

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Departamento de Física Teórica II**



**TESIS DOCTORAL**

**Correlaciones en espaciotiempos cuánticos:  
falsabilidad del multiverso**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

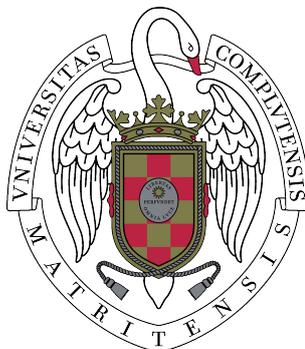
**Ana Alonso Serrano**

Directores

Pedro F. González Díaz  
Luis J. Garay  
Guillermo A. Mena Marugán

**Madrid, 2015**

Departamento de Física Teórica II  
Facultad de Ciencias Físicas  
**Universidad Complutense de Madrid**



**Tesis Doctoral**

---

**Correlaciones en espaciotiempos cuánticos:  
falsabilidad del multiverso**

---

**Ana Alonso Serrano**

Instituto de Física Fundamental  
Consejo Superior de Investigaciones Científicas



**Directores de Tesis:**

**Pedro F. González Díaz**, Instituto de Física Fundamental (CSIC)

**Luis J. Garay**, Departamento de Física Teórica II (UCM)

**Guillermo A. Mena Marugán**, Instituto de Estructura de la Materia (CSIC)

Madrid, 2015



*A mis padres.*





Quino

Study hard what interest you the most in the most un-disciplined, irreverent and original manner possible.

*Richard Feynman*



# Agradecimientos

Los poetas verdaderos tienen pasaporte para viajar por el tiempo, hacia delante o hacia atrás, y visitar todas las épocas pasadas y futuras, siguiendo posiblemente los mismos cánones que las partículas más elementales y los campos de fuerza ...

*Pedro Félix González Díaz*

Esta tesis es el resultado de unos años de trabajo en los que ha habido momentos muy difíciles, pero también otros estupendos que me han marcado de tal manera que no cambiaría por nada la experiencia que ha supuesto. Quiero empezar por expresar mi agradecimiento hacia Pedro, con quien me embarqué en esta aventura. Siempre me quedará tu manera inigualable de entender la ciencia y la enorme satisfacción de que me permitieses ser parte de ello todo el tiempo que pudimos compartir y que intenté aprovechar al máximo. Gracias por ser un maestro y, además, un amigo; y sobre todo por las conversaciones sobre monstruos violeta y tus iluminadores consejos. Sólo me queda decirte: ¡Salud y República!

Cuando, por desgracia, nos quedamos sin la figura de Pedro, no hubiese podido continuar mi camino sin todos los que estuvisteis a mi lado desde el primer momento, muy especialmente, gracias a Luis y a Guillermo, que asumisteis el enorme reto de continuar su legado conmigo y apostasteis por mí desde el principio (y siempre). Gracias por brindarme la oportunidad de llegar hasta aquí y haber aprendido tanto de vuestras distintas maneras de afrontar las cosas, por las incontables horas que me habéis dedicado y, aún así, haber tenido tiempo para compartir estupendos ratos de ocio; pero, especialmente, por poder contar con vuestra valiosa amistad. Quiero agradecer a Luis su continua guía desde que aparecí perdida en una optativa de la carrera, por llevarme

hasta Pedro, y por sacarme tantas veces del pozo desde entonces, por tu cercanía y simplemente por estar ahí. De igual manera, quiero expresar mi agradecimiento a Guillermo por marcar claramente la senda, por ver siempre el lado positivo y por saber hacer ameno lo imposible, gracias por tu apoyo constante y tu inquebrantable fe en mí.

El tiempo que he pasado en el CSIC no hubiese sido, ni de lejos, tan agradable sin los grandes compañeros que he tenido ahí. Especialmente quiero agradecer a Prado su adopción instantánea, haciéndome un hueco en el grupo, y ser siempre mi «pepito grillo», echándome un cable en todo lo que has podido (¡y más!). A Salva, gracias por las horas de filosofía y las reflexiones que tanto han supuesto para mí. A Mikel por todo lo que hemos vivido diariamente durante estos años, a Laura por aguantarme con mis dudas y la reciente okupación de despacho, a Bea por el aire fresco que ha traído al grupo y a Alberto, Dani, Javi y Merce por todos los ratos que hemos pasado dentro y fuera del trabajo. A los que han sido como mis compañeros, a Iñaki por las horas compartidas arreglando el mundo; a Jose por todo lo que me has aguantado; a la gente extraordinaria con la que he pasado tantos ratos en el CSIC, pero, sobre todo, de cañas en el B53 (donde no puedo dejar de mencionar a Jana, Leo, Gil, Jose Antonio, Rocío y todos los demás con los que he pasado tan buenos momentos); tampoco puedo olvidarme de la gente de la Complutense: Bea, Izarra, Markus, Vivi, Joserra, y el resto del grupo, con los que he disfrutado de tantas horas durante este tiempo.

Por otro lado, quiero hacer mención a Orfeu y Catarina con quienes he tenido el placer de trabajar, al «grupo» de JARRAMPLAS al que agradezco los buenos ratos de estos años y todo lo que he aprendido con vosotros, y a todos los demás increíbles científicos que he conocido durante estos años y que me han aportado mucho más de lo que creen.

Tengo que agradecer a mi instituto, el IFF, por permitirme realizar esta tesis en él. Tampoco puedo olvidar el apoyo continuo y colaboración en numerosos aspectos científicos y administrativos de esta tesis que he tenido en el IEM, ni a la UCM por abrirme siempre sus puertas y hacerme hueco en el departamento de Física Teórica II cuando voy por allí.

Nada habría sido igual sin la válvula de escape que ha supuesto el grupo de teatro y la gente extraordinaria que lo conforma, por lo que tengo que dar las gracias a todo TeatrIEM (y en particular a nuestro director, José Vicente), y ya sabéis: la función debe continuar. Siguiendo en el ámbito de las actividades que me han acompañado estos años también tengo un agradecimiento especial para Enrique, por aportarme su, siempre interesante, punto de vista y su amistad, compartiendo a la vez la organización de las jornadas de Filocosmología, en las que el enriquecedor ambiente me ha ayudado a

ampliar horizontes, y, naturalmente, a todos los que, de una manera u otra, han formado parte de las mismas. También tengo un recuerdo especial para las Jornadas de Teatro Científico en Mérida y Medellín, a las que dio vida Pedro y que le han trascendido, quedando impregnadas de su espíritu gracias a toda la gente maravillosa (especialmente Carmen) que ha participado y puesto su granito de arena en este innovador y creativo proyecto que tanto me ha hecho crecer y que me ha marcado un punto de inflexión en la manera de entender la divulgación científica y la heterogeneidad de la misma.

Sé que no podría haber alcanzado esta meta sin la ayuda permanente de los amigos tan increíbles que tengo. A Blanki, Belen, Hob y la Rubia os debo un buen trozo de esta tesis por todo lo que habéis contribuido a ella y en mi vida, por vuestro apoyo incondicional en todos los aspectos, por conseguir que me levantara cuando he tocado fondo y por compartir conmigo vuestros espacios. Gracias también especialmente a Willy, Edu, Merche, Víctor, Berto, Sara (la Negra), Greeny, Leti, Ire, Carlos, Marti, Sergio, Roi, Pitufa, Játor, César y Jesús, por estar siempre ahí, por acudir a las llamadas de socorro, por los viajes, las noches que no acaban, por mostrarme la vida de otro color y aportarme el equilibrio necesario para seguir adelante. A Deivid, por ser como mi hermano. A Vane, Kike, Eko, Stefan, Salva, Peri, Sergi, Adolfo, Elena, Piter, Francky, Javi, Loren, Yorsh, Lucía, Nando, Ramon, Rober, Carla, Jorge, Pablo, y todos los demás amigos y colegas que no puedo enumerar pero que están en mi pensamiento; porque todos vosotros habéis estado compensando la balanza frente al trabajo, ayudándome a desconectar en los momentos que lo he necesitado, en las noches de farra, sentados en la calle, el parque o Villatijuana, en las asambleas y las manifestaciones y por todo lo que hemos vivido juntos.

Tampoco puedo olvidar a mi gente de Físicas, a mis compañeros, pero en particular al «zulo», donde he pasado los mejores momentos de la facultad y a todos los que han pasado por él ayudándome a retrasar el final de la carrera; a mi equipo de fútbol de físicas (¡hu-ha!), y a lxs compañerxs de pachangas, por todas las tardes de evasión y buenos ratos; y, finalmente, a la F.O.A. por su utopía.

He dejado para el final el agradecimiento que le debo a mi familia. Gracias a mis padres, a quienes va dedicada esta tesis, por todo. No puedo expresar lo agradecida que estoy por vuestro apoyo, vuestra paciencia y vuestros infinitos consejos y ayudas. De igual manera, quiero agradecer a mis tíos Joaco y Pedro por ser tan importantes en mi vida, estar siempre tan pendientes de mí e incluso aprender física si era necesario para discutir conmigo. Quiero agradecer igualmente a mis primos, una constante en mi vida, y a mi «plas» David y a Natalia, por las noches por el foro, en las carpas o donde fuese, y más que nada por poder contar con vosotros. También a aquellas personas que

son casi de la familia y han seguido esta tesis durante todos estos años, intentando comprender qué hacía una chica como yo en un sitio como éste. Por último, no puedo pasar sin recordar aquí a «la yaya», sin duda la persona a la que debo ser quien soy (con lo bueno y lo malo que eso implica) y que siempre me apoyó en todo, por su cariño incondicional y porque sé que estaría orgullosa de participar de este momento.

Telón.

*Ana Alonso Serrano*

14 de abril de 2015

# Abstract

General Relativity stands as the description of the gravitational interaction that allows us to understand the universe through its application to cosmology. However, in the current cosmological paradigm, there are theoretical issues which still pose open problems, such as the huge discrepancy between the value of the theoretical prediction about the value of the cosmological constant and the actual observed value. In addition, there are situations (in particular singularities) where relativity loses its predictive character, thus indicating the presence of an underlying fundamental theory. The inclusion of a quantum theory, suggested by the fact that General Relativity relates matter and geometry, the former being quantized, seems a plausible mechanism to solve these singularities. The problem is that we do not have at present a fully consistent and definitive theory of quantum gravity, but rather a variety of possible candidates. This does not prevent us from implementing many results and ideas arising from a series of quantum gravity theories at our disposal in the context of cosmology, where they provide us with appropriate tools for the explanation of certain phenomena.

One approach that is receiving attention lately in the search for solutions to a number of cosmological issues is the consideration of the multiverse, a concept which emerges naturally in various gravitational or cosmological theories and introduces a structure which encompasses all possible universes predicted by the corresponding underlying theory. The idea of the multiverse entails a change in our paradigms. To deal with it, we need to be endow it with an appropriate framework in which, by observations in our own universe, we can perform experimental corroborations of the consequences of the existence of other universes. Without going into the details of any particular theory, and with the commented aim of obtaining a way to falsify the multiverse, we start from the assumption that there is some interaction between the various universes which form it. These interactions will be driven by the existence of exotic correlations in General Relativity and/or by quantum entanglement between different universes, and will lead to predictions that indicate the need to consider the entire multiverse, as well as new schemes for the resolution of cosmological problems, as a result of the physical effects that it produces in our universe.

In this thesis, first of all, we will study classical correlations derived from the existence of Lorentzian tunnels, possessing closed timelike curves, that connect different regions or universes, seeking an observational trace which is unambiguously characteristic of these connections and which provides us not only with a way to check the existence of these objects within the current observations in astrophysics and cosmology, but, furthermore, the existence of other universes which are connected with ours. Once the possibility of establishing a classical connection to another universe is determined, it seems natural to implement this idea in terms of quantum correlations, in the sense of elucidating whether we may consider only the spatial region within our reach; or whether, on the contrary, we need a quantum theory of the multiverse that accounts for the effects from other spacetime regions. The added complication in the analysis of such correlations comes from the lack of a complete quantum theory, which leads us to use certain models that may give us, at least, an approximate idea of the physics involved. We address this problem from two extreme viewpoints. On the one hand, we consider a rigorous and complete quantum mechanical description of simple spacetimes, strategy that allows us to determine in detail the correlations, but nonetheless is difficult to extrapolate directly to the multiverse, owing to the technical complexity of this last step. On the other hand, we construct models for the behavior of a set of universes and their interactions, models which provide us a qualitative idea about possible multiverse collective phenomena and their effects in our universe, but omitting in this process some peculiarities of the complete theory in order to make the approximations that render the system tractable.

In the detailed study of the wormholes differentiated by the topology of their throat, adapted to the effects of gravitational lensing produced by light passing through the tunnels, we find that the produced light signature corresponds to these objects unambiguously in the case of a Klein-bottle topology, a prediction which tells us a manner to test the existence of these wormholes. We also suggest that the observational finding of a double Einstein ring by the Hubble Space Telescope might be due to gravitational lensing produced by a wormhole with toroidal topology. Moreover, we determine the essential features of the connection to another universe through these wormholes, deducing a distinguishable pattern when compared to tunnels between regions exclusively within our Universe.

We next analyze the decoherence mechanism in our accelerated universe before studying quantum phenomena in the multiverse, because we conclude that this is in fact an effective mechanism to decouple the different semiclassical branches of the universe for any of the matter content that represents a plausible candidate for dark energy (within standard cosmology). We use models in a third quantization formalism, following a procedure similar to studies carried out in quantum optics. Thus, we

investigate the interaction of a parent universe (i.e., similar to our own) with its environment, the latter consisting of spatial fluctuations (represented by baby universes) of either the parent universe or of a multiverse of this kind of universes, studying the effects that the multiverse environment produces in our own universe. We obtain that decoherence is effective for a large number of universes in the environment (in both cases), providing a very small decoherence scale that is responsible of the emergence of a classical universe as a result of the interactions. Moreover, as a consequence of these interactions, there may appear a shift of the vacuum energy of the universe (similar to the Lamb displacement) that provides a mechanism to reduce the theoretical value of the cosmological constant, leading in this way to a possible solution to this problem. Also, owing to the studied interactions, the distinguished parent universe undergoes a non-unitary evolution, so, if we analyze its thermodynamic properties, we can see its evolution from a pure state to a mixed state, with the consequent increase of entropy. This loss of information suggests the need to consider the entire multiverse to preserve unitarity.

The study of the cosmological constant problem in a multiverse scenario may also be examined under the consideration of the Curvature Principle, in a third quantization formalism as well. We discuss a model of interaction between two universes which results in decreasing the theoretical value of the cosmological constant in one of the universes at the expense of an increase in the value of the other. This reinforces the idea that the multiverse may play an important role in providing adjustment mechanisms that reduce the value of the cosmological constant, so that it matches the observational value.

From the global consideration of the multiverse, the possibility appears that there may exist collective phenomena in it, thus leading to a new cosmological perspective. The development of this idea starts with the Wigner quantization procedure (that generalizes the canonical quantization), inducing a quantum interaction without classic analogue between universes that realizes these collective phenomena. Analyzing the energy spectrum of the Hamiltonian, we find a splitting of the energy levels of the standard case, both if there is explicit interaction between the universes or without it, giving rise to a minimum energy eigenvalue which is arbitrarily close zero. This shows that the adjustment of the theoretical value of the cosmological constant is determined by the overall structure of the multiverse.

Finally we analyze the exact quantization of a simple model in which there are disconnected regions, a situation which is clearly related to the multiverse scheme and allows us to study in detail the appearance of correlations. To this end, we perform a full canonical quantization (following an extension of the Dirac quantization program)

for a Kantowski-Sachs model, whose maximal analytical extension corresponds to a Schwarzschild spacetime-de Sitter spacetime that possesses different regions separated by cosmological or event horizons. We construct a physical Hilbert space in which we can define the evolution of the observables. The analysis of this evolution proves that each of the studied spacetime regions is inconsistent when considered apart, and therefore we should not restrict the observables to one of these single regions. Moreover, the consideration of the whole spacetime is necessary to preserve unitarity. For this we deduce the appearance of quantum correlations between regions that we supposed isolated, a fact which leads to the inclusion of the entire spacetime in the development of the quantum theory. It seems natural to extrapolate this result on the multiverse scenario, where correlations and entanglement between different universes may occur.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	VII
<b>Resumen</b>	XI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Relatividad general y cosmología . . . . .	1
1.1.1. Planteamiento general . . . . .	1
1.1.2. Túneles espaciotemporales . . . . .	6
1.2. Gravedad y cosmología cuánticas . . . . .	9
1.2.1. Cuantización de la gravedad . . . . .	9
1.2.2. Cosmología cuántica canónica . . . . .	14
1.3. Multiverso . . . . .	18
1.3.1. Panorama histórico y motivación . . . . .	18
1.3.2. Multiverso físico . . . . .	22
<b>2. Objetivos y estructura de la tesis</b>	<b>27</b>
2.1. Objetivos . . . . .	27
2.2. Estructura . . . . .	28
<b>3. Efectos observables de los agujeros de gusano</b>	<b>33</b>
3.1. Agujeros de gusano y observabilidad . . . . .	33
3.1.1. Descripción de los agujeros de gusano en función de la geometría de su garganta . . . . .	33
3.1.2. Observabilidad. Efecto de lente gravitatoria . . . . .	38
3.1.3. Conexión con otros universos . . . . .	43

3.2.	Agujero de botella de Klein y su efecto de lente gravitatoria . . . . .	44
3.2.1.	Geometría de botella de Klein y embebimiento en la garganta del agujero de gusano . . . . .	45
3.2.2.	Efecto de lente gravitatoria . . . . .	49
3.2.3.	Caracterización en un contexto de multiverso . . . . .	53
3.3.	Existencia y estabilidad . . . . .	54
3.4.	Resultados y discusión . . . . .	55
<b>4.</b>	<b>Decoherencia en un escenario de multiverso</b>	<b>57</b>
4.1.	El papel de los procesos de decoherencia en cosmología . . . . .	57
4.2.	Decoherencia de las ramas de un universo acelerado . . . . .	58
4.3.	Decoherencia en tercera cuantización y la constante cosmológica . . . . .	64
4.3.1.	Formalismo de tercera cuantización: universos padre y bebé . . . . .	64
4.3.2.	Interacción de un universo padre con las fluctuaciones de su métrica . . . . .	68
4.3.3.	Interacción de un universo padre con el resto de universos . . . . .	76
4.3.4.	Propiedades termodinámicas: entropía . . . . .	78
4.4.	Resultados y discusión . . . . .	81
<b>5.</b>	<b>Estados colectivos en el multiverso</b>	<b>83</b>
5.1.	Interacción en tercera cuantización a partir del Principio de Curvatura . . . . .	83
5.1.1.	Extensión a un potencial cuadrático general . . . . .	87
5.2.	Multiverso de osciladores armónicos interaccionando . . . . .	89
5.2.1.	Multiverso sin interacción explícita . . . . .	93
5.2.2.	Multiverso en interacción . . . . .	94
5.3.	Resultados y discusión . . . . .	97
<b>6.</b>	<b>Cuantización canónica de un universo con horizontes</b>	<b>99</b>
6.1.	Espaciotiempos con horizontes y contexto general . . . . .	99
6.2.	Descripción del modelo clásico . . . . .	101
6.3.	Cuantización canónica . . . . .	105
6.3.1.	Espacio de Hilbert cinemático y álgebra de operadores . . . . .	106
6.3.2.	Espacio de Hilbert físico . . . . .	110

6.3.3. Evolución y observables . . . . .	111
6.3.4. Bases del espacio de Hilbert físico: separación en subespacios . .	114
6.4. Interpretación del sistema cuántico e influencia de los horizontes . . . .	116
6.5. Resultados y discusión . . . . .	119
<b>7. Conclusiones</b>	<b>123</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>131</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>132</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Sorprendernos por algo es el primer paso de la mente hacia el descubrimiento.

*Louis Pasteur*

### 1.1. Relatividad general y cosmología

#### 1.1.1. Planteamiento general

La búsqueda de conocimiento, inherente al ser humano, ha llevado a éste desde la antigüedad a tratar de comprender el nacimiento y funcionamiento del cosmos. En este sentido, es la cosmología la encargada del estudio del Universo, de su origen, evolución y destino. La palabra cosmología proviene del griego, ya que fueron ellos los primeros en establecer un estudio científico de la misma, del que pervivió el sistema ptolemaico, que nos consideraba el centro del Universo, manteniéndose hasta el Renacimiento. Desde que en el siglo XVII se echara por tierra este modelo, asentándose el heliocéntrico, hemos ido perdiendo nuestro papel relevante en el Universo, en lo que se conoce como principio copernicano. Y es en ese mismo siglo cuando Newton postuló su ley de gravitación universal como la primera teoría referente a la interacción gravitatoria.

Fue Einstein quien, a principios del siglo XX, al establecer la teoría de la relatividad general que gobierna la interacción gravitatoria, replanteó los conceptos de espacio y de tiempo, dejando este último por fin de ser un ente absoluto e inmutable. El consiguiente cambio de paradigma dota al espaciotiempo de un significado conjunto y le confiere una estructura que nos permite estudiar su naturaleza. Actualmente la relatividad

se ha configurado como una teoría sólidamente establecida y ha sido verificada por numerosos experimentos; no obstante, como veremos más adelante, también posee sus propias limitaciones de conocimiento.

De esta manera, a día de hoy, la cosmología convencional se rige por la relatividad general [1, 2], al aplicar ésta al Universo completo. Uno de sus pilares fundamentales se puede expresar a partir de la propia tendencia a considerar que la Tierra no ocupe un lugar privilegiado en el Universo y viene dado por el denominado principio cosmológico [3], que considera el Universo homogéneo e isotrópico a escalas suficientemente grandes, algo corroborado por las observaciones astronómicas actuales. El modelo cosmológico más sencillo bajo estas consideraciones se define por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [1, 2], que también permite dar cuenta de la expansión del Universo a partir de una singularidad inicial.

Como consecuencia de lo anterior, la forma usual de estudiar la materia en cosmología es considerar una densidad uniforme y tratar las galaxias como partículas de un gas. Con ello, a modo de simplificación fenomenológica, se puede tomar la materia del Universo en la aproximación de un fluido perfecto a la hora de construir el tensor energía-momento [2], que aparece en el término de la fuente de las ecuaciones de Einstein, en el cual la densidad y la presión sólo dependerán del tiempo. De esta forma, basta con conocer la ecuación de estado y las condiciones iniciales para estudiar la dinámica del Universo. Este tensor energía-momento se puede clasificar en función de las llamadas condiciones de energía [1]. Históricamente se pensaba que los contenidos materiales con realidad física debían satisfacerlas, pero a día de hoy se conocen numerosos ejemplos que no lo hacen, típicamente relacionados con efectos cuánticos.

Por otro lado, además de materia, también es posible la presencia de una constante cosmológica,  $\Lambda$ . Ésta fue introducida por Einstein a fin de representar un universo estático, como era la creencia del momento, de modo que se tratase de un término repulsivo que compensase la atracción gravitatoria [4, 5]. Así, con la inclusión de este término, las ecuaciones de campo de Einstein resultan

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}, \quad (1.1.1)$$

donde  $R^{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  el escalar de curvatura,  $g^{\mu\nu}$  el tensor métrico,  $T^{\mu\nu}$  el tensor energía-momento,  $G$  la constante de gravitación universal y  $c$  la velocidad de la luz.

Una vez refutada la concepción estática del Universo con el descubrimiento de la expansión del mismo, la constante cosmológica ya no era necesaria empíricamente y fue descartada; aunque en distintas ocasiones se recurrió a ella en la construcción de determinados modelos cosmológicos [6].

Sin embargo, no es tan sencillo desechar la constante cosmológica, puesto que desde el punto de vista de la física de partículas el vacío gravita actuando como una constante cosmológica, debido a que entra en las ecuaciones de Einstein de la misma manera que ésta. Esto se desprende de la forma que adquiere su tensor energía-momento, restringido por la invariancia Lorentz del vacío, que resulta ser  $T_{\text{vac}}^{\mu\nu} = -\rho_{\text{vac}}g^{\mu\nu}$  [7]. Por ello, se considera que la constante cosmológica está relacionada con la densidad de energía del vacío del Universo. Las fluctuaciones cuánticas de vacío de los campos se obtendrán de manera efectiva semiclásica sumando los modos de vacío para energías inferiores a la escala de Planck (donde la teoría dejaría de ser efectiva), obteniéndose que la densidad de energía del vacío es del orden de  $\rho_{\text{vac}} \sim 10^{71}(\text{GeV})^4$  [8].

Aunque renormalizásemos el resultado anterior y redujésemos el valor de la constante cosmológica por medio de un ajuste fino, con la contribución proveniente de las energías potenciales clásicas asociadas a los distintos campos escalares, aparecerían de nuevo términos de gran escala en el siguiente orden de aproximación. De igual forma, incluso considerando las energías del punto cero sólo en el ámbito de la cromodinámica cuántica o la teoría electrodébil, se obtendrían energías de vacío de orden de  $\rho_{\text{vac}}^{QCD} \sim 10^{-3}(\text{GeV})^4$  y  $\rho_{\text{vac}}^{EW} \sim 10^9(\text{GeV})^4$ , respectivamente. De hecho, parece más viable encontrar un mecanismo que fije a cero el valor de esta constante que reducir su valor teórico hasta que resulte ignorable [7, 9].

Observaciones astronómicas recientes, provenientes primeramente de supernovas y posteriormente corroboradas con observaciones del fondo cósmico de microondas y del efecto de lente gravitatoria, muestran que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada y que su geometría es aproximadamente plana [10–12]. La aceleración de esta expansión está guiada por una componente del tipo de la constante cosmológica denominada energía oscura, cuyo valor observacional de densidad de energía viene dado por  $\rho_{\text{vac}} \sim 10^{-47}(\text{GeV})^4$  [7], lo que conduce a una discrepancia con el valor teórico del orden de 120 órdenes de magnitud (o menores, según la consideración, pero igualmente desmesurados). Esto constituye el conocido problema de la constante cosmológica, que radica en el mecanismo de reducción del valor teórico esperado para que concuerde con el valor de la densidad de energía del vacío proveniente de las observaciones astronómicas<sup>1</sup>.

Esta enorme diferencia de valores se ha intentado solventar desde muchos puntos de vista, desde la cosmología hasta la teoría cuántica de campos. Algunas de estas ideas han sido, por ejemplo, la utilización de argumentos antrópicos, en los que un ajuste fino compatible con nuestra existencia proporciona el valor observado de la constante cosmológica; posibles modificaciones de la relatividad general que eludan

---

<sup>1</sup>Una extensa revisión del problema puede encontrarse, por ejemplo, en [7–9, 13–15].

la existencia de energía oscura; la existencia de simetrías extra, como supersimetría, que permitan la cancelación de la contribución de las fluctuaciones cuánticas de vacío; invariancia de escala, que haga que la energía no entre en las ecuaciones de Einstein y, por tanto, no gravite; y, finalmente, diversos mecanismos de ajuste que reduzcan el valor teórico de dicha constante [7, 14]. Dentro de estos posibles mecanismos de ajuste, de manera relevante para este trabajo cabe destacar que, en el campo de la cosmología cuántica una de las aproximaciones a la resolución del problema de la constante cosmológica se alcanzó utilizando la posible existencia de agujeros de gusano microscópicos (relacionados con la creación y destrucción de universos bebé) en el cálculo de la función de onda del Universo [16]. Así Coleman fijó a cero el valor de la misma, debido a que la distribución de valores para la constante cosmológica tiene un pico en su valor nulo. Posteriormente, González-Díaz [17] vio que al tener en cuenta agujeros de gusano conectados múltiplemente resulta un pico de probabilidad para una contribución distinta de cero a la constante cosmológica. Es importante resaltar que, de momento, no hay un resultado satisfactorio para la resolución del problema de la constante cosmológica y por lo tanto no se dispone una explicación teórica final para la reducción del valor teórico de dicha constante.

El cambio de paradigma producido por la expansión acelerada del Universo ha llevado a revisar el esquema cosmológico. Actualmente, las proporciones aproximadas de materia en el Universo vienen representadas por un 5 % materia bariónica, un 27 % materia oscura fría y 68 % energía oscura [18], así que actualmente la energía oscura domina la expansión del Universo, con la complicación añadida de que no disponemos de una explicación teórica satisfactoria para la misma. De igual manera, su presencia genera el problema de la coincidencia cósmica, basado en el hecho de que la densidad de energía oscura haya comenzado a dominar justo ahora la evolución del Universo [19].

Por un lado, se han propuesto teorías de relatividad general modificada o teorías en dimensiones mayores que excluyan la existencia de esta energía oscura. Pero por otro lado, dentro del contexto de la relatividad general, la contribución de energía oscura se puede presuponer debida a la existencia de un material que viole la condición fuerte de energía y que por tanto tenga presión repulsiva (aunque algunas de las propuestas consideran, además, la violación de otras condiciones de energía). Como descripción fenomenológica se considera un fluido homogéneo e isótropo con ecuación de estado barotrópica,  $p = w\rho$ , que dará lugar a una expansión acelerada cuando  $w < -1/3$ . De forma que, para estudiar la dinámica del Universo, tan sólo necesitaremos conocer el valor de  $w$ , además de obtener unas condiciones iniciales. La restricción de los valores del parámetro de la ecuación de estado experimentales indican un valor del mismo ligeramente menor que  $-1$ , con una incertidumbre tal que es compatible tanto con  $w = -1$  como con valores escasamente superiores [18]. Esto nos lleva a la consideración

de distintas propuestas para la energía oscura, que pueden englobarse en tres grandes bloques: constante cosmológica, modelos de quintaesencia y de energía fantasma.

Una de las opciones consistentes con estas observaciones es, como hemos visto, atribuirle a la constante cosmológica, que está relacionada con un valor  $w = -1$ , lo que supone la necesidad de resolver de alguna manera el mencionado problema de esta constante. La consideración de la expansión acelerada como consecuencia de una constante cosmológica es un caso particular de energía oscura que no posee evolución dinámica. Sin embargo existen otras opciones dinámicas basadas en un campo escalar [20–22], que se encuentran dentro del rango de valores observacionales y que merece la pena tener en consideración.

Una de esas ideas al respecto es conjeturar que la energía oscura es debida a la existencia de unos campos escalares denominados de quintaesencia, que poseen un término cinético canónico y no interactúan con otros campos. Fenomenológicamente, la quintaesencia se interpreta como un fluido perfecto homogéneo y con presión negativa, es decir, corresponde a modelos de energía oscura acotados en el intervalo  $-1 < w < 0$ , para que la negatividad de la presión de la energía oscura no conlleve la violación de más condiciones de energía [20]. En estos modelos la expansión acelerada será menor que si fuese debida a una constante cosmológica.

Debido al rango de valores permitidos, otra de las propuestas de energía oscura es la energía fantasma, que fenomenológicamente corresponde a un fluido perfecto con un valor  $w < -1$ , de modo que se produce violación controlada de todas las condiciones de energía [22, 23]. La cuestión de la violación de las condiciones de energía podría no preocuparnos excesivamente, ya que hemos visto que la mera consideración de la energía oscura viola una condición de energía, de forma que no tendríamos por qué abstenernos de explorar los casos en los que se violen otras condiciones. En estos modelos, la densidad de energía crece cuando el Universo se expande, dando así lugar a un crecimiento superacelerado con respecto a los otros modelos. Como consecuencia de esta expansión, las unidades cosmológicas se van separando y escindiendo hasta llegar a escalas de las partículas fundamentales y posteriormente alcanzando una singularidad, designada Big Rip, donde la densidad se hace infinita [24]. Si se representa la energía fantasma en términos de un campo escalar sin interacción, éste debe tener un término cinético negativo. Se sabe que este tipo de campos llevan asociados inestabilidades, pero las inestabilidades clásicas se resuelven en algunos casos concretos de estos modelos mediante la elección de una ecuación de estado constante con un rango acotado de valores para  $w$ , lo que nos limita la forma que puede tener el potencial para que no aparezcan inestabilidades taquiónicas [23]. Por otro lado, para resolver las inestabilidades cuánticas podría, por ejemplo, considerarse este modelo una teoría

efectiva válida a bajas energías, de modo que evitaríamos las inestabilidades asociadas a energías arbitrariamente altas [22].

Aunque las observaciones nos incitan a decantarnos por una contribución a la energía oscura proveniente de una constante cosmológica, parece haber indicios suficientes para desarrollar modelos de quintaesencia y energía fantasma, buscando posibles predicciones observacionales que conlleven en el futuro a la aclaración de esta cuestión.

### 1.1.2. Túneles espaciotemporales

En un intento de ir más allá en las implicaciones de la relatividad general, Einstein y Rosen [25] especularon con la idea de construir un modelo físico de una partícula elemental a partir de la geometría del espaciotiempo, en lo que en realidad resultó la primera aproximación a los agujeros de gusano. Con dicho propósito partieron de la geometría de Schwarzschild, intentando conectar las dos regiones asintóticamente planas en lo que se denomina el puente de Einstein-Rosen, que posteriormente se demostró que era inestable y que se basaba en una mala elección de coordenadas, y por lo tanto mantiene las características de la extensión analítica máxima del espaciotiempo de Schwarzschild hecha por Kruskal [26], es decir, no evita la singularidad y no puede atravesarse.

Esta idea se recuperó veinte años más tarde, cuando Wheeler propuso el primer diagrama de estos objetos [27], buscando soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Un par años después, junto con Misner [28], acuñó el nombre de agujeros de gusano en el estudio de procesos gravitacionales cuánticos que diesen lugar a estas configuraciones, en un intento por describir los fenómenos físicos desde un punto de vista geométrico<sup>2</sup>. Es en este trabajo donde también definió la espuma espaciotemporal, que se refiere a las fluctuaciones cuánticas de vacío de la geometría del espaciotiempo y que, por lo tanto, tomaría un papel relevante a la hora de considerar la gravedad y la cosmología cuánticas.

No fue hasta pasados otros veinte años cuando se retomó con fuerza la idea de los agujeros de gusano. En este caso de la mano de Morris y Thorne [30, 31], con el objetivo de crear túneles espaciotemporales macroscópicos, que estableciesen un atajo en posibles viajes interestelares (túneles intrauniversales) o conectasen nuestro Universo con otro (túneles interuniversales). Ambas configuraciones tendrían una descripción muy similar en términos del túnel, que se compone de dos bocas de entrada al mismo, cada una de ellas situada en una región asintóticamente plana del espaciotiempo, y de una garganta que las une. La diferencia sustancial entre ambos túneles es que, en el

---

<sup>2</sup>Ver, por ejemplo, [29] para una amplia revisión de agujeros de gusano.

caso de agujeros de gusano intrauniversales, ambas regiones se encuentran unidas, ya que pertenecen al mismo universo, y el agujero de gusano tan sólo establece un atajo entre dos puntos del mismo, mientras que en los túneles interuniversales, cada una de esas regiones asintóticamente planas corresponde a un universo diferente. Esta cuestión acerca de la región a la que se encuentran unidos estos túneles, sin embargo, no tiene ningún efecto sobre la propia geometría del agujero de gusano, que será la misma en cualquier caso.

Para llevar a cabo esta nueva idea de agujeros de gusano macroscópicos debían imponerse unos ciertos requisitos a estos túneles, con la finalidad de que pudiesen ser atravesables por observadores macroscópicos. De esta forma, se establece un espacio-tiempo carente de singularidades y horizontes, pudiéndose así atravesar el túnel de manera bidireccional de una boca a la otra. Por otro lado, para que sea atravesable, también es necesario que el tiempo de viaje sea razonable y que las fuerzas de marea sean suficientemente suaves a lo largo del camino. Este último requerimiento está relacionado con el tipo de materia que rodea el agujero de gusano, cuya característica principal es que viola las condiciones de energía, y que Morris y Thorne denominaron materia exótica. Esta materia es la responsable de mantener la garganta del túnel abierta, logrando que éste no se estrangule y que, por tanto, sea estable.

Aunque esta suposición acerca de la materia que sustenta los agujeros de gusano pueda parecer poco razonable, existen ejemplos físicos probados de situaciones en las que se violan dichas condiciones de energía, cuando tenemos en cuenta efectos cuánticos (como, por ejemplo, el efecto Casimir o los estados aplastados). En vista de lo cual, se trata de minimizar las cantidades demandadas de este tipo de materia, acotándola en lo posible a pequeños intervalos que podamos considerar de naturaleza cuántica.

Los agujeros de gusano volvieron a sacar a la luz la tentadora idea, que durante siglos ha sustentado la humanidad, de ser capaces de realizar viajes en el tiempo. El hecho de que estos túneles nos permitan establecer un atajo entre dos regiones del espaciotiempo llevó directamente a pensar en la posibilidad de establecer un enlace entre dos regiones espaciotemporales muy alejadas, permitiendo alcanzar el otro lado del túnel antes que la luz que fuese por el camino exterior al túnel (recordando que nunca superaríamos la velocidad la luz, sino que acortaríamos recorrido). Un observador inercial externo podría ver, por tanto, que habríamos salido del agujero de gusano antes de haber entrado. Inmediatamente podemos pensar que, al conectar cerca de la salida de ese agujero de gusano otro que nos devuelva al lugar de partida, podremos viajar al pasado, y por tanto habremos construido una máquina del tiempo mediante una combinación de agujeros de gusano. Esta sugerencia partía de la suposición de que una «civilización avanzada» pudiese controlar la creación y mantenimiento de estos

agujeros de gusano [30].

En este contexto de la utilización agujeros de gusano como máquinas del tiempo, otra idea parte de la realización de dicha máquina tan sólo con un túnel [31]. Para ello, es necesario acelerar una de las bocas del agujero de gusano a velocidades cercanas a la de la luz, para luego desacelerarla de igual forma, mientras que la otra se mantiene en reposo. Esto da lugar a que el tiempo transcurra de distinta forma en cada boca, para un observador externo, y por lo tanto, al atravesar el agujero de gusano desde la boca que hemos dotado de movimiento hacia la otra boca, habremos viajado al pasado. Concretamente, lo que ha sucedido es que se han producido curvas temporales cerradas en el interior del agujero de gusano.

El planteamiento de la creación de una máquina del tiempo lleva asociadas paradojas causales bien conocidas. Esto llevó a Hawking a plantear su conjetura de protección cronológica [32], en la cual postula que las leyes de la física impiden los viajes en el tiempo. Más explícitamente, comprobó que el tensor energía-momento diverge en el horizonte de Cauchy que separa las regiones que poseen curvas temporales cerradas del resto del espaciotiempo, debido a los efectos de polarización del vacío. A pesar de ello, no tardaron en surgir diversos contraejemplos a esta conjetura, como la obtención de determinados vacíos en los cuales no existe tal divergencia [33, 34]. Es importante destacar que esta conjetura no sería implementable en el nivel cuántico, sino que se trata sólo de una aproximación semiclásica [35], por lo que su resolución hacia un lado u otro parece necesitar fijarse en el marco de una teoría cuántica de la gravedad [36].

A partir de este momento, el interés creciente por los agujeros de gusano ha llevado a la consideración de diferentes topologías para la garganta de los mismos, más allá del caso esférico considerado por Morris y Thorne, tales como agujeros de anillo o agujeros de botella de Klein, así como a la aparición de estas estructuras en teorías de gravedad modificada [37, 38], en donde no siempre es necesaria la presencia de materia exótica para su existencia.

Por otro lado, la energía fantasma, que describimos previamente, es un posible candidato para la materia exótica necesaria para la construcción y sustento de los agujeros de gusano. Asimismo provee un marco cosmológico natural a estas estructuras [39]. En este sentido, se vio que la energía fantasma correspondiente a agujeros de gusano puede aparecer en cantidades arbitrariamente pequeñas, y que se encuentra confinada en una región limitada en torno a la garganta del agujero de gusano [40, 41]. Esto lleva a pensar de forma plausible en la posibilidad de la existencia de estos objetos teóricos en el contexto de nuestro Universo acelerado. De manera más precisa, esto sería posible debido a la estabilidad de los agujeros de gusano cuánticos y a su posible crecimiento en el contexto de un universo dominado por energía fantasma, por acreción

de la misma [42], en el que estos objetos macroscópicos serían estables [43].

Con todo esto, parece que el siguiente paso necesario en el estudio de los agujeros de gusano es la búsqueda de posibles huellas observacionales de su existencia. La mayor parte de las aportaciones en este sentido se centran en el posible efecto de lente gravitatoria de estas estructuras [44–47], algo que veremos en detalle en el capítulo 3.

## 1.2. Gravedad y cosmología cuánticas

### 1.2.1. Cuantización de la gravedad

La relatividad general, además de describir la interacción gravitatoria, como ya dijimos, nos procura un conocimiento sobre la estructura del espacio y del tiempo. El hecho de que esta teoría sea de naturaleza geométrica, relacionando materia y geometría, de tal forma que el espacio se curve debido a la presencia de campos materiales y que esta propia curvatura dicte cómo deben propagarse dichos campos por el espaciotiempo, resulta en que el espaciotiempo no sea ya un marco fijo inalterable.

Asimismo, ya mencionamos que la relatividad predice sus propias limitaciones con la aparición de singularidades en la teoría, es decir, regiones donde la curvatura o alguna magnitud física divergen, tales como los agujeros negros o el Big Bang. Las singularidades [1] conllevan la pérdida de capacidad predictiva de la teoría, que parece indicar la manifestación de una teoría fundamental subyacente. En esos regímenes la inclusión de una teoría cuántica de la gravedad podría suponer una regularización de las singularidades. De igual modo, el hecho de que las ecuaciones de Einstein relacionen materia y geometría, donde los campos materiales disponen de una teoría cuántica, sugiere, por completitud y consistencia, que sea posible cuantizar todos los términos de las ecuaciones, es decir, encontrar una cuantización de la geometría. La aplicación de la mecánica cuántica a la geometría del espaciotiempo tendría como consecuencia la presencia de efectos cuánticos tales como fluctuaciones cuánticas de la métrica, que serán relevantes a la escala de Planck (donde los efectos cuánticos son predominantes) y constituirán la espuma espaciotemporal, a partir de la cual emergería el espaciotiempo clásico [48–50].

Estas cuestiones, entre otras, nos proporcionan bastantes indicios de que tal vez exista una teoría cuántica de la gravedad. Ésta es la única interacción fundamental que no está cuantizada, a pesar de haber sido la primera en formularse matemáticamente (siglo XVII). Ahora mismo, la existencia de una teoría cuántica de la gravedad establece una frontera en el conocimiento de la naturaleza del espaciotiempo. Aunque poco después de formularse la teoría de la relatividad general ya surgieron los primeros

intentos de cuantización, la actual irreconciliación entre estas dos grandes teorías pasa porque, contrariamente al resto de interacciones que se cuantizan sobre un espacio-tiempo estático, la gravedad impone una cuantización del propio marco de la teoría, es decir, del espaciotiempo. Más aún, mientras que en mecánica cuántica el tiempo es fijo (lo que es fundamental para los cálculos de probabilidades cuánticas), en relatividad general éste es dinámico (debido a la invariancia bajo difeomorfismos).

Las diversas motivaciones al respecto llevaron a comenzar la búsqueda de una teoría de gravedad cuántica siguiendo los procedimientos perturbativos de la electrodinámica cuántica, hasta que se vio que la teoría no era renormalizable [51, 52]. A partir de ahí han surgido diversas teorías de gravedad cuántica. Una de las primeras ideas proviene de una formulación derivada de la integral de caminos de Feynman [53, 54], partiendo del hecho de que una amplitud de probabilidad esté dada por la suma sobre todas las posibles variedades que se interpolan entre las configuraciones de las métricas y campos inicial  $(g_1, \phi_1)$  y final  $(g_2, \phi_2)$ , correspondientes a dos tres-superficies,  $S_1$  y  $S_2$ , que explícitamente se expresa como

$$\langle g_2, \phi_2, S_2 | g_1, \phi_1, S_1 \rangle = \int D[g, \phi] \exp(iS[g, \phi]), \quad (1.2.1)$$

donde  $D[g, \phi]$  es una medida en el espacio de todas las configuraciones de geometrías espaciotemporales  $g$  y campos  $\phi$ ,  $S[g, \phi]$  es la acción de dichas geometrías y campos, y la integral es sobre todas las geometrías y campos que tengan los valores dados en las tres-superficies  $S_1$  y  $S_2$ . Esta amplitud nos proporcionará la función de onda del sistema en cuestión. Al considerar métricas lorentzianas y campos reales, la integral de caminos oscilará y por tanto no será convergente. A esto hay que sumarle que, para hallar la configuración que hace extrema la acción y obtener una aproximación semiclásica, habrá que resolver una ecuación hiperbólica con condiciones de frontera inicial y/o final, por lo que el problema no está bien planteado y puede haber infinitas soluciones o no haber ninguna. Estos inconvenientes se resuelven parcialmente mediante lo que se conoce como una rotación de Wick, que conduce a una reformulación en términos de una integral de camino euclídea. Ésta puede resolverse y continuarse analíticamente de vuelta al espaciotiempo lorentziano, aunque surgen problemas para determinar la medida y el contorno de integración [55, 56]. La función de onda hallada mediante esta formulación debería satisfacer las ligaduras hamiltonianas (que veremos más adelante). Relacionada con este nuevo enfoque, también apareció la geometrodinámica cuántica [48] como primera idea de gravedad cuántica canónica.

Más adelante surgieron muchas más propuestas que lidian por encontrar una cuantización de la gravedad, entre las que cabe destacar la teoría de cuerdas [57] y la gravedad cuántica de lazos [58], derivada de una reformulación de la relatividad cuántica canónica. Existen también otras teorías recientes como pueden ser los conjuntos causales [59],

la triangulación dinámica [60] o la seguridad asintótica [61]. A pesar de los numerosos intentos realizados en este campo y los distintos resultados esperanzadores de cada una de las diferentes propuestas, todavía no existe una teoría satisfactoria que nos pueda proporcionar una solución definitiva.

Nos centraremos en la descripción de lo que se conoce como gravedad cuántica canónica, que es una cuantización no perturbativa de la gravedad e independiente del fondo. Al ser la gravedad una teoría completamente ligada, las ligaduras existentes no nos permiten seleccionar los grados de libertad reales. Esto se expresa a través de una formulación hamiltoniana de la gravedad, donde podemos representar las ligaduras como operadores que aniquilan los estados físicos. Para poder obtener esta formulación mediante una transformación de Legendre a partir de la lagrangiana, necesitamos construir una descripción que separe el espaciotiempo en espacio y tiempo, denominada descomposición  $3 + 1$  o ADM (ya que originalmente se debe a Arnowitt, Deser y Misner [62]). De esta forma, definimos una función global de tiempo que permite foliar el espaciotiempo (que suponemos globalmente hiperbólico) en hipersuperficies espaciales consecutivas que se relacionarán a través de unas funciones denominadas lapso y desplazamiento, y que describen, por tanto, la foliación particular escogida. Esta libertad a la hora de foliar el espaciotiempo está asociada con la invariancia bajo reparametrizaciones temporales y difeomorfismos espaciales, y dependerá, por tanto, de la elección del gauge.

