

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT04

El destino final del Universo

The final fate of the Universe

Supervisor/es: María del Prado Martín Moruno

Carlos Pozo Ranchal

Doble grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2024-25

Convocatoria ordinaria

Calificación: 9.7

[El destino final del Universo: estudio de singularidades en modelos de energía fantasma en cosmología relativista y teorías $f(R)$]

Resumen:

Aunque el modelo cosmológico Λ CDM sea el más aceptado actualmente, las observaciones no descartan modelos alternativos que, de confirmarse, predecirían destinos finales para el universo muy diferentes a una expansión eterna. En este trabajo se estudian los modelos de energía oscura *fantasma*, que pronostican la aparición de singularidades en un tiempo cósmico finito (o infinito). Analizamos la evolución del universo que propone cada uno y los diferentes tipos de singularidades en los que desembocarían, proporcionando una clasificación general en función de sus características. Finalmente se estudian también teorías alternativas de gravedad del tipo $f(R)$, que permiten reproducir la expansión acelerada del universo sin recurrir a la energía oscura, y se obtienen modelos capaces de describir de forma equivalente algunas de las singularidades estudiadas previamente en el marco de la Relatividad General.

Abstract:

Even though the Λ CDM cosmological model is currently the most accepted, observations do not rule out alternative models that, should they be confirmed, would predict final fates of the universe much different from an eternal expansion. In this text we study the *phantom* dark energy models, which forecast the occurrence of singularities in a finite (or infinite) cosmic time in the future. We analyze the evolution of the universe proposed by each model and the different types of singularities to which they would lead, offering a general classification according to their characteristics. Lastly, we also review metric $f(R)$ alternative theories of gravity, which are able to reproduce the state of accelerated expansion of the universe without introducing dark energy, and we obtain models which equivalently describe some of the singularities studied previously in the frame of General Relativity.

Índice

1. Introducción. El modelo cosmológico estándar (ΛCDM) y la expansión eterna	4
2. Modelos de energía oscura fantasma	6
2.1. Energía fantasma y el <i>Big Rip</i>	6
2.2. Modelos alternativos al <i>Big Rip</i>	8
2.2.1. Gas de Chaplygin generalizado fantasma y el <i>Big Freeze</i>	8
2.2.2. Singularidades repentinas (o <i>sudden</i>)	9
2.3. Clasificación de tipos de singularidades	10
2.4. Eventos cósmicos abruptos	10
2.4.1. El <i>Little Rip</i>	11
2.4.2. El <i>Little Sibling of the Big Rip</i>	11
3. Teorías alternativas de gravedad: modelos cosmológicos en teorías $f(R)$	13
3.1. Métodos de reconstrucción	13
3.2. El <i>Big Rip</i> en gravedad $f(R)$	14
3.3. El <i>Little Rip</i> en gravedad $f(R)$	15
3.4. El <i>Little Sibling of the Big Rip</i> en gravedad $f(R)$	16
4. Conclusiones	17

1. Introducción. El modelo cosmológico estándar (Λ CDM) y la expansión eterna

El modelo cosmológico estándar actual, conocido a través de las siglas Λ CDM (Λ *Cold Dark Matter*), es el modelo más sencillo que, a día de hoy, es capaz de explicar con precisión diferentes aspectos cosmológicos y astrofísicos como la expansión acelerada de nuestro universo, la existencia y las características del fondo cósmico de microondas (CMB), la formación de galaxias, las abundancias de elementos como el hidrógeno, el helio y el litio, y la estructura del universo a gran escala. Bajo este modelo se han realizado mediciones para numerosos parámetros cosmológicos a lo largo de los últimos años a través de distintas colaboraciones, como la *Planck Collaboration*, que en sus resultados en 2018 proporcionaban las siguientes restricciones para algunos de ellos:

Parámetro	Intervalo (límites 68 %)
H_0 [km s ⁻¹ Mpc ⁻¹]	$67,36 \pm 0,54$
Ω_Λ	$0,6847 \pm 0,0073$
Ω_m	$0,3153 \pm 0,0073$
Age [Gyr]	$13,797 \pm 0,023$

Cuadro 1: Intervalos del 68 % de confianza para algunos parámetros cosmológicos obtenidos en [1]. Dichos parámetros son, respectivamente, la constante de Hubble, el parámetro de densidad del contenido de energía oscura en el universo, el parámetro de densidad del contenido de materia (véanse las fórmulas (4)) y la edad estimada del universo.

Este modelo explica la contrastada actual fase de expansión acelerada del universo (véase [2]) mediante la presencia entre su contenido de una forma de energía exótica, llamada *energía oscura*, que ejercería una presión de signo negativo. Una característica adicional propia de Λ CDM es que interpreta que la densidad de dicha forma de energía permanece siempre constante a lo largo de la evolución del universo, lo que le otorga el sobrenombre de *constante cosmológica*, comúnmente representada mediante la letra Λ .

Siguiendo el Principio Cosmológico, el universo es, a escalas suficientemente grandes, homogéneo e isótropo. En este escenario, la métrica usada para describirlo es la de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2) \right), \quad (1)$$

donde $a(t)$ es una función del tiempo cósmico t conocida como *factor de escala* y que describe la evolución del universo, y las coordenadas r, θ, ϕ son las conocidas como *coordenadas comóviles*, en las que una partícula libre en el cosmos se encontraría en reposo. La constante K representa la curvatura espacial, siendo $K = -1, 0, 1$ en los casos de geometría abierta, plana o cerrada, respectivamente.

A partir de las ecuaciones campo de Einstein, y asumiendo que el contenido del universo puede ser descrito mediante un fluido perfecto, se obtienen las siguientes ecuaciones, atribuidas a Friedmann y Raychaudhuri [3]¹:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (2)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \left(p + \frac{\rho}{3} \right), \quad (3)$$

¹A lo largo de este texto se tomarán unidades tales que $8\pi G = c = \hbar = 1$.

donde H es conocido como el *parámetro de Hubble* y representa la tasa de expansión del universo, ρ y p describen respectivamente la densidad y la presión del fluido perfecto, en el que se incluyen la energía oscura, la materia (bariónica y oscura) y la radiación, y el punto indica la derivación respecto al tiempo cósmico t . Como se puede observar en el cuadro 1, cuyos parámetros definimos a continuación, la aportación actual al contenido del universo es predominantemente de la energía oscura, seguida de la materia, y siendo despreciable la aportación de la radiación.

$$H_0 \equiv H(t_0), \quad \Omega_m \equiv \frac{1}{3H^2}\rho_m = \frac{H_0^2}{a^3H^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{1}{3H^2}\rho_\Lambda, \quad (4)$$

donde t_0 denota el tiempo cósmico actual y ρ_m, ρ_Λ denotan respectivamente la aportación de la materia y de la energía oscura a la densidad total del fluido perfecto $\rho \approx \rho_m + \rho_\Lambda$. Además, al estar interesados en la expansión asintótica del universo a futuro, podemos asumir que la densidad de la materia será despreciable en comparación con la de la de energía oscura, al tender a diluirse la primera con a^3 según hemos visto en (4) [3]; por tanto, en adelante ρ y p denotarán únicamente la densidad y presión de la energía oscura como fluido perfecto. Así, a partir de las ecuaciones anteriores (2) y (3) podemos obtener una expresión para la evolución de la densidad de la energía oscura, su ecuación de continuidad [4]:

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0. \quad (5)$$

Además, de (3) se deduce que para que ocurra la expansión acelerada (es decir, $\ddot{a} > 0$) se debe cumplir la condición $3p + \rho < 0$ (o, equivalentemente, $p/\rho < -1/3$). Esto es, violaría la condición de energía fuerte [5] (véase más información sobre condiciones de energía en [6]). Por otra parte, según los últimos resultados, se observa que el universo seguiría una geometría espacial plana [1], lo que nos llevaría a tomar en las ecuaciones anteriores $K = 0$.

