

ANÁLISIS FRACTAL DE LA PRECIPITACIÓN EN ESPAÑA



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

TRABAJO DE FIN DE GRADO

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
GRADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Curso 2020/2021

Sergio Escudero Medina

Tutor: Antonio López Montes

Madrid, 20 de febrero de 2021

Resumen

El análisis fractal es una herramienta compleja y útil para describir y comprender la naturaleza del comportamiento de una variable, permitiendo distinguirla y clasificarla respecto a conductas aleatorias, así como identificar los comportamientos más destacables que la caractericen.

El objetivo principal de este trabajo consiste en el estudio fractal de la precipitación en España. Con este fin, se desarrollan conceptos teóricos que permiten comprender las características más importantes de los objetos fractales, así como la conexión de estos con el exponente de Hurst, lo que deriva en el nombre del estudio, el análisis fractal. Se introduce además el concepto de multifractalidad, que junto al método MFDFA es capaz de identificar conductas alejadas de una estructura fractal pura, es decir, de propiedades exactamente autosimilares.

El estudio realizado permite determinar características en el comportamiento de la precipitación en el país, e identificar la función y finalidad de las herramientas del análisis fractal para esta variable.

Palabras clave

Análisis fractal, autosimilaridad, exponente de Hurst, multifractalidad, precipitación.

Abstract

Fractal analysis is a complex and useful tool to describe and understand the nature of the behavior of a variable, allowing it to be distinguished and classified with respect to random behaviors, as well as to identify the most remarkable behaviors that characterize it.

The main objective of this work consists of fractal study of precipitation in Spain. For this purpose, theoretical concepts are developed that allow to understand the most important characteristics of fractal objects, as well as their connection with Hurst exponent, which leads to the name of the study, fractal analysis. The concept of multifractality is also introduced, which together with the MFDFA method is able to identify behaviors that are far from a pure fractal structure, that is to say, far from exactly self-similar properties.

The study carried out makes it possible to determine characteristics in the precipitation behavior in the country, and to identify the function and the purpose of the fractal analysis tools for this variable.

Keywords

Fractal analysis, self-similarity, Hurst exponent, multifractality, precipitation.

Índice

Resumen.....	1
Abstract.....	2
Capítulo 0. Introducción	4
Capítulo 1. Series temporales	5
1.1. Procesos estocásticos	6
1.1.1. Estacionariedad	6
1.1.2. Autosimilaridad	8
1.1.3. Camino aleatorio y procesos de Lévy	9
1.1.4. Movimiento browniano y procesos de Wiener	11
1.1.5. Movimiento browniano fraccionario	13
Capítulo 2. Fractales	15
2.1. Estructura autosimilar.....	16
2.2. Dimensión fractal	17
2.2.1. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch.....	17
2.2.2. Dimensión de Minkowski-Bouligand o box-counting.....	18
2.3. Multifractales	20
Capítulo 3. Exponente de Hurst	22
3.1. Análisis R/S	24
3.2. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis.....	25
Capítulo 4. Estudio fractal de la precipitación	29
4.1. Base de datos	29
4.2. Metodología y análisis previo	29
4.2.1. Análisis monofractal	29
4.2.2. Análisis multifractal	35
4.3. Resultados.....	38
4.3.1. Análisis monofractal	38
4.3.2. Análisis multifractal	41
4.4. Conclusiones.....	44
Bibliografía	45
Anexo: Análisis R/S en <i>Matlab</i>.....	48

Capítulo 0. Introducción

La precipitación es una variable atmosférica que goza de una gran variabilidad. Con el análisis fractal se pretende comprender su evolución, así como encontrar patrones ocultos escondidos tras conductas aparentemente aleatorias que permitan explicar la naturaleza del comportamiento de este fenómeno y clasificarla dentro del estudio.

A continuación se detallan los diferentes capítulos:

En el Capítulo 1 se introducen algunos conceptos teóricos relacionados con el tratamiento de series temporales que serán importantes para comprender los siguientes capítulos y la relación entre ellos.

En el Capítulo 2 se explica el origen y las características más destacables de los fractales, así como una introducción a los objetos multifractales.

En el Capítulo 3 se describen las herramientas con las que se llevará a cabo el estudio. Se diferenciarán dos tipos de análisis. El análisis monofractal se centrará en la historia y la obtención del exponente de Hurst mediante el método del rango reescalado, mientras que en el análisis multifractal se centrará en el método MFDFA para poder distinguir conductas multifractales.

En el Capítulo 4 y último se realiza un estudio fractal de la precipitación en la mayoría de las provincias españolas apoyándose en las herramientas anteriormente explicadas.

Capítulo 1. Series temporales

Una serie temporal es una sucesión de valores de una cierta variable ordenados cronológicamente, de modo que estos datos son obtenidos de manera secuencial. En este caso, la variable que se utilizará en los posteriores estudios es la precipitación.

Véase ahora un ejemplo. Considérese un estudio en el que se quiere conocer cómo evoluciona la cantidad de lluvia que cae en una zona a lo largo de un mes, obteniéndose así una gráfica temporal. Esto es lo que se denomina una realización del proceso. Si se volviera a realizar el experimento comenzando en otro instante pero con las mismas condiciones, es decir, en la misma localización y con la misma duración, se obtendría otra gráfica temporal que correspondería a otra realización.

Por consiguiente, si se trabajase con n realizaciones estudiadas en un tiempo determinado T y fuesen ordenadas,

$$\{X_i(t): t \in T, i = 1 \dots n\}$$

de modo que cada instante t es el mismo para cada realización i , se conseguiría algo similar a la figura 1.1 en la que se muestran cuatro realizaciones.

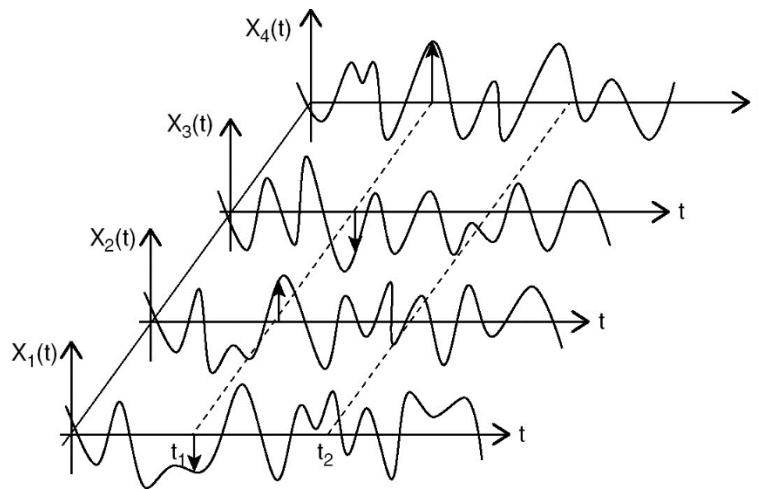


Figura 1.1: Gráficas de las realizaciones de un proceso estocástico

Si ahora se fija un instante de tiempo t y se construye una variable con los valores correspondientes a cada realización respecto ese instante, tal y como queda reflejado en la figura anterior, se estaría creando una variable aleatoria que depende de todas estas realizaciones. Es lo que se conoce como proceso estocástico.

1.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una colección o familia de variables aleatorias $\{X_t: t \in T\}$ ordenadas según un subíndice t . En general se atribuye t al tiempo, pero puede considerarse otro parámetro.

Una realización de un proceso estocástico se define como una sucesión de valores de una variable a lo largo del tiempo.

La diferencia entre una realización y una serie temporal es que esta primera puede trabajar con un número infinito de valores mientras que en las series hay un número de elementos limitado. Así pues, se podría definir una serie temporal como una realización de un proceso estocástico de parámetro tiempo discreto.

Se puede llevar a cabo una clasificación de estos procesos dependiendo del parámetro a utilizar. Si el conjunto T es continuo se hablaría de procesos estocásticos continuos, mientras que si T es discreto se referiría entonces a procesos estocásticos discretos. De la misma forma, se puede hacer una distinción respecto a la variable aleatoria utilizada. Se distinguen cuatro tipos de procesos estocásticos:

- Procesos estocásticos continuos de variable continua
- Procesos estocásticos continuos de variable discreta
- Procesos estocásticos discretos de variable continua
- Procesos estocásticos discretos de variable discreta

Al hablar de precipitación nos referimos a un proceso estocástico continuo de variable continua, debido a que la lluvia es un fenómeno continuo que transcurre en un tiempo también continuo. Sin embargo, en la práctica se hace necesario discretizar el tiempo ya que no es posible trabajar computacionalmente con infinitos valores y, por lo tanto, hablaríamos de un proceso estocástico discreto de variable continua.

1.1.1. Estacionariedad

Además de su clasificación respecto al parámetro y la variable aleatoria utilizada, los procesos estocásticos se pueden distinguir por su estacionariedad. Desde un punto de vista intuitivo un proceso estocástico es estacionario cuando mantiene significativamente constantes sus propiedades estadísticas a través de un cierto periodo temporal.

Se dice que un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto si para cualquier conjunto de índices $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, la distribución del vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ no varía respecto a la distribución del vector $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$ para cualquier valor de k tal que $t_1 + k, \dots, t_n + k \in T$. Así pues:

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$$

A su vez, un proceso estocástico es estacionario en sentido débil si su media y varianza son constantes en el tiempo y el resultado de la covarianza entre dos instantes depende solamente de la distancia entre estos dos:

$$E[X_t] = \mu, \quad \forall t \in T$$

$$V[X_t] = \sigma^2, \quad \forall t \in T$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \text{Cov}(X_s, X_{s+k}) = \gamma_k, \quad \forall t, s \in T, \forall k: t+k, s+k \in T$$

Nótese que la estacionariedad en sentido débil no implica en sentido estricto a no ser que se trabaje bajo normalidad, en ese caso sí se cumple la doble implicación.

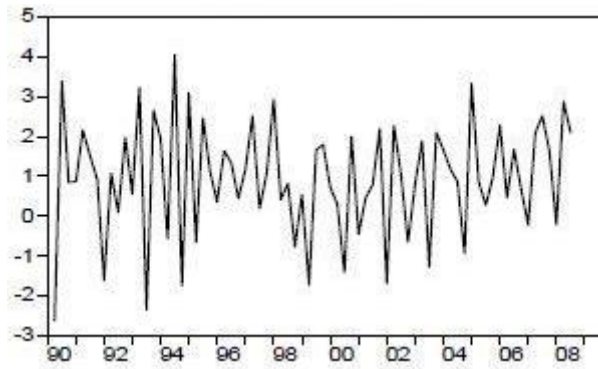


Figura 1.2: Gráfica de una serie temporal estacionaria

En la figura 1.2 se puede apreciar este comportamiento estacionario en una serie temporal, al observar el grado de centralización de los datos respecto la media y como se mantiene constante la dispersión de estos en toda la serie. En la figura 1.3, al contrario, la serie presenta propiedades estadísticas más inestables.



Figura 1.3: Gráfica de una serie temporal no estacionaria

Un proceso estocástico tiene incrementos estacionarios si la distribución del incremento depende solo de la longitud del intervalo que se esté estudiando, por lo que intervalos con la misma longitud se distribuyen de igual manera, es decir:

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} , \quad \forall t, s \in T : s \leq t$$

donde $\sim$ implica la igualdad de distribuciones de probabilidad.

De la misma manera, un proceso estocástico tiene incrementos independientes si para cualquier conjunto de índices $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ los intervalos $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

1.1.2. Autosimilaridad

El concepto de autosimilaridad, también conocido como autosemejanza (self-similarity en inglés), refleja la propiedad de invarianza de escala desde un punto de vista estadístico. Se puede definir como una estructura que presenta las mismas cualidades estadísticas al compararla con una parte de sí misma. Esta propiedad está muy presente en la naturaleza como se puede ver en el siguiente ejemplo. Al analizar la estructura de un árbol se observa como la ramificación de este presenta características autosimilares al advertirse en la manera en que una rama se divide en otras de menor tamaño y estas, a su vez, en otras repitiéndose esta construcción sucesivamente. Si se compara la ramificación del árbol directamente desde el tronco con las ramas más alejadas de este, se puede observar cómo presentan una estructura similar, pero a diferentes escalas de observación, es decir, las ramas de un árbol presentan una estructura invariante frente a cambios de escala, caracterizándolas así con una naturaleza autosimilar.

En 1962, John Lamperti fue de los primeros en aplicar el concepto de autosimilaridad a los procesos estocásticos, que denominó procesos estocásticos semiestables, [13]. Más tarde, esta idea evolucionó hasta conocerse como procesos estocásticos autosimilares.

Por definición, un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ se considera autosimilar si para todo $a > 0$, existe un $b > 0$ tal que:

$$X_{at} \sim bX_t , \quad \forall t, at \in T$$

Además, se define un proceso estocásticamente continuo en t , si para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P\{|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon\} = 0$$

Según Lamperti, si un proceso $\{X_t : t \in T\}$ es estocásticamente continuo en $t = 0$ y autosimilar, entonces existe un único exponente $H \geq 0$ tal que:

$$b = a^H$$

Además, H es estrictamente positivo si y solo si $X_0 = 0$ casi seguro.

Extrapolando este resultado a la definición anterior, un proceso estocástico continuo que comienza en el origen casi seguro es autosimilar si existe un único $H > 0$ tal que para todo $a > 0$:

$$X_{at} \sim a^H X_t, \quad \forall t, at \in T$$

Así pues, se puede relacionar el concepto de autosimilaridad en procesos estocásticos con aquellos que permanecen invariantes en distribución bajo un adecuado cambio de escala temporal y espacial, lo que se asemeja a la definición antes dada de invarianza de escala.

Este índice H es conocido como exponente de Hurst, en honor a los trabajos realizados en el río Nilo por el hidrólogo británico Harold Edwin Hurst, que más tarde será estudiado en este trabajo. Por otro lado y en relación a esta última definición que resulta a consecuencia del trabajo de Lamperti, se puede deducir que un proceso estocástico continuo autosimilar que comienza en el origen casi seguro nunca será estacionario, ya que H será siempre mayor que cero y no podrá llegar a suceder $X_{at} \sim X_t$, aunque generalmente se suele admitir que tiene incrementos estacionarios.

