



\* 5 3 0 9 6 5 9 9 9 7 \*

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

**Universidad Complutense de Madrid**

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

**SISTEMAS DE COLAS CON  
REINTENTOS Y LLEGADAS  
NEGATIVAS**



**Archivo**

Memoria presentada por D. Antonio Gómez Corral  
para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas  
por la Universidad Complutense de Madrid bajo la dirección  
del Dr. Jesús Rodríguez Artalejo

Madrid, Julio de 1996

# Indice

## Introducción

|  |    |
|--|----|
| Introducción a los sistemas de colas con reintentos .....  | 1  |
| Introducción a los sistemas de colas con llegadas negativas y a los procesos de aclarado estocástico ... | 7  |
| Objetivo y estructura de la memoria .....  | 10 |
| Bibliografía .....   | 13 |

## Capítulo 1. Sistema $M/M/1$ con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento

|   |    |
|---|----|
| 1.1 Introducción .....  | 19 |
| 1.2 Descripción del modelo matemático y clasificación de los estados .....                        | 20 |
| 1.3 Distribución límite y momentos factoriales .....  | 23 |
| 1.4 Tiempo de permanencia en el sistema .....   | 28 |
| 1.5 Período de ocupación del sistema .....  | 39 |
| 1.6 Cadenas encajadas asociadas a los instantes de finalización del servicio y de expulsión ..... | 53 |
| 1.7 Proceso de finalización del servicio .....  | 60 |
| 1.8 Proceso de comienzo del servicio .....  | 64 |
| 1.9 Comentarios y notas bibliográficas .....  | 69 |
| Apéndice 1 .....  | 72 |
| Bibliografía .....  | 83 |

## Capítulo 2. Sistema $M/G/1$ con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento

|   |     |
|---|-----|
| 2.1 Introducción .....  | 85  |
| 2.2 Descripción del modelo matemático .....                         | 86  |
| 2.3 Distribución límite y primeros momentos .....                   | 86  |
| 2.4 Esquema recursivo para calcular las probabilidades límite ..... | 96  |
| 2.5 Resultados computacionales .....                                | 100 |
| 2.6 Comentarios y notas bibliográficas .....                        | 107 |
| Apéndice 2 .....  | 109 |
| Bibliografía .....  | 113 |

## Capítulo 3. Sistemas de colas con mecanismo de aclarado y disciplina lineal de reintento

|  |     |
|--|-----|
| 3.1 Introducción .....   | 115 |
| 3.2 Descripción del modelo matemático. Condición de ergodicidad .....                        | 116 |
| 3.3 Distribución límite y primeros momentos .....  | 118 |
| 3.4 Esquema recursivo para calcular las probabilidades límite .....                          | 124 |
| 3.5 Tiempo de permanencia en el sistema .....  | 131 |
| 3.6 Período de ocupación del sistema .....   | 142 |
| 3.7 Sistema $M/M/1$ con mecanismo de aclarado general y disciplina lineal de reintento ..... | 154 |
| 3.7.1 Distribución límite .....  | 154 |
| 3.7.2 Período de ocupación del sistema .....   | 160 |
| 3.8 Comentarios y notas bibliográficas .....   | 163 |
| Apéndice 3 .....   | 167 |
| Bibliografía .....   | 170 |

## Índice de materias

# Introducción

Esta introducción recoge, en sus dos primeros epígrafes, las descripciones de los sistemas de colas con reintentos, de los sistemas de colas con llegadas negativas y de los sistemas con mecanismo de aclarado estocástico, acompañadas de los antecedentes históricos más relevantes y de las líneas de investigación actuales. En el último epígrafe se presentan comentarios relativos a los objetivos y a la estructura de la memoria.

## Introducción a los sistemas de colas con reintentos

En una red telefónica, el comportamiento de cada abonado que obtiene como respuesta una señal de ocupación al efectuar su llamada, habitualmente consiste en repetir su demanda hasta lograr la conexión requerida. Por ello, el tráfico global de llamadas que circulan en la red telefónica debe ser disociado en dos flujos diferentes: el flujo de llamadas originales, que refleja las necesidades reales de los subcriptores de la red; y el flujo de llamadas *repetidas*, consecuencia del bloqueo en los accesos previos. Los modelos clásicos de sistemas telefónicos, los sistemas de colas con pérdidas, no tienen en cuenta la estructura real de la red y, por ello, no pueden ser aplicados en la resolución de un número importante de problemas. Una segunda clase de sistemas de colas, conocidos como *sistemas con reintentos*, permite solventar esta deficiencia. Los sistemas con reintentos tienen como principal característica que cada cliente que llega al sistema y encuentra ocupados a todos los servidores accesibles para él, abandona el área de servicio para repetir su demanda algún tiempo después. En la actualidad esta descripción juega un papel importante en redes de ordenadores y en redes de telecomunicaciones.

Los primeros trabajos de investigación con alusiones relativas a sistemas de colas con reintentos aparecieron a finales de la década de los años cuarenta. Los primeros comentarios fueron posiblemente los recogidos en Kosten (1947). Sin embargo, se considera como origen de los sistemas de colas con reintentos al artículo de Cohen (1957) titulado '*Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls*', donde se analiza exhaustivamente el sistema  $M/M/c$ ,  $c \geq 1$ , con reintentos y clientes impacientes. El análisis de Cohen presenta una considerable complejidad. Sus soluciones aparecen en términos de integrales de contorno que son reducidas a funciones conocidas en el caso  $c = 1$ . Para el caso  $c > 1$  se incluyen resultados numéricos basados en la truncación del modelo, que extienden el estudio precedente de Wilkinson (1956). También se estudian algunos comportamientos límite del sistema.

Desde el artículo de Cohen, han sido publicados alrededor de 250 trabajos de investigación en un amplio número de revistas internacionales y actas de conferencias que abarcan diferentes ámbitos como: *Probabilidad y Estadística Matemática, Investigación Operativa, Ingeniería de Telecomunicaciones, Informática*, etc.. Una significativa contribución al desarrollo de estos modelos es debida a los científicos de la antigua Unión Soviética, cuyos trabajos han sido tradicionalmente publicados en revistas de lengua

rusa, de escasa difusión, y con traducciones al inglés no disponibles en su totalidad.

Algunos textos dedicados a la teoría de colas y a la teoría de teletráfico contienen secciones o comentarios referidos a sistemas de colas con reintentos. Una breve lista de estas monografías incluye, entre otros, a los libros de Bear (1988), van Dijk (1993), Riordan (1962), Syski (1960) y Wolff (1989).

Los sistemas con reintentos han sido sintetizados en tres amplios *surveys* publicados recientemente: Falin (1986a,1990) y Yang y Templeton (1987). Además de una amplia bibliografía, estos trabajos contienen los principales resultados desarrollados para los modelos de colas con reintentos de tipo  $M/G/1$  y sus variantes (llegadas en grupo, clientes heterogéneos, clientes no persistentes, etc.), los modelos de tipo  $M/M/c$ , los métodos numéricos existentes para calcular la distribución límite, el análisis asintótico bajo tráfico pesado y tráfico ligero, etc..

Un modelo de colas con reintentos consiste en un sistema de colas, con  $c \geq 1$  servidores o canales, que opera del siguiente modo. Cada cliente que llega al sistema y encuentra un canal vacío, comienza inmediatamente a ser servido y abandona el sistema en el instante de finalización del servicio. En caso contrario, el cliente se une a un grupo de clientes insatisfechos llamado *órbita*. De forma independiente, cada cliente de la órbita intenta el acceso a los canales de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad  $\mu > 0$ . Las longitudes de los intervalos de tiempo separando dos llegadas consecutivas y los tiempos de servicio siguen distribuciones generales con funciones de distribución  $A(x)$  y  $B(x)$ , respectivamente. Se asume que el flujo de llegadas originales, las longitudes de los intervalos separando sucesivos reintentos y los tiempos de servicio son mutuamente independientes.

Es posible denotar a los modelos de colas con reintentos utilizando la notación de Kendall  $A/B/c/K$ , donde  $A$  y  $B$  representan la distribución del tiempo entre dos llegadas consecutivas y la distribución del tiempo de servicio, respectivamente,  $c$  denota el número de canales y  $K$  es la capacidad de la órbita. Es habitual omitir la componente  $K$  de la notación cuando  $K = \infty$ . El estado del sistema en cada instante  $t$  es básicamente descrito por el par  $(C(t), Q(t))$ , donde  $C(t)$  indica el número de canales ocupados y  $Q(t)$  representa el número de clientes presentes en la órbita.

La diversidad de las áreas de aplicación, la naturaleza de los resultados obtenidos y los métodos de análisis empleados permiten considerar a la teoría de colas con reintentos como una parte notable de la teoría general de sistemas de colas, dotada de un profundo interés intrínseco. En las actas de los Congresos Internacionales de Teletráfico (*International Teletraffic Congress, ITC*) puede ser encontrada abundante información sobre los campos de aplicación de este tipo de modelos. En este sentido, a continuación se destacan algunas aplicaciones concretas.

En redes locales de comunicación (*LAN*), uno de los protocolos más utilizado es conocido con el nombre de protocolo *CSMA (Carrier-Sense Multiple Access)*. Habitualmente una red *LAN* está formada por  $K < \infty$  estaciones o procesadores conectados entre sí por un solo *bus*. Mensajes de longitud variable llegan a las estaciones de la red desde el exterior de ésta. Cuando un mensaje accede a la red desde el exterior, la estación receptora divide éste en un cierto número de paquetes de tamaño fijo e inmediatamente chequea el estado del bus. Si el bus está libre, uno de los mensajes es transmitido a otra estación y el resto de los paquetes son almacenados en un *buffer* para ser transmitidos con posterioridad. Si el bus está ocupado, todos los paquetes pasan a formar parte del buffer. Cuando el proceso que gobierna la llegada de clientes a la red es un proceso de Poisson, la conexión de cada estación con el bus puede ser modelizada mediante un sistema de colas de tipo  $M/G/1$  con llegadas en grupo y reintentos. El bus

corresponde al servidor y el buffer es la órbita. En Choi y otros (1992) y sus referencias se describe más exhaustivamente la incidencia del fenómeno del reintento sobre el protocolo CSMA.

En Falin (1995a) y Ohmura y Takahashi (1985) se describe la aplicación de un modelo con reintentos al estudio del tiempo de espera en sistemas controlados mediante discos magnéticos de memoria.

Las aplicaciones de los sistemas de colas con reintentos a redes telefónicas reales son múltiples. A modo de ejemplo pueden citarse los trabajos de Harris y otros (1987), Inamori y otros (1985) y Kelly (1986).

Debido a la complejidad de los modelos de colas con reintentos, los resultados analíticos son generalmente difíciles de obtener. Sin embargo, existe un buen número de métodos aproximados y numéricos. Una clasificación habitual, aunque arbitraria, de los sistemas de colas con reintentos distingue entre tres grandes grupos de modelos: sistemas con un único canal, sistemas con varios servicios y sistemas estructuralmente complejos.

Atendiendo a la importancia que tiene el modelo de tipo  $M/G/1$  con reintentos en la presente memoria, a continuación se exponen algunos comentarios relativos a los trabajos más relevantes sobre este sistema y sus principales variantes.

Los primeros resultados para el sistema  $M/G/1$  con reintentos fueron dados por Keilson y otros (1968), quienes analizaron la distribución límite del proceso  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , mediante argumentos basados en la introducción de la *variable suplementaria*  $\xi(t)$ , definida como el tiempo de servicio consumido por el cliente que ocupa el canal. Fórmulas explícitas para la distribución límite del par  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , son dadas en Jonin y Sedol (1970) cuando se asumen tiempos de servicio exponencialmente distribuidos. Independientemente de Keilson y otros (1968), en los trabajos de Aleksandrov (1974) y Falin (1975) se han utilizado procedimientos diferentes para estudiar la distribución límite cuando la distribución de los tiempos de servicio es general. La ley de descomposición estocástica para el modelo  $M/G/1$  con reintentos y sus variantes ha sido sugerida por algunos autores. El uso de esta propiedad con la finalidad de deducir fórmulas explícitas para los momentos del número de clientes en órbita fue mencionado en Artalejo y Falin (1994). En Yang y otros (1994) se muestra que la ley de descomposición estocástica se mantiene incluso cuando los tiempos de reintento son generales. Métodos algorítmicos para el cálculo de la distribución límite han sido desarrollados por de Kok (1984) y Schellhaas (1986). Su argumentación aprovecha las propiedades de los procesos regenerativos (ver Stidham (1972)) y la propiedad *PASTA* (*Poisson arrivals see time averages*) de Wolff (1982).

Desde su consideración por Kendall (1953), las técnicas basadas en el estudio de cadenas encajadas han tenido una notable importancia en la teoría de colas, gracias a la sencillez que ofrecen frente a las técnicas más clásicas, como la inclusión de una variable suplementaria. La función generatriz de la cadena de Markov encajada en los instantes de finalización del servicio fue calculada por Falin (1976), quien observó su coincidencia con la función generatriz de la distribución límite de  $N(t) = C(t) + Q(t)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . La clasificación de los estados de la cadena encajada puede ser realizada con la ayuda de los resultados clásicos basados en las *tendencias medias* de la cadena.

La contribución más importante al estudio de la distribución del tiempo virtual de espera,  $W$ , fue dada por Falin y Fricker (1991). En su trabajo es fundamental el método de las *marcas colectivas*, que permite traducir el cálculo analítico de la transformada de Laplace-Stieltjes de  $W$  a términos probabilísticos. Una

descripción alternativa del tiempo virtual de espera mediante el número de reintentos realizados por un cliente que llega al sistema en el instante  $t$ ,  $R(t)$ , fue propuesta en Falin (1986b), cuando se asumen tiempos de servicio exponenciales, y posteriormente extendida al caso general en Falin y Fricker (1991).

El análisis del período de ocupación del sistema, basado en el uso del método de las *marcas colectivas* (ver Falin (1979a)), ha permitido estudiar el comportamiento del sistema en régimen no estacionario. En Falin (1990) se expone un método analítico alternativo para calcular la transformada de Laplace-Stieltjes de la longitud del período de ocupación,  $L$ . La técnica de las *ecuaciones convolutivas* de Choo y Conolly (1979) permite calcular recursivamente los momentos de  $L$ , pero la aplicabilidad del método está limitada al caso de tiempos de servicio distribuidos exponencialmente.

El conocimiento de la distribución de la cadena de Markov encajada en los instantes de finalización del servicio permite analizar los procesos de finalización y de comienzo del servicio, cuando se asume la ergodicidad del sistema (ver Falin (1978,1979b,1990)).

La teoría general de ordenación estocástica (ver Stoyan (1983)) permite completar la descripción básica del sistema  $M/G/1$ , obteniéndose resultados de monotonía y cotas superiores de los valores más significativos del sistema (ver Khalil y Falin (1994) y Liang y Kulkarni (1993)).

Aproximaciones de difusión y de flujo de fluidos han sido abordadas por varios autores. Algunas de las contribuciones más significativas son Anisimov y Atadzanov (1992), Falin (1991) y Lukashuk (1990). En Greenberg (1989) se extiende la filosofía de la propiedad *PASTA* a los modelos con reintentos, lo cual conduce a una cota superior de las características del sistema. La más reciente de las aproximaciones, basada en la teoría de la información, fue descrita por Artalejo (1992) y desarrollada por Falin, Martin y Artalejo (1994).

En la literatura se recogen numerosas generalizaciones del modelo principal de tipo  $M/G/1$  con reintentos. A continuación se resumen las más significativas.

La modelización *clásica* del sistema  $M/G/1$  con reintentos asume que cada cliente que se ve bloqueado en su acceso al servicio genera su propio flujo de repeticiones hasta encontrar el servicio vacío. Entonces, la longitud del intervalo de tiempo separando dos reintentos sucesivos se distribuye exponencialmente con intensidad  $j\mu$ , cuando el tamaño de la órbita es  $j \geq 0$ . No obstante, existen otros modelos con reintentos donde la política que controla el acceso al servicio es independiente del nivel de congestión de la órbita. Por ejemplo, supóngase que los clientes presentes en la órbita pueden ser ordenados y que sólo el primero de ellos puede reintentar acceder al servicio. De este modo, los intervalos separando dos reintentos sucesivos siguen distribuciones exponenciales de parámetro  $\alpha > 0$ , siempre que la órbita no esté vacía. Esta política de reintento *constante* fue introducida por Fayolle (1986), quien investigó un sistema telefónico de tipo  $M/M/1$  con reintentos en el cual el primer cliente de la órbita, al verse bloqueado en su intento de acceso al servicio, retorna a la última posición de la órbita (es decir, se asume la existencia en la órbita de una cola con efecto *feedback*). El sistema  $M/G/1$  con reintento constante fue analizado por Farahmand (1990), proporcionando diferentes interpretaciones y situaciones prácticas donde esta disciplina de reintento tiene lugar. Martin y Artalejo (1995) completaron el análisis del modelo  $M/G/1$  con reintento constante en el ámbito más general de un sistema con dos tipos de clientes impacientes. Frecuentemente la modelización del protocolo *CSMA* aparece asociada a la disciplina de reintento constante (ver Choi y otros (1993)). Es interesante observar que la existencia de un orden en la órbita permite desarrollar modelos de tipo  $M/M/1$  con distribución general de reintento (ver Choi y otros (1993)). La definición de

una disciplina capaz de unificar las dos políticas de reintento puede encontrarse en Martín y Gomez-Corral (1995), donde se asume que las longitudes de tiempo separando dos reintentos consecutivos están exponencialmente distribuidas con intensidades  $\alpha(1-\delta_{0j})+j\mu$ , cuando en la órbita hay presentes  $j \geq 0$  clientes.

En los sistemas con llegadas en grupo se asume que en cada instante de llegada se incorporan  $k$  nuevos clientes con probabilidad  $c_k$ ,  $k \geq 1$ . Si el canal está ocupado, todos los clientes se unen a la órbita. En caso contrario, uno de los clientes es seleccionado para ocupar el servicio y los restantes pasan a engrosar la órbita. Esta modificación del sistema clásico fue considerada por primera vez por Falin (1976), quien utilizó la distribución de la cadena de Markov encajada en los instantes de finalización del servicio para calcular la distribución límite del par  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . El análisis del período de ocupación y el estudio del sistema en régimen no estacionario fueron abordados en Falin (1981).

La existencia de clientes prioritarios en sistemas de colas con reintentos es introducida en Falin (1985), donde se calcula la distribución límite conjunta del número de clientes prioritarios y del número de clientes no prioritarios presentes en el sistema, bajo disciplina de prioridad del tipo *head-of-the-line*. Este mismo resultado fue logrado independientemente por Choi y Park (1990). El mismo modelo fue estudiado en mayor profundidad por Falin y otros (1993) (cadena de Markov encajada, descomposición estocástica, teoremas límite, etc.). Recientemente, Choi y otros (1995) consideraron la modificación consistente en asumir que la capacidad de la línea de espera es finita.

Las nociones de cliente no persistente y de cliente impaciente han sido introducidas en los sistemas de colas con reintentos con la finalidad de modelizar ciertos sistemas telefónicos donde existe la posibilidad de abandonar el sistema sin recibir servicio. El trabajo de Cohen (1957) fue el primer precedente donde es estudiado un sistema con reintentos y clientes impacientes. En el modelo con clientes no persistentes se asume que cada cliente tiene la posibilidad de abandonar el sistema cuando se ve bloqueado en su acceso al servicio. En el caso más general, se define el vector  $(H_1, H_2, H_3, \dots)$ , conocido como *función de persistencia*, donde  $H_j$  es la probabilidad de continuar en el sistema tras el  $j$ -ésimo reintento bloqueado. El caso general es analíticamente inabordable; por ello, debe asumirse que  $H_j = H_2$ ,  $j \geq 2$ . Yang y otros (1990) analizaron el sistema  $M/G/1$  cuando  $H_2 < 1$ . Aunque la solución analítica es desconocida, es posible expresar las principales características del modelo en términos de la probabilidad de que el servidor esté ocupado, la cual puede ser calculada numéricamente. El caso en que los tiempos de servicio siguen una ley exponencial admite una solución en términos de funciones hipergeométricas (ver Falin (1980)). Fayolle y Brun (1988) estudiaron un modelo Markoviano en el que la órbita es debida a la existencia de clientes impacientes.

Los sistemas con clientes heterogéneos y reintentos presentan una notable dificultad analítica debido a que deben ser representados en términos de caminos aleatorios multidimensionales. Supóngase un sistema con  $n \geq 1$  tipos diferentes de clientes. Los clientes originales de tipo  $i$  llegan al sistema de acuerdo a un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda_i > 0$ , la intensidad asociada a sus reintentos es  $\mu_i > 0$  y la función de distribución de los tiempos de servicio es  $B_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . La primera descripción de un modelo de este tipo fue realizada por Kornishev (1980), quien obtuvo el sistema de ecuaciones que gobierna los valores medios del número de clientes de la clase  $i$  presentes en el sistema,  $N_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , cuando se asume que los tiempos de servicio se distribuyen exponencialmente. El caso  $\mu_i = \mu$ ,  $1 \leq i \leq n$ , es esencialmente más simple (ver Hanschke (1985)). Para el caso de funciones de distribución generales  $B_i(x)$  con dos tipos de clientes es posible deducir fórmulas explícitas para los valores esperados de  $N_1$  y  $N_2$  (ver Kulkarni (1983a, 1986)). La generalización a  $n$  clases aparece recogida en Falin (1983, 1988). Finalmente, Kulkarni (1983b) ha desarrollado algunas conexiones entre este tipo de sistemas y la teoría de juegos.

En Falin (1990,1994) puede encontrarse una relación exhaustiva de referencias relativas a otras variantes del modelo de tipo  $M/G/1$  con reintentos.

La amplia bibliografía dedicada al estudio del modelo con reintentos de tipo  $M/G/1$  contrasta con la escasa literatura existente sobre el sistema  $G/M/1$  con reintentos. Este hecho es consecuencia de la complejidad analítica del modelo. Por ejemplo, el estudio de la distribución límite del par  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , mediante el método de la variable suplementaria conduce a una ecuación diferencial aún no resuelta. Por ello, sólo han podido ser desarrollados métodos aproximados entre los que destacan los trabajos de Pourbabai (1990a,1993) y Yang y otros (1992).

Los resultados para sistemas de colas con reintentos y  $c \geq 2$  canales pueden ser clasificados en dos grupos. De un lado, en el caso particular  $c = 2$  se han desarrollado expresiones explícitas para la distribución límite del par  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  (ver Falin (1984a), Hanschke (1987) y Jonin y Sedol (1970), entre otros). Sin embargo, cuando  $c > 2$ , el análisis de cualquier característica del sistema  $M/M/c$  con reintentos ha estado tradicionalmente limitado por la imposibilidad de calcular su distribución límite. La condición bajo la cual el sistema es ergódico fue obtenida por Deul (1980) y simplificada por Falin (1984b). Pearce (1989) ha resuelto de forma teórica este problema haciendo uso de fracciones continuas generalizadas. Sin embargo, su trabajo debe completarse con un método computacionalmente operativo para el cálculo de las probabilidades límite. El análisis numérico mediante técnicas de truncación de la órbita ha sido abordado por varios autores (ver Falin (1990) y Neuts y Rao (1990)). Recientemente, Artalejo (1995) y Falin y Artalejo (1995) han desarrollado aproximaciones para sistemas  $M/M/c$  con reintentos y *balking*.

Los problemas abiertos señalados por Falin (1986a) y Yang y Templeton (1987) han constituido la motivación de una gran parte de la literatura desarrollada en la última década. A continuación se comentan brevemente algunas líneas de investigación abiertas.

Ante la imposibilidad de resolver analíticamente sistemas de tipo  $M/G/c$  con reintentos exponenciales, sistemas con un flujo de llegada distinto al proceso homogéneo de Poisson o sistemas con distribución general de reintento, es preciso realizar un esfuerzo en el desarrollo de aproximaciones numéricamente eficientes. En este sentido deben destacarse algunos precedentes como el análisis aproximado del sistema  $M/G/1$  con distribución general de reintento (ver Yang y otros (1994)), el uso de distribuciones  $PH$  que pueden permitir la aproximación de distribuciones generales de llegada y/o reintento (ver Diamond y Alfa (1995) y Neuts y Ramalhoto (1984)) y la aproximación de sistemas  $G/G/c$  mediante modelos de colas con pérdida (ver Pourbabai (1990b) y sus referencias).

Aunque la literatura sobre los sistemas con reintentos es extensa, sólo un número escaso de trabajos se ha dedicado al estudio de cuestiones estadísticas (ver Falin (1995b), Lewis y Leonard (1982) y Warfield y Foers (1985)). En la práctica, la intensidad de llegada de clientes y el tiempo medio de servicio pueden ser estimados sin dificultad. Sin embargo, la intensidad de reintento es difícil de estimar. Ello se debe a que no es posible distinguir entre la llegada de un cliente original y la llegada de un cliente de la órbita, puesto que, en las aplicaciones a la telefonía, no es sencillo observar el comportamiento de los clientes de la órbita. En este sentido, debe destacarse la línea de investigación de Falin (1995b), quien ha estudiado el problema de la estimación de la intensidad de reintento en un modelo de tipo  $M/M/1$  con la ayuda de estimadores integrales.

La consideración del fenómeno del reintento en redes de colas permanece inabordable. La aplicación del principio de máxima entropía a redes de colas (ver Kouvatso (1994)) puede conducir a aproximaciones satisfactorias.

## Introducción a los sistemas de colas con llegadas negativas y a los procesos de aclarado estocástico

El concepto de *llegada negativa* o *cliente negativo* ha sido introducido recientemente en las redes de colas por Gelenbe (1991) motivado por las aplicaciones a redes neuronales. La red neuronal más sencilla está formada por  $K < \infty$  neuronas entre las cuales circulan señales positivas y negativas. Las señales positivas y negativas tienen diferentes comportamientos en la red: cada señal positiva representa un mensaje excitante; y cada señal negativa representa un mensaje inhibitor. Las neuronas reciben la llegada de señales positivas y negativas desde el interior y el exterior de la red. El potencial de una neurona representa el número de señales positivas acumuladas en ella. La llegada de una señal positiva a una neurona supone el incremento de su potencial en una unidad. Una señal negativa reduce una unidad el potencial de una neurona con potencial positivo y no tiene efecto sobre ella si su potencial es nulo. Las señales positivas abandonan un nodo, después de la finalización de sus correspondientes servicios, para dirigirse a otro nodo de la red o al exterior de ésta. Si el movimiento de la señal positiva es interno en la red, entonces la señal positiva puede convertirse en una señal negativa.

En la terminología de las nuevas redes de colas introducidas en Gelenbe (1991), las neuronas equivalen a los nodos (o estaciones), y las señales positivas y negativas equivalen a los clientes positivos y negativos, respectivamente. El modelo descrito por Gelenbe es una generalización de las redes de Jackson dotadas de nodos con un único servidor (ver Gelenbe y Pujolle (1986)), donde sólo existen clientes positivos. En Gelenbe (1991) se asumen que los procesos que gobiernan la llegada de señales positivas y negativas desde el exterior son procesos de Poisson independientes y que los tiempos de servicio siguen distribuciones exponenciales con intensidades dependientes de la neurona. El principal resultado de este trabajo establece que la distribución en equilibrio del número de clientes positivos tiene forma producto (es decir, la distribución del vector de potenciales es el producto de las probabilidades marginales del potencial de cada neurona) con parámetros que satisfacen un conjunto de *ecuaciones de tráfico* o *flujo* no lineales. La existencia y la unicidad de las soluciones de estas ecuaciones de tráfico también son discutidas.

Desde su introducción, los clientes negativos han sido considerados por diversos autores en dos ámbitos distintos de los sistemas de colas: las redes de colas y los modelos de colas con línea de espera y un único servidor. A continuación se ofrecen unos breves comentarios bibliográficos de los trabajos realizados en el caso de las redes de colas con clientes negativos, también llamadas redes de colas generalizadas (*G-networks*), y en los sistemas con línea de espera, un único servidor y clientes negativos.

Motivado por las aplicaciones en redes de ordenadores y en bases de datos, Gelenbe (1993) estudia una red de colas con clientes positivos y negativos donde la llegada de un cliente negativo a un nodo de la red desencadena el inmediato traslado de un cliente positivo a otro nodo de la red o al exterior de ésta. En este trabajo se discute la estabilidad de la red, se muestra que la distribución en equilibrio del número de clientes positivos en los nodos de la red tiene forma producto y se establecen las ecuaciones de tráfico que gobiernan la forma producto. Chao (1995a) considera variantes más generales con varias clases de clientes y tiempos de servicio generales. Se observa que no se tiene la propiedad de *insensitividad* de Kelly (1979), que asegura que la distribución en equilibrio depende de las distribuciones de los tiempos

de servicio a través sólo de sus correspondientes valores medios. Recientemente, Henderson y otros (1994) han considerado redes donde la transferencia de un cliente positivo a otro nodo de la red genera la llegada de un grupo de clientes negativos en el nodo. La distribución del tamaño del grupo depende de los nodos de origen y de destino.

En Henderson (1993) se generalizan trabajos anteriores permitiendo que las intensidades asociadas a las transferencias entre los nodos y los tiempos de servicio dependan del estado de la red. Adicionalmente, se contempla la posibilidad de acumular clientes negativos en los nodos de la red.

El análisis detallado de las redes de colas con clientes positivos y negativos presenta grandes dificultades. Los resultados que se encuentran en la literatura se reducen fundamentalmente al estudio de la estabilidad de la red y de la distribución en equilibrio del número de clientes positivos en cada nodo de la red. Sólo en el caso de la red de colas más sencilla, la red de colas formada por dos nodos en tandem, Harrison y Pitel (1995) determinan la distribución del tiempo de respuesta en términos de su correspondiente transformada de Laplace-Stieltjes.

En la literatura han sido descritas numerosas aplicaciones de las redes con clientes positivos y negativos. A continuación se describe la aplicación al protocolo de comunicación '*Go back N*'.

Algunos protocolos de comunicación pueden ser modelizados mediante una red de colas generalizada. Este es el caso del protocolo '*Go back N*' para la transmisión de paquetes de datos. Cuando los mensajes son transmitidos entre los buffers usando este protocolo, el buffer de origen almacena  $N$  paquetes de datos hasta que recibe una señal indicando que todos los paquetes han llegado intactos al buffer de destino. Para modelizar el número de paquetes almacenados en la red de buffers debe observarse que la llegada de clientes positivos equivale a la llegada de paquetes de datos a un buffer; y la llegada de un cliente negativo equivale a la señal que indica la expulsión de  $N$  paquetes de datos en el buffer de origen.

Para finalizar con los comentarios relativos a las redes de colas generalizadas, debe indicarse que en Gelenbe (1994) se realiza una revisión de la literatura existente y se muestran aplicaciones a la programación combinatoria y a la generación de imágenes.

Las llegadas negativas fueron introducidas en el contexto de las líneas de espera con un único servidor por Gelenbe y otros (1991). En este primer trabajo se consideró un sistema  $GI/G/1$  con disciplina de cola *FCFS* (*first come first served*), donde existe un flujo adicional de llegadas negativas. Los clientes positivos son tratados en el sentido habitual por el servidor. Las llegadas negativas sólo afectan al sistema cuando éste no está vacío. Entonces, tienen el efecto de expulsar a un cliente, que es seleccionado de acuerdo a alguna estrategia especificada. En concreto, en Gelenbe y otros (1991) se estudia la estabilidad de varios sistemas con llegadas negativas operando bajo las dos siguientes estrategias de expulsión: estrategia *RCE* (*removal of the customer at the end of the queue*), que consiste en expulsar al cliente que ocupa la última posición en la línea de espera; y la estrategia *RCH* (*removal of the customer at the head of the queue*), que consiste en expulsar al cliente que ocupa el canal.

En Harrison y Pitel (1993) se calcula la transformada de Laplace-Stieltjes del tiempo de permanencia de un cliente en el sistema de colas  $M/M/1$  con llegadas negativas, cuando se asumen su ergodicidad y diferentes disciplinas de cola y estrategias de expulsión. Los modelos estudiados en Harrison y Pitel (1993) han sido analizados con una misma metodología, aunque el análisis algebraico de cada caso difiera sensiblemente en dificultad. Los resultados muestran diferencias no sólo en las expresiones de las trans-

formadas de la variable  $W$ , si no también en los valores medios de las distribuciones. Este hecho contrasta con la igualdad de los valores medios en el correspondiente modelo sin flujo de llegadas negativas. Debido a la propiedad de ausencia de memoria de la distribución exponencial, es un problema trivial calcular la distribución límite de la variable  $N(t)$ , definida como el número de clientes presentes en el sistema  $M/M/1$  con llegadas negativas, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $\nu > 0$  es la intensidad del tiempo de servicio, la distribución límite de  $N(t)$  coincide con la distribución límite del número de clientes presentes en un sistema  $M/M/1$  sin llegadas negativas y con intensidad de tiempo de servicio  $\nu + \delta$ . Además, la distribución límite de  $N(t)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , no depende de la estrategia y de la disciplina fijadas. La consideración de una distribución general para el tiempo de servicio ocasiona grandes dificultades, particularmente cuando la estrategia de expulsión es *RCE* (ver Harrison y Pitel (1996)). La argumentación seguida por Harrison y Pitel, basada en el método de la variable suplementaria, conduce a una ecuación integral de Fredholm de primera clase, que debe ser resuelta numéricamente.

En Boucherie y Boxma (1995) se generaliza la noción de llegada negativa permitiendo que cada llegada negativa destruya una cantidad aleatoria de trabajo, que no necesariamente corresponde al trabajo asociado a un número entero de clientes. Se demuestra que la transformada de la distribución del *trabajo acumulado* satisface una ecuación de Wiener-Hopf. En esta misma línea se encuadra el trabajo de Bayer y Boxma (1995), donde se calcula la distribución límite de  $N(t)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , en dos variantes del modelo  $M/G/1$  con llegadas negativas que expulsan a clientes positivos sólo en los instantes de finalización del servicio.

La definición de llegada negativa de Boucherie y Boxma (1995) generaliza la noción de *desastre* de Chao (1995b) y Jain y Sigman (1996). En estos trabajos se establecía que un *desastre* ocurre cuando una llegada negativa expulsa a todos los clientes positivos presentes (es decir, destruye todo el trabajo acumulado). La aplicación del concepto de desastre a sistemas de computación y a procesos biológicos ha sido descrita en Chao (1995b).

Los sistemas de colas con desastres están directamente relacionados con los sistemas de aclarado estocástico. Un sistema de aclarado estocástico está caracterizado por un proceso de entrada y un mecanismo de salida que intermitentemente *aclara* el sistema mediante la destrucción total o parcial de las unidades presentes. Tales sistemas fueron introducidos por Stidham (1974) motivado por sus aplicaciones a la teoría de colas, a los sistemas de inventario, a las actividades de mantenimiento de maquinaria y a los sistemas de servicio público. El ejemplo más simple de este tipo de sistemas es la parada de un autobús. Existe un flujo de clientes que acceden a la parada con la finalidad de esperar la llegada de un autobús. Cuando éste llega, todos los clientes presentes abandonan inmediatamente la parada.

Los trabajos relativos a los modelos con llegadas negativas no mencionan la existencia de la literatura sobre los sistemas de aclarado estocástico, pero es clara la relación entre las nociones de llegada negativa y de aclarado. Desde el trabajo de Stidham (1974), el principal problema estudiado ha sido el diseño óptimo de un sistema de aclarado cuando el *nivel de aclarado* está sujeto a control. Entonces, se asume una estructura de coste donde se refleja el coste de cada operación de aclarado y el coste del propio sistema mediante una función general creciente del tamaño del sistema. También es posible introducir una componente adicional que es proporcional al número de unidades aclaradas. En este sentido deben consultarse los trabajos de Kim y Seila (1993) y Stidham (1977, 1986). El estudio de la distribución estacionaria de los procesos de aclarado ha sido abordado en Serfozo y Stidham (1978), Stidham (1974) y Whitt (1981).

Desde su introducción, ha existido un interés creciente en la generalización de la noción de llegada

negativa. En la actualidad, los mayores esfuerzos se centran en el estudio de aquellas medidas clásicas de la efectividad de un sistema de colas, aún no consideradas en este tipo de modelos, y en el análisis de sistemas de colas no Markovianos. Las referencias y los comentarios recogidos en esta sección han pretendido mostrar estas líneas de investigación.

## Objetivo y estructura de la memoria

En la mayor parte de los trabajos sobre teoría de colas con reintentos se asume que los clientes no abandonan el sistema sin haber recibido servicio. Las excepciones a este hecho son los sistemas con impaciencia o persistencia (ver Cohen (1957), Falin (1990), Stepanov (1983), Yang y otros (1990) y sus referencias) y los sistemas con rupturas del servicio (ver Aissani (1994), Artalejo (1994) y Kulkarni y Choi (1990)). En el caso de los fenómenos de impaciencia y persistencia, la salida del sistema sin recibir servicio es causada por una decisión del propio cliente. En el segundo caso, la ruptura del servicio puede suponer la expulsión del sistema del cliente que estaba siendo atendido.

El objetivo de la presente memoria es el estudio del sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y llegadas negativas, y del sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado. Una de las principales características de estos modelos es su versatilidad, puesto que permiten la presencia simultánea de las políticas clásica y constante de reintento, así como un flujo adicional de llegadas negativas o de desastres. El estudio de estos dos sistemas de colas está motivado por la existencia de situaciones prácticas donde los clientes se ven forzados a abandonar el sistema, sin recibir servicio, que no pueden ser modelizadas mediante los sistemas de colas con clientes no persistentes, con clientes impacientes o con rupturas. Los dos ejemplos siguientes muestran esta circunstancia.

*Ejemplo 1 (Redes de conmutación por paquetes).* El mecanismo que regula la transmisión de ficheros en una red de conmutación por paquetes (*packet switching network*) puede ser descrito en los siguientes términos. La red consiste en un grupo de procesadores y un conjunto de uniones entre ellos. Cada procesador tiene conectado una terminal. Se asume que el proceso que gobierna la llegada de ficheros desde el exterior es un proceso de Poisson. Si una terminal desea enviar un fichero a otra de las terminales de la red, primero chequea el estado del procesador al que está conectado. Si el procesador no está transmitiendo otro fichero, se envía el fichero a la terminal de destino de forma directa cuando ambos procesadores están conectados entre sí. En caso contrario, se envía de forma indirecta a través de otra terminal. Si el procesador no está disponible, el fichero es almacenado en un buffer junto con la dirección de destino. El buffer intentará transmitir los mensajes almacenados después de un tiempo aleatorio. Adicionalmente, la terminal envía al buffer mensajes de borrado que anulan a alguno de los ficheros almacenados.

En la práctica, la distribución del tiempo que transcurre entre dos intentos sucesivos de acceso del buffer al procesador es compleja, pero por conveniencia matemática es modelizada mediante la variable exponencial. De este modo, se asume que el tiempo transcurrido entre dos reintentos está exponencialmente distribuido con parámetro  $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$ , cuando hay  $j \geq 0$  mensajes almacenados. La primera contribución,  $\alpha$ , es fija e intrínseca con el diseño de la red y la segunda,  $j\mu$ , depende del número de ficheros almacenados.

Considérese un procesador particular conectado con su terminal. En la terminología de los sistemas de colas, el procesador equivale al servidor, los ficheros son los clientes, los mensajes de borrado son las llegadas negativas y el buffer representa la órbita. La conexión de cada terminal con su correspondiente

procesador puede ser modelizada mediante un sistema de colas de tipo  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y llegadas negativas. Debe observarse que la introducción de un flujo de llegadas negativas es un mecanismo para controlar la congestión interna del buffer. Un nivel de congestión excesivo es consecuencia de la llegada de clientes cuando el servicio está ocupado. Por ello, se asume que el flujo de llegadas negativas actúa sólo cuando el servidor está activo y que el cliente que ocupa el servicio no puede ser anulado. Para que el sistema sea analíticamente abordable debe suponerse que el tiempo transcurrido entre dos llegadas negativas es una variable aleatoria exponencial de parámetro  $\delta > 0$ .

*Ejemplo 2 (Red local de comunicación).* Se considera una red LAN, formada por  $K < \infty$  estaciones, que recibe mensajes de longitud unitaria desde el exterior de acuerdo a un proceso de Poisson. Cuando una estación recibe un mensaje, chequea el estado del bus. Si el bus está libre, el mensaje es transmitido a la estación de destino. En caso contrario, es almacenado en el buffer para su transmisión después de un tiempo aleatorio. Una posibilidad para modelizar los tiempos de reintento de la transmisión es utilizar el método adaptativo mencionado en Yang y Templeton (1987). Entonces, el tiempo de reintento es una función decreciente del número de mensajes almacenados en el buffer. Por ello, se asume que las longitudes de los intervalos de tiempo que separan dos reintentos consecutivos son variables aleatorias exponenciales con intensidades  $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$ , cuando el tamaño del buffer es  $j \geq 0$ .

Adicionalmente, la red puede estar operando bajo la presencia de un virus cuya *limpieza* implica la destrucción de todos los mensajes que circulan en la red. Entonces, la conexión entre una estación individual y el bus puede modelizarse mediante una cola de tipo  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado. El bus equivale al servidor, los mensajes son los clientes, las operaciones de limpieza equivalen a los desastres y el buffer de la estación constituye la órbita. Si el tamaño total del buffer es grande, entonces se asume que la capacidad de la órbita es infinita.

Otros ejemplos de sistemas de colas con reintentos y llegadas negativas pueden ser encontrados en telefonía, donde el caso  $\mu = 0$  y  $\delta = (1 - H)\alpha$ ,  $H \in (0, 1)$ , conduce a un nuevo modelo con reintentos y clientes no persistentes. Colas con reintentos y desastres también son la base para modelizar sistemas de ordenadores donde una orden de borrado (*reset order*) tiene el efecto de destruir todo el trabajo del sistema.

Debe observarse que la existencia de un flujo de llegadas negativas o de desastres implica diferencias significativas en los resultados matemáticos debido a que la estructura matricial de tipo  $M/G/1$  y la propiedad de descomposición estocástica no se conservan.

En cuanto a la organización, la memoria ha sido dividida en tres capítulos. Todos ellos incluyen un apéndice donde se recogen resultados auxiliares y finalizan con una lista específica de referencias.

El primer capítulo está dedicado al análisis del sistema  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento y llegadas negativas. Las principales características estudiadas son: la clasificación de los estados del proceso  $X = \{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$ ; el cálculo de la distribución límite de  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ ; el estudio de la distribución del tiempo de permanencia en el sistema cuando se asumen la disciplina *FCFS* y la estrategia de expulsión *RCE*; el cálculo recursivo de los momentos de las principales variables aleatorias asociadas al período de ocupación; el análisis de las cadenas encajadas de Markov en los instantes de finalización del servicio y de expulsión; y los procesos de finalización y de comienzo del servicio.

El estudio de la distribución límite del par  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , en el sistema de colas  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y llegadas negativas, cuando se asume la estrategia *RCE*, es abordado en el capítulo segundo. Los argumentos empleados, basados en la inclusión de la variable suplementaria  $\xi(t)$  sobre  $(C(t), Q(t))$ , conducen a una ecuación integral de Fredholm. Adicionalmente, se propone un esquema recursivo para aproximar la distribución límite del sistema original mediante la distribución límite de un sistema  $M/G/1/K$  con disciplina lineal de reintento y llegadas negativas, donde el nivel  $K < \infty$  es elegido de acuerdo a un criterio de precisión prefijado.

El capítulo tercero está dedicado al análisis de los sistemas de colas  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo exponencial de aclarado estocástico. Las características estudiadas son: la condición de ergodicidad; la distribución límite y los primeros momentos de las variables  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ ; el cálculo de las probabilidades límite a través de un esquema recursivo; el estudio del tiempo de permanencia en el sistema; y el estudio de las principales variables aleatorias relacionadas con el período de ocupación. Finalmente, se dedica una sección al análisis del sistema de colas  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento, donde las longitudes de los intervalos de tiempo separando dos desastres consecutivos tienen distribución general. En ella se incluyen el estudio de la distribución límite de  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , y el análisis del período de ocupación.

## BIBLIOGRAFIA

- A. Aissani (1994), A retrial queue with redundancy and unreliable server, *Queueing Systems* **17**, 431-449.
- A.M. Aleksandrov (1974), A queueing system with repeated orders, *Engineering Cybernetics Review* **12**, 1-4.
- V.V. Anisimov and Kh.L. Atadzhanov (1992), The diffusion approximation of systems with repeated calls, *Theory of Probability and Mathematical Statistics* **44**, 1-5.
- J.R. Artalejo (1992), Information theoretic approximation for retrial queueing systems, *Transactions of the 11-th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decisions Functions and Random Processes, Prague*, 263-270.
- J.R. Artalejo (1994), New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers, *Statistica Neerlandica* **48**, 23-36.
- J.R. Artalejo (1995), A queueing system with returning customers and waiting line, *Operations Research Letters* **17**, 191-199.
- J.R. Artalejo and G.I. Falin (1994), Stochastic decomposition for retrial queues, *Top* **2**, 329-342.
- N. Bayer and O.J. Boxma (1995), Wiener-Hopf analysis of an  $M/G/1$  queue with negative customers and of a related class of random walks, *CWI Report BS-R9525*, Amsterdam.
- D. Bear (1988), *Principles of Telecommunication Traffic Engineering*, Peter Peregrinus Ltd..
- R.J. Boucherie and O.J. Boxma (1995), The workload in the  $M/G/1$  queue with work removal, *CWI Report BS-R9505*, Amsterdam.
- J.W. Cohen (1957), Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls, *Philips Telecommunication Review* **18**, 49-100.
- X. Chao (1995a), Networks of queues with customers, signals and arbitrary service time distributions, *Operations Research* **43**, 537-544.
- X. Chao (1995b), A queueing network model with catastrophes and product form solution, *Operations Research Letters* **18**, 75-79.
- B.D. Choi and K.K. Park (1990), The  $M/G/1$  retrial queue with Bernoulli schedule, *Queueing Systems* **7**, 219-227.
- B.D. Choi, K.B. Choi and Y.W. Lee (1995),  $M/G/1$  retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity, *Queueing Systems* **19**, 215-229.
- B.D. Choi, K.K. Park and C.E.M. Pearce (1993), An  $M/M/1$  retrial queue with control policy and general retrial times, *Queueing Systems* **14**, 275-292.
- B.D. Choi, Y.W. Shin and W.C. Ahn (1992), Retrial queues with collision arising from unslotted *CSMA/CD* protocol, *Queueing Systems* **11**, 335-356.
- Q.H. Choo and B. Conolly (1979), New results in the theory of repeated orders queueing systems, *Journal of Applied Probability* **16**, 631-640.
- N. Deul (1980), Stationary conditions for multi-server queueing systems with repeated calls, *Elektronische Informationverarbeitung und Kybernetik* **16**, 607-613.
- J.E. Diamond and A.S. Alfa (1995), Matrix analytical methods for  $M/PH/1$  retrial queues, *Communications in Statistics - Stochastic Models* **11**, 447-470.
- N.W. van Dijk (1993), *Queueing Networks and Product Forms: a System Approach*, John Wiley and Sons.
- G.I. Falin (1975), Multi-phase servicing in a single-channel system for automation of experiments with repeated calls, in: *Problems of Automation of Scientific Investigations in Radio Engineering and*

Electronis, Institute for Radiotechnics and Electronics of the USSR Academy of Science, Moscow, 30-37 (en ruso).

G.I. Falin (1976), Aggregate arrival of customers in one-line system with repeated calls, Ukrainian Mathematical Journal **28**, 437-440.

G.I. Falin (1978), The output flow of a single-line queueing system when there are secondary orders, Engineering Cybernetics Review **16**, 64-67.

G.I. Falin (1979a), A single-line system with secondary orders, Engineering Cybernetics Review **17**, 76-83.

G.I. Falin (1979b), Effect of the recurrent calls on output flow of a single channel system of mass service, Engineering Cybernetics Review **17**, 99-103.

G.I. Falin (1980), An  $M/M/1$  queue with repeated calls in presence of persistence function, Paper 1606-80, All-Union Institute for Scientific and Technical Information, Moscow (en ruso).

G.I. Falin (1981), Functioning under nonsteady conditions of a single-channel system with group arrival of requests and repeated calls, Ukrainian Mathematical Journal **33**, 429-432.

G.I. Falin (1983), The influence of inhomogeneity of the composition of subscribers on the functioning of telephone systems with repeated calls, Engineering Cybernetics Review **21**, 21-25.

G.I. Falin (1984a), Double-channel queueing system with repeated calls, Paper 4221-84, All-Union Institute for Scientific and Technical Information, Moscow.

G.I. Falin (1984b), On sufficient conditions for ergodicity of multichannel queueing systems with repeated calls, Advances in Applied Probability **16**, 447-448.

G.I. Falin (1985), Probabilistic model for investigation of load of subscribers lines with waiting places, in: Probability Theory, Theory of Stochastic Processes and Functional Analysis, Moscow State University, 64-66 (en ruso).

G.I. Falin (1986a), Single-line repeated orders queueing systems, Mathematische Operationsforschung und Statistik, Optimization **17**, 649-667.

G.I. Falin (1986b), On waiting time process in single-line queue with repeated calls, Journal of Applied Probability **23**, 185-192.

G.I. Falin (1988), On a multiclass batch arrival retrial queue, Advances in Applied Probability **20**, 483-487.

G.I. Falin (1990), A survey of retrial queues, Queueing Systems **7**, 127-168.

G.I. Falin (1991), A diffusion approximation for retrial queueing systems, Theory of Probability and its Applications **36**, 149-152.

G.I. Falin (1994), Retrial queues 1. The main  $M/G/1$  type model, Working Paper 94-08, Department of Industrial Engineering, University of Toronto, Canada.

G.I. Falin (1995a), A finite source retrial queue, Working Paper 95-14, Department of Industrial Engineering, University of Toronto, Canada.

G.I. Falin (1995b), Estimation of retrial rate in a retrial queue, Queueing Systems **19**, 231-246.

G.I. Falin and J.R. Artalejo (1995), Approximations for multiserver queues with balking/retrial discipline, OR Spektrum **17**, 239-244.

G.I. Falin and C. Fricker (1991), On the virtual waiting time in an  $M/G/1$  retrial queue, Journal of Applied Probability **28**, 446-460.

G.I. Falin, J.R. Artalejo and M. Martin (1993), On the single server retrial queue with priority customers, Queueing Systems **14**, 439-455.

G.I. Falin, M. Martin and J.R. Artalejo (1994), Information theoretic approximations for the  $M/G/1$  retrial queue, Acta Informatica **31**, 559-571.

K. Farahmand (1990), Single line queue with repeated demands, Queueing Systems **6**, 223-228.

- G. Fayolle (1986), A simple telephone exchange with delayed feedbacks, in: *Teletraffic Analysis and Computer Performance Evaluation* (O.J. Boxma, J.W. Cohen and H.J. Tijms, eds.), Elsevier Science, 245-253.
- G. Fayolle and M.A. Brun (1988), On a system with impatience and repeated calls, in: *Queueing Theory and its Applications. Liber Amicorum for J.W. Cohen*, North Holland, 283-305.
- E. Gelenbe (1991), Product-form queueing networks with negative and positive customers, *Journal of Applied Probability* **28**, 656-663.
- E. Gelenbe (1993), G-networks with triggered customer movement, *Journal of Applied Probability* **30**, 742-748.
- E. Gelenbe (1994), G-networks: a unifying model for neural and queueing networks, *Annals of Operations Research* **48**, 433-461.
- E. Gelenbe and G. Pujolle (1986), *Introduction to Networks of Queues*, John Wiley and Sons.
- E. Gelenbe, P. Glynn and K. Sigman (1991), Queues with negative arrivals, *Journal of Applied Probability* **28**, 245-250.
- B.S. Greenberg (1989),  $M/G/1$  queueing systems with returning customers, *Journal of Applied Probability* **26**, 152-163.
- T. Hanschke (1985), The  $M/G/1$  queue with repeated attempts and different types of feedback effects, *OR Spectrum* **7**, 209-215.
- T. Hanschke (1987), Explicit formulas for the characteristics of the  $M/M/2/2$  queue with repeated attempts, *Journal of Applied Probability* **24**, 486-494.
- C.M. Harris, K.L. Hoffman and P.B. Saunders (1987), Modeling the IRS telephone taxpayer information system, *Operations Research* **35**, 504-523.
- P.G. Harrison and E. Pitel (1993), Sojourn times in single-server queues with negative customers, *Journal of Applied Probability* **30**, 943-963.
- P.G. Harrison and E. Pitel (1995), Response time distributions in tandem G-networks, *Journal of Applied Probability* **32**, 224-246.
- P.G. Harrison and E. Pitel (1996), The  $M/G/1$  queue with negative customers, *Advances in Applied Probability* (próxima aparición).
- W. Henderson (1993), Queueing networks with negative customers and negative queue lengths, *Journal of Applied Probability* **30**, 931-942.
- W. Henderson, B.S. Northcote and P.G. Taylor (1994), Geometric equilibrium distributions for queues with interactive batch departures, *Annals of Operations Research* **48**, 493-511.
- H. Inamori, M. Sawai, T. Endo and K. Tanabe (1985), An automatically repeated call model in NTT public facsimile communication systems, in: *Teletraffic Issues in an Advanced Information Society, ITC-11* (Minoru Akiyama, ed.), Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1017-1023.
- G. Jain and K. Sigman (1996), A Pollaczek-Khintchine formula for  $M/G/1$  queues with disasters, *Journal of Applied Probability* (próxima aparición).
- G.L. Jonin and J.J. Sedol (1970), Telephone systems with repeated calls, *Proceedings of the 6th International Teletraffic Congress, Munich*, 435/1-435/5.
- J. Keilson, J. Cozzolino and H. Young (1968), A service system with unfilled requests repeated, *Operations Research* **16**, 1126-1137.
- F.P. Kelly (1979), *Reversibility and Stochastic Networks*, John Wiley and Sons.
- F.P. Kelly (1986), On auto-repeat facilities and telephone network performance, *Journal of the Royal Statistical Society B* **48**, 123-132.
- D.G. Kendall (1953), Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains, *Annals of Mathematical Statistics* **24**, 338-354.

- Z. Khalil and G.I. Falin (1994), Stochastic inequalities for  $M/G/1$  retrial queues, *Operations Research Letters* **16**, 285-290.
- K. Kim and A.F. Seila (1993), A generalized cost model for stochastic clearing systems, *Computers and Operations Research* **20**, 67-82.
- A.G. de Kok (1984), Algorithmic methods for single server systems with repeated attempts, *Statistica Neerlandica* **38**, 23-32.
- Y.N. Kornishev (1980), A single-line queue with heterogeneity repeated calls, in: *Teletraffic Theory and Networks with Controlled Elements*, Moscow, 113-122 (en ruso).
- L. Kosten (1947), On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking, *De Ingenieur* **59**, 1-25 (en alemán).
- D.D. Kouvatsos (1994), Entropy maximization and queueing network models, *Annals of Operations Research* **48**, 63-126.
- V.G. Kulkarni (1983a), On queueing systems with retrials, *Journal of Applied Probability* **20**, 380-389.
- V.G. Kulkarni (1983b), A game theoretic model for two types of customers competing for service, *Operations Research Letters* **2**, 119-122.
- V.G. Kulkarni (1986), Expected waiting times in a multiclass batch arrival retrial queue, *Journal of Applied Probability* **23**, 144-159.
- V.G. Kulkarni and B.D. Choi (1990), Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs, *Queueing Systems* **7**, 191-208.
- A. Lewis and G. Leonard (1982), Measurements of repeat call attempts in the intercontinental telephone service, *Proceedings ITC - 10*, Session 2.4, Paper No.2.
- H.M. Liang and V.G. Kulkarni (1993), Monotonicity properties of single-server retrial queues, *Communications in Statistics - Stochastic Models* **9**, 373-400.
- L.I. Lukashuk (1990), Diffusion approximation and filtering for a queueing system with repeats, *Cybernetics* **2**, 253-264.
- M. Martin and J.R. Artalejo (1995), Analysis of an  $M/G/1$  queue with two types of impatient units, *Advances in Applied Probability* **27**, 840-861.
- M. Martin and A. Gomez-Corral (1995), On the  $M/G/1$  retrial queueing system with linear control policy, *Top* **3**, 285-305.
- M.F. Neuts and M.F. Ramalhoto (1984), A service model in which the server is required to search for customers, *Journal of Applied Probability* **21**, 157-166.
- M.F. Neuts and B.M. Rao (1990), Numerical investigation of a multi-server retrial model, *Queueing Systems* **7**, 169-190.
- H. Ohmura and Y. Takahashi (1985), An analysis of repeated call model with a finite number of sources, *Electronics and Communications in Japan* **68**, 112-121.
- C.E.M. Pearce (1989), Extended continued fractions, recurrence relations and two-dimensional Markov processes, *Advances in Applied Probability* **21**, 357-375.
- B. Pourbabai (1990a), Tandem behavior of a telecommunication system with finite buffers and repeated calls, *Queueing Systems* **6**, 89-108.
- B. Pourbabai (1990b), A note on a  $D/G/K$  loss system with retrials, *Journal of Applied Probability* **27**, 385-392.
- B. Pourbabai (1993), Tandem behaviour of a telecommunication system with repeated calls: II, A general case without buffers, *European Journal of Operational Research* **65**, 247-258.
- J. Riordan (1962), *Stochastic Service Systems*, John Wiley and Sons.
- H. Schellhaas (1986), Computation of the state probabilities in a class of semi-regenerative queueing models, in: *Semi-Markov Models: Theory and Applications* (J. Janssen, ed.), Plenum Press, 111-130.

- R. Serfozo and S. Stidham (1978), Semi-stationary clearing processes, *Stochastic Processes and their Applications* **6**, 165-178.
- S.N. Stepanov (1983), *Numerical Methods of Calculation for Systems with Repeated Calls*, Nauka (en ruso).
- S. Stidham, Jr. (1972), Regenerative processes in the theory of queues, with applications to the alternating-priority queue, *Advances in Applied Probability* **4**, 542-577.
- S. Stidham, Jr. (1974), Stochastic clearing systems, *Stochastic Processes and their Applications* **2**, 85-113.
- S. Stidham, Jr. (1977), Cost models for stochastic clearing systems, *Operations Research* **25**, 100-127.
- S. Stidham, Jr. (1986), Clearing systems and (s,S) inventory systems with nonlinear costs and positive lead times, *Operations Research* **34**, 276-280.
- D. Stoyan (1983), *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley and Sons.
- R. Syski (1960), *Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems*, North-Holland.
- R. Warfield and G. Foers (1985), Application of Bayesian teletraffic measurement to system with queueing or repeated calls, in: *Teletraffic Issues in an Advanced Information Society, ITC - 11*, North Holland, 1003-1009.
- W. Whitt (1981), The stationary distribution of a stochastic clearing process, *Operations Research* **29**, 294-308.
- R.I. Wilkinson (1956), Theories for toll traffic engineering in the U.S.A., *The Bell System Technical Journal* **35**, 421-514.
- R.W. Wolff (1982), Poisson arrivals see time averages, *Operations Research* **30**, 223-231.
- R.W. Wolff (1989), *Stochastic Modelling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- T. Yang and J.G.C. Templeton (1987), A survey on retrial queues, *Queueing Systems* **2**, 201-233.
- T. Yang, M.J.M. Posner and J.G.C. Templeton (1990), The  $M/G/1$  retrial queue with nonpersistent customers, *Queueing Systems* **7**, 209-218.
- T. Yang, M.J.M. Posner and J.G.C. Templeton (1992), The  $C_a/M/s/m$  retrial queue: a computational approach, *ORSA Journal on Computing* **4**, 182-191.
- T. Yang, M.J.M. Posner, J.G.C. Templeton and H. Li (1994), An approximation method for the  $M/G/1$  retrial queue with general retrial times, *European Journal of Operational Research* **76**, 552-562.

## **Capítulo 1. Sistema M/M/1 con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento**

### **1.1 Introducción**

### **1.2 Descripción del modelo matemático y clasificación de los estados**

### **1.3 Distribución límite y momentos factoriales**

### **1.4 Tiempo de permanencia en el sistema**

### **1.5 Período de ocupación del sistema**

### **1.6 Cadenas encajadas asociadas a los instantes de finalización del servicio y de expulsión**

### **1.7 Proceso de finalización del servicio**

### **1.8 Proceso de comienzo del servicio**

### **1.9 Comentarios y notas bibliográficas**

#### **Apéndice 1**

#### **Bibliografía**

# Capítulo 1

## Sistema $M/M/1$ con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento

### 1.1 Introducción

El presente capítulo está dedicado al análisis estocástico del modelo  $M/M/1$  con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento. El principal objetivo del estudio de este sistema de colas es la modelización de ciertas situaciones en redes de ordenadores, donde el flujo de llegadas negativas permite mantener niveles de congestión interna moderados. Una de las principales características del modelo es la versatilidad que ofrece en el sentido de permitir el estudio simultáneo de diferentes sistemas de colas descritos en la literatura.

El estado del sistema en cada instante de tiempo será formalizado mediante un proceso de Markov bivariante en el que son especificados el estado del servidor y el número de clientes presentes en órbita. Fijando la primera componente del proceso, la distribución límite satisface un sistema de ecuaciones del tipo *nacimiento y muerte*. La presencia de un proceso de llegadas negativas tiene una profunda influencia sobre el sistema. Dado que los clientes pueden abandonar el sistema sin recibir servicio, la forma estructural de la cola  $M/G/1$  no se preserva. Así mismo, la distribución límite del proceso en tiempo continuo que describe el número de clientes en el sistema no coincide con la distribución de probabilidad del proceso encajado que indica el estado de la órbita justo después de cada instante de finalización del servicio.

El resto del capítulo es organizado como se señala a continuación. En la sección 1.2 se realiza la descripción del modelo matemático y una completa clasificación de los estados del proceso de Markov asociado. La sección 1.3 está dedicada al estudio, bajo ergodicidad, de la distribución límite y de sus correspondientes momentos factoriales. El tiempo de permanencia en el sistema de un cliente, desde su llegada hasta el instante de finalización del servicio o de expulsión, es estudiado en la sección 1.4, cuando asumimos que la intensidad de reintento es constante, la disciplina de servicio consiste en servir a los clientes en el orden de llegada y la estrategia de expulsión supone la anulación del cliente que ocupa la última posición de la órbita. La sección 1.5 se centra en el análisis del período de ocupación y otras variables aleatorias relacionadas. Se proponen esquemas recursivos para la computación de los momentos

de estas variables. El estudio de las cadenas de Markov encajadas en los instantes de finalización del servicio y de expulsión, junto con sus correspondientes momentos factoriales, es abordado en la sección 1.6. Los procesos asociados a la sucesión de tiempos transcurridos entre dos finalizaciones del servicio consecutivas y dos entradas sucesivas al servicio son tratados en las secciones 1.7 y 1.8, respectivamente. Se concluye el capítulo con la sección 1.9 donde se comentan diferentes aspectos referidos a las técnicas y a la bibliografía empleadas.

## 1.2 Descripción del modelo matemático y clasificación de los estados

Se considera un sistema de colas con un único servidor y dos procesos de entrada independientes de Poisson con intensidades  $\lambda > 0$  y  $\delta \geq 0$ , correspondientes a llegadas originales y negativas, respectivamente. Si en el instante de una llegada original el servidor está libre, el cliente comienza a ser servido y abandona el sistema tras la finalización de dicho servicio. Cualquier cliente que encuentra el servidor ocupado debe abandonar inmediatamente el área de servicio, retornando al sistema en sucesivos instantes hasta que encuentra el servidor libre. Estos clientes insatisfechos forman una órbita tal que sólo uno de ellos, seleccionado de acuerdo a una cierta regla, puede intentar acceder al servicio. Se asume que la longitud de los intervalos de tiempo separando dos sucesivos intentos de acceso al servidor se distribuyen exponencial e independientemente con intensidad  $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$ , cuando existen  $j$  clientes en órbita, donde  $\delta_{ab}$  representa la delta de Kronecker. Las señales negativas sólo ocurren cuando el servicio está ocupado y tienen el efecto de expulsar a uno de los clientes de la órbita, si existe alguno en ella, que es seleccionado de acuerdo a alguna estrategia especificada. Los tiempos de servicio son variables aleatorias independientes y exponencialmente distribuidas con intensidad  $\nu$ . Se asume la independencia de los procesos de llegadas originales y negativas, los intervalos separando sucesivos reintentos y los tiempos de servicio.

Diferentes modelos de colas pueden obtenerse a través de elecciones particulares de los parámetros  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\delta$ . El caso  $\delta = 0$  corresponde a la cola con disciplina lineal que generaliza a las colas con políticas clásica y constante de reintento. Ambos modelos vienen dados si adicionalmente son considerados  $\alpha = 0$  y  $\mu = 0$ , respectivamente. El caso  $\mu = 0$  y  $\delta = (1 - H)\alpha$ ,  $H \in (0, 1)$ , conduce a una nueva cola con disciplina constante donde el cliente que ocupa la primera posición de la órbita es no-persistente. Finalmente, la cola Markoviana con un único servidor, línea de espera y llegadas negativas es obtenida como el caso límite  $\alpha \rightarrow \infty$  y/o  $\mu \rightarrow \infty$ .

El estado del sistema en el instante  $t$  puede ser descrito mediante el proceso de Markov  $X = \{X(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$ , donde  $C(t)$  es igual a 1 o 0 de acuerdo a si el servidor está ocupado o libre, respectivamente, y  $Q(t)$  representa el tamaño de la órbita. El espacio de estados de  $X$  es el conjunto  $S = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ .

Se asume que el proceso  $X$  es estándar en el sentido siguiente

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(X(t) = (m, n) / X(0) = (k, j)) = \delta_{(k,j)(m,n)},$$

para  $(k, j), (m, n) \in S$ .

El generador infinitesimal del proceso X, Q, definido de la forma

$$q_{(k,j)(m,n)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P(X(t) = (m, n) / X(0) = (k, j)) - \delta_{(k,j)(m,n)}),$$

viene dado por

$$q_{(0,j)(n,m)} = \begin{cases} \lambda, & \text{si } (n, m) = (1, j), \\ \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu, & \text{si } (n, m) = (1, j - 1), \\ -(\lambda + \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu), & \text{si } (n, m) = (0, j), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$q_{(1,j)(n,m)} = \begin{cases} \lambda, & \text{si } (n, m) = (1, j + 1), \\ \nu, & \text{si } (n, m) = (0, j), \\ \delta(1 - \delta_{0j}), & \text{si } (n, m) = (1, j - 1), \\ -(\lambda + \nu + \delta(1 - \delta_{0j})), & \text{si } (n, m) = (1, j), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

para  $n \in \{0, 1\}$  y  $j, m \in \mathbb{N}$ .