Más concretamente, para realizar una descripción  $3 + 1$  de un espaciotiempo globalmente hiperbólico,  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ , donde se puede hacer una foliación en superficies de Cauchy [1]. Escribiremos la métrica de la forma

$$ds^2 = -(N^2 - N_i N^i) dt^2 + 2N_i dt dx^i + h_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.2.2)$$

donde  $i, j$  son índices espaciales y  $h_{ij}$  es la tres-métrica inducida en las hipersuperficies espaciales,  $\Sigma_t$ . Esta métrica viene dada en términos de la función lapso,  $N$ , que nos da una medida de la variación del tiempo propio entre dos superficies colindantes y del vector desplazamiento,  $N^i$ , que representa el desplazamiento tangencial de las líneas  $x^i = \text{constante}$  respecto a la dirección normal a las hipersuperficies. Es decir, estos parámetros nos determinan las características específicas de la foliación del espaciotiempo realizada y no son variables dinámicas, por lo que no representan grados de libertad físicos sino los asociados a las parametrizaciones de las transformaciones que generan las ligaduras.

La acción de Einstein-Hilbert puede escribirse entonces como<sup>3</sup>

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K, \quad (1.2.3)$$

---

<sup>3</sup>A lo largo de toda la tesis utilizaremos unidades, tales que  $\hbar = c = 1$ .

donde  $R$  es el escalar de curvatura asociado a la métrica  $g_{\mu\nu}$ ,  $\Lambda$  es la constante cosmológica y  $K$  es la traza de la curvatura extrínseca o segunda forma fundamental, dada por

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left( -\dot{h}_{ij} + 2\nabla_{(i}N_{j)} \right), \quad (1.2.4)$$

donde  $\nabla$  indica derivada covariante respecto a la métrica espacial y hemos representado la derivada con respecto al tiempo,  $t$ , por un punto. El segundo término en la acción corresponde al término de superficie, que vendrá dado por las contribuciones de las fronteras del espaciotiempo. Es necesario incluirlo para que la acción sea estacionaria para soluciones de las ecuaciones de Einstein bajo variaciones de la métrica que se anulan en la frontera, si es que en teoría cuántica sólo la métrica está fijada ahí (en particular, no se puede fijar simultáneamente el momento, relacionado con las derivadas temporales de las variables métricas). Al integrar por partes la variación de la expresión (1.2.3), se obtendrá un término de superficie proveniente del primer término que se cancelará con el término explícito de superficie introducido, dando una acción cuadrática en  $K_{ij}$ .

El momento canónicamente conjugado a la tres-métrica se define de la forma usual a partir de la acción, y viene dado por

$$p^{ij} = \frac{\delta S}{\delta \dot{h}_{ij}} = \frac{1}{8\pi G} (K^{ij} - Kh^{ij}), \quad (1.2.5)$$

con lo que ahora se puede expresar la acción en la forma canónica, tal que

$$S = \int d^3x dt \left( p^{ij} \dot{h}_{ij} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i \right). \quad (1.2.6)$$

Las expresiones para  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_i$  vienen dadas por

$$\mathcal{H} = 16\pi G G_{ijkl} p^{ij} p^{kl} + \frac{1}{16\pi G} \sqrt{h} {}^{(3)}R, \quad (1.2.7)$$

$$\mathcal{H}_i = -2h_{ij} \nabla_k p^{jk}, \quad (1.2.8)$$

donde  ${}^{(3)}R$  es el tensor de Ricci asociado a la tres-métrica y

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \quad (1.2.9)$$

la métrica del espacio de configuración del sistema, que se denomina superespacio. Éste es el espacio funcional de tres-geometrías, lo que significa métricas espaciales módulo difeomorfismos [63]. Esta métrica es hiperbólica y, por lo tanto, nos proporciona una dirección de evolución.

Se puede ver en la expresión (1.2.6) que la función lapso y el vector de desplazamiento actúan como multiplicadores de Lagrange (ya que la acción no depende de sus derivadas temporales), y que la variación de esta expresión respecto a ellos da lugar, respectivamente, a la ligadura hamiltoniana y la ligadura de momentos,

$$\mathcal{H} = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_i = 0, \quad (1.2.10)$$

que dan cuenta de las reparametrizaciones temporales modulo difeomorfismos espaciales y los propios difeomorfismos espaciales, respectivamente<sup>4</sup>. La inclusión de campos materiales no modifica esta estructura, sino que añade un término correspondiente a su acción.

Una vez obtenido un formalismo hamiltoniano de la relatividad general, en el procedimiento de cuantización canónica, las variables canónicas y sus momentos conjugados bajo corchetes de Poisson, que determinan el espacio de fases del sistema, se promueven a operadores que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas, y el estado cuántico del sistema se representan por una función de onda,  $\Psi$ . Siguiendo la prescripción de cuantización desarrollada por Dirac [65] para sistema ligados, las ligaduras clásicas (1.2.7) y (1.2.8), que son ligaduras de primera clase, se transforman ahora en ligaduras cuánticas, demandando que la función de ondas sea aniquilada por ellas,

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0, \quad (1.2.11)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_i\Psi = 0, \quad (1.2.12)$$

de tal forma que la determinación de su núcleo nos proporcionará las soluciones físicas del sistema, cuando impongamos unas condiciones de contorno adecuadas (como la condición de ausencia de frontera [66] o de creación del Universo a partir de la nada por efecto túnel [67], que explicaremos más adelante), o la pertenencia a un espacio funcional (de Hilbert) de estados cuánticos específicos.

En la teoría de cuantización canónica denominada geometrodinámica cuántica [48] se utilizan las variables métricas como espacio de configuración, y la expresión (1.2.11) es conocida como la ecuación de Wheeler-DeWitt [63], que será una ecuación hiperbólica de segundo orden (aunque no tenga un parámetro tiempo que aparezca de forma directa) y nos dará la evolución dinámica del estado del sistema. Es importante resaltar que esta ecuación contiene una ambigüedad en el orden de factores del término cinético que no puede resolverse de forma única. De hecho, al resolver las ligaduras de difeomorfismos y posteriormente pasar a solucionar la ecuación de Wheeler-DeWitt, el orden de operadores para todas las ligaduras debe ser consistente, algo que se demostró que no era factible si se mantiene que los operadores de ligaduras sean hermíticos y

---

<sup>4</sup>Para una revisión extensa de este formalismo, ver por ejemplo [2, 64].

que cierren el álgebra [68]. Sin embargo, sí puede definirse de manera consistente si se relaja la condición de hermiticidad [69], aunque no de forma única, como se ha dicho. Otra forma de enfrentarse a esta cuestión consiste en trabajar directamente sobre tres-geometrías, donde sólo habría que imponer la ecuación de Wheeler-DeWitt y establecer en ella un determinado orden de factores.

A pesar de que no se ha encontrado una solución general de esta ecuación y, si bien este formalismo plantea problemas considerables de resolución e interpretación, sí que se han logrado ciertos resultados y planteado cuestiones interesantes<sup>5</sup>, que pueden implementarse en el ámbito de la cosmología. Será en este último marco en el que nos centraremos a lo largo de este trabajo, con la idea de que no es necesario todo el esquema completo, sino que puede bastar con un formalismo más sencillo para permitirnos extraer información relevante sobre el comportamiento cuántico de modelos de universos.

### 1.2.2. Cosmología cuántica canónica

Aunque los resultados de la formulación de gravedad cuántica canónica no estén bien definidos en el caso general, pueden ser herramientas perfectamente válidas para explorar conceptos cosmológicos. La aplicación de esta teoría cuántica al Universo como un todo, con la finalidad de estudiar su fenomenología es lo que definimos como cosmología cuántica canónica [71, 72].

Ya que las ligaduras cuánticas no son resolubles en el caso genérico, se estudian modelos cosmológicos más simples, pero que mantengan características que nos proporcionen información relevante del sistema general, mediante reducciones de simetría (homogeneidad, simetría esférica, axial, etc.) en el sistema clásico que se adecuen a las condiciones que demandamos al modelo de Universo. Si el sistema reducido posee un número finito de grados de libertad, el modelo resultante se denominará de minisuperespacio [73]. De esta manera, cuantizamos tan sólo un conjunto restringido de variables que dependen únicamente del parámetro que provoca la variación en el espaciotiempo, manteniendo el resto de grados de libertad «congelados». Esta reducción a un espacio de configuración de dimensión finita hace posible utilizar la mecánica cuántica estándar en lugar de necesitar aplicar una teoría de campos. Así, las métricas que describan modelos de minisuperespacios, típicamente estarán dadas de manera general por

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.2.13)$$

donde el vector desplazamiento se anula y la tres-métrica,  $h_{ij}$ , depende de un número finito de variables  $q^a$  de un solo parámetro,  $t$ . Con estas restricciones, la acción

---

<sup>5</sup>Se puede ver una revisión de esta cuantización, por ejemplo en [64, 70].

gravitatoria (1.2.3) será de la forma

$$S = \int dt N \left[ \frac{1}{N^2} G_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b - U(q) \right], \quad (1.2.14)$$

donde  $G_{ab}$  es la métrica del minisuperespacio y

$$U(q) = \int d^3x \sqrt{h} \left[ \frac{1}{16\pi G} (-(^3)R + 2\Lambda) \right], \quad (1.2.15)$$

por lo que la ecuación de Wheeler-DeWitt (1.2.11) se reduce a una expresión del tipo

$$\hat{H}(q^a, p_a) \Psi(q^a) = 0. \quad (1.2.16)$$

Estos sistemas nos procuran un marco adecuado en muchas circunstancias para dilucidar cuestiones conceptuales que se mantengan en el caso general, y así nos proporcionarán predicciones de la teoría cuántica completa. Estos modelos no están exentos de problemas [74] y no nos ayudarán a concluir la cuantización de la relatividad, ya que ignoran aspectos importantes de la teoría completa al eliminar los grados de libertad locales.

Con el fin de seleccionar los estados físicos admisibles de entre todas las soluciones posibles de la ecuación de Wheeler-DeWitt, se deben imponer, por lo general, condiciones de contorno adecuadas para el Universo. Esta tarea posee la complicación añadida de que no se pueden fijar experimentalmente, por lo que las distintas propuestas parten de supuestos teóricos que nos darán predicciones observacionales que nos permitan llegar a discernir cuál de ellas se erige como la más apropiada.

Una de las condiciones de contorno usualmente consideradas en cosmología cuántica es la condición de ausencia de frontera [66]. Ésta se expresa de forma directa en el formalismo de integral de camino euclídea, sumando sobre todas las cuatro-geometrías compactas cuya única frontera es la observada, en la que se definen los argumentos de la función de onda,  $g$  y  $\phi$ . De este modo se asegura el cierre de la geometría cuatro-dimensional, sin que ésta sustente ninguna frontera singular en el pasado, por lo que la función de onda será regular en la hipersuperficie inicial (inexistente). En vista de esto, se puede decir que el Universo se origina en el espacio euclídeo (región cuántica no permitida clásicamente) a partir de un punto no singular, evolucionando posteriormente a un sector lorentziano (permitido clásicamente). Esta propuesta no fija el contorno de forma única, sino que existen varias opciones compatibles con ella. Por otro lado, al no poder definir adecuadamente una medida de integración se propone una aproximación semiclásica, en la que se obtienen los puntos estacionarios de la acción que nos determinarán las contribuciones de las cuatro-geometrías. Esta condición de contorno

conduce a la consideración de ambas ramas del Universo (en expansión y contracción), lo que se traduce en una función de onda real.

La otra propuesta habitual de condición de contorno propone la creación del Universo de la nada por efecto túnel [67]. Se basa en establecer una diferenciación entre los modos de la función de onda entrantes y salientes de la frontera del minisuperespacio (visto como espacio de configuración) de manera análoga a los modos de frecuencia positiva y negativa en las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. Esta condición se enuncia de manera directa a partir de la aproximación semiclásica WKB (que detallaremos más adelante), para la función de onda calculada a través de la ecuación de Wheeler-DeWitt, donde la propia estructura exponencial de la aproximación permite establecer dicha separación de manera directa. La consideración de que la función de onda sólo tendrá contribución de los modos salientes en la frontera correspondiente a las cuatro-geometrías singulares, se traduce en que las trayectorias en la aproximación semiclásica pueden acabar en esta frontera pero no comenzar en ella. De esta forma, en contraposición a la anterior condición, se tiene en cuenta sólo una rama del Universo en la función de onda, lo que puede verse como un efecto túnel del sector euclídeo al lorentziano, en el que los modos entrantes se reflejan en la barrera de potencial. Ambas propuestas pueden dar lugar a diferentes predicciones, por ejemplo para inflación, que podrían corroborarse observacionalmente [71, 75].

Una vez hayamos impuesto las condiciones de contorno, lo que obtenemos es una expresión para la función de onda del Universo en una hipersuperficie dada. El estado cuántico del Universo también puede darse en términos de una matriz densidad [76, 77], que describe tanto estados puros (representados por la función de onda) como estados mezcla, dándonos una descripción cuántica más completa. Esto permite la generalización al caso de tener geometrías múltiplemente conectadas [78], donde no podemos factorizar la función de onda (ya que la hipersuperficie donde se definen los argumentos no dividirá el espaciotiempo en dos partes diferenciadas). Los observables pueden entonces calcularse trazando sobre las superficies no observadas.

En general, el cálculo exacto del estado cuántico del Universo tiene difícil resolución, salvo en sistemas sencillos. En algunos regímenes es suficiente con utilizar el resultado de la función de ondas en la aproximación semiclásica, por lo que entonces recurrimos a la aproximación WKB. Esta aproximación contempla la función de onda como una función exponencial semiclásicamente expandida, donde los términos que se ignoran en dicha exponencial proporcionan una contribución mucho menor que uno a la función de onda, resultando ésta dada por

$$\Psi(q_{ij}) \approx \Delta(q_{ij})e^{\pm iS_c(q_{ij})}. \quad (1.2.17)$$

Se considera que la amplitud  $\Delta$  varía lentamente y viene dada por la amplitud de

probabilidad de un estado inicial (la densidad de probabilidad se conserva a lo largo de trayectorias clásicas), y  $S_c$  es la acción clásica que satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi [79, 80].

En caso de que necesitemos estudiar modelos de universos en regímenes puramente cuánticos, otra de las alternativas que se pueden llevar a cabo dentro de la cuantización canónica es la construcción de una teoría cuántica de manera análoga a la mecánica cuántica estándar. De esta forma, no seleccionamos un estado del sistema, sino que disponemos de una base completa de estados del mismo. Esto se lleva a cabo mediante un método de cuantización algebraico [81], que se basa en una extensión de la prescripción de Dirac, en el que las condiciones de contorno vienen fijadas por el hecho de que la función de onda sea de cuadrado integrable respecto a una cierta medida de integración, como consecuencia de la construcción de un espacio de Hilbert adecuado para el estado cuántico del sistema.

Al igual que describimos en el procedimiento de Dirac, se parte del espacio de fases del sistema, a partir del cual se construye un álgebra de operadores cinemática actuando en un espacio vectorial complejo con el que se constituirá un espacio de Hilbert cinemático. Una vez definido este espacio en el que actúan los operadores, se implementan en él las ligaduras del sistema, que seleccionan el espacio admisible para los estados físicos. Se tiene que dotar a este espacio con la estructura de un espacio de Hilbert (físico) con la finalidad de obtener los estados cuánticos de nuestro sistema y los operadores observables, con una interpretación estándar mecano-cuántica. En concreto, para la determinación de este espacio se debe realizar una elección del producto interno, fijado mediante la prescripción de que los observables fundamentales del sistema estén representados por operadores autoadjuntos [82, 83]. Las especificaciones de este procedimiento se tratarán más detalladamente en el capítulo 6.

Una vez realizada la cuantización, en cosmología cuántica canónica la noción de tiempo se establece como una propiedad interna del sistema, a través de la identificación de un grado de libertad del modelo con un tiempo interno. En algunos casos, los observables del sistema se definen a partir de observables parciales [84, 85] para variables dinámicas. Se construye la relación entre estos observables parciales constituyendo un observable completo (de Dirac) que determina el valor de una variable en cada instante de la evolución. Finalmente, ya establecido un parámetro de evolución y unos observables definidos, tendremos una teoría cuántica completa del sistema de partida.

Desde el punto de vista interpretativo en cosmología cuántica [64], existen diferentes propuestas que parten de la propia mecánica cuántica, como puede ser la interpretación de Bohm-De Broglie [86], las historias coherentes [87, 88] o probabilidades condicionales

[89, 90]. Uno de los planteamientos para la emergencia de un universo clásico como el que vemos recurre a procesos de decoherencia, en los que el problema radica en la selección de los grados de libertad relevantes y aquéllos que forman parte del entorno, en un sistema cerrado como es nuestro Universo [91–93].

Por otra parte, es bien sabido que en la ecuación de Klein-Gordon es necesario considerar un número no fijo de partículas, lo que permite pasar a la segunda cuantización y definir así una teoría cuántica de campos. Por analogía, se puede hacer un procedimiento de este tipo a partir de la ecuación de Wheeler-DeWitt, justificado en caso de no tener un número fijo de universos, definiéndose así una tercera cuantización (debido a que dicha ecuación ya determina una teoría cuántica de campos), donde la función de onda pasa a ser el campo a cuantizar [94, 95], como explicaremos en el capítulo 4. Esta cuantización cobra vigor en el contexto de la existencia de una teoría de multiverso, donde se considera la creación y destrucción de universos, lo que dará lugar a los estudios realizados en los capítulos 4 y 5.

## 1.3. Multiverso

### 1.3.1. Panorama histórico y motivación

El planteamiento de la existencia de otros mundos o universos más allá del nuestro ha sido un concepto recurrente a lo largo de la historia, llevado con una ambivalencia de recelo y anhelo por hallar mundos similares al nuestro y saber si somos observadores únicos. Así, la idea de los muchos mundos ha aparecido de manera constante tanto en el ámbito de la filosofía como en el de la cosmología, aunque haciendo referencia a distintos conceptos según el paradigma cosmológico imperante en cada época.

La primera noción de multiverso se remonta a la antigua Grecia, con Anaximandro y su pluralidad de mundos, como nuestro cosmos, que se crean y se destruyen; o posteriormente con Epicuro y los ilimitados mundos que llenan el vacío infinito [96]. Siglos más tarde se recuperó cuando Giordano Bruno propuso la idea de los muchos mundos habitables como una superación del modelo heliocéntrico, e implicada por el propio modelo [97]. Casi dos siglos después, en el siglo XVIII, con la observación astronómica de las primeras galaxias, Kant propuso la existencia de mundos habitables alrededor de otras estrellas distintas de nuestro Sol [98], teoría que más tarde, en siglo XIX, Von Humboldt denominó «universos isla» [99].

En el paradigma cosmológico actual de un Universo en expansión acelerada regido por las leyes de la relatividad general, el concepto de multiverso surge como consecuencia directa de muchos desarrollos en física de partículas o cosmología (como, por

ejemplo, de la teoría de cuerdas o la inflación caótica eterna) y no como una teoría en sí mismo. Por otro lado, la extensión epistemológica del Universo al multiverso puede compararse con el tránsito copernicano, surgiendo así de manera más natural como un paso más allá en la tendencia histórica de la cosmología de que nuestro hábitat vaya perdiendo importancia gradualmente.

Asimismo, parece que la consideración de un escenario de multiverso podría solucionar diversos problemas abiertos en la física teórica. En este contexto cabe destacar el problema del principio del Universo, el ajuste fino de las constantes físicas, el problema de coincidencia cósmica o el problema de la constante cosmológica<sup>6</sup>. Aunque en cualquier caso parece que se trata tan sólo de una resolución parcial que más bien establece un cambio de pregunta.

A este respecto, en el ámbito de los ajustes finos de determinadas constantes y el problema de la coincidencia cósmica, el multiverso parece plantear una resolución parcial al considerar que existe una distribución de los valores de estas magnitudes a lo largo de los distintos universos que lo conforman. Por ende, esto suaviza el concepto del principio antrópico, que no posee poder predictivo alguno pero nos acota el tipo de valores que puede haber en nuestra región, pasando de preguntarnos por qué existe un universo con estos valores a por qué existimos justo en un universo con dichos valores. Vilenkin estableció [101] en este sentido el principio de mediocridad, considerándonos observadores típicos, de manera que vivamos en uno de los universos más probables y dotando así a la teoría de una posibilidad de falsabilidad, al poder estudiar la distribución de probabilidades para este hecho. Se ha considerado, por ejemplo, la posibilidad de existencia de universos cíclicos en el tiempo, donde cada final de un universo plantea las condiciones de partida para el siguiente, denominándose así cosmología cíclica conforme [102]. Otro planteamiento es la aparición de los distintos universos como todas las posibles soluciones correspondientes al descomunal número de falsos vacíos que conforman el paisaje en teoría de cuerdas [103]. En este sentido, se puede considerar que este planteamiento guarda relación con la idea de los universos burbuja [104, 105]. Estos universos surgen debido a un proceso de inflación caótica y eterna, el cual escinde nuevos universos que se van creando a partir de una región de un universo precedente.

Bajo todas estas premisas, se puede definir ahora el concepto de multiverso como el elemento que engloba todos los múltiples universos posibles, que son predichos por una teoría subyacente. Es decir, comprende todo aquello que existe físicamente, la totalidad del espacio y del tiempo. Se sigue de esta definición general, adrede un tanto vaga, que la crítica al multiverso o su diversa concepción a lo largo de la historia puede darse por un problema puramente semántico, ya que si por Universo entendemos el todo,

---

<sup>6</sup>Ver, por ejemplo, [100] para una revisión del problema del multiverso.

no hay lugar para el multiverso. Esta idea está en clara analogía a lo que sucedió con la palabra átomo, que si bien etimológicamente proviene del componente fundamental «indivisible», este concepto fue claramente superado.

La naturaleza del multiverso dependerá, por tanto, de la definición concreta que hagamos de los universos constituyentes. Podemos considerar como Universo, por ejemplo, la región observable que habitamos (delimitada por la esfera de Hubble), una región espaciotemporal causal, una de las ramas cuánticas del multiverso (en la interpretación de Everett de la mecánica cuántica) o simplemente una de las soluciones particulares de las ecuaciones cosmológicas que aparecen en teoría de cuerdas. En este sentido, Tegmark [106] realizó una clasificación para las distintas hipótesis de multiverso, que aunque no es la única existente, sí es la más extendida. Estableció así una clasificación jerárquica, donde cada nivel superior incluye al anterior. Cada uno de ellos posee unas características particulares y parte de unas suposiciones físicas, donde es interesante notar que comienzan con la consideración de un multiverso conformado por las diferentes regiones más allá de nuestra región observable, por lo que todos los universos tendrán características similares. Cada nivel va permitiendo más diversidad, pasando así a multiversos cuyos universos posean las mismas leyes físicas pero donde pueden variar las constantes de la naturaleza y las dimensiones en cada universo, hasta finalmente, suponer un multiverso constituido por universos que posean distintas estructuras matemáticas, y por tanto varíen las ecuaciones fundamentales de la física.

El modelo más temprano de multiverso en la física moderna proviene de la interpretación de Everett de la mecánica cuántica [107]. Esta interpretación, denominada de «muchos mundos» considera el multiverso como todas las historias posibles de un fenómeno de superposición, siendo nuestro Universo sólo una rama cuántica de ésta. Debido a la configuración del multiverso como un cúmulo de ramas cuánticas que se van bifurcando, la interpretación de esta idea no es sencilla y, por tanto, siempre ha sido la más controvertida de las teorías de multiverso.

Otra de las nociones de multiverso que debemos destacar se deriva de la propia inflación del Universo, donde, como consecuencia de los efectos cuánticos en el Universo temprano, se podría dar la creación de nuevos universos por un mecanismo denominado inflación caótica eterna [104, 105, 108], en el que distintas regiones del espacio pueden sufrir un mecanismo de inflación que las transforme en universos macroscópicos, denominados universos burbuja. En estos modelos de multiverso, las leyes fundamentales de la física serán las mismas en todos los universos al provenir éstos de un universo inflacionario común; no así los valores de las constantes de la naturaleza, determinados por el mecanismo de inflación particular de cada universo.

Recientemente, en el contexto de la teoría de cuerdas ha surgido la idea de un mul-

tiverso donde los diferentes universos, denominados universos de bolsillo, están asociados a los múltiples estados de falso vacío existentes en el paisaje de teoría de cuerdas [103, 108], de manera que cada uno de esos universos pueda tener diferente dimensión, distintas partículas elementales o valores de las constantes de la naturaleza. En este escenario nuestro universo debe emerger por un procedimiento de selección, a través de un razonamiento antrópico [103] o de argumentos de cosmología cuántica [109].

Existe una variedad mayor de escenarios de multiverso, que surgen a partir de teorías físicas y que plantean diferentes esquemas. Pero, al igual que los anteriores, todos los esquemas llevan asociados diversos interrogantes que a día de hoy no han sido solucionados. Es por ello que la idea de multiverso no está libre de críticas. A pesar de que la propia idea de multiverso sea un tanto conflictiva por el cambio de paradigma que conlleva (tal y como lo fueron en su momento muchas teorías ahora aceptadas), el punto fuerte de la argumentación en su contra es considerarla tan sólo una idea especulativa que no puede ser corroborada experimentalmente, y a la que por tanto, no se le puede dotar del rango de teoría física. De esta manera, diversos autores la asocian entonces al ámbito de la metafísica [100], ya que resulta inevitable pensar qué sentido físico tiene la consideración de otros universos diferentes del nuestro si éstos no tienen ningún efecto sobre nuestro Universo y por ello tampoco se pueden detectar.

Pese a las críticas existentes, la existencia de un entorno de multiverso podría proveernos de una explicación satisfactoria para diversos conceptos cosmológicos, por lo que la utilidad de estas teorías lleva a plantearnos la forma de una búsqueda observacional de las mismas. Debido a la posibilidad de que nunca sea factible observar otros universos directamente, parece razonable hacer una suposición convincente para su existencia. En este sentido sería necesaria una teoría de multiverso que proporcione nuevas predicciones acerca de las propiedades de nuestro Universo [110]. De manera que, al igual que experimentos provenientes del LHC o del satélite Planck han confirmado predicciones teóricas acerca del Universo que podemos ver (como el modelo inflacionario), también podrían aportar una corroboración de la realidad que no podemos ver.

Dentro de este tipo de teorías tienen cabida, por ejemplo, las predicciones de la teoría de cuerdas que buscan verificación en el LHC [111] o la explicación del gran vacío de nuestro Universo (observado en el CMB), atribuyéndolo a un efecto de entrelazamiento causado por otro universo en el ámbito de la teoría de cuerdas [109]. De igual manera, también se han propuesto posibles efectos en el CMB producidos por la colisión de otros universos burbuja con el nuestro durante su evolución primordial, en el contexto de inflación eterna [112]. Pero, por otro lado, la misma filosofía nos inclina a pensar que quizá ciertos esquemas de multiverso no tienen cabida física, ya que, por ejemplo,

si éstos poseen distintas leyes físicas o estructuras matemáticas, tal vez no podamos buscar un marco común de interacción con nuestro Universo.

El problema del multiverso se reduce, en cierto modo, a determinar si, en el entorno de nuestras teorías actuales, nos basta con un Universo o necesitamos más para resolver los problemas planteados. Aún así, es relevante el hecho de que, para discernir si nuestro Universo es único o si debemos considerar un contexto de multiverso, parece más natural abrir todas las posibilidades físicas, planteando la existencia de un multiverso y buscando las predicciones necesarias para falsar dicha teoría.

Naturalmente, la propuesta del multiverso tiene muchas cuestiones interesantes. Por ejemplo, ¿interactúan los universos entre ellos, comportándose el multiverso como un todo?, ¿las propiedades de los diferentes universos se ven influidas mutuamente, determinando así los valores de las constantes de la naturaleza o de la constante cosmológica en cada uno de ellos?

### 1.3.2. Multiverso físico

De la sección anterior se sigue que, aunque la teoría del multiverso plantea cuestiones muy interesantes, para superar su carácter meramente teórico, debemos proveerla del marco apropiado para una corroboración observacional. Las teorías descritas previamente pueden hacer de la noción de multiverso algo más plausible, pero no son suficientemente sólidas a la hora de probar que haya realmente otros universos ahí fuera. Entonces, el desafío que se presenta actualmente pasa por establecer una predicción directa, de observación limitada a nuestro Universo, que nos permita encontrar el rastro de algún tipo de interacción de otros universos con el nuestro.

Este concepto se concreta en el desarrollo de lo que denominaremos multiverso físico. Para llevarlo a cabo no es necesario particularizar a un modelo específico de multiverso. Bastará con restringirse a un escenario general que cumpla unos requisitos mínimos imprescindibles de los que se sigue la definición de este multiverso físicamente permisible.

El primero de estos requisitos se describe como la independencia clásica, dentro de los fenómenos firmemente asentados en relatividad general, de los espaciotiempos de cada universo que conforman el multiverso. Este grado de independencia será el indispensable para que podamos considerar cada universo de manera diferenciada y así determinar una separación entre ellos, ya que en caso contrario podríamos definir un solo universo como el todo. Si entendemos por conexiones espaciotemporales estándar las que permite la relatividad general en ausencia de curvas temporales cerradas, asumimos que no existen conexiones de este tipo perfectamente determinadas entre

cualquier par de los distintos universos que componen el multiverso. En particular, se previene así la presencia de mecanismos para establecer relaciones bien definidas entre los espacios o los tiempos de tales universos. Cabe destacar que más adelante estudiaremos la posible existencia de conexiones no estándar, a través de herramientas, tanto clásicas como cuánticas, que no entren en contradicción con esta definición previa.

La definición independiente de cada uno de los universos impide la existencia de conexiones espaciotemporales estándar perfectamente determinadas entre cualquier par de universos, en el contexto de la relatividad general y que no involucren curvas temporales cerradas. De esta forma se previene la posibilidad de que exista ninguna relación bien definida entre los espacios o los tiempos de esos universos. Cabe destacar que más adelante supondremos la existencia de conexiones no estándar entre los universos, a través de objetos exóticos en relatividad general o herramientas cuánticas, que no supondrán contradicción alguna con esta definición previa.

El segundo de ellos viene dado por la necesidad de que todos los universos deben ser potencialmente observables, directa o indirectamente, desde cualquier otro. De esta forma, se pueden llegar a establecer predicciones físicas en nuestro Universo que sean consecuencia de la totalidad del multiverso, que ya vimos que era una de las necesidades para la consideración de éste como una teoría física. Así se ve que la independencia entre universos se da sólo en un cierto nivel, ya que, aunque los espaciotiempos sean independientes, no todos sus componentes lo son, existiendo un grado de interacción débil entre ellos.

Por último, imponemos también que en cada universo puedan fijarse diferentes valores de las constantes de la naturaleza que sean compatibles con leyes de la física, de tal manera que estas constantes estén unidas unas a otras en el marco completo del multiverso por conexiones de entrelazamiento cuántico [113]. Con esta condición permitimos la libertad, ya explicada anteriormente, en la distribución de los valores de las constantes físicas, pero establecemos que, debido a un efecto de entrelazamiento cuántico entre los universos (necesario para considerar las interacciones entre los mismos), éstas no pueden surgir de manera independiente en cada uno sino que se encuentran correlacionadas.

De esta forma hemos definido un escenario de multiverso que no necesita de una teoría física concreta, y por tanto, sus resultados pueden ser aplicados a cualquiera de ellas en las que se satisfagan las condiciones descritas. Asimismo tendríamos un multiverso que es falsable y físicamente permisible, con lo que podemos centrarnos en estudiar el tipo de interacciones entre los universos. Los diferentes universos que conforman el multiverso son independientes, pero existen conexiones entre ellos. El tipo de conexiones que pueden existir se pueden agrupar en dos bloques: conexiones

clásicas y cuánticas.

Las conexiones clásicas provienen de considerar el multiverso como un espaciotiempo múltiplemente conectado, donde cada universo está físicamente interconectado con el resto por medio de túneles lorentzianos. Es importante notar que, de la propia definición de multiverso físico, no pueden existir relaciones causales entre los distintos universos, ya que éstas supondrían el mismo tiempo entre ambos y no podríamos considerarlos diferenciados. De esta forma, las conexiones deben producirse a través de agujeros de gusano convertidos en máquinas del tiempo, existiendo así curvas temporales cerradas en el interior del túnel.

Los potenciales efectos observables provenientes de los agujeros de gusano han sido estudiados desde hace varios años por diversos autores [44, 45, 47, 114–116], pero el reto que se nos plantea en este contexto es la búsqueda de un efecto observable inequívoco de la conexión de este agujero de gusano a otro universo, como veremos en el capítulo 3.

Las conexiones cuánticas entre universos, como hemos dicho, provienen del entrelazamiento cuántico entre universos. De esta manera consideramos que, aunque clásicamente se pueden separar los espaciotiempos referidos a cada universo, éstos no pueden separarse cuánticamente, dando entonces lugar a la concepción de un multiverso entrelazado, en el que cuánticamente no podemos entender cada universo de forma aislada [113]. Así, podríamos determinar efectos en nuestro Universo que apareciesen como consecuencia de las correlaciones cuánticas entre los universos. Con esa finalidad se han desarrollado esquemas de interacción entre universos que permitan discutir qué tipo de efectos podemos observar y qué predicciones nos deparan [113, 117]. Por ejemplo, en este sentido, parece que estas conexiones podrían arrojar algo de luz a la hora de determinar el valor de nuestra constante cosmológica o el valor de las constantes de acoplo, entre otras cosas.

El estudio de estas correlaciones cuánticas tiene la complicación añadida de que, como hemos visto, no disponemos de una teoría cuántica que describa nuestro Universo, y por ende, tan sólo podemos utilizar diversos modelos (como los explicados previamente en el campo de la cosmología cuántica) para hacernos una idea de qué clase de efectos se podrían encontrar. Se puede aproximar la cuestión de las interacciones cuánticas en el multiverso desde dos descripciones diametralmente opuestas, acotando así el problema por sus dos extremos. La primera de ellas se basará en una descripción exhaustiva de los espaciotiempos en el marco de la mecánica cuántica, que nos permite definir rigurosamente las interacciones pero que a su vez nos limita la concepción de distintos universos debido a la complejidad técnica, y que desarrollaremos en el capítulo 6. Por el otro lado, en la medida en que modelizamos el comportamiento de los universos y sus interacciones de una manera sencilla, se podrá realizar una aproxima-

ción más cualitativa a los efectos colectivos que puedan aparecer en la consideración del multiverso cuántico, con la que podamos ir más allá en el estudio del multiverso y sus consecuencias, a costa de relegar las cuestiones más técnicas, como se expondrá en los capítulos 4 y 5.

Se puede concluir que la posible falsabilidad de esta teoría permitiría revocar algunas de las objeciones expuestas acerca del cuestionable poder predictivo de la hipótesis de multiverso, dando lugar así a una teoría física consistente pendiente de resultados observacionales concluyentes en un sentido u otro.

Aún más, la existencia de un multiverso físico nos indicaría la necesidad de considerar éste como un marco indivisible, debido a las inevitables conexiones (clásicas o cuánticas) entre los universos que lo conforman, de tal manera que disiparíamos la incertidumbre en la motivación teórica acerca de la necesidad de considerar un contexto de multiverso para comprender el mundo que nos rodea. Pese a ello, al no tratarse de un modelo específico, dejaría la puerta abierta a la teoría física subyacente para la emergencia de este escenario de multiverso.



# Capítulo 2

## Objetivos y estructura de la tesis

En algún sitio algo increíble espera ser descubierto.

*Carl Sagan*

### 2.1. Objetivos

La investigación realizada en esta tesis se centrará en diversos aspectos referentes a las conexiones exóticas en relatividad general (a través de agujeros de gusano) y cuánticas entre regiones espaciotemporales o universos de otra forma separados. La relevancia de este estudio recae por un lado en examinar cuál es la estructura espaciotemporal requerida a la hora de cuantizar un modelo cosmológico, es decir, si es necesario considerar regiones inaccesibles para nosotros a la hora de establecer una teoría cuántica completa. Por otro lado, también es importante la búsqueda de predicciones observacionales de estas conexiones y los resultados físicos que conllevan, de manera que puedan proporcionar el marco necesario para la consideración física del multiverso y su futura falsabilidad.

La elaboración de este estudio puede estructurarse en tres bloques. En los dos primeros bloques nos centraremos en el estudio del multiverso físico a través de las mencionadas posibles correlaciones en él, viendo qué predicciones podríamos obtener en nuestro Universo, con la finalidad de dar solidez a la propia teoría de multiverso. Asimismo, podemos ver si existen efectos colectivos en el multiverso y de esta manera considerar la totalidad del mismo a la hora de hacer una teoría cuántica.

Por tanto, empezaremos estudiando en el primero de los bloques las conexiones clásicas a través de túneles lorentzianos entre diferentes regiones o universos, abordando

la búsqueda de una predicción observacional que nos permita la corroboración de la existencia de agujeros de gusano de forma inequívoca y buscando una observación que nos permita mostrar la conexión de nuestro Universo con otro.

En el siguiente bloque nos centraremos en las conexiones cuánticas que puedan existir, las cuales vendrán dadas a través del posible entrelazamiento entre los distintos universos que conforman el multiverso. Por otro lado, dentro de este mismo contexto, queremos ver a qué predicciones físicas conduce la idea de multiverso, con la finalidad de establecer si es necesaria su consideración para solucionar cuestiones cosmológicas actuales tales como el problema de la constante cosmológica. Además, nos plantearemos la cuestión de si, de alguna manera, los efectos cuánticos del multiverso reducirían su valor teórico. En este mismo sentido nos interesa estudiar la emergencia de nuestro Universo clásico en el contexto de un multiverso cuántico, a través de procesos de decoherencia, en función del fluido asociado a la energía oscura que domina nuestro Universo, dando lugar además a predicciones sobre el mismo.

Por último, debido a que el problema del multiverso físico está muy relacionado con la existencia de correlaciones entre regiones espaciotemporales separadas, atacaremos esta cuestión como primera aproximación al problema. De esta forma, podemos abordar el asunto desde otro punto de vista, es decir, quedarnos en un modelo sencillo de un espaciotiempo en el que podamos realizar una teoría cuántica completa y así acotar el problema desde ambos extremos: el análisis aproximado de un contexto general de multiverso, que hemos estudiado previamente, y el concreto, en el que se estudia el entrelazamiento cuántico entre regiones desconexas de espaciotiempos sencillos. El objetivo, entonces, es realizar una cuantización canónica completa de un espaciotiempo de interés cosmológico en un modelo de minisuperespacio y ver si la cuantización de cada región por separado es estable o si necesitamos considerar el espaciotiempo completo. Así, la aparición de correlaciones cuánticas entre regiones separadas clásicamente nos revelará la necesidad de consideración de regiones que *a priori* parecían no tener influencia alguna sobre nosotros, y nos llevará a pensar que en un escenario de multiverso podrían extrapolarse estas técnicas a relaciones cuánticas entre universos.

## 2.2. Estructura

Esta memoria se estructurará en cinco capítulos, en los que expondremos de manera detallada las cuestiones necesarias para desarrollar estos objetivos.

Comenzando por el estudio de los agujeros de gusano en el marco teórico que nos proporciona la relatividad general, en el capítulo 3 haremos frente al interrogante mencionado sobre la búsqueda de una predicción observacional para la existencia de estos

objetos, que se centra en los efectos de lente gravitatoria que pueda producir la luz al atravesar los agujeros de gusano [44, 116]. El problema actual de las huellas observables de estos túneles por efecto de lente gravitatoria reside en la similitud de los mismos con los producidos por otros objetos astronómicos más comunes. Con la finalidad de solucionar este problema y encontrar así una huella observacional distintiva de estos túneles, construiremos modelos de agujeros de gusano que posean diferente topologías de la garganta, toroidales [118] y de botella de Klein [119], encontrando para esta última una huella inconfundible producida por efecto de lente gravitatoria. Aún más, la existencia de agujeros de gusano nos permite la posibilidad de establecer una conexión clásica con otro universo. Ya mencionamos en la introducción que un requerimiento esencial para la existencia de este tipo de conexiones es su conversión en una máquina del tiempo. Esto será estudiado en detalle, centrándonos en el caso de los agujeros de gusano con topología de botella de Klein, que nos proporcionan la característica adicional de la no orientabilidad entre universos, asociada a la necesidad de no tener propiedades bien definidas entre los diferentes universos. De esta forma, veremos que la huella observacional producida por estos túneles interuniversales puede distinguirse claramente de los que se confinan en nuestro propio Universo. De igual manera, estudiaremos la posibilidad de existencia y estabilidad de estos objetos dentro del escenario cosmológico actual. El hecho de tener regiones del espaciotiempo (o universos) múltiplemente conectados debido a estos agujeros de gusano, nos lleva a pensar que quizá estas diferentes regiones o universos no están tan desconectados unos de otros, ya que podemos observar en nuestro Universo una huella proveniente de dentro de un agujero de gusano conectado a otra región del espaciotiempo o a otro universo.

En este sentido será de interés estudiar si al hacer una teoría cuántica del espaciotiempo podemos tener en cuenta sólo la región que vemos, o si por el contrario es necesario hacer una teoría cuántica global para considerar todos los efectos provenientes de otras regiones espaciotemporales. Por lo que los siguientes capítulos de esta memoria se centrarán en los posibles efectos cuánticos entre regiones espaciotemporales o universos que se encuentren desconectados de nuestra región

Para poder estudiar la idea de interacción entre universos utilizaremos un formalismo de tercera cuantización, que nos permite modelar de manera muy simple los distintos universos. En este contexto podemos utilizar distintas perspectivas semiclásicas para acercarnos al objetivo de analizar qué tipo de efectos cuánticos podríamos encontrar entre los distintos universos.

Comenzaremos en el capítulo 4 estudiando los procesos de decoherencia a través de los cuales emerge el Universo clásico en cosmología cuántica. Utilizando las ideas previas de estudios de decoherencia [120, 121], en los que los grados de libertad que

eliminamos del sistema dejan efectos observables en las propiedades semiclásicas del sistema, estudiaremos los efectos que un entorno de multiverso puede dejar en nuestro propio Universo. Para ello, analizaremos primeramente la decoherencia entre las distintas ramas de un universo acelerado, es decir entre las ramas en expansión y en contracción del Universo, debido a la interacción con un campo escalar. Consideraremos los casos de quintaesencia, vacío y energía fantasma, como las tres opciones actuales dentro de la relatividad general para identificar la energía oscura, y veremos las diferencias existentes entre cada una de las tres estimaciones. Posteriormente utilizaremos un formalismo de tercera cuantización aplicado al estudio de los procesos de decoherencia para estudiar la interacción entre un universo padre y su entorno, considerando éste como un multiverso de universos bebé (que en primera aproximación representan las fluctuaciones espaciotemporales del universo padre) o distintos universos padre. Los efectos de esta interacción se pueden estudiar en clara analogía con los fenómenos producidos en óptica cuántica [93], resultando en la existencia de una especie de desplazamiento Lamb de la energía de vacío, que nos permite reducir el valor teórico de la constante cosmológica. De la misma manera, podemos hacer un análisis termodinámico de estos procesos y ver con ello el incremento de la entropía en el Universo y su evolución de un estado puro a un estado mezcla, manteniéndose la unitariedad del sistema tan sólo bajo la consideración del multiverso completo.

La búsqueda de soluciones al problema de la constante cosmológica en un contexto de multiverso puede llevarnos también al análisis de una posible correspondencia entre nuestra constante cosmológica y la asociada a otro universo. Asimismo, la consideración del multiverso como un todo (derivada de la exigencia de mantener la unitariedad del sistema) da pie a explorar la existencia de fenómenos colectivos en el mismo. Esto nos proporcionaría una nueva perspectiva de los problemas cosmológicos actuales, lo que estudiaremos en el capítulo 5. Siguiendo igualmente un esquema de tercera cuantización, examinaremos ahora la interacción entre un par de universos al abrigo del llamado Principio de Curvatura [122], lo que nos proporcionará una disminución de la constante cosmológica de uno de los universos a expensas de incrementar la del otro universo. Desde un punto de vista más general, puede estimarse la interacción de todos los universos que conforman el multiverso, representados en el formalismo de tercera cuantización como osciladores armónicos que interactúan. En este caso utilizaremos un procedimiento de cuantización más general, debido a Wigner [123], para estudiar el espectro del Hamiltoniano en los casos de un multiverso con sus universos con y sin interacción explícita entre sus universos. La interacción entre universos producirá un desdoblamiento de los niveles de energía disponibles en cada universo, señalándonos por tanto que un multiverso interactuante conlleva efectos colectivos diferenciados de un multiverso entendido como la mera suma de universos aislados. Incluso en el caso en

el que no se considere interacción explícita entre universos, este sistema de cuantización proporciona intrínsecamente una interacción cuántica inducida entre los universos, sin análogo clásico, que dará cuenta del mismo tipo de efectos colectivos en el multiverso.

Estos estudios nos aportan una aproximación a la idea de que existan interacciones cuánticas con otros universos, debido a correlaciones cuánticas entre los mismos, no conservándose así la unitariedad de cada uno de ellos entendido de manera aislada. Pero cabe destacar que estos efectos cualitativos parten de fuertes aproximaciones que nos permiten estudiar modelos tan complejos. Para estudiar en detalle los efectos de una teoría cuántica completa del espaciotiempo, nos restringiremos a hacer una cuantización exacta de un modelo sencillo en el que haya regiones desconectadas, para ver si en este caso simple podemos encontrar ya correlaciones cuánticas entre las mismas.

