


# Presentando "sin complejos" los números imaginarios

Blanco Ramos, Francisco

Universidad Complutense de Madrid. Dpto. Estructura de la Materia, Física Térmica y Electrónica  
Facultad de ciencias Físicas, Plaza de las Ciencias s/n, 28040 Madrid, España.

 <https://orcid.org/0000-0003-4332-434X>

7/10/2024

---

**Resumen** Se sugiere la forma de presentar a los estudiantes los números complejos evitando en su definición cualquier referencia a entidades “inexistentes” o “misteriosas” que luego dificultan su asimilación. Pensando en niveles educativos pre-universitarios, se proponen distintas estrategias según los conocimientos previos de los estudiantes. Se pretende así facilitar el aprendizaje, favoreciendo la visualización geométrica de sus propiedades desde el principio.

**Palabras clave** Números complejos, didáctica, interpretación geométrica, vectores, cuaterniones.

---

**Abstract** A way to introduce students to complex numbers is suggested, avoiding any reference to “non-existent” or “mysterious” entities that in the long term cause difficulties to the students. Intended for pre-university educational levels, different approaches are proposed according to the students’ previous knowledge. This aims to facilitate learning by favoring the geometric visualization from the beginning.

**Keywords** Complex numbers, didactics, geometrical interpretation, vectors, quaternions.

---

## 1. Introducción

Son numerosos los estudios dedicados a analizar qué dificultades encuentran los estudiantes al abordar los números complejos. Por citar dos bastante exhaustivos y relativamente recientes, (Pardo y Gómez, 2007) analizan en detalle los principales errores de concepto o de operación en que suelen caer a nivel universitario. Entre sus conclusiones destaca el que los estudiantes tienden a mostrar las mismas dificultades que históricamente marcaron el desarrollo de esta disciplina, y que los métodos de enseñanza seguidos no suelen tenerlo en cuenta o no son eficaces para evitarlo.

Otro ejemplo de análisis con un enfoque similar es el de (Randolph y Parraguez, 2019) abarcando tanto el nivel escolar como el universitario. Entre sus principales conclusiones aparece la importancia de insistir en que los estudiantes logren una visión geométrica e intuitiva de estos objetos, a la que no suelen estar acostumbrados. Tanto este trabajo, como multitud de referencias citadas en él confirman que los estudiantes no logran un dominio de la materia hasta que afianzan de esa interpretación geométrica.

En el fondo todos estos estudios apuntan en la misma dirección, dominarlos exige lograr una intuición geométrica de ellos. Aunque ello ocurre en muchas otras materias, es especialmente acusado en esta. Baste notar que históricamente los números complejos no adquirieron carta de pleno derecho en las matemáticas hasta que Gauss clarificó su naturaleza como puntos del plano con operaciones bien definidas, y hasta que de este modo descartó definitivamente todas las sospechas previas de inconsistencia.

En mi opinión, el esfuerzo por facilitar a los estudiantes la visualización geométrica de los números complejos ya llega tarde si se aborda después de habérselos presentado de forma no geométrica. Si los números complejos se introducen con un “*acepten ustedes la existencia de un  $i=\sqrt{-1}$  aunque no exista*”, ya hemos creado un muro que luego costará mucho derribar.

Raramente se dedica algún tiempo a reflexionar con los estudiantes sobre la naturaleza de los números complejos o su origen. Cuando se imparte un curso avanzado sobre cálculo o álgebra no es necesario, porque ya están suficientemente acostumbrados a su uso. Cuando queremos iniciarlos en su manejo elemental tampoco parece necesario "complicarles la vida", pues basta con darles la misma receta que históricamente usaron sus creadores: *Los complejos son como los reales, salvo que "imaginamos" uno llamado  $i$  con la "absurda" propiedad de  $i^2 = -1$ .*

Definirlos así siembra en los estudiantes la sensación de estar haciendo algo ilegal; la sensación de manejar un producto que "parece funcionar", pero sobre el que no hay ninguna garantía de calidad. Exactamente la misma sensación que tuvieron durante siglos los mejores matemáticos. Aunque el estudiante acostumbrado a memorizar recetas no manifieste ningún escrúpulo en este planteamiento, entre nuestros alumnos suele haber (por suerte) muchos con una mentalidad crítica y racional para la que ello resulta un tanto inquietante.

## 2. ¿Por dónde empezar?

Desde Gauss sabemos que los números complejos son simples vectores del plano. No hay motivo para que éstos queden en el misterio, cuando nadie encuentra "misteriosos" los (aún más "complejos") vectores de 3 dimensiones con sus productos escalares, vectoriales, etc.

El éxito de una explicación suele depender de lograr enlazar lo nuevo con lo que el alumno ya conoce, por lo que la mejor estrategia deberá comenzar por valorar en cada caso sus conocimientos previos; ya sean operaciones algebraicas, vectores en dos o tres dimensiones, funciones trigonométricas, etc. Aunque algunos trabajos previos (Molina, 1998) plantean cómo lograr nuestro mismo objetivo sin hacer uso de vectores, considero que cualquier noción que el estudiante tenga sobre ellos debería aprovecharse. De hecho, todos suelen estar ya familiarizados con las coordenadas cartesianas, lo cual es un buen punto de partida. Sus nociones sobre vectores dependen mucho del nivel en que se encuentren, pero es frecuente que ya hayan tenido contacto con ellos, aunque sólo sea por su aplicación a magnitudes físicas como fuerzas, velocidades o desplazamientos. De ese modo, propondremos dos posibles aproximaciones: Una para niveles más altos, mencionando productos vectoriales y haciendo más uso de operaciones algebraicas y trigonometría, y otro más básico que sólo requiere nociones elementales de vectores sobre el plano.

Parece lógico que cualquier presentación de este tema comience por plantear el problema que les dio origen, seguido de su solución: Ningún número real da un resultado negativo después de elevarlo al cuadrado, de modo que no hay solución para la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  ni para otras muchas que exigirían calcular raíces de números negativos. ¿Serían posibles unos números alternativos para los que ello fuese posible? Sería además fenomenal que esos nuevos números fuesen una "ampliación" de los  $\mathbf{R}$ , de modo que pudiésemos seguir utilizando los habituales, a la vez que ganásemos las posibilidades de los nuevos.