Sea la distribución límite del proceso X definida a través de las siguientes probabilidades

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = (i, j)), \quad (i, j) \in S, \quad (1.2.2)$$

que son positivas si y sólo si el proceso X es ergódico.

La clasificación de los estados del proceso X es establecida en el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.1.** *Sea X el proceso de Markov con generador infinitesimal Q dado en (1.2.1), entonces*

- i) X es ergódico si y sólo si se satisface una de las dos siguientes condiciones:
  - i.1)  $\mu = 0$  y  $\gamma < 1$ ,
  - i.2)  $\mu > 0$  y  $\rho < 1$ ;
- ii) X es recurrente nulo si y sólo si se satisface una de las dos siguientes condiciones:
  - ii.1)  $\mu = 0$  y  $\gamma = 1$ ,
  - ii.2)  $\mu > 0$ ,  $\rho = 1$  y  $\nu \leq \mu$ ;
- iii) X es transitorio si y sólo si se satisface una de las tres siguientes condiciones:
  - iii.1)  $\mu = 0$  y  $\gamma > 1$ ,
  - iii.2)  $\mu > 0$ ,  $\rho = 1$  y  $\nu > \mu$ ,
  - iii.3)  $\mu > 0$  y  $\rho > 1$ ;

donde

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu + \delta} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha}. \quad (1.2.3)$$

**Demostración.** Desde (1.2.1) se deduce que las probabilidades límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in S}$  están sujetas a las siguientes relaciones

$$(\lambda + \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu)P_{0j} = \nu P_{1j}, \quad j \geq 0, \quad (1.2.4)$$

$$(\lambda + \nu + \delta(1 - \delta_{0j}))P_{1j} = \lambda P_{0j} + (\alpha + (j+1)\mu)P_{0,j+1} + \delta P_{1,j+1} + \lambda(1 - \delta_{0j})P_{1,j-1}, \quad j \geq 0. \quad (1.2.5)$$

Entonces, de las ecuaciones (1.2.4) y (1.2.5) se sigue que

$$\alpha_0 P_{00} = \beta_1 P_{01},$$

$$(\alpha_j + \beta_j)P_{0j} = \alpha_{j-1}P_{0,j-1} + \beta_{j+1}P_{0,j+1}, \quad j \geq 1, \quad (1.2.6)$$

donde  $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$  y  $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$  están dadas por

$$\alpha_j = \lambda(\lambda + \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu), \quad j \geq 0,$$

$$\beta_j = \lambda\delta + (\nu + \delta)(\alpha + j\mu), \quad j \geq 1.$$

Obsérvese que las ecuaciones (1.2.6) corresponden a un proceso de nacimiento y muerte con parámetros de nacimiento  $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$  y parámetros de muerte  $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ .

Dado que  $X$  es un proceso irreducible, la clasificación de estados puede realizarse mediante los criterios de clasificación relativos a los procesos de nacimiento y muerte. Por tanto, se dispone de las siguientes condiciones necesarias y suficientes:

- i) El proceso es ergódico si y sólo si  $S_1 < \infty$  y  $S_2 = \infty$ ;
- ii) El proceso es recurrente nulo si y sólo si  $S_1 = S_2 = \infty$ ;
- iii) El proceso es transitorio si y sólo si  $S_1 = \infty$  y  $S_2 < \infty$ ;

siendo

$$S_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\alpha_k}{\beta_{k+1}} \quad \text{y} \quad S_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \alpha_j \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\alpha_k}{\beta_{k+1}} \right)^{-1}. \quad (1.2.7)$$

Para garantizar la validez del criterio anterior debe asegurarse la no-explosividad del proceso  $X$ . Asíumase, sin pérdida de generalidad, que  $X(0) = (0, 0)$ . Entonces, el número de finalizaciones de servicio y expulsiones en  $[0, t)$  está acotado por el número de clientes originales llegados,  $N_t$ , en  $[0, t)$ . Además, el número de transiciones del proceso  $X$  desde el nivel  $j$  al nivel  $j-1$  de la órbita en  $[0, t)$  está acotado por el número de transiciones desde el estado  $(1, j-1)$  al estado  $(1, j)$  durante  $[0, t)$ . Por ello, el número total de transiciones antes del instante  $t$  está acotado por  $3N_t$ . Como consecuencia,  $X$  es no-explosivo y el criterio basado en las series (1.2.7) es válido.

Las series  $S_1$  y  $S_2$  vienen dadas por

$$S_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \left( F \left( 1, \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) - 1 \right) \quad \text{y} \quad S_2 = \frac{1}{\lambda^2} \left( F \left( 1, 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; \frac{1}{\rho} \right) - 1 \right),$$

donde  $F(a, b; c; z)$  es la serie hipergeométrica habitual (ver Apéndice 1.A).

Nótese que si  $\mu = 0$  entonces debe asumirse que  $\alpha > 0$ . Aplicando el test del cociente se sigue que  $S_1 < \infty$  si y sólo si  $\gamma < 1$ , y  $S_2 < \infty$  si y sólo si  $\gamma > 1$ . Entonces, *i.1)*, *ii.1)* y *iii.1)* son obtenidas.

En el caso  $\mu > 0$ , la aplicación del test del cociente muestra que  $S_1$  es convergente si  $\rho < 1$ . Cuando  $\rho > 1$  la serie diverge. Además, el test de Raabe permite asegurar que  $S_1$  diverge si  $\rho = 1$ . Finalmente, los mismos argumentos pueden emplearse para determinar la convergencia de la serie  $S_2$ . Sin embargo, no se puede concluir desde el test de Raabe la convergencia cuando  $\rho = 1$  y  $\nu = \mu$ . Este caso es resuelto con el uso del criterio de comparación por paso al límite entre las series  $S_2$  y  $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}$ . Como consecuencia son obtenidas las condiciones *i.2)*, *ii.2)*, *iii.2)* y *iii.3)*. □

### 1.3 Distribución límite y momentos factoriales

Esta sección está dedicada al estudio de la distribución límite definida en (1.2.2), cuando el proceso X es ergódico. Adicionalmente, es obtenida la distribución límite del número de clientes en el sistema.

Sean las funciones generatrices parciales siguientes

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}z^j, \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1.$$

Considérense los momentos factoriales parciales  $M_k^i$ , para  $i \in \{0, 1\}$  y  $k \in \mathbb{N}$ , definidos como

$$M_0^i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}, \quad M_k^i = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\dots(j-k+1)P_{ij}, \quad i \in \{0, 1\}, k \geq 1.$$

En el siguiente teorema se estudia la distribución límite,  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in S}$ , junto con sus correspondientes momentos factoriales en el caso  $\mu > 0$ .

**Teorema 1.3.1.** *Si X es ergódico, entonces la distribución límite del estado del servidor y el número de clientes en órbita está dada por*

$$P_{00} = \left( \left(1 + \frac{\delta}{\nu}\right) F \left(1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho\right) - \frac{\delta}{\nu} \right)^{-1}, \quad (1.3.1)$$

$$P_{0j} = P_{00} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \frac{\left(\frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_j}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1, \quad (1.3.2)$$

$$P_{1j} = P_{00} \frac{\lambda}{\nu} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_j}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_j} \rho^j, \quad j \geq 0. \quad (1.3.3)$$

Los correspondientes momentos factoriales parciales son

$$M_k^0 = P_{00} \left( \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \delta_{0k} + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} k! \rho^k \frac{\binom{\lambda + \alpha}{\mu}_k}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_k} F \left( k + 1, k + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; k + 1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}; \rho \right) \right), \quad k \geq 0, \quad (1.3.4)$$

$$M_k^1 = P_{00} \frac{\lambda}{\nu} k! \rho^k \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_k}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_k} F \left( k + 1, k + 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; k + 1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}; \rho \right), \quad k \geq 0. \quad (1.3.5)$$

**Demostración.** La colección de probabilidades  $\{P_{0j}\}_{j=0}^{\infty}$  satisface el sistema de ecuaciones (1.2.6). Por ello, (1.3.2) se corresponde con la conocida solución de los procesos de nacimiento y muerte.

$$P_{0j} = P_{00} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\alpha_k}{\beta_{k+1}} = P_{00} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \frac{\binom{\lambda + \alpha}{\mu}_j}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1.$$

A partir de (1.2.4) es posible expresar  $\{P_{1j}\}_{j=0}^{\infty}$  en términos de  $\{P_{0j}\}_{j=0}^{\infty}$ ,

$$P_{1j} = \frac{\lambda + \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu}{\nu} P_{0j}, \quad j \geq 0.$$

Entonces, (1.3.3) se deduce desde (1.3.2) y la anterior relación. Finalmente,  $P_{00}$  se obtiene utilizando la condición de normalización  $\sum_{(i,j) \in S} P_{ij} = 1$ .

Utilizando (1.3.2) y (1.3.3), se deducen las siguientes expresiones para las funciones generatrices parciales

$$P_0(z) = \frac{P_{00}}{\lambda + \alpha} \left( \alpha + \lambda F \left( 1, \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}; \rho z \right) \right),$$

$$P_1(z) = P_{00} \frac{\lambda}{\nu} F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}; \rho z \right). \quad (1.3.6)$$

Tomando  $z \rightarrow 1^-$  en  $P_i(z)$  se obtiene  $M_0^i$ , para  $i \in \{0, 1\}$ . Ahora, considérese la relación

$$P_i(1 + z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^i \frac{z^k}{k!}, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (1.3.7)$$

La expresión (1.3.7) permite determinar  $M_k^i$  mediante una identificación directa de coeficientes de las

series (1.3.6). Se tienen entonces

$$M_k^0 = P_{00} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{j+k}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_{j+k}} \rho^{j+k} \frac{(j+k)!}{j!}, \quad k \geq 1,$$

$$M_k^1 = P_{00} \frac{\lambda}{\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{j+k}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_{j+k}} \rho^{j+k} \frac{(j+k)!}{j!}, \quad k \geq 1.$$

Las expresiones finales (1.3.4) y (1.3.5) son obtenidas con la ayuda de dos simples identidades

$$(j+k)! = (1)_{j+k} \quad y \quad (a)_{n+k} = (a)_k (a+k)_n. \quad (1.3.8)$$

Finalmente, el test del cociente y el test de Raabe permiten asegurar que  $M_k^i$  existe, para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $i \in \{0, 1\}$ , si el proceso X es ergódico.

□

En el caso particular  $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$  las funciones hipergeométricas se reducen a expresiones explícitas de tipo 'geométrico'.

**Corolario 1.3.2.** *Supóngase que  $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$ . Entonces, si  $\gamma < 1$ , la distribución límite del proceso X está dada por*

$$P_{00} = \frac{\nu(\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha))}{\nu^2\alpha + \delta(\lambda + \nu)(\lambda + \alpha)}, \quad (1.3.9)$$

$$P_{0j} = P_{00} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right)^j, \quad j \geq 1, \quad (1.3.10)$$

$$P_{1j} = P_{00} \frac{\lambda}{\nu} \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right)^j, \quad j \geq 0. \quad (1.3.11)$$

Los momentos factoriales tienen las siguientes expresiones

$$M_0^0 = \frac{\nu(\lambda\delta + \alpha(\nu + \delta - \lambda))}{\nu^2\alpha + \delta(\lambda + \nu)(\lambda + \alpha)}, \quad (1.3.12)$$

$$M_k^0 = \frac{\lambda\nu(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha))}{(\lambda + \alpha)(\nu^2\alpha + \delta(\lambda + \nu)(\lambda + \alpha))} \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right)^k k!, \quad k \geq 1, \quad (1.3.13)$$

$$M_k^1 = \frac{\lambda(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha))}{\nu^2\alpha + \delta(\lambda + \nu)(\lambda + \alpha)} \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right)^k k!, \quad k \geq 0. \quad (1.3.14)$$

**Demostración.** Es suficiente considerar el límite cuando  $\mu \rightarrow 0$  de las expresiones (1.3.1) – (1.3.5) para deducir (1.3.9) – (1.3.14). □

La distribución de probabilidad del número de clientes en el sistema y sus momentos factoriales se deducen de forma simple del *Teorema 1.3.1* y el *Corolario 1.3.2*.

**Corolario 1.3.3.** Si el proceso  $X$  es ergódico, entonces la distribución límite del número de clientes en el sistema,  $\{P_j = P_{0j} + (1 - \delta_{0j})P_{1,j-1}\}_{j=0}^{\infty}$ , y sus correspondientes momentos factoriales,  $M_k$ , vienen dados, en el caso  $\mu = 0$ , por

$$P_0 = \frac{\nu(\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha))}{\nu^2\alpha + \delta(\lambda + \nu)(\lambda + \alpha)},$$

$$P_j = P_0 \left(1 + \frac{\delta}{\nu}\right) \left(\frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)}\right)^j, \quad j \geq 1,$$

$$M_k = P_0 \left(1 + \frac{\delta}{\nu}\right) k! \frac{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \left(\frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)}\right)^k, \quad k \geq 1.$$

Análogamente, en el caso  $\mu > 0$ , se obtienen

$$P_0 = \left( \left(1 + \frac{\delta}{\nu}\right) F\left(1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho\right) - \frac{\delta}{\nu} \right)^{-1},$$

$$P_j = P_0 \left(1 + \frac{\delta}{\nu}\right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_j}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1,$$

$$M_k = P_0 \left( \left(1 + \frac{\delta}{\nu}\right) k! \rho^k \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_k}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_k} F\left(1 + k, 1 + k + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + k + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho\right) - \frac{\delta}{\nu} \delta_{0k} \right), \quad k \geq 0.$$

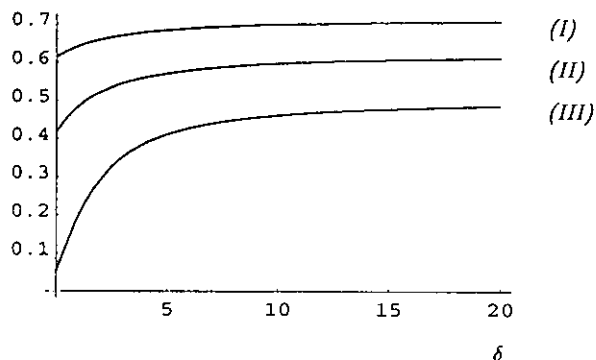


Figura 1.3.1. Probabilidad  $M_0^0$

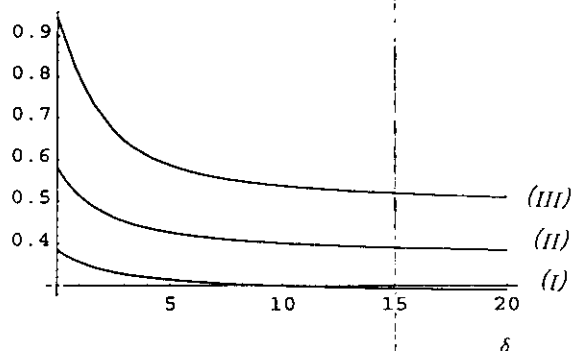


Figura 1.3.2. Probabilidad  $M_0^1$

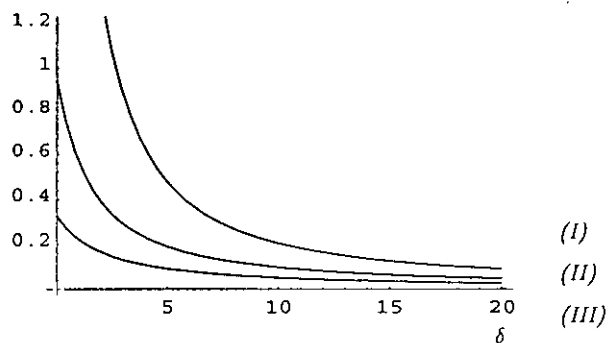


Figura 1.3.3. Momento de orden 1 de  $Q_0$ ,  $M_1^0$

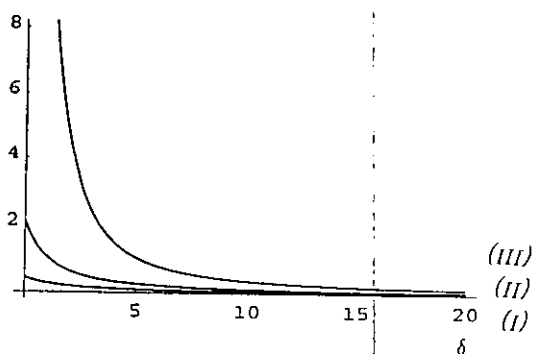


Figura 1.3.4. Momento de orden 1 de  $Q_i$ ,  $M_1^1$

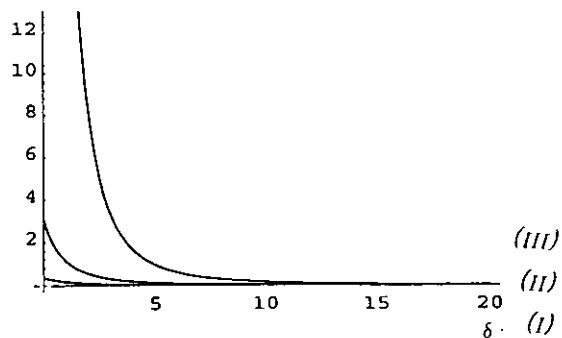


Figura 1.3.5. Varianza de  $Q_0$

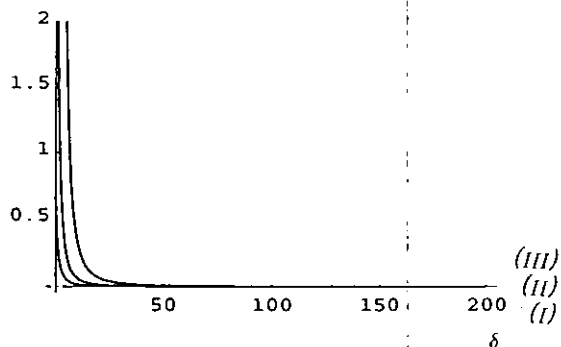


Figura 1.3.6. Varianza de  $Q_i$

A modo de ilustración, en las Figuras 1.3.1-1.3.6 se representan, como función de la intensidad  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , la distribución marginal del estado del servidor, así como la media y la varianza de las variables aleatorias  $Q_0$  y  $Q_1$ , donde  $Q_0$  y  $Q_1$  denotan el número de clientes en órbita cuando  $C(t)$  es 0 y 1, respectivamente. Se han considerado los tres siguientes casos:

- (I)  $\lambda = 2.125, \alpha = 2.0, \mu = 1.375$  y  $\nu = 5.5$ ,
- (II)  $\lambda = 3.2, \alpha = 2.0, \mu = 1.375$  y  $\nu = 5.5$ ,
- (III)  $\lambda = 5.2, \alpha = 2.0, \mu = 1.375$  y  $\nu = 5.5$ .

### 1.4 Tiempo de permanencia en el sistema

Se define el tiempo de permanencia de un cliente (en lo sucesivo será llamado *cliente marcado*) como la longitud del intervalo de tiempo que comienza en el instante de la llegada del cliente y termina en el instante en que abandona el sistema. En esta sección se estudia el tiempo de permanencia en el sistema cuando el proceso X es ergódico y la intensidad de reintento es  $\alpha$ .

Primeramente, deben ser fijadas la disciplina que determina el acceso de los clientes al servicio mientras esperan en la órbita y la estrategia de expulsión asociada a las llegadas negativas. En este sentido, se asume que los clientes son servidos en el orden de sus llegadas (disciplina FCFS) y la estrategia de expulsión consiste en anular al cliente que ocupa la última posición de la órbita (estrategia RCE).

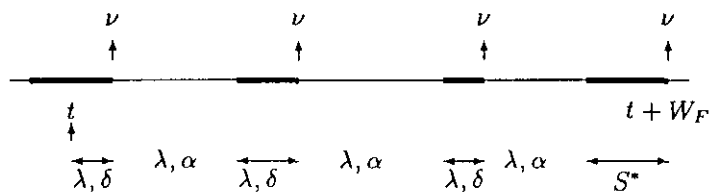


Figura 1.4.1. Tiempo de permanencia condicional  $W_F$

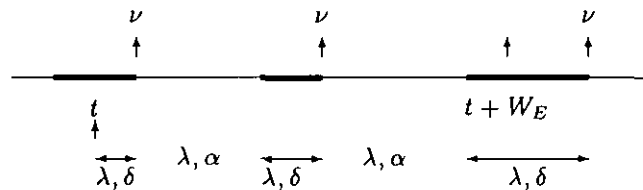


Figura 1.4.2. Tiempo de permanencia condicional  $W_E$

Las Figuras 1.4.1 y 1.4.2 muestran representaciones gráficas de los tiempos de permanencia condicionales,  $W_F$  y  $W_E$ , cuando la salida del sistema es debida a la finalización del servicio y a la expulsión, respectivamente.

Sea  $W$  el tiempo de permanencia del cliente marcado que llega al sistema en el instante  $t$ . Denótese por  $W^i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , la cantidad total de tiempo en  $W$  durante la cual el servidor está en estado  $i$ . La distribución conjunta del par  $(W^0, W^1)$  es dada en el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.1.** Si  $\gamma < 1$ , entonces la transformada de Laplace-Stieltjes de la distribución del tiempo de permanencia es

$$\begin{aligned} \phi(\theta, \omega) = E [\exp(-\theta W^0 - \omega W^1)] = M_0^0 \frac{\nu}{\omega + \nu} \\ + P_{00} \left( \frac{\nu \alpha B(\theta, \omega)}{(\omega + \nu)(\theta + \lambda + \alpha)(2\delta - B(\theta, \omega))} + \frac{(\nu \alpha + \delta(\lambda + \alpha))B(\theta, \omega)}{2\nu(\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha))} \right), \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

donde  $M_0^0$  y  $P_{00}$  fueron dados en el Corolario 1.3.2 y

$$A(\theta, \omega) = \omega + \lambda + \delta + \nu \left( 1 - \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha} \left( 1 + \frac{\alpha(\lambda + \alpha)}{\nu \alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right) \right),$$

$$B(\theta, \omega) = A(\theta, \omega) - \sqrt{(A(\theta, \omega))^2 - 4\lambda\delta},$$

para  $Re(\theta) \geq 0$  y  $Re(\omega) \geq 0$ .

La probabilidad de que el cliente marcado no sea expulsado es

$$p = \frac{\nu(\nu \alpha + \delta(\lambda + \alpha))}{\nu^2 \alpha + \delta(\lambda + \nu)(\lambda + \alpha)}. \quad (1.4.2)$$

**Demostración.** Sea  $\phi_{ij}(\theta, \omega)$  la transformada de Laplace-Stieltjes condicional de  $(W^0, W^1)$  cuando  $(i, j) \in S$  es el estado que el cliente marcado encuentra en el instante  $t$  de su llegada al sistema. Con la ayuda de  $\phi_{ij}(\theta, \omega)$ ,  $(i, j) \in S$ , la función  $\phi(\theta, \omega)$  puede expresarse de la siguiente forma

$$\phi(\theta, \omega) = M_0^0 \frac{\nu}{\omega + \nu} + \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j} \phi_{1j}(\theta, \omega). \quad (1.4.3)$$

A continuación se definen un camino aleatorio y algunas variables aleatorias que resultan fundamentales en el esquema de la demostración. Se considera el camino aleatorio que tiene saltos unitarios hacia la izquierda y la derecha con probabilidades  $\delta(\lambda + \delta)^{-1}$  y  $\lambda(\lambda + \delta)^{-1}$ , respectivamente. El tiempo entre dos saltos sucesivos está exponencialmente distribuido con intensidad  $\lambda + \delta$ . Sea  $\tau_{j+1}$  el primer instante de tiempo en que el camino aleatorio alcanza el estado  $j$  cuando su estado inicial es  $j + 1$ ,  $j \geq 0$ . Por otra parte, sea  $\xi_{ij}$  el tiempo transcurrido entre  $t$  y el instante en que el cliente marcado ocupa el servicio en el modelo sin llegadas negativas ( $\delta = 0$ ) dado que  $(C(t - 0), Q(t - 0)) = (i, j)$ . También se considera la variable aleatoria  $\xi_{ij}^k$  definida como la cantidad total de tiempo en  $(0, \xi_{ij}]$  durante la cual el servidor está en estado  $k \in \{0, 1\}$ .

La distribución de  $\xi_{1j}^1$  depende de las siguientes variables aleatorias:

- i) Los tiempos de servicio de los clientes que encuentra el cliente marcado en el sistema en el instante  $t$  de llegada;
- ii) La competición entre dos leyes exponenciales de intensidades  $\lambda$  y  $\alpha$  que ocurren inmediatamente después de cada finalización de servicio;
- iii) Los tiempos de servicio asociados a las competiciones descritas en ii) cuando éstas han terminado en la llegada de un cliente original.

Sea  $(W_{1j}^0, W_{1j}^1)$  el tiempo de permanencia condicional cuando  $(C(t-0), Q(t-0)) = (1, j)$ . De i)-iii) se deduce que su distribución depende del mínimo entre dos variables aleatorias distribuidas como  $\tau_{j+1}$  y  $\xi_{1j}^1$ . Entonces,  $\phi_{1j}(\theta, \omega)$  puede ser expresada de la siguiente forma

$$\phi_{1j}(\theta, \omega) = E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 < \tau_{j+1}\}} \right] + E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 \geq \tau_{j+1}\}} \right]. \quad (1.4.4)$$

A continuación se analiza el primer sumando de la expresión (1.4.4). Condicionando por el valor de  $(\xi_{1j}^1, \tau_{j+1})$  y teniendo en cuenta la independencia entre  $\tau_{j+1}$  y  $\xi_{1j}^1$ , se tiene

$$E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 < \tau_{j+1}\}} \right] = \frac{\nu}{\omega + \nu} \int_0^{+\infty} e^{-\omega y} P(\tau_{j+1} > y) \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} f_{(\xi_{1j}^0, \xi_{1j}^1)}(x, y) dx dy. \quad (1.4.5)$$

Para conseguir una expresión adecuada del integrando de (1.4.5), se investigan la distribución del vector aleatorio  $(\xi_{1j}^0, \xi_{1j}^1)$  y la probabilidad  $P(\tau_{j+1} > y)$ .

Sea  $\phi_j(\theta, \omega) = E[\exp(-\theta \xi_{1j}^0 - \omega \xi_{1j}^1)]$  la transformada de Laplace-Stieltjes del par  $(\xi_{1j}^0, \xi_{1j}^1)$ . Considérense las variables aleatorias  $\zeta^0$  y  $\zeta^1$  que representan la cantidad total de tiempo que el proceso X permanece con el servicio libre y ocupado, respectivamente, durante el intervalo de tiempo que tarda en acceder al servicio el cliente que ocupa la primera posición de la órbita en el modelo M/M/1 sin llegadas negativas. Sea  $\eta(t)$  el tiempo residual de servicio en el instante  $t$ . Dado que se asume que la disciplina de acceso al servicio desde la órbita es FCFS, es posible expresar  $\xi_{1j}^k$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , en los términos

$$\xi_{1j}^0 = \sum_{k=0}^j \zeta_k^0, \quad \xi_{1j}^1 = \eta(t) + \sum_{k=0}^j \zeta_k^1 + \sum_{k=1}^j \sigma_k, \quad j \geq 0,$$

donde  $\zeta_0^k, \dots, \zeta_j^k$  son v.a.i.i.d. como la variable  $\zeta^k$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , y  $\eta(t), \sigma_1, \dots, \sigma_j$  son v.a.i.i.d. según la ley exponencial con intensidad  $\nu$ . Como consecuencia, se deduce la relación

$$\phi_j(\theta, \omega) = (\phi_0(\theta, \omega))^{j+1}, \quad j \geq 0.$$

Sea  $\tilde{\xi}_{1j}^1$  la cantidad total de tiempo que el servicio permanece ocupado durante  $(0, \xi_{1j}]$  excluyendo el tiempo residual de servicio. La función  $\phi_0(\theta, \omega)$  puede escribirse como

$$\phi_0(\theta, \omega) = E[\exp(-\omega\eta(t))] E[\exp(-\theta\xi_{10}^0 - \omega\tilde{\xi}_{10}^1)],$$

donde  $E[\exp(-\omega\eta(t))] = \nu(\omega + \nu)^{-1}$ . La distribución del par  $(\xi_{10}^0, \tilde{\xi}_{10}^1)$  es calculada a través del estudio de las competiciones entre las leyes exponenciales con intensidades  $\lambda$  y  $\alpha$ . Condicionando por el número de llegadas originales que logran ser servidas antes del acceso al servicio del cliente que ocupa la primera posición de la órbita, se tiene

$$E[\exp(-\theta\xi_{10}^0 - \omega\tilde{\xi}_{10}^1)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \alpha}\right)^{k-1} \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} E[\exp(-\theta(\chi_1^0 + \dots + \chi_k^0) - \omega(\chi_1^1 + \dots + \chi_{k-1}^1))],$$

donde  $\chi_1^0, \dots, \chi_k^0$  son v.a.i. con distribución exponencial de intensidad  $\lambda + \alpha$  y  $\chi_1^1, \dots, \chi_{k-1}^1$  son v.a.i.i.d. según la ley exponencial de parámetro  $\nu$ . Entonces, es sencillo establecer

$$\phi_0(\theta, \omega) = \frac{\nu\alpha}{\lambda\omega + (\theta + \alpha)(\omega + \nu)}.$$

La función  $\phi_j(\theta, \omega)$  puede ser invertida dando lugar a la función de densidad de  $(\xi_{1j}^0, \xi_{1j}^1)$ . Con este fin,  $\phi_j(\theta, \omega)$  es reexpresada como sigue

$$\phi_j(\theta, \omega) = \left(\frac{\nu\alpha}{\theta + \lambda + \alpha}\right)^{j+1} \left(\omega + \nu - \frac{\lambda\nu}{\theta + \lambda + \alpha}\right)^{-(j+1)} \quad (1.4.6)$$

El segundo factor de (1.4.6) puede ser expresado como la integral de una distribución *Gamma*. Después de algunos cálculos rutinarios, se obtiene

$$f_{(\xi_{1j}^0, \xi_{1j}^1)}(x, y) = \frac{\nu\alpha}{j!} \left(\frac{\nu\alpha^2}{\lambda} xy\right)^{j/2} e^{-(\lambda+\alpha)x - \nu y} I_j\left(2\sqrt{\lambda\nu xy}\right), \quad x > 0, y > 0, \quad (1.4.7)$$

donde  $I_j(z)$  es la función modificada de Bessel de orden  $j$  definida como

$$I_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{j+2k} \frac{1}{(k+j)!k!}.$$

Desde (1.4.6) o (1.4.7) se puede observar que  $\xi_{1j}^0$  y  $\xi_{1j}^1$  son variables aleatorias dependientes, para cualquier  $j \geq 0$ .

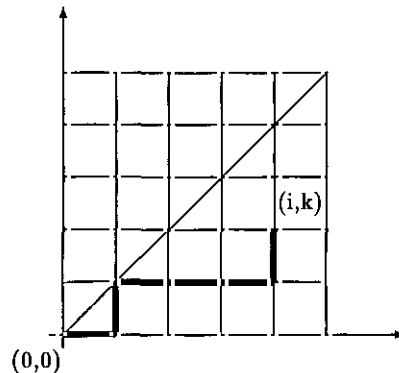
A continuación se obtiene la probabilidad  $P(\tau_{j+1} > y)$ . Sean  $N_y(\lambda)$  y  $N_y(\delta)$  el número de llegadas de clientes originales y el número de llegadas negativas durante  $(0, y]$ , respectivamente. Condicionando por el valor de  $(N_y(\lambda), N_y(\delta))$ , se tiene que

$$P(\tau_{j+1} > y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)y} \frac{(\lambda y)^i (\delta y)^k}{i!k!} P(\tau_{j+1} > y / N_y(\lambda) = i, N_y(\delta) = k). \quad (1.4.8)$$

Con el objetivo de obtener la probabilidad condicional involucrada en (1.4.8), se estudia un problema combinatorio equivalente. Se consideran las trayectorias con origen en  $(0,0)$  y final en  $(i,k)$  del camino aleatorio asociado a  $\tau_{j+1}$  que no traspasan la bisectriz del primer cuadrante, cuando los saltos a la izquierda del camino aleatorio original son sustituidos por saltos unitarios hacia arriba (ver *Figura 1.4.3*). Teniendo en cuenta que todos los caminos que unen  $(0,0)$  con  $(i,k)$  son equiprobables, se tiene que

$$P(\tau_{j+1} > y / N_y(\lambda) = i, N_y(\delta) = k) = \frac{N_{(0,0)(i,k)}^*}{N_{(0,0)(i,k)}},$$

donde  $N_{(0,0)(i,k)}$  representa el número de caminos que unen  $(0,0)$  con  $(i,k)$  y  $N_{(0,0)(i,k)}^*$  el número de éstos que no traspasan la bisectriz del primer cuadrante.



**Figura 1.4.3.** Camino aleatorio

El *Principio de Reflexión* permite deducir las expresiones

$$N_{(0,0)(i,k)} = \binom{i+k}{i}, \quad \text{si } i \geq k \geq 0 \quad \text{y} \quad N_{(0,0)(i,k)}^* = \begin{cases} 1, & \text{si } i \geq k = 0, \\ i, & \text{si } i \geq k = 1, \\ \binom{i+k-1}{k} - \binom{i+k-1}{k-2}, & \text{si } i \geq k \geq 2. \end{cases}$$

Esto conduce a

$$P(\tau_{j+1} > y / N_y(\lambda) = i, N_y(\delta) = k) = \begin{cases} 1 - \frac{k}{i+1}, & \text{si } i \geq k \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Combinando (1.4.8) y (1.4.9) se consigue

$$P(\tau_{j+1} > y) = e^{-(\lambda+\delta)y} \frac{1}{\lambda y} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{k/2} I_k(2y\sqrt{\lambda\delta}). \quad (1.4.10)$$

Insertando (1.4.7) y (1.4.10) en la expresión (1.4.5) y reagrupando términos se deduce la igualdad

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j} E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 < \tau_{j+1}\}} \right] = P_{00} \frac{\nu\alpha}{(\omega + \nu)(\theta + \lambda + \alpha)}$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda\nu\alpha(\lambda + \alpha)}{(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha))(\theta + \lambda + \alpha)\varphi(\theta, \omega, 1)} \right)^j \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{\infty} i \left( \frac{\lambda}{\varphi(\theta, \omega, 1)} \right)^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j + i + 2k - 1)!}{k!(k + i)!} \left( \frac{\sqrt{\lambda\delta}}{\varphi(\theta, \omega, 1)} \right)^{2k}, \quad (1.4.11)$$

donde

$$\varphi(\theta, \omega, y) = \omega + \lambda + \delta + \nu \left( 1 - \frac{\lambda y}{\theta + \lambda + \alpha} \right). \quad (1.4.12)$$

La condición de ergodicidad resulta suficiente para asegurar la desigualdad

$$\frac{\lambda\nu\alpha(\lambda + \alpha)}{(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha))(\theta + \lambda + \alpha)\varphi(\theta, \omega, 1)} < 1.$$

Además

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j + a)!}{j!} z^j = \frac{a!}{(1 - z)^{a+1}}, \quad z \in (0, 1), \quad a \in \mathbb{N}.$$

Por ello, (1.4.11) se reduce a

$$P_{00} \frac{\nu\alpha}{(\omega + \nu)(\theta + \lambda + \alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} i \left( \frac{\lambda}{\delta y} \right)^{i/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+i} (i + 2k - 1)!}{2^{2k+i} k!(k + i)!},$$

donde  $y = 4\lambda\delta/(A(\theta, \omega))^2$ .

Finalmente, considerando la relación

$$\left( 1 - \sqrt{1 - y} \right)^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+i} i(i + 2k - 1)!}{2^{2k+i} k!(k + i)!}, \quad i \geq 1, \quad (1.4.13)$$

y probando que

$$\left| \left( \frac{\lambda}{\delta y} \right)^{1/2} \left( 1 - \sqrt{1 - y} \right) \right| < 1,$$

se obtiene, después de algunas manipulaciones algebraicas, la siguiente igualdad

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j} E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 < \tau_{j+1}\}} \right] = P_{00} \frac{\nu \alpha B(\theta, \omega)}{(\omega + \nu)(\theta + \lambda + \alpha)(2\delta - B(\theta, \omega))}. \quad (1.4.14)$$

A continuación se considera el segundo sumando de (1.4.4) asociado al caso  $\{\xi_{1j}^1 \geq \tau_{j+1}\}$ . Sea  $N_{1j}$  el número de competiciones entre las leyes exponenciales de intensidades  $\lambda$  y  $\alpha$  que finalizan en la llegada de un cliente original y ocurridas durante  $\xi_{1j}$ . Observando que  $N_{1j}$  es una variable aleatoria con distribución *Binomial Negativa*, se tienen

$$P(N_{1j} = n) = \binom{n+j}{n} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^n \left( \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \right)^{j+1}, \quad n \geq 0,$$

$$f_{\xi_{1j}^1 / N_{1j}}(x/n) = \frac{\nu^{n+j+1}}{(n+j)!} e^{-\nu x} x^{n+j}, \quad x > 0. \quad (1.4.15)$$

La transformada de Laplace-Stieltjes de  $\tau_{j+1}$  puede obtenerse de forma sencilla. Si el camino aleatorio alcanza el estado  $j$  mediante  $2k+1$  saltos, entonces el número de posibles trayectorias desde el punto  $(0, 0)$  al punto  $(k, k+1)$  es  $(2k)!/(k!(k+1)!)$ . Teniendo en cuenta que todas las trayectorias son equiprobables se tiene

$$E[e^{-s\tau_{j+1}}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{\lambda^k \delta^{k+1}}{(s + \lambda + \delta)^{2k+1}}.$$

Con la ayuda de (1.4.13), se puede deducir la siguiente expresión alternativa de la transformada de  $\tau_{j+1}$

$$E[e^{-s\tau_{j+1}}] = \frac{s + \lambda + \delta - \sqrt{(s + \lambda + \delta)^2 - 4\lambda\delta}}{2\lambda}, \quad \text{Re}(s) \geq 0.$$

La función de densidad de la variable aleatoria  $\tau_{j+1}$  se obtiene a través de la inversión por inspección de la transformada  $E[e^{-s\tau_{j+1}}]$ . Esta densidad puede escribirse en términos de la función modificada de Bessel de orden 1 como sigue

$$f_{\tau_{j+1}}(y) = y^{-1} \left( \frac{\delta}{\lambda} \right)^{1/2} e^{-(\lambda+\delta)y} I_1(2y\sqrt{\lambda\delta}), \quad y > 0. \quad (1.4.16)$$

Debe observarse que  $f_{\tau_{j+1}}(y)$  también puede ser deducida desde (1.4.10).

Condicionando por el valor de la terna  $(\xi_{1j}^1, N_{1j}, \tau_{j+1})$ , se consigue escribir la relación

$$E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 \geq \tau_{j+1}\}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_{1j} = n) \times \int_0^{+\infty} f_{\xi_{1j}^1/N_{1j}}(x/n) \int_0^x e^{-\omega y} f_{\tau_{j+1}}(y) E \left[ e^{-\theta W_{1j}^0} / \xi_{1j}^1 = x, N_{1j} = n, \tau_{j+1} = y \right] dy dx. \quad (1.4.17)$$

Ahora, el número de competiciones entre las leyes exponenciales con intensidades  $\lambda$  y  $\alpha$  que ocurren antes del instante de expulsión del cliente marcado coincide con el número de finalizaciones de servicio. Además, el cliente marcado no puede ser expulsado durante su propio servicio. Como consecuencia de estas dos observaciones se deduce que el número de finalizaciones de servicio en  $(0, y]$  es una variable aleatoria con distribución *Binomial* de  $n + j$  intentos con probabilidad de éxito  $y/x$ .

Entonces se tiene

$$E \left[ e^{-\theta W_{1j}^0} / \xi_{1j}^1 = x, N_{1j} = n, \tau_{j+1} = y \right] = \sum_{k=0}^{n+j} \binom{n+j}{k} \left(\frac{y}{x}\right)^k \left(\frac{x-y}{x}\right)^{n+j-k} \left(\frac{\lambda + \alpha}{\theta + \lambda + \alpha}\right)^k = \frac{1}{x^{n+j}} \left(x - \frac{\theta}{\theta + \lambda + \alpha} y\right)^{n+j}. \quad (1.4.18)$$

Insertando (1.4.15), (1.4.16) y (1.4.18) dentro de (1.4.17), y teniendo en cuenta la condición de ergodicidad,  $\gamma < 1$ , se logra la expresión

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j} E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 \geq \tau_{j+1}\}} \right] = \frac{\lambda \delta (\nu \alpha + \delta (\lambda + \alpha)) P_{00}}{\nu (\nu \alpha + (\delta - \lambda) (\lambda + \alpha)) A(\theta, \omega)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l)!}{l!(l+1)!} \left(\frac{\sqrt{\lambda \delta}}{A(\theta, \omega)}\right)^{2l}$$

Con la ayuda de (1.4.13) se consigue una notable simplificación

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j} E \left[ \exp(-\theta W_{1j}^0 - \omega W_{1j}^1) I_{\{\xi_{1j}^1 \geq \tau_{j+1}\}} \right] = P_{00} \frac{(\nu \alpha + \delta (\lambda + \alpha)) B(\theta, \omega)}{2\nu (\nu \alpha + (\delta - \lambda) (\lambda + \alpha))}. \quad (1.4.19)$$

Finalmente, la expresión (1.4.1) para la transformada de Laplace-Stieltjes  $\phi(\theta, \omega)$  se deduce a partir de (1.4.3), (1.4.14) y (1.4.19).

Poniendo  $\theta = \omega = 0$  en (1.4.19), se deriva la fórmula (1.4.2) para la probabilidad de que el cliente marcado abandone el sistema tras la finalización de su servicio.

□

Como complemento al Teorema 1.4.1, en la Figura 1.4.4, se representa la probabilidad de abandonar el sistema mediante la finalización del servicio frente a la intensidad  $\delta \in \mathbb{R}^+$ . Puede observarse la existencia de la asíntota horizontal  $y = \nu(\lambda + \nu)^{-1}$ . Los tres casos representados corresponden con los siguientes valores de los parámetros:

- (I)  $\lambda = 0.5, \alpha = 3$  y  $\nu = 7$ ,
- (II)  $\lambda = 1.25, \alpha = 3$  y  $\nu = 7$ ,
- (III)  $\lambda = 2.5, \alpha = 3$  y  $\nu = 7$ .

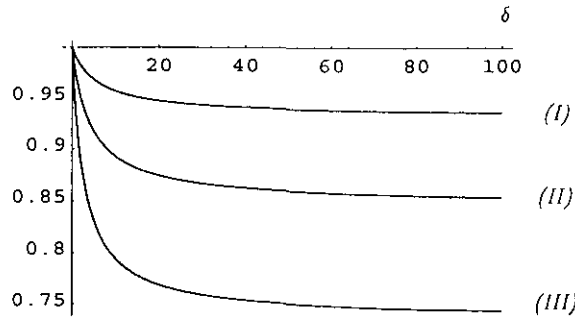


Figura 1.4.4. Probabilidad de finalización del servicio

Derivando la expresión (1.4.1) se pueden deducir los momentos del par asociado al tiempo de permanencia ( $W^0, W^1$ ). Si, en particular, se está interesado en calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema,  $E[W]$ , entonces

$$E[W] = E_F + E_E,$$

donde

$$E_F = E[W_F]p = \frac{\frac{1}{2}}{\nu^2\alpha + \delta(\lambda + \alpha)(\lambda + \nu)} \left( \nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha) + \frac{\lambda\nu\alpha}{\lambda + \alpha} \left( 1 + \frac{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right) \right) \times \frac{(\lambda + \alpha)^2(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)) + \lambda\nu(\nu\alpha + (\lambda + \alpha)(\delta + \alpha))}{(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha))^2 - \lambda\delta(\lambda + \alpha)^2}, \tag{1.4.20}$$

$$E_E = E[W_E](1 - p) = \lambda\delta \frac{(\lambda + \alpha)^2(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)) + \lambda\nu(\nu\alpha + (\lambda + \alpha)(\delta + \alpha))}{(\nu^2\alpha + \delta(\lambda + \alpha)(\lambda + \nu))((\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha))^2 - \lambda\delta(\lambda + \alpha)^2)}. \tag{1.4.21}$$

En las Figuras 1.4.5 y 1.4.6 se representan los valores medios  $E_F$  y  $E_E$  frente a la intensidad  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , para los tres casos que fueron utilizados en la Figura 1.4.4.

Utilizando (1.3.4), (1.3.5), (1.4.20) y (1.4.21) es sencillo verificar la validez de la fórmula de Little  $M_1 = \lambda E[W]$ .

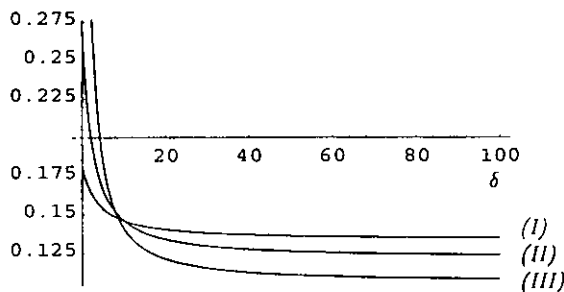


Figura 1.4.5. Valor medio  $E_F$

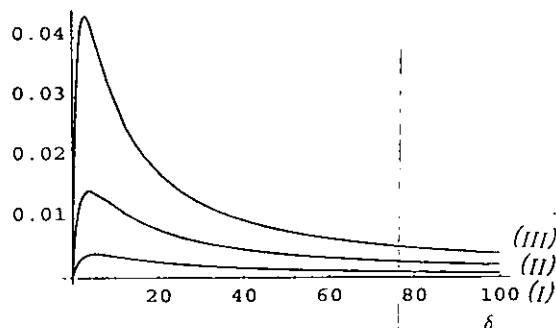


Figura 1.4.6. Valor medio  $E_E$

La transformada de Laplace-Stieltjes del par  $(W^0, W^1)$  que ha sido obtenida en el Teorema 1.4.1 puede ser invertida por inspección. En el siguiente resultado se presenta la función de densidad del par  $(W^0, \tilde{W}^1)$ , donde  $\tilde{W}^1$  es definida como la diferencia entre  $W^1$  y el tiempo de servicio del cliente marcado.

**Corolario 1.4.2.** La función de densidad del par  $(W^0, \tilde{W}^1)$  está dada por

$$\begin{aligned}
 f_{(W^0, \tilde{W}^1)}(x, y) &= M_0^0 u_0(x, y) \\
 &+ \delta(x)\delta(y) \frac{\alpha}{y} P_{00} e^{-(\lambda+\alpha)x - (\lambda+\nu+\delta)y} I_0 \left( 2 \left( \lambda\nu xy \left( 1 + \frac{\alpha(\lambda+\alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda+\alpha)} \right) \right)^{1/2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} i \left( \frac{\lambda}{\delta} \right)^{i/2} I_i \left( 2y\sqrt{\lambda\delta} \right) \\
 &+ \delta(y) \frac{\sqrt{\lambda\delta}}{y} \frac{\nu\alpha + \delta(\lambda+\alpha)}{\nu^2\alpha + \delta(\lambda+\nu)(\lambda+\alpha)} e^{-(\lambda+\nu+\delta)y} I_1 \left( 2y\sqrt{\lambda\delta} \right) \\
 &\times \left( u_0(x) + \delta(x) e^{-(\lambda+\alpha)x} \left( \frac{\lambda\nu y}{x} \left( 1 + \frac{\alpha(\lambda+\alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda+\alpha)} \right) \right)^{1/2} I_1 \left( 2 \left( \lambda\nu xy \left( 1 + \frac{\alpha(\lambda+\alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda+\alpha)} \right) \right)^{1/2} \right) \right), \tag{1.4.22}
 \end{aligned}$$

donde  $u_0(x)$  (respectivamente,  $u_0(x, y)$ ) denota la función de impulso unitario unidimensional (respectivamente, bidimensional) y  $\delta(\cdot)$  representa la función de Dirac.

La demostración del corolario anterior es estándar y por esta causa se omite. Sin embargo, debe observarse que los dos primeros sumandos de (1.4.22) corresponden al conjunto de sucesos  $\{\xi_{1j}^1 < \tau_{j+1}\}_{j=0}^{\infty}$ .

mientras que el sumando restante está asociado a los casos  $\{\xi_{1j}^1 \geq \tau_{j+1}\}_{j=0}^{\infty}$ .

Para concluir esta sección, se presentan algunos resultados para el sistema M/M/1 con llegadas negativas y línea de espera clásica.

**Corolario 1.4.3.** Si el proceso  $X$  asociado al sistema M/M/1 con llegadas negativas y línea de espera es ergódico, entonces la transformada de Laplace-Stieltjes del tiempo de permanencia en el sistema de un cliente marcado,  $W$ , está dada por

$$\phi(\omega) = E[e^{-\omega W}] = \frac{\nu(1-\rho)}{\nu + \delta\rho} \left( \frac{2\delta\nu}{(\omega + \nu)(2\delta - B(\omega))} + \frac{B(\omega)}{2\nu(1-\rho)} \right),$$

donde

$$B(\omega) = A(\omega) - \sqrt{(A(\omega))^2 - 4\lambda\delta} \quad \text{y} \quad A(\omega) = \omega + \lambda + \delta + \nu(1-\rho),$$

para  $\text{Re}(\omega) \geq 0$ .

La probabilidad de que el cliente marcado no sea expulsado es

$$p = \frac{\nu}{\nu + \delta\rho}.$$

La demostración del anterior resultado es omitida puesto que es suficiente tener en cuenta que el modelo M/M/1 con llegadas negativas y línea de espera corresponde al caso límite  $\alpha \rightarrow \infty$  del modelo con reintentos. Del mismo modo se puede deducir la expresión del primer momento de  $W$ . Desde (1.4.20) y (1.4.21) se deduce que  $E[W]$  puede ser expresado en términos de  $E[W] = E[W_F]p + E[W_E](1-p)$ , donde

$$E[W_F] = \frac{1}{\nu} \left( 1 + \frac{\nu\rho}{(1-\rho)(\nu + \delta(1-\rho))} \right),$$

$$E[W_E] = \frac{1}{\nu + \delta(1-\rho)}.$$

Finalmente, la función de densidad de la variable aleatoria  $\tilde{W}$ , definida como la diferencia entre  $W$  y el tiempo de servicio del cliente marcado, viene dada por la siguiente expresión

$$f_{\tilde{W}}(y) = \frac{e^{-(\lambda + \delta + \nu(1-\rho))y}}{y} \left( \frac{\nu(1-\rho)}{\nu + \delta\rho} \left( u_0(y) + \delta(y) \sum_{i=1}^{\infty} i \left( \frac{\lambda}{\delta} \right)^{i/2} I_i(2y\sqrt{\lambda\delta}) \right) + \delta(y) \frac{\sqrt{\lambda\delta}}{\nu + \delta\rho} I_1(2y\sqrt{\lambda\delta}) \right).$$

### 1.5 Período de ocupación del sistema

Un período de ocupación del sistema se define como el intervalo de tiempo comprendido entre el instante en que un cliente original accede al sistema vacío y el primer instante en que finaliza un servicio volviendo a dejar el sistema vacío. Las principales características del período de ocupación del sistema están representadas por las siguientes variables aleatorias:

- $L$  = longitud del período de ocupación del sistema,
- $L^0$  = longitud total de los períodos en los que el servicio se mantiene vacío durante  $(0, L]$ ,
- $L^1$  = longitud total de los períodos en los que el servicio se mantiene ocupado durante  $(0, L]$ ,
- $N^n$  = número de llegadas negativas ocurridas durante  $(0, L]$ ,
- $N^s$  = número de clientes servidos durante  $(0, L]$ .

Esta sección está dedicada al estudio de la distribución conjunta del vector aleatorio  $(L^0, L^1, N^n, N^s)$  y al cálculo de sus correspondientes momentos factoriales. En primer lugar se considera el modelo con disciplina constante de reintento,  $\mu = 0, \alpha > 0$ . En este caso particular, se obtienen la función generatriz del vector aleatorio  $(L^0, L^1, N^n, N^s)$  y los primeros momentos de las variables que lo forman. Esquemas recursivos estables para la computación de momentos de orden superior son también propuestos. Posteriormente, son discutidas las principales diferencias con el caso  $\mu > 0$  y calculadas las expresiones de los momentos de  $L^0, L^1, N^n$  y  $N^s$ , cuando éstos existen.

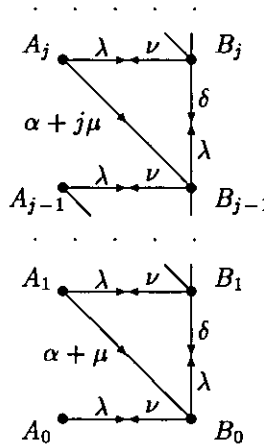


Figura 1.5.1. Espacio de estados y transiciones

A continuación se introducen algunas definiciones y notaciones de utilidad en lo sucesivo. Por conveniencia, se denotan los estados  $(0, j)$  por  $A_j$  y  $(1, j)$  por  $B_j$ , para  $j \geq 0$ . El instante de primer paso desde el estado  $a$  al estado  $b$  será denotado por  $T_{ab}$ . Sea  $T_{ab}^i$  la cantidad total de tiempo en  $(0, T_{ab})$  durante la cual el servidor está en estado  $i, i \in \{0, 1\}$ . Finalmente,  $N_{ab}^n$  y  $N_{ab}^s$  denotarán el número de llegadas negativas y el número de clientes servidos durante  $T_{ab}$ , respectivamente. Con las definiciones anteriores, es claro que  $L^i = T_{B_0 A_0}^i, i \in \{0, 1\}, N^n = N_{B_0 A_0}^n$  y  $N^s = N_{B_0 A_0}^s$ .

Sea  $\phi_{ab}(\theta, \omega, x, y)$  la función generatriz del vector aleatorio  $(T_{ab}^0, T_{ab}^1, N_{ab}^n, N_{ab}^s)$  definida de la siguiente forma

$$\phi_{ab}(\theta, \omega, x, y) = E \left[ \exp(-\theta T_{ab}^0 - \omega T_{ab}^1) x^{N_{ab}^n} y^{N_{ab}^s} \right], \quad (1.5.1)$$

para  $Re(\theta) \geq 0$ ,  $Re(\omega) \geq 0$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$ .

La distribución conjunta de  $(L^0, L^1, N^n, N^s)$  es determinada en el siguiente resultado en términos de su correspondiente función generatriz  $\phi_{B_0A_0}(\theta, \omega, x, y)$ .

**Teorema 1.5.1.** Si  $\mu = 0$ , entonces la función  $\phi_{B_0A_0}(\theta, \omega, x, y)$  viene dada por

$$\phi_{B_0A_0}(\theta, \omega, x, y) = \nu y (\omega + \nu + \lambda (1 - \phi_{B_1B_0}(\theta, \omega, x, y)))^{-1}, \quad (1.5.2)$$

donde

$$\phi_{B_1B_0}(\theta, \omega, x, y) = \frac{1}{2\lambda} \left( \varphi(\theta, \omega, y) - \sqrt{(\varphi(\theta, \omega, y))^2 - 4\lambda \left( \delta x + \frac{\nu \alpha y}{\theta + \lambda + \alpha} \right)} \right), \quad (1.5.3)$$

y  $\varphi(\theta, \omega, y)$  fue dada en (1.4.12), para  $Re(\theta) \geq 0$ ,  $Re(\omega) \geq 0$ ,  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$ .

Si, adicionalmente, se supone que  $\gamma < 1$ , entonces

i) Los valores medios de las variables aleatorias  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  están dados por

$$E[L^0] = \frac{\lambda}{\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)}, \quad E[L^1] = \frac{\nu \alpha + \delta(\lambda + \alpha)}{\nu(\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha))},$$

$$E[N^n] = \frac{\lambda \delta(\lambda + \alpha)}{\nu(\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha))}, \quad E[N^s] = \nu E[L^1]. \quad (1.5.4)$$

ii) Las covarianzas de los pares  $(L^0, L^1)$ ,  $(N^n, N^s)$  y  $(L^1, N^s)$  son

$$Cov(L^0, L^1) = \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu(\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha))^2} \left( \delta + \frac{2\nu(\nu \alpha + \delta(\lambda + \alpha))}{\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right), \quad (1.5.5)$$

$$Cov(N^n, N^s) = \frac{\delta}{\nu} \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right)^2 \left( 1 + \frac{\nu(\nu \alpha + (\lambda + \alpha)(\lambda + 2\alpha + \delta))}{(\lambda + \alpha)(\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha))} \right), \quad (1.5.6)$$

$$Cov(L^1, N^s) = \frac{\lambda}{\nu} \left( \frac{\lambda + \alpha}{\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right)^2 \left( \delta + \frac{2\nu(\nu \alpha + \delta(\lambda + \alpha))}{\nu \alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right). \quad (1.5.7)$$

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad se asume que en el instante  $t = 0$  comienza un período de ocupación. Condicionando por la primera transición del proceso X se tiene

$$\phi_{B_0 A_0}(\theta, \omega, x, y) = \frac{\nu y}{\omega + \lambda + \nu} + \frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu} \phi_{B_1 A_0}(\theta, \omega, x, y). \quad (1.5.8)$$

Para deducir (1.5.8) debe tenerse en cuenta que una transición directa desde el estado  $B_0$  al estado  $A_0$  ocurre con probabilidad  $\nu(\lambda + \nu)^{-1}$ . En tal caso se tienen  $L^0 = 0$ ,  $N^n = 0$ ,  $N^s = 1$  y  $L^1$  está exponencialmente distribuida con intensidad  $\lambda + \nu$ . Como consecuencia, la esperanza condicional cuando la primera transición conduce al estado  $A_0$  es

$$\frac{\nu y}{\omega + \lambda + \nu}.$$

Por otra parte, cuando la primera transición del proceso corresponde a la llegada de un cliente original, la esperanza condicional es

$$\frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu} \phi_{B_1 A_0}(\theta, \omega, x, y).$$

Los anteriores argumentos pueden ser extendidos, con la ayuda de la *Figura 1.5.1*, dando lugar al conjunto de ecuaciones que se propone a continuación.

$$\phi_{B_1 A_0}(\theta, \omega, x, y) = \phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y) \phi_{B_0 A_0}(\theta, \omega, x, y), \quad (1.5.9)$$

$$\phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y) = \frac{\delta x}{\omega + \lambda + \nu + \delta} + \frac{\nu y}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \phi_{A_1 B_0}(\theta, \omega, x, y) + \frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \phi_{B_2 B_0}(\theta, \omega, x, y), \quad (1.5.10)$$

$$\phi_{B_2 B_0}(\theta, \omega, x, y) = \phi_{B_2 B_1}(\theta, \omega, x, y) \phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y),$$

$$\phi_{A_1 B_0}(\theta, \omega, x, y) = \frac{\alpha}{\theta + \lambda + \alpha} + \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha} \phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y). \quad (1.5.11)$$

Gracias a la homogeneidad de las transiciones desde los estados  $B_{i+1}$  a los estados  $B_i$ ,  $i \geq 0$ , es posible expresar  $T_{B_2 B_0}$  en los términos  $T_{B_2 B_0} = T_{B_2 B_1} + T_{B_1 B_0}$ , donde  $T_{B_2 B_1}$  y  $T_{B_1 B_0}$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como  $T_{B_1 B_0}$ . Por ello, se tiene la relación

$$\phi_{B_2 B_0}(\theta, \omega, x, y) = (\phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y))^2. \quad (1.5.12)$$

La solución del sistema de ecuaciones (1.5.8) – (1.5.12) conduce a la expresión (1.5.2). Además, la función  $\phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y)$  satisface

$$\frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu + \delta} (\phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y))^2 + \left( \frac{\lambda \nu y}{(\theta + \lambda + \alpha)(\omega + \lambda + \nu + \delta)} - 1 \right) \phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y) + \frac{\delta x}{\omega + \lambda + \nu + \delta} + \frac{\nu \alpha y}{(\theta + \lambda + \alpha)(\omega + \lambda + \nu + \delta)} = 0.$$

La función  $\phi_{B_1 B_0}(\theta, \omega, x, y)$  será entonces una de las dos siguientes funciones

$$z_0(\theta, \omega, x, y) = \frac{1}{2\lambda} \left( \varphi(\theta, \omega, y) + \sqrt{(\varphi(\theta, \omega, y))^2 - 4\lambda \left( \delta x + \frac{\nu \alpha y}{\theta + \lambda + \alpha} \right)} \right),$$

$$z_1(\theta, \omega, x, y) = \frac{1}{2\lambda} \left( \varphi(\theta, \omega, y) - \sqrt{(\varphi(\theta, \omega, y))^2 - 4\lambda \left( \delta x + \frac{\nu \alpha y}{\theta + \lambda + \alpha} \right)} \right).$$

Dado que  $|z_0(0, 0, 1, 1)| \leq 1$  no se satisface, la función  $z_0(\theta, \omega, x, y)$  no puede corresponder a la función generatriz de ningún vector aleatorio cuya distribución de probabilidad sea propia. Por otra parte, haciendo uso de argumentos sencillos es posible establecer las desigualdades:

$$\frac{\lambda \nu y}{(\theta + \lambda + \alpha)(\omega + \lambda + \nu + \delta)} \leq 1,$$

$$\frac{4\lambda}{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2} \left( \delta x + \frac{\nu \alpha y}{\theta + \lambda + \alpha} \right) \leq \left( 1 - \frac{\lambda \nu y}{(\theta + \lambda + \alpha)(\omega + \lambda + \nu + \delta)} \right)^2,$$

para  $Re(\theta) \geq 0$ ,  $Re(\omega) \geq 0$ ,  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$ . Desde ellas se deduce, tras algunos cálculos elementales, que  $|z_1(\theta, \omega, x, y)| \leq 1$ . Como consecuencia, la solución propia de la ecuación de segundo grado conduce a la expresión (1.5.3).

Derivando la expresión (1.5.2) se obtienen los valores medios de las variables aleatorias  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  dados en el apartado *i*). Para deducir las expresiones (1.5.5) – (1.5.7) se calculan las correspondientes derivadas de las funciones  $\phi_{ab}(\theta, \omega, 1, 1)$  dadas en (1.5.8) – (1.5.12) con respecto a  $\theta$  y  $\omega$ , en el punto  $\theta = \omega = 0$ . Se logran entonces las relaciones

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{(0,1)} = \frac{\lambda}{(\lambda + \nu)^2} \hat{T}_{B_1 A_0}^0 + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_1 A_0}^{(0,1)},$$

$$\hat{T}_{B_1 A_0}^{(0,1)} = \hat{T}_{B_1 B_0}^{(0,1)} + \hat{T}_{B_1 B_0}^0 \hat{T}_{B_0 A_0}^1 + \hat{T}_{B_1 B_0}^1 \hat{T}_{B_0 A_0}^0 + \hat{T}_{B_0 A_0}^{(0,1)},$$

$$\hat{T}_{B_1 B_0}^{(0,1)} = \frac{1}{(\lambda + \nu + \delta)^2} (\lambda \hat{T}_{B_2 B_0}^0 + \nu \hat{T}_{A_1 B_0}^0) + \frac{1}{\lambda + \nu + \delta} (\lambda \hat{T}_{B_2 B_0}^{(0,1)} + \nu \hat{T}_{A_1 B_0}^{(0,1)}),$$

$$\hat{T}_{B_2 B_0}^{(0,1)} = 2 (\hat{T}_{B_1 B_0}^0 \hat{T}_{B_1 B_0}^1 + \hat{T}_{B_1 B_0}^{(0,1)}),$$

$$\hat{T}_{A_1 B_0}^{(0,1)} = \frac{\lambda}{(\lambda + \alpha)^2} \hat{T}_{B_1 B_0}^1 + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \hat{T}_{B_1 B_0}^{(0,1)}, \quad (1.5.13)$$

donde

$$\hat{T}_{ab}^i = E [T_{ab}^i] \quad \text{y} \quad \hat{T}_{ab}^{(0,1)} = E [T_{ab}^0 T_{ab}^1], \quad i \in \{0, 1\}.$$

Un esquema similar aplicado sobre las transformadas  $\phi_{ab}(\theta, 0, 1, 1)$  y  $\phi_{ab}(0, \omega, 1, 1)$ , conduce a las relaciones

$$\hat{T}_{B_1 A_0}^0 = \frac{\lambda + \nu}{\lambda} E [L^0], \quad \hat{T}_{B_1 B_0}^0 = \frac{\nu}{\lambda} E [L^0], \quad \hat{T}_{B_2 B_0}^0 = \frac{2\nu}{\lambda} E [L^0],$$

$$\hat{T}_{A_1 B_0}^0 = \frac{1}{\lambda + \alpha} (1 + \nu E [L^0]) \quad \text{y} \quad \hat{T}_{B_1 B_0}^1 = \frac{1}{\lambda} (\nu E [L^1] - 1). \quad (1.5.14)$$

A partir de (1.5.13) y (1.5.14) se deduce (1.5.5). Las expresiones para  $Cov(N^n, N^s)$  y  $Cov(L^1, N^s)$  son obtenidas haciendo uso de argumentos paralelos (ver Apéndice 1.B). □

A continuación se desarrolla un esquema recursivo para el cómputo de los momentos de las variables aleatorias  $L^0, L^1, N^n$  y  $N^s$ . El sistema de ecuaciones (1.5.8) – (1.5.12) vuelve a ser el punto de partida. Previamente, se introduce alguna notación. Sean los momentos de orden  $k$  y los momentos factoriales de orden  $k$  de las variables  $\hat{T}_{ab}^{i(k)}$  y  $\hat{N}_{ab}^{r(k)}$ , respectivamente, aquellos denotados como

$$\hat{T}_{ab}^{i(k)} = E [(T_{ab}^i)^k], \quad i \in \{0, 1\}, \quad k \geq 1, \quad a, b \in S,$$

$$\hat{N}_{ab}^{r(k)} = E [(N_{ab}^r) \dots (N_{ab}^r - k + 1)], \quad k \geq 1, \quad a, b \in S,$$

donde el símbolo  $r$  denota  $n$  o  $s$ .

