

CURSO 2020/2021

TRABAJO DE FIN DE GRADO

COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

JAVIER GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

DIRIGIDO POR JESÚS M. RUIZ



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DOBLE GRADO EN FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Madrid, 10 de julio de 2021

COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

JAVIER GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

RESUMEN. La memoria busca introducir los conceptos y resultados básicos de cohomología para después tratar la cohomología de de Rham. Primero se desarrolla la teoría sin soporte compacto y a continuación con soporte compacto. Más adelante estudiamos lo necesario de teoría de grado y de funciones de Morse para poder enunciar y demostrar el teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse. También incluiremos una aplicación topológica de los resultados sobre grado para aplicaciones diferenciables. Por último usaremos un resultado de la teoría de Morse para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet y probamos el teorema de Reeb que caracteriza topológicamente las esferas mediante funciones de Morse.

Palabras clave: cohomología de de Rham, operador de Poicaré, sucesión de Mayer-Vietoris, teoría de grado, funciones de Morse, campo tipo gradiente, Poincaré-Hopf, Gauss-Bonnet, Reeb.

ABSTRACT. This work seeks to introduce cohomology's basic concepts and results, so they can be applied to de Rham cohomology. First non-compact support theory is developed, then with compact support. Afterwards we study the required theory about degree and Morse functions to be able to state and prove the Poincaré-Hopf theorem for Morse functions. We will also include a nice topological application of degree theory. Then we show a proof of Gauss-Bonnet theorem using a result from Morse theory. Finally we prove Reeb's theorem which gives a topological characterization of spheres through Morse functions.

Keywords: de Rham cohomology, Poincaré operator, Mayer-Vietoris sequence, degree theory, Morse functions, gradient-like vector field, Poincaré-Hopf, Gauss-Bonnet, Reeb.

ÍNDICE

Introducción	1
1. Preliminares	3
2. Complejos de cocadenas	6
3. Cohomología de de Rham	10
4. Sucesión de Mayer-Vietoris	12
5. Homotopía	14
6. Cohomología de de Rham con soporte compacto	16
7. Cohomología con soporte compacto e integración	17
8. Grado de una aplicación propia	20
9. Una aplicación topológica	23
10. Funciones de Morse	23
11. Campos tipo gradiente	26
12. Teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse	28
13. Elemento de volumen y curvatura de hipersuperficies	31
14. El teorema de Gauss-Bonnet	32
15. El teorema de Reeb	36
Referencias	37

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una introducción a la cohomología de de Rham y a las funciones de Morse. Salvo para los teoremas de Stokes, del borde y de Poincaré-Hopf nos vamos a restringir a variedades sin borde, en cambio no exigiremos compacidad en ocasiones en las que las referencias sí lo hacen. En primer lugar desarrollamos unos preliminares en los que sentaremos la notación y los conceptos fundamentales que se suponen conocidos para la comprensión de la memoria, como qué es una variedad diferenciable, campos y formas diferenciables, la integral de formas con soporte compacto y el teorema de Stokes. Además enunciaremos algunos resultados de homotopía, entornos tubulares y aproximación de aplicaciones continuas por diferenciables.

A continuación definimos los objetos de la teoría de cohomología, entre ellos los complejos de cocadenas, los espacios de cohomología o las aplicaciones de cocadenas y sus aplicaciones inducidas. También demostramos las herramientas básicas con las que poder trabajar. La cohomología de de Rham no es más que un caso particular en el que los espacios vectoriales sobre los que se construye el complejo son las formas diferenciables de grado p y la diferencial exterior enlaza los espacios. Concluimos esta sección con el lema

de Poincaré, el cual nos dice que en un espacio contráctil todas las formas cerradas tienen primitiva.

La siguiente sección está dedicada a la sucesión de Mayer-Vietoris, que permite calcular los grupos de cohomología de una variedad a partir de los de abiertos que la cubren e intersecciones de estos. Como aplicación de esta herramienta junto a los entornos tubulares deducimos que todos los grupos de cohomología de variedades compactas tienen dimensión finita.

Antes de terminar de presentar la teoría de cohomología de de Rham sin soporte compacto mostramos su relación con la homotopía, la cual permite, junto a la aproximación de aplicaciones continuas, definir de modo consistente la aplicación inducida por una aplicación continua en el complejo de de Rham. El uso de la homotopía también permite calcular con facilidad los grupos de cohomología de espacios afines perforados.

Nuestro siguiente objetivo es estudiar la cohomología cuando las formas diferenciables son con soporte compacto. Revisamos qué resultados se mantienen y cuáles hay que modificar. El lema de Poincaré no puede mantenerse, sin embargo un resultado previo de gran utilidad sí: el operador de Poincaré. Asimismo la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris “cambia el sentido de sus flechas”. Al exigir soporte compacto ganamos una herramienta potente: la integral. Gracias a la integral demostramos que el grupo de cohomología de grado máximo es isomorfo a $\mathbb{R}$ para variedades orientables y conexas. Terminamos la sección con un breve comentario acerca de la dualidad de Poincaré, que permite aprovechar la integral para grado no máximo y relaciona formas con y sin soporte compacto.

Aprovechando el isomorfismo entre el grupo de cohomología de grado máximo y $\mathbb{R}$ introducimos el grado como un número característico de las aplicaciones propias entre variedades que relaciona integrales en la variedad dominio e imagen. De nuevo gracias a la homotopía podemos extender su definición a aplicaciones continuas. Concluimos con el teorema del borde, que será clave más adelante. Como aplicación topológica de la teoría de grado, a continuación mostramos que un espacio afín de dimensión impar no es homeomorfo al producto de un espacio topológico por sí mismo.

Las funciones de Morse son aquellas cuyos puntos críticos son no degenerados. Dividimos su presentación en dos secciones: en la primera mostramos que estas funciones abundan y que tienen una expresión local sencilla. En la segunda definimos y demostramos la existencia de campos tipo gradiente, sustitutos del gradiente como campo vectorial en el que crece la función, y que serán de gran utilidad en la siguiente sección.

Reuniendo lo trabajado en la sección anterior y el teorema del borde demostramos el teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse, que relaciona las funciones de Morse con el grado de la aplicación de Gauss del borde de un entorno tubular de la variedad. Gracias a un resultado que enunciamos de teoría de Morse usamos el teorema de Poincaré-Hopf para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet. Concluimos la memoria demostrando el teorema de Reeb que caracteriza cuándo una superficie compacta de dimensión m es homeomorfa a una esfera.

1. PRELIMINARES

Para fijar la terminología y las notaciones de esta memoria empecemos diciendo que *diferenciable* significa de clase infinito. Una *variedad diferenciable* es un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^m$, o a un semiespacio $\mathbb{H}^m = \{x_1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$ para el caso de variedades con borde, y m es la dimensión de M . Las aplicaciones y variedades serán diferenciables salvo que se especifique que son continuas o topológicas respectivamente, en cuyo caso pueden no ser diferenciables. Siempre usaremos m para denotar la dimensión de M , que será sin borde si no se dice lo contrario.

Una *parametrización* es un difeomorfismo de un abierto de $\mathbb{R}^m$ sobre un abierto de M y las denotaremos por φ . La inversa de una parametrización se llama *sistema de coordenadas* y en general denotaremos $\varphi^{-1} = x = (x_1, \dots, x_m)$, aunque cuando pueda dar lugar a confusión cambiaremos a h . Para cualquier punto $a \in M$ la imagen $T_a M = d_{x(a)}\varphi(\mathbb{R}^m)$ no depende de la parametrización y es el *espacio tangente* en a . La imagen de la base canónica sí depende de la parametrización y se llama *base de parciales*: $\partial/\partial x_i := d_{x(a)}\varphi(e_i)$.

Un *campo diferenciable* es una aplicación diferenciable $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X_a \in T_a M$ para todo $a \in M$. Un *flujo* es una aplicación diferenciable

$$\varphi : W \rightarrow M : (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$$

tal que $\varphi_0 = \text{Id}$, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ cuando la composición tiene sentido. El conjunto W es un entorno abierto de $\{0\} \times M$ en $\mathbb{R} \times M$. Dado $t \in \mathbb{R}$, si existe un $x \in M$ tal que $(t, x) \in W$, entonces φ_t es un difeomorfismo entre abiertos de M con inverso φ_{-t} . Un campo X genera φ si para todo $x \in M$ se cumple

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0} = X_x.$$

Todo campo genera un flujo. En el caso especialmente importante en que $W = \mathbb{R} \times M$ se dice que el campo X o el flujo φ son completos. Una condición suficiente para que esto ocurra es:

Proposición 1.1. *Si X es un campo diferenciable con soporte compacto ($X \equiv 0$ fuera de un compacto) entonces genera un flujo completo $\varphi_t : M \rightarrow M$.*

Una *forma diferencial de grado p* es una aplicación que asigna a cada punto de la variedad una forma multilinear alternada que actúa sobre el tangente en ese punto, $x \mapsto \alpha_x \in \Lambda^p(T_x M)$. Una forma de grado p es *diferenciable* cuando al actuar sobre p campos diferenciables se obtiene una función diferenciable. En general se supondrá diferenciability para campos, formas y aplicaciones salvo que se indique lo contrario, como en homotopía. El conjunto de las formas diferenciales de grado p se denota por $\Gamma^p(M)$.

Se define la *diferencial* de una función como $df_x = d_x f$, que es una forma diferencial. Esta definición nos permite introducir la representación local de una forma, que resulta de gran utilidad. Si (x_i) es un sistema de coordenadas en U :

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \alpha_x \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \right|_x \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \equiv \sum_I \alpha_I(x) dx_I$$

Dada una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ se define el *pullback* como $(f^*\alpha)_x = (d_x f)^* \alpha_{f(x)}$, esto es:

$$(f^*\alpha)_x(u_1, \dots, u_p) = \alpha_{f(x)}(d_x f(u_1), \dots, d_x f(u_p)) \text{ para } u_i \in T_x M.$$

La diferencial de una función se extiende a grados $p > 0$ con la *diferencial exterior*:

Proposición 1.2. *Existe una única aplicación $d : \Gamma^p(M) \rightarrow \Gamma^{p+1}(M)$ que en $\Gamma^0(M) = C^\infty(M)$ es la diferencial, es nilpotente $d \circ d = 0$, y*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \text{ con } p \text{ el grado de } \alpha.$$

Las formas diferenciales ω tales que $d\omega = 0$ se llaman *cerradas*, cuando además existe α con $\omega = d\alpha$, se dice que α es una primitiva de ω y que ω es *exacta*.

Una variedad es *orientable* cuando se puede asignar a cada tangente una orientación “que varía diferenciablemente”. Un sistema de coordenadas se dice *compatible* con la orientación si las derivadas parciales son una base positiva del tangente en cada punto del dominio de coordenadas. Un cambio de coordenadas es *positivo* si lo es su determinante jacobiano. Podemos definir ahora con rigor que una variedad es orientable cuando existe un atlas con todos los cambios de coordenadas positivos, y este atlas nos dará en cada punto la orientación de sus parciales. Un resultado importante es que una variedad es orientable si y sólo si existe una forma diferencial de grado máximo nunca nula.

Para definir la integración de formas diferenciales introducimos las formas con soporte compacto, $\Gamma_c^p(M) \subset \Gamma^p(M)$ que son las que se anulan fuera de un compacto. En $\mathbb{R}^m$ tenemos un sistema de coordenadas global por lo que todas las formas diferenciales de grado máximo se expresan como

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

con f una función diferenciable y las formas con soporte compacto son aquellas para las que f tiene soporte compacto. Se define la integral de la forma ω en un abierto de $\mathbb{R}^m$ que contenga su soporte como

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^m} f.$$

Esta definición se extiende a cualquier variedad orientable:

Proposición y definición 1.3. *Existe una única forma lineal $\int_M : \Gamma_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que si $\{\varphi, U\}$ es un sistema de coordenadas compatible con la orientación y ω se anula fuera de U entonces*

$$\int_M \omega = \int_{\varphi^{-1}(U)} \varphi^* \omega.$$

Quizá uno de los teoremas más importantes de integración en variedades es el teorema de Stokes.

Teorema 1.4 (de Stokes). *Si $\omega \in \Gamma_c^{m-1}(M)$, entonces $\omega|_{\partial M} \in \Gamma_c^{m-1}(\partial M)$, $d\omega \in \Gamma_c^m(M)$ y*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

En particular, si M no tiene borde las formas exactas con soporte compacto tienen integral nula.

En ocasiones querremos hacer uso de resultados de $\mathbb{R}^n$ en variedades, para lo que son de gran ayuda los *entornos tubulares*, abiertos de $\mathbb{R}^n$ que “envuelven” la variedad y mantienen algunas de sus propiedades.

Teorema 1.5. *Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable sin borde existen un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a M y una retracción diferenciable $r : V \rightarrow M$ (una extensión diferenciable de la identidad de M) tales que:*

1. *Si $x \in V$, $y \in M$, $y \neq r(x)$, entonces $\|x - r(x)\| < \|x - y\|$.*
2. *Para cada $x \in M$ la fibra $r^{-1}(x)$ es una bola abierta en $x + T_x M^\perp$, con centro x y radio $\rho(x)$. Se puede escoger ρ como una función positiva diferenciable en M , y constante si M es compacta.*
3. *Dada una función diferenciable positiva $\varepsilon < \rho$, el conjunto*

$$S_\varepsilon = \{x \in V : \|x - r(x)\| = \varepsilon(r(x))\}$$

es una variedad diferenciable de codimensión 1.