Sin embargo, notemos ahora que si la energía oscura se comporta como una constante cosmológica su densidad ρ permanece constante (denotándose a veces $\rho \equiv \Lambda$, con Λ constante), por lo que de la ecuación (5) se deduce que debe cumplirse la relación $p = -\rho$; equivalentemente, si para el fluido perfecto tomamos la ecuación de estado

$$p = \omega\rho, \quad (6)$$

la anterior condición implica $\omega \equiv p/\rho = -1$. Una densidad ρ constante conlleva además que en la ecuación (2) con $K = 0$ el parámetro de Hubble H sea constante, y resolviéndola como una ecuación diferencial para $a(t)$ obtenemos el siguiente comportamiento para el factor de escala [4]:

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (7)$$

El universo futuro evolucionaría así expandiéndose eternamente, mientras el factor de escala aumenta exponencialmente con el tiempo. A este comportamiento se le conoce como *asintóticamente de Sitter*, por su similitud asintótica al modelo cosmológico propuesto por Willem de Sitter: un universo de geometría plana en expansión constante, cuyo único contenido es el de una constante cosmológica [7]. En efecto, la expansión se mantiene constante, según caracterizan el parámetro de Hubble ($H = \frac{1}{3}\rho$, $\rho = \text{cte.}$) y su derivada ($\dot{H} = 0$).

En particular, durante dicha expansión el factor de escala $a(t)$ crecería a partir de cierto instante más rápido que la *distancia de Hubble* H^{-1} , que caracteriza el tamaño del universo observable y que es constante en este modelo cosmológico, por lo que las galaxias y cúmulos de galaxias desaparecerían progresivamente más allá del horizonte según aumente $a(t)$, resultando un universo cada vez más oscuro [8].

En efecto, según los resultados obtenidos por la colaboración *Planck* en 2018 [1], el parámetro de la ecuación de estado (6) se encontraría restringido a $\omega = -1,03 \pm 0,03$, siendo por tanto las

observaciones compatibles con el modelo Λ CDM. Sin embargo, dicho intervalo de error no descarta la posibilidad de que se puedan dar modelos de energía oscura con $\omega \neq -1$, es decir, diferentes a la constante cosmológica. Aquellas propuestas alternativas a la constante cosmológica en las que se considera un parámetro $\omega < -1$ son conocidas como *modelos de energía oscura fantasma*, y aquéllas con $-1 < \omega < -1/3$ (de forma que existe expansión acelerada) se conocen como *modelos de quintaesencia*.

Este texto se organiza de la siguiente manera: en la Sección 2 se presentan varios modelos cosmológicos de energía fantasma, seguido de un análisis de las singularidades o *eventos abruptos* que predicen respectivamente para el universo. Se proporcionará una clasificación general de singularidades en modelos de energía fantasma en la sección 2.3. En la Sección 3 se presentan las teorías de gravedad $f(R)$, que justifican el contexto de expansión acelerada del universo modificando el comportamiento de la gravedad respecto a la Relatividad General, de forma que no es necesaria la existencia de energía oscura. En las secciones 3.2 - 3.4 se calculan teorías $f(R)$ que reproducen de manera equivalente ejemplos de singularidades y eventos abruptos estudiados en la Sección 2. En la Sección 4 se presentan las conclusiones y discusión final, en la que se comentan los resultados obtenidos y se plantean posibles líneas de investigación futuras.

2. Modelos de energía oscura fantasma

Como mencionamos en el anterior apartado, las últimas observaciones, aunque compatibles con un modelo de constante cosmológica Λ con $\omega = -1$, no descartan la posibilidad de que el parámetro de la ecuación de estado $p = \omega\rho$ de la energía oscura sea en particular menor que -1. Además, cuestiones pendientes de resolver en el marco del modelo Λ CDM como la actual discrepancia significativa en las mediciones del valor de la constante de Hubble H_0 (*tensión de Hubble*) [9] permiten dar una justificación a explorar modelos más allá del estándar.

En este caso en el que $\omega < -1$ la energía oscura es frecuentemente denominada energía fantasma (*phantom energy*). Los modelos relacionados con la energía fantasma han ido cobrando popularidad durante los últimos años, especialmente a partir de la publicación de los artículos de R. R. Caldwell [10] en 2002 y [8] en 2003, donde se introdujo el apodo de energía fantasma y se discutieron las implicaciones de ésta para la evolución del universo, que abordaremos a continuación. En particular, este modelo podría implicar una singularidad en un tiempo finito en el futuro del universo, conocida como *Big Rip*. Posteriormente se estudiarán otras propuestas que inducen singularidades alternativas, incluidas algunas que suceden en un tiempo infinito, conocidas como eventos abruptos.

2.1. Energía fantasma y el *Big Rip*

En primera instancia, debemos resaltar que la energía fantasma tendría unas propiedades físicamente insólitas hasta el momento. Una de ellas sería que su densidad de energía aumenta con el tiempo: en efecto, si la densidad de energía oscura sigue la relación [4]:

$$\rho \propto a(t)^{-3(1+\omega)}, \quad (8)$$

(obtenida tras resolver las ecuaciones (2) y (3) tomando $K = 0$ y asumiendo ω constante) donde a es el factor de escala, al ser $\omega < -1$ el exponente es negativo y la densidad aumentaría con el tiempo según evoluciona $a(t)$. Además, por la ecuación de estado (6) también violaría la condición de energía nula (NEC), es decir,

$$\rho_p + p_p < 0, \quad (9)$$

ya que la presión p_p que ejerce sería negativa. Además, a partir de la relación (8) se puede deducir que la energía fantasma se convertiría en el componente dominante del contenido del universo

mucho más tarde de lo esperado para un modelo de constante cosmológica. Por ejemplo, si $\omega = -3$ entonces $\rho_p \propto a(t)^6$, y si $\Omega_m \sim 0,3$ a día de hoy, entonces se puede calcular que el universo contendría aún un 90% de materia oscura en un corrimiento al rojo de $z = 0,4$, en vez de $z = 1,8$ como se esperaría en Λ CDM [10].