A este nivel los estudiantes ya conocen muy bien situaciones similares. Los números naturales no siempre pueden restarse, lo cual se resuelve ampliándolos con los negativos para tener los enteros. Con estos otros no siempre se puede dividir, lo cual de nuevo se resuelve ampliándolos con las fracciones para tener el conjunto más amplio de los racionales. Nuestro objetivo aquí será el mostrar una nueva ampliación de los números  $\mathbf{R}$  para tener unos nuevos con los que siempre sea posible hacer raíces, de modo que ecuaciones como  $x^2 + 1 = 0$  tengan solución. El resultado serán los denominados "números complejos"  $\mathbf{C}$  que, como en las otras ampliaciones, no sólo resuelven un problema concreto sino que además ofrecen toda una multitud de nuevas posibilidades interesantes.

Aunque algunos estudiantes tienen problemas en su primer contacto con los números negativos en su etapa escolar, a este nivel ya todos están familiarizados con ellos. Por ello, a todos les resulta natural que exista un número (el  $-1$ ) con la capacidad de "darle media vuelta" a cualquier otro al multiplicarlo  $(-1) \cdot 7 = -7$ . Además, resulta evidente que dar media vuelta dos veces a cualquier objeto es volver a dejarlo como estaba  $(-1)^2 \cdot 7 = (-1)(-1) \cdot 7 = 7$ . Por eso mismo, no deberíamos sugerirles que haya algo "misterioso" en tener un número (al que llamaremos  $i$ ) cuya multiplicación provocase "un cuarto de vuelta", de modo que multiplicado dos veces resultase media vuelta  $i \cdot i = -1$ . Naturalmente la novedad está en que media vuelta puede representarse

sin salirse de una recta, pero para un cuarto de vuelta (o cualquier otro giro intermedio) hacen falta al menos las dos dimensiones de un plano.

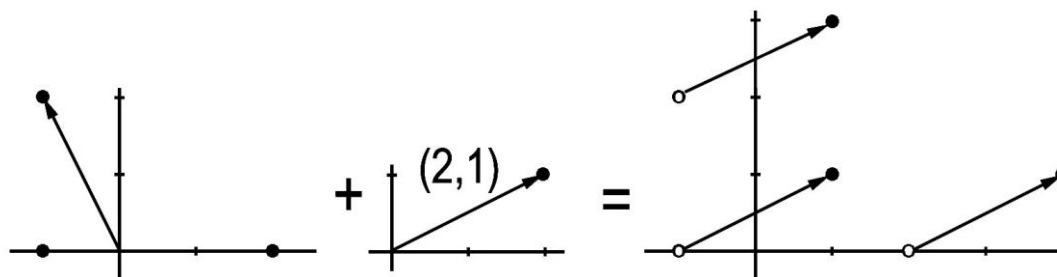
Precisamente en esto consistirá nuestra extensión de la recta  $\mathbf{R}$ , en incluir sus alrededores. Por este motivo los nuevos números  $\mathbf{C}$  serán objetos sorprendentemente sencillos y en el fondo ya conocidos por los estudiantes, simplemente los puntos (vectores) del plano. En el fondo, la única tarea será mostrar cómo “ampliar” las operaciones habituales “+” y “×” de modo que sirvan para los nuevos números vectores, teniendo en mente que (por lo visto antes) la de multiplicar tendrá que estar relacionada con los giros<sup>1</sup>.

### 3. Con lo más básico: moviéndonos sobre el plano

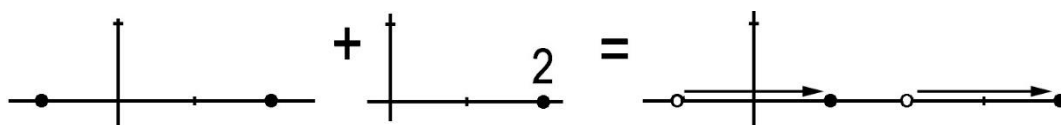
Comenzaremos por una primera propuesta de presentación que apenas requiere más conocimientos previos que el manejo de vectores o puntos del plano por sus coordenadas. Ello ya permite una introducción muy intuitiva y asequible casi para cualquier nivel educativo.

Desde luego, una forma obvia de ampliar los números reales (la recta  $\mathbf{R}$ ) es considerar los puntos del plano. Estos puntos serán pares  $(a,b)$ , donde los  $(a,0)$  claramente siguen siendo los reales. Lo que ya no es tan evidente es cómo ampliar al plano las operaciones “+” y “×” para poder utilizarlas sobre esos puntos del plano, pero de modo que sigan siendo las mismas cuando actúen sobre el eje  $\mathbf{R}$ .

Repasando las operaciones que ya sabemos hacer con vectores, encontramos que su suma  $(a,b)+(u,v)=(a+u, u+v)$  ya cumple esa condición. En efecto, como ilustran las figuras, sumar un vector a otro cualquiera representa su desplazamiento. ¡Y si ambos están sobre el eje real ese desplazamiento coincide con la suma habitual!



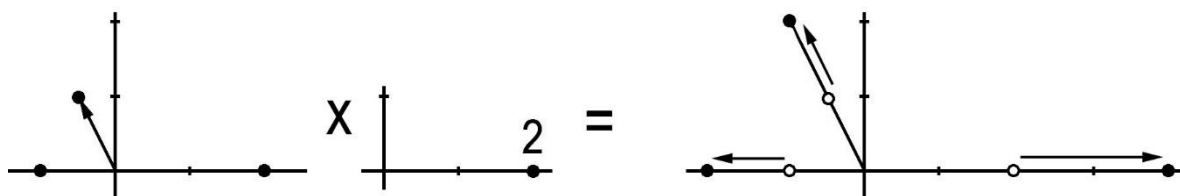
*Ejemplo del desplazamiento que supone para tres puntos  $(-1,0)$ ,  $(-1,2)$  y  $(2,0)$  el sumarles el  $(2,1)$ , resultando  $(-1,0)+(2,1)=(1,1)$ ,  $(-1,2)+(2,1)=(1,3)$  y  $(2,0)+(2,1)=(4,1)$ .*



*Cuando los puntos están sobre el eje  $\mathbf{R}$ , la suma de vectores coincide con la suma habitual de números. La figura ilustra el caso  $(-1,0)+(2,0)=(1,0)$  y  $(2,0)+(2,0)=(4,0)$  comportándose como  $-1+2=1$ , y  $2+2=4$ .*

En cuanto a la multiplicación de vectores por un número  $(u,v) \times a = (au, av)$ , sabemos que representa geoméricamente aplicar un factor de escala “a” (que es una “ampliación” si  $a > 1$ , una reducción si  $|a| < 1$ , y una inversión si  $a < 0$ ). Con esta multiplicación entre números y vectores también estamos de suerte, puesto que, de nuevo, se comporta como la multiplicación habitual sobre los puntos del eje  $\mathbf{R}$ .