Se dice que V es un entorno tubular de M de radio ρ . Si observamos que por el punto 1 se cumple $d(x, M) = \|x - r(x)\|$, el punto 3 nos dice que en variedades compactas para cualquier $\varepsilon < \rho$ los puntos a distancia ε de M conforman una variedad de codimensión 1.

Aunque se darán por conocidos los resultados básicos de homotopía, conviene recordar algunos conceptos.

Definición 1.6. Si X, Y son espacios topológicos, se dice que dos aplicaciones continuas $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ son *homótopas* si existe $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tal que $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$.

La *homotopía* es una relación de equivalencia y la denotaremos por $\simeq$. Además si $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ son homótopas y $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ también, entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Definición 1.7. Se dice que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es una *equivalencia de homotopía* si existe otra aplicación continua $g : Y \rightarrow X$, su *inversa homotópica*, tal que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Dos espacios topológicos son *homotópicamente equivalentes* cuando existe una equivalencia de homotopía entre ellos.

Ser homotópicamente equivalentes es una relación de equivalencia y sus clases se llaman *tipos de homotopía*. Los espacios homotópicamente equivalentes a un punto se dicen *contráctiles*.

Aunque en topología lo usual sea exigir solo continuidad esto no será un problema pues vamos a ver que en general las aplicaciones continuas se pueden aproximar por diferenciables, o que dada una aplicación continua podemos encontrar otra diferenciable homótropa a esta.

Teorema 1.8. *Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua (propia) entre ellas. Para toda función positiva $\varepsilon : M \rightarrow (0, \infty)$ existe una aplicación diferenciable (propia) $g : M \rightarrow N$ tal que*

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon(x) \quad \text{para todo } x.$$

Si f es diferenciable en un abierto $U_0 \subset M$ y $A \subset U_0$ es un cerrado entonces puede exigirse que la aproximación diferenciable coincida con f en A .

Concluimos esta sección con el siguiente teorema:

Teorema 1.9. *Si M, N son variedades diferenciables entonces toda aplicación continua $f : M \rightarrow N$ es homótopa a una aplicación diferenciable. Además si dos aplicaciones homótopas son diferenciables, existe una homotopía diferenciable entre ellas.*

En particular, la identidad y una constante son diferenciables, luego un espacio contráctil es diferenciablemente contráctil.

2. COMPLEJOS DE COCADENAS

Esta sección tratará sobre los complejos de cocadenas, que formalizan el marco abstracto en el que se encuadra la cohomología de de Rham. Para ello introducimos las siguientes nociones.

Una sucesión de espacios vectoriales y aplicaciones lineales

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se dice *exacta* cuando $\text{im } f = \ker g$. Una sucesión exacta es *exacta corta* cuando es exacta la sucesión:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es decir, f es inyectiva y g sobreyectiva. En estas sucesiones g induce un isomorfismo:

$$\text{coker}(f) = B / \text{im } f \cong C.$$

El siguiente lema sobre sucesiones exactas cortas nos será de utilidad más adelante:

Lema 2.1. *Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es una sucesión exacta corta entonces $B \cong A \oplus C$.*

Demostración. Sean $\{a_i\}, \{c_j\}$ bases de A y C respectivamente. Como g es sobreyectiva existen $\{b_j\}$ en B tales que $g(b_j) = c_j$. Veamos que $\{f(a_i), b_j\}$ es base. Si $b \in B$, entonces $g(b) = \sum \lambda_j c_j$ y $b - \sum \lambda_j c_j \in \ker g$. Como $\text{im } f = \ker g$:

$$f(a) = b - \sum \lambda_j c_j \implies b = \sum \mu_i f(a_i) + \sum \lambda_j c_j$$

La independencia se sigue de considerar una combinación lineal igual a 0 con coeficientes no todos nulos:

$$0 = \sum \mu_i f(a_i) + \sum \lambda_j c_j \Rightarrow 0 = \sum \lambda_j b_j \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j,$$

donde se ha aplicado g y usado la independencia de $\{b_j\}$ y la igualdad $\text{im } f = \ker g$. Si aplicamos f^{-1} , usando que f es inyectiva, y usamos la independencia de $\{a_i\}$:

$$0 = \sum \mu_i f(a_i) \Rightarrow 0 = \sum \mu_i a_i \Rightarrow \mu_i = 0 \quad \forall i.$$

□

A continuación definimos los dos conceptos clave de la sección:

Definición 2.2. Se llama *complejo de cocadenas* a una sucesión $A^* = \{A^p, d^p\}$ en la que $d^p : A^p \rightarrow A^{p+1}$ y $d^{p+1} \circ d^p = 0$.

Definición 2.3. Dado un complejo de cocadenas A^* se define el p -ésimo espacio vectorial de cohomología:

$$H^p(A^*) = \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1}.$$

Los elementos del núcleo se denominan *cerrados* o *cociclos* y los de la imagen *exactos* o *bordes*. Se llama *clases de cohomología* a los elementos de $H^p(A^*)$.

Una *aplicación de cocadenas* es una familia de aplicaciones $f^p : A^p \rightarrow B^p$ que cumplen $d_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_A^p$, de modo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{p-1} & \xrightarrow{d_A^{p-1}} & A^p & \xrightarrow{d_A^p} & A^{p+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^{p-1} & & \downarrow f^p & & \downarrow f^{p+1} \\ \dots & \longrightarrow & B^{p-1} & \xrightarrow{d_B^{p-1}} & B^p & \xrightarrow{d_B^p} & B^{p+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Se dice entonces que una *sucesión exacta corta de complejos de cocadenas*

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$$

consiste en un par de aplicaciones de cocadenas tales que

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \longrightarrow 0$$

es exacta para todo p .

Habiendo construido los espacios de cohomología a partir del complejo de cocadenas lo natural es que las aplicaciones de cocadenas induzcan aplicaciones en los espacios.

Lema 2.4. Una aplicación de cocadenas $f : A^* \rightarrow B^*$ induce aplicaciones lineales

$$f^* = H^*(f) : H^p(A^*) \rightarrow H^p(B^*).$$

Demostración. Veamos que la aplicación inducida es $f^*([a]) = [f^p(a)]$, donde $[a] \in H^p(A^*)$ es una clase y $a \in \ker d_A^p$ un representante. En primer lugar hay que comprobar que $f^p(a)$ es cerrado cuando a lo es:

$$d_B^p(f^p(a)) = f^{p+1}d_A^p(a) = f^{p+1}(0) = 0.$$

En segundo lugar se demuestra la independencia del representante:

$$\begin{aligned} [a_1] = [a_2] &\Rightarrow a_1 - a_2 \in \operatorname{im} d_A^{p-1} \Rightarrow f^p(a_1 - a_2) \in \operatorname{im} f^p \circ d_A^{p-1} = \operatorname{im} d_B^{p-1} \circ f^{p-1} \\ &\Rightarrow f^p(a_1) - f^p(a_2) \in \operatorname{im} d_B^{p-1} \Rightarrow [f^p(a_1)] = [f^p(a_2)]. \end{aligned}$$

□

Lema 2.5. Dada una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas, la sucesión

$$H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$$

es exacta.

Demostración. Para empezar veamos el contenido de la imagen en el núcleo:

$$g^* \circ f^*([a]) = g^*([f^p(a)]) = [g^p \circ f^p(a)] = 0 \quad \text{es decir} \quad \text{im } f^* \subset \ker g^*.$$

Para el recíproco, sea $[b] \in \ker g^*$, $b \in B^p$, veamos que $[b] \in \text{im } f^*$:

$$g^*[b] = 0 \implies g^p(b) = d_C^{p-1}(c),$$

dado que $[0] = \text{im } d_C^{p-1}$. Como g^{p-1} es sobreyectiva existe un $\tilde{b}$ tal que $c = g^{p-1}(\tilde{b})$, así:

$$g^p(b) = d_C^{p-1}(c) = d_C^{p-1}(g^{p-1}(\tilde{b})) = g^p(d_B^{p-1}(\tilde{b})),$$

luego

$$g^p(b - d_B^{p-1}(\tilde{b})) = 0.$$

Por ser la sucesión exacta $b - d_B^{p-1}(\tilde{b}) = f^p(a)$, para cierto a , cerrado como vemos a continuación. Por la inyectividad de f^{p+1} :

$$d_A^p(a) = 0 \Leftrightarrow 0 = f^{p+1}(d_A^p(a)) = d_B^p(f^p(a)) = d_B^p(b - d_B^{p-1}(\tilde{b})) = d_B^p(b),$$

por tanto dado que b es cerrado a también. En consecuencia:

$$f^*[a] = [b - d_B^{p-1}(\tilde{b})] = [b].$$

□

Las sucesiones exactas cortas de complejos de cocadenas permiten definir una aplicación que nos será de utilidad más adelante:

Proposición y definición 2.6. *Dada una sucesión exacta corta de cocadenas de complejos $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ se define:*

$$\partial^* : H^p(C^*) \longrightarrow H^{p+1}(A^*)$$

$$\partial^*[c] = \left[(f^{p+1})^{-1} \left(d_B^p((g^p)^{-1}(c)) \right) \right].$$

Nótese el abuso de notación en la definición, pues g^p no es biyectiva. No obstante g^p es sobreyectiva por lo que puede tomarse un elemento cualquiera de la preimagen, y vamos a demostrar que la definición es independiente de cuál sea.

Demostración. La prueba consiste en comprobar que (i) $d_B^p((g^p)^{-1}(c))$ está en la imagen de f^{p+1} , (ii) $(f^{p+1})^{-1} \left(d_B^p((g^p)^{-1}(c)) \right)$ es un cociclo y (iii) la independencia de la elección en $(g^p)^{-1}(c)$.

(i) Dado que c es un cociclo $0 = d_C^p(c) = d_C^p(g^p((g^p)^{-1}(c))) = g^{p+1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c)))$. Como el núcleo de g^{p+1} es la imagen de f^{p+1} concluimos el primer paso. (ii) El segundo paso se sigue de la inyectividad de f^{p+2} , es decir, $d_A^{p+1}((f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c))))$ será nulo si lo es su imagen por f^{p+2} :

$$\begin{aligned} f^{p+2}(d_A^{p+1}((f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c))))) &= d_B^{p+1}(f^{p+1}((f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c))))) \\ &= d_B^{p+1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c))) = 0. \end{aligned}$$

(iii) Por último vamos a ver que el abuso de notación está justificado. Sean b_1, b_2 en la preimagen $(g^p)^{-1}(c)$, y demostraremos que $[(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b_1 - b_2))] = 0$. La diferencia $b_1 - b_2$ está en el núcleo de g^p , luego en la imagen de f^p , es decir:

$$[(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b_1 - b_2))] = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(f^p((f^p)^{-1}(b_1 - b_2))))] = [d_A^p((f^p)^{-1}(b_1 - b_2))] = 0.$$

□

Gracias a ∂^* podemos construir una sucesión exacta *larga*:

Teorema 2.7. *Dada una sucesión exacta corta de cocadenas de complejos $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$, la sucesión*

$$\cdots \rightarrow H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

Demostración. Ya sabemos que $H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$ es exacta, las otras dos sucesiones las demostramos en dos lemas a continuación. □

Lema 2.8. *La sucesión $H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$ es exacta.*

Demostración. Un contenido es inmediato: $\partial^* g^*[b] = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b))] = 0$.

Veamos ahora el otro. Si $\partial^*[c] = 0$, $g^p(b) = c$, $f^{p+1}(d_A^p(a)) = d_B^p(b)$, entonces $f_B^p(b - f^p(a)) = 0$ y $g^p(b - f^p(a)) = c$, por lo que $g^*[b - f^p(a)] = [c]$. □

Lema 2.9. *La sucesión $H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*)$ es exacta.*

Demostración. Veamos que la imagen de ∂^* está en el núcleo de f^* . Si $c \in C^p$, $g^p(b) = c$, entonces $f^* g^*[c] = [d_B^p(b)] = 0$. El contenido contrario se resume en la siguiente línea:

$$f^*[a] = 0 \Rightarrow f^{p+1}(a) = d_B^p(b) \text{ para cierto } b, \text{ por tanto } d_C^p(g^p(b)) = g^{p+1}(f^{p+1}(a)) = 0 \text{ y}$$

$$\partial^*[g^p(b)] = [a].$$

□

Dado el papel central que toman las aplicaciones inducidas entre espacios de cohomología es importante hacer notar que la igualdad entre aplicaciones inducidas no implica la igualdad entre las aplicaciones originales. Por tanto introducimos la siguiente definición, cuyo nombre cobrará sentido más adelante:

Definición 2.10. Dos aplicaciones de cocadenas $f, g : A^* \rightarrow B^*$ se dicen *homótopas* si existen aplicaciones lineales $s^p : A^p \rightarrow B^{p-1}$ tales que

$$s^{p+1} d_A^p + d_B^{p-1} s^p = f^p - g^p$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A^{p-1} & \longrightarrow & A^p & \xrightarrow{d_A} & A^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow s & \downarrow f-g & \swarrow s & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & B^{p-1} & \xrightarrow{d_B} & B^p & \longrightarrow & B^{p+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Lema 2.11. *Si f y g son homótopas entonces $f^* = g^*$.*

Demostración. Si restamos las aplicaciones y usamos la definición vemos que nos queda la aplicación 0:

$$(f^* - g^*)[a] = [f^p(a) - g^p(a)] = [s^{p+1}d_A^p(a) + d_B^{p-1}s^p(a)] = [s^{p+1}(0) + d_B^{p-1}s^p(a)] = 0.$$

□

Concluimos con un lema útil para calcular espacios de cohomología. Si tenemos dos complejos de cocadenas A^* y B^* podemos considerar su suma $A^* \oplus B^*$ como la sucesión $\{A^p \oplus B^p, d_{A^p \oplus B^p}^p := d_{A^p}^p \oplus d_{B^p}^p\}$, que cumple:

Lema 2.12. *Si A^* y B^* son complejos de cocadenas entonces*

$$H^p(A^* \oplus B^*) = H^p(A^*) \oplus H^p(B^*)$$

Demostración. Se sigue de

$$\ker(d_{A^p \oplus B^p}^p) = \ker(d_{A^p}^p) \oplus \ker(d_{B^p}^p) \text{ y } \operatorname{im}(d_{A^p \oplus B^p}^p) = \operatorname{im}(d_{A^p}^p) \oplus \operatorname{im}(d_{B^p}^p).$$

□

3. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

El trabajo se centra en el estudio de un complejo de cocadenas en particular. Sea M una variedad diferenciable sin borde. Usamos la notación que introdujimos en preliminares: $\Gamma^p(M)$ es el espacio vectorial de las formas diferenciales de grado p y d es la diferencial exterior, que cumple $d \circ d = 0$. Entonces podemos definir

Definición 3.1. El *complejo de de Rham* es el complejo de cocadenas $\Gamma^*(M) = \{\Gamma^p(M), d\}$. Se llama *p -ésimo grupo de cohomología de de Rham* a

$$H^p(M) := H^p(\Gamma^*(M)).$$

Es inmediato comprobar que $H^0(M)$ es el espacio vectorial de las funciones constantes en cada componente conexa de M , y por tanto su dimensión es el número de componentes conexas. Además si m es la dimensión de M y $p > m$, $\Gamma^p(M) = 0$ por lo que $H^p(M) = 0$.