A continuación vamos a deducir qué implicaciones tendría un modelo de energía fantasma en la evolución del universo. Para empezar, tomemos la ecuación de Friedmann (2), que describe la evolución del factor de escala $a(t)$ con respecto al tiempo cósmico t ; reescribiéndola convenientemente, usando la relación (8) para la densidad de energía oscura, obtenemos [8]

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_m}{a^3} + (1 - \Omega_m)a^{-3(1+\omega)} \right], \quad (10)$$

donde H_0 es el valor actual del parámetro de Hubble, y Ω_m es el parámetro de densidad de materia. Como ya se ha mencionado anteriormente, con el valor actual de $\Omega_m \sim 0,3$ la energía fantasma ya sería dominante a día de hoy; además, con $\omega < -1$ ésta sería cada vez más dominante a medida que el universo se expande. Por lo tanto, para analizar la evolución de $a(t)$ en el futuro podemos desprestigiar el primer término de la anterior ecuación, correspondiente al contenido de materia. Así, tras resolver la anterior ecuación diferencial para el factor de escala, es posible calcular que $a(t)$ se haría infinito en un tiempo finito t_{rip} , tal que [8]:

$$t_{rip} - t_0 \simeq \frac{2}{3} |1 + \omega|^{-1} H_0^{-1} (1 - \Omega_m)^{-1/2} \quad (11)$$

respecto al tiempo actual t_0 . Por ejemplo, si tomamos $\omega = -3/2$ y $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, por la fórmula anterior el tiempo hasta la ocurrencia de la singularidad desde el momento actual sería de $t_{rip} - t_0 \simeq 22 \text{ Gyr}$.

Cuando se alcanzase $t = t_{rip}$, el factor de escala $a(t)$ divergiría, lo que implicaría según la relación (8) que la densidad de energía oscura ρ_p también divergiría, a su vez que la presión p_p siguiendo la ecuación de estado (6). Lo mismo sucedería para el parámetro de Hubble H y su derivada \dot{H} (véase (2) y (3)), haciendo que el *escalar de curvatura* obtenido de las ecuaciones de Einstein y definido por [4]

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right) = 6 \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = \rho - 3p. \quad (12)$$

también se hiciera infinito, causando así una singularidad.

Esta singularidad, intrínseca a la energía fantasma, se conoce como *Big Rip*. Sin embargo, el efecto más llamativo de esta situación sería que, debido a la superaceleración de este modelo, todos los sistemas ligados gravitacionalmente se desintegrarían antes de que sucediese la singularidad (lo que le da el nombre de *Big Rip*, un “gran desgarró”), que acabaría con todas las estructuras del universo.

En efecto, según la relatividad general, la fuente de un potencial gravitatorio vendría dada por la integral de volumen de $\rho + 3p$. Así, un planeta que describiera una órbita de radio R alrededor de una estrella de masa M en un universo en expansión podría desligarse de éste si se satisficiera una relación cercana a $-\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)R^3 \simeq M$ [8]. Atendiendo nuevamente a la relación (8), en los modelos en los que $\omega \geq -1$ la densidad de energía oscura ρ se mantiene constante o decrecería con el tiempo, por lo que el factor $-(\rho + 3p)$ no aumenta; así, si en un momento t se satisficiera $-\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)R^3 < M$ se mantendría para tiempos posteriores y el sistema permanecería ligado gravitacionalmente. Sin embargo, como ya hemos mencionado en el caso de la energía fantasma, ρ aumenta con el tiempo hasta diverger, por lo que el factor $-(\rho + 3p)$ también divergería y para un tiempo t suficientemente grande se alcanzaría $-\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)R^3 \simeq M$, desligándose el sistema.

De hecho, es posible calcular que el tiempo antes de que se alcanzase la singularidad en el que un sistema de masa M y radio R se desligaría gravitacionalmente debido al incremento de la densidad de energía fantasma sería aproximadamente [8]:

$$t_{rip} - t \simeq P \frac{\sqrt{2|1+3\omega|}}{6\pi|1+\omega|}, \quad (13)$$

donde P es el periodo orbital del sistema. Nótese que esta cantidad es independiente de Ω_m y H_0 . En el cuadro 2 se muestran algunos ejemplos del tiempo antes de la singularidad en el que se desintegrarían estructuras conocidas, como el sistema solar o la Vía Láctea, nuevamente tomando $\omega = -3/2$ y $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$:

$t_{rip} - t$	Evento
$\sim 1 \text{ Gyr}$	Destrucción de los cúmulos de galaxias
$\sim 60 \text{ Myr}$	Desintegración de la Vía Láctea
$\sim 3 \text{ meses}$	El sistema solar se desliga
$\sim 30 \text{ minutos}$	Explosión de la Tierra

Cuadro 2: Tiempo aproximado previo a que suceda la singularidad del *Big Rip* en el que se desintegrarían diferentes estructuras del universo, en el caso en que $\omega = -3/2$ y $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. [8]

No sólo aquéllos ligados gravitacionalmente, sino también todos los sistemas ligados por alguna de las fuerzas fundamentales se desintegrarían bajo argumentos similares antes de la singularidad, como los átomos o los nucleones. En este contexto crítico, sin embargo, no se descarta que puedan darse efectos asociados a otros tipo de física aún por explorar, como la gravedad cuántica, física extra-dimensional o la teoría de cuerdas, que puedan afectar de alguna manera al desenlace final [8].

Finalmente, en la ecuación de Friedmann (10) se observa que el parámetro de Hubble H no es constante como en ΛCDM , sino que aumenta con a hasta diverger en t_{rip} . En consecuencia, la distancia de Hubble H^{-1} disminuye, y así la desaparición de las galaxias a través del horizonte se ve acelerada hasta que éste acabe por cerrarse sobre nosotros [8].

De esta forma, un modelo de energía oscura fantasma en el que $\omega < -1$ parece abocar al universo a un final catastrófico, en el que todas las estructuras del universo se desintegrarían antes de llegar a una singularidad en un tiempo finito en la que $a(t)$, ρ y p divergen, conocida como *Big Rip*. Este caso sucede si consideramos que la energía oscura efectivamente cumple una ecuación de estado de tipo lineal, es decir, $p = \omega\rho$ con ω constante, como se ha tomado hasta ahora. Sin embargo, existen también otros modelos de energía oscura fantasma que consideran ecuaciones de estado diferentes, no lineales, que evitarían la aparición de un *Big Rip*, llevando en su lugar a otros tipos de singularidades.

2.2. Modelos alternativos al *Big Rip*

A continuación, vamos a analizar algunos modelos de energía fantasma que no llevan a la aparición de un *Big Rip*, sino a otros tipos de singularidades: el *Big Freeze* y una singularidad *repentina*.

