ejercicio P. 7.3

Sea la variable aleatoria bidimensional absolutamente continua (X, Y) con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x + 2y & si\ \ 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$. Se pide:

1. Calcular las funciones de densidad marginales de las variables aleatorias X e Y.
2. Calcular las funciones de densidad condicionadas de las variables aleatorias X e Y.
3. Calcular la función de densidad de la variable $Z = X + Y$.

Ejercicio P. 7.4

El volumen de una caja de zapatos es una variable cuya función de densidad es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{k}xy & si\ 0 < x < y \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Se pide:

1. Calcular el valor de k.
2. Calcular $P(Y > \frac{1}{2})$.
3. Sabiendo que *X*=0.5, calcular la probabilidad de que Y sea menor que 1.

Ejercicio P. 7.5

Sea la variable aleatoria bidimensional absolutamente continua (X, Y) con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ky & si\ (x,y) > (0,0)\ ;\ 2x + y \leq 6 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$. Se pide:

1. Calcular el valor de k.
2. Calcular $P(X > 1)$.
3. Sabiendo que *Y*=1, calcular la probabilidad de que *X* sea mayor que 0.5.

Ejercicio P. 7.6

Sabiendo que la función de densidad conjunta es: $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{k}(3x^2 + y) & si\ |y| < \mathrm{x} \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$. Se pide:

1. Calcular el valor de k.
2. Sabiendo que *X*=1, calcular la probabilidad de que *Y* sea menor que 0.5.
3. Sea *Z*=*X*+*Y*, calcular la función de densidad de *Z*.

Ejercicio P. 7.7

Se supone que el peso de una hogaza de pan en media es 500gr. Sin embargo, el peso real en cada hogaza es una variable aleatoria *X* que se distribuye como una U(450, 550) suponiendo que el peso de las hogazas son independientes. Para dos hogazas (*X*, *Y*) elegidas aleatoriamente, calcular:

1. Si el peso de una de ellas es 500gr, calcular la esperanza del peso de la otra hogaza.

2. Probabilidad de que ambas hogazas tengan un peso menor de 480gr.
3. Si realizamos el cambio de variable, *Z*=Peso total de las dos hogazas y *U*= Diferencia de peso, calcular la $P(Z<900)$ y la $P(U>50)$.

Ejercicio P. 7.8

Sea (*X*, *Y*) una variable aleatoria bidimensional. Si la función de densidad de *X* es $f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & en\, el\, resto \end{cases}$, y la función de densidad de *Y* dado $X = x$,

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} 2y/x^2 & si \quad 0 < y < x \\ 0 & en\, el\, resto \end{cases}$$

Se pide:

1. Obtener la función de densidad de (*X*, *Y*).
2. Calcular la probabilidad de que *Y* sea menor que $\frac{1}{4}$.
3. Sabiendo que Y=0.6, calcular la probabilidad de que *X* sea mayor que 0.2.
4. Para $X = 0.5$, calcular la esperanza de *Y*.

Ejercicio P. 7.9

Sean *X* e *Y* las proporciones semanales de bebidas sin alcohol sobre el total de consumiciones en dos locales habituales en las noches de una cierta ciudad costera. La función de densidad conjunta de estas variables es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx \cdot (x+y) & si \;\; 0 < x < 1, \;\; 0 < y < 1 \\ 0 & en\, otro\, caso \end{cases}$$

Se pide:

1. Determínese el valor de *k*.
2. Sea U=X/Y y V=X. Calcular la función de densidad de (*Z*, *U*).

Ejercicio P. 7.10

Considera un cuadrado con vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1). Se selecciona un punto aleatorio (*X*, *Y*) dentro del cuadrado. Se pide:

1. Determinar la función de densidad de probabilidad conjunta de *X* e *Y*.
2. Calcular la probabilidad de que *X* sea mayor que *Y*.
3. Calcular la probabilidad de que $X + Y$ sea menor que 1.

7.7. Evaluación

Todos los estudiantes del Grado en Estadística Aplicada y del Grado en Ciencia de los Datos Aplicada de la UCM, matriculados en la asignatura de Azar y Probabilidad, tienen acceso al Campus Virtual para responder una serie de preguntas seleccionadas aleatoriamente del banco de preguntas, con el fin de obtener la calificación de la evaluación continua.

Este manual está disponible en el repositorio de la UCM, por lo que se ha dispuesto una autoevaluación para cualquier persona interesada en la asignatura, utilizando el mismo banco de preguntas del Campus Virtual, accesible en Google Forms a través del siguiente enlace: https://forms.gle/d5yweyTCeeVvkVgS8.

Bibliografía

Hernández, J. J. C. (2006). Conceptos Básicos de Estadística para Ciencias Sociales. Delta Publicaciones.

Montero Lorenzo, J. M. (2007). *Estadística descriptiva*. Alfa Centauro.

Susi García, R., & Espínola Vílchez, R. (2012). *Azar y Probabilidad*. Cersa.

Wackerly, D. D., Wackerly, D. D., III, W. M., & Scheaffer, R. L. (2009). *Estadística Matemática Con Aplicaciones*. Cengage Learning.