

ICAE

Instituto Complutense de Análisis Económico

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

FACULTAD DE ECONOMICAS

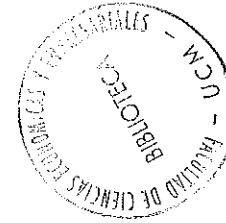
Campus de Somosaguas

28223 MADRID

Teléfono 91 394 26 11 - FAX 91 294 26 13

Internet: <http://www.ucm.es/info/icae/>

E-mail: icaesec@ccee.ucm.es



W
49
(0002)

Documento de trabajo

**Aplicaciones del Filtro de Kalman a las
Calibraciones en Modelos de Ciclo Real**

Jesús Ruíz

No. 0002

Mayo 2000

ICAE

Instituto Complutense de Análisis Económico

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

R. 67. 219

APLICACIONES DEL FILTRO DE KALMAN A LAS
CALIBRACIONES EN MODELOS DE CICLO REAL

Jesús Ruiz (*)

Instituto Complutense de Análisis Económico (ICAE)

Universidad Complutense

Campus de Somosaguas

28223 Madrid

ABSTRACT

This paper pursues two objectives. One is to generalize the Kalman Filter to dynamic models with rational expectations which include current expectations of future endogenous variables. A second objective is to illustrate two applications of this estimation procedure to stochastic rational expectations growth models. The first application is a proposal to calibrate some parameters in these models whose estimation is difficult because of the lack of appropriate data (for example, the coefficient of relative risk aversion). In the second application, the previous calibration procedure is used to offer an objective measure which allows for discriminating among alternative models that have, in some aspects, a similar stochastic behaviour.

RESUMEN

Este trabajo tiene dos objetivos. El primero de ellos es aportar una generalización del filtro de Kalman a la estimación de modelos dinámicos con expectativas racionales formadas en el presente de variables endógenas futuras. El segundo es mostrar dos aplicaciones de este procedimiento en modelos estocásticos de crecimiento bajo el supuesto de expectativas racionales. En particular, se presenta, por un lado, una metodología para calibrar parámetros de estos modelos que resultan difíciles de estimar debido a la ausencia de datos en la economía real (por ejemplo, el coeficiente de aversión relativa al riesgo). El procedimiento que se presenta tiene la ventaja de la sencillez de su funcionamiento. Por otro lado, se utiliza el procedimiento de calibración para dar una medida objetiva de discriminación entre modelos, que permita resolver el problema de identificación de modelos observacionalmente equivalentes.

(*) Agradezco al profesor Alfonso Novales sus valiosos comentarios y sugerencias y al profesor Emilio Cerdá su ayuda en la comprensión de la metodología de estimación del filtro de Kalman. Cualquier error es de mi exclusiva responsabilidad.

8-1983634X
Nº E-5318404989
i27953245

1. Introducción

Este trabajo tiene dos objetivos. El primero de ellos es aportar una generalización del filtro de Kalman a modelos dinámicos con expectativas racionales formadas en el presente de variables endógenas futuras.

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que estima el estado no observable de un sistema dinámico (con expectativas racionales en este caso) dado un conjunto de observaciones que proporcionan información acerca del valor que toman las variables endógenas en cada instante. En Bertsekas (1976) se desarrolla el algoritmo que estima por mínimos cuadrados lineales el vector de variables endógenas no observables (que evolucionan según un sistema dinámico de primer orden) dado un vector de variables observables que son combinaciones lineales de las primeras, más un vector de error de observación. En Cerdá (1992) se generaliza el filtro de Kalman a modelos con expectativas racionales formadas en el pasado de variables presentes y futuras. Aunque existen bastantes trabajos ocupados en resolver modelos con expectativas futuras formadas en el pasado (Aoki y Canzoneri (1979), Taylor (1977) y Burmeister y Wall (1982), entre otros), en muchos modelos económicos, las variables endógenas dependen de su pasado y de las previsiones que se hacen en el presente sobre el futuro de las mismas (véanse los modelos estudiados por Blanchard y Kahn (1980), Gourieroux, Laffont y Monfort (1982), Blanchard (1982) y Sims (1999), entre otros). Así, tiene interés desarrollar una generalización del filtro de Kalman a modelos como los descritos en estos últimos trabajos. Además, los modelos de crecimiento en contextos con incertidumbre y bajo el supuesto de expectativas racionales utilizados en la literatura de ciclo real, pueden ser aproximados (dada su no linealidad) por modelos dinámicos con expectativas racionales del mismo tipo que los modelos que estamos interesados en resolver, por lo que una amplia gama de modelos teóricos pueden ser objeto de estudio desde un punto de vista metodológico como el que aquí se presenta, y para usos muy concretos como los que a lo largo del trabajo se especifican.

El segundo de los objetivos es mostrar dos aplicaciones de este procedimiento de estimación para el análisis de modelos de crecimiento en contextos con incertidumbre y bajo el supuesto de expectativas racionales. En particular, se presenta, por un lado, una metodología para estimar parámetros de estos modelos que resultan difíciles de calibrar debido a su naturaleza, es decir, parámetros cuya estimación es compleja debido a la ausencia de datos en la economía real y que son, sin embargo, determinantes básicos de las implicaciones del modelo teórico (por ejemplo, el coeficiente de aversión relativa al riesgo, parámetros asociados a funciones de producción de nuevo capital humano, etc).

Esencialmente, el procedimiento que proponemos es el siguiente: bajo la hipótesis de que el modelo teórico (un modelo particular de crecimiento con incertidumbre y bajo el supuesto de expectativas racionales) es el generador de las series temporales históricas de una economía real particular, se trata de calcular para qué valor de un parámetro o conjunto de parámetros del modelo las sendas estocásticas generadas por este modelo teórico se ajustan a las observadas.

La generación de estas series temporales por el modelo teórico se realiza utilizando el filtro de Kalman. Este procedimiento proporciona una estimación de sendas temporales no observadas (las del modelo teórico) que son función, por un lado, de las observaciones de las variables de la economía real y, por otro lado, de los parámetros del modelo teórico, por lo que es posible implementar un procedimiento de búsqueda de estos parámetros que mejor ajusten las variables reales observadas con las estimadas.

Además, en esta metodología se añan la etapa de calibración y la de verificación, ya que el procedimiento de búsqueda de parámetros genera objetivamente una medida del grado en que el modelo ajusta el proceso estocástico de los datos de series históricas observadas. Incluso, podemos inferir qué parte del modelo es responsable de un peor ajuste entre los datos observados y estimados, dado que disponemos de una función de pérdida para medirlo y en la que utilizamos toda la información disponible. Esto contrasta con una práctica habitual en la literatura de ciclos reales que enfoca las predicciones del modelo en medias a largo plazo excluyendo otras características de los datos, cuando seleccionan parámetros para calibrar. Además, el uso de las volatilidades y correlaciones entre variables se dirige a la contrastación de modelos pero no como una fuente de información sobre los valores paramétricos. Esto lleva consigo el poco énfasis que suele hacerse sobre la calidad de la calibración resultante. Por eso, el procedimiento que se presenta formaliza la calibración y la verificación utilizando funciones de pérdida, por lo que la elección de unos modelos frente a otros puede ser fácilmente justificada.

Por supuesto existen otros trabajos que desarrollan metodologías alternativas a ésta y que tienen estas propiedades deseables de verificación estadística de los parámetros calibrados [véanse Watson (1993), Ingram y Lee (1991), Gregory y Smith (1990) y Christiano y Vigfusson (1999), entre otros]. Por otro lado, y en la línea del procedimiento que se muestra en este trabajo, en McGrattan (1996) se utiliza también el filtro de Kalman y una búsqueda óptima de parámetros por máxima verosimilitud. La diferencia fundamental está en que la utilización del filtro de Kalman para estimar series temporales generadas por el modelo teórico a partir de las series observadas se realiza aproximando linealmente el modelo teórico. En nuestro trabajo, el modelo se aproxima log-linealmente y podemos estimar variables con expectativas (de enorme interés en la literatura de ciclos reales), ya que dada esta aproximación no es posible aplicar el principio de equivalencia cierta. De

esta forma, es posible ajustar datos teóricos en logaritmos con datos reales en logaritmos filtrados por el método de Hodrick y Prescott (habitualmente utilizado en esta literatura), eliminado cualquier problema numérico que pueda derivarse de la heterocedasticidad de las series temporales en niveles.

Por tanto, se presenta un procedimiento (con una mayor no linealidad en sus aproximaciones) que ajusta el conjunto total de la dinámica del modelo a la dinámica de los datos, de modo que la verificación de los parámetros calibrados resulta menos débil que en las prácticas más habituales. Además, el procedimiento que se presenta tiene la ventaja de la sencillez de su implementación.