1.1.3. Camino aleatorio y procesos de Lévy

Un proceso estocástico cumple la propiedad de Márkov, que debe su nombre al matemático ruso Andréi Márkov (1856-1922), si la distribución de probabilidad de un instante de una variable aleatoria depende solamente del momento inmediatamente anterior, por lo que se suele decir que carece de memoria.

Un camino o paseo aleatorio (random walk en inglés), es un proceso estocástico de parámetro discreto $\{X_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ que describe la trayectoria que resulta después de una sucesión de pasos aleatorios.

Por ejemplo, si se considera un estado inicial 0 con una longitud de paso de 1 unidad, el siguiente estado del proceso podrá ser +1 con una probabilidad p o -1 con una probabilidad q , y así sucesivamente para los siguientes estados donde $p + q = 1$ en cada uno de ellos. De esta forma se construye una trayectoria en la que cada estado depende únicamente del anterior, cumpliéndose así la propiedad de Márkov. Formalmente se puede definir el paseo aleatorio de la siguiente forma:

Sea una sucesión $\xi = \{\xi_n: n \in \mathbb{N}\}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $P(\xi_n = +1) = p$ y $P(\xi_n = -1) = q$ para cualquier n , entonces:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se suele asumir $X_0 = 0$. Además, si $p \neq q$ se denominan caminos aleatorios asimétricos y si $p = q = 1/2$ se denominan caminos aleatorios simétricos.

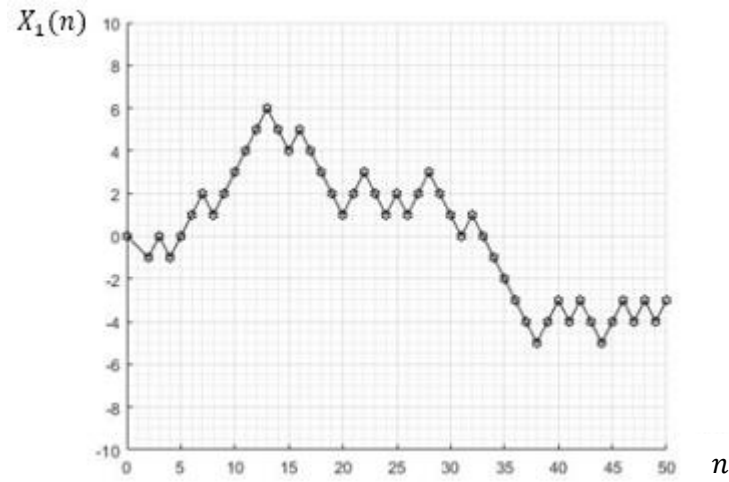


Figura 1.4: Realización de un camino aleatorio simétrico

Asumiendo $X_0 = 0$, la esperanza y la varianza dan los siguientes resultados:

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^n \xi_i\right] = nE[\xi] = n((1)p + (-1)q) = n(p - q)$$

Debido a que ξ_i son independientes:

$$\begin{aligned} V(X_n) &= V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = nV(\xi) = n(E[\xi^2] - E[\xi]^2) = n((1)^2p + (-1)^2q - (p - q)^2) \\ &= n((p + q) - (p - q)^2) = n(1 - (1 - 4pq)) = 4npq \end{aligned}$$

En consecuencia, si se tratase de un camino aleatorio simétrico, $p = q = 1/2$, entonces:

$$E[X_n] = 0$$

$$V(X_n) = n$$

Se realiza a continuación un breve recordatorio de algunas definiciones anteriormente vistas:

- Un proceso estocástico, X , tiene incrementos estacionarios si:

$$X_t - X_s \sim X_{t-s}, \quad \forall t, s \in T : s \leq t$$

- Un proceso estocástico, X , tiene incrementos independientes si:

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$$

- Un proceso estocástico, X , es estocásticamente continuo en t si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P\{|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Un proceso de Lévy, denominado así en honor al matemático francés Paul Pierre Lévy (1886-1971), es un proceso estocástico $X = \{X_t: t \geq 0\}$ que representa el movimiento de un punto que presenta sucesivos desplazamientos aleatorios siguiendo las siguientes propiedades:

- $X_0 = 0$, casi seguro.
- X tiene incrementos independientes.
- X tiene incrementos estacionarios.
- X es estocásticamente continuo

Un proceso de Lévy puede verse como un camino aleatorio exigiendo parámetro continuo en vez de discreto:

Sea un camino aleatorio $\{X_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ con $X_0 = 0$ y sea $1 \leq m < n$ tal que:

$$X_n - X_m = \xi_{m+1} + \xi_{m+2} + \cdots + \xi_n$$

$X_n - X_m$ es independiente de X_m ya que $\{\xi_n: n \in \mathbb{N}\}$ son variables aleatorias independientes y, generalizando, se puede concluir que tiene incrementos independientes. A su vez, $X_n - X_m$ se distribuye en probabilidad de la misma forma que X_{n-m} debido a que $\{\xi_n: n \in \mathbb{N}\}$ están idénticamente distribuidas, por lo que también tiene incrementos estacionarios.

1.1.4. Movimiento browniano y procesos de Wiener

El botánico Robert Brown (1773-1857) publica en 1828 un artículo en el que describe el movimiento irregular de granos de polen en el agua al ser observados estos a través de un microscopio, [23]. Este movimiento irregular es lo que se conoce actualmente como movimiento browniano.

El movimiento browniano describe la trayectoria aleatoria de una partícula al ser empujada por fuerzas a su alrededor. La trayectoria que Brown observó se explica por constantes choques de moléculas de agua contra los granos de polen. Albert Einstein consideró que estos choques eran producidos por partículas invisibles mucho más pequeñas que componían el agua, los átomos. Estas trayectorias son continuas y los desplazamientos de la partícula son independientes de los anteriores.

El matemático Norbert Wiener (1894-1964) propuso una modelización del movimiento browniano que acabaría por denominarse proceso de Wiener. En cierto modo, se puede

definir al movimiento browniano como el fenómeno físico mientras que el proceso de Wiener es el modelo matemático en el que se traduce.

Un proceso de Wiener es un proceso estocástico de parámetro continuo $B = \{B_t: t \geq 0\}$ que cumple las siguientes propiedades:

- $B_0 = 0$, casi seguro.
- B tiene incrementos independientes.
- B tiene incrementos estacionarios y, además, para cualquier valor s, t tal que $s \leq t$, el incremento $B_t - B_s$ se distribuye como una normal de media 0 y varianza $t - s$:

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s)$$

En consecuencia, un proceso de Wiener es un caso particular de proceso de Lévy. Además, un proceso de Wiener se puede ver como un camino aleatorio simétrico cuya longitud del paso se hace tender a cero:

Considérese un camino aleatorio simétrico tal que $X_0 = 0$, entonces $P(\xi_n = \pm 1) = 1 / 2$ y:

$$X_n := \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como se comprobó anteriormente, este camino aleatorio tiene $E[X_n] = 0$ y $V(X_n) = n$, por lo que al ser $\{\xi_t: t \in \mathbb{N}\}$ independientes e idénticamente distribuidas se puede emplear el teorema central del límite de modo que para un n suficientemente grande:

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Se define $B = \{B_t: t \geq 0\}$ de la siguiente forma:

$$B_t = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \sqrt{t/n} \sim N(0, t) , \quad \forall t > 0$$

$$B_0 = 0$$

donde $\sqrt{t/n}$ representa la longitud del paso temporal del camino aleatorio de forma que cuando n tienda a infinito, el paso tenderá a cero.

Previamente se estudió que un camino aleatorio se puede ver como un proceso de Lévy a tiempo continuo, por lo que según la definición dada, B tiene también incrementos independientes y estacionarios y, más aún, estos incrementos estacionarios se distribuyen respecto una normal de media cero y varianza la distancia del intervalo, llegando así a la definición de proceso de Wiener:

$$B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim N(0, t - s)$$

Se desea estudiar las características autosimilares de los procesos de Wiener mediante la definición vista anteriormente de John Lamperti:

Debido a $B_t \sim N(0, t)$, se define $a > 0$ de modo que:

$$E[a^{-1/2}B_{at}] = a^{-1/2}E[B_{at}] = 0$$

$$V(a^{-1/2}B_{at}) = a^{-1}V(B_{at}) = a^{-1}at = t$$

Por lo que:

$$a^{-1/2}B_{at} \sim B_t \sim N(0, t)$$

Y concluyendo:

$$B_{at} \sim a^{1/2}B_t$$

Este exponente es único por continuidad lo que conlleva a que el movimiento browniano o proceso de Wiener se trata de un proceso estocástico autosimilar.

1.1.5. Movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano fraccionario fue introducido en 1968 por Benoît B. Mandelbrot y John W. Van Ness, [35], y es la generalización del movimiento browniano manteniendo la estacionariedad de los incrementos sin imponer la independencia de estos. Se puede definir como un proceso estocástico de parámetro continuo $BH = \{BH_t; t \geq 0\}$ tal que cumple las siguientes propiedades:

- $BH_0 = 0$, casi seguro.
- BH tiene incrementos estacionarios y, además, para cualquier valor s, t tal que $s \leq t$, el incremento $BH_t - BH_s$ se distribuye como una normal de media 0 y varianza proporcional al incremento temporal, $(t - s)^{2H}$ donde $0 < H < 1$:

$$BH_t - BH_s \sim N(0, (t - s)^{2H})$$

Este índice de escala del proceso, H , es el mismo anteriormente citado como exponente de Hurst y que será estudiado con mayor profundidad más adelante.

Al igual que con el movimiento browniano, se puede estudiar la autosimilaridad del movimiento browniano fraccionario:

Sea el índice H tal que $0 < H < 1$ y sea $a > 0$:

$$E[a^{-H}BH_{at}] = a^{-H}E[BH_{at}] = 0$$

$$V(a^{-H}BH_{at}) = a^{-2H}V(BH_{at}) = a^{-2H}(at)^{2H} = t^{2H}$$

Por lo que:

$$a^{-H}BH_{at} \sim BH_t \sim N(0, t^{2H})$$

Y concluyendo:

$$BH_{at} \sim a^H BH_t$$

El índice de escala, H , es único por continuidad lo que conlleva a que el movimiento browniano fraccionario se trata de un proceso estocástico autosimilar.

Sean ahora dos incrementos consecutivos $BH_t - BH_0$ y $BH_{t+h} - BH_t$ donde $h > 0$. Se quiere estudiar la independencia de estos incrementos:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(BH_{t+h} - BH_t, BH_t - BH_0) &= \text{Cov}(BH_{t+h}, BH_t) - \text{Cov}(BH_{t+h}, BH_0) - V(BH_t) + \text{Cov}(BH_t, BH_0) \\ &= \frac{1}{2}(V(BH_{t+h}) + V(BH_t) - V(BH_{t+h} - BH_t) - V(BH_{t+h}) - V(BH_0) \\ &\quad + V(BH_{t+h} - BH_0) - 2V(BH_t) + V(BH_t) + V(BH_0) - V(BH_t - BH_0)) \\ &= \frac{1}{2}(-V(BH_{t+h} - BH_t) + V(BH_{t+h} - BH_0) - V(BH_t - BH_0)) \end{aligned}$$

Al tener BH incrementos estacionarios $BH_{t+h} - BH_t$ se distribuye de la misma forma que $BH_{t+h-t} = BH_h$, por tanto:

$$\text{Cov}(BH_{t+h} - BH_t, BH_t - BH_0) = \frac{1}{2}(V(BH_{t+h}) - V(BH_h) - V(BH_t))$$

Y concluyendo:

$$\text{Cov}(BH_t - BH_0, BH_{t+h} - BH_t) = \frac{1}{2}((t+h)^{2H} - t^{2H} - h^{2H})$$

Por tanto, a la hora de estudiar la independencia de estos incrementos se puede clasificar en función de los valores del índice de escala del proceso:

- Si $H = 0.5$, la covarianza es cero lo que indica que los incrementos son independientes y, más aún, se trataría del movimiento browniano estudiado anteriormente.
- Si $H < 0.5$, no hay independencia y la covarianza toma signo negativo.
- Si $H > 0.5$, no hay independencia y la covarianza toma signo positivo.

Capítulo 2. Fractales

En 1967, el matemático Benoît B. Mandelbrot (1924-2010) publicó un artículo en el que se preguntaba cuál era la longitud de la costa de Gran Bretaña, [18]. A primera vista parece una respuesta sencilla pero todo depende de la escala de medida que se esté utilizando, ya que eligiendo la unidad de medida que se elija, siempre acabará siendo una aproximación de la verdadera longitud debido a que habrá escalas de medida aún más pequeñas que se ajustarán mejor al relieve y calcularán una mayor distancia, y esto se sucederá infinitamente. Por tanto, la costa de Gran Bretaña medirá tanto como se quiera precisar su medición.

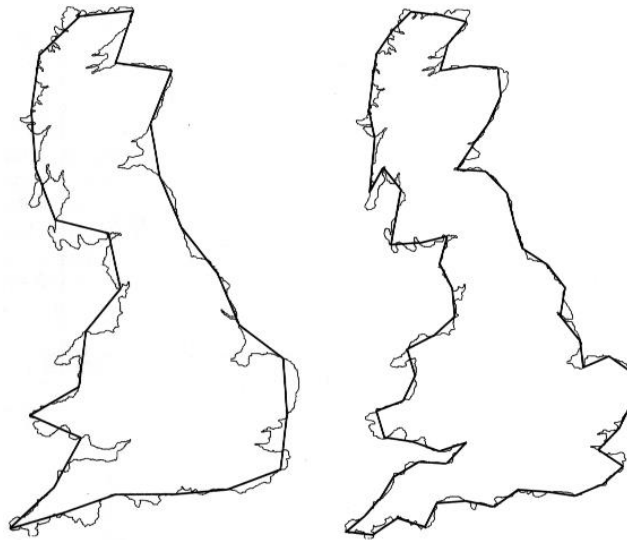


Figura 2.1: Medición de la costa de Gran Bretaña para diferentes escalas de longitud

Esta paradoja hace necesario establecer una caracterización de estos objetos tan irregulares. Con el fin de definir la longitud de estas construcciones, es preciso llegar a una medida que varíe lo menos posible al observarla a distintas escalas, es decir, es preciso llegar a una medida que sea invariante frente a cambios de escala, o lo que se definió como autosimilaridad. Una vez alcanzada, se habrá conseguido una medición estable e independiente ante cambios de escala de observación. Estos son los cimientos en los que se basa lo que hoy se conoce como dimensión fractal.