**Teorema 1.5.2.** Si  $\gamma < 1$ , entonces los momentos de las variables  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  satisfacen el siguiente esquema recursivo

$$\hat{T}_{B_0A_0}^{0(k)} = \frac{\lambda}{\nu} \left( \hat{T}_{B_1B_0}^{0(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1B_0}^{0(m)} \hat{T}_{B_0A_0}^{0(k-m)} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.15)$$

$$\hat{T}_{B_1B_0}^{0(k)} = \frac{\lambda + \alpha}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \left( \frac{k\nu}{\lambda + \alpha} \hat{T}_{A_1B_0}^{0(k-1)} + \lambda(1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1B_0}^{0(m)} \hat{T}_{B_1B_0}^{0(k-m)} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.16)$$

$$\hat{T}_{A_1B_0}^{0(k)} = k! \left( \frac{1}{(\lambda + \alpha)^k} + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(k-m)!(\lambda + \alpha)^m} \hat{T}_{B_1B_0}^{0(k-m)} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.17)$$

$$\hat{T}_{B_0A_0}^{1(k)} = \frac{1}{\nu} \left( k \hat{T}_{B_0A_0}^{1(k-1)} + \lambda \left( \hat{T}_{B_1B_0}^{1(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1B_0}^{1(m)} \hat{T}_{B_0A_0}^{1(k-m)} \right) \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.18)$$

$$\hat{T}_{B_1B_0}^{1(k)} = \frac{\lambda + \alpha}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \left( k \hat{T}_{B_1B_0}^{1(k-1)} + \lambda(1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1B_0}^{1(m)} \hat{T}_{B_1B_0}^{1(k-m)} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.19)$$

$$\hat{N}_{B_0A_0}^{n(k)} = \frac{\lambda}{\nu} \left( \hat{N}_{B_1B_0}^{n(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1B_0}^{n(m)} \hat{N}_{B_0A_0}^{n(k-m)} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.20)$$

$$\hat{N}_{B_1B_0}^{n(k)} = \frac{\lambda + \alpha}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \left( \delta_{1k} + \lambda(1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1B_0}^{n(m)} \hat{N}_{B_1B_0}^{n(k-m)} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.21)$$

$$\hat{N}_{B_0A_0}^{s(k)} = \delta_{1k} + \frac{\lambda}{\nu} \left( \hat{N}_{B_1B_0}^{s(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1B_0}^{s(m)} \hat{N}_{B_0A_0}^{s(k-m)} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.22)$$

$$\hat{N}_{B_1B_0}^{s(1)} = \frac{\nu(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)}, \quad (1.5.23)$$

$$\hat{N}_{B_1B_0}^{s(k)} = \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \left( \frac{k\nu}{\lambda + \alpha} \hat{N}_{B_1B_0}^{s(k-1)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1B_0}^{s(m)} \hat{N}_{B_1B_0}^{s(k-m)} \right), \quad k \geq 2, \quad (1.5.24)$$

donde  $\hat{T}_{ab}^{i(0)} = 1$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , y  $\hat{N}_{ab}^{n(0)} = \hat{N}_{ab}^{s(0)} = 1$ .

**Demostración.** Para establecer la validez de (1.5.15) – (1.5.17) se considera la particularización  $\omega = 0$  y  $x = y = 1$  sobre el conjunto de ecuaciones (1.5.8) – (1.5.12) con la que se anulan las variables aleatorias  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$ . Después de sucesivas derivadas y sustituciones, se obtienen las siguientes relaciones recurrentes para  $\hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)}$ .

$$\begin{aligned} \hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)} &= \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_1 A_0}^{0(k)}, \quad k \geq 1, \\ \hat{T}_{B_1 A_0}^{0(k)} &= \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k)} + \hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{n=1}^{k-1} \binom{k}{n} \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(n)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k-n)}, \quad k \geq 1, \\ \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k)} &= \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{A_1 B_0}^{0(k)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{B_2 B_0}^{0(k)}, \quad k \geq 1, \\ \hat{T}_{B_2 B_0}^{0(k)} &= 2\hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{n=1}^{k-1} \binom{k}{n} \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(n)} \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k-n)}, \quad k \geq 1, \\ \hat{T}_{A_1 B_0}^{0(k)} &= \frac{k}{\lambda + \alpha} \hat{T}_{A_1 B_0}^{0(k-1)} + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k)}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{1.5.25}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, el sistema (1.5.25) conduce a las expresiones (1.5.15) – (1.5.17). Empleando argumentos similares son obtenidas las fórmulas (1.5.18) – (1.5.24) para los momentos de las variables  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  (ver Apéndice 1.B).

□

En el teorema anterior se ha expresado sistemáticamente el  $k$ -ésimo momento en términos de los momentos de orden  $0, \dots, k - 1$ . Por ello, la existencia del primer momento garantiza la existencia de los momentos de orden superior. Con la finalidad de ilustrar este esquema recursivo se ofrecen las Figuras 1.5.2-1.5.9. En ellas se han representado la media y la varianza de las variables aleatorias  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  como funciones de la intensidad  $\delta \in \mathbb{R}^+$ . Se han considerado cuatro casos:

- (I)  $\lambda = 5.25$ ,  $\alpha = 3.1$  y  $\gamma = -2.0$ ,
- (II)  $\lambda = 5.25$ ,  $\alpha = 3.1$  y  $\gamma = -0.5$ ,
- (III)  $\lambda = 5.25$ ,  $\alpha = 3.1$  y  $\gamma = 0.3$ ,
- (IV)  $\lambda = 5.25$ ,  $\alpha = 3.1$  y  $\gamma = 0.5$ .

El valor de la intensidad de servicio  $\nu$  es elegido para fijar el parámetro de ergodicidad,  $\gamma$ , en el nivel deseado. Esta situación explica la existencia de la asíntota vertical que puede observarse en todas las gráficas.

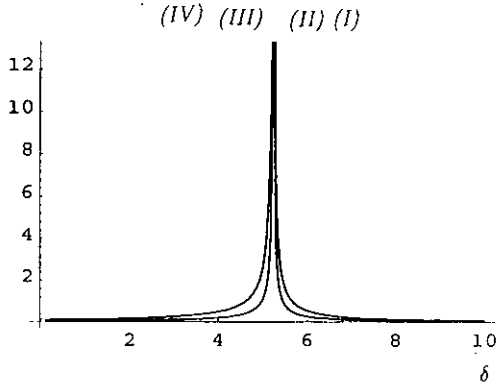


Figura 1.5.2. Valor esperado de  $L^0$

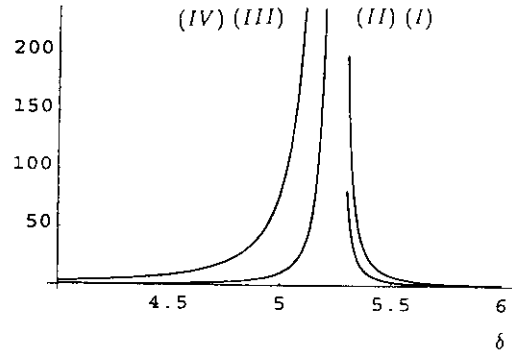


Figura 1.5.3. Varianza de  $L^0$

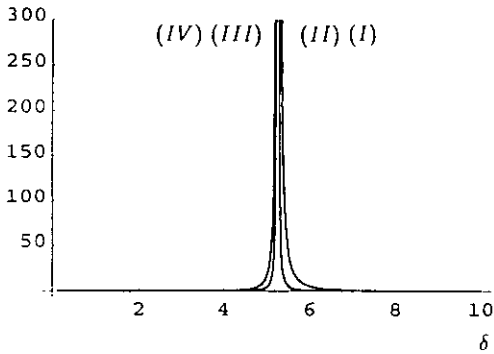


Figura 1.5.4. Valor esperado de  $L^1$

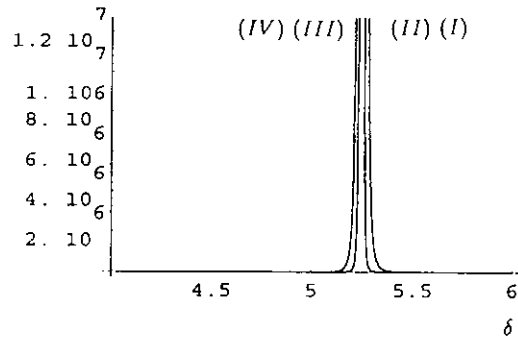


Figura 1.5.5. Varianza de  $L^1$

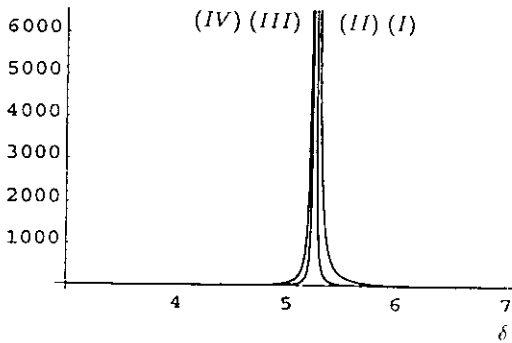


Figura 1.5.6. Valor esperado de  $N^n$

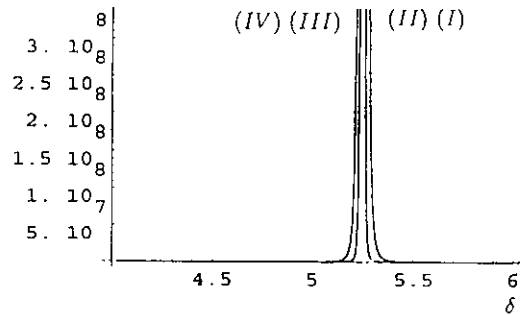


Figura 1.5.7. Varianza de  $N^n$

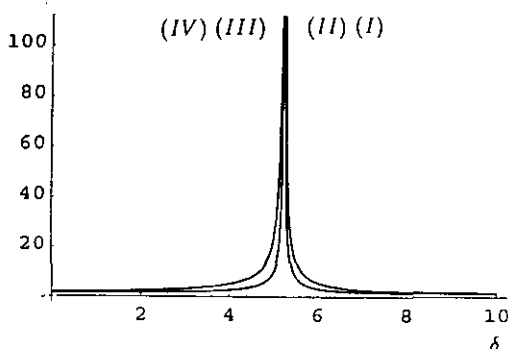


Figura 1.5.8. Valor esperado de  $N^s$

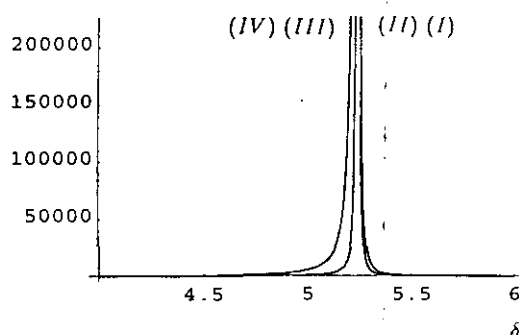


Figura 1.5.9. Varianza de  $N^s$

El caso  $\mu > 0$  es estudiado a continuación. Mediante un razonamiento semejante al utilizado en el caso  $\mu = 0$  se deduce que las funciones generatrices  $\phi_{ab}(\theta, \omega, x, y)$  verifican el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \phi_{B_i B_{i-1}}(\theta, \omega, x, y) &= \frac{\delta x}{\omega + \lambda + \nu + \delta} + \frac{\nu y}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \phi_{A_i B_{i-1}}(\theta, \omega, x, y) \\ &+ \frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \phi_{B_{i+1} B_{i-1}}(\theta, \omega, x, y), \quad i \geq 1, \end{aligned} \tag{1.5.26}$$

$$\phi_{B_{i+1} B_{i-1}}(\theta, \omega, x, y) = \phi_{B_{i+1} B_i}(\theta, \omega, x, y) \phi_{B_i B_{i-1}}(\theta, \omega, x, y), \quad i \geq 1, \tag{1.5.27}$$

$$\phi_{A_i B_{i-1}}(\theta, \omega, x, y) = \frac{\alpha + i\mu}{\theta + \lambda + \alpha + i\mu} + \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + i\mu} \phi_{B_i B_{i-1}}(\theta, \omega, x, y), \quad i \geq 1. \tag{1.5.28}$$

Estas relaciones unidas a (1.5.8) y (1.5.9) forman el sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de las variables aleatorias  $L^0, L^1, N^n$  y  $N^s$ , en el caso  $\mu > 0$ . La diferencia con el caso del modelo con disciplina constante de reintento está en la pérdida de homogeneidad en las transiciones desde el estado  $B_{i+1}$  al estado  $B_i$ , para  $i \geq 0$ . La principal consecuencia consiste en que el sistema finito utilizado en el caso  $\mu = 0$ , (1.5.8) – (1.5.12), se ve sustituido por un sistema infinito de ecuaciones que, desafortunadamente, imposibilita determinar explícitamente la expresión de  $\phi_{B_0 A_0}(\theta, \omega, x, y)$ . Alternativamente pueden derivarse relaciones que permiten calcular los momentos de las variables aleatorias  $L^0, L^1, N^n$  y  $N^s$ .

En primer lugar se desarrolla un esquema recursivo para la obtención de los momentos de la variable aleatoria  $L^0$ , cuando tales momentos existen.

Si se calcula la derivada del conjunto de ecuaciones (1.5.8), (1.5.9), (1.5.26) – (1.5.28) respecto de  $\theta$  en el punto  $(\theta, \omega, x, y) = (1, 1, 0, 0)$  y se multiplica por  $(-1)^k$ , se deducen las relaciones

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_1 A_0}^{0(k)}, \quad k \geq 1, \quad (1.5.29)$$

$$\hat{T}_{B_1 A_0}^{0(k)} = \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k)} + \hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(m)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad (1.5.30)$$

$$\hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{0(k)} = \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{0(k)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{0(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.5.31)$$

$$\hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{0(k)} = \frac{k}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{0(k-1)} + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{0(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.5.32)$$

$$\hat{T}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{0(k)} = \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{0(k)} + \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{0(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{0(m)} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{0(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \quad (1.5.33)$$

Desde (1.5.29) y (1.5.30) se tiene que

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)} = \frac{\lambda}{\nu} \left( \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(m)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k-m)} \right), \quad k \geq 1. \quad (1.5.34)$$

Como se observa, todos los valores medios  $\{\hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{0(j)} / i \geq 1, 0 \leq j \leq k\}$ ,  $k \geq 1$ , se ven involucrados en la búsqueda de la expresión de  $\hat{T}_{B_1 B_0}^{0(k)}$ . A partir de (1.5.31) – (1.5.33) se deduce la relación recursiva

$$\hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{0(k)} = \frac{i + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}}{i + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}} \rho^{-1} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{0(k)} - \frac{k\nu}{\lambda(\lambda + \alpha + i\mu)} \hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{0(k-1)} - (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{0(m)} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{0(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.5.35)$$

donde  $\hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{0(k)}$ , para  $k \geq 1$  y  $i \geq 1$ , es calculado de forma recurrente de acuerdo con (1.5.32) y considerando  $\hat{T}_{A_0 B_0}^{0(0)} = 1$ . A partir de (1.5.34) y (1.5.35), tras algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene el siguiente procedimiento para calcular el momento de orden  $k$  de la variable aleatoria  $T_{B_0 A_0}^0$ .

**Esquema recursivo para el cálculo de  $\hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)}$ .** El momento de orden  $k$  de la variable aleatoria  $L^0$ , si existe, viene dado por

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k)} = \frac{\lambda}{\nu} (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{0(m)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{0(k-m)}$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{k}{\lambda + \alpha + (i+1)\mu} \hat{T}_{A_{i+1} B_i}^{0(k-1)} + \frac{\lambda}{\nu} (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_{i+2} B_{i+1}}^{0(m)} \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{0(k-m)} \right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{i+1}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_{i+1}} \rho^{i+1}, \quad k \geq 1, \quad (1.5.36)$$

donde  $\hat{T}_{A_{i+1} B_i}^{0(k)}$  y  $\hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{0(k)}$  están dadas por (1.5.32) y (1.5.35), respectivamente, y  $\hat{T}_{ab}^{0(0)} = 1$ .

Razonamientos análogos al propuesto permiten deducir los siguientes esquemas recursivos para el cálculo de los momentos de  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  (ver Apéndice 1.C).

**Esquema recursivo para el cálculo de  $\hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k)}$ .** El momento de orden  $k$  de la variable aleatoria  $L^1$ , si existe, viene dado por

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k)} = \frac{1}{\nu} \left( k \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-1)} + \lambda (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(m)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-m)} \right)$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \left( k \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{1(k-1)} + \lambda (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_{i+2} B_{i+1}}^{1(m)} \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{1(k-m)} \right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{i+1}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_{i+1}} \rho^{i+1}, \quad k \geq 1, \quad (1.5.37)$$

donde  $\hat{T}_{ab}^{1(0)} = 1$  y

$$\hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{1(k)} = \frac{i + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}}{i + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}} \rho^{-1} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k)} - \frac{k}{\lambda} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k-1)} - (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{1(m)} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \quad (1.5.38)$$

**Esquema recursivo para el cálculo de  $\hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k)}$ .** El momento factorial de orden  $k$  de la variable aleatoria  $N^n$ , si existe, viene dado por

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k)} = \frac{1}{\nu} \left( \lambda (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(m)} \hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k-m)} \right)$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \left( \delta \delta_{1k} + \lambda(1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_{i+2}B_{i+1}}^{n(m)} \hat{N}_{B_{i+1}B_i}^{n(k-m)} \right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda+\alpha}{\mu}\right)_{i+1}}{\left(1 + \frac{\alpha+\delta\rho}{\mu}\right)_{i+1}} \rho^{i+1}, \quad k \geq 1, \quad (1.5.39)$$

donde  $\hat{N}_{ab}^{n(0)} = 1$  y

$$\hat{N}_{B_{i+1}B_i}^{n(k)} = \frac{i + \frac{\alpha+\delta\rho}{\mu}}{i + \frac{\lambda+\alpha}{\mu}} \rho^{-1} \hat{N}_{B_iB_{i-1}}^{n(k)} - \frac{\delta}{\lambda} \delta_{1k} - (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_{i+1}B_i}^{n(m)} \hat{N}_{B_iB_{i-1}}^{n(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \quad (1.5.40)$$

**Esquema recursivo para el cálculo de  $\hat{N}_{B_0A_0}^{s(k)}$ .** El momento factorial de orden  $k$  de la variable aleatoria  $N^s$ , si existe, viene dado por

$$\begin{aligned} \hat{N}_{B_0A_0}^{s(k)} &= \delta_{1k} + \frac{1}{\nu} \left( \lambda(1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1B_0}^{s(m)} \hat{N}_{B_0A_0}^{s(k-m)} \right. \\ &\left. + \sum_{i=0}^{\infty} \left( k\nu \hat{N}_{A_{i+1}B_i}^{s(k-1)} + \lambda(1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_{i+2}B_{i+1}}^{s(m)} \hat{N}_{B_{i+1}B_i}^{s(k-m)} \right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda+\alpha}{\mu}\right)_{i+1}}{\left(1 + \frac{\alpha+\delta\rho}{\mu}\right)_{i+1}} \rho^{i+1} \right), \quad k \geq 1, \quad (1.5.41) \end{aligned}$$

donde  $\hat{N}_{ab}^{s(0)} = 1$  y

$$\hat{N}_{A_iB_{i-1}}^{s(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{N}_{B_iB_{i-1}}^{s(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.5.42)$$

$$\hat{N}_{B_{i+1}B_i}^{s(k)} = \frac{i + \frac{\alpha+\delta\rho}{\mu}}{i + \frac{\lambda+\alpha}{\mu}} \rho^{-1} \hat{N}_{B_iB_{i-1}}^{s(k)} - \frac{k\nu}{\lambda} \hat{N}_{A_iB_{i-1}}^{s(k-1)} - (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_{i+1}B_i}^{s(m)} \hat{N}_{B_iB_{i-1}}^{s(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \quad (1.5.43)$$

A continuación se propone una condición suficiente que asegura la existencia de los momentos  $\hat{T}_{B_0A_0}^{0(k)}$ ,  $\hat{T}_{B_0A_0}^{1(k)}$ ,  $\hat{N}_{B_0A_0}^{n(k)}$  y  $\hat{N}_{B_0A_0}^{s(k)}$ , para  $k \geq 0$ , en el caso  $\mu > 0$ .

**Proposición 1.5.3.** Una condición suficiente que asegura la existencia de todos los momentos de las variables aleatorias  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$ , en el caso  $\mu > 0$ , es

$$\frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \alpha^*)}{\nu\alpha^*} < 1,$$

donde  $\alpha^* = \max(\alpha, \mu)$ .

**Demostración.** Se considera la sincronización entre el modelo M/M/1 con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento ( $\alpha \geq 0, \mu > 0$ ) bajo consideración y otro modelo M/M/1 con llegadas negativas

y disciplina constante ( $\alpha^* = \max(\alpha, \mu)$ ), de modo que en la  $n$ -ésima visita,  $n \geq 1$ , al estado  $(i, j) \in S$  se tienen las mismas realizaciones de las variables aleatorias asociadas a los tiempos entre dos llegadas consecutivas de clientes originales, a los tiempos entre dos llegadas negativas sucesivas y a los tiempos de servicio. Entonces, se tiene

$$P(T_{B_0A_0}^* \leq x) \leq P(T_{B_0A_0} \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde  $T_{B_0A_0}$  y  $T_{B_0A_0}^*$  denotan las longitudes de los períodos de ocupación en los modelos con disciplinas lineal y constante, respectivamente, descritos con anterioridad. Notando que el momento de orden  $k$  de una variable aleatoria no negativa  $Y$  puede escribirse en los términos

$$E[Y^k] = k \int_0^{+\infty} x^{k-1} P(Y > x) dx, \quad k \geq 0,$$

se tiene que  $E[(T_{B_0A_0})^k] \leq E[(T_{B_0A_0}^*)^k]$ ,  $k \geq 0$ . Entonces, si el modelo con disciplina constante de reintento es ergódico, es decir si se verifica la relación

$$\frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \alpha^*)}{\nu \alpha^*} < 1,$$

se asegura que  $E[(T_{B_0A_0})^k] < \infty$ ,  $k \geq 0$ . Por ello, se tienen  $E[(T_{B_0A_0}^0)^k] < \infty$  y  $E[(T_{B_0A_0}^1)^k] < \infty$ , para cualquier orden  $k \geq 0$ . La existencia de los momentos  $E[(N_{B_0A_0}^0)^k]$  y  $E[(N_{B_0A_0}^1)^k]$ , para  $k \geq 0$ , se demuestra empleando razonamientos análogos.

□

La condición de ergodicidad en el caso  $\mu > 0$  asegura la existencia de los valores medios de las variables aleatorias  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$ , cuyas expresiones son recogidas en el siguiente resultado.

**Corolario 1.5.4.** Si  $\mu > 0$  y  $\rho < 1$ , entonces los primeros momentos de las variables  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  están dados por

$$E[L^0] = \frac{1}{\lambda + \alpha} \left( F \left( 1, \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) - 1 \right), \quad (1.5.44)$$

$$E[L^1] = \frac{1}{\nu} F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right), \quad (1.5.45)$$

$$E[N^n] = \frac{\delta}{\nu} \left( F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) - 1 \right), \quad (1.5.46)$$

$$E[N^s] = \nu E[L^1]. \quad (1.5.47)$$

**Demostración.** Los valores esperados de las componentes del vector aleatorio  $(L^0, L^1, N^n, N^s)$  son

obtenidos de forma sencilla a través de la particularización al caso  $k = 1$  de las expresiones (1.5.35) – (1.5.43). La aplicación del test del cociente asegura que la condición  $\rho < 1$  es suficiente para la convergencia de la serie hipergeométrica y, consecuentemente, para la existencia de  $E[L^0]$ ,  $E[L^1]$ ,  $E[N^n]$  y  $E[N^s]$ .

□

Para finalizar esta sección, a continuación se dan las expresiones de las covarianzas  $Cov(L^0, L^1)$  y  $Cov(N^n, N^s)$  en el caso  $\mu > 0$  (ver Apéndice 1.D).

i) Si  $\rho < 1$  y  $Cov(L^0, L^1)$  es finita, entonces

$$Cov(L^0, L^1) = E[L^0]E[L^1] + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \hat{T}_{B_i, B_{i-1}}^0 + \lambda \left( \hat{T}_{B_{i+1}, B_i}^1 \hat{T}_{B_i, B_{i-1}}^1 + \hat{T}_{B_i, B_{i-1}}^0 \hat{T}_{B_{i+1}, B_i}^1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\nu}{(\lambda + \alpha + i\mu)^2} \hat{T}_{B_i, B_{i-1}}^1 \right) \right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_i}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_i} \rho^i, \quad (1.5.48)$$

donde  $E[L^0]$  y  $E[L^1]$  fueron dadas en el Corolario 1.5.4 y  $\hat{T}_{B_{i+1}, B_i}^0$  y  $\hat{T}_{B_{i+1}, B_i}^1$  vienen dados por

$$\hat{T}_{B_{i+1}, B_i}^0 = \frac{\nu}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda + \alpha} \left( F \left( 1, \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) - 1 \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu} (1 - \delta_{0i}) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{i-k-1}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_{i-k}} \rho^{i-k} \right) \frac{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_i}{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_i} \rho^{-i}, \quad (1.5.49)$$

$$\hat{T}_{B_{i+1}, B_i}^1 = \frac{1}{\lambda} \left( F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) - 1 - (1 - \delta_{0i}) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{i-k}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_{i-k}} \rho^{i-k} \right) \frac{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_i}{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_i} \rho^{-i}, \quad (1.5.50)$$

para  $i \geq 0$ .

ii) Si  $\rho < 1$  y  $Cov(N^n, N^s)$  es finita, entonces

$$Cov(N^n, N^s) = E[N^n] (E[N^s] - 1) + \frac{\lambda}{\nu} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\nu}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{N}_{B_i, B_{i-1}}^n \right. \\ \left. + \hat{N}_{B_{i+1}, B_i}^n \hat{N}_{B_i, B_{i-1}}^s + \hat{N}_{B_i, B_{i-1}}^n \hat{N}_{B_{i+1}, B_i}^s \right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_i}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_i} \rho^i, \quad (1.5.51)$$

donde  $E[N^n]$  y  $E[N^s]$  fueron dadas en el Corolario 1.5.4 y  $\hat{N}_{B_{i+1}, B_i}^n$  y  $\hat{N}_{B_{i+1}, B_i}^s$  vienen dados por

$$\hat{N}_{B_{i+1}, B_i}^n = \frac{\delta}{\lambda} \left( F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) - 1 - (1 - \delta_{0i}) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{i-k} \rho^{i-k}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_{i-k}} \frac{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_i \rho^{-i}}{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_i} \right), \quad (1.5.52)$$

$$\hat{N}_{B_{i+1}, B_i}^s = \frac{\nu}{\lambda} \left( F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) - 1 - (1 - \delta_{0i}) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{i-k} \rho^{i-k}}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_{i-k}} \frac{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_i \rho^{-i}}{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_i} \right), \quad (1.5.53)$$

para  $i \geq 0$ .

## 1.6 Cadenas encajadas asociadas a los instantes de finalización del servicio y de expulsión

Esta sección está dedicada al estudio de las distribuciones de probabilidad de las cadenas de Markov encajadas en los instantes de finalización del servicio y de expulsión. Se asume a lo largo de la sección que el proceso  $X$  es ergódico. La Teoría de Procesos Regenerativos permitirá analizar el proceso  $X$  en la sucesión de los instantes de salida del sistema  $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ . Las principales características son nuevamente expresables en términos de series hipergeométricas.

Sea la distribución de probabilidad asociada al número de clientes presentes en el sistema en el instante inmediatamente posterior a la salida de un cliente

$$\Pi_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C(\eta_n + 0) + Q(\eta_n + 0) = j), \quad j \geq 0.$$

Las anteriores probabilidades pueden ser expresadas como

$$\Pi_j = \begin{cases} \bar{\Pi}_0, & \text{si } j = 0, \\ \bar{\Pi}_j + \tilde{\Pi}_j, & \text{si } j \geq 1, \end{cases}$$

donde

$$\bar{\Pi}_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X(\eta_n + 0) = (0, j)), \quad \text{si } j \geq 0,$$

$$\tilde{\Pi}_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X(\eta_n + 0) = (1, j - 1)), \quad \text{si } j \geq 1.$$

Debe observarse que con la ayuda de  $\bar{\Pi}_j$  y  $\tilde{\Pi}_j$  puede distinguirse si cada transición de la cadena de Markov  $\{X(\eta_n + 0)\}_{n=0}^\infty$  corresponde a una finalización del servicio o a una llegada negativa.

Es sabido (ver Cooper (1981), pg. 187) que todo proceso estocástico, cuyas trayectorias son casi seguro funciones de salto con pasos unitarios, tiene la misma distribución límite de probabilidad justo antes de los puntos de crecimiento y justo después de los puntos de decrecimiento, cuando ésta existe.

Como consecuencia, la distribución de probabilidad,  $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ , asociada al número total de clientes en el sistema (ver Corolario 1.3.3) satisface  $P_j = \Pi_j$ ,  $j \geq 0$ .

Por sencillez, se supone en el resto de esta sección que en el instante  $t = 0$  el sistema está en estado  $X(0) = (0, 0)$ . Un ciclo de regeneración,  $T$ , es definido como el tiempo de primer paso desde el estado  $(0, 0)$  al estado  $(0, 0)$ . Entonces,  $T = Y + L$ , donde  $Y$  es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con parámetro  $\lambda$  y  $L$  es la longitud de un período de ocupación. Teniendo en cuenta que los tiempos entre llegadas de clientes originales, los tiempos entre llegadas negativas y los tiempos de servicio son mutuamente independientes, se tiene que las variables aleatorias  $Y$  y  $L$  son también independientes.

Debe notarse que el proceso en tiempo continuo  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  es un proceso regenerativo con proceso de renovación encajado  $\{T_1, T_2, \dots\}$ , donde  $T_i$  denota el  $i$ -ésimo ciclo de regeneración. Además, la secuencia  $\{X_n\}_{n \geq 0} = \{(C(\eta_n + 0), Q(\eta_n + 0))\}_{n \geq 0}$  es un proceso regenerativo en tiempo discreto con sucesión de renovación  $\{N_1, N_2, \dots\}$ , donde  $N_i$  es el número de salidas generalizadas (es decir, clientes servidos o expulsados del sistema por el efecto de una llegada negativa) durante el  $i$ -ésimo ciclo,  $T_i$ . Por conveniencia en la notación, serán considerados  $T = T_1$  y  $N = N_1$ .

Con los anteriores preliminares se está en condiciones de establecer el siguiente resultado donde se estudian las distribuciones de probabilidad de las cadenas de Markov encajadas en los instantes de finalización del servicio y de expulsión.

**Teorema 1.6.1.** *Si el proceso  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  es ergódico, entonces*

i) *La distribución de probabilidad del número de clientes en órbita justo después de un instante de finalización del servicio está dada por*

$$\bar{\pi}_0 = \left( F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) \right)^{-1}, \quad (1.6.1)$$

$$\bar{\pi}_j = \bar{\pi}_0 \frac{\left( 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right)_j}{\left( 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu} \right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1. \quad (1.6.2)$$

ii) *Si  $\delta > 0$ , la distribución de probabilidad del número de clientes en el sistema justo después del instante de la expulsión de un cliente está dada por*

$$\tilde{\pi}_j = A \frac{\delta \left( 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right)_j}{\nu \left( 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu} \right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1, \quad (1.6.3)$$

donde

$$A = \left( \frac{\delta(\lambda + \alpha + \mu)}{\nu(\alpha + \mu + \delta\rho)} \rho F \left( 1, 2 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 2 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) \right)^{-1}.$$

**Demostración.** Mediante un resultado básico en la Teoría de Procesos Regenerativos (ver Stidham (1972)), se tiene la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = (i, j)) = P(X_0^* = (i, j)), \quad (i, j) \in S,$$

donde  $X_0^*$  representa la versión estacionaria del proceso en tiempo discreto  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Una expresión alternativa para  $P(X_0^* = (i, j))$  viene dada por

$$P(X_0^* = (i, j)) = \frac{E[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{X_n=(i,j), N>n\}}]}{E[N]}, \quad (i, j) \in S.$$

Sea  $\bar{N}^j$  (respectivamente,  $\tilde{N}^j$ ) el número de instantes de finalización del servicio (respectivamente, de expulsión) que dejan  $j$  clientes en el sistema durante el primer ciclo de regeneración  $(0, T]$ . Teniendo en cuenta las relaciones

$$\bar{N}^j = \sum_{n=0}^{\infty} I_{\{X_n=(0,j), N>n\}}, \quad j \geq 0, \quad y \quad \tilde{N}^j = \sum_{n=0}^{\infty} I_{\{X_n=(1,j-1), N>n\}}, \quad j \geq 1,$$

es posible expresar las probabilidades  $\bar{\Pi}_j$  y  $\tilde{\Pi}_j$  en los términos

$$\bar{\Pi}_j = \frac{E[\bar{N}^j]}{E[N]}, \quad j \geq 0, \tag{1.6.4}$$

$$\tilde{\Pi}_j = \frac{E[\tilde{N}^j]}{E[N]}, \quad j \geq 1. \tag{1.6.5}$$

Por conveniencia, se vuelven a denotar los estados  $(0, j)$  por  $A_j$  y los estados  $(1, j)$  por  $B_j$ ,  $j \geq 0$ . Sea  $\bar{N}_{ab}^j$  (respectivamente,  $\tilde{N}_{ab}^j$ ) el número de instantes de finalización del servicio (respectivamente, de expulsión) que dejan  $j$  clientes en el sistema durante el tiempo de primer paso,  $T_{ab}$ , desde el estado  $a$  al estado  $b$ . Entonces,  $\bar{N}^j = \bar{N}_{B_0 A_0}^j$ ,  $\tilde{N}^j = \tilde{N}_{B_0 A_0}^j$ , para  $j \geq 1$ ,  $N^s = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{N}^j$ ,  $N^n = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{N}^j$  y  $N = N^s + N^n$ . Teniendo en cuenta que  $\bar{N}^0 = 1$ , se tiene  $\bar{\Pi}_0 = 1/E[N]$ . Sea  $\phi_{ab}^j(x, y)$  la función generatriz del par  $(\bar{N}_{ab}^j, \tilde{N}_{ab}^j)$  definida por

$$\phi_{ab}^j(x, y) = E[x^{\bar{N}_{ab}^j} y^{\tilde{N}_{ab}^j}], \quad j \geq 1,$$

para  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$ .

Teniendo en cuenta que una transición directa desde el estado  $B_0$  al estado  $A_0$  (respectivamente, desde  $B_0$  a  $B_1$ ) ocurre con probabilidad  $\nu(\lambda + \nu)^{-1}$  (respectivamente,  $\lambda(\lambda + \nu)^{-1}$ ), se tiene que  $\phi_{B_0 A_0}^j(x, y)$  puede expresarse de la forma

$$\phi_{B_0 A_0}^j(x, y) = \frac{\nu}{\lambda + \nu} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \phi_{B_1 A_0}^j(x, y). \tag{1.6.6}$$

El argumento anterior puede ser extendido, con la ayuda de la *Figura 1.5.1*, para deducir el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\phi_{B_1 A_0}^j(x, y) = \phi_{B_1 B_0}^j(x, y) \phi_{B_0 A_0}^j(x, y), \quad j \geq 1, \quad (1.6.7)$$

$$\begin{aligned} \phi_{B_i B_{i-1}}^j(x, y) &= \frac{\delta}{\lambda + \nu + \delta} (1 - \delta_{ij} + y \delta_{ij}) + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \phi_{B_{i+1} B_{i-1}}^j(x, y) \\ &+ \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} (1 - \delta_{ij} + x \delta_{ij}) \phi_{A_i B_{i-1}}^j(x, y), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

$$\phi_{B_{i+1} B_{i-1}}^j(x, y) = \phi_{B_{i+1} B_i}^j(x, y) \phi_{B_i B_{i-1}}^j(x, y), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad (1.6.9)$$

$$\phi_{A_i B_{i-1}}^j(x, y) = \frac{\alpha + i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \phi_{B_i B_{i-1}}^j(x, y), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad (1.6.10)$$

para  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$ .

Derivando las funciones generatrices  $\phi_{ab}^j(x, y)$  del conjunto de ecuaciones (1.6.6) – (1.6.10) con respecto a  $x$  y tomando  $x = y = 1$  se obtienen las relaciones entre los momentos  $E[\bar{N}_{ab}^j]$ :

$$E[\bar{N}_{B_0 A_0}^j] = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} E[\bar{N}_{B_1 A_0}^j], \quad j \geq 1, \quad (1.6.11)$$

$$E[\bar{N}_{B_1 A_0}^j] = E[\bar{N}_{B_1 B_0}^j] + E[\bar{N}_{B_0 A_0}^j], \quad j \geq 1, \quad (1.6.12)$$

$$E[\bar{N}_{B_i B_{i-1}}^j] = \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} E[\bar{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^j] + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} (\delta_{ij} + E[\bar{N}_{A_i B_{i-1}}^j]), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad (1.6.13)$$

$$E[\bar{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^j] = E[\bar{N}_{B_{i+1} B_i}^j] + E[\bar{N}_{B_i B_{i-1}}^j], \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad (1.6.14)$$

$$E[\bar{N}_{A_i B_{i-1}}^j] = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} E[\bar{N}_{B_i B_{i-1}}^j], \quad i \geq 1, \quad j \geq 1. \quad (1.6.15)$$

Entonces, de (1.6.11) y (1.6.12) se deduce que

$$E[\bar{N}^j] = \frac{\lambda}{\nu} E[\bar{N}_{B_1 B_0}^j], \quad j \geq 1.$$

Análogamente, a partir de (1.6.13) – (1.6.15) se deduce

$$E \left[ \tilde{N}_{B_i B_{i-1}}^j \right] = \frac{\left( i + \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right)}{\left( i + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu} \right)} \rho \left( \frac{\nu}{\lambda} \delta_{ij} + E \left[ \tilde{N}_{B_{i+1} B_i}^j \right] \right), \quad i \geq 1 \quad j \geq 1.$$

Después de sucesivas sustituciones, es posible lograr una expresión para  $E[\tilde{N}^j]$  de la forma

$$E \left[ \tilde{N}^j \right] = \frac{\left( 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right)_j}{\left( 1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu} \right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1. \tag{1.6.16}$$

Por ello, el número esperado de finalizaciones de servicio ocurridas durante un ciclo de regeneración está dado por

$$E \left[ \tilde{N} \right] = F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}; \rho \right).$$

La aplicación de un esquema similar para el número esperado de clientes expulsados durante  $(0, T]$ , conduce a las siguientes expresiones (ver Apéndice 1.E):

$$E \left[ \tilde{N}^j \right] = \frac{\delta \left( 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right)_j}{\nu \left( 1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu} \right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1. \tag{1.6.17}$$

Teniendo en cuenta que el número esperado de clientes expulsados por el efecto de las llegadas negativas en un ciclo puede expresarse como

$$E \left[ \tilde{N} \right] = \frac{\delta(\lambda + \alpha + \mu)}{\nu(\alpha + \mu + \delta\rho)} \rho F \left( 1, 2 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 2 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right), \tag{1.6.18}$$

se sigue que

$$E \left[ N \right] = 1 + \frac{\lambda(\lambda + \alpha + \mu)}{\nu(\alpha + \mu + \delta\rho)} F \left( 1, 2 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 2 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right). \tag{1.6.19}$$

Por otra parte, las distribuciones de probabilidad  $\{\bar{\pi}_j\}_{j=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\pi}_j\}_{j=1}^\infty$  pueden escribirse como

$$\bar{\pi}_j = \frac{\bar{\Pi}_j}{\sum_{k=0}^\infty \bar{\Pi}_k}, \quad j \geq 0, \tag{1.6.20}$$

$$\tilde{\pi}_j = \frac{\tilde{\Pi}_j}{\sum_{k=1}^\infty \tilde{\Pi}_k}, \quad j \geq 1. \tag{1.6.21}$$

Por ello, a partir de (1.6.4), (1.6.5), (1.6.16), (1.6.17) y (1.6.19) – (1.6.21) se obtiene que  $\{\bar{\pi}_j\}_{j=0}^{\infty}$  y  $\{\tilde{\pi}_j\}_{j=1}^{\infty}$  vienen dadas por las fórmulas (1.6.1) – (1.6.3).

Para finalizar, la convergencia de las series hipergeométricas involucradas en (1.6.1) – (1.6.3) se sigue desde la condición de ergodicidad del proceso X y una simple aplicación del test del cociente y del test de Raabe.

□

Las expresiones de las probabilidades  $\bar{\Pi}_j$  y  $\tilde{\Pi}_j$  se obtienen fácilmente desde (1.6.4), (1.6.5), (1.6.16) y (1.6.17). De este modo se tiene que

$$\bar{\Pi}_j = \frac{1}{E[N]} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_j}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_j} \rho^j, \quad j \geq 0,$$

$$\tilde{\Pi}_j = \frac{\delta}{\nu E[N]} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_j}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_j} \rho^j, \quad j \geq 1,$$

donde  $E[N]$  está dado por (1.6.19).

En el siguiente resultado se obtienen los momentos factoriales de las distribuciones de probabilidad  $\{\bar{\pi}_j\}_{j=0}^{\infty}$  y  $\{\tilde{\pi}_j\}_{j=1}^{\infty}$ .

**Teorema 1.6.2.** Si el proceso  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  es ergódico, entonces

i) El  $k$ -ésimo momento factorial de la cadena de Markov encajada en los instantes de finalización del servicio,  $\bar{M}_k$ , está dado por

$$\bar{M}_k = \bar{\pi}_0 \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_k}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_k} \rho^k k! F\left(k + 1, k + 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; k + 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho\right), \quad k \geq 0, \quad (1.6.22)$$

donde  $\bar{\pi}_0$  viene dado por (1.6.1).

ii) El  $k$ -ésimo momento factorial de la cadena de Markov encajada en los instantes de expulsión,  $\tilde{M}_k$ , está dado por

$$\tilde{M}_k = \frac{\delta}{\nu E[\tilde{N}]} \left( \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_k}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_k} \rho^k k! F\left(k + 1, k + 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; k + 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho\right) - \delta_{0k} \right), \quad k \geq 0, \quad (1.6.23)$$

donde  $E[\tilde{N}]$  viene dado por (1.6.18).

**Demostración.** A partir de (1.6.1) – (1.6.3) se siguen las siguientes expresiones para las funciones generatrices de  $\{\bar{\pi}_j\}_{j=0}^{\infty}$  y  $\{\tilde{\pi}_j\}_{j=1}^{\infty}$

$$\bar{\Pi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\pi}_j z^j = \bar{\pi}_0 F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho z \right), \quad (1.6.24)$$

$$\tilde{\Pi}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\pi}_j z^j = \frac{\delta(\lambda + \alpha + \mu)}{\nu(\alpha + \mu + \delta\rho)E[\tilde{N}]} \rho z F \left( 1, 2 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 2 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho z \right).$$

Dado que  $(z + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k$ , se obtiene que  $\bar{\Pi}(z + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{M}_k z^k (k!)^{-1}$  y, como consecuencia,  $\bar{M}_k$  puede ser obtenido mediante una identificación directa con el  $k$ -ésimo coeficiente de la serie  $\bar{\Pi}(z + 1)$ . Entonces, de la definición de serie hipergeométrica y (1.6.24) se deduce que  $\bar{M}_k$ , para  $k \geq 0$ , está dado por

$$\bar{M}_k = \bar{\pi}_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{j+k} \rho^{j+k} (j+k)!}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_{j+k} j!}.$$

Haciendo uso de las relaciones dadas en (1.3.8), se sigue que  $\bar{M}_k$ , para  $k \geq 0$ , viene dado por la expresión (1.6.22).

De manera análoga para  $\tilde{M}_k$ ,  $k \geq 0$ , es deducida la igualdad

$$\tilde{M}_k = \frac{\delta}{\nu E[\tilde{N}]} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_{j+k} \rho^{j+k} (j+k)!}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}\right)_{j+k} j!} - \delta_{0k} \right), \quad k \geq 0.$$

Desde esta expresión y (1.3.8), se deduce fácilmente (1.6.23). Haciendo uso del test del cociente y del test de Raabe se comprueba que la condición de ergodicidad del proceso X es suficiente para asegurar la existencia de los momentos  $\bar{M}_k$  y  $\tilde{M}_k$ , para  $k \geq 0$ . □

Para concluir esta sección, en el siguiente corolario se reúnen algunos resultados explícitos para el modelo con disciplina constante de reintento. La demostración es trivial desde los *Teoremas 1.6.1 y 1.6.2* y, por ello, es omitida. Obsérvese que se verifica  $\bar{\pi}_j = \tilde{\pi}_{j+1}$ ,  $j \geq 0$ .

**Corolario 1.6.3.** Si  $\mu = 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $\gamma < 1$ , entonces

i) La distribución de probabilidad de la cadena de Markov encajada en los instantes de finalización del servicio está dada por

$$\bar{\pi}_j = \left( 1 - \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right) \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right)^j, \quad j \geq 0,$$

y su correspondiente  $k$ -ésimo momento factorial es

$$\bar{M}_k = k! \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right)^k, \quad k \geq 0.$$

ii) Si  $\delta > 0$ , la distribución de probabilidad de la cadena de Markov encajada en los instantes de expulsión está dada por

$$\tilde{\pi}_j = \left( 1 - \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right) \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right)^{j-1}, \quad j \geq 1,$$

y su correspondiente  $k$ -ésimo momento factorial es

$$\tilde{M}_k = \frac{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)}{\lambda(\lambda + \alpha)} \left( \frac{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \left( \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + (\delta - \lambda)(\lambda + \alpha)} \right)^k k! - \delta_{0k} \right), \quad k \geq 0.$$

## 1.7 Proceso de finalización del servicio

El proceso de finalización del servicio es definido como la sucesión de instantes de tiempo  $\{\eta_i^*\}_{i=0}^\infty$  en los que los clientes abandonan el sistema después de sus correspondientes finalizaciones del servicio. El estudio de  $\{\eta_i^*\}_{i=0}^\infty$  es equivalente al estudio de la secuencia  $\{\tau_i = \eta_i^* - \eta_{i-1}^*\}_{i=1}^\infty$ . Debe observarse (ver la *Figura 1.7.1*) que el intervalo  $\tau_i$  puede ser expresado como  $\tau_i = R_i + S_i$ ,  $i \geq 1$ , donde  $R_i$  está definido como el período vacío del servidor hasta el instante  $\xi_i$  de entrada en el servicio del  $i$ -ésimo cliente y  $S_i$  representa el correspondiente tiempo de servicio.

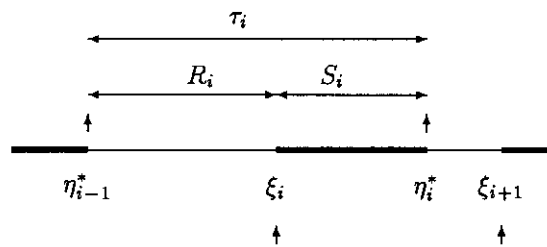


Figura 1.7.1. Proceso de finalización del servicio

Se asume que el proceso  $X$  es ergódico y, consecuentemente, que las variables aleatorias  $\tau_1, \tau_2, \dots$  son idénticamente distribuidas. Por conveniencia en la notación, el intervalo en consideración será denotado como  $\tau_1$ .

La distribución conjunta de probabilidad del par  $(R_1, S_1)$  es obtenida a continuación en términos de su transformada de Laplace-Stieltjes.

**Teorema 1.7.1.** Si el sistema es ergódico, entonces la transformada de Laplace-Stieltjes del par  $(R_1, S_1)$ ,  $\phi(\theta, \omega) = E[\exp(-\theta R_1 - \omega S_1)]$ , está dada por

$$\phi(\theta, \omega) = \frac{\nu}{\omega + \nu} \left( 1 - \frac{\theta}{\theta + \lambda + \alpha} \bar{\pi}_0 \left( \frac{\alpha}{\theta + \lambda} + {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}, \frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu} \\ 1 + \frac{\alpha + \theta}{\mu}, 1 + \frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu} \end{matrix}; \rho \right) \right) \right), \quad (1.7.1)$$

para  $Re(\theta) \geq 0, Re(\omega) \geq 0$ , donde  $\bar{\pi}_0$  viene dada por (1.6.1) y  ${}_3F_2 \left( \begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix}; z \right)$  es la serie hipergeométrica generalizada.

**Demostración.** Dado que la longitud del tiempo de servicio,  $S_1$ , es independiente de todos los sucesos ocurridos antes de su comienzo, las variables aleatorias  $R_1$  y  $S_1$  son independientes. Entonces,

$$\phi(\theta, \omega) = E[\exp(-\theta R_1)] E[\exp(-\omega S_1)],$$

donde  $E[\exp(-\omega S_1)] = \nu(\omega + \nu)^{-1}$ . Con la finalidad de encontrar la transformada de Laplace-Stieltjes de la variable aleatoria  $R_1$ , se condiciona por el número de clientes presentes en el sistema al finalizar el servicio anterior. Así se obtiene

$$E[\exp(-\theta R_1)] = \frac{\lambda}{\theta + \lambda} \bar{\pi}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda + \alpha + n\mu}{\theta + \lambda + \alpha + n\mu} \bar{\pi}_n.$$

Nótese que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\pi}_n}{\theta + \lambda + \alpha + n\mu} = \frac{1}{\theta + \lambda + \alpha} \int_0^1 \bar{\Pi} \left( x^{\frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu}} \right) dx.$$

Por ello, se deduce una expresión alternativa para  $E[\exp(-\theta R_1)]$  con ayuda de la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda + \alpha + n\mu}{\theta + \lambda + \alpha + n\mu} \bar{\pi}_n = 1 - \frac{\lambda + \alpha}{\theta + \lambda + \alpha} \bar{\pi}_0 - \frac{\theta}{\mu} \int_0^1 t^{\frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu} - 1} \bar{\Pi}(t) dt. \quad (1.7.2)$$

La sustitución de (1.6.24) en (1.7.2) conduce, después de algunas manipulaciones algebraicas, a (1.7.1).

Finalmente, la condición de ergodicidad del proceso X es necesaria y suficiente para asegurar que la serie hipergeométrica generalizada (ver Apéndice 1.A) involucrada en (1.7.1) es convergente.  $\square$

En el caso particular  $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$ , la transformada de Laplace-Stieltjes del par  $(R_1, S_1)$  se reduce a una expresión más explícita.

**Corolario 1.7.2.** Si  $\mu = 0, \alpha > 0$  y  $\gamma < 1$ , entonces la transformada de Laplace-Stieltjes del par  $(R_1, S_1)$  está dada por

$$\phi(\theta, \omega) = \frac{\nu}{(\omega + \nu)(\theta + \lambda + \alpha)} \left( \lambda + \alpha \left( 1 - \frac{\theta}{\theta + \lambda} \bar{\pi}_0 \right) \right), \quad (1.7.3)$$

para  $Re(\theta) \geq 0$  y  $Re(\omega) \geq 0$ , donde  $\bar{\pi}_0$  viene dada en el Corolario 1.6.3.

La transformada de Laplace-Stieltjes de  $(R_1, S_1)$  puede ser invertida por inspección. Su densidad ha sido recogida en el siguiente resultado.

**Corolario 1.7.3.** Si el proceso  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  es ergódico, entonces

i) Si  $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$ ,

$$f_{(R_1, S_1)}(x, y) = \nu e^{-\nu y} \left( \lambda e^{-\lambda x} \bar{\pi}_0 + (\lambda + \alpha) e^{-(\lambda + \alpha)x} (1 - \bar{\pi}_0) \right) \delta(x) \delta(y),$$

donde  $\bar{\pi}_0$  viene dada en el Corolario 1.6.3 y  $\delta(\cdot)$  denota la delta de Dirac.

ii) Si  $\mu > 0$ ,

$$f_{(R_1, S_1)}(x, y) = \bar{\pi}_0 \nu e^{-\nu y} \left( \lambda e^{-\lambda x} + \frac{\lambda + \alpha + \mu}{\alpha + \mu + \delta \rho} \rho e^{-(\lambda + \alpha + \mu)x} \left( (\lambda + \alpha) \right. \right. \\ \left. \left. \times F \left( 1, 2 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}, 2 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}; \rho e^{-\mu x} \right) + \mu F \left( 2, 2 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}, 2 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}; \rho e^{-\mu x} \right) \right) \right) \delta(x) \delta(y),$$

donde  $\bar{\pi}_0$  viene dada por (1.6.1).

El siguiente objetivo consiste en obtener fórmulas para los momentos de la variable aleatoria  $R_1$ . Sea  $M_k^{R_1} = E[R_1^k]$ , para  $k \geq 0$ .

**Teorema 1.7.4.** Si el proceso  $X$  es ergódico, entonces los momentos de  $R_1$  están dados por

i) Si  $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$ , entonces

$$M_k^{R_1} = k! \left( \frac{1 - \bar{\pi}_0}{(\lambda + \alpha)^k} + \frac{\bar{\pi}_0}{\lambda^k} \right), \quad k \geq 0, \quad (1.7.4)$$

donde  $\bar{\pi}_0$  viene dada en el Corolario 1.6.3.

ii) Si  $\mu > 0$ , entonces

$$M_k^{R_1} = k! \bar{\pi}_0 \left( \frac{1}{\lambda^k} + \frac{1}{(\lambda + \alpha)^k} \left( {}_{k+1}F_k \left( 1 + \frac{1, \frac{\lambda + \alpha}{\mu}, \dots, \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; \rho}{\alpha + \delta \rho}, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}, \dots, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu} \right) - 1 \right) \right), \quad k \geq 1, \quad (1.7.5)$$

donde  $\bar{\pi}_0$  está dada por (1.6.1).

**Demostración.** Con la ayuda de (1.7.3) se obtiene fácilmente la expresión (1.7.4). En el caso  $\mu > 0$ , tras derivar (1.7.1) se tiene

$$M_k^{R_1} = k! \left( \frac{1}{\lambda^k} - \frac{1}{(\lambda + \alpha)^k} \right) \bar{\pi}_0 - (-1)^k \frac{1}{\mu} I_k(0), \quad (1.7.6)$$

donde

$$I_k(\theta) = \frac{d^k}{d\theta^k} \left( \theta \int_0^1 t^{\frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu} - 1} \bar{\Pi}(t) dt \right) = \theta J(\theta, k) + k J(\theta, k - 1), \quad (1.7.7)$$

y

$$J(\theta, k) = \frac{d^k}{d\theta^k} \left( \int_0^1 t^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}-1} \bar{\Pi}(t) dt \right).$$

Después de algunos cálculos rutinarios, es posible encontrar una expresión de la función  $J(\theta, k)$  en términos de la serie hipergeométrica generalizada.

$$J(\theta, k) = (-1)^k k! \frac{\mu}{(\theta + \lambda + \alpha)^{k+1}} \bar{\pi}_0 {}_kF_{k+2} \left( \begin{matrix} 1, 1 + \frac{\lambda+\alpha}{\mu}, \frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}, \dots, \frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}; \rho \\ 1 + \frac{\alpha+\delta\rho}{\mu}, 1 + \frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}, \dots, 1 + \frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu} \end{matrix} \right), \quad k \geq 1. \quad (1.7.8)$$

Sustituyendo (1.7.7) y (1.7.8) en la expresión (1.7.6), se deduce (1.7.5). Como en otros resultados, una sencilla aplicación del test del cociente y del test de Raabe garantiza que la serie de (1.7.5) es convergente si y sólo si el proceso X es ergódico.

□

Para encontrar el  $k$ -ésimo momento del intervalo entre finalizaciones de servicio  $\tau_1$ ,  $M_k^{\tau_1} = E[\tau_1^k]$ , para  $k \geq 0$ , se hace uso de la independencia entre las variables aleatorias  $R_1$  y  $S_1$ . Se obtiene entonces

$$M_k^{\tau_1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} M_j^{R_1} M_{k-j}^{S_1}, \quad (1.7.9)$$

donde  $M_j^{S_1} = j! \nu^{-j}$ , para  $j \geq 0$ .

En las aplicaciones prácticas, la media y la varianza de las principales características del sistema de colas son, probablemente, las cantidades más importantes. Sus expresiones son resumidas en el siguiente corolario.

**Corolario 1.7.5.**

i) Si  $\mu > 0$  y  $\rho < 1$ , entonces

$$E[\tau_1] = \frac{1}{\nu} + \bar{\pi}_0 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{\rho}{\alpha + \mu + \delta\rho} F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 2 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) \right), \quad (1.7.10)$$

$$\begin{aligned} Var[\tau_1] = & \frac{1}{\nu^2} + 2\bar{\pi}_0 \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\rho}{(\lambda + \alpha + \mu)(\alpha + \mu + \delta\rho)} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} 1, 1 + \frac{\lambda+\alpha}{\mu}, 1 + \frac{\lambda+\alpha}{\mu}; \rho \\ 2 + \frac{\alpha+\delta\rho}{\mu}, 2 + \frac{\lambda+\alpha}{\mu} \end{matrix} \right) \right) \\ & - \left( \bar{\pi}_0 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{\rho}{\alpha + \mu + \delta\rho} F \left( 1, 1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}; 2 + \frac{\alpha + \delta\rho}{\mu}; \rho \right) \right) \right)^2, \quad (1.7.11) \end{aligned}$$

donde  $\bar{\pi}_0$  viene dada por (1.6.1).

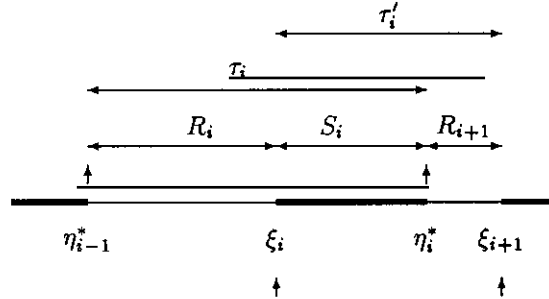
ii) Si  $\mu = 0$ ,  $\alpha > 0$  y  $\gamma < 1$ , entonces

$$E[\tau_1] = \frac{\nu^2 \alpha + \delta(\lambda + \alpha)(\lambda + \nu)}{\lambda\nu(\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha))}, \quad (1.7.12)$$

$$\text{Var}[\tau_1] = \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda + \alpha)^2} \left( 1 - \left( \frac{\nu\alpha + (\lambda + \alpha)(\alpha + \delta)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right)^2 \right). \quad (1.7.13)$$

## 1.8 Proceso de comienzo del servicio

El proceso de comienzo del servicio (o proceso *quasi-input*) está muy relacionado con el proceso de finalización del servicio. El proceso de comienzo del servicio se define como la sucesión de instantes de tiempo  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  en los cuales los clientes comienzan a ser servidos. Sea  $\tau'_i = \xi_{i+1} - \xi_i$  la longitud del intervalo de tiempo entre dos sucesivos eventos de este proceso. Debe observarse (ver *Figura 1.8.1*) que  $\tau'_i$  puede ser expresado en términos de  $\tau'_i = S_i + R_{i+1}$ , para  $i \geq 1$ , donde las variables aleatorias  $S_i$  y  $R_{i+1}$  fueron definidas en la sección previa. Se asume que el proceso  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  es ergódico. Entonces, es posible reducir el estudio al primer intervalo  $\tau'_1 = S_1 + R_2$ .



**Figura 1.8.1.** Procesos de finalización y de comienzo del servicio

El objetivo principal en esta sección es el estudio de la distribución conjunta de probabilidad de las variables aleatorias  $S_1$  y  $R_2$  mediante el cálculo de la correspondiente transformada de Laplace-Stieltjes,  $\phi'(\theta, \omega) = E[\exp(-\omega S_1 - \theta R_2)]$ . Para obtener  $\phi'(\theta, \omega)$  es necesario definir  $P_m^{(n)}(x)$  como la probabilidad condicional de que en el instante  $\eta_1^* + 0$  existan  $m$  clientes en órbita cuando  $Q(\xi_1^* + 0) = n$  y  $S_1 = x$ , para  $m, n \geq 0$  y  $x > 0$ . En el caso particular  $\delta = 0$ , se tiene

$$P_m^{(n)}(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{m-n}}{(m-n)!}, \quad m \geq n \geq 0, \quad x > 0. \quad (1.8.1)$$

En caso contrario, se observa que  $P_m^{(n)}(x)$  es igual a la probabilidad condicional de que en el instante  $x$  la longitud de la línea de espera del modelo estándar M/M/1, con intensidad de llegadas  $\lambda$  e intensidad de servicio  $\delta$ , sea  $m$  cuando esta longitud es  $n$  en el instante 0. Entonces, se tiene (ver fórmula (2.7) de

Conolly y Langaris (1993))

$$P_m^{(n)}(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^m e^{-(\lambda+\delta)x} \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^m \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \sum_{k=0}^{i+m+n+1} (i-k) \frac{(\delta x)^{k-1}}{k!} + e^{-(\lambda+\delta)x} \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{\frac{m-n}{2}} \left( I_{m-n} \left( 2x\sqrt{\lambda\delta} \right) - I_{m+n+2} \left( 2x\sqrt{\lambda\delta} \right) \right), \quad m, n \geq 0, \quad x > 0, \quad (1.8.2)$$

donde  $I_r(z)$  es la función modificada de Bessel de orden  $r$ .

Dado que las variables aleatorias  $S_1$  y  $R_2$  no son independientes, el análisis del proceso de comienzo del servicio es esencialmente más complejo que el proceso de finalización del servicio. Las expresiones más generales para la transformada  $\phi'(\theta, \omega)$  y para la covarianza entre  $S_1$  y  $R_2$  son propuestas en el siguiente resultado.

**Teorema 1.8.1.** Si el proceso  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  es ergódico, entonces

$$\phi'(\theta, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n \left( \lambda A_n \sum_{m=0}^{\infty} B_m(\theta) p_m^{(n)}(\omega + \nu) + (1 - \lambda A_n) \sum_{m=0}^{\infty} B_m(\theta) p_m^{(n-1)}(\omega + \nu) \right), \quad (1.8.3)$$

$$Cov(S_1, R_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n \left( \lambda A_n \sum_{m=0}^{\infty} A_m \bar{p}_m^{(n)}(\nu) + (1 - \lambda A_n) \sum_{m=0}^{\infty} A_m \bar{p}_m^{(n-1)}(\nu) \right), \quad (1.8.4)$$

donde

$$A_n = \frac{1}{\lambda + \alpha(1 - \delta_{0n}) + n\mu}, \quad B_m(\theta) = \frac{\lambda + \alpha(1 - \delta_{0m}) + m\mu}{\theta + \lambda + \alpha(1 - \delta_{0m}) + m\mu},$$

$$p_m^{(-1)}(\omega + \nu) = 0, \quad p_m^{(n)}(\omega + \nu) = \int_0^{\infty} \nu e^{-(\omega+\nu)x} P_m^{(n)}(x) dx,$$

$$\bar{p}_m^{(-1)}(\nu) = 0, \quad \bar{p}_m^{(n)}(\nu) = \int_0^{\infty} \nu x e^{-\nu x} P_m^{(n)}(x) dx,$$

para  $Re(\theta) \geq 0, Re(\omega) \geq 0, m \geq 0$  y  $n \geq 0$ .

**Demostración.** Sea  $B_1$  igual a 1 o 0 dependiendo de si el cliente que accede al servicio en el instante  $\xi_1$  proviene de la órbita o es una llegada original, respectivamente. Es sencillo ver que  $B_1$  es una variable aleatoria que depende de la historia del sistema hasta el instante  $\eta_0^*$  sólo a través de  $Q(\eta_0^*)$ . La distribución condicional de  $B_1$  cuando  $Q(\eta_0^*) = n$  viene dada por

$$P(B_1 = k / Q(\eta_0^*) = n) = \begin{cases} \lambda A_n, & \text{si } k = 0, \\ 1 - \lambda A_n, & \text{si } k = 1, \end{cases}$$

para  $n \geq 0$ . Entonces, condicionando por el número de clientes presentes en el sistema en el instante

$\eta_0^* + 0$ , la transformada  $\phi'(\theta, \omega)$  puede ser expresada mediante la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n (\lambda A_n E [e^{-\omega S_1 - \theta R_2} / Q(\xi_1 + 0) = n] + (1 - \lambda A_n)(1 - \delta_{0n}) E [e^{-\omega S_1 - \theta R_2} / Q(\xi_1 + 0) = n - 1]). \quad (1.8.5)$$

Ahora, si se condiciona por la duración del servicio,  $S_1 = x$ , se deduce

$$E [e^{-\omega S_1 - \theta R_2} / Q(\xi_1 + 0) = n] = \int_0^{+\infty} \nu e^{-(\omega + \nu)x} E [e^{-\theta R_2} / Q(\xi_1 + 0) = n, S_1 = x] dx, \quad n \geq 0, \quad (1.8.6)$$

donde

$$\begin{aligned} E [e^{-\theta R_2} / Q(\xi_1 + 0) = n, S_1 = x] &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(n)}(x) E [e^{-\theta R_2} / Q(\xi_1 + 0) = n, S_1 = x, Q(\eta_1^* + 0) = m] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(n)}(x) B_m(\theta), \quad n \geq 0, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (1.8.7)$$

Sustituyendo (1.8.6) y (1.8.7) en (1.8.5) se deduce (1.8.3). La expresión de  $Cov(S_1, R_2)$  se obtiene derivando (1.8.3) con respecto a  $\theta$  y  $\omega$  en el punto  $\theta = \omega = 0$ .  $\square$

Los resultados dados en el teorema anterior proporcionan una solución teórica para los principales problemas asociados al proceso de comienzo del servicio. El cálculo de  $Cov(S_1, R_2)$  es de especial interés puesto que  $Var[\tau_1']$  es igual a  $Var[\tau_1] + 2Cov(S_1, R_2)$ . Desafortunadamente, las expresiones para  $\phi'(\theta, \omega)$  y  $Cov(S_1, R_2)$  son difíciles de simplificar con la excepción de algunas elecciones particulares de los parámetros  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\delta$ . La razón fundamental es el escaso aprovechamiento que puede extraerse de las cantidades  $p_m^{(n)}(\omega + \nu)$  y  $\bar{p}_m^{(n)}(\nu)$ . Cuando son escritas con la mayor generalidad,  $\delta > 0$ , sus expresiones más adecuadas son

$$\begin{aligned} p_m^{(n)}(\omega + \nu) &= \nu \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^m \left( \left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) \frac{1}{\omega + \nu} + \frac{1}{\delta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu + \delta}\right)^{i+i+m+n+1} \sum_{k=0}^{i+i+m+n+1} \frac{(i-k)(i+k-1)!}{k!} \right. \\ &\times \left( \frac{\delta}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \right)^k + \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{\frac{m+n}{2}} \frac{1}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2l+|m-n|}{l} \left(\frac{\sqrt{\lambda\delta}}{\omega + \lambda + \nu + \delta}\right)^{2l+|m-n|} \right. \\ &\left. \left. - \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2l+m+n+2}{l} \left(\frac{\sqrt{\lambda\delta}}{\omega + \lambda + \nu + \delta}\right)^{2l+m+n+2} \right) \right), \\ \bar{p}_m^{(n)}(\nu) &= \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^m \left( \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) + \frac{\nu}{(\lambda + \nu + \delta)^2} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta}\right)^{i+i+m+n+1} \sum_{k=0}^{i+i+m+n+1} \frac{(i-k)(i+k)!}{k!} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \left( \frac{\delta}{\lambda + \nu + \delta} \right)^{k-1} + \left( \frac{\delta}{\lambda} \right)^{\frac{m+n}{2}} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l + |m-n| + 1)!}{l!(l + |m-n|)!} \left( \frac{\sqrt{\lambda\delta}}{\lambda + \nu + \delta} \right)^{2l + |m-n|} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l + m + n + 3)!}{l!(l + m + n + 2)!} \left( \frac{\sqrt{\lambda\delta}}{\lambda + \nu + \delta} \right)^{2l + m + n + 2} \right) \right), \end{aligned}$$

para  $Re(\omega) \geq 0$ ,  $m, n \geq 0$  y  $x > 0$ . En el caso particular del modelo M/M/1 con llegadas negativas y disciplina constante de reintento,  $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$ , las cantidades  $P_m^{(n)}(x)$ ,  $p_m^{(n)}(\omega + \nu)$  y  $\bar{p}_m^{(n)}(\nu)$  pueden ser escritas en términos de series hipergeométricas y, consecuentemente, pueden ser obtenidas expresiones más explícitas para (1.8.3) y (1.8.4). Con la ayuda de la igualdad (1.4.13), después de tediosas operaciones algebraicas, se pueden proponer las expresiones reunidas en el siguiente resultado para la transformada  $\phi'(\theta, \omega)$  y  $Cov(S_1, R_2)$ .