2.2.1. Gas de Chaplygin generalizado fantasma y el *Big Freeze*

Este modelo fue introducido por primera vez en [11], y se basa en la idea de que la energía oscura puede ser descrita como un gas de Chaplygin generalizado (conocido también por sus siglas

en inglés GCG), cuya ecuación de estado es de la forma:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (14)$$

donde A es una constante positiva y α es un parámetro que puede tomar diferentes valores. Además, por la conservación del tensor energía-momento, la densidad de energía del gas de Chaplygin generalizado sigue la expresión:

$$\rho = \left(A + Ba^{-3(1+\alpha)} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (15)$$

donde B es una constante y a es el factor de escala. En [11] se argumenta que si $B < 0$ entonces el fluido viola la condición de energía nula ($\rho + p < 0$), por lo que la densidad crece con el factor de escala según (15), y por tanto la energía oscura sería del tipo fantasma según se vio en el apartado anterior.

Además, si se toma un valor de $\alpha < -1$, entonces la densidad de energía se aproximaría al valor constante $A^{\frac{1}{1+\alpha}}$ para valores del factor de escala a muy pequeños, y divergería cuando a alcanzase el valor finito

$$a_{max} = \left| \frac{B}{A} \right|^{\frac{1}{3(1+\alpha)}}. \quad (16)$$

Aparte, es posible aproximar la evolución del factor de escala $a(t)$ en el régimen cercano a a_{max} mediante la expresión [12]:

$$a(t) \simeq a_{max} \left\{ 1 - \left[\frac{1 + 2\alpha}{2(1 + \alpha)} \right]^{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}} A^{\frac{1}{1+2\alpha}} |3(1 + \alpha)|^{\frac{1}{1+2\alpha}} (t_{max} - t)^{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}} \right\}, \quad (17)$$

donde el término $t_{max} - t$ es el tiempo cósmico restante hasta que se alcance $a = a_{max}$; es decir, el valor crítico del factor de escala para el que ρ diverge y por tanto se produce una singularidad se alcanzaría en un tiempo finito t_{max} .

La singularidad que acabamos de describir se conoce como *Big Freeze* (o tipo III, como veremos más adelante), y se caracteriza por la divergencia de la densidad de energía oscura ρ y la presión p , pero no del factor de escala $a(t)$, que evoluciona hasta un valor finito a_{max} . Así, el universo se encontraría infinitamente lleno de energía fantasma manteniendo su evolución un tamaño finito, provocando que nada se pudiera mover dentro de él, permaneciendo “congelada” su evolución para siempre [12].

Nuevamente a como se mencionó en el caso del *Big Rip*, cerca de la singularidad del *Big Freeze* se espera que se produzcan efectos cuánticos de carácter relevante, dándose por tanto en valores intermedios del factor de escala a . En particular, en [12] se indica que en este modelo se requeriría realizar un análisis desde el punto de vista cuántico del gas de Chaplygin generalizado cerca de la singularidad.

2.2.2. Singularidades repentinas (o *sudden*)

En este caso, sea la ecuación de estado de la energía oscura de la forma [13]

$$p = -\rho - C(\rho_0 - \rho)^{-\gamma}, \quad (18)$$

donde C , ρ_0 y γ son constantes positivas. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\rho_0 > \rho$; en caso contrario, podemos simplemente cambiar el signo de C . Al ser éste un modelo de energía

fantasma, tenemos que se cumple la condición $p + \rho < 0$ y que ρ aumenta con el tiempo cósmico t . Entonces, en el límite en el que la densidad ρ se aproxime al valor ρ_0 la presión p divergería. En este modelo, el factor de escala a viene dado por [13]:

$$a \sim a_0 \exp \left[-\frac{(\rho_0 - \rho)^{\gamma+1}}{3C(\gamma + 1)} \right], \quad (19)$$

con a_0 constante, por lo que se mantendría finito en el caso $\rho = \rho_0$. Además, cerca de $\rho \sim \rho_0$ se cumple [13]:

$$t \sim t_0 - \frac{(\rho_0 - \rho)^{\gamma+1}}{C\sqrt{3\rho_0}(\gamma + 1)}, \quad (20)$$

donde t_0 es el tiempo en el que se cumple $\rho = \rho_0$, que por tanto es también un valor finito.

De esta manera hemos hallado un nuevo modelo de energía oscura fantasma en el que se produce una singularidad en la que la presión p diverge mientras que el factor de escala a , la densidad de energía ρ y el tiempo t en el que se produce son finitos. A esta clase de singularidades se las conoce como singularidades *repentinas*, o *sudden* en inglés.

2.3. Clasificación de tipos de singularidades

Como hemos visto en los apartados anteriores, existen varias singularidades diferentes que se pueden producir en modelos de energía fantasma, no sólo el *Big Rip*. A continuación ofrecemos una clasificación según las características de cada singularidad, utilizada en el ámbito de la cosmología para referirse a ellas [13]:

- Tipo I (*Big Rip*): Se produce una divergencia del factor de escala a , la densidad de energía ρ y la presión p , y por tanto del parámetro de Hubble H y \dot{H} , en un tiempo cósmico finito t . La aparición de esta singularidad es intrínseca a la energía oscura fantasma.
- Tipo II (*repentina* o *sudden*): Se produce una divergencia de la presión p en un tiempo cósmico finito t , en el que el factor de escala a y la densidad de energía ρ también poseen valores finitos. Por tanto, H se mantiene finito pero \dot{H} diverge.
- Tipo III (*Big Freeze*): Se produce una divergencia de la densidad de energía ρ y la presión p , y por tanto de H y \dot{H} , en un tiempo cósmico finito t , en el que el factor de escala a también posee un valor finito.
- Tipo IV: La densidad de energía ρ y la presión p tienden ambas a un valor finito, y así H y \dot{H} , mientras que derivadas de mayor orden del parámetro de Hubble H divergen en un tiempo cósmico finito t , en el que el factor de escala a también mantiene un valor finito.

Pese a ser ésta la más utilizada en la literatura, existen más tipos de clasificaciones de singularidades, atendiendo a diferentes criterios. Por ejemplo, en [14] se presenta una generalización de la clasificación presentada anteriormente en la que se tipifican más singularidades conocidas, como el *Big Bang* o el *Big Crunch* entre otras.

2.4. Eventos cósmicos abruptos

Hasta ahora, los modelos de energía fantasma que hemos tratado tienen en común que se produce una singularidad en un tiempo cósmico futuro *finito*. Sin embargo éstos no son los únicos: existen otros modelos en los que la singularidad se produce en un tiempo cósmico infinito, conocidos como *eventos cósmicos abruptos* (*abrupt cosmic events* en inglés). A continuación procederemos a analizar brevemente dos de ellos: los conocidos como *Little Rip* y *Little Sibling of the Big Rip*. Ambos tienen

en común, sin embargo, que se produciría la desintegración de las estructuras del universo en un tiempo cósmico finito, al igual que sucediera en un *Big Rip* (este aspecto puede consultarse en mayor detalle en las referencias [15] y [5]).