A partir de un resultado previo, a continuación demostraremos el lema de Poincaré, que junto a la sucesión de Mayer-Vietoris serán una útil herramienta de cálculo de grupos de cohomología.

Lema 3.2 (Operador de Poincaré). *Si i_1, i_0 son las inclusiones $i_\alpha: M \rightarrow M \times [0, 1], x \mapsto (x, \alpha)$, entonces sus pullbacks i_1^*, i_0^* son homótopos. La homotopía*

$$d\hat{s} + \hat{s}d = i_1^* - i_0^*$$

que las relaciona se llama operador de Poincaré.

Demostración. Sea $\{U_i, x^i\}$ un atlas de M , de forma que en $M \times \mathbb{R}$ las formas diferenciales tienen expresiones locales:

$$\omega|_{U_i \times \mathbb{R}} = \sum f_I^i(x, t) dx_I^i + \sum g_J^i(x, t) dt \wedge dx_J^i,$$

donde $I = (i_1, \dots, i_p)$ y $J = (j_1, \dots, j_{p-1})$. Además introducimos la siguiente notación para expresar los cambios de coordenadas en las intersecciones sin extendernos en exceso:

$$\begin{aligned} \omega|_{U_i \cap U_j \times \mathbb{R}} &= \sum f_I^i(x, t) dx_I^i + \sum g_J^i(x, t) dt \wedge dx_J^i \\ &= \sum f_I^i(x, t) \frac{\partial x_I^i}{\partial x_{\bar{I}}^j} dx_{\bar{I}}^j + \sum g_J^i(x, t) \frac{\partial x_J^i}{\partial x_{\bar{J}}^j} dt \wedge dx_{\bar{J}}^j \\ &= \sum f_{\bar{I}}^j(x, t) dx_{\bar{I}}^j + \sum g_{\bar{J}}^j(x, t) dt \wedge dx_{\bar{J}}^j. \end{aligned}$$

Nótese que las funciones están definidas en abiertos de $\mathbb{R}^m$, por lo que x debe sustituirse por las coordenadas (o cambio de coordenadas) correspondientes. Esta escritura busca simplificar las fórmulas. Esto nos permite definir $\hat{s}$ y mostrar que está bien definido:

$$\begin{aligned} \hat{s}(\omega)|_{U_i \times \mathbb{R}} &:= \sum \left(\int_0^1 g_J^i(x, t) dt \right) dx_J^i = \sum \left(\int_0^1 g_J^i(x, t) dt \right) \frac{\partial x_J^i}{\partial x_{\bar{J}}^j} dx_{\bar{J}}^j \\ &= \sum \left(\int_0^1 g_J^i(x, t) \frac{\partial x_J^i}{\partial x_{\bar{J}}^j} dt \right) dx_{\bar{J}}^j = \sum \left(\int_0^1 g_{\bar{J}}^j(x, t) dt \right) dx_{\bar{J}}^j. \end{aligned}$$

Comprobar que es la homotopía buscada es inmediato (omitimos las restricciones, pero recordemos que esto es una descripción local):

$$\begin{aligned} d\hat{s}(\omega) + \hat{s}d(\omega) &= \sum_{i, J} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_J + \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \right) dx_I - \sum_{i, J} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_J \\ &= \sum (f_I(x, 1) - f_I(x, 0)) dx_I = i_1^*(\omega) - i_0^*(\omega). \end{aligned}$$

□

Además de su aplicación inmediata que vemos a continuación, este lema dará sentido a la definición que hemos dado de homotopía para aplicaciones entre complejos y nos dirá que dos variedades con la misma homotopía tienen la misma cohomología, por tanto tiene bastante más relevancia que ser un mero resultado previo.

Teorema 3.3 (Lema de Poincaré). *Si M es contráctil:*

$$H^0(M) = \mathbb{R} \quad H^p(M) = 0.$$

Demostración. Tanto la identidad como una función constante son diferenciables, por tanto por 1.9 existe una homotopía diferenciable entre ellas:

$$F : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \quad F(x, t) \equiv x_0, t \leq 0 \text{ y } F(x, t) = x, t \geq 1.$$

La demostración buscará construir una homotopía entre la identidad y la función nula, es decir aplicaciones lineales s^p tales que

$$ds^p + s^{p+1}d = \text{Id}_{\Gamma^p(M)}, \quad p \geq 1 \quad \text{y} \quad e + s^1d = \text{Id}_{\Gamma^0(M)}$$

donde se ha identificado $d^{-1}s(\omega) \equiv e(\omega) = \omega(0)$. Esto nos daría el resultado buscado ya que para cualquier forma cerrada de grado mayor que 0 se tendría $\omega = ds^p(\omega)$ y para las funciones $\omega - \omega(0) = s^1d\omega = 0$.

Si $\hat{s}$ es el operador de Poincaré, las s^p que buscamos serán $s = \hat{s} \circ F^*$, donde F^* es el *pullback* de F . En efecto si $\omega \in \Gamma^p(M)$ y $\omega|_{U_i} = \sum h_I(x)dx_I$:

$$F^*(\omega)|_{U_i} = \sum h_I(x) \frac{\partial F}{\partial x_I} dx_I$$

gracias al cálculo previo con $\hat{s}^p$ tenemos:

$$ds^p(\omega) + s^{p+1}d(\omega) = \sum h_I(x) \left(\frac{\partial F}{\partial x_I}(x, 1) - \frac{\partial F}{\partial x_I}(x, 0) \right) dx_I = \sum h_I(x) dx_I = \omega|_{U_i}.$$

Para el caso $p = 0$ se simplifica cada paso de la demostración por lo que omitimos su particularización. $\square$

4. SUCESIÓN DE MAYER-VIETORIS

Tal y como adelantábamos antes de demostrar el lema de Poincaré la sucesión de Mayer-Vietoris es una herramienta que permite el cálculo de los grupos de cohomología $H^p(U_1 \cup U_2)$ a partir de $H^p(U_1), H^p(U_2), H^p(U_1 \cap U_2)$. Por tanto podremos calcular los grupos de cohomología de una variedad si conocemos los de abiertos que la recubran y los de las intersecciones de estos.

Teorema 4.1. Sean U_1, U_2 dos abiertos de una variedad, U su unión, y sean $i_\nu : U_\nu \rightarrow U$ y $j_\nu : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_\nu$ las correspondientes inclusiones ($\nu = 1, 2$). Si definimos $I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$, $J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma^p(U) \xrightarrow{I^p} \Gamma^p(U_1) \oplus \Gamma^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \Gamma^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Observamos que el *pullback* de una inclusión es la restricción, es decir si $\omega \in \Gamma^p(U)$

$$i_\nu^*\omega = \omega|_{U_\nu} \quad j_\nu^*\omega_\nu = \omega_\nu|_{U_1 \cap U_2}.$$

Si $I^p(\omega) = 0$, la restricción de ω a U_1 y U_2 es nula luego también lo es en la unión $U = U_1 \cup U_2$ y I^p es inyectiva. Para demostrar la igualdad de imagen de I^p y núcleo de J^p comprobamos la inclusión del primero en el segundo:

$$J^p \circ I^p(\omega) = j_1^*i_1^*(\omega) - j_2^*i_2^*(\omega) = \omega|_{U_1 \cap U_2} - \omega|_{U_1 \cap U_2} = 0.$$

El otro contenido se sigue de tomar (ω_1, ω_2) en el núcleo de J^p y definir ω tal que $\omega|_{U_\nu} = \omega_\nu$, que está bien definida pues

$$\omega_1|_{U_1 \cap U_2} - \omega_2|_{U_1 \cap U_2} = J^p(\omega_1, \omega_2) = 0.$$

Por último si $\omega \in \Gamma^p(U_1 \cap U_2)$, sea $\{\theta_1, \theta_2\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{U_1, U_2\}$. Denotamos por $\theta_2\omega$ la extensión de $\theta_2\omega \in \Gamma^p(U_1 \cap U_2)$ a $\Gamma^p(U_1)$ por 0 fuera del soporte de θ_2 y por $\theta_1\omega$ a la extensión de $\theta_1\omega \in \Gamma^p(U_1 \cap U_2)$ a $\Gamma^p(U_2)$ por 0 fuera del soporte de θ_1 . Entonces

$$J^p(\theta_2\omega, -\theta_1\omega) = \theta_2\omega + \theta_1\omega = \omega$$

J^p es sobreyectiva. □

Observamos que

$$I : \Gamma^*(U) \longrightarrow \Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2) \quad \text{y} \quad J : \Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2) \longrightarrow \Gamma^*(U_1 \cap U_2)$$

son aplicaciones de cocadenas y, por el teorema anterior, forman una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas:

$$0 \longrightarrow \Gamma^*(U) \xrightarrow{I} \Gamma^*(U_1) \oplus \Gamma^*(U_2) \xrightarrow{J} \Gamma^*(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

Por 2.7 la sucesión

$$\cdots \rightarrow H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1 \oplus U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \xrightarrow{I^*} H^{p+1}(U_1 \oplus U_2) \rightarrow \cdots$$

es exacta. Usando 2.12 deducimos:

Teorema 4.2 (Sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris). *Si U_1, U_2 son abiertos de una variedad U es su unión, la sucesión*

$$\cdots \rightarrow H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \xrightarrow{I^*} H^{p+1}(U_1) \oplus H^{p+1}(U_2) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

Lema 4.3. *Si U_1, U_2 son abiertos disjuntos de una variedad*

$$I^* : H^p(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Por el teorema 4.1 la aplicación

$$I^p : \Gamma^p(U_1 \cup U_2) \longrightarrow \Gamma^p(U_1) \oplus \Gamma^p(U_2)$$

es inyectiva. También es sobreyectiva por ser U_1 y U_2 disjuntos, pues dada (ω_1, ω_2) en la suma se puede definir ω en la unión del mismo modo que se definió al demostrar la inclusión del núcleo en la imagen, observando que no es necesaria una condición de empalme por no haber intersección. El lema 2.12 nos da el resultado para las aplicaciones entre los grupos de cohomología. □

Concluimos con una aplicación del lema de Poincaré y la sucesión de Mayer-Vietoris:

Teorema 4.4. *Si $U \subset \mathbb{R}^m$ es unión finita de abiertos convexos, $H^p(U)$ es finitamente generado.*

Demostración. Lo probamos por inducción en n , el número de abiertos. Si $n = 1$ es cierto por el lema de Poincaré. Si es cierto para $n - 1$, sea $V = U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$. Por 4.1:

$$H^{p-1}(V \cap U_n) \xrightarrow{\partial^*} H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(V) \oplus H^p(U_n)$$

es exacta. El lema 2.1 nos da el isomorfismo

$$H^p(U) \cong \text{im } \partial^* \oplus \text{im } I^*.$$

Si $V \cap U_n = \emptyset$ basta aplicar el lema anterior. Tanto V como $V \cap U_n = (U_1 \cap U_n) \cup \dots \cup (U_{n-1} \cap U_n)$ son unión de $n - 1$ abiertos convexos, por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción y también será cierta para U . $\square$

Corolario 4.5. *Si $M \subset \mathbb{R}^m$ es una variedad compacta sin borde entonces $H^p(M)$ es finitamente generado.*

Demostración. Sea (V, i, r) un entorno tubular de M . Como la variedad es compacta podemos encontrar un número finito k de bolas abiertas tales que su unión U cumple $M \subset U \subset V$. Como $r|_U \circ i = \text{Id}_M$, $i^* \circ r|_U^* = \text{Id}_{H^p(M)}$. Por tanto $i^* : H^p(U) \rightarrow H^p(M)$ es sobreyectiva y el resultado se sigue del teorema anterior. $\square$

5. HOMOTOPÍA

En esta sección vamos a relacionar homotopía y cohomología. Al final de la sección 4 definimos la homotopía entre aplicaciones de complejos de cocadenas y comentamos que más adelante se justificaría el nombre. Ahora estamos en disposición de motivar la definición:

Teorema 5.1. *Si $f, g : M \rightarrow N$ aplicaciones diferenciables son homótopas, las aplicaciones $f^*, g^* : \Gamma(N) \rightarrow \Gamma(M)$ inducidas en el complejo de de Rham son homótopas como aplicaciones de complejos de cocadenas.*

Demostración. Si $\hat{s}$ es el operador de Poincaré y F una homotopía diferenciable, que existe por 1.9, entre f y g , resulta que $s = \hat{s} \circ F^*$ es la homotopía entre f^* y g^* :

$$d \circ \hat{s} \circ F^* + \hat{s} \circ F^* \circ d = d \circ \hat{s} \circ F^* + \hat{s} \circ d \circ F^* = (i_1^* - i_0^*) \circ F^* = g^* - f^*.$$

$\square$

Haciendo uso de los dos últimos teoremas podemos definir para aplicaciones continuas $f : M \rightarrow N$ una única aplicación inducida $f^* : H^p(N) \rightarrow H^p(M)$. Sean g_1, g_2 aplicaciones diferenciables homótopas a f , por lo que también entre sí. Las aplicaciones inducidas g_1^*, g_2^* sobre el complejo de de Rham son homótopas y por el lema 2.11 inducen la misma aplicación entre los grupos de cohomología. Por tanto $g_1^* = g_2^*$ será f^* por definición. Se sigue que las aplicaciones continuas inducen aplicaciones que “se comportan bien”, es decir:

Teorema 5.2. *Sean M_1, M_2 y M_3 tres variedades sin borde.*

1. *Si $f_1, f_2 : M_1 \rightarrow M_2$ son aplicaciones continuas homótopas, entonces $f_1^* = f_2^*$*
2. *Si $f : M_1 \rightarrow M_2, g : M_2 \rightarrow M_3$ son aplicaciones continuas $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$*
3. *La aplicación inducida por una equivalencia de homotopía es un isomorfismo.*

Este último punto nos indica que dos variedades con el mismo tipo de homotopía tienen los mismos grupos de cohomología.