En lo que se refiere a la segunda aplicación de esta metodología, se utiliza el procedimiento de calibración para dar una medida objetiva de discriminación de modelos. Es bien conocido que el uso limitado de la información disponible en los experimentos computacionales tiene el peligro de hacer que una amplia gama de modelos económicos con muy diferentes implicaciones sobre bienestar sean compatibles con la evidencia empírica, es decir, son modelos observacionalmente equivalentes. Esta ausencia de identificación entre modelos convierte en poco creíbles los resultados obtenidos de estos modelos en el ámbito de la predicción de efectos de política económica, como uno de los usos más frecuentes de los modelos.

El trabajo se organiza como sigue: en la sección 2 se generaliza el filtro de Kalman al caso en que el modelo se especifica con expectativas formadas en el presente de variables futuras. En la sección 3 se presentan dos aplicaciones de esta generalización: a la calibración de parámetros que ajustan las variables teóricas de los modelos de ciclo real con las variables observadas y a la discriminación de modelos. Por último, en la sección 4 se concluye.

2. Una generalización del filtro de Kalman a modelos con expectativas formadas en el presente de variables futuras.

En esta sección se muestra la generalización del filtro de Kalman y se presenta el algoritmo de estimación de un vector y_t de variables en cuya determinación influyen las expectativas que de ellas se formulan en $t-1$ y de las que se sólo se observa una señal con ruido.

2.1. Descripción del problema y resultados teóricos:

Siguiendo una notación similar a Cerdá (1992), suponemos que y_t es un vector de variables endógenas no observable cuya evolución dinámica viene dada por el siguiente sistema:

$$y_t = G_t y_{t-1} + F_t y_{t-1|t} + d_t + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, \dots, T. \quad (1)$$

El sistema de observación es:

$$z_t = M_t y_t + w_t, \quad t=0, 1, \dots, T, \quad (2)$$

donde:

y_t es un vector $n \times 1$ de variables endógenas no observables;

d_t es un vector $n \times 1$ de variables exógenas aleatorias, que responden al proceso estocástico:

$$d_t = \sum_{i=1}^p R_i d_{t-i} + \xi_t; \quad (3)$$

donde ξ_t es ruido blanco;

ε_t es el vector $n \times 1$ de ruido del sistema;

z_t es un vector $p \times 1$ de variables observables;

$y_{t-1|t}$ es la expectativa de y_{t-1} condicionada al conjunto de información del periodo t . Este conjunto es: $I_t = \{z_0, z_1, \dots, z_{t-1}, d_0, d_1, \dots, d_{t-1}\}$;

w_t es el vector $p \times 1$ de error de observación;

$G_t, F_t, R_i, i=1, \dots, p$ son matrices deterministas $n \times n$ y M_t es una matriz $p \times n$. Todas ellas son conocidas para $t=1, 2, \dots, T$ e $i=1, \dots, p$;

$y_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T, w_0, \dots, w_T, \xi_1, \dots, \xi_T$ son vectores aleatorios gaussianos, mutuamente incorrelacionados, cuyos primeros y segundos momentos son:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_t &= 0; \quad E\varepsilon_t \varepsilon_t' = \Lambda_t, \quad t=1, \dots, T; \\ Ew_t &= 0; \quad Ew_t w_t' = W_t, \quad t=0, 1, \dots, T; \\ Ey_0 &= m_0; \quad E[(y_0 - m_0)(y_0 - m_0)'] = S_0; \\ E\xi_t &= 0; \quad E\xi_t \xi_t' = L_t, \quad t=1, \dots, T; \end{aligned} \quad (4)$$

todos conocidos para cada t .

La solución al problema de estimación mínimo cuadrática del vector y_t con I_t como conjunto de información, se basa en una transformación del sistema (1) en una forma equivalente de modo que puedan aplicarse los resultados que para el filtro de Kalman se obtienen siguiendo la metodología dada por Bertsekas (1976) y generalizada por Cerdá (1992).

Proposición 1: Supongamos que se verifican las condiciones del problema descrito anteriormente y que, dado que z_t es un vector de variables observables, puede estimarse el proceso estocástico que sigue dicha variable. Sea ese proceso: $z_t = \nu_t + \Phi_1 \nu_{t-1} + \dots + \Phi(B) \nu_t$ con B el operador retardo y ν_t vector de ruido blanco. Entonces el sistema (1) puede expresarse como sigue:

$$y_t = A_t y_{t-1} + B_t y_{t|t-1}^* + B_{1t} y_{t+1|t-1}^* + b_t + u_t, \quad t=1, 2, \dots, T \quad (5)$$

donde

$$A_t = (I - F_t P_t)^{-1} G_t,$$

$$B_t = (I - F_t P_t)^{-1} F_t P_t,$$

$$B_{1t} = (I - F_t P_t)^{-1} F_{1t},$$

$$b_t = (I - F_t P_t)^{-1} d_t,$$

$$P_t = (M_t' M_t)^{-1} M_t' \Phi_t M_{t-1} (M_{t-1}' M_{t-1})^{-1},$$

$u_t = (I - F_t P_t)^{-1} \varepsilon_t$, con matriz de covarianzas $U_t = E[u_t u_t'] = (I - F_t P_t)^{-1} A_t [(I - F_t P_t)^{-1}]'$, siempre que M_t sea de rango completo, $p \geq n$ y $(I - F_t P_t)$ sea no singular, para cada $t=1, \dots, T$.

Demostración:

Dado que y_t es un proceso estocástico vectorial, podemos expresarlo a través de su descomposición de Wald, dado el conjunto de información I_t , como¹:

$$y_t = a_t + \Psi_{1,t} a_{t-1} + \Psi_{2,t} a_{t-2} + \dots = \Psi_t(B) a_t,$$

con B operador retardo, a_t vector de ruido blanco.

Por otro lado, a_t es el error de previsión un periodo hacia adelante de y_t :

$$y_t - y_{t|t-1}^* = a_t. \quad (6)$$

Además, bajo racionalidad, podemos expresar $y_{t+1|t}^*$ en función del error de previsión un periodo hacia adelante en t y de la expectativa $y_{t+1|t-1}^*$:

$$y_{t+1|t}^* = \Psi_{1,t} a_t + y_{t+1|t-1}^* = \Psi_{1,t} (y_t - y_{t|t-1}^*) + y_{t+1|t-1}^*. \quad (7)$$

Dados los supuestos del problema, el vector de variables y_t no es observable por lo que no podemos estimar la matriz $\Psi_{1,t}$ a partir de y_t . Sin embargo, dado (2), podemos estimar esta matriz en tanto que conocemos el proceso estocástico seguido por z_t .

Teniendo en cuenta que $cov(z_t, z_{t-1}) = \Phi_t$ y que

$$cov(z_t, z_{t-1}) = cov(M_t y_t + w_t, M_{t-1} y_{t-1} + w_{t-1}) = M_t \Psi_{1,t} M_{t-1}', \quad (8)$$

se tiene que

¹ Nótese que las matrices del proceso estocástico Ψ dependen del tiempo dado que son condicionales al conjunto de información, por ser y_t no observable.

$$\Psi_{1,t} = (M_t' M_t)^{-1} M_t' \Phi_t M_{t-1} (M_{t-1}' M_{t-1})^{-1} = P_t. \quad (9)$$

Por tanto, la expresión (7) queda como sigue:

$$y_{t+1|t}^* = P_t (y_t - y_{t|t-1}^*) + y_{t+1|t-1}^*. \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (1) llegamos a la expresión (5). ■

Algunos comentarios nos ayudarán a centrar ideas respecto a la utilización empírica de estos resultados:

- a) Esta proposición parte del hecho de que es conocido el proceso estocástico de z_t . Para las aplicaciones que vamos a describir en la próxima sección, éste es un supuesto que en nada es restrictivo ya que el conjunto de series temporales dado por el vector z_t es conocido para $t=0, 1, \dots, T$, por lo que es posible identificar y estimar el proceso estocástico que sigue tal vector. Podría relajarse este supuesto describiendo el proceso estocástico de z_t como:

$$z_t = v_t + \Phi_{1,t} v_{t-1} + \Phi_{2,t} v_{t-2} + \dots,$$

siendo las matrices $\Phi_{i,t}$ identificadas y estimadas con la información disponible hasta el instante t^2 .