La palabra fractal, del latín fractus, fue introducida por Mandelbrot en 1975 que significa roto o quebrado. Los fractales se caracterizan principalmente por tener la propiedad de autosimilaridad y poseer una dimensión fractal.

2.1. Estructura autosimilar

La autosimilaridad se definió anteriormente como la propiedad de una estructura en la que su totalidad es exactamente o aproximadamente similar a una parte de sí misma. Existen fractales exactamente autosimilares como el copo de nieve de Koch o el triángulo de Sierpinski ilustrados en la figura 2.2, en los que se puede observar como se repite la misma construcción de forma iterativa de manera que al observar el fractal respecto una parte de sí misma se sigue viendo la misma estructura y esto ocurre infinitamente, es decir, observándolo a distintas escalas el fractal no varía.

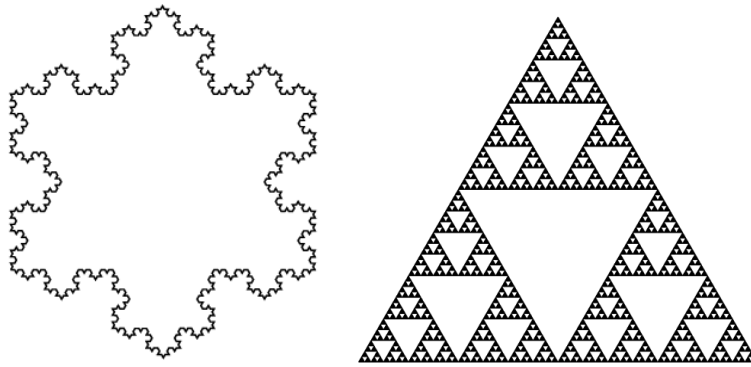


Figura 2.2: Ilustración del copo de nieve de Koch y el triángulo de Sierpinski respectivamente

Existen otros fractales en los que la autosimilaridad no es exacta, como se puede apreciar en el conjunto de Mandelbrot en la figura 2.3, pero se sigue observando esta estructura fractal.

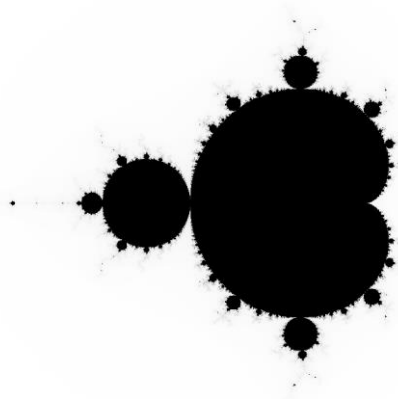


Figura 2.3: Ilustración del conjunto de Mandelbrot

Nótese que al querer caracterizar con una dimensión estos objetos fractales, sea por ejemplo el perímetro de estos, se llegaría a una situación similar a la costa de Gran Bretaña debido a que su estructura se repite infinitamente.

Es posible establecer una relación entre una serie temporal y la estructura fractal para alcanzar una caracterización de esta. Supóngase que se desea caracterizar una serie temporal calculando la longitud de su gráfica. Esta medida dependerá del paso temporal ya que cuanto más pequeño sea este paso, al igual que sucedía con los anteriores ejemplos, mayor será su medida.

Por ejemplo, en una serie temporal que recoja la cantidad de lluvia a lo largo de un tiempo en una zona determinada, entre el valor de un instante cualquiera y el inmediatamente siguiente en la serie, existen infinitos valores de la cantidad de lluvia proyectada que no se recogen en la gráfica para cualquier paso temporal que se emplee. Por tanto, al igual que sucede con la frontera de los fractales, medirá tanto como se quiera precisar su medición.

Si se desea conseguir una única medición es preciso dirigirse hacia una invarianza de escala, es decir, hacia una medición independiente de la escala de medida o paso temporal que se emplee. Esto equivaldría a observar estos objetos bajo una estructura fractal, bajo propiedades autosimilares, y así poder caracterizarlos con una dimensión fractal.

2.2. Dimensión fractal

Intuitivamente, la dimensión fractal indica cómo un objeto rellena su propio espacio conforme se utilizan escalas más y más finas. No existe una única definición de dimensión fractal sino una serie de dimensiones que frecuentemente coinciden. En este apartado se estudian dos definiciones de la dimensión fractal, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch y la dimensión de Minkowski-Bouligand.

2.2.1. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch o, abreviadamente, dimensión de Hausdorff, en honor a Felix Hausdorff y Abram Besicovitch, introducida hacia el año 1917 es una de las primeras aunque tiene la desventaja en muchos casos de ser difícil de estimar computacionalmente.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto no vacío tal que se define el diámetro como la mayor distancia de cualquier par de puntos:

$$|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\}$$

Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que a la colección $\{U_i\}_{i \in I}$ se le denomina δ -recubrimiento de F si para cada índice tiene diámetro a lo sumo δ y en su conjunto recubre F , es decir;

$$0 < |U_i| < \delta, \quad \forall i \in I$$

$$F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Sea $s > 0$, para cada $\delta > 0$ se define:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i \in I} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\}$$

Así pues, para un s y δ dados se tiene un ínfimo de la suma de las potencias s -ésimas de los diámetros de los conjuntos que recubren F . El objetivo es reducir el diámetro para lograr recubrir F de la manera más “próxima” posible, por ello se define:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

A medida que δ decrece $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ crece, por tanto, para un valor s suficientemente pequeño, este límite es infinito. A su vez, sea $t < s$ y un δ -recubrimiento de F , $\{U_i\}_{i \in I}$:

$$\sum_{i \in I} |U_i|^s = \sum_{i \in I} |U_i|^{s-t} |U_i|^t \leq \delta^{s-t} \sum_{i \in I} |U_i|^t$$

En consecuencia, haciendo tender δ a cero, si $\mathcal{H}^t(F) < \infty$ entonces $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para cada $s > t$. Por lo tanto, existe un valor crítico en el que $\mathcal{H}^s(F)$ “salta” de ∞ a 0. A este punto crítico es lo que se conoce como dimensión de Hausdorff-Besicovitch:

$$\dim_{HB}(F) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

De modo que:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } \dim_H(F) < s \end{cases}$$

2.2.2. Dimensión de Minkowski-Bouligand o box-counting

La dimensión de Minkowski-Bouligand, en honor a los matemáticos Hermann Minkowski y Georges Bouligand, es también conocida como dimensión de Minkowski, dimensión de conteo de cajas o dimensión de box-counting. En la práctica, es más sencilla de calcular que la dimensión de Hausdorff, basándose en una idea más intuitiva.

Considérese un objeto fractal, F , en una cuadrícula uniforme y se quiere conocer cuántas cajas son necesarias para recubrirlo a medida que se utilizan cajas más y más pequeñas. Suponiendo que se necesitan $N(\delta)$ cajas en total, cada una de ellas de lado δ , se define la dimensión de Minkowski-Bouligand como:

$$\dim_{MB}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log (1/\delta)}$$

Nótese que se parte de una idea similar a la dimensión de Hausdorff. Sin embargo, la dimensión de Minkowski trabaja con una colección de conjuntos con la misma forma y tamaño.

Tomándose como ejemplo el triángulo de Sierpinski y gracias a su estructura exactamente autosimilar se calcula su dimensión fractal como se detalla a continuación:

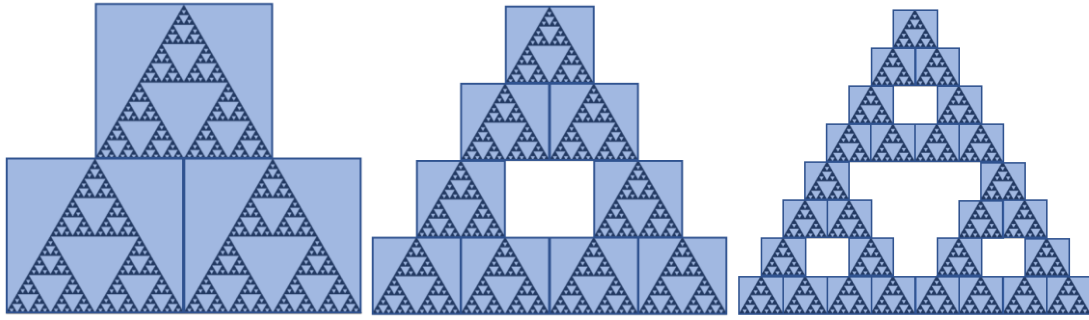


Figura 2.4: Estimación de la dimensión de conteo de cajas del triángulo de Sierpinski

Supóngase un triángulo de Sierpinski de lado 1 y se quiere estimar su dimensión de box-counting. Como se observa en la figura 2.4, dependiendo de la longitud del lado de cada caja se obtiene:

- Con longitud de lado 1 se necesita una sola caja.
- Con longitud de lado 1/2 se necesitan 3 cajas.
- Con longitud de lado 1/4 se necesitan 9 cajas.
- Con longitud de lado 1/8 se necesitan 27 cajas.

En definitiva, para una longitud de lado de $1/2^k$ se necesitan 3^k cajas en total y, en consecuencia, su dimensión fractal se calcularía de la siguiente forma:

$$\dim_{MB}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log (1/\delta)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log (1/2^k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log 2^k} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

De forma similar se puede estimar la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña al recubrirla mediante las cajas necesarias y comparándolas a medida que se reduce la longitud del lado. De esta manera se obtiene una dimensión de box-counting de

aproximadamente $D = 1.25$ mientras que, por ejemplo, en el conjunto de Mandelbrot se consigue un resultado cercano a $D = 2$.

La dimensión fractal es una de las herramientas más importantes para el estudio de los fractales, y es que, según la definición dada por Mandelbrot, [26], “*Un fractal es por definición un conjunto en el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica*”, entendiendo dimensión topológica como la dimensión del espacio euclídeo que contiene al objeto menos 1. Además:

$$\dim_E - 1 < \dim_{HB} \leq \dim_{MB} \leq \dim_E$$

donde $\dim_{HB}$ es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, $\dim_{MB}$ es la dimensión de Minkowski-Bouligand y $\dim_E$ es la dimensión del espacio euclídeo que contiene al fractal.

Sin embargo, existen otras estructuras fractales que no pueden ser caracterizadas por una sola dimensión, sino por un conjunto de dimensiones fractales. Estos son los denominados multifractales.

2.3. Multifractales

El copo de nieve de Koch, el triángulo de Sierpinski o el fractal de Mandelbrot son fractales que mantienen su estructura a lo largo de diferentes escalas de una manera constante, denominados monofractales. Pero existen otros fractales en los que su estructura va cambiando ligeramente con la escala, o bien, que su construcción está compuesta por diferentes estructuras fractales que coexisten en diferentes escalas. A este tipo de fractales se los conoce como multifractales.

Por ejemplo, se puede observar una naturaleza multifractal al analizar el canto de las ballenas, que no es más que la colección de sonidos que emiten estas al comunicarse, en donde se evidencian ciertas frecuencias que tienden a repetirse como cuando se encuentran en predisposición de aparearse o cuando existe algún peligro cercano. En la figura 2.5 se puede observar el espectrograma del canto de una ballena jorobada. En dicha imagen se detallan alrededor de cuatro minutos del canto de un macho clasificado en tres temas diferentes, [34]. Estos temas que tienden a repetirse son diferentes frecuencias que coexisten en un mismo canto, y, en consecuencia, el canto de las ballenas se puede caracterizar como una estructura multifractal.

La multifractalidad tiene una construcción más compleja que los objetos vistos anteriormente, ya que si un monofractal está completamente descrito gracias a su dimensión fractal, es decir, descrito por un solo exponente, en los multifractales es necesario especificar un espectro de exponentes para su completa caracterización, dado que tienen diferentes dimensiones fractales.