2.4.1. El *Little Rip*

Consideremos una ecuación de estado para la energía oscura de la forma [16] [15]:

$$p = -\rho - A\sqrt{\rho}, \quad (21)$$

con A una constante positiva. Por la conservación del tensor de energía-momento, se obtiene la relación [16] [15]:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{3A}{2\sqrt{\rho_0}} \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) \right]^2, \quad (22)$$

siendo ρ_0 y a_0 los valores actuales de la densidad de energía oscura y el factor de escala, respectivamente. En particular, podemos observar que ρ aumenta junto con el factor de escala a . Sustituyendo la anterior expresión en la ecuación de Friedmann (2), podemos calcular también una ecuación que muestre el comportamiento de a con el tiempo cósmico [16]:

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ \frac{2\sqrt{\rho_0}}{3A} \left[\left(1 + \frac{3A}{2\sqrt{\rho_0}} \ln \frac{a_*}{a_0} \right) \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}A}{2} (t - t_*) \right\} - 1 \right] \right\}, \quad (23)$$

donde t_* representa un tiempo cósmico futuro arbitrario en el que pueda asumir libremente que la energía oscura es el único contenido en el universo y $a_* = a(t_*)$. De esta forma, podemos comprobar que el factor de escala a divergería (y por (22) y (21) ρ y p también y, por lo tanto, H y \dot{H}) sólo en un tiempo cósmico infinito. Intuitivamente, este modelo predice una evolución del universo similar a la de un *Big Rip* pospuesto a un tiempo cósmico infinito. Además, si calculamos el parámetro $\omega = p/\rho$ de la ecuación de estado, vemos que

$$\omega(a) = -1 - \frac{A}{\sqrt{\rho_0} + \frac{3A}{2} \ln \left(\frac{a}{a_0} \right)}. \quad (24)$$

Así, según evoluciona el factor de escala a el parámetro ω crecería asintóticamente desde $\omega < -1$ hacia $\omega \rightarrow -1$. Nótese que pese a ello el universo no sería *asintóticamente de Sitter*, como sí lo es Λ CDM con $\omega = -1$, ya que en dicho caso la densidad de energía ρ y la presión p son constantes, y por consiguiente H y \dot{H} no divergen (R se mantiene finito).

2.4.2. El *Little Sibling of the Big Rip*

En este modelo, propuesto por primera vez en [5], se parte de considerar la siguiente ecuación de estado :

$$p_{DE} = -\rho_{DE} - \frac{A}{3}, \quad (25)$$

donde A es una constante positiva. El tensor de energía-momento del fluido perfecto que describe la energía oscura se conserva, proporcionando la siguiente relación entre la densidad de energía y el factor de escala [5]:

$$\rho_{DE} = \Lambda + A \ln \left(\frac{a}{a_0} \right), \quad (26)$$

siendo Λ una constante positiva (que cumple el rol de una constante cosmológica en el presente), y a_0 el valor actual del factor de escala.

Teniendo en cuenta la componente de materia en la densidad de energía $\rho = \rho_m + \rho_{DE}$ y (26), la ecuación de Friedmann (2) puede ser reescrita convenientemente de la siguiente manera [5]:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 \equiv E^2 = \Omega_m e^{-3x} + \Omega_\Lambda + \Omega_x x, \quad (27)$$

siendo

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m^0}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad (28)$$

$$\Omega_x \equiv \frac{A}{3H_0^2}, \quad x \equiv \ln\left(\frac{a}{a_0}\right), \quad (29)$$

y ρ_m^0 el valor actual de la densidad de energía de la componente de materia en el universo. En particular, para el tiempo cósmico actual se tiene $1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda$. Para el futuro la energía oscura domina frente a la materia, y la ecuación de Friedmann se puede simplificar a

$$E^2 \approx \Omega_\Lambda + \Omega_x x. \quad (30)$$

Resolviéndola, obtenemos el siguiente comportamiento del factor de escala a [5]:

$$a(t) \approx a_0 \exp\left\{-\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_x} \times \exp\left\{\frac{1}{\Omega_x} \left[\frac{\Omega_x}{2} H_0(t - t_1) + \sqrt{\Omega_x x_1 + \Omega_\Lambda}\right]^2\right\}\right\}, \quad (31)$$

donde t_1 , $x_1 = \ln(a_1/a_0)$ y a_1 son constantes. Así, podemos aproximar el parámetro de Hubble adimensional $E = H/H_0$ mediante [5]

$$E \approx \frac{\Omega_x}{2} H_0(t - t_1) + \sqrt{\Omega_x x_1 + \Omega_\Lambda}. \quad (32)$$

De esta manera, el parámetro de Hubble H diverge cuando el tiempo cósmico es asintóticamente grande, y asimismo divergerían el factor de escala a , la densidad de energía oscura ρ_{DE} y la presión p_{DE} (véase (31),(26),(25)); estaríamos ante la misma situación que nos encontramos en la singularidad del *Little Rip*. Sin embargo, en este caso la derivada de H respecto al tiempo cósmico, \dot{H} , se mantiene finita:

$$\dot{E} \approx \frac{\Omega_x}{2} H_0 \implies \dot{H} \approx \frac{A}{6}. \quad (33)$$

Este hecho marca la diferencia con el modelo del *Little Rip*, en el que tanto H como \dot{H} divergen asintóticamente con el tiempo cósmico.

Además, si prestamos atención al parámetro $\omega = p_{DE}/\rho_{DE}$:

$$\omega = -1 - \frac{A}{3\rho_{DE}}, \quad (34)$$

vemos que conforme ρ_{DE} aumenta ω tiende asintóticamente desde $\omega < -1$ hacia $\omega \rightarrow -1$, como ya sucedía en el evento abrupto del *Little Rip*. Nuevamente, no debe confundirse el comportamiento $\omega \rightarrow -1$ con que el universo sea asintóticamente de Sitter, pues para ello ρ y p deberían mantenerse constantes, en contra de lo que se observa en este caso.

3. Teorías alternativas de gravedad: modelos cosmológicos en teorías $f(R)$

Lo expuesto hasta este punto del texto tiene en común una cosa: está expresado teniendo como base teórica la Relatividad General. Sin embargo, existen teorías gravitatorias alternativas que permiten describir una evolución del universo equivalente; en particular, son capaces de explicar la expansión acelerada del universo no mediante un fluido exótico con presión negativa (es decir, la energía oscura), sino desde un punto de vista geométrico, modificando para ello determinados parámetros respecto a cómo se comporta la gravedad en la Relatividad General. Una de estas teorías es la conocida como *gravedad $f(R)$* , que modifica la acción de Einstein-Hilbert sustituyendo el escalar de curvatura R por una función de ella $f(R)$ [3]:

$$S = \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} f(R) + S_m, \quad (35)$$

y S_m tiene en cuenta los campos de materia mínimamente acoplados.