- b) La proposición parte, asimismo, del supuesto de que las matrices M_t son de rango completo con $p \geq n$, es decir, el número de variables observables es mayor o igual que el número de variables endógenas no observables. Éste tampoco es un supuesto restrictivo ya que, en primer lugar, en las aplicaciones que vamos a describir posteriormente, las matrices M_t son cuadradas, de modo que existen tantas variables observables como no observables. En segundo lugar, si M_t no fuera de rango completo significaría que existen relaciones entre y_t y z_t estadísticamente redundantes. En el caso en que $p < n$, la solución para $\Psi_{1,t}$ no sería única, por lo que habría que imponer un conjunto suficiente de restricciones para calcular $\Psi_{1,t}$, seleccionando así una de las posibles expresiones del sistema (1) en la forma (5).
- c) Esta proposición podría generalizarse para el caso en que se tuvieran expectativas formadas en t de variables en el instante $t+j$, $j=1, 2, \dots, q$. Bastaría con resolver los valores $\Psi_{1,t}, \dots, \Psi_{q,t}$:

² Nótese que para los primeros periodos, dada la ausencia de grados de libertad, debería hacerse algún supuesto acerca del proceso estocástico de z_t .

$$M_t \Psi_{1,t} M'_{t-1} = \Phi_1; \dots; M_t \Psi_{q,t} M'_{t-q} = \Phi_q. \quad (11)$$

Es decir, el sistema (1) sería:

$$y_t = G_t y_{t-1} + \sum_{i=1}^p F_{it} y_{t-i}^* + d_t + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, \dots, T, \quad (12)$$

y, el sistema resultante, análogo al (5) sería:

$$y_t = A_t y_{t-1} + B_t y_{t-1}^* + \sum_{i=1}^p B_{it} y_{t-i}^* + b_t + u_t, \quad t=1, 2, \dots, T \quad (13)$$

donde:

$$A_t = (I - \sum_{i=1}^p F_{it} P_{it})^{-1} G_t,$$

$$B_t = (I - \sum_{i=1}^p F_{it} P_{it})^{-1} \left(\sum_{i=1}^p F_{it} P_{it} \right),$$

$$B_{it} = (I - \sum_{i=1}^p F_{it} P_{it})^{-1} F_{it},$$

$$b_t = (I - \sum_{i=1}^p F_{it} P_{it})^{-1} d_t,$$

$$u_t = (I - \sum_{i=1}^p F_{it} P_{it})^{-1} \varepsilon_t, \text{ siendo } P_{it} \text{ la estimación de } \Psi_{it} \text{ de (11).}$$

2.2. Estimación mínimo-cuadrática del vector y , con información I_t .

Una vez que hemos expresado el sistema (1) en la forma (5) podemos utilizar el resultado de Cerdá (1992) para calcular la estimación mínimo-cuadrática de y , dado z_t y el conjunto de información I_t , ya que la expresión (5) es el tipo de sistema dinámico con expectativas racionales cuya solución, utilizando el filtro de Kalman, fue generalizada por Cerdá.

Con el fin de presentar el algoritmo de solución para resolver el problema planteado, se describe a continuación el procedimiento de solución presentado por Cerdá (1992). El objetivo es transformar ahora el sistema (5) en una expresión equivalente que relacione el vector de variables endógenas con su pasado inmediato, con las variables exógenas y con la expectativa y_{t-1}^* . A partir de esta nueva expresión y bajo el supuesto de que las condiciones iniciales y los ruidos son gaussianos, es inmediato obtener la estimación lineal mínimo-cuadrática \hat{y}_{it} a partir de la metodología recogida en Bertsekas (1976), aplicando directamente los resultados que allí aparecen.

Proposición Cerdá (1992): Si suponemos que $(I-B)$ es no singular y además la condición final³ $y_{T+1|T-1}^* = \Gamma y_{T|T-1}^*$ (condición propuesta por Chow (1980) para T "grande") entonces, utilizando la notación de Cerdá (1992) el sistema (5) puede expresarse de la forma:

$$y_t = A_t y_{t-1} + (Q_t - A_t) y_{t-1|t-1}^* + \sum_{i=1}^T M_{it} \tilde{b}_{it-1}^* + v_t, \quad t=1, 2, \dots, T, \quad (14)$$

donde

$$Q_t = (I - \tilde{B}_{it} Q_{t+1})^{-1} \tilde{A}_t, \text{ con } Q_{T+1} = \Gamma,$$

$$M_{it} = (I - \tilde{B}_{it} Q_{t+1})^{-1},$$

$$\tilde{M}_{it} = M_{it} \tilde{B}_{it} M_{t+1,i},$$

$$\tilde{b}_{it-1}^* = (I-B)^{-1} b_{it-1}^*,$$

$$\tilde{B}_{it} = (I-B)^{-1} B_{it},$$

$$\tilde{A}_t = (I-B)^{-1} A_t,$$

$$v_t = (b_t - b_{it-1}^*) u_t = \xi_t + u_t, \quad E v_t v_t' = L_t + U_t = V_t.$$

Véase la demostración en Cerdá (1992).

Dada la expresión (14), el estimador lineal mínimo cuadrático \hat{y}_{it} es:

$$\hat{y}_{it} = (I - D_t M_t) (Q_t \hat{y}_{t-1|t-1} + q_{t-1}) + D_t z_t, \quad t=1, \dots, T, \quad (15)$$

con $\hat{y}_{0|0} = m_0$, $\hat{y}_{0|0} = (I - D_0 M_0) m_0 + D_0 z_0$, donde

$$D_t = \Sigma_{it|t-1} M_t' (M_t \Sigma_{it|t-1} M_t' + W_t)^{-1},$$

$$\Sigma_{it|t-1} = A_t \Sigma_{t-1|t-1} A_t' + V_t,$$

$$\Sigma_{it} = \Sigma_{it|t-1} - \Sigma_{it|t-1} M_t' (M_t \Sigma_{it|t-1} M_t' + W_t)^{-1} M_t \Sigma_{it|t-1}, \text{ con } \Sigma_{0|0} = S_0,$$

$$q_{t-1} = \sum_{i=1}^T M_{it} \tilde{b}_{it-1}^*, \quad \hat{y}_{it-1} = Q_t \hat{y}_{t-1|t-1} + q_{t-1},$$

$$\Sigma_{itk} = E \left[(y_t - \hat{y}_{itk}) (y_t - \hat{y}_{itk})' \right].$$

Para la demostración de este resultado, en el que, dada la hipótesis de condiciones iniciales y ruidos gaussianos, se puede suponer $y_{t-1|t-1}^* = \hat{y}_{t-1|t-1}$, véase Bertsekas (1976) y Cerdá (1992).

2.3. Algoritmo numérico de estimación de y , con información I_t .

El algoritmo para la estimación de \hat{y}_{it} es:

PASO 1: Calcular P_t , $t=1, \dots, T$ de la forma indicada en la proposición 1, así como las matrices A_t, B_t, B_{it} y el vector de variables exógenas b_t y U_t para $t=1, \dots, T$.

³ Si el proceso estocástico de y_t fuera aproximadamente un VARMA(1,1), por ejemplo, entonces la matriz Γ sería igual a la matriz de parámetros de la parte autorregresiva del VARMA, que podría estimarse de la misma forma que Ψ en la proposición 1, a partir del proceso estocástico de z_t .

PASO 2: Calcular $\tilde{b}_{i,t-1}, \tilde{B}_{i,t}, \tilde{A}_i, V_i$ del modo indicado en la proposición 2.
 PASO 3: Calcular recursivamente, empezando por el periodo T , las matrices

$$Q_i, M_{i,t}, i = t, t+1, \dots, T:$$

$$\text{En } T: Q_T = (I - \tilde{B}_{1T}\Gamma)^{-1} \tilde{A}_T, M_{T,T}$$

$$\text{En } T-1: Q_{T-1}, M_{T-1,T-1}, M_{T-1,T}$$

...

$$\text{En } 1: Q_1, M_{1,1}, \dots, M_{1,T}$$

PASO 4: Calcular recursivamente a partir del periodo inicial:

$$\text{En } t=0: \Sigma_{0|0} = S_0 - S_0 M_0' (M_0 S_0 M_0' + W_0)^{-1} M_0 S_0,$$

$$D_0 = S_0 M_0' (M_0 S_0 M_0' + W_0)^{-1},$$

$$\hat{y}_{0|0} = (I - D_0 M_0) m_0 + D_0 z_0.$$

$$\text{En } t=1: \Sigma_{1|0} = A_1 \Sigma_{0|0} A_1' + V_1,$$

$$\hat{y}_{1|0} = Q_1 \hat{y}_{0|0} + q_0,$$

$$\Sigma_{1|1} = \Sigma_{1|0} - \Sigma_{1|0} M_1' (M_1 \Sigma_{1|0} M_1' + W_1)^{-1} M_1 \Sigma_{1|0},$$

$$D_1 = \Sigma_{1|0} M_1' (M_1 \Sigma_{1|0} M_1' + W_1)^{-1},$$

$$\hat{y}_{1|1} = (I - D_1 M_1) (Q_1 \hat{y}_{0|0} + q_0) + D_1 z_1.$$

[...]

$$\text{En } t=T: \Sigma_{T|T-1} = A_T \Sigma_{T-1|T-1} A_T' + V_T^{-1},$$

$$\hat{y}_{T|T-1} = Q_T \hat{y}_{T-1|T-1} + q_{T-1},$$

$$\Sigma_{T|T} = \Sigma_{T|T-1} - \Sigma_{T|T-1} M_T' (M_T \Sigma_{T|T-1} M_T' + W_T)^{-1} M_T \Sigma_{T|T-1},$$

$$D_T = \Sigma_{T|T-1} M_T' (M_T \Sigma_{T|T-1} M_T' + W_T)^{-1},$$

$$\hat{y}_{T|T} = (I - D_T M_T) (Q_T \hat{y}_{T-1|T-1} + q_{T-1}) + D_T z_T.$$

3. Aplicaciones a modelos de ciclo real. Calibración de parámetros.

En esta sección se aplican los resultados teóricos obtenidos antes con el objetivo de calibrar parámetros a partir del ajuste entre las variables del modelo teórico y las observadas en una economía real.