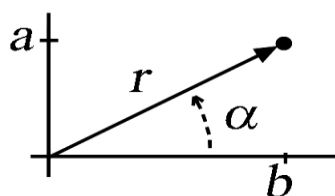
<sup>1</sup> Para alumnos de niveles más avanzados, se les puede notar que más que “ampliar” las “+” y “×” conocidas, realmente se trata de definir unas nuevas  $\oplus$  y  $\otimes$  “vectoriales” entre los nuevos objetos, con la condición de que se comporten como las “+” y “×” habituales cuando actúen sobre los puntos de la recta  $\mathbf{R}$ .



Comportamiento geométrico del producto entre vectores y números. La figura ilustra el efecto de ampliación en un factor 2 por el producto "x2" para los tres vectores  $(-1,0)x2=(-2,0)$ ,  $(-1/2,1)x2=(-1,2)$  y  $(2,0)x2=(4,0)$ . De nuevo, para los vectores que están sobre el eje  $\mathbf{R}$  el comportamiento es el mismo del producto entre números reales  $-1x2=-2$  y  $2x2=4$ .

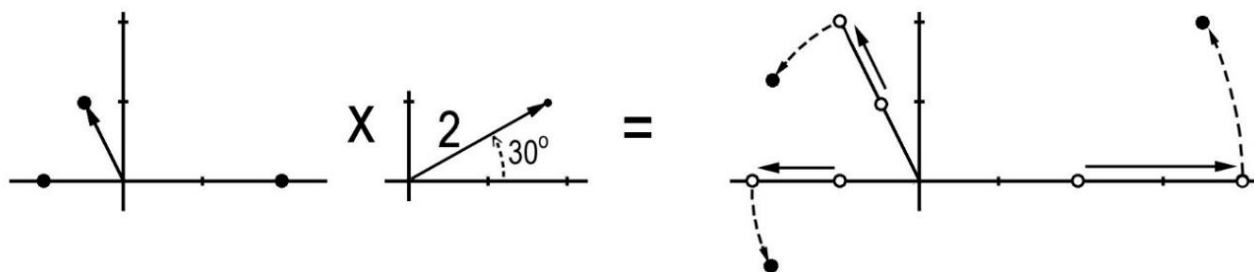
Sólo faltaría por tanto definir una operación de multiplicación cuando el factor no sea un número real, es decir, un punto  $(a,0)$  del eje  $\mathbf{R}$ , sino uno  $(a,b)$  arbitrario fuera de él. Es decir, se trataría de darle sentido a una expresión del tipo<sup>2</sup>  $(u,v)\times(a,v)$ . Ya tenemos operaciones que permiten realizar traslaciones o aplicar factores de escala sobre el plano, desde luego también sería interesante tener alguna que proporcione giros.

Comencemos por observar que cada punto del plano  $(a,b)$  define (respecto al origen de coordenadas) una longitud, pero también un ángulo. Por ello, cada punto del plano queda especificado por sus dos coordenadas cartesianas, pero también si especificamos su distancia al origen " $r$ " y el ángulo " $\alpha$ " que forma con el eje horizontal. Son las denominadas coordenadas "polares"  $r_\alpha$ , ilustradas en la siguiente figura.



Das formas de representar un punto del plano, por sus coordenadas cartesianas  $(a,b)$  y por sus coordenadas polares  $r_\alpha$ .

Pues bien, exploremos la posibilidad de definir la multiplicación por un vector  $(a,b)$  o  $r_\alpha$  como la operación que consista en multiplicar por su distancia " $r$ " y girar su ángulo " $\alpha$ ", según ilustra la figura.



Definido el producto por un vector de coordenadas polares  $r_\alpha$  como una "ampliación  $r$ " + "un giro  $\alpha$ ", la figura ilustra el efecto de multiplicar varios vectores por un  $2_{30^\circ}$ : una ampliación  $x2$  y un giro de  $30^\circ$ .

Obviamente esa forma de definir la multiplicación entre vectores cumple todas nuestras expectativas. En primer lugar permite multiplicar dos vectores cualesquiera, pero es que además coincide con la multiplicación de vectores por números que ya teníamos cuando uno de ellos está sobre el eje  $\mathbf{R}$ , y con la multiplicación habitual entre números cuando ambos están sobre el eje  $\mathbf{R}$ . Basta para ello notar que los números ordinarios interpretados como puntos del plano tienen forma polar  $(a,0)=a_0$ , de modo que multiplicar por ellos supone un factor de escala " $a$ " pero ningún giro<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> El alumno probablemente ya conozca el producto escalar como operación producto entre dos vectores. Habría que hacerle hincapié aquí en que ahora se trata de encontrar un producto vectorial, es decir, una operación entre dos vectores que proporcione otro vector.

<sup>3</sup> Incluso para números negativos, la nueva multiplicación coincidirá con la antigua, porque la forma polar de cualquiera de ellos considerado como punto del plano (por ejemplo  $-2=2_{180^\circ}$ ) provocará un giro de  $180^\circ$  que es el cambio de sentido habitual al multiplicar por números negativos.

El cálculo de este nuevo “producto” de vectores es muy sencillo en coordenadas polares, ya que obviamente  $r_\alpha \times s_\beta = r s_{\alpha+\beta}$  por la forma en que lo hemos definido<sup>4</sup>, pero sería interesante tener algún procedimiento para hacer esas multiplicaciones utilizando las coordenadas cartesianas sin tener que averiguar primero las polares. Para ello<sup>5</sup> será interesante comenzar por analizar cómo se comportan bajo nuestro nuevo producto los vectores básicos que podríamos llamar  $\vec{1}=(1,0)$  y  $\vec{i}=(0,1)$ .