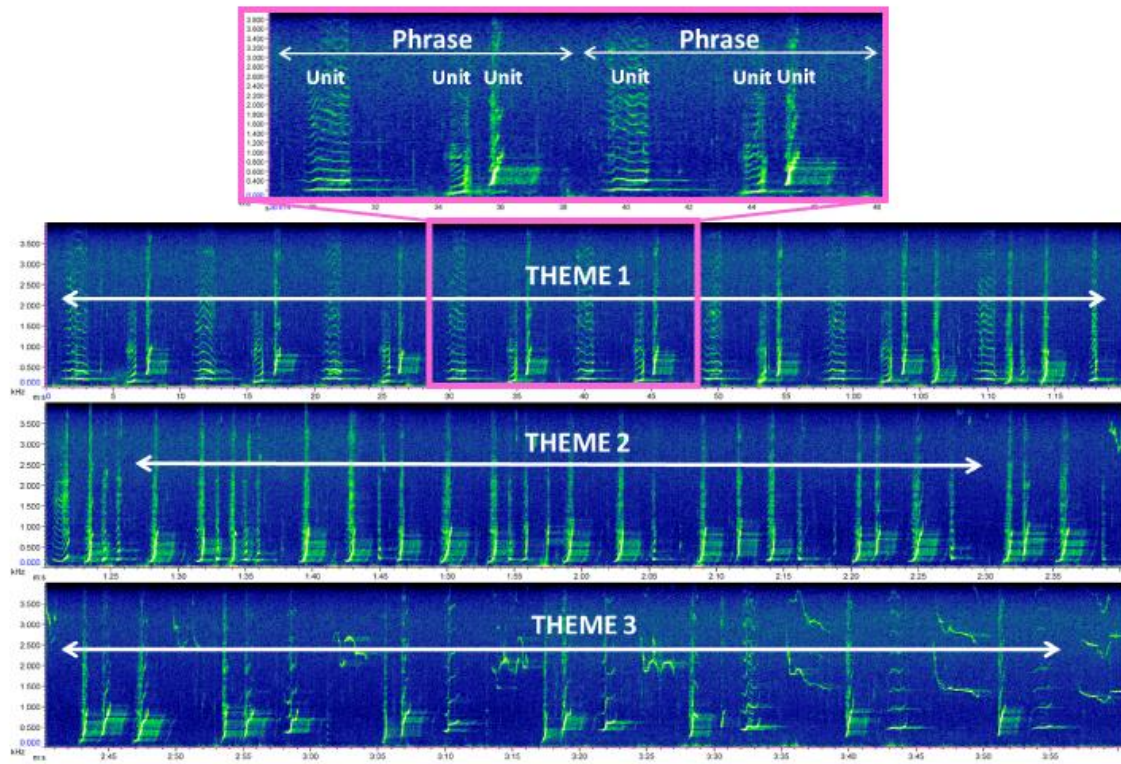


Figura 2.5: Espectrograma del canto de una ballena jorobada

Capítulo 3. Exponente de Hurst

Harold Edwin Hurst (1880-1978) fue un ingeniero e hidrólogo británico que trabajó por un tiempo en el diseño y el control de la presa de Aswan, Egipto, que pretendía controlar el flujo del caudal del río Nilo.

Hurst observó que flujos de agua más grandes que el promedio eran seguidos por flujos aún mayores y, a su vez, este proceso cambiaba a flujos menores que el promedio continuados por flujos aún menores que estos. Estas observaciones no se comportaban de una manera aleatoria, sino que sugerían un comportamiento cíclico pero con periodos de longitud variable, [27]. Hurst trabajó en una metodología propia basada en los trabajos de Albert Einstein sobre el movimiento browniano.

Einstein estudió el desplazamiento de estas partículas brownianas en un intervalo de tiempo dado, [15], y llegó a la conclusión de que la distribución de probabilidad $\rho(x, t)$ de que cada una de las coordenadas de la partícula se haya incrementado en una cantidad x al cabo de un tiempo t , verificaba:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$$

donde D es una constante positiva conocida como el coeficiente de difusión. La solución a la ecuación indica que $\rho(x, t)$ sigue una distribución normal de media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 2Dt$:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \sim N(0, 2Dt)$$

Empleando ahora la desviación típica $\sigma = \sqrt{2Dt} = c\sqrt{t}$, donde c es una constante, se concluye que el desplazamiento medio, R , de una partícula browniana no es proporcional al tiempo transcurrido, si no a la raíz cuadrada del mismo:

$$R = ct^{0.5}$$

Con el objetivo de aplicar esta metodología a series temporales que no tengan por qué describir un movimiento browniano, se hace necesario generalizarlo de modo que no se imponga la independencia de las componentes de estas series, como sí ocurre en el desplazamiento de las partículas brownianas. En consecuencia y gracias al trabajo de Hurst junto a las posteriores aportaciones de Benoît B. Mandelbrot y James R. Wallis, [28], se llega a la siguiente ecuación que generaliza la teoría de Einstein y sienta las bases de lo que se conoce como el método del rango reescalado o análisis R/S:

$$(R/S)_m = cm^H$$

donde R/S se conoce como el rango reescalado, c es una constante, m es el número de observaciones de cada intervalo de la serie temporal y H es el exponente o coeficiente de Hurst.

El movimiento browniano fraccionario se definió como la generalización del movimiento browniano excluyendo la imposición de independencia de los incrementos, es decir, alejándose de conductas meramente aleatorias. Se comprobó además que ambos eran procesos estocásticos autosimilares, que es la propiedad fundamental de los fractales como se estudió anteriormente. Por tanto y por la similitud con la metodología del análisis R/S , se hace visible la relación entre el exponente de Hurst y el concepto de autosimilaridad y, en consecuencia, la conexión con el análisis fractal.

En sus investigaciones, Hurst encontró un coeficiente de aproximadamente $H = 0.72$ que era diferente de la hipótesis inicial de $H = 0.5$, que se trata de un comportamiento aleatorio. Esta diferencia fue lo que se denominó posteriormente como el fenómeno Hurst y que se caracteriza por tener una naturaleza persistente, y es que, dependiendo de los valores del exponente de Hurst, se puede establecer una distinción en el comportamiento de las series temporales que se analicen:

- $H = 0.5$ implica una serie temporal aleatoria que se comporta como un movimiento browniano y donde sus observaciones son independientes.
- $0.5 < H < 1$ implica una serie temporal persistente la cual está caracterizada por efectos de memoria a largo plazo. Un periodo de crecimiento es seguido por otro análogo y viceversa representando un aspecto suave de manera que lo que suceda hoy afectará al futuro.
- $0 < H < 0.5$ implica una serie temporal antipersistente la cual es sensible a grandes variaciones a corto plazo. Un periodo de crecimiento es seguido por otro de decrecimiento representando un aspecto muy irregular de manera que tiende a regresar constantemente al lugar de partida.

El exponente de Hurst y la dimensión fractal en principio parecen ser independientes el uno del otro ya que mientras el primero representa el comportamiento de la serie temporal, el segundo da una caracterización de esta. Sin embargo, bajo autosimilaridad, estos dos conceptos están directamente relacionados, [37], de manera que en un espacio n -dimensional, se cumple lo siguiente:

$$D + H = n + 1$$

De esta manera dimensiones fractales pequeñas estarán asociadas a comportamientos persistentes mientras que dimensiones fractales mayores se asociarán a comportamientos antipersistentes.

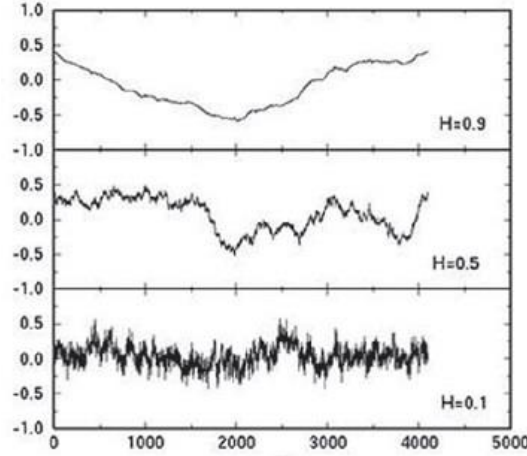


Figura 3.1: Series temporales clasificadas según su coeficiente de Hurst

3.1. Análisis R/S

Sea $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ la serie temporal de tamaño n que se desea analizar y se divide en d -subintervalos de igual longitud m , de manera que $m = \lfloor n/d \rfloor$. Por notación, se definirá el conjunto de d -subintervalos como $\{I_k\}_{k=1}^d$ y se empleará 1_k y m_k como la primera y última posición respectivamente de cada subintervalo, tal que $I_k = [1_k, m_k]$ para cada k . En función del número de subintervalos que se utilice, se define Y como una serie acumulada de las desviaciones de X respecto a su media en cada subintervalo:

$$Y_{k,j} = \sum_{i=1_k}^j (X_i - \bar{X}_k), \quad k = 1, 2, \dots, d, \quad j \in [1_k, m_k]$$

donde $\bar{X}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1_k}^{m_k} X_i$.

Se define R como una serie que calcula el rango de esta serie acumulada en cada subintervalo, es decir, que calcula la diferencia entre el valor máximo y mínimo de Y en función de k :

$$R_k = \max_{j \in I_k} \{Y_{k,j}\} - \min_{j \in I_k} \{Y_{k,j}\}, \quad k = 1, 2, \dots, d$$

Se define S como una serie que recoge las desviaciones típicas parciales de X :

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1_k}^{m_k} (X_i - \bar{X}_k)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, d$$

Por último, se calcula el estadístico R/S que calcula el rango de las desviaciones de las sumas parciales de la serie temporal a analizar respecto a su media, reescalado por la

desviación típica de la serie, de ahí el nombre de rango reescalado. Como se utilizan d -subintervalos de igual longitud, se toma el promedio de ellos obteniéndose así el estadístico:

$$R/S = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \frac{R_k}{S_k}$$

De esta forma se obtiene una estimación del estadístico R/S para una serie temporal dividida en d -subintervalos. Por tanto, en función del número de subintervalos a utilizar se obtendrán diferentes estimaciones del estadístico, de modo que basándose en la ecuación del rango reescalado:

$$(R/S)_m = cm^H$$

donde m es la longitud de los subintervalos como se definió anteriormente. En consecuencia, aplicando logaritmos se obtiene una expresión cuya pendiente de la recta de regresión proporciona una estimación del exponente de Hurst:

$$\log (R/S)_m = \log(c) + H\log(m)$$

Al igual que el análisis del rango reescalado se puede estimar el exponente de Hurst mediante el método de box counting, visto anteriormente al estudiar la dimensión de Minkowski-Bouligand, que permite estimar la dimensión fractal de un objeto y que, bajo propiedades autosimilares, dicha dimensión está directamente relacionada con el exponente de Hurst. Por otro lado, es posible que una serie temporal no esté completamente caracterizada por un solo exponente o por su dimensión fractal, y sea necesario determinar una serie de exponentes para definirla, lo que conduciría al análisis multifractal.

3.2. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis

Multifractal Detrended Fluctuation Analysis, abreviadamente MFDFA, es un método que fue propuesto por Jan W. Kantelhardt et al. en 2002, [32], que permite identificar la naturaleza multifractal de un objeto al eliminar las posibles tendencias polinomiales de diferentes órdenes que pueda presentar.

Sea $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ la serie temporal de tamaño n que se desea analizar y se define el perfil de la serie Y de la siguiente manera:

$$Y_j = \sum_{i=1}^j (X_i - \bar{X}) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

donde $\bar{X}$ representa la media de X . Se divide el perfil en d -subintervalos, $\{I_k\}_{k=1}^d$, de igual longitud m , de manera que $m = \lceil n/d \rceil$ y se calcula una regresión polinomial YR_k , de grado a elegir, para cada subintervalo I_k . Con el objetivo de eliminar tendencias de la serie temporal se define R_k como la raíz positiva del promedio del error cuadrático respecto a la regresión y el perfil en cada subintervalo:

$$R_k = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_{k,i} - YR_{k,i})^2} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, d$$

con Y_k el perfil de la serie temporal definido antes delimitado para cada subintervalo I_k . Por último, se promedia sobre todos los subintervalos para obtener la función de fluctuación media de orden $q \neq 0$:

$$F_q = \left(\frac{1}{d} \sum_{k=1}^d (R_k)^q \right)^{1/q}$$

Para $q = 0$ se define:

$$F_0 = e^{\frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d \log(R_k)^2}$$

De esta forma y en función del número de subintervalos a utilizar, se llega a una estimación del exponente de Hurst generalizado H_q :

$$(F_q)_m \approx m^{H_q}$$

donde m es la longitud de los subintervalos y aplicando logaritmos de la misma forma que en el análisis R/S se estima el estadístico.

El exponente de Hurst generalizado describe el comportamiento de escala de la función de fluctuación para diferentes órdenes q . Así pues, si se consideran valores de $q > 0$, en los subintervalos donde varíe más la serie, donde haya una mayor fluctuación, se obtendrán valores mayores de R que dominarán a la función F_q . Por el contrario, para valores $q < 0$ los subintervalos con menor fluctuación cobrarán mayor importancia para F_q . Por tanto, para $q > 0$ se obtendrán valores bajos de H_q que estarán caracterizados por subintervalos con grandes fluctuaciones, mientras que para $q < 0$ se obtendrán valores elevados que describirán subintervalos con pequeñas fluctuaciones.

Nótese que ante el estudio de un objeto monofractal puro los valores de R serán idénticos en cada subintervalo debido a ser invariantes por escala. Por lo que se obtendría un mismo exponente de Hurst generalizado para cada valor de q , a diferencia de las estructuras multifractales.

Otra manera de caracterizar el comportamiento multifractal es mediante el cálculo del exponente de masa τ_q a partir de exponente de Hurst generalizado:

$$\tau_q = qH_q - 1$$

Observando el comportamiento del exponente de masa respecto al orden q se puede evidenciar una naturaleza multifractal. En el caso monofractal al ser el exponente de Hurst generalizado idéntico para cada q hace que al graficarlo de un resultado lineal mientras que en una estructura multifractal será no lineal, como se puede observar en la figura 3.2.

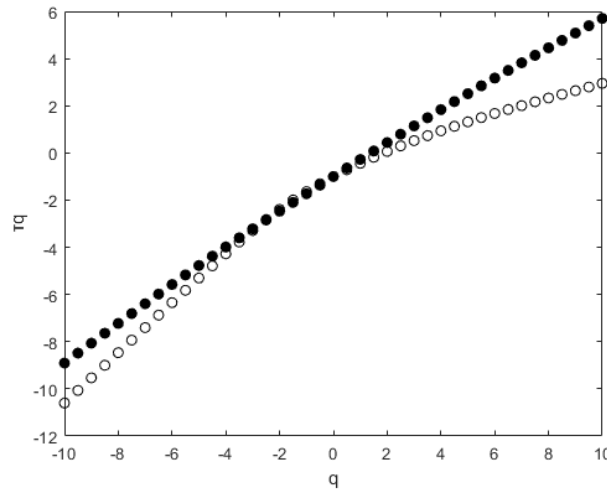


Figura 3.2: Exponentes de masa de una estructura monofractal frente a una estructura multifractal

Se define la dimensión fractal generalizada como:

$$D_q = \frac{\tau_q}{q-1} = \frac{qH_q - 1}{q-1}$$

Otra alternativa para analizar la multifractalidad de un objeto es mediante el espectro multifractal. Se calcula el exponente de singularidad o exponente de Hölder, α_q , en honor al matemático alemán Otto Ludwig Hölder, como la derivada del exponente de masa respecto al orden q :

$$\alpha_q = \tau'_q = H_q + qH'_q$$

A partir de este exponente es posible obtener el espectro multifractal mediante $f(\alpha_q)$.

$$f(\alpha_q) = q\alpha_q - \tau_q = q(\alpha_q - H_q) + 1$$

La gráfica de $f(\alpha_q)$ frente a α_q tiene forma de parábola invertida cuyo máximo se alcanza en $q = 0$, ($f(\alpha_0) = 1$). Cuanto mayor sea la diferencia entre los distintos exponentes de

Hölder, mayor será la multifractalidad debido a que las diferencias entre los distintos H_q serán mayores. En el supuesto de una estructura monofractal pura, al tener un mismo valor de H_q para cada orden q hace que tenga un idéntico exponente de Hölder para cada orden q , por lo que el espectro multifractal se concentraría en un mismo punto para este caso. Por tanto, a medida que esta estructura evoluciona hacia un comportamiento más multifractal incrementarían las diferencias del exponente de Hurst generalizado y, a su vez, el ancho del espectro multifractal, de la parábola invertida, incrementaría de igual forma. En conclusión, cuanto mayor sea el ancho del espectro multifractal, representado por $\alpha_{max} - \alpha_{min}$, mayor será la multifractalidad del objeto.