El objetivo de esta sección será lograr reproducir en última instancia los modelos del *Big Rip*, *Little Rip* y *Little Sibling of the Big Rip* utilizando teorías de gravedad $f(R)$. Para ello, describiremos previamente las técnicas utilizadas para describir en este nuevo marco teórico el perfil de expansión acelerada del universo que en la Relatividad General se obtiene mediante la introducción de la energía oscura, conocidas como *métodos de reconstrucción*. Una teoría particular tendrá una función $f(R)$ dada que nos llevará a describir una determinada expansión cósmica.

3.1. Métodos de reconstrucción

Primeramente, nos referiremos a que dos evoluciones cosmológicas son equivalentes *a nivel de fondo* si la variable geométrica H y, por lo tanto, \dot{H} , R y \dot{R} son iguales en ambas [3]. En el marco de Relatividad General, la expansión de un universo homogéneo e isótropo viene descrita por las ecuaciones de Friedmann (2) y Raychaudhuri (3) (donde encontramos relaciones para H y \dot{H}), y a partir de ellas puede determinarse la siguiente expresión para el escalar de curvatura R [3]:

$$R = 6 \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = \rho - 3p. \quad (36)$$

Además, a través de las ecuaciones de continuidad del fluido perfecto (5) y de Friedmann (2) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\dot{\rho} = -3(p + \rho) \left(\frac{1}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

$$\dot{p} = -3(p + \rho) \left(\frac{1}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dp}{d\rho}, \quad (38)$$

donde hemos asumido $p = p(\rho)$ [3]. Así, la derivada del escalar de curvatura respecto al tiempo cósmico seguirá la fórmula:

$$\dot{R} = -3(p + \rho) \left(\frac{1}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 3 \frac{dp}{d\rho} \right) \quad (39)$$

Ahora bien, dentro del marco de la teoría de gravedad $f(R)$ las nuevas ecuaciones de Friedmann y Raychaudhuri no coinciden con (2) y (3). Por ejemplo, la ecuación de Friedmann modificada resulta [3]:

$$3H^2 \frac{df}{dR} = \frac{1}{2} \left(R \frac{df}{dR} - f \right) - 3H\dot{R} \frac{d^2f}{dR^2} - 3 \frac{K}{a^2} + \rho_m, \quad (40)$$

con ρ_m siendo la densidad de energía de los campos de materia mínimamente acoplados.

De esta manera, el método de reconstrucción se basa en lo siguiente: como buscamos que la evolución cosmológica descrita por la gravedad $f(R)$ sea equivalente a nivel de fondo con la Relatividad General y reproduzca la misma expansión, se puede considerar la ecuación de Friedmann modificada (40) como una ecuación diferencial a resolver para $f(R)$, donde los parámetros H , \dot{H} , R y \dot{R} se fijan para que correspondan exactamente con los obtenidos en Relatividad General a través de (2), (3), (36), (39). Así, la teoría de gravedad de la $f(R)$ obtenida reproducirá de forma equivalente la expansión de fondo que se describe en el modelo de Relatividad General con energía oscura que se elija. Además, como en nuestro caso estamos interesados en la evolución asintótica del universo a futuro, podemos simplificar la ecuación (40) ignorando los términos relacionados con la curvatura espacial K y la materia puesto que su contribución será cada vez menor frente a la energía oscura; al igual que en el modelo de Relatividad General, hemos despreciado ρ_m frente a la densidad de energía oscura ρ . Nótese por tanto que los modelos $f(R)$ que obtengamos a continuación deberán tomarse como aproximaciones asintóticas útiles para describir el comportamiento del universo cerca de las singularidades clásicas, y no tanto como alternativas completas a la Relatividad General adecuadas para todas las escalas [3].

A continuación veremos algunos ejemplos para la resolución de este método de reconstrucción, de forma que obtengamos teorías de gravedad $f(R)$ que describan equivalentemente las singularidades del *Big Rip*, *Little Rip* y *Little Sibling of the Big Rip*.

3.2. El *Big Rip* en gravedad $f(R)$

En el modelo de energía fantasma que da lugar a la singularidad del *Big Rip* se toma la ecuación de estado $p = \omega\rho$ con parámetro constante $\omega < -1$, que se puede reescribir como

$$p = -(1 + A)\rho, \quad (41)$$

con A una constante positiva, cuyos valores se encuentran observacionalmente restringidos según se muestra en la tabla 3 de la referencia [3]. Mediante (3) podemos despejar \dot{H} en función de H^2 para obtener

$$\dot{H} = \frac{3}{2}AH^2, \quad (42)$$

y sustituyendo en (36) y (39) el escalar de curvatura y su derivada respecto al tiempo cósmico cumplen

$$R = 3(4 + 3A)H^2 \quad (43)$$

$$\dot{R} = 9(4 + 3A)H^2. \quad (44)$$

Por tanto, en este modelo la ecuación de Friedmann modificada queda de la siguiente forma [3]:

$$R^2 f_{RR} - \frac{2 + 3A}{6A} R f_R + \frac{4 + 3A}{6A} f = 0, \quad (45)$$

donde se ha usado por simplicidad la notación $f_R \equiv df/dR$ y $f_{RR} \equiv d^2f/dR^2$. Finalmente, la solución más general de la anterior ecuación diferencial para $f(R)$, obtenida en [17], es de la forma

$$f(R) = c_+ R^{\gamma_+} + c_- R^{\gamma_-}, \quad (46)$$

donde c_+ , c_- son constantes de integración y

$$\gamma_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2 + 3A}{6A} \pm \sqrt{\left[1 + \frac{2 + 3A}{6A} \right]^2 - \frac{2(4 + 3A)}{3A}} \right\}. \quad (47)$$

En general los parámetros γ_{\pm} podrían tomar valores complejos; sin embargo, atendiendo a las restricciones obtenidas observacionalmente para este modelo en [18] para los valores de A , éstas tomarían finalmente valores reales [3].

Consecuentemente, hemos hallado una familia de funciones $f(R)$ cuyas teorías describirán equivalemente, mediante un enfoque geométrico, el comportamiento asintótico del universo cerca de la singularidad del *Big Rip* a como lo haría la Relatividad General mediante la existencia de energía fantasma con ecuación de estado (41).