Claramente multiplicar por el vector  $\vec{1}=1_0$  no cambia de escala ni supone ningún giro, de modo que se comporta a todos los efectos como el número real ordinario “1”, y sería natural dejar de mantener la flecha de vector sobre él al escribirlo. En cuanto al vector  $\vec{i} = 1_{90^\circ}$ , el efecto de su multiplicación será únicamente un giro de  $90^\circ$ . De ese modo el producto de  $\vec{i}$  por sí mismo resulta  $\vec{i}^2 = \vec{i}\vec{i} = 1_{90^\circ} \times 1_{90^\circ} = 1_{180^\circ} = (-1,0) = “-1”$ . Es decir, algo tan poco misterioso como que aplicar dos cuartos de vuelta es dar media vuelta (un “cambio de sentido”). ¡Con lo cual hemos logrado nuestro objetivo de tener un objeto cuyo cuadrado sea “-1”! Este  $\vec{i}$  tan deseado promete ser un personaje famoso, y no debería haber ninguna confusión en su manejo por escribirlo simplemente como “ $i$ ”, sin necesidad de mantener la barra de vector sobre él. Eso sí, siendo siempre conscientes de que no es un número del eje  $\mathbf{R}$ , sino que está fuera de esa recta, en su extensión al plano.

Utilizando lo anterior ya es sencillo hacer las nuevas multiplicaciones de vectores utilizando sus coordenadas cartesianas. Basta con escribirlos primero como combinación de esos dos elementales:  $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a\vec{1}+b\vec{i}=a+bi$  (utilizando la notación simplificada  $\vec{1}\rightarrow 1, \vec{i}\rightarrow i$  que acabamos de comentar)<sup>6</sup>. Con ello la nueva multiplicación de dos puntos arbitrarios de coordenadas cartesianas  $(a,b)$  y  $(u,v)$  resultaría

$$(a,b)(u,v) = (a+bi)(u+vi) = a u + a v i + b i u + b v i^2 = (au-bv) + (av+bu)i$$

Donde en el último paso hemos simplificado  $i^2=-1$ , y agrupado los términos que llevan  $i$  y los que no. Como puede verse, realizar la nueva multiplicación de vectores es muy sencillo también en coordenadas cartesianas sin necesidad de recordar ninguna “fórmula especial”, basta escribir esas coordenadas en forma  $a+bi$ , y operar con normalidad simplificando  $i^2$  como -1 cuando aparezca.

De este modo hemos logrado nuestro objetivo: tenemos unos objetos (los puntos del plano) más amplios que los números Reales, pero que los incluyen. Ahora podemos seguir manejando los puntos de la recta  $\mathbf{R}$  como siempre, pero además ahora podemos hacer operaciones con puntos del plano que representan traslaciones, cambios de escala y giros. Y de paso, como regalo, tenemos un objeto  $i$  cuyo cuadrado es -1 de modo que la ecuación  $x^2+1=0$  ya tiene solución. Más aún, escribiendo  $i^2=-1$  como  $i=\sqrt{-1}$  no sólo encontramos cómo darle sentido a la raíz de -1, sino a la de cualquier número negativo:  $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5i$ . Desde luego con tantos “regalos” en un mismo paquete, no es de extrañar que los matemáticos estuviesen encantados con ellos desde su descubrimiento.

Pero a la vez que encantados, unos objetos que se comportaban como números ordinarios pero no lo eran, tuvieron a los mejores matemáticos confusos durante tres siglos. A pesar de todas sus ventajas, por mucho tiempo no pudieron quitarse de encima la desagradable sensación de estar manejando algo misterioso y sin ninguna garantía. ¡Desde luego algo muy incómodo para los profesionales de la ciencia más exacta y rigurosa de todas! De esa época proceden los nombres de “complejos”, y de “unidad imaginaria” para el humilde vector  $i=(0,1)$  con la “misteriosa” propiedad de dar “-1” al elevarlo al cuadrado. Esos nombres son

<sup>4</sup> En este punto se les podría observar en el producto  $1_\alpha \times 1_\beta = 1_{\alpha+\beta}$  los dos números  $\alpha$  y  $\beta$  se suman, lo que debería hacer sospechar que de algún modo sean unos exponentes. Efectivamente Euler descubrió que  $1_\alpha = e^{i\alpha}$ , de modo que ese producto puede escribirse también  $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ .

<sup>5</sup> Por cierto, es bastante evidente que este nuevo “producto” tendrá propiedad distributiva, dado que aplicar un factor de escala ya tenía esa propiedad, y girar el plano también la mantiene. También es clara su propiedad conmutativa, gracias a que las operaciones de cambio de escala y giro dan el mismo resultado sin importar en qué orden se apliquen. Quizá el alumno no sea consciente de ello, pero ambas propiedades serán esenciales en la deducción que haremos del producto en coordenadas cartesianas.

<sup>6</sup> Es decir, la llamada “forma binómica”  $a+bi$  no es otra cosa que una forma simplificada de escribir las expresiones vectoriales  $a\vec{1} + b\vec{i}$  ó  $(a,b)$ .

una reliquia histórica, resultado de los casi 300 años<sup>7</sup> que costó aclarar en qué sentido podía ser negativo el cuadrado de un número. Gauss, que probablemente fue el primero en tener clara su naturaleza, siempre insistió en erradicar la palabra “imaginario” por la facilidad con que sugiere misterio donde no lo hay. Su sugerencia fue denominar a  $i$  “unidad lateral” igual que al “-1” lo denominamos “unidad opuesta” (teniendo en cuenta que  $i$  es precisamente el vector que representa un desplazamiento lateral unidad respecto al eje real). No parece que nadie siguiese su consejo. Al fin y al cabo, aunque sepamos que estos objetos son meros puntos del plano (sin nada “imaginario” ni “complejo”) hay que reconocer que esa terminología tiene su encanto. Además, nos sirve para recordar que todo lo que hoy nos parece tan sencillo, lo es gracias al esfuerzo por clarificarlo de muchos que nos precedieron.