Capítulo 4. Estudio fractal de la precipitación

La teoría fractal es útil para describir la naturaleza del comportamiento de una serie temporal. En este capítulo se analiza la precipitación en España utilizando las técnicas vistas anteriormente.

4.1. Base de datos

Los datos proceden de la Agencia Estatal de Meteorología de España (AEMet), [38], que recogen los datos de distintas variables atmosféricas de más de 290 estaciones desde el año 1920, en el caso de las bases de datos más grandes, hasta la última fecha de actualización, en este caso hasta el año 2020. Para este trabajo se utilizaron 46 de las estaciones, una por cada provincia española a excepción de Ávila, Álava, Lugo, Palencia y Jaén, debido a que no se encontraron bases de datos que cumpliesen los requisitos para el estudio. Se descartaron de igual forma las dos ciudades autónomas, Ceuta y Melilla. A continuación se hace un estudio de la precipitación en 50 años consecutivos, desde el año 1970 hasta el año 2019 inclusive, empleándose los datos recogidos por las estaciones de la precipitación diaria de cada provincia española.

4.2. Metodología y análisis previo

El estudio constará de dos partes, un análisis monofractal y un análisis multifractal.

4.2.1. Análisis monofractal

El objetivo del estudio monofractal es estimar el exponente de Hurst en cada serie temporal para así poder clasificarlas bajo conductas persistentes, antipersistentes o meramente aleatorias. Para ello, se estimará este coeficiente mediante el análisis del rango reescalado visto anteriormente, el cual fue programado en *Matlab*, [Anexo].

Con el objetivo de probar la efectividad del análisis R/S se realizaron dos experimentos, uno analizando la evolución de los comportamientos persistentes y otro para las conductas antipersistentes.

La persistencia está caracterizada por la presencia de cambios suaves en la serie a largo plazo por lo que, en el caso más extremo, una serie temporal donde cada valor sea mayor que el inmediatamente anterior no tendrá ningún cambio reseñable y tenderá a alcanzar valores del exponente de Hurst cercanos a $H = 1$, ya que la serie únicamente crece,

mientras que una serie temporal completamente aleatoria tendrá valores en torno a $H = 0.5$ por definición. De este modo, se elabora la siguiente serie donde dependiendo del peso dado se dará más importancia a la persistencia o, por el contrario, a la mera aleatoriedad, como queda representado en la figura 4.2.1.

Sea P el peso dado a la aleatoriedad y sea $r \sim U(0,1)$ una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme entre 0 y 1. Se define $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ como:

$$x_0 = 0$$

$$x_i = \begin{cases} r & \text{si } r < P \\ x_{i-1} + 1 & \text{si } r \geq P \end{cases}$$

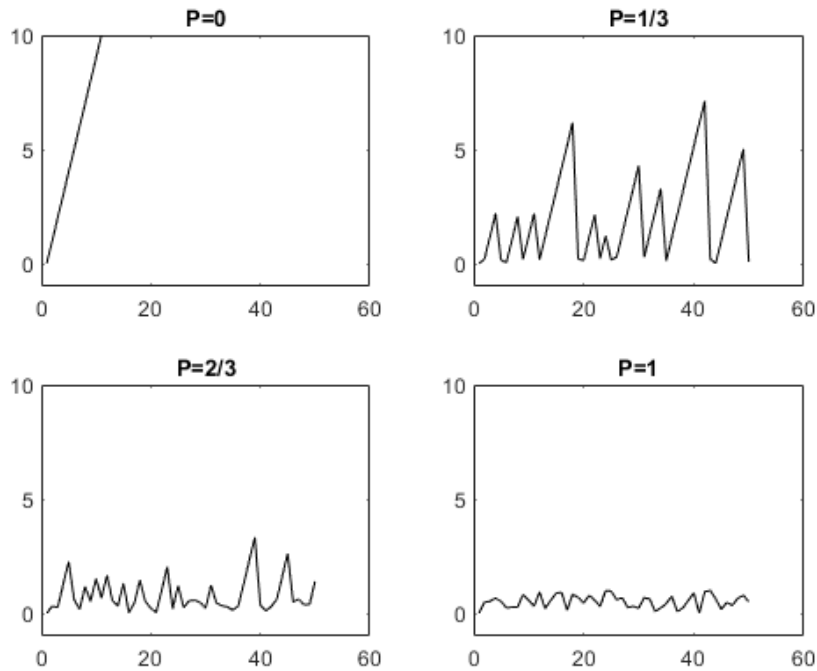


Figura 4.2.1: Gráficas de la variable X en el análisis de la persistencia para distintos pesos

De esta manera, si se emplea un peso $P = 1$ se obtendría una serie completamente aleatoria, mientras que con un peso $P = 0$ se estaría dando todo el protagonismo a la persistencia. En la figura 4.2.2 se puede apreciar cómo evoluciona el exponente de Hurst obtenido mediante el análisis R/S en función de los pesos que se den a la serie para un ejemplo concreto. Cabe mencionar que por coherencia con el futuro estudio y para la obtención de las estimaciones de los coeficientes de Hurst, tanto para esta figura como la figura 4.2.4, se calculó la serie de igual longitud a las bases de datos que se analizan y mismos subintervalos, que tendrán gran relevancia estos últimos como se estudiará más adelante.

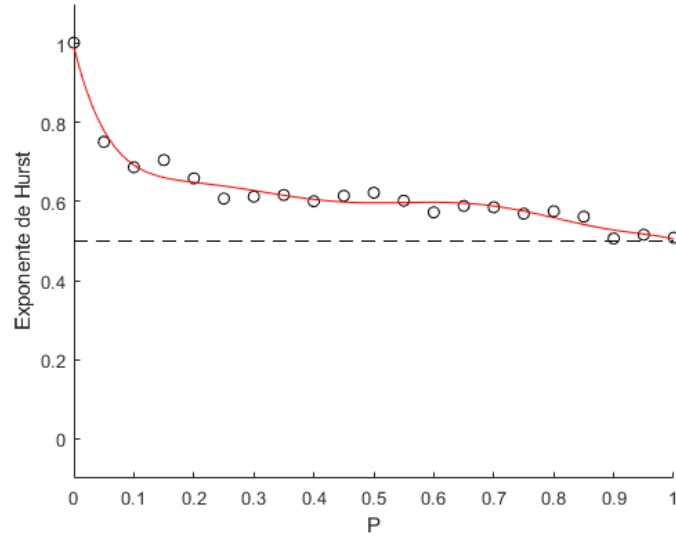


Figura 4.2.2: Evolución del exponente de Hurst respecto a un análisis de persistencia

De forma similar, se llega al estudio del comportamiento antipersistente. La antipersistencia se caracteriza por bruscos cambios a corto plazo, alejándose del comportamiento aleatorio. La función seno devuelve una gráfica en la que cada periodo de crecimiento es seguido por otro de decrecimiento y, aunque actúa de forma periódica, es un ejemplo de cambios bruscos a corto plazo, es decir, de antipersistencia. Por esta razón se elabora la siguiente serie con la finalidad de estudiar la antipersistencia, la cual queda representada en la figura 4.2.3 en función de distintos pesos.

Sea P el peso dado a la aleatoriedad y sea $r \sim U(0,1)$ una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme entre 0 y 1. Se define $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ como:

$$k_0 = 0$$

$$k_i = \begin{cases} k_{i-1} & \text{si } r < P \\ k_{i-1} + 1 & \text{si } r \geq P \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} r & \text{si } r < P \\ \sin(k_i) & \text{si } r \geq P \end{cases}$$

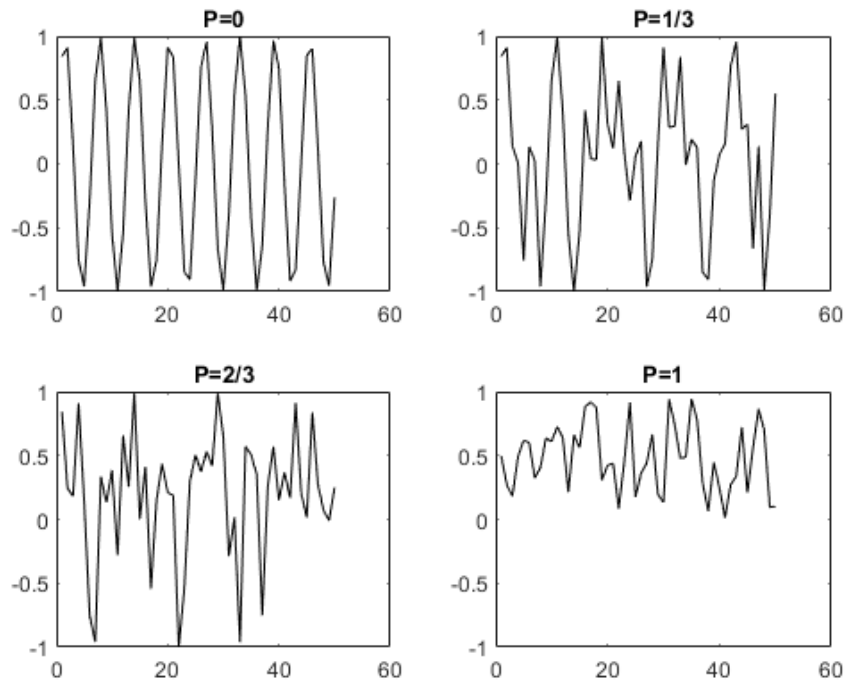


Figura 4.2.3: Gráficas de la variable X en el análisis de la antipersistencia para distintos pesos

Por tanto, con un peso $P = 1$ se llegará a una serie completamente aleatoria, al igual que sucedía anteriormente, mientras que con $P = 0$ tomará total importancia la función seno obteniendo valores del exponente de Hurst cercanos a $H = 0$. En la figura 4.2.4 se muestra la evolución del exponente de Hurst respecto al peso para un ejemplo concreto. De esta forma, se verifica la eficacia del análisis R/S para clasificar en series persistentes, antipersistentes o aleatorias, análisis que será de vital importancia a lo largo del estudio.

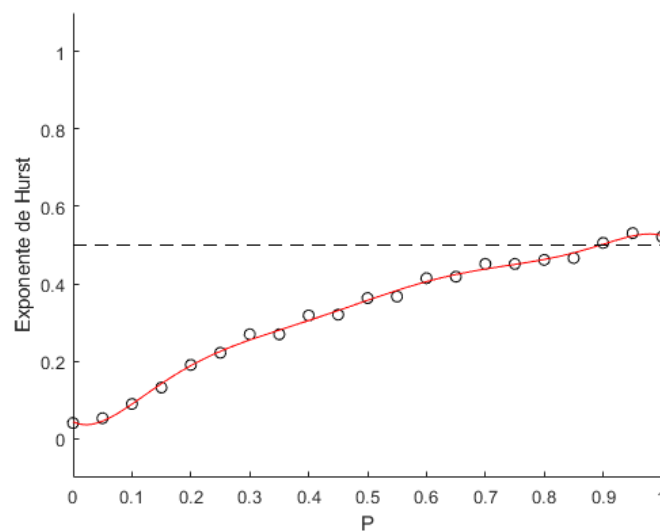


Figura 4.2.4: Evolución del exponente de Hurst respecto a un análisis de antipersistencia

En la elección de los parámetros de entrada para el cálculo del exponente de Hurst se encontraron resultados inestables que dependían del número de subintervalos que se querían utilizar dentro del método como se detalla a continuación.

El análisis R/S calcula el estadístico R/S en función de una longitud de subintervalo m para luego estimar el exponente de Hurst como la pendiente de la recta de regresión de estos valores. Por tanto, para obtener una estimación fiable interesa contemplar distintas longitudes de subintervalos y en la misma proporción. A modo de ejemplo, se elabora la figura 4.2.5 en la que se comparan dos gráficas en escala log-log de los valores obtenidos del estadístico R/S frente a la longitud del subintervalo. Ambas gráficas son una representación del análisis R/S sobre los datos de la precipitación diaria recogida por la estación de La Coruña empleando distintos subintervalos.