3.1 Estimación del parámetro de aversión relativa al riesgo en el modelo de crecimiento neoclásico de Brock y Mirman (1972).

3.1.1. Descripción del problema y su especificación en la forma del sistema (1).

Sea el problema de crecimiento neoclásico en contextos con incertidumbre y bajo el supuesto de expectativas racionales siguiente:

$$\underset{(c, k)}{\text{MAX}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (16)$$

sujeito a:

$$c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} = \theta_t k_{t-1}^\alpha \quad (17)$$

$$\ln \theta_t = \phi \ln \theta_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2), \quad |\phi| < 1 \quad (18)$$

$$k_{-1}, \theta_{-1} \text{ dados} \quad (19)$$

donde $\beta, \sigma, \delta, \alpha$ son el parámetro de descuento, la aversión relativa al riesgo, la tasa de depreciación del stock de capital y la elasticidad de la producción respecto del stock de capital, respectivamente. Las variables c_t, k_t denotan el consumo y el stock de capital. E_0 denota la esperanza condicional al conjunto de información del instante 0.

El problema consiste en encontrar las secuencias de consumo y capital a lo largo del tiempo que maximicen el valor esperado de la suma descontada de la utilidad de un consumidor representativo (expresión (16)) sujeto a: i) la restricción de recursos de la economía: la producción (lado derecho de (17)) debe ser igual al consumo más la inversión (lado izquierdo de (17)); ii) un proceso estocástico para el shock en productividad (θ_t), (18); y iii) unas condiciones iniciales para la variable de estado y para el shock en productividad, (19).

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\frac{1}{\beta} c_t^{-\sigma} = E_t H_{t+1} \quad (20)$$

$$H_t = c_t^{-\sigma} (\theta_t \alpha k_{t-1}^{\alpha-1} + 1 - \delta) \quad (21)$$

$$c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} = \theta k_{t-1}^\alpha \quad (22)$$

$$\ln \theta_t = \phi \ln \theta_{t-1} + \epsilon_t \quad (23)$$

para $t=0,1,2,\dots$, donde utilizamos ahora la notación más habitual $E_t H_{t+1}$ para denotar $H_{t+1|t}$.

Las condiciones de primer orden se completan con la condición de transversalidad $\lim_{t \rightarrow \infty} E_t (c_{t+1}^{-\sigma} k_{t+1}) = 0$.

Si linealizamos el sistema (20)-(23) en los logaritmos de las variables c_t, k_t, H_t, θ_t , alrededor del estado estacionario (definido éste como el equilibrio determinista del modelo si $x_t = x_{t-1}, \theta_t = 1, \epsilon_t = 0, \forall t$, con $x=c,k$), podemos expresar el sistema de esta forma:

$$\Omega_0 y_t = \Omega_1 y_{t-1} + \Omega_2 y_{t-1|t} + \Omega_3 \epsilon_t, \quad t=1,2,\dots \quad (24)$$

donde

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{\beta} c_{ss}^{-\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma c_{ss}^{-\sigma} (\alpha k_{ss}^{\alpha-1} + 1 - \delta) & H_{ss} & 0 & -c_{ss}^{-\sigma} \alpha k_{ss}^{\alpha-1} \\ c_{ss} & 0 & k_{ss} & -k_{ss}^\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ss}^{-\sigma} \alpha (\alpha-1) k_{ss}^{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha k_{ss}^\alpha + (1-\delta) k_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi \end{bmatrix}$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & H_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} \ln c_t - \ln c_{ss} \\ \ln H_t - \ln H_{ss} \\ \ln k_t - \ln k_{ss} \\ \ln \theta_t \end{bmatrix}, \quad y_{t-1|t} = \begin{bmatrix} E_t(\ln c_{t+1} - \ln c_{ss}) \\ E_t(\ln H_{t+1} - \ln H_{ss}) \\ E_t(\ln k_{t+1} - \ln k_{ss}) \\ E_t(\ln \theta_{t+1}) \end{bmatrix}$$

Dado que Ω_0 es invertible, podemos expresar (24) como el sistema siguiente:

$$y_t = G y_{t-1} + F y_{t-1|t} + \epsilon_t \quad (25)$$

donde $G = \Omega_0^{-1} \Omega_1$, $F = \Omega_0^{-1} \Omega_2$, $\epsilon_t = \Omega_0^{-1} \Omega_3 \epsilon_t$. Por tanto, la expresión (25) toma la forma del sistema (1).

3.1.2. Estimación de la aversión relativa al riesgo.

Bajo la hipótesis de que el sistema (25) explica la economía real, es decir, es el proceso generador de las series temporales observadas de una economía real particular, y que el

vector de variables $\{z_t\}$ representa las series temporales observadas tales que se relacionan con las teóricas y con un ruido de observación como sigue:

$$z_t = y_t + w_t, \quad (26)$$

La expresión (26) es la ecuación de observación en la que se ha postulado que $M_t = I$ y que $E_t w_t w_t' = W = \sigma_w^2 I, \forall t$. Es decir, existe una relación uno a uno entre las variables observadas y la teóricas ($M_t = I$) y el error de observación de un componente de y_t (por ejemplo el consumo) no condiciona el error de observación de otro componente del vector y_t (por ejemplo, el stock de capital).

El objetivo de esta aplicación es, en primer lugar, construir un vector z_t de variables análogas a las del modelo teórico, que representen a la economía real. Para ello, dado que las variables del modelo teórico son estacionarias y las variables de la economía real (consumo y stock de capital) no lo son, utilizaremos sus series temporales en los logaritmos transformadas a través del filtro de Hodrick-Prescott⁴ obteniendo así series estacionarias, con media cero, con objeto de explicar las fluctuaciones cíclicas alrededor de la tendencia⁵. Estas series serían z_{1t} y z_{2t} dado (26). Las series teóricas y_{1t} y y_{2t} son el logaritmo del consumo y del stock de capital en desviaciones respecto de su estado estacionario respectivamente. Ambas tienen media cero y son estacionarias (dada la linealidad de (25) y la normalidad del vector de ruido ϵ_t ⁶) y serían análogas a las variables z_{1t} y z_{2t} .

Respecto de la variable z_{4t} , se calcularía a través de la estimación del residuo de Solow, por ejemplo utilizando la estrategia de Prescott (1986), y de esta forma, z_{4t} sería la variable análoga a y_{4t} del modelo teórico⁷.

Para construir la variable z_{2t} se debería, en primer lugar, calibrar los parámetros⁸: i) α como la participación del stock de capital privado en la producción real; ii) la tasa de depreciación a través de una regresión entre el stock de capital menos la inversión y el stock de capital del periodo anterior:

⁴ Este instrumento de filtrado es habitualmente utilizado en esta literatura para descomponer las series temporales en tendencia y ciclo más componente irregular.

⁵ Recuérdese que la evaluación empírica de estos modelos se basa en su capacidad para explicar las fluctuaciones cíclicas de las economías reales.

⁶ $E \epsilon_t = 0$, $E \epsilon_t \epsilon_t' = \sigma_\epsilon^2 (\Omega_0^{-1} \Omega_3) (\Omega_0^{-1} \Omega_3)'$.

⁷ Podrían estimarse los parámetros ϕ , σ_ϵ^2 de (23) a partir de la serie del residuo de Solow estimada.

⁸ Dado que nuestro interés radica en la calibración del parámetro de aversión relativa al riesgo, el resto de los parámetros se calibran utilizando la práctica más habitual en la literatura.

$$(K_t - I_t) = \gamma K_{t-1} + s_t \quad (27)$$

siendo s_t la perturbación aleatoria de la regresión y $\gamma = 1 - \delta$; iii) fijar el valor de la aversión relativa al riesgo acorde con alguna estimación previa obtenida de la literatura de ciclo real⁹. Una vez calibrados estos parámetros, podemos construir con las series de consumo, stock de capital y el residuo de Solow, la serie¹⁰ $\hat{H}_t = \hat{c}_t^{-\alpha} (\beta \hat{c}_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)$; si transformamos esta serie en logaritmos y la filtramos a través del filtro de Hodrick y Prescott, obtenemos una serie temporal análoga a y_t .

Un vez construido el vector de series temporales z_t , postulamos que el modelo teórico representado por (25) explica la economía real del país seleccionado y que los datos de series temporales reales z_t que observamos son una medida de las series temporales teóricas y_t , con las que se relacionan según (26), para una matriz de covarianzas W dada. El objetivo es encontrar (mediante una red de búsqueda, por ejemplo) el valor de σ tal que, dados W y Γ (recuérdese que se había impuesto $y_{T+1|T-1} = \Gamma y_{T|T-1}$) y estimada la matriz Ψ (por medio de la identificación y estimación econométrica¹¹ de un proceso VAR para $\{z_t\}$), se alcance el valor mínimo de $\sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t|t})' W^{-1} (z_t - \hat{y}_{t|t})$.