#### 4. Algo más de rigor contando con más recursos

En niveles algo más avanzados (bachillerato o similar) los estudiantes ya tienen algunas nociones de trigonometría, y pueden haber usado vectores en el espacio. En tal caso convendría sacar partido de ello para hacer una presentación algo más rigurosa. Así, a este nivel no debería resultar demasiado intimidatorio comenzar con la siguiente definición:

Llamamos “complejos”  $\mathbf{C}$  a los puntos del plano cotidianos  $\mathbf{R}^2 \{(a,b): a,b \in \mathbf{R}\}$  cuando consideramos entre ellos las siguientes operaciones:

1. La habitual suma de vectores  $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$
2. Este producto “vectorial”  $(a,b) \otimes (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

Igual que en tres dimensiones, estamos llamando “producto vectorial” a una operación “producto” que toma dos vectores y genera otro vector. Nótese que la expresión dada recuerda mucho a la del “producto vectorial” en tres dimensiones  $(a,b,c) \wedge (u,v,w) = (bw-cv, cu-aw, av-bu)$ .

Con esa definición de las nuevas  $\oplus$  y  $\otimes$  es fácil comprobar que todas las operaciones entre los números  $\mathbf{C}$  tienen las mismas propiedades<sup>8</sup> que las de los  $\mathbf{R}$ . Ello significa que el manejo y operativa con números Reales y Complejos es prácticamente idéntico, aunque pocas calculadoras de bolsillo incluyan la opción de operar de este modo con los vectores del plano. Como veremos, estos vectores nos permitirán hacer todo lo que ya podíamos hacer con los números reales, pero muchas cosas más.

Familiaricémonos un poco primero con los nuevos números. Nadie se extraña cuando le presentan tres vectores del espacio etiquetados con los pintorescos nombres de  $\vec{i} = (1,0,0)$ ,  $\vec{j} = (0,1,0)$  y  $\vec{k} = (0,0,1)$ . Su utilidad es la de poder escribir cualquier otro vector como combinación de ellos:

$$(a,b,c) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Por esto no debería sorprender que se proponga aquí lo mismo para los vectores unitarios coordenados del plano. Nombrándolos  $\vec{1} = (1,0)$  e  $\vec{i} = (0,1)$ , es evidente que cualquier complejo se podrá expresar como combinación de ellos  $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a\vec{1} + b\vec{i}$ . A diferencia de lo que ocurre en 3 dimensiones, donde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  son completamente equivalentes, la definición de producto vectorial que acabamos de proponer para el plano hace que  $\vec{1} = (1,0)$  e  $\vec{i} = (0,1)$  tengan propiedades muy diferentes (que son el motivo de haberles asignado esos nombres).

<sup>7</sup> Desde su introducción por Cardano hacia 1545 hasta la publicación por Gauss de su tratado en 1831.

<sup>8</sup> Las mismas propiedades asociativa, conmutativa, distributiva, y elementos neutros y simétricos que proporcionan estructura de “Cuerpo”. De hecho, incluso puede demostrarse que  $\mathbf{C}$  es un Cuerpo Completo (todas sus sucesiones de Cauchy convergen) aunque no ordenado (no puede definirse una relación de orden análoga a la de  $\mathbf{R}$ ).

En efecto, el vector  $\bar{1}$  resulta ser el elemento neutro de esta nueva multiplicación  $\otimes$ , puesto que se tiene  $(a,b)\otimes\bar{1} = (a,b)\otimes(1,0) = (a,b)$ .

Por otra parte el vector  $\bar{i}$  cumple  $\bar{i}\otimes\bar{i} = (0,1)\otimes(0,1) = (-1,0) = -\bar{1}$ , de modo que  $\bar{i}^2 + \bar{1} = \bar{0}$ . Es decir, que la ecuación de partida  $x^2+1=0$  sí tiene soluciones entre estos nuevos números, y una de ellas<sup>9</sup> es precisamente  $\bar{i}$ .

Nuestro objetivo era encontrar unos nuevos números que incluyesen a los reales, resultando una "ampliación" suya. Geométricamente parece obvio que el plano  $\mathbf{R}^2$  sea una ampliación de la recta  $\mathbf{R}$ , pero eso no basta. Habrá que comprobar que las operaciones  $\oplus$  y  $\otimes$  que acabamos de "inventar" para el plano  $\mathbf{R}^2$ , sigan siendo las habituales "+" y "x" cuando se apliquen a los puntos de esa recta  $\mathbf{R}$ .

Efectivamente ello es así, e inmediato de comprobar. Basta observar que, para puntos de la forma  $(x,0)$ , las nuevas operaciones resultan  $(a,0)\oplus(b,0) = (a+b,0)$  y  $(a,0)\otimes(b,0) = (ab,0)$ , de modo que coinciden con las del cuerpo real. De ese modo, el conjunto de puntos del eje de abscisas, esto es la sección del plano  $\mathbf{C}$  formada por la recta  $\{(a,0): a\in\mathbf{R}\}$ , es idéntica ("isomorfa") al conjunto  $\mathbf{R}$ .

Teniendo en cuenta esta similitud, en la práctica es preferible agilizar la notación y dejar de utilizar los símbolos  $\oplus$  o  $\otimes$  para las operaciones entre complejos, empleando los habituales "+" y "x" con los que hemos visto que coinciden cuando no hay segunda coordenada (la que se denomina parte imaginaria). Tampoco merece la pena mantener la notación de vectores, sino que escribimos abreviadamente  $(a,b)=a1+bi=a+bi$  que se denomina "forma binómica". Del mismo modo nunca necesita distinguirse entre el complejo " $(a,0)$ " y el real " $a$ " al que equivale. Por este motivo, es habitual denominar "parte real" a la primera coordenada de un número complejo (la que está sobre el eje  $\mathbf{R}$ ) y parte imaginaria a la segunda (la que está fuera de él apuntando en la dirección  $i$ ).

Aparte de ser vectores que se puedan multiplicar, su mayor virtud es que también se pueden dividir, lo que aporta toda su riqueza de posibilidades. Efectivamente, para todo complejo  $z$  existe su inverso  $z^{-1}$  con el que cumple  $zz^{-1}=1$ , de modo que para dividir simplemente tomamos  $w/z=wz^{-1}$ . La existencia de inverso se basa en la propiedad de que multiplicando cualquier complejo  $z=a+bi$  por lo que se denomina su "conjugado"  $z^+=a-bi$  se obtiene directamente el cuadrado de su módulo  $zz^+=a^2+b^2=|z|^2$ . De ese modo  $zz^+ / |z|^2 = 1$  y por ello el inverso de  $z$  es simplemente  $z^{-1}=z^+ / |z|^2$ ; es decir,  $(a+bi)^{-1}=(a-bi)/(a^2+b^2)$ .