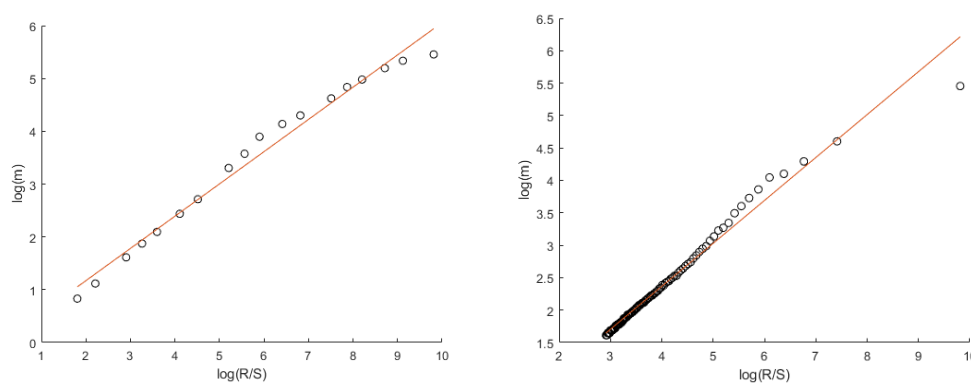


Figura 4.2.5: Gráfica log-log del análisis R/S de la precipitación diaria de la estación de La Coruña empleando distintos subintervalos

En la gráfica de la izquierda se observan unos valores más equiespaciados respecto a la gráfica de la derecha, por lo que daría una estimación más fiable del exponente de Hurst, es decir, de la pendiente de la recta de regresión, ya que se toman en consideración longitudes de subintervalos mejor distribuidas en el espacio. Los valores del exponente de Hurst son $H = 0.6107$ y $H = 0.6624$ respectivamente, lo que refleja esa inestabilidad comentada anteriormente. Por este motivo y por coherencia en el estudio, se utilizarán los mismos subintervalos en el análisis del rango reescalado para todas las estaciones a analizar de manera que estos queden bien distribuidos. En concreto, se dividirán las series en 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 30, 50, 70, 100, 200, 300, 500, 700, 1000, 2000 y 3000 subintervalos para los datos de la precipitación diaria en 50 años recogidos por las distintas estaciones, al igual que se empleó al elaborar la grafica de la izquierda en la figura anterior.

Con el objetivo de estudiar la fractalidad de estas series temporales se recurre a observar la variabilidad del exponente de Hurst a distintas escalas. Como ejemplo, se utiliza nuevamente la estación de La Coruña junto a las estaciones de Madrid y Sta. Cruz de Tenerife. Se agruparon esta vez los datos de la precipitación en ventanas de 1, 2, 5 y 7 días en vez de únicamente ventanas diarias. De forma similar al apartado anterior, en función de la ventana que se emplee se calculará el exponente de Hurst mediante el análisis R/S utilizando distintos subintervalos con el objetivo de distribuirse de un modo equitativo en el espacio:

- Semanal: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 30, 50, 70, 100, 200, 300, 500 y 700 subintervalos.
- 5 días: idéntico al semanal más 1000 subintervalos.
- 2 días: idéntico a los 5 días más 2000 subintervalos.
- Diario: idéntico a los 2 días más 3000 subintervalos.

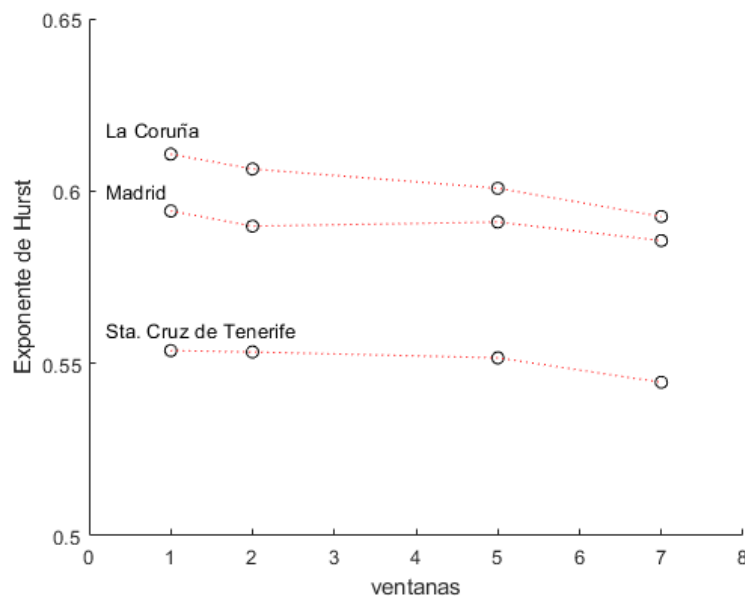


Figura 4.2.6: Evolución del exponente de Hurst en distintas ventanas para la estación de La Coruña, Madrid y Sta. Cruz de Tenerife

Como se observa en la figura 4.2.6, el exponente de Hurst varía levemente al estimarlo empleando distintas escalas temporales, acercándose así al concepto de invarianza de escala, es decir, al concepto de autosimilaridad, aunque hay que tener en cuenta la presencia o no de conductas multifractales como se verá más adelante. Siendo más estrictos, los valores del coeficiente de Hurst se mueven en torno a $H = 0.60$ en la estación de La Coruña, $H = 0.59$ en la estación de Madrid y $H = 0.55$ en la estación de Sta. Cruz de Tenerife, como se observa en la tabla 4.2.1, mostrando a su vez características persistentes a la par que autosimilares.

Concluyendo, en este apartado se verifica el análisis R/S como una herramienta eficaz para determinar el comportamiento de una serie temporal. Sin embargo, es necesario determinar coherentemente los subintervalos a utilizar ya que puede conducir a resultados inestables. Manteniendo esto presente es posible comparar distintas series y diferenciarlas respecto su naturaleza fractal, además de poder trabajar con distintas ventanas o escalas temporales, siempre que no se llegue a extremos, debido a sus características autosimilares, y poder caracterizar estas series.

		Ventana temporal			
		Diario	2 días	5 días	Semanal
Exponente de Hurst	La Coruña	0.6107	0.6064	0.6008	0.5926
	Madrid	0.5942	0.5898	0.5910	0.5856
	Sta. Cruz de Tenerife	0.5537	0.5533	0.5516	0.5445

Tabla 4.2.1: Evolución del exponente de Hurst en distintas ventanas para la estación de La Coruña, Madrid y Sta. Cruz de Tenerife

4.2.2. Análisis multifractal

El objetivo del estudio multifractal es determinar el comportamiento multifractal de estas series temporales con el objetivo de esclarecer su naturaleza. Se empleará el método MFDFA, visto en el capítulo anterior, implementado en *Matlab*, [40], con el que se obtiene el exponente de Hurst generalizado, el exponente de masa y el espectro multifractal.

Al igual que sucedía en el análisis R/S, se obtienen resultados inestables dependiendo de los subintervalos a utilizar. Por esta razón, se dividirán las series en 16, 20, 25, 32, 40, 51, 64, 81, 323, 406, 512, 645, 813 y 1024 subintervalos para cada una de manera que quede de un modo repartido. Así mismo, se obtendrá el exponente de Hurst generalizado utilizando una regresión lineal en el cálculo de YR , así como calcular los distintos exponentes para los órdenes de $q = -10$ a $q = 10$ en intervalos de 0.25.

A la hora de aplicar el método MFDFA se encontraron problemas al utilizar los datos de la precipitación recogidos en ventanas diarias. En la figura 4.2.7 se muestra cómo varía el exponente de masa y el exponente de Hurst generalizado así como el espectro multifractal para los datos de la precipitación de la estación de La Coruña, los mismos que se utilizaron previamente, recogidos en ventanas diarias. Se puede apreciar un pico

inesperado al observar cómo varía el exponente de masa, o una gran cantidad de huecos vacíos en el espectro multifractal, lo que debería representar una figura similar a la de una parábola invertida. Este extraño comportamiento se debe al gran número de valores nulos de la cantidad de agua proyectada en los datos, ya que al medir en ventanas diarias es común no registrar datos de precipitación.

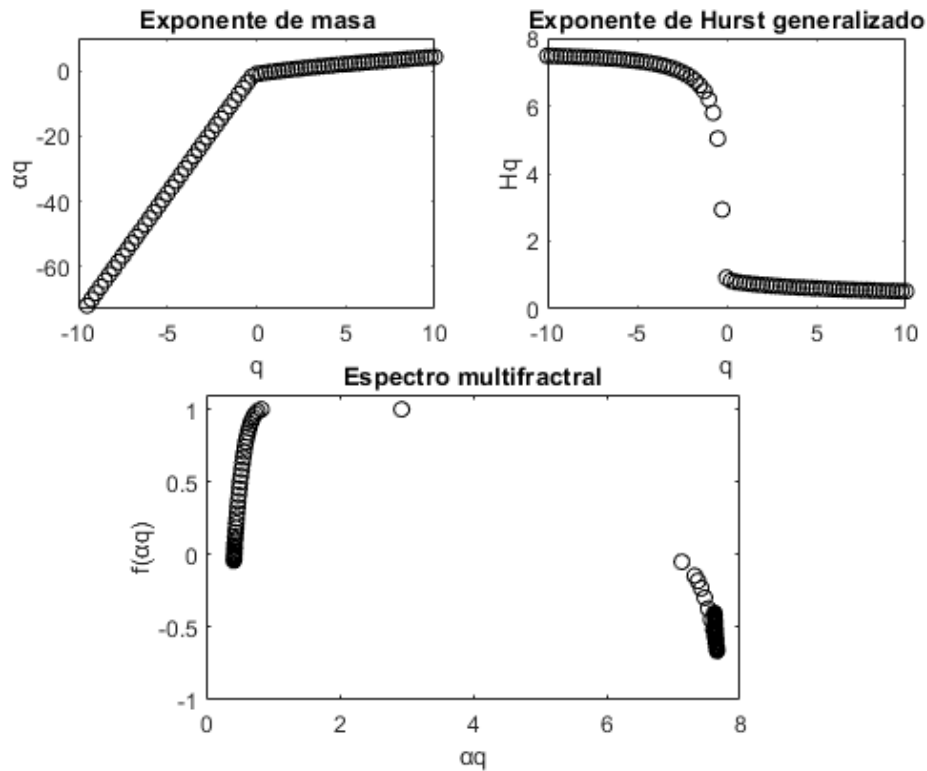


Figura 4.2.7: Gráficos del exponente de masa, el exponente de Hurst generalizado y el espectro multifractal para los datos de la estación de La Coruña recogidos en ventanas diarias

Para poder analizar la multifractalidad de los datos mediante el método MFDFA hay que tener en cuenta que demasiados valores nulos pueden llevar a resultados inestables, como ocurre en la figura anterior. Por esta razón, en el estudio se agruparán los datos en ventanas de dos semanas para el análisis multifractal en vez de ventanas diarias como se utilizará en el estudio monofractal.

En la figura 4.2.8 se realizó el mismo estudio multifractal con los datos de la precipitación de la estación de La Coruña, esta vez en ventanas de 14 días. Se pueden apreciar unos resultados distintos en los que no se suceden estos extraños comportamientos obtenidos anteriormente. Además, este análisis revela un claro comportamiento multifractal como se comprueba al observar la no linealidad del gráfico del exponente de masa, o al observar la construcción del espectro multifractal, con un ancho espectral de 0.4832. Recordando el capítulo anterior, cuanto mayor sea el ancho del espectro multifractal, mayor será la multifractalidad del objeto. Por otra parte, el

exponente de Hurst generalizado da una caracterización de la serie temporal y tendrá tantos coeficientes como órdenes q se quieran utilizar.

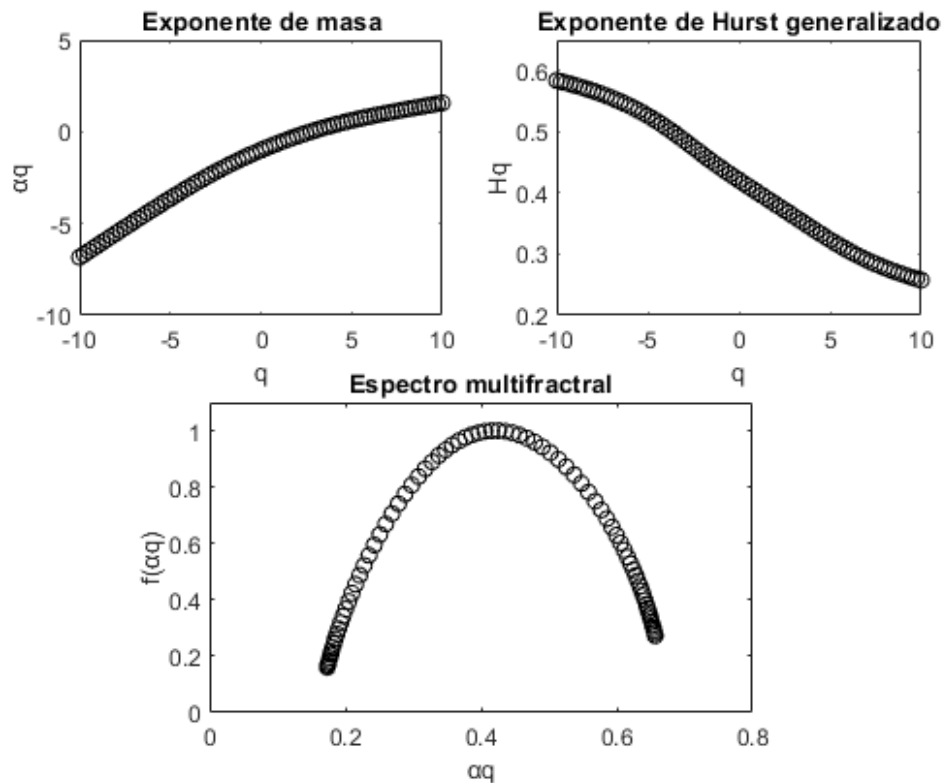


Figura 4.2.8: Gráficos del exponente de masa, el exponente de Hurst generalizado y el espectro multifractal para los datos de la estación de La Coruña recogidos en ventanas de dos semanas

En conclusión, mediante el método MFDFA se puede determinar el grado de multifractalidad de una serie respecto a otra siempre que se traten con las mismas ventanas y subintervalos, al igual que sucedía en el análisis R/S, y, por simplificación, para este estudio solo se utilizará el ancho espectral de cada serie para comparar entre las distintas estaciones.