Calcular $\hat{y}_{t|t}$ utilizando la metodología expuesta en la sección 2 es equivalente a simular el modelo a través de una aproximación log-lineal donde la estabilidad del sistema estará garantizada por el hecho de que el conjunto de información I_t está formado por un vector de variables observables estacionarias que impedirá que la solución generada $\hat{y}_{t|t}$, sea no estacionaria o inestable¹². Téngase en cuenta que los autovalores de la matriz $\Omega_0^{-1} \Omega_1$ son tales que uno de ellos será mayor en valor absoluto que $\beta^{-1/2}$ por lo que la solución del sistema será de punto de silla¹³ (existe un único subespacio estable dado k_{-1} tal que el sistema evoluciona hacia el equilibrio de estado

⁹ Por ejemplo, podría seleccionarse el valor del parámetro de aversión relativa al riesgo obtenido por Mehra y Prescott (1985).

¹⁰ El símbolo " ^ " sobre una variable o sobre un parámetro denota respectivamente, una serie real o un parámetro estimados.

¹¹ Utilizamos toda la información de que disponemos para estimar Ψ suponiendo, implícitamente, la estabilidad paramétrica de su estimación, es decir, que no dependerá del conjunto de información.

¹² Dado que la solución es del tipo $\hat{y}_{t|t} = (I - D_t) Q_t \hat{y}_{t-1|t-1} + D_t z_t$, si z_t es estacionario, una condición suficiente es que los autovalores de $(I - D_t) Q_t$ tengan norma menor que 1 para que $\hat{y}_{t|t}$ sea estacionaria.

¹³ Existe un autovalor inestable que genera una dirección o autovector inestable. Si se anula esta dirección, el sistema evolucionará a lo largo de un subespacio estable.

estacionario). Sin embargo, por el razonamiento dado anteriormente, no es necesario restringir el espacio de trayectorias ya que, implícitamente, el sistema de observación (26) cumple esta función¹⁴. Además, estimamos las expectativas $\hat{y}_{t|t-1}$ como subproducto del procedimiento, lo cual tiene un marcado interés económico.

Procedimiento de solución:

- 1° Calibrar todos los parámetros del modelo (excepto sigma, que es objeto de estimación a través del procedimiento dado en la sección anterior). Hasta ahora sólo se ha descrito la forma de calibrar $\alpha, \delta, \phi, \sigma_t^2$. Respecto del parámetro β , como es habitual, fijamos su valor igual al inverso del tipo de interés real bruto, neto de la tasa de depreciación de la economía real¹⁵.
- 2° Construir $\{z_t\}$, siendo $M_t = I, W_t = W, \forall t$ definida positiva a partir de los datos, del modo especificado anteriormente.
- 3° Calcular las matrices $G_t, F_t, \Lambda_t, \Psi_t, S_0$, y los vectores d_t, m_0 .

$$G_t = \Omega_0^{-1} \Omega_1, \forall t,$$

$$F_t = \Omega_0^{-1} \Omega_2, \forall t,$$

$$\Lambda_t = \sigma_t^2 \Omega_0^{-1} \Omega_3 (\Omega_0^{-1} \Omega_3)', \forall t,$$

$$\bar{\Psi}_t = \bar{\Phi}, \forall t, \text{ siendo } \bar{\Phi} \text{ calculado a partir de la estimación del VAR para el vector } \{z_t\},$$

$d_t = 0, \forall t$, ya que en el modelo no hay variables exógenas (si por ejemplo hubiéramos modelizado un tipo impositivo, entonces, con datos de la economía real hubiéramos identificado y estimado un proceso autorregresivo para este impuesto estimando así $R_t, i = 1, \dots, p$ de $\tau_t = \sum_{i=1}^p R_i \tau_{t-i} + \xi_t$), $m_0 = 0$, ya que las variables y_t están en desviaciones respecto de su estado estacionario,

S_0 : utilizamos como estimación de esta matriz la diferencia entre la matriz de covarianzas muestral de z_t y W (ya que $cov(z_t) = cov(y_t) + W$ puesto que y_t es independiente de w_t).

- 4° Calcular $\hat{y}_{t|t}$ de la forma descrita en la sección anterior. Dados los valores de los parámetros, ésta es una estimación mínimo-cuadrática de y_t en función del vector de observación z_t , (es decir, establecemos el ajuste lineal óptimo).

¹⁴ De esta forma se evita encontrar las direcciones inestables que no son más que una aproximación a las verdaderas direcciones inestables del sistema no lineal.

¹⁵ Téngase en cuenta que de (20) y (21), en el estado estacionario $1/\beta = \alpha k_{ss}^{\alpha-1} + 1 - \delta = (1 + r_{ss}) - \delta$, siendo r_{ss} el tipo de interés real medido como la productividad marginal del capital.

5º Evaluar¹⁶ $\sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{it})' W^{-1} (z_t - \hat{y}_{it})$, para cada valor de σ . Nótese que cada vez que se calcula \hat{y}_{it} para cada σ , las matrices G, F cambian como función de estos parámetros. La estimación de σ es aquella que minimiza esta función de pérdida.

En el apéndice se especifica un método de solución recursivo para estimar parámetros del modelo minimizando la distancia entre z_t e \hat{y}_{it} , lo que resulta más apropiado que una red de búsqueda cuando son múltiples los parámetros a estimar.

3.1.3. Resultados.

Los resultados obtenidos acerca del valor calibrado de la aversión relativa al riesgo para el caso de la economía española¹⁷ son dependientes de la matriz de varianzas y covarianzas del ruido de observación $W = \sigma_w^2 I$. Cuanto mayor es σ_w^2 menor es el grado de ajuste requerido entre las variables observadas y las teóricas por lo que la función de pérdida es muy "plana" siendo el cálculo de σ poco preciso. Sin embargo, cuanto menor es σ_w^2 mayor es el nivel de exigencia en el ajuste por lo que existe un límite inferior para esta varianza por debajo del cual no hay ningún vector de series \hat{y}_{it} que se ajuste con ese nivel de precisión a los datos. Esta varianza es, por tanto, una señal del grado de precisión que es posible alcanzar.

En la figura 1 (hemos llamado al modelo teórico antes descrito, "Modelo 1") aparecen los datos reales y estimados para los valores de σ y σ_w^2 óptimos ($\sigma = 2.91, \sigma_w^2 = 0.000001$). Puede comprobarse que únicamente el residuo de Solow es el que tiene un menor ajuste.

[insertar figura 1]

La tabla 1 refleja los valores de la aversión relativa al riesgo calibrados en función de σ_w^2 y de la función de pérdida que tomemos como referencia (SR, SR_1, SR_2, SR_3 , sumas residuales de las variables en su conjunto, suma residual del consumo actual y estimado, suma residual del stock de capital actual y estimado y expectativa actual y estimada, respectivamente). En general, la calibración de la aversión relativa al riesgo es poco sensible a cambios en σ_w^2 , excepto cuando se toma como referencia la suma residual del consumo estimado. Si tomamos esta función de pérdida como

¹⁶ Podemos acotar los valores de la aversión relativa al riesgo entre 1 y 12, valores en torno a los cuales la literatura de ciclo real ha estimado tal parámetro.

¹⁷ Se han recogido datos del PIB, ocupados, consumo e inversión del Informe de Previsión y Coyuntura del Ministerio de Economía y Hacienda. La muestra es trimestral desde 1976:3 hasta 1998:2. El resto de los parámetros calibrados son: $\alpha = 1/3; \beta = 0.9524; \phi = 0.9211; \sigma_\epsilon = 0.0000068; \delta = 0.025$.

referencia, se concluye que, para la economía española, replicar el proceso estocástico del consumo implica una aversión relativa al riesgo menor que la que replicaría el conjunto las series estudiadas en este modelo, supuesto que el modelo teórico fuera el generador del proceso estocástico de los datos de la economía española.

[insertar tabla 1]

3.2. Aplicación del procedimiento de calibración para discriminar modelos.

En esta subsección se ofrece alguna luz acerca de presentar criterios objetivos que puedan resolver el problema de la sobreidentificación de modelos.

Si al investigador se le presenta la disyuntiva de si debería utilizar un modelo más complejo o no con el fin de ajustar mejor la economía real en su conjunto, podría utilizar las funciones de pérdida (SR, SR_1, SR_2, SR_3), que en muchos casos serán comparables entre modelos alternativos para discriminar que modelo se ajusta más a los datos una vez que se ha calibrado cada modelo.