Así como el producto vectorial en 3 dimensiones está relacionado con giros en el espacio, la propiedad más interesante del producto complejo es su utilidad para representar rotaciones y cambios de escala en el plano. Para verlo basta representar los complejos (como puntos del plano que son) en las habituales coordenadas polares  $r_\alpha$  (*módulo* *argumento*). Es trivial darse cuenta de que a unas coordenadas polares  $r_\alpha$  les corresponden las coordenadas cartesianas  $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ , y sólo exige un poco de trigonometría (elemental)<sup>10</sup> comprobar que en estas coordenadas polares el producto complejo se reduce a  $r_\alpha \otimes s_\beta = r s_{\alpha+\beta}$ . Es decir, geoméricamente, el producto complejo  $\otimes$  consiste en multiplicar las distancias al origen, y sumar los ángulos. En otras palabras, multiplicar por un complejo  $r_\alpha$  significa aplicar un factor de escala  $r$  y aplicar un giro  $\alpha$ , como ilustra la siguiente figura.

De este modo, escribiendo en coordenadas polares los números  $i=(0,1)=1_{90}$  y  $-1=(-1,0)=1_{180}$ , descubrimos que multiplicar por  $i$  representa  $1/4$  de vuelta, y confirmamos que el cambio de sentido "-1" no es otra cosa que un giro de media vuelta. Así, la relación  $i^2=-1$  resulta ser algo tan poco misterioso como "dar dos cuartos de vuelta equivalen a un cambio de sentido", esto es  $1_{90} 1_{90}=1_{180}$ . He aquí todo "el misterio" de los números complejos y su "imaginario" personaje.

<sup>9</sup> Como es fácil comprobar, otra solución es  $-i$ .

<sup>10</sup> Efectivamente,  $r_\alpha \otimes s_\beta = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \otimes (s \cos \beta, s \sin \beta) = (rs \cos \alpha \cos \beta - rs \sin \alpha \sin \beta, rs \cos \alpha \sin \beta + rs \sin \alpha \cos \beta) = (rs \cos(\alpha+\beta), rs \sin(\alpha+\beta)) = r s_{\alpha+\beta}$ . Nótese que el penúltimo paso simplemente consiste en aplicar las fórmulas trigonométricas para el ángulo suma  $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , y  $\sin(\alpha+\beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$ .

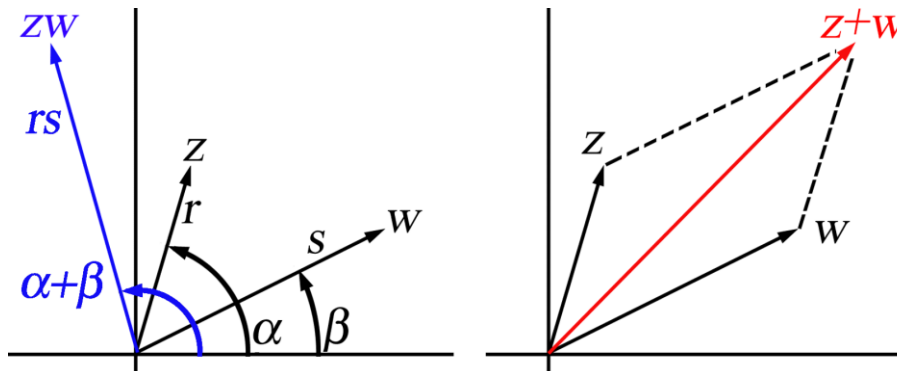


Ilustración de las dos operaciones “complejas”  $\oplus$  y  $\otimes$  entre vectores del plano: el giro asociado al producto  $zw$  (para  $z=re^{i\alpha}$  y  $w=s e^{i\beta}$ ), y la suma habitual de vectores  $z+w$ .

Curiosamente la forma polar  $r_\alpha$  de representar los números complejos es poco habitual, gracias a un descubrimiento debido a Euler. Y es que, si uno compara las series de Taylor para las funciones  $e^x$ ,  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , se encuentra inmediatamente con que  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , es decir, que  $e^{i\alpha} = 1_\alpha$ . De ese modo  $r_\alpha = r \cdot 1_\alpha = r e^{i\alpha}$ , que es la forma más habitual de representarlos. Ello hace más intuitiva la propiedad de que la multiplicación involucre el producto de los módulos y la suma de argumentos, dado que los exponentes se suman en los productos:  $r_\alpha \cdot s_\beta = r e^{i\alpha} s e^{i\beta} = r s e^{i(\alpha+\beta)}$ .

Un caso particular de la anterior expresión es la  $e^{i\pi} = -1$ , que naturalmente es otra forma de escribir  $1_{180} = -1$ . Aunque ya hemos comentado que su significado es tan poco misterioso como que media vuelta (giro  $\pi$  radianes) sea un cambio de sentido, es enormemente popular escrita como  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , por combinar los cinco números más famosos de las matemáticas ( $e, i, \pi, 1, 0$ ).

Un último comentario, sobre las similitudes entre el producto “vectorial” en dos dimensiones y el habitual en tres dimensiones, es indicar que para ambos existe una receta nemotécnica utilizando determinantes:

$$\text{así como } (a,b,c) \wedge (u,v,w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix}, \text{ se tiene también } (a,b) \otimes (u,v) = (a+bi)(u+vi) = \begin{vmatrix} -1 & a & i \\ u & 0 & v \\ i & b & 1 \end{vmatrix}.$$

## 5. Y... ¿en 3 dimensiones?

Tiene su encanto (y su enorme utilidad) el poder manejar los vectores del plano como simples números, y poder hacer con ellos cosas como  $(2,4):(1,1)=(3,1)$ ,  $\sqrt{(3,4)} = \pm(2,1)$  o  $\ln(0,1)=(0, \pi/2)$ . ¿Se podría hacer lo mismo con vectores de 3 dimensiones? La respuesta breve es que no en 3, pero sí en  $3+1=4$  dimensiones, como descubrió el matemático W. R. Hamilton. Esos números se denominan “cuaterniones”.

Los cuaterniones pueden definirse de forma muy parecida a los complejos (Pontriaguin, 2005):

Los cuaterniones son los puntos de  $\mathbf{R}^4$ ,  $\{(a_1, a_2, a_3, a_4): a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}\}$  cuando consideramos entre ellos las siguientes operaciones:

- $(a_1, a_2, a_3, a_4) \oplus (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$

- $(a_1, a_2, a_3, a_4) \otimes (b_1, b_2, b_3, b_4) =$

$$=(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4, a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3, a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 - a_4 b_2, a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1)$$

Es decir, la suma habitual entre vectores, y un nuevo “producto vectorial” en cuatro dimensiones.