Es importante entender que tanto para el análisis monofractal como para el análisis multifractal no se consiguen alcanzar valores universales, ya que dependiendo de los parámetros que se empleen puede llegarse a resultados diferentes como se vio anteriormente. Sin embargo, en conjunto es posible proporcionar una caracterización global del comportamiento de estas series, así como clasificarlas respecto a una mayor persistencia o antipersistencia, o respecto a un mayor comportamiento multifractal.

4.3. Resultados

4.3.1. Análisis monofractal

Se llevó a cabo el cálculo del exponente de Hurst, H , para los datos de precipitación en cada provincia española, a excepción de Ávila, Álava, Lugo, Palencia y Jaén, desde el año 1970 hasta el 2019 obteniéndose los valores recogidos en la tabla 4.3.1.

Se obtuvieron valores entre $H = 0.54$ y $H = 0.65$ dotando a la precipitación en España con un comportamiento ligeramente persistente. Estos resultados se podrían traducir en un comportamiento suave sin presentar demasiados cambios bruscos, es decir, días lluviosos son seguidos de días aún más lluviosos cambiando el proceso a días sin lluvia seguidos de aún más días sin precipitaciones representando un aspecto suave. Cabe destacar que la mayoría de las provincias reflejan valores del exponente de Hurst alrededor de $H = 0.5947$ alcanzando el valor más alto en Pontevedra con $H = 0.6551$ y el valor más bajo en Zaragoza con $H = 0.5478$.

Comunidad autónoma	Provincia	H
Galicia	La Coruña	0.6107
	Pontevedra	0.6551
	Ourense	0.6122
	Lugo	-
Asturias	Asturias	0.5990
Cantabria	Cantabria	0.6120
País Vasco	Vizcaya	0.5971
	Guipúzcoa	0.5809
	Álava	-
Cataluña	Lleida	0.5541
	Girona	0.6012
	Barcelona	0.5906

Comunidad autónoma	Provincia	H
Com. Madrid	Madrid	0.5942
Castilla-La Mancha	Guadalajara	0.6020
	Toledo	0.5836
	Cuenca	0.5923
	Ciudad Real	0.6078
	Albacete	0.5789
Aragón	Huesca	0.5919
	Zaragoza	0.5478
	Teruel	0.5812
Extremadura	Cáceres	0.6126
	Badajoz	0.6199
Comunidad Valenciana	Castellón	0.5783

	Tarragona	0.5566
Castilla y León	León	0.6154
	Burgos	0.6073
	Zamora	0.6090
	Valladolid	0.5987
	Segovia	0.5920
	Soria	0.5786
	Salamanca	0.5890
	Palencia	-
	Ávila	-
La Rioja	La Rioja	0.5710
Navarra	Navarra	0.6074
Islas Baleares	Islas Baleares	0.5938

	Valencia	0.5841
	Alicante	0.5701
Andalucía	Huelva	0.6177
	Sevilla	0.6012
	Córdoba	0.6439
	Cádiz	0.5994
	Málaga	0.6152
	Granada	0.6231
	Almería	0.5813
	Jaén	-
Reg. Murcia	Murcia	0.5763
Islas Canarias	Las Palmas	0.5632
	Sta. Cruz de Tenerife	0.5537

Tabla 4.3.1: Exponente de Hurst de cada provincia española para el periodo 1970-2019

En la figura 4.3.1 se representa el mapa de color referido a los valores del exponente de Hurst de cada provincia española. En la figura 4.3.2 se ilustra un mapa de color de la precipitación media anual entre los años 1981 y 2010 elaborado por AEMet, donde se puede apreciar como las zonas de mayor precipitación quedan reflejadas en la figura 4.3.1 con valores del exponente de Hurst altos respecto al resto de provincias, mientras que las zonas de menor precipitación se relacionan con valores del exponente de Hurst bajos.

El litoral del mar Cantábrico se sitúa en la zona norte y más lluviosa de España cuyas provincias alcanzan valores del exponente de Hurst ligeramente superiores a la media total de $H = 0.5947$. En cuanto a las provincias con menor precipitación, algunas zonas destacables como el sureste de España donde se encuentran Alicante, Murcia, Almería y Albacete con valores que no superan $H = 0.5850$ y son de las localizaciones menos lluviosas del país, u otras como Toledo con un exponente de $H = 0.5836$, Zaragoza con

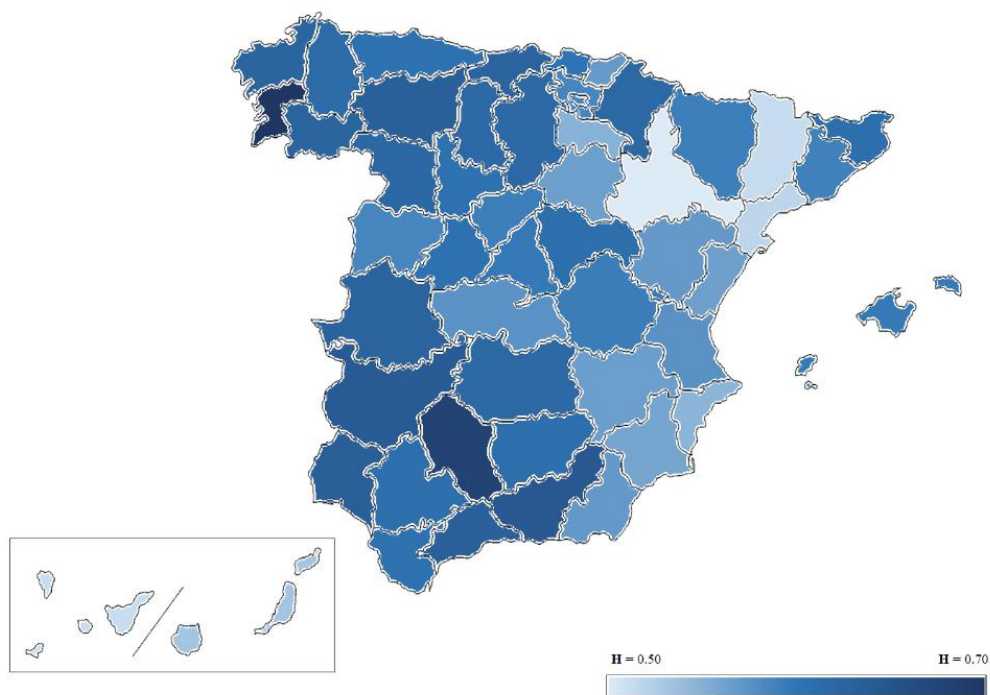


Figura 4.3.1: Representación del exponente de Hurst para el periodo 1970-2019 en España

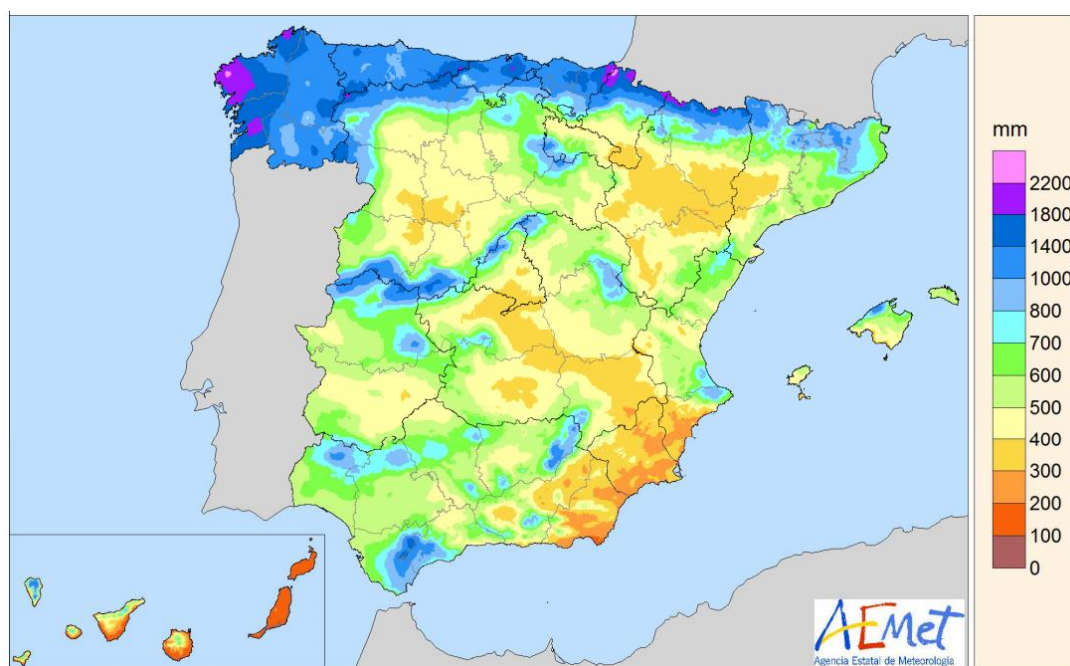


Figura 4.3.2: Precipitación media anual recogida por AEMet para el periodo 1981-2010

$H = 0.5478$ o las Islas Canarias con valores cercanos a $H = 0.56$. No obstante, existen otras provincias que alcanzan valores altos, como Córdoba con un exponente de $H = 0.6439$, y no se corresponden con las zonas más lluviosas del país. Análogamente sucede lo mismo respecto a las zonas con menor precipitación, como La Rioja con un exponente de $H = 0.5710$.

Este análisis llevado a cabo descubre conductas más persistentes en aquellas zonas más lluviosas del país respecto a las menos lluviosas, lo que conlleva a que las localizaciones con menor precipitación tengan un comportamiento más impredecible. Sin embargo, esta regla parece aplicarse a los casos más extremos dejando a las zonas intermedias sin un comportamiento aparentemente significativo respecto al exponente de Hurst y el resto de provincias.

4.3.2. Análisis multifractal

Se llevó a cabo el cálculo del ancho del espectro multifractal, $\alpha_{max} - \alpha_{min}$, denotado por simplificación como α_r , para la precipitación en cada provincia española, a excepción de Ávila, Álava, Lugo, Palencia y Jaén, desde el año 1970 hasta el 2019 obteniéndose los valores recogidos en la tabla 4.3.2. Se consiguieron valores entre $\alpha_r = 0.3$ y $\alpha_r = 1$ alcanzando el valor más bajo en Segovia con $\alpha_r = 0.3159$ y el más alto en Las Palmas con $\alpha_r = 1.036$. El valor medio es de $\alpha_r = 0.5061$.

Comunidad autónoma	Provincia	Ancho espectral
Galicia	La Coruña	0.4832
	Pontevedra	0.4918
	Ourense	0.5402
	Lugo	-
Asturias	Asturias	0.3480
Cantabria	Cantabria	0.3542
País Vasco	Vizcaya	0.4196
	Guipúzcoa	0.3367

Comunidad autónoma	Provincia	Ancho espectral
Com. Madrid	Madrid	0.4568
Castilla-La Mancha	Guadalajara	0.4195
	Toledo	0.5466
	Cuenca	0.4532
	Ciudad Real	0.5288
	Albacete	0.5372
Aragón	Huesca	0.3598
	Zaragoza	0.4678

	Álava	-		Teruel	0.4014
Cataluña	Lleida	0.4912	Extremadura	Cáceres	0.5187
	Girona	0.4789		Badajoz	0.6055
	Barcelona	0.5589	Comunidad Valenciana	Castellón	0.5183
	Tarragona	0.5294		Valencia	0.6722
Castilla y León	León	0.5294		Alicante	0.7099
	Burgos	0.4594	Andalucía	Huelva	0.5324
	Zamora	0.4166		Sevilla	0.6454
	Valladolid	0.4170		Córdoba	0.5671
	Segovia	0.3159		Cádiz	0.6021
	Soria	0.4318		Málaga	0.7140
	Salamanca	0.4182		Granada	0.5345
	Palencia	-		Almería	0.6080
	Ávila	-		Jaén	-
La Rioja	La Rioja	0.4801	Reg. Murcia	Murcia	0.5427
Navarra	Navarra	0.4004	Islas Canarias	Las Palmas	1.0639
Islas Baleares	Islas Baleares	0.359		Sta. Cruz de Tenerife	0.7694

Tabla 4.3.2: Ancho espectral de cada provincia española para el periodo 1970-2019

En la figura 4.3.3 se representa el mapa de color referido a los valores del ancho del espectro multifractal de cada provincia española. En la figura 4.3.4 se ilustra un mapa de color de la precipitación media anual diferenciando entre cada estación del año para el periodo 1981-2010 elaborado por AEMet, donde se puede apreciar como en la zona sur de la península ibérica junto a las Islas Canarias varían más los niveles de precipitación, siendo verano la estación más característica frente al resto, mientras que en la zona norte de la península junto a las Islas Baleares la precipitación muestra un comportamiento sin cambios tan significativos, más uniforme, debido a que no se suceden tantos periodos de

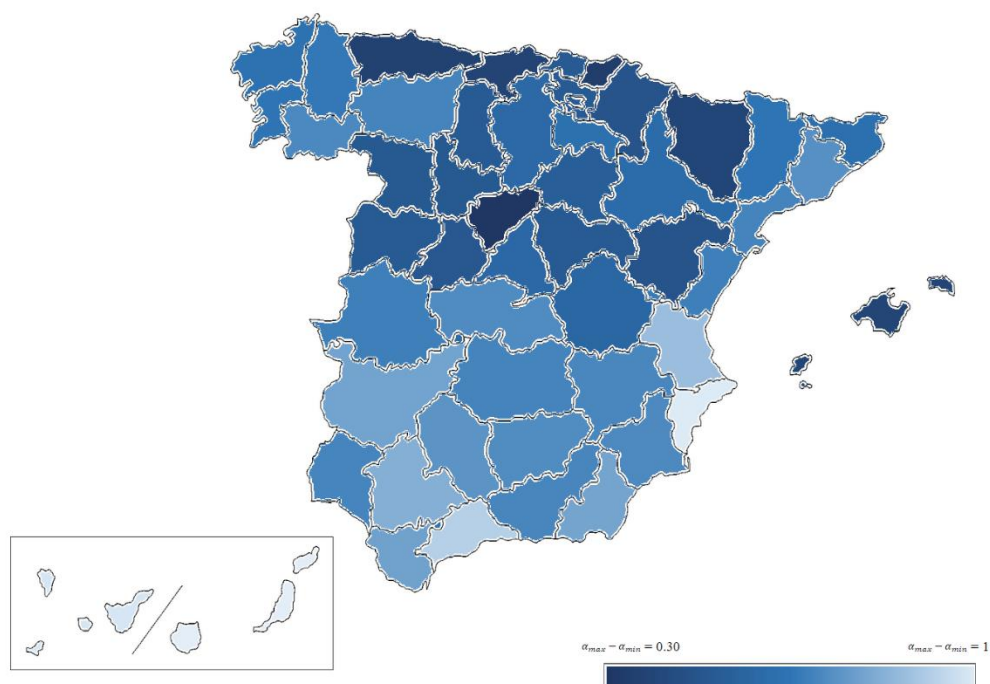


Figura 4.3.3: Representación del ancho espectral para el periodo 1970-2019 en España