A continuación estudiamos este punto utilizando dos versiones alternativas del modelo de crecimiento neoclásico de Brock y Mirman con oferta de trabajo inelástica:

Modelo 2

$$MAX_{(c,k)} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - A_t l_t \right] \quad (28)$$

sujeto a:

$$c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} = \theta_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \quad (29)$$

$$\ln \theta_t = \phi \ln \theta_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2), \quad |\phi| < 1 \quad (30)$$

$$k_{-1}, \theta_{-1} \text{ dados} \quad (31)$$

Modelo 3

$$\underset{(c, k)}{\text{MAX}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - l_t^{\lambda} \right] \quad (32)$$

sujeto a:

$$c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} = \theta_t k_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha} \quad (33)$$

$$\ln \theta_t = \phi \ln \theta_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2), \quad |\phi| < 1 \quad (34)$$

$$k_{-1}, \theta_{-1} \text{ dados} \quad (35)$$

donde l_t denota la proporción de tiempo dedicado a trabajar por parte del consumidor representativo. La diferencia entre estos modelos está en cómo se modeliza la preferencia por el ocio en la función de utilidad.

La única condición de primer orden contemporánea de cada modelo es aquella que iguala la relación marginal de sustitución entre el consumo y tiempo de trabajo y la productividad marginal del mismo; esta condición de optimalidad relaciona el tiempo de trabajo con el consumo, el stock de capital y el shock en productividad como sigue:

$$l_t = \left[\frac{1}{A_N} (1-\alpha) \theta_t \right]^{1/\alpha} c_t^{-\alpha/\alpha} k_{t-1} \quad (36)$$

$$l_t = \left[\left[\frac{1-\alpha}{A_N} \right] c_t^{-\alpha} \theta_t k_{t-1}^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\lambda_t - 1 + \alpha}}$$

A partir de estas condiciones, puede sustituirse el tiempo de trabajo en el resto de condiciones de optimalidad de ambos modelos de modo que se obtenga un sistema análogo al del Modelo 1 en las mismas variables: $\{c_t, k_t, H_t, \theta_t\}$.

Siguiendo los mismos pasos que con el modelo 1: log-linealización del sistema y construcción a partir de los datos de $\{z_t\}$ (sólo cambiará la variable $z_{3,t}$, es decir, H_t) podemos calibrar el parámetro σ junto con el nuevo parámetro A_N ¹⁸: supondremos que la proporción de tiempo dedicado a trabajar a largo plazo (l_{ss}) es 1/3 de modo que para cada valor de σ obtenemos

¹⁸ El resto de parámetros tienen los mismos valores que los dados para el modelo 1.

un valor A_N compatible con que $l_{ss} = 1/3$.

Resultados:

Las figuras 2 y 3 muestran el tipo de ajuste obtenido para el valor de σ, A_N, σ_w^2 que minimizan la función de pérdida SR . Estos valores son: 3.41, 6.96, y 0.000001 para el modelo 2 y 4.41, 8.55 y 0.000001 para el modelo 3. Como puede observarse de las figuras 2 y 3, destacamos el hecho de que el consumo sea el peor estimado y que el modelo 3 únicamente genere una buena estimación para la serie de capital.

[insertar figuras 2 y 3]

Las tablas 2 y 3 recogen las calibraciones de σ y A_N para distintos valores de σ_w^2 y para diferentes funciones de pérdida. En general, destacamos que, como en el modelo 1, el valor de la aversión relativa al riesgo que mejor replica su proceso estocástico es menor que el que replica el modelo en su conjunto, de modo que podemos concluir que la senda de consumo de la economía española es generada por una elasticidad intertemporal de sustitución bastante alta.

[insertar tablas 2 y 3]

Cambios en la proporción del tiempo dedicado a trabajar postulado en el estado estacionario no genera cambios significativos en las calibraciones de σ y A_N en el modelo 2. Sin embargo, en el modelo 3 estas calibraciones son sensibles a variaciones en la proporción de tiempo dedicado a trabajar a largo plazo, como muestra la tabla 4.

[insertar tabla 4]

Por último, la tabla 5 resume los valores óptimos de las diferentes funciones de pérdida utilizadas para cada modelo. Destacamos que, con los datos utilizados, el modelo 1 tiene un mejor comportamiento a la hora de replicar los procesos estocásticos observados para la economía española. A nivel agregado, el modelo 3 ajusta más los datos que el modelo 2.

Estas medidas son comparables entre modelos y pueden ayudarnos a discriminar entre ellos más fácilmente que las medidas utilizadas habitualmente en la literatura como son comparar correlaciones entre variables teóricas para contrastar modelos ya que se utiliza una información más limitada no siendo difícil generar modelos observacionalmente equivalentes.

Respecto a la última columna de la tabla 5, ésta refleja la norma del autovalor máximo al cual converge la matriz $(I-D)Q_t$. En los tres modelos este autovalor es menor que la unidad por lo que se cumple la condición suficiente de que la estimación $\{\hat{y}_{it}\}$ será estacionaria.

4 Conclusiones

En este trabajo, utilizando el filtro de Kalman, se extiende la estimación de una variable no observable cuya evolución es conocida a través de un sistema dinámico con expectativas racionales, formadas en el presente, del futuro de dicha variable y conocida una medida que se relaciona con incertidumbre y linealmente con la variable no observable.

Utilizamos esta generalización del filtro de Kalman para aplicarla como instrumento de calibración de los parámetros contenidos en modelos de crecimiento con incertidumbre y bajo el supuesto de expectativas racionales (ampliamente utilizados en la literatura de ciclo real), siendo la estimación de estos parámetros difícil dada su naturaleza no observable en la economía real a través de los datos disponibles. Así, estudiamos en tres modelos alternativos, cuál es la aversión relativa al riesgo para la economía española que mejor replica el comportamiento estocástico de algunas series históricas reales. La ventaja de aplicar este método para estimar estos parámetros es su sencillez y su bajo coste computacional.

Por último, utilizamos la función de pérdida con la que evaluamos la calibración de los parámetros como medida para comparar y discriminar modelos, cuando ésta es comparable entre modelos como los ejemplos aquí presentados. Concluimos que es el modelo más simple, con oferta de trabajo inelástica el que tiene un comportamiento mejor ajustando los procesos estocásticos de las variables observadas para la economía española.

Las extensiones naturales en este trabajo son: i) estudiar las propiedades de esta metodología en la estimación de otros parámetros sobre los que sabemos con mayor precisión, por otros métodos de calibración, su valor y contrastarlo con el que se obtendría con este procedimiento presentado; ii) estudiar mediante un análisis de sensibilidad cómo afectan diferentes valores de Γ a las estimaciones; iii) analizar los autovalores de $(I-D)Q_1$ con el fin de conocer qué variable o variables gobiernan la dinámica del modelo, ya que podría darnos información acerca de la causalidad entre variables.

Referencias

- [1] Aoki, M. y M. Canzoneri (1979), "Reduced Forms of Rational Expectations Models", *The Quarterly Journal of Economics*, February, págs. 59-71.
- [2] Bertsekas, D. (1976), "Dynamic Programming and Stochastic Control", Academic Press.
- [3] Blanchard, O.J. y C. M. Kahn (1980), "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations", *Econometrica*, vol. 48, n° 5, págs. 1305-1311.
- [4] Blanchard, O.J. (1982), "Methods of Solution and Simulation for Dynamic Rational Expectations Models", Discussion Paper n° 942, Harvard Institute for Economic Research, December.
- [5] Brock, W.A. y L. Mirman (1972), "Optimal Economic Growth and Uncertainty: the Discounted Case", *Journal of Economic Theory*, vol. 4, págs. 479-513.
- [6] Burmeister E. y K.D. Wall (1982), "Kalman Filtering Estimation of Unobserved Rational Expectations with an Application to the German Hyperinflation", *Journal of Econometrics*, vol. 20, págs. 255-284.
- [7] Cerdá, E. (1992), "Generalizaciones del Filtro de Kalman a Modelos con Expectativas Racionales", *Revista Española de Economía*, vol. 9, n° 1, págs. 129-148.
- [8] Chow, G. (1980), "Econometrics Policy Evaluation and Optimization under Rational Expectations", *Journal of Economics Dynamic and Control*, vol. 2, n° 1, págs. 47-59.
- [9] Christiano L.J. y R.J. Vigfusson (1999), "Maximum Likelihood in the Frequency Domain: a Time to Build Example", *NBER*, working paper 7027.
- [10] Gourieroux, C., J.J. Laffont y A. Monfort (1982), "Rational Expectations in Dynamic Linear Models: Analysis of the Solutions", *Econometrica*, vol. 50, n° 2, págs. 409-425.
- [11] Gregory, A. W. y G. W. Smith (1990), "Calibration as Estimation", *Econometric Reviews*, vol 9, n° 1, págs. 57-89.
- [12] Ingram, B.F. y B.S. Lee (1991), "Simulation Estimation of Time Series Models", *Journal of Econometrics*, vol. 2, n° 5, págs. 197-207.
- [13] McGrattan E.R. (1994), "The Macroeconomics Effects of Distortionary Taxation", *Journal of Monetary Economics*, n° 33, págs. 573-601.
- [14] Mehra, R. y E.C. Prescott (1985), "The Equity Premium: A Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, págs. 145-161.
- [15] Prescott, E.C. (1986), "Theory Ahead of Business Cycle Measurement", *Quarterly Review*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, vol. 10, n° 4, págs. 9-33.
- [16] Sims, C.A. (1999), "Solving Linear Rational Expectations Models", *Computational*

Economics. Forthcoming.