Exactamente igual que hicimos con los complejos, conviene introducir los vectores  $\vec{i}=(1,0,0,0)$ ,  $\vec{j}=(0,1,0,0)$ ,  $\vec{k}=(0,0,1,0)$  y  $\vec{l}=(0,0,0,1)$ . Con ellos, ignorando habitualmente los símbolos de vector y abreviando  $\vec{1} \rightarrow 1$ , puede escribirse cualquier cuaternión como  $(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ . Con las anteriores expresiones

es inmediato comprobar para estos vectores unitarios que el  $\vec{1}=(1,0,0,0)$  es el elemento neutro de la multiplicación (que justifica la simplificación  $\vec{1}\rightarrow 1$ ), y que los otros cumplen  $i\otimes j=k$ ,  $j\otimes k=i$ , y  $k\otimes i=j$  (exactamente igual que ocurre con el producto vectorial en tres dimensiones). Además se encuentra que  $i^2=j^2=k^2=-1$ , es decir, que ahora tenemos tres “unidades imaginarias” distintas.

Así como los complejos pueden considerarse una ampliación de los reales, los cuaterniones son aún más amplios y engloban a los otros dos conjuntos. En concreto es fácil comprobar que los cuaterniones de la forma  $(a,0,0,0)=a+0i+0j+0k$  equivalen a los números reales, y los de la forma  $(a,b,0,0)=a+bi+0j+0k$  equivalen a los complejos habituales; o alternativamente los de la forma  $(a,0,c,0)=a+cj$ , o los  $(a,0,0,d)=a+dk$ .

Al igual que el producto vectorial en  $\mathbf{R}^3$ , tampoco el producto de cuaterniones es conmutativo. Esto es,  $Z\otimes W$  es en general diferente que  $W\otimes Z$ . Así, por ejemplo,  $i\otimes j=-j\otimes i$  igual que  $\vec{i}\wedge\vec{j}=-\vec{j}\wedge\vec{i}$  en tres dimensiones. Como veremos, tantas similitudes entre el producto de cuaterniones y el vectorial no son una mera casualidad.

En efecto, otra forma de interpretar los cuaterniones, quizá más intuitiva, es considerarlos como parejas formadas por un número y un vector ordinario de  $\mathbf{R}^3$ . Así la siguiente definición es equivalente a la anterior, pero sin rastro de “entidades imaginarias”:

Los cuaterniones son los pares escalar-vector  $\{(a,\vec{v}): a\in\mathbf{R}, \vec{v}\in\mathbf{R}^3\}$  cuando consideramos entre ellos las siguientes operaciones:

1.  $(a,\vec{v})\oplus(b,\vec{w})=(a+b,\vec{v}+\vec{w})$ .
2.  $(a,\vec{v})\otimes(b,\vec{w})=(ab-\vec{v}\wedge\vec{w}, a\vec{w}+b\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w})$

Es decir, una suma en la que actúan por separado el escalar y el vector, y un producto que combina los (nada misteriosos) productos escalar y vectorial (“ $\cdot$ ” y “ $\wedge$ ”) habituales.

En esta interpretación las “unidades imaginarias”  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  no son otra cosa que los tres vectores unitarios habituales del espacio, para los que el nuevo “producto” coincide con el vectorial cuando son diferentes  $\vec{i}\otimes\vec{j}=\vec{i}\wedge\vec{j}$ , pero en vez de anularse resulta un escalar cuando son iguales  $\vec{i}\otimes\vec{i}=-1$  (y en general  $\vec{v}\otimes\vec{v}=-|\vec{v}|^2$ ). Es decir, los resultados antes indicados  $\vec{i}\otimes\vec{j}=\vec{k}$  ó  $\vec{j}\otimes\vec{i}=-\vec{k}$  son precisamente los bien conocidos del producto vectorial ordinario.

Análogamente a como los complejos tienen “parte real” y “parte imaginaria”, de un cuaternión podemos decir que tiene “parte escalar” y “parte vectorial”. De hecho, con tal de que tengamos cuidado de no confundir ambas, podemos escribir de forma simplificada los cuaterniones como “ $a+\vec{v}$ ”, y calcular su producto  $(a+\vec{v})\otimes(b+\vec{w})$  como los habituales productos entre números y vectores, junto con la “receta”  $\vec{v}\otimes\vec{w}=\vec{v}\wedge\vec{w}-\vec{v}\vec{w}$  para sus partes vectoriales.

Una tercera definición equivalente para los cuaterniones consiste en considerarlos vectores de dos coordenadas complejas  $(z_1, z_2)$  para los que se define el producto  $(z_1, z_2)\otimes(w_1, w_2)=(z_1w_1-w_2z_2, z_1w_2+z_2w_1)$ . Esto significa que los cuaterniones pueden interpretarse simplemente como números de la forma  $a+bj$ , donde  $a$  y  $b$  son a su vez números complejos, y  $j$  es otro número imaginario diferente del  $i$  (pero que también cumple  $j^2=-1$ ). Es decir, unos complejos de complejos.

Quizá la versión más “exótica” de los cuaterniones sea la que encontramos en física cuántica en conexión con el concepto de espín. Ello es debido a que las matrices de Pauli  $\{I, i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z\}$ , con que se describe el momento angular de algunas partículas, se comportan exactamente como los cuaterniones  $\{1, i, j, k\}$ . Ello hace que puedan usarse unas u otros casi indistintamente para manejar los q-bits de los futuros ordenadores cuánticos.

Aunque cuaterniones y complejos sean objetos bien diferentes, muchas de sus propiedades tienen gran similitud. Así, por ejemplo, igual que todo complejo puede escribirse en la forma  $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ , también todo cuaternión puede escribirse como  $r(\cos\alpha + \vec{u}\sin\alpha)$  donde  $r$  es su módulo y  $\vec{u}$  es un vector unitario tridimensional. De hecho, la expresión  $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$  de los complejos tiene el equivalente

$e^{a+b\vec{u}} = e^a(\cos b + \vec{u} \operatorname{sen} b)$  para cuaterniones, válida para cualquier vector unitario  $\vec{u}$  de  $\mathbf{R}^3$ . De ese modo resulta  $e^{i\pi} + 1 = 0$  como generalización para vectores de la famosa relación  $e^{i\pi} + 1 = 0$  para complejos.