Con el fin de ilustrar un poco la teoría, vamos a calcular algunos grupos de cohomología.

Proposición 5.3. *Si $A \subsetneq \mathbb{R}$ es un cerrado se tienen los siguientes isomorfismos*

$$\begin{aligned} H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) &\cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \quad \text{para } p \geq 1, \\ H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) &\cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R}, \\ H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) &\cong \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración. Definimos los siguientes abiertos de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, \infty) \\ U_2 &= \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-\infty, 1) \end{aligned}$$

El abierto U_1 es contráctil pues se puede proyectar sobre $\mathbb{R}^n \times \{1\}$, que es contráctil. Del mismo modo U_2 es contráctil, proyectando en $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$. Sea π la proyección de $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1)$ en $\mathbb{R}^n \setminus A$ e i la inclusión $i : \mathbb{R}^n \setminus A \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus A) \times \{0\} \subset U_1 \cap U_2$. Como $\pi \circ i = \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus A}$ y $i \circ \pi = \text{Id}_{U_1 \cap U_2}$ el teorema anterior nos dice que π^* es un isomorfismo entre $H^p(U_1 \cap U_2)$ y $H^p(\mathbb{R}^n \setminus A)$ por ser π una equivalencia homotópica. Puesto que las variedades contráctiles tienen grupos de cohomología triviales para $p \geq 1$, Mayer-Vietoris nos da un isomorfismo

$$\partial^* : H^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H^{p+1}(U_1 \cup U_2) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A.$$

La inversa de la composición $\partial^* \circ \pi^*$ es el primer isomorfismo del enunciado. Para el segundo consideramos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \rightarrow 0$$

dado que los elementos de $H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)$ son pares de funciones constantes, y su imagen por J^* su resta, se deduce:

$$\ker \partial^* = \text{im } J^* = \mathbb{R}.$$

Esto nos da el segundo isomorfismo:

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong H^0(U_1 \cap U_2)/\mathbb{R} \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R}.$$

Para el último basta observar $\dim(\text{im } I^*) = \dim(\ker J^*) = 1$, por lo que $H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \mathbb{R}$. $\square$

Corolario 5.4. *Los grupos de cohomología de $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ perforado son*

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si } p = n - 1 = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n - 1 \text{ o } p = n = 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } p = 0, n - 1 \end{cases}.$$

Demostración. Por el lema de Poincaré 3.3 y el lema 4.3 tenemos $H^0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ y $H^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$, y por inducción deducimos el resto. $\square$

6. COHOMOLOGÍA DE DE RHAM CON SOPORTE COMPACTO

Deben distinguirse los casos con y sin soporte compacto, porque una forma con soporte compacto puede tener primitiva, pero ninguna con soporte compacto. Por supuesto si M es compacta no hay nada que distinguir. Esta sección está dedicada a repasar qué resultados se mantienen y si hay que realizar alguna modificación a las demostraciones.

Definición 6.1. El complejo de *de Rham con soporte compacto* es el complejo de cocadenas $\Gamma_c^*(M) = \{\Gamma_c^p(M), d\}$. Se llama *p-ésimo grupo de cohomología de de Rham con soporte compacto* a

$$H_c^p(M) := H^p(\Gamma_c^*(M)).$$

En este caso $H_c^0(M)$ será subespacio de $H^0(M)$ ya que es el espacio vectorial de las funciones que son nulas en las componentes conexas no compactas y constantes en las compactas. En particular la dimensión de $H_c^0(M)$ es el número de componentes conexas compactas de M .

Para soporte compacto podemos seguir construyendo el operador de Poincaré, pero luego no podremos usarlo para deducir el lema:

Lema 6.2 (Operador de Poincaré). *Si i_1, i_0 son las inclusiones $i_\alpha : M \rightarrow M \times [0, 1] : x \mapsto (x, \alpha)$, entonces sus pullbacks i_1^*, i_0^* son homótopos. La homotopía*

$$\hat{s} : \Gamma_c^p(M \times [0, 1]) \rightarrow \Gamma_c^{p-1}(M) \quad d\hat{s} + \hat{s}d = i_1^* - i_0^*$$

que las relaciona se llama operador de Poincaré.

Demostración. La prueba es análoga al caso sin soporte compacto, basta observar que la linealidad de $\hat{s}$ garantiza que la imagen de $\Gamma_c^p(M \times [0, 1]) \subset \Gamma^p(M \times [0, 1])$ está en $\Gamma_c^{p-1}(M)$ $\square$

Para que se cumpliera el lema de Poincaré habría que añadir la hipótesis de homotopía propia, si no F^* podría mandar formas con soporte compacto a formas sin soporte compacto. No obstante no tiene sentido añadir esta hipótesis ya que si M es contráctil por una homotopía propia entonces es compacta, y ya sabemos que los resultados para formas sin soporte compacto son válidos con soporte compacto en variedades compactas.

Teorema 6.3. *Si dos aplicaciones diferenciables $f, g : M \rightarrow N$ son homótopas por una homotopía propia, las aplicaciones inducidas entre los complejos de de Rham con soporte compacto $f^*, g^* : \Gamma_c(N) \rightarrow \Gamma_c(M)$ son homótopas como aplicaciones de complejos de cocadenas.*

Este teorema se demuestra igual que sin soporte compacto gracias a que exigimos homotopía propia. Gracias a 2.11 concluimos que las aplicaciones homótopas por homotopía propia inducen la misma aplicación en el grupo de cohomología con soporte compacto.

A continuación repasamos los principales resultados de Mayer-Vietoris, los cuales presentan ciertas variaciones respecto al caso sin soporte compacto.

Dada una inclusión de abiertos en variedades $i : U \rightarrow V$ se define $i_* : \Gamma_c^p(U) \rightarrow \Gamma_c^p(V)$ como la extensión por 0 fuera del soporte. Esto permite enunciar una versión de 4.1 con “las flechas cambiadas”:

Teorema 6.4. Sean U_1, U_2 abiertos de una variedad, U su unión y sean $j_\nu : U_\nu \rightarrow U$ y $i_\nu : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_\nu$ las correspondientes inclusiones ($\nu = 1, 2$). Si definimos $I_c^p(\omega) = (i_{1*}(\omega), i_{2*}(\omega))$, $J_c^p(\omega_1, \omega_2) = j_{1*}(\omega_1) - j_{2*}(\omega_2)$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{I_c^p} \Gamma_c^p(U_1) \oplus \Gamma_c^p(U_2) \xrightarrow{J_c^p} \Gamma_c^p(U) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. La inyectividad de I_c^p se sigue de la de $i_{\nu*}$. Para la sobreyectividad de J_c^p observamos que dada $\omega \in \Gamma_c^p(U)$ y una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{U_1, U_2\}$, $J_c^p(\theta_1\omega, -\theta_2\omega) = \omega$. Veamos la igualdad entre el núcleo de J_c^p y la imagen de I_c^p : como $j_{\nu*} \circ i_{\nu*}$ es la extensión por 0 de formas en $\Gamma_c^p(U_1 \cap U_2)$ a $\Gamma_c^p(U)$, $j_{1*} \circ i_{1*} = j_{2*} \circ i_{2*}$ y tenemos el contenido de la imagen en el núcleo. El contenido contrario es consecuencia de tomar formas en $\Gamma_c^p(U_1)$ y en $\Gamma_c^p(U_2)$ con misma extensión, es decir, con el mismo soporte y por tanto contenido en la intersección. $\square$

De modo análogo al desarrollo sin soporte compacto

$$I_c : \Gamma_c^*(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \Gamma_c^*(U_1) \oplus \Gamma_c^*(U_2) \quad \text{y} \quad J_c : \Gamma_c^*(U_1) \oplus \Gamma_c^*(U_2) \longrightarrow \Gamma_c^*(U)$$

son aplicaciones de cocadenas y, por el teorema anterior, forman una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas:

$$0 \longrightarrow \Gamma_c^*(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{I_c} \Gamma_c^*(U_1) \oplus \Gamma_c^*(U_2) \xrightarrow{J_c} \Gamma_c^*(U) \longrightarrow 0.$$

Por 2.7 la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{I_c^*} H_c^p(U_1 \oplus U_2) \xrightarrow{J_c^*} H_c^p(U) \xrightarrow{\partial^*} H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{I_c^*} H_c^{p+1}(U_1 \oplus U_2) \rightarrow \cdots$$

es exacta. Usando 2.12 obtenemos una sucesión de Mayer-Vietoris “invertida” respecto al caso sin soporte compacto:

Teorema 6.5 (Sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris). Si U_1, U_2 son abiertos de una variedad, U es su unión y V su intersección, la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_c^p(V) \xrightarrow{I_c^*} H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) \xrightarrow{J_c^*} H_c^p(U) \xrightarrow{\partial^*} H_c^{p+1}(V) \xrightarrow{I_c^*} H_c^{p+1}(U_1) \oplus H_c^{p+1}(U_2) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

7. COHOMOLOGÍA CON SOPORTE COMPACTO E INTEGRACIÓN

En variedades orientables la integral es una herramienta de gran utilidad para el cálculo de grupos de cohomología. Para que tenga sentido hablar de integración nos vamos a restringir a variedades orientables y a formas diferenciales con soporte compacto. Además recordemos que trabajamos con variedades sin borde, luego la integral de formas exactas es nula.

Definición 7.1. En una variedad M de dimensión m , se define la integral de una clase de cohomología de grado máximo como la integral de un representante de la clase

$$\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R} : [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

La independencia del representante es consecuencia de que dos representantes de la misma clase difieren en una forma exacta, que tiene integral nula por el teorema de Stokes.

Es evidente que esta aplicación es lineal, además, puesto que siempre existe una forma diferencial con integral no nula, es sobreyectiva. Si la integral fuera inyectiva tendríamos que toda forma con integral nula sería exacta, lo que se conoce como *recíproco de Stokes*. Vamos a demostrar que esto se da para el caso conexo:

Teorema 7.2. *Si M es una variedad conexa de dimensión m la forma lineal $\int_M$ nos da el isomorfismo $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$.*

El siguiente lema permite una demostración más clara:

Lema 7.3. *En $\mathbb{R}^m$ toda forma diferencial de grado máximo con soporte compacto e integral nula tiene primitiva con soporte compacto.*

Demostración. Sea $\omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ una forma con soporte compacto e integral nula. Para comprobar que es exacta basta encontrar un campo con soporte compacto X tal que f sea su divergencia, pues $\text{det}(X, \dots)$ será la primitiva de ω . Vamos a adoptar la notación $y = (x_1, \dots, x_n)$, $z = (x_{n+1}, \dots, x_m)$ y demostramos la existencia del campo comprobando por inducción en $n \leq m$ la validez del siguiente resultado: Si $\int_{\mathbb{R}^n} f(y, z)dy = 0$ entonces existen n funciones X_i con soporte compacto tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}.$$

Si $n = 1$ tomamos

$$X_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, z)dt.$$

Como f tiene soporte compacto, para x_1 suficientemente pequeño el integrando es 0 luego la integral también, y para x_1 suficientemente grande la integral coincide con la de la hipótesis luego también es nula, es decir X_1 tiene soporte compacto. Si $n \geq 2$ escribimos $y' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ y sea ϕ una función diferenciable con soporte compacto e integral 1. Construimos

$$h(x) = \phi(y') \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(u, x_n, z)du \quad \text{y} \quad g(x) = f(x) - h(x).$$

Por construcción g cumple $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y', x_n, z)dy' = 0$ y tiene soporte compacto por tenerlo f y ϕ , es decir, g cumple las hipótesis para $n - 1$. En consecuencia existen $n - 1$ funciones X_i tales que $g = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$. Además h cumple las hipótesis para $n = 1$ pues tiene soporte compacto por tenerlo ϕ y

$$\int_{\mathbb{R}} g(y', x_n, z)dx_n = \phi(y') \int_{\mathbb{R}^n} f(y, z)dy = 0$$

por hipótesis. En consecuencia $X_n(x) = \int_{-\infty}^{x_n} h(y', t, z)dt$ tendrá soporte compacto y $h = \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$, por tanto