- [17] Taylor, J.B. (1977), "Conditions for Unique Solutions in Stochastic Macroeconomic Models with Rational Expectations", *Econometrica*, vol. 45, n° 6, págs. 1377-1385.
- [18] Watson, M. (1993), "Measures of Fit for Calibrated Models", *Journal of Political Economy*, 101 (6), págs. 1011-1041.

Apéndice

En este apéndice se describe el algoritmo recursivo que estima un vector γ de parámetros minimizando la función de pérdida $\sum_{t=0}^T (z_t - M\hat{y}_{t|t})' W^{-1} (z_t - M\hat{y}_{t|t})$, teniendo en cuenta que $\hat{y}_{t|t}$ es función de γ :

$$\text{Min}_{\gamma} \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t|t}(\gamma))' W^{-1} (z_t - \hat{y}_{t|t}(\gamma)) \quad (P)$$

El algoritmo que se describe tiene la ventaja de la facilidad de su implementación.

Antes, se comenta brevemente la naturaleza del procedimiento de cálculo:

En términos genéricos, sea $w_t = [w_{1t}, \dots, w_{nt}]'$, $\hat{y}_{t|t}(\gamma) = [\hat{y}_{1,t|t}(M), \dots, \hat{y}_{n,t|t}(M)]'$, $z_t = [z_{1t}, \dots, z_{nt}]'$. Sea $\gamma^{(0)} = [\gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_g^{(0)}]'$ el valor inicial del vector de parámetros para el cual se obtiene la primera estimación de y_t : $\hat{y}_{t|t}^{(0)}$; sea $w_t^{(0)} = z_t - \hat{y}_{t|t}^{(0)}$.

Si se aproxima linealmente w_t (que es función de γ) alrededor de $\gamma^{(0)}$, se tiene:

$$w_{rt} = w_{rt}^{(0)} - \sum_{i=1}^g (\gamma_i - \gamma_i^{(0)}) \left[\frac{\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)}}{\partial \gamma_i} \right], \quad r=1, \dots, n$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$w_{rt}^{(0)} + \sum_{i=1}^g \gamma_i^{(0)} \left[\frac{\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)}}{\partial \gamma_i} \right] = w_{rt} + \sum_{i=1}^g \gamma_i \left[\frac{\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)}}{\partial \gamma_i} \right], \quad r=1, \dots, n$$

o, equivalentemente:

$$\omega_{rt}^{(0)} = \sum_{i=1}^g \gamma_{i,r,t}^{(0)} + w_{rt}, \quad r=1, \dots, n, \quad t=0, \dots, T. \quad (A1)$$

La expresión (A1) no es más que un sistema de n ecuaciones del que deben estimarse las componentes del vector γ , siendo $\omega_t^{(0)}$ el vector $n \times 1$ de variables dependientes y $\zeta_t^{(0)}$ la matriz de variables independientes:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{1,t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_{2,t} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta_{n,t} \end{bmatrix}$$

donde $\zeta_{r,t} = [\zeta_{k,1,t}, \dots, \zeta_{k,g,t}]$, $r=1, \dots, n$, $\zeta_{r,t} = (\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)} / \partial \gamma)$, y w_t es el vector de ruido. Estimar los

parámetros del vector γ de la expresión (A1) equivale a estimar por MCG el vector η , $(ng \times 1)$ del sistema

$$\begin{bmatrix} \omega_1^{(0)} \\ \dots \\ \omega_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2^{(0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1,1} \\ \dots \\ \eta_{g,1} \\ \dots \\ \eta_{1,n} \\ \dots \\ \eta_{g,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (A2)$$

restringido a que $\eta_{i,1} = \eta_{i,2} = \dots = \eta_{i,n} = \gamma_i$, para $i=1, \dots, g$.

Algoritmo:

- 1° Dado $\gamma^{(0)}$ y el resto de las matrices dependientes de los parámetros, y dado z_t , estimar $\hat{y}_{it}^{(0)}$ utilizando el algoritmo del filtro de Kalman.
- 2° Calcular las derivadas numéricas $(\partial \hat{y}_{r,it}^{(0)} / \partial \gamma_i)$ para $r=1, \dots, n$, $i=1, \dots, n$ evaluadas en $\gamma^{(0)}$.
- 3° Calcular $\omega_r^{(0)}$, $\zeta_n^{(0)}$, $t=0, \dots, T$, $r=1, \dots, n$.
- 4° Estimar γ_i , $i=1, \dots, g$ por mínimos cuadrados generalizados restringidos a partir del sistema (A2), obteniendo $\gamma^{(1)}$.
- 5° Escoger un criterio de convergencia como, por ejemplo, el siguiente: si $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{ij}^{(0)} - m_{ij}^{(1)})^2$ es menor que un cierto valor tan pequeño como se quiera, entonces $\gamma_i^{(1)}$, $i=1, \dots, g$ será el estimador de γ que minimiza (P). Si fuera mayor que ese cierto valor, entonces utilizar $\gamma^{(0)}$ como condición inicial de γ y volver al paso 1°.

Puede comprobarse que utilizar este algoritmo es equivalente a resolver (P) por Gauss-Newton, siendo este procedimiento fácil de implementar.

Tabla 1. Modelo 1. Estimaciones de la aversión relativa al riesgo que minimizan cada una de las sumas residuales SR, SR_1, SR_2, SR_3 para diferentes varianzas del error de observación.

		SR	SR ₁	SR ₂	SR ₃
$\sigma_w^2=0.000100$	$\hat{\sigma} =$	2.91	2.91	2.91	2.91
$\sigma_w^2=0.000050$	$\hat{\sigma} =$	2.91	2.51	2.91	2.91
$\sigma_w^2=0.000010$	$\hat{\sigma} =$	2.91	2.01	2.91	2.21
$\sigma_w^2=0.000005$	$\hat{\sigma} =$	2.91	2.01	2.91	2.01
$\sigma_w^2=0.000001$	$\hat{\sigma} =$	2.91	1.71	2.91	2.01

$\sigma_w^2 I$: varianza del ruido de observación.

$$SR: \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t,t})' (z_t - \hat{y}_{t,t})$$

$$SR_1: \sum_{t=0}^T (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t,t})' (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t,t})$$

$$SR_2: \sum_{t=0}^T (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t,t})' (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t,t})$$

$$SR_3: \sum_{t=0}^T (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t,t})' (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t,t})$$

Tabla 2. Modelo 2. Estimaciones de la aversión relativa al riesgo y del parámetro A_N que minimizan cada una de las sumas residuales SR, SR_1, SR_2, SR_3 para diferentes varianzas del error de observación.

		SR	SR ₁	SR ₂	SR ₃
$\sigma_w^2=0.000100$	$\hat{\sigma} =$	1.40	1.15	2.65	1.15
	$\hat{A}_N =$	2.72	2.42	4.89	2.42
$\sigma_w^2=0.000050$	$\hat{\sigma} =$	1.40	1.15	2.65	0.65
	$\hat{A}_N =$	2.72	2.42	4.89	1.91
$\sigma_w^2=0.000010$	$\hat{\sigma} =$	1.40	1.15	5.40	0.65
	$\hat{A}_N =$	2.72	2.42	17.83	1.91
$\sigma_w^2=0.000005$	$\hat{\sigma} =$	1.40	1.15	3.90	0.65
	$\hat{A}_N =$	2.72	2.42	8.81	1.91
$\sigma_w^2=0.000001$	$\hat{\sigma} =$	3.40	1.15	3.90	1.15
	$\hat{A}_N =$	6.96	2.42	8.81	2.42

$\sigma_w^2 I$: varianza del ruido de observación.

$$SR: \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{1,t})'(z_t - \hat{y}_{1,t}).$$

$$SR_1: \sum_{t=0}^T (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t})'(z_{1,t} - \hat{y}_{1,t}).$$

$$SR_2: \sum_{t=0}^T (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t})'(z_{2,t} - \hat{y}_{2,t}).$$

$$SR_3: \sum_{t=0}^T (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t})'(z_{3,t} - \hat{y}_{3,t}).$$

Tabla 3. Modelo 3. Estimaciones de la aversión relativa al riesgo y del parámetro A_N que minimizan cada una de las sumas residuales SR, SR_1, SR_2, SR_3 para diferentes varianzas del error de observación.