3.3. El *Little Rip* en gravedad $f(R)$

Como vimos anteriormente, para en el modelo del evento abrupto del *Little Rip* tomamos la ecuación de estado (21), que viene dada por:

$$p = -\rho - A\sqrt{\rho}. \quad (48)$$

Además, atendiendo a la expresión para el factor de escala a (23) podemos calcular el parámetro de Hubble H :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\rho_0}{3}} \left(1 + \frac{3A}{2\sqrt{\rho_0}} \ln \frac{a_{\star}}{a_0} \right) \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}A}{2} (t - t_{\star}) \right\}. \quad (49)$$

En particular, se observa que depende del tiempo cósmico de forma exponencial, por lo que su derivada respecto al mismo será proporcional a H :

$$\dot{H} = \beta H, \quad (50)$$

donde por simplicidad denotamos por β la constante de proporcionalidad. Haciendo uso de estas tres últimas expresiones, obtenemos el escalar de curvatura y su derivada respecto a t :

$$R = 6H(\beta + 2H) \quad (51)$$

$$\dot{R} = 6\beta H(\beta + 4H) \quad (52)$$

Debido a la forma de estas expresiones, la ecuación de Friedmann modificada (40) se simplifica escrita en función de H en vez de R [3][16]. Así, ignorando los términos ρ_m y K/a^2 según se argumentó anteriormente, dicha ecuación resulta en [3][16]:

$$\beta H^2(\beta + 4H)f_{HH} - [4\beta H^2 + H(\beta + H)(\beta + 4H)] f_H + (\beta + 4H)^2 f = 0. \quad (53)$$

La solución más general a esta ecuación diferencial es, según se muestra en [19]:

$$f(H) = C_1(H^4 - 5\beta H^3 + 2\beta^2 H^2 + 2\beta^3 H) + C_2 \left[\beta H(\beta^2 + 4\beta H - H^2) e^{\frac{H}{\beta}} + (H^4 - 5\beta H^3 + 2\beta^2 H^2 + 2\beta^3 H) \text{Ei} \left(\frac{H}{\beta} \right) \right], \quad (54)$$

donde C_1 , C_2 son constantes de integración, y Ei representa la función integral exponencial (véase definición 5.1.2 en [20]). Para obtener la función buscada $f(R)$ necesitamos por tanto hallar la expresión de H en función de R y sustituir en (54). Resolviendo en la ecuación (51) [3] resulta:

$$H = \frac{1}{12} \left(-3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 + 12R} \right). \quad (55)$$

A priori podría parecer que H no estaría unívocamente definida; sin embargo, como la densidad de energía fantasma ρ (22) aumenta con el factor de escala, también aumenta el factor de Hubble

H (49) y por tanto R (51), por lo que sólo la solución con signo positivo en la anterior expresión cumple el comportamiento deseado. Por consiguiente, la expresión de $f(R)$ buscada es [19][3]:

$$\begin{aligned}
f(R) = & c_1 \left[27\beta^4 + 150\beta^2 R - \beta (9\beta^2 + 12R)^{\frac{3}{2}} + 2R^2 \right] \\
& + c_2 \left\{ \beta \left(-3\beta^2 - 2R + 9\beta\sqrt{9\beta^2 + 12R} \right) \right. \\
& \times \left(-3\beta + \sqrt{9\beta^2 + 12R} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{4R}{3\beta}} \right\} \\
& \left. + \left[27\beta^4 + 150\beta^2 R - \beta (9\beta^2 + 12R)^{\frac{3}{2}} + 2R^2 \right] \text{Ei} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{4R}{3\beta}} \right) \right\}. \quad (56)
\end{aligned}$$

Hemos hallado así la solución más general de una familia de teorías de gravedad $f(R)$ que describen de forma equivalente el desarrollo del evento abrupto del *Little Rip* tal y como se explicó en la sección anterior. Por último, nótese que el parámetro β viene determinado por la constante A , cuyas restricciones observacionales pueden consultarse en la referencia [3].

3.4. El *Little Sibling of the Big Rip* en gravedad $f(R)$

En el modelo de este evento abrupto estudiado en el marco de la Relatividad General, vimos que la ecuación de estado utilizada (25) es de la forma:

$$p = -\rho - A, \quad (57)$$

con A una constante positiva, cuyas restricciones para dicho modelo pueden ser consultadas en la referencia [3]. Este evento abrupto se caracteriza por que la derivada respecto al tiempo cósmico del parámetro de Hubble se mantiene constante; sustituyendo en (33):

$$\dot{H} = \frac{A}{2}. \quad (58)$$

A través de las fórmulas (36) y (39) obtenemos el escalar de curvatura R y su derivada \dot{R} [3]:

$$R = 12H^2 + 3A \quad (59)$$

$$\dot{R} = 12AH. \quad (60)$$

En consecuencia, la ecuación de Friedmann modificada (40) adquiere la siguiente forma [3]:

$$3A(R - 3A)f_{RR} - \frac{1}{4}(R + 3A)f_R + \frac{1}{2}f = 0 \quad (61)$$

cuya solución más general es [21]:

$$f(R) = c_1(9A^2 - 18AR + R^2) + c_2 \left(\frac{R - 3A}{12A} \right)^{\frac{3}{2}} {}_1F_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{R - 3A}{12A} \right), \quad (62)$$

donde c_1, c_2 son constantes de integración y ${}_1F_1$ es la función hipergeométrica confluyente o función de Kummer (véase su definición en el capítulo 13 de la referencia [20]) [3].

Así, hemos conseguido obtener la familia de teorías $f(R)$ más general que reproducirá el comportamiento del universo con energía fantasma dada por (57) en el marco de la Relatividad General de manera asintótica cerca del evento abrupto del *Little Sibling of the Big Rip*.

4. Conclusiones

A día de hoy, las observaciones no terminan de arrojar absoluta certeza sobre cuál es el modelo cosmológico que describe exactamente la evolución de nuestro universo (y desconocemos si alguna vez lo sabremos realmente), y en consecuencia tampoco cuál será en última instancia el final que le aguarde, ni cuándo se producirá. No obstante, ese final no nos alcanzará con escasez de ideas sobre cómo puede llevarse a cabo. El modelo aceptado mayoritariamente en el momento actual es el conocido como Λ CDM, el más sencillo hasta la fecha capaz de explicar satisfactoriamente hechos comprobados que caracterizan a nuestro universo, como su actual fase de expansión acelerada o el fondo cósmico de microondas (CMB), entre otros. Aunque no por ello está exento de interrogantes por resolver, como por ejemplo la tensión existente en la medida de la constante de Hubble H_0 [9]. Este modelo predice que el universo se expandiría eternamente, impulsado por una forma de energía exótica de presión negativa, conocida como energía oscura, que ya dominaría y terminaría por dominar totalmente sobre el resto de componentes que forman nuestro universo: materia y radiación. A lo largo de dicha expansión el factor de escala a , que caracteriza la evolución del universo, crecería más rápido que la distancia de Hubble H^{-1} , el tamaño del universo observable, y las galaxias y cúmulos de galaxias desaparecerían progresivamente más allá del horizonte, resultando un universo cada vez más oscuro [8].