Por lo tanto, en el capítulo 6, al contrario que en los casos anteriores, trataremos un sistema de un solo universo. Realizaremos una cuantización canónica de nuestro modelo, siguiendo una extensión de la prescripción de cuantización de Dirac [81], para deducir si a la hora de hacer una teoría cuántica debemos tener en cuenta las regiones separadas de la nuestra debido a que exista un entrelazamiento entre las mismas. De esta manera podemos inferir realmente cómo funcionan los mecanismos que producen el entrelazamiento entre regiones separadas, sin aproximaciones efectivas y con unos fundamentos sólidamente establecidos. Con esta finalidad partimos de un modelo clásico de minisuperespacio dado por la extensión analítica máxima de un universo de tipo Kantowski-Sachs, que corresponderá a un espaciotiempo de Schwarzschild-de Sitter, caracterizando sus soluciones clásicas para cada una de las regiones separadas por los horizontes existentes (horizonte cosmológico y de agujero negro). A partir del espacio de fases determinado construimos un álgebra de operadores cinemática actuando en un espacio de Hilbert (cinemático), en el que podemos representar la ligadura hamiltoniana como un operador. Encontramos los estados físicos determinando el núcleo del operador ligadura y los dotamos con la estructura de un espacio de Hilbert físico, que se descompone en dos subespacios correspondientes a nuestra región del espaciotiempo (entre los dos horizontes) y a las regiones más allá de los horizontes. Se demostrará que estos subespacios no son estables bajo la evolución de los estados físicos, de modo que aparecen correlaciones entre las diversas regiones, que conformarán un espacio de Hilbert global dado por el producto tensorial de ambos subespacios. Así aparecen efectos de entrelazamiento entre regiones clásicamente desconectadas.

Finalmente, en el capítulo (7) se presentarán las conclusiones a las que ha conducido esta tesis, como una síntesis de los principales resultados obtenidos en el desarrollo de la misma.



# Capítulo 3

## Efectos observables de los agujeros de gusano

El que se pierde es el que encuentra las nuevas sendas.

*Nils Kjaer*

### 3.1. Agujeros de gusano y observabilidad

#### 3.1.1. Descripción de los agujeros de gusano en función de la geometría de su garganta

Como adelantamos en la introducción, Morris y Thorne [30, 31] ya vieron que los agujeros de gusano nos permiten establecer túneles espaciotemporales entre distintas regiones del Universo (o diferentes universos), los cuales podrían ser estables y atravesables en ambas direcciones. Para ello, consideraron una métrica general estática y esféricamente simétrica que corresponderá a una garganta que conecta dos regiones asintóticamente planas del espaciotiempo. Esta métrica viene dada por

$$ds^2 = -e^{2\Phi(\ell)} dt^2 + d\ell^2 + r^2(\ell) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.1.1)$$

donde  $\Phi(\ell)$  es una función arbitraria finita y  $\ell$  es la distancia radial propia, que asumimos nula en la garganta con el propósito de que los valores positivos y negativos de esta variable cubran las dos regiones asintóticamente planas diferentes. La función  $\Phi(\ell)$  debe ser tal que tienda a una constante en el límite asintóticamente plano, es decir, cuando  $\ell \rightarrow \pm\infty$ , donde también requerimos que  $r(\ell)/|\ell| \rightarrow 1$ . La garganta del

agujero de gusano corresponde a un valor mínimo de la función radial  $r(\ell) = r_0$ , fijado en  $\ell = 0$ .

Aunque esta métrica es interesante por su simplicidad y, como veremos, también para estudiar las propiedades de estos objetos como lentes gravitatorias, podemos expresarla de manera general en términos de la coordenada radial, de la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - K(r)/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.1.2)$$

donde  $\Phi(r)$   $K(r)$  son funciones arbitrarias denominadas respectivamente función de desplazamiento y función de forma, ya que determinan el desplazamiento gravitatorio al rojo y la forma espacial del agujero de gusano. Estas funciones deben tender a un valor constante (o nulo) en el límite asintóticamente plano. La función  $r$  no es monótona, ya que decrece desde  $+\infty$  a un valor mínimo del radio  $r_0$  en la garganta, que corresponde a  $K(r) = r_0$ , y vuelve a incrementar su valor hasta  $+\infty$  al emerger en la otra región del espaciotiempo. Por otro lado, estas funciones tienen ciertas restricciones para que podamos considerar el agujero de gusano atravesable por un observador, estudiadas en la Ref. [30] y que nosotros consideraremos que se satisfacen a lo largo del estudio de estos túneles espaciotemporales.

El cálculo de las soluciones de las ecuaciones de Einstein [30] lleva a la necesidad de existencia de un el tensor de energía-momento que viola la condición de energía débil en la garganta y en un entorno de la misma, con las características de lo que, como ya introdujimos, se denominó materia exótica o fantasma.

La forma de visualizar este espaciotiempo será a través de un diagrama embebido, que además nos permitirá estudiar propiedades de estos objetos que serán relevantes en el desarrollo de este trabajo. Para ello, nos centraremos en la geometría de un espacio tridimensional a tiempo constante. Debido a la geometría esféricamente simétrica de este espacio, podemos restringir nuestro estudio a una sección del espaciotiempo dada por  $\theta = \pi/2$ , sin pérdida de generalidad. Por lo que el elemento de línea de esta sección estará dado por

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - K(r)/r} + r^2 d\varphi^2. \quad (3.1.3)$$

Queremos considerar nuestra sección embebida en un espacio euclídeo tridimensional, dado en coordenadas cilíndricas de la forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (3.1.4)$$

La superficie embebida tendrá simetría axial y, por lo tanto, está descrita por una

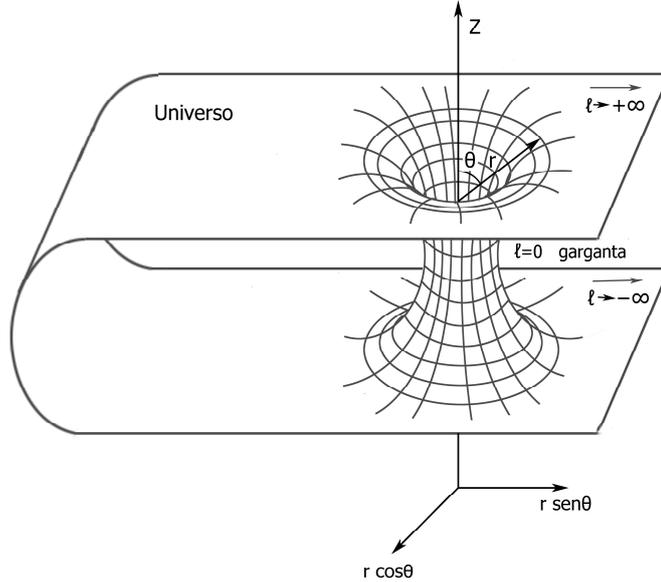


Figura 3.1: Diagrama embebido de un agujero de gusano entre dos regiones del Universo. Si las dos regiones asintóticamente planas fuesen espaciotiempos separados, el agujero de gusano establecería la conexión ente dos universos diferentes.

función  $z = z(r)$ . De tal manera que podemos expresar la métrica (3.1.4) como

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (3.1.5)$$

Para que este elemento de línea se corresponda con la sección de nuestro espaciotiempo, identificamos las coordenadas de las expresiones (3.1.3) y (3.1.5), obteniendo directamente que la función que describe la superficie embebida viene dada por

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{K(r)} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (3.1.6)$$

Esta ecuación determina la forma de la geometría espacial del agujero de gusano, representada en la Fig. (3.1). Se puede ver fácilmente que la ecuación (3.1.6) tiende a cero en el límite asintótico, indicando una geometría plana, y diverge en la garganta del agujero de gusano, lo que corresponde a una pendiente vertical. Esta divergencia sólo indica que  $r$  es una mala coordenada en los alrededores de la garganta, donde podemos utilizar la distancia radial propia, que es siempre finita, siendo ésta

$$d\ell = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{(1 - K(r')/r')}}. \quad (3.1.7)$$

El requisito que nos falta para que la superficie embebida describa un agujero de gusano conectado a una región asintóticamente plana es que dicha superficie debe sufrir una expansión positiva, denominada extensión hacia fuera, en la garganta y un entorno cercano de la misma, lo cual viene dado matemáticamente por la condición

$$d^2r/dz^2 > 0 \quad (\text{cerca de } r = r_0), \quad (3.1.8)$$

que, al introducirla en las ecuaciones de Einstein, se puede ver que está relacionada con la existencia de materia exótica o fantasma en esa región [30, 124].

Estos agujeros de gusano son susceptibles de poder convertirse en máquinas del tiempo [31], permitiendo así que cualquier objeto que los atravesase pueda viajar al pasado o al futuro. Para llevar a cabo esta transformación necesitamos que una de las bocas del agujero de gusano tenga una aceleración tal que ésta se mueva a una velocidad cercana a la de la luz respecto de la otra boca, de manera que para un observador exterior en cada una de las bocas habrá transcurrido un tiempo diferente. Por consiguiente, podemos encontrarnos con curvas temporales cerradas en esta región del espaciotiempo. En el caso de estos agujeros de gusano convertidos en máquinas del tiempo, su métrica ahora vendrá dada, como se puede ver en la Ref. [31], por

$$ds^2 = -(1 + g\ell F(\ell) \cos\theta)^2 e^{2\Phi} dt^2 + d\ell^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.1.9)$$

donde  $F = F(\ell)$  es un factor de forma que se anula en el centro de la garganta y crece suavemente hasta 1 según nos alejamos de la garganta, y  $g = \gamma^2 dv/dt$  es la aceleración de la boca en movimiento, con  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ . Cabe destacar, como ya referimos en la introducción, que parece que estas máquinas del tiempo se desestabilizarían por efectos cuánticos, englobados en la denominada conjetura de protección cronológica [32], manteniendo así el Universo a salvo de paradojas temporales.

Los agujeros de gusano estudiados por Morris y Thorne poseen una topología esférica en su garganta, pero este requisito no es indispensable para la existencia de agujeros de gusano, sino que podemos pensar en topologías más complicadas que caractericen su garganta. Estas distintas geometrías nos pueden conducir a nuevos efectos de estos agujeros de gusano que no estén contemplados en el caso simple de geometría esférica. La extensión topológica más sencilla sería considerar que la garganta tiene una simetría toroidal, la cual se sugirió para intentar solucionar el problema de la construcción de una máquina del tiempo [118] y, como veremos más adelante, para buscar efectos observables característicos de los agujeros de gusano [125], de tal manera que nos proporcionen una observación más distintiva que en el caso de los agujeros de gusano con geometría esférica. Con todo, veremos luego que serán los agujeros de botella de Klein los que nos proporcionen un efecto observacional que de manera ineludible corresponda a un tipo de agujero de gusano.

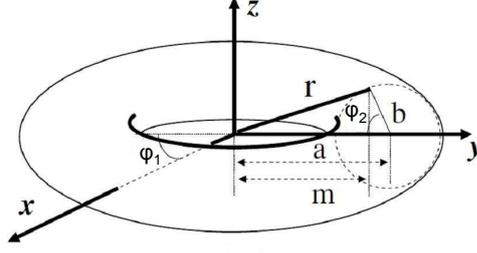


Figura 3.2: Parámetros que definen la garganta del agujero de anillo toroidal, en términos de los cuales se define la métrica (3.1.10)

Consideremos entonces un túnel espaciotemporal orientable cuya garganta tiene simetría toroidal, al que denominaremos agujero de anillo. Usando el conjunto de parámetros geométricos especificados en la Fig. (3.2), podemos deducir que la tres-métrica espaciotemporal en la superficie del toro de un agujero de anillo, considerando los radios  $a$  y  $b$  constantes, y por tanto  $r = r(\varphi_2)$ , viene dada por [118]

$$ds^2 = -C_2 r^2 dt^2 + b^2 \left[ 1 + \frac{C_1 a^2 \sin^2 \varphi_2}{r^6 \left(1 - \frac{A^2}{r^4}\right)} \right] d\varphi_2^2 + m^2 d\varphi_1^2, \quad (3.1.10)$$

donde

$$A = a^2 - b^2, \quad m = a - b \cos \varphi_2, \\ r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi_2}, \quad (3.1.11)$$

$C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración arbitrarias (provenientes de las ecuaciones de Einstein de una métrica toroidal general), y  $a$  y  $b$  son los radios de la circunferencia generada por el eje circular del toro y el de la sección del toro, respectivamente, con  $a > b$ . La métrica (3.1.10) está definida para  $a - b \leq r \leq a + b$  y los ángulos  $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$  [ver Fig. (3.2)].

Al estudiar las superficies embebidas en secciones a tiempo constante de estos agujeros de anillo, González-Díaz [118] obtuvo que venían dadas por la siguiente ecuación

$$\frac{dz}{dr} = \left( \frac{b^2}{b_0^2} - 1 \right)^{-1/2}, \quad (3.1.12)$$

donde  $b_0$  corresponde al valor mínimo del radio  $b$  de la garganta. De esta manera determinó que ahora el requisito de que puedan conectarse a una región asintóticamente

plana implica bien una extensión hacia fuera, similar a la dada por la ecuación (3.1.8), o bien una extensión hacia dentro ( $d^2r/dz^2 < 0$ ), dependiendo ello del ángulo  $\varphi_2$ . Más concretamente

$$\frac{d^2r}{dz^2} > 0 \quad \text{para} \quad 2\pi - \varphi_2^c > \varphi_2 > \varphi_2^c, \quad (3.1.13)$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} < 0 \quad \text{para} \quad \varphi_2^c > \varphi_2 > -\varphi_2^c, \quad (3.1.14)$$

donde  $\varphi_2^c = \arccos(b/a)$  es un horizonte angular. Al igual que resultaba para los agujeros de gusano de topología esférica, estas extensiones nos estipulan la distribución de materia exótica en la garganta del agujero de anillo, y en este caso también de materia ordinaria en la región donde la garganta se extiende hacia dentro.

### 3.1.2. Observabilidad. Efecto de lente gravitatoria

La existencia de estos túneles espaciotemporales es, hasta el momento, una cuestión teórica; por lo que la aspiración física inmediata será conducir nuestros pasos hacia la búsqueda de pruebas observacionales de su existencia y abrir así la posibilidad de explorar otras regiones del espaciotiempo u otros universos. La consideración de los posibles efectos observables de los agujeros de gusano y los agujeros de anillo no es algo nuevo. Hace ya más de una década se predijo por primera vez el efecto de microlente gravitatoria de fuentes luminosas que producirían los agujeros de gusano [114], es decir, la deflexión de los rayos de luz que pasasen cerca de sus bocas, actuando como una lente divergente. Este efecto sería justo contrario al ya conocido efecto de lente gravitatoria de objetos masivos, en el que los mismos actúan como una lente convergente dando lugar así a los característicos anillos de Einstein [126], hallados observacionalmente en numerosas ocasiones. Posteriormente, estudios más recientes han profundizado en esta idea del efecto de lente gravitatoria de agujeros de gusano [45, 46, 115, 127], considerando también el efecto de estructuras de tipo agujero de gusano a gran escala (macrolentes) [47].

Por otro lado, se vio [44] que, de manera similar, estos túneles podían producir un efecto de lente gravitatoria sobre fuente luminosas que atravesasen su garganta, proviniendo la luz, por tanto, de otra región del espaciotiempo (o de otro universo). Asimismo, al menos los agujeros de anillo, eran capaces de inducir otros efectos potencialmente observables en la luz que los atravesaba, tales como un desplazamiento en la frecuencia de las fuentes emisoras, cambios discontinuos de la temperatura de fondo, ensanchamiento y aumento de la intensidad de las líneas espectrales, además de un fuerte incremento en la luminosidad de cualquiera de los objetos en la garganta del túnel.

Basándose en este efecto de lente gravitatoria sobre los rayos de luz que atraviesan el agujero de gusano y con el propósito de encontrar una predicción para la observación de estos objetos, se estudió la forma precisa de la huella observacional que dejarían tanto los agujeros de gusano [116, 128], como los agujeros de anillo [125] por efecto de lente gravitatoria, que, como veremos a continuación, consisten en un anillo simple y en un anillo doble concéntrico, respectivamente. La similitud de estos resultados con los mencionados anillos de Einstein permite que los agujeros de gusano sean susceptibles de ser observados, aunque del mismo modo dificulta su diferenciación respecto de otros objetos astronómicos en el Universo capaces de producir efectos similares.

### **Huella observacional de agujeros de gusano**

Shatskiy fue el primero en sugerir [116, 128] que los agujeros de gusano pueden hacerse observables y reconocibles en términos de brillantes anillos luminosos que se originan por la necesaria extensión hacia fuera de la superficie embebida alrededor de su garganta, dada por la ecuación (3.1.8). Esta extensión hacia fuera hace que los agujeros de gusano tengan un efecto de lente divergente cuando estén sometidos a cualquier haz de rayos de luz proveniente de una fuente luminosa situada detrás de la boca más lejana del agujero de gusano. Dicho efecto se manifiesta necesariamente a los observadores en la Tierra como un anillo simple perfectamente circular, como puede verse representado en la Fig. (3.3).

El argumento realmente más devastador contra la propuesta del carácter distinguible para los agujeros de gusano de los anillos de Shatskiy es que, incluso si la materia exótica existe, es difícil ver cómo los anillos resultantes pueden diferenciarse del rastro similar dejado por objetos astronómicos masivos tales como galaxias, agujeros negros o cuásares, cuyos efectos de lente gravitatoria aparecen como anillos de Einstein. El hecho de que este patrón pueda ser producido por efecto de lente gravitatoria de objetos astronómicos comunes en el Universo hace que sea más difícil utilizar estas soluciones para la búsqueda de observaciones inequívocas de agujeros de gusano en nuestro Universo, o conectados a otro universo. Aún así, esto no descarta su posible caracterización observacional, ya que quizá podría realizarse un análisis más preciso de esa huella luminosa que determinase inequívocamente su procedencia.

### **Huella observacional de agujeros de anillo**

Una simetría interna del túnel que podría dar lugar a un patrón observacional más característico, producido por efecto de lente gravitatoria, es la correspondiente al agujero de anillo [118].

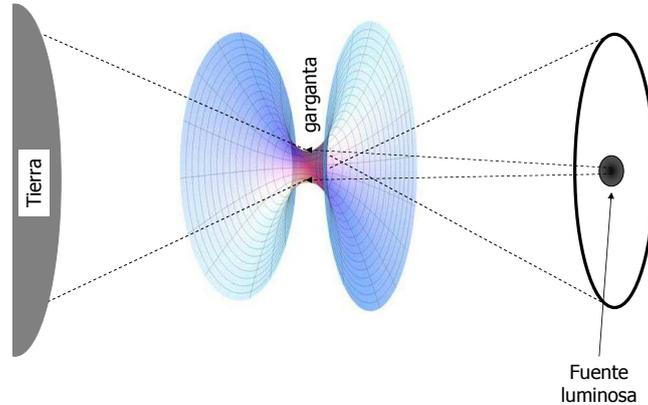


Figura 3.3: Huella observacional de un agujero de gusano, por el efecto de lente gravitatoria divergente de su garganta, producida por una fuente luminosa situada al otro lado del mismo.

Un análisis meticuloso [125, 118] nos lleva a deducir que se espera que ocurran efectos de lente gravitatoria debido a las extensiones hacia fuera y hacia dentro en un entorno de la garganta, dadas por las ecuaciones (3.1.13) y (3.1.14). En consecuencia, las bocas actuarían como lentes divergentes para líneas de universo a lo largo de  $2\pi - \varphi_2^c > \varphi_2 > \varphi_2^c$ , y como lentes convergentes para líneas de universo a lo largo de  $-\varphi_2^c < \varphi_2 < \varphi_2^c$  (sin tener lugar acciones de lente gravitatoria a  $\varphi_2 = \varphi_2^c$  ni a  $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_2^c$ ).

Por lo tanto, en el caso de los agujeros de anillo, su topología múltiplemente conexa hace que, en lugar de producirse solo una extensión hacia fuera (divergente), también se produce un efecto de extensión hacia dentro (convergente) para los rayos de luz que pasan a través de su garganta. Esto daría lugar a que un observador en la Tierra interpretará la luz que pasa a través de la garganta de un agujero de anillo, originada por una fuente luminosa simple, como proveniente de dos anillos concéntricos luminosos brillantes [118], que forman el peculiar patrón distintivo para los agujeros de anillo, como se puede ver en la Fig. (3.4). Este patrón no puede generarse por ningún otro objeto astronómico más que la inverosímil serie de tres objetos luminosos masivos (digamos galaxias), los cuales deben estar tan perfectamente alineados a lo largo del eje de visión que su incidencia se hace extremadamente improbable.

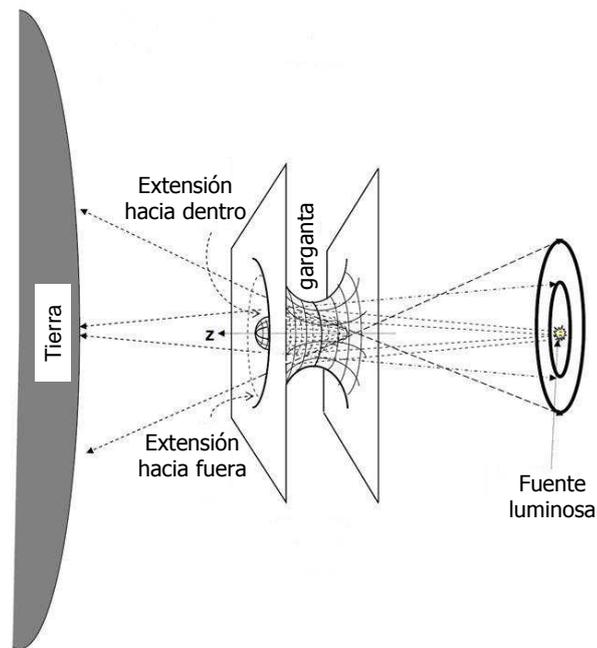


Figura 3.4: Efecto de lente gravitatoria producido por un agujero de anillo, proveniente de una fuente luminosa simple situada detrás del mismo. Los rayos que pasan cercanos a las superficies externa y interna se extienden hacia fuera y hacia dentro, respectivamente, dando lugar a una imagen que está formada por dos anillos luminosos concéntricos. Las posiciones mutuas relativas de estos anillos dependerán de la distancia entre el agujero de anillo y la fuente luminosa. Si esta distancia es suficientemente pequeña, entonces el anillo exterior proviene de la superficie de extensión hacia dentro, y a la inversa, si la distancia entre la fuente y el agujero de anillo aumenta, entonces el anillo exterior vendrá dado por la superficie de extensión hacia fuera. Cuanto mayor sea la distancia, mayor será la diferencia entre los dos anillos luminosos.

Se infiere fácilmente de la Fig. (3.4) que para un agujero de anillo razonablemente grande y suficientemente lejos de la fuente luminosa, el anillo luminoso interior correspondería a las superficies de extensión hacia dentro (convergentes). Si mantenemos el tamaño del agujero de anillo invariante y la distancia entre el agujero de anillo y la fuente luminosa decrece drásticamente, entonces el anillo luminoso interior pasaría a estar producido por la superficie de extensión hacia fuera (divergente).

Tal huella de un agujero de anillo podría haberse observado ya a través del Telescopio Espacial Hubble de la NASA/ESA, que a comienzos de 2008 reveló [129] un fenómeno nunca visto antes en el espacio: un par de anillos luminosos, uno enclavado dentro del otro como un patrón de una diana. Este patrón fue atribuido al efecto combinado de dos anillos de Einstein originados por el improbable alineamiento perfecto de tres galaxias considerado anteriormente, es decir, estaría causado por la curvatura de la luz proveniente de dos galaxias distantes alineadas directamente detrás de una galaxia masiva en primer plano, como tres cuentas en una cuerda a lo largo del eje de visión. Esta explicación se debió a que en ese momento no disponían otra interpretación para lo que estaban observando. Además este extraño fenómeno encontrado por el Telescopio Espacial Hubble podría finalmente ofrecer un mayor conocimiento de la materia oscura, energía oscura, la naturaleza de las galaxias distantes e incluso la curvatura del Universo.

Como se expuso previamente, para que esta interpretación sea viable, la galaxia masiva en primer plano tiene que estar casi perfectamente alineada en el cielo con las dos galaxias de fondo a diferentes distancias para justificar el descubrimiento. La galaxia en primer plano está situada en un desplazamiento al rojo correspondiente a  $3 \times 10^9$  años-luz de distancia. Ahora, para justificar la proporción entre los dos radios de los anillos, estos deberán corresponder a las múltiples imágenes generadas por dos galaxias situadas a una distancia de unos  $6 \times 10^9$  y  $11 \times 10^9$  años-luz, aproximadamente.

Sin embargo, dado que las probabilidades de observar este alineamiento extremadamente preciso de las tres galaxias son tan bajas, cabe la posibilidad de que, una vez que hemos descubierto que tales anillos puedan interpretarse como la huella de la presencia de un agujero de anillo en la dirección del espacio donde el sistema del doble anillo luminoso fue descubierto, podamos adoptar esta última interpretación como una posible explicación alternativa para el fenómeno. De esta manera entenderíamos las luminosidades de ambos anillos como originadas por las respectivas desviaciones de la luz a lo largo del ángulo  $\varphi_2$ , causadas por el efecto combinado del tamaño del radio de la garganta y la distancia relativa entre las dos bocas. Así, la distribución particular de materia exótica y ordinaria a lo largo del túnel deflectaría la luz proveniente de una fuente luminosa al otro lado del mismo para producir la huella observada por el

Telescopio Espacial Hubble.

### 3.1.3. Conexión con otros universos

Una tarea importante en los estudios de multiverso es desarrollar predicciones sobre los efectos del multiverso en las propiedades de nuestro Universo, que sean testables en el mismo. En este sentido, parece necesario explorar las vías existentes que pueden llevarnos directamente a observar una propiedad o característica de otro universo distinto del nuestro. Esto nos sugiere como reto pensar un experimento concebible u observación confinada en nuestro Universo basada en buscar algún tipo de huella dejada por túneles que lo conectan con otros universos. Ya adelantamos previamente cómo se sugirió que los agujeros de gusano pueden conectar no sólo regiones separadas de nuestro Universo, sino diferentes universos dentro de un escenario de multiverso.

En particular, surgió cierta esperanza de poder utilizar los agujeros de gusano [128], y específicamente los agujeros de anillo [125], para obtener una evidencia directa de la existencia de otros universos a los cuales éstos pudiesen estar conectados, atravesando así cierta información desde esos universos al nuestro. La conexión de estos agujeros de gusano con otros universos debería requerir que se pudiesen transformar en máquinas del tiempo, con velocidades mutuas completamente inespecificadas entre sus bocas, de tal forma que al contener estos túneles curvas temporales cerradas completamente arbitrarias [125] no haya un tiempo común entre ambos universos y podamos considerar éstos de manera independiente.

Sin embargo, tal esperanza en que las predicciones observacionales hechas de estos agujeros de gusano y de anillo sean potencialmente viables para discernir la existencia de otros universos distintos del nuestro se merma en cierto modo cuando tenemos en cuenta los siguientes argumentos. Primero de todo, la incertidumbre, aludida anteriormente, de que esos efectos observables puedan provenir de esos túneles o objetos astrofísicos más familiares, tales como galaxias, estrellas, agujeros negros o cúasares.

Por otro lado, el problema de la observación directa de otro universo es que, de la propia definición de universo, se sigue que, dado que no puede haber conexiones espaciotemporales entre cualquier par de universos para que estos puedan ser considerados independientes entre sí, menos todavía está permitida la posibilidad de alguna relación bien definida entre los espacios o los tiempos de esos universos. Previamente hemos argumentado que si se permite que las conexiones de agujeros de gusano y de anillo se conviertan en máquinas del tiempo podríamos crear un espaciotiempo que podría representar dos universos que consideremos independientes, sin embargo, tal posibilidad no puede implementarse completamente debido a que siguen existiendo relaciones bien

definidas entre ellos, como que el espaciotiempo global debe ser orientable.

Estas cuestiones parecen indicar que entonces, más que usar túneles espaciotemporales orientables, tales como agujeros de gusano o agujeros de anillo, podría ser interesante añadir un grado extra de indeterminación a los túneles que conectan distintos universos, preservando éstos su propiedad de ser todavía universos bien definidos, utilizando agujeros de gusano con topología no orientable, como la botella de Klein que estudiaremos a continuación, y convirtiéndolos en máquinas del tiempo mediante el hecho de permitir que sus bocas se muevan relativamente una respecto a la otra con velocidades totalmente inespecificadas. Consideraremos los efectos que tales conexiones producirían y la posibilidad de utilizarlas para comprobar la existencia de otros universos diferentes del nuestro, con el objetivo de animar a explorar la veracidad de la idea del multiverso a través de la búsqueda de una huella de efecto de lente gravitatoria de agujeros de botella de Klein no orientables conectándonos con otro universo. Para que este efecto potencialmente observable sea determinante, estos objetos tendrían que solventar, además, el problema tratado previamente de dar lugar a un patrón observacional absolutamente diferenciado de cualquier otro objeto.

## 3.2. Agujero de botella de Klein y su efecto de lente gravitatoria

A la vista de los resultados anteriores, puede resultar interesante estudiar agujeros de gusano con nuevas topologías de la garganta, que puedan conllevar efectos observables con un carácter más distintivo que nos permita hacer predicciones inequívocas sobre los agujeros de gusano, a expensas de la indiscutible complicación del modelo, que podría acarrear una disminución de la probabilidad de encontrar una evidencia de los mismos. En este sentido, nos centramos en el estudio de agujeros de botella de Klein, que se corresponden con una topología de la garganta de una botella de Klein, como su propio nombre indica.

La motivación de considerar también la existencia de agujeros de gusano con esta topología pasa esencialmente por su carácter no orientable, que nos da la posibilidad de conectar distintos universos entre sí sin presuponer una orientabilidad previa en el multiverso. De esta manera tendríamos universos conectados a través de túneles orientables y otros a través de túneles no orientables, añadiendo así una incertidumbre extra a la conexión entre los universos que concuerda con la idea expuesta anteriormente de que no haya propiedades comunes completamente determinadas. Adicionalmente, se ha visto que este espaciotiempo es estable frente a fluctuaciones de vacío y también

se puede convertir en una máquina del tiempo [119]. Por otra parte, nos sugiere distribuciones de materia ordinaria y exótica en su garganta suficientemente grandes y diferenciadas, con un patrón no trivial como en los casos anteriores.

### 3.2.1. Geometría de botella de Klein y embebimiento en la garganta del agujero de gusano

Para la construcción de la geometría de la botella de Klein podemos ver que, en relación con los parámetros que definían nuestra topología del toro orientable [ver Fig. (3.2)], extendemos el rango de la coordenada angular,  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ , para que recorra también de manera continua los valores comprendidos entre  $2\pi \leq \varphi_1 \leq 3\pi$ , identificando las superficies transversales correspondientes a  $\varphi_1 = 0$  y  $\varphi_1 = 3\pi$ ; con lo que la geometría adquiere su carácter no orientable. Empleando la serie de parámetros geométricos especificados en la Fig. (3.5) y en la parte inferior de la Fig. (3.6) podemos escribir la métrica espaciotemporal para un agujero de botella de Klein de una forma global que abarque el espacio completo [119], representándola mediante dos cartas coordenadas espaciales (se puede ver que en realidad son dos métricas diferentes),

$$\begin{aligned} ds^2 = & -e^{2\Phi} dt^2 + \theta(2\pi - \varphi_1) \left( \frac{dr_1^2}{1 - K(b_1)/b_1} + d\Omega_1^2 \right) \\ & + \theta(\varphi_1 - 2\pi) \left( \frac{dr_2^2}{1 - K(b_2)/b_2} + d\Omega_2^2 \right), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria dependiente de  $r$  en el respectivo intervalo,  $\theta(x)$  es la función escalón de Heaviside [130],  $K(b_i)$  es la función de forma del agujero de botella de Klein [119], y  $a_i$  (ver siguiente ecuación) y  $b_i$  son los radios de las circunferencias de la garganta relevantes, como se ve en la Fig. (3.5) y en la Fig. (3.6), y cuyo significado explicaremos luego. Los elementos de línea  $d\Omega_i^2$  están dados por las siguientes expresiones. Para  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ ,

$$\begin{aligned} d\Omega_1^2 = & \left\{ m_1^2 + \frac{1}{4} [M_1 (a_1 - C_1) + N_1 (b_1 - D_1)] \right\} d\varphi_1^2 + b_1^2 d\varphi_2^2 \\ & - b_1 \sqrt{(a_1 - C_1)(A_1 - a_1)} \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

donde

$$M_1 = A_1 - a_1 - (B_1 - b_1) \cos \varphi_2, \quad (3.2.3)$$

$$N_1 = B_1 - b_1 - (A_1 - a_1) \cos \varphi_2, \quad (3.2.4)$$

$$m_i = a_i - (-1)^i b_i \cos \varphi_2, \quad i = 1, 2. \quad (3.2.5)$$

Ahora, para  $2\pi \leq \varphi_1 \leq 3\pi$ ,

$$d\Omega_2^2 = \left\{ m_2^2 + \frac{1}{4} [M_2 (a_2 - A_2) + N_2 (b_2 - B_2)] \right\} d\varphi_1^2 + b_2^2 d\varphi_2^2 - b_2 \sqrt{(a_2 - A_2)(C_2 - a_2)} \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (3.2.6)$$

donde, en este caso,

$$M_2 = C_2 - a_2 - (D_2 - b_2) \cos \varphi_2, \quad (3.2.7)$$

$$N_2 = D_2 - b_2 - (C_2 - a_2) \cos \varphi_2. \quad (3.2.8)$$

Finalmente tenemos que

$$r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + 2(-1)^i a_i b_i \cos \varphi_2}, \quad (3.2.9)$$

donde  $A_i, B_i, C_i$  y  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , son una serie de parámetros ajustables, que son arbitrarios salvo porque deben cumplir las condiciones  $A_1 > C_1$ ,  $B_1 > D_1$ ,  $A_1 > B_1$  y  $C_1 > D_1$  para el intervalo angular  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ , mientras que para  $2\pi \leq \varphi_1 \leq 3\pi$  tendremos que  $C_2 > A_2$ ,  $D_2 > B_2$ ,  $C_2 > D_2$  y  $A_2 > B_2$ ; asimismo deben satisfacer  $D_2 = B_1$ ,  $B_2 = D_1$  y  $A_1 - C_1 = A_2 + C_2$ , con  $A_1 - C_1 > 2A_2$ . Además  $a_i$  y  $b_i$  son los radios de la circunferencia generada por el eje circular del toro de la botella de Klein y el de la sección de la botella de Klein, respectivamente, con  $a_i > b_i$ . La métrica (3.2.1) está definida para  $a_i - b_i \leq r_i \leq a_i + b_i$  y los ángulos  $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$  [vease las Figs. (3.5) y (3.6)]. Esta métrica, (3.2.1), puede considerarse como una generalización a la geometría de botella de Klein de las métricas de los agujeros de gusano y de anillo, y por tanto, éstas pueden recuperarse fijando los parámetros a unos determinados valores [119].

Para estudiar las propiedades de lente de un agujero de botella de Klein, escribimos la métrica del espaciotiempo estático de un agujero de este tipo simple y atravesable de la forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \theta(2\pi - \varphi_1) \left[ \left( \frac{n_1(\ell_1)}{r_1(\ell_1)} \right)^2 d\ell_1^2 + d\Omega_1^2(\ell_1) \right] + \theta(\varphi_1 - 2\pi) \left[ \left( \frac{n_2(\ell_2)}{r_2(\ell_2)} \right)^2 d\ell_2^2 + d\Omega_2^2(\ell_2) \right], \quad (3.2.10)$$

donde  $-\infty < \ell_i < +\infty$ , y  $i = 1, 2$ . Aquí,  $b_i$  es reemplazado por  $\sqrt{\ell_i^2 + b_{0i}^2}$ , con  $\ell_i$  igual a la distancia radial propia de cada sección transversal de la botella de Klein en el respectivo intervalo de  $\varphi_1$  para cada valor de  $i$ , y

$$m_i(\ell_i) = a_i - (-1)^i (\ell_i^2 + b_{0i}^2)^{1/2} \cos \varphi_2, \quad (3.2.11)$$

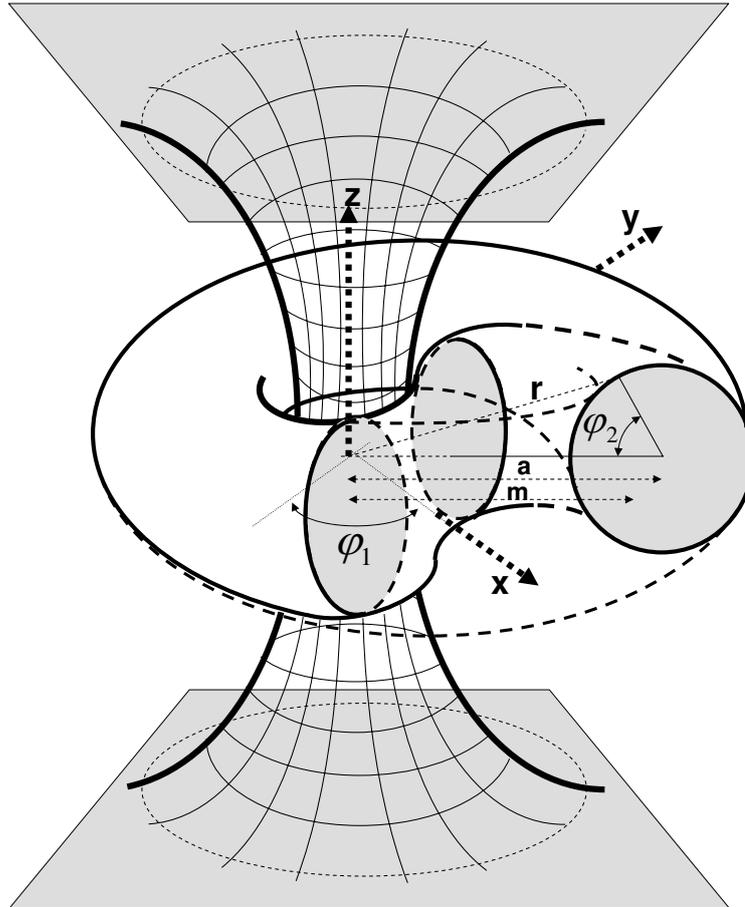


Figura 3.5: Representación pictórica de un agujero de botella de Klein que muestra la topología no orientable de su garganta y algunos de los parámetros en términos de los cuales definimos la métrica [vease también la Fig. (3.6)].

$$n_i(\ell_i) = (\ell_i^2 + b_{0i}^2)^{1/2} - (-1)^i a_i \cos \varphi_2, \quad (3.2.12)$$

$$r_i(\ell_i) = \sqrt{a_i^2 + \ell_i^2 + b_{0i}^2 + 2(-1)^i (\ell_i^2 + b_{0i}^2)^{1/2} a_i \cos \varphi_2}, \quad (3.2.13)$$

donde  $b_{0i} = \sqrt{b_i^2 - l_i^2}$  está dado por

$$b_1 = (B_1 - D_1) \cos^2(\varphi_1/4) + D_1, \quad (3.2.14)$$

$$b_2 = (D_2 - B_2) \sin^2(\varphi_1/2) + B_2. \quad (3.2.15)$$

Por tanto,  $b_{0i}$  es un parámetro constante que se ajusta al radio de la garganta del agujero de botella de Klein a  $\ell_i = 0$ . Como  $\ell_i$  decrece de  $-\infty$  a 0,  $b_i$  también decrece monótonamente desde  $+\infty$  hasta su valor mínimo  $b_{0i}$  en el radio de la garganta, y como  $\ell_i$  crece en adelante hasta  $+\infty$ ,  $b_i$  crece monótonamente hasta  $+\infty$  de nuevo (de igual manera que en el caso de los agujeros de gusano). Ahora, para que las métricas (3.2.1) y (3.2.10) describan un agujero de botella de Klein, debemos embeberlas en un espacio euclídeo tridimensional en coordenadas cilíndricas a tiempo fijo  $t$ , como hacíamos en el caso del agujero de gusano, dado por la expresión (3.1.5). Sin embargo, como  $r_i$  y  $\varphi_1$  ya no son independientes uno del otro, siempre podemos convertir la métrica (3.2.1) en un elemento de línea que sea embebible en el espacio (3.1.5). Esa conversión puede hacerse obteniendo primero la expresión para la variación de  $r_i$  con respecto a  $\varphi_1$  (proveniente de la dependencia de  $r_i$  en  $b_{0i}$  que viene dado en términos de  $\varphi_1$ ), esto es (recordándose que el índice  $i$  indica la carta considerada, y no el número imaginario),

$$\frac{dr_i}{d\varphi_1} = Q(i) = -\frac{[m_i(A_i - C_i) + n_i(B_i - D_i)] \sin(i\varphi_1/2)}{2ir_i}, \quad (3.2.16)$$

de lo cual resulta

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \theta(2\pi - \phi_1) \left( \frac{c(1)dr_1^2}{1 - b_{01}^2/b_1^2} + d(1)Q(1)dr_1d\varphi_1 + d\Omega_1^2 \right) \\ + \theta(\phi_1 - 2\pi) \left( \frac{c(2)dr_2^2}{1 - b_{02}^2/b_2^2} + d(2)Q(2)dr_2d\varphi_1 + d\Omega_2^2 \right), \quad (3.2.17)$$

con  $c(i) + d(i) = 1$ .

Tomando ahora

$$dz = (dz/dr_1) dr_1 + (dz/d\varphi_1) d\varphi_1 \quad \text{para } \varphi_1 \leq 2\pi, \quad (3.2.18)$$

$$dz = (dz/dr_2) dr_2 + (dz/d\varphi_1) d\varphi_1 \quad \text{para } \varphi_1 > 2\pi, \quad (3.2.19)$$

podemos obtener que, para cada valor permitido de  $\varphi_2$ ,

$$c(i) = 1 + 2 \left( 1 - \frac{b_{0i}^2}{b_i^2} \right) - 2 \sqrt{1 - \frac{b_{0i}^2}{b_i^2}}. \quad (3.2.20)$$

Por tanto, se sigue que la métrica para el agujero de Klein no orientable que es embebible en un espacio plano está descrita por la expresión (3.2.17), con  $c(i)$  dado por la ecuación (3.2.20) y  $d_i = 1 - c(i)$ . Utilizando estos coeficientes, la métrica (3.1.5) será la misma que la métrica (3.2.17) para valores constantes de  $\varphi_2$  si identificamos las coordenadas  $r, \phi$  del espacio embebido con las coordenadas  $r_1, \varphi_1$  para  $\varphi_1 \leq 2\pi$ , o con las coordenadas  $r_2, \varphi_1$  para  $\varphi_1 > 2\pi$ . Asimismo, esto requiere que la función  $z$  satisfaga

$$dz/dr_i = 1 + \left(1 - \frac{b_{0i}^2}{b_i^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{b_{0i}^2}{b_i^2}\right)^{-1/2} \quad (3.2.21)$$

para cualquier valor de  $\varphi_1$ ;

$$\frac{dz}{d\varphi_1} = \frac{1}{2} \sqrt{[R(\varphi_2)_1 - r_1][r_1 - \rho(\varphi_2)_1]} \quad (3.2.22)$$

para  $\varphi_1 \leq 2\pi$ ; y

$$\frac{dz}{d\varphi_1} = \frac{1}{2} \sqrt{[R(\varphi_2)_2 - r_2][r_2 - \rho(\varphi_2)_2]} \quad (3.2.23)$$

para  $\varphi_1 > 2\pi$ . En estas expresiones,

$$\begin{aligned} R(\varphi_2)_1 &= A_1 - B_1 \cos \varphi_2, & \rho(\varphi_2)_1 &= C_1 - D_1 \cos \varphi_2, \\ R(\varphi_2)_2 &= C_2 - D_2 \cos \varphi_2, & \rho(\varphi_2)_2 &= A_2 - B_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

### 3.2.2. Efecto de lente gravitatoria

A partir de estas expresiones y del requisito de que los agujeros de botella de Klein sean conectables a un espaciotiempo asintóticamente plano, puede deducirse cómo se extenderán las superficies embebidas en la garganta del agujero o en un entorno de ella, como hacíamos en los casos de agujeros de gusano y de anillo. Así, de la ecuación (3.2.21) obtenemos la siguiente expresión,

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b_{0i}^2 r_i}{b_i^3 n_i} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - b_{0i}^2/b_i^2}} - 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{1 - b_{0i}^2/b_i^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - b_{0i}^2/b_i^2}} \right)^{-7/2}, \quad (3.2.25)$$

que determinará cuándo se extienden hacia fuera las superficies embebidas ( $d^2r/dz^2 > 0$ ) y cuándo hacia dentro ( $d^2r/dz^2 < 0$ ). De este modo, exactamente igual a como pasaba en el caso de agujeros de anillo toroidales [118, 125], se deduce que:

$$\begin{aligned} d^2r/dz^2 > 0 & \quad \text{para} \quad 2\pi - \varphi_2^c > \varphi_2 > \varphi_2^c, \\ d^2r/dz^2 < 0 & \quad \text{para} \quad -\varphi_2^c < \varphi_2 < \varphi_2^c, \end{aligned}$$

donde  $\varphi_2^c = \arctan(b_i/a_i)$ . Por este motivo un agujero de botella de Klein se comportará generalmente como lente divergente para  $2\pi - \varphi_2^c > \varphi_2 > \varphi_2^c$  y como lente convergente para  $-\varphi_2^c < \varphi_2 < \varphi_2^c$ , a pesar de que, contrariamente al caso del agujero de anillo, estos comportamientos dependerán también del valor del ángulo  $\varphi_1$  debido al carácter no orientable del espaciotiempo de agujero de botella de Klein, tal y como veremos con más detalle de aquí en adelante.

Para investigar cómo se extienden las superficies embebidas en la garganta o alrededor de ella cuando variamos el ángulo  $\varphi_1$ , haciendo así la variedad no orientable, podemos distinguir dos casos. El primer caso corresponde a la condición (3.2.22) (invertiendo la misma y aplicando la regla de la cadena), de donde podemos obtener

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = \frac{[-2r_1 + R(\varphi_2)_1 + \rho(\varphi_2)_1][R(\varphi_2)_1 - \rho(\varphi_2)_1]\sin(\varphi_1/2)}{2\{[R(\varphi_2)_1 - r_1][r_1 - \rho(\varphi_2)_1]\}^2}. \quad (3.2.26)$$

Ahora, como  $a_i > b_i$  para  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , se deriva que esta expresión se anula en  $\varphi_1 = \pi$  y se hace positiva para  $\varphi_1 < \pi$ , en cuyos valores la superficie embebida se extiende hacia valores mayores del radio  $b_1$ ; y negativa para  $\varphi_1 > \pi$ , donde la superficie embebida se extiende hacia valores más pequeños de  $b_1$ .