		SR	SR ₁	SR ₂	SR ₃
$\sigma_w^2=0.000100$	$\hat{\sigma} =$	4.41	0.66	4.91	3.91
	$\hat{A}_N =$	8.55	15.96	8.43	8.71
$\sigma_w^2=0.000050$	$\hat{\sigma} =$	4.41	0.66	4.91	3.91
	$\hat{A}_N =$	8.55	15.96	8.43	8.71
$\sigma_w^2=0.000010$	$\hat{\sigma} =$	4.41	0.66	4.91	3.16
	$\hat{A}_N =$	8.55	15.96	8.43	9.07
$\sigma_w^2=0.000005$	$\hat{\sigma} =$	4.41	0.66	4.91	3.91
	$\hat{A}_N =$	8.55	15.96	8.43	8.71
$\sigma_w^2=0.000001$	$\hat{\sigma} =$	4.41	0.66	4.91	4.41
	$\hat{A}_N =$	8.55	15.96	8.43	8.55
$\sigma_w^2=0.0000001$	$\hat{\sigma} =$	4.41	0.66	4.91	4.41
	$\hat{A}_N =$	8.55	15.96	8.43	8.55

$\sigma_w^2 I$: varianza del ruido de observación.

$$SR: \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{1,t})'(z_t - \hat{y}_{1,t}).$$

$$SR_1: \sum_{t=0}^T (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t})'(z_{1,t} - \hat{y}_{1,t}).$$

$$SR_2: \sum_{t=0}^T (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t})'(z_{2,t} - \hat{y}_{2,t}).$$

$$SR_3: \sum_{t=0}^T (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t})'(z_{3,t} - \hat{y}_{3,t}).$$

Tabla 4. Modelo 3. Estimaciones de la aversión relativa al riesgo y del parámetro A_w que minimizan cada una de las sumas residuales SR, SR_1, SR_2, SR_3 para diferentes valores de estado estacionario de la proporción de tiempo dedicado a trabajar ($\sigma_w^2=0.0000001$, la que minimiza las sumas residuales).

		SR	SR_1	SR_2	SR_3
$LSS=1/3$	$\hat{\sigma} =$	4.41	0.66	4.91	4.41
	$\hat{A}_w =$	8.55	15.96	8.43	8.55
$LSS=1/4$	$\hat{\sigma} =$	4.16	0.66	4.66	4.16
	$\hat{A}_w =$	8.20	12.99	8.13	8.20
$LSS=1/5$	$\hat{\sigma} =$	3.91	0.66	4.41	3.91
	$\hat{A}_w =$	8.10	12.11	8.06	8.10

LSS : valor de estado estacionario de la proporción de tiempo dedicado a trabajar.

$$SR: \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t|t})' (z_t - \hat{y}_{t|t})$$

$$SR_1: \sum_{t=0}^T (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t|t})' (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t|t})$$

$$SR_2: \sum_{t=0}^T (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t|t})' (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t|t})$$

$$SR_3: \sum_{t=0}^T (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t|t})' (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t|t})$$

Tabla 5. Valores de las sumas residuales óptimas para cada uno de los modelos estudiados.

	SR	SR_1	SR_2	SR_3	$ \lambda^{MAX} $
MODELO 1	0.000437	0.000010	0.000010	0.000010	0.007000
MODELO 2	0.077667	0.011533	0.005320	0.000465	0.049870
MODELO 3	0.042200	0.013200	0.003400	0.013000	0.148600

$$SR: \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t|t})' (z_t - \hat{y}_{t|t})$$

$$SR_1: \sum_{t=0}^T (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t|t})' (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t|t})$$

$$SR_2: \sum_{t=0}^T (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t|t})' (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t|t})$$

$$SR_3: \sum_{t=0}^T (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t|t})' (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t|t})$$

$||\lambda^{MAX}||$: Convergencia de la norma del máximo autovalor de la matriz $(I-D)Q_t$.

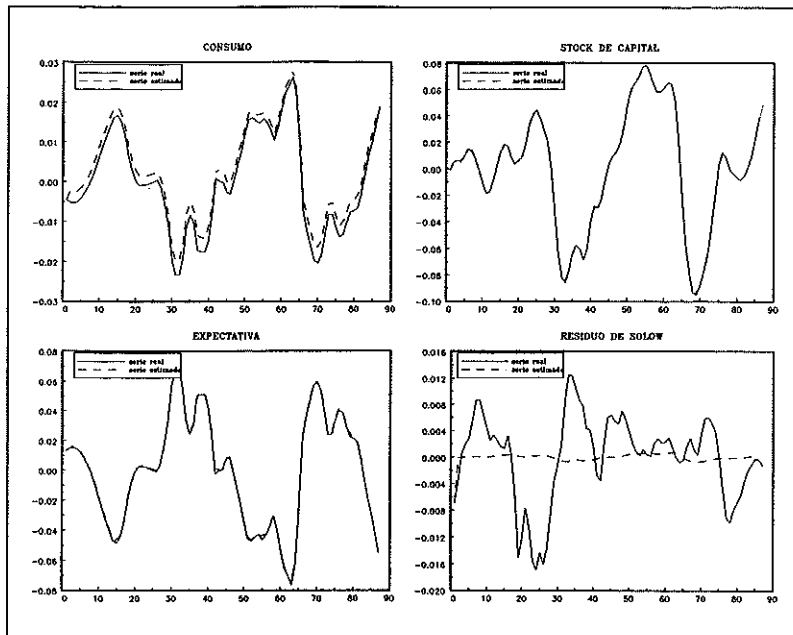


Figura 1. Series históricas filtradas y series estimadas para el parámetro de la aversión relativa al riesgo estimado. Modelo 1.

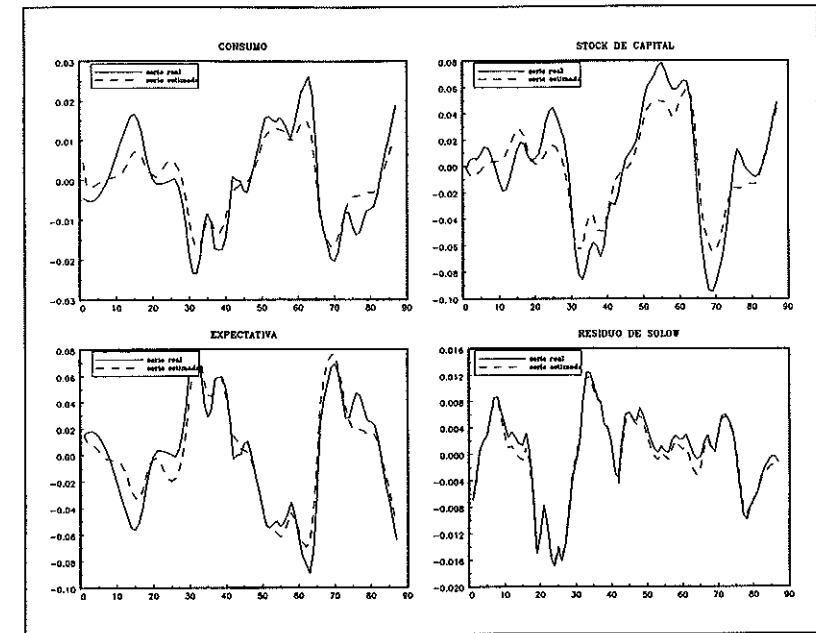


Figura 2. Series históricas filtradas y series estimadas para el parámetro de la aversión relativa al riesgo estimado. Modelo 2.

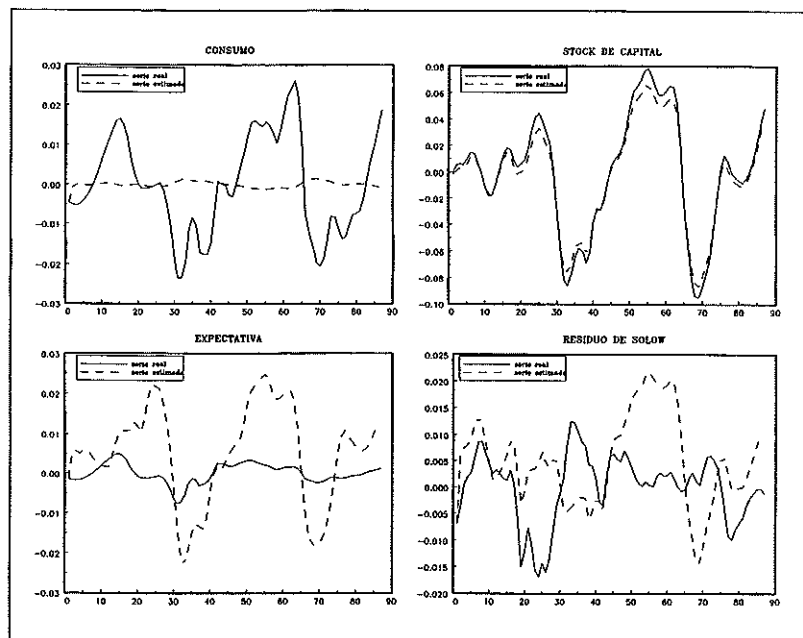


Figura 3. Series históricas filtradas y series estimadas para el parámetro de la aversión relativa al riesgo estimado. Modelo 3.