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

y hemos demostrado el resultado para $n \leq m$. Dado que el enunciado del lema nos da las hipótesis para usarlo en el caso $n = m$ hemos encontrado el campo que tiene como divergencia f y ω es exacta con soporte compacto. $\square$

La formulación de este lema es completamente equivalente a la del teorema que queremos demostrar particularizado a $\mathbb{R}^m$, no obstante se ha formulado así para recalcar la importancia de los soportes. A continuación demostramos el teorema:

Demostración. Vamos a probar que $\dim H_c^m(M) = 1$. Sea α una forma diferencial con soporte en U difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ e integral no nula, por lo que para cualquier ω con soporte en U su clase es proporcional a la de α por el lema anterior. Supongamos ahora que ω tiene soporte en V , difeomorfo a $\mathbb{R}^m$ pero distinto a U . Por ser M conexa existe una cadena finita $\{U_i\}_{i=0}^r$ de abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ con $U_0 = U$, $U_r = V$ y $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Sean $\{\omega_i\}_{i=1}^r$ formas diferenciales con $\text{sop } \omega_i \subset (U_{i-1} \cap U_i)$ e integral nula, entonces $[\omega_i]$ es proporcional a $[\omega_{i-1}]$ por tener ambas el soporte en U_{i-1} . Dado que ω y ω_r tienen el soporte en V y α y ω_1 en U , siguiendo la cadena $[\omega]$ es proporcional a $[\alpha]$. Concluimos la demostración con el caso general, sea ω una forma diferencial con soporte compacto K . Cubrimos K con abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ y extraemos un subrecubrimiento finito. Sea $\{\theta_i\}$ una partición diferenciable de la unidad asociada al subrecubrimiento, de modo que $\omega = \sum_i \theta_i \omega$, es decir, $[\omega] = \sum_i [\theta_i \omega]$. Cada sumando está en el caso anterior, luego $[\omega]$ es proporcional a $[\alpha]$ y $\dim H_c^m(M) = 1$. $\square$

Corolario 7.4. *Si M es una variedad orientable de dimensión m con n componentes conexas, entonces $H_c^m(M) = \mathbb{R}^n$.*

Nótese que para variedades orientables $H_c^m(M) = H^0(M)$. Esto no es coincidencia y se profundiza en ello al estudiar la *dualidad de Poincaré*. Si bien no vamos a dedicar una sección a su estudio, sí podemos describirla brevemente.

La dualidad de Poincaré usa la integral, por tanto seguimos exigiendo que M sea orientable sin borde. Sin embargo queremos quitar la restricción de grado máximo y de soporte compacto. Dada $\alpha \in \Gamma^p(M)$ el modo más inmediato de tener una forma de grado máximo con soporte compacto es tomar $\beta \in \Gamma_c^{m-p}(M)$ y considerar $\alpha \wedge \beta$. Este enfoque es adecuado y se demuestra que

$$\int_M : H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{R} : ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

es una forma bilineal bien definida y no degenerada. Esto induce un isomorfismo entre $H^p(M)$ y $H_c^{m-p}(M)^*$ con una consecuencia importante si M es compacta: en primer lugar $H_c^p(M) = H^p(M)$, además por el teorema 4.5 los grupos tienen dimensión finita, por lo que los grupos son isomorfos a sus duales y concluimos que $\dim H^p(M) = \dim H^{m-p}(M)$. Más adelante veremos que esta ecuación implica que las variedades compactas orientables y de dimensión impar tienen característica de Euler 0.

8. GRADO DE UNA APLICACIÓN PROPIA

En esta sección todas las variedades tendrán la misma dimensión, m , y serán orientables sin borde salvo que se especifique lo contrario. Gracias al isomorfismo entre el grupo de cohomología con soporte compacto de grado máximo de variedades conexas y $\mathbb{R}$, podemos definir el *grado de una aplicación diferenciable propia* entre variedades conexas como el número que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(M) & \xrightarrow{f^*} & H_c^m(N) \\ \downarrow f_M & & \downarrow f_N \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\deg(f)} & \mathbb{R} \end{array}$$

No obstante nos será de gran utilidad no exigir conexión para N , por lo que extendemos la definición con la siguiente proposición:

Proposición y definición 8.1. *Si $f : N \rightarrow M$ es una aplicación propia entre variedades orientables de la misma dimensión y M es conexa, existe un único número real $\deg(f)$, al que llamaremos grado de f , tal que para toda $\omega \in \Gamma_c^m(M)$:*

$$\int_N f^* \omega = \deg(f) \int_M \omega$$

Demostración. Elegimos $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ con integral no nula y calculamos el grado de la restricción a una componente conexa:

$$\int_{N_i} f|_{N_i}^* \omega = \deg(f|_{N_i}) \int_M \omega.$$

Como f es propia $f|_{N_i}^* \omega$ es no nula en un número finito de componentes conexas, un número finito de grados son distintos de 0 y podemos sumar todos: $\deg(f) = \sum_i \deg(f|_{N_i})$. En efecto este es el número que buscamos:

$$\int_N f^* \omega = \sum_i \int_{N_i} f|_{N_i}^* \omega = \sum_i \deg(f|_{N_i}) \int_M \omega = \deg(f) \int_M \omega.$$

□

Vamos a definir el grado de una aplicación continua f . Si g_1 y g_2 son aplicaciones diferenciables con $f \simeq g_1 \simeq g_2$, entonces $g_1|_{N_i} \simeq g_2|_{N_i}$ para cada componente conexa N_i de N , y por tanto esas dos restricciones tienen igual grado. Como el grado es la suma de los grados de esas restricciones $\deg(g_1) = \deg(g_2) =: \deg(f)$.

Gracias a la proposición anterior se obtiene de modo inmediato el grado de la composición de aplicaciones, que será de gran utilidad para la siguiente sección.

Corolario 8.2. *Dadas dos aplicaciones propias $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P$ con M y P conexas:*

$$\deg(g \circ f) = \deg(f)\deg(g).$$

Demostración. Dada $\omega \in \Gamma_c^m(P)$

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f) \int_P \omega &= \int_N (g \circ f)^*(\omega) = \int_N f^*(g^*(\omega)) \\ &= \deg(f) \int_M g^* \omega = \deg(f) \deg(g) \int_P \omega. \end{aligned}$$

□

Vamos a introducir los siguientes conceptos, que serán de gran relevancia más adelante.

Definición 8.3. Dada $f : N \rightarrow M$, pudiendo tener M y N distinta dimensión, se dice que $b \in M$ es un *valor regular* de f si $d_a f$ es sobreyectiva para todo $a \in f^{-1}(b)$, en caso contrario se trata de un *valor singular*. Los puntos $a \in N$ para los que $d_a f$ no es sobreyectiva se llaman *críticos*.

Cabe preguntarse si toda f tiene valores regulares y cuántos. Gracias al siguiente teorema, que no vamos a demostrar, sabemos que estos puntos abundan:

Teorema 8.4 (de Sard). *Los valores singulares de $f : N \rightarrow M$ tienen medida nula en M .*

La versión más topológica del teorema es que los valores regulares son un *conjunto residual*. Esto significa que contienen una intersección numerable de abiertos densos, y por ser las variedades espacios de Baire esto implica que los valores regulares son densos en M . Recordemos que una propiedad se cumple *en casi todo punto* si falla en un conjunto de medida nula. El complementario de un conjunto de medida nula es residual, por tanto esta versión del teorema implica a la topológica.

A continuación vamos a demostrar una fórmula para el cálculo de grados, para lo que será necesario el siguiente lema previo:

Lema 8.5. *Si $b \in M$ es un valor regular de la aplicación propia $f : N \rightarrow M$ la preimagen $f^{-1}(b)$ es un conjunto finito $\{a_i\} \subset N$. Además existen entornos abiertos V_i de a_i y U de b tales que*

1. $f^{-1}(U) = \cup_i V_i$
2. $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ es un difeomorfismo

Demostración. Por ser f propia $f^{-1}(b)$ es finita, $\{a_i\}$, y por ser b un valor regular $d_{a_i} f$ es un isomorfismo, por lo que f es un difeomorfismo local de un entorno abierto W_i de a_i a $f(W_i)$ entorno de b . Restringamos los entornos de modo que sean disjuntos y fijamos

$$U = \left(\bigcap_i f(W_i) \right) \setminus f\left(N \setminus \bigcup_i W_i\right),$$

que es abierto por ser f propia y $\{a_i\}$ finito. Con $V_i = W_i \cap f^{-1}(U)$ concluimos. □

Definición 8.6. Dada una aplicación propia $f : N \rightarrow M$ entre variedades de la misma dimensión, $b \in M$ un valor regular suyo y $a \in f^{-1}(b)$ definimos el *signo en a*

$$\text{sign}_a(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_a f \text{ conserva la orientación} \\ -1 & \text{si no} \end{cases}.$$

Teorema 8.7. En las condiciones y notación anteriores, para cualquier valor regular b se cumple

$$\deg(f) = \sum_{a \in f^{-1}(b)} \text{sign}_a(f).$$

En particular, el grado es un número entero.

Demostración. Sean a_i , V_i y U los del lema previo. Supongamos U , y por tanto V_i , conexo. El difeomorfismo $f|_{V_i}$ conservará o no la orientación según $\text{sign}_{a_i}(f)$ sea 1 o -1 . Si tomamos una forma $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ con soporte contenido en U e integral 1, por ser f propia $f^*\omega \in \Gamma_c^m(N)$ y su soporte estará contenido en $f^{-1}(U)$. Si denotamos por α_i a la extensión por 0 de $(f|_{V_i})^*(\omega|_U)$ a N , se cumple $\sum_i \alpha_i = f^*\omega$ y $\text{sop}(\alpha_i) \subset V_i$, por tanto

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \deg(f) \int_M \omega = \int_N f^*\omega = \sum_i \int_N \alpha_i = \sum_i \int_{V_i} (f|_{V_i})^*(\omega|_U) \\ &= \sum_i \text{sign}_{a_i}(f) \int_U \omega|_U = \sum_i \text{sign}_{a_i}(f). \end{aligned}$$

□

Concluimos la sección con un teorema que usaremos para demostrar un caso particular del teorema de Poincaré-Hopf:

Teorema 8.8 (del borde). Sea $F : P \rightarrow M$ una aplicación propia entre variedades de dimensión $m+1$ y m respectivamente, con M conexa y P con borde. Entonces

$$\deg(F|_{\partial P}) = 0.$$

Demostración. Si $\omega \in \Gamma_c^m(M)$ tiene integral 1, el resultado se sigue del teorema de Stokes:

$$\deg(F|_{\partial P}) = \int_{\partial P} (F|_{\partial P})^*(\omega) = \int_P dF^*\omega = \int_P F^*d\omega = 0.$$

□

Este teorema generaliza la invarianza del grado por homotopía. Si $f \simeq g$ vía F_t , podemos deducir que sus grados son iguales aplicando el teorema a la homotopía F , definida en $P = M \times [0, 1]$:

$$0 = \deg(F|_{\partial P}) = \deg(F|_{M \times \{1\}}) + \deg(F|_{M \times \{0\}}) = \deg(g) - \deg(f).$$

Nótese que el signo menos aparece porque $M \times \{0\}$ tiene orientación opuesta como borde de $M \times [0, 1]$ que al orientarla como M .

9. UNA APLICACIÓN TOPOLÓGICA

A continuación mostramos una aplicación topológica de la sección anterior, que a priori está construida para variedades diferenciables y aplicaciones diferenciables entre ellas.

Lema 9.1. *Un espacio afín de dimensión impar no es el cuadrado de ningún espacio topológico, es decir $\mathbb{R}^{2n+1}$ no es homeomorfo a un producto $X^2 = X \times X$.*

Demostración. Supongamos que existe un homeomorfismo $h = (h_1, h_2) : \mathbb{R}^k \rightarrow X^2$ con k impar. Definimos el homeomorfismo $\sigma : X^2 \times X^2 : (a, b, c, d) \mapsto (d, a, b, c)$ que cumple $\sigma^2 : (a, b, c, d) \mapsto (c, d, a, b)$. Encontramos la contradicción al considerar el homeomorfismo

$$\varphi = (h^{-1} \times h^{-1}) \circ \sigma \circ (h \times h) : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}.$$

Resulta que $\varphi^2(u, v) = (v, u)$. En efecto, como $\varphi^2 = (h^{-1} \times h^{-1}) \circ \sigma^2 \circ (h \times h)$, tenemos:

$$(u, v) \mapsto (h_1(u), h_2(u), h_1(v), h_2(v)) \mapsto (h_1(v), h_2(v), h_1(u), h_2(u)) \mapsto (v, u).$$

Así φ^2 es una aplicación lineal luego su grado coincide con su determinante y este es -1 cuando k es impar. Por otra parte si ψ es una aplicación diferenciable homótopa a φ , digamos vía $H_t : \psi \simeq \varphi$, entonces $\varphi^2 \simeq \psi^2$ vía $H_t \circ H_t$, por lo que

$$-1 = \deg(\varphi^2) = \deg(\psi^2) = \deg(\psi)^2 \geq 0,$$

contradicción. □

10. FUNCIONES DE MORSE

En esta sección introducimos *las funciones de Morse*, las cuales nos dan cierta información acerca de la variedad sobre la que se definen. Nuestro objetivo es demostrar en una sección posterior el teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse.