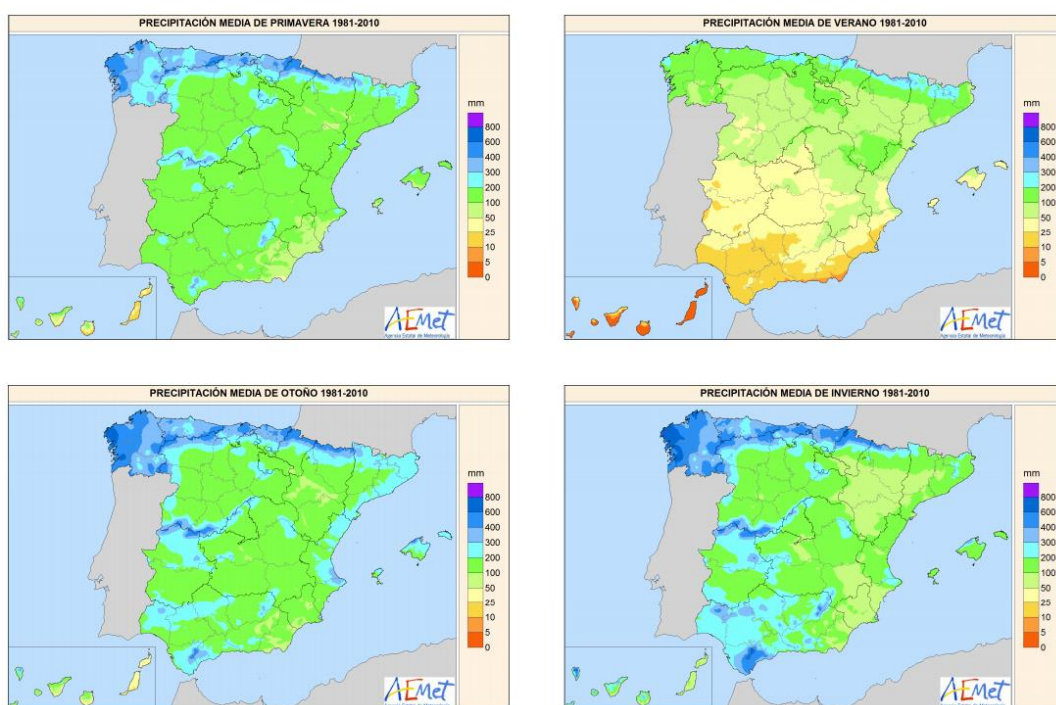


Figura 4.3.4: Precipitación media por estaciones recogida por AEMet en el periodo 1981-2010

sequía. Este comportamiento queda reflejado en la figura 4.3.3 con valores más bajos del ancho espectral en la zona norte de la península e Islas Baleares, mientras que en la zona sur e Islas Canarias toman los valores más altos del ancho espectral.

Este análisis descubre un mayor grado multifractal en la zona sur del país respecto a la zona norte, diferenciando respecto a la variabilidad de los niveles de precipitación. El estudio distingue entre conductas más regulares, sin presentar grandes cambios, respecto a conductas más intermitentes, más esporádicas, reflejándolas estas últimas con valores más altos del ancho espectral, es decir, otorgando mayor importancia a la posibilidad de tratarse de diferentes estructuras fractales que coexisten en una misma.

Nótese que existen zonas del sur peninsular más lluviosas que algunas zonas del norte aunque, sin embargo, presentan un mayor índice multifractal, por lo que no tiene por qué estar directamente relacionado sino respecto a su variabilidad.

4.4. Conclusiones

El análisis monofractal descubre comportamientos persistentes en la precipitación de España tomando valores más altos, por lo general, en las zonas más lluviosas del país respecto a las menos lluviosas. Esto se traduce en conductas que están relacionadas con patrones de comportamiento definidos suaves, sin cambios demasiados bruscos, de forma que lo que pase en el futuro dependerá de alguna manera de lo que haya ocurrido en el pasado. Sin embargo, las zonas con menor precipitación tendrán un carácter más impredecible que las zonas con mayor precipitación. Este análisis puede aportar un punto de vista para determinar la fiabilidad de eventuales predicciones futuras.

El análisis multifractal describe conductas multifractales en la precipitación del país mostrando una significativa distinción entre la zona norte peninsular junto a las Islas Baleares, respecto a la zona sur peninsular junto a las Islas Canarias. La zona sur presenta un mayor índice multifractal respecto a la zona norte, lo que se identifica con un mayor grado de variabilidad de la precipitación en esa zona. Se puede concluir que la zona norte de España presenta una precipitación más uniforme respecto a la zona sur que es más irregular. Este análisis revela además lo lejos que puede llegar a estar de un objeto fractal puro, es decir, de una estructura exactamente autosimilar.

Cabe destacar la presencia de resultados inestables dependiendo de los parámetros a utilizar para el cálculo de los distintos coeficientes del estudio. Sin embargo, pese a no alcanzar valores universales, es posible llegar a describir conductas y comportamientos que permitan comprender la naturaleza de la precipitación en España, convirtiendo al análisis fractal en una herramienta compleja y útil para el estudio de este trabajo.

Bibliografía

- [1]. O. Delgadillo Ruiz, J. A. Leos Rodríguez, P. P. Ramírez Moreno y R. D. Valdez Cepeda, *Análisis fractal de series de tiempo de anomalías de variables de frijol en México*. CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva, vol. 22, no. 3, pp. 233-241, 2015.
- [2]. L. Cabrera Brito, *Análisis fractal de procesos dinámicos en el océano*. Tesis. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. 2016.
- [3]. A. López-Lambraño, E. Carrillo-Yee, C. Fuentes, A. López-Ramos y M. López-Lambraño, *Una revisión de los métodos para estimar el exponente de Hurst y la dimensión fractal en series de precipitación y temperatura*. Revista Mexicana de Física, vol. 63, no. 3, pp. 244-267, 2017.
- [4]. A. A. López Lambraño, *Análisis multifractal y modelación de la precipitación*. Tesis. Universidad autónoma de Querétaro. 2012.
- [5]. E. L. Rodríguez S., *Hidrología de Hurst y Box Counting para el análisis de persistencia, volatilidad y en dos series de tiempo colombianas*. Cuadernos Latinoamericanos De Administración, vol. 8, no. 14, pp. 41-50, 2016.
- [6]. M. T. Medina Cobo, *Aplicaciones Hidrológicas del análisis multifractal de datos de precipitación*. Tesis. Universidad de Córdoba. 2018.
- [7]. María B. Arouxet y Verónica E. Pastor, *Caracterización de series climáticas usando el exponenete de Hurst*. Mecánica Computacional, vol. 36, pp. 411-419, 2018.
- [8]. J. J. Oñate Rubalcaba, *Fractal Analysis of Climatic Data: Annual Precipitation Records in Spain*. Theor Appl Climatol, vol. 56, pp. 83–87, 1997.
- [9]. M. Mahamud López, *Análisis fractal de caudales de ríos*. Ingeniería del agua, vol. 11, no. 2, pp. 191-199, 2004.
- [10]. O. Meseguer-Ruiz, J. Martín-Vide, J. Olcina Cantos y P. Sarricolea, *Análisis y comportamiento espacial de la fractalidad temporal de la precipitación en la España peninsular y Baleares (1997-2010)*. Boletín de la Asociación de Geógrafos Españoles, vol. 73, pp. 11-32, 2017.
- [11]. J. Muñoz San Miguel, *Autoafinidad en series temporales*. Universidad de Sevilla.
- [12]. Paul Embrechts y Makoto Maejima, *An introduction to the theory of selfsimilar stochastic processes*. International Journal of Modern Physics B, vol. 14, no. 12n13, pp. 1399-1420, 2000.
- [13]. John Lamperti, *Semi-Stable Stochastic Processes*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 104, no. 1, pp. 62-78, 1962.

- [14]. G. Sierra Juárez, *Procesos de Hurts y movimientos brownianos fraccionales en mercados fractales*. Revista de Administración, Finanzas y Economía (Journal of Management, Finance and Economics), vol. 1(1), pp. 1-21, 2007.
- [15]. Albert Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Dover Publications Inc, 1956.
- [16]. Isidro Rafael Amaro, Jhonny R. Demey y Raúl Macchiavelli, *Aplicación del análisis r/s de Hurst para estudiar las propiedades fractales de la precipitación en Venezuela*. Interciencia, vol. 29(11), pp. 617-620, 2004.
- [17]. Luis Rincón, *Introducción a los procesos estocásticos*. Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM), 2012.
- [18]. Benoît B. Mandelbrot, *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*. Science, vol. 156, no. 3775, pp. 636-638, 1967.
- [19]. L. Razdolsky, *In Probability-Based Structural Fire Load*. Cambridge University Press, pp. 89-136, 2014.
- [20]. José Francisco López, *Proceso estocástico estacionario*. Economipedia.com, 2017.
- [21]. E. Vanden-Eijnden, *Lecture 6: Wiener Process*. 2006.
- [22]. Fabricio Macià y Gerardo Oleaga, *Procesos estocásticos y ecuaciones diferenciales: una introducción*. 2007.
- [23]. Robert Brown, *A brief account of Microscopical Observations made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*. The Philosophical Magazine, 4:21, pp. 161-173, 1828.
- [24]. H.-O. Peitgen, H. Jürgens y D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. 1992.
- [25]. K. J. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. 1990.
- [26]. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman and Company, New York, 1982.
- [27]. H. E. Hurst, *Long-term storage capacity of reservoirs*. Transactions of the American Society of Civil Engineers, vol. 116, pp. 770-799, 1951.
- [28]. B. B. Mandelbrot, J. R. Wallis, *Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence*. Water Resources Research, vol. 5, pp. 967-988, 1969.
- [29]. J. Sutcliffe, S. Hurst, A. G. Awadallah, E. Brown y K. Hamed, *Harold Edwin Hurst: the Nile and Egypt, past and future*. Hydrological Sciences Journal, pp. 1557-1570, 2016.
- [30]. H. Haken y M. Wagner, *Cooperative Phenomena*. 1973.

- [31]. J. W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H. H. A. Rego, S. Havlin y A. Bunde, *Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 295, pp. 441-454, 2001.
- [32]. J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, A. Bunde, S. Havlin y H. E. Stanley, *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 316, pp. 87-114, 2002.
- [33]. M. Ausloos, *Generalized Hurst exponent and multifractal function of original and translated texts mapped into frequency and length time series*. Physical Review, vol. 86, 2012.
- [34]. Inner Space Center y University of Rhode Island, *Vocalizations Associated with Reproduction*. Discovery of Sound in the Sea, dosits.org.
- [35]. B. B. Mandelbrot y J. W. Van Ness, *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*. SIAM Review, vol. 10, no. 4, pp. 422-437, 1968.
- [36]. A. Chazarra, E. Flórez, B. Peraza, T. Tohá, B. Lorenzo, E. Criado, J. V. Moreno, R. Romero y R. Botey, *Mapas climáticos de España (1981-2010) y ETo (1996-2016)*. AEMet, 2018.
- [37]. R. F. Voss, *Random fractals: characterization and measurement*. Scaling Phenomena in Disordered Systems, pp. 1-11, 1985.
- [38]. Agencia Estatal de Meteorología, *Base de datos Meteorológica*. Recuperado de <https://datosclima.es/Aemethistorico/Descargahistorico.html>, noviembre 2020.
- [39]. Daniel Patón, *Fractales en Ecología 4: Multifractalidad*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=dW0DPB0DJhE>, abril 2020.
- [40]. Espen Ihlen, *Multifractal detrended fluctuation analyses*. MATLAB Central File Exchange, 2020.

Anexo: Análisis R/S en *Matlab*

```
%-----
%PARÁMETROS DE ENTRADA
% data = serie a analizar
% int = subintervalos en los que se divide la serie
%
%-----
%PARÁMETROS DE SALIDA
% H = exponente de Hurst
%
%-----
%CÁLCULO DEL ESTADÍSTICO R/S

n=length(data);
k1=1;

for d=int
    m=floor(n/d);
    y=0; k2=1;
    for j=m:m:n
        mu=mean(data(j-m+1:j));
        for i=j-m+1:j
            y(i)=sum(data(j-m+1:i)-mu);
        end
        R(k1,k2)=max(y(j-m+1:j))-min(y(j-m+1:j));
        S(k1,k2)=sqrt((1/m)*sum((data(j-m+1:j)-mu).^2));
        if S(k1,k2)~=0
            k2=k2+1;
        end
    end
    RS(k1)=(1/length(S(k1,1:k2-1)))*sum(R(k1,1:k2-1)./S(k1,1:k2-1));
    k1=k1+1;
end

%-----
%CÁLCULO DEL EXPONENTE DE HURST

logRS=log(RS);
logm=log(n./int);
p=polyfit(logm,logRS,1);
H=p(1)

%-----
%PINTAR GRÁFICA DEL ANÁLISIS R/S

hold on
plot(logm,logRS,'blacko')
plot(logm,p(1)*logm+p(2))
ylabel('log(m)')
xlabel('log(R/S)')
hold off

%-----
```