**Corolario 1.8.2.** Si  $\mu = 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$  y  $\gamma < 1$ , entonces la transformada de Laplace-Stieltjes del par  $(S_1, R_2)$  está dada por

$$\begin{aligned} \phi'(\theta, \omega) = & \frac{1}{\theta + \lambda + \alpha} \left( \frac{\nu(\lambda + \alpha)}{(\omega + \nu)} - \frac{\alpha\theta}{(\theta + \lambda)} \left( \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \bar{\pi}_0 p_0^{(0)}(\omega + \nu) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \left( 1 + \frac{\alpha(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n p_0^{(n)}(\omega + \nu) \right) \right), \end{aligned}$$

donde  $\bar{\pi}_0$  viene dada en el Corolario 1.6.3 y

$$\begin{aligned} p_0^{(0)}(\omega + \nu) = & \nu \left( \left( 1 - \frac{\lambda}{\delta} \right) \frac{1}{\omega + \nu} + \frac{1}{\delta} \left( \omega + \lambda + \nu + \delta - \sqrt{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2 - 4\lambda\delta} \right) \right. \\ & \times \left( \frac{1}{\delta - \omega - \lambda - \nu + \sqrt{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2 - 4\lambda\delta}} - \frac{1}{2\lambda} \right) + \frac{1}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \\ & \left. \times \left( \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2l}{l} \left( \frac{\lambda\delta}{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2} \right)^l - \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2l+2}{l} \left( \frac{\lambda\delta}{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2} \right)^{l+1} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n p_0^{(n)}(\omega + \nu) = & \nu \left( \left( 1 - \frac{\lambda}{\delta} \right) \frac{1}{\omega + \nu} + \frac{1}{\delta} \frac{\omega + \lambda + \nu + \delta - \sqrt{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2 - 4\lambda\delta}}{\delta - \omega - \lambda - \nu + \sqrt{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2 - 4\lambda\delta}} \right. \\ & \left. \times \left( 1 - \frac{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)}{\lambda(\lambda + \alpha)} \left( 1 - \frac{2\alpha\nu(\lambda + \alpha)^{-1}}{\nu + \delta - \omega - \lambda \left( 1 + 2\frac{\nu}{\lambda + \alpha} \right) + \sqrt{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2 - 4\lambda\delta}} \right) \right) \right) \\ & + \left( 1 - \frac{\lambda(\lambda + \alpha)}{\nu\alpha + \delta(\lambda + \alpha)} \right) \frac{1}{\omega + \lambda + \nu + \delta} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2l}{l} \left( \frac{\lambda\delta}{(\omega + \lambda + \nu + \delta)^2} \right)^l \right) \end{aligned}$$

$$\times F\left(1, 1+2l; 1+l; \frac{\lambda\delta(\lambda+\alpha)}{(\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha))(\omega+\lambda+\nu+\delta)}\right) - \sum_{l=0}^{\infty} \binom{2l+2}{l} \left(\frac{\lambda\delta}{(\omega+\lambda+\nu+\delta)^2}\right)^{l+1} \\ \times F\left(1, 3+2l; 3+l; \frac{\lambda\delta(\lambda+\alpha)}{(\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha))(\omega+\lambda+\nu+\delta)}\right)\Bigg),$$

para  $Re(\theta) \geq 0$  y  $Re(\omega) \geq 0$ .

La covarianza entre las variables aleatorias  $S_1$  y  $R_2$  es

$$Cov(S_1, R_2) = \frac{1}{\nu(\lambda+\alpha)} + \frac{\alpha^2}{\lambda(\lambda+\alpha)^2} \bar{\pi}_0 \bar{p}_0^{(0)}(\nu) + \frac{\alpha}{(\lambda+\alpha)^2} \left(1 + \frac{\alpha(\lambda+\alpha)}{\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha)}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n \bar{p}_0^{(n)}(\nu),$$

donde

$$\bar{p}_0^{(0)}(\nu) = \left(1 + \frac{\lambda+\nu}{\delta}\right) \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\nu+\delta}\right)^i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i+2k}{k} \left(\frac{\lambda\delta}{(\lambda+\nu+\delta)^2}\right)^k - \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i+1}{i} \left(\frac{\lambda\delta}{(\lambda+\nu+\delta)^2}\right)^i,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n \bar{p}_0^{(n)}(\nu) = \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) + \frac{\nu}{\delta(\lambda+\nu+\delta)} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\nu+\delta}\right)^i \left(1 - \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{\delta(\lambda+\alpha)}{\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha)}\right)^{i-1}\right) \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i+2k}{k} \left(\frac{\lambda\delta}{(\lambda+\nu+\delta)^2}\right)^k + \left(1 - \frac{\lambda(\lambda+\alpha)}{\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha)}\right) \frac{\nu}{(\lambda+\nu+\delta)^2} \\ \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!}{l!l!} \left(\frac{\lambda\delta}{(\lambda+\nu+\delta)^2}\right)^l F\left(1, 2+2l; 1+l; \frac{\lambda\delta(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\nu+\delta)(\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha))}\right)\right) \\ - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+3)!}{l!(l+2)!} \left(\frac{\lambda\delta}{(\lambda+\nu+\delta)^2}\right)^{l+1} F\left(1, 4+2l; 3+l; \frac{\lambda\delta(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\nu+\delta)(\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha))}\right).$$

Para finalizar esta sección, la expresión (1.8.1) para  $P_m^{(n)}(x)$ , en el caso  $\delta = 0$ , proporciona notables simplificaciones en  $\phi'(\theta, \omega)$  y  $Cov(S_1, R_2)$ . En el siguiente corolario incluimos los resultados asociados a los modelos de colas M/M/1 con disciplinas constante y lineal de reintento, sin llegadas negativas.

**Corolario 1.8.3.** Si  $\delta = 0$  y el proceso  $X$  es ergódico, entonces

i) Si  $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$ , la transformada de Laplace-Stieltjes de  $(S_1, R_2)$  está dada por

$$\phi'(\theta, \omega) = \frac{\nu}{\theta+\lambda+\alpha} \left(\frac{\lambda+\alpha}{\omega+\nu} - \frac{\alpha\theta}{(\theta+\lambda)(\omega+\lambda+\nu)} \bar{\pi}_0 \left(1 + \frac{\lambda\alpha}{\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha)}\right)\right),$$

para  $Re(\theta) \geq 0$  y  $Re(\omega) \geq 0$ , donde  $\bar{\pi}_0$  viene dado en el Corolario 1.6.3. La covarianza entre las variables aleatorias  $S_1$  y  $R_2$  es

$$Cov(S_1, R_2) = \frac{1}{\lambda+\alpha} \left(\frac{1}{\nu} + \frac{\nu\alpha^2}{(\lambda+\nu)^3} \bar{\pi}_0 \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha(\lambda+\alpha)}{\nu\alpha+\delta(\lambda+\alpha)}\right)\right)\right).$$

ii) Si  $\mu > 0$ , la transformada de Laplace-Stieltjes de  $(S_1, R_2)$  está dada por

$$\begin{aligned} \phi'(\theta, \omega) = & \frac{\nu}{\omega + \lambda + \nu} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n \left( \lambda A_n \sum_{m=n}^{\infty} B_m(\theta) \left( \frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu} \right)^{m-n} \right. \\ & \left. + (1 - \lambda A_n) \sum_{m=n-1}^{\infty} B_m(\theta) \left( \frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu} \right)^{m-n+1} \right), \end{aligned}$$

para  $Re(\theta) \geq 0$  y  $Re(\omega) \geq 0$ , donde la distribución de probabilidad  $\{\bar{\pi}_n\}_{n=0}^{\infty}$  viene dada por (1.6.1) y (1.6.2), y las cantidades  $A_n$  y  $B_m(\theta)$  están definidas en el Teorema 1.8.1. La covarianza entre las variables aleatorias  $S_1$  y  $R_2$  es

$$\begin{aligned} Cov(S_1, R_2) = & \frac{\nu}{(\lambda + \nu)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\pi}_n \left( \lambda A_n \sum_{m=n}^{\infty} (m - n + 1) A_m \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \right)^{m-n} \right. \\ & \left. + (1 - \lambda A_n) \sum_{m=n-1}^{\infty} (m - n + 2) A_m \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \right)^{m-n+1} \right). \end{aligned}$$

**Demostración.** Teniendo en cuenta (1.8.1) se tienen

$$\begin{aligned} p_m^{(n)}(\omega + \nu) &= \frac{\nu}{\omega + \lambda + \nu} \left( \frac{\lambda}{\omega + \lambda + \nu} \right)^{m-n}, \\ \bar{p}_m^{(n)}(\nu) &= \frac{\nu}{(\lambda + \nu)^2} (m - n + 1) \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \right)^{m-n}, \end{aligned}$$

para  $Re(\omega) \geq 0$  y  $m \geq n \geq 0$ . Entonces,  $\phi'(\theta, \omega)$  y  $Cov(S_1, R_2)$  son fácilmente obtenidas a partir de (1.8.3) y (1.8.4), respectivamente.

□

## 1.9 Comentarios y notas bibliográficas

A continuación se ofrecen algunos comentarios relativos a las técnicas y bibliografía empleadas en el análisis del sistema M/M/1 con disciplina lineal de reintento y llegadas negativas.

En cualquier texto que contemple el estudio de sistemas Markovianos de colas (Gross y Harris (1985), Kleinrock (1975, 1976), Prabhu (1965), Saaty (1961), ...) se señala que la clasificación de los estados del proceso en tiempo continuo describiendo el estado del sistema y el cálculo de su distribución límite pueden reducirse a particularizar los coeficientes de las ecuaciones de nacimiento y muerte asociadas. Siguiendo a Cohen (1982), se reduce la clasificación de estados del proceso X a la convergencia de las series  $S_1$  y  $S_2$  (ver fórmula (1.2.7)), bajo la hipótesis  $\sup\{q_{(i,j)(m,n)}; (i,j), (m,n) \in S\} < \infty$ . Dado que,

para el modelo en consideración, no se satisface esta relación, se han considerado condiciones basadas en la no-explosividad de  $X$  (ver Asmussen (1987)). Si sobre las ecuaciones de Kolmogorov (1.2.4) y (1.2.5) se consideran funciones generatrices, es posible deducir expresiones para  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , en términos de la función *Beta incompleta*. Mediante relaciones bien conocidas entre las funciones Beta incompleta e hipergeométrica (ver Abramowitz y Stegun (1972)) se tiene (1.3.6) y, consecuentemente, las expresiones (1.3.1) – (1.3.3) para  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in S}$ .

Como puede verse en la demostración del *Teorema 1.4.1*, el análisis del tiempo de permanencia en el sistema  $M/M/1$  con disciplina constante de reintento ( $\mu = 0$  y  $\alpha > 0$ ) y llegadas negativas ( $\delta > 0$ ) es laborioso en su desarrollo, cuando son asumidas la disciplina de órbita *FCFS* y la estrategia de expulsión *RCE*. La pérdida de homogeneidad en los parámetros del modelo al considerar la disciplina lineal de reintento ( $\alpha + j\mu$ , con  $\mu > 0$  y  $\alpha \geq 0$ ) introduce notables dificultades analíticas y es, por esta causa, un problema no abordado. Sin embargo, algunas extensiones del modelo en consideración pueden ser estudiadas. El análisis de las distribuciones de los tiempos de permanencia en modelos  $M/M/1$  con disciplina constante de reintento y llegadas negativas, caracterizados por otras políticas de órbita y de expulsión diferentes a *FCFS* y *RCE*, respectivamente, tiene un especial interés. Un estudio paralelo en la cola estándar  $M/M/1$  con llegadas negativas ha sido realizado por Harrison y Pitel (1993). La cola con disciplina *FCFS* y estrategia *RCE* con la posibilidad de expulsar al cliente que ocupa el servicio sólo supone una pequeña modificación del modelo bajo consideración. Cuando la disciplina de órbita consiste en servir en el orden inverso de llegada (disciplina *LCFS*), la argumentación debe ser modificada considerablemente. Se observa que el tiempo de permanencia de un cliente bloqueado en el instante de su llegada,  $t$ , es independiente del tamaño de la órbita,  $Q(t)$ . Entonces, se requieren la distribución conjunta del número de llegadas originales y negativas ocurridas en el tiempo de duración de un servicio (ver Boxma (1984)) y la distribución dependiente del tiempo de la cola  $M/M/1$  con intensidad de llegada  $\lambda$  e intensidad de servicio  $\delta$  (ver Conolly y Langaris (1993)). Idénticas observaciones afectan a los modelos caracterizados por las disciplinas *FCFS* y *LCFS* en combinación con la estrategia que supone la anulación del cliente que ocupa la primera posición de la órbita (estrategia *RCH*). El modelo con disciplina *FCFS* y estrategia de expulsión *RCH* actuando sobre el cliente que ocupa el servicio coincide con la cola  $M/M/1$  con intensidad de llegada  $\lambda$  e intensidad de servicio  $\delta + \nu$ . Finalmente, el estudio del sistema con políticas *LCFS* y *RCH* también parece abordable combinando algunas de las anteriores observaciones. Por otra parte, otra posible modificación consiste en permitir que las llegadas negativas ocurran incluso cuando el servicio esté vacío. Entonces, es posible obtener fórmulas semi-explicitas para la distribución límite y argumentos paralelos a los empleados en el *Teorema 1.4.1* permiten analizar el tiempo de permanencia.

El método usado en el estudio del período de ocupación está inspirado en las técnicas convolutivas de Choo y Conolly (1979), posteriormente empleadas por Artalejo (1993, 1994) en las colas  $M/H_2/1$  y  $M/G/1$  con rupturas en el servicio. Debe tenerse especial cuidado cuando se utilicen las fórmulas propuestas para los momentos  $\hat{T}_{B_0A_0}^{0(k)}$ ,  $\hat{T}_{B_0A_0}^{1(k)}$ ,  $\hat{N}_{B_0A_0}^{n(k)}$ ,  $\hat{N}_{B_0A_0}^{s(k)}$ , para  $k \geq 2$ , y las covarianzas  $Cov(L^0, L^1)$  y  $Cov(N^n, N^s)$ , en el caso  $\mu > 0$  y  $\alpha \geq 0$ . La implementación numérica de las expresiones (1.5.36) – (1.5.43) y (1.5.48) – (1.5.53) implica la realización de una detallada discusión para encontrar un truncamiento preciso del sistema de ecuaciones que describe las relaciones entre los momentos de las variables aleatorias  $L^0$ ,  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$ , y las series infinitas de los esquemas recursivos dados en (1.5.36) – (1.5.43) y (1.5.48) – (1.5.53).

El estudio de las aplicaciones de los procesos regenerativos en la teoría de colas realizado en un trabajo clásico de Stidham (1972) ha sido esencial a la hora de calcular las distribuciones de probabilidad

de las cadenas de Markov en los instantes de finalización del servicio y de expulsión. Las observaciones relativas a la coincidencia entre las distribuciones  $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$  y  $\{\Pi_j\}_{j=0}^{\infty}$  han requerido el manejo del libro de Cooper (1981) y el artículo de Hordijk y Tijms (1976). La línea seguida en el análisis de los procesos de finalización y de comienzo del servicio está inspirada en Falin (1978, 1979, 1990).

La mayoría de los resultados han sido expresados de forma explícita o en términos de funciones hipergeométricas, al igual que fueron escritas las características de la cola M/M/2/2 con reintentos en Hanschke (1987) y la cola M/M/1 con reintentos y clientes no persistentes en Falin (1980). En la actualidad, es habitual que los paquetes de software en estadística o matemática aplicada incluyan esta función entre sus facilidades. Los gráficos que contiene este capítulo se han realizado con la versión 2.2 de *Mathematica* (ver Castillo y otros (1994) y Ellis y Lodi (1990)).

Finalmente, debe notarse que la propiedad de descomposición estocástica (ver Fuhrmann y Cooper (1985) y Doshi (1986, 1990)) no es verificada debido a la existencia del flujo de llegadas negativas.

## APENDICE 1

### Apéndice 1.A. Las series hipergeométricas y las series hipergeométricas generalizadas.

Este apéndice reúne las definiciones de serie hipergeométrica y serie hipergeométrica generalizada, junto con alguna nota relativa a su convergencia.

En el año 1866, Gauss define la *serie hipergeométrica*  $F(a, b; c; z)$  en los términos

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad c > 0,$$

donde  $(x)_n$  es el símbolo de Pochhammer

$$(x)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ x(x+1)\dots(x+n-1), & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

La *serie hipergeométrica generalizada* está inspirada en la anterior expresión. En concreto, viene dada por

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad b_j > 0, \quad 1 \leq j \leq q.$$

Lógicamente,  $F(a_1, a_2; b_1; z) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1 \end{matrix}; z \right)$ . En el caso  $p=q+1$ , el criterio del cociente muestra que  $|x| \leq 1$  es suficiente para la convergencia de la serie. Un texto clásico dedicado exclusivamente a las series hipergeométricas es el libro de Bailey (1972). Un resumen de propiedades y relaciones con otras funciones puede encontrarse en Abramowitz y Stegun (1972).

**Apéndice 1.B.** Expresiones para  $Cov(N^n, N^s)$  y  $Cov(L^1, N^s)$  y esquemas recursivos para los momentos de las variables aleatorias  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  en el caso  $\mu = 0$ .

En este apéndice se completan las demostraciones de los *Teoremas 1.5.1* y *1.5.2* relativos al análisis del período de ocupación en el caso  $\mu = 0$ .

**Demostración del Teorema 1.5.1.** A continuación se incluyen las demostraciones de las expresiones (1.5.6) y (1.5.7) para  $Cov(N^n, N^s)$  y  $Cov(L^1, N^s)$ , respectivamente.

Primeramente se estudia la covarianza entre las variables aleatorias  $N^n$  y  $N^s$ . El cálculo de las derivadas de las transformadas  $\phi_{ab}(0, 0, x, y)$ , dadas en las ecuaciones (1.5.8) – (1.5.12), con respecto a  $x$  e  $y$  en el punto  $x = y = 1$  permite deducir las siguientes relaciones

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{(n,s)} = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{N}_{B_1 A_0}^{(n,s)}, \quad (1.B.1)$$

$$\hat{N}_{B_1 A_0}^{(n,s)} = \hat{N}_{B_1 B_0}^{(n,s)} + \hat{N}_{B_1 B_0}^n \hat{N}_{B_0 A_0}^s + \hat{N}_{B_0 A_0}^n \hat{N}_{B_1 B_0}^s + \hat{N}_{B_0 A_0}^{(n,s)}, \quad (1.B.2)$$

$$\hat{N}_{B_1 B_0}^{(n,s)} = \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_1 B_0}^n + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_1 B_0}^{(n,s)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{B_2 B_0}^{(n,s)}, \quad (1.B.3)$$

$$\hat{N}_{B_2 B_0}^{(n,s)} = 2\hat{N}_{B_1 B_0}^n \hat{N}_{B_1 B_0}^s + 2\hat{N}_{B_1 B_0}^{(n,s)}, \quad (1.B.4)$$

$$\hat{N}_{A_1 B_0}^{(n,s)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \hat{N}_{B_1 B_0}^{(n,s)}, \quad (1.B.5)$$

donde  $\hat{N}_{ab}^r = E[N_{ab}^r]$  y  $\hat{N}_{ab}^{(n,s)} = E[N_{ab}^n N_{ab}^s]$ , con  $r$  denotando  $n$  o  $s$ .

Esquemas similares aplicados sobre (1.5.8) – (1.5.12) en los casos  $(0, 0, x, 1)$  y  $(0, 0, 1, y)$  conducen a las expresiones

$$\hat{N}_{B_1 B_0}^n = \frac{\nu}{\lambda} E[N^n], \quad \hat{N}_{A_1 B_0}^n = \frac{\nu}{\lambda + \alpha} E[N^n], \quad \hat{N}_{B_1 B_0}^s = \frac{\nu}{\lambda} (E[N^s] - 1). \quad (1.B.6)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas sobre (1.B.1) – (1.B.6) se obtiene la expresión (1.5.6).

La expresión (1.5.7) para  $Cov(L^1, N^s)$  es obtenida mediante derivación sobre las transformadas  $\phi_{ab}(0, \omega, 1, y)$  de las ecuaciones (1.5.8) – (1.5.12), respecto de  $\omega$  e  $y$ , en el punto  $\omega = 0$  e  $y = 1$ . Las relaciones resultantes son

$$\hat{S}_{B_0 A_0}^{(1,s)} = \frac{\nu}{(\lambda + \nu)^2} + \frac{\lambda}{(\lambda + \nu)^2} \hat{N}_{B_1 A_0}^s + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{S}_{B_1 A_0}^{(1,s)}, \quad (1.B.7)$$

$$\hat{S}_{B_1 A_0}^{(1,s)} = \hat{S}_{B_1 B_0}^{(1,s)} + \hat{T}_{B_0 A_0}^1 \hat{N}_{B_1 B_0}^s + \hat{T}_{B_1 B_0}^1 \hat{N}_{B_0 A_0}^s + \hat{S}_{B_0 A_0}^{(1,s)}, \quad (1.B.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{B_1 B_0}^{(1,s)} &= \frac{\nu}{(\lambda + \nu + \delta)^2} + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{A_1 B_0}^1 + \frac{\nu}{(\lambda + \nu + \delta)^2} \hat{N}_{A_1 B_0}^s + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{S}_{A_1 B_0}^{(1,s)} \\ &+ \frac{\lambda}{(\lambda + \nu + \delta)^2} \hat{N}_{B_2 B_0}^s + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{S}_{B_2 B_0}^{(1,s)}, \end{aligned} \quad (1.B.9)$$

$$\hat{S}_{B_2 B_0}^{(1,s)} = 2\hat{T}_{B_1 B_0}^1 \hat{N}_{B_1 B_0}^s + 2\hat{S}_{B_1 B_0}^{(1,s)}, \quad (1.B.10)$$

$$\hat{S}_{A_1 B_0}^{(1,s)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \hat{S}_{B_1 B_0}^{(1,s)}, \quad (1.B.11)$$

donde  $\hat{S}_{ab}^{(1,s)} = E[T_{ab}^1 N_{ab}^s]$ . Razonando sobre (1.5.8) – (1.5.12) para los casos  $(0, \omega, 1, 1)$  y  $(0, 0, 1, y)$  son deducidas las expresiones

$$\begin{aligned} \hat{T}_{A_1 B_0}^1 &= \frac{1}{\lambda + \alpha} (\nu E[L^1] - 1), \quad \hat{N}_{B_1 A_0}^s = \frac{1}{\lambda} ((\lambda + \nu) E[N^s] - \nu), \\ \hat{N}_{A_1 B_0}^s &= \frac{\nu}{\lambda + \alpha} (E[N^s] - 1), \quad \hat{N}_{B_2 B_0}^s = \frac{2\nu}{\lambda} (E[N^s] - 1). \end{aligned} \quad (1.B.12)$$

Teniendo en cuenta (1.5.14), (1.B.6) y (1.B.12) se obtiene la expresión (1.5.7) para  $Cov(L^1, N^s)$  como solución del sistema (1.B.7) – (1.B.11).

**Demostración del Teorema 1.5.2.** Los esquemas recursivos para los momentos de las variables aleatorias  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$ , omitidos en la demostración del Teorema 1.5.2, son recogidos a continuación.

En primer lugar se considerarán las expresiones (1.5.18) y (1.5.19). Si se deriva en el punto  $\omega = 0$  sobre las transformadas  $\phi_{ab}(0, \omega, 1, 1)$  del sistema (1.5.8) – (1.5.12) y se multiplica por  $(-1)^k$ , se logran las siguientes relaciones recurrentes

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k)} = \frac{k}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-1)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_1 A_0}^{1(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{T}_{B_1 A_0}^{1(k)} = \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k)} + \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(m)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-m)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k)} = \frac{k}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k-1)} + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{A_1 B_0}^{1(k)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{B_2 B_0}^{1(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{T}_{B_2 B_0}^{1(k)} = 2\hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(m)} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k-m)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{T}_{A_1 B_0}^{1(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k)}, \quad k \geq 1.$$

Efectuando algunos cálculos sobre el anterior conjunto de ecuaciones se deducen (1.5.18) y (1.5.19).

Para establecer (1.5.20) y (1.5.21) se razona de forma análoga. Tomando  $(\theta, \omega, x, y) = (0, 0, x, 1)$  en (1.5.8) – (1.5.12) y derivando en el punto  $x=1$  el sistema resultante, se tienen

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{N}_{B_1 A_0}^{n(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{B_1 A_0}^{n(k)} = \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(k)} + \hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(m)} \hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k-m)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{B_1 B_0}^{n(k)} = \frac{\delta}{\lambda + \nu + \delta} \delta_{1k} + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_1 B_0}^{n(k)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{B_2 B_0}^{n(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{B_2 B_0}^{n(k)} = 2\hat{N}_{B_1 B_0}^{n(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(m)} \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(k-m)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{A_1 B_0}^{n(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(k)}, \quad k \geq 1.$$

Manipulaciones algebraicas sobre este sistema permiten obtener las relaciones (1.5.20) y (1.5.21).

Finalmente, para el caso  $\hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k)}$ ,  $k \geq 1$ , la derivada en el punto  $y = 1$  del sistema (1.5.8) – (1.5.12) en el caso  $(\theta, \omega, x, y) = (0, 0, 1, y)$  conduce a las relaciones

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k)} = \frac{\nu}{\lambda + \nu} \delta_{1k} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{N}_{B_1 A_0}^{s(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{B_1 A_0}^{s(k)} = \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(k)} + \hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(m)} \hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k-m)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{B_1 B_0}^{s(k)} = \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \left( \hat{N}_{A_1 B_0}^{s(k)} + k \hat{N}_{A_1 B_0}^{s(k-1)} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{B_2 B_0}^{s(k)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{B_2 B_0}^{s(k)} = 2\hat{N}_{B_1 B_0}^{s(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(m)} \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(k-m)}, \quad k \geq 1,$$

$$\hat{N}_{A_1 B_0}^{s(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(k)}, \quad k \geq 1.$$

Las expresiones (1.5.22) – (1.5.24) son deducidas desde el anterior conjunto de ecuaciones mediante cálculos elementales.

**Apéndice 1.C.** Esquemas recursivos para los momentos de las variables aleatorias  $L^1$ ,  $N^n$  y  $N^s$  en el caso  $\mu > 0$ .

En los siguientes tres puntos se exponen los pasos intermedios que conducen a las expresiones (1.5.37)–(1.5.43) incluidas sin demostración en la sección 1.5.

En primer lugar se obtendrá un esquema recursivo para el cálculo de  $T_{B_0 A_0}^{1(k)}$ ,  $k \geq 1$ . Se consideran las derivadas de orden  $k$  de las ecuaciones (1.5.8), (1.5.9) y (1.5.26) – (1.5.28) con respecto a  $\omega$  en el punto  $(\theta, \omega, x, y) = (0, 0, 1, 1)$ . Si se multiplican las relaciones resultantes por  $(-1)^k$  se logra el conjunto de ecuaciones siguiente

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k)} = \frac{k}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-1)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_1 A_0}^{1(k)}, \quad k \geq 1, \quad (1.C.1)$$

$$\hat{T}_{B_1 A_0}^{1(k)} = \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k)} + \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(m)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad (1.C.2)$$

$$\hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k)} = \frac{k}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k-1)} + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{1(k)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{1(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.C.3)$$

$$\hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{1(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.C.4)$$

$$\hat{T}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{1(k)} = \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{1(k)} + \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_{i+1} B_i}^{1(m)} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{1(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \quad (1.C.5)$$

Desde (1.C.1) y (1.C.2) se deriva la relación

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k)} = \frac{1}{\nu} \left( k \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-1)} + \lambda \left( \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{T}_{B_1 B_0}^{1(m)} \hat{T}_{B_0 A_0}^{1(k-m)} \right) \right), \quad k \geq 1. \quad (1.C.6)$$

Desde (1.C.3) – (1.C.5) se deduce (1.5.38). Entonces, (1.5.37) se obtiene a partir de (1.C.6) con la ayuda de (1.5.38).

En el caso de la variable aleatoria  $N^n$ , se considera el conjunto de ecuaciones (1.5.8), (1.5.9), (1.5.26)–(1.5.28) en el punto  $(\theta, \omega, x, y) = (0, 0, x, 1)$ . Calculando la derivada  $k$ -ésima en el punto  $x = 1$  del sistema resultante se tienen

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{N}_{B_1 A_0}^{n(k)}, \quad k \geq 1, \quad (1.C.7)$$

$$\hat{N}_{B_1 A_0}^{n(k)} = \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(k)} + \hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(m)} \hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad (1.C.8)$$

$$\hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{n(k)} = \frac{\delta}{\lambda + \nu + \delta} \delta_{1k} + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{n(k)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{n(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.C.9)$$

$$\hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{n(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{n(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.C.10)$$

$$\hat{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{n(k)} = \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^{n(k)} + \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{n(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^{n(m)} \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{n(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \quad (1.C.11)$$

Desde (1.C.7) y (1.C.8) se deduce la relación

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k)} = \frac{\lambda}{\nu} \left( \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{n(m)} \hat{N}_{B_0 A_0}^{n(k-m)} \right), \quad k \geq 1. \quad (1.C.12)$$

Las igualdades (1.C.9)–(1.C.11) permiten derivar la relación recurrente (1.5.40). Como consecuencia, (1.5.39) se tiene a partir de (1.5.40) y (1.C.12).

Finalmente, el momento factorial  $k$ -ésimo de la variable aleatoria  $N^s$  se obtiene a partir del sistema que resulta de considerar el conjunto de ecuaciones (1.5.8), (1.5.9), (1.5.26)–(1.5.28) en el punto  $(\theta, \omega, x, y) = (0, 0, 1, y)$ . Si se calcula la derivada de orden  $k$  en  $y = 1$  se tienen las siguientes relaciones

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k)} = \frac{\nu}{\lambda + \nu} \delta_{1k} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{N}_{B_1 A_0}^{s(k)}, \quad k \geq 1, \quad (1.C.13)$$

$$\hat{N}_{B_1 A_0}^{s(k)} = \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(k)} + \hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(m)} \hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad (1.C.14)$$

$$\hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{s(k)} = \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{s(k)} + \frac{k\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{s(k-1)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{s(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.C.15)$$

$$\hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{s(k)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{s(k)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1, \quad (1.C.16)$$

$$\hat{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{s(k)} = \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^{s(k)} + \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{s(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^{s(m)} \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{s(k-m)}, \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \quad (1.C.17)$$

Las expresiones (1.C.13) y (1.C.14) permiten establecer

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k)} = \delta_{1k} + \frac{\lambda}{\nu} \left( \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(k)} + (1 - \delta_{1k}) \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} \hat{N}_{B_1 B_0}^{s(m)} \hat{N}_{B_0 A_0}^{s(k-m)} \right), \quad k \geq 1. \quad (1.C.18)$$

Nótese que (1.C.16) coincide con (1.5.42). Desde (1.C.15) – (1.C.17) se deduce la expresión recurrente (1.5.43). A partir de (1.5.42), (1.5.43) y (1.C.18) se obtiene (1.5.41).

**Apéndice 1.D.** Expresiones para  $Cov(L^0, L^1)$  y  $Cov(N^n, N^s)$  en el caso  $\mu > 0$ .

A continuación se demuestran las expresiones (1.5.48) – (1.5.53) incluidas en la sección 1.5.

Para deducir las expresiones (1.5.48) – (1.5.50) se calculan las correspondientes derivadas sobre las transformadas  $\phi_{ab}(\theta, \omega, 1, 1)$  del conjunto de ecuaciones (1.5.8), (1.5.9), (1.5.26) – (1.5.28), con respecto a  $\theta$  y  $\omega$ , en el punto  $\theta = \omega = 0$ . Se logran entonces las relaciones recurrentes

$$\hat{T}_{B_0 A_0}^{(0,1)} = \frac{\lambda}{(\lambda + \nu)^2} \hat{T}_{B_1 A_0}^0 + \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_1 A_0}^{(0,1)}, \quad (1.D.1)$$

$$\hat{T}_{B_1 A_0}^{(0,1)} = \hat{T}_{B_1 B_0}^{(0,1)} + \hat{T}_{B_1 B_0}^0 \hat{T}_{B_0 A_0}^1 + \hat{T}_{B_0 A_0}^0 \hat{T}_{B_1 B_0}^1 + \hat{T}_{B_0 A_0}^{(0,1)}, \quad (1.D.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{(0,1)} &= \frac{\nu}{(\lambda + \nu + \delta)^2} \hat{T}_{A_i B_{i-1}}^0 + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{(0,1)} + \frac{\lambda}{(\lambda + \nu + \delta)^2} \hat{T}_{B_{i+1} B_{i-1}}^0 \\ &\quad + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{T}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{(0,1)}, \quad i \geq 1, \end{aligned} \quad (1.D.3)$$

$$\hat{T}_{A_i B_{i-1}}^{(0,1)} = \frac{\lambda}{(\lambda + \alpha + i\mu)^2} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^1 + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^{(0,1)}, \quad i \geq 1, \quad (1.D.4)$$

$$\hat{T}_{B_{i+1}B_{i-1}}^{(0,1)} = \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^{(0,1)} + \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^0 \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^1 + \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^0 \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^1 + \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^{(0,1)}, \quad i \geq 1, \quad (1.D.5)$$

donde  $\hat{T}_{ab}^{(0,1)} = E[T_{ab}^0 T_{ab}^1]$ . A partir de (1.D.1) y (1.D.2) se deriva la siguiente igualdad

$$\hat{T}_{B_0A_0}^{(0,1)} = \frac{\lambda}{\nu} \left( \frac{1}{\lambda + \nu} \hat{T}_{B_1A_0}^0 + \hat{T}_{B_1B_0}^0 \hat{T}_{B_0A_0}^1 + \hat{T}_{B_0A_0}^0 \hat{T}_{B_1B_0}^1 + \hat{T}_{B_1B_0}^{(0,1)} \right). \quad (1.D.6)$$

Las expresiones de  $\hat{T}_{B_1A_0}^0$ ,  $\hat{T}_{B_1B_0}^0$  y  $\hat{T}_{B_1B_0}^1$  dadas en (1.5.14) continúan siendo válidas. Por tanto, a partir de (1.D.6) se obtiene

$$Cov(L^0, L^1) = \frac{\lambda}{\nu} \hat{T}_{B_1B_0}^{(0,1)} + E[L^0]E[L^1]. \quad (1.D.7)$$

Por otra parte, a partir de (1.5.31) y (1.5.32) se tienen

$$\hat{T}_{A_iB_{i-1}}^0 = \frac{1}{\lambda + \alpha + i\mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^0, \quad i \geq 1, \quad (1.D.8)$$

$$\hat{T}_{B_{i+1}B_{i-1}}^0 = (1 + \rho^{-1}) \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^0 - \frac{\nu}{\lambda} \hat{T}_{A_iB_{i-1}}^0, \quad i \geq 1. \quad (1.D.9)$$

Desde (1.D.3) – (1.D.5) se deduce que

$$\begin{aligned} \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^{(0,1)} &= \frac{i + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}}{i + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}} \rho \left( \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^0 \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^1 + \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^0 \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^1 + \frac{\nu}{(\lambda + \alpha + i\mu)^2} \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda + \nu + \delta} \left( \hat{T}_{B_{i+1}B_{i-1}}^0 + \frac{\nu}{\lambda} \hat{T}_{A_iB_{i-1}}^0 \right) + \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^{(0,1)} \right), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (1.D.10)$$

Con la ayuda de (1.D.10) se logra una expresión alternativa para (1.D.7)

$$\begin{aligned} Cov(L^0, L^1) &= E[L^0]E[L^1] + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda + \nu + \delta} \left( \nu \hat{T}_{A_iB_{i-1}}^0 + \lambda \hat{T}_{B_{i+1}B_{i-1}}^0 \right) + \lambda \left( \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^0 \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^0 \hat{T}_{B_{i+1}B_i}^1 + \frac{\nu}{(\lambda + \alpha + i\mu)^2} \hat{T}_{B_iB_{i-1}}^1 \right) \right) \left( \frac{1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}}{1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}} \right)_i \rho^i. \end{aligned} \quad (1.D.11)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (1.D.8) y (1.D.9) se deduce

$$\nu \hat{T}_{A_i B_{i-1}}^0 + \lambda \hat{T}_{B_{i+1} B_{i-1}}^0 = (\lambda + \nu + \delta) \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^0, \quad i \geq 1. \quad (1.D.12)$$

Entonces, (1.5.48) se sigue de (1.D.11) y (1.D.12).

Finalmente, reiterando (1.5.35),  $\hat{T}_{B_{i+1} B_i}^0$  es reexpresado como (1.5.49). Particularizando (1.5.38) al caso  $k = 1$  se obtiene

$$\hat{T}_{B_{i+1} B_i}^1 = \frac{i + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}}{i + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}} \rho^{-1} \hat{T}_{B_i B_{i-1}}^1 - \frac{1}{\lambda}, \quad i \geq 1. \quad (1.D.13)$$

A través de sucesivas sustituciones en (1.D.13) se deduce la expresión (1.5.50).

Para deducir (1.5.51) se considera el sistema resultante de tomar  $(\theta, \omega, x, y) = (0, 0, x, y)$  sobre el conjunto formado por las ecuaciones (1.5.8), (1.5.9) y (1.5.26) – (1.5.28). Si se calculan derivadas respecto de  $x$  e  $y$  en el punto  $x = y = 1$  se obtienen

$$\hat{N}_{B_0 A_0}^{(n,s)} = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \hat{N}_{B_1 A_0}^{(n,s)}, \quad (1.D.14)$$

$$\hat{N}_{B_1 A_0}^{(n,s)} = \hat{N}_{B_1 B_0}^{(n,s)} + \hat{N}_{B_1 B_0}^n \hat{N}_{B_0 A_0}^s + \hat{N}_{B_0 A_0}^n \hat{N}_{B_1 B_0}^s + \hat{N}_{B_0 A_0}^{(n,s)}, \quad (1.D.15)$$

$$\hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{(n,s)} = \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{(n,s)} + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{(n,s)} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \hat{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{(n,s)}, \quad i \geq 1, \quad (1.D.16)$$

$$\hat{N}_{A_i B_{i-1}}^{(n,s)} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{(n,s)}, \quad i \geq 1, \quad (1.D.17)$$

$$\hat{N}_{B_{i+1} B_{i-1}}^{(n,s)} = \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^{(n,s)} + \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^n \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^s + \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^n \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^s + \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^{(n,s)}, \quad i \geq 1, \quad (1.D.18)$$

donde  $\hat{N}_{ab}^{(n,s)} = E[N_{ab}^n N_{ab}^s]$ . Desde (1.D.14) y (1.D.15) es posible expresar  $Cov(N^n, N^s)$  en los términos

$$Cov(N^n, N^s) = E[N^n] (E[N^s] - 1) + \frac{\lambda}{\nu} \hat{N}_{B_1 B_0}^{(n,s)}. \quad (1.D.19)$$

Teniendo en cuenta (1.D.16) – (1.D.18) se tiene

$$\hat{N}_{B_1 B_0}^{(n,s)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \nu \hat{N}_{A_i B_{i-1}}^n + \lambda \left( \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^n \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^s + \hat{N}_{B_i B_{i-1}}^n \hat{N}_{B_{i+1} B_i}^s \right) \right) \frac{\left(1 + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}\right)_i}{\left(1 + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}\right)_i} \rho^i. \quad (1.D.20)$$

Derivando en el punto  $x=1$  el sistema que resulta al considerar  $(\theta, \omega, x, y) = (0, 0, x, 1)$  sobre (1.5.8), (1.5.9), (1.5.26) – (1.5.28), se logra deducir (1.5.52). Además, se tiene

$$\hat{N}_{A_i, B_{i-1}}^n = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} \hat{N}_{B_i, B_{i-1}}^n, \quad i \geq 1. \quad (1.D.21)$$

A lo largo de un razonamiento análogo se deduce (1.5.53). Finalmente, (1.5.51) es obtenida sustituyendo (1.D.20) y (1.D.21) en (1.D.19).

**Apéndice 1.E.** Análisis de la cadena encajada asociada a los instantes de expulsión.

**Demostración del Teorema 1.6.1.** A continuación se demuestra la expresión (1.6.17) que fue necesaria en el Teorema 1.6.1 para obtener la distribución de probabilidad del número de clientes en el sistema justo después de un instante de expulsión,  $\{\tilde{\pi}_j\}_{j=1}^\infty$ .

El razonamiento está basado en la derivación del conjunto de ecuaciones (1.6.6) – (1.6.10) con respecto a  $y$ . Poniendo  $x = y = 1$  en el sistema resultante, se tienen

$$E \left[ \tilde{N}_{B_0, A_0}^j \right] = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} E \left[ \tilde{N}_{B_1, A_0}^j \right], \quad j \geq 1, \quad (1.E.1)$$

$$E \left[ \tilde{N}_{B_1, A_0}^j \right] = E \left[ \tilde{N}_{B_1, B_0}^j \right] + E \left[ \tilde{N}_{B_0, A_0}^j \right], \quad j \geq 1, \quad (1.E.2)$$

$$E \left[ \tilde{N}_{B_i, B_{i-1}}^j \right] = \frac{\delta}{\lambda + \nu + \delta} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} E \left[ \tilde{N}_{B_{i+1}, B_{i-1}}^j \right] + \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} E \left[ \tilde{N}_{A_i, B_{i-1}}^j \right], \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad (1.E.3)$$

$$E \left[ \tilde{N}_{B_{i+1}, B_{i-1}}^j \right] = E \left[ \tilde{N}_{B_{i+1}, B_i}^j \right] + E \left[ \tilde{N}_{B_i, B_{i-1}}^j \right], \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad (1.E.4)$$

$$E \left[ \tilde{N}_{A_i, B_{i-1}}^j \right] = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} E \left[ \tilde{N}_{B_i, B_{i-1}}^j \right], \quad i \geq 1, \quad j \geq 1. \quad (1.E.5)$$

A partir de (1.E.1) y (1.E.2) se deduce

$$E \left[ \tilde{N}_{B_0, A_0}^j \right] = \frac{\lambda}{\nu} E \left[ \tilde{N}_{B_1, B_0}^j \right], \quad j \geq 1. \quad (1.E.6)$$

De forma semejante, desde (1.E.3) – (1.E.5) se demuestra que

$$E \left[ \tilde{N}_{B_i B_{i-1}}^j \right] = \frac{i + \frac{\lambda + \alpha}{\mu}}{i + \frac{\alpha + \delta \rho}{\mu}} \rho \left( \frac{\delta}{\lambda} \delta_{ij} + E \left[ \tilde{N}_{B_{i+1} B_i}^j \right] \right), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1. \quad (1.E.7)$$

De este modo, sucesivas sustituciones de (1.E.7) sobre (1.E.6) conducen a la expresión (1.6.17).

## BIBLIOGRAFIA

- M. Abramowitz and I.A. Stegun, eds. (1972), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc.
- J.R. Artalejo (1993), Explicit formulae for the characteristics of the  $M/H_2/1$  retrial queue, Journal of the Operational Research Society **44**, 309-313.
- J.R. Artalejo (1994), New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers, Statistica Neerlandica **48**, 23-36.
- S. Asmussen (1987), Applied Probability and Queues, John Wiley and Sons.
- W.N. Bailey (1972), Generalized Hypergeometric Series, Hafner Publishing Company.
- O.J. Boxma (1984), The joint arrival and departure process for the  $M/M/1$  queue, Statistica Neerlandica **38**, 199-208.
- E. Castillo, A. Iglesias, J.M. Gutierrez, E. Alvarez y A. Cobo (1994), Mathematica, Editorial Paraninfo.
- J.W. Cohen (1982), The Single Server Queue, North-Holland.
- B.W. Conolly and C. Langaris (1993), On a new formula for the transient state probabilities for  $M/M/1$  queues and computational implications, Journal of Applied Probability **30**, 237-246.
- R.B. Cooper (1981), Introduction to Queueing Theory, Edward Arnold.
- Q.H. Choo and B.W. Conolly (1979), New results in the theory of repeated orders queueing systems, Journal of Applied Probability **16**, 631-640.
- B.T. Doshi (1986), Queueing systems with vacations - A survey, Queueing Systems **1**, 29-66.
- B.T. Doshi (1990), Single server queues with vacations, in: Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems (H. Takagi, ed.), Elsevier Science, 217-265.
- W. Ellis and E. Lodi (1990), A Tutorial Introduction to Mathematica, Brooks/Cole.
- G.I. Falin (1978), The output flow of a single-line queueing system when there are secondary orders, Engineering Cybernetics Review **16**, 64-67.
- G.I. Falin (1979), Effect of the recurrent calls on output flow of a single channel system of mass service, Engineering Cybernetics Review **17**, 99-103.
- G.I. Falin (1980), An  $M/M/1$  queue with repeated calls in the presence of persistence function, Paper 1606-80, All-Union Institute for Scientific and Technical Information, Moscow (en ruso).
- G.I. Falin (1990), A survey of retrial queues, Queueing Systems **7**, 127-168.
- S.W. Fuhrmann and R.B. Cooper (1985), Stochastic decompositions in the  $M/G/1$  queue with generalized Vacations, Operations Research **33**, 1117-1129.
- D. Gross and C.M. Harris (1985), Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley and Sons.
- T. Hanschke (1987), Explicit formulas for the characteristics of the  $M/M/2/2$  queue with repeated attempts, Journal of Applied Probability **24**, 486-494.
- P.G. Harrison and E. Pitel (1993), Sojourn times in single-server queues with negative customers, Journal of Applied Probability **30**, 943-963.
- A. Hordijk and H.C. Tijms (1976), A simple proof of the equivalence of the limiting distributions of the continuous-time and the embedded process of the queue size in the  $M/G/1$  queue, Statistica Neerlandica **30**, 97-100.
- L. Kleinrock (1975), Queueing Systems, Vol. I: Theory, John Wiley and Sons.
- L. Kleinrock (1976), Queueing Systems, Vol. II: Computer Applications, John Wiley and Sons.
- N.U. Prabhu (1965), Queues and Inventories, John Wiley and Sons.
- T.L. Saaty (1961), Elements of Queueing Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc.

S. Stidham, Jr. (1972), Regenerative processes in the theory of queues, with applications to the alternating-priority queue, *Advances in Applied Probability* **4**, 542-577.

## **Capítulo 2. Sistema M/G/1 con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento**

### **2.1 Introducción**

### **2.2 Descripción del modelo matemático**

### **2.3 Distribución límite y primeros momentos**

### **2.4 Esquema recursivo para calcular las probabilidades límite**

### **2.5 Resultados computacionales**

### **2.6 Comentarios y notas bibliográficas**

#### **Apéndice 2**

#### **Bibliografía**

## Capítulo 2

# Sistema $M/G/1$ con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento

### 2.1 Introducción

Este capítulo tiene como objetivo estudiar la distribución límite del sistema de colas  $M/G/1$  con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento cuando se asume la estrategia de expulsión  $RCE$ .

El modelo analizado es la única generalización abordable de la cola Markoviana estudiada en el capítulo anterior, en el sentido de reemplazar una distribución exponencial por una distribución positiva arbitraria. Debe señalarse que la presencia de un flujo de llegadas negativas implica la destrucción de la estructura matricial de tipo  $M/G/1$  y que la distribución del proceso en tiempo continuo que describe el número de clientes en el sistema no coincide con la distribución del proceso encajado en los instantes de finalización del servicio.

Cuando en la sección 1.3 se consideró la cola  $M/M/1$  con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento, fue posible analizar su distribución límite en virtud de la propiedad de pérdida de memoria de la ley exponencial. Sin embargo, la consideración de una distribución general de servicio causa importantes dificultades analíticas, cuando la estrategia de expulsión consiste en anular al cliente que ocupa la última posición de la órbita. Debe notarse que la incidencia real de la estrategia  $RCE$  sobre la distribución límite viene determinada por la imposibilidad de expulsar al cliente que está siendo atendido.

A continuación se resume la organización del resto del capítulo. En la sección 2.2 se describe el modelo matemático de tipo  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y llegadas negativas. La distribución límite es estudiada en la sección 2.3. Los argumentos empleados están basados en el método de la variable suplementaria y conducen a expresiones cerradas para las funciones generatrices de la distribución límite de  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , en términos de la solución de una ecuación integral de Fredholm. En la sección 2.4 se desarrolla un esquema recursivo para el cálculo de la distribución límite basado en la teoría de *procesos regenerativos*. Los resultados computacionales expuestos en la sección 2.5 pretenden ilustrar un doble objetivo. En primer lugar se muestra que la distribución límite del modelo bajo consideración es

satisfactoriamente aproximada mediante la correspondiente distribución del modelo truncado  $M/G/1/K$ , donde  $K$  representa la capacidad de la órbita. En segundo lugar se ilustra la incidencia de los parámetros sobre las medidas de eficacia del sistema. Finalmente, en la sección 2.6 se incluyen algunos comentarios y notas bibliográficas.

## 2.2 Descripción del modelo matemático

Se considera un modelo de colas con un único servidor y dos procesos de Poisson de llegadas originales y negativas con intensidades  $\lambda > 0$  y  $\delta \geq 0$ , respectivamente. Cuando una llegada original encuentra el servidor ocupado abandona el área de servicio para unirse a la órbita. Se asume la disciplina lineal de reintento; por ello, el tiempo transcurrido entre dos reintentos consecutivos está exponencialmente distribuido con parámetro  $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$ , cuando la órbita está formada por  $j$  clientes. El flujo de llegadas negativas sólo tiene efecto sobre el sistema cuando el servicio está ocupado. Entonces, se produce la expulsión del cliente de la órbita, si existe alguno en ella, que ocupa la última posición (estrategia *RCE*). Los tiempos de servicio son generales e independientes, con función de distribución continua  $B(t)$  ( $B(0) = 0$ ), función de densidad  $b(t)$ , momentos  $\beta_k$ ,  $k \geq 1$ , y transformada de Laplace-Stieltjes  $\beta(\theta)$ . Los procesos de llegadas originales y negativas, los intervalos separando sucesivos reintentos y los tiempos de servicio son independientes.

El modelo descrito engloba a diferentes sistemas de colas que pueden obtenerse mediante la particularización de los parámetros  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\delta$ . El sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento corresponde al caso  $\delta = 0$ . Entonces, las particularizaciones  $\alpha = 0$  y  $\mu = 0$  conducen a las disciplinas clásica y constante, respectivamente. La cola  $M/G/1$  con disciplina constante, donde el cliente que ocupa la última posición de la órbita es no-persistente, es deducida cuando  $\mu = 0$  y  $\delta = (1 - H)\alpha$ ,  $H \in (0, 1)$ . El caso  $B(t) = 1 - e^{-\nu t}$ ,  $t > 0$ ,  $\nu > 0$ , conduce a la cola  $M/M/1$  con llegadas negativas y reintentos estudiada en el capítulo 1. Finalmente, los correspondientes modelos de colas con línea de espera son obtenidos como el caso límite  $\alpha \rightarrow \infty$  y/o  $\mu \rightarrow \infty$ .

En cada instante  $t \geq 0$ , el estado del sistema puede ser descrito mediante el proceso Markoviano  $X = \{X(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t), \xi(t)), t \geq 0\}$ , donde las variables  $C(t)$  y  $Q(t)$  fueron introducidas en la sección 1.2 y  $\xi(t)$  se define, cuando  $C(t) = 1$ , como la longitud del intervalo transcurrido entre el instante de comienzo del servicio en desarrollo y el instante  $t$ . El conjunto  $S = \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$  es el espacio de estados de  $X$ . Si se omite la variable aleatoria  $\xi(t)$ , entonces  $Y = \{Y(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$  es un proceso semi-Markoviano con espacio de estados  $\mathcal{E} = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ .

## 2.3 Distribución límite y primeros momentos

Esta sección está dedicada al análisis de la distribución límite del proceso  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  mediante el método de la variable suplementaria. Adicionalmente, se deducirán sus primeros momentos.

En la *Figura 2.3.1* se muestra el esquema de transiciones entre los estados del proceso  $Y$ . La función  $\eta(x)$  representa la probabilidad condicional de finalización del servicio cuando  $\xi(t) = x$ . Entonces, se tiene que  $\eta(x) = b(x)/(1 - B(x))$ .

La distribución del proceso  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  viene definida por las probabilidades

$$P_{0j}(t) = P(C(t) = 0, Q(t) = j), \quad t \geq 0, j \geq 0, \quad (2.3.1)$$

y las densidades probabilísticas

$$P_{1j}(t, x) = P(C(t) = 1, Q(t) = j, x \leq \xi(t) < x + \Delta x), \quad t \geq 0, x \geq 0, j \geq 0. \quad (2.3.2)$$

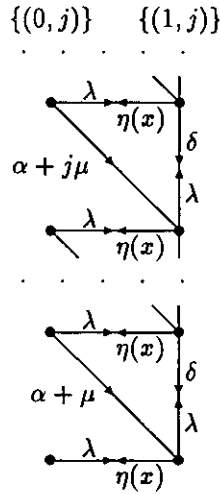


Figura 2.3.1. Espacio de estados y transiciones

Los argumentos que a continuación se exponen están basados en la continuidad del movimiento del proceso  $X$ , sobre el espacio de estados  $S$ , en un intervalo infinitesimal de tiempo  $(t, t + \Delta)$  y permiten obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que determina la distribución del proceso. Con la ayuda de la Figura 2.3.1 se deducen las siguientes ecuaciones:

$$P_{0j}(t + \Delta) = P_{0j}(t)(1 - \lambda\Delta)(1 - (\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu)\Delta) + \int_0^\infty P_{1j}(t, x)\eta(x)\Delta dx + o(\Delta), \quad j \geq 0, \quad (2.3.3)$$

$$P_{1j}(t + \Delta, x + \Delta) = P_{1j}(t, x)(1 - \lambda\Delta)(1 - \eta(x)\Delta)(1 - (1 - \delta_{0j})\delta\Delta) + (1 - \delta_{0j})P_{1,j-1}(t, x)\lambda\Delta + P_{1,j+1}(t, x)\delta\Delta + o(\Delta), \quad j \geq 0, \quad (2.3.4)$$

donde  $o(\Delta)$  verifica  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} o(\Delta)/\Delta = 0$ . Para demostrar la validez de las igualdades (2.3.3) y (2.3.4) debe observarse que el estado  $(0, j)$ ,  $j \geq 0$ , puede alcanzarse desde el estado  $(0, j)$  (con probabilidad  $(1 - \lambda\Delta)(1 - (\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu)\Delta) + o(\Delta)$ ) y desde el estado  $(1, j)$  (con probabilidad  $\int_0^\infty P_{1j}(t, x)\eta(x)\Delta dx + o(\Delta)$ ). Análogamente, el estado  $(1, j, x)$ ,  $x > 0$ ,  $j \geq 0$ , sólo puede ser alcanzado desde  $(1, j, x)$  (con probabilidad  $(1 - \lambda\Delta)(1 - \eta(x)\Delta)(1 - (1 - \delta_{0j})\delta\Delta) + o(\Delta)$ ), desde  $(1, j - 1, x)$  (con probabilidad  $(1 - \delta_{0j})\lambda\Delta + o(\Delta)$ ) y desde  $(1, j + 1, x)$  (con probabilidad  $\delta\Delta + o(\Delta)$ ). Entonces, aplicando la ley de la probabilidad total se obtienen las relaciones (2.3.3) y (2.3.4).

Reagrupando términos en (2.3.3) y (2.3.4), dividiendo por  $\Delta$  y haciendo  $\Delta \rightarrow 0$ , se tienen

$$\frac{dP_{0j}(t)}{dt} + (\lambda + \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu) P_{0j}(t) = \int_0^\infty P_{1j}(t, x)\eta(x)dx, \quad j \geq 0, \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial P_{1j}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_{1j}(t, x)}{\partial x} + (\lambda + \delta(1 - \delta_{0j}) + \eta(x))P_{1j}(t, x) = (1 - \delta_{0j})\lambda P_{1,j-1}(t, x) + \delta P_{1,j+1}(t, x), \quad j \geq 0. \quad (2.3.6)$$

Argumentos semejantes conducen, cuando  $\xi(t) = 0$ , a la relación

$$P_{1j}(t, 0) = \lambda P_{0j}(t) + (\alpha + (j + 1)\mu)P_{0,j+1}(t), \quad j \geq 0. \quad (2.3.7)$$

Adicionalmente, se considera la condición de normalización

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left( P_{0j}(t) + \int_0^{\infty} P_{1j}(t, x) dx \right) = 1. \quad (2.3.8)$$

A continuación se introducen algunas definiciones y notaciones de interés. Si la condición de estabilidad es conocida, entonces las probabilidades límite  $P_{0j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{0j}(t)$ ,  $j \geq 0$ , y las densidades probabilísticas límite  $P_{1j}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{1j}(t, x)$ ,  $x \geq 0$ ,  $j \geq 0$ , existen y son positivas. Sean las funciones generatrices

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{0j} z^j, & |z| \leq 1, \\ P_1(z, x) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(x) z^j, & |z| \leq 1, \\ P_1(z) &= \int_0^{\infty} P_1(z, x) dx, & |z| \leq 1. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Haciendo  $t \rightarrow \infty$  sobre las ecuaciones (2.3.5)-(2.3.8) y considerando las funciones generatrices definidas en (2.3.9), es posible deducir las ecuaciones

$$\mu z P_0'(z) + (\lambda + \alpha)P_0(z) = \alpha P_{00} + \int_0^{\infty} P_1(z, x) \eta(x) dx, \quad (2.3.10)$$

$$\frac{\partial P_1(z, x)}{\partial x} + (\gamma(z) + \eta(x))P_1(z, x) = \delta z^{-1}(z - 1)P_{10}(x), \quad (2.3.11)$$

$$\mu z P_0'(z) + (\lambda z + \alpha)P_0(z) = \alpha P_{00} + z P_1(z, 0), \quad (2.3.12)$$

$$P_0(1) + P_1(1) = 1, \quad (2.3.13)$$

donde  $\gamma(z) = (1 - z)(\lambda - \delta z^{-1})$ .

La solución de la ecuación diferencial (2.3.11) viene dada por

$$P_1(z, x) = \left( P_{10}(z) + \delta z^{-1}(z - 1) \int_0^x \frac{P_{10}(u)}{1 - B(u)} e^{\gamma(z)u} du \right) (1 - B(x)) e^{-\gamma(z)x}. \quad (2.3.14)$$

Por otra parte, integrando ambos miembros de la igualdad (2.3.11) y observando que  $P_1(z, \infty) = 0$ , se tiene

$$\int_0^{\infty} P_1(z, x)\eta(x)dx + \gamma(z)P_1(z) = P_1(z, 0) + \delta z^{-1}(z - 1)P_{10}. \quad (2.3.15)$$

A partir de (2.3.10) y (2.3.12) se deduce

$$\int_0^{\infty} P_1(z, x)\eta(x)dx = zP_1(z, 0) + \lambda(1 - z)P_0(z). \quad (2.3.16)$$

Sustituyendo (2.3.16) en (2.3.15) se tiene

$$zP_1(z, 0) = \lambda z P_0(z) + (\lambda z - \delta)P_1(z) + \delta P_{10}. \quad (2.3.17)$$

Entonces, mediante la particularización de las expresiones (2.3.14) y (2.3.17), en el punto  $z = 1$ , y la relación (2.3.13), se obtiene

$$P_0(1) = 1 - P_1(1, 0)\beta_1, \quad (2.3.18)$$

donde

$$P_1(1, 0) = \frac{\lambda + \delta P_{10}}{1 + \delta\beta_1}.$$

Debe observarse que para conocer la función generatriz  $P_1(z, x)$  es necesario el conocimiento previo de  $P_{10}(x)$  y de  $P_1(z, 0)$ . El procedimiento habitual para determinar  $P_{10}(x)$  consiste en calcular  $P_{10}(x) = \lim_{z \rightarrow 0} P_1(z, x)$ . Sin embargo, la singularidad de la función  $\gamma(z)$  en el punto  $z = 0$  imposibilita resolver el límite anterior.

El siguiente paso consiste en determinar la función  $P_1(z, 0)$ . Con esta finalidad se introducen las siguientes funciones auxiliares

$$\phi(z, x) = \int_0^x \frac{P_{10}(u)}{1 - B(u)} e^{\gamma(z)u} du, \quad (2.3.19)$$

$$\tilde{\phi}(z) = \int_0^{\infty} b(x) e^{-\gamma(z)x} \phi(z, x) dx. \quad (2.3.20)$$

Si se multiplica (2.3.14) por la función  $\eta(x)$  y se integra con respecto a  $x$ , se obtiene la relación

$$\int_0^{\infty} P_1(z, x)\eta(x)dx = \beta(\gamma(z))P_1(z, 0) + \delta z^{-1}(z - 1)\tilde{\phi}(z), \quad \text{Re}(\gamma(z)) \geq 0. \quad (2.3.21)$$

Entonces, a partir de las expresiones (2.3.16) y (2.3.21), se deduce que

$$P_1(z, 0) = \frac{(z - 1)(\lambda P_0(z) + \delta z^{-1}\tilde{\phi}(z))}{z - \beta(\gamma(z))}, \quad \text{Re}(\gamma(z)) \geq 0. \quad (2.3.22)$$

Para analizar el caso  $Re(\gamma(z)) < 0$ , se definen la función

$$Q(z, x) = \frac{P_1(z, x)}{1 - B(x)},$$

y su transformada de Laplace-Stieltjes

$$\tilde{Q}(z, \theta) = \int_0^{\infty} e^{-\theta x} Q(z, x) dx, \quad Re(\theta) > 0.$$

La ecuación diferencial (2.3.11) puede ser reescrita en los términos

$$\frac{\partial Q(z, x)}{\partial x} + \gamma(z)Q(z, x) = \delta z^{-1}(z - 1) \frac{P_{10}(x)}{1 - B(x)}, \quad Re(\gamma(z)) < 0. \quad (2.3.23)$$

Tomando transformadas de Laplace-Stieltjes sobre la ecuación diferencial (2.3.23) y observando que  $|Q(z, x)| \leq P_1(1, 0) < \infty$ , es posible deducir la expresión

$$\tilde{Q}(z, \theta) = (\theta + \gamma(z))^{-1} \left( P_1(z, 0) + \delta z^{-1}(z - 1) \int_0^{\infty} \frac{P_{10}(x)}{1 - B(x)} e^{-\theta x} dx \right), \quad Re(\theta) > 0, \quad Re(\gamma(z)) < 0. \quad (2.3.24)$$

Para cada valor fijo de  $\theta$ , la función  $f(z, \theta) = \theta + \gamma(z)$  tiene una única singularidad,  $z_1(\theta) = (2\lambda)^{-1}(\theta + \lambda + \delta - \sqrt{(\theta + \lambda + \delta)^2 - 4\lambda\delta})$ , en el interior del disco unidad. Como  $\tilde{Q}(z, \theta)$  debe estar definida cuando  $Re(\theta) > 0$  y  $Re(\gamma(z)) < 0$ , y la función  $f(z, \theta)$  se anula cuando  $z = z_1(\theta)$  (es decir, cuando  $\theta = -\gamma(z)$ ), es necesario que se verifique la igualdad

$$P_1(z, 0) + \delta z^{-1}(z - 1) \int_0^{\infty} \frac{P_{10}(x)}{1 - B(x)} e^{\gamma(z)x} dx = 0.$$

Entonces, se obtiene

$$P_1(z, 0) = \delta z^{-1}(1 - z)\phi(z, \infty), \quad Re(\gamma(z)) < 0. \quad (2.3.25)$$

Debe observarse que las relaciones (2.3.22) y (2.3.25) proporcionan la expresión de la función  $P_1(z, x)$  en términos de  $P_0(z)$  y de  $P_{10}(x)$ . El siguiente resultado permite determinar  $P_{10}(x)$  como solución de una ecuación integral.