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Los puntos críticos de f son aquellos $a \in M$ para los que $d_a f = 0$. Para los puntos críticos se puede definir la *hessiana*.

Proposición 10.1. *Si a es un punto crítico de f :*

1. *Existe una forma cuadrática $d_a^2 f$ en $T_a M$ caracterizada por*

$$d_a^2 f(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)''(0)$$

para cualquier curva diferenciable $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\gamma(0) = a$.

2. *Si $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ son coordenadas de un entorno de a y $b = x(a)$, la composición*

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{d_b x^{-1}} T_a M \xrightarrow{d_a^2 f} \mathbb{R}$$

es la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de $\tilde{f} = f \circ x^{-1}$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(b).$$

Demostración. Si $\tilde{\gamma} = x \circ \gamma$ y $\tilde{\gamma}_i$ es su componente i -ésima

$$(f \circ \gamma)'(t) = (\tilde{f} \circ \tilde{\gamma})'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t).$$

Como a es un punto crítico y γ es arbitraria $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(b) = 0$. Si usamos esto después de derivar de nuevo y sustituir en 0:

$$(f \circ \gamma)''(0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j}(b) \tilde{\gamma}'_i(0) \tilde{\gamma}'_j(0).$$

Escribiendo $\tilde{\gamma}'(0) = d_a x(\gamma'(0))$ se siguen 1 y 2. □

Esta proposición nos permite construir la siguiente definición:

Definición 10.2. Un punto crítico a de una función f se llama *no degenerado* si la hessiana de la proposición anterior es no degenerada. Se dice que f es una *función de Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados. Llamaremos *índice* de un punto crítico a a la dimensión del subespacio maximal $V \subset T_a M$ para el que $d_a^2 f|_V$ es definida negativa.

Las funciones de Morse tienen los puntos críticos aislados: esto es consecuencia del lema de Morse que veremos más adelante. En particular si M es compacta tiene una cantidad finita.

Definición 10.3. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un número finito de puntos críticos definimos el *índice de la función* como

$$\text{Ind}(f) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k,$$

siendo c_k el número de puntos críticos con índice k .

Veamos que no sólo hay funciones de Morse, sino que son fáciles de construir.

Teorema 10.4. Si $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\langle, \rangle$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$

$$f_a(x) = f(x) + \langle a, x \rangle$$

es una función de Morse para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Que una función sea de Morse es una cuestión local, por lo que podemos restringirnos a un dominio de coordenadas (U, φ) . Por tanto f_a es de Morse si y sólo si

$$\tilde{f}_a(y) = f_a \circ \varphi(y) = f \circ \varphi(y) + \langle a, \varphi(y) \rangle = \tilde{f}(y) + \langle a, \varphi(y) \rangle$$

es una función de Morse en U . Veamos que existe una función $g : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}_a$ es de Morse si y sólo si a es un valor regular de g . En tal caso por el teorema de Sard f_a sería de Morse para casi todo $a \in \mathbb{R}^n$. Definamos

$$F : \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^m : (a, y) \longmapsto \text{grad}_y \tilde{f}_a.$$

Si usamos la notación de subíndice para componentes $1 \leq i, j \leq m$ y $1 \leq k \leq n$:

$$F_i = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}, \quad \text{por tanto} \quad \frac{\partial F_i}{\partial a_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 \tilde{f}_a}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Este cálculo nos da una relación entre F y $\tilde{f}_a$ que nos servirá para encontrar g :

$$JF = \left((J\varphi)^t | H\tilde{f}_a \right).$$

Definimos $N = F^{-1}(0)$, variedad de dimensión n por el teorema de la función implícita: $\text{rg}(JF) \geq \text{rg}(J\varphi) = m$ por ser φ difeomorfismo. Además N es el conjunto de pares (a, y) tales que y es valor singular de $\tilde{f}_a$. Definimos g como la proyección $(a, y) \mapsto a$. Comprobemos cuándo a es un punto regular de g .

Sea a un valor regular de g , es decir, ningún $(a, y) \in N$ es punto crítico de g , mientras que y es crítico de $\tilde{f}_a$. Que a sea regular es por definición que $d_{(a,y)}g : T_{(a,y)}N \rightarrow \mathbb{R}^m$ sea sobreyectiva. Como N tiene dimensión n sobreyectividad e inyectividad son equivalentes. Como g es una proyección $d_{(a,y)}g$ también y la inyectividad implica que $(0, u)$ es tangente a N en (a, y) si y sólo si $u = 0$. Con esto, como $T_{(a,y)}N = \ker d_{(a,y)}F$, concluimos que

$$u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = d_{(a,y)}F(0, u) = H\tilde{f}_a(u).$$

Por tanto, a es valor regular de g si y sólo si la hessiana de $\tilde{f}_a$ es no degenerada en los puntos críticos, es decir, si $\tilde{f}_a$ es función de Morse. $\square$

Si tomamos $M = \mathbb{R}^m$ hay una función de Morse muy sencilla: $f(x) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i^2$, con $\varepsilon_i = \pm 1$, que tiene un único punto crítico, no degenerado, y cuyo índice es simplemente el número de i 's con $\varepsilon_i = -1$. Esta función es una forma sencilla de representar funciones diferenciables arbitrarias en entornos de puntos críticos no degenerados:

Lema 10.5 (de Morse). *Si $c \in M$ es un punto crítico no degenerado de una función diferenciable f , entonces existe una parametrización de un entorno de c , (U, φ) , tal que la función adopta la forma*

$$f \circ \varphi(x) = f(c) + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i^2, \quad x \in U$$

Demostración. De nuevo se trata de una cuestión local e invariante por difeomorfismos por lo que podemos suponer $c = 0$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $U = B(0, 1)$ o un entorno convexo del origen. También podemos tomar $f(0) = 0$. En primer lugar escribimos f como

$$f(x) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x), \quad g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt.$$

Esta expresión es válida para cualquier función diferenciable que se anule en el origen, para convencerse de ello basta desarrollar $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(f(tx)) dt$. Dado que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ aplicamos de nuevo la fórmula y simetrizamos:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x), \quad h_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}), \quad g_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(tx) dt.$$

En general para cierto $k \geq 1$,

$$(h_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

con D una matriz $(k-1) \times (k-1)$ diagonal con entradas ± 1 y E una matriz simétrica de entradas $h_{ij}(x)$ para cierto k . Queremos probar por inducción que esto es cierto para cada k con un cambio de coordenadas. Supongamos que en un entorno del origen

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i x_i^2 + \sum_{i,j=k}^m x_i x_j h_{ij}(x).$$

Si $k = 1$ la demostración se mantiene quitando el primer sumatorio. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 2h_{ij}(0)$ y 0 es un punto no degenerado, $(h_{ij}(0))$ es invertible, y $E(0)$ también. Con un cambio de variables lineal en $\{x_k, \dots, x_m\}$ se puede conseguir $h_{kk} \neq 0$ y por continuidad se puede suponer que su signo ε_k es constante, quizá reduciendo U . Si cambiamos la variable k -ésima

$$y_k(x) = \sqrt{|h_{kk}(x)|} \sum_{i=k}^m x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)}$$

y mantenemos el resto se trata de un cambio de coordenadas, pues su determinante jacobiano en el origen es $\frac{\partial y_k}{\partial x_k} = \sqrt{|h_{kk}(x)|} \neq 0$ y por tanto define un difeomorfismo local. Si escribimos $x = \varphi_k(y)$:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_k(y) &= \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i x_i^2 + h_{kk}(x) x_k^2 + 2x_k \sum_{i=k+1}^m x_i h_{ik}(x) + \sum_{i,j=k+1}^m x_i x_j h_{ij}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i x_i^2 + h_{kk}(x) \left(\sum_{i=k}^m x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)} \right)^2 \\ &\quad - h_{kk}(x) \left(\sum_{i=k+1}^m x_i \frac{h_{ik}(x)}{h_{kk}(x)} \right)^2 + \sum_{i,j=k+1}^m x_i x_j h_{ij}(x) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_i y_i^2 + \sum_{i,j=k+1}^m y_i y_j \tilde{h}_{ij}(y), \end{aligned}$$

donde $\tilde{h}_{ij}$ procede de agrupar los términos $x_i x_j$ con $i, j > k$ y a continuación componer con φ_k . Con esto concluye la inducción y con $k = m$ la demostración. $\square$

11. CAMPOS TIPO GRADIENTE

El gradiente de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se define como aquel campo $\text{grad}(f)$ tal que

$$d_a f(\cdot) = \langle \text{grad} f(a), \cdot \rangle.$$

Es evidente que el gradiente tiene por ceros los puntos críticos de f , por lo que en el caso de funciones de Morse estos son aislados.

Dado un campo X , una función f es *de Lyapunov* si es estrictamente creciente en sus curvas integrales no constantes $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. Cualquier función es de Lyapunov para su gradiente:

$$(f \circ \alpha)'(t) = d_{\alpha(t)}f(\text{grad}f(\alpha(t))) = \|\text{grad}f(\alpha(t))\|^2 > 0.$$

El gradiente nos interesa para las funciones de Morse, pero el producto escalar no se conserva al localizar funciones, por lo que introducimos los campos *de tipo gradiente* como sustituto con las propiedades que nos interesan:

Definición 11.1. Si f es una función de Morse en M se dice que un campo diferenciable X es *de tipo gradiente* para f cuando se cumple:

1. Si a no es un punto crítico de f , $d_a f(X(a)) > 0$.
2. Si a es un punto crítico de f existen coordenadas $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $h(a) = 0$,

$$f \circ h^{-1} = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2, \quad x \in h(U)$$

$$\text{y } h_*X|_U = \text{grad}(f \circ h^{-1}).$$

La primera condición nos da que f sea de Lyapunov para el campo y la segunda nos mantiene cierto parecido con el gradiente.

Proposición 11.2. *Toda función de Morse tiene un campo de tipo gradiente.*

Demostración. Elegimos un atlas $\{h_\alpha, U_\alpha\}$ tal que o bien U_α no contiene puntos críticos o contiene solo uno, a , y en ese caso $f \circ h_\alpha^{-1}$ tiene la expresión del apartado 2 de la definición anterior (por el lema de Morse). Además, si es necesario reduciendo los abiertos, ningún punto crítico será adherente a un abierto distinto al que pertenece.

Sean $X_\alpha = (h_\alpha^{-1})_* \text{grad}(f \circ h_\alpha^{-1})$ y $\{\theta_\alpha\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$. Veamos que el campo buscado es

$$X = \sum \theta_\alpha X_\alpha$$

donde $\theta_\alpha X_\alpha$ se extiende por 0 fuera de U_α . Si a no es crítico, para todo α tal que $a \in U_\alpha$

$$d_a f(X_\alpha(a)) = d_{h_\alpha(a)}(f \circ h_\alpha^{-1})(\text{grad}_{h_\alpha(a)}(f \circ h_\alpha^{-1})) > 0.$$

Como al menos un $\theta_\alpha(a) > 0$ se cumple la primera condición de la definición:

$$d_a f(X(a)) = \sum \theta_\alpha(a) d_a f(X_\alpha(a)) > 0.$$

Si $a \in U_\alpha$ es un punto crítico, por la elección de atlas tiene un entorno $V \subset U_\alpha$ que no interseca con ningún otro U_β , $X|_V = X_\alpha|_V$ y h_α con las coordenadas que cumplen la segunda condición. $\square$

Concluimos la sección con un resultado que relaciona el signo de un campo tipo gradiente en un punto crítico y el índice de su función de Morse en ese punto.

Lema 11.3. *Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse, X un campo tipo gradiente y a un punto crítico de índice k , entonces $d_a X : T_a M \rightarrow T_a M$ y $\text{sign}_a X = (-1)^k$.*

Demostración. Sea $\varphi : B(0, 1) \rightarrow U^a$ una parametrización de Morse de un entorno de $a = \varphi(0)$ tal que $X_{\varphi(y)} = d_y\varphi(\text{grad}(f \circ \varphi)(y))$ para $y \in B(0, 1)$. Buscamos derivar la igualdad en $y = 0$, para ello vemos el lado derecho como la siguiente composición:

$$y \mapsto (d_y\varphi, Y_y) \xrightarrow[\text{bilineal}]{\text{evaluación}} d_y\varphi(Y_y),$$

donde $Y = \text{grad}(f \circ \varphi)$. Al derivar la composición y evaluar:

$$u \xrightarrow{\text{en } y=0} (*, d_0Y(u)) \xrightarrow{\text{en } (d_0\varphi, 0)} *(0) + d_0\varphi(d_0Y(u)) = d_0\varphi(d_0Y(u)).$$

Dado que al derivar $X_{\varphi(y)}$ obtenemos $d_aX \circ d_0\varphi$, la igualdad

$$d_aX \circ d_0\varphi = d_0\varphi \circ d_0Y$$

junto a la sobreyectividad de $d_0\varphi$ nos dice al mismo tiempo que $d_aX : T_aM \rightarrow T_aM$ y que $\text{sign}_0 Y = \text{sign}_a X$. Lo ilustramos con el siguiente diagrama, el cual muestra cómo por ser $d_0\varphi$ un isomorfismo, sea cual sea la orientación en T_aM , d_aX la conserva si y sólo si d_0Y conserva la de $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{array}{ccc} \{u_1, \dots, u_m\} & \xrightarrow[+/-]{d_0\varphi^{-1}} & \{v_1, \dots, v_m\} \\ d_aX \downarrow & & \downarrow d_0Y \\ \{u'_1, \dots, u'_m\} & \xleftarrow[+/-]{d_0\varphi} & \{v'_1, \dots, v'_m\} \end{array}$$

El cálculo del signo de Y en 0 es inmediato:

$$d_0(\text{grad}(f \circ \varphi)) = \begin{pmatrix} -\text{Id}_k & 0 \\ 0 & \text{Id}_{m-k} \end{pmatrix} \implies (-1)^k = \text{sign}_0 Y = \text{sign}_a X.$$

□

El resultado anterior tiene la siguiente consecuencia importante:

Corolario 11.4. *Dada una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una variedad compacta, el conjunto de sus puntos críticos $\{a_i\}$ y un campo de tipo gradiente X :*

$$\text{Ind}(f) = \sum_i \text{sign}_{a_i} X$$

12. TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF PARA FUNCIONES DE MORSE

En esta sección vamos a demostrar el teorema de Poincaré-Hopf para funciones de Morse, el cual nos dice que el índice de estas sólo depende de la variedad, es decir, es el mismo para todas.