El segundo caso corresponde a la condición (3.2.23), resultando

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = \frac{[-2r_2 + R(\varphi_2)_2 + \rho(\varphi_2)_2][R(\varphi_2)_2 - \rho(\varphi_2)_2]\sin(\varphi_1)}{4\{[R(\varphi_2)_2 - r_2][r_2 - \rho(\varphi_2)_2]\}^2}. \quad (3.2.27)$$

El valor crítico de  $\varphi_1$  se alcanza, entonces, en  $\varphi_1 = 5\pi/2$ . Para  $\varphi_1 < 5\pi/2$ , la parte derecha de (3.2.27) se hace negativa y así la superficie embebida se extiende hacia valores menores de  $b_2$ , mientras que se hace positiva para  $\varphi_1 > 5\pi/2$ , para los cuales la superficie embebida se extiende hacia valores mayores de  $b_2$ .

El análisis anterior nos lleva a esperar que ocurran efectos de lente gravitatoria en la garganta del agujero de botella de Klein no orientable, o en su entorno, con respecto a un haz de rayos, provenientes de la distribución de valores positivos y negativos de la densidad de energía. Es decir, la garganta o su entorno actuaría como lente divergente para líneas de universo a lo largo de los valores de las coordenadas que correspondan a densidad de energía negativa, y como lente convergente para líneas de universo que pasen a través de regiones con densidad de energía positiva [119]. Para confirmar con total precisión qué regiones alrededor de la garganta se comportan como lentes convergentes o divergentes, debemos considerar la propagación de un rayo nulo gobernada por la integral del tensor energía-momento. De las ecuaciones de Einstein [119], se puede obtener que la garganta hace converger o diverger un haz de rayos de luz, dependiendo del signo de la siguiente integral [119]

$$I = \int_{\ell_i^1}^{\infty} d\ell_i e^{\Phi} (\rho c^2 - \sigma) = \int_{\ell_i^1}^{\infty} d\ell_i e^{\Phi} \left(\frac{n_1}{r_1}\right)^3 (T_0^0 - T_1^1)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\ell_i^1}^{\infty} d\ell_i e^{\Phi} \frac{c^4 b_{01}^2 n_1^2}{16\pi G b_1^3 r_1^2} \left\{ \frac{\frac{8m_1}{a_1} - \left( \frac{A_1 - C_1}{a_1} + \frac{B_1 - D_1}{b_1} \right) \cos^2 \left( \frac{\varphi_1}{4} \right) + \frac{m_1^{(0)}}{m_1} + \frac{n_1^{(0)}}{n_1} - 2}{4 \left\{ m_1^2 + \frac{1}{4} [M_1(A_1 - C_1) + N_1(B_1 - D_1)] \cos^2 \left( \frac{\varphi_1}{4} \right) \right\}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(1 + \sin \varphi_2)}{n_1 b_1} - \frac{4 \cos \left( \frac{\varphi_1}{2} \right) \sin \varphi_2}{(A_1 - C_1) m_1 \sin^2 \left( \frac{\varphi_1}{2} \right)} \right\}, \tag{3.2.28}
\end{aligned}$$

donde  $\rho$  representa la densidad de energía,  $\sigma$  la tensión por unidad de área y  $T_0^0$  y  $T_1^1$  son componentes del tensor energía-momento.

De aquí en adelante nos restringiremos a considerar el caso  $\Phi = 0$  y la situación en la que  $\varphi_2 = \pi/2$  y  $a_1 \gg b_1$ , sin pérdida sustancial de generalidad. Obtenemos entonces

$$I = \frac{c^4}{16\pi G} \left[ \xi_1(\varphi_1) \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\ell_1^1}{b_{01}} \right) \right) + \xi_2(\varphi_1) \left( 1 - \frac{\ell_1^1}{\sqrt{(\ell_1^1)^2 + b_{01}^2}} \right) \right], \tag{3.2.29}$$

donde

$$\xi_1(\varphi_1) = \frac{(D_1 - B_1) \cos^2 \left( \frac{\varphi_1}{4} \right) + B_1}{a_1^2 [4a_1^2 + (A_1 - a_1)(a_1 - C_1)]}, \tag{3.2.30}$$

$$\xi_2(\varphi_1) = \frac{4}{a_1^2}. \tag{3.2.31}$$

Podemos concluir de esta manera que la integral  $I$  es siempre definida positiva, independientemente del valor del ángulo  $\varphi_1$ . Por lo tanto, se deduce que la dependencia de  $I$  en  $\varphi_1$  sólo contribuye a la fuerza de la acción de las dos lentes gravitatorias diferentes que se distinguen en la garganta del agujero de anillo o alrededor de la misma, de modo que tan sólo modifica cuantitativamente el comportamiento gobernado por el ángulo  $\varphi_2$ .

La revisión de las ecuaciones anteriores lleva, mediante un cálculo rápido, a obtener que la huella que dejaría en cualquier caso un agujero de botella de Klein de una fuente luminosa situada detrás del mismo para un observador en la Tierra es una doble espiral truncada concéntrica, como se puede ver en la Fig. (3.6).

La interpretación de la potencial observación de esa huella luminosa sería doble. Por un lado, obtendríamos una evidencia directa de la existencia de agujeros de botella de Klein, y dicho sea de paso, esto reforzaría la existencia de agujeros de gusano y agujeros de anillo. Y por otro lado, podríamos encontrar una manera de abrir la puerta a observar un universo paralelo y por lo tanto obtener una constatación de la existencia de un escenario de multiverso. Después de todo, un agujero de botella de Klein es una solución perfectamente válida de las ecuaciones de Einstein para un tensor energía-momento que contenga una proporción dada de materia exótica o fantasma, la cual actualmente es factible dentro del contexto de la cosmología [10, 11, 131–134].

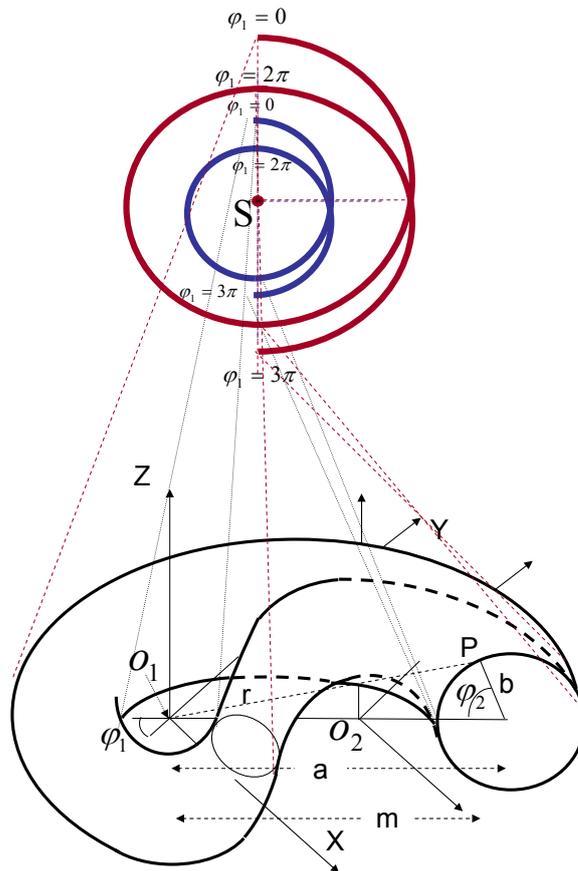


Figura 3.6: Efecto de lente gravitatoria producido por un agujero de botella de Klein para luz proveniente de una fuente luminosa simple. En la parte inferior de la figura aparecen los parámetros que definen la garganta del agujero de botella de Klein en términos de los cuales se define la métrica (3.2.1). Los rayos que pasan cerca de las superficies interior y exterior se extienden hacia fuera y hacia dentro, respectivamente, dando lugar a la imagen de dos espirales truncadas concéntricas luminosas.

### 3.2.3. Caracterización en un contexto de multiverso

La utilización de túneles entre universos para comprobar la existencia de los mismos, ya destacamos que exigiría el requisito de que éstos pudiesen convertirse en una máquina del tiempo con velocidad relativa completamente inespecificada entre sus bocas (es decir, se aceleran y desaceleran una respecto a la otra, como vimos en la introducción), de igual manera que sería conveniente demandar que esos espaciotiempos poseyesen una geometría no orientable. Ahora, a diferencia de los casos anteriores, poseemos la condición de no orientabilidad, garantizada por la existencia de una garganta con topología de una botella de Klein. Además se ha visto que este espaciotiempo es estable frente a fluctuaciones de vacío y, por otro lado, que puede convertirse en una máquina del tiempo.

Parece que, en principio, se podría distinguir observacionalmente un agujero de botella de Klein alojado en nuestro propio Universo y que tenga sus dos bocas en reposo una respecto de la otra, de un agujero de botella de Klein que conecta nuestro Universo con otro universo en un escenario de multiverso. En el último caso dado que no hay un espaciotiempo común para los dos universos, las dos bocas deberían estar necesariamente en movimiento relativo aleatorio con velocidad completamente inespecificada. Esto haría que el tiempo y el espacio para los dos universos fuesen altamente independientes, porque el movimiento relativo de las dos bocas convierte el agujero de botella de Klein en una máquina del tiempo que contiene curvas temporales cerradas completamente arbitrarias.

En el caso de un agujero de botella de Klein estático, si la fuente luminosa se mantiene en reposo y el agujero de botella de Klein no se comporta como una máquina del tiempo, las dobles espirales truncadas estarían bien resueltas y definidas en el patrón. Sin embargo, si las posiciones de las dos bocas varían continuamente relativas una a la otra, entonces, el ancho de cada una de las espirales truncadas estaría estirado y su resolución difuminada y claramente borrosa, debido a los cambios continuos y completamente arbitrarios de la distancia entre las dos bocas. Esto conlleva la existencia de un fondo luminoso alrededor de las espirales de la Fig. (3.6), que muestra justo un máximo de intensidad en la posición relativa media de las bocas, siempre que el movimiento relativo mantenga un grado de periodicidad suficientemente alto.

Al considerar el agujero de botella de Klein como una máquina del tiempo, su métrica cambiaría para dar un elemento de línea que describe viajes temporales arbitrarios inducidos por el movimiento relativo casi periódico entre las dos bocas. Al igual que vimos que en el caso de los agujeros de gusano convertidos en máquinas del tiempo la métrica se transformaba en la expresión (3.1.9), y por argumentos similares a los empleados en las Refs. [118, 125], se deduce la siguiente expresión para ese elemento

de línea

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -e^{2\Phi} dt^2 + \theta(2\pi - \varphi_1) \left( \{- [1 + \bar{g}F(\ell_1)\ell_1 \sin \varphi_2]^2 \} e^{2\Phi} dt^2 + c(1)d\ell_1^2 \right. \\
& + d(1)Q(1)dr_1d\varphi_1 + d\Omega_1^2) + \theta(\varphi_1 - \pi) \left( \{- [1 + \bar{g}F(\ell_2)\ell_2 \sin \varphi_2]^2 + 1 \} e^{2\Phi} dt^2 \right. \\
& \left. + c(2)d\ell_2^2 + d(2)Q(2)dr_2d\varphi_1 + d\Omega_2^2) \right), \tag{3.2.32}
\end{aligned}$$

donde  $\bar{g} = \bar{\gamma}^2 \frac{d\bar{v}}{dt}$  es la aceleración media de la boca en movimiento, con  $\bar{v}$  la correspondiente velocidad media y  $\bar{\gamma} = 1/\sqrt{1 - \bar{v}^2}$  es la media en el factor relativista; finalmente  $F(\ell)$  es un factor de forma que se anula en la mitad del agujero de botella de Klein, el cual se asume que se mantiene en reposo y crece en media de 0 a 1 cuando uno se mueve a lo largo de la dirección de movimiento de la boca. Por último debemos señalar que cualquier agujero de botella de Klein que sea una máquina del tiempo incluso en nuestro Universo, de existir, mostrará también un patrón de doble espiral truncada desenfocada, aunque no tan borroso quizá como el correspondiente a un agujero de botella de Klein entre universos.

### 3.3. Existencia y estabilidad

Una vez estudiados los posibles efectos de estos túneles, conviene discutir brevemente las probabilidades de encontrar un agujero de botella de Klein que se mantenga estable. Los agujeros de gusano macroscópicos se estabilizarían, como se mencionó en la introducción, gracias a la materia exótica que podría darse de manera natural en el contexto de nuestro Universo acelerado [40]. Sin embargo la cuestión se complica al considerar agujeros de gusano que conectan con otros universos que contengan curvas temporales cerradas. En este caso, González-Díaz argumentó [35] que sólo los agujeros de gusano cuánticos, con tamaño cercano al de Plank pueden ser estables, ya que los túneles grandes se desestabilizan violentamente por efectos cuánticos producidos por la creación catastrófica de partículas que tiene lugar cerca de los horizontes cronológicos. En realidad, Hawking ya avanzó su conjetura de protección cronológica [32] para agujeros de gusano, que puede aplicarse a agujeros de anillo y agujeros de botella de Klein, previniendo la aparición de curvas temporales cerradas y liberando al Universo de la aparición del tipo de fenómenos que tratamos en este artículo. Así, ni agujeros de gusano ni agujeros de anillo o agujeros de botella de Klein convertidos en máquinas del tiempo podrían existir, debido a estas inestabilidades de las fluctuaciones cuánticas de vacío.

No obstante, además de algunos posibles contraejemplos a la conjetura de Hawking que incluyen, entre otros, los argumentos de Li y Gott [33, 34] aludidos en la introducción, se ha demostrado [43] que este tipo de agujeros de gusano, de anillo y de botella

de Klein pueden estabilizarse después del tiempo de coincidencia cósmica que tiene lugar en el comienzo de la era de energía oscura, por la expansión acelerada del Universo, que incita a la garganta a crecer rápidamente de manera comóvil a la expansión universal. Por otro lado, de manera similar a lo que pasa con los agujeros de gusano [42], la acreción de energía fantasma en los agujeros de anillo y en los agujeros de botella de Klein debería inducir en ellos un incremento de tamaño que sortearía el tipo de efectos cuánticos considerados por Hawking y así, tal como sucedía con el indicado crecimiento comóvil a la expansión universal, los efectos cuánticos desestabilizadores aquí no podrían actuar a tiempo para destruir el túnel.

Luego las probabilidades de que todos estos túneles existan y actúen gravitacionalmente sobre la luz que entra proveniente de fuentes luminosas de la forma que hemos visto previamente parecen ser suficientemente buenas en el contexto de nuestro Universo acelerado (con un porcentaje del 68 % de energía oscura, que podría estar regida por energía fantasma) como para permitir el tipo de interpretación que consideramos en este artículo.

En última instancia, las observaciones aquí propuestas podrían falsar su existencia de forma concluyente, lo que podría también arrojar algo de luz sobre los problemas planteados en esta sección.

### 3.4. Resultados y discusión

Nuestro objetivo principal era la determinación de una predicción observacional para agujeros de gusano que permitiese comprobar la posible existencia de universos distintos al nuestro, dentro de un escenario de multiverso. De igual manera, esta observación nos llevaría al descubrimiento, también sin precedentes, de la existencia de estos agujeros de gusano, tan populares desde hace décadas en el campo de la cosmología teórica.

Para ello, primeramente hemos analizado una posible observación realizada por el Telescopio Espacial Hubble que podría interpretarse como la huella observacional producida por efecto de lente gravitatoria por un agujero de anillo en lugar de un efecto múltiple de lente gravitatoria. En este sentido, pesa por un lado la característica de que la interpretación como un agujeros de anillo sólo requiere dos objetos alineados en el eje de visión, de manera contraria a requerir la alineación de tres objetos (como en la interpretación que se sugirió en su momento [129]). Aunque por otro lado se podría igualmente pensar que posiblemente los agujeros de anillo son bastante más raros que las galaxias, lo que cuestiona que la interpretación de agujero de anillo sea más probable que la primera interpretación dada. Así, al menos por ahora, parece difícil decidir cuál

de estas dos interpretaciones es la más adecuada. Un análisis más preciso del espectro involucrado y del brillo relativo de los dos anillos, y principalmente el descubrimiento de otros sistemas de anillos dobles, podría usarse para elegir finalmente cuál de estas dos interpretaciones es más factible que se sostenga en el futuro.

Debido a las dificultades de dar predicciones observacionales concluyentes por parte de los agujeros de gusano y de anillo, nuestro logro ha sido encontrar un patrón observacional propiamente característico de un tipo de agujero de gusano que no pueda ser confundido con ningún otro objeto o combinación de ellos, superando así la indeterminación de la huella observacional producida por los túneles anteriores. Éste se corresponde a los agujeros de botella de Klein, que, por partida doble nos proporcionan el patrón observacional por efecto de lente gravitatoria de una doble espiral truncada. Por otra parte, en el contexto de la búsqueda de falsabilidad en el multiverso, estos objetos también pueden ser relevantes debido a la topología no orientable de su garganta, ya que nos dotan de una herramienta más útil para comprobar la existencia física de otros universos, mediante la búsqueda de una huella observacional que posea franjas suficientemente borrosas en torno a un valor central como para mostrar claramente que se deben a este tipo de conexiones. Asimismo, hemos visto que la existencia de estos túneles en el contexto de nuestro Universo actual es una posibilidad admisible y, por lo tanto, una interpretación viable para las huellas de efecto de lente gravitatoria que se detecten observacionalmente.

Más aún, un punto que debería ser de particular interés en la búsqueda para obtener una evidencia observacional en favor de la existencia de un multiverso a través de agujeros de anillo y agujeros de botella de Klein se ofrece por la posible variación de las constantes físicas y leyes en el otro universo, ya que tales variaciones inducen a través de los parámetros geométricos de los agujeros de anillo y de botella de Klein una deformación distintiva en los patrones de efecto de lente gravitatoria que claramente diferenciaría fuentes situadas en nuestro Universo de aquéllas situadas en otros universos diferentes al nuestro.

## Capítulo 4

# Decoherencia en un escenario de multiverso

(...) yo no he nacido todavía. El otro día observaba atentamente mi pasado y ninguna de las horas muertas me pertenecía porque no era yo el que las había vivido... Había mil Federicos Garcías Lorcas, tendidos para siempre en el desván del tiempo; y en el almacén del porvenir contemplé otros mil Federicos Garcías Lorcas muy planchaditos, unos sobre otros, esperando que los llenasen de gas para volar sin dirección... Mi mamá Doña Muerte me había dado las llaves del tiempo y por un instante lo comprendí todo.

*Federico García Lorca*

### 4.1. El papel de los procesos de decoherencia en cosmología

En mecánica cuántica se puede definir un proceso de decoherencia a través del que se selecciona de forma efectiva un subconjunto de estados preferidos de la superposición cuántica completa, de tal manera que el sistema clásico emerge como resultado de la interacción con el entorno, cuyas variables se consideran *irrelevantes* frente a las del sistema seleccionado (variables *relevantes*). Este mecanismo se puede extrapolar a cosmología cuántica, donde desempeña un papel relevante en su interpretación, ya que se ha propuesto que pueda ser la responsable de la emergencia de un universo clásico

[91, 92, 135]. Sin embargo, en un sistema cerrado, como es el Universo, la elección entre variables *relevantes* e *irrelevantes* es bastante arbitraria, debido a que no tenemos un entorno del sistema definido como tal, y diferentes subsistemas pueden considerarse de manera efectiva como el entorno de un sistema cuántico particular.

Estos procesos de decoherencia en cosmología cuántica han sido ampliamente estudiados en la literatura [16, 120, 121, 136–138] (ver también las Refs. [139–141]). Por ejemplo, se ha estudiado la interacción entre un universo homogéneo e isótropo y la densidad de fluctuaciones y ondas gravitatorias, donde las variables relevantes son el factor de escala y los grados de libertad homogéneos del campo escalar [91, 120, 121]. En este caso, los modos inhomogéneos de un campo escalar se toman como las variables irrelevantes para obtener una matriz densidad reducida que representa el estado cuántico del universo homogéneo. Estos modos inhomogéneos están acoplados a la métrica de un espaciotiempo espacialmente cerrado [142], que consideraremos en régimen semiclásico. El resultado es que las ramas en expansión y contracción del Universo se desacoplan rápidamente para valores grandes del factor de escala. De este modo, el Universo está en un estado o de expansión o de contracción pero no en una superposición de ambos.

Por otra parte, se ha visto que los grados de libertad irrelevantes, sobre los que se traza para obtener el estado del Universo, inducen sin embargo efectos observables en las propiedades de la rama semiclásica del Universo. Se pueden remarcar, entre dichos efectos, la decoherencia de las diferentes ramas del Universo [120, 121], el desplazamiento de las constantes de acoplo y la reducción del valor de la constante cosmológica [16, 17, 137], y la modificación de las propiedades de coherencia de los campos que se propagan en el espaciotiempo [137, 138].

En otro orden de cosas, dado que la decoherencia y los procesos disipativos entre un sistema y su entorno hacen evolucionar el estado del sistema a un estado de mayor entropía [91], tal incremento de entropía nos proporcionará una flecha del tiempo en cosmología cuántica, siendo ésta responsable de la irreversibilidad en el Universo [143].

## 4.2. Decoherencia de las ramas de un universo acelerado

En nuestro estudio analizaremos los efectos que los procesos de decoherencia pueden producir en el estado de una rama homogénea e isótropa de un universo acelerado, en el caso de que éste interactúe con un campo escalar con masa, mínimamente acoplado

a la curvatura escalar, siguiendo la idea de los procedimientos previos [120]<sup>1</sup>. Para ello consideramos un modelo simple de minisuperespacio que representa un universo plano, homogéneo e isótropo, que estará dado por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)(dr^2 + d\Omega_2^2), \quad (4.2.1)$$

donde  $N(t)$  es la función lapso,  $a(t)$  es el factor de escala y  $d\Omega_2^2$  es el elemento de línea en la dos-esfera unidad. La evolución del Universo está dominada por un fluido perfecto con ecuación de estado  $p = w\rho$ , donde  $p$  y  $\rho$  son la presión y la densidad de energía del fluido, respectivamente, y  $w$  es un parámetro constante. Consideraremos un campo escalar  $\varphi$  con masa,  $m$ , mínimamente acoplado a la métrica

$$S_{matter} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi^2 \right]. \quad (4.2.2)$$

A partir de la variación de la acción de Einstein-Hilbert resultante de sumar la parte gravitatoria y la de materia, obtenemos la ligadura hamiltoniana, de donde, siguiendo la prescripción de cuantización de Dirac [65] obtenemos, como ya vimos, la ecuación de Wheeler-DeWitt. Ésta puede escribirse, con un orden de factores determinado<sup>2</sup>, como

$$(a^2 \partial_{aa}^2 + a \partial_a + \Omega_0^2 a^{2q} - \partial_{\varphi\varphi}^2 + m^2 a^6 \varphi^2) \phi(a, \varphi) = 0, \quad (4.2.3)$$

donde  $a$  es el factor de escala,  $\phi(a, \varphi)$  es la función de onda del Universo,  $\Omega_0^2 = 4\pi G\rho_0$  es una constante de integración proveniente de la ecuación de conservación de la energía cósmica, que es proporcional a la densidad de energía actual del Universo,  $\rho_0$ , y  $q = \frac{3}{2}(1 - w)$ . Las soluciones a la parte gravitatoria de la ecuación (4.2.3) están dadas en términos de funciones de Hankel [145],

$$\phi_0(a) \propto \mathcal{H}_0^{(1,2)}(\tilde{\Omega}_0 a^q), \quad (4.2.4)$$

siendo  $\tilde{\Omega}_0 \equiv \Omega_0/q$ , y  $\mathcal{H}_n^{(1)}$  y  $\mathcal{H}_n^{(2)}$  las funciones de Hankel de primera y segunda especie de orden  $n$ . La condición de frontera utilizada en la ecuación (4.2.4) es la condición de Vilenkin de que el Universo se creó de la nada por un efecto túnel [67]. En el límite asintótico para valores grandes del factor de escala [130], tenemos que

$$\mathcal{H}_0^{(1,2)}(\tilde{\Omega}_0 a^q) \sim a^{-q/2} e^{\pm i(\tilde{\Omega}_0 a^q - \pi/4)}, \quad (4.2.5)$$

---

<sup>1</sup>Conviene resaltar que aquí utilizamos un campo escalar con masa, por lo que el formalismo utilizado en la Ref. [120] no puede aplicarse directamente al caso de un universo plano. Esto es debido a que los modos inhomogéneos de un campo escalar sin masa están acoplados al término de curvatura de la métrica [142], que es nula.

<sup>2</sup>Hemos elegido el denominado «orden natural», en el que el término cinético tiene la forma del laplaciano en la métrica, lo que nos garantiza covariancia bajo difeomorfismos en minisuperespacio [144].

donde los signos  $+$  y  $-$  corresponden a las funciones de primera y segunda especie, respectivamente. Las soluciones dadas por la ecuación (4.2.5) describen las ramas en expansión y contracción de un universo semiclásico, como puede comprobarse viendo que el operador momento se puede aproximar por

$$\hat{p}_a \phi(a) \equiv -i \partial_a \phi(a) \propto \pm \frac{\partial S_0}{\partial a}, \quad (4.2.6)$$

siendo  $S_0 = \tilde{\Omega}_0 a^q$  la acción clásica. Teniendo en cuenta que el momento clásico viene dado por  $p_a^c = -a (\partial a / \partial t)$ , entonces, en base a la teoría de Hamilton-Jacobi, podemos expresar  $a (\partial a / \partial t) \propto \mp \partial S_0 / \partial a$ . De esta forma, la variable tiempo,  $t$ , está definida en términos del factor de escala a través de la ecuación clásica  $a (\partial a / \partial t) = \pm \Omega_0 a^{q-1}$  [67]. Así, la función de Hankel de primera especie corresponde a la rama en expansión del Universo y la función de Hankel de segunda especie describe la rama en contracción.

En el régimen semiclásico, utilizando la aproximación WKB, la función de ondas del Universo puede escribirse como

$$\phi(a, \varphi) = C(a) e^{\pm i S_0(a)} \chi(a, \varphi), \quad (4.2.7)$$

donde  $C(a) = a^{-q/2}$ . La función  $\chi(a, \varphi)$  satisface la siguiente ecuación de Schrödinger [120, 121]:

$$\frac{1}{2a^3} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2 a^6 \right) \chi = i \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (4.2.8)$$

Buscamos soluciones gaussianas a esta ecuación,

$$\chi = A(a) e^{-B(a) \varphi^2}, \quad (4.2.9)$$

que introduciéndolas en la ecuación (4.2.8) nos darán lugar a dos ecuaciones diferenciales para los coeficientes  $A(a)$  y  $B(a)$ ,

$$i a^3 \frac{\partial A}{\partial t} = -B A, \quad (4.2.10)$$

$$i a^3 \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2} m^2 a^6 + 2B^2. \quad (4.2.11)$$

A partir de la condición de normalización,  $(\chi, \chi) = \int d\varphi \chi \chi^* = 1$ , válida en el régimen semiclásico donde puede considerarse la ecuación (4.2.9), se obtiene

$$A = \pi^{-\frac{1}{4}} (B + B^*)^{\frac{1}{4}} e^{i\alpha(t)}, \quad (4.2.12)$$

donde  $\alpha(t)$  es una fase que puede determinarse mediante la ecuación (4.2.10). Realizando un cambio de variable de la forma

$$B = \pm i \frac{\Omega_0}{2} a^{q+1} \frac{\dot{x}}{x}, \quad (4.2.13)$$

donde  $\dot{x} \equiv \partial x / \partial a$ , la ecuación (4.2.11) puede reescribirse como

$$a^2 \ddot{x} + (1 + q) a \dot{x} - \frac{m^2}{\Omega_0^2} a^{2(3-q)} x = 0, \quad (4.2.14)$$

Llegados a este punto, y para resolver la última ecuación, nos centraremos en considerar distintos casos del fluido perfecto que domina la evolución del Universo, es decir, particularizamos el valor de la variable  $w$ , que viene expresada a través de  $q$ . Nuestro interés recae en analizar la efectividad del fenómeno de decoherencia en el caso de que el Universo esté dominado por una constante cosmológica, quintaesencia o energía fantasma

Para un universo dominado por una constante cosmológica ( $w = -1$  y  $q = 3$ ), las soluciones a la ecuación (4.2.14) pueden escribirse como

$$x = a^{-3/2} (c_1 a^{k_1} + c_2 a^{-k_1}), \quad (4.2.15)$$

con

$$k_1 = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{9\Omega_0^2}} \approx \frac{3}{2}. \quad (4.2.16)$$

Se elijen apropiadamente las constantes  $c_1$  y  $c_2$  para que se satisfaga la condición  $B + B^* > 0$ , que se requiere por la condición de normalización de la función (4.2.9). Así el valor de la función  $B(a)$  puede aproximarse, en el régimen semiclásico, como

$$B_0^\pm \approx \frac{\Omega_0}{2} \left( 3 \pm i \frac{m^2}{3\Omega_0^2} a^3 \right), \quad (4.2.17)$$

donde los signos positivo y negativo corresponden a la solución de la función  $\chi$  para las ramas en expansión y contracción del Universo, respectivamente.

Adoptando ahora como fluido perfecto un campo de quintaesencia, para el que  $-1 < w < -\frac{1}{3}$ , las soluciones de la ecuación (4.2.14) pueden escribirse en términos de las funciones de Bessel modificadas,  $\mathcal{K}_\nu$  y  $\mathcal{I}_\nu$ , de orden  $\nu$ . En el régimen semiclásico esto lleva a

$$(B_Q^-)^* = B_Q^+ \approx \frac{\Omega_0}{2} \left( i \frac{m}{\Omega_0} + \pi(3 + 2|\beta|) a^{-\beta} e^{-2\lambda a^\beta} \right), \quad (4.2.18)$$

donde,  $3 - \beta \equiv q = \frac{3}{2}(1 - w)$  (con,  $0 < \beta < 1$ ), y  $\lambda = m/\Omega_0|\beta|$ .

Por último, si asumimos un universo dominado por energía fantasma, para el que  $w < -1$  y  $\beta < 0$ , las funciones  $B_F^\pm$  pueden aproximarse en el límite semiclásico por

$$(B_F^-)^* = B_F^+ \approx \frac{\Omega_0}{2} (-2iqa^q + c_0), \quad (4.2.19)$$

donde  $q = 3 + |\beta|$ , y  $c_0$  es una constante positiva.

Describimos ahora los estados cuánticos de un subsistema particular del Universo por medio de una matriz densidad reducida,  $\rho_r(a, a')$ , que puede calcularse por integración de los grados de libertad irrelevantes que corresponden al entorno [120], es decir

$$\rho_r(a, a') = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \chi^*(a, \varphi) \chi(a', \varphi), \quad (4.2.20)$$

que, excepto por fases irrelevantes, estará dada por [120]

$$\rho_r(a, a') \propto \left[ \frac{(B(a) + B^*(a))(B(a') + B^*(a'))}{(B^*(a) + B(a'))^2} \right]^{1/4}. \quad (4.2.21)$$

Particularizamos esta expresión para los diferentes casos de interés que mencionamos. Primeramente, para el caso  $w = -1$ , puede aproximarse en el régimen semiclásico como

$$\rho_r(a, a') \approx \frac{1}{\sqrt{1 \mp \frac{im^2}{18\Omega_0^2}(a^3 - a'^3)}}. \quad (4.2.22)$$

Los valores diagonales de la matriz densidad reducida, que se corresponden con  $a \approx a'$ , conducen a un valor  $\rho_r(a, a) \approx 1$ . Sin embargo, lejos de los elementos diagonales, donde, por ejemplo,  $a \gg a'$  (se discutiría de igual manera  $a' \gg a$ ), la matriz densidad reducida se anula asintóticamente  $|\rho_r| \sim a^{-3/2}$ . Esto significa que el proceso de decoherencia entre las ramas con diferentes valores del factor de escala es más efectivo para valores grandes del factor de escala, tal y como se esperaba.

En el régimen de quintaesencia,  $-1 \leq \omega \leq -\frac{1}{3}$ , la matriz densidad reducida (4.2.21) puede aproximarse como

$$\rho_r(a, a') \approx \sqrt{c} \left[ \frac{(aa')^{3-\beta} e^{-2\lambda(a^\beta - a'^\beta)}}{(\mp i \frac{m}{2}(a^3 - a'^3) + \frac{c}{2}(a^{3-\beta} e^{-2\lambda a^\beta} + a'^{3-\beta} e^{-2\lambda a'^\beta}))^2} \right]^{1/4}. \quad (4.2.23)$$

Para los valores diagonales tenemos igualmente un valor de la matriz densidad reducida cercano a la unidad, y para los valores fuera de la diagonal

$$|\rho_r(a, a')| \sim \left( \frac{a'}{a} \right)^{\frac{q}{2}} a^{-\beta} e^{-\lambda a^\beta} \rightarrow 0 \quad (a \gg a' > 1), \quad (4.2.24)$$

por lo que el proceso de decoherencia resulta ser incluso más efectivo que en el caso de un universo dominado por una constante cosmológica.

Finalmente para el régimen de energía fantasma,  $w < -1$  y  $\beta < 0$ , se obtiene que

$$\rho_r(a, a') \approx \frac{1}{\sqrt{1 \pm i \frac{a}{c_0} (a^q - a'^q)}}, \quad (4.2.25)$$

y  $|\rho_r| \sim a^{-\frac{q}{2}}$  para  $a \gg a'$  pero todavía antes de alcanzar la región acronal en torno a la singularidad del Big Rip, donde la aproximación semiclásica ya no es válida [146]. Cuando el Universo se aproxima a la singularidad del Big Rip, su estado vendrá dado por una superposición cuántica de estados [146], lo que concuerda con la esperada naturaleza cuántica del Universo en dicha región [146, 147].

Se puede concluir que, tanto en la rama en expansión como en la rama en contracción de un universo acelerado, el proceso de decoherencia entre el factor de escala y un campo escalar con masa es suficientemente efectivo, en los casos analizados, para eliminar la interferencia cuántica entre las diferentes ramas semiclásicas que corresponden a distintos valores del factor de escala.

Analizamos a continuación la efectividad del proceso de decoherencia entre las ramas en contracción y expansión del Universo, cuando éste está dado por la superposición cuántica de los estados que corresponden a esas ramas, como ocurre cuando se impone la condición de ausencia de frontera [66],

$$\phi(a) \approx C(a)e^{-iS_c(a)}\chi^+(a, \varphi) + C^*(a)e^{iS_c(a)}\chi^-(a, \varphi), \quad (4.2.26)$$

con  $\chi^+ = (\chi^-)^*$ . Los términos diagonales de la matriz reducida,  $\rho_{11}$  y  $\rho_{22}$ , que describen respectivamente el estado cuántico de las ramas en expansión y contracción, están dados por las expresiones dadas anteriormente [ecuaciones (4.2.22), (4.2.23) y (4.2.25)]. Los términos cruzados,  $\rho_{12}$  y  $\rho_{21}$ , que corresponden a la interferencia entre las ramas, son de la forma

$$(\rho_{21})^* = \rho_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \chi^+(a, \varphi) (\chi^-(a', \varphi))^*, \quad (4.2.27)$$

cuyo cálculo lleva a [120]

$$\rho_{12}(a, a') \propto \left[ \frac{[B^+(a) + (B^+(a))^*][B^-(a') + (B^-(a'))^*]}{[B^+(a) + (B^-(a'))^*]^2} \right]^{1/4}. \quad (4.2.28)$$

Se puede ver que este resultado da lugar a que los elementos de la matriz densidad reducida,  $\rho_{12}$  y  $\rho_{21}$ , se anulen asintóticamente cuando el factor de escala crece a lo largo de régimen semiclásico, incluso para valores similares de los factores de escala  $a \approx a'$ . Por ejemplo, para un universo dominado por energía fantasma, tendremos que

$$\rho_{12} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - i \frac{a}{c_0} (a^q + a'^q)}}, \quad (4.2.29)$$

y los valores diagonales,

$$|\rho_{12}(a, a)| \approx a^{-q/2}. \quad (4.2.30)$$

Resulta, por tanto, que el mismo proceso de decoherencia que veíamos antes resulta ser también efectivo para eliminar la interferencia entre las ramas en contracción y expansión. Esto significa que las ramas en expansión y en contracción de un universo fantasma, que corresponden a las regiones antes y después de la singularidad del Big Rip, se desacoplan una de la otra en el régimen semiclásico. Sin embargo, contrariamente a los resultados obtenidos en trabajos previos [120, 121], la decoherencia entre diferentes ramas es, en el modelo presentado, del mismo orden que la decoherencia dentro de la misma rama.

Hemos visto, por consiguiente, que el proceso de decoherencia entre el factor de escala y el campo escalar con masa es suficientemente efectivo para eliminar los términos de interferencia entre las ramas en expansión y en contracción, y aquéllos entre las diferentes ramas que corresponden a distintos valores del factor de escala en la misma región en expansión o contracción del Universo.

En el caso de un universo dominado por energía fantasma, la singularidad del Big Rip hace imposible este proceso de decoherencia para una descripción semiclásica del Universo en la vecindad de la singularidad. Ahí, el estado del Universo está dado por una superposición de estados [146] y los efectos cuánticos son predominantes [147]. Mas aún, la evolución se hace no unitaria en la región acronal en torno al Big Rip debido a la presencia de agujeros de gusano cuya creación es inducida por el carácter exótico de la energía fantasma [39, 40, 148]. En este sentido, parece que para dar una descripción cuántica apropiada del Universo fantasma completo debe utilizarse una teoría cuántica generalizada [149].

## 4.3. Decoherencia en tercera cuantización y la constante cosmológica

### 4.3.1. Formalismo de tercera cuantización: universos padre y bebé

En el formalismo de tercera cuantización de cosmología cuántica [94, 95, 150], la descripción de la función de onda del Universo se extiende de manera natural a un escenario de muchos universos, en la misma línea que una descripción de muchas partículas de campos surge en una teoría cuántica de campos. Siguiendo esta analogía, se

puede ver formalmente la ecuación de Wheeler-deWitt como una ecuación de Klein-Gordon definida en el superespacio, de modo que el campo para cuantizar es la función de onda del Universo<sup>3</sup>. Debido a que en este caso, en lugar de depender del espacio y del tiempo, la función de onda depende de la geometría del espaciotiempo y de los campos materiales, necesitamos identificar alguna de las variables de configuración con la variable temporal.

Partiendo de esta teoría, el estado del multiverso puede estudiarse como una teoría cuántica de campos en el superespacio, donde son los universos los que se crean y destruyen, y esto nos permite analizar universos interactuantes. En particular, este formalismo puede implementarse en casos sencillos de minisuperespacio. Analizaremos universos homogéneos e isótropos, donde la función de ondas del Universo se puede ver como un campo para cuantizar que se propaga en el minisuperespacio, y así el estado cuántico del Universo puede estudiarse a través de una teoría cuántica de campos en el minisuperespacio. En este caso es fácil ver que el factor de escala puede interpretarse como variable temporal. Consideremos la ecuación de Wheeler-DeWitt (4.2.3) sin campo escalar ni términos de orden de factores, es decir

$$\ddot{\phi} + \Omega^2(a)\phi = 0, \quad (4.3.1)$$

donde los puntos significan derivada con respecto al factor de escala y  $\Omega(a) = \frac{\Omega_0}{q} a^{q-1}$ , con  $q = \frac{3}{2}(1-w)$  y  $\Omega_0^2$  proporcional a la densidad de energía actual de nuestro Universo. La ecuación (4.3.1) puede verse como la ecuación clásica de movimiento de un oscilador armónico con una frecuencia dependiente del tiempo, donde el factor de escala desempeña el papel de la variable tiempo. Se impone entonces que la función de onda del multiverso satisfaga la ecuación de Schrödinger [94, 113]:

$$\hat{H}|\Psi\rangle = i\partial_a|\Psi\rangle, \quad (4.3.2)$$

donde  $H$  es el hamiltoniano en tercera cuantización, dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}_\phi^2 + \frac{\Omega^2(a)}{2}\hat{\phi}^2. \quad (4.3.3)$$

Los operadores  $\hat{\phi}$  y  $\hat{P}_\phi$  son respectivamente los correspondientes a la función de onda de un universo simple y su momento conjugado en la imagen de Schrödinger. Yendo a la imagen de Heisenberg, estos operadores pueden escribirse como

$$\hat{\phi}(a) = A(a, a_0)\hat{\phi} + B(a, a_0)\hat{P}_\phi, \quad (4.3.4)$$

$$\hat{P}_\phi(a) = \dot{A}(a, a_0)\hat{\phi} + \dot{B}(a, a_0)\hat{P}_\phi, \quad (4.3.5)$$

---

<sup>3</sup>De ahí el nombre de tercera cuantización, ya que ésta está dada en función de los campos de materia, que pueden estar descritos en el conocido formalismo de segunda cuantización.

donde las funciones  $A(a, a_0)$  y  $B(a, a_0)$  satisfacen la ecuación (4.3.1) con las condiciones iniciales  $A(a_0, a_0) = \dot{B}(a_0, a_0) = 1$  y  $\dot{A}(a_0, a_0) = B(a_0, a_0) = 0$ . La condición de frontera que imponemos en el estado cuántico del multiverso es que el número de universos en el mismo sea constante a lo largo de la evolución del factor de escala dentro de un universo simple. De aquí en adelante omitiremos la representación de operadores mediante la utilización de un «gorro» sobre el mismo, por simplicidad en la notación en lo referente a tercera cuantización. Definimos el estado del multiverso en términos de los estados de Lewis, que solucionan la ecuación (4.3.2) encontrando un operador auxiliar,  $I$ , invariante bajo la evolución del sistema. Se obtiene que este operador hermítico tiene la forma [151]

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{R^2} \right) \phi^2 + \left( RP_\phi - \dot{R}\phi \right)^2 \right], \quad (4.3.6)$$

en términos de una función  $R \equiv R(a)$ , que satisface la ecuación auxiliar

$$\ddot{R} + \Omega^2(a)R - \frac{1}{R^3} = 0. \quad (4.3.7)$$

Resolviendo esta ecuación en función de las soluciones a la expresión (4.3.1), obtenemos los siguientes operadores de creación y aniquilación de universos [113, 151]

$$b(a) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \frac{\hat{\phi}}{R} + i(R\hat{P}_\phi - \dot{R}\hat{\phi}) \right), \quad (4.3.8)$$

$$b^\dagger(a) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \frac{\hat{\phi}}{R} - i(R\hat{P}_\phi - \dot{R}\hat{\phi}) \right). \quad (4.3.9)$$

En términos de los operadores (4.3.8) y (4.3.9), el hamiltoniano de tercera cuantización (4.3.3) resulta ser

$$H = \beta_- b^2 + \beta_+ b^{\dagger 2} + \beta_0 \left( b^\dagger b + \frac{1}{2} \right), \quad (4.3.10)$$

donde [113]

$$\beta_+^* = \beta_- = \frac{1}{4} \left\{ \left( \dot{R} - \frac{i}{R} \right)^2 + \Omega^2 R^2 \right\}, \quad (4.3.11)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \left( \dot{R}^2 + \frac{1}{R^2} + \Omega^2 R^2 \right). \quad (4.3.12)$$

Los términos cuadráticos en los operadores creación y destrucción son los que hacen que el estado cuántico evolucione a un estado aplastado, el cual no posee análogo clásico [152].

Consideramos, por una parte, universos grandes con una longitud del orden de la longitud de Hubble de nuestro Universo, a los que denominamos universos padre [94]. Para valores grandes del factor de escala, como los característicos de estos universos, los términos no diagonales en el hamiltoniano (4.3.10) se anulan, y los valores del coeficiente  $\beta_0$  coinciden asintóticamente con los de la frecuencia propia del hamiltoniano [113]. Así, las correlaciones cuánticas entre el número de estados desaparecen y las transiciones cuánticas entre diferentes números de universos están por lo tanto prohibidas para universos padre. Nótese también que en el límite de la aproximación adiabática se satisface  $\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \ll \Omega$ , y no puede haber creación de universos extra a lo largo de la evolución del universo padre.

Por otro lado, examinamos de igual manera las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo de un universo padre, que dan la estructura de espuma espaciotemporal al vacío gravitatorio y cuya contribución a la función de onda del Universo se hace importante a la escala de Planck [48]. Algunas de estas fluctuaciones pueden verse como diminutas regiones del espaciotiempo que se escinden del universo padre y se unen seguidamente con las regiones grandes; así pueden interpretarse como universos bebé virtuales [94]. En este caso se puede aproximar [113],  $\beta_+^* = \beta_- \rightarrow -\frac{\omega_0}{4}$  y  $\beta_0 \rightarrow \frac{\omega_0}{2}$ , en la ecuación (4.3.10), donde  $\omega_0$  es una constante que depende de las propiedades del universo bebé. El estado de vacío gravitatorio queda entonces representado por un estado aplastado (que refleja las correlaciones cuánticas provenientes de la aparición de los términos  $\beta_{\pm}$ ), con una creación de «partículas» de universos bebé o fluctuaciones que ocurre a lo largo de la expansión del universo padre [153].

Consiguientemente, los universos padre y bebé, que estudiaremos en las subsiguientes secciones, pueden describirse en el contexto de un formalismo de tercera cuantización como los estados de un oscilador armónico. La ventaja de tal formalismo se hace entonces clara, ya que podemos aplicar la maquinaria bien estudiada de los osciladores armónicos y la teoría cuántica de campos para la descripción de un universo padre o un conjunto de universos bebé. Por ejemplo, el propagador para el estado cuántico de un universo padre puede calcularse a partir del propagador para el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo [154] (véanse también las Refs. [155, 156]). Éste puede expresarse como

$$\begin{aligned}
K(\Phi_f, a; \Phi_i, a_0) = & \left[ \frac{1}{2\pi i R(a)R(a_0) \sin \alpha(a, a_0)} \right]^{1/2} \exp \left[ \frac{i}{2} \left\{ \frac{\dot{R}(a)}{R(a)} \Phi_f^2 - \frac{\dot{R}(a_0)}{R(a_0)} \Phi_i^2 \right\} \right] \\
& \times \exp \left[ \frac{1}{2 \sin \alpha(a, a_0)} \left\{ \left( \frac{1}{R^2(a)} \Phi_f^2 + \frac{1}{R^2(a_0)} \Phi_i^2 \right) \cos \alpha(a, a_0) - \frac{2}{R(a)R(a_0)} \Phi_i \Phi_f \right\} \right],
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

donde  $\Phi_f$  y  $\Phi_i$  son las funciones de onda del universo padre evaluadas en dos hiper-

superficies dadas por los valores de los factores de escala  $a$  y  $a_0$ , respectivamente, y  $\alpha(a, a_0)$  está definido como [151, 113]

$$\alpha(a, a_0) = \int_{a_0}^a \frac{da'}{R^2(a')}. \quad (4.3.14)$$

Otro ejemplo es la matriz densidad que describe un baño térmico de universos bebé a temperatura  $T$ . Esto puede escribirse como la matriz densidad de un conjunto canónico de osciladores armónicos (véase por ejemplo la Ref. [92]),

$$\begin{aligned} \rho_B(\phi_f, \phi_i) &= \prod_n \frac{\omega_n}{2\pi \sinh(\omega_n/kT)} \\ &\times \exp\left(-\frac{\omega_n}{2 \sinh(\omega_n/kT)} [(\phi_{f,n}^2 + \phi_{i,n}^2) \cosh(\omega_n/kT) - 2\phi_{f,n}\phi_{i,n}]\right), \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

donde  $\phi_{f,n}$  y  $\phi_{i,n}$  son las funciones de onda de los universos bebé, representadas por osciladores armónicos con frecuencia  $\omega_n$ , y el índice  $n$  etiqueta las diferentes especies de los universos bebé considerados en la espuma espaciotemporal.