No obstante, existen más respuestas factibles, avaladas también por las observaciones, que darían lugar a destinos muy diferentes al anterior. En este trabajo nos hemos enfocado en aquellas en las que el parámetro $\omega < -1$, en contraposición al $\omega = -1$ característico de Λ CDM, para las que a la energía oscura se le otorga el apodo *fantasma*, aunque también existen modelos en los que $-1 < \omega < -1/3$, conocidos como *quintaesencia*. Los modelos con energía fantasma están caracterizados por la posible aparición de singularidades en un tiempo cósmico finito en el futuro, que a su vez pueden resultar en distintos tipos atendiendo a la clasificación que hemos proporcionado. Entre ellas podemos destacar los destinos finales del tipo *Big Rip*, en el que todas las estructuras universales se desintegrarían antes de alcanzar la singularidad en la que el factor cósmico de escala a diverge, o un *Big Freeze*, en el que la densidad infinita de la energía oscura impediría que nada pudiera moverse. Existen también propuestas que trasladarían la aparición de la singularidad a un tiempo cósmico infinitamente lejano, conocidas como *eventos abruptos*, aunque las aquí citadas no evitan la destrucción de las estructuras en un tiempo finito.

Pese a ser la teoría de la Relatividad General la base sobre la que se asienta la cosmología actual, otras teorías alternativas aspiran a reproducir el mismo comportamiento de expansión acelerada sin recurrir a la energía oscura, modificando por contra determinados aspectos de la Relatividad General para que la expansión surja de forma natural por causas geométricas, como es el caso de las teorías $f(R)$ que hemos explorado.

Un frente que será fundamental en los próximos años es el desarrollo de teorías de cosmología cuántica, alguna de ellas ya conocidas, como la teoría de cuerdas o la geometrodinámica cuántica, a la espera de que se consiga una teoría de gravedad cuántica completa y satisfactoria. En particular es conocida su relevancia en el régimen cercano al surgimiento de las singularidades *clásicas*, ya que éstas podrían potencialmente ser evitadas a través de este nuevo enfoque. Por otra parte, según los últimos resultados de DESI [22], un modelo de energía oscura dinámica ($\omega_0\omega_a$ CDM) parametrizado por $\omega(a) = \omega_0 + \omega_a(1 - a)$, $\omega_0 > -1$, $\omega_a < 0$ parecería estar favorecido frente a Λ CDM, indicando una energía oscura debilitándose y energía fantasma en un régimen pasado. En cualquier caso, el modelo cosmológico estándar se habrá de enfrentar a numerosos retos en el futuro cercano; mientras tanto, sólo nos cabe aguardar a conocer cuál será el destino final que le espere al universo.

Referencias

- [1] **Planck** Collaboration, N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A6, [arXiv:1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [astro-ph.CO]. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- [2] A. G. Riess, A. V. Filippenko, *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal* **116** no. 3, (Sept., 1998) 1009–1038. <http://dx.doi.org/10.1086/300499>.
- [3] T. Borislavov Vasilev, M. Bouhmadi-López, and P. Martín-Moruno, “Classical and quantum $f(r)$ cosmology: The big rip, the little rip and the little sibling of the big rip,” *Universe* **7** no. 8, (Aug., 2021) 288. <http://dx.doi.org/10.3390/universe7080288>.
- [4] E. J. COPELAND, M. SAMI, and S. TSUJIKAWA, “Dynamics of dark energy,” *International Journal of Modern Physics D* **15** no. 11, (Nov., 2006) 1753–1935. <http://dx.doi.org/10.1142/S021827180600942X>.
- [5] M. Bouhmadi-López, A. Errahmani, P. Martín-Moruno, T. Ouali, and Y. Tavakoli, “The little sibling of the big rip singularity,” *International Journal of Modern Physics D* **24** no. 10, (Aug., 2015) 1550078. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218271815500789>.
- [6] P. Martín-Moruno and M. Visser, “Classical and semi-classical energy conditions.” 2017. <https://arxiv.org/abs/1702.05915>.
- [7] G. F. Ellis, R. Maartens, and M. A. MacCallum, *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press, 2012.
- [8] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, and N. N. Weinberg, “Phantom energy and cosmic doomsday,” *Physical Review Letters* **91** no. 7, (Aug., 2003) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.071301>.
- [9] L. Perivolaropoulos and F. Skara, “Challenges for Λ CDM: An update,” *New Astronomy Reviews* **95** (Dec., 2022) 101659. <http://dx.doi.org/10.1016/j.newar.2022.101659>.
- [10] R. Caldwell, “A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state,” *Physics Letters B* **545** no. 1–2, (Oct., 2002) 23–29. [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)02589-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(02)02589-3).
- [11] M. Bouhmadi-López and J. A. J. Madrid, “Escaping the big rip?” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2005** no. 05, (May, 2005) 005–005. <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2005/05/005>.
- [12] M. Bouhmadi-López, P. F. González-Díaz, and P. Martín-Moruno, “Worse than a big rip?” *Physics Letters B* **659** no. 1–2, (Jan., 2008) 1–5. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2007.10.079>.
- [13] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Tsujikawa, “Properties of singularities in the (phantom) dark energy universe,” *Physical Review D* **71** no. 6, (Mar., 2005) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.71.063004>.
- [14] M. Bouhmadi-López, C. Kiefer, and P. Martín-Moruno, “Phantom singularities and their quantum fate: general relativity and beyond—a cantata cost action topic,” *General Relativity and Gravitation* **51** no. 10, (Oct., 2019) . <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-019-2618-y>.

- [15] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, and R. J. Scherrer, “The little rip,” *Physical Review D* **84** no. 6, (Sept., 2011) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.84.063003>.
- [16] T. Borislavov Vasilev, M. Bouhmadi-López, and P. Martín-Moruno, “Little rip in classical and quantum $f(R)$ cosmology,” *Phys. Rev. D* **103** no. 12, (2021) 124049, [arXiv:2103.12786](https://arxiv.org/abs/2103.12786) [gr-qc].
- [17] J. Morais, M. Bouhmadi-López, and S. Capozziello, “Can $f(r)$ gravity contribute to (dark) radiation?” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2015** no. 09, (Sept., 2015) 041–041. <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/09/041>.
- [18] A. Bouali, I. Albarran, M. Bouhmadi-López, and T. Ouali, “Cosmological constraints of phantom dark energy models,” *Physics of the Dark Universe* **26** (Dec., 2019) 100391. <http://dx.doi.org/10.1016/j.dark.2019.100391>.
- [19] A. N. Makarenko, V. V. Obukhov, and I. V. Kirnos, “From big to little rip in modified $f(r,g)$ gravity,” *Astrophysics and Space Science* **343** no. 1, (Sept., 2012) 481–488. <http://dx.doi.org/10.1007/s10509-012-1240-1>.
- [20] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “Handbook of mathematical functions dover publications,” *New York* **361** (1965) .
- [21] T. Borislavov Vasilev, M. Bouhmadi-López, and P. Martín-Moruno, “Classical and quantum fate of the little sibling of the big rip in $f(r)$ cosmology,” *Physical Review D* **100** no. 8, (Oct., 2019) . <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.084016>.
- [22] D. Collaboration, M. Abdul-Karim, *et al.*, “Desi dr2 results ii: Measurements of baryon acoustic oscillations and cosmological constraints.” 2025. <https://arxiv.org/abs/2503.14738>.