Dado que hemos definido el grado para aplicaciones propias y el teorema va a involucrar el grado de una aplicación de Gauss, que tiene imagen compacta, vamos a restringirnos a M compacta. Gracias a esta restricción sabemos que el índice de las funciones de Morse está definido.

Además, siempre podemos considerar un entorno tubular U de M en cualquier $\mathbb{R}^n$ que la contenga, con retracción diferenciable r . Gracias a la compacidad de M sabemos que hay otro entorno N de M , dado por la inecuación $\|x - r(x)\|^2 \leq \varepsilon^2$ para un ε menor que el

radio de U . Este entorno tiene por borde el conjunto de puntos que están a una distancia ε de M , por lo que se trata de una hipersuperficie dada por la ecuación $\|x - r(x)\| = \varepsilon$. Una consecuencia inmediata es que ∂N es orientable independientemente de la orientabilidad de M , pues tiene como aplicación de Gauss al gradiente de la ecuación anterior:

$$\eta : \partial N \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad \eta(x) = \frac{1}{\varepsilon}(x - r(x)).$$

En estas condiciones:

Teorema 12.1 (de Poincaré-Hopf para funciones de Morse). *Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse y η la aplicación de Gauss del borde del entorno tubular:*

$$\text{Ind}(f) = \deg(\eta).$$

Demostración. Sea X un campo tipo gradiente de f , con puntos críticos $\{a_k\}$. Definimos en el entorno tubular N :

$$Y_x = x - r(x) + X_{r(x)}$$

y queremos comprobar que 0 es un valor regular de $Y : N \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como $X_{r(a)} \in T_{r(a)}M$, que es perpendicular a $x - r(a)$, $Y_a = 0$ si y sólo si $a \in M$ y es punto crítico de f . En ese caso:

1. $Y|_M = X$, por lo que $d_a Y|_{T_a M} = d_a X$.
2. $r|_{(a+T_a M^\perp) \cap N} \equiv a$, por lo que $d_a Y|_{T_a M^\perp} = \text{Id}_{T_a M^\perp}$.

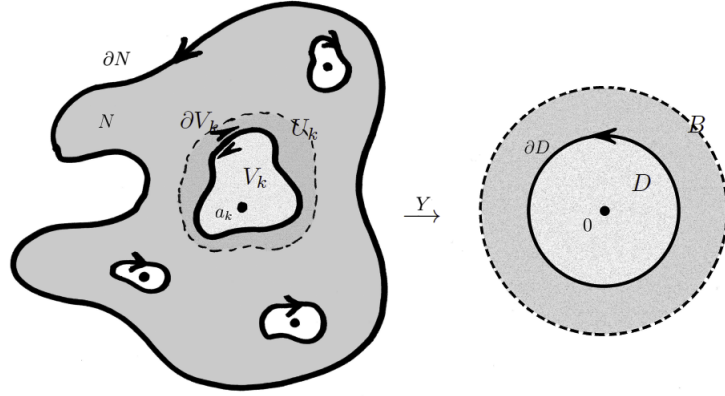
Hemos deducido que $d_a Y = d_a X \oplus \text{Id}_{T_a M^\perp}$. Como a es un punto crítico no degenerado, $d_a X$ es un isomorfismo, e $\text{Id}_{T_a M^\perp}$ también lo es, luego a es un punto crítico no degenerado de Y y 0 es un valor regular de Y . Además la igualdad anterior nos proporciona $\text{sign}_a Y = \text{sign}_a X$. Si sumamos en la preimagen de 0, es decir en los puntos críticos de f , por el corolario 11.4:

$$\text{Ind}(f) = \sum_k \text{sign}_{a_k} X = \sum_k \text{sign}_{a_k} Y.$$

El segundo paso de la demostración consiste en comprobar:

$$\deg(Y/\|Y\||_{\partial N}) = \sum_k \text{sign}_{a_k} Y.$$

Hemos visto que $Y^{-1}(0)$ son los puntos críticos de f y que 0 es valor regular de Y , por tanto existen entornos disjuntos U_k de los a_k tales que $Y|_{U_k}$ es difeomorfismo entre U_k y una bola abierta B de centro 0. Si escogemos una bola cerrada $D \subset B$ y definimos $V_k = Y^{-1}(D) \cap U_k$, al restringir Y de nuevo tenemos difeomorfismos $Y|_{V_k} : V_k \rightarrow D$, y V_k es una variedad con borde ∂V_k , que Y lleva a ∂D . Al quitar el interior de los V_k a N obtenemos una variedad $V = N \setminus \cup_k \text{int}(V_k)$ con borde $\partial N \cup_k \partial V_k$. Nótese que ∂V_k tiene la orientación opuesta como borde de V a la que tiene como borde de V_k .



Como Y no se anula en V , $Y/\|Y\|$ está definida en V , y podemos aplicar el teorema del borde 8.8:

$$\deg \left(Y/\|Y\| \Big|_{\partial N} \right) + \sum_k \deg \left(Y/\|Y\| \Big|_{\partial V_k} \right) = 0,$$

donde ∂V_k se orienta como borde de V . Como esa orientación de ∂V_k es la opuesta como borde de V_k tenemos

$$\deg \left(Y/\|Y\| \Big|_{\partial N} \right) = \sum_k \deg \left(Y/\|Y\| \Big|_{\partial V_k} \right),$$

donde ∂V_k se orienta como borde de V_k . Si δ es el radio de D tenemos $Y/\|Y\| \Big|_{\partial V_k} = Y/\delta \Big|_{\partial V_k}$, y como la homotecia $1/\delta$ conserva la orientación:

$$\deg \left(Y/\|Y\| \Big|_{\partial N} \right) = \sum_k \deg \left(Y \Big|_{\partial V_k} \right).$$

Como $Y|_{\partial V_k}$ es un difeomorfismo su grado será ± 1 , y el signo lo determinará si conserva o invierte la orientación. Este signo es $\text{sign}_x Y$ para cualquier $x \in V_k$, en particular para a_k , y obtenemos la igualdad que queríamos.

El último paso consiste en comprobar que $Y/\|Y\| \Big|_{\partial N}$ y η son homótopas. En primer lugar observamos que son aplicaciones de ∂N a $\mathbb{S}^{n-1}$ sin imágenes antipodales:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon}(x - r(x)) &= \frac{x - r(x) + X_{r(x)}}{\|x - r(x) + X_{r(x)}\|} \Leftrightarrow -\frac{\|Y_x\|}{\varepsilon}(x - r(x)) = x - r(x) + X_{r(x)} \\ &\Leftrightarrow -\left(1 + \frac{\|Y_x\|}{\varepsilon}\right)(x - r(x)) = X_{r(x)}, \end{aligned}$$

lo que es imposible por ser perpendiculares y no nulos, pues $x \neq r(x)$ fuera de M . Por tanto podemos definir la homotopía habitual:

$$F(x, t) = \frac{tY_x/\|Y_x\| + (1-t)\eta(x)}{\|tY_x/\|Y_x\| + (1-t)\eta(x)\|}.$$

Finalmente, como ambas aplicaciones son homótopas tienen el mismo grado y concluimos la demostración:

$$\text{Ind}(f) = \sum_k \text{sign}_{a_k} Y = \deg \left(Y / \|Y\|_{\partial N} \right) = \deg(\eta).$$

□

13. ELEMENTO DE VOLUMEN Y CURVATURA DE HIPERSUPERFICIES

El objetivo de esta sección es introducir de forma concisa los conceptos de *elemento de volumen* y *curvatura* con el fin de enunciar y probar el teorema de Gauss-Bonnet en la siguiente.

Definición 13.1. Dada una orientación en $M \subset \mathbb{R}^n$, una forma diferencial Ω es un *elemento de volumen* si

$$\Omega_x(u_1, \dots, u_m) = 1 \quad \text{para todo } x \in M$$

cuando $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base de $T_x M$ compatible con la orientación y ortonormal con el producto escalar de $\mathbb{R}^n$.

Si existe el elemento de volumen es único, pues una forma alternada de grado m está determinada por su evaluación en una base. El *volumen* de una variedad es la integral de su elemento de volumen.

Proposición 13.2. Si $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es una hipersuperficie orientada con aplicación de Gauss ν , la forma diferencial

$$\Omega_M = \det(\nu, \cdot)$$

es el elemento de volumen de M .

Demostración. Para cada $x \in M$ si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base ortonormal de $T_x M$ compatible con la orientación que determina ν entonces $\{\nu(x), u_1, \dots, u_m\}$ es base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^{m+1}$ y por tanto

$$(\Omega_M)_x(u_1, \dots, u_m) = \det(\nu(x), u_1, \dots, u_m) = 1.$$

□

A continuación definimos la curvatura y comprobamos su relación con los elementos de volumen de M y $\mathbb{S}^m$.

Definición 13.3. La *curvatura de Gauss* de una hipersuperficie orientada $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ es la función

$$K : M \rightarrow \mathbb{R} : \quad x \mapsto K(x) = \det(d_x \nu),$$

y la *curvatura íntegra* de M es la integral

$$\kappa = \int_M K \Omega_M.$$

Proposición 13.4. *Los elementos de volumen de M y $\mathbb{S}^m$ se relacionan por $\nu^*\Omega_{\mathbb{S}^m} = \det(d\nu)\Omega_M = K\Omega_M$ y en consecuencia la curvatura íntegra es proporcional al grado de la aplicación de Gauss de M :*

$$\kappa = \int_M K\Omega_M = \int_M \nu^*\Omega_{\mathbb{S}^m} = \deg(\nu) \int_{\mathbb{S}^m} \Omega_{\mathbb{S}^m} = \deg(\nu)\text{vol}(\mathbb{S}^m).$$

Nótese que $\text{vol}(\mathbb{S}^m)$ es una constante que sólo depende de la dimensión.

Demostración. Si $a \in M$ los planos tangentes T_aM y $T_{\nu(a)}\mathbb{S}^m$ coinciden, y tanto $(\Omega_M)_a$ como $(\Omega_{\mathbb{S}^m})_{\nu(a)}$ son la restricción de $\det(\nu, \cdot)$ a $T_aM = T_{\nu(a)}\mathbb{S}^m$, en consecuencia:

$$\begin{aligned} (\nu^*\Omega_{\mathbb{S}^m})_a(u_1, \dots, u_m) &= (\Omega_{\mathbb{S}^m})_{\nu(a)}(d_a\nu(u_1), \dots, d_a\nu(u_m)) = \det(\nu(a), d_a\nu(u_1), \dots, d_a\nu(u_m)) \\ &= (\Omega_M)_a(d_a\nu(u_1), \dots, d_a\nu(u_m)) = \det(d_a\nu)(\Omega_M)_a(u_1, \dots, u_m) \\ &= K(a)(\Omega_M)_a(u_1, \dots, u_m). \end{aligned}$$

Por tanto $K\Omega_M = \nu^*\Omega_{\mathbb{S}^m}$ y la fórmula del enunciado es la definición de grado. $\square$

14. EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Un invariante topológico básico de la Topología Algebraica es la característica de Euler. Este número permite distinguir algunas variedades e interviene en muchas propiedades importantes. Para una variedad compacta se puede definir con la cohomología de de Rham como

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim H^k(M).$$

La dualidad de Poincaré nos permite afirmar que $\chi(M) = 0$ si m es impar. En efecto $\dim H^p(M) = \dim H^{m-p}(M)$ y por tanto:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim H^k(M) = \sum_{k=0}^{(m-1)/2} (-1)^k (1 + (-1)^m) \dim H^k(M) = 0.$$

Un resultado principal de la teoría de Morse es:

Teorema 14.1. *El índice de una función de Morse de una hipersuperficie orientable M es su característica de Euler*

$$\text{Ind}(f) = \chi(M).$$

Una consecuencia inmediata de esto es otra prueba de que $\chi(M) = 0$ cuando M tiene dimensión impar: si f es una función de Morse de M , también lo es $-f$, y

$$\chi(M) = \text{Ind}(f) \stackrel{14.1}{=} \text{Ind}(-f) \stackrel{(*)}{=} -\text{Ind}(f) = -\chi(M),$$

donde la igualdad $(*)$ resulta de que las derivadas son lineales, luego cambian de signo con f . Para probar 14.1 hay que profundizar en la teoría más allá del alcance de esta memoria. Lo que sí haremos es mostrar cómo el célebre teorema de Gauss-Bonnet puede

deducirse de 14.1 mediante el teorema de Poincaré-Hopf de la sección anterior. Antes de otra cosa observemos que estos dos resultados se resumen en el siguiente.