**Teorema 2.3.1.** *La función  $P_{10}(x)/P_0(z(\theta))$  es solución de la ecuación integral de Fredholm de primer orden definida por*

$$\int_0^{\infty} G(z(\theta), x) \frac{P_{10}(x)}{P_0(z(\theta))} dx = \lambda z(\theta), \quad Re(\theta) > 0, \quad (2.3.26)$$

siendo

$$G(z, x) = \frac{\delta}{1 - B(x)} \left( (b * e^{\gamma(z)})(x) - z e^{\gamma(z)x} \right), \quad (2.3.27)$$

y

$$z(\theta) = \frac{\theta + \lambda + \delta - \sqrt{(\theta + \lambda + \delta)^2 - 4\lambda\delta}}{2\lambda}$$

Además, los valores  $z(\theta) = \rho e^{i\omega}$  son tales que  $\rho \in (0, \rho_0(\omega))$  y  $\cos(\omega) > 0$ , siendo  $\rho_0(\omega) = (2\lambda\cos(\omega))^{-1} \times (\lambda + \delta - \sqrt{(\lambda + \delta)^2 - 4\lambda\delta\cos^2(\omega)})$ .

**Demostración.** En primer lugar se estudiará el rango de  $z$  para el cual  $Re(\gamma(z)) < 0$ . La representación  $z = \rho e^{i\omega}$  permite escribir  $g(\rho, \omega) = Re(\gamma(z))$  como

$$g(\rho, \omega) = \frac{(\lambda + \delta)\rho - (\lambda\rho^2 + \delta)\cos(\omega)}{\rho}$$

Es claro que  $Re(\gamma(z)) < 0$  si y sólo si  $\rho g(\rho, \omega) < 0$ . Para cada valor fijo de  $\omega$ , sean  $\rho_0(\omega)$  y  $\rho_1(\omega)$  las raíces del polinomio  $h(\rho) = \lambda\cos(\omega)\rho^2 - (\lambda + \delta)\rho + \delta\cos(\omega)$ . Entonces, es claro que la condición  $\cos(\omega) > 0$  es necesaria para que  $Re(\gamma(z)) < 0$ , en cuyo caso  $0 < \rho_0(\omega) \leq 1 \leq \rho_1(\omega)$  (ver la *Figura 2.3.2*). Por ello,  $\rho g(\rho, \omega) < 0$  equivale a considerar los valores de  $z$  con módulo  $\rho \in (0, \rho_0(\omega)) \cup (\rho_1(\omega), +\infty)$  y argumento  $\omega$  tal que  $\cos(\omega) > 0$ . Como  $|z| \leq 1$ , se concluye que si  $Re(\gamma(z)) < 0$  entonces  $z$  pertenece al interior de la región acotada por la curva  $\rho_0(\omega)$ .

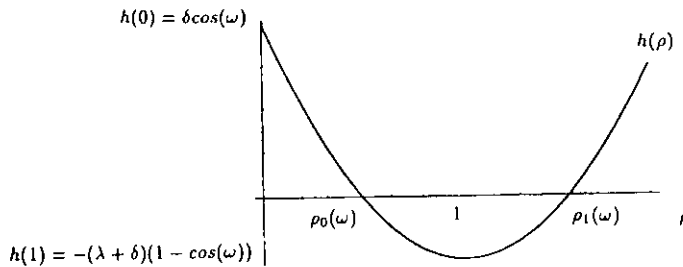


Figura 2.3.2. Raíces  $\rho_0(\omega)$  y  $\rho_1(\omega)$

Utilizando las relaciones (2.3.16) y (2.3.25) se obtiene

$$\int_0^\infty b(x)Q(z, x)dx = (1 - z)(\lambda P_0(z) + \delta\phi(z, \infty)), \quad Re(\gamma(z)) < 0. \tag{2.3.28}$$

Haciendo uso de (2.3.14) y (2.3.25), se deduce la igualdad

$$Q(z, x) = \delta z^{-1}(1 - z) \int_x^\infty \frac{P_{10}(u)}{1 - B(u)} e^{\gamma(z)(u-x)} du, \quad Re(\gamma(z)) < 0. \tag{2.3.29}$$

Multiplicando (2.3.29) por  $b(x)$  e integrando con respecto a  $x$ , se tiene

$$\int_0^\infty b(x)Q(z, x)dx = \delta z^{-1}(1 - z) \int_0^\infty \frac{P_{10}(x)}{1 - B(x)} (b * e^{\gamma(z)})(x)dx, \quad Re(\gamma(z)) < 0, \tag{2.3.30}$$

donde \* denota el signo de convolución; es decir,

$$(b * e^{\gamma(z)})(x) = \int_0^x b(u)e^{\gamma(z)(x-u)} du.$$

Entonces, el resultado se sigue directamente a partir de (2.3.28) y (2.3.30). □

La ecuación integral de Fredholm definida en el *Teorema 2.3.1* contiene la información suficiente para determinar  $P_{10}(x)$ . Inicialmente, es preciso calcular la función  $\tau(x) = c_0^{-1}P_{10}(x)$ ,  $c_0 = P_0(z(\theta_0))$ , como la solución numérica de la ecuación integral (2.3.26), para algún valor fijo  $\theta_0$  tal que  $Re(\theta_0) > 0$  (es decir,  $Re(z(\theta_0)) < 0$ ). El criterio para la elección de  $\theta_0$  está basado en las siguientes observaciones.

La existencia de las funciones  $\tilde{\phi}(z)$  y  $\beta(\gamma(z))$  está asegurada cuando  $|z| \leq 1$  y  $Re(\gamma(z)) \geq 0$ . Sin embargo, esta región del disco unidad puede ser ampliada dependiendo de la distribución de servicio. Por ejemplo, en el caso  $B(t) = 1 - e^{-\nu t}$ ,  $t > 0$ ,  $\nu > 0$ ,  $\tilde{\phi}(z)$  y  $\beta(\gamma(z))$  convergen para aquellos valores  $z$  tales que  $|z| \leq 1$  y  $Re(\gamma(z)) > -\nu$ . Una situación similar se tiene cuando la distribución del tiempo de servicio es Coxian-2 y Gamma.

En lo que sigue se asume la existencia de un valor  $\varepsilon > 0$  tal que las funciones  $\tilde{\phi}(z)$  y  $\beta(\gamma(z))$  convergen sobre  $R_\varepsilon = \{z/ |z| \leq 1, Re(\gamma(z)) > -\varepsilon\}$ . Debe notarse que entonces la relación (2.3.22) es válida sobre el recinto  $R_\varepsilon$ . Adicionalmente, es posible asegurar la obtención de  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , en un intervalo  $(\varepsilon', 1]$  que permite calcular los valores medios de la distribución límite de  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , mediante la derivación de  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , en el punto  $z = 1$ . Es sencillo probar que

$$\varepsilon' = \frac{\lambda + \delta + \varepsilon - \sqrt{(\lambda + \delta + \varepsilon)^2 - 4\lambda\delta}}{2\lambda}.$$

El valor  $\theta_0$  será seleccionado de forma que  $Re(\theta_0) > 0$  y  $z(\theta_0) \in (\varepsilon', 1)$ . Entonces, la función generatriz  $P_0(z)$  admitirá ser expresada en términos de  $\tau(x)$  y la constante  $c_0$  podrá ser calculada de acuerdo con su definición,  $c_0 = P_0(z(\theta_0))$ .

Sea la función  $\psi(z)$  definida por

$$\psi(z) = \int_0^\infty b(x) \int_0^x \frac{\tau(u)}{1 - B(u)} e^{\gamma(z)(u-x)} du dx. \quad (2.3.31)$$

Entonces, es posible establecer la igualdad

$$\tilde{\phi}(z) = c_0 \psi(z). \quad (2.3.32)$$

Tomando  $z \rightarrow 0$  sobre la relación (2.3.10) se obtiene

$$P_{00} = c_0 \lambda^{-1} \int_0^\infty \frac{\tau(x)}{1 - B(x)} b(x) dx. \quad (2.3.33)$$

Finalmente, la definición de  $\tilde{\phi}(z)$  permite obtener la probabilidad  $P_{10}$  como

$$P_{10} = \tilde{\phi}(1). \quad (2.3.34)$$

La función generatriz  $P_0(z)$  es calculada en el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.2.** *i) Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , entonces*

$$P_0(z) = z^{-\alpha/\mu} \left( \delta\mu^{-1} \int_z^1 u^{\alpha/\mu-1} \frac{(1-u)\tilde{\phi}(u)}{u-\beta(\gamma(u))} \exp \left\{ \lambda\mu^{-1} \int_z^u \frac{1-\beta(\gamma(v))}{v-\beta(\gamma(v))} dv \right\} du \right. \\ \left. + P_0(1) \exp \left\{ \lambda\mu^{-1} \int_z^1 \frac{1-\beta(\gamma(v))}{v-\beta(\gamma(v))} dv \right\} - \alpha\mu^{-1} P_{00} \int_z^1 u^{\alpha/\mu-1} \exp \left\{ \lambda\mu^{-1} \int_z^u \frac{1-\beta(\gamma(v))}{v-\beta(\gamma(v))} dv \right\} du \right), \quad (2.3.35)$$

donde  $\tilde{\phi}(z)$ ,  $P_0(1)$  y  $P_{00}$  vienen dadas por (2.3.32), (2.3.18) y (2.3.33), respectivamente, siendo

$$c_0 = \frac{1 + (\delta - \lambda)\beta_1}{1 + \delta\beta_1} \left( z(\theta_0)^{\alpha/\mu} \exp \left\{ \lambda\mu^{-1} \int_1^{z(\theta_0)} \frac{1-\beta(\gamma(v))}{v-\beta(\gamma(v))} dv \right\} \right. \\ \left. + \frac{\delta\beta_1}{1 + \delta\beta_1} \int_0^\infty \tau(x) dx + \alpha(\lambda\mu)^{-1} \int_0^\infty \frac{\tau(x)}{1-B(x)} b(x) dx \int_{z(\theta_0)}^1 u^{\alpha/\mu-1} \exp \left\{ \lambda\mu^{-1} \int_1^u \frac{1-\beta(\gamma(v))}{v-\beta(\gamma(v))} dv \right\} du \right. \\ \left. - \delta\mu^{-1} \int_{z(\theta_0)}^1 u^{\alpha/\mu-1} \frac{(1-u)\psi(u)}{u-\beta(\gamma(u))} \exp \left\{ \lambda\mu^{-1} \int_1^u \frac{1-\beta(\gamma(v))}{v-\beta(\gamma(v))} dv \right\} du \right)^{-1}, \quad (2.3.36)$$

donde  $\psi(z)$  viene dada por (2.3.31).

ii) Si  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , entonces

$$P_0(z) = \frac{\alpha(z - \beta(\gamma(z)))P_{00} + \delta(z - 1)\tilde{\phi}(z)}{\lambda z(1 - \beta(\gamma(z))) + \alpha(z - \beta(\gamma(z)))}, \quad (2.3.37)$$

donde  $\tilde{\phi}(z)$  y  $P_{00}$  vienen dadas por (2.3.32) y (2.3.33), respectivamente, siendo

$$c_0 = (\alpha + (\lambda + \alpha)(\delta - \lambda)\beta_1) \left( \delta(1 + (\lambda + \alpha)\beta_1) \int_0^\infty \tau(x) dx + \alpha(1 + \delta\beta_1) \int_0^\infty \frac{\tau(x)}{1-B(x)} b(x) dx \right)^{-1}. \quad (2.3.38)$$

**Demostración.** A partir de (2.3.12) y (2.3.22), se obtiene la ecuación diferencial

$$\mu z(z - \beta(\gamma(z)))P_0'(z) + (\lambda z(1 - \beta(\gamma(z))) + \alpha(z - \beta(\gamma(z)))) P_0(z) = \delta(z - 1)\tilde{\phi}(z) \\ + \alpha(z - \beta(\gamma(z)))P_{00}. \quad (2.3.39)$$

En primer lugar, se analiza el caso  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ . Operando sobre las relaciones (2.3.18) se obtiene la expresión alternativa

$$P_1(1, 0) = \frac{\lambda P_0(1) + \delta P_{10}}{1 + (\delta - \lambda)\beta_1}. \quad (2.3.40)$$

Entonces, se observa que es necesario que  $(\lambda - \delta)\beta_1 < 1$ . La función  $f(z) = z - \beta(\gamma(z))$  tiene una sola raíz,  $\bar{z} = 1$ , en el recinto  $R_c$ . Entonces, es posible resolver la ecuación diferencial (2.3.39) en el intervalo  $(\varepsilon', 1]$ , puesto que

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{\lambda z(1 - \beta(\gamma(z))) + \alpha(z - \beta(\gamma(z)))}{z - \beta(\gamma(z))} = \frac{\alpha + (\lambda + \alpha)(\delta - \lambda)\beta_1}{1 + (\delta - \lambda)\beta_1} < \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{(z - 1)\tilde{\phi}(z)}{z - \beta(\gamma(z))} = \frac{P_{10}}{1 + (\delta - \lambda)\beta_1} < \infty.$$

La solución de la ecuación diferencial (2.3.39) viene dada por

$$P_0(z) = \exp \left\{ \int_z^1 p(v) dv \right\} \left( P_0(1) + \int_z^1 q(u) \exp \left\{ \int_1^u p(v) dv \right\} du \right), \quad (2.3.41)$$

donde

$$p(v) = \mu^{-1} \left( \frac{\alpha}{v} + \frac{\lambda(1 - \beta(\gamma(v)))}{v - \beta(\gamma(v))} \right), \quad (2.3.42)$$

$$q(v) = (\mu v)^{-1} \left( \frac{\delta(1 - v)\tilde{\phi}(v)}{v - \beta(\gamma(v))} - \alpha P_{00} \right). \quad (2.3.43)$$

Reagrupando términos en (2.3.41), se deduce la expresión de  $P_0(z)$  dada en (2.3.35). Teniendo en cuenta que  $c_0 = P_0(z(\theta_0))$ , es posible deducir (2.3.36) a partir de (2.3.33)-(2.3.35).

En el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , la ecuación (2.3.39) conduce directamente a la expresión (2.3.37). Haciendo  $z \rightarrow 1$  sobre (2.3.12), se tiene

$$P_0(1) = \frac{\alpha P_{00} + P_1(1, 0)}{\lambda + \alpha}. \quad (2.3.44)$$

Las igualdades (2.3.18) y (2.3.44) permiten relacionar las probabilidades  $P_{00}$  y  $P_{10}$  de la forma

$$\delta P_{10} = \frac{\alpha + (\lambda + \alpha)(\delta - \lambda)\beta_1 - \alpha(1 + \delta\beta_1)P_{00}}{1 + (\lambda + \alpha)\beta_1}. \quad (2.3.45)$$

Entonces, la expresión (2.3.38) es deducida a partir de las relaciones (2.3.33), (2.3.34) y (2.3.45).

□

A partir de las relaciones (2.3.17) y (2.3.22) es posible determinar la función generatriz  $P_1(z)$  como

$$P_1(z) = (\lambda z - \delta)^{-1} \left( \frac{\lambda z(1 - \beta(\gamma(z)))}{\beta(\gamma(z)) - z} P_0(z) + \delta \left( \frac{(1-z)\bar{\phi}(z)}{\beta(\gamma(z)) - z} - P_{10} \right) \right). \quad (2.3.46)$$

La distribución  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  queda entonces totalmente determinada en términos de las funciones  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

En el siguiente corolario se reúnen los primeros momentos de la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ . La demostración, aunque es laboriosa, está simplemente basada en la aplicación de la regla de L'Hôpital y, por ello, será omitida.

**Corolario 2.3.3.** Sea  $M_1^i$  el primer momento parcial de las probabilidades límite  $\{P_{ij}\}_{j=0}^{\infty}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

i) Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , entonces  $M_1^0$  viene dado por

$$M_1^0 = \mu^{-1} \left( \alpha(P_{00} - 1) + \frac{\lambda(\lambda + \alpha - \delta)\beta_1}{1 + \delta\beta_1} + \frac{\delta P_{10}}{1 + (\delta - \lambda)\beta_1} \left( 1 + \beta_1 \left( \alpha - \frac{\lambda(\lambda + \alpha - \delta)\beta_1}{1 + \delta\beta_1} \right) \right) \right). \quad (2.3.47)$$

ii) Si  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , entonces  $M_1^0$  viene dado por

$$M_1^0 = (2A)^{-1} \left( B - \frac{CD}{A} \right), \quad (2.3.48)$$

siendo

$$A = \alpha + (\lambda + \alpha)(\delta - \lambda)\beta_1, \quad (2.3.49)$$

$$B = 2\delta(\lambda - \delta)c_0 \int_0^{\infty} b(x) \int_0^x (x-u) \frac{\tau(u)}{1-B(u)} du dx - \alpha(2\delta\beta_1 + (\delta - \lambda)^2\beta_2) P_{00}, \quad (2.3.50)$$

$$C = \alpha(1 + (\delta - \lambda)\beta_1) P_{00} + \delta P_{10}, \quad (2.3.51)$$

$$D = -(2(\lambda^2 + \alpha\delta)\beta_1 + (\lambda + \alpha)(\delta - \lambda)^2\beta_2). \quad (2.3.52)$$

iii) El momento  $M_1^1$  viene dado por

$$M_1^1 = \frac{1}{1 + (\delta - \lambda)\beta_1} \left( \lambda\beta_1 M_1^0 + \delta c_0 \int_0^{\infty} b(x) \int_0^x (x-u) \frac{\tau(u)}{1-B(u)} du dx + \frac{1}{2(1 + \delta\beta_1)} (\lambda(2\delta\beta_1^2 + (\lambda - \delta)\beta_2) + \delta P_{10}((\lambda - \delta)\beta_2 - 2\beta_1)) \right), \quad \text{si } \lambda \neq \delta, \quad (2.3.53)$$

$$M_1^1 = \lambda\beta_1 \left( M_1^0 + \frac{\lambda\beta_1 - P_{10}}{1 + \lambda\beta_1} \right) + \lambda c_0 \int_0^{\infty} b(x) \int_0^x (x-u) \frac{\tau(u)}{1-B(u)} du dx, \quad \text{si } \lambda = \delta. \quad (2.3.54)$$

Para finalizar esta sección, a continuación se incluyen algunos comentarios relativos a la naturaleza de la solución y a dos casos particulares. En primer lugar, debe señalarse que las expresiones deducidas para  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , son expresiones cerradas dadas en términos de  $\tau(x)$ , donde  $\tau(x)$  debe ser calculada numéricamente. Como la función  $\tau(x) > 0$ , por definición, debe verificarse  $c_0 > 0$ . Entonces, se obtienen las desigualdades  $(\lambda - \delta)\beta_1 < 1$  y  $(\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)\beta_1\alpha^{-1} < 1$  cuando  $(\alpha \geq 0, \mu > 0)$  y  $(\alpha > 0, \mu = 0)$ , respectivamente. Estas relaciones coinciden con las condiciones necesarias y suficientes que aseguran la ergodicidad del proceso  $\{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$  en la cola  $M/M/1$  con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento (ver el *Teorema 1.2.1*).

En el caso particular  $\delta = 0$ , es posible deducir expresiones para  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , que son independientes de la solución de la ecuación integral (2.3.26). Las expresiones de las funciones generatrices y sus primeros momentos han sido recogidas en el Apéndice 2.A y serán de utilidad en el capítulo 3. Análogamente, la particularización  $B(t) = 1 - e^{-\nu t}$ ,  $t > 0$ ,  $\nu > 0$ , es coherente con el *Teorema 1.3.1*.

## 2.4 Esquema recursivo para calcular las probabilidades límite

Esta sección está dedicada al desarrollo de un esquema recursivo para calcular las probabilidades límite de sistemas de colas con un único servidor, llegadas negativas y disciplina lineal de reintento. El modelo estudiado es una generalización de la cola  $M/G/1$  con llegadas negativas y reintentos, descrita en la sección 2.2, y permite que los clientes lleguen al sistema de acuerdo a un proceso Markoviano con intensidades,  $\lambda_{ij}$ , dependientes del estado del sistema. Adicionalmente, se asume que el flujo de llegadas negativas está gobernado por un proceso de Markov con intensidades,  $\delta_j$ , dependientes del número de clientes en la órbita. Los argumentos empleados están basados en la teoría de *procesos regenerativos* (ver Stidham (1972)) y en la propiedad *PASTA* (*Poisson Arrivals See Time Averages*, ver Wolff (1982)).

El modelo descrito permite englobar a distintos modelos de colas que pueden obtenerse mediante una adecuada particularización de las intensidades  $\lambda_{ij}$  y  $\delta_j$ . Tomando  $\lambda_{ij} = \lambda$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , y  $\delta_j = \delta$ ,  $j \geq 1$ , se tiene la cola  $M/G/1$  con reintentos y llegadas negativas. El correspondiente modelo con capacidad  $K < \infty$  es obtenido cuando  $\lambda_{ij} = \lambda$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $0 \leq j \leq K - 1$ ,  $\lambda_{0K} = \lambda$ ,  $\delta_j = \delta$ ,  $1 \leq j \leq K$ , y  $\lambda_{ij} = \delta_j = 0$ , en otro caso. Cuando la particularización es  $\lambda_{ij} = \lambda(K - i - j)$ , si  $(i, j)$  satisfacen  $0 \leq i + j \leq K$ , y  $\delta_j = \delta$ ,  $1 \leq j \leq K$ , se tiene el sistema con reintentos, llegadas negativas y *quasi-random input*. El modelo de colas  $M/G/1$  con reintentos y clientes impacientes se logra cuando  $\lambda_{ij} = \lambda$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , y  $\delta_j = j\delta$ ,  $1 \leq j \leq K$ . Finalmente, tomando  $\delta = 0$  se obtienen los correspondientes modelos de colas sin llegadas negativas o clientes impacientes.

A continuación se introducen algunas definiciones y notaciones de utilidad. Se llama ciclo de regeneración al intervalo de tiempo comprendido entre dos visitas sucesivas del proceso  $Y = \{Y(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$  al estado  $(0, 0)$ .

Las variables aleatorias más representativas asociadas a un ciclo de regeneración son las siguientes:

$T$  = longitud del ciclo,

$T_{ij}$  = cantidad de tiempo en  $(0, T]$  que el proceso  $Y$  permanece en el estado  $(i, j)$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ ,

$N_{0j}$  = número de finalizaciones del servicio en  $(0, T]$  que dejan a  $j$  clientes en órbita,  $j \geq 0$ ,

$N$  = número de salidas ocurridas en  $(0, T]$ .

Debe notarse que  $N$  corresponde al número de clientes servidos o expulsados del sistema por el efecto de

una llegada negativa durante  $(0, T]$ . Es claro que  $N_{00} = 1$ , siendo la correspondiente transición debida a una finalización del servicio.

El proceso en tiempo continuo  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  es un proceso regenerativo con proceso de renovación encajado  $\{T_1, T_2, \dots\}$ , siendo  $T_i$  el  $i$ -ésimo ciclo de regeneración. En lo sucesivo, se considerará  $T = T_1$ .

Si el sistema es estable, entonces la teoría de procesos regenerativos permite expresar las probabilidades límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  en los términos

$$P_{ij} = \frac{E[T_{ij}]}{E[T]}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (2.4.1)$$

El método algorítmico que a continuación se desarrolla permite establecer relaciones recursivas entre los valores medios  $E[T_{ij}]$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , que implican, en virtud de la relación (2.4.1), relaciones recursivas entre las probabilidades  $P_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . La argumentación está basada en el análisis del número de transiciones ocurridas durante un ciclo de regeneración entre diferentes conjuntos de estados.

Obsérvese que, durante  $(0, T]$ , el número de transiciones desde el estado  $(0, j)$  coincide con el número de transiciones hacia el estado  $(0, j)$ ,  $j \geq 0$ . Con la ayuda de la propiedad *PASTA* se obtiene que sus valores medios verifican la igualdad

$$(\lambda_{0j} + \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu) E[T_{0j}] = E[N_{0j}], \quad 0 \leq j \leq K. \quad (2.4.2)$$

Análogamente, el número de veces en las que el tamaño de la órbita crece de  $j - 1$  a  $j$  es igual al número de veces en que decrece de  $j$  a  $j - 1$ . Entonces, los correspondientes valores medios satisfacen la relación

$$(\alpha + j\mu)E[T_{0j}] + \delta_j E[T_{1j}] = \lambda_{1,j-1}E[T_{1,j-1}], \quad 1 \leq j \leq K. \quad (2.4.3)$$

Adicionalmente, se tiene que

$$E[T] = \sum_{j=0}^K (E[T_{0j}] + E[T_{1j}]). \quad (2.4.4)$$

Dividiendo (2.4.3) y (2.4.4) por  $E[T]$ , se deducen las relaciones

$$(\alpha + j\mu)P_{0j} + \delta_j P_{1j} = \lambda_{1,j-1}P_{1,j-1}, \quad 1 \leq j \leq K, \quad (2.4.5)$$

$$1 = \sum_{j=0}^K (P_{0j} + P_{1j}). \quad (2.4.6)$$

Con la finalidad de deducir relaciones adicionales entre las probabilidades  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  se introducen las siguientes cantidades:

$T_{1kj}$  = cantidad de tiempo en  $(0, T]$  que el proceso  $Y$  permanece en el estado  $(1, j)$ , contabilizada sobre aquellos tiempos de servicio precedidos por una finalización del servicio que dejó a  $k$  clientes en la órbita; y

$A_{kj}$  = cantidad esperada de tiempo que, durante un servicio, hay  $j$  clientes presentes en la órbita, dado que tras la anterior finalización del servicio quedaron  $k$  clientes en la órbita.

Debe notarse que  $T_{1j}$  puede escribirse como

$$T_{1j} = \sum_{k=0}^K T_{1kj}, \quad 0 \leq j \leq K. \quad (2.4.7)$$

Teniendo en cuenta la relación (2.4.7), la definición de  $A_{kj}$  y la identidad de Wald, se deduce

$$E[T_{1j}] = \sum_{k=0}^K A_{kj} E[N_{0k}], \quad 0 \leq j, k \leq K. \quad (2.4.8)$$

Entonces, a partir de (2.4.1), (2.4.2) y (2.4.8), se tiene

$$P_{1j} = \sum_{k=0}^K (\lambda_{0k} + \alpha(1 - \delta_{0k}) + k\mu) A_{kj} P_{0k}, \quad 0 \leq j \leq K. \quad (2.4.9)$$

El esquema recursivo queda determinado por el sistema de ecuaciones lineales descrito en las relaciones (2.4.5), (2.4.6) y (2.4.9). Por tanto, el cálculo de las probabilidades límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  queda reducido al conocimiento previo de los valores  $A_{kj}$ .

Para poder determinar  $A_{kj}$  se introducen otras cantidades auxiliares  $B_{kj}$ . Se definen, para  $0 \leq j \leq K$ ,  $0 \leq k \leq K$ ,

$B_{kj}$  = cantidad esperada de tiempo que, durante un servicio, hay  $j$  clientes en la órbita, dado que en el instante de su comienzo había  $k$  clientes.

Entonces, condicionando respecto de la procedencia del cliente que está siendo servido, se tiene

$$A_{kj} = \frac{\alpha(1 - \delta_{0k}) + k\mu}{\lambda_{0k} + \alpha(1 - \delta_{0k}) + k\mu} B_{k-1j} + \frac{\lambda_{0k}}{\lambda_{0k} + \alpha(1 - \delta_{0k}) + k\mu} B_{kj}, \quad 0 \leq j, k \leq K. \quad (2.4.10)$$

Con la finalidad de deducir la expresión de  $B_{kj}$  se asume que en el instante  $t = 0$  comienza un servicio y  $Q(0+) = k$ . Sea  $X_{kj}(t)$  la variable aleatoria que toma el valor 1, cuando en el instante  $t$  el servicio aún está en desarrollo y hay  $j$  clientes en la órbita, y el valor 0, en otro caso. Entonces,  $B_{kj}$  puede ser escrita en los términos

$$B_{kj} = \int_0^{\infty} P(X_{kj}(t) = 1) dt, \quad 0 \leq j, k \leq K. \quad (2.4.11)$$

Para calcular la probabilidad  $P(X_{kj}(t) = 1)$  se considerará un sistema de colas auxiliar con línea de espera y un único servidor que recibe la llegada de clientes de acuerdo con un proceso Markoviano con intensidades  $\lambda_{1j}$ , cuando el número de clientes en el sistema es  $j \geq 0$ . Los tiempos de servicio son variables

aleatorias independientes exponencialmente distribuidas con parámetros  $\delta_j$ , cuando hay  $j$  clientes en el sistema. Se observa que un intervalo infinitesimal de tiempo  $(t, t + \Delta)$  contribuye a  $B_{kj}$  cuando ocurren conjuntamente los dos siguientes sucesos:

$\mathcal{E}_t =$  'en el instante  $t$ , el servicio que comienza en el instante inicial  $t = 0$  no ha finalizado'; y

$\mathcal{F}_t =$  'en el instante  $t$ , la longitud de la cola auxiliar es  $j$ , dado que en el instante inicial  $t = 0$  la longitud es  $k$ '.

donde  $P(\mathcal{E}_t) = 1 - B(t)$  y  $P(\mathcal{F}_t) = P_j^{(k)}(t)$  representa la probabilidad dependiente del tiempo asociada a la cola Markoviana auxiliar.

En virtud de la independencia entre los tiempos de servicio y los procesos de llegadas originales y negativas, se deduce que

$$P(X_{kj}(t) = 1) = P_j^{(k)}(t)(1 - B(t)). \tag{2.4.12}$$

A continuación se proporcionan las expresiones de  $P_j^{(k)}(t)$  para la cola M/G/1 con llegadas negativas y disciplina lineal de reintentos descrita en la sección 2.2. En este caso, se tiene que  $\lambda_{ij} = \lambda$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , y  $\delta_j = \delta$ ,  $j \geq 1$ .

En el caso particular  $\delta = 0$  se tiene, para  $0 \leq k \leq j$ , que

$$P_j^{(k)}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-k}}{(j-k)!}, & \text{si } K = \infty \text{ o } j < K < \infty, \\ e^{-\lambda t} \sum_{n=K-k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, & \text{si } j = K < \infty. \end{cases} \tag{2.4.13}$$

Cuando  $\delta > 0$ , se observa que las probabilidades  $P_j^{(k)}(t)$  corresponden con la solución transitoria del sistema M/M/1/K con intensidad de llegadas  $\lambda$  e intensidad de servicio  $\delta$ . Por ello, se tienen (ver Takács (1962), páginas 13 y 23) las siguientes expresiones:

i) Si  $K < \infty$ , entonces

$$P_j^{(k)}(t) = a_j + \frac{2}{K+1} \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{(j-k)/2} \sum_{i=1}^K \frac{b_{ki} b_{ji}}{c_i} e^{-\delta c_i t}, \tag{2.4.14}$$

siendo

$$a_j = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right) \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^j \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{K+1}\right)^{-1}, & \text{si } \lambda \neq \delta, \\ \frac{1}{K+1}, & \text{si } \lambda = \delta, \end{cases} \quad 0 \leq j \leq K,$$

$$b_{ki} = \text{sen} \left(\frac{ki\pi}{K+1}\right) - \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{1/2} \text{sen} \left(\frac{(k+1)i\pi}{K+1}\right), \quad 1 \leq i \leq K, \quad 0 \leq k \leq K,$$

$$c_i = 1 + \frac{\lambda}{\delta} - 2 \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{1/2} \cos \left(\frac{i\pi}{K+1}\right), \quad 1 \leq i \leq K. \tag{2.4.15}$$

ii) Si  $K = \infty$ , entonces

$$P_j^{(k)}(t) = e^{-(\lambda+\delta)t} \left( \left( \frac{\lambda}{\delta} \right)^{(j-k)/2} I_{j-k}(2t\sqrt{\lambda\delta}) + \left( \frac{\lambda}{\delta} \right)^{(j-k+1)/2} I_{j+k+1}(2t\sqrt{\lambda\delta}) + \left( 1 - \frac{\lambda}{\delta} \right) \left( \frac{\lambda}{\delta} \right)^j \sum_{i=j+k+2}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\delta} \right)^{-i/2} I_i(2t\sqrt{\lambda\delta}) \right), \quad (2.4.16)$$

donde, si  $i \geq 0$ ,  $I_i(x)$  denota la función modificada de Bessel de orden  $i$  e  $I_{-i}(x) = I_i(x)$ .

Para finalizar esta sección, debe notarse que las probabilidades  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  se calculan como solución del sistema de ecuaciones (2.4.5), (2.4.6) y (2.4.9), donde las cantidades  $A_{kj}$  son obtenidas a partir de las relaciones (2.4.10)-(2.4.16). La naturaleza de las fórmulas (2.4.16) para la solución dependiente del tiempo, en el caso  $K = \infty$ , implica importantes dificultades analíticas. Sin embargo, las probabilidades límite  $\{P_{ij}(K), i \in \{0, 1\}, 0 \leq j \leq K\}$ , asociadas a la cola M/G/1/K con llegadas negativas, reintentos y capacidad  $K < \infty$ , son computacionalmente tratables y proporcionan una buena aproximación de la verdadera distribución  $\{P_{ij} = P_{ij}(\infty)\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  del proceso  $Y$ .

## 2.5 Resultados computacionales

En esta sección se presentan algunos resultados computacionales que pretenden ilustrar que la distribución límite del proceso  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  puede ser aproximada de forma satisfactoria mediante la distribución límite del sistema de colas M/G/1/K,  $K < \infty$ , con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento. Adicionalmente, se mostrará la incidencia de los parámetros sobre las medidas de eficacia del sistema.

Si se considera el sistema de colas M/G/1/K con llegadas negativas y reintentos, entonces es posible reexpresar la igualdad (2.4.11) en los términos

$$B_{kj} = a_j \beta_1 + \frac{2}{\delta(K+1)} \sum_{i=1}^K \left( \frac{\lambda}{\delta} \right)^{(j-k)/2} \frac{b_{ji} b_{ki}}{c_i^2} (1 - \beta(\delta c_i)), \quad 0 \leq j, k \leq K, \quad (2.5.1)$$

donde las cantidades  $a_j$ ,  $b_{ki}$  y  $c_i$  vienen dadas por (2.4.15).

Obsérvese que el cálculo de  $B_{kj}$  se reduce entonces a una suma finita donde aparece involucrada la transformada de Laplace-Stieltjes de la distribución de servicio. Por ello, la fórmula (2.5.1) es computacionalmente eficiente para las distribuciones de tiempo de servicio más usuales.

La capacidad del sistema es elegida tomando inicialmente un valor  $K$  e incrementando éste en un tamaño fijo,  $\Delta$ , hasta satisfacer una regla de parada prefijada. El criterio de parada más simple consiste en incrementar  $K$  hasta que no se observe un cambio significativo en  $M_1^0(K) + M_1^1(K)$ , donde  $M_i^j(K)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , denotan las medias parciales del número de clientes en órbita en el modelo M/G/1/K con llegadas negativas y reintentos. Los ejemplos recogidos en esta sección han sido analizados tomando  $K = 5$  como capacidad inicial, incrementando  $K$  en  $\Delta = 5$  unidades en cada paso y parando el algoritmo

en el nivel  $K$  cuando  $|M_1^0(K) + M_1^1(K) - M_1^0(K - \Delta) - M_1^1(K - \Delta)| < \varepsilon = 10^{-3}$ .

Para validar la aproximación de la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ , basada en las probabilidades  $\{P_{ij}(K), i \in \{0, 1\}, 0 \leq j \leq K\}$  del modelo finito, se compararán los resultados recogidos en la sección 1.3 con los resultados exactos de la sección 2.4, cuando se asume que  $B(t) = 1 - e^{-\nu t}, t > 0, \nu > 0$ .

En la *Tabla 2.5.1* y las *Figuras 2.5.1* y *2.5.2* puede observarse la variación de los momentos  $M_i^i(K), i \in \{0, 1\}$ , en función de la capacidad  $K$  del modelo finito, en una cola caracterizada por la disciplina constante de reintento, la intensidad de tráfico  $\gamma = (\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)(\nu\alpha)^{-1} = 0.62$  y los parámetros  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (2.1, 0.9, 2.7, 0.0, 3.4)$ . La precisión de la aproximación es evaluada mediante el cálculo del error relativo  $E(K)$  definido como

$$E(K) = 100 \times \left| \frac{M_1^0(\infty) + M_1^1(\infty)}{M_1^0(K) + M_1^1(K)} - 1 \right|,$$

donde los valores medios  $M_i^i(\infty), i \in \{0, 1\}$ , han sido calculados a partir de las fórmulas (1.3.13) y (1.3.14).

Un procedimiento alternativo para aproximar los valores medios de la distribución límite del proceso  $Y$  consiste en considerar simultáneamente las expresiones teóricas del *Corolario 2.3.3* y las probabilidades  $P_{00}(K)$  y  $P_{10}(K)$  asociadas al modelo con capacidad  $K < \infty$ . En lo sucesivo,  $\hat{M}_i^i(K), i \in \{0, 1\}$ , y  $\hat{E}(K)$ , denotarán los momentos estimados y los errores relativos obtenidos cuando se reemplazan las probabilidades  $P_{i0}$  por  $P_{i0}(K), i \in \{0, 1\}$ , sobre las fórmulas (2.3.47)-(2.3.54).

| $K$      | $M_1^0(K)$ | $M_1^1(K)$ | $E(K)$   | $\hat{M}_1^0(K)$ | $\hat{M}_1^1(K)$ | $\hat{E}(K)$ |
|----------|------------|------------|----------|------------------|------------------|--------------|
| 5        | 0.602237   | 0.850218   | 78.77859 | 1.270660         | 1.709881         | 12.87888     |
| 10       | 0.903797   | 1.275949   | 19.12763 | 1.116220         | 1.558717         | 2.925595     |
| 15       | 1.020464   | 1.440655   | 5.508095 | 1.085599         | 1.528745         | 0.675644     |
| 20       | 1.059746   | 1.496112   | 1.597168 | 1.078731         | 1.522023         | 0.156662     |
| 25       | 1.071831   | 1.513117   | 0.453851 | 1.077149         | 1.520475         | 0.036339     |
| 30       | 1.075336   | 1.518121   | 0.124259 | 1.076783         | 1.520116         | 0.008432     |
| 35       | 1.076312   | 1.519500   | 0.033404 | 1.076698         | 1.520033         | 0.001956     |
| 40       | 1.076577   | 1.519874   | 0.031157 | 1.076678         | 1.520014         | 0.000453     |
| $\infty$ | 1.076672   | 1.520008   | .....    | .....            | .....            | .....        |

**Tabla 2.5.1.** Valores medios estimados y errores relativos asociados a la cola M/M/1 con intensidades  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (2.1, 0.9, 2.7, 0.0, 3.4)$

El ejemplo muestra la conveniencia de utilizar las cantidades  $\hat{M}_i^i(K), i \in \{0, 1\}$ , como estimación de los verdaderos valores medios  $M_i^i, i \in \{0, 1\}$ . La parada del algoritmo se produce en los tamaños  $K = 40$  y  $K = 30$  cuando los valores involucrados en el criterio de parada son  $M_1^1(K)$  y  $\hat{M}_1^1(K), i \in \{0, 1\}$ , respectivamente. Puede observarse que existen diferencias significativas en los errores relativos asociados a los

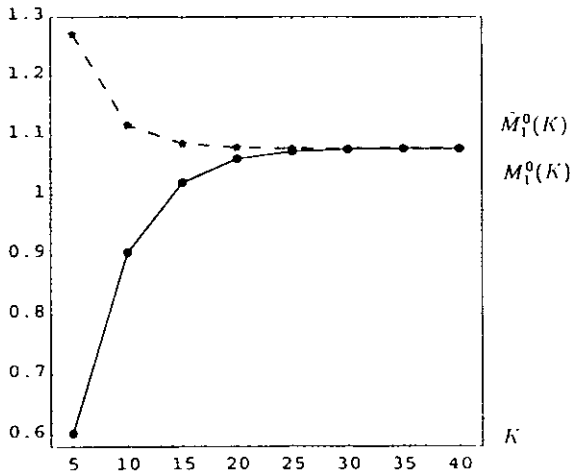


Figura 2.5.1. Variación de  $M_1^0(K)$  y  $\tilde{M}_1^0(K)$  en la cola M/M/1 con  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (2.1, 0.9, 2.7, 0.0, 3.4)$

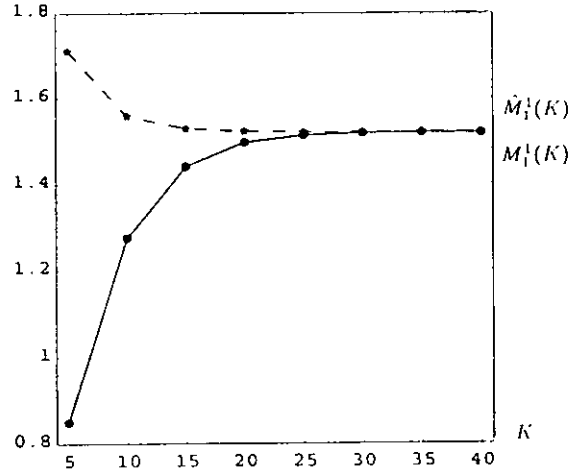


Figura 2.5.2. Variación de  $M_1^1(K)$  y  $\tilde{M}_1^1(K)$  en la cola M/M/1 con  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (2.1, 0.9, 2.7, 0.0, 3.4)$

dos métodos de truncación. El reducido esfuerzo computacional necesario para la resolución del sistema de ecuaciones lineales permite avalar la aproximación de  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  mediante las probabilidades  $\{P_{ij}(K), i \in \{0, 1\}, 0 \leq j \leq K\}$  del modelo finito, cuando la distribución del tiempo de servicio no permita evaluar explícitamente las derivadas de la función  $\bar{\phi}(z)$  en el punto  $z = 1$ . Debe notarse que las fórmulas del Corolario 2.3.3 son totalmente explícitas en el caso exponencial, puesto que

$$P_{10} = \frac{\lambda}{\nu} P_{00}, \quad \bar{\phi}'(1) = \frac{\lambda - \delta}{\nu} P_{10} \quad \text{y} \quad \bar{\phi}''(1) = 2 \left( \frac{\lambda}{\nu} \right)^2 P_{00}.$$

| $K$      | $M_1^0(K)$ | $M_1^1(K)$ | $E(K)$   | $\tilde{M}_1^0(K)$ | $\tilde{M}_1^1(K)$ | $\tilde{E}(K)$ |
|----------|------------|------------|----------|--------------------|--------------------|----------------|
| 5        | 1.111064   | 1.916587   | 305.9142 | 3.343106           | 10.00497           | 7.929322       |
| 10       | 1.881382   | 4.007128   | 108.7058 | 3.138516           | 9.487379           | 2.662993       |
| 15       | 2.435117   | 5.905912   | 47.33994 | 3.073208           | 9.322153           | 0.852678       |
| 20       | 2.739814   | 7.316440   | 22.20920 | 3.054847           | 9.275702           | 0.331538       |
| 25       | 2.904799   | 8.245212   | 10.22113 | 3.047703           | 9.257627           | 0.127268       |
| 30       | 2.985513   | 8.778441   | 4.468859 | 3.044895           | 9.250524           | 0.046765       |
| 35       | 3.021113   | 9.047555   | 1.831189 | 3.043833           | 9.247837           | 0.016283       |
| 40       | 3.035374   | 9.168668   | 0.701623 | 3.043453           | 9.246876           | 0.005374       |
| $\infty$ | 3.043266   | 9.246403   | .....    | .....              | .....              | .....          |

Tabla 2.5.2. Valores medios estimados y errores relativos asociados a la cola M/M/1 con intensidades  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (3.2, 1.0, 1.3, 0.4, 3.5)$

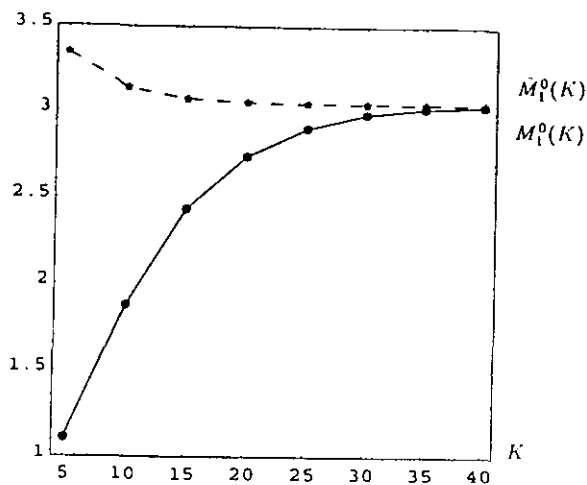


Figura 2.5.3. Variación de  $M_1^0(K)$  y  $\tilde{M}_1^0(K)$  en la cola M/M/1 con  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (3.2, 1.0, 1.3, 0.4, 3.5)$

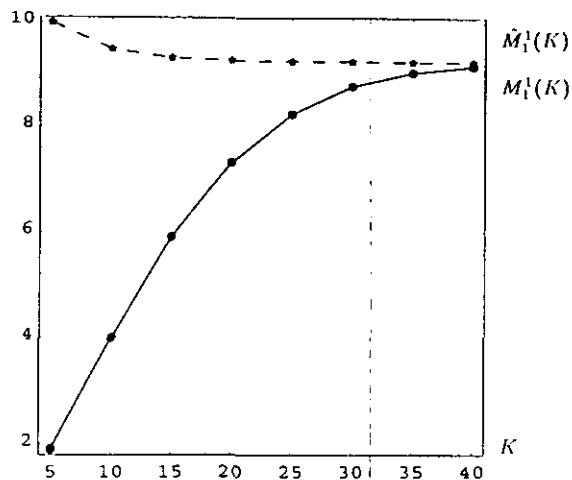


Figura 2.5.4. Variación de  $M_1^1(K)$  y  $\tilde{M}_1^1(K)$  en la cola M/M/1 con  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (3.2, 1.0, 1.3, 0.4, 3.5)$

Comentarios análogos a los anteriores siguen siendo válidos para la *Tabla 2.5.2* y las *Figuras 2.5.3* y *2.5.4*, donde se ilustra el comportamiento de los momentos  $M_i^j(K)$  y  $\tilde{M}_i^j(K)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , en función de  $K$ . El modelo estudiado está caracterizado por la disciplina lineal de reintento, la intensidad de tráfico  $\rho = \lambda(\nu + \delta)^{-1} = 0.71$  y los parámetros  $(\lambda, \delta, \alpha, \mu, \nu) = (3.2, 1.0, 1.3, 0.4, 3.5)$ . En este caso, se ha tomado como nivel máximo para la capacidad de la órbita  $K = 40$ . Como se observa, la convergencia hacia los valores medios es más lenta que en el ejemplo anterior. Los errores relativos  $E(K)$  y  $\tilde{E}(K)$  muestran la conveniencia de estimar  $M_i^j$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , mediante los valores  $\tilde{M}_i^j(K)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

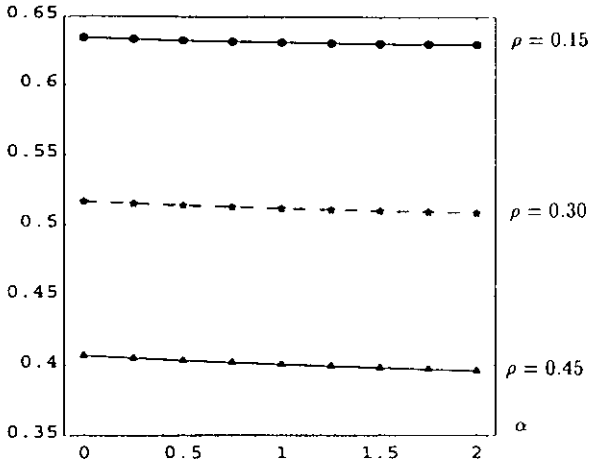
El siguiente trabajo computacional está orientado a estudiar el efecto de las intensidades  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\delta$  sobre algunas de las medidas de eficacia del sistema, cuando las distribuciones del tiempo de servicio no permiten evaluar las derivadas de la función  $\tilde{\phi}(z)$ . La aproximación estará basada en el uso conjunto de las fórmulas recogidas en el *Corolario 2.3.9* y las probabilidades  $P_{00}(K)$  y  $P_{10}(K)$ . Teniendo en cuenta que no es posible calcular  $\tilde{\phi}'(z)$  en el punto  $z = 1$ , se reducirá el estudio a la probabilidad  $\tilde{P}_0(K)$  y al momento  $\tilde{M}_1^0(K)$ , siendo  $\tilde{P}_0(K)$  la estimación de la probabilidad  $P_0(1)$  obtenida mediante la fórmula (2.3.18) y  $P_{10}(K)$ .

Las intensidades de tráfico,  $\rho = (\lambda - \delta)\beta_1$ , que serán consideradas en todos los ejemplos son  $\rho \in \{0.15, 0.3, 0.45\}$ .

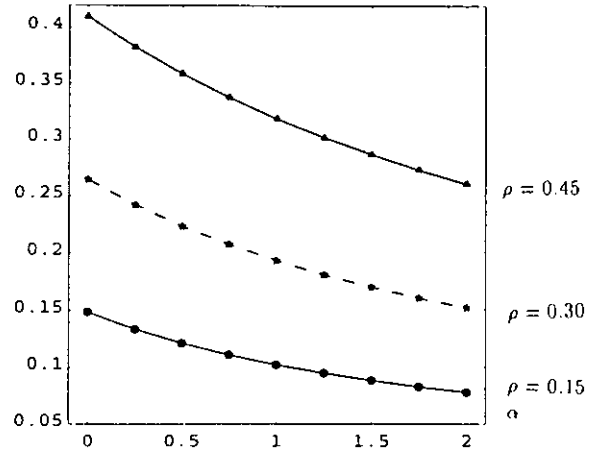
En primer lugar, se analizará un sistema de colas con tiempos de servicio distribuidos de acuerdo a una ley Erlang (es decir,  $B(t) = 1 - e^{-\nu t} \sum_{n=0}^{m-1} (\nu t)^n (n!)^{-1}$ ,  $t > 0$ ). Se han considerado los parámetros  $m = 3$  y  $\nu = 6.0$ .

Las *Figuras 2.5.5* y *2.5.6* muestran las variaciones de  $\tilde{P}_0(K)$  y  $\tilde{M}_1^0(K)$  respecto de la intensidad  $\alpha \in [0.0, 2.0]$ . El criterio que ha llevado a seleccionar el nivel  $K = 20$  ha consistido en elegir  $K$  como el valor máximo entre  $K_{0.15}(\alpha)$ ,  $K_{0.3}(\alpha)$  y  $K_{0.45}(\alpha)$ , donde  $K_\alpha(\alpha)$  denota el tamaño de parada asociado al modelo de colas con parámetro  $\alpha$  e intensidad de tráfico  $\rho_\alpha$ . Este criterio será reiteradamente aplicado

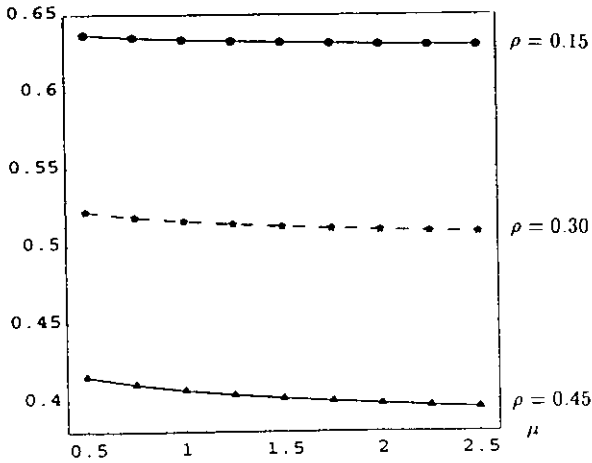
en lo sucesivo. Como se muestra en la *Figura 2.5.5*, la probabilidad  $\hat{P}_0(20)$  es prácticamente insensible respecto de la variación de  $\alpha$ . Sin embargo, existen diferencias significativas en el comportamiento del valor medio  $\hat{M}_1^0(20)$  al variar  $\alpha$  (ver la *Figura 2.5.6*).



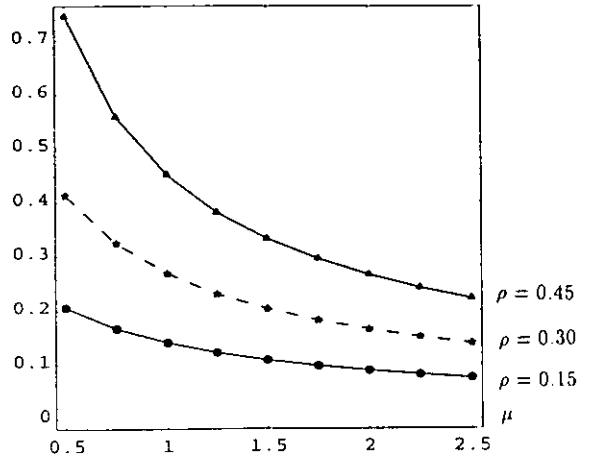
**Figura 2.5.5.** Variación de  $\hat{P}_0(K)$  en función de  $\alpha$  en una cola  $M/E_m/1$



**Figura 2.5.6.** Variación de  $\hat{M}_1^0(K)$  en función de  $\alpha$  en una cola  $M/E_m/1$



**Figura 2.5.7.** Variación de  $\hat{P}_0(K)$  en función de  $\mu$  en una cola  $M/E_m/1$



**Figura 2.5.8.** Variación de  $\hat{M}_1^0(K)$  en función de  $\mu$  en una cola  $M/E_m/1$

La variación de  $\hat{P}_0(K)$  y  $\hat{M}_1^0(K)$  respecto de la intensidad  $\mu \in [0.5, 2.5]$  es estudiada en las *Figuras 2.5.7* y *2.5.8*. Se han tomado las intensidades  $\alpha = 0.8$  y  $\delta = 0.5$ . La capacidad del modelo finito es  $K = 25$ . Se observa que  $\hat{P}_0(25)$  y  $\hat{M}_1^0(25)$  son funciones decrecientes respecto de  $\mu$ , pero su variación es notablemente diferente.

Debe notarse que el modelo de colas  $M/E_m/1/K$  con línea de espera y llegadas negativas es obtenido como el caso límite  $\alpha \rightarrow \infty$  y/o  $\mu \rightarrow \infty$ . Este hecho está directamente relacionado con el decrecimiento de los correspondientes valores medios  $\hat{M}_1^0(K)$  cuando  $\alpha$  y/o  $\mu$  crecen.

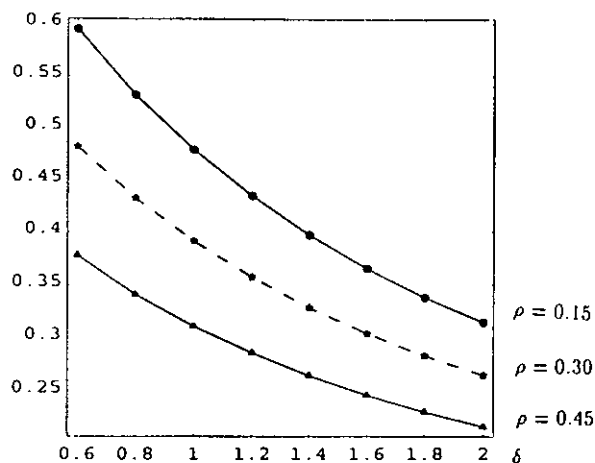


Figura 2.5.9. Variación de  $\hat{P}_0(K)$  en función de  $\delta$  en una cola  $M/E_m/1$

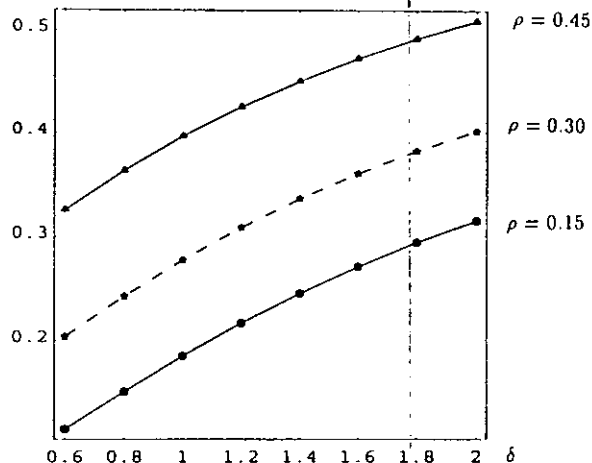


Figura 2.5.10. Variación de  $\hat{M}_1^0(K)$  en función de  $\delta$  en una cola  $M/E_m/1$

Finalmente, la evolución de  $\hat{P}_0(K)$  y  $\hat{M}_1^0(K)$  respecto de  $\delta$  es ilustrada en las Figuras 2.5.9 y 2.5.10. En este caso se han tomado la capacidad  $K = 40$  y las intensidades  $\alpha = 1.2$  y  $\mu = 1.5$ . El comportamiento de  $\hat{P}_0(40)$  y  $\hat{M}_1^0(40)$  es significativamente diferente. Se observa un decrecimiento pronunciado en la variación de  $\hat{P}_0(40)$  respecto de  $\delta$ . Adicionalmente, las probabilidades  $\hat{P}_0(40)$  se encuentran localizadas dentro de una banda cuya amplitud decrece cuando  $\rho$  crece. Se observa que la tasa de crecimiento de  $\hat{M}_1^0(40)$  parece ser insensible respecto del valor,  $\rho$ , de la intensidad de tráfico.

A continuación se analiza la incidencia de las intensidades  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\delta$  sobre la probabilidad  $\hat{P}_0(K)$  y el primer momento  $\hat{M}_1^0(K)$  en un sistema de colas con tiempo de servicio distribuido de acuerdo a una ley hiperexponencial (esto es,  $B(t) = 1 - pe^{-\nu_1 t} - (1 - p)e^{-\nu_2 t}$ ,  $t > 0$ ,  $\nu_1 > 0$ ,  $\nu_2 > 0$ ). Los parámetros considerados son  $p = 0.25$ ,  $\nu_1 = 2.0$  y  $\nu_2 = 6.0$ .

El efecto de la intensidad  $\alpha$  sobre  $\hat{P}_0(K)$  y  $\hat{M}_1^0(K)$  queda reflejado en las Figuras 2.5.11 y 2.5.12, donde se han considerado los parámetros  $\mu = 1.5$  y  $\delta = 0.9$ . La capacidad del modelo es  $K = 30$ . Debe notarse que la evolución de  $\hat{P}_0(30)$  y  $\hat{M}_1^0(30)$  es análoga a la observada en el caso Erlang (ver las Figuras 2.5.5 y 2.5.6). Entonces, deben destacarse la escasa variación de  $\hat{P}_0(30)$  y el notable decrecimiento de  $\hat{M}_1^0(30)$ , respecto de  $\alpha$ .

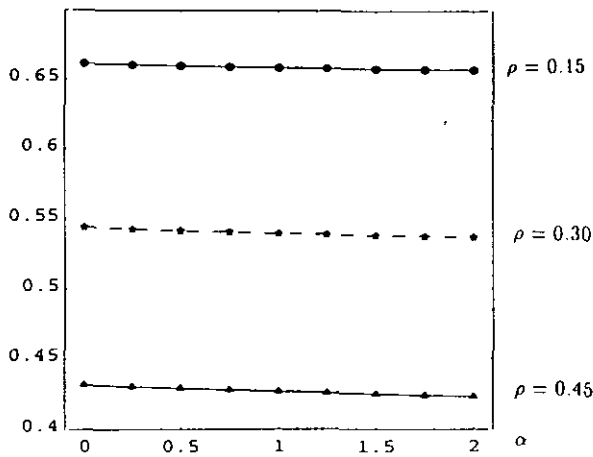


Figura 2.5.11. Variación de  $\hat{P}_0(K)$  en función de  $\alpha$  en una cola  $M/H_2/1$

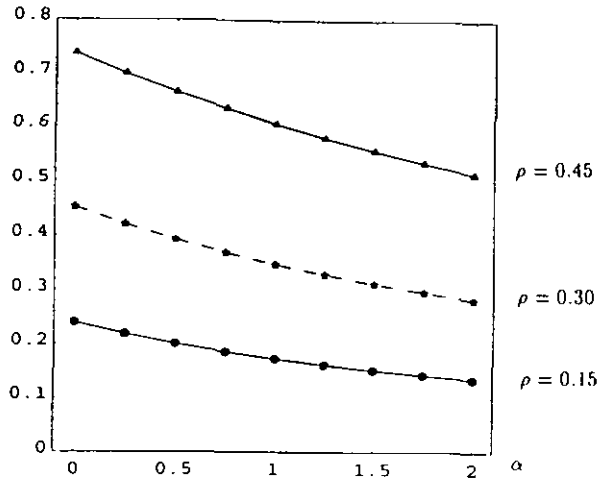


Figura 2.5.12. Variación de  $\hat{M}_1^0(K)$  en función de  $\alpha$  en una cola  $M/H_2/1$

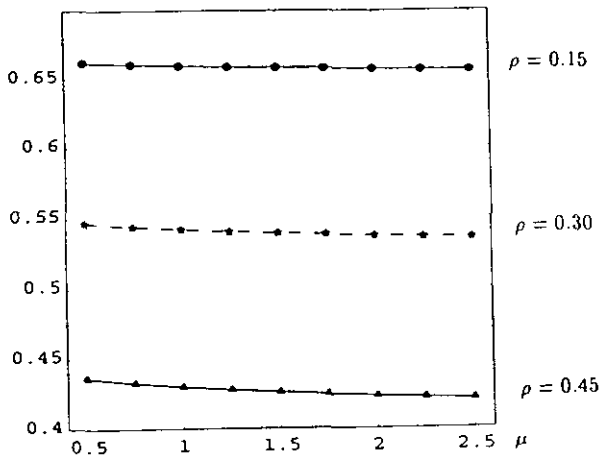


Figura 2.5.13. Variación de  $\hat{P}_0(K)$  en función de  $\mu$  en una cola  $M/H_2/1$

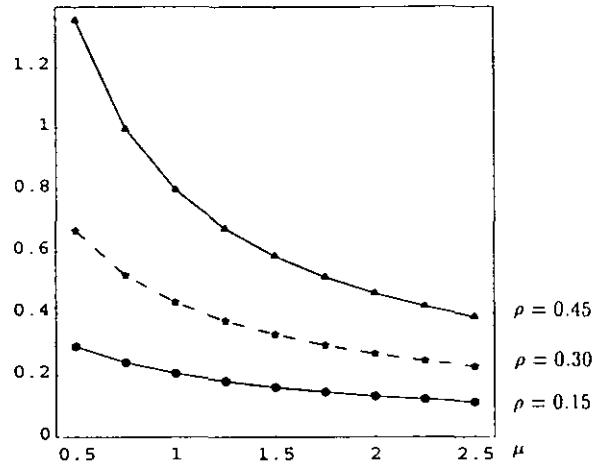


Figura 2.5.14. Variación de  $\hat{M}_1^0(K)$  en función de  $\mu$  en una cola  $M/H_2/1$

Como se observa en las Figuras 2.5.13 y 2.5.14, el comportamiento de  $\hat{P}_0(K)$  y  $\hat{M}_1^0(K)$ , respecto del parámetro  $\mu$ , en el caso hiperexponencial presenta grandes similitudes con el correspondiente comportamiento en el caso Erlang. Es claro que  $\hat{P}_0(K)$  experimenta cambios mínimos con el crecimiento de  $\mu$ . Sin embargo, el valor medio  $\hat{M}_1^0(K)$  presenta un marcado decrecimiento. El ejemplo que ilustran las Figuras 2.5.13 y 2.5.14 corresponde al caso  $\alpha = 1.2$  y  $\delta = 0.9$ , y capacidad  $K = 35$ . El rango de variación elegido es  $\mu \in [0.5, 2.5]$ .

Para finalizar esta sección, se incluyen las Figuras 2.5.15 y 2.5.16, donde se muestra la evolución de  $\hat{P}_0(K)$  y  $\hat{M}_1^0(K)$  en función de  $\delta$ , en un modelo con capacidad  $K = 40$  y política lineal de reintento, con

parámetros  $\alpha = 1.2$  y  $\mu = 1.5$ . La Figura 2.5.15 muestra un notable decrecimiento de  $\hat{P}_0(40)$ . Las tres curvas delimitan una banda cuya amplitud disminuye cuando  $\delta$  crece. Adicionalmente, el crecimiento de  $\hat{M}_1^0(40)$  (ver la Figura 2.5.16) es análogo al observado en el caso Erlang (ver la Figura 2.5.10). En ambos casos puede notarse que la tasa de crecimiento del primer momento  $\hat{M}_1^0(40)$ , respecto de  $\delta$ , no depende de la intensidad de tráfico considerada.

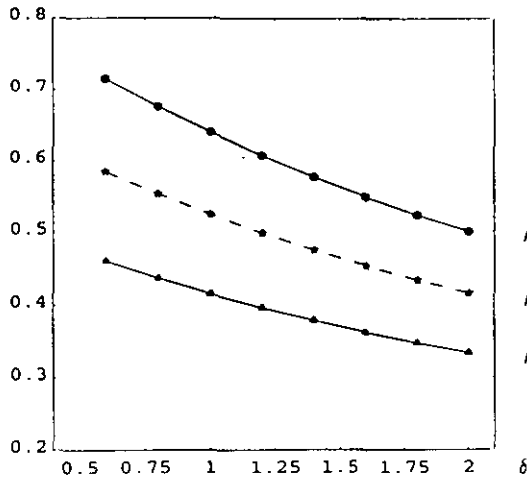


Figura 2.5.15. Variación de  $\hat{P}_0(K)$  en función de  $\delta$  en una cola M/H<sub>2</sub>/1

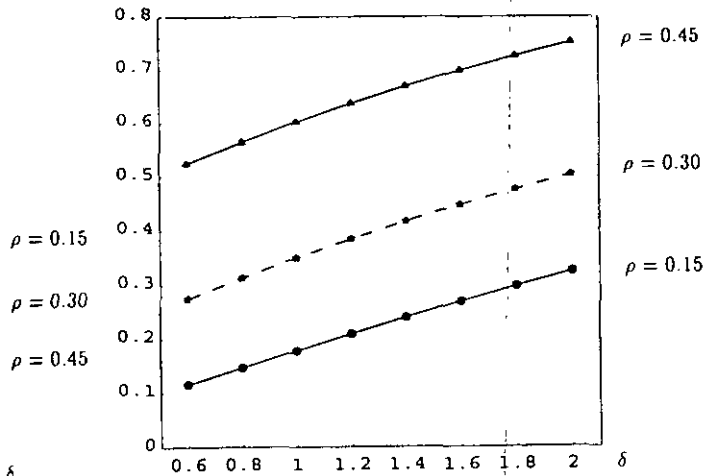


Figura 2.5.16. Variación de  $\hat{M}_1^0(K)$  en función de  $\delta$  en una cola M/H<sub>2</sub>/1

## 2.6 Comentarios y notas bibliográficas

A continuación se comentan las técnicas y la bibliografía empleadas en el análisis de la distribución límite del sistema de colas M/G/1 con llegadas negativas y disciplina lineal de reintento.