### 4.3.2. Interacción de un universo padre con las fluctuaciones de su métrica

Partiendo del formalismo previo, se propone un esquema de interacción entre un universo padre y su entorno con el objetivo de estudiar los procesos de decoherencia producidos en el mismo. Estudiaremos primeramente la interacción entre un universo padre y las fluctuaciones cuánticas de su espaciotiempo, estando éstas representadas por un conjunto de universos bebé. Para ello consideramos dos casos diferentes para el vacío gravitatorio: un estado de baño térmico a temperatura  $T$  y un estado de vacío aplastado.

El formalismo de tercera cuantización del Universo nos permite seguir un paralelismo formal con los desarrollos hechos en óptica cuántica. Así, podemos representar la interacción entre un universo padre y las fluctuaciones cuánticas de su espaciotiempo a través un hamiltoniano total dado por

$$H = H_P + H_\varepsilon + H_{int}, \quad (4.3.16)$$

donde  $H_P$  es el hamiltoniano del universo padre,  $H_\varepsilon$  es el hamiltoniano del conjunto de universos bebé, y  $H_{int}$  es el hamiltoniano de interacción. Como vimos en la ecuación (4.3.3), el hamiltoniano correspondiente a la evolución del universo padre estará representado por un oscilador armónico con una frecuencia que depende del factor de

escala,

$$H_P = \frac{1}{2}P_\Phi^2 + \frac{\Omega^2(a)}{2}\Phi^2. \quad (4.3.17)$$

Para el caso de universos bebé, la frecuencia del oscilador armónico puede considerarse de manera efectiva como una constante determinada por la energía y la longitud característica del universo bebé, que puede ir desde la longitud de Planck a la escala de laboratorio físico en la aproximación de gas diluido [16, 91, 137, 157]. Este orden de magnitud es muy pequeño comparado con el valor de la longitud del universo padre, del orden de la longitud de Hubble de nuestro Universo. De este modo, en nuestro modelo puede representarse el sistema de universos bebé mediante un conjunto de osciladores armónicos con frecuencia constante  $\omega_i$ , donde el índice  $i$  etiqueta las diferentes especies de los universos bebé, con lo que el hamiltoniano del conjunto de universos bebé vendrá dado por

$$H_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}p_{\phi_i}^2 + \frac{\omega_i^2}{2}\phi_i^2. \quad (4.3.18)$$

Por último, el hamiltoniano de interacción entre el universo padre y el entorno de universos bebé puede escribirse como

$$H_{int} = \sum_i \lambda_i \Phi_P \otimes f(\phi_i), \quad (4.3.19)$$

donde  $\lambda_i$  es una constante de acoplamiento efectiva entre el universo padre y el universo bebé  $i$ , que se asume pequeña por motivos que veremos a continuación. La forma de la función  $f(\phi_i)$  depende del tipo de interacción que tiene lugar entre el universo padre y los universos bebé. Por ejemplo, en los casos estudiados por Coleman [16, 137] y otros [158], se analizan agujeros de gusano conectados de manera simple, con lo que los universos bebé se nuclean de forma individual, y así estas interacciones están regidas por una función lineal,  $f(\phi_i) \equiv \phi_i$ . En el caso analizado por González-Díaz [138, 159] se crean agujeros de gusano doblemente conectados y por lo tanto los universos bebé se nuclean en pares, de esta manera, la función de interacción será cuadrática,  $f(\phi_i) \equiv \phi_i^2$ . En el análisis que sigue consideraremos ambos casos aunque, en general,  $f(\phi_i)$  puede ser una función más complicada y los dos casos discutidos pueden verse como los primeros términos de su desarrollo en serie.

Como resultado de la interacción entre el universo padre y el conjunto de universos bebé se modifican las propiedades del universo padre, y así la evolución efectiva del mismo se hace no unitaria. Esto puede verse a través de la matriz densidad de estados

reducida del universo padre, cuando se trazan los grados de libertad de los universos bebé. Dicha matriz puede escribirse como una ecuación maestra en la imagen de interacción, dada por [92, 93]

$$\partial_a \rho_P = -Tr_b \int_{a_0}^a da' [H_{int}(a), [H_{int}(a'), \rho_t(a')]], \quad (4.3.20)$$

donde la matriz densidad total viene representada por  $\rho_t = \rho_P \otimes \rho_b$  y  $Tr_b$  indica la traza sobre los universos bebé. Teniendo en cuenta que, debido a que hemos considerado un acoplo débil entre los universos padre y bebé ( $\lambda_i \ll 1$ ), podemos mantener la aproximación de Born-Markov en este esquema de interacción,  $\rho_t(a') \approx \rho_P(a') \otimes \rho_b$  y  $\rho_P(a') \approx \rho_P(a)$ , la ecuación maestra anterior resulta tomar la siguiente forma [93]

$$\partial_a \rho_P = -i[\tilde{H}_P, \rho_P] - i\gamma[\Phi, \{P_\Phi, \rho_P\}] - D[\Phi, [\Phi, \rho_P]] - f[\Phi, [P_\Phi, \rho_P]]. \quad (4.3.21)$$

Expliquemos los términos que aparecen en esta ecuación. La parte unitaria de la evolución efectiva del universo padre, dada por el primer término en la ecuación (4.3.21), corresponde a la evolución de un nuevo oscilador armónico,  $\tilde{H}_P \equiv H_P + \frac{\tilde{\Omega}^2}{2}\Phi^2$ , con una frecuencia que está desplazada con respecto al valor inicial  $\Omega(a)$  y que viene dada por el correspondiente desplazamiento Lamb, definido como [93]

$$\tilde{\Omega}^2(a) = -2 \int_{a_0}^a da' \eta(a, a') A(a, a'). \quad (4.3.22)$$

La función  $A(a, a_0)$  es una solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt (4.3.1) [como vimos en las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5)] y  $\eta(a, a')$  se denomina núcleo de disipación, que es la parte imaginaria de la función de correlación

$$\langle \phi^k(a) \phi^k(a') \rangle_b = \nu(a, a') - i\eta(a, a'), \quad (4.3.23)$$

donde el subíndice  $b$  indica que se trata de las funciones de onda de los universos bebé del entorno, la parte real de esta función  $\nu(a, a')$  es el núcleo de ruido y  $k = 1$  ó  $k = 2$  determinan las interacciones lineal y cuadrática, respectivamente, de las que dependerán los núcleos de ruido y disipación. El desplazamiento de la frecuencia del oscilador armónico que representa el estado del universo padre corresponde a un desplazamiento de su densidad de energía, con lo que puede verse de manera equivalente a una fijación del valor teórico de la constante cosmológica.

En la parte no unitaria de la ecuación maestra (4.3.21) pueden distinguirse tres coeficientes. El coeficiente de disipación,  $\gamma(a)$ , dado por

$$\gamma(a) = \int_{a_0}^a da' \eta(a, a') B(a, a'), \quad (4.3.24)$$

donde  $B(a, a_0)$  está definida, al igual que pasaba con  $A(a, a_0)$ , por las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5). En mecánica cuántica,  $\gamma$  está relacionado con el factor de amortiguamiento y con la velocidad del paquete de ondas. Sin embargo, la función de onda del Universo no está definida sobre el espaciotiempo, sino en el superespacio, con lo que la interpretación de  $\gamma$  no es tan clara para el estado del multiverso.

El coeficiente de difusión normal,  $D(a)$ , en la ecuación (4.3.21) queda determinado por

$$D(a) = \int_{a_0}^a da' \nu(a, a') A(a, a'). \quad (4.3.25)$$

En mecánica cuántica,  $D$  da una medida de la longitud de decoherencia de un paquete de ondas gaussiano [93]. En el caso del Universo, este coeficiente nos provee por lo tanto con una medida de la efectividad del proceso de decoherencia de dos ramas diferentes del Universo,  $\Phi$  y  $\Phi'$ , causado por su interacción con las fluctuaciones cuánticas del vacío gravitatorio. Finalmente, el coeficiente de difusión anómalo,  $f(a)$ , en la ecuación (4.3.21) vendrá dado por

$$f(a) = - \int_{a_0}^a da' \nu(a, a') B(a, a'). \quad (4.3.26)$$

A partir de estas expresiones vamos a obtener los resultados correspondientes a las interacciones lineales y cuadráticas, para los casos correspondientes al vacío gravitatorio en un estado térmico y en un estado de vacío aplastado, como ya mencionamos previamente.

### Interacción lineal

Las funciones de onda que representan los universos bebé están dadas por las soluciones correspondientes al oscilador armónico con frecuencia constante. Estas pueden escribirse, en términos de los operadores creación y aniquilación de universos bebé, como

$$\phi_i(a) = \sqrt{\frac{1}{2\omega_i}} \left( e^{-i\omega_i(a-a_0)} b_i + e^{i\omega_i(a-a_0)} b_i^\dagger \right), \quad (4.3.27)$$

donde  $a$  es el factor de escala del universo padre y  $b_i^\dagger$  y  $b_i$  son los operadores de creación y aniquilación de universos bebé evaluados en la hipersuperficie dada por el valor  $a_0$ . En el caso de un baño térmico de universos bebé a temperatura  $T$  [160] estos operadores cumplen

$$\langle b_i^2 \rangle_b = \langle (b_i^\dagger)^2 \rangle_b = 0, \quad (4.3.28)$$

$$\langle b_i^\dagger b_i \rangle_b = \langle b_i b_i^\dagger \rangle_b - 1 = N_i(T), \quad (4.3.29)$$

donde

$$N_i(T) = \frac{1}{e^{(\omega_i k_B/T)} - 1} \quad (4.3.30)$$

representa el número de ocupación del baño térmico.

Luego, para el caso de un vacío térmico en interacción lineal,  $k = 1$ , las funciones  $\nu(a, a')$  y  $\eta(a, a')$  en la función correlación (4.3.23) pueden escribirse, pasando a valores continuos para la frecuencia, como

$$\nu(a - a') = \sum_i \frac{\lambda_i^2}{2\omega_i} (2N_i + 1) \cos \omega_i(a - a') = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) \cos \omega(a - a'), \quad (4.3.31)$$

$$\eta(a - a') = \sum_i \frac{\lambda_i^2}{2\omega_i} \sin \omega_i(a - a') = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega(a - a'), \quad (4.3.32)$$

donde

$$J(\omega) \equiv \sum_i \frac{\lambda_i^2}{2\omega_i} \delta(\omega - \omega_i) \quad (4.3.33)$$

es la denominada densidad espectral de universos bebé en la espuma espaciotemporal y encierra todas las propiedades físicas del baño de universos bebé. El esquema de interacción dado hasta aquí puede aplicarse de manera general a problemas más realistas, sustituyendo la densidad espectral  $J(\omega)$  por una función heurística que dé cuenta de manera más detallada de la estructura espectral del ambiente. En nuestro caso, para las fluctuaciones cuánticas del vacío gravitatorio, se espera que la presencia de universos bebé en la espuma espaciotemporal esté exponencialmente suprimida para valores grandes de la energía del universo bebé. Por lo tanto, asumimos la siguiente densidad espectral para el baño de universos bebé,

$$J(\omega) = J_0^2 \omega^3 e^{-\frac{\omega}{\Lambda}}, \quad (4.3.34)$$

donde  $J_0$  y  $\Lambda$  son dos constantes,  $\Lambda$  representa el cutoff para la energía de las fluctuaciones de vacío, y se ha introducido el factor  $\omega^3$  para asegurar que  $J(\omega)$  es suficientemente convergente cuando  $\omega \rightarrow 0$ .

Las funciones  $A(a, a_0)$  y  $B(a, a_0)$  que aparecen en las ecuaciones (4.3.22-4.3.26), pueden expresarse en términos de las funciones de Bessel. Para valores grandes del factor de escala, correspondientes a la descripción de universos padre, estas funciones pueden aproximarse como

$$A(a, a') = \left(\frac{a'}{a}\right)^{(q-1)/2} \cos\left(\frac{\Omega_0}{q}(a^q - a'^q)\right), \quad (4.3.35)$$

$$B(a, a') = (aa')^{(1-q)/2} \frac{1}{\Omega_0} \sin \left( \frac{\Omega_0}{q} (a^q - a'^q) \right), \quad (4.3.36)$$

donde  $q = \frac{3}{2}(1-w)$ . En el caso  $q = 1$  ( $w = \frac{1}{3}$ ), estas igualdades son exactas y corresponden a las soluciones del oscilador armónico para frecuencia constante,  $\Omega_0$ .

Nos centramos en el estudio del efecto de decoherencia y de desplazamiento de la densidad de energía, para lo que consideramos pequeños cambios en el factor de escala del universo padre,  $a - a_0 \ll 1$  y  $a - a' \ll 1$ . Así, ahora las expresiones (4.3.22) y (4.3.25) resultan

$$\tilde{\Omega}^2(a) \approx -\frac{2c_1 a^2}{n_1 n_2} \left( 1 - n_2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{n_1} + n_1 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{n_2} \right), \quad (4.3.37)$$

$$D(a) \approx \frac{c_2 a}{n_1} \left( 1 - \left( \frac{a_0}{a} \right)^{n_1} \right), \quad (4.3.38)$$

con  $n_1 = \frac{q+1}{2}$ ,  $n_2 = \frac{q+3}{2}$ , y

$$c_1 = \int_0^\infty d\omega \omega J(\omega) \approx 24 J_0^2 \Lambda^5, \quad (4.3.39)$$

$$c_2 = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \coth \left( \frac{\omega}{2T} \right) \approx 4 J_0^2 \Lambda^3 T, \quad (4.3.40)$$

donde en la última ecuación se ha tomado el límite  $\frac{\omega}{T} \ll 1$ .

Por otro lado, si describimos el entorno de universos bebé por un estado aplastado (que se considera un vacío gravitatorio más realista [153]), entonces

$$\langle b_i^\dagger b_i \rangle = \sinh^2 r_i \equiv \tilde{N}_i, \quad (4.3.41)$$

$$\langle b_i b_i^\dagger \rangle = \cosh^2 r_i \equiv \tilde{N}_i + 1, \quad (4.3.42)$$

$$\langle b_i^2 \rangle = -\frac{1}{2} e^{i\theta_i} \sinh 2r_i, \quad (4.3.43)$$

$$\langle (b_i^\dagger)^2 \rangle = -\frac{1}{2} e^{-i\theta_i} \sinh 2r_i, \quad (4.3.44)$$

donde  $r_i$  y  $\theta_i$  son los parámetros de aplastamiento. Cabe destacar que este estado es más general que el térmico y que éste se recupera para el caso particular  $r = 0$ . Los dos primeros términos son equivalentes al caso de un baño térmico de universos bebé con un número efectivo de estos universos dado por  $\tilde{N}_i \equiv \sinh^2 r_i$ . Así el núcleo de disipación,  $\eta(a, a')$ , resulta ser el mismo que en el caso térmico, por lo que viene dado por la ecuación previa (4.3.32). De igual manera, el desplazamiento Lamb  $\tilde{\Omega}(a)$  es el dado por la ecuación (4.3.37). Sin embargo, el vacío aplastado introduce nuevos términos en el núcleo de ruido,  $\nu(a, a')$ , que ahora toma la forma

$$\nu_s(a - a') = \sum_i \frac{\lambda_i^2}{2\omega_i} \{ (2\tilde{N}_i + 1) \cos \omega_i (a - a') - \sinh 2r_i \cos [\omega_i (a + a' - 2a_0) - \theta_i] \}. \quad (4.3.45)$$

Luego el factor de decoherencia  $D(a)$  está dado por la ecuación (4.3.38), pero con un coeficiente que resulta ser

$$c_2^s = \int_0^\infty d\omega J(\omega) (\cosh 2r - \sinh 2r \cos \theta). \quad (4.3.46)$$

En la Ref. [92] se obtiene una expresión similar (véase también la Ref. [161]). En estas referencias se da una escala temporal de decoherencia determinada por  $t_D^{-1} = \sqrt{c_2^s}$ . En el límite de gran aplastamiento [92],  $\theta \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow -\infty$ , podemos estimar una escala de decoherencia para dos ramas diferentes del universo padre como

$$a_D \approx \frac{1}{J_0 \Lambda^2 e^{|r|}}. \quad (4.3.47)$$

En ambos casos, un vacío en un estado térmico y en uno aplastado, el efecto de la decoherencia debido a la interacción del universo padre con las fluctuaciones cuánticas del espaciotiempo es similar si de manera efectiva asumimos  $T \sim \Lambda N$  en el baño térmico, y  $e^{2|r|} \sim N$  en el vacío aplastado, es decir, presuponemos un número grande de fluctuaciones del espaciotiempo.

Por otra parte, puede ser interesante destacar que en la Ref. [93] la escala de tiempo para la decoherencia de un paquete de ondas se analiza de forma diferente. Ahí, el factor de decoherencia,  $D$ , mide la decoherencia de un paquete de ondas gaussiano para posiciones espaciales  $x$  y  $x'$ , con un tiempo de decoherencia dado por  $\tau_D = 1/[D(x - x')]^2$ . En el caso del Universo,  $\Phi$  y  $\Phi'$  representan diferentes ramas del universo padre y por lo tanto, siguiendo una analogía formal, se puede plantear una escala de decoherencia de orden  $a_D \sim 1/[c_2(\Phi - \Phi')]^2$ , con  $c_2$  dado por la ecuación (4.3.40) o la ecuación (4.3.46) para el caso de un baño térmico o de un vacío aplastado, respectivamente.

En cualquier caso, se puede concluir que la escala a la cual la interferencia cuántica entre ramas diferentes de un universo padre se hace importante es muy pequeña, presumiblemente del orden de la longitud de Planck.

## Interacción cuadrática

En el caso de la interacción cuadrática entre un universo padre y el conjunto de universos bebé, el formalismo se aplica de la misma manera que en todos los casos previos, y la interacción cuadrática sólo cambia la forma funcional de los núcleos de disipación y ruido que aparecen en la función de correlación, dada por la ecuación (4.3.23), ahora con  $k = 2$ . Comenzando por un vacío en un estado térmico y  $a - a_0 \ll 1$ , ambos núcleos están dados por

$$\eta(a, a') = 4 \int_0^\infty d\omega J(\omega) N(a - a'), \quad (4.3.48)$$

$$\nu(a, a') = 2 \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} N^2, \quad (4.3.49)$$

donde  $N \equiv N(\omega)$  está definido en la ecuación (4.3.30). Entonces el desplazamiento Lamb,  $\tilde{\Omega}(a)$ , y el factor de decoherencia,  $D(a)$ , vendrán representados por las ecuaciones (4.3.37) y (4.3.38), respectivamente, con nuevos coeficientes  $d_1$  y  $d_2$  (en lugar de  $c_1$  y  $c_2$ ), dados por

$$d_1 = 8T \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} \approx 16J_0^2 \Lambda^3 T, \quad (4.3.50)$$

$$d_2 = 8T^2 \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^3} \approx 8J_0^2 \Lambda T^2. \quad (4.3.51)$$

En cambio, para un estado de vacío aplastado, los términos dominantes de los núcleos de disipación y ruido resultan ser

$$\eta(a, a') \approx \int_0^\infty d\omega J(\omega) e^{2|r|} (a - a'), \quad (4.3.52)$$

$$\nu(a, a') \approx \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{2\omega} e^{4|r|}, \quad (4.3.53)$$

con lo que ahora los coeficientes que aparecen en las funciones que nos dan la decoherencia y el desplazamiento de la densidad de energía son

$$d_1^s \approx 6J_0^2 \Lambda^4 e^{2|r|}, \quad (4.3.54)$$

$$d_2^s \approx J_0^2 \Lambda^3 e^{4|r|}. \quad (4.3.55)$$

Para la interacción cuadrática, por lo tanto, el coeficiente  $d_1$  que determina el desplazamiento Lamb es una función de la temperatura en el caso de un vacío térmico, y del parámetro de aplastamiento,  $r$ , para un estado de vacío aplastado. Ambos dependen así de la intensidad de las fluctuaciones del espaciotiempo del universo padre, la cual se asume que es grande. De esta manera, la densidad de energía del universo padre estará desplazada como resultado de la interacción del universo con sus propias fluctuaciones cuánticas.

Por otro lado, en la interacción cuadrática, el coeficiente del factor de decoherencia,  $d_2$ , depende de  $\tilde{N}_i^2$ . Sin embargo, este tipo de interacción es de orden  $\hbar^2$  en lugar del orden  $\hbar$  en la interacción lineal, y en consecuencia la contribución de la interacción cuadrática al estado cuántico del universo es subdominante en el régimen semiclásico.

### 4.3.3. Interacción de un universo padre con el resto de universos

En la línea del formalismo anterior, se puede ir más allá y considerar ahora la interacción entre un universo padre diferenciado y el resto de universos padre, que constituyen un escenario de multiverso. En este caso, el efecto de aplastamiento del estado del multiverso desaparece asintóticamente [113], es decir  $r \rightarrow 0$  cuando  $a \rightarrow \infty$ . Parece, entonces, que lo más apropiado es considerar un estado térmico de  $N$  universos padre, con  $N^{-1} = e^{\omega_{kB}/T} - 1$ , donde  $T$  es una temperatura, análoga a la definida para el entorno de universos bebé, en el multiverso. Esto incluye el caso particular de  $N = 0$  ( $T = 0$ ), que representa la interacción de un universo padre con las fluctuaciones de su estado fundamental.

Para universos padre, los coeficientes  $A(a, a_0)$  y  $B(a, a_0)$  de sus funciones de onda, pueden aproximarse por las ecuaciones (4.3.35) y (4.3.36), como ya vimos. De esta forma, el coeficiente de desplazamiento Lamb y el de difusión normal estarán dados por

$$\tilde{\Omega}^2(a) \approx -\frac{2}{a^{q-1}} \int_{a_0}^a \int_0^\infty d\Omega' J(\Omega') \sin \frac{\Omega'}{q} (a^q - a'^q) \cos \frac{\Omega_0}{q} (a^q - a'^q), \quad (4.3.56)$$

$$D(a) \approx \frac{1}{a^{q-1}} \int_{a_0}^a \int_0^\infty d\Omega' J(\Omega') (2N + 1) a'^{q-1} \cos \frac{\Omega'}{q} (a^q - a'^q) \cos \frac{\Omega_0}{q} (a^q - a'^q), \quad (4.3.57)$$

donde  $J(\Omega')$  es ahora la densidad espectral de los universos padre en el multiverso, y  $\Omega'$  se refiere a la densidad de energía de los mismos, que se asume picada en torno a la densidad de energía actual de nuestro Universo. Para pequeños intervalos del factor de escala, tales que  $a - a_0 \ll 1$ , estas expresiones resultan

$$\tilde{\Omega}^2(a) \approx -\frac{2c_1^p a^2}{qn} \left( q + \left( \frac{a_0}{a} \right)^n - n \left( \frac{a_0}{a} \right) \right), \quad (4.3.58)$$

$$D(a) \approx \frac{c_2^p a}{q} \left( 1 - \left( \frac{a_0}{a} \right)^q \right), \quad (4.3.59)$$

donde  $n = q + 1$ , y

$$c_1^p = \int_0^\infty d\Omega' J(\Omega') \Omega', \quad (4.3.60)$$

$$c_2^p = \int_0^\infty d\Omega' J(\Omega') \coth \frac{\Omega'}{2T}. \quad (4.3.61)$$

Si aceptamos que la densidad de energía de los universos padre del multiverso está fuertemente picada alrededor del valor teórico de la densidad de energía de nuestro

Universo,  $\Omega_0$ , entonces  $J(\Omega') \sim \delta(\Omega' - \Omega_0)$ ,  $c_1^p \sim \Omega_0$ , y  $c_2^p \sim \coth \frac{\Omega_0}{2T}$ . El correspondiente desplazamiento Lamb dado por  $c_1^p$  es, por lo tanto, del mismo orden que la densidad de energía que corresponde al universo sin interacciones. Luego la densidad de energía efectiva del Universo resulta un valor cercano a cero. Aun más, con la misma elección de densidad espectral en el multiverso, la decoherencia entre dos ramas diferentes de un universo padre es efectiva para un número grande de universos en el entorno de multiverso, es decir, cuando  $c_2^p \sim \frac{2T}{\Omega_0} \gg 1$ . No obstante, estos resultados dependen en gran manera de la elección de la densidad espectral del multiverso.

Para extrapolar este análisis a valores mayores del intervalo  $a - a_0$ , es necesario emplear métodos numéricos (realizados en MATHEMATICA) y, con todo, los resultados dependen fuertemente de la estimación del valor relativo de la energía de los universos y de la elección tomada para la densidad espectral. Un caso particularmente simple es cuando  $q = 1$ , es decir, universos dominados por un fluido de tipo radiación ( $p = \frac{1}{3}\rho$ ). Entonces, el estado cuántico que describe el Universo es el de un oscilador armónico con frecuencia constante, donde las aproximaciones usadas en las ecuaciones (4.3.35) y (4.3.36) se tornan en ecuaciones exactas. En tal caso, asumiendo un intervalo grande de interacción ( $a - a_0 \rightarrow \infty$ ) y una densidad espectral dada por  $J(\omega) = J_0^2 \omega^3 e^{-(\omega/\Lambda)}$ , se obtiene para el coeficiente de difusión normal:

$$D = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) (2N + 1) \cos \omega\tau \cos \Omega_0\tau = \pi J_0^2 \Omega_0^2 T e^{-\Omega_0/\Lambda}. \quad (4.3.62)$$

El parámetro  $\Lambda$  en la ecuación (4.3.62) es un cutoff para la densidad de energía del entorno y  $\Omega_0$  es la densidad de energía de un universo que diferenciamos, refiriéndonos al nuestro en este caso. Para un entorno de universos bebé tendríamos que  $\frac{\Omega_0}{\Lambda} \gg 1$ , y la decoherencia entre las dos ramas del universo padre sería sólo efectiva para un número grande de fluctuaciones de vacío o, equivalentemente, para valores grandes del parámetro de aplastamiento  $r$ . Sin embargo, considerando un entorno constituido por universos padre, tendremos que  $\frac{\Omega_0}{\Lambda} \sim 1$  y así el efecto de decoherencia es más efectivo, incluso para el caso correspondiente a la interacción del universo padre con las fluctuaciones de su estado fundamental, para el que  $D \sim \Omega_0^3$ .

Finalmente, el desplazamiento Lamb puede expresarse, asumiendo la misma densidad espectral que para la ecuación (4.3.62) y  $a - a_0 \rightarrow \infty$ , en términos de una función de Meijer  $G$  [162], es decir,

$$\tilde{\Omega}^2 = -2 \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega\tau \cos \Omega_0\tau = 4\sqrt{\pi} J_0^2 \Lambda^3 G_{13}^{21} \left( \frac{\Omega_0^2}{4\Lambda^2} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0, 3, \frac{1}{2} \end{matrix} \right), \quad (4.3.63)$$

el cual está representado en la Fig. (4.1). Para un entorno constituido por universos bebé, tendríamos que  $\frac{\Omega_0}{\Lambda} \gg 1$ , y el desplazamiento Lamb resulta ser muy pequeño.

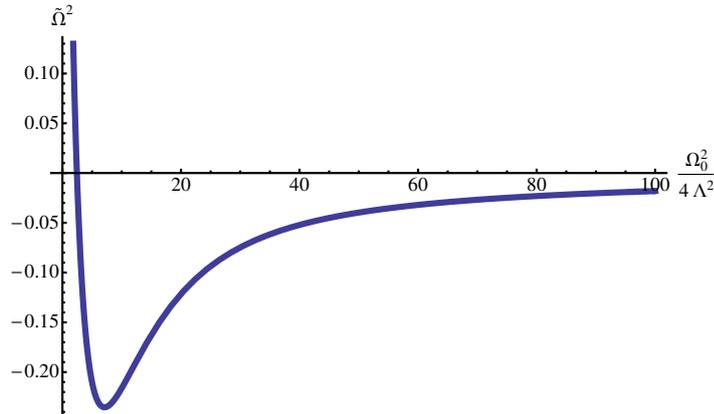


Figura 4.1: El desplazamiento Lamb, dado por la ecuación (4.3.63), en unidades  $4\sqrt{\pi}J_0^2\Lambda^3$ .

No obstante, para un entorno de universos padre tendremos que  $\Omega_0 \sim \Lambda$ , y el correspondiente desplazamiento Lamb puede ser del orden de la frecuencia original, proporcionando así un valor efectivo de la densidad de energía del Universo muy cercano a cero.

Este análisis nos lleva a concluir que el multiverso de universos padre resulta ser más efectivo tanto para la decoherencia entre dos ramas como para la reducción del valor teórico de la densidad de energía de vacío del Universo.

#### 4.3.4. Propiedades termodinámicas: entropía

Como consecuencia de la interacción de un universo simple con un entorno hecho de universos padre o bebé, dicho universo sufre un evolución efectiva no unitaria, determinada por los últimos tres términos de la ecuación maestra (4.3.21). Esto modificará las propiedades termodinámicas del sistema y, en particular, dará lugar a una variación de la entropía del sistema, que nos proporcionará información sobre el proceso de decoherencia sufrido por el universo diferenciado.

Estudiaremos este efecto en un ejemplo simple, que nos permita analizar analíticamente las propiedades generales y así extrapolar el comportamiento cualitativo a un caso más general. Tomamos el valor  $q = 1$ , y así  $D \propto (a - a_0)$ ,  $\gamma \propto (a - a_0)^3$ , y  $f \propto (a - a_0)^2$ . Para un valor pequeño del intervalo  $\Delta a \equiv a - a_0$ , podemos considerar sólo el factor de decoherencia  $D(a)$  como término dominante. La ecuación maestra (4.3.21)

puede escribirse entonces, en el espacio de configuración, como

$$\begin{aligned} \partial_a \rho_P(\Phi, \Phi', a) = & \left[ -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \Phi'^2} - \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right) - \frac{i\Omega^2(a)}{2} (\Phi^2 - \Phi'^2) \right. \\ & \left. - D(a)(\Phi - \Phi')^2 \right] \rho_P(\Phi, \Phi', a), \end{aligned} \quad (4.3.64)$$

con  $D(a) \approx c_2(a - a_0)$ , donde  $c_2$  está dado por las ecuaciones (4.3.40), (4.3.46), (4.3.51), (4.3.55) y (4.3.61), para los distintos tipos de interacciones que hemos considerado, y  $\Omega(a) \approx \Omega_{ef}(a_0)$ . La ecuación maestra (4.3.64) puede resolverse con un ansatz gaussiano [92, 93],

$$\rho(\Phi, \Phi', a) = e^{-A(a)(\Phi - \Phi')^2 - iB(a)(\Phi^2 - \Phi'^2) - C(a)(\Phi + \Phi')^2 - N(a)}, \quad (4.3.65)$$

donde  $N$  es un factor de normalización y los coeficientes  $A(a)$ ,  $B(a)$  y  $C(a)$  satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{A} = 4AB + D(a), \quad (4.3.66)$$

$$\dot{B} = 2B^2 - 8AC + \frac{1}{2}\Omega^2, \quad (4.3.67)$$

$$\dot{C} = 4BC. \quad (4.3.68)$$

Para analizar los efectos de decoherencia del entorno en el Universo, vamos a considerar un estado inicial separable para el universo diferenciado, es decir, un estado puro, dado por la matriz densidad [93]

$$\rho(\Phi, \Phi', a_0) = \left( \frac{1}{2\pi b^2} \right)^{1/2} e^{-(\Phi^2 + \Phi'^2)/4b^2}, \quad (4.3.69)$$

con lo que las condiciones iniciales para los coeficientes  $A(a)$ ,  $B(a)$  y  $C(a)$  resultan ser  $A(a_0) = C(a_0) = \frac{1}{8b^2}$ , y  $B(a_0) = 0$ . Asumiendo que  $\Delta a \ll 1$ , y despreciando términos de orden superior a  $\Delta a$ , se obtiene<sup>4</sup>

$$A(a - a_0) \approx \frac{1}{8}(1 + 16C_0(a - a_0)), \quad (4.3.70)$$

$$B(a - a_0) \approx \frac{C_0}{\Omega_0^2}(a - a_0), \quad (4.3.71)$$

$$C(a - a_0) \approx \frac{1}{8}, \quad (4.3.72)$$

donde  $C_0 = \Omega_0^4 - \frac{c_2}{8}$  (con  $b = 1$ ). Estos coeficientes nos permiten obtener las propiedades termodinámicas del universo padre. Por ejemplo, la pureza del estado  $\zeta$  está dada

<sup>4</sup>Véase el apéndice A2 de la Ref. [92].

por [93]

$$\zeta(a - a_0) = \sqrt{\frac{C(a)}{A(a)}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 16C_0(a - a_0)}}. \quad (4.3.73)$$

Asimismo, la entropía lineal [92],  $S_{lin} \equiv \text{Tr}(\rho - \rho^2)$ , resulta ser

$$S_{lin} = 1 - \zeta \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 16C_0(a - a_0)}}, \quad (4.3.74)$$

y la entropía del universo diferenciado, que para el estado inicial es cero como corresponde a un estado puro [véase la ecuación (4.3.69)], crece debido a la interacción con el ambiente de acuerdo a

$$S = -\frac{1}{p_0}(p_0 \ln p_0 + q_0 \ln q_0), \quad (4.3.75)$$

donde [92]

$$p_0 = \frac{2\zeta}{1 + \zeta}, \quad (4.3.76)$$

$$q_0 = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}. \quad (4.3.77)$$

La entropía lineal y la entropía dadas por las ecuaciones (4.3.74) y (4.3.75), respectivamente, están representadas en Fig. (4.2), en unidades para las que  $C_0 = 1$ , de forma que el resultado es válido cualitativamente para los diferentes entornos estudiados.

La interacción entre el universo padre y el entorno (constituido por universos bebé o padre) hace evolucionar el estado del universo del estado puro de partida a un estado mezcla. Esto significa que existe una pérdida de información en el estado del universo diferenciado como consecuencia de su interacción con las fluctuaciones cuánticas del espaciotiempo o con otros universos en el multiverso. Esta pérdida de información es la que hace que las diferentes ramas del universo pierdan su coherencia cuántica y, junto con otros procesos de decoherencia, lleven a la idea subyacente en este formalismo de que el Universo puede ser descrito en términos de la rama semiclásica en la que vivimos. Es relevante subrayar que tal pérdida de información aparece como resultado de la operación de traza de los grados de libertad que corresponden al entorno. Resta decir que el sistema total, formado por el universo padre y el resto de universos (bebé o padre), mantiene toda la información del sistema a lo largo de la evolución del multiverso.

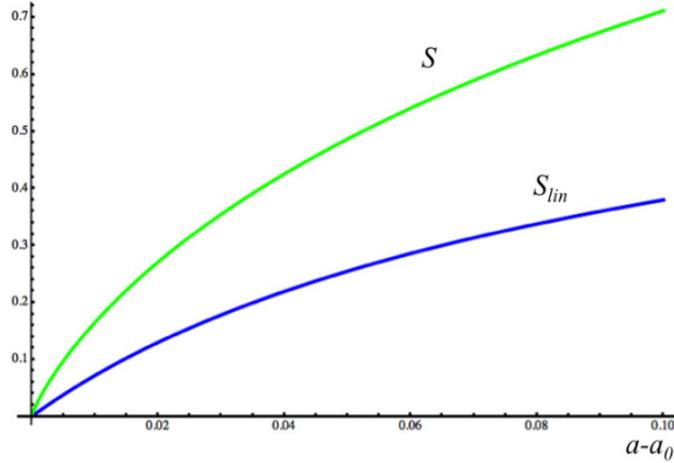


Figura 4.2: Entropía y entropía lineal del estado de un universo padre que está interactuando con un entorno de universos bebé, para el caso de interacción lineal [véanse las ecuaciones (4.3.74)-(4.3.75)].

## 4.4. Resultados y discusión

En primer lugar, se ha visto que la interacción entre el factor de escala y un campo escalar con masa produce un efecto de decoherencia entre las ramas en expansión y en contracción de un universo isótropo, homogéneo y geoméricamente plano, cuya expansión (o contracción) es acelerada. Dicha decoherencia resulta ser más efectiva en el caso de un universo dominado por un fluido de quintaesencia que cuando consideramos el Universo dominado por vacío (es decir, en presencia de una constante cosmológica) o energía fantasma. Esto podría estar relacionado con la naturaleza cuántica de los universos tardíos, siempre que la emergencia de la descripción clásica pueda ser una condición originada por la decoherencia, dando entonces cabida a los resultados obtenidos en otros trabajos que sugieren también el carácter cuántico del Universo fantasma [146, 147]

La interacción de un universo padre con el entorno, estando éste formado por un multiverso de universos padre o bebé, puede analizarse siguiendo un desarrollo paralelo al que se hace usualmente en óptica cuántica. Dentro de las aproximaciones consideradas en este estudio, tanto el estado de vacío aplastado como el estado térmico de universos bebé producen efectos similares, siempre que el aplastamiento del estado de los universos bebé sea interpretado como una creación efectiva de un número alto de fluctuaciones, es decir, para un efecto de aplastamiento grande.

La interacción lineal produce términos dominantes en el cambio de las propiedades de un universo padre, mientras que los efectos de la interacción cuadrática son subdominantes. Esto está lejos de implicar que la interacción cuadrática no tenga efectos relevantes en el estado de un universo padre, ya que ésta es en realidad responsable de las propiedades de coherencia de orden superior de los campos que se propagan en el espaciotiempo [138].

El universo diferenciado sufre entonces una evolución no unitaria como consecuencia de la interacción con el entorno. Los efectos de decoherencia y disipación son incluso más acusados si el entorno se toma constituido por un multiverso de universos padre, debido a que su densidad de energía se asume que es del orden de la del universo padre diferenciado.

De manera análoga al desplazamiento Lamb en mecánica cuántica, aquí la energía de vacío del universo diferenciado está también desplazada. En el caso de un entorno constituido por universos bebé, que puede considerarse de forma similar a la estudiada previamente por Coleman<sup>5</sup>, el correspondiente desplazamiento Lamb es importante para un efecto de aplastamiento grande o para un número alto de fluctuaciones cuánticas. Este efecto es mayor si el entorno es un multiverso de universos padre, ya que el correspondiente desplazamiento Lamb coincide con las predicciones teóricas para la energía de vacío de un universo simple. Esto podría reducir de manera efectiva el valor de la densidad de energía del Universo a un valor muy cercano a cero, considerando la interacción de un universo padre con las fluctuaciones de su estado fundamental.

El estudio de la entropía del universo diferenciado da cuenta de la pérdida de información en él debido a la interacción con el entorno, reflejando así la pérdida de coherencia cuántica entre el que tomamos como nuestro Universo y el entorno del mismo, en cualquiera de sus acepciones. De igual manera, podría inducir el surgimiento de una flecha del tiempo en ese universo.

---

<sup>5</sup>Ya vimos el mecanismo de Coleman de anulación de la constante cosmológica [137], luego modificado por González-Díaz [17] de forma que se predice un valor no nulo, tal y como indican las observaciones actuales.

# Capítulo 5

## Estados colectivos en el multiverso

Una vez que se descarta lo imposible, lo que queda, por improbable que parezca, debe ser la verdad.

*Arthur Conan Doyle*

### 5.1. Interacción en tercera cuantización a partir del Principio de Curvatura

La correlación entre universos puede modelarse considerando otros esquemas de interacción, con la finalidad de encontrar nuevos efectos o corroborar los ya existentes. En este caso nos basaremos en el denominado Principio de Curvatura [122]. El principal ingrediente de este mecanismo consiste en que el estado de cada universo simple en el multiverso está descrito por un invariante de curvatura,  $I$ . Este invariante se construye de tal manera que es sensible a la presencia de una energía de vacío en su propio universo, y se propone un esquema para su evolución en un «tiempo metacósmico», relacionado con la dinámica de los universos en interacción. De esta manera se construye un hamiltoniano de evolución en el que, como resultado de la interacción entre dos universos, se demuestra en este modelo que el valor de la constante cosmológica en uno de los universos se anula de manera efectiva a expensas de un incremento del valor de la constante cosmológica del compañero [122]. El multiverso abre así la puerta a nuevas formas de enfrentarse al problema de la constante cosmológica [163, 164].

Utilizando el Principio de Curvatura y considerando una aproximación al multiverso en términos del formalismo de tercera cuantización, en la misma línea que el capítulo anterior, nuestro interés se centrará en el estudio de la constante cosmológica de nuestro

Universo como resultado de la interacción con otros universos. Conviene resaltar que se asume, como es habitual, homogeneidad e isotropía como condiciones esenciales en lo que respecta a universos macroscópicos grandes, despreciando las fluctuaciones cuánticas de la métrica con respecto al valor de la misma en la mayor parte de la historia de nuestro Universo.

Se considerará, entonces, un universo homogéneo e isótropo dotado con un campo que varía lentamente,  $\varphi \approx \varphi_0$ . La ecuación de Wheeler-DeWitt, con una elección apropiada del orden de factores, puede escribirse entonces como

$$(\partial_{aa}^2 + a^{-1}\partial_a + a^4V(\varphi_0) - a^2)\phi = 0, \quad (5.1.1)$$

donde  $\phi \equiv \phi(a, \varphi)$  es la función de onda del universo y  $V(\varphi_0)$  es el potencial del campo escalar evaluado en  $\varphi_0$ . La función de onda,  $\phi(a, \varphi_0)$ , representa de manera efectiva el estado cuántico de un universo de de Sitter, con un valor de la constante cosmológica dado por  $\Lambda \equiv V(\varphi_0)$ . Asimismo, para ver más claro cómo la ecuación (5.1.1) puede interpretarse como la ecuación de un oscilador armónico con un término de fricción y frecuencia variables, con el fin de desarrollar el formalismo de tercera cuantización, ésta puede reescribirse de la forma

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\phi} + \omega^2\phi = 0, \quad (5.1.2)$$

donde  $\dot{\phi} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial a}$ ,  $M \equiv M(a) = a$ , y  $\omega \equiv \omega(a) = a\sqrt{a^2\Lambda - 1}$ . Como vimos en el capítulo anterior, aquí el factor de escala desempeña formalmente el papel de una variable temporal intrínseca del minisuperespacio y, entonces, el estado cuántico del Universo puede describirse en la base de autoestados número del oscilador armónico con fricción y frecuencia dependientes del tiempo,  $M(a)$  y  $\omega(a)$ , respectivamente. El término de fricción puede entenderse como la «masa» asociada a cada universo. Esto se ve más claro cuando deducimos el hamiltoniano para el que las ecuaciones de Heisenberg de movimiento dan lugar a la ecuación de Wheeler-DeWitt (5.1.1), que resulta

$$H = \frac{1}{2M}p_\phi^2 + \frac{M\omega^2}{2}\phi^2. \quad (5.1.3)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el capítulo previo, planteamos el hamiltoniano total de la interacción, en este caso entre dos universos, tal que

$$H_T = H_1 + H_2 + H_I, \quad (5.1.4)$$

donde  $H_1$  y  $H_2$  están dados por la ecuación (5.1.3), en función de  $(\omega_i, \phi_i, p_{\phi_i})$ , con  $i = 1, 2$  etiquetando los respectivos universos. La masa,  $M(a)$ , resulta ser la misma para

ambos universos debido a que surge de una elección particular del orden de factores, que se asume idéntico en ambos casos.

Para un universo padre grande el término de geometría en la ecuación (5.1.1) puede ignorarse y, así, tenemos que  $\omega_1^2 \approx a^4 \Lambda_1$  y  $\omega_2^2 \approx a^4 \Lambda_2$ . De modo que la frecuencia del oscilador armónico resulta proporcional a la energía de vacío de cada universo.

Por otro lado, tomamos el hamiltoniano de interacción,  $H_I$ , dado por

$$H_I = \frac{Ma^4 k}{2} (\phi_2 - \phi_1)^2, \quad (5.1.5)$$

donde  $k$  es una constante de acoplamiento que debe ser posteriormente determinada. Siguiendo el procedimiento utilizado en las Refs. [165, 166] para osciladores armónicos acoplados dependientes del tiempo, podemos aplicar la transformación canónica proveniente de la siguiente función generatriz

$$G(\phi_1, \phi_2, P_1, P_2, a) = \phi_1(P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta) + \phi_2(-P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta). \quad (5.1.6)$$

Luego, las nuevas variables canónicas  $(\Phi_1, P_1)$  y  $(\Phi_2, P_2)$  pueden obtenerse a través de las siguientes ecuaciones,

$$p_{\phi_1} \equiv \frac{\partial G}{\partial \phi_1} = P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta, \quad (5.1.7)$$

$$p_{\phi_2} \equiv \frac{\partial G}{\partial \phi_2} = -P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta, \quad (5.1.8)$$

$$\Phi_1 \equiv \frac{\partial G}{\partial P_1} = \phi_1 \cos \theta - \phi_2 \sin \theta, \quad (5.1.9)$$

$$\Phi_2 \equiv \frac{\partial G}{\partial P_2} = \phi_1 \sin \theta + \phi_2 \cos \theta. \quad (5.1.10)$$

El hamiltoniano (5.1.3) se transforma entonces de acuerdo con la siguiente ecuación:  $H \rightarrow H_N = H + \frac{\partial G}{\partial a}$ , resultando

$$H_N = \frac{1}{2M} P_1^2 + \frac{M\Omega_1^2}{2} \Phi_1^2 + \frac{1}{2M} P_2^2 + \frac{M\Omega_2^2}{2} \Phi_2^2 + \Phi_1 \Phi_2 ((b_1 - b_2) \sin 2\theta - b_3 \cos 2\theta) + \dot{\theta}(\Phi_1 P_2 - P_1 \Phi_2), \quad (5.1.11)$$

donde

$$b_1 \equiv b_1(a) = Ma^4(\Lambda_1 + k), \quad (5.1.12)$$

$$b_2 \equiv b_2(a) = Ma^4(\Lambda_2 + k), \quad (5.1.13)$$

$$b_3 \equiv b_3(a) = -2Ma^4 k, \quad (5.1.14)$$

y

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \frac{1}{M}(b_1 \cos^2 \theta + b_2 \sin^2 \theta - \frac{b_3}{2} \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2M}((b_1 - b_2) \cos 2\theta - b_3 \sin 2\theta + b_1 + b_2),\end{aligned}\quad (5.1.15)$$

$$\begin{aligned}\Omega_2^2 &= \frac{1}{M}(b_1 \sin^2 \theta + b_2 \cos^2 \theta + \frac{b_3}{2} \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2M}((b_2 - b_1) \cos 2\theta + b_3 \sin 2\theta + b_1 + b_2).\end{aligned}\quad (5.1.16)$$

Se puede ver fácilmente que la separación de variables será total si la transformación canónica es tal que  $\dot{\theta} = 0$ , y

$$\tan 2\theta = \frac{b_3}{b_1 - b_2} (= \text{const.}). \quad (5.1.17)$$

Entonces, el hamiltoniano  $H_N$  representa la evolución dinámica de dos universos sin interacción, como serían vistos por observadores internos, para los que la energía de vacío está ahora asociada a las nuevas frecuencias  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  para cada universo respectivamente, es decir, son modos normales de oscilación. Eligiendo de forma apropiada la constante de acoplamiento,  $k$ , podemos obtener un par de universos para los cuales la energía de vacío de uno de ellos sería aproximadamente cero a expensas de un incremento de la energía de vacío del universo emparejado, obteniendo el comportamiento propuesto a través del Principio de Curvatura [122].