Exactamente igual que vimos para los complejos, se denomina conjugado de un cuaternión  $Z = a + \vec{v}$  al  $Z^+ = a - \vec{v}$ , e igual que allí tienen la propiedad de que  $ZZ^+ = Z^+Z = a^2 + |\vec{v}|^2 = |Z|^2$ . Gracias a ello, todo cuaternión (salvo el 0) tiene inverso que puede escribirse como  $Z^{-1} = Z^+ / |Z|^2$ , y podemos dividirlos. Ello permite manejarlos casi como números ordinarios, aunque la falta de propiedad conmutativa para el producto limite un poco la libertad de operaciones con ellos. Por citar un par de ejemplos, dado el vector  $\vec{v} = (-1, 0, 2)$  es fácil comprobar que  $(5 + \vec{v}) / \vec{v} = 1 - \vec{v}$ , o que  $\sqrt{2\vec{v} - 4} = \pm(\vec{v} + 1)$ <sup>11</sup>.

A pesar de los esfuerzos de Hamilton por difundir los cuaterniones, estos cayeron prácticamente en desuso tras su descubrimiento, ya que para la mayoría de las aplicaciones en física bastan los escalares y vectores ordinarios que son de manejo más sencillo. Su “triumfo final” tuvo que esperar a nuestros días, con la aparición de la animación de gráficos por ordenador, el control de satélites o la robótica. En todas esas aplicaciones es necesario el cálculo numérico muy eficiente de giros en el espacio, para los que los cuaterniones resultan ser insuperables. En concreto, cada cuaternión de la forma  $G = \cos \theta/2 + \vec{u} \operatorname{sen} \theta/2$  representa un giro de ángulo  $\theta$  en torno al vector unitario  $\vec{u}$ , y aplicar ese giro a un vector cualquiera  $\vec{v}$ , simplemente requiere la multiplicación de cuaterniones  $\vec{v}' = G\vec{v}G^+$ . Además la composición de varios giros es muy simple, porque si éstos vienen representados con los cuaterniones  $A, B, C, \dots$  al resultado de hacer todos ellos (y en ese orden) le corresponde simplemente el cuaternión producto  $ABC \dots$



*Poco imaginaba Hamilton que sus queridos cuaterniones triunfarían al fin, gracias a los videojuegos y la animación por ordenador. Imagen de David Parking tomada de (Rowlett 2011)*

De ese modo, el que su producto no siempre sea conmutativo, impide hacer con ellos algunas operaciones que sí son posibles con los reales o los complejos; pero lejos de ser un defecto resulta su mayor virtud en ese contexto.<sup>12</sup>

De modo jocoso, la ilustración (Rowlett, 2011) muestra la sorpresa que se llevaría Hamilton al enterarse de que el triunfo de sus queridos cuaterniones tuvo que esperar 160 años a que la industria que más dinero mueve en el mundo (el cine y los videojuegos) los necesitase para la animación de gráficos por ordenador.

## 6. Conclusiones

Aunque todos los libros de texto citen la identificación de los complejos con el plano real, es habitual que se refieran a ella como una mera “interpretación geométrica” después de haber descrito todas sus otras propiedades. Ello suele dar al alumno la impresión de ser “un mero artificio” para intentar visualizarlos y no su verdadera naturaleza. ¿Acaso alguien considera “un mero artificio” el visualizar los números reales como los puntos de una recta? Dar más relevancia a ese aspecto geométrico facilitaría desmitificarlos, y más aún comentar su paralelismo con el familiar cálculo vectorial en 3 dimensiones.

Muchos textos para estudiantes de ingeniería comienzan por “postular” algunos fenómenos como números complejos, y utilizarlos sin más explicación que lo afortunado de esa “magia”. Costaría poco explicar que cualquier fenómeno periódico, fijada su frecuencia, se caracteriza por dos magnitudes inseparables

<sup>11</sup> En general todo cuaternión tiene dos raíces cuadradas, salvo los reales negativos que tienen infinitas, ya que todo vector unitario cumple  $\vec{u}^2 = -1$ , y por tanto  $\sqrt{a} \vec{u}$  es raíz de  $-a$ .

<sup>12</sup> Ya que precisamente así es como se comportan la combinación de giros de un objeto en el espacio, el resultado es distinto según cuál se haga primero. Es la misma falta conmutatividad del producto vectorial de vectores ordinarios, con la que en el fondo está íntimamente relacionadas.

(intensidad y fase) y que precisamente eso es un número complejo en forma polar. Basta comparar cualquier cálculo sencillo realizado con ellos y con funciones trigonométricas, para convencer de la enorme simplificación suponen. Ese tipo de introducción no debería faltar para evitar a los estudiantes la impresión de estar utilizando misteriosas entidades, o “trucos” que funcionan inexplicablemente.

Del mismo modo, al presentar la mecánica cuántica, lejos de sugerir una misteriosa naturaleza “semifantasmal imaginaria” para la función de ondas, es más racional explicar que es simplemente un campo vectorial de dos componentes (de nuevo amplitud y fase). No hay porqué sugerir algún misterio en campos vectoriales de dos dimensiones cuando nadie ve misterio alguno en los de tres dimensiones.

Presentar a nuestros alumnos los complejos como simples vectores de dos coordenadas, y no como misteriosos objetos, es sencillo y debería ser casi una obligación moral. En carreras técnicas/científicas no es lógico exigir rigor y meticulosidad, a la vez que “actos de fe” con algunas de las herramientas más básicas.

## Bibliografía

- Molina, C. (1998) Nota sobre los números complejos en el Bachillerato. *Números* v.35, 11-15.
- Pardo, T y Gómez, B. (2007) La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, 2(1), 3-15.
- Pontriaguin, L. S. (2005). *Generalizaciones de los números*, p. 69-104. Ed. URSS.
- Randolph, V. N. y Parraguez, M. C. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Form. Univ.* vol.12 no.6, 1-32.  
<http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600057>
- Rowlett P. (2011) *The unplanned impact of mathematics*”. *Nature* 166 475,  
<http://www.nature.com/nature/journal/v475/n7355/pdf/475166a.pdf>