La técnica de la *variable suplementaria* fue utilizada por primera vez en un modelo de colas con reintentos por Keilson y otros (1968). Desde entonces, es considerada como una técnica clásica en el análisis de la distribución límite del proceso  $Y = \{Y(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$  mediante el estudio del proceso Markoviano  $X = \{X(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t), \xi(t)), t \geq 0\}$ . El estudio de procesos estocásticos no Markovianos a través de la incorporación de variables suplementarias fue introducido, con independencia de las aplicaciones en la teoría de colas, en Cox (1955).

Los argumentos recogidos en la sección 2.3 conducen a expresiones cerradas para las funciones generatrices de la distribución límite del par  $(C(t), Q(t))$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , en términos de la solución de una ecuación integral de Fredholm de primer orden. Los diferentes métodos existentes para resolver la ecuación integral (2.3.26) implican importantes dificultades. En este sentido, debe señalarse que la resolución de ecuaciones integrales de Fredholm de primer orden ha sido calificada en la literatura como un problema enfermizo (*ill-posed problem*). Los principales resultados referidos a la resolución numérica de este tipo de ecuaciones pueden encontrarse en los libros de Kanwall (1971) y Zabreyko y otros (1986). La

existencia de soluciones en términos de ecuaciones integrales no es exclusiva del modelo en consideración. De hecho, las ecuaciones de Fredholm aparecen en el estudio de la distribución límite de la cola  $M/G/1$  con llegadas negativas (ver Harrison y Pitel (1996)) y en el análisis de los tiempos de respuesta en redes generalizadas de colas en tandem (ver Harrison y Pitel (1995)). Finalmente, la distribución límite del *trabajo inacabado* en el modelo  $M/G/1$  con llegadas negativas, que suponen la destrucción de una cantidad aleatoria de trabajo, ha sido dada en términos de ecuaciones integrales de Wiener-Hopf (ver Boucherie y Boxma (1995)).

Los métodos algorítmicos desarrollados por de Kok (1984) son el origen de un nuevo procedimiento para calcular la distribución límite,  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ , de modelos de colas con reintentos. La literatura muestra que sus métodos pueden ser aplicados a modelos de colas más generales. En este sentido pueden mencionarse los artículos de Artalejo (1994) y Schellhaas (1986), y el libro de Tijms (1994) (capítulo 4). Los modelos analizados en estos trabajos están caracterizados por la estructura matricial de tipo  $M/G/1$ . El principal logro de la sección 2.4 consiste en extender su aplicabilidad a modelos de colas con flujos de llegadas originales y negativas gobernados por dos procesos Markovianos con intensidades dependientes del estado del sistema, que implican la destrucción de la estructura matricial de tipo  $M/G/1$ . En el estudio realizado han sido esenciales algunos resultados de la teoría de *procesos regenerativos* (ver Sigman y Wolff (1993) y Stidham (1972)), y el artículo de Wolff (1982) donde se expone la propiedad *PASTA*. La argumentación seguida permite reducir el problema a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales donde intervienen las probabilidades transitorias de modelos de colas Markovianos.

El estudio computacional recogido en la sección 2.5 permite validar la aproximación de la distribución  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  mediante la correspondiente distribución del modelo  $M/G/1/K$ ,  $K < \infty$ , con llegadas negativas y reintentos. Detalles para la elección de la capacidad  $K$  en otros modelos de colas con reintentos pueden ser encontrados en Neuts y Rao (1990). La implementación del esquema se ha realizado en lenguaje *FORTRAN77* (versión 5.1). Adicionalmente se han considerado las subrutinas *ludcmp* y *lubksb*, incluidas en el paquete *Numerical Recipes Software*, que pueden encontrarse en Press y otros (1992). Los gráficos que ilustran la sección se han realizado con la versión 2.2 de *Mathematica* (ver Castillo y otros (1994) y Ellis y Lodi (1990)).

Al igual que en el capítulo 1, la existencia del flujo de llegadas negativas implica que la ley de *descomposición estocástica* (ver Fuhrmann y Cooper (1985)) no puede ser aplicada para analizar la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ . Dos *surveys* referidos a la ley de descomposición estocástica son Doshi (1986,1990). Haciendo uso de esta propiedad, en el Apéndice 2 han sido calculadas las funciones generatrices  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , en el caso particular  $\delta = 0$ .

## APENDICE 2

### Apéndice 2.A. Distribución límite del sistema M/G/1 con disciplina lineal de reintento.

Este apéndice está dedicado al cálculo de las funciones generatrices  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , y los dos primeros momentos factoriales  $M_k^i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , del sistema de colas M/G/1 con disciplina lineal de reintento, en ausencia de llegadas negativas ( $\delta = 0$ ). Las expresiones obtenidas serán de utilidad en el capítulo 3.

Es posible deducir las expresiones de  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , para el caso  $\delta = 0$ , a partir de los resultados de la sección 2.3. No obstante, a continuación se empleará una argumentación alternativa más simple y elegante.

La técnica empleada hace uso de la ley de *descomposición estocástica* (ver Fuhrmann y Cooper (1985)) y permite deducir expresiones para las funciones  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , en términos de la función generatriz del número de clientes presentes en el sistema de colas M/G/1 con línea de espera. Los resultados son coherentes con las expresiones deducidas en Martin y Gomez-Corral (1995), donde se basó la argumentación en resultados de la *teoría de la renovación Markoviana*.

En lo sucesivo, se asumirá la ergodicidad del sistema; es decir, se supondrá que se satisface  $\rho < 1 - \lambda\delta_{0\mu}(\lambda + \alpha)^{-1}$ , siendo  $\rho = \lambda\beta_1$  (ver Martin y Gomez-Corral (1995)).

En el siguiente resultado se calculan las funciones generatrices  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

**Teorema 2.A.1.** *i) Si  $\alpha \geq 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\rho < 1$ , entonces*

$$P_0(z) = z^{-\alpha/\mu} H(z) \left( 1 - (1 - \delta_{0\alpha}) \frac{\int_z^1 x^{\alpha/\mu-1} H^{-1}(x) dx}{\int_0^1 x^{\alpha/\mu-1} H^{-1}(x) dx} \right), \quad (2.A.1)$$

$$P_1(z) = \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda z)}{\beta(\lambda - \lambda z) - z} P_0(z), \quad (2.A.2)$$

donde

$$H(z) = (1 - \rho) \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_z^1 \frac{\beta(\lambda - \lambda x) - 1}{\beta(\lambda - \lambda x) - x} dx \right\}, \quad (2.A.3)$$

es la función generatriz de la sucesión parcial  $\{P_{0j}\}_{j=0}^{\infty}$  en el sistema de colas M/G/1 con reintento clásico ( $\alpha = 0$ ,  $\mu > 0$ ).

*ii) Si  $\alpha > 0$ ,  $\mu = 0$  y  $\rho(\lambda + \alpha)\alpha^{-1} < 1$ , entonces*

$$P_0(z) = \frac{\alpha P_{00}}{\alpha + \lambda(1 - P_0(1))^{-1} R(z)}, \quad (2.A.4)$$

$$P_1(z) = \frac{\alpha P_{00}(\beta(\lambda - \lambda z) - 1)}{(\lambda + \alpha)z - (\lambda z + \alpha)\beta(\lambda - \lambda z)}, \quad (2.A.5)$$

donde

$$P_{00} = 1 - \rho(\lambda + \alpha)\alpha^{-1}, \quad P_0(1) = 1 - \rho$$

y

$$R(z) = (1 - \rho) \frac{(1 - z)\beta(\lambda - \lambda z)}{\beta(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (2.A.6)$$

corresponde con la función generatriz del número de clientes presentes en el sistema M/G/1 con línea de espera.

**Demostración.** El sistema de colas M/G/1 con disciplina lineal de reintento puede ser visto como un modelo de vacaciones verificando las hipótesis dadas en Fuhrmann y Cooper (1985). Por ello, si se asume la ergodicidad del sistema, el número de clientes presentes en un instante aleatorio puede ser expresado como la suma de dos variables aleatorias. La primera de ellas es el número de clientes presentes en el correspondiente sistema M/G/1 con línea de espera y la segunda es el número de clientes presentes en el modelo en estudio dado que el sistema está en un período de vacación. Haciendo uso de esta propiedad, se tiene que la función generatriz  $K(z) = P_0(z) + zP_1(z)$ , correspondiente a la distribución límite de  $N(t) = C(t) + Q(t)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , puede expresarse como

$$K(z) = R(z) \frac{P_0(z)}{P_0(1)}, \quad (2.A.7)$$

donde  $R(z)$  viene dada por (2.A.6).

Adicionalmente, el número de veces en que el tamaño de la órbita crece de  $j - 1$  a  $j$ , durante un ciclo de regeneración, es igual al número de ocasiones en que decrece de  $j$  a  $j - 1$ ,  $j \geq 1$ . Entonces, a partir de la relación (2.4.1), es posible deducir

$$(\alpha + (j + 1)\mu)P_{0,j+1} = \lambda P_{1j}, \quad j \geq 0. \quad (2.A.8)$$

Introduciendo las funciones generatrices  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , sobre (2.A.8) se obtiene

$$\mu z P_0'(z) + \alpha(P_0(z) - P_{00}) = \lambda z P_1(z). \quad (2.A.9)$$

Las relaciones (2.A.7) y (2.A.9) conducen a la ecuación

$$\mu z P_0'(z) + (\alpha + \lambda(1 - P_0(1)^{-1}R(z)))P_0(z) = \alpha P_{00}. \quad (2.A.10)$$

En primer lugar, se resuelve (2.A.10) en el caso  $\alpha \geq 0$ ,  $\mu > 0$ . La solución general de la ecuación diferencial (2.A.10) es de la forma

$$P_0(z) = \exp \left\{ \mu^{-1} \int_z^1 q(v) dv \right\} \left( P_0(1) - \alpha \mu^{-1} P_{00} \int_z^1 u^{-1} \exp \left\{ \mu^{-1} \int_1^u q(v) dv \right\} du \right), \quad (2.A.11)$$

donde

$$q(v) = v^{-1} (\alpha + \lambda(1 - P_0(1)^{-1}R(v))).$$

Para determinar  $P_0(1)$  y  $P_{00}$ , se particulariza (2.A.7) en el punto  $z = 0$ . Entonces, se tiene

$$P_0(1) = R(0) = 1 - \rho. \quad (2.A.12)$$

Sustituyendo el valor de  $P_0(1)$ , dado por (2.A.12), en la relación (2.A.11) y tomando  $z = 0$  sobre la expresión resultante, se obtiene, después de algunas manipulaciones algebraicas, la igualdad

$$P_{00} = \delta_{0\alpha} H(0) + (1 - \delta_{0\alpha}) \mu \alpha^{-1} \left( \int_0^1 x^{\alpha/\mu-1} H^{-1}(x) dx \right)^{-1}. \quad (2.A.13)$$

Entonces, (2.A.1) es deducida tras la sustitución de (2.A.12) y (2.A.13) en (2.A.11), y el posterior reagrupamiento de términos.

La expresión (2.A.2) para  $P_1(z)$  se obtiene a partir de (2.A.7) y la igualdad  $K(z) = P_0(z) + zP_1(z)$ .

En el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , la relación (2.A.10) conduce directamente a (2.A.4). La expresión (2.A.5) es obtenida a partir de (2.A.4) y (2.A.7). Estos resultados son coherentes con los obtenidos por Farahmand (1990).

□

Para finalizar este apéndice, en el siguiente resultado se reúnen los dos primeros momentos factoriales de la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ . La demostración de este resultado es estándar y, por ello, será omitida.

**Corolario 2.A.2.** *i) Si  $\alpha \geq 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\rho < 1$ , entonces*

$$M_1^0 = \mu^{-1}(\lambda\rho + \alpha(P_{00} + \rho - 1)),$$

$$M_2^0 = \mu^{-1}(\lambda q_1 - M_1^0(\alpha + \mu - \lambda\rho(1 - \rho)^{-1})),$$

$$M_1^1 = \rho(1 - \rho)^{-1} M_1^0 + q_1 - \rho,$$

$$M_2^1 = (1 - \rho)^{-1}(2q_1 M_1^0 + \rho M_2^0) + q_2 - 2M_1^1,$$

donde

$$q_1 = \rho + \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)}$$

y

$$q_2 = \lambda^2 \beta_2 + \frac{\rho \lambda^2 \beta_2}{1 - \rho} + \frac{\lambda^4 \beta_2^2}{2(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda^3 \beta_3}{3(1 - \rho)},$$

son los dos primeros momentos factoriales de la distribución límite del número de clientes presentes en

el sistema M/G/1 con línea de espera.

ii) Si  $\alpha > 0$ ,  $\mu = 0$  y  $\rho(\lambda + \alpha)\alpha^{-1} < 1$ , entonces

$$M_1^0 = (\alpha - (\lambda + \alpha)\rho)^{-1}\lambda(1 - \rho)q_1,$$

$$M_2^0 = \lambda(\alpha - (\lambda + \alpha)\rho)^{-1}(2q_1M_1^0 + (1 - \rho)q_2),$$

$$M_1^1 = \rho(1 - \rho)^{-1}M_1^0 + q_1 - \rho,$$

$$M_2^1 = (1 - \rho)^{-1}(2q_1M_1^0 + \rho M_2^0) + q_2 - 2M_1^1.$$

## BIBLIOGRAFIA

- J.R. Artalejo (1994), New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers, *Statistica Neerlandica* **48**, 23-36.
- R.J. Boucherie and O.J. Boxma (1995), The workload in the  $M/G/1$  queue with work removal, CWI Report BS-R9505, Amsterdam.
- E. Castillo, A. Iglesias, J.M. Gutierrez, E. Alvarez y A. Cobo (1994), *Mathematica*, Editorial Paraninfo.
- D.R. Cox (1955), The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **51**, 433-441.
- B.T. Doshi (1986), Queueing systems with vacations - A survey, *Queueing Systems* **1**, 29-66.
- B.T. Doshi (1990), Single server queues with vacations, in: *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems* (H. Takagi, ed.), Elsevier Science, 217-265.
- W. Ellis and E. Lodi (1990), *A Tutorial Introduction to Mathematica*, Brooks/Cole.
- K. Farahmand (1990), Single line queue with repeated demands, *Queueing Systems* **6**, 223-228.
- S.W. Fuhrmann and R.B. Cooper (1985), Stochastic decompositions in the  $M/G/1$  queue with generalized vacations, *Operations Research* **33**, 1117-1129.
- P.G. Harrison and E. Pitel (1995), Response time distributions in tandem G-networks, *Journal of Applied Probability* **32**, 224-246.
- P.G. Harrison and E. Pitel (1996), The  $M/G/1$  queue with negative customers, *Advances in Applied Probability* (próxima aparición).
- R.P. Kanwall (1971), *Linear Integral Equations. Theory and Technique*, Academic Press, Inc..
- J. Keilson, J. Cozzolino and H. Young (1968), A service system with unfilled requests repeated, *Operations Research* **16**, 1126-1137.
- A.G. de Kok (1984), Algorithmic methods for single server systems with repeated attempts, *Statistica Neerlandica* **38**, 23-32.
- M. Martin and A. Gomez-Corral (1995), On the  $M/G/1$  retrial queueing system with linear control policy, *Top* **3**, 285-305.
- M.F. Neuts and B.M. Rao (1990), Numerical investigation of a multiserver retrial model, *Queueing Systems* **7**, 169-190.
- W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery (1992), *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.
- H. Schellhaas (1986), Computation of the state probabilities in a class of semi-regenerative queueing models, in: *Semi-Markov Models: Theory and Applications* (J. Janssen, ed.), Plenum Press, 111-130.
- K. Sigman and R.W. Wolff (1993), A review of regenerative processes, *SIAM Review* **35**, 269-288.
- S. Stidham, Jr. (1972), Regenerative processes in the theory of queues, with applications to the alternating-priority queue, *Advances in Applied Probability* **4**, 542-577.
- L. Takács (1962), *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press.
- H.C. Tijms (1994), *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Wiley and Sons.
- R.W. Wolff (1982), Poisson arrivals see time averages, *Operations Research* **30**, 223-231.
- P.P. Zabreyko, A.I. Koshelev, M.A. Krasnosel'skii, S.G. Mikhlin, L.S. Rakovshchik and V.Ya. Stet'senko (1986), *Integral Equations - A Reference Text*, Noordhoff International Publishing.

**Capítulo 3. Sistemas de colas con mecanismo de aclarado y disciplina lineal de reintento**

**3.1 Introducción**

**3.2 Descripción del modelo matemático. Condición de ergodicidad**

**3.3 Distribución límite y primeros momentos**

**3.4 Esquema recursivo para calcular las probabilidades límite**

**3.5 Tiempo de permanencia en el sistema**

**3.6 Período de ocupación del sistema**

**3.7 Sistema  $M/M/1$  con mecanismo de aclarado general y disciplina lineal de reintento**

**3.7.1 Distribución límite**

**3.7.2 Período de ocupación del sistema**

**3.8 Comentarios y notas bibliográficas**

**Apéndice 3**

**Bibliografía**

## Capítulo 3

# Sistemas de colas con mecanismo de aclarado y disciplina lineal de reintento

### 3.1 Introducción

Este capítulo está dedicado al análisis estocástico de sistemas de colas con un único servidor y disciplina lineal de reintento gobernados por un mecanismo de aclarado que instantáneamente destruye todo el trabajo presente en el sistema.

Los trabajos previos sobre sistemas de aclarado estocástico muestran aplicaciones a la teoría de colas, sistemas de inventarios, actividades de mantenimiento de maquinaria y sistemas de servicio público. El principal problema estudiado ha sido el diseño óptimo de estos sistemas cuando el nivel de aclarado está sujeto a control y una estructura de coste es asumida. Las funciones de coste empleadas son lineales y reflejan un coste fijo por aclarado y un coste por unidad presente en el sistema en el instante de aclarado. Así mismo, las aplicaciones de los sistemas de aclarado a la teoría de colas han sido realizadas únicamente en el caso de líneas de espera clásicas.

El objetivo principal de este capítulo consiste en el desarrollo del sistema de colas  $M/G/1$  permitiendo la presencia simultánea de la disciplina lineal de reintento y de un mecanismo de aclarado estocástico gobernado por una variable aleatoria exponencialmente distribuida con parámetro  $\delta > 0$ . Adicionalmente, se estudia el sistema de colas  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado gobernado por una variable aleatoria general. En ambos casos, los sucesos del proceso estocástico asociado al aclarado del sistema son llamados '*desastres*'. Tales desastres pueden ser vistos como rupturas generales del sistema causadas por un virus o una orden de borrado en sistemas de ordenadores donde se considere la disciplina lineal para controlar el acceso al servicio de los mensajes almacenados en el *buffer*. Debe observarse que la existencia de un flujo de desastres implica diferencias significativas en los resultados matemáticos, debido esencialmente a que la estructura matricial de tipo  $M/G/1$  no se conserva.

El resto del capítulo es organizado como se explica a continuación. En la sección 3.2 se realiza la descripción matemática del modelo  $M/G/1$  con aclarado y reintentos, donde se observa que la existencia

del primer momento de la distribución del tiempo de servicio es suficiente para asegurar la ergodicidad del sistema cuando  $\delta > 0$ . La distribución límite y sus primeros momentos son estudiados en la sección 3.3. En la sección 3.4 se desarrolla un esquema recursivo para calcular la distribución límite basado en la teoría de *procesos regenerativos*. El procedimiento seguido contempla la posibilidad de que el flujo de llegadas originales sea un proceso Markoviano con intensidades dependientes del estado del sistema. La sección 3.5 está dedicada al estudio del tiempo de permanencia en el sistema cuando la disciplina de servicio consiste en servir a los clientes en el orden de llegada. El análisis del período de ocupación del sistema y otras variables aleatorias relacionadas, es abordado en la sección 3.6. En la sección 3.7 se realiza el estudio del sistema de colas  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado general. En particular, los epígrafes 3.7.1 y 3.7.2 se centran en el cálculo de la distribución límite y el análisis del período de ocupación del sistema, respectivamente. Finalmente, en la sección 3.8 se incluyen algunos comentarios y notas bibliográficas.

## 3.2 Descripción del modelo matemático. Condición de ergodicidad

Se considera un sistema de colas con un único servidor al cual llegan clientes de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad  $\lambda > 0$ . Si un cliente encuentra el servidor ocupado abandona inmediatamente el área de servicio y se une a la órbita. Se asume la disciplina de reintento lineal; esto es, el tiempo de reintento sigue una distribución exponencial de parámetro  $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$ , cuando el tamaño de la órbita es  $j$ . Los tiempos de servicio son generales con función de distribución continua  $B(t)$  ( $B(0) = 0$ ), primer momento  $\beta_1 < \infty$  y transformada de Laplace-Stieltjes  $\beta(\theta)$ . Adicionalmente, se considera un proceso de Poisson de desastres de intensidad  $\delta > 0$ . Si un desastre ocurre entonces todos los clientes presentes en el sistema son inmediatamente expulsados. Los procesos de llegadas originales y desastres, los intervalos separando sucesivos reintentos y los tiempos de servicio son mutuamente independientes.

El estado del sistema en el instante  $t$  es descrito mediante el proceso Markoviano  $X = \{X(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t), \xi(t)), t \geq 0\}$ , donde  $C(t)$  toma los valores 0 o 1 dependiendo de si el servidor está ocioso u ocupado, respectivamente,  $Q(t)$  denota el número de clientes presentes en la órbita y, si  $C(t) = 1$ ,  $\xi(t)$  representa el tiempo de servicio consumido del cliente que está siendo servido. El espacio de estados del proceso  $X$  es el conjunto  $S = \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ . Si se omite la variable  $\xi(t)$ , entonces el proceso resultante  $Y = \{Y(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$  es un proceso semi-regenerativo con espacio de estados  $\mathcal{E} = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ . Su proceso de renovación Markoviana encajado es  $(Q, \eta) = \{(Q_n, \eta_n), n \geq 0\}$ , donde  $\eta_n$  es el instante de la  $n$ -ésima salida generalizada ( $\eta_0 = 0$ ) y  $Q_n = Q(\eta_n + 0)$ ,  $n \geq 0$ . Se atribuye un significado más general al concepto de *instante de salida*, al pasar a designar un instante de finalización del servicio o un instante de aclarado del sistema.

Es sencillo probar (ver el *Teorema 9.6.12* de Çinlar (1975)) que las probabilidades límite del proceso  $Y$  existen y son positivas cuando la cadena de Markov encajada  $Q = \{Q_n, n \geq 0\}$  es ergódica. Para ello, es necesario asegurar que la función  $t \rightarrow K_t((i, j), (k, l))$ , donde

$$K_t((i, j), (k, l)) = P(Y(t) = (k, l), \eta_1 > t / Y(0) = (i, j)), \quad (i, j), (k, l) \in \mathcal{E},$$

es integrable Riemann en sentido directo. La función  $K_t((i, j), (k, l))$  viene dada por las siguientes expresiones:

$$K_t((i, j), (k, l)) = \begin{cases} e^{-(\lambda+(\alpha+\delta)(1-\delta_{0j})+j\mu)t}, & \text{si } i = k = 0, j = l \geq 0, \\ I_{\{l \geq j\}} \int_0^t \lambda e^{-(\lambda+(\alpha+\delta)(1-\delta_{0j})+j\mu)(t-u)} e^{-(\lambda+\delta)u} \frac{(\lambda u)^{l-j}}{(l-j)!} (1-B(u)) du \\ + I_{\{l+1 \geq j\}} \int_0^t (\alpha(1-\delta_{0j}) + j\mu) e^{-(\lambda+(\alpha+\delta)(1-\delta_{0j})+j\mu)(t-u)} e^{-(\lambda+\delta)u} \\ \times \frac{(\lambda u)^{l-j+1}}{(l-j+1)!} (1-B(u)) du, & \text{si } i = 0, k = 1, l+1 \geq j \geq 0, \\ e^{-(\lambda+\delta)t} \frac{(\lambda t)^{l-j}}{(l-j)!} (1-B(t)), & \text{si } i = k = 1, l \geq j \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Empleando argumentos análogos a los seguidos en el sistema de colas  $M/G/1$  con línea de espera se comprueba que las anteriores expresiones son integrables Riemann en sentido directo (ver Apéndice 3.A).

La ergodicidad de la cadena de Markov  $Q$  es estudiada en el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.1.** Si  $\delta > 0$  y  $\int_0^\infty e^{-\delta t} t dB(t)$  es finita, entonces  $Q$  es ergódica.

**Demostración.** La matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov  $Q$  tiene los siguientes elementos:

$$P_{ij} = P(Q_{n+1} = j / Q_n = i) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} (\beta(\lambda+\delta) - \beta(\delta)), & \text{si } i = j = 0, \\ \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dB(t), & \text{si } i = 0, j \geq 1, \\ 1 - \frac{\lambda+\alpha+i\mu}{\lambda+\alpha+i\mu+\delta} \beta(\delta) + \delta_{i1} \frac{\alpha+i\mu}{\lambda+\alpha+i\mu+\delta} \beta(\lambda+\delta), & \text{si } i \geq 1, j = 0, \\ I_{\{i \leq j\}} \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+i\mu+\delta} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} dB(t) \\ + I_{\{i-1 \leq j\}} \frac{\alpha+i\mu}{\lambda+\alpha+i\mu+\delta} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(t), & \text{si } i \geq 1, j \geq 1. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Para probar la condición de ergodicidad, será utilizado el criterio de Foster que establece que una cadena de Markov irreducible y aperiódica,  $Q$ , con espacio de estados  $\mathcal{A}$ , es ergódica si existen una función real no negativa  $f(s)$ ,  $s \in \mathcal{A}$ , un número positivo  $\varepsilon$  y un subconjunto finito  $\mathcal{B}$  del espacio de estados  $\mathcal{A}$  tales que la tendencia media

$$\gamma_s = E[f(Q_{n+1}) - f(Q_n) / Q_n = s],$$

es finita para todo  $s \in \mathcal{A}$  y  $\gamma_s \leq -\varepsilon$  para todo  $s \notin \mathcal{B}$ .

Considerando  $f(i) = i$ ,  $i \in \mathcal{A} = \mathbb{N}$ , se obtiene

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{\lambda + \delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} t dB(t), & \text{si } i = 0, \\ \frac{\lambda(\lambda + \alpha + i\mu)}{\lambda + \alpha + i\mu + \delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} t dB(t) - \left( \left(1 - \frac{\lambda + \alpha + i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu + \delta} \beta(\delta)\right) i + \frac{\alpha + i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu + \delta} \beta(\delta) \right), & \text{si } i \geq 1. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Dado que  $\delta > 0$ , es posible garantizar la existencia de un entero no negativo  $i_0$  tal que  $\gamma_i \leq -\epsilon$  para  $i > i_0$ . Entonces el teorema se sigue desde el criterio de Foster.

□

Nótese que una condición suficiente para asegurar  $\int_0^\infty e^{-\delta t} t dB(t) < \infty$  es la existencia del primer momento  $\beta_1$  de la distribución del tiempo de servicio.

### 3.3 Distribución límite y primeros momentos

Esta sección está dedicada al estudio de la distribución límite del proceso  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ . El esquema de transiciones entre los estados de  $Y$  es representado en la *Figura 3.3.1*. La función  $\eta(x)$  es la razón condicional de finalización de servicio cuando  $\xi(t) = x$  ( $\eta(x) = B'(x)/(1 - B(x))$ ). Debe observarse que un desastre producido cuando el sistema está vacío es irrelevante debido a que el proceso permanece en el mismo estado.

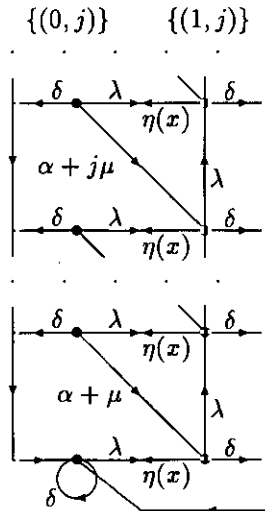


Figura 3.3.1. Espacio de estados y transiciones

Sea la distribución del proceso  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  definida mediante las probabilidades

$$P_{0j}(t) = P(C(t) = 0, Q(t) = j), \quad t \geq 0, j \geq 0, \quad (3.3.1)$$

y las densidades probabilísticas

$$P_{1j}(t, x) = P(C(t) = 1, Q(t) = j, x \leq \xi(t) < x + \Delta x), \quad t \geq 0, x \geq 0, j \geq 0. \quad (3.3.2)$$

La obtención de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del sistema se fundamenta en argumentos basados en la continuidad del movimiento del proceso  $X$ , sobre el espacio de estados  $S$ , en un intervalo infinitesimal de tiempo. Con la ayuda de la *Figura 3.3.1*, se deducen las siguientes ecuaciones:

$$P_{00}(t + \Delta) = P_{00}(t)(1 - \lambda\Delta) + \int_0^\infty P_{10}(t, x)\eta(x)\Delta dx + \delta\Delta \left( \sum_{k=1}^\infty P_{0k}(t) + \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty P_{1k}(t, x)dx \right) + o(\Delta), \quad (3.3.3)$$

$$P_{0j}(t + \Delta) = P_{0j}(t)(1 - \lambda\Delta)(1 - (\alpha + j\mu)\Delta)(1 - \delta\Delta) + \int_0^\infty P_{1j}(t, x)\eta(x)\Delta dx + o(\Delta), \quad j \geq 1, \quad (3.3.4)$$

$$P_{1j}(t + \Delta, x + \Delta) = P_{1j}(t, x)(1 - \lambda\Delta)(1 - \eta(x)\Delta)(1 - \delta\Delta) + (1 - \delta_{0j})P_{1,j-1}(t, x)\lambda\Delta + o(\Delta), \quad j \geq 0, \quad (3.3.5)$$

donde  $o(\Delta)$  es tal que  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} o(\Delta)/\Delta = 0$ . La interpretación de  $\eta(x)$  en (3.3.3)-(3.3.5) es similar a la de  $\lambda$  y  $\delta$ ; es decir,  $\eta(x)\Delta$  representa la probabilidad condicional de que ocurra una finalización del servicio en el intervalo infinitesimal de tiempo  $(t, t + \Delta)$  dado que  $\xi(t) = x$ .

Reagrupando términos en (3.3.3)-(3.3.5), dividiendo por  $\Delta$  y haciendo  $\Delta \rightarrow 0$ , se tienen las relaciones

$$\frac{dP_{00}(t)}{dt} + \lambda P_{00}(t) = \int_0^\infty P_{10}(t, x)\eta(x)dx + \delta \left( \sum_{k=1}^\infty P_{0k}(t) + \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty P_{1k}(t, x)dx \right), \quad (3.3.6)$$

$$\frac{dP_{0j}(t)}{dt} + (\lambda + \alpha + j\mu + \delta)P_{0j}(t) = \int_0^\infty P_{1j}(t, x)\eta(x)dx, \quad j \geq 1, \quad (3.3.7)$$

$$\frac{\partial P_{1j}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_{1j}(t, x)}{\partial x} + (\lambda + \eta(x) + \delta)P_{1j}(t, x) = (1 - \delta_{0j})\lambda P_{1,j-1}(t, x), \quad j \geq 0. \quad (3.3.8)$$

Análogos argumentos conducen a establecer, cuando  $\xi(t) = 0$ , la condición frontera

$$P_{1j}(t, 0) = \lambda P_{0j}(t) + (\alpha + (j + 1)\mu)P_{0,j+1}(t), \quad j \geq 0. \quad (3.3.9)$$

Para las probabilidades límite  $P_{0j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{0j}(t)$  y las densidades probabilísticas límite  $P_{1j}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{1j}(t, x)$ ,  $j \geq 0$ ,  $x \geq 0$ , se definen las funciones generatrices

$$P_0(z) = \sum_{j=0}^\infty P_{0j}z^j, \quad P_1(z, x) = \sum_{j=0}^\infty P_{1j}(x)z^j \quad \text{y} \quad P_1(z) = \int_0^\infty P_1(z, x)dx. \quad (3.3.10)$$

Entonces, la existencia de  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , para  $|z| \leq 1$ , está asegurada cuando  $\delta > 0$ . Haciendo  $t \rightarrow \infty$  en (3.3.6)-(3.3.9) y considerando las funciones generatrices introducidas en (3.3.10), se obtienen las ecuaciones

$$\mu z P_0'(z) + (\lambda + \alpha + \delta)P_0(z) = \delta + \alpha P_{00} + \int_0^\infty P_1(z, x)\eta(x)dx, \quad (3.3.11)$$

$$\frac{\partial P_1(z, x)}{\partial x} + (\lambda - \lambda z + \eta(x) + \delta)P_1(z, x) = 0, \quad (3.3.12)$$

$$z P_1(z, 0) + \alpha P_{00} = \mu z P_0'(z) + (\lambda z + \alpha)P_0(z). \quad (3.3.13)$$

Resolviendo (3.3.12), se tiene

$$P_1(z, x) = P_1(z, 0)(1 - B(x))e^{-(\lambda - \lambda z + \delta)x}. \quad (3.3.14)$$

Combinando (3.3.11), (3.3.13) y (3.3.14), es posible deducir la igualdad

$$\begin{aligned} \mu z(z - \beta(\lambda - \lambda z + \delta))P_0'(z) + ((\lambda + \alpha + \delta)z - (\lambda z + \alpha)\beta(\lambda - \lambda z + \delta))P_0(z) \\ = \delta z + \alpha(z - \beta(\lambda - \lambda z + \delta))P_{00}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

El siguiente resultado será utilizado en la resolución de la ecuación diferencial (3.3.15) y de otras ecuaciones que aparecerán a lo largo de este capítulo.

**Lema 3.3.1.** Sean las funciones

$$f(z, \theta, \omega, x) = (\theta + \lambda + \alpha + \delta)z - x(\lambda z + \alpha)\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta),$$

$$g(z, \omega, x) = z - x\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta),$$

para  $Re(\theta) \geq 0$ ,  $Re(\omega) \geq 0$ ,  $|z| \leq 1$  y  $|x| \leq 1$ . Entonces,

i) Para cada valor fijo de  $(\theta, \omega, x)$ , la función  $f$  tiene una única raíz  $z = h(\theta, \omega, x)$  en el interior del disco unidad,  $|z| < 1$ .

ii) Para cada valor fijo de  $(\omega, x)$ , la función  $g$  tiene una única raíz  $z = h(\omega, x)$  en el interior del disco unidad,  $|z| < 1$ .

**Demostración.** Si  $Re(\theta) \geq 0$ ,  $Re(\omega) \geq 0$  y  $|x| \leq 1$ , es posible asegurar, por el Teorema de Rouché, que la función  $f(z, \theta, \omega, x)$  tiene una única raíz en el círculo  $|z| < 1 - \varepsilon$ , donde  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño. Para ello, basta observar que

$$|x(\lambda z + \alpha)\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta)| < |\theta + \lambda + \alpha + \delta|(1 - \varepsilon),$$

y que, como consecuencia, se tiene

$$|x(\lambda z + \alpha)\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta)| < |(\theta + \lambda + \alpha + \delta)z|,$$

sobre el recinto  $C = \{z/|z| = 1 - \varepsilon\}$ . Entonces, se obtiene i). Argumentos análogos basados en la relación  $|x\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta)| < 1 - \varepsilon$  permiten establecer ii) (ver Takács (1962)).

□

La distribución límite del proceso  $Y$  es estudiada en el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.2.** i) Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , entonces

$$P_0(z) = \mu^{-1} z^{-\alpha/\mu} \int_{\bar{z}}^z \left( \alpha P_{00} u^{\alpha/\mu - 1} + \frac{\delta u^{\alpha/\mu}}{u - \beta(\lambda - \lambda u + \delta)} \right) \exp \left\{ \int_z^u r(v) dv \right\} du, \quad (3.3.16)$$

$$P_1(z) = \frac{(1 - \beta(\lambda - \lambda z + \delta))(\delta - (\lambda - \lambda z + \delta)P_0(z))}{(\lambda - \lambda z + \delta)(z - \beta(\lambda - \lambda z + \delta))}, \quad (3.3.17)$$

donde

$$r(v) = \frac{\lambda - \lambda\beta(\lambda - \lambda v + \delta) + \delta}{\mu(v - \beta(\lambda - \lambda v + \delta))},$$

$$P_{00} = \begin{cases} \delta\mu^{-1} \int_0^{\bar{z}} \frac{1}{\beta(\lambda - \lambda u + \delta) - u} \exp\left\{\int_0^u r(v)dv\right\} du, & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{\int_0^{\bar{z}} \frac{\delta v^{\alpha/\mu}}{\beta(\lambda - \lambda u + \delta) - u} \exp\left\{\int_0^u r(v)dv\right\} du}{\int_0^{\bar{z}} \frac{\delta v^{\alpha/\mu - 1}}{\alpha u^{\alpha/\mu - 1} \exp\left\{\int_0^u r(v)dv\right\}} du}, & \text{si } \alpha > 0, \end{cases} \quad (3.3.18)$$

y  $\bar{z}$  es la raíz de la función  $g$  descrita en el Lema 3.3.1 para el caso  $(\omega, x) = (0, 1)$ .

ii) Si  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , entonces

$$P_0(z) = \frac{\delta z + \alpha(z - \beta(\lambda - \lambda z + \delta))P_{00}}{(\lambda + \alpha + \delta)z - (\lambda z + \alpha)\beta(\lambda - \lambda z + \delta)}, \quad (3.3.19)$$

$$P_1(z) = \frac{(1 - \beta(\lambda - \lambda z + \delta))(\delta(\lambda z + \alpha) - \alpha(\lambda - \lambda z + \delta)P_{00})}{(\lambda - \lambda z + \delta)((\lambda + \alpha + \delta)z - (\lambda z + \alpha)\beta(\lambda - \lambda z + \delta))}, \quad (3.3.20)$$

donde

$$P_{00} = \frac{\delta(\lambda\bar{z} + \alpha)}{\alpha(\lambda - \lambda\bar{z} + \delta)} \quad (3.3.21)$$

y  $\bar{z}$  es la raíz de la función  $f$  descrita en el Lema 3.3.1 para el caso  $(\theta, \omega, x) = (0, 0, 1)$ .

**Demostración.** En primer lugar es considerado el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu > 0$ . El coeficiente de  $P'_0(z)$  en (3.3.15) tiene dos raíces  $z_1 = 0$  y  $z_2 = \bar{z}$ . Como  $\delta > 0$ , la raíz  $\bar{z}$  está en el intervalo  $(0, 1)$ . La solución de la ecuación diferencial (3.3.15) cuando  $z \in (\bar{z}, 1]$  puede ser expresada en los términos

$$P_0(z) = \exp\left\{\int_z^1 p(v)dv\right\} \left(P_0(1) + \int_1^z q(u)\exp\left\{\int_1^u p(v)dv\right\} du\right), \quad (3.3.22)$$

donde

$$p(v) = r(v) + \frac{\alpha}{\mu v} \quad \text{y} \quad q(v) = \frac{\delta v + \alpha(v - \beta(\lambda - \lambda v + \delta))P_{00}}{\mu v(v - \beta(\lambda - \lambda v + \delta))}. \quad (3.3.23)$$

Es sencillo probar que la integral  $\int_z^1 p(v)dv$  diverge cuando  $z \rightarrow \bar{z}+$ . Por otra parte,  $P_0(\bar{z}) < \infty$ . Como consecuencia, la integral  $\int_z^1 q(u)\exp\left\{\int_1^u p(v)dv\right\}du$  tiende a  $P_0(1)$  cuando  $z \rightarrow \bar{z}+$ .

La continuidad de la función generatriz  $P_0(z)$  en el punto  $z = \bar{z}$  conduce a la expresión

$$P_0(\bar{z}) = \frac{\delta}{\lambda - \lambda\bar{z} + \delta}. \quad (3.3.24)$$

El siguiente paso consiste en la elección de un punto arbitrario  $z_a \in (0, \bar{z})$  y la posterior resolución de (3.3.15) en el intervalo  $z \in [z_a, \bar{z}]$ . Se obtiene entonces

$$P_0(z) = \exp \left\{ \int_z^{z_a} p(v) dv \right\} \left( P_0(z_a) + \int_{z_a}^z q(u) \exp \left\{ \int_{z_a}^u p(v) dv \right\} du \right), \quad z \in [z_a, \bar{z}]. \quad (3.3.25)$$

Haciendo  $z \rightarrow \bar{z}-$  sobre (3.3.25) y teniendo en cuenta que  $P_0(\bar{z}) < \infty$ , se encuentra una primera expresión para la condición inicial  $P_0(z_a)$ ,

$$P_0(z_a) = \int_{\bar{z}}^{z_a} q(u) \exp \left\{ \int_{z_a}^u p(v) dv \right\} du. \quad (3.3.26)$$

Repetiendo los argumentos para el caso  $z \in (0, z_a]$  y haciendo uso de la condición  $P_0(0) < \infty$  se deduce una segunda expresión para  $P_0(z_a)$ ,

$$P_0(z_a) = \int_0^{z_a} q(u) \exp \left\{ \int_{z_a}^u p(v) dv \right\} du. \quad (3.3.27)$$

Obsérvese que la expresión (3.3.25) sigue siendo válida para expresar la solución de (3.3.15) cuando  $z \in (0, z_a]$ . Igualando los valores de  $P_0(z_a)$  dados en (3.3.26) y (3.3.27), se obtiene la expresión (3.3.18) para  $P_{00}$  en el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu > 0$ . Es posible entonces reescribir la solución de la ecuación (3.3.15) como (3.3.16). Se debe observar que el rango de  $z$  para el cual (3.3.16) es válida es  $(0, 1] - \{\bar{z}\}$ .

Teniendo en cuenta que  $P_0'(z) = q(z) - p(z)P_0(z)$ , las relaciones (3.3.13) y (3.3.14) conducen a la expresión

$$P_1(z, x) = (1 - B(x)) e^{-(\lambda - \lambda z + \delta)x} \frac{\delta - (\lambda - \lambda z + \delta)P_0(z)}{z - \beta(\lambda - \lambda z + \delta)}. \quad (3.3.28)$$

Integrando la relación (3.3.28), se tiene (3.3.17). En el caso particular  $z = \bar{z}$  se consigue

$$P_1(\bar{z}) = \frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}(\lambda - \lambda \bar{z} + \mu(1 + \lambda\beta'(\lambda - \lambda \bar{z} + \delta)) + \delta)} \left( \frac{\delta}{\lambda - \lambda \bar{z} + \delta} \left( \lambda \bar{z} \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda - \lambda \bar{z} + \delta} \right) + \alpha \right) - \alpha P_{00} \right).$$

La discusión del caso  $\alpha = 0$  y  $\mu > 0$  es más simple que la anterior. La ecuación diferencial (3.3.15) tiene una única singularidad  $z_1 = \bar{z}$  en el intervalo  $(0, 1)$ . La solución de (3.3.15) cuando  $z \in [0, \bar{z}]$  puede escribirse como en (3.3.25), sustituyendo el punto auxiliar  $z_a$  por el punto  $z = 0$ . Teniendo en cuenta que  $P_0(\bar{z})$  es finito y que la integral  $\int_z^0 p(v) dv$  diverge cuando  $z \rightarrow \bar{z}-$ , es posible deducir la expresión (3.3.18) para  $P_{00}$ . La relación (3.3.22) continúa siendo válida cuando se resuelve (3.3.15) en el intervalo  $z \in (\bar{z}, 1]$ . Observando que  $P_0(\bar{z}) < \infty$  y que la integral  $\int_z^1 p(v) dv$  diverge si  $z \rightarrow \bar{z}+$ , se deduce que

$$P_0(1) = \int_{\bar{z}}^1 q(u) \exp \left\{ \int_1^u p(v) dv \right\} du.$$

Argumentos similares a los seguidos en el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu > 0$  conducen a expresar las funciones generatrices  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , como (3.3.16) y (3.3.17) cuando  $\alpha = 0$ .

A continuación se estudia el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ . Si  $\mu = 0$ , entonces la ecuación (3.3.15) se reduce directamente a la expresión (3.3.19) para  $P_0(z)$ , cuando  $z \in [0, 1] - \{\bar{z}\}$ . Se observa que la raíz  $\hat{z}$  está en

(0, 1) cuando  $\delta > 0$ . Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene el valor

$$P_0(\hat{z}) = \frac{(\lambda\hat{z} + \alpha)(\alpha(1 + \lambda\beta'(\lambda - \lambda\hat{z} + \delta))P_{00} + \delta)}{\lambda(\lambda\hat{z} + \alpha)^2\beta'(\lambda - \lambda\hat{z} + \delta) + \alpha(\lambda + \alpha + \delta)}$$

La probabilidad  $P_{00}$  es obtenida particularizando (3.3.15) en el punto  $\hat{z}$  y observando que  $0 < P_{00} < P_0(\hat{z}) < 1$ . De este modo, se deduce la expresión (3.3.21).

Finalmente, utilizando las relaciones (3.3.13), (3.3.14) y (3.3.19) se obtienen

$$P_1(z, x) = (1 - B(x))e^{-(\lambda - \lambda z + \delta)x} \frac{\delta(\lambda z + \alpha) - \alpha(\lambda - \lambda z + \delta)P_{00}}{(\lambda + \alpha + \delta)z - (\lambda z + \alpha)\beta(\lambda - \lambda z + \delta)}, \quad z \in [0, 1] - \{\hat{z}\}, \quad (3.3.29)$$

$$P_1(\hat{z}, x) = (1 - B(x))e^{-(\lambda - \lambda\hat{z} + \delta)x} \frac{\lambda\delta(\lambda + \alpha + \delta)(\lambda\hat{z} + \alpha)}{(\lambda - \lambda\hat{z} + \delta)(\lambda(\lambda\hat{z} + \alpha)^2\beta'(\lambda - \lambda\hat{z} + \delta) + \alpha(\lambda + \alpha + \delta))}. \quad (3.3.30)$$

Integrando (3.3.29) y (3.3.30), son obtenidas las expresiones (3.3.20) y

$$P_1(\hat{z}) = \frac{\lambda\delta(\lambda + \alpha + \delta)(\alpha - (\alpha + \delta)\hat{z})}{(\lambda - \lambda\hat{z} + \delta)^2(\lambda(\lambda\hat{z} + \alpha)^2\beta'(\lambda - \lambda\hat{z} + \delta) + \alpha(\lambda + \alpha + \delta))}.$$

□

Para finalizar esta sección, en el siguiente corolario se reúnen los primeros momentos de la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ .

**Corolario 3.3.3.** Sea  $M_i^1, i \in \{0, 1\}$ , el primer momento de las probabilidades límite

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = i, Q(t) = j), \quad (i, j) \in \mathcal{E}.$$

i) Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , entonces

$$M_1^0 = \mu^{-1} \left( \frac{\delta}{1 - \beta(\delta)} \left( 1 - \frac{(\lambda + \alpha)(1 - \beta(\delta)) + \delta}{\mu} \int_{\bar{x}}^1 \frac{u^{\alpha/\mu}}{u - \beta(\lambda - \lambda u + \delta)} \exp \left\{ \int_1^u r(v) dv \right\} du \right) + \alpha P_{00} \left( 1 - \frac{(\lambda + \alpha)(1 - \beta(\delta)) + \delta}{\mu(1 - \beta(\delta))} \int_{\bar{x}}^1 u^{\alpha/\mu - 1} \exp \left\{ \int_1^u r(v) dv \right\} du \right) \right), \quad (3.3.31)$$

$$M_1^1 = \lambda\delta^{-1} - \frac{1}{1 - \beta(\delta)} \left( 1 + \delta\mu^{-1} \left( 1 - \frac{(\lambda + \alpha)(1 - \beta(\delta)) + \mu + \delta}{\mu} \times \int_{\bar{x}}^1 \frac{u^{\alpha/\mu}}{u - \beta(\lambda - \lambda u + \delta)} \exp \left\{ \int_1^u r(v) dv \right\} du \right) + \alpha\mu^{-1} P_{00} \left( 1 - \beta(\delta) - \frac{(\lambda + \alpha)(1 - \beta(\delta)) + \mu + \delta}{\mu} \int_{\bar{x}}^1 u^{\alpha/\mu - 1} \exp \left\{ \int_1^u r(v) dv \right\} du \right) \right). \quad (3.3.32)$$

ii) Si  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , entonces

$$M_1^0 = (\alpha((\lambda - \lambda\beta(\delta) + \delta)\beta(\delta) + \lambda\delta\beta'(\delta))P_{00} - \delta(\alpha\beta(\delta) + \lambda(\lambda + \alpha)\beta'(\delta))) \times ((\lambda + \alpha)(1 - \beta(\delta)) + \delta)^{-2}, \quad (3.3.33)$$

$$M_1^1 = (\alpha\delta P_{00}((\lambda - \lambda\beta(\delta) + \alpha + \delta)(1 - \beta(\delta)) - \lambda\delta\beta'(\delta)) + \lambda\delta^2(\lambda + \alpha)\beta'(\delta) + (1 - \beta(\delta))(\lambda(\lambda + \alpha)^2(1 - \beta(\delta)) + \delta(\lambda^2 - \alpha(\alpha + \delta))))((\lambda + \alpha)(1 - \beta(\delta)) + \delta)^{-2} \delta^{-1}. \quad (3.3.34)$$

La demostración es sencilla desde el Teorema 3.3.2 y, por ello, es omitida.

### 3.4 Esquema recursivo para calcular las probabilidades límite

En esta sección se desarrolla un esquema recursivo numéricamente estable para calcular las probabilidades límite de sistemas de colas con un único servidor y reintentos, sujetos a rupturas generales gobernadas por un proceso de Poisson de desastres. El sistema considerado en esta sección generaliza al modelo con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado descrito en la sección 3.2, permitiendo que los clientes lleguen al sistema de acuerdo a un proceso Markoviano con intensidades,  $\lambda_{ij}$ , dependientes del estado del sistema.

A igual que en la sección 2.4, se empleará un método algorítmico basado en la teoría de *procesos regenerativos* y en la propiedad *PASTA*. Es interesante reseñar que el método es válido aunque el sistema no preserva la estructura matricial de tipo  $M/G/1$ .

El proceso Markoviano de llegada con intensidades dependientes del estado del sistema cubre un número importante de casos particulares. Tomando  $\lambda_{ij} = \lambda$ , si  $i \in \{0, 1\}$  y  $j \geq 0$ , se tiene el sistema  $M/G/1$  con política lineal de reintento y desastres de las secciones previas. Si se asume un modelo con capacidad finita de la órbita,  $K$ , entonces las intensidades de llegada de clientes deben ser tomadas como  $\lambda_{ij} = \lambda$ , si  $i \in \{0, 1\}$  y  $0 \leq j \leq K - 1$ ,  $\lambda_{0K} = \lambda$  y  $\lambda_{ij} = 0$ , en otro caso. Cuando la particularización es  $\lambda_{ij} = \lambda(K - i - j)$ , si  $(i, j)$  es tal que  $0 \leq i + j \leq K$ , se obtiene el proceso con *quasi-random input* usado en las actividades de mantenimiento de  $K$  máquinas (*repairman problem*). Tomando  $\delta = 0$  se obtienen los correspondientes sistemas sin flujo de desastres.

Un ciclo de regeneración del sistema es definido como el tiempo transcurrido entre dos visitas consecutivas del proceso  $Y$  al estado  $(0, 0)$ . A continuación se definen algunas variables aleatorias asociadas a un ciclo:

$T$  = longitud del ciclo,

$T_{ij}$  = cantidad de tiempo que el proceso  $Y$  permanece en el estado  $(i, j)$  en  $[0, T)$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ ,

$N_{0j}$  = número de finalizaciones del servicio en  $[0, T)$  que dejan a  $j$  clientes en órbita,  $j \geq 1$ ,

$N$  = número de salidas generalizadas en  $[0, T)$ .

Se define también  $N_{00}$  como el número de veces durante  $[0, T)$  en que el proceso  $Y$  visita el estado  $(0, 0)$ . Es claro que  $N_{00} = 1$ , si bien la visita puede deberse a una finalización del servicio o a la ocurrencia de un desastre.

Debe notarse que el proceso en tiempo continuo  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$  es un proceso regenerativo con proceso de renovación encajado  $\{T_1, T_2, \dots\}$ , donde  $T_i$  denota el  $i$ -ésimo ciclo de regeneración. Por conveniencia en la notación se toma  $T = T_1$ .

De la teoría de los procesos regenerativos (ver Stidham (1972)) se deduce

$$P_{ij} = \frac{E[T_{ij}]}{E[T]}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (3.4.1)$$

El argumento básico en el desarrollo del método algorítmico para calcular la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  consiste en analizar el número de transiciones entre diferentes conjuntos de estados durante  $[0, T)$ . Obsérvese que el número de transiciones desde el estado  $(0, j)$  es igual al número de transiciones hacia el estado  $(0, j)$  en un ciclo de regeneración. Aplicando la propiedad *PASTA* se obtiene que los correspondientes valores medios verifican la igualdad

$$(\lambda_{0j} + \alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu + \delta(1 - \delta_{0j}))E[T_{0j}] = E[N_{0j}], \quad 0 \leq j \leq K. \quad (3.4.2)$$

Análogamente, el número de ocasiones en las cuales el tamaño de la órbita sobrepasa superiormente el nivel  $j - 1$  es igual al número de ocasiones en que lo hace inferiormente. Tomando esperanzas sobre estos valores, se deduce la relación

$$\lambda_{1,j-1}E[T_{1,j-1}] = (\alpha + j\mu)E[T_{0j}] + \delta \sum_{n=j}^K (E[T_{0n}] + E[T_{1n}]), \quad 1 \leq j \leq K. \quad (3.4.3)$$

Nótese que (3.4.3) es equivalente a

$$\lambda_{1,j-1}E[T_{1,j-1}] + \delta \sum_{n=0}^{j-1} (E[T_{0n}] + E[T_{1n}]) = (\alpha + j\mu)E[T_{0j}] + \delta E[T], \quad 1 \leq j \leq K. \quad (3.4.4)$$

Dividiendo (3.4.4) por  $E[T]$ , en virtud de (3.4.1), se tiene que

$$\lambda_{1,j-1}P_{1,j-1} + \delta \sum_{n=0}^{j-1} (P_{0n} + P_{1n}) = (\alpha + j\mu)P_{0j} + \delta, \quad 1 \leq j \leq K. \quad (3.4.5)$$

La expresión (3.4.5) muestra que para calcular la distribución límite basta con encontrar la sucesión de probabilidades parciales  $\{P_{1j}\}_{j=0}^K$ . La probabilidad  $P_{00}$  es calculada mediante la condición de normalización

$$P_{00} = 1 - P_{10} - \sum_{n=1}^K (P_{0n} + P_{1n}). \quad (3.4.6)$$

A continuación se obtendrá una relación recurrente entre las probabilidades  $\{P_{1j}\}_{j=0}^K$ . Para ello, es necesario definir algunas cantidades auxiliares. Para  $0 \leq j \leq K$  y  $0 \leq k \leq \min(j + 1, K)$ , sean

$A_{kj}$  = cantidad esperada de tiempo que, durante un servicio, hay  $j$  clientes en la órbita, dado que tras la salida generalizada previa quedaron  $k$  clientes en la órbita,

$T_{1kj}$  = cantidad de tiempo en  $[0, T)$  durante la cual el sistema permanece en el estado  $(1, j)$ , contabilizada sobre aquellos tiempos de servicio precedidos por una salida generalizada que dejó a  $k$  clientes en la órbita.

Obsérvese que

$$T_{1j} = \sum_{k=0}^{\tilde{j}+1} T_{1kj}, \quad 0 \leq j \leq K,$$

siendo  $\tilde{j} = \min(j, K - 1)$ .

Teniendo en cuenta las definiciones de  $T_{1kj}$  y de  $N_{0j}$ , y aplicando la identidad de Wald, se obtiene

$$E[T_{1j}] = \sum_{k=0}^{\tilde{j}+1} A_{kj} E[N_{0k}], \quad 0 \leq j \leq K. \quad (3.4.7)$$

Con la ayuda de (3.4.2), es posible reescribir (3.4.7) en los términos

$$E[T_{1j}] = A_{0j} + \sum_{k=1}^{\tilde{j}+1} A_{kj} (\lambda_{0k} + \alpha + k\mu + \delta) E[T_{0k}], \quad 0 \leq j \leq K. \quad (3.4.8)$$

Haciendo uso de (3.4.4) y (3.4.8), se deduce

$$\begin{aligned} E[T_{1j}] &= \left( A_{0j} + (1 - \delta_{0j}) \sum_{k=1}^j \lambda_{1,k-1} \left( 1 + \frac{\lambda_{0k} + \delta}{\alpha + k\mu} \right) A_{kj} E[T_{1,k-1}] \right. \\ &+ \delta \left( (1 - \delta_{jK}) \left( 1 + \frac{\lambda_{0,j+1} + \delta}{\alpha + (j+1)\mu} \right) A_{j+1,j} E[T_{0j}] + (1 - \delta_{0j}) \sum_{n=0}^{j-1} (E[T_{0n}] + E[T_{1n}]) \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{k=n+1}^{\tilde{j}+1} \left( 1 + \frac{\lambda_{0k} + \delta}{\alpha + k\mu} \right) A_{kj} - E[T] \sum_{k=1}^{\tilde{j}+1} \left( 1 + \frac{\lambda_{0k} + \delta}{\alpha + k\mu} \right) A_{kj} \right) \\ &\quad \times \left( 1 - (1 - \delta_{jK})(\lambda_{1j} + \delta) \left( 1 + \frac{\lambda_{0,j+1} + \delta}{\alpha + (j+1)\mu} \right) A_{j+1,j} \right)^{-1}, \quad 0 \leq j \leq K. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad (3.4.9) por  $E[T]$  y considerando la relación  $E[T] = (\lambda_{00} P_{00})^{-1}$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} P_{1j} &= \left( \lambda_{00} A_{0j} P_{00} + (1 - \delta_{0j}) \sum_{k=1}^j \lambda_{1,k-1} \left( 1 + \frac{\lambda_{0k} + \delta}{\alpha + k\mu} \right) A_{kj} P_{1,k-1} \right. \\ &+ \delta \left( (1 - \delta_{jK}) \left( 1 + \frac{\lambda_{0,j+1} + \delta}{\alpha + (j+1)\mu} \right) A_{j+1,j} P_{0j} + (1 - \delta_{0j}) \sum_{n=0}^{j-1} (P_{0n} + P_{1n}) \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{k=n+1}^{\tilde{j}+1} \left( 1 + \frac{\lambda_{0k} + \delta}{\alpha + k\mu} \right) A_{kj} - \sum_{k=1}^{\tilde{j}+1} \left( 1 + \frac{\lambda_{0k} + \delta}{\alpha + k\mu} \right) A_{kj} \right) \end{aligned}$$

$$\times \left( 1 - (1 - \delta_{jK})(\lambda_{1j} + \delta) \left( 1 + \frac{\lambda_{0,j+1} + \delta}{\alpha + (j+1)\mu} \right) A_{j+1,j} \right)^{-1}, \quad 0 \leq j \leq K. \quad (3.4.10)$$

La aplicación simultánea de las fórmulas (3.4.5) y (3.4.10) proporciona un esquema recursivo estable para calcular las probabilidades límite en términos de  $P_{00}$ , que viene dada por la expresión (3.4.6).

El siguiente paso consiste en conseguir expresiones explícitas para las cantidades  $A_{kj}$ . Para ello, se introducen los valores medios  $B_{kj}$ ,  $0 \leq k \leq j \leq K$ , definidos como

$B_{kj}$  = cantidad esperada de tiempo que, durante un servicio, hay  $j$  clientes en la órbita dado que en el instante de su comienzo había  $k$  clientes.

Entonces, condicionando respecto de la procedencia del cliente que está siendo servido, se obtienen las relaciones

$$A_{kj} = (\alpha(1 - \delta_{0k}) + k\mu) \gamma_k B_{k-1,j} + \lambda_{0k} \gamma_k B_{kj}, \quad 0 \leq k \leq j \leq K, \quad (3.4.11)$$

$$A_{j+1,j} = (\alpha + (j+1)\mu) \gamma_{j+1} B_{jj}, \quad 0 \leq j \leq K-1, \quad (3.4.12)$$

donde

$$\gamma_k = \frac{1}{\lambda_{0k} + \alpha(1 - \delta_{0k}) + k\mu + \delta(1 - \delta_{0k})}, \quad k \geq 0.$$

En el caso particular del sistema de colas  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado, descrito en las secciones previas, se tiene que

$$B_{kj} = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} \frac{(\lambda t)^{j-k}}{(j-k)!} (1 - B(t)) dt, & \text{si } K = \infty \text{ o } j < K < \infty, \\ \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} (1 - B(t)) \sum_{n=K-k}^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} dt, & \text{si } j = K < \infty. \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Para demostrar la validez de (3.4.13) en el caso  $K = \infty$  o  $j < K < \infty$ , se considera un intervalo infinitesimal  $(t, t + \Delta t)$ . Entonces el intervalo contribuye a  $B_{kj}$  si el servicio no ha sido completado antes del instante  $t$  (con probabilidad  $1 - B(t)$ ), no ha ocurrido ningún desastre (con probabilidad  $e^{-\delta t}$ ) y  $j - k$  clientes han llegado al sistema en  $(0, t)$  (con probabilidad  $e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-k} / (j-k)!$ ). El caso  $j = K < \infty$  es de naturaleza análoga. Sólo es necesario observar que son necesarias, al menos,  $K - k$  llegadas en el intervalo  $(0, t)$ .

Las integrales que aparecen en la expresión (3.4.13) pueden ser reducidas a sumas finitas en el caso de las distribuciones de servicio más usuales. A continuación se exponen las expresiones de las cantidades  $B_{kj}$  correspondientes a las distribuciones de servicio exponencial, determinista, Coxian-2 y Erlang.

*Ejemplo 1.* Distribución exponencial. Se asume que  $B(t) = 1 - e^{-\nu t}$ ,  $t > 0$ ,  $\nu > 0$ , entonces

$$B_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda + \nu + \delta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \right)^{j-k}, & \text{si } K = \infty \text{ o } j < K < \infty, \\ \frac{1}{\nu + \delta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \right)^{K-k}, & \text{si } j = K < \infty. \end{cases}$$

*Ejemplo 2.* Distribución determinista. Se considera que el tiempo de servicio de un cliente es una constante  $D > 0$ . Es entonces sencillo comprobar que

$$B_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda + \delta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right)^{j-k} \left( 1 - e^{-(\lambda + \delta)D} \sum_{n=0}^{j-k} \frac{((\lambda + \delta)D)^n}{n!} \right), & \text{si } K = \infty \text{ o } j < K < \infty, \\ \delta^{-1} \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right)^{K-k} - e^{-\delta D} - (1 - \delta_k K) e^{-(\lambda + \delta)D} \right. \\ \left. \times \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right)^{K-k} \sum_{n=0}^{K-k-1} \frac{((\lambda + \delta)D)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{K-k-1} \frac{(\lambda D)^n}{n!} \right) \right), & \text{si } j = K < \infty. \end{cases}$$

*Ejemplo 3.* Distribución Coxian-2. Se considera que la función de densidad del tiempo de servicio es

$$b(t) = p_1 \nu_1 e^{-\nu_1 t} + p_2 \nu_2 e^{-\nu_2 t}, \quad t > 0,$$

donde  $\nu_1 > \nu_2 > 0$ ,  $p_2 = 1 - p_1$  y  $p_1 = 1 - b\nu_1/(\nu_1 - \nu_2)$ . En este caso,  $B_{kj}$  puede reducirse a la siguiente expresión:

$$B_{kj} = \begin{cases} \sum_{n=1}^2 \frac{p_n}{\lambda + \nu_n + \delta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu_n + \delta} \right)^{j-k}, & \text{si } K = \infty \text{ o } j < K < \infty, \\ \sum_{n=1}^2 \frac{p_n}{\nu_n + \delta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu_n + \delta} \right)^{K-k}, & \text{si } j = K < \infty. \end{cases}$$

El parámetro  $b$  pertenece al intervalo  $[0, 1]$ . Una variable aleatoria con distribución Coxian-2 tiene un coeficiente de variación mayor o igual a  $1/2$ . En particular, la distribución hiperexponencial,  $H_2$ , requiere que los pesos  $p_1$  y  $p_2$  sean no negativos.

*Ejemplo 4.* Distribución Erlang. Se supone que la función de distribución del tiempo de servicio es

$$B(t) = 1 - \sum_{n=0}^{m-1} e^{-\nu t} (\nu t)^n (n!)^{-1}, \quad t \geq 0, m \geq 1, \nu > 0.$$

Entonces, se deduce la expresión

$$B_{kj} = \begin{cases} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)! (\lambda + \nu + \delta)^{j-k+1}} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(n+j-k)!}{n!} \left( \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \right)^n, & \text{si } K = \infty \text{ o } j < K < \infty, \\ \delta^{-1} \left( 1 - \left( \frac{\nu}{\nu + \delta} \right)^m \right) - (1 - \delta_k K) \frac{1}{\lambda + \nu + \delta} \\ \times \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\nu}{\lambda + \nu + \delta} \right)^n \sum_{i=0}^{K-k-1} \frac{(n+i)!}{i!} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu + \delta} \right)^i, & \text{si } j = K < \infty. \end{cases}$$

Otras distribuciones de tiempos de servicio (por ejemplo, mixturas de distribuciones Erlang, traslaciones de distribuciones exponenciales (*shifted exponential distribution*), etc.) conducen a expresiones

explícitas para las cantidades  $B_{kj}$ .