De hecho, consideraremos lo que en la Ref. [122] denominan dos universos «próximos», es decir, ambos universos en interacción poseen valores similares de sus constantes cosmológicas, dadas por

$$\Lambda_1 = \Lambda + \varepsilon, \quad (5.1.18)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda - \varepsilon, \quad (5.1.19)$$

donde  $\varepsilon/\Lambda \ll 1$ , representando por tanto pequeñas fluctuaciones de la energía de vacío en cada universo simple. La energía de vacío, reflejada a través de las nuevas frecuencias,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , para estos dos universos específicos, vendrá entonces caracterizada por los siguientes parámetros,

$$b_1 - b_2 = 2Ma^4\varepsilon, \quad (5.1.20)$$

$$b_1 + b_2 = 2Ma^4(\Lambda + k), \quad (5.1.21)$$

$$b_3 = -2Ma^4k, \quad (5.1.22)$$

y, despreciando órdenes superiores en  $\varepsilon$ ,

$$\tan 2\theta = -\frac{k}{\varepsilon}, \quad (5.1.23)$$

$$\cos 2\theta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k^2 + \varepsilon^2}} \approx \frac{\varepsilon}{|k|}, \quad (5.1.24)$$

$$\sin 2\theta \approx 1, \quad (5.1.25)$$

con  $k < 0$ . Por lo que, insertando estos valores en las ecuaciones (5.1.15)-(5.1.16), se obtiene que

$$\Omega_1^2 \approx a^4(\Lambda + 2k + \varepsilon \cos 2\theta) \equiv a^4 \Lambda_1^{ef}, \quad (5.1.26)$$

$$\Omega_2^2 \approx a^4(\Lambda - \varepsilon \cos 2\theta) \equiv a^4 \Lambda_2^{ef}. \quad (5.1.27)$$

Ahora puede comprobarse fácilmente que, para una constante de acoplamiento dada por  $k = -\frac{\Lambda}{2}$ , los valores efectivos de la energía de vacío de los universos resultan

$$\Lambda_1^{ef} \approx \frac{2\varepsilon^2}{\Lambda} \approx 0, \quad (5.1.28)$$

$$\Lambda_2^{ef} \approx \Lambda - \frac{2\varepsilon^2}{\Lambda} \approx \Lambda. \quad (5.1.29)$$

Concluimos entonces que en la nueva representación los universos en interacción se podrían ver como dos universos sin interacción, con un valor efectivo de sus constantes cosmológicas dado por  $\Lambda_1^{ef}$  y  $\Lambda_2^{ef}$ , respectivamente. Esto correspondería al punto de vista de un observador dentro de uno de los universos, que percibe como completamente aislado, y, que por tanto, entendería la energía de vacío de su universo como un valor propio del mismo y no fruto de una interacción con otro universo. Así, un observador perteneciente al universo representado por  $\Lambda_1^{ef}$ , mediría un valor aproximadamente nulo del valor de la constante cosmológica, sin poder atribuirlo a ningún efecto limitado a su universo. Es importante destacar que, sin embargo, un «super-observador» que pudiera hacer medidas dentro del multiverso completo vería los dos universos interaccionando uno con el otro.

### 5.1.1. Extensión a un potencial cuadrático general

El mismo procedimiento puede aplicarse también a un potencial cuadrático general. Consideramos el siguiente hamiltoniano total del sistema de dos universos en interacción

$$H = \frac{1}{2M}(p_1^2 + p_2^2) + A\phi_1^2 + B\phi_2^2 + C\phi_1\phi_2, \quad (5.1.30)$$

que, como caso particular, incluye el hamiltoniano dado por la ecuación (5.1.4). Asumimos que  $A = \alpha a^4 M(a)$ ,  $B = \beta a^4 M(a)$ , y  $C = \gamma a^4 M(a)$ , donde  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  son coeficientes constantes tales que  $\alpha \propto \Lambda_1$  y  $\beta \propto \Lambda_2$ , siendo  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  los valores de las constantes

cosmológicas de los universos 1 y 2, respectivamente, y  $\gamma$  la constante de acoplamiento de la interacción entre los universos.

El término cinético es invariante bajo la transformación canónica dada por las ecuaciones (5.1.7)-(5.1.10), es decir,  $p_1^2 + p_2^2 = P_1^2 + P_2^2$ . Sin embargo, el término potencial se transforma ahora en

$$\frac{M\Omega_1^2}{2}\Phi_1^2 + \frac{M\Omega_2^2}{2}\Phi_2^2 + (\sin 2\theta(A - B) + C \cos 2\theta) \Phi_1\Phi_2, \quad (5.1.31)$$

donde  $\Omega_1^2 = \tilde{\Lambda}_1 a^4$  y  $\Omega_2^2 = \tilde{\Lambda}_2 a^4$ , con

$$\tilde{\Lambda}_1 = (\alpha - \beta) \cos 2\theta - \gamma \sin 2\theta + (\alpha + \beta), \quad (5.1.32)$$

$$\tilde{\Lambda}_2 = (\beta - \alpha) \cos 2\theta + \gamma \sin 2\theta + (\alpha + \beta). \quad (5.1.33)$$

Por lo tanto, considerando nuevamente un valor constante de  $\theta$ , tal que

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma}{\beta - \alpha}, \quad (5.1.34)$$

obtenemos  $\dot{\theta} = 0$ , y el hamiltoniano transformado resulta ser

$$H_N = \frac{1}{2M}P_1^2 + \frac{M\Omega_1^2}{2}\Phi_1^2 + \frac{1}{2M}P_2^2 + \frac{M\Omega_2^2}{2}\Phi_2^2. \quad (5.1.35)$$

Éste representa la dinámica, expresada en términos de las variables transformadas, de los dos universos en interacción, con valores efectivos de sus constantes cosmológicas dados por  $\tilde{\Lambda}_1$  y  $\tilde{\Lambda}_2$ , respectivamente.

Nos centramos ahora en analizar el valor de la constante de acoplamiento que hace una de las constantes cosmológicas arbitrariamente pequeña. Digamos que tomamos  $\tilde{\Lambda}_1 = 0$ , entonces buscamos el valor de  $\gamma$  que resuelve el sistema de ecuaciones (5.1.32)-(5.1.34). Sumando las dos primeras ecuaciones, con  $\tilde{\Lambda}_1 = 0$ , resulta

$$\tilde{\Lambda}_2 = 2(\alpha + \beta). \quad (5.1.36)$$

A partir de las dos segundas ecuaciones, tendremos que

$$\frac{(\beta - \alpha)^2 + \gamma^2}{\beta - \alpha} \cos 2\theta = \frac{\tilde{\Lambda}_2}{2}. \quad (5.1.37)$$

Por último, de la última ecuación obtenemos que  $\cos 2\theta = \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\gamma^2 + (\beta - \alpha)^2}}$ , así que finalmente nos queda

$$\gamma^2 = \frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{4} - (\beta - \alpha)^2 = 4\alpha\beta. \quad (5.1.38)$$

Por lo tanto, para un valor de la constante de acoplamiento  $\gamma^2 = 4\alpha\beta$ , la interacción entre los universos da lugar, en la nueva representación, a los valores  $\tilde{\Lambda}_1 = 0$  y  $\tilde{\Lambda}_2 = 2(\alpha + \beta)$ , para los dos universos sin interacción. Como caso particular, tenemos los valores  $\alpha = \frac{\Lambda_1+k}{2}$ ,  $\beta = \frac{\Lambda_2+k}{2}$ , y  $\gamma = -k$ , de la sección anterior, con  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  dadas por las ecuaciones (5.1.18) y (5.1.19), respectivamente, y  $k = -\frac{\Lambda}{2}$ . De esta forma, hemos visto una generalización del caso previo que conlleva el mismo resultado cualitativo.

## 5.2. Multiverso de osciladores armónicos interaccionando

De igual manera a como ocurre en otras ramas de la física, el multiverso como un todo podría exhibir fenómenos colectivos que pueden ser físicamente más ricos que la suma de sus partes. Esto proporciona un panorama diferente para problemas habituales en cosmología y, particularmente, arroja una nueva perspectiva para el problema de la constante cosmológica.

Con el propósito de estudiar un modelo sencillo que pueda reflejar la existencia de dichos fenómenos colectivos, consideremos un multiverso de  $N$  universos de Sitter interaccionando. Éstos estarán representados, en un formalismo de tercera cuantización, por osciladores armónicos como los descritos en la sección precedente; con la masa y la frecuencia dependientes del factor de escala, dadas respectivamente por  $M(a) = a$  y  $\omega^2(a) \approx \Lambda a^4$ , donde  $\Lambda$  es el valor de la constante cosmológica de los universos de de Sitter. Al modelar estos universos mediante osciladores armónicos, una manera de representar la dinámica del entrelazamiento entre ellos viene dada por la consideración de los mismos como una cadena unidimensional donde se asume algún tipo de interacción de «vecinos próximos». Para resaltar su papel como operadores, recuperamos en lo que sigue la notación convencional en la que designamos con un «gorro» la representación cuántica de las variables consideradas. En nuestra analogía de osciladores, interpretamos que el acoplamiento se realiza a través de resortes que cumplen la ley de Hooke, y por lo tanto la interacción viene descrita por un hamiltoniano total dado por [167–169]

$$\hat{H} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\hat{p}_r^2}{2M} + \frac{M\omega^2}{2} \hat{\phi}_r^2 + \frac{Mc}{2} (\hat{\phi}_r - \hat{\phi}_{r+1})^2 \right), \quad (5.2.1)$$

donde  $\hat{\phi}_r$  es el operador función de onda del  $r$ -universo (que se comporta como un oscilador armónico) y  $c$  denota la constante de acoplamiento, que se toma positiva. Existe entonces una transformada de Fourier finita con la que introducimos coordenadas

normales, en términos de las cuales se diagonaliza el hamiltoniano, que vendrá dada por [167–171]

$$\hat{\Phi}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-(2\pi i r k/N)} \hat{\phi}_k, \quad (5.2.2)$$

$$\hat{P}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{(2\pi i r k/N)} \hat{p}_k. \quad (5.2.3)$$

Bajo este cambio de variables, el hamiltoniano (5.2.1) se transforma en

$$\hat{H} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{2M} \hat{P}_r \hat{P}_r^\dagger + \frac{M\omega_r^2}{2} \hat{\Phi}_r \hat{\Phi}_r^\dagger \right), \quad (5.2.4)$$

donde la frecuencia de los modos normales,  $\omega_r$ , es

$$\omega_r^2 = \omega^2 + 4c \sin^2 \left( \frac{\pi r}{N} \right), \quad (5.2.5)$$

con  $\omega_{N-r} = \omega_r$ . En esta transformación de coordenadas se ha impuesto una condición periódica de frontera tal que  $\hat{\phi}_{N+1} = \hat{\phi}_1$ , que proporciona una «forma cerrada» para el multiverso, por lo que más que una cadena, podríamos considerar éste como un círculo. Es interesante notar que podríamos haber impuesto en su lugar, por ejemplo, una condición de frontera de «extremos fijos», de forma que se mantuviese el modelo de una cadena abierta fijada en sus extremos (como se puede ver en la Ref. [168]).

Merece la pena señalar que sería suficiente con tomar un valor negativo apropiado de la constante de acoplamiento,  $c$ , para obtener un modo normal con un valor de la frecuencia cercano a cero. Sin embargo, podemos seguir también un procedimiento de cuantización más general como el dado en las Refs. [167–169]. Entonces, para una representación dada, el espectro del hamiltoniano se divide en un número grande de niveles diferentes, como en otros fenómenos colectivos (cristales, fonones,...). Bajo ciertas condiciones, el estado fundamental del nuevo sistema se aproxima a cero. Por lo tanto, podríamos decir que, como sistema cuántico colectivo, el multiverso poseería modos normales para los que el estado fundamental resultaría ser, a pesar de ello, todavía cercano a cero.

Más aún, siguiendo los argumentos de la sección previa, la representación dada por las ecuaciones (5.2.2)-(5.2.3) estaría asociada a un observador dentro de un universo, para quien por lo tanto el valor efectivo de la constante cosmológica tiene que ser el obtenido del nuevo espectro de los modos normales dados por la ecuación (5.2.5) [o la ecuación (5.2.12), como veremos, dependiendo de la cuantización elegida]. El número de ocupación de cada modo normal, es decir, el número de universos con un valor

particular de la constante cosmológica, no tiene importancia aquí porque no será un observable desde el punto de vista de cualquier observador real.

Este procedimiento de cuantización más general se conoce como el Sistema Cuántico de Wigner [123], en el cual no se imponen las relaciones de conmutación canónicas, sino que éstas son reemplazadas por unas condiciones de compatibilidad provenientes de requerir al sistema que se satisfagan simultáneamente las ecuaciones de Hamilton y de Heisenberg. De esta manera, adicionalmente a la soluciones estándar, se obtiene un abanico más amplio de clases de soluciones no canónicas.

Ciertas clases de estas soluciones pueden describirse por medio de representaciones de superálgebras de Lie [172], que no son equivalentes y darán lugar a diferentes propiedades del sistema. La clase de soluciones aquí considerada está relacionada con los generadores del superálgebra  $\mathfrak{gl}(1|N)$ , donde escogeremos las clases de representaciones de escalera. El sistema cuántico permite soluciones en un espacio de Hilbert finito, obteniéndose así un espectro discreto para el hamiltoniano del sistema, y de los operadores análogos a posición y momento. Cabe destacar que el caso canónico no es parte de esta clase de soluciones, sino que corresponde a la de una clase de representaciones ortosimpléctica  $\mathfrak{osp}(1|2N)$ .

Definamos los siguientes operadores,

$$a_r^- \equiv \sqrt{\frac{M\omega_r}{2}} \hat{\Phi}_r + \frac{i}{\sqrt{2M\omega_r}} \hat{P}_r^\dagger, \quad (5.2.6)$$

$$a_r^+ \equiv \sqrt{\frac{M\omega_r}{2}} \hat{\Phi}_r^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2M\omega_r}} \hat{P}_r, \quad (5.2.7)$$

con  $(a_r^\pm)^\dagger = a_r^\mp$ . En términos de estos operadores el hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H} = \sum_{r=1}^N \frac{\omega_r}{2} \{a_r^-, a_r^+\} = \sum_{r=1}^N \frac{\omega_r}{2} (a_r^- a_r^+ + a_r^+ a_r^-). \quad (5.2.8)$$

La condición que los operadores  $a_r^\pm$  deben satisfacer para cumplir con las condiciones de compatibilidad del sistema resulta ser equivalente a requerir que [167–169]

$$[\hat{H}, a_r^\pm] = \pm \omega_r a_r^\pm. \quad (5.2.9)$$

Por tanto las condiciones de compatibilidad, se puede ver que son relaciones triples, en términos de los operadores  $a_r^\pm$ , que involucran conmutadores y anticonmutadores. Estas relaciones tienen soluciones en términos de los generadores del superálgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(1|N)$ . Podemos representar estos operadores escalera,  $a_r^\pm$ , en términos de la base de elementos de  $\mathfrak{gl}(1|N)$  dada por  $e_{jk}$  con  $j, k = 1, 2, \dots, N$ , donde los elementos  $e_{0k}$  y  $e_{k0}$  son los únicos elementos impares de la misma ( $\deg e_{0k} = \deg e_{k0} = 1$ ) y el resto de

elementos de la base son pares ( $\deg = 0$ ). Así, los corchetes del superálgebra estarán dados por relaciones

$$\llbracket e_{ij}, e_{kl} \rrbracket = \delta_{jk} e_{il} - (-1)^{\deg(e_{ij})\deg(e_{kl})} \delta_{il} e_{kj}, \quad (5.2.10)$$

donde el corchete  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$  indica anticonmutación para elementos impares y conmutación para los pares. Fijamos la condición  $(e_{jk})^\dagger = e_{kj}$ , de tal manera que las soluciones se expresan como

$$a_r^- = \sqrt{\frac{2\beta_r}{\omega_r}} e_{r0}, \quad a_r^+ = \sqrt{\frac{2\beta_r}{\omega_r}} e_{0r}, \quad (5.2.11)$$

con

$$\beta_r \equiv -\omega_r + \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \omega_j, \quad (5.2.12)$$

y donde los elementos  $e_{r0}$  y  $e_{0r}$  satisfacen la siguiente relación de anticonmutación, deducida de la expresión (5.2.10),

$$\{e_{r0}, e_{0r}\} = e_{rr} + e_{00}. \quad (5.2.13)$$

El hamiltoniano (5.2.8) puede, por tanto, escribirse como

$$\hat{H} = \beta e_{00} + \sum_{k=1}^N \beta_k e_{kk}, \quad (5.2.14)$$

con

$$\beta \equiv \sum_{j=1}^N \beta_j, \quad (5.2.15)$$

donde se ve fácilmente que estas expresiones satisfacen la ecuación (5.2.9), así como las condiciones de compatibilidad.

Consideramos ahora, para nuestro estudio, la clase de representaciones de escalera [168],  $V(p)$ , caracterizada por un entero positivo  $p$  y por ser una representación unitaria de dimensión finita. La elección concreta de estas representaciones está relacionada con la generalidad de las mismas, que viene acompañada de una forma sencilla de describir propiedades interesantes de los componentes físicos del sistema. Los elementos de la base ortogonal de  $V(p)$  están descritos en términos de una variable fermiónica  $\theta$ , con  $\theta \in \{0, 1\}$ , y  $N$  variables bosónicas,  $s_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $s_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , dados por

$$w(\theta; s) \equiv w(\theta; s_1, s_2, \dots, s_N), \quad (5.2.16)$$

con  $\theta + s_1 + s_2 + \dots + s_N = p$ . La acción de los generadores del superálgebra  $e_{00}$ ,  $e_{kk}$ ,  $e_{k0}$ , y  $e_{0k}$  sobre los elementos de la base ortogonal  $w(\theta; s)$  lleva a [168]

$$e_{00}w(\theta; s) = \theta w(\theta; s), \quad (5.2.17)$$

$$e_{kk}w(\theta; s) = s_k w(\theta; s), \quad (5.2.18)$$

$$e_{k0}w(\theta; s) = \theta \sqrt{s_k + 1} w(\theta; s_1, \dots, s_k + 1, \dots, s_N), \quad (5.2.19)$$

$$e_{0k}w(\theta; s) = (1 - \theta) \sqrt{s_k} w(\theta; s_1, \dots, s_k - 1, \dots, s_N). \quad (5.2.20)$$

Entonces, se puede ver que cada vector de la base  $w(\theta; s)$  es un autovector del hamiltoniano (5.2.14), es decir  $\hat{H}w(\theta; s) = E_{\theta,s}w(\theta; s)$ , con autovalores  $E_{\theta,s}$  dados por

$$E_{\theta,s} = \beta\theta + \sum_{k=1}^M \beta_k s_k. \quad (5.2.21)$$

Estos autovalores nos proporcionan un espectro del hamiltoniano diagonalizado, en términos de los modos normales del conjunto de universos, tomando así éstos como un sistema colectivo. Es importante resaltar que los autovalores del hamiltoniano estarán condicionados por el acoplamiento entre los universos, representado a través de la constante  $c$ , en base a cuyos valores diferenciamos el estudio del espectro del hamiltoniano en los casos sin interacción explícita y con ella.

### 5.2.1. Multiverso sin interacción explícita

En el caso de que  $c = 0$ , es decir, de que no exista interacción clásica explícita entre los universos, todos los valores  $\omega_k$  en la ecuación (5.2.5) son los mismos,  $\omega_k = \omega$ . Los autovalores del hamiltoniano entonces resultan

$$E_{\theta,s} = \omega\theta + \frac{\omega p}{N - 1}. \quad (5.2.22)$$

Por lo tanto, existen sólo dos autovalores diferentes, para  $\theta = 0$  y  $\theta = 1$ , dados respectivamente por

$$E_{0,s} = \frac{\omega p}{N - 1}, \quad (5.2.23)$$

$$E_{1,s} = \frac{\omega p}{N - 1} + \omega. \quad (5.2.24)$$

Se puede ver que, fijando un valor de  $p$ , tendremos  $E_{0,s} \rightarrow 0$  y  $E_{1,s} \rightarrow \omega$  para un número grande de universos en el multiverso, es decir para  $N \gg 1$ . Por lo tanto, uno de los nuevos niveles de energía será cercano a cero, aunque no haya interacción

explícita presente entre los universos. Este efecto es debido al tipo de cuantización general que estamos considerando, en la cual, a pesar de haber fijado  $c = 0$ , existe una interacción cuántica inducida entre los distintos universos, que no tiene análogo clásico y que, por tanto, resulta en una consideración del multiverso como un sistema cuántico colectivo. Conviene recordar que ya habíamos señalado que en estas representaciones no se recuperaba el caso canónico.

Las multiplicidades  $m_0$  y  $m_1$ , de los autovalores  $E_{0,s}$  y  $E_{1,s}$  son respectivamente,

$$m_0 = \binom{p + N - 1}{N - 1}, \quad (5.2.25)$$

$$m_1 = \binom{p + N - 2}{N - 1}. \quad (5.2.26)$$

Si los estados microcanónicos fuesen igualmente probables, entonces, las probabilidades  $P_{0,s}$  y  $P_{1,s}$  de cada autoestado, con  $\theta = 0$  y  $\theta = 1$  respectivamente, serían proporcionales a la multiplicidad del estado. Por lo tanto, tendríamos

$$P_{0,s} = \frac{p}{p + N - 1} P_{1,s}. \quad (5.2.27)$$

Esto significa que si consideramos  $p < N - 1$  y  $N \gg 1$ , el estado fundamental del multiverso sería mucho menos probable que el estado excitado, es decir,  $P_{0,s} \ll P_{1,s}$ . Luego, el estado de vacío colectivo, para el que  $E_{0,s} = 0$ , sería un estado mucho más improbable para el multiverso. Sin embargo, si tomamos  $p > N - 1$  y  $N \gg 1$ , entonces,  $P_{0,s} = \varepsilon P_{1,s}$ , con  $\varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ . En este caso, la probabilidad de un decaimiento del nivel  $\theta = 1$  al estado fundamental  $\theta = 0$ , sería considerable y podríamos esperar que el multiverso pudiera haber sido creado inicialmente en el estado excitado, decayendo finalmente en el estado fundamental.

### 5.2.2. Multiverso en interacción

Considerando el caso de una interacción débil entre los universos, tendremos que  $c_0 > c > 0$ , donde  $c_0$  es un valor límite de la constante de acoplamiento para el que las variables  $\beta_k$  conservan su valor positivo [167, 168]. Ahora, los dos autovalores resultantes en el caso sin interacción se dividen en un número diferente de autovalores. Nos fijaremos en los autovalores máximos y mínimos, por simplicidad en el análisis. La condición de frontera periódica asumida implica que  $\beta_k = \beta_{N-k}$ , y por tanto,

$$\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \leq \beta_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} < \dots < \beta_N,$$

y  $\beta_1 < \beta_N$ , donde  $[\frac{N}{2}]$  es la parte entera de  $\frac{N}{2}$ . La igualdad entre  $\beta_{[\frac{N}{2}]}$  y  $\beta_{[\frac{N}{2}]+1}$  sólo se mantiene para  $N$  par. Consideraremos entonces  $N$  par, sin que esto conlleve ninguna pérdida de generalidad.

El autovalor máximo corresponde al autoestado  $w(1; 0, \dots, p-1)$ , en el que se tiene  $s_i = (p-1)\delta_{i,N}$ , y por lo tanto está dado por

$$E_{1,s} = \beta + (p-1)\beta_N. \quad (5.2.28)$$

Por otro lado, el autovalor mínimo corresponde al autovector  $w(0; s_1, \dots, s_N)$ , con  $s_i = p\delta_{i, \frac{N}{2}}$ , para el que

$$E_{0,s} = p\beta_{\frac{N}{2}} = p \left( \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \omega_j - \sqrt{\omega^2 + 4c} \right). \quad (5.2.29)$$

Con el objetivo de analizar la energía de este estado fundamental, nos interesa estimar un límite superior para  $E_{0,s}$ . Para ello, partimos por un lado de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, para  $c > 0$ ,

$$\sum_{j=1}^N \omega_j \leq N^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2.30)$$

y por otro, de la ecuación (5.2.5),

$$\sum_{j=1}^N \omega_j^2 = N(\omega^2 + 2c). \quad (5.2.31)$$

Se llega entonces a que

$$0 < \beta_{\frac{N}{2}} \leq \frac{N}{N-1} \sqrt{\omega^2 + 2c} - \sqrt{\omega^2 + 4c} \equiv \beta_{\text{máx}}(c), \quad (5.2.32)$$

donde  $\beta_{\text{máx}}$  es una función que se debe anular para el valor  $c = c_0$ , por lo que éste se fija de la forma

$$c_0 = \frac{2N-1}{2(N^2 - 4N + 2)} \omega^2. \quad (5.2.33)$$

De esta manera, para valores  $c < c_0$ , se obtiene  $\beta_{\text{máx}} > \beta_{\frac{N}{2}} > 0$ . Esto implica que para un valor de la constante de acoplamiento de la interacción  $c \leq c_0$ , la energía del estado fundamental sería mayor que cero pero con un valor bastante cercano al mismo.

Por ejemplo, tomemos un valor de la constante de acoplamiento de la interacción cercano a  $c_0$ , por ejemplo,

$$c = \left( \frac{2N-1}{2(N^2-4N+2)} - \frac{(N-1)^2}{N^2-4N+2} \varepsilon \right) \omega^2, \quad (5.2.34)$$

con  $0 < \varepsilon < \frac{2N-1}{2(N-1)^2} \ll 1$  (la segunda desigualdad es necesaria para satisfacer la condición  $c > 0$ ). Así, se obtiene que  $\beta_{\text{máx}}$  es de orden  $\varepsilon$ , con un valor dado por

$$\beta_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{N^2-4N+2}}{N} \omega \varepsilon, \quad (5.2.35)$$

por lo que el estado fundamental  $E_{0,s}$  del multiverso será también de orden  $\varepsilon$ .

Finalmente, particularicemos a un caso más tratable de tres universos interactuando (es decir,  $N = 3$ ). Entonces,  $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 3c}$  y  $\omega_3 = \omega$ . Esto da lugar a los valores

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\omega}{2}, \quad (5.2.36)$$

$$\beta_3 = \sqrt{\omega^2 + 3c} - \frac{\omega}{2}, \quad (5.2.37)$$

$$\beta = \sum_{j=1}^3 \beta_j = \sqrt{\omega^2 + 3c} + \frac{\omega}{2}. \quad (5.2.38)$$

Para  $N = 3$  no hay restricción en los valores de  $c$  [167, 168] porque todos los valores de  $\beta_j$  serán positivos, siempre que  $c > -\frac{\omega^2}{4}$ . En ese caso tan simple, puede verse fácilmente que, para  $c > 0$ , tendremos que  $\beta_3 > \beta_2 = \beta_1$ , y el valor mínimo corresponderá a  $\beta_1 = \frac{\omega}{2}$ . Sin embargo, si se permiten valores  $0 > c > -\frac{\omega^2}{4}$ , entonces  $\beta_1 = \beta_2 > \beta_3$ , con lo que el autovalor mínimo es proporcional al valor  $\beta_3$ , que puede ser muy cercano a cero para  $c \approx -\frac{\omega^2}{4}$ . Este hecho podría sugerirnos, por un lado, la posibilidad de comprobar si puede haber también un régimen  $c < 0$  en el caso más general, para  $N > 3$ , ya que en las referencias citadas restringen su atención en todo momento al caso  $c > 0$ .

A la vista de estos resultados se puede ver que, al considerar un multiverso en interacción, aparecen nuevos niveles de energía que dependen fuertemente de la propia interacción entre los universos. A pesar de ello, el autovalor mínimo de la energía parece en todo momento (extrapolando los resultados de los casos particularmente sencillos) arbitrariamente cercano a cero y proporcional a la energía de vacío del universo en cuestión.

### 5.3. Resultados y discusión

En primer lugar, del hecho de considerar el Principio de Curvatura en un formalismo de tercera cuantización para dos universos en interacción, hemos predicho un mecanismo por el cual la constante cosmológica de nuestro Universo podría ver reducido su valor teórico, a costa de un incremento en el valor de la correspondiente al otro universo. Con ello vemos una nueva forma de aproximarnos al problema de la constante cosmológica en términos de un multiverso de universos correlacionados, en los que, es importante destacarlo, los observadores correspondientes a cada uno de ellos no percibirían ningún tipo de interacción con otro universo, de la que tan sólo se percataría un superobservador.

De manera más general, el tratamiento del multiverso como un fenómeno cuántico colectivo abre un nuevo camino para desarrollar aproximaciones a los problemas tradicionales en cosmología. Además de proporcionar un conjunto nuevo de herramientas para entender fenómenos cósmicos que surgen de la interacción entre dos o más universos individuales, parece que el multiverso, considerado como un fenómeno colectivo, puede mostrar características que no han sido contempladas hasta ahora.

En este sentido, el formalismo de cuantización que hemos utilizado para estudiar estos fenómenos colectivos pasa por el procedimiento del Sistema Cuántico de Wigner, que es una generalización de la aproximación de la cuantización canónica y, de esta manera, nos permite abordar una amplia clase de problemas. En particular, se recupera la aproximación de cuantización canónica como un caso particular de dicho formalismo eligiendo una clase de representaciones correspondiente a soluciones en términos de los generadores del superálgebra de Lie ortosimpléctica  $\mathfrak{osp}(1|2N)$ , diferente a la clase de representaciones que nosotros escogemos aquí para mostrar las características del sistema. Hemos demostrado que, en términos de una clase de representaciones, dada por los generadores del superálgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(1|N)$ , el multiverso puede estar organizado en una estructura colectiva para la cual aparecen nuevos niveles accesibles del hamiltoniano para los universos simples, frente a lo que ocurriría si lo considerásemos como mera suma de los universos constituyentes. De esta manera, este formalismo nos proporciona nuevas formas de estudiar el comportamiento cuántico de los componentes del Universo, en el escenario de multiverso, y muestra claramente que puede haber fenómenos colectivos en el multiverso que no han sido contemplados hasta ahora. La solución estándar de un estado fundamental dado por la suma del punto de energía cero de los  $N$  osciladores armónicos, estaría dada por la primera clase de representaciones mencionada. Sin embargo, y éste es precisamente uno de resultados obtenidos, hay otras representaciones posibles para las que el multiverso, con y sin interacción explícita, puede mostrar fenómenos colectivos, mostrando así que el multiverso es mucho

más rico que la mera suma de sus partes, como pasa en otras ramas de la física donde la interacción no puede ser despreciada.

En lo referente a la energía de vacío de un universo simple, se ha visto que ésta depende no sólo de sus propiedades internas o incluso de una interacción particular entre dos o más universos, sino que puede depender de la estructura del multiverso como un todo. Así, la lógica del multiverso se hace bastante diferente a la concerniente a un solo universo, o incluso a la aplicada a un conjunto de universos considerados individualmente. Hemos mostrado cómo la existencia de interacción entre universos da lugar a la aparición de nuevos niveles de energía en el hamiltoniano del multiverso, incluso en el caso donde no hay interacción explícita presente entre los universos, lo que es un buen ejemplo de la nueva física que el multiverso cuántico puede ocultar.

Una característica poco robusta de nuestra aproximación es que el formalismo discutido es altamente dependiente de la clase de representaciones elegida. Esto parece indicar entonces un grado de arbitrariedad en la descripción del multiverso cuántico. Otra dificultad es que no sabemos cómo interpretar apropiadamente la estructura «fermiónica-bosónica» inherente a la prescripción de cuantización escogida. En cualquier caso, es bastante interesante ver que los componentes del multiverso pueden interactuar tanto como subsistemas bosónicos como fermiónicos.

Pese a todas estas dificultades, nuestro estudio abre la puerta a un amplio rango de características nuevas que podría poseer el multiverso, con el valor añadido de que, como se ha visto, los fenómenos colectivos desentrañados pueden tener relevancia en el estudio del problema de la constante cosmológica. Asimismo, las propiedades colectivas encontradas en el multiverso proporcionan la posibilidad de revocar algunas de las objeciones expuestas acerca del cuestionable poder predictivo de la hipótesis de multiverso.

Obviamente, pueden considerarse de igual manera otros esquemas para enfrentarse al fenómeno colectivo de los osciladores armónicos acoplados [173–181], que nos conducirían a nuevos esquemas de interacción en el multiverso. Respecto a esta cuestión, parece que podría tener un interés particular extender el estudio de la contemplación de la evolución dinámica del entrelazamiento dentro de una cadena de osciladores armónicos acoplados realizado en las Refs. [171, 182], donde demuestran que éste produce una transferencia de información cuántica entre qubits separados, regulando así el procesamiento de la información cuántica. En la línea de estos trabajos, pero en un escenario de multiverso, esta aproximación podría tratarse para estudiar la transferencia del entrelazamiento entre universos interactuando.

# Capítulo 6

## Cuantización canónica de un universo con horizontes

Puedes llegar a cualquier parte, siempre que andes lo suficiente.

*Lewis Carroll*

### 6.1. Espaciotiempos con horizontes y contexto general

La existencia de horizontes es ubicua en relatividad general, ya que surgen de manera natural en multitud de soluciones clásicas a las ecuaciones de Einstein de espaciotiempos diversos [1, 183]. Pese a existir muchos tipos diferentes de horizontes, la característica principal común a todos ellos es que su presencia es tal que, de algún modo u otro, escinde partes del espaciotiempo haciéndolas inaccesibles desde la región más allá del horizonte.

Dos tipos relevantes de horizontes en este capítulo son los de sucesos y los cosmológicos, en los que centraremos nuestro trabajo. En el contexto de nuestro estudio el primero de ellos está asociado a la presencia de agujeros negros, y de esta forma aísla los mismos de nuestra región espaciotemporal. A su vez, el horizonte cosmológico establece una frontera de nuestra región observable debido a la expansión acelerada del Universo, y por lo tanto depende del observador. Las diferentes regiones separadas por estos horizontes están totalmente desconectadas, es decir, que desde nuestra región del espaciotiempo las observaciones físicas de otras regiones más allá de estos horizontes

están clásicamente descartadas.

La cuestión, entonces, recae sobre el hecho de si cuánticamente se mantiene esta desconexión entre las regiones, o si por el contrario aparecen algún tipo de correlaciones cuánticas a través de los diferentes horizontes. En este sentido, en la literatura se ha propuesto [184–186], en un análisis semiclásico, que a muy altas energías los horizontes podrían hacerse difusos debido a las modificaciones superlumínicas efectivas de las relaciones de dispersión, que permitirían que los modos de alta energía se filtraran a través del horizonte clásico. Estas propuestas están inspiradas en el comportamiento de configuraciones análogas en sistemas de materia condensada, donde se analizan agujeros negros sónicos. Las modificaciones de las relaciones de dispersión resolverían, por ejemplo, el llamado problema transplanckiano en la física de agujeros negros [187], planteado por la aparición de contribuciones de cantidades por encima de la escala de Planck (en las que la teoría no tiene validez), demostrando que dichos fenómenos no dependen de los efectos cuánticos producidos por encima de dicha escala. Pero suavizar los horizontes no es una tarea sencilla sino que puede afectar la estructura global del espaciotiempo [188]. Esto podría tomarse como una indicación de que los horizontes podrían no tener un impacto tan drástico como parece desde el punto de vista clásico, y así permitirnos cuánticamente interacciones entre regiones clásicamente separadas.

En contraste con estas discusiones establecidas en el ámbito de la teoría cuántica de campos, nuestro estudio se centrará en la cuantización del propio espaciotiempo, con la finalidad de establecer si la aplicación de la mecánica cuántica a la geometría del espaciotiempo ya nos fuerza a conectar las diferentes regiones, y por lo tanto obliga a la consideración del espaciotiempo completo a la hora de realizar una teoría cuántica del sistema.

El hecho de que la mecánica cuántica no sólo abra la puerta de acceso a regiones clásicamente desconectadas sino que imponga su consideración e influencia sobre nuestra región, podría sugerirnos que en un escenario de multiverso los distintos universos separados pueden hallar conexión entre ellos, cuánticamente, a través de correlaciones con características similares. En realidad ya hemos considerado, en el capítulo 3, que desde el punto de vista clásico podríamos tener túneles que conectasen diferentes universos, de otra forma separados. De igual manera, en los capítulos 4 y 5 nos embarcamos en el estudio de la posibilidad de entrelazamiento entre universos, dotando al multiverso de fenómenos cuánticos observables. A diferencia de lo anterior, nos centraremos ahora en la teoría cuántica para un universo simple, analizando el papel de los horizontes en él con el fin de enfocar el problema desde un modelo más sencillo que nos permita la realización de una cuantización completa.

Existen diversas cuantizaciones previas de espaciotiempos con horizontes [189–191].

Debido al modelo determinado que describiremos a continuación para nuestro análisis, nos interesan las cuantizaciones de un espaciotiempo de tipo Kantowski-Sachs, que también se han realizado desde distintos puntos de vista y considerando diferentes contenidos materiales [56, 192–195]. En este trabajo vamos a desarrollar un procedimiento de cuantización canónica que específicamente nos permita abordar la cuestión de la permeabilidad de los horizontes.

## 6.2. Descripción del modelo clásico

En nuestro propósito de estudio de las correlaciones cuánticas entre diferentes regiones separadas, comenzamos construyendo un modelo clásico de un espaciotiempo con horizontes. Para ello se escogerá un modelo de minisuperespacio en el que se puedan aplicar los métodos de cuantización canónica.

En este sentido elegimos un modelo de un espaciotiempo cuya tres-métrica es homogénea (con topología  $\mathbb{R} \times S^2$ , siendo  $S^2$  la esfera) en presencia de una constante cosmológica positiva que puede escribirse en términos de una métrica de Kantowski-Sachs, que depende de dos variables. Esta elección se basa, como veremos, en que la extensión analítica máxima de sus soluciones clásicas serán espaciotiempos de Schwarzschild-de Sitter, que típicamente contienen horizontes de agujero negro y cosmológico que aíslan nuestra región del espaciotiempo de aquéllas que se encuentran pasados los mismos.

Por tanto, de manera concisa, construimos un modelo con una métrica general homogénea pero anisótropa que dependa de dos variables,  $A$  y  $b$ , interpretables como factores de escala y que desempeñan el papel de variables dinámicas para construir el espacio de configuración. Teniendo en cuenta la topología espacial y escribiendo convenientemente la función lapso,  $N$ , la métrica de partida tiene la forma

$$\sigma^{-2}ds^2 = -\frac{N(r)^2}{A(r)}dr^2 + A(r)dT^2 + b(r)^2d\Omega_2^2, \quad (6.2.1)$$

donde todas las variables y coordenadas son adimensionales,  $d\Omega_2^2$  es el elemento de línea en la esfera bidimensional unidad, y  $\sigma := \sqrt{2G/\int dT}$  tiene unidades de longitud, siendo  $G$  la constante de Newton. La integral  $\int dT$  se normaliza porque la métrica no depende de  $T$ , y así evitamos considerarla cuando de todas formas se factorizaría posteriormente.

Tomamos el rango de la variable  $A$  sobre toda la recta real. Esta elección tiene mucha relevancia en nuestro tratamiento, ya que la convención utilizada para las coordenadas es tal que al considerar  $A > 0$ , la coordenada  $r$  es temporal y  $T$  es espacial, correspondiendo la métrica en este caso a las regiones más allá de los horizontes. Justo

desempeñan el papel contrario cuando  $A < 0$ , en cuyo caso  $r$  es espacial y  $T$  temporal, refiriéndose entonces a nuestra región del Universo, es decir, la que se encuentra ubicada entre ambos horizontes. De esta forma, un cambio en el signo de  $A$  corresponde a un cambio en el carácter de la coordenada radial, de temporal a espacial, y viceversa. Genéricamente los horizontes corresponden a  $A = 0$ . Por otra parte, aunque tomamos en principio el rango de  $b$  igual a toda la recta real, se puede ver que la métrica es invariante bajo un cambio de signo en  $b$ . Esto significa que, si no restringimos este valor a, supongamos, el eje real positivo, cada trayectoria será considerada dos veces. Tendremos en cuenta esta cuestión y volveremos sobre ella más adelante. Con todo esto puede verse que la métrica anterior no es sino la de Kantowski-Sachs, con una función lapso adecuadamente redefinida [194].

El escalar de curvatura correspondiente es

$$\sigma^2 R = \frac{2}{b^2} + \frac{2A\dot{b}^2}{b^2 N^2} + \frac{\ddot{A}}{N^2} + \frac{4\dot{A}\dot{b}}{bN^2} + \frac{4A\ddot{b}}{bN^2} - \frac{\dot{A}\dot{N}}{N^3} - \frac{4A\dot{b}\dot{N}}{bN^3}, \quad (6.2.2)$$

donde el punto denota la derivada con respecto a  $r$ .

Así, la acción de Hilbert-Einstein (a falta de términos de superficie) puede escribirse en términos de las variables de configuración de la métrica y de una constante cosmológica,  $\Lambda$ , como

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \\ &= - \int dr \left( \frac{A\dot{b}^2}{N} + \frac{b\dot{b}\dot{A}}{N} + N\dot{B}(b) \right) + \text{terms. superf.}, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

donde  $\lambda = \sigma^2 \Lambda$  es la constante cosmológica reescalada y hemos introducido, por simplicidad, la dependencia en  $b$  a través de las funciones

$$B(b) = \frac{\lambda}{3} b^3 - b, \quad \dot{B}(b) = \partial_b B(b) = \lambda b^2 - 1. \quad (6.2.4)$$

Esta acción se ha escrito como una integral sobre  $r$  en el parche considerado para esa coordenada, que no es necesariamente todo el semieje positivo. Además, si tomamos correctamente la raíz cuadrada del determinante de la métrica, vemos que  $N$  debería más bien venir dado por  $|N|$ , a menos que estemos llevando a cabo una continuación analítica. Haremos eso a partir de ahora a pesar de considerar sólo lapsos positivos, aunque esta sutileza no será relevante.

Para nuestro análisis será conveniente introducir una nueva variable [192],

$$c = Ab, \quad (6.2.5)$$

en lugar de  $A$ , lo que nos permite simplificar la acción de tal manera que ésta queda

$$S = - \int dr \left( \frac{\dot{b}\dot{c}}{N} + N\dot{B}(b) \right) + \text{terms. superf.}, \quad (6.2.6)$$

donde se aplican los mismos comentarios respecto a la integral sobre la coordenada  $r$ .

Aplicando el principio variacional a dicha acción, se obtienen las siguientes ecuaciones clásicas del movimiento

$$\begin{aligned} (\dot{c}/N)' &= 2\lambda N b, & \dot{b}\dot{c} &= N^2 \dot{B}(b), \\ (\dot{b}/N)' &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

La solución general a estas ecuaciones viene dada por

$$\dot{b} = \alpha N, \quad \alpha^2 c = B(b) + 2m, \quad (6.2.8)$$

donde  $\alpha$  y  $m$  son constantes de integración. Hay que destacar que, aunque las variables de configuración métricas,  $b$  y  $c$ , pertenecen a  $\mathbb{R}$ , el rango  $b \in \mathbb{R}^+$  está preservado por la dinámica, al igual que también lo está el de  $\alpha^2 c - B \in \mathbb{R}^+$ . En otras palabras, estos rangos no están relacionados con otros valores (negativos) fuera de los mismos por soluciones clásicas. Por tanto, clásicamente las diferentes regiones están totalmente desconectadas unas de otras, debido a que la dinámica no contempla un cambio de signo en  $A$ . Aún así, mantendremos por el momento el rango de ambas variables como la recta real completa.

Desde el punto de vista de la métrica (6.2.1),  $\alpha$  equivale a un reescalado constante de las coordenadas  $r$  y  $t$ . Se puede ver que esta solución corresponde a una métrica de Schwarzschild-(anti)de Sitter, ya que fijando  $\alpha = N = 1$  tenemos

$$b(r) = r, \quad A(r) = -1 + \frac{2m}{r} + \frac{\lambda r^2}{3}, \quad (6.2.9)$$

y los horizontes están localizados en los correspondientes ceros de  $A(r)$ .

A partir de ahora sólo consideraremos el caso de constante cosmológica positiva,  $\lambda > 0$ . El caso de constante cosmológica negativa puede tratarse de manera totalmente análoga.