Proposición 14.2. *Si η es la aplicación de Gauss del borde de un entorno tubular de radio constante de una hipersuperficie orientable M , entonces:*

$$\deg(\eta) = \chi(M).$$

Pasemos ya a Gauss-Bonnet, que se enuncia para dimensión par porque como hemos dicho $\chi = 0$ en dimensión impar:

Teorema 14.3 (de Gauss-Bonnet). *La curvatura íntegra de una hipersuperficie orientable M de dimensión par m es:*

$$\kappa = \frac{1}{2} \text{vol}(\mathbb{S}^m) \chi(M).$$

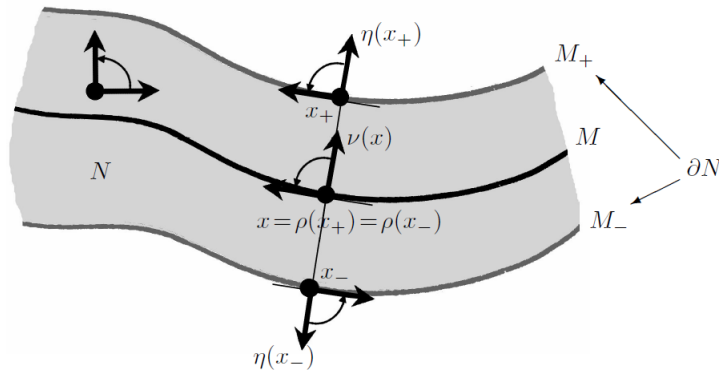
Antes de demostrarlo veamos qué relación hay entre los grados de la aplicación de Gauss ν de la variedad y la de un entorno tubular suyo η . En primer lugar observamos que, manteniendo la notación de la sección anterior, el borde ∂N consiste en 2 copias de M , descritas como:

$$M_{\pm} = \{x_{\pm} = x \pm \varepsilon \nu(x) \mid x \in M\},$$

donde ε es el radio de N . La restricción de la retracción r a una de las copias es un difeomorfismo entre esta y M , con inversa $x_{\pm}(x)$. Las derivadas de las inversas son

$$\text{Id} \pm \varepsilon d_x \nu,$$

por lo que $r|_{M_+}$ conserva la orientación y $r|_{M_-}$ la invierte.



El grado del difeomorfismo antipodal en $\mathbb{S}^m$ es $(-1)^m$, por tanto, como $\eta|_{M_{\pm}} = \pm \nu \circ r|_{M_{\pm}}$:

$$\begin{aligned} \deg(\eta) &= \deg(\eta|_{M_+}) + \deg(\eta|_{M_-}) = \deg(\nu \circ r|_{M_+}) + \deg(-\nu \circ r|_{M_-}) \\ &= \deg(\nu) + (-1)^m \deg(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar} \\ 2 \deg(\nu) & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}. \end{aligned}$$

Por tanto por 14.2

$$\chi(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar (como sabemos)} \\ 2 \deg(\nu) & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. (de 14.3) Basta con reunir el cálculo anterior para m par y 13.4:

$$\kappa = \deg(\nu) \text{vol}(\mathbb{S}^m) = \frac{1}{2} \text{vol}(\mathbb{S}^m) \chi(M).$$

□

Vamos a explicitar los resultados anteriores en el caso de las superficies orientables.

Ejemplo 14.4. Esfera $\mathbb{S}^2$. Si estudiamos la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$, $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$, nuestro candidato a función de Morse es $f(x) = x_0$. Llamamos polo norte a $x_N = (1, 0, 0)$ y sur a $x_S = (-1, 0, 0)$. Veamos que los únicos puntos críticos de f son x_N y x_S y que son no degenerados.

En primer lugar parametrizamos la esfera mediante las proyecciones estereográficas desde el polo norte y sur:

$$\begin{aligned} \varphi_N(y_1, y_2) &= \left(\frac{-1 + \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y_2}{1 + \|y\|^2} \right), \\ \varphi_S(y_1, y_2) &= \left(\frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y_2}{1 + \|y\|^2} \right). \end{aligned}$$

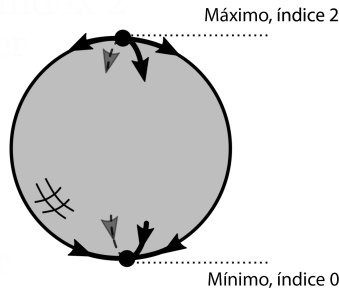
La obtención de puntos críticos es inmediata:

$$\frac{\partial(f \circ \varphi_N)}{\partial y_i}(y) = \frac{4y_i}{(1 + \|y\|^2)^2}, \quad \frac{\partial(f \circ \varphi_S)}{\partial y_i}(y) = \frac{-4y_i}{(1 + \|y\|^2)^2}.$$

En ambos casos el único punto crítico es el origen, que se corresponde con x_S y x_N respectivamente. A priori ya sabemos sus índices y que son puntos no degenerados, pues f es continua sobre compacto luego alcanza máximo y mínimo, y por ser f diferenciable y M no tener borde los extremos son puntos críticos. Resulta que la hessiana en un polo será definida positiva y en el otro definida negativa. En efecto, si calculamos la matriz hessiana de la localización obtenemos:

$$\text{Hess}_0(f \circ \varphi_N) = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Hess}_0(f \circ \varphi_S) = 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que $\chi(\mathbb{S}^2) = \text{Ind}(f) = (-1)^0 + (-1)^2 = 2$.



Ejemplo 14.5. Toro $\mathbb{T}^2$. Si “colocamos el toro en vertical” tomamos como f la restricción de $(x, y, z) \mapsto z$ a la variedad. Veamos que en efecto es función de Morse. La parametrización que vamos a usar, con la que se especifica bien la variedad, es:

$$\varphi(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, -\sin u, (2 + \cos u) \sin v + 3).$$

Por tanto la localización de f es $\tilde{f}(u, v) = (2 + \cos u) \sin v + 3$ y los puntos críticos son los que tienen por coordenadas: $(0, \pi/2)$, $(0, 3\pi/2)$, $(\pi, \pi/2)$ y $(\pi, 3\pi/2)$. En un punto cualquiera la matriz hessiana es:

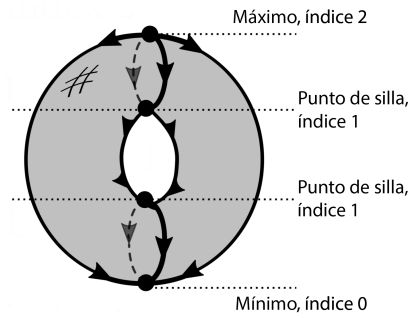
$$\begin{pmatrix} -\cos u \sin v & -\sin u \cos v \\ -\sin u \cos v & -(2 + \cos u) \sin v \end{pmatrix},$$

que al sustituir en los 4 puntos críticos da:

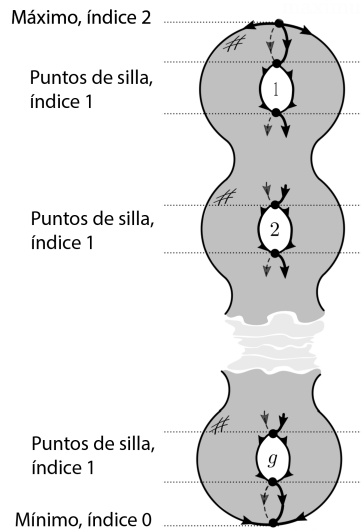
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, f es de Morse y tiene índice $1 - 2 + 1 = 0$, por lo que se verifica

$$\chi(\mathbb{T}^2) = \text{Ind}(f) = 0.$$



El teorema de clasificación de superficies compactas nos dice que las superficies compactas orientables son homeomorfas a la esfera $\mathbb{S}^2$ o a la suma de g toros $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$. Dado que la característica de Euler se conserva bajo homeomorfismo, podemos deducirla calculando el índice de la altura $(x, y, z) \mapsto z$ como función de Morse de los g toros colocados en vertical.



Esta función tiene un máximo y un mínimo, y dos puntos de silla por cada toro, por tanto $\text{Ind}(f) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$.

15. EL TEOREMA DE REEB

Una función de Morse definida en una variedad compacta siempre tiene al menos dos puntos críticos: el máximo y el mínimo, que existen por continuidad y compacidad. El caso de la esfera $\mathbb{S}^2$ visto en la sección anterior se generaliza sin dificultad a dimensión arbitraria: la coordenada x_0 de $\mathbb{S}^m : x_0^2 + \cdots + x_m^2 = 1$ es una función de Morse con dos puntos críticos $x_0 = \pm 1$. En esta sección veremos como este hecho caracteriza *topológicamente* a las esferas.

Teorema 15.1 (de Reeb). *Si una variedad compacta M de dimensión m tiene una función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con sólo dos puntos críticos, entonces M es homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^m$.*

El que esta caracterización sea topológica es fundamental: existen variedades compactas con una función de Morse que tiene exactamente dos puntos críticos que *no son difeomorfos a la esfera*. Son las denominadas *esferas exóticas*, que Milnor describió en 1963 precisamente usando esta caracterización topológica.

Para probar 15.1 necesitamos un resultado inicial de teoría de Morse que probamos a continuación.

Proposición 15.2. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en una variedad compacta y conexa M . Si $[a, b] \subset \text{im } f$ no contiene valores singulares y definimos $M^c = \{x \in M : f(x) \leq c\}$, entonces M^a es difeomorfa a M^b .*

Demostración. Por hipótesis $\xi = \text{grad}(f)$ no se anula en $f^{-1}([a, b])$, por lo que podemos definir el campo:

$$X(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|^2}.$$

Por ser M compacta X genera un flujo completo $\varphi_t : M \rightarrow M$. Dado $x \in M$ fijo, consideramos la función

$$t \mapsto f(\varphi_t(x)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X(\varphi_t(x))$, derivando:

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(x))) = d_{\varphi_t(x)}f \left(\frac{d}{dt}(\varphi_t(x)) \right) = \langle \xi(\varphi_t(x)), \frac{d}{dt}(\varphi_t(x)) \rangle = \langle \xi(\varphi_t(x)), X(\varphi_t(x)) \rangle = 1.$$

Concluimos que $f(\varphi_t(x)) = t + f(x)$. Veamos cómo esto implica que $\varphi_{a-b} : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo que transforma M^b en M^a . Primero comprobamos $\varphi_{a-b}(M^b) \subset M^a$ y a continuación el contenido contrario. Si $x \in M^b$ entonces $f(x) \leq b$ y:

$$f(\varphi_{a-b}(x)) = a - b + f(x) \leq a - b + b = a, \quad \text{luego } \varphi_{a-b}(x) \in M^a.$$

El otro contenido es equivalente a $\varphi_{a-b}^{-1}(M^a) = \varphi_{b-a}(M^a) \subset M^b$, y se prueba del mismo modo: si $x \in M^a$, $f(x) \leq a$, entonces

$$f(\varphi_{b-a}(x)) = b - a + f(x) \leq b - a + a = b, \quad \text{luego } \varphi_{b-a}(x) \in M^b.$$

□

Deducimos de esto, según enunciamos:

Demostración. (de 15.1) Como M es compacta un punto crítico es un mínimo $f(x_{\min}) = a$ y el otro un máximo $f(x_{\max}) = b$. Por el lema de Morse 10.5 para cierto $\varepsilon > 0$ tanto $M^{a+\varepsilon} = f^{-1}([a, a+\varepsilon])$ como $N = f^{-1}([b-\varepsilon, b])$ son difeomorfas a bolas cerradas de dimensión m . Además por la proposición anterior $M^{a+\varepsilon}$ es difeomorfa a $M^{b-\varepsilon} = f^{-1}([a, b-\varepsilon])$. Por tanto $M = f^{-1}([a, b])$ es la unión por el borde de dos bolas cerradas B_1, B_2 de dimensión m , veamos cómo esto implica que M es *homeomorfa*, y no necesariamente difeomorfa, a la esfera $\mathbb{S}^m$. Vamos a denotar por $S_{\pm}$ a los hemisferios superior e inferior de la esfera respectivamente, y por E al ecuador.

Tenemos un difeomorfismo $h : M^{b-\varepsilon} \rightarrow S_-$ que induce otro $h|_{\partial M^{b-\varepsilon}} : \partial M^{b-\varepsilon} \rightarrow E$, y debemos extenderlo de $\partial M^{b-\varepsilon} = f^{-1}(b-\varepsilon) = \partial N$ a todo N . Como N es una bola cerrada, esta extensión existe continua, pero *no necesariamente diferenciable*. En efecto, si entendemos (vía difeomorfismo) N y S_+ como la bola $\|x\| \leq 1$ y los bordes ∂N y ∂S_+ como la esfera $\|x\| = 1$, la aplicación

$$\tilde{h} : N \rightarrow S_+, \quad \tilde{h}(x) = \begin{cases} \|x\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es un homeomorfismo (no siempre diferenciable en el origen) bien definido. Es claro que junto con h define el homeomorfismo entre M y $\mathbb{S}^m$ buscado. $\square$

REFERENCIAS

- [1] I.H. MADSEN, J. TORNEHAVE: *From Calculus to Cohomology*. Cambridge University Press.
- [2] J.M. GAMBOA, J.M. RUIZ: *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*. Sanz y Torres, Madrid 2016.
- [3] E. OUTERELO, J.M. RUIZ: *Mapping Degree Theory*. American Mathematical Society, 2009.
- [4] J. BOCHNAK: *Differential Geometry*. Lecture Notes, Vrije Universiteit, Amsterdam 1983.
- [5] F. COLTRARO: *Topología Algebraica y Diferencial. Teorema de Poincaré-Hopf*. TFG Departamento de AGT UCM, 2020.
<http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/wp-content/uploads/sites/52/2020/03/franco.pdf>