La experiencia computacional muestra que el esquema recursivo proporcionado por las fórmulas (3.4.5) y (3.4.10) es numéricamente estable. Debe observarse que sólo una diferencia aparece involucrada en (3.4.10). No es previsible entonces una pérdida de precisión significativa.

| $j$ | Distribución exponencial<br>( $\lambda, \alpha, \mu, \nu, \delta, K$ ) =<br>(4.7, 1.4, 5.5, 5.3, 0.001, 19) |          | Distribución determinista<br>( $\lambda, \alpha, \mu, D, \delta, K$ ) =<br>(0.75, 4.3, 0, 0.3, 1.1, 12) |                        | Distribución $H_2$<br>( $\lambda, \alpha, \mu, p, \nu_1, \nu_2, \delta, K$ ) =<br>(5.3, 0, 2.9, 0.25, 2, 4, 0.3, 17) |          |
|-----|---|----------|---|------------------------|--|----------|
|     | $P_{0j}$  | $P_{1j}$ | $P_{0j}$  | $P_{1j}$               | $P_{0j}$   | $P_{1j}$ |
| 0   | 0.028364  | 0.024970 | 0.803077  | 0.154681               | 0.090909   | 0.061364 |
| 1   | 0.016871  | 0.036929 | 0.016173  | 0.020888               | 0.024453   | 0.062090 |
| 2   | 0.013925  | 0.044931 | 0.002318  | 0.002306               | 0.017366   | 0.059921 |
| 3   | 0.011751  | 0.050111 | 0.000260  | 0.000237               | 0.012921   | 0.056481 |
| 4   | 0.010032  | 0.053190 | 0.000026  | 0.000024               | 0.009914   | 0.052525 |
| 5   | 0.008625  | 0.054686 | 0.000002  | 0.000002               | 0.007777   | 0.048434 |
| 6   | 0.007452  | 0.054984 | $0.27 \times 10^{-6}$   | $0.25 \times 10^{-6}$  | 0.006203   | 0.044410 |
| 7   | 0.006462  | 0.054381 | $0.28 \times 10^{-7}$   | $0.25 \times 10^{-7}$  | 0.005015   | 0.040569 |
| 8   | 0.005618  | 0.053109 | $0.29 \times 10^{-8}$   | $0.26 \times 10^{-8}$  | 0.004100   | 0.036978 |
| 9   | 0.004894  | 0.051351 | $0.30 \times 10^{-9}$   | $0.27 \times 10^{-9}$  | 0.003387   | 0.033694 |
| 10  | 0.004272  | 0.049250 | $0.30 \times 10^{-10}$  | $0.27 \times 10^{-10}$ | 0.002832   | 0.030783 |
| 11  | 0.003733  | 0.046920 | $0.31 \times 10^{-11}$  | $0.30 \times 10^{-11}$ | 0.002407   | 0.028365 |
| 12  | 0.003267  | 0.044449 | $0.40 \times 10^{-12}$  | $0.31 \times 10^{-12}$ | 0.002103   | 0.026672 |
| 13  | 0.002862  | 0.041907 |   |                        | 0.001932   | 0.026167 |
| 14  | 0.002509  | 0.039349 |   |                        | 0.001936   | 0.027773 |
| 15  | 0.002202  | 0.036816 |   |                        | 0.002208   | 0.033302 |
| 16  | 0.001934  | 0.034339 |   |                        | 0.002931   | 0.046297 |
| 17  | 0.001699  | 0.031942 |   |                        | 0.004455   | 0.081307 |
| 18  | 0.001494  | 0.029640 |   |                        |  |          |
| 19  | 0.001315  | 0.027446 |   |                        |  |          |

Tabla 3.4.1. Distribución límite de algunos sistemas de colas con reintentos y desastres

El sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento, mecanismo de aclarado y capacidad infinita ( $\lambda_{ij} = \lambda, i \in \{0, 1\}, j \geq 0$ ) debe ser reducido a un sistema finito, donde el tamaño de la órbita,  $K$ , corresponda a un valor ficticio elegido de manera que  $P_{00}$  tenga una precisión deseada. Sin embargo, la truncación directa del sistema de infinitas ecuaciones (3.4.5) y (3.4.10) conduce a un sistema finito que no corresponde con las probabilidades límite de ningún sistema de colas. En particular, es imposible asegurar que  $P_{00}$  pertenece a  $(0, 1)$ . Por otro lado, el uso de la probabilidad  $P_{00}$  dada en el Teorema 3.3.2 conduce circunstancialmente a probabilidades límite fuera del intervalo  $(0, 1)$ , debido a que el valor de  $P_{00}$  empleado debe ser calculado numéricamente. Para resolver estas dificultades, se propone la aproximación

del sistema infinito original por un sistema con capacidad finita en la órbita donde  $\lambda_{ij} = \lambda$ , si  $i \in \{0, 1\}$ ,  $0 \leq j \leq K - 1$ ,  $\lambda_{0K} = \lambda$  y  $\lambda_{ij} = 0$ , en otro caso. El valor  $K$  puede determinarse con la ayuda de la condición de normalización (3.4.6) y el nivel de precisión deseado para  $P_{00}$ .

En la *Tabla 3.4.1* se recogen las distribuciones límite de diferentes sistemas de colas con reintentos y desastres. En las distribuciones de los tiempos de servicio se incluyen las distribuciones exponencial, determinista e hiperexponencial. Los parámetros de reintento han sido elegidos para cubrir las disciplinas constante, clásica y lineal.

| Distribución exponencial<br>( $\lambda, \alpha, \mu, \nu, \delta$ ) =<br>(2.65, 6.1, 0.0, 4.3, 0.001) |          |          |
|---|----------|----------|
| $K$   | $M_1^0$  | $M_1^1$  |
| 15  | 1.489200 | 3.030696 |
| 20  | 1.751900 | 3.565321 |
| 25  | 1.928261 | 3.924235 |
| 30  | 2.042666 | 4.157063 |
| 35  | 2.114786 | 4.303836 |
| 40  | 2.159187 | 4.394197 |
| 45  | 2.185996 | 4.448756 |
| 50  | 2.201926 | 4.481175 |
| 55  | 2.211267 | 4.500187 |
| 60  | 2.216686 | 4.511214 |
| 65  | 2.219801 | 4.517553 |
| 70  | 2.221577 | 4.521168 |
| 75  | 2.222583 | 4.523216 |
| 80  | 2.223151 | 4.524371 |
| 85  | 2.223469 | 4.525018 |
| 90  | 2.223646 | 4.525379 |
| $\infty$  | 2.223867 | 4.525828 |

**Tabla 3.4.2.** Evolución de  $M_1^0$  y  $M_1^1$  en función de  $K$

A modo de ilustración, en la *Tabla 3.4.2* se recogen las variaciones de los primeros momentos parciales de la distribución límite,  $M_1^i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , de un sistema  $M/M/1/K$  con disciplina constante de reintento y mecanismo de aclarado, como función del tamaño de la órbita,  $K$ . El dato asociado al tamaño  $K = \infty$  se ha calculado a partir del *Corolario 3.3.3*.

En las *Figuras 3.4.1* y *3.4.2* se representan los primeros momentos parciales,  $M_1^i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , frente a la intensidad de aclarado  $\delta > 0$ , cuando se considera un sistema con capacidad  $K = 17$ , cuya distribución del tiempo de servicio es hiperexponencial con parámetros  $(p, \nu_1, \nu_2) = (0.25, 2.0, 4.0)$  y con intensidades asociadas a las llegadas originales y a la disciplina clásica de reintento  $(\lambda, \alpha, \mu) = (5.3, 0.0, 2.9)$ .

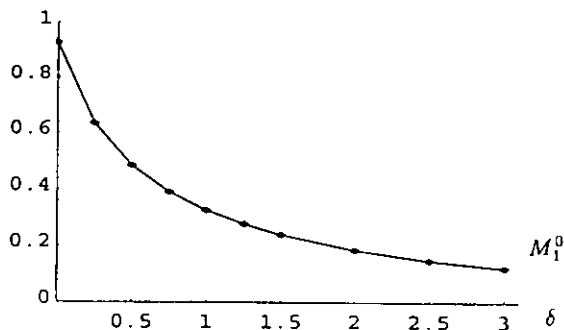


Figura 3.4.1. Evolución de  $M_1^0$  en función de  $\delta$

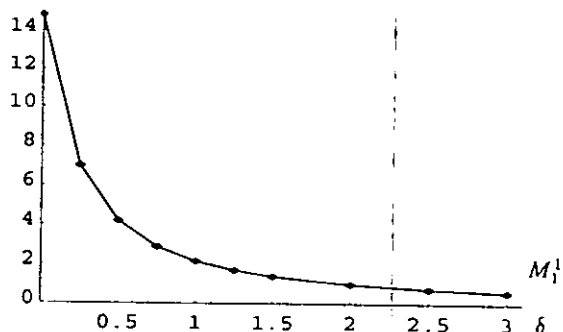


Figura 3.4.2. Evolución de  $M_1^1$  en función de  $\delta$

### 3.5 Tiempo de permanencia en el sistema

Esta sección está dedicada al estudio de la distribución del tiempo de permanencia de un cliente en el sistema, cuando se asume que la disciplina de acceso al servicio de los clientes de la órbita consiste en servir a éstos en el orden de llegada (disciplina *FCFS*). En lo sucesivo el cliente considerado será llamado *cliente marcado*.

Se define el tiempo de permanencia en el sistema del cliente marcado,  $W$ , como la longitud del intervalo de tiempo que comienza en el instante de llegada,  $t$ , y finaliza en el instante en que abandona el sistema.

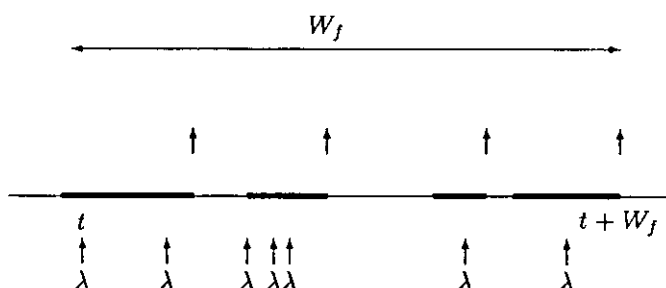


Figura 3.5.1. Tiempo de permanencia condicional  $W_f$

Debido a la existencia de un mecanismo de aclarado estocástico, el cliente marcado puede abandonar el sistema sin haber recibido servicio. En las Figuras 3.5.1 y 3.5.2 se muestran representaciones gráficas de los tiempos de permanencia condicionales  $W_f$  y  $W_d$ , cuando el instante de salida del cliente corresponde al instante de finalización del servicio y al instante de llegada de un desastre, respectivamente.

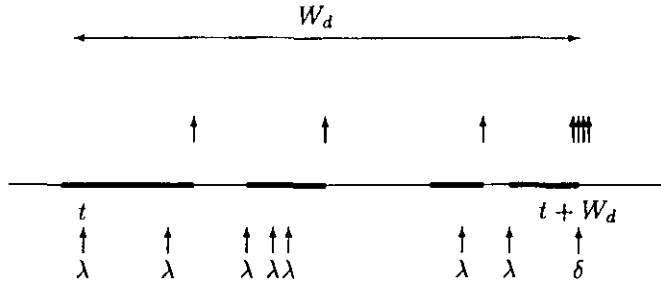


Figura 3.5.2. Tiempo de permanencia condicional  $W_d$

A continuación se introducen algunas variables aleatorias de interés para el cálculo de la transformada de Laplace-Stieltjes de  $W$ . Sea  $Z$  la variable aleatoria distribuida de acuerdo a una ley exponencial, con parámetro  $\delta > 0$ , que gobierna el mecanismo de aclarado. Se denota por  $\tilde{W}$  el tiempo de permanencia del cliente marcado en el sistema de colas  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento en ausencia de desastres ( $\delta = 0$ ). Sea  $\tilde{\beta}(\theta)$  la transformada de Laplace-Stieltjes de  $\tilde{W}$ .

La condición  $\delta > 0$  implica la ergodicidad del sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado estocástico. Sin embargo, la condición necesaria y suficiente que asegura la ergodicidad del correspondiente sistema sin proceso de Poisson de desastres es  $\lambda\beta_1 < 1 - \lambda\delta_0\mu/(\lambda + \alpha)$  (ver Martín y Gomez-Corral (1995)). Si el sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento no es ergódico, entonces es posible deducir la expresión de la transformada de Laplace-Stieltjes de  $W$  en términos de la transformada de la variable aleatoria  $Z$  y la probabilidad del suceso  $\{\tilde{W} = +\infty\}$  (ver Apéndice 3.B). En lo sucesivo se asume que el sistema de colas  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento es ergódico.

Las variables aleatorias  $Z$  y  $\tilde{W}$  son independientes y  $W$  es el mínimo entre  $Z$  y  $\tilde{W}$ . Haciendo uso de esta observación, se deducen (ver Apéndice 3.B) las relaciones

$$E \left[ e^{-\theta W} I_{\{\tilde{W} < Z\}} \right] = \tilde{\beta}(\theta + \delta), \tag{3.5.1}$$

$$E \left[ e^{-\theta W} I_{\{\tilde{W} \geq Z\}} \right] = \frac{\delta(1 - \tilde{\beta}(\theta + \delta))}{\theta + \delta}, \tag{3.5.2}$$

$$P(\tilde{W} < Z) = \tilde{\beta}(\delta), \tag{3.5.3}$$

$$E \left[ W/\tilde{W} < Z \right] = -\frac{\tilde{\beta}'(\delta)}{\tilde{\beta}(\delta)}, \tag{3.5.4}$$

$$E \left[ W/\tilde{W} \geq Z \right] = \frac{1}{\delta} + \frac{\tilde{\beta}'(\delta)}{1 - \tilde{\beta}(\delta)}. \tag{3.5.5}$$

Desde las expresiones anteriores, se tienen

$$E \left[ e^{-\theta W} \right] = \frac{\theta\tilde{\beta}(\theta + \delta) + \delta}{\theta + \delta}, \tag{3.5.6}$$

$$E[W] = \delta^{-1} (1 - \tilde{\beta}(\delta)). \tag{3.5.7}$$

El análisis de  $W$  se reduce entonces al estudio de la distribución del tiempo de permanencia,  $\tilde{W}$ , en el correspondiente sistema sin catástrofes. El resto de la sección se centra en el desarrollo de un método para expresar la transformada de  $W$ ,  $E[e^{-\theta W}]$ , en términos de un sistema finito de ecuaciones diferenciales.

Asociado al sistema sin mecanismo de aclarado estocástico se considera el proceso  $\tilde{X} = \{\tilde{X}(t), t \geq 0\} = \{(\tilde{C}(t), \tilde{Q}(t), \tilde{\xi}(t)), t \geq 0\}$ , donde sus componentes se definen como las del proceso  $X$  descrito en la sección 3.2. Condicionando por el estado de  $\tilde{X}$  en el instante inmediatamente anterior a la llegada al sistema del cliente marcado, se tiene

$$\begin{aligned} &\tilde{\beta}(\theta) = \beta(\theta)\tilde{P}_0(1) \\ &+ \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty E \left[ e^{-\theta \tilde{W}} / \tilde{X}(t-0) = (1, n, x) \right] \frac{d}{dx} P \left( \tilde{C}(t-0) = 1, \tilde{Q}(t-0) = n, \tilde{\xi}(t-0) \leq x \right), \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

donde  $\tilde{P}_0(1) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{C}(t) = 0, \tilde{Q}(t) = n)$ .

Sea  $\gamma(t)$  el tiempo residual de servicio del cliente que está siendo atendido en el instante  $t$ . La distribución condicional de  $\gamma(t)$  viene dada por

$$E \left[ e^{-\theta \gamma(t)} / \tilde{X}(t-0) = (1, n, x) \right] = (1 - B(x))^{-1} e^{\theta x} \int_x^\infty e^{-\theta t} dB(t). \tag{3.5.9}$$

Entonces, condicionando por el número de llegadas ocurridas durante el intervalo  $(0, \gamma(t))$ , es posible reescribir la esperanza involucrada en (3.5.8) como sigue

$$\begin{aligned} &E \left[ e^{-\theta \tilde{W}} / \tilde{X}(t-0) = (1, n, x) \right] \\ &= (1 - B(x))^{-1} \int_x^\infty e^{-(\theta+\lambda)(y-x)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(\lambda(y-x))^m}{m!} E \left[ e^{-\theta \hat{T}_{n+1+m}^{n+1}} \right] dB(y), \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

donde  $\hat{T}_{n+1+m}^{n+1}$  es el tiempo de permanencia residual de un cliente que ocupa la  $(n+1)$ -ésima posición de la órbita, dado que el estado actual del sistema es  $(0, n+1+m)$ . Si se define  $T_{n+1+m}^{n+1}$  como el correspondiente tiempo de espera hasta que el cliente accede al servicio, se observa que

$$E \left[ e^{-\theta \hat{T}_{n+1+m}^{n+1}} \right] = \beta(\theta) E \left[ e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}} \right], \quad n \geq 0, m \geq 0. \tag{3.5.11}$$

El siguiente paso consiste en determinar la distribución de la variable aleatoria  $T_{n+1+m}^{n+1}$ ,  $n \geq 0, m \geq 0$ , mediante su transformada de Laplace-Stieltjes. Para ello se utilizará el método de las *catástrofes*.

Se introduce un proceso de Poisson de intensidad  $\theta > 0$ , independiente de las variables aleatorias  $T_{n+1+m}^{n+1}$ ,  $n \geq 0, m \geq 0$ . Los sucesos de este proceso auxiliar son llamados '*catástrofes*'. Entonces, la transformada  $E[e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}}]$  representa la probabilidad del suceso '*no ocurre ninguna catástrofe durante el intervalo  $(0, T_{n+1+m}^{n+1}]$* '. Aplicando la ley de la probabilidad total, es posible descomponer la transformada

considerando la familia de sucesos 'ninguna catástrofe ha ocurrido durante el intervalo  $(0, T_{n+1+m}^{n+1}]$ ,  $i$  clientes han sido servidos durante este período y en el instante de finalización  $T_{n+1+m}^{n+1}$  hay exactamente  $k$  clientes en la órbita',  $i \geq n$ ,  $k \geq m+1$ .

Sea  $P_{j+1,k}^i(\theta)$  la probabilidad del suceso 'la  $i$ -ésima finalización del servicio ocurrida en el intervalo  $(0, T_{n+1+m}^{n+1}]$  deja a  $k$  clientes en la órbita, el cliente marcado ocupa la  $(j+1)$ -ésima posición en la órbita y no ha ocurrido ninguna catástrofe',  $0 \leq j \leq n$ ,  $j+1+m \leq k$ ,  $n-j \leq i$ . Entonces, es sencillo expresar  $E[e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}}]$  en función de  $P_{j+1,k}^i(\theta)$  como sigue

$$E[e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}}] = \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha + k\mu}{\theta + \lambda + \alpha + k\mu} P_{1k}^i(\theta). \quad (3.5.12)$$

Se observa que las probabilidades  $P_{j+1,k}^i(\theta)$  satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$P_{j+1,k}^i(\theta) = \sum_{l=j+1+m}^k P_{j+1,l}^{i-1}(\theta) \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + l\mu} k_{k-l}(\theta) + \sum_{l=j+2+m}^{k+1} P_{j+2,l}^{i-1}(\theta) \frac{\alpha + l\mu}{\theta + \lambda + \alpha + l\mu} k_{k-l+1}(\theta), \quad 0 \leq j \leq n-1, n-j+1 \leq i, j+1+m \leq k, \quad (3.5.13)$$

$$P_{j+1,k}^{n-j}(\theta) = \sum_{l=j+2+m}^{k+1} P_{j+2,l}^{n-j-1}(\theta) \frac{\alpha + l\mu}{\theta + \lambda + \alpha + l\mu} k_{k-l+1}(\theta), \quad 0 \leq j \leq n-1, j+1+m \leq k, \quad (3.5.14)$$

$$P_{n+1,k}^i(\theta) = \sum_{l=n+1+m}^k P_{n+1,l}^{i-1}(\theta) \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + l\mu} k_{k-l}(\theta), \quad 1 \leq i, n+1+m \leq k, \quad (3.5.15)$$

$$P_{n+1,k}^0(\theta) = \delta_{k,n+1+m}, \quad n+1+m \leq k, \quad (3.5.16)$$

donde

$$k_n(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-(\theta+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dB(t), \quad n \geq 0. \quad (3.5.17)$$

Para demostrar la igualdad (3.5.13) se definen las variables aleatorias  $B_i$ ,  $i \geq 1$ , que toman los valores 0 o 1 dependiendo de si el  $i$ -ésimo servicio corresponde a un cliente original o a un cliente que proviene de la órbita, respectivamente. La distribución condicional de  $B_i$ ,  $i \geq 1$ , dado que el instante previo de finalización del servicio,  $\eta_{i-1}$ , quedaron  $l$  clientes en la órbita, es Bernoulli con

$$P(B_i = 1/Q(\eta_{i-1} + 0) = l) = \frac{\alpha(1 - \delta_{0l}) + l\mu}{\lambda + \alpha(1 - \delta_{0l}) + l\mu} \quad l \geq 0.$$

Condicionando por el estado del sistema, la variable aleatoria  $B_i$  y la posición ocupada por el cliente marcado en el instante  $\eta_{i-1} + 0$ , se tiene

$$P_{j+1,k}^i(\theta) = \sum_{l=j+1+m}^k P_{j+1,l}^{i-1}(\theta) \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + l\mu} P(\mathcal{A}_{k-l,l}(\theta))$$

$$+ \sum_{l=j+2+m}^{k+1} P_{j+2,l}^{i-1}(\theta) \frac{\alpha + l\mu}{\lambda + \alpha + l\mu} P(\mathcal{A}_{k-l+1,l}(\theta)), \quad 0 \leq j \leq n-1, n-j+1 \leq i, j+1+m \leq k,$$

donde  $\mathcal{A}_{s,l}(\theta)$ ,  $s \geq 0, l \geq 0$ , denota el suceso 'durante el período  $(\eta_{i-1}, \eta_i]$  no ha habido catástrofes y  $s$  clientes originales han llegado a lo largo del  $i$ -ésimo tiempo de servicio, dado que en el instante  $\eta_{i-1} + 0$  hay  $l$  clientes en la órbita'. La probabilidad del suceso  $\mathcal{A}_{s,l}(\theta)$ , viene dada por

$$P(\mathcal{A}_{s,l}(\theta)) = \frac{\lambda + \alpha(1 - \delta_{0l}) + l\mu}{\theta + \lambda + \alpha(1 - \delta_{0l}) + l\mu} \int_0^\infty e^{-(\theta+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^s}{s!} dB(t), \quad l \geq 0.$$

Entonces, la relación (3.5.13) se deduce directamente desde las dos últimas expresiones. Las igualdades (3.5.14)-(3.5.16) se obtienen a partir de razonamientos análogos.

Se definen las funciones generatrices

$$P_j^{nm}(\theta, x, y) = \sum_{i=n-j}^\infty x^i \sum_{k=j+1+m}^\infty y^k \frac{P_{j+1,k}^i(\theta)}{\theta + \lambda + \alpha + k\mu}, \quad 0 \leq j \leq n, m \geq 0. \quad (3.5.18)$$

La existencia de las funciones  $P_j^{nm}(\theta, x, y)$  está asegurada cuando  $(\theta, x) \neq (0, 1)$ . Para comprobar que  $P_j^{nm}(\theta, x, y) < \infty$ , es suficiente observar que

$$P_j^{nm}(\theta, x, y) \leq \begin{cases} x^{n-j}((\lambda + \alpha)(1-x))^{-1}, & \text{si } \theta = 0, x \in [0, 1), \\ \theta^{-1}(1 - \tilde{\beta}_L(\theta)), & \text{si } \theta > 0, x = 1, \end{cases}$$

donde  $\tilde{\beta}_L(\theta)$  denota la transformada de Laplace-Stieltjes del período de ocupación.

Introduciendo las funciones  $P_j^{nm}(\theta, x, y)$  sobre el conjunto de ecuaciones (3.5.13)-(3.5.16), se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} & \mu y \frac{\partial P_j^{nm}(\theta, x, y)}{\partial y} + (\theta + \lambda - \lambda x \beta(\theta + \lambda - \lambda y) + \alpha) P_j^{nm}(\theta, x, y) \\ &= x \beta(\theta + \lambda - \lambda y) \left( \alpha y^{-1} P_{j+1}^{nm}(\theta, x, y) + \mu \frac{\partial P_{j+1}^{nm}(\theta, x, y)}{\partial y} \right) (1 - \delta_{jn}) + y^{n+1+m} \delta_{jn}, \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

La transformada  $E[e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}}]$  puede ser entonces reexpresada en términos de la función generatriz  $P_0^{nm}(\theta, x, y)$ . De (3.5.12) y (3.5.18) es posible deducir la relación

$$E[e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}}] = \alpha P_0^{nm}(\theta, 1, 1) + \mu \left( \frac{\partial P_0^{nm}(\theta, 1, y)}{\partial y} \right)_{y=1} \quad (3.5.20)$$

En virtud del desarrollo realizado se observa que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.5.19) contiene toda la información necesaria para determinar la transformada  $E[e^{-\theta W}]$ .

En el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , el método desarrollado conduce al siguiente resultado.

**Teorema 3.5.1.** Si  $\alpha > 0$ ,  $\mu = 0$  y  $\lambda\beta_1\alpha^{-1}(\lambda + \alpha) < 1$ , entonces la transformada de Laplace-Stieltjes del tiempo de permanencia en el sistema bajo la disciplina FCFS viene dada por

$$E[e^{-\theta W}] = (\theta + \delta)^{-1} (\delta + \theta\beta(\theta + \delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\theta + \delta))), \quad (3.5.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{\lambda\alpha(1 - \lambda\beta_1\alpha^{-1}(\lambda + \alpha))\omega(s)(1 - \tilde{\omega}(s))(\beta(s) - \beta(\lambda - \lambda\tilde{\omega}(s)))}{(\lambda - \lambda\tilde{\omega}(s) - s)(\beta(\lambda - \lambda\tilde{\omega}(s))(\alpha + \lambda\tilde{\omega}(s)) - (\lambda + \alpha)\tilde{\omega}(s))}, \\ \tilde{\omega}(s) &= \omega(s)\beta(s), \\ \omega(s) &= \frac{\alpha}{s + \lambda - \lambda\beta(s) + \alpha}. \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

**Demostración.** Si se asume  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , las ecuaciones (3.5.19) se reducen a

$$\begin{aligned} &(\theta + \lambda - \lambda x\beta(\theta + \lambda - \lambda y) + \alpha)P_j^{nm}(\theta, x, y) \\ &= \alpha\beta(\theta + \lambda - \lambda y)xy^{-1}P_{j+1}^{nm}(\theta, x, y)(1 - \delta_{jn}) + y^{n+1+m}\delta_{jn}, \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

La expresión para  $P_0^{nm}(\theta, x, y)$  es obtenida mediante una sustitución recursiva sobre (3.5.23). Se tiene entonces,

$$P_0^{nm}(\theta, x, y) = \frac{y^{1+m}}{\theta + \lambda - \lambda x\beta(\theta + \lambda - \lambda y) + \alpha} \left( \frac{\alpha x\beta(\theta + \lambda - \lambda y)}{\theta + \lambda - \lambda x\beta(\theta + \lambda - \lambda y) + \alpha} \right)^n, \quad n \geq 0, m \geq 0. \quad (3.5.24)$$

Entonces (3.5.11) y (3.5.20) conducen a la relación

$$E[e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}}] = (\tilde{\omega}(\theta))^{n+1}, \quad n \geq 0, m \geq 0. \quad (3.5.25)$$

Sustituyendo (3.5.25) en la expresión (3.5.10), se consigue

$$E[e^{-\theta \tilde{W}} / \tilde{X}(t-0) = (1, n, x)] = (\tilde{\omega}(\theta))^{n+1} \frac{e^{\theta x}}{\Gamma - B(x)} \int_x^\infty e^{-\theta t} dB(t). \quad (3.5.26)$$

Finalmente, para concluir la demostración, deben tenerse en cuenta las relaciones (3.5.6) y (3.5.8), junto con los resultados del *Teorema 2.A.1*. □

En el siguiente corolario se recogen algunas características básicas del tiempo de permanencia en el sistema.

**Corolario 3.5.2.** Si  $\alpha > 0$ ,  $\mu = 0$  y  $\lambda\beta_1\alpha^{-1}(\lambda + \alpha) < 1$ , entonces

$$E[e^{-\theta W} I_{\{\tilde{W} < z\}}] = \beta(\theta + \delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\theta + \delta)),$$

$$\begin{aligned}
 E \left[ e^{-\theta W} I_{\{\tilde{W} \geq Z\}} \right] &= \frac{\delta(1 - \beta(\theta + \delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\theta + \delta)))}{\theta + \delta}, \\
 P(\tilde{W} < Z) &= \beta(\delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\delta)), \\
 E \left[ W/\tilde{W} < Z \right] &= -\frac{\beta'(\delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\delta)) + \beta(\delta)\phi'(\delta)}{\beta(\delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\delta))}, \\
 E \left[ W/\tilde{W} \geq Z \right] &= \frac{1}{\delta} + \frac{\beta'(\delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\delta)) + \beta(\delta)\phi'(\delta)}{1 - \beta(\delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\delta))}, \\
 E[W] &= \frac{1 - \beta(\delta)(1 - \lambda\beta_1 + \phi(\delta))}{\delta},
 \end{aligned}$$

donde  $\phi(s)$  viene dada por (3.5.22).

La demostración es inmediata a partir de las relaciones (3.5.1)-(3.5.7) y el Teorema 3.5.1 y, por ello, es omitida.

El procedimiento recursivo para obtener una expresión para la transformada de Laplace-Stieltjes de  $W$ , en el caso  $\alpha \geq 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\lambda\beta_1 < 1$ , implica un notable esfuerzo algebraico. La solución que a continuación se deduce proporciona una resolución teórica, pero su complejidad analítica imposibilita cualquier aplicación práctica.

Mediante una sustitución recursiva sobre las ecuaciones (3.5.19) es posible deducir la relación

$$\begin{aligned}
 \alpha(\mu y)^{-1} P_0^{nm}(\theta, x, y) + \frac{\partial P_0^{nm}(\theta, x, y)}{\partial y} &= \mu^{-1}((x\beta(\theta + \lambda - \lambda y))^n y^m - \\
 - y^{-1}(\theta + \lambda - \lambda x\beta(\theta + \lambda - \lambda y)) \sum_{j=0}^n (y^{-1}x\beta(\theta + \lambda - \lambda y))^j P_j^{nm}(\theta, x, y)). & \quad (3.5.27)
 \end{aligned}$$

Entonces, de (3.5.20) y (3.5.27) se tiene que

$$E \left[ e^{-\theta T_{n+1+m}^{n+1}} \right] = (\beta(\theta))^n - (\theta + \lambda - \lambda\beta(\theta)) \sum_{j=0}^n (\beta(\theta))^j P_j^{nm}(\theta, 1, 1). \quad (3.5.28)$$

Sucesivas sustituciones en (3.5.19) conducen al conjunto de ecuaciones diferenciales

$$y^{-1}(\theta + \lambda - \lambda x\beta(\theta + \lambda - \lambda y) + \alpha) P_j^{nm}(\theta, x, y) + \mu \frac{\partial P_j^{nm}(\theta, x, y)}{\partial y} = q_j^{nm}(\theta, x, y), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (3.5.29)$$

donde

$$\begin{aligned}
 q_j^{nm}(\theta, x, y) &= (x\beta(\theta + \lambda - \lambda y))^{n-j} y^{m+j} - (1 - \delta_{jn}) y^{-1}(\theta + \lambda - \lambda x\beta(\theta + \lambda - \lambda y)) \\
 &\times \sum_{i=0}^{n-j-1} (y^{-1}x\beta(\theta + \lambda - \lambda y))^{n-j-i} P_{n-i}^{nm}(\theta, x, y), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.5.30)
 \end{aligned}$$

Debe notarse que la obtención de la función  $P_j^{nm}(\theta, 1, 1)$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , requiere el cálculo previo de las funciones  $P_k^{nm}(\theta, 1, 1)$ ,  $j+1 \leq k \leq n$ . Para cada  $j$  fijo,  $0 \leq j \leq n$ , la ecuación diferencial (3.5.29) tiene una única singularidad en el punto  $y_1 = 0$ . La solución de (3.5.29), para  $y \in (0, 1]$ , puede ser expresada en los términos

$$P_j^{nm}(\theta, x, y) = \exp \left\{ \int_y^1 p(\theta, x, v) dv \right\} \left( P_j^{nm}(\theta, x, 1) + \mu^{-1} \int_1^y q_j^{nm}(\theta, x, u) \exp \left\{ \int_1^u p(\theta, x, v) dv \right\} du \right), \quad (3.5.31)$$

donde

$$p(\theta, x, v) = (\mu v)^{-1} (\theta + \lambda - \lambda x \beta(\theta + \lambda - \lambda v) + \alpha). \quad (3.5.32)$$

Es sencillo probar que la integral  $\int_y^1 p(\theta, x, v) dv$  diverge cuando  $y \rightarrow 0+$ . Teniendo en cuenta que  $P_j^{nm}(\theta, x, 0) = 0$ , se tiene que

$$P_j^{nm}(\theta, x, 1) = \mu^{-1} \int_0^1 q_j^{nm}(\theta, x, u) \exp \left\{ \int_1^u p(\theta, x, v) dv \right\} du.$$

Como consecuencia de esta última igualdad, es posible deducir que

$$P_j^{nm}(\theta, x, y) = \mu^{-1} \int_0^y q_j^{nm}(\theta, x, u) \exp \left\{ \int_y^u p(\theta, x, v) dv \right\} du, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.5.33)$$

En particular, si  $j = n$  la expresión (3.5.33) se reduce a

$$P_n^{nm}(\theta, x, y) = \mu^{-1} y^{-\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}} \int_0^y u^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}+n+m} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} x \int_u^y v^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda v) dv \right\} du, \quad 0 < y \leq 1. \quad (3.5.34)$$

Mediante un razonamiento inductivo es posible deducir expresiones para las funciones generatrices  $P_j^{nm}(\theta, x, y)$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ . Previamente se definen, para  $0 \leq i \leq n$ , las siguientes funciones auxiliares:

$$I_i^{nm}(\theta, x, y, u) = (x\beta(\theta + \lambda - \lambda u))^i u^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}-i} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} x \int_u^y v^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda v) dv \right\} \\ \times (u^{n+m} - (1 - \delta_{0i})u^{-1}(\theta + \lambda - \lambda x \beta(\theta + \lambda - \lambda u))P_n^{nm}(\theta, x, u)), \quad (3.5.35)$$

$$J_{ik}^a(\theta, x, y, u) = \mu^{-k} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{L}_{ik}^a} \int_u^y \int_{u_1}^y \dots \int_{u_{k-1}}^y \prod_{s=1}^k K(\theta, x, u_s, l_s) du_k \dots du_2 du_1, \quad 1 \leq a \leq n, 1 \leq k \leq a-1, \quad (3.5.36)$$

donde

$$K(\theta, x, u_s, l_s) = u_s^{-(1+l_s)} (\theta + \lambda - \lambda x \beta(\theta + \lambda - \lambda u_s)) (x \beta(\theta + \lambda - \lambda u_s))^{l_s}, \quad 1 \leq s \leq k, \quad (3.5.37)$$

$$\mathcal{L}_{ik}^a = \left\{ \vec{l} = (l_1, \dots, l_k)' \in \{1, 2, \dots\}^k / i + \sum_{s=1}^k l_s = a \right\}, \quad 1 \leq a \leq n, \quad 1 \leq k \leq a - 1. \quad (3.5.38)$$

Con la ayuda de (3.5.35)-(3.5.38) se deduce la expresión

$$P_j^{nm}(\theta, x, y) = \mu^{-1} y^{-\frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu}} \left( \int_0^y I_{n-j}^{nm}(\theta, x, y, u) du + (1 - \delta_{j, n-1})(1 - \delta_{jn}) \sum_{k=1}^{n-j-1} (-1)^k \sum_{i=1}^{n-j-k} \int_0^y I_i^{nm}(\theta, x, y, u) J_{ik}^{n-j}(\theta, x, y, u) du \right), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.5.39)$$

Si se denota

$$\tilde{I}_i^n(\theta, u, y - x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda(y - x))^m}{m!} I_i^{nm}(\theta, 1, 1, u), \quad 0 \leq i \leq n, \quad (3.5.40)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda(y - x))^m}{m!} E \left[ e^{-\theta \tilde{T}_{n+1+m}^{n+1}} \right] = \beta(\theta) \left( e^{\lambda(y-x)} (\beta(\theta))^n \right. \\ & \left. - \mu^{-1} (\theta + \lambda - \lambda\beta(\theta)) \sum_{j=0}^n (\beta(\theta))^j \left( \int_0^1 \tilde{I}_{n-j}^n(\theta, u, y - x) du \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - \delta_{j, n-1})(1 - \delta_{jn}) \sum_{k=1}^{n-j-1} (-1)^k \sum_{i=1}^{n-j-k} \int_0^1 \tilde{I}_i^n(\theta, u, y - x) J_{ik}^{n-j}(\theta, 1, 1, u) du \right) \right). \end{aligned} \quad (3.5.41)$$

Después de algunas operaciones algebraicas, es posible deducir las siguientes expresiones para las funciones  $\tilde{I}_i^n(\theta, u, y - x)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_i^n(\theta, u, y - x) &= (u^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda u))^i \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_u^1 v^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda v) dv \right\} \left( e^{\lambda(y-x)u} u^{\frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu} + n} \right. \\ & \left. - (1 - \delta_{0i})(\mu u)^{-1} (\theta + \lambda - \lambda\beta(\theta + \lambda - \lambda u)) \int_0^u e^{\lambda(y-x)v} v^{\frac{\theta + \lambda + \alpha}{\mu} + n} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_v^u w^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda w) dw \right\} dv \right). \end{aligned} \quad (3.5.42)$$

Insertando (3.5.41) en la relación (3.5.10), se consigue

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\theta \tilde{W}} / \tilde{X}(t - 0) = (1, n, x) \right] &= \beta(\theta) \left( (\beta(\theta))^n e^{\theta x} \beta_x(\theta) - \mu^{-1} (\theta + \lambda - \lambda\beta(\theta)) \sum_{j=0}^n (\beta(\theta))^j \right. \\ & \left. \times \left( \int_0^1 \tilde{I}_{n-j}^n(\theta, u, x) du + (1 - \delta_{j, n-1})(1 - \delta_{jn}) \sum_{k=1}^{n-j-1} (-1)^k \sum_{i=1}^{n-j-k} \int_0^1 \tilde{I}_i^n(\theta, u, x) J_{ik}^{n-j}(\theta, 1, 1, u) du \right) \right), \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

donde

$$\beta_x(\theta) = \int_x^\infty \frac{e^{-\theta y}}{1-B(x)} dB(y),$$

$$\bar{I}_i^n(\theta, u, x) = \int_x^\infty \frac{e^{-(\theta+\lambda)(y-x)}}{1-B(x)} \bar{I}_i^n(\theta, u, y-x) dB(y), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Con la ayuda de (3.5.42) pueden obtenerse expresiones explícitas para  $\bar{I}_i^n(\theta, u, x)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \bar{I}_i^n(\theta, u, x) &= (u^{-1}\beta(\theta + \lambda - \lambda u))^i \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_u^1 v^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda v) dv \right\} \left( e^{(\theta+\lambda-\lambda u)x} u^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}+n} \beta_x(\theta+\lambda-\lambda u) \right. \\ &\quad \left. - (1-\delta_{0i})(\mu u)^{-1}(\theta + \lambda - \lambda \beta(\theta + \lambda - \lambda u)) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^u e^{(\theta+\lambda-\lambda v)x} v^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}+n} \beta_x(\theta + \lambda - \lambda v) \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_v^u w^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda w) dw \right\} dv \right). \end{aligned} \quad (3.5.44)$$

De (3.5.43) se deduce la relación

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty E \left[ e^{-\theta \tilde{W}} / \tilde{X}(t-0) = (1, n, x) \right] \frac{d}{dx} P \left( \tilde{C}(t-0) = 1, \tilde{Q}(t-0) = n, \tilde{\xi}(t-0) \leq x \right) \\ &= \beta(\theta) \left( \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_{1n}(x) (\beta(\theta))^n e^{\theta x} \beta_x(\theta) dx \right. \\ &\quad \left. - \mu^{-1}(\theta + \lambda - \lambda \beta(\theta)) \left( \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_{1n}(x) \sum_{j=0}^n (\beta(\theta))^j \int_0^1 \bar{I}_{n-j}^n(\theta, u, x) du dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_{1n}(x) \sum_{j=0}^n (\beta(\theta))^j (1 - \delta_{j, n-1})(1 - \delta_{jn}) \sum_{k=1}^{n-j-1} (-1)^k \sum_{i=1}^{n-j-k} \int_0^1 \bar{I}_i^n(\theta, u, x) J_{ik}^{n-j}(\theta, 1, 1, u) du dx \right) \right), \end{aligned} \quad (3.5.45)$$

donde  $\tilde{P}_{1n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{C}(t) = 1, \tilde{Q}(t) = n, x \leq \tilde{\xi}(t) < x + \Delta x)$ ,  $n \geq 0$ ,  $x \geq 0$ .

Sea  $\tilde{P}_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{C}(t) = 0, \tilde{Q}(t) = n)$ ,  $n \geq 0$ . Haciendo uso de la relación

$$\tilde{P}_1(z, x) = (1 - B(x)) e^{-(\lambda - \lambda z)x} \frac{(\lambda - \lambda z) \tilde{P}_0(z)}{\beta(\lambda - \lambda z) - z},$$

donde  $\tilde{P}_1(z, x) = \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_{1n}(x) z^n$  y  $\tilde{P}_0(z) = \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_{0n} z^n$ , se tiene

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_{1n}(x) (\beta(\theta))^n e^{\theta x} \beta_x(\theta) dx = \frac{(\lambda - \lambda \beta(\theta)) \tilde{P}_0(\beta(\theta))}{\theta + \lambda(\beta(\theta) - 1)}. \quad (3.5.46)$$

Tras algunas manipulaciones algebraicas, se logra la igualdad

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \tilde{P}_{1n}(x) \sum_{j=0}^n (\beta(\theta))^j \int_0^1 \tilde{I}_{n-j}^n(\theta, u, x) du dx \\ &= \int_0^1 u^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}} \frac{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)}{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)-u\beta(\theta)} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_u^1 v^{-1} \beta(\theta+\lambda-\lambda v) dv \right\} I(\theta, u) du \\ & - \mu^{-1} \int_0^1 u^{-1} (\theta+\lambda-\lambda\beta(\theta+\lambda-\lambda u)) \frac{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)}{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)-u\beta(\theta)} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_u^1 v^{-1} \beta(\theta+\lambda-\lambda v) dv \right\} \\ & \quad \times \int_0^u v^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_v^u w^{-1} \beta(\theta+\lambda-\lambda w) dw \right\} J(\theta, u, v) dv du, \end{aligned} \tag{3.5.47}$$

siendo

$$\begin{aligned} I(\theta, u) &= \frac{\lambda - \lambda\beta(\theta+\lambda-\lambda u)}{\theta + \lambda(\beta(\theta+\lambda-\lambda u) - u)} \tilde{P}_0(\beta(\theta+\lambda-\lambda u)) - \\ & - \frac{u\beta(\theta)}{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)} \frac{\beta(\lambda-\lambda u\beta(\theta)) - \beta(\theta+\lambda-\lambda u)}{\beta(\lambda-\lambda u\beta(\theta)) - u\beta(\theta)} \frac{\lambda - \lambda u\beta(\theta)}{\theta + \lambda u(\beta(\theta) - 1)} \tilde{P}_0(u\beta(\theta)), \end{aligned} \tag{3.5.48}$$

$$\begin{aligned} J(\theta, u, v) &= \frac{\beta(\lambda - \lambda v\chi(u)) - \beta(\theta + \lambda - \lambda v)}{\beta(\lambda - \lambda v\chi(u)) - v\chi(u)} \frac{\lambda - \lambda v\chi(u)}{\theta + \lambda v(\chi(u) - 1)} \tilde{P}_0(v\chi(u)) \\ & - \frac{\beta(\lambda - \lambda v\beta(\theta)) - \beta(\theta + \lambda - \lambda v)}{\beta(\lambda - \lambda v\beta(\theta)) - v\beta(\theta)} \frac{\lambda - \lambda v\beta(\theta)}{\theta + \lambda v(\beta(\theta) - 1)} \tilde{P}_0(v\beta(\theta)), \end{aligned} \tag{3.5.49}$$

$$\chi(u) = u^{-1} \beta(\theta + \lambda - \lambda u), \tag{3.5.50}$$

y  $\tilde{P}_0(z)$  viene dada por (2.A.1).

Haciendo uso de (2.A.12), (3.5.8) y (3.5.45)-(3.5.47), se obtiene que la transformada de Laplace-Stieltjes de  $\tilde{W}$ , cuando  $\alpha \geq 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\lambda\beta_1 < 1$ , viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\theta) &= \beta(\theta) \left( 1 - \lambda\beta_1 + \frac{(\lambda - \lambda\beta(\theta)) \tilde{P}_0(\beta(\theta))}{\theta + \lambda(\beta(\theta) - 1)} - \mu^{-1} (\theta + \lambda - \lambda\beta(\theta)) \right) \\ & \times \left( \int_0^1 u^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}} \frac{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)}{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)-u\beta(\theta)} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_u^1 v^{-1} \beta(\theta+\lambda-\lambda v) dv \right\} I(\theta, u) du \right. \\ & - \mu^{-1} \int_0^1 u^{-1} (\theta+\lambda-\lambda\beta(\theta+\lambda-\lambda u)) \frac{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)}{\beta(\theta+\lambda-\lambda u)-u\beta(\theta)} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_u^1 v^{-1} \beta(\theta+\lambda-\lambda v) dv \right\} \\ & \quad \times \int_0^u v^{\frac{\theta+\lambda+\alpha}{\mu}} \exp \left\{ \lambda \mu^{-1} \int_v^u w^{-1} \beta(\theta+\lambda-\lambda w) dw \right\} J(\theta, u, v) dv du \\ & \left. + \sum_{n=0}^\infty \sum_{j=0}^n (1 - \delta_{j,n-1})(1 - \delta_{jn})(\beta(\theta))^j \sum_{k=1}^{n-j-1} (-1)^k \sum_{i=1}^{n-j-k} \int_0^1 J_{ik}^{n-j}(\theta, 1, 1, u) \int_0^\infty \tilde{P}_{1n}(x) \tilde{I}_i^n(\theta, u, x) dx du \right) \end{aligned} \tag{3.5.51}$$

Finalmente, la distribución del tiempo de permanencia  $W$ , cuando  $\alpha \geq 0$ ,  $\mu > 0$  y  $\lambda\beta_1 < 1$ , queda totalmente determinada por su transformada  $E[e^{\theta W}] = (\theta + \delta)^{-1}(\theta\tilde{\beta}(\theta + \delta) + \delta)$ , donde  $\tilde{\beta}(\theta)$  viene dada por (3.5.51).

### 3.6 Período de ocupación del sistema

Es habitual extender el concepto de período de ocupación del sistema y definir un  $k$ -período de ocupación,  $k \geq 1$ , como el intervalo de tiempo comprendido entre el instante de acceso al servicio de un cliente que deja a  $k-1$  clientes en órbita y el primer instante de salida que deja el sistema vacío. Entonces, es claro que el período de ocupación usual puede ser definido como un 1-período de ocupación. Obsérvese que un  $k$ -período de ocupación,  $k \geq 1$ , está formado por un conjunto de subperíodos de servicio que se alternan con subperíodos durante los cuales el servidor está desocupado.

Las principales características asociadas a un  $k$ -período de ocupación,  $k \geq 1$ , son representadas por las variables aleatorias:

$L^k$  = longitud de un  $k$ -período de ocupación,  
 $L_i^k$  = cantidad de tiempo en un  $k$ -período de ocupación durante la cual  $C(t) = i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  
 $N_f^k$  = número de finalizaciones del servicio que tienen lugar durante un  $k$ -período de ocupación,  
 $N_d^k$  = número de clientes expulsados; es decir, número de clientes presentes en el sistema en el instante de la llegada de un desastre (si existe).

A continuación se definen las transformadas asociadas al vector aleatorio  $(L_0^k, L_1^k, N_f^k, N_d^k)$ ,  $k \geq 1$ ,

$$\phi_f^k(\theta, \omega, x, y) = E \left[ \exp \{ -\theta L_0^k - \omega L_1^k \} x^{N_f^k} y^{N_d^k} I_{\{\bar{L}^k < Z\}} \right], \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \operatorname{Re}(\omega) \geq 0, |x| \leq 1, |y| \leq 1, \quad (3.6.1)$$

$$\phi_d^k(\theta, \omega, x, y) = E \left[ \exp \{ -\theta L_0^k - \omega L_1^k \} x^{N_f^k} y^{N_d^k} I_{\{\bar{L}^k \geq Z\}} \right], \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \operatorname{Re}(\omega) \geq 0, |x| \leq 1, |y| \leq 1, \quad (3.6.2)$$

donde  $\bar{L}^k$  denota la longitud del  $k$ -período de ocupación del sistema de colas  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y sin mecanismo de aclarado ( $\delta = 0$ ), y  $Z$  es la variable aleatoria distribuida de acuerdo a una ley exponencial, con parámetro  $\delta > 0$ , que gobierna el mecanismo de aclarado. En lo sucesivo será omitido el superíndice 1 cuando se considere el caso  $k = 1$ .

Esta sección está dedicada al cálculo de la distribución conjunta del vector aleatorio  $(L_0, L_1, N_f, N_d)$  en términos de las transformadas  $\phi_f(\theta, \omega, x, y)$  y  $\phi_d(\theta, \omega, x, y)$ . Adicionalmente, serán determinados los primeros momentos de las variables  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $N_f$  y  $N_d$ , en función de la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ .

El período de ocupación del sistema está directamente relacionado con la variable aleatoria  $U(t)$  definida como la cantidad de trabajo no finalizado en el instante  $t$ . Si se asume que  $U(0) = 0$ , entonces  $L$  es el primer instante tal que  $U(L) = 0$ . Las Figuras 3.6.1 y 3.6.2 muestran representaciones de la evolución de  $U(t)$ , cuando el período de ocupación termina en el instante de llegada de un desastre y en un instante de finalización del servicio, respectivamente. Las sucesiones  $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$  y  $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$  corresponden a los instantes de llegada al sistema de clientes originales y a los instantes de salida del sistema, respectivamente. La variable aleatoria  $R_i$ ,  $i \geq 1$ , denota el  $i$ -ésimo subperíodo vacío del servidor.

Entonces,  $S_0 = \eta_1$  y  $S_i = \eta_{i+1} - (\eta_i + R_i)$ ,  $i \geq 1$ , representan las longitudes de los subperíodos de servicio.

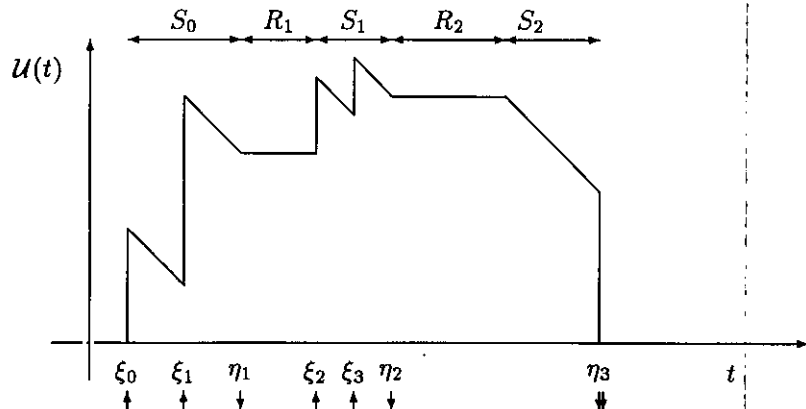


Figura 3.6.1. Período de ocupación que concluye en el instante de llegada de un desastre

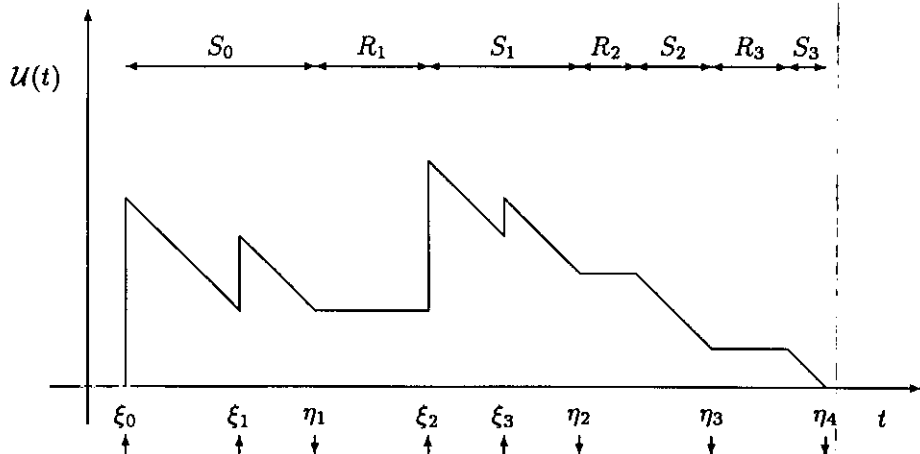


Figura 3.6.2. Período de ocupación que concluye en un instante de finalización del servicio

Las transformadas  $\phi_f(\theta, \omega, x, y)$  y  $\phi_d(\theta, \theta, x, y)$  son determinadas en el siguiente resultado.

**Teorema 3.6.1.** *i) Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , entonces*

$$\phi_f(\theta, \omega, x, y) = \frac{x \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha/\mu} \beta(\omega + \lambda - \lambda u + \delta)}{u - x\beta(\omega + \lambda - \lambda u + \delta)} \exp\left\{\int_0^u a(t, \theta, \omega, x) dt\right\} du}{\int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha/\mu}}{u - x\beta(\omega + \lambda - \lambda u + \delta)} \exp\left\{\int_0^u a(t, \theta, \omega, x) dt\right\} du}, \tag{3.6.3}$$

$$\phi_d(\theta, \theta, x, y) = \frac{\delta}{y - x\beta(\theta + \lambda - \lambda y + \delta)} \left( (y - x)\beta(\theta + \lambda - \lambda y + \delta)\gamma(\theta + \delta, x, y) + \frac{y(1 - \beta(\theta + \lambda - \lambda y + \delta))(y - \phi_f(\theta, \theta, x, y))}{\theta + \lambda - \lambda y + \delta} \right), \tag{3.6.4}$$

donde

$$a(t, \theta, \omega, x) = \frac{\theta + \lambda - \lambda x \beta(\omega + \lambda - \lambda t + \delta) + \delta}{\mu(t - x \beta(\omega + \lambda - \lambda t + \delta))},$$

$$\gamma(\theta + \delta, x, y) = \mu^{-1} y^{-\alpha/\mu} \int_{\bar{z}}^y \frac{x \beta(\theta + \lambda - \lambda u + \delta) - \phi_f(\theta, \theta, x, y)}{u - x \beta(\theta + \lambda - \lambda u + \delta)} u^{\alpha/\mu} \exp \left\{ \int_y^u a(t, \theta, \theta, x) dt \right\} du, \quad (3.6.5)$$

y  $\bar{z} = h(\omega, x)$  y  $\bar{z} = h(\theta + \delta, x)$  son raíces de la función  $g$  descrita en el Lema 3.3.1.

ii) Si  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , entonces

$$\phi_f(\theta, \omega, x, y) = x \beta(\omega + \lambda - \lambda \bar{z} + \delta), \quad (3.6.6)$$

$$\begin{aligned} \phi_d(\theta, \theta, x, y) &= \delta(y(1 - \beta(\theta + \lambda - \lambda y + \delta)) + (\theta + \lambda + \alpha + \delta - (\lambda y + \alpha)\beta(\theta + \lambda - \lambda y + \delta))) \\ &\times \hat{\gamma}(\theta + \delta, x, y) (\theta + \lambda - \lambda y + \delta)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

donde

$$\hat{\gamma}(\theta + \delta, x, y) = \frac{y(x \beta(\theta + \lambda - \lambda y + \delta) - \phi_f(\theta, \theta, x, y))}{(\theta + \lambda + \alpha + \delta)y - x(\lambda y + \alpha)\beta(\theta + \lambda - \lambda y + \delta)} \quad (3.6.8)$$

y  $\bar{z} = h(\theta, \omega, x)$  es la raíz de la función  $f$  descrita en el Lema 3.3.1.

**Demostración.** En primer lugar, se considera la transformada  $\phi_f(\theta, \omega, x, y)$ . Condicionando por la longitud del primer tiempo de servicio de  $L^k$  y el número de clientes que llegan durante este período, se obtiene que las transformadas  $\phi_f^k(\theta, \omega, x, y)$ ,  $k \geq 1$ , satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \phi_f^1(\theta, \omega, x, y) &= x k_f^0(\omega) + x \sum_{n=1}^{\infty} k_f^n(\omega) \left( \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + n\mu + \delta} \phi_f^{n+1}(\theta, \omega, x, y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha + n\mu}{\theta + \lambda + \alpha + n\mu + \delta} \phi_f^n(\theta, \omega, x, y) \right), \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

$$\begin{aligned} \phi_f^k(\theta, \omega, x, y) &= x \sum_{n=0}^{\infty} k_f^n(\omega) \left( \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + (k-1+n)\mu + \delta} \phi_f^{k+n}(\theta, \omega, x, y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha + (k-1+n)\mu}{\theta + \lambda + \alpha + (k-1+n)\mu + \delta} \phi_f^{k-1+n}(\theta, \omega, x, y) \right), \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

siendo

$$k_f^n(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\omega + \lambda + \delta)t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dB(t), \quad n \geq 0. \quad (3.6.11)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas de forma matricial como sigue

$$\vec{\phi}_f(\theta, \omega, x, y) = M(\theta, \omega, x, y) \vec{\phi}_f(\theta, \omega, x, y) + \vec{N}(\theta, \omega, x, y), \quad (3.6.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_f(\theta, \omega, x, y) &= (\phi_f^1(\theta, \omega, x, y), \phi_f^2(\theta, \omega, x, y), \dots)', \\ \vec{N}(\theta, \omega, x, y) &= (x k_f^0(\omega), 0, 0, \dots)' \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

y la matriz  $M(\theta, \omega, x, y)$  viene dada por

$$M_{ij} = \begin{cases} x \frac{\alpha + \mu}{\theta + \lambda + \alpha + \mu + \delta} k_f^1(\omega), & \text{si } i = j = 1, \\ x \frac{\alpha + (i-1)\mu}{\theta + \lambda + \alpha + (i-1)\mu + \delta} k_f^0(\omega), & \text{si } j = i - 1, i \geq 2, \\ x \left( \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + (j-1)\mu + \delta} k_f^{j-i}(\omega) + \frac{\alpha + i\mu}{\theta + \lambda + \alpha + j\mu + \delta} k_f^{j-i+1}(\omega) \right), & \text{si } (j \geq i \geq 2) \text{ o } (j \geq 2, i = 1), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.6.14)$$

Sea  $l^\infty$  el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales. Es conocido que  $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach, donde  $\|\cdot\|_\infty$  representa la norma del supremo. La matriz  $M$  puede ser vista como un operador lineal acotado sobre el espacio  $l^\infty$ . Siguiendo la teoría de operadores lineales sobre espacios lineales normados, se deduce que la norma del operador  $M$  viene dada por  $\|M\| = x\beta(\omega + \delta)$ . Como  $\delta > 0$ , entonces  $\|M\| < 1$ . Teniendo en cuenta que  $M$  es un operador lineal acotado sobre un espacio de Banach, se tiene que  $\|M\| < 1$  es una condición suficiente para asegurar que el operador  $I - M$  tiene inverso, donde  $I$  denota el operador identidad sobre  $l^\infty$ . Además, el operador inverso  $(I - M)^{-1}$  es acotado y  $\|(I - M)^{-1}\| \leq (1 - \|M\|)^{-1}$ .

Entonces, tiene sentido la igualdad

$$\vec{\phi}_f(\theta, \omega, x, y) = (I - M(\theta, \omega, x, y))^{-1} \vec{N}(\theta, \omega, x, y). \quad (3.6.15)$$

Debe observarse que sólo el primer elemento del vector  $\vec{N}$  es no nulo, por lo que basta con conocer la primera columna de la matriz  $(I - M)^{-1}$  para determinar las transformadas  $\phi_f^k(\theta, \omega, x, y)$ ,  $k \geq 1$ . Entonces, se tiene que

$$\phi_f^k(\theta, \omega, x, y) = x k_f^0(\omega) \left[ (I - M(\theta, \omega, x, y))^{-1} \right]_{(k,1)}. \quad (3.6.16)$$

Para encontrar la primera columna de  $(I - M)^{-1}$  se considera la ecuación matricial auxiliar

$$\vec{x}' (I - M(\theta, \omega, x, y)) = \vec{m}', \quad (3.6.17)$$

donde  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots)'$  es un vector auxiliar arbitrario.

Si se escribe explícitamente la ecuación (3.6.17), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - x_1 \frac{(\alpha + \mu)x}{\theta + \lambda + \alpha + \mu + \delta} k_f^1(\omega) - x_2 \frac{(\alpha + \mu)x}{\theta + \lambda + \alpha + \mu + \delta} k_f^0(\omega) - m_1 &= 0, \\ x_i - x \sum_{n=1}^{i+1} x_n \left( \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + (i-1)\mu + \delta} k_f^{i-n}(\omega) (1 - \delta_{n,i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha + i\mu}{\theta + \lambda + \alpha + i\mu + \delta} k_f^{i-n+1}(\omega) \right) - m_i = 0, \quad i \geq 2. \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

A continuación se definen las funciones generatrices  $X(z)$  y  $m(z)$  del siguiente modo

$$X(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i \quad \text{y} \quad m(z) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i z^i, \quad |z| \leq 1. \quad (3.6.19)$$

Introduciendo estas funciones generatrices, las ecuaciones (3.6.18) se transforman en la relación

$$\begin{aligned} X(z) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda x}{\theta + \lambda + \alpha + (i-1)\mu + \delta} z^i \sum_{n=1}^i x_n k_f^{i-n}(\omega) \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\alpha + i\mu)x}{\theta + \lambda + \alpha + i\mu + \delta} z^i \sum_{n=1}^{i+1} x_n k_f^{i-n+1}(\omega) = m(z) - x_1 z \frac{\lambda x}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} k_f^0(\omega). \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

Ahora, si se asume que  $\mu > 0$ , es posible definir la función auxiliar

$$F(z) = z^{-\frac{\theta + \lambda + \alpha + \delta}{\mu}} \int_0^z t^{\frac{\theta + \lambda + \alpha + \delta}{\mu} - 2} X(t) \beta(\omega + \lambda - \lambda t + \delta) dt. \quad (3.6.21)$$

Debe observarse que  $|X(z)| < \infty$ , para  $|z| \leq 1$ , y que, por ello,  $F(z)$  está bien definida. Para probar que  $X(z)$  no diverge cuando  $|z| \leq 1$ , basta tener en cuenta que  $X(z) = \vec{x}' \vec{z}$ , siendo  $\vec{z} = (z, z^2, z^3, \dots)'$ . Entonces,  $|X(z)| = |\vec{m}'(I - M)^{-1} \vec{z}| = |((I - M)^{-1} \vec{z})_i| \leq \|(I - M)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|M\|) < \infty$ , cuando se toma, por conveniencia, el vector  $\vec{m}$  con componentes  $m_j = \delta_{ij}$ ,  $j \geq 1$ , siendo  $i \geq 1$  arbitrario y fijo. En lo que sigue nos reduciremos a esta elección del vector  $\vec{m}$ .

Con la ayuda de la función  $F(z)$  pueden obtenerse las siguientes relaciones después de algunas operaciones algebraicas:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda x}{\theta + \lambda + \alpha + (i-1)\mu + \delta} z^i \sum_{n=1}^i x_n k_f^{i-n}(\omega) = \frac{\lambda x}{\mu} z F(z), \quad (3.6.22)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha x}{\theta + \lambda + \alpha + i\mu + \delta} z^i \sum_{n=1}^{i+1} x_n k_f^{i-n+1}(\omega) = \frac{\alpha x}{\mu} F(z) - \frac{\alpha x}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} x_1 k_f^0(\omega), \quad (3.6.23)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\mu x}{\theta + \lambda + \alpha + i\mu + \delta} z^i \sum_{n=1}^{i+1} x_n k_f^{i-n+1}(\omega) = x z F'(z), \quad (3.6.24)$$

$$X(z) = \frac{\mu z F'(z) + (\theta + \lambda + \alpha + \delta) F(z)}{\mu \beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta)} z. \quad (3.6.25)$$

A partir de (3.6.22)-(3.6.25), la igualdad (3.6.20) puede ser expresada de la forma

$$\begin{aligned} \mu z (z - x\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta)) F'(z) + ((\theta + \lambda + \alpha + \delta)z - x(\lambda z + \alpha))\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta) F(z) \\ = \mu\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta) \left( m(z) - \frac{x(\lambda z + \alpha)}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} x_1 k_f^0(\omega) \right). \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

Aplicando la regla de L'Hôpital cuando  $z \rightarrow 0+$ , se deduce

$$F(0) = x_1 \frac{\mu}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} \beta(\omega + \lambda + \delta). \tag{3.6.27}$$

La ecuación diferencial (3.6.26) tiene dos singularidades  $z_1 = 0$  y  $z_2 = \bar{z}$ , cuando se asume  $\alpha > 0$  y  $\mu > 0$ . Entonces, si  $x \neq 0$ , la raíz  $\bar{z}$  está en el intervalo  $(0,1)$ . El caso  $x = 0$  conduce trivialmente a  $\phi_f(\theta, \omega, 0, y) = 0$ . La ecuación (3.6.26) puede resolverse siguiendo argumentos semejantes a los empleados en el Teorema 3.3.2. Por ello, se fija un punto auxiliar  $z_a$  en el intervalo  $(0, \bar{z})$  y se resuelve (3.6.26) cuando  $z \in (0, z_a)$  y  $z \in [z_a, \bar{z})$ . En ambos casos, la solución puede ser escrita como

$$F(z) = \exp \left\{ \int_z^{z_a} p(v, \theta, \omega, x) dv \right\} \left( F(z_a) + \int_{z_a}^z q(u, \theta, \omega, x) \exp \left\{ \int_{z_a}^u p(v, \theta, \omega, x) dv \right\} du \right), \quad z \in (0, \bar{z}), \tag{3.6.28}$$

donde

$$p(v, \theta, \omega, x) = a(v, \theta, \omega, x) + \frac{\alpha}{\mu v},$$

$$q(v, \theta, \omega, x) = \frac{\beta(\omega + \lambda - \lambda v + \delta)}{v(v - x\beta(\omega + \lambda - \lambda v + \delta))} \left( b(v) - x_1 \frac{(\lambda v + \alpha)x}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} k_f^0(\omega) \right).$$

Es sencillo comprobar que la integral  $\int_z^{z_a} p(v, \theta, \omega, x) dv$  diverge cuando  $z \rightarrow 0+$  y  $z \rightarrow \bar{z}-$ . Como  $F(0) < \infty$  y  $F(\bar{z}) < \infty$ , es posible obtener las siguientes expresiones para el valor  $F(z_a)$ :

$$F(z_a) = \int_0^{z_a} q(u, \theta, \omega, x) \exp \left\{ \int_{z_a}^u p(v, \theta, \omega, x) dv \right\} du,$$

$$F(z_a) = \int_{\bar{z}}^{z_a} q(u, \theta, \omega, x) \exp \left\{ \int_{z_a}^u p(v, \theta, \omega, x) dv \right\} du.$$

Igualando las dos relaciones anteriores se deduce la siguiente expresión para  $x_1$

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{\theta + \lambda + \alpha + \delta}{x\beta(\omega + \lambda + \delta)} \frac{\int_0^{\bar{z}} \frac{u^{\alpha/\mu + k - 1} \beta(\omega + \lambda - \lambda u + \delta)}{u - x\beta(\omega + \lambda - \lambda u + \delta)} \exp \left\{ \int_0^u a(t, \theta, \omega, x) dt \right\} du}{\int_0^{\bar{z}} \frac{(\lambda u + \alpha) u^{\alpha/\mu - 1} \beta(\omega + \lambda - \lambda u + \delta)}{u - x\beta(\omega + \lambda - \lambda u + \delta)} \exp \left\{ \int_0^u a(t, \theta, \omega, x) dt \right\} du} \tag{3.6.29}$$

Además,  $F(\bar{z})$  resulta ser

$$F(\bar{z}) = \frac{\mu\beta(\omega + \lambda - \lambda\bar{z} + \delta)}{\bar{z}(\theta + \lambda - \lambda\bar{z} + \delta)} \left( b(\bar{z}) - x_1 \frac{(\lambda\bar{z} + \alpha)x}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} k_f^0(\omega) \right).$$

Por otra parte, de la relación (3.6.17) se tiene la igualdad

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \left[ (I - M(\theta, \omega, x, y))^{-1} \right]_{(k,1)}. \tag{3.6.30}$$

Tomando  $\vec{m}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)'$ , donde el número 1 aparece en la  $k$ -ésima componente, se concluye de

(3.6.16), (3.6.29) y (3.6.30) que la transformada  $\phi_f^k(\theta, \omega, x, y)$ ,  $k \geq 1$ , viene dada por

$$\phi_f^k(\theta, \omega, x, y) = (\theta + \lambda + \alpha + \delta) \frac{\int_0^{\bar{z}} \frac{u^{\alpha/\mu+k-1} \beta(\omega+\lambda-\lambda u+\delta)}{u-x\beta(\omega+\lambda-\lambda u+\delta)} \exp\left\{\int_0^u a(t, \theta, \omega, x) dt\right\} du}{\int_0^{\bar{z}} \frac{(\lambda u+\alpha) u^{\alpha/\mu-1} \beta(\omega+\lambda-\lambda u+\delta)}{u-x\beta(\omega+\lambda-\lambda u+\delta)} \exp\left\{\int_0^u a(t, \theta, \omega, x) dt\right\} du} \quad (3.6.31)$$

La relación (3.6.3) es consecuencia de (3.6.31), en el caso particular  $k = 1$ .