Pese a que la estructura causal de estos espaciotiempos es bien conocida [196], se pueden sintetizar sus características principales diferenciando los distintos casos existentes en función del valor de la constante de integración  $m$ . Se pueden ver los diferentes diagramas representados en la Fig. (6.1). Exceptuando el caso en el que  $m = 0$ , todos ellos presentan una singularidad en  $r = 0$ . El caso más interesante es  $0 < m < 1/\sqrt{9\lambda}$ . Entonces se infiere fácilmente que  $A(r) = 0$  tiene dos soluciones

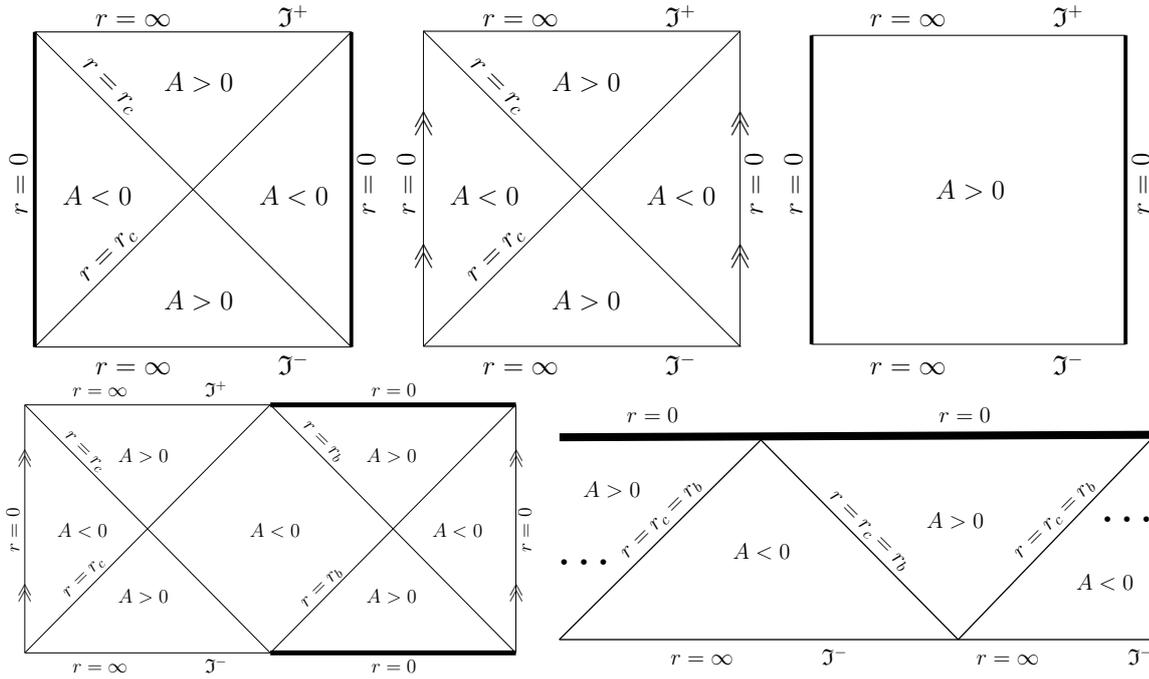


Figura 6.1: Diagramas de Penrose para las diferentes soluciones clásicas (de izquierda a derecha y de arriba a abajo,  $m < 0$ ,  $m = 0$ ,  $1/\sqrt{9\lambda} < m$ ,  $0 < m < 1/\sqrt{9\lambda}$ , y  $m = 1/\sqrt{9\lambda}$ ). Las flechas dobles indican la identificación de las líneas correspondientes y las líneas gruesas representan singularidades. Dependiendo de la masa habrá uno o dos horizontes (o ninguno), y en algún caso existirán singularidades desnudas. En todos los diagramas, la región para un observador como nosotros está caracterizada por  $A < 0$ .

positivas, en las que hay dos horizontes: un horizonte de agujero negro (denotado por  $r_b$ ) y un horizonte cosmológico (denotado por  $r_c$ ). En el valor extremo  $m = 1/\sqrt{9\lambda}$  ambos horizontes, cosmológico y de sucesos, se funden en uno sólo situado en  $r_c = \sqrt{3/\lambda}$ . Sin embargo, en caso de que el rango de valores sea  $1/\sqrt{9\lambda} < m$ , el espaciotiempo no tendrá horizontes y además la singularidad existente en  $r = 0$  será desnuda. Esto mismo sucederá si  $m < 0$ , aunque aquí existirá un horizonte cosmológico. Por último, el caso  $m = 0$  corresponde a un espaciotiempo de de Sitter en coordenadas estáticas, que ya dijimos que carece de la singularidad en  $r = 0$  y consta de un horizonte cosmológico situado en  $r_c = \sqrt{3/\lambda}$ .

Una característica común a todas las soluciones, como ya hemos comentado, es que «nuestra» región del espaciotiempo (la situada entre ambos horizontes) está caracterizada por  $A < 0$ , mientras que las regiones más allá de los horizontes están representadas por un valor positivo de la variable  $A$ .

Una vez construido el modelo y descritas las soluciones clásicas a las ecuaciones

de Einstein, con el propósito de desarrollar posteriormente una cuantización canónica, realizaremos una formulación hamiltoniana del sistema. Entonces, la acción puede expresarse como

$$S = \int dr \left( \dot{c}p_c + \dot{b}p_b - NC \right), \quad (6.2.10)$$

donde los momentos canónicos conjugados son

$$p_b = -\frac{\dot{c}}{N}, \quad p_c = -\frac{\dot{b}}{N}, \quad (6.2.11)$$

y la variación con respecto a la función lapso da lugar a la ligadura hamiltoniana,  $C = 0$ , que será la única ligadura de nuestro sistema y viene dada por

$$C = -p_b p_c + \dot{B}(b). \quad (6.2.12)$$

De esta ecuación se deduce que  $p_c$  conmuta con  $C$  bajo corchetes de Poisson, y por tanto es una constante del movimiento. También es fácil de ver que la ligadura hamiltoniana del sistema y la métrica son invariantes bajo cambios simultáneos de signo en los momentos. Este cambio de signo puede interpretarse como una inversión de la evolución y se corresponde con un cambio de signo en la función lapso  $N$ , por lo que podemos eliminarla bajo la consideración tan sólo de  $N$  positiva. El sistema tiene además la simetría  $(b, c, p_b, p_c) \rightarrow (-b, -c, p_b, p_c)$ , que podría utilizarse para reducir la parte relevante del espacio de fases a la mitad del mismo. En este sentido, la mencionada duplicidad de trayectorias para un signo diferente de  $b$  sería eliminada. Aunque en lugar de imponer esta restricción, discutiremos más adelante una simetría relacionada que conllevará un resultado similar en la reducción a la mitad de la parte relevante del espacio de fases.

Una vez establecido ya el espacio de fases del sistema, podemos desarrollar una cuantización canónica, siguiendo una prescripción extendida del programa de Dirac, que nos permitirá posteriormente discutir la presencia genérica de correlaciones cuánticas entre regiones clásicamente separadas.

### 6.3. Cuantización canónica

Para la cuantización de nuestro sistema simple, seguiremos una extensión del programa de cuantización canónica de Dirac para sistemas con ligaduras de primera clase [65] (véase la Ref. [81]). Construiremos primeramente un álgebra de operadores cinemáticos, partiendo de su espacio de fases y cerrándola bajo corchetes de Poisson [81]. Representaremos esta álgebra por operadores actuando en un espacio cinemático

vectorial complejo, que por conveniencia estará dotado de una estructura de espacio de Hilbert. La ligadura hamiltoniana estará representada como un operador específico actuando en el espacio cinemático, por lo que el espacio de los estados físicos será suministrado por el núcleo de esta ligadura y los operadores físicos se obtendrán como elementos del álgebra cinemática que son aplicaciones del espacio físico en sí mismo. En este sentido, el producto interno en este espacio físico se determinará requiriendo que un conjunto completo de observables clásicos reales esté representado por operadores autoadjuntos (condiciones de realidad).

El propósito de nuestra cuantización es descomponer el espacio de Hilbert físico del sistema en dos subespacios correspondientes a estados con soporte en configuraciones que exclusivamente describan regiones espaciotemporales o entre los horizontes o al otro lado de ellos. Esto nos permitirá el posterior estudio de la interacción cuántica entre diferentes regiones clásicamente desconectadas, mediante la definición de observables parciales respecto a un parámetro natural de evolución de los estados físicos establecido en este espacio [197].

### 6.3.1. Espacio de Hilbert cinemático y álgebra de operadores

Comenzaremos con el álgebra cinemática construida a partir de las variables canónicas  $b, c, p_b$  y  $p_c$  (y la constante unidad), que obviamente son cerradas bajo corchetes de Poisson. Las variables de esta álgebra se promueven a operadores representados en un espacio cinemático, en el que los conmutadores desempeñan el papel de los corchetes de Poisson. En la representación métrica, expresamos el álgebra cinemática por operadores actuando de la forma

$$\hat{b} = b, \quad \hat{c} = c, \quad \hat{p}_b = -i\partial_b, \quad \hat{p}_c = -i\partial_c. \quad (6.3.1)$$

Como espacio cinemático escogemos el espacio vectorial generado por soluciones simultáneas de las siguientes ecuaciones, motivadas por el hecho de que el momento canónico  $p_c$  y la ligadura hamiltoniana,  $C$ , conmutan,

$$-i\partial_c\Psi_{hp} = p\Psi_{hp}, \quad [\partial_c\partial_b + \mathring{B}(b)]\Psi_{hp} = h\Psi_{hp}, \quad (6.3.2)$$

siendo los valores de  $h$  y  $p$  reales. Dichas soluciones dependen de las variables  $b$  y  $c$ , y están etiquetadas por los parámetros  $h$  y  $p$ , tomando la forma

$$\Psi_{hp}(b, c) = e^{ipc+i[B(b)-bh]/p}, \quad (6.3.3)$$

donde la singularidad en  $p = 0$  no debería ser relevante en el espacio de Hilbert construido más adelante, ya que tendrá medida cero. Más explícitamente, cualquier estado

cinemático será una combinación lineal de estas soluciones, es decir

$$\Psi(b, c) = \int_{\mathbb{R}} dh \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\Psi}(h, p) \Psi_{hp}(b, c), \quad (6.3.4)$$

donde  $\tilde{\Psi}(h, p)$  es una distribución. De este modo esta construcción otorga al espacio cinemático un estructura de espacio vectorial complejo.

En realidad hemos construido dos representaciones cinemáticas que podemos utilizar, ya que a parte de la representación métrica,  $(b, c)$ , disponemos también de la representación de momentos,  $(h, p)$ . En dicha representación  $(h, p)$ , los operadores métricos anteriores actúan de la forma

$$\begin{aligned} \hat{b} &= -ip\partial_h, \\ \hat{c} &= i\partial_p + \frac{B(-ip\partial_h)}{p^2} + \frac{i\partial_h h}{p}, \\ \hat{p}_b &= \frac{\mathring{B}(-ip\partial_h) - h}{p}, \\ \hat{p}_c &= p, \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

como puede comprobarse mediante aplicación directa de estos operadores en los estados cinemáticos (6.3.4). Se asume que la integración por partes puede realizarse sin contribuciones de frontera, gracias a las condiciones de frontera implícitas en el hecho de que estos estados pertenezcan al espacio de Hilbert cinemático, que determinaremos a continuación. Asimismo, se ha elegido un orden de factores en el último término del operador  $\hat{c}$ , de manera que  $h$  actúa por la derecha de  $\partial_h$ . La razón de esta elección se hará evidente más adelante.

Un camino equivalente para la construcción del mismo espacio cinemático puede deducirse eligiendo el conjunto canónico de variables adaptado al sistema estudiado en la Ref. [194], y dado por  $t, q$ , y sus respectivos momentos  $h, p$ , con las nuevas variables definidas como

$$\begin{aligned} t &= -\frac{b}{p_c}, \\ h &= -p_b p_c + \mathring{B}, \\ q &= c - \frac{B(b) + b p_b p_c - b \mathring{B}(b)}{p_c^2}, \\ p &= p_c. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

La función generatriz de tipo 2 para esta transformación canónica invertible uno a uno en el espacio de fases es

$$F(c, b, h, p) = cp + \frac{B(b) - bh}{p}. \quad (6.3.7)$$

Desde un punto de vista clásico,  $p$ ,  $q$ , y  $h$  son constantes del movimiento. De hecho, por comparación con la solución clásica general (6.2.8) en términos de las variables métricas  $b$  y  $c$ , resulta ahora

$$p = \alpha, \quad h = 0, \quad q = \frac{2m}{\alpha^2}, \quad \dot{t} = -N. \quad (6.3.8)$$

Se puede ver que  $q$  es positiva en las soluciones clásicas si queremos considerar sólo masa positiva. Es también interesante destacar que  $q$  es justo el valor de la variable dinámica  $c$  para  $b = 0$ , aunque la relevancia de este comentario se hará patente cuando analicemos las representaciones cuánticas en la siguiente sección.

La simetría discutida al final de la sección previa, respecto al cambio simultáneo de signo en las variables métricas,  $b$  y  $c$ , se transforma, en términos de las nuevas variables canónicas, en la simetría  $(q, t, p, h) \rightarrow (-q, -t, p, h)$ . Esta simetría implica, de nuevo, que toda la información relevante está en realidad contenida en la mitad del espacio de fases original y que, en consecuencia, podemos restringir nuestro estudio al mismo. Debido a que, por otras razones (como la existencia genérica de dos horizontes), estamos interesados en  $q$  positiva, ésta sería la mitad que elegiríamos. Por el momento, mantendremos el espacio de fases sin reducir y discutiremos más adelante cómo imponer dicha simetría como una restricción en las funciones de onda, de forma que la representación correspondiente estará dada por la limitación de la representación «completa» a un subespacio de la misma.

Elegimos como espacio vectorial cinemático el espacio de distribuciones  $\tilde{\Psi}(h, p)$  y representamos el álgebra cinemática en él como

$$\hat{h} = h, \quad \hat{t} = i\partial_h, \quad \hat{p} = p, \quad \hat{q} = i\partial_p. \quad (6.3.9)$$

Invirtiendo a transformación canónica (6.3.6) puede verse fácilmente que las variables métricas se representan como los operadores

$$\begin{aligned} \hat{b} &= -\hat{t}\hat{p}, \\ \hat{c} &= \hat{q} + B(-\hat{t}\hat{p})\hat{p}^{-2} + \hat{t}\hat{h}\hat{p}^{-1}, \\ \hat{p}_b &= [\hat{B}(-\hat{t}\hat{p}) - \hat{h}]\hat{p}^{-1}, \\ \hat{p}_c &= \hat{p}. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Por conveniencia, tomamos el orden de factores como  $\hat{t}\hat{h} = \hat{t}\hat{h}$ , aunque éste no sea el orden simétrico, con la finalidad de que la acción de este operador sobre los estados físicos se anule, ya que como veremos éstos son aniquilados por  $\hat{h}$ . Esta elección, aunque en contraste con la Ref. [194], está de acuerdo con el orden de operadores escogido en la construcción previa del espacio cinemático dado en la expresión (6.3.5).

Se puede pasar fácilmente a la representación métrica  $(b, c)$ , como toma de contacto con la construcción presentada previamente, por medio de la transformación

$$\Psi(b, c) = \int_{\mathbb{R}} dh \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\Psi}(h, p) e^{iF(b, c, h, p)}. \quad (6.3.11)$$

Esta expresión se puede ver que es precisamente la que aparece en la ecuación previa de los estados cinemáticos (6.3.4), con las variables canónicas métricas representadas igualmente por los operadores dados por las definiciones (6.3.1). Merece la pena enfatizar también que estamos utilizando una representación ligeramente diferente a la utilizada en la Ref. [194].

Será conveniente dotar este espacio con la estructura de un espacio de Hilbert, para lo que es necesario introducir un producto interno en el cual los operadores  $\hat{h}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{t}$ , y  $\hat{q}$  sean autoadjuntos, que concretamente vendrá dado por

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int_{\mathbb{R}} dh \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\Psi}_1(h, p)^* \tilde{\Psi}_2(h, p), \quad (6.3.12)$$

donde el símbolo  $*$  denota conjugación compleja. Así el espacio de Hilbert cinemático es la completación en este producto interno del espacio de distribuciones  $\tilde{\Psi}(h, p)$ , es decir, corresponde al espacio de funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida usual de Lebesgue,  $L^2(\mathbb{R}^2, dhdp)$ . Los estados  $\Psi_{hp}(b, c)$  son obviamente ortonormales en el sentido de la delta de Dirac,

$$(\Psi_{hp}, \Psi_{h'p'}) = \delta(h - h')\delta(p - p'). \quad (6.3.13)$$

La restricción, mencionada anteriormente, a  $q$  positiva, puede aplicarse mediante la transformada de Fourier de la representación  $(h, p)$  en la variable  $p$ . Pasando por tanto a una representación  $(h, q)$ , basta con proyectar en el semieje positivo del espacio de configuración. De esta manera, el correspondiente espacio de las funciones de onda es  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, dhdq)$ , obtenido por reducción de esas funciones a  $q$  positiva y utilizando el producto interno inducido dado anteriormente en la expresión (6.3.12). Hay que tener en cuenta que, debido a que este espacio no es estable bajo el operador  $\hat{p}$ , en su lugar debe utilizarse el operador  $\hat{q}p = i(p\partial_p + 1/2)$ , que sí es autoadjunto en este espacio. No obstante, continuaremos considerando el espacio de Hilbert general sin restricciones en  $q$ , manteniendo en mente que esto implica la duplicidad física que discutimos previamente.

Finalmente, la ligadura hamiltoniana puede representarse en este espacio cinemático por los operadores

$$\hat{C} = \partial_b \partial_c + \dot{B}(b), \quad \hat{C} = h, \quad (6.3.14)$$

en la representación métrica,  $(b, c)$ , y en la representación  $(h, p)$ , respectivamente.

### 6.3.2. Espacio de Hilbert físico

El espacio de soluciones se obtiene mediante la imposición del operador ligadura actuando en el espacio cinemático, de forma que los estados físicos sean aquéllos aniquilados por dicho operador. Se ha visto que la ligadura hamiltoniana en la representación  $(h, p)$  del espacio cinemático viene dada como la multiplicación por  $h$ , de forma que los estados físicos vienen dados por la resolución de la siguiente ecuación

$$\hat{C}\tilde{\Phi}(h, p) = h\tilde{\Phi}(h, p) = 0. \quad (6.3.15)$$

Las soluciones tienen la forma

$$\tilde{\Phi}(h, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(h)\phi(p), \quad (6.3.16)$$

donde  $\phi(p)$  es una distribución arbitraria y el prefactor constante se ha elegido por conveniencia para la posterior normalización. En este espacio vectorial físico, los operadores  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$ , que conmutan con la ligadura,  $\hat{C}$ , están representados como

$$\hat{p} = p, \quad \hat{q} = i\partial_p. \quad (6.3.17)$$

La tarea restante en este procedimiento de cuantización es fijar el producto interno en el espacio de los estados físicos. Elegimos para ello que los observables  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  (o  $\hat{q}\hat{p}$  en el caso de restricción a  $q$  positiva) sean autoadjuntos, lo que nos lleva al producto interno

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} dp \phi_1(p)^* \phi_2(p). \quad (6.3.18)$$

Para sintetizar, el espacio de Hilbert físico de los estados cuánticos para nuestro sistema es el espacio de funciones de cuadrado integrable en la medida de Lebesgue usual  $L^2(\mathbb{R}, dp)$ , el cual contiene justo un grado de libertad como era de esperar. Nos referiremos a esta representación como la representación  $p$ , aunque ésta no es la única que puede utilizarse, y de hecho veremos que existen otras representaciones de interés físico.

Los estados físicos también pueden expresarse en términos de las variables métricas,  $b$  y  $c$ , como

$$\begin{aligned} \Phi(b, c) &= \int_{\mathbb{R}} dh \int_{\mathbb{R}} dp \tilde{\Phi}(h, p) e^{iF(b, c, h, p)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dp \phi(p) e^{i[pc + B(b)/p]}, \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

donde la integral en  $h$  desaparece debido a la delta de Dirac presente en esa misma variable, y cabe destacar que la dependencia de los estados físicos en  $b$  es sólo a través de  $B(b)$ .

A través de una transformada de Fourier en la variable  $c$  se obtiene fácilmente la inversa de esta transformación como

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iB(b)/p} \int_{\mathbb{R}} dc \Phi(b, c) e^{-ipc}, \quad (6.3.20)$$

de modo que tenemos una transformación invertible uno a uno entre ambas representaciones.

La relación de cierre en términos de las variables métricas puede entonces obtenerse fácilmente, siendo de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{1}(b, c; b, c') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp e^{ip(c-c')} e^{i[B(b)-B(b)]/p} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp e^{ip(c-c')} \\ &= \delta(c - c'), \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

así que

$$\Phi(b, c) = \int_{\mathbb{R}} dc' \mathbb{1}(b, c; b, c') \Phi(b, c'). \quad (6.3.22)$$

Finalmente, a partir de las expresiones previas, se puede escribir el producto interno en términos de las variables métricas como

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dp \phi_1(p)^* \phi_2(p) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dp \int_{\mathbb{R}} dc_1 \int_{\mathbb{R}} dc_2 e^{ip(c_1-c_2)} \Phi_1(b, c_1)^* \Phi_2(b, c_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dc \Phi_1(b, c)^* \Phi_2(b, c). \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Es importante resaltar que el producto interno no depende de la variable  $b$ , es decir, está evaluado para funciones con el mismo valor de esta variable, lo que proviene del hecho de que aparece como una fase en los estados físicos. Esto nos sugiere su posible interpretación como un parámetro de evolución.

### 6.3.3. Evolución y observables

Una idea para el establecimiento de observables en cosmología cuántica proviene de los denominados observables parciales [84, 85, 198], que son variables dinámicas del espacio de fases que deberán definirse respecto de otra que actúa como «reloj»,

para proporcionar un observable completo de Dirac. De esta manera, se obtiene una familia uniparamétrica de observables respecto a un tiempo interno emergente, todos ellos relacionados mediante transformaciones (que se identifican con una evolución), proporcionando así como observable el valor de una determinada variable dinámica para cada valor de dicho parámetro [197, 199]. En realidad esto está relacionado con la definición alternativa de los observables en la imagen de Heisenberg de la mecánica cuántica, para lo que es necesario definir el estado en un espacio determinado y a partir de ahí crear la familia completa de observables que evolucionan en el parámetro en cuestión.

De la discusión final de la sección anterior se sigue inmediatamente que podemos cambiar de la representación  $p$  a la representación métrica para los estados físicos  $\Phi(b, c)$  por medio de una transformada de Fourier (junto con una multiplicación por una fase dependiente de  $b$ ). Este hecho nos permite introducir otras dos familias de representaciones equivalentes que nos posibilitan la definición del tipo de observables descritos y que serán particularmente adecuadas para el estudio de la física de los horizontes cuánticos que queremos llevar a cabo.

### Representaciones $c_b$

Se puede ver que en realidad no tenemos una, sino una familia completa de representaciones  $c_b$  etiquetadas por  $b$ ; lo que es obvio a partir la ecuación (6.3.23) para el producto interno, válido para cualquier valor de  $b$ . Esto se parece a un tipo de transformación de la imagen de Heisenberg, en la que los estados  $\phi(p)$  sólo dependen de  $p$ , a la imagen de Schrödinger en  $b$ , donde ahora los estados dependen de  $p$  y  $b$  [a través de la evolución en  $b$ , generada por el hamiltoniano  $-\hat{B}(b)\hat{p}^{-1}$ ], junto con una transformada de Fourier a la variable  $c$ . En este sentido, podemos escribir

$$\Phi(b, c) = \hat{U}(b)\Phi(\tilde{b}, c), \quad (6.3.24)$$

donde  $\tilde{b}$  representa cualquiera de las raíces del polinomio  $B(b)$  y el operador evolución en  $b$  viene dado por

$$\hat{U}(b) = e^{iB(b)\hat{p}^{-1}}. \quad (6.3.25)$$

En cada una de estas representaciones  $c_b$ , los observables que queremos representar serán aquéllos correspondientes a  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  en esta imagen de Schrödinger en  $b$ , de forma que resultan

$$\begin{aligned} \hat{p}_b &= \hat{U}(b)\hat{p}\hat{U}^\dagger(b) = \hat{p}, \\ \hat{c}_b &= \hat{U}(b)\hat{q}\hat{U}^\dagger(b) = \hat{q} + B(b)\hat{p}^{-2}. \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Se ve de forma directa que estos observables canónicamente conjugados actúan en  $\Phi(b, c)$  precisamente como derivación y multiplicación por  $c$ , respectivamente; es decir

$$\hat{p}_b = -i\partial_c, \quad \hat{c}_b = c, \quad (6.3.27)$$

y de ahí por tanto el nombre de  $\hat{c}_b$  en lugar de  $\hat{q}_b$ . Nótese que en la sección anterior, tras definir la variable canónica  $q$  en la expresión (6.3.6), ya mencionamos que ésta representaba justo el valor de la variable  $c$  para un valor  $b = 0$ .

Así, tenemos una familia de observables  $\hat{c}_b$ , cada uno en una representación diferente (etiquetada por  $b$ ), que puede interpretarse que da el valor de la variable métrica  $c$  para el valor considerado de  $b$ . Esta interpretación está en realidad basada en la observación realizada anteriormente de que  $\hat{c}_b$  no es sino un tipo de operador en la imagen de Schrödinger obtenido a partir de  $\hat{q}$  por medio del operador «evolución en  $b$ »,  $\hat{U}(b)$ . Más adelante veremos con mayor profundidad la descripción de las familias de observables en cada una de las dos imágenes de la mecánica cuántica estándar.

### Representaciones $p_b$

Al igual que en el caso anterior, también tenemos una familia de representaciones  $p_b$  etiquetadas por  $b$ , dadas por la transformada de Fourier en  $c$  de  $\Phi(b, c)$ . Análogamente, esta familia de representaciones se puede ver como una transformación de la imagen de Heisenberg,  $\phi(p)$ , a una imagen de Schrödinger,  $\phi(b, p)$ , a través del mismo operador evolución,

$$\begin{aligned} \phi(b, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dc e^{-ipc} \Phi(b, c) \\ &= \hat{U}(b) \phi(\tilde{b}, p) = \phi(p) e^{iB(b)/p}, \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

para las cuales el producto interno (6.3.18) resulta

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} dp \phi_1(b, p)^* \phi_2(b, p). \quad (6.3.29)$$

Se puede deducir directamente que en estas representaciones tenemos definidos dos operadores, para cada valor de  $b$ , dados por

$$\hat{p}_b = \hat{p} \quad \hat{c}_b = i\partial_p. \quad (6.3.30)$$

Estos operadores son claramente observables bien definidos en (un dominio denso) del espacio de Hilbert físico que actúan por multiplicación y derivación por  $p$ . Luego tenemos una familia de observables, de la misma manera que en el caso de las representaciones  $c_b$ , que pueden entenderse como operadores en la imagen de Schrödinger obtenidos a partir de los observables de partida mediante una evolución en  $b$ .

## Imágenes de Heisenberg y Schrödinger

Como hemos mencionado previamente, se pueden adoptar dos puntos de vista alternativos análogos a las imágenes de Schrödinger y Heisenberg de la mecánica cuántica estándar. Aunque nos referiremos únicamente a las representaciones  $p_b$ , se espera una discusión completamente análoga para las representaciones  $c_b$ .

Desde el primer punto de vista se puede considerar que las representaciones  $p_b$ , con los estados descritos por  $\phi(b, p)$ , nos proporcionan la evolución de la representación  $p$ , cuyos estados están descritos por  $\phi(p)$ , desde un valor  $b = \tilde{b}$  donde  $B(\tilde{b})$  se anula a un nuevo valor de  $b$ , y por tanto de  $B(b)$ . De esta manera, disponemos de una familia completa de representaciones que dan la correspondiente «dinámica» de Schrödinger en el parámetro  $b$ . El hamiltoniano de la evolución en  $b$ , desde este punto de vista, sería  $-\dot{B}(b)\hat{p}^{-1}$  y así, cuando se integra la ecuación de Schrödinger asociada, se obtiene la fase  $iB(b)/p$ , como hemos discutido anteriormente. Se puede ver que, puesto que este hamiltoniano depende de  $b$ , y además no es estrictamente positivo, la fase  $iB(b)/p$  no es monótona en  $b$ . Sin embargo, en la construcción de esta «dinámica» de Schrödinger no es necesario que  $B(b)$  sea monótona en  $b$ , en tanto y cuanto la evolución en  $b$  es implementable de manera unitaria debido a que el producto interno (6.3.29) se conserva, es decir es independiente de  $b$ .

Por otro lado, se puede elegir una representación fija  $p_b$  para un valor dado de  $b$  [con estados descritos por  $\phi(b, p)$ ], y representar así la familia de observables obtenida en un tipo de imagen de Heisenberg [197]. De esta forma, la familia de observables correspondiente a la variable  $c$  a diferentes valores  $b_0$  de  $b$  estará dada por

$$\hat{c}_b^0 = \hat{U}^\dagger(b, b_0)\hat{c}_b\hat{U}(b, b_0) = i\partial_p + \frac{B(b_0) - B(b)}{p^2}, \quad (6.3.31)$$

donde  $\hat{U}(b, b_0) = e^{i[B(b)-B(b_0)]\hat{p}^{-1}}$ . La interpretación de este observable en la representación  $p_b$  es que proporciona el valor de  $c$  cuando  $b = b_0$ , y ello en cada punto de la evolución en  $b$  (como ya mencionamos). En vista de que la función  $B$  no es uno a uno, los operadores en esta familia pueden coincidir para algunos valores de  $b_0$ , concretamente para aquellos donde  $B(b_0)$  es la misma.

### 6.3.4. Bases del espacio de Hilbert físico: separación en subespacios

Antes de proceder a la discusión principal, que afronta la cuestión que motivó nuestro análisis, vamos a completar nuestro estudio de la cuantización con la determinación

de algunas bases especialmente útiles para el espacio de Hilbert físico de nuestro sistema.

Comencemos considerando los siguientes estados

$$\phi_p(p') = \delta(p - p') \quad (6.3.32)$$

en la representación  $p$ . Sus estados equivalentes en las representaciones  $p_b$  se encuentran directamente a través del operador evolución, siendo entonces

$$\phi_p(b, p') = \delta(p - p') e^{iB(b)/p}. \quad (6.3.33)$$

Éstos son directamente los autoestados de  $\hat{p}$  con autovalor  $p$  y, por tanto, nos proporcionan una base ortonormal. Sus análogos en las representaciones  $c_b$  son

$$\Phi_p(b, c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipc + iB(b)/p}, \quad (6.3.34)$$

donde la relación de cierre resulta

$$\mathbb{1}(b, c; b, c') = \int_{\mathbb{R}} dp \Phi_p(b, c) \Phi_p(b, c')^* = \delta(c - c'). \quad (6.3.35)$$

Finalmente, otra base que resultará muy provechosa en nuestro análisis es precisamente la que está construida a partir de los autoestados del operador autoadjunto  $\hat{c}_b^0$  en la representación  $p_b$ , con autovalores reales  $c^0$ . Los estados en cuestión toman la forma

$$\phi_{c^0}(b, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipc^0 - i[B(b_0) - B(b)]/p}. \quad (6.3.36)$$

Para la familia de bases obtenida al considerar los distintos valores de  $b_0$  posibles, el operador identidad (a valores iguales de  $b$ ) adquiere la forma

$$\mathbb{1}(b, p; b, p') = \delta(p - p'). \quad (6.3.37)$$

Será interesante expresar esta igualdad como una suma sobre todos los autovalores  $c_0$  (toda la recta real) de  $\hat{c}_b^0$ :

$$\mathbb{1}(b, p; b, p') = \int_{\mathbb{R}} dc^0 \phi_{c^0}(b, p) \phi_{c^0}(b, p')^*. \quad (6.3.38)$$

Se puede descomponer esta identidad en la suma de dos proyectores ortogonales: uno para autovalores positivos de  $c^0$ ,  $\hat{P}_+^0$ , y otro para autovalores negativos,  $\hat{P}_-^0$ ; de manera que la integral sobre la recta real es la suma de los dos correspondientes intervalos semi-infinitos,

$$\mathbb{1} = \hat{P}_+^0 + \hat{P}_-^0. \quad (6.3.39)$$

El superíndice 0 pone de manifiesto la dependencia de los operadores de proyección en el valor  $b_0$  donde se evalúa  $c$ . Explícitamente, estos operadores de proyección pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\pm}^0 \phi(b, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{\pm}} dc^0 e^{-ipc^0 - i[B(b_0) - B(b)]/p} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} dp' e^{ip'c^0 + i[B(b_0) - B(b)]/p'} \phi(b, p'). \end{aligned} \quad (6.3.40)$$

La relevancia de esta descomposición de la identidad reside en la separación de las regiones clásicas mediante el signo correspondiente a la variable  $c$ , sobre las que ahora, cuánticamente, podemos definir una proyección, utilizando una familia de bases específica de la cuantización realizada.

## 6.4. Interpretación del sistema cuántico e influencia de los horizontes

Recapitulando los resultados obtenidos en la sección anterior, se deriva que hemos cuantizado nuestro sistema inicial determinando posteriormente un parámetro de evolución,  $b$ , y una familia de observables definida para cada punto de esa evolución que nos proporcionarán el valor de la variable  $c$  en cada valor de  $b$ . Así resulta que, utilizando una cierta familia de bases, podemos expresar el sistema total como una composición de subespacios de Hilbert correspondientes a las regiones entre los horizontes y más allá de los mismos del modelo clásico. Si estos subespacios de Hilbert no son estables bajo la acción de operadores unitarios que implementan una noción natural de evolución en los estados físicos, entonces el hogar para esta evolución física será el producto tensorial de ambos subespacios en lugar de la suma directa de los mismos. De esta forma, los subespacios no serían separables dinámicamente sino entrelazados, significando esto que las correlaciones cuánticas entre regiones clásicamente disjuntas son una característica genérica inevitable en esta cuantización.

Para realizar el análisis de la existencia de correlaciones entre las diferentes regiones, comenzamos asumiendo que, en un cierto valor positivo  $b_0$  de  $b$ , observamos solamente la región con valores negativos de  $c$ . Esto corresponde clásicamente a considerar solamente nuestra región del Universo, es decir la región espaciotemporal que se extiende entre el horizonte del agujero negro y el cosmológico para un valor dado,  $b_0$ , de la variable dinámica. De forma similar, podríamos restringirnos al exterior de nuestra región del Universo (detrás de los horizontes de agujero negro y cosmológico), es decir a valores positivos de  $c$  para  $b_0$ . En nuestro esquema de cuantización es inmediato

ver que estas restricciones pueden lograrse eligiendo estados con proyección nula bajo  $\hat{P}_\pm^0$ , respectivamente, o equivalentemente proyectando un estado arbitrario con  $\hat{P}_\mp^0$  y normalizando el resultado.

Clásicamente cualquier cosa que suceda más allá de los horizontes no tendrá ningún efecto en absoluto en nuestra región del espaciotiempo. Ahora ya estamos listos para preguntarnos, y también para responder, la correspondiente cuestión cuántica. Más explícitamente, esta cuestión se traduce en estudiar si esta restricción a nuestra región del Universo (es decir a valores negativos de  $c$ ) es robusta y característica del sistema, de manera que podamos obviar cuánticamente las regiones al otro lado de los horizontes, porque cada región adquiriera una descripción cuántica completa independiente del resto del sistema.

Si este no fuese el caso, entonces las medidas de  $c$  realizadas en un valor positivo de  $b$  diferente al anterior, expresado como  $b_1$ , darían lugar a resultados contradictorios. La cuestión es entonces si las observaciones de  $c$  en distintos valores de  $b$  son compatibles, de manera que los proyectores asociados a las mismas conmuten y la limitación a nuestra región del Universo sea consistente y estable cuánticamente. Por ende, esto se traduce en que la robustez de esta restricción requiere que los dos observables considerados  $\hat{c}_b^0$  y  $\hat{c}_b^1$  conmuten. Vamos a probar que no es éste el caso por medio de un cálculo directo que nos muestra que

$$\begin{aligned} [\hat{c}_b^0, \hat{c}_b^1] &= \left[ \hat{q} + [B(b_0) - B]\hat{p}^{-2}, \hat{q} + [B(b_1) - B]\hat{p}^{-2} \right] \\ &= -2i[B(b_1) - B(b_0)]\hat{p}^{-3} \neq 0, \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

y consiguientemente la familia de observables considerados no son mutuamente compatibles. Luego las dos proyecciones (en diferentes valores  $b_0$  y  $b_1$ ) diferirán, los observables correspondientes  $\hat{c}_b^0$  y  $\hat{c}_b^1$  no se diagonalizarán simultáneamente y, por lo tanto, los autoestados no podrán elegirse como comunes a ambos observables.

Como consecuencia de esto, ya mencionamos anteriormente que entonces los proyectores no conmutan y la restricción a nuestra región del Universo entre los dos horizontes (o a las regiones al otro lado de los mismos, análogamente) no será estable. En otras palabras, los estados elegidos con proyección nula en valores positivos de  $c^0$ , evaluados en un valor  $b_0$ , tendrán generalmente una proyección distinta de cero en valores positivos de  $c^1$ , evaluados ahora en  $b_1$ . De esta manera los estados escogidos pertenecientes sólo a nuestra región del Universo serán inestables bajo la evolución en la variable dinámica  $b$ . Es decir, que aunqueelijamos estados que únicamente tienen soporte en nuestra región del Universo, en un valor diferente de la evolución en  $b$  (tan cercano como queramos), desarrollarán contribuciones de las regiones más allá de los horizontes.

Alternativamente, se puede obtener el mismo resultado si actuamos con el operador  $\hat{c}_b^1$  en los autoestados del operador  $\hat{c}_b^0$ , obteniéndose los autovalores  $c^1$ . En la representación  $p_b$ , esto se obtiene de manera directa y tendrá la forma

$$\hat{c}_b^1 \phi_{c^0}(b, p) = c^1 \phi_{c^0}(b, p) = \left[ c^0 - \frac{B(b_0) - B(b_1)}{p^2} \right] \phi_{c^0}(b, p). \quad (6.4.2)$$

Se puede ver que el sector de valores positivos de  $c^0$  (evaluados en  $b_0$  positivo) estaría contenido en el sector positivo de  $c^1$  (evaluados en  $b_1$  positivo) si  $B(b_0) - B(b_1) < 0$ , y el sector de valores negativos de  $c^0$  en el sector negativo de  $c^1$  si  $B(b_0) - B(b_1) > 0$ . Ambas condiciones son incompatibles a menos que  $B(b_0) = B(b_1)$ , lo que no se satisface para valores generales  $b_0$  y  $b_1$  (quizá sólo para algunos valores concretos de  $b$ , pero no en intervalos completos). Esto respalda aún más la conclusión previa de que los proyectores en sectores positivos y negativos de  $c^0$  en diferentes valores  $b_0$  de  $b$  no son mutuamente compatibles en general.

Respecto a la simetría a la que nos hemos referido a lo largo de todo el capítulo, es interesante remarcar que el operador  $\hat{q}$  puede considerarse un caso particular de  $\hat{c}_b^0$ , precisamente el asociado con  $b_0 = \tilde{b}$ , que da lugar a  $B(\tilde{b}) = 0$ . En consecuencia, incluso si nos restringimos a  $q$  positiva, actuando con la proyección asociada a la parte positiva del espectro de este operador (eliminando así la duplicidad física que hemos mantenido hasta ahora), el sistema desarrollará contribuciones del sector negativo de  $\hat{q}$  para otros valores de la variable  $b$ , en conformidad con la discusión previa. Esto nos reafirma en la decisión mantenida a lo largo de todo el capítulo de no restringir el espacio de fases.

A la hora de trabajar con el espacio de Hilbert del sistema global, debido a que la dinámica en  $b$  mezcla las proyecciones, como hemos visto, describir los estados como sumas directas de estados con  $c^0$  positivos o negativos no es la mejor estrategia. En su lugar, es más apropiado considerar estados físicos generales pertenecientes al producto tensorial

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_+^0 \otimes \mathcal{H}_-^0 \quad (6.4.3)$$

de los subespacios proyección

$$\mathcal{H}_\pm^0 = \hat{P}_\pm^0 \mathcal{H}, \quad (6.4.4)$$

donde, al igual que antes, el superíndice 0 denota la elección de un instante particular de  $b$  para la construcción, y  $\mathcal{H}$  es el espacio de Hilbert del que partimos.

Por otro lado, utilizando el hecho de que la suma de  $P_+^0$  y  $P_-^0$  es la identidad, cualquier observable  $\hat{O}$  puede descomponerse entonces en cuatro operadores entre ambos subespacios proyección,

$$\hat{O}_{\pm\pm}^0 : \mathcal{H}_\pm^0 \rightarrow \mathcal{H}_\pm^0, \quad \hat{O}_{\pm\mp}^0 : \mathcal{H}_\pm^0 \rightarrow \mathcal{H}_\mp^0, \quad (6.4.5)$$

definidos como

$$\hat{O}_{\pm\pm}^0 = \hat{P}_{\pm}^0 \hat{O} \hat{P}_{\pm}^0, \quad \hat{O}_{\pm\mp}^0 = \hat{P}_{\pm}^0 \hat{O} \hat{P}_{\mp}^0. \quad (6.4.6)$$

Mientras que los operadores  $\hat{O}_{\pm\pm}^0$  tienen soporte en un sólo subespacio, los operadores  $\hat{O}_{\pm\mp}^0$  mezclan los dos subespacios  $\mathcal{H}_{\pm}^0$  correspondientes a las proyecciones consideradas y causan las correlaciones entre ellos. Hemos visto que éste es el caso de los operadores que hemos construido,  $\hat{c}_b^1$ , siempre y cuando  $B(b_1) \neq B(b_0)$ . Aún más, si  $\hat{O}$  es un observable unitario, la existencia de las dos componentes de mezcla indicará que la unitariedad no se respeta en cada uno de los subespacios  $\mathcal{H}_{\pm}^0$  separadamente. Nuestro sistema claramente exhibe este tipo de operadores unitarios y el ejemplo más directo es la construcción del operador  $\exp(i\hat{c}_b^1)$ .

Este análisis lleva a la conclusión de que la mezcla entre el interior y el exterior del horizonte por efectos cuánticos es un resultado general en esta cuantización y que los estados físicos entrelazan ambas regiones. De esta manera se soluciona inequívocamente en sentido afirmativo la cuestión cuántica acerca de la influencia de regiones clásicamente desconectadas de la nuestra.

## 6.5. Resultados y discusión

Hemos argumentado que la mecánica cuántica aplicada al espaciotiempo completo generalmente introduce correlaciones cuánticas entre distintas regiones clásicamente desconectadas (separadas por horizontes), de forma que nuestra región del Universo contiene contribuciones cuánticas de regiones que clásicamente no podemos observar, obligándonos a la consideración de la cuantización del espaciotiempo total a pesar de que quisiésemos estudiar sólo las cuestiones referentes a la región a nuestro alcance. Esto podría usarse como una primera etapa de un análisis del escenario de multiverso cuántico, en el cual pueden existir correlaciones cuánticas entre universos individuales no correlacionados de otra manera. Básicamente, estos efectos reflejarían la necesidad de considerar el multiverso de manera global para obtener un conocimiento completo de nuestro Universo.

Más concretamente, hemos analizado clásicamente un modelo de minisuperespacio de tipo Kantowski-Sachs de un espaciotiempo con una constante cosmológica positiva, cuyas soluciones clásicas son universos de Schwarzschild-de Sitter, que típicamente contienen dos horizontes que aislan nuestra región del Universo. Posteriormente, hemos llevado a cabo una cuantización canónica de este modelo siguiendo (una extensión de) el programa de cuantización canónica de Dirac para sistemas con ligaduras de primera

clase. En esta construcción, la estructura física es consistente y robusta sólo si consideramos el espaciotiempo completo. Hemos demostrado que no podemos restringirnos a la región clásica observada cuando consideramos el espaciotiempo cuánticamente, debido a que generalmente aparecen correlaciones cuánticas inevitables entre regiones clásicamente separadas por horizontes. Esto se ha visto explícitamente comprobando que la unitariedad se preserva sólo cuando se tiene en cuenta el espaciotiempo completo. De hecho, hemos descompuesto el espacio de Hilbert físico del sistema en dos subespacios correspondientes a estados con soporte o entre los horizontes o al otro lado de los mismos. Estos subespacios de Hilbert no son estables bajo la acción de operadores unitarios que describen un concepto de evolución en los estados físicos. Luego, es más adecuado concebir dichos estados como pertenecientes al producto tensorial de ambos subespacios, los cuales no son separables sino entrelazados.

En contraste con muchas discusiones llevadas a cabo en teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos (véase por ejemplo [187, 200–206]), una característica distintiva de nuestro análisis es que nuestras conclusiones residen exclusivamente en el comportamiento cuántico de la geometría. El entrelazamiento entre las regiones en el interior y el exterior de los horizontes se ha demostrado que ocurre sin introducir ningún campo en el sistema, y por lo tanto es debido solamente a las propiedades cuánticas de los observables geométricos en los estados físicos del modelo de Kantowski-Sachs.

Inmediatamente, se abre una nueva vía con la posible extensión nuestras investigaciones a la cuantización de campos propagándose en el fondo cuántico estudiado aquí. Por ejemplo, podemos considerar un campo escalar y seguir una filosofía similar a la estrategia desarrollada en el esquema de cuantización híbrida de cosmología cuántica de lazos [207–210], en la que los campos se cuantizan siguiendo una cuantización de Fock estándar que se combinará con la cuantización previa de la geometría. Después se podrían estudiar perturbaciones de campos escalares homogéneos (es decir, sólo dependientes de  $r$ ) en este minisuperespacio. Con el propósito de tratar este minisuperespacio de fondo exactamente, la contribución del «modo cero» del campo escalar (que describe su parte homogénea) podría fijarse a cero. Entonces expandiríamos las perturbaciones genuinas del campo en una base de modos, para la cual podemos considerar, por ejemplo, una generalización del análisis hecho en la Ref. [211] para perturbaciones en un modelo de universo anisótropo de tipo Bianchi I.

Dentro de ese contexto, se podrían analizar las diferencias entre las dos formas de cuantizar el modelo con el campo. La primera de ellas implicaría cuantizar el campo separadamente en el sector de  $c_0$  positiva y  $c_0$  negativa en  $b_0$ , y la segunda analizaría el hecho de cuantizar el campo en toda la recta real para  $c_0$ . Esto nos permitiría buscar efectos de teoría cuántica de campos y entropía de mezcla entre ambas regiones, pero

incorporando a la discusión la naturaleza cuántica de la geometría. De esta manera, se podrían extender al ámbito del espaciotiempo cuántico los estudios previos realizados sobre la localización de los modos cuánticos en una cavidad, en los cuales la tensión entre la entropía de vacío y el tener estados claramente localizados es perceptible [212].

Finalmente, como indicamos brevemente, el estudio de las correlaciones entre regiones de otra forma separadas podría extenderse al contexto del multiverso. Esto se desprende del hecho de que el entrelazamiento entre regiones clásicamente desconectadas abre la puerta a que si nos acogemos la posibilidad de un marco más amplio en el cual nuestro Universo no está aislado, sino múltiplemente conectado a otros, podríamos necesitar considerar la estructura completa del multiverso para hacer una teoría cuántica, ya que probablemente existirían algún tipo de efectos cuánticos de otros universos en el nuestro, producidos por un entrelazamiento entre los mismos. Por ende, este formalismo se podría aplicar a este ámbito de multiverso, proporcionando un nuevo punto de vista de la teoría cuántica en sí misma para analizar las interacciones cuánticas entre universos.



# Capítulo 7

## Conclusiones

En pocas palabras, Mort era de esas personas que son más peligrosas que una bolsa llena de serpientes de cascabel. Estaba decidido a descubrir la lógica fundamental del Universo.

*Terry Pratchett*

El objetivo principal de esta tesis aborda la cuestión del establecimiento de conexiones clásicas y cuánticas con otros universos o con regiones claramente separadas de nuestro propio Universo. La existencia de correlaciones es relevante en cuanto a que plantea el tema de qué sistema físico total se debe considerar para la realización de estudios cosmológicos, a fin de que los resultados sean consistentes. Asimismo, su aparición acarreará nuevas predicciones observacionales y esquemas diferentes de resolución de problemas cosmológicos abiertos. Por otra parte, la interacción con otros universos también está asociada a la búsqueda de fenómenos físicos que nos permitan la falsabilidad de la idea de multiverso.

- Hemos estudiado la posible huella observacional de los agujeros de gusano clásicos, túneles lorentzianos que conectan distintas regiones del espaciotiempo o distintos espaciotiempos. Con este objetivo hemos analizado los efectos de lente gravitatoria de la luz que los atraviesa, proveniente tanto de otra región de nuestro propio Universo como de otro universo. Para ello hemos distinguido diferentes tipos de agujeros de gusano, caracterizados por distintas geometrías de su garganta, que proporcionan predicciones observacionales diferentes que podrían corroborar la existencia, teórica hasta el momento, de estos objetos.
- El patrón observacional de las imágenes asociadas con agujeros de gusano y

agujeros de anillo no determina su observación de forma inequívoca debido a la existencia de efectos similares producidos por objetos astronómicos más comunes. Sin embargo, se ha visto que el hallazgo observacional por el Telescopio Espacial Hubble de un doble anillo de Einstein puede ser debido a un efecto de lente gravitatoria de un agujero de anillo, en lugar de al atribuido alineamiento de tres galaxias en nuestro eje de visión. Para discernir cuál de las dos interpretaciones es más factible es necesario realizar un análisis detallado del espectro de tal observación.

- Hemos encontrado la forma precisa de la huella luminosa producida por efecto de lente gravitatoria en agujeros de botella de Klein. Ésta corresponderá a una doble espiral truncada concéntrica. El patrón deducido resulta ser característico de estos objetos, lo que nos proporciona una predicción para la corroboración de la existencia de agujeros de gusano, en particular de los de botella de Klein.
  - Se han determinado las características esenciales para la conexión con otro universo a través de túneles lorentzianos. El requisito fundamental que hemos pedido reside en que éstos puedan transformarse en máquinas del tiempo, lo que se deriva del hecho de que no existe un tiempo común a ambos universos conectados. Por otra parte, se sugiere que para que no exista una orientabilidad fija en el multiverso, deben existir túneles con un carácter no orientable. Aún más, se ha discutido el caso de un agujero de gusano, el de botella de Klein, que cumple dichos requisitos y nos proporciona un patrón de efecto de lente gravitatoria que haría posible su distinción observacional.
  - Debido al requisito de que pueda transformarse en una máquina del tiempo, hemos inferido que el patrón luminoso de la doble espiral concéntrica, producido mediante el efecto de lente gravitatoria por un agujero de botella de Klein conectado a otro universo, se verá difuminado y borroso en torno a un valor medio. Esto confiere una predicción observacional de las conexiones clásicas a otros universos claramente diferenciada de la existencia de estos agujeros de gusano en el contexto de nuestro Universo.
- Como planteamiento previo para la búsqueda de fenómenos cuánticos en el multiverso, hemos implementado mecanismos de decoherencia en el contexto de nuestro Universo acelerado. Hemos analizado la decoherencia entre las ramas en expansión y contracción del Universo acelerado, en función del factor de escala, como consecuencia de su interacción con un campo escalar. Hemos visto que, a partir de la superposición cuántica de ramas, tras este proceso surge un universo clásico como el nuestro. Con este fin hemos acoplado contenidos materiales de tipo cons-

tante cosmológica, quintaesencia y energía fantasma como fuente del fenómeno de decoherencia. Estos contenidos materiales constituyen los tres posibles fluidos perfectos que describen la energía oscura dentro de la relatividad general.

- Nuestro análisis muestra que el mecanismo de decoherencia resulta efectivo con todos los contenidos materiales para eliminar la interferencia entre las distintas ramas semiclásicas correspondientes a diferentes valores del factor de escala en la misma rama en expansión y contracción, siendo aún más efectivo en el caso de un campo de quintaesencia. Por otro lado, en el caso de energía fantasma, cuando nos acercamos a valores del factor de escala cercanos a la singularidad del Big Rip, el estado del Universo resulta estar dado por una superposición cuántica, en correspondencia con sugerencias de trabajos anteriores. Deducimos que nuestro Universo clásico puede surgir como resultado de un fenómeno de decoherencia por interacción con un contenido material, asociado a cualquiera de las opciones de la cosmología estándar para la energía oscura.
  - Además, la decoherencia también es efectiva para la eliminación de las interferencias cuánticas entre las ramas en expansión y contracción del Universo acelerado, en todos los casos considerados, dando así lugar a la emergencia de un universo clásico como el nuestro en la rama.
- Hemos examinado las posibles interacciones cuánticas entre universos mediante el análisis de fenómenos de decoherencia en un contexto de multiverso. Para ello hemos utilizado un formalismo de tercera cuantización en el que se estudian los posibles efectos que un entorno de multiverso produciría en nuestro propio Universo. Hemos considerado el entorno como constituido primeramente por universos bebé y luego por universos padre. Hemos tomado el estado del multiverso en términos de los estados de Lewis y realizado el estudio en analogía con los desarrollos hechos en óptica cuántica. A través de una ecuación maestra hemos estudiado la escala de decoherencia y el desplazamiento Lamb en frecuencias.
- En primer lugar hemos considerado la interacción de un universo con las fluctuaciones de su espaciotiempo, representadas por un baño de universos bebé. Este estudio se ha realizado examinando un vacío térmico y un vacío aplastado y, por otra parte, también dos tipos de interacción: lineal y cuadrática, que representan la creación de estos universos bebé de manera simple o por pares, respectivamente. Hemos calculado, para cada uno de los casos, el factor de decoherencia y la escala de la misma, que depende del número de

fluctuaciones y de un cutoff en la energía de vacío de las mismas. Cabe resaltar que en el caso de interacción lineal, la decoherencia resulta efectiva para un número grande de fluctuaciones de vacío, siendo el resultado similar para ambos vacíos siempre que entendamos un efecto de aplastamiento grande como la creación efectiva de un alto número de fluctuaciones. En cualquier caso la escala de decoherencia es muy pequeña, presumiblemente del orden de la escala de Planck. Así, el Universo clásico emerge a pequeñas escalas como consecuencia de la interacción con las fluctuaciones de vacío. La interacción cuadrática depende del cuadrado del número de fluctuaciones. Sin embargo este tipo de interacción es subdominante respecto a la anterior en el régimen semiclásico del Universo, por lo que su relevancia reside más en las propiedades de coherencia de los campos.

- A continuación hemos tratado la interacción de un universo padre con otros universos padre, es decir, de un universo diferenciado como el nuestro con un entorno de multiverso. En este caso, el efecto de aplastamiento desaparece asintóticamente (con la estimación de factores de escala grandes). Debido a ello, hemos considerado sólo el estado térmico de vacío, para el que nos hemos quedado en interacción lineal. Hemos calculado el factor de decoherencia, para factores de escala similares de los distintos universos. El mismo cálculo cuando los factores de escala no son similares se ha realizado numéricamente con MATHEMATICA en un caso simple de un universo dominado por radiación. Hemos hallado que en ambos casos depende del número de universos en el multiverso y que el mecanismo de decoherencia resulta efectivo cuando este número es grande, dando lugar a la emergencia de un universo clásico como consecuencia de la interacción con el resto de universos.
- Hemos aplicado también desarrollos análogos a los realizados en óptica cuántica para analizar el desplazamiento Lamb en frecuencias, tanto para el entorno de universos bebé como para el de universos padre. En ambos casos el estudio del desplazamiento Lamb se relaciona con un desplazamiento de la energía de vacío, y por tanto con la reducción de la constante cosmológica, de manera similar al mecanismo de Coleman. En el caso de un entorno de universos bebé (fluctuaciones del propio espaciotiempo), este desplazamiento no es muy grande hasta que no se considera un número muy alto de fluctuaciones, aunque en el caso cuadrático depende de la intensidad de estas fluctuaciones en ambos vacíos. Sin embargo, sí que resulta mucho más efectivo en el caso del entorno de multiverso, siendo del orden de la frecuencia original. Esto puede producir un valor de la energía de vacío muy cercano a cero, proporcionando así un mecanismo de ajuste para resolver el

problema actual de la constante cosmológica en un escenario de multiverso.

- Debido a las interacciones estudiadas, hemos visto que el universo diferenciado sufre una evolución no unitaria, aunque esta unitariedad se mantiene al considerar el multiverso completo. Hemos realizado un análisis de propiedades termodinámicas del sistema, concretamente de la entropía y la entropía lineal, obteniendo un incremento de ambas en el caso de un universo diferenciado como consecuencia de la interacción con el entorno. Al considerar como punto de partida un estado puro, se ve que la interacción lo hace evolucionar a un estado mezcla, perdiéndose así información. Este efecto es mayor en el multiverso de universos padre, ya que su densidad de energía es mayor. Así, de este estudio inferimos la necesidad de considerar el multiverso completo para mantener toda la información del sistema.
- Hemos realizado un análisis del problema de la constante cosmológica enmarcado en el Principio de Curvatura, en un formalismo de tercera cuantización. Para ello, hemos propuesto un modelo de dos universos, tanto con una interacción simple como considerando un potencial cuadrático general, y hemos concluido que se obtiene una reducción de la constante cosmológica de un universo a expensas de un incremento de la del otro. Esto nos provee de otro mecanismo por el cual se reduce el valor de la constante cosmológica, tal y como indican las observaciones astronómicas recientes. De esta manera, se refuerza la idea de que el multiverso puede ser relevante en la cuestión de la resolución del problema de la constante cosmológica.
- Hemos visto la existencia de posibles fenómenos colectivos en el multiverso, considerando el multiverso de universos tipo de Sitter como un conjunto de osciladores armónicos, con masa y frecuencia dependientes del factor de escala, en interacción. Esto ha permitido considerar una interacción de más de dos universos.
  - Para ello hemos utilizado la denominada cuantización de Wigner aplicada al multiverso. Esta cuantización nos ha permitido estudiar nuevos efectos, generalizando la cuantización canónica. Para describir las soluciones elegimos una clase de representaciones escalera asociada al superálgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(1|N)$ . Este procedimiento induce una interacción cuántica entre los universos que no posee análogo clásico.
  - Al analizar el espectro de energías del hamiltoniano para los casos de un multiverso con y sin interacción explícita, aparecen nuevos niveles de energía respecto a una cuantización estándar de cada universo aislado. En el caso sin interacción explícita hemos estimado las probabilidades para el estado

fundamental de energía de cada universo individual, y hemos obtenido así una energía de vacío arbitrariamente cercana a cero. Por otra parte, si asumimos una interacción explícita entre los universos, aparecen nuevos niveles de energía (también en el caso de la interacción no explícita). Hemos encontrado un límite superior para el autovalor mínimo de energía que hemos particularizado al caso de tres universos, viendo que dicho valor de la energía de vacío puede ser bastante cercano a cero. Así, la energía de vacío de un universo depende en este contexto de la estructura del multiverso como un todo, y resulta que puede poseer de manera natural un valor casi nulo.

- La idea principal que se extrae de los diferentes análisis de un multiverso con sus universos en interacción cuántica es que éste produce efectos en nuestro Universo que pueden ser observables. Además, el multiverso muestra nuevas características que pueden ser esenciales para entender problemas cosmológicos tales como el de la reducción del valor de la constante cosmológica. Todo esto nos proporciona la posibilidad de revocar las objeciones existentes acerca del cuestionable poder predictivo de la hipótesis de multiverso.
- Para finalizar, hemos realizado un estudio de las correlaciones cuánticas entre regiones de un espaciotiempo clásicamente separadas, con la finalidad de analizar si en el caso de un solo universo puede existir entrelazamiento cuántico entre regiones fuera del alcance clásico. Para ello hemos elaborado una cuantización del propio espaciotiempo, siendo entonces estas correlaciones debidas únicamente a la geometría en sí misma. Como modelo de estudio hemos partido de un minisuperespacio de tipo Kantowski-Sachs, cuya extensión analítica máxima es la de un espaciotiempo de Schwarzschild-de Sitter. En este espacio, nuestra región espaciotemporal (entre ambos horizontes) y las regiones más allá de los mismos se caracterizan por el rango de valores de una variable dinámica del sistema.
  - Hemos realizado una cuantización canónica del sistema siguiendo una prescripción ampliada del programa de Dirac. De esta manera, hemos determinado un espacio de Hilbert físico mediante la imposición de condiciones de realidad que fijan el producto interno. Asimismo hemos seleccionado un parámetro de evolución respecto al que se definen unos observables completos de Dirac. Éstos nos permiten obtener el valor de una variable dinámica en cada punto de la evolución.
  - Estudiando la evolución de los observables previos, hemos visto que dicha evolución hace inconsistente su restricción a una sola región del espaciotiempo, creando así correlaciones entre las diferentes regiones. Es decir, aunque

escojamos estados con soporte en una sola región, la dinámica del sistema da lugar a que en cualquier otro punto de la evolución se desarrollen contribuciones de las regiones que están más allá de los horizontes. Formalmente hemos determinado el espacio de Hilbert del sistema global, descomponiéndolo en subespacios de datos que tienen soporte en cada una de las regiones del espaciotiempo clásico. Los estados del sistema se construyen entonces a partir del producto tensorial de ambos subespacios, reflejando el entrelazamiento existente entre las diferentes regiones.

- Por otro lado, la existencia de operadores unitarios en el sistema nos lleva a concluir que la unitariedad se conserva sólo al considerar el espaciotiempo completo, pero no al tener en cuenta cada región por separado.
- La aparición de estas correlaciones determina la necesidad de tener en cuenta el espaciotiempo global a la hora de realizar una teoría cuántica, y no sólo la región a nuestro alcance. Esto se deriva del hecho de que aparecen en nuestra región del Universo efectos cuánticos provenientes de regiones más allá del horizonte de sucesos y cosmológico, es decir, más allá de nuestras capacidades clásicas de observación. Estas conclusiones podrían, en clara analogía, extrapolarse al caso del multiverso, donde efectos de entrelazamiento cuántico con otros universos produzcan su necesaria consideración como un todo.



# Publicaciones

El trabajo de investigación realizado en esta tesis ha dado lugar a las siguientes publicaciones:

- P. F. González Díaz and A. Alonso-Serrano, “*Observing other universe through ringholes and Klein-bottle holes*”, Phys. Rev. D **84** (2011) 023008.
- P. F. González Díaz and A. Alonso-Serrano, “*Observing other universe through ringholes and Klein-bottle holes*”, AIP Conf. Proc. **1458** (2011) 311.
- S. Robles-Perez, A. Alonso-Serrano and P. F. González Díaz, “*Decoherence in an accelerated universe*”, Phys. Rev. D **85** (2012) 063511.
- A. Alonso-Serrano, C. Bastos, O. Bertolami and S. Robles-Perez, “*Interacting universes and the cosmological constant*”, Phys. Lett. B **719** (2013) 200.
- A. Alonso-Serrano, L. J. Garay and G. A. Mena Marugan, “*Correlations across horizons in quantum cosmology*”, Phys. Rev. D **90** (2014) 124074.
- Ana Alonso-Serrano, Luis J. Garay and Guillermo A. Mena Marugan “*Quantum correlations across horizons*”, Proceedings of Spanish Relativity Meeting : Almost 100 years after Einstein Revolution (en prensa).



# Bibliografía

- [1] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1973).
- [2] R. M. Wald, *General relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, E.E.U.U., 1984).
- [3] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology* (John Wiley & Sons, Reino Unido, 2003).
- [4] A. Einstein, *Cosmological considerations in the general theory of relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1917**, 142 (1917).
- [5] A. Einstein, *Cosmological considerations in the general theory of relativity*, en *The collected papers of Albert Einstein*, Vol. 6, editado por A. J. Kox, M. J. Klein y R. Schulmann (Princeton University Press, Princeton, E.E.U.U., 1996)
- [6] J. Earman, *Lambda: The constant that refuses to die*, Arch. Hist. Exact Sci. **55**, 189 (2001).
- [7] C. P. Burgess, *The cosmological constant problem: Why it's hard to get dark energy from micro-physics*, en *Post-Planck cosmology: Proceedings of the Les Houches Summer School*, editado por C. Deffayet, P. Peter, B. Wandelt, M. Zaldarriaga y L. F. Cugliandolo (Oxford University Press, Reino Unido, 2013)
- [8] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [9] A. Padilla, *Lectures on the cosmological constant problem*, arXiv: **1502.05296** (2015).
- [10] S. Perlmutter *et al.* (Supernova Cosmology Project), *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [11] A. G. Riess *et al.* (Supernova Search Team), *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).

- [12] P. de Bernardis *et al.* (Boomerang Collaboration), *A flat universe from high resolution maps of the cosmic microwave background radiation*, Nature **404**, 955 (2000).
- [13] V. Sahni y A. A. Starobinsky, *The case for a positive cosmological Lambda term*, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 373 (2000).
- [14] S. M. Carroll, *The cosmological constant*, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001).
- [15] T. Padmanabhan, *Cosmological constant: The weight of the vacuum*, Phys. Rept. **380**, 235 (2003).
- [16] S. Coleman, *Why there is nothing rather than something? A theory of the cosmological constant*, Nucl. Phys. B **310**, 643 (1988).
- [17] P. F. González-Díaz, *Black body distribution for wormholes*, Class. Quantum Grav. **10**, 2505 (1993).
- [18] P. Ade *et al.* (Planck Collaboration), *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, arXiv: **1502.01589** (2015).
- [19] P. J. Steinhardt, *Cosmological challenges for the 21st century*, en *Critical problems in physics: Proceedings of a conference celebrating the 250th anniversary of Princeton University*, editado por V. L. Fitch, D. R. Marlow y M. A. E. Dementi (Princeton University Press, Princeton, E.E.U.U., 1997)
- [20] R. Caldwell, R. Dave y P. J. Steinhardt, *Cosmological imprint of an energy component with general equation of state*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998).
- [21] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov y P. J. Steinhardt, *A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000).
- [22] S. M. Carroll, M. Hoffman y M. Trodden, *Can the dark energy equation-of-state parameter  $w$  be less than  $-1$ ?*, Phys. Rev. D **68**, 023509 (2003).
- [23] R. Caldwell, *A phantom menace?*, Phys. Lett. B **545**, 23 (2002).
- [24] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski y N. N. Weinberg, *Phantom energy: Dark energy with  $w < -1$  causes a cosmic doomsday*, Phys. Rev. Lett. **91**, 071301 (2003).
- [25] A. Einstein y N. Rosen, *The particle problem in the general theory of relativity*, Phys. Rev. **48**, 73 (1935).

- [26] M. D. Kruskal, *Maximal extension of Schwarzschild metric*, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).
- [27] J. A. Wheeler, *Geons*, Phys. Rev. **97**, 511 (1955).
- [28] C. W. Misner y J. A. Wheeler, *Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space*, Ann. Phys. **2**, 525 (1957).
- [29] M. Visser, *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking* (American Institute of Physics Press, Woodbury, E.E.U.U., 1995).
- [30] M. Morris y K. Thorne, *Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).
- [31] M. Morris, K. Thorne y U. Yurtsever, *Wormholes, time machines, and the weak energy condition*, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
- [32] S. W. Hawking, *Chronology protection conjecture*, Phys. Rev. D **46**, 603 (1992).
- [33] L.-X. Li y J. R. Gott, *Self-consistent vacuum for Misner space and the chronology protection conjecture*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2980 (1998).
- [34] J. R. I. Gott y L.-X. Li, *Can the universe create itself?*, Phys. Rev. D **58**, 023501 (1998).
- [35] P. F. González-Díaz, *Quantum time machine*, Phys. Rev. D **58**, 124011 (1998).
- [36] M. Visser, *The quantum physics of chronology protection*, en *The future of theoretical physics and cosmology: Celebrating Stephen Hawking's contributions to physics*, editado por G. W. Gibbons, E. P. S. Shellard y S. J. Rankin (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2009)
- [37] F. S. N. Lobo y M. A. Oliveira, *Wormhole geometries in  $f(R)$  modified theories of gravity*, Phys. Rev. D **80**, 104012 (2009).
- [38] T. Harko, F. S. N. Lobo, M. K. Mak y S. V. Sushkov, *Modified-gravity wormholes without exotic matter*, Phys. Rev. D **87**, 067504 (2013).
- [39] P. F. González-Díaz, *Wormholes and ringholes in a dark-energy universe*, Phys. Rev. D **68**, 084016 (2003).
- [40] F. S. Lobo, *Phantom energy traversable wormholes*, Phys. Rev. D **71**, 084011 (2005).

- [41] S. V. Sushkov, *Wormholes supported by a phantom energy*, Phys. Rev. D **71**, 043520 (2005).
- [42] P. F. González-Díaz, *Achronal cosmic future*, Phys. Rev. Lett. **93**, 071301 (2004).
- [43] P. F. González-Díaz, *Some notes on the Big Trip*, Phys. Lett. B **635**, 1 (2006).
- [44] P. F. González-Díaz, *Observable effects from space-time tunneling*, Phys. Rev. D **56**, 6293 (1997).
- [45] D. F. Torres, G. E. Romero y L. A. Anchordoqui, *Might some gamma-ray bursts be an observable signature of natural wormholes?*, Phys. Rev. D **58**, 123001 (1998).
- [46] M. Safonova, D. F. Torres y G. E. Romero, *Microlensing by natural wormholes: Theory and simulations*, Phys. Rev. D **65**, 023001 (2002).
- [47] M. Safonova, D. F. Torres y G. E. Romero, *Macrolensing signatures of large scale violations of the weak energy condition*, Mod. Phys. Lett. A **16**, 153 (2001).
- [48] J. A. Wheeler, *On the nature of quantum geometrodynamics*, Ann. Phys. **2**, 604 (1957).
- [49] S. Hawking, *Space-time foam*, Nucl. Phys. B **144**, 349 (1978).
- [50] L. J. Garay, *Quantum evolution in space-time foam*, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 4079 (1999).
- [51] G. 't Hooft y M. Veltman, *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Poincaré Phys.Theor. A **20**, 69 (1974).
- [52] M. H. Goroff y A. Sagnotti, *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys. B **266**, 709 (1986).
- [53] S. Hawking, en *General relativity: An Einstein centenary survey*, editado por S. W. Hawking y W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1979)
- [54] E. Mottola, *Functional integration over geometries*, J. Math. Phys. **36**, 2470 (1995).
- [55] S. Hawking, *Zeta function regularization of path integrals in curved space-time*, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).

- [56] J. J. Halliwell y J. Louko, *Steepest descent contours in the path integral approach to quantum cosmology. 1. The de Sitter minisuperspace model*, Phys. Rev. D **39**, 2206 (1989).
- [57] J. Polchinski, *String theory*, Vol. 1 y 2 (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1998).
- [58] T. Thiemann, *Modern canonical quantum general relativity* (Cambridge University Press, 2007).
- [59] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer y R. D. Sorkin, *Space-time as a causal set*, Phys. Rev. Lett. **59**, 521 (1987).
- [60] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz y R. Loll, *Causal dynamical triangulations and the quest for quantum gravity*, en *Foundations of space and time. Reflections on quantum gravity*, editado por J. Murugan, A. Weltman y G. F. R. Ellis (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2010)
- [61] M. Niedermaier y M. Reuter, *The asymptotic safety scenario in quantum gravity*, Living Rev. Rel. **9**, 5 (2006).
- [62] R. L. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, *The dynamics of general relativity*, Gen. Rel. Grav. **40**, 1997 (2008).
- [63] B. S. De Witt, *Quantum theory of gravity. I. The canonical theory*, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [64] C. Isham, *Canonical quantum gravity and the question of time*, en *Canonical gravity: From classical to quantum*, Lect. Notes Phys., editado por J. Ehlers y H. Friedrich (Springer, Berlín, Alemania, 1994)
- [65] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, en *Belfer Graduate School of Science Monographs Series*, 2 (Belfer Graduate School of Science, Nueva York, E.E.U.U., 1964)
- [66] J. B. Hartle y S. W. Hawking, *Wave function of the Universe*, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).
- [67] A. Vilenkin, *Boundary conditions in quantum cosmology*, Phys. Rev. D **33**, 3560 (1986).

- [68] J. Anderson, *Q-number coordinate transformations and the ordering problem in general relativity*, en *Proceedings of the First Eastern Theoretical Physics Conference*, editado por M. E. Rose (Gordon and Breach, Nueva York, E.E.U.U., 1963)
- [69] A. Komar, *Constraints, hermiticity, and correspondence*, *Phys. Rev. D* **19**, 2908 (1979).
- [70] K. V. Kuchař, *Canonical quantum gravity*, arXiv: **9304012** (1993).
- [71] J. J. Halliwell, *Introductory lectures on quantum cosmology*, en *Quantum cosmology and baby universes*, editado por S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran y S. Weinberg (World Scientific, Londres, Reino Unido, 1990)
- [72] D. L. Wiltshire, *An introduction to quantum cosmology*, en *Cosmology: The physics of the Universe". Proceedings of the 8th Physics Summer School*, editado por B. Robson, N. Visvanathan y W. S. Woolcock (World Scientific, Singapur, 1996)
- [73] C. Misner, *Minisuperspace*, en *Magic without magic: John Archibald Wheeler*, editado por J. R. Klauder (Freeman, San Francisco, E.E.U.U., 1972)
- [74] K. V. Kuchař y M. P. Ryan, *Is minisuperspace quantization valid?: Taub in mixmaster*, *Phys. Rev. D* **40**, 3982 (1989).
- [75] L. Grishchuk y L. Rozhansky, *Does the Hartle-Hawking wave function predict the Universe we live in?*, *Phys. Lett. B* **234**, 9 (1990).
- [76] D. N. Page, *Density matrix of the Universe*, *Phys. Rev. D* **34**, 2267 (1986).
- [77] S. W. Hawking, *The density matrix of the Universe*, *Phys. Scripta* **T15**, 151 (1987).
- [78] S. Hawking, *The unpredictability of quantum gravity*, *Commun. Math. Phys.* **87**, 395 (1982).
- [79] C. M. Bender y S. A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientist and engineers* (McGraw-Hill Book Company, Nueva York, E.E.U.U., 1978).
- [80] A. Galindo y P. Pascual, *Mecánica cuántica* (Alhambra, Madrid, España, 1978).
- [81] A. Ashtekar y R. S. Tate, *An algebraic extension of Dirac quantization: Examples*, *J. Math. Phys.* **35**, 6434 (1994).
- [82] A. D. Rendall, *Unique determination of an inner product by adjointness relations in the algebra of quantum observables*, *Class. Quantum Grav.* **10**, 2261 (1993).

- [83] A. D. Rendall, *Adjointness relations as a criterion for choosing an inner product*, Lect. Notes Phys. **434**, 319 (1994).
- [84] C. Rovelli, *What is observable in classical and quantum gravity?*, Class. Quantum Grav. **8**, 297 (1991).
- [85] C. Rovelli, *Partial observables*, Phys. Rev. D **65**, 124013 (2002).
- [86] N. Pinto-Neto y J. Fabris, *Quantum cosmology from the de Broglie-Bohm perspective*, Class. Quantum Grav. **30**, 143001 (2013).
- [87] R. B. Griffiths, *Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics*, J. Statist. Phys. **36**, 219 (1984).
- [88] J. B. Hartle, *Spacetime quantum mechanics and the quantum mechanics of spacetime*, en *Gravitation and quantization: Proceedings of the 1992 Les Houches Summer School*, editado por B. Julia y J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, Holanda, 1995)
- [89] D. N. Page y W. K. Wootters, *Evolution without evolution: Dynamics described by stationary observables*, Phys. Rev. D **27**, 2885 (1983).
- [90] R. Gambini, R. A. Porto, J. Pullin y S. Torterolo, *Conditional probabilities with Dirac observables and the problem of time in quantum gravity*, Phys. Rev. D **79**, 041501 (2009).
- [91] C. Kiefer, *Quantum gravity* (Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 2007).
- [92] E. Joos *et al.*, *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory* (Springer-Verlag, Berlín, Alemania, 2003).
- [93] M. Schlosshauer, *Decoherence and the quantum-to-classical transition* (Springer, Berlin, Germany, 2007).
- [94] A. Strominger, *Baby universes*, en *Quantum cosmology and baby universes*, editado por S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran y S. Weinberg (World Scientific, Londres, Reino Unido, 1990)
- [95] M. McGuigan, *Third quantization and the Wheeler-DeWitt equation*, Phys. Rev. D **38**, 3031 (1988).
- [96] A. Rioja y J. Ordoñez, *Teorías del universo* (Síntesis, Madrid, España, 2006).

- [97] G. Bruno, *De la causa, principio y uno, 1584* (Losada, Buenos Aires, Argentina, 2011).
- [98] I. Kant, *Historia natural y teoría general del cielo, 1755* (Lautaro, Buenos Aires, Argentina, 1946).
- [99] A. Von Humboldt, *Cosmos: ensayo de una descripción física del mundo, 1845-1862* (Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Los libros de la Catarata, Madrid, España, 2011).
- [100] B. Carr *et al.*, *Universe or multiverse?* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2007).
- [101] A. Vilenkin, *The principle of mediocrity*, en *Astronomy and geophysics. National meeting of the Royal Astronomical Society* (Blackwell Publishing Ltd, Oxford, Reino Unido, 2011)
- [102] R. Penrose, *Before the Big Bang: An outrageous new perspective and its implications for particle physics*, Conf. Proc. **C060626**, 2759 (2006).
- [103] L. Susskind, *The anthropic landscape of string theory*, arXiv: **0302219** (2003).
- [104] A. D. Linde, *Eternal chaotic inflation*, Mod. Phys. Lett. A **1**, 81 (1986).
- [105] A. D. Linde, *Eternally existing selfreproducing chaotic inflationary Universe*, Phys. Lett. B **175**, 395 (1986).
- [106] M. Tegmark, *Cosmology and the multiverse*, en *Universe or multiverse?*, editado por B. Carr (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2007)
- [107] H. Everett, *Relative state formulation of quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957).
- [108] A. Linde y V. Vanchurin, *How many universes are in the multiverse?*, Phys. Rev. D **81**, 083525 (2010).
- [109] R. Holman, L. Mersini-Houghton y T. Takahashi, *Cosmological avatars of the landscape. II. CMB and LSS signatures*, Phys. Rev. D **77**, 063511 (2008).
- [110] M. J. Rees, *Cosmology and the multiverse*, en *Universe or multiverse?*, editado por B. Carr (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2007)
- [111] R. Holman, L. Mersini-Houghton y T. Takahashi, *Cosmological avatars of the landscape I: Bracketing the SUSY breaking scale*, Phys. Rev. D **77**, 063510 (2008).

- [112] A. Aguirre, M. C. Johnson y A. Shomer, *Towards observable signatures of other bubble universes*, Phys. Rev. D **76**, 063509 (2007).
- [113] S. Robles-Pérez y P. F. González-Díaz, *Quantum state of the multiverse*, Phys. Rev. D **81**, 083529 (2010).
- [114] J. G. Cramer *et al.*, *Natural wormholes as gravitational lenses*, Phys. Rev. D **51**, 3117 (1995).
- [115] E. Eiroa, G. E. Romero y D. F. Torres, *Chromaticity effects in microlensing by wormholes*, Mod. Phys. Lett. A **16**, 973 (2001).
- [116] A. Shatskiy, *Passage of photons through wormholes and the influence of rotation on the amount of phantom matter around them*, Astron. Rep. **51**, 81 (2007).
- [117] S. Robles-Pérez y P. F. González-Díaz, *Quantum entanglement in the multiverse*, J. Exp. Theor. Phys. **118**, 34 (2014).
- [118] P. F. González-Díaz, *Ringholes and closed timelike curves*, Phys. Rev. D **54**, 6122 (1996).
- [119] P. F. González-Díaz y L. J. Garay, *Nonorientable space-time tunneling*, Phys. Rev. D **59**, 064026 (1999).
- [120] J. J. Halliwell, *Decoherence in quantum cosmology*, Phys. Rev. D **39**, 2912 (1989).
- [121] C. Kiefer, *Decoherence in quantum electrodynamics and quantum gravity*, Phys. Rev. D **46**, 1658 (1992).
- [122] O. Bertolami, *A Curvature Principle for the interaction between universes*, Gen. Rel. Grav. **40**, 1891 (2008).
- [123] E. P. Wigner, *Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?*, Phys. Rev. **77**, 711 (1950).
- [124] F. S. Lobo, *Exotic solutions in general relativity: Traversable wormholes and ‘warp drive’ spacetimes*, en *Classical and quantum gravity research progress*, editado por M. N. Christiansen y T. K. Rasmussen (Nova Science Publishers, Nueva York, E.E.U.U., 2007)
- [125] P. F. González-Díaz, *Is the 2008 NASA/ESA double Einstein ring actually a ringhole signature?*, arXiv: **1001.3778** (2010).
- [126] A. Einstein, *Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field*, Science **84**, 506 (1936).

- [127] D. F. Torres, G. E. Romero y L. A. Anchordoqui, *Wormholes, gamma-ray bursts and the amount of negative mass in the universe*, Mod. Phys. Lett. A **13**, 1575 (1998).
- [128] A. Shatskiy, *Image of another universe being observed through a wormhole throat*, Phys. Usp. **52**, 811 (2009).
- [129] R. Gavazzi *et al.*, *The Sloan Lens ACS Survey. VI: Discovery and analysis of a double Einstein ring*, Astrophys. J. **677**, 1046 (2008).
- [130] *Handbook of mathematical functions*, editado por M. Abramowitz y I. A. Stegun (Dover publications, Nueva York, E.E.U.U., 1972).
- [131] D. J. Mortlock y R. L. Webster, *The statistics of wide-separation lensed quasars*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **319**, 872 (2000).
- [132] J. L. Tonry *et al.* (Supernova Search Team), *Cosmological results from high- $z$  supernovae*, Astrophys. J. **594**, 1 (2003).
- [133] D. Spergel *et al.* (WMAP Collaboration), *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
- [134] C. Bennett *et al.* (WMAP Collaboration), *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 1 (2003).
- [135] T. Padmanabhan, *Decoherence in the density matrix describing quantum three-geometries and the emergence of classical spacetime*, Phys. Rev. D **39**, 2924 (1989).
- [136] H. D. Zeh, *Emergence of classical time from a universal wave function*, Phys. Lett. A **116**, 9 (1986).
- [137] S. Coleman, *Black holes as red herrings: Topological fluctuations and the loss of quantum coherence*, Nucl. Phys. B **307**, 867 (1988).
- [138] P. F. González-Díaz, *Regaining quantum incoherence for matter fields*, Phys. Rev. D **45**, 499 (1992).
- [139] M. A. Castagnino *et al.*, *Third quantization, decoherence and the interpretation of quantum gravity in minisuperspace*, Class. Quantum Grav. **10**, 2495 (1993).

- [140] A. O. Barvinsky *et al.*, *Decoherence in quantum cosmology at the onset of inflation*, Nucl. Phys. B **551**, 374 (1999).
- [141] J. J. Halliwell, *Decoherence histories analysis of minisuperspace quantum cosmology*, J. Phys. Conf. Ser. **306**, 012023 (2011).
- [142] J. J. Halliwell y S. W. Hawking, *Origin of structure in the Universe*, Phys. Rev. D **31**, 1777 (1985).
- [143] *Physical origins of time asymmetry*, editado por J. J. Halliwell, J. Pérez-Mercader y W. H. Zurek (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1996).
- [144] J. J. Halliwell, *Derivation of the Wheeler-DeWitt equation from a path integral for minisuperspace models*, Phys. Rev. D **38**, 2468 (1988).
- [145] P. F. González-Díaz y S. Robles-Pérez, *Quantum theory of an accelerating universe*, Int. J. Mod. Phys. D **17**, 1213 (2008).
- [146] M. P. Dabrowski *et al.*, *Quantum phantom cosmology*, Phys. Rev. D **74**, 044022 (2006).
- [147] S. Nojiri y S. D. Odintsov, *Final state and thermodynamics of a dark energy universe*, Phys. Rev. D **70**, 103522 (2004).
- [148] S. Sushkov, *Wormholes supported by a phantom energy*, Phys. Rev. D **71**, 043520 (2005).
- [149] P. F. González-Díaz y S. Robles-Pérez, *The entangled accelerating universe*, Phys. Lett. B **679**, 298 (2009).
- [150] V. Rubakov, *On the third quantization and the cosmological constant*, Phys.Lett. **B214**, 503 (1988).
- [151] H. R. Lewis y W. B. Riesenfeld, *An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field*, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [152] D. F. Walls, *Squeezed states of light*, Nature **306**, 141 (1986).
- [153] L. P. Grishchuk y Y. V. Sidorov, *Squeezed quantum states of relic gravitons and primordial density fluctuations*, Phys. Rev. D **42**, 3413 (1990).
- [154] D. C. Khandekar y S. V. Lawande, *Feynman path integrals: Some exact results and applications*, Phys. Rep. **137**, 115 (1986).

- [155] V. F. Mukhanov y S. Winitzki, *Quantum effects in gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2007).
- [156] D. G. Vergel y J. S. Villaseñor, *The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: Applications to quantum field theory*, Ann. Phys. **324**, 1360 (2009).
- [157] E. Farhi y A. H. Guth, *An obstacle to creating a universe in the laboratory*, Phys. Lett. B **183**, 149 (1987).
- [158] S. B. Giddings y A. Strominger, *Loss of incoherence and determination of coupling constants in quantum gravity*, Nucl. Phys. B **207**, 854 (1988).
- [159] P. F. González-Díaz, *Nonclassical states in quantum gravity*, Phys. Lett. B **293**, 294 (1992).
- [160] L. J. Garay, *Thermal properties of space-time foam*, Phys. Rev. D **58**, 124015 (1998).
- [161] C. Kiefer y D. Polarski, *Emergence of classicality for primordial fluctuations: Concepts and analogies*, Ann. Phys. **7**, 137 (1998).
- [162] I. S. Gradshteyn y R. I. M., *Table of integrals, series, and products*, 5<sup>a</sup> ed. (Academic Press, Londres, Reino Unido, 1994).
- [163] A. D. Linde, *The Universe multiplication and the cosmological constant problem*, Phys. Lett. B **200**, 272 (1988).
- [164] S. Robles-Pérez, A. Alonso-Serrano y P. González-Díaz, *Decoherence in an accelerated universe*, Phys. Rev. D **85**, 063511 (2012).
- [165] D. Macedo y I. Guedes, *Time-dependent coupled harmonic oscillators*, J. Math. Phys. **53**, 052101 (2012).
- [166] S. Menouar, M. Maamache y J. Ryeol Choi, *The time-dependent coupled oscillator model for the motion of a charged particle in the presence of a time-varying magnetic field*, Phys. Scr. **82**, 065004 (2010).
- [167] S. Lievens, N. Stoilova y J. Van der Jeugt, *Harmonic oscillators coupled by springs: Discrete solutions as a Wigner quantum system*, J. Math. Phys. **47**, 113504 (2006).
- [168] S. Lievens, N. Stoilova y J. Van der Jeugt, *Harmonic oscillator chains as Wigner Quantum Systems: Periodic and fixed wall boundary conditions in  $gl(1|n)$  solutions*, J. Math. Phys. **49**, 073502 (2008).

- [169] S. Lievens, N. Stoilova y J. Van der Jeugt, *A linear chain of interacting harmonic oscillators: Solutions as a Wigner quantum system*, J. Phys. Conf. Ser. **128**, 012028 (2008).
- [170] S. Lievens, N. Stoilova y J. Van der Jeugt, *The Paraboson Fock space and unitary irreducible representations of the Lie superalgebra  $osp(1/2n)$* , Commun. Math. Phys. **282**, 575 (2008).
- [171] M. Plenio, J. Hartley y J. Eisert, *Dynamics and manipulation of entanglement in coupled harmonic systems with many degrees of freedom*, New J. Phys. **6**, 36 (2004).
- [172] V. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. Math. **26**, 8 (1977).
- [173] S. Kumar y C. Mehta, *Time evolution operator for  $N$  interacting quantum harmonic oscillators*, J. Math. Phys. **21**, 2628 (1980).
- [174] J. Acebrón y L. Bonilla, *Asymptotic description of transients and synchronized states of globally coupled oscillators*, Physica D **114**, 296 (1998).
- [175] A. Pikovsky y S. Ruffo, *Finite-size effects in a population of interacting oscillators*, Phys. Rev. E **59**, 1633 (1999).
- [176] E. Montbrió, J. Kurths y B. Blasius, *Synchronization of two interacting populations of oscillators*, Phys. Rev. E **70**, 056125 (2004).
- [177] D. H. Zanette, *Disturbing synchronization: Propagation of perturbations in networks of coupled oscillators*, Eur. Phys. J. B **43**, 97.
- [178] Y. Kim y M. E. Noz, *Coupled oscillators, entangled oscillators, and Lorentz-covariant harmonic oscillators*, J. Opt. B Quant. Semiclass. Opt. **7**, S458 (2007).
- [179] G. López, P. López y X. López, *Statistical physics on the space  $(x, v)$  for dissipative systems and study of an ensemble of harmonic oscillators in a weak linear dissipative medium*, Int. J. Theor. Phys. **46**, 1100 (2007).
- [180] A. Chimonidou y E. Sudarshan, *Relaxation phenomena in a system of two harmonic oscillators*, Phys. Rev. A **77**, 032121 (2008).
- [181] J. Almendra, I. Leyva, I. Sendiña-Nadal y S. Boccaletti, *Interacting oscillators in complex networks: Synchronization and the emergence of scale-free topologies*, Int. J. Bifurcation Chaos **20**, 753 (2010).

- [182] K. Audenaert, J. Eisert, M. B. Plenio y R. F. Werner, *Entanglement properties of the harmonic chain*, Phys. Rev. A **66**, 042327 (2002).
- [183] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, E.E.U.U., 1970).
- [184] T. Jacobson, *Black-hole evaporation and ultrashort distances*, Phys. Rev. D **44**, 1731 (1991).
- [185] T. Jacobson, *Black hole radiation in the presence of a short distance cutoff*, Phys. Rev. D **48**, 728 (1993).
- [186] W. G. Unruh, *Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation*, Phys. Rev. D **51**, 2827 (1995).
- [187] W. G. Unruh, *Notes on black-hole evaporation*, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [188] L. C. Barbado, C. Barceló, L. J. Garay y G. Jannes, *The trans-Planckian problem as a guiding principle*, JHEP **1111**, 112 (2011).
- [189] K. V. Kuchař, *Geometrodynamics of Schwarzschild black holes*, Phys. Rev. D **50**, 3961 (1994).
- [190] T. Christodoulakis *et al.*, *Conditional symmetries and the canonical quantization of constrained minisuperspace actions: The Schwarzschild case*, J. Geom. Phys. **71**, 127 (2013).
- [191] R. Gambini y J. Pullin, *Loop quantization of the Schwarzschild black hole*, Phys. Rev. Lett. **110**, 211301 (2013).
- [192] L. M. Campbell y L. J. Garay, *Quantum wormholes in Kantowski-Sachs space-time*, Phys. Lett. B **254**, 49 (1991).
- [193] L. J. Garay, *Quantum state of wormholes and path integral*, Phys. Rev. D **44**, 1059 (1991).
- [194] G. A. Mena Marugan, *Reality conditions in nonperturbative quantum cosmology*, Class. Quantum Grav. **11**, 589 (1994).
- [195] G. A. Mena Marugan, *Is the exponential of the Chern-Simons action a normalizable physical state?*, Class. Quant. Grav. **12**, 435 (1995).
- [196] K. Lake, *A Maximally extended, explicit and regular covering of the Schwarzschild-de Sitter vacua in arbitrary dimension. I. General formulae*, Class. Quantum Grav. **23**, 5883 (2006).

- [197] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, *Quantum nature of the Big Bang: An analytical and numerical investigation*, Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006).
- [198] B. Dittrich, *Partial and complete observables for Hamiltonian constrained systems*, Gen. Rel. Grav. **39**, 1891 (2007).
- [199] M. Martín-Benito, G. A. Mena Marugán y T. Pawłowski, *Physical evolution in loop quantum cosmology: The example of the vacuum Bianchi I model*, Phys. Rev. D **80**, 084038 (2009).
- [200] S. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [201] R. M. Wald, *On particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **45**, 9 (1975).
- [202] W. Israel, *Thermo-field dynamics of black holes*, Phys. Lett. A **57**, 107 (1976).
- [203] G. W. Gibbons y S. W. Hawking, *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, Phys. Rev. D **15**, 2738 (1977).
- [204] M. B. Einhorn y M. Mahato, *Beyond the horizon*, Phys. Rev. D **73**, 104035 (2006).
- [205] E. Martín-Martínez y J. León, *Quantum correlations through event horizons: Fermionic versus bosonic entanglement*, Phys. Rev. A **81**, 032320 (2010).
- [206] N. D. Birrell y P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1982).
- [207] M. Martín-Benito, L. J. Garay y G. A. Mena Marugán, *Hybrid quantum Gowdy cosmology: Combining loop and Fock quantizations*, Phys. Rev. D **78**, 083516 (2008).
- [208] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary universe*, Phys. Rev. D **86**, 024003 (2012).
- [209] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Hybrid quantization of an inflationary model: The flat case*, Phys. Rev. D **88**, 044013 (2013).
- [210] L. Castelló Gomar, M. Fernández-Méndez, G. A. Mena Marugán y J. Olmedo, *Cosmological perturbations in hybrid loop quantum cosmology: Mukhanov-Sasaki variables*, Phys. Rev. D **90**, 064015 (2014).

- [211] T. S. Pereira, S. Carneiro y G. A. Mena Marugán, *Inflationary perturbations in anisotropic, shear-free universes*, JCAP **1205**, 040 (2012).
- [212] M. R. Vázquez, M. del Rey, H. Westman y J. León, *Local quanta, unitary inequivalence, and vacuum entanglement*, Ann. Phys. **351**, 112 (2014).

*In memoriam*



Pedro Féliz González Díaz, 1947–2012