Debe notarse que el caso  $\alpha = 0$  y  $\mu > 0$  es más simple, puesto que el coeficiente de  $F'(z)$  en (3.6.26) tiene una única raíz  $z_1 = \bar{z}$ . La ecuación diferencial (3.6.26) puede ser entonces resuelta en el intervalo  $[0, \bar{z})$ . La solución viene dada por la relación (3.6.28), sustituyendo el punto auxiliar  $z_a$  por el punto  $z = 0$ . Se puede comprobar que la integral  $\int_0^z p(v, \theta, \omega, x) dv$  diverge cuando  $z \rightarrow \bar{z}-$ . Haciendo uso de  $F(\bar{z}) < \infty$ , se deduce la igualdad

$$F(0) = \int_{\bar{z}}^0 q(u, \theta, \omega, x) \exp\left\{\int_0^u p(v, \theta, \omega, x) dv\right\} du.$$

A partir de esta relación se concluye que (3.6.29) y (3.6.31) son las expresiones de  $x_1$  y  $\phi_f^k(\theta, \omega, x, y)$ ,  $k \geq 1$ , respectivamente, cuando  $\alpha = 0$ .

Volviendo la atención a la ecuación (3.6.26), si se asume  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} X(z) - \frac{x}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} \left( \lambda \sum_{i=1}^{\infty} z^i \sum_{n=1}^i x_n k_f^{i-n}(\omega) + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} z^i \sum_{n=1}^{i+1} x_n k_f^{i-n+1}(\omega) \right) \\ = m(z) - x_1 z \frac{\lambda x}{\theta + \lambda + \alpha + \delta} k_f^0(\omega). \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

Es posible reescribir (3.6.32) como

$$\begin{aligned} X(z) ((\theta + \lambda + \alpha + \delta)z - x(\lambda z + \alpha)\beta(\omega + \lambda - \lambda z + \delta)) \\ = z ((\theta + \lambda + \alpha + \delta)m(z) - x x_1 (\lambda z + \alpha) k_f^0(\omega)). \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

Poniendo  $z = \bar{z}$  en (3.6.33) y teniendo en cuenta que  $X(\bar{z}) < \infty$ , se tiene

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{\theta + \lambda + \alpha + \delta}{x(\lambda \bar{z} + \alpha) k_f^0(\omega)} \bar{z}^k.$$

Finalmente, siguiendo un razonamiento análogo al efectuado en el caso  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , se obtienen las siguientes expresiones para las transformadas  $\phi_f^k(\theta, \omega, x, y)$ ,  $k \geq 1$ ,

$$\phi_f^k(\theta, \omega, x, y) = x \bar{z}^{k-1} \beta(\omega + \lambda - \lambda \bar{z} + \delta) = \frac{(\theta + \lambda + \alpha + \delta) \bar{z}^k}{\lambda \bar{z} + \alpha}. \quad (3.6.34)$$

Entonces, tomando  $k = 1$  en la igualdad anterior se obtiene (3.6.6).

A continuación se introducen algunas definiciones y notaciones de utilidad en el cálculo de la función generatriz  $\phi_d(\theta, \theta, x, y)$ . Como podrá observarse en lo sucesivo, no será posible distinguir entre las variables aleatorias  $L_0$  y  $L_1$ . Sea el vector aleatorio  $(\tilde{C}(t), \tilde{Q}(t), \tilde{\xi}(t), \tilde{I}(t))$  asociado al sistema de colas  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento y sin proceso de llegada de desastres ( $\delta = 0$ ), donde las tres primeras componentes son definidas como en las secciones previas e  $\tilde{I}(t)$  denota el número de clientes que han sido servidos antes del instante  $t$ .

Sean las probabilidades  $\{P_{0ji}(t)\}$  y las densidades probabilísticas  $\{P_{1ji}(t, x)\}$  definidas como sigue

$$P_{0ji}(t) = P(\tilde{C}(t) = 0, \tilde{Q}(t) = j, \tilde{I}(t) = i, \tilde{L} \geq t), \quad j \geq 1, i \geq 1,$$

$$P_{1ji}(t, x) = P(\tilde{C}(t) = 1, \tilde{Q}(t) = j, \tilde{I}(t) = i, x \leq \tilde{\xi}(t) < x + \Delta x, \tilde{L} \geq t), \quad \underline{j \geq 0}, i \geq 0, 0 \leq x \leq t.$$

Asociadas a  $\{P_{0ji}(t)\}$  y a  $\{P_{1ji}(t, x)\}$  se consideran las transformadas de Laplace-Stieltjes y las funciones generatrices

$$\begin{aligned} \phi_{0ji}(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta t} P_{0ji}(t) dt, \quad j \geq 1, i \geq 1, \\ \phi_{1ji}(\theta, x) &= \int_x^\infty e^{-\theta t} P_{1ji}(t, x) dt, \quad j \geq 0, i \geq 0, x \geq 0, \\ \tilde{\phi}_0(\theta, x, y) &= \sum_{i=1}^\infty x^i \sum_{j=1}^\infty y^j \phi_{0ji}(\theta), \\ \tilde{\phi}_1(\theta, x, y, u) &= \sum_{i=0}^\infty x^i \sum_{j=0}^\infty y^j \phi_{1ji}(\theta, u). \end{aligned} \tag{3.6.35}$$

Condicionando por el valor de la variable aleatoria  $Z$  se obtiene

$$\phi_d(\theta, \theta, x, y) = \delta \int_0^\infty e^{-(\theta+\delta)t} E[x^{N_I} y^{N_d} I_{\{\tilde{L} \geq t\}} / Z = t] dt. \tag{3.6.36}$$

La esperanza que aparece involucrada en (3.6.36) es igual a  $E[x^{\tilde{I}(t)} y^{\tilde{C}(t)+\tilde{N}(t)} I_{\{\tilde{L} \geq t\}}]$ . Entonces, con la ayuda de las transformadas (3.6.35),  $\phi_d(\theta, \theta, x, y)$  es reexpresada como

$$\phi_d(\theta, \theta, x, y) = \delta \left( \tilde{\phi}_0(\theta + \delta, x, y) + y \int_0^\infty \tilde{\phi}_1(\theta + \delta, x, y, u) du \right). \tag{3.6.37}$$

Determinar las transformadas  $\tilde{\phi}_0(\theta, x, y)$  y  $\tilde{\phi}_1(\theta, x, y, u)$  es equivalente a estudiar el sistema  $M/G/1$  con política lineal de reintento en régimen no estacionario. Este análisis es realizado haciendo uso del método de las *catástrofes*.

Supóngase que  $(\tilde{C}(0), \tilde{Q}(0), \tilde{I}(0)) = (0, 0, 0)$ . Se considera un proceso de Poisson de intensidad  $\theta > 0$ , independiente del funcionamiento del sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal. Los sucesos de este proceso son llamados 'catástrofes'. Sea  $\pi_{ni}(\theta)$  la probabilidad del suceso 'en el instante de la  $i$ -ésima finalización del servicio quedan  $n$  clientes en la órbita, hasta ese instante no ha ocurrido ninguna catástrofe y el

período de ocupación no ha finalizado',  $n \geq 0, i \geq 1$ .

Utilizando argumentos paralelos a los empleados para establecer la validez de (3.5.13)-(3.5.16), se deducen las relaciones

$$\pi_{n1}(\theta) = k_n(\theta), \quad n \geq 0, \quad (3.6.38)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ni}(\theta) &= (1 - \delta_{0n}) \sum_{m=1}^n \pi_{m,i-1}(\theta) \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} k_{n-m}(\theta) \\ &+ \sum_{m=1}^{n+1} \pi_{m,i-1}(\theta) \frac{\alpha + m\mu}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} k_{n-m+1}(\theta), \quad n \geq 0, i \geq 2, \end{aligned} \quad (3.6.39)$$

donde  $k_n(\theta)$  se define como  $k_n^*(\theta)$  en (3.6.11), poniendo  $\delta = 0$ .

Multiplicando (3.6.38) y (3.6.39) por  $xy^n$  y  $x^i y^n$ , y sumando en  $n \geq 0$  y en  $n \geq 0, i \geq 2$ , respectivamente, se obtienen

$$\begin{aligned} x \sum_{n=0}^{\infty} y^n \pi_{n1}(\theta) &= x\beta(\theta + \lambda - \lambda y), \\ y \sum_{i=2}^{\infty} x^i \sum_{n=0}^{\infty} y^n \pi_{ni}(\theta) &= x(\lambda y + \alpha)\beta(\theta + \lambda - \lambda y) \sum_{i=1}^{\infty} x^i \sum_{m=1}^{\infty} y^m \frac{\pi_{mi}(\theta)}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} \\ &+ \mu xy\beta(\theta + \lambda - \lambda y) \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i=1}^{\infty} x^i \sum_{m=1}^{\infty} y^m \frac{\pi_{mi}(\theta)}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} \right). \end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones anteriores, se deduce que

$$\begin{aligned} y \sum_{i=1}^{\infty} x^i \sum_{n=0}^{\infty} y^n \pi_{ni}(\theta) &= xy\beta(\theta + \lambda - \lambda y) + x(\lambda y + \alpha)\beta(\theta + \lambda - \lambda y) \sum_{i=1}^{\infty} x^i \sum_{m=1}^{\infty} y^m \frac{\pi_{mi}(\theta)}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} \\ &+ \mu xy\beta(\theta + \lambda - \lambda y) \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i=1}^{\infty} x^i \sum_{m=1}^{\infty} y^m \frac{\pi_{mi}(\theta)}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} \right). \end{aligned} \quad (3.6.40)$$

Obsérvese que  $\sum_{i=1}^{\infty} x^i \pi_{0i}(\theta) = \pi(\theta, x)$ , siendo  $\pi(\theta, x)$  la transformada conjunta del período de ocupación,  $\tilde{L}$ , y del número de clientes servidos,  $\tilde{I}$ , en el sistema  $M/G/1$  con reintento lineal; esto es,

$$\pi(\theta, x) = E \left[ \exp\{-\theta \tilde{L}\} x^{\tilde{I}} \right] = \phi_f(\theta - \delta, \theta - \delta, x, y).$$

Si se define la función

$$\gamma(\theta, x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i \sum_{m=1}^{\infty} y^m \frac{\pi_{mi}(\theta)}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu},$$

es posible reescribir (3.6.40) en los términos

$$\begin{aligned} \mu y (y - x\beta(\theta + \lambda - \lambda y)) \frac{\partial \gamma(\theta, x, y)}{\partial y} + ((\theta + \lambda + \alpha)y - x(\lambda y + \alpha)\beta(\theta + \lambda - \lambda y)) \gamma(\theta, x, y) \\ = y(x\beta(\theta + \lambda - \lambda y) - \pi(\theta, x)). \end{aligned} \tag{3.6.41}$$

Debe notarse que la serie  $\gamma(\theta, x, y)$  converge cuando  $(\theta, x) \neq (0, 1)$ .

El siguiente paso consiste en resolver la ecuación diferencial (3.6.41) para los diferentes tipos de disciplina de reintento. Si  $\alpha > 0$  y  $\mu > 0$ , la ecuación (3.6.41) tiene dos singularidades  $z_1 = 0$  y  $z_2 = \bar{z}$ , donde  $\bar{z} = h(\theta, x)$  denota la raíz de la función  $g$  estudiada en el *Lema 3.3.1* para el caso  $\delta = 0$ . Es obvio que (3.6.41) puede ser resuelta como la ecuación diferencial (3.3.15) del *Teorema 3.3.2* o la ecuación (3.6.26). Se obtiene entonces, para  $y \in (0, 1] - \{\bar{z}\}$ ,

$$\gamma(\theta, x, y) = y^{-\alpha/\mu} \int_{\bar{z}}^y \frac{x\beta(\theta + \lambda - \lambda u) - \pi(\theta, x)}{\mu(u - x\beta(\theta + \lambda - \lambda u))} u^{\alpha/\mu} \exp \left\{ \int_y^u a(t, \theta - \delta, \theta - \delta, x) dt \right\} du. \tag{3.6.42}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, se consigue el valor  $\gamma(\theta, x, \bar{z})$  dado por

$$\gamma(\theta, x, \bar{z}) = \frac{\bar{z} - \pi(\theta, x)}{\theta + \lambda - \lambda \bar{z}}.$$

La resolución de (3.6.41) cuando  $\alpha = 0$  y  $\mu > 0$ , está basada en la existencia de una única singularidad  $y = \bar{z}$ . La fórmula (3.6.42) permanece válida.

Cuando se toman  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , la ecuación (3.6.41) se reduce directamente a

$$\hat{\gamma}(\theta, x, y) = \frac{y(x\beta(\theta + \lambda - \lambda y) - \pi(\theta, x))}{(\theta + \lambda + \alpha)y - x(\lambda y + \alpha)\beta(\theta + \lambda - \lambda y)}, \quad y \in (0, 1] - \{\hat{z}\}, \tag{3.6.43}$$

donde  $\hat{z} = h(\theta, \theta, x)$  denota la raíz de la función  $f$  descrita en el *Lema 3.3.1* para el caso  $\delta = 0$ . Se está asumiendo que cuando  $\mu = 0$  la función  $\gamma(\theta, x, y)$  es denotada por  $\hat{\gamma}(\theta, x, y)$ . También es posible deducir que

$$\hat{\gamma}(\theta, x, \hat{z}) = \frac{-\lambda x \hat{z} \beta'(\theta + \lambda - \lambda \hat{z})}{x(\lambda \hat{z}(\lambda \hat{z} + \alpha)\beta'(\theta + \lambda - \lambda \hat{z}) + \alpha\beta(\theta + \lambda - \lambda \hat{z}))}.$$

A continuación se calculan las expresiones de  $\tilde{\phi}_0(\theta, x, y)$  y  $\tilde{\phi}_1(\theta, x, y, u)$  en términos de las funciones auxiliares  $\gamma(\theta, x, y)$  y  $\hat{\gamma}(\theta, x, y)$  dadas en (3.6.42) y (3.6.43).

El significado de  $\pi_{ni}(\theta)$ ,  $n \geq 0, i \geq 1$ , permite interpretar  $\theta\phi_{0ni}(\theta)$  como la probabilidad del suceso 'en el instante de la primera catástrofe, el servicio está vacío, hay  $n$  clientes en la órbita,  $i$  clientes han sido servidos y el período de ocupación no ha finalizado',  $n \geq 1, i \geq 1$ . Análogamente,  $\theta\phi_{1ni}(\theta, u)du$  corresponde a la probabilidad del suceso 'en el instante de la primera catástrofe, el servicio está ocupado, hay  $n$  clientes en la órbita, el tiempo de servicio consumido,  $\xi$ , es  $\xi \in [u, u + du)$ ,  $i$  clientes han sido servidos y el período de ocupación no ha finalizado',  $n \geq 0, i \geq 0$ .

Condicionando por el estado del sistema en el instante de la finalización del servicio previo al instante de la llegada de la primera catástrofe, se establecen las relaciones

$$\begin{aligned}\phi_{0ni}(\theta) &= \frac{\pi_{ni}(\theta)}{\theta + \lambda + \alpha + n\mu}, \quad n \geq 1, i \geq 1, \\ \phi_{1ni}(\theta, u) &= (1 - B(u))e^{-(\theta+\lambda)u} \left( (1 - \delta_{0n}) \sum_{m=1}^n \pi_{mi}(\theta) \frac{\lambda}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} \frac{(\lambda u)^{n-m}}{(n-m)!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{n+1} \pi_{mi}(\theta) \frac{\alpha + m\mu}{\theta + \lambda + \alpha + m\mu} \frac{(\lambda u)^{n-m+1}}{(n-m+1)!} \right), \quad n \geq 0, i \geq 1, \\ \phi_{1n0}(\theta, u) &= (1 - B(u))e^{-(\theta+\lambda)u} \frac{(\lambda u)^n}{n!}, \quad n \geq 0, i = 0.\end{aligned}$$

Introduciendo las funciones  $\tilde{\phi}_0(\theta, x, y)$  y  $\tilde{\phi}_1(\theta, x, y, u)$  sobre las expresiones anteriores, se tienen

$$\tilde{\phi}_0(\theta, x, y) = \begin{cases} \hat{\gamma}(\theta, x, y), & \text{si } \alpha > 0 \text{ y } \mu = 0, \\ \gamma(\theta, x, y), & \text{si } \alpha \geq 0 \text{ y } \mu > 0, \end{cases} \quad (3.6.44)$$

$$\tilde{\phi}_1(\theta, x, y, u) = \left( 1 + (\lambda + \alpha y^{-1})\tilde{\phi}_0(\theta, x, y) + \mu \frac{\partial \tilde{\phi}_0(\theta, x, y)}{\partial y} \right) (1 - B(u))e^{-(\theta+\lambda-\lambda y)u}. \quad (3.6.45)$$

Las expresiones finales para  $\phi_d(\theta, \theta, x, y)$  son consecuencia de insertar (3.6.44) y (3.6.45) en la expresión (3.6.37). □

En el siguiente resultado se recogen algunas características significativas del período de ocupación.

**Corolario 3.6.2.** *i) La probabilidad,  $p$ , de que el período de ocupación termine con una finalización del servicio viene dada por*

*i.1) Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , entonces*

$$p = \frac{\int_0^{\bar{z}(0,1)} \frac{u^{\alpha/\mu} \beta(\lambda - \lambda u + \delta)}{u - \beta(\lambda - \lambda u + \delta)} \exp \left\{ \int_0^u \frac{\lambda - \lambda \beta(\lambda - \lambda t + \delta) + \delta}{\mu(t - \beta(\lambda - \lambda t + \delta))} dt \right\} du}{\int_0^{\bar{z}(0,1)} \frac{u^{\alpha/\mu}}{u - \beta(\lambda - \lambda u + \delta)} \exp \left\{ \int_0^u \frac{\lambda - \lambda \beta(\lambda - \lambda t + \delta) + \delta}{\mu(t - \beta(\lambda - \lambda t + \delta))} dt \right\} du}, \quad (3.6.46)$$

donde  $\bar{z}(0, 1) = h(0, 1)$  es la raíz de la función  $g$  descrita en el Lema 3.3.1 en el punto  $(\omega, x) = (0, 1)$ .

*i.2) Si  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , entonces*

$$p = \frac{(\lambda + \alpha + \delta)\hat{z}(0, 0, 1)}{\lambda \hat{z}(0, 0, 1) + \alpha}, \quad (3.6.47)$$

donde  $\hat{z}(0, 0, 1) = h(0, 0, 1)$  es la raíz de la función  $f$  descrita en el Lema 3.3.1 en el punto  $(\theta, \omega, x) = (0, 0, 1)$ .

ii) Los valores medios de las variables aleatorias  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $N_f$  y  $N_d$ , vienen dados por

$$E[L_0] = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{P_0(1)}{P_{00}} - 1 \right), \quad (3.6.48)$$

$$E[L_1] = \frac{1 - P_0(1)}{\lambda P_{00}}, \quad (3.6.49)$$

$$E[N_f] = \begin{cases} \frac{\beta(\delta)(1-p-\delta\gamma(\delta,1,1))}{1-\beta(\delta)}, & \text{si } \alpha \geq 0 \text{ y } \mu > 0, \\ \frac{\beta(\delta)(\delta+(\lambda+\alpha)(1-p))}{\delta+(\lambda+\alpha)(1-\beta(\delta))}, & \text{si } \alpha > 0 \text{ y } \mu = 0, \end{cases} \quad (3.6.50)$$

$$E[N_d] = \begin{cases} 1 + \frac{(1-p)(\lambda-(\lambda+\delta)\beta(\delta))}{\delta(1-\beta(\delta))} + \frac{\delta\beta(\delta)\gamma(\delta,1,1)}{1-\beta(\delta)}, & \text{si } \alpha \geq 0 \text{ y } \mu > 0, \\ 1 - \frac{\delta\beta(\delta)}{\delta+(\lambda+\alpha)(1-\beta(\delta))} + \frac{(1-p)(\lambda(\lambda+\alpha+\delta)-(\lambda+\alpha)(\lambda+\delta)\beta(\delta))}{\delta(\delta+(\lambda+\alpha)(1-\beta(\delta)))}, & \text{si } \alpha > 0 \text{ y } \mu = 0, \end{cases} \quad (3.6.51)$$

donde

$$P_0(1) = \begin{cases} \mu^{-1} \int_{\mathbb{Z}(0,1)}^1 \left( \alpha P_{00} u^{\alpha/\mu-1} + \frac{\delta u^{\alpha/\mu}}{u-\beta(\lambda-\lambda u+\delta)} \right) \exp \left\{ \int_1^u r(v) dv \right\} du, & \text{si } \alpha \geq 0 \text{ y } \mu > 0, \\ \frac{\alpha(1-\beta(\delta))P_{00}+\delta}{(\lambda+\alpha)(1-\beta(\delta))+\delta}, & \text{si } \alpha > 0 \text{ y } \mu = 0, \end{cases} \quad (3.6.52)$$

y  $P_{00}$  viene dado en el Teorema 3.3.2.

**Demostración.** Las expresiones (3.6.46) y (3.6.47) son obtenidas tomando  $(\theta, \omega, x, y) \rightarrow (0, 0, 1, 1)$  sobre las ecuaciones (3.6.3) y (3.6.6), respectivamente. La probabilidad de que el servidor esté desocupado se sigue directamente de la z-transformada dada en el Teorema 3.3.2.

En virtud de la relación (3.4.1), se tiene que

$$P_{ij} = \frac{E[T_{ij}]}{\lambda^{-1} + E[L]},$$

donde  $T_{ij}$  representa la cantidad de tiempo en un ciclo de regeneración durante la cual el sistema permanece en el estado  $(i, j)$ ,  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . Nótese que  $E[T_{00}] = \lambda^{-1}$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} E[T_{0j}] = \lambda^{-1} + E[L_0]$  y  $\sum_{j=0}^{\infty} E[T_{1j}] = E[L_1]$ . Entonces, (3.6.48) y (3.6.49) son consecuencia de (3.3.18), (3.3.21) y (3.6.52).

Las funciones generatrices marginales de las variables aleatorias  $N_f$  y  $N_d$  son obtenidas a partir del Teorema 3.6.1. Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , se tienen

$$E[x^{N_f}] = \frac{1 - \beta(\delta) + (1-x)\beta(\delta)(\phi_f(0,0,x,1) + \delta\gamma(\delta,x,1))}{1 - x\beta(\delta)}, \quad |x| \leq 1, \quad (3.6.53)$$

$$E[y^{N_d}] = \phi_f(0,0,1,1) + \frac{\delta}{y - \beta(\lambda - \lambda y + \delta)} (y(y - \phi_f(0,0,1,1)) \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda y + \delta)}{\lambda - \lambda y + \delta} + (y-1)\beta(\lambda - \lambda y + \delta)\gamma(\delta,1,y)), \quad |y| \leq 1. \quad (3.6.54)$$

En el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , se tienen

$$E [x^{N_f}] = 1 - \frac{(1-x)\beta(\delta)}{\delta + (\lambda + \alpha)(1 - x\beta(\delta))} (\delta + (\lambda + \alpha)(1 - \phi_f(0, 0, x, 1))), \quad |x| \leq 1, \quad (3.6.55)$$

$$E [y^{N_d}] = \left( 1 - \frac{\delta y}{\lambda - \lambda y + \delta} \frac{\lambda + \alpha + \delta - (\lambda y + \alpha)\beta(\lambda - \lambda y + \delta)}{(\lambda + \alpha + \delta)y - (\lambda y + \alpha)\beta(\lambda - \lambda y + \delta)} \right) \phi_f(0, 0, 1, 1) + \frac{\delta y}{\lambda - \lambda y + \delta} \left( 1 + \frac{(\lambda + \alpha + \delta)(1-y)\beta(\lambda - \lambda y + \delta)}{(\lambda + \alpha + \delta)y - (\lambda y + \alpha)\beta(\lambda - \lambda y + \delta)} \right), \quad |y| \leq 1. \quad (3.6.56)$$

Las funciones  $\phi_f(0, 0, x, 1)$ ,  $\phi_f(0, 0, 1, y)$ ,  $\gamma(\delta, x, 1)$  y  $\gamma(\delta, 1, y)$  vienen dadas en el Teorema 3.6.1. Derivando las expresiones (3.6.53)-(3.6.56) se obtienen los valores medios dados en (3.6.50) y (3.6.51).

□

### 3.7 Sistema $M/M/1$ con mecanismo de aclarado general y disciplina lineal de reintento

Esta sección está dedicada al análisis de la distribución límite y al estudio del período de ocupación del sistema  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado general.

El sistema estudiado es una variante del modelo analizado en las secciones previas. La principal modificación consiste en asumir que el tiempo que transcurre entre dos desastres consecutivos sigue una distribución general  $A(t)$  ( $A(0) = 0$  y  $A(\infty) = 1$ ), aperiódica, con primer momento  $\alpha_1 < \infty$  y transformada de Laplace-Stieltjes  $\alpha(\theta)$ . Para que el sistema sea analíticamente abordable debe asumirse que los tiempos de servicio son variables aleatorias exponenciales de parámetro  $\nu > 0$ . Los procesos de llegada de clientes y de desastres, los intervalos separando sucesivos reintentos y los tiempos de servicio se consideran mutuamente independientes.

En cada instante  $t \geq 0$ , el estado del sistema puede ser descrito mediante el proceso Markoviano  $X = \{X(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t), \xi(t)), t \geq 0\}$ , donde las componentes  $C(t)$  y  $Q(t)$  se definen como en la sección 3.2 y  $\xi(t)$  representa el tiempo transcurrido desde el instante de llegada del último desastre hasta el instante  $t$ . Su espacio de estados es  $S = \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ . Si se omite la variable  $\xi(t)$ , entonces el proceso resultante  $Y = \{Y(t), t \geq 0\} = \{(C(t), Q(t)), t \geq 0\}$  resulta ser un proceso regenerativo con proceso de renovación encajado  $\zeta = \{\zeta_n, n \geq 0\}$ , donde  $\zeta_0 = 0$  y  $\zeta_n$  es el instante de llegada del  $n$ -ésimo desastre,  $n \geq 1$ . El conjunto  $\mathcal{E} = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$  es el espacio de estados de  $Y$ . Análogamente, para el sistema de colas  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintentos en ausencia de desastres, se considera el proceso  $\tilde{Y} = \{\tilde{Y}(t), t \geq 0\} = \{(\tilde{C}(t), \tilde{Q}(t)), t \geq 0\}$ .

#### 3.7.1 Distribución límite

La existencia de la distribución límite del proceso  $Y$ , definida como

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) = (i, j)), \quad (i, j) \in \mathcal{E},$$

está asegurada mediante la recurrencia del proceso de renovación  $\zeta$  (ver la *Definición 9.1.21* de Çinlar (1975), donde  $\zeta$  es recurrente si y sólo si  $A(\infty) = 1$ ) y la integrabilidad Riemann de la función  $t \rightarrow K_t(i, j)$ , para cada  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , definida como

$$K_t(i, j) = P(Y(t) = (i, j), \eta_1 > t) = (1 - A(t))\tilde{P}_{ij}(t),$$

donde  $\tilde{P}_{ij}(t) = P(\tilde{Y}(t) = (i, j))$ . Nótese que  $K_t(i, j) \leq 1 - A(t)$ , para cada  $(i, j) \in \mathcal{E}$  y  $t \geq 0$ . La existencia de  $\alpha_1$  asegura la integrabilidad de  $1 - A(t)$ . Entonces, en virtud del test de comparación de integrales (ver pg. 300 de Edwards (1980)), para establecer la integrabilidad de  $K_t(i, j)$  en  $\mathbb{R}^+$  basta con comprobar que existe  $\int_0^t K_u(i, j)du$ , para cada  $t \geq 0$ . Como  $K_u(i, j) = (1 - A(u))\tilde{P}_{ij}(u)$ , el problema se reduce a verificar la existencia de  $\int_0^t \tilde{P}_{ij}(u)du$ , la cual está asegurada dado que el número de transiciones de las trayectorias de  $\tilde{Y}$  en el intervalo  $(0, t]$  es finito casi seguramente.

A continuación se introducen algunas transformadas

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}z^j, \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1,$$

$$\tilde{P}_i(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(t)z^j, \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1, t \geq 0,$$

$$\tilde{P}_i^*(\theta, z) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} \tilde{P}_i(t, z)dt, \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1, Re(\theta) > 0.$$

En el siguiente resultado se estudia la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  en términos de las funciones generatrices parciales  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

**Teorema 3.7.1.** *Las funciones generatrices parciales de  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  vienen dadas por*

$$P_i(z) = \alpha_1^{-1} \int_0^{\infty} \tilde{P}_i(t, z)(1 - A(t))dt, \quad i \in \{0, 1\}, \tag{3.7.1}$$

donde las funciones generatrices  $\tilde{P}_i(t, z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , tienen transformadas de Laplace-Stieltjes,

$$\tilde{P}_i^*(\theta, z) = \frac{\delta_{0i} + \lambda \tilde{\phi}_i(\theta, 1, z)}{\theta + \lambda - \lambda \pi(\theta, 1)}, \quad i \in \{0, 1\}. \tag{3.7.2}$$

Además,

i) Si  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , entonces

$$\tilde{\phi}_0(\theta, 1, z) = \frac{\nu z}{(\tilde{z}(\theta) - z)(\theta + \lambda + \alpha)(\theta + \lambda - \lambda \tilde{z}(\theta) + \nu)}, \tag{3.7.3}$$

$$\tilde{\phi}_1(\theta, 1, z) = \frac{z + (\lambda z + \alpha)\tilde{\phi}_0(\theta, 1, z)}{z(\theta + \lambda - \lambda z + \nu)}, \tag{3.7.4}$$

$$\pi(\theta, 1) = \frac{\nu}{\theta + \lambda - \lambda \hat{z}(\theta) + \nu}, \quad (3.7.5)$$

$$\hat{z}(\theta) = \frac{(\theta + \lambda + \alpha)(\theta + \lambda + \nu) - \lambda\nu - \sqrt{((\theta + \lambda + \alpha)(\theta + \lambda + \nu) - \lambda\nu)^2 - 4\lambda\alpha\nu(\theta + \lambda + \alpha)}}{2\lambda(\theta + \lambda + \alpha)}, \quad (3.7.6)$$

$$\bar{z}(\theta) = \frac{(\theta + \lambda + \alpha)(\theta + \lambda + \nu) - \lambda\nu + \sqrt{((\theta + \lambda + \alpha)(\theta + \lambda + \nu) - \lambda\nu)^2 - 4\lambda\alpha\nu(\theta + \lambda + \alpha)}}{2\lambda(\theta + \lambda + \alpha)}. \quad (3.7.7)$$

ii) Si  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_0(\theta, 1, z) &= \mu^{-1} z^{-\alpha/\mu} (\hat{z}(\theta) - z)^{\frac{\sigma(\theta)}{\lambda\mu}} (\bar{z}(\theta) - z)^{\frac{\tau(\theta)}{\lambda\mu}} \pi(\theta, 1) \Phi_{\alpha/\mu}(\theta, \hat{z}(\theta), z) \\ &\times \left( \frac{\Phi_{1+\alpha/\mu}(\theta, 0, \hat{z}(\theta))}{\Phi_{\alpha/\mu}(\theta, 0, \hat{z}(\theta))} - \frac{\Phi_{1+\alpha/\mu}(\theta, \hat{z}(\theta), z)}{\Phi_{\alpha/\mu}(\theta, \hat{z}(\theta), z)} \right), \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

$$\tilde{\phi}_1(\theta, 1, z) = \frac{z - \pi(\theta, 1) - (\theta + \lambda - \lambda z) \tilde{\phi}_0(\theta, 1, z)}{\theta z + (\lambda z - \nu)(1 - z)}, \quad (3.7.9)$$

$$\pi(\theta, 1) = \nu \left( \theta + \lambda + \nu - \lambda \frac{\Phi_{1+\alpha/\mu}(\theta, 0, \hat{z}(\theta))}{\Phi_{\alpha/\mu}(\theta, 0, \hat{z}(\theta))} \right)^{-1}, \quad (3.7.10)$$

$$\Phi_c(\theta, a, b) = \int_a^b u^c (\hat{z}(\theta) - u)^{-(1+\frac{\sigma(\theta)}{\lambda\mu})} (\bar{z}(\theta) - u)^{-(1+\frac{\tau(\theta)}{\lambda\mu})} du, \quad (3.7.11)$$

$$\sigma(\theta) = \lambda (\lambda(\theta + \lambda)\hat{z}(\theta) - (\theta + \lambda)^2 - \nu\theta) ((\theta + \lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu)^{-1/2}, \quad (3.7.12)$$

$$\tau(\theta) = -\lambda (\lambda(\theta + \lambda)\bar{z}(\theta) - (\theta + \lambda)^2 - \nu\theta) ((\theta + \lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu)^{-1/2}, \quad (3.7.13)$$

$$\hat{z}(\theta) = \frac{\theta + \lambda + \nu - \sqrt{(\theta + \lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu}}{2\lambda}, \quad (3.7.14)$$

$$\bar{z}(\theta) = \frac{\theta + \lambda + \nu + \sqrt{(\theta + \lambda + \nu)^2 - 4\lambda\nu}}{2\lambda}. \quad (3.7.15)$$

**Demostración.** En virtud del Teorema 9.2.25 de Çinlar (1975), las probabilidades límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  pueden expresarse como

$$P_{ij} = \alpha_1^{-1} \int_0^\infty K_i(i, j) dt, \quad (i, j) \in \mathcal{E},$$

y, como consecuencia, se obtiene la expresión (3.7.1).

Para calcular las transformadas  $\tilde{P}_i^*(\theta, z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , se utilizará el método de las *marcas colectivas*. Se consideran un proceso de Poisson de intensidad  $\theta > 0$ , cuyos sucesos son llamados '*catástrofes*', y un

proceso de *marcado* que consiste en 'pintar' a cada cliente del sistema de color rojo con probabilidad  $z$  y de color blanco con probabilidad  $1 - z$ ,  $z \in [0, 1]$ . Se asume que ambos procesos son independientes entre sí e independientes del funcionamiento del sistema  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento en ausencia de desastres.

En la terminología del método de las marcas colectivas,  $\theta \tilde{P}_0^*(\theta, z)$  representa la probabilidad del suceso  $\mathcal{A}$  definido como 'en el instante de la primera catástrofe, el servicio está libre y todos los clientes presentes en el sistema han sido marcados de color rojo'. Se define un ciclo de ocupación como el intervalo de tiempo comprendido entre dos visitas consecutivas del proceso  $\tilde{Y}$  al estado  $(0, 0)$ . Sea  $\chi$  el número de ciclos de ocupación que han sido completados hasta el instante de la primera catástrofe. Entonces, aplicando la ley de la probabilidad total, es posible deducir

$$\theta \tilde{P}_0^*(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\mathcal{A}, \chi = n). \tag{3.7.16}$$

La probabilidad del suceso 'la primera catástrofe ocurre durante el  $(n+1)$ -ésimo ciclo de ocupación  $y$ , en ese instante, todos los clientes presentes están marcados de color rojo',  $n \geq 0$ , puede ser expresada como sigue

$$P(\mathcal{A}, \chi = n) = \left( \frac{\lambda}{\theta + \lambda} \pi(\theta, 1) \right)^n \left( \frac{\theta}{\theta + \lambda} + \frac{\lambda}{\theta + \lambda} \theta \tilde{\phi}_0(\theta, 1, z) \right), \quad n \geq 0, \tag{3.7.17}$$

donde  $\pi(\theta, 1) = E[\exp\{-\theta \tilde{L}\}]$  es la transformada del período de ocupación,  $\tilde{L}$ , en el sistema  $M/M/1$  con reintento lineal y  $\phi_0(\theta, 1, z)$  es la función definida en (3.6.35), en el punto  $(\theta, x, y) = (\theta, 1, z)$ .

Análogamente,  $\theta \tilde{P}_1^*(\theta, z)$  representa la probabilidad del suceso  $\mathcal{B}$  definido como 'en el instante de la primera catástrofe, el servicio está ocupado y todos los clientes presentes en el sistema han sido marcados de color rojo'. Entonces, es sencillo establecer que

$$\theta \tilde{P}_1^*(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\mathcal{B}, \chi = n), \tag{3.7.18}$$

siendo

$$P(\mathcal{B}, \chi = n) = \left( \frac{\lambda}{\theta + \lambda} \pi(\theta, 1) \right)^n \left( \frac{\lambda}{\theta + \lambda} \theta \tilde{\phi}_1(\theta, 1, z) \right), \quad n \geq 0, \tag{3.7.19}$$

donde  $\tilde{\phi}_1(\theta, 1, z) = \int_0^{\infty} \tilde{\phi}_1(\theta, 1, z, u) du$  y  $\tilde{\phi}_1(\theta, 1, z, u)$  denota la función definida en (3.6.35) en el punto  $(\theta, x, y, u) = (\theta, 1, z, u)$ .

Entonces, la expresión (3.7.2) se obtiene a partir de (3.7.16)-(3.7.19).

En el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$ , la transformada  $\pi(\theta, 1)$  es obtenida a partir de (3.6.6) y de la relación  $\tilde{\pi}(\theta, 1) = \phi_f(\theta - \delta, \theta - \delta, 1, y)$ . Las fórmulas (3.7.3) y (3.7.4) se deducen mediante la correspondiente particularización al caso exponencial de las relaciones (3.6.43)-(3.6.45). Razonamientos análogos conducen a las expresiones (3.7.8)-(3.7.15) cuando  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ .

□

A continuación se particularizan las expresiones de las funciones generatrices  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , para los casos de las distribuciones de aclarado exponencial, determinista, Coxian-2 y Erlang.

*Ejemplo 1.* Distribución exponencial. Si se asume que  $A(t) = 1 - e^{-\delta t}$ ,  $t > 0$ ,  $\delta > 0$ , entonces

$$P_i(z) = \delta \tilde{P}_i^*(\delta, z), \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1.$$

*Ejemplo 2.* Distribución determinista. Si se considera que el tiempo transcurrido entre dos instantes de aclarado consecutivos es una constante  $D > 0$ , entonces

$$P_i(z) = D^{-1} \int_0^D \tilde{P}_i(t, z) dt, \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1.$$

*Ejemplo 3.* Distribución Coxian-2. La función de densidad del tiempo de aclarado es

$$a(t) = p_1 \delta_1 e^{-\delta_1 t} + p_2 \delta_2 e^{-\delta_2 t}, \quad t > 0,$$

donde  $\delta_1 > \delta_2 > 0$ ,  $p_2 = 1 - p_1$ ,  $p_1 = 1 - b\delta_1/(\delta_1 - \delta_2)$  y  $b \in [0, 1]$ . En este caso, se tiene que

$$P_i(z) = \left( \frac{p_1}{\delta_1} + \frac{p_2}{\delta_2} \right)^{-1} \left( p_1 \tilde{P}_i^*(\delta_1, z) + p_2 \tilde{P}_i^*(\delta_2, z) \right), \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1.$$

Debe notarse que la distribución hiperexponencial corresponde con el caso en que  $p_i \in [0, 1]$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

*Ejemplo 4.* Distribución Erlang. Se asume que la función de densidad del tiempo de aclarado viene dada por

$$a(t) = \frac{\delta^m}{(m-1)!} e^{-\delta t} t^{m-1}, \quad t > 0,$$

donde  $\delta > 0$  y  $m \geq 1$ . Entonces, se obtiene

$$P_i(z) = \frac{\delta}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-\delta)^n}{n!} \tilde{P}_i^{*(n)}(\delta, z), \quad i \in \{0, 1\}, |z| \leq 1$$

siendo

$$\tilde{P}_i^{*(n)}(\theta, z) = \frac{\partial^n \tilde{P}_i^*(\theta, z)}{\partial \theta^n}, \quad n \geq 0.$$

En la *Figura 3.7.1* se muestra el efecto de las intensidades  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  y  $\delta \in \mathbb{R}^+$  sobre la probabilidad  $P_0(1)$  cuando el aclarado se distribuye exponencialmente y  $(\alpha, \mu, \nu) = (3.0, 0.0, 7.1)$ . En la *Figura 3.7.2* se representa  $P_0(1)$ , como función de  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , en los siguientes casos:

- (I)  $\alpha = 3.0$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $\nu = 7.1$  y  $\delta = 0.1$ ,
- (II)  $\alpha = 3.0$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $\nu = 7.1$  y  $\delta = 1.0$ ,
- (III)  $\alpha = 3.0$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $\nu = 7.1$  y  $\delta = 1.5$ ,
- (IV)  $\alpha = 3.0$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $\nu = 7.1$  y  $\delta = 2.0$ .

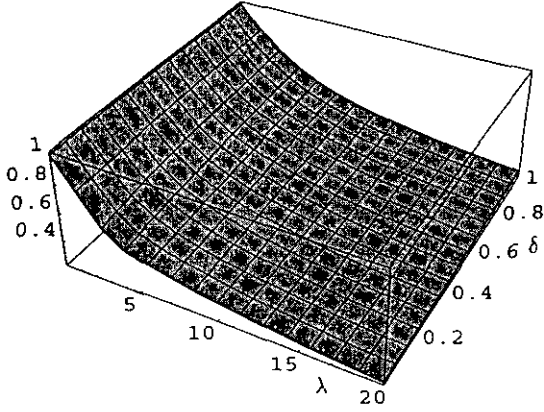


Figura 3.7.1. Efecto de  $\lambda$  y  $\delta$  sobre  $P_0(1)$

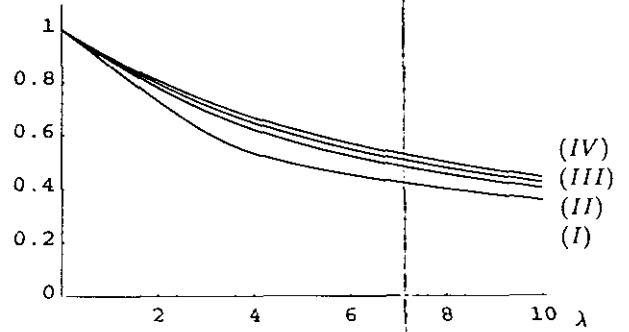


Figura 3.7.2. Efecto de  $\lambda$  sobre  $P_0(1)$

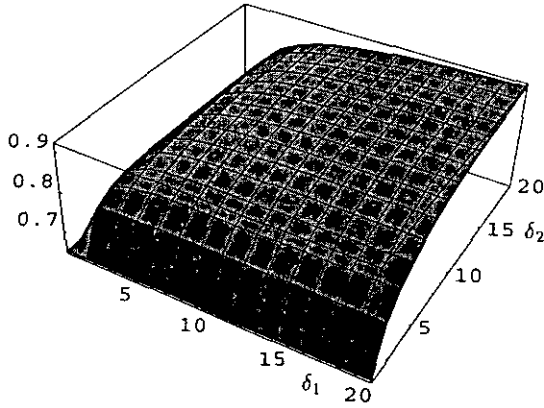


Figura 3.7.3. Efecto de  $\delta_1$  y  $\delta_2$  sobre  $P_0(1)$

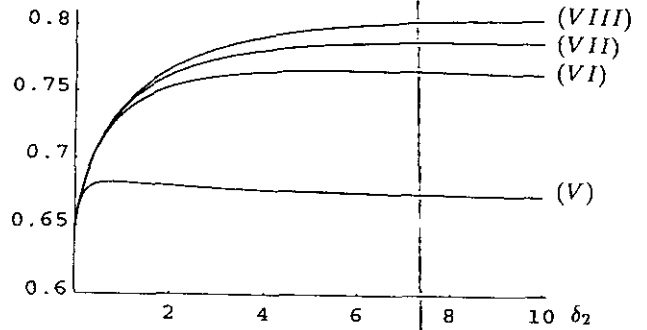


Figura 3.7.4. Efecto de  $\delta_2$  sobre  $P_0(1)$

El Ejemplo 3 es ilustrado con las Figuras 3.7.3 y 3.7.4. En la Figura 3.7.3 se muestra la variación de la probabilidad  $P_0(1)$ , en términos de los parámetros  $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$  y  $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ , cuando se asume la distribución hiperexponencial para el tiempo de aclarado y los parámetros  $(\lambda, \alpha, \mu, \nu, p_1) = (2.5, 3.0, 0.0, 7.1, 0.25)$ . Adicionalmente, la Figura 3.7.4 muestra el efecto de  $\delta_2$  sobre  $P_0(1)$ , en los siguientes casos:

- (V)  $\lambda = 2.5, \alpha = 3.0, \mu = 0.0, \nu = 7.1, p_1 = 0.25$  y  $\delta_1 = 0.1$ ,  
 (VI)  $\lambda = 2.5, \alpha = 3.0, \mu = 0.0, \nu = 7.1, p_1 = 0.25$  y  $\delta_1 = 1.0$ ,  
 (VII)  $\lambda = 2.5, \alpha = 3.0, \mu = 0.0, \nu = 7.1, p_1 = 0.25$  y  $\delta_1 = 1.5$ ,  
 (VIII)  $\lambda = 2.5, \alpha = 3.0, \mu = 0.0, \nu = 7.1, p_1 = 0.25$  y  $\delta_1 = 2.0$ .

### 3.7.2 Período de ocupación del sistema

Este epígrafe está dedicado al estudio de la distribución de la variable aleatoria  $L$  definida como la longitud del período de ocupación del sistema  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento y aclarado general.

A continuación se introducen algunas variables aleatorias y notaciones de interés en el cálculo de la transformada de Laplace-Stieltjes de  $L$ . Sea  $\tilde{L}$  la longitud del período de ocupación en el correspondiente sistema  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento en ausencia de desastres. La distribución de  $\tilde{L}$  puede ser expresada como

$$P(\tilde{L} > t) = P_\infty + (1 - P_\infty) \int_t^\infty f(u) du, \quad t \in (0, \infty),$$

donde  $P_\infty = P(\tilde{L} = \infty)$  y  $(1 - P_\infty)f(t)$  es la densidad asociada al punto  $t$ . Adicionalmente, sea  $A$  la variable aleatoria que gobierna el proceso de aclarado.

Obsérvese que  $L$  es el mínimo entre  $A$  y  $\tilde{L}$ , y que  $A$  y  $\tilde{L}$  son variables independientes. Por tanto, la situación es análoga a la descrita en el Apéndice 3.B, siendo posible deducir las siguientes relaciones:

$$E[e^{-\theta L} I_{\{\tilde{L} < A\}}] = (1 - P_\infty) \int_0^\infty e^{-\theta t} f(t)(1 - A(t)) dt, \quad \text{Re}(\theta) \geq 0, \quad (3.7.20)$$

$$E[e^{-\theta L} I_{\{\tilde{L} \geq A\}}] = \alpha(\theta) - (1 - P_\infty) \int_0^\infty f(t) \alpha_t(\theta) dt, \quad \text{Re}(\theta) \geq 0, \quad (3.7.21)$$

$$E[e^{-\theta L}] = \alpha(\theta) + (1 - P_\infty) \int_0^\infty f(t) (e^{-\theta t}(1 - A(t)) - \alpha_t(\theta)) dt, \quad \text{Re}(\theta) \geq 0, \quad (3.7.22)$$

donde  $\alpha_t(\theta) = \int_t^\infty e^{-\theta u} dA(u)$ .

El valor esperado  $E[L]$  es obtenido derivando la transformada  $E[\exp\{-\theta L\}]$ . A partir de (3.7.22), se tiene

$$E[L] = \alpha_1 + (1 - P_\infty) \int_0^\infty f(t) \left( t(1 - A(t)) - \int_t^\infty u dA(u) \right) dt. \quad (3.7.23)$$

Las integrales que aparecen en las expresiones (3.7.20)-(3.7.23) pueden ser notablemente simplificadas en el caso de algunas de las distribuciones de tiempo de aclarado más usuales. En los siguientes ejemplos se resumen las particularizaciones al caso exponencial, determinista, Coxian-2 y Erlang.

*Ejemplo 1.* Distribución exponencial. Se considera la función de distribución  $A(t) = 1 - e^{-\delta t}$ ,  $t > 0$ ,  $\delta > 0$ . Entonces, se obtienen

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\bar{L} < A\}} \right] &= \pi(\theta + \delta, 1), \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\bar{L} \geq A\}} \right] &= \frac{\delta(1 - \pi(\theta + \delta, 1))}{\theta + \delta}, \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E \left[ e^{-\theta L} \right] &= \frac{\theta\pi(\theta + \delta, 1) + \delta}{\theta + \delta}, \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E[L] &= \frac{1 - \pi(\delta, 1)}{\delta}, \end{aligned}$$

donde  $\pi(\theta, 1)$  es la transformada de  $\bar{L}$ .

*Ejemplo 2.* Distribución determinista. Si se asume que los intervalos de tiempo entre dos instantes de aclarado consecutivos tienen longitudes constantes,  $D > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\bar{L} < A\}} \right] &= (1 - P_\infty) \int_0^D e^{-\theta t} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\bar{L} \geq A\}} \right] &= e^{-\theta D} \left( 1 - (1 - P_\infty) \int_0^D f(t) dt \right), \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E \left[ e^{-\theta L} \right] &= e^{-\theta D} + (1 - P_\infty) \int_0^D f(t) (e^{-\theta t} - e^{-\theta D}) dt, \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E[L] &= D + (1 - P_\infty) \int_0^D f(t)(t - D) dt. \end{aligned}$$

*Ejemplo 3.* Distribución Coxian-2. Se considera la función de densidad

$$a(t) = p_1 \delta_1 e^{-\delta_1 t} + p_2 \delta_2 e^{-\delta_2 t}, \quad t > 0,$$

siendo  $\delta_1 > \delta_2 > 0$ ,  $p_2 = 1 - p_1$ ,  $p_1 = 1 - b\delta_1/(\delta_1 - \delta_2)$  y  $b \in [0, 1]$ . Entonces, se obtienen las transformadas

$$\begin{aligned} E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\bar{L} < A\}} \right] &= p_1 \pi(\theta + \delta_1, 1) + p_2 \pi(\theta + \delta_2, 1), \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\bar{L} \geq A\}} \right] &= p_1 \frac{\delta_1(1 - \pi(\theta + \delta_1, 1))}{\theta + \delta_1} + p_2 \frac{\delta_2(1 - \pi(\theta + \delta_2, 1))}{\theta + \delta_2}, \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E \left[ e^{-\theta L} \right] &= p_1 \frac{\theta\pi(\theta + \delta_1, 1) + \delta_1}{\theta + \delta_1} + p_2 \frac{\theta\pi(\theta + \delta_2, 1) + \delta_2}{\theta + \delta_2}, \quad \operatorname{Re}(\theta) \geq 0, \\ E[L] &= p_1 \frac{1 - \pi(\delta_1, 1)}{\delta_1} + p_2 \frac{1 - \pi(\delta_2, 1)}{\delta_2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Distribución Erlang. Sea la función de densidad

$$a(t) = \frac{\delta^m}{(m-1)!} e^{-\delta t} t^{m-1}, \quad t > 0,$$

siendo  $\delta > 0$  y  $m \geq 1$ . Entonces

$$E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\tilde{L} < A\}} \right] = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-\delta)^n}{n!} \pi^{(n)}(\theta + \delta, 1), \quad \text{Re}(\theta) \geq 0,$$

$$E \left[ e^{-\theta L} I_{\{\tilde{L} \geq A\}} \right] = \left( \frac{\delta}{\theta + \delta} \right)^m \left( 1 - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-(\theta + \delta))^n}{n!} \pi^{(n)}(\theta + \delta, 1) \right), \quad \text{Re}(\theta) \geq 0,$$

$$E \left[ e^{-\theta L} \right] = \left( \frac{\delta}{\theta + \delta} \right)^m + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-\delta)^n}{n!} \pi^{(n)}(\theta + \delta, 1) \left( 1 - \left( \frac{\delta}{\theta + \delta} \right)^{m-n} \right), \quad \text{Re}(\theta) \geq 0,$$

$$E[L] = \delta^{-1} \left( m(1 - \pi(\delta, 1)) - (1 - \delta_{1m}) \sum_{n=1}^{m-1} (m-n) \frac{(-\delta)^n}{n!} \pi^{(n)}(\delta, 1) \right),$$

donde

$$\pi^{(n)}(\theta, 1) = \frac{\partial^n \pi(\theta, 1)}{\partial \theta^n}, \quad n \geq 1.$$

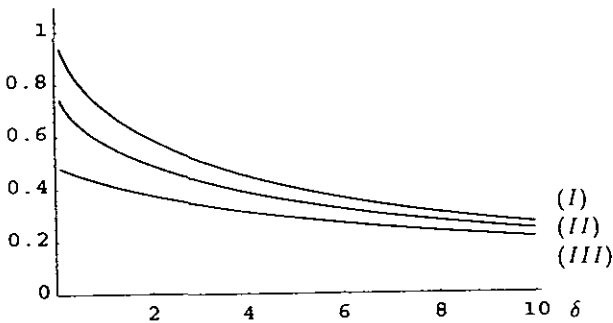


Figura 3.7.5. Probabilidad  $p_f$

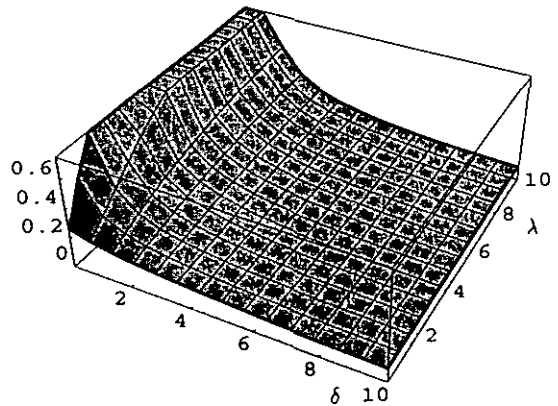


Figura 3.7.6. Valor esperado  $E[L]$

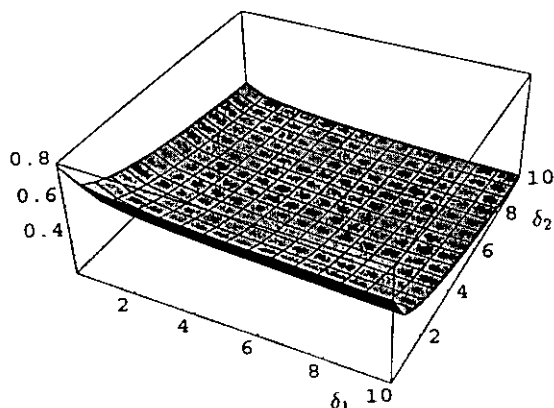


Figura 3.7.7. Probabilidad  $p_f$

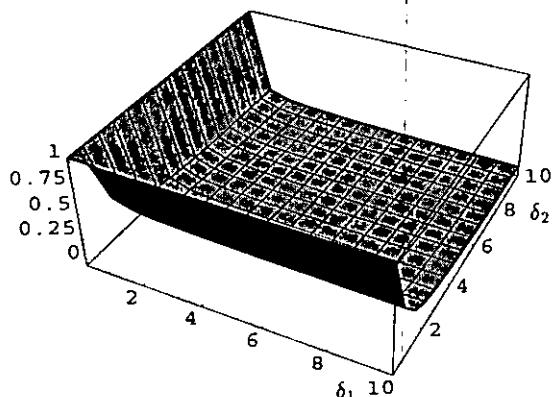


Figura 3.7.8. Valor esperado  $E[L]$

Como complemento a los anteriores ejemplos, en la *Figura 3.7.5* aparece representada la probabilidad de que un periodo de ocupación concluya en un instante de finalización de servicio,  $p_f$ , en un sistema con distribución exponencial de aclarado, en los siguientes casos:

- (I)  $\lambda = 1.0$ ,  $\alpha = 1.1$ ,  $\mu = 0.2$  y  $\nu = 4.0$ ,
- (II)  $\lambda = 2.5$ ,  $\alpha = 1.1$ ,  $\mu = 0.2$  y  $\nu = 4.0$ ,
- (III)  $\lambda = 5.0$ ,  $\alpha = 1.1$ ,  $\mu = 0.2$  y  $\nu = 4.0$ .

La *Figura 3.7.6* muestra el efecto de  $\lambda$  y  $\delta$  sobre el valor esperado  $E[L]$ , en el sistema con aclarado exponencial e intensidades  $(\alpha, \mu, \nu) = (1.1, 0.2, 4.0)$ .

El *Ejemplo 3* se ilustra con las *Figuras 3.7.7* y *3.7.8*, donde se representan  $p_f$  y  $E[L]$ , respectivamente, como funciones de  $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$  y  $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ , en el sistema con distribución de tiempo de aclarado hiperecponencial e intensidades  $(\lambda, \alpha, \mu, \nu, p_1) = (2.9, 2.1, 0.3, 3.7, 0.25)$ .

### 3.8 Comentarios y notas bibliográficas

Esta sección recoge algunos comentarios referidos a la bibliografía y técnicas empleadas en el análisis de los sistemas de colas  $M/G/1$  y  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintentos y dotados de mecanismos estocásticos de aclarado.

Primeramente será comentado el estudio del sistema  $M/G/1$  con reintentos  $(\alpha + j\mu, j \geq 1)$  y proceso de Poisson de llegada de desastres ( $\delta > 0$ ).

En el libro de Çinlar (1975) se exponen resultados generales que permiten asegurar la existencia de la distribución límite del proceso semi-regenerativo,  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ , mediante el estudio del proceso de renovación Markoviana encajado,  $(Q, \eta)$ . Es conveniente clasificar los estados de la cadena de Markov encajada,  $Q = \{Q_n, n \geq 0\}$ , haciendo uso de criterios basados en *tendencias medias* o, en otros términos, en la teoría de *funciones de Lyapunov*. Los principales resultados de esta teoría pueden ser encontrados en Foster (1953), Sennott y otros (1983) y Tweedie (1975).

La técnica usada en el estudio de la distribución límite del proceso  $Y$ , en la sección 3.3, ha sido el método de la *variable suplementaria* (ver Cox (1955)), empleado por primera vez en un sistema de colas con reintentos por Keilson y otros (1968). La inclusión de la variable aleatoria  $\xi(t)$  en el proceso no Markoviano inicial  $Y$  permite trabajar con el proceso Markoviano  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  y deducir expresiones para las funciones generatrices  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , asociadas a las sucesiones parciales  $\{P_{ij}\}_{j \geq 0}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ . En el caso  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , la aparición en (3.3.16)-(3.3.18) de la raíz  $\bar{z}$  de la función  $g$  en el punto  $(\omega, x) = (0, 1)$ , imposibilita la derivación de fórmulas cerradas para las transformadas  $P_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ . Siguiendo a Takács (1962) se ha propuesto una breve demostración para el *Lema 3.3.1* haciendo uso del *Teorema de Rouché*.

El método usado en la computación de la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$ , cuando el flujo de llegadas originales es un proceso Markoviano con intensidades dependientes del estado del sistema, está inspirado en los métodos algorítmicos desarrollados por de Kok (1984), posteriormente extendidos a sistemas de colas con reintentos más generales por Artalejo (1994) y Schellhaas (1986). En Tijms (1994) (capítulo 4) y Wolff (1989) (capítulo 11) pueden encontrarse síntesis de los algoritmos, los métodos aproximados y las cotas más usuales para un buen número de sistemas de colas, así como ejemplos numéricos ilustrando los procedimientos expuestos. En los estudios precedentes la estructura matricial de tipo  $M/G/1$  era preservada. La derivación del esquema recursivo propuesto en la sección 3.4 está basada en la teoría de *procesos regenerativos* (ver Sigman y Wolff (1993) y Stidham (1972)). El argumento fundamental consiste en analizar el número de transiciones entre diferentes conjuntos de estados durante un ciclo de regeneración y en el posterior uso de la propiedad *PASTA* (ver Wolff (1982)) para expresar sus valores medios. La experiencia numérica permite validar el esquema recursivo como un procedimiento numéricamente estable para computar la distribución límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  de sistemas  $M/G/1/K$ ,  $K \leq \infty$ , con reintentos ( $\alpha + j\mu$ ,  $j \geq 1$ ) y proceso de Poisson de llegada de desastres ( $\delta > 0$ ). La implementación de este esquema recursivo se ha realizado en *FORTTRAN77* (versión 5.1).

En Falin y Fricker (1991) se dió un importante avance en el análisis del tiempo virtual de espera en el sistema  $M/G/1$  con política clásica de reintento y disciplina aleatoria de acceso desde la órbita al servicio. Su técnica ha sido posteriormente empleada en modelos más generales (ver, por ejemplo, Choi y otros (1993)). En su derivación es fundamental el método de las *marcas colectivas*. En el capítulo 7 del libro de Kleinrock (1975) puede encontrarse una elegante descripción de las dos operaciones involucradas en esta técnica: la '*marca*' de los clientes; y la observación de los procesos de Poisson de llegada de '*catástrofes*'. Como se observa en la sección 3.5, el estudio de la distribución del tiempo de permanencia,  $W$ , en el sistema  $M/G/1$  con reintentos ( $\alpha + j\mu$ ,  $j \geq 1$ ) y mecanismo de aclarado, queda reducido al estudio de la distribución del tiempo de permanencia,  $\tilde{W}$ , en el correspondiente modelo en ausencia de desastres. Los argumentos dados en Falin y Fricker (1991) deben ser profundamente modificados cuando se asume la disciplina *FCFS* para el acceso de clientes desde la órbita al servicio. Debe notarse que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.5.19) contiene toda la información necesaria para determinar la transformada de Laplace-Stieltjes de  $W$ , cuando  $\lambda\beta_1 < 1 - \lambda\delta_0\mu/(\lambda + \alpha)$ . La solución en el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu = 0$  es sencilla; por contra, si se asume que  $\alpha \geq 0$  y  $\mu > 0$ , la computación efectiva de la transformada implica

un tremendo esfuerzo algebraico y la solución final resulta extremadamente compleja.

La sección 3.6 recoge el análisis de las principales características del período de ocupación del sistema mediante el cálculo de las transformadas  $\phi_f(\theta, \omega, x, y)$  y  $\phi_d(\theta, \theta, x, y)$ . El método analítico que permite calcular las transformadas  $\phi_f^k(\theta, \omega, x, y)$ ,  $k \geq 1$ , está inspirado en Falin (1990). La interpretación de la matriz  $M$  como un operador lineal acotado sobre el espacio de Banach  $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  se apoya en resultados expuestos en Ash (1972) y Griffel (1981). El cálculo de  $\phi_d(\theta, \theta, x, y)$  es equivalente al estudio del sistema  $M/G/1$  con reintentos  $(\alpha + j\mu, j \geq 1)$  en régimen no estacionario. Argumentos paralelos a los empleados para deducir (3.6.12) pueden ser usados para derivar la expresión matricial  $\tilde{\phi}_d(\theta, \theta, x, y) = M(\theta, x, y)\tilde{\phi}_d(\theta, \theta, x, y) + \tilde{N}(\theta, x, y)$ , donde  $\tilde{\phi}_d(\theta, \theta, x, y) = (\phi_d^1(\theta, \theta, x, y), \phi_d^2(\theta, \theta, x, y), \dots)'$ ,  $M(\theta, x, y)$  es construida de la forma usual y  $\tilde{N}(\theta, x, y)$  tiene todos los elementos no nulos. La naturaleza del vector  $\tilde{N}$  imposibilita el cálculo de  $\phi_d(\theta, \theta, x, y)$  mediante la aplicación del método analítico utilizado para determinar  $\phi_f(\theta, \omega, x, y)$ . La línea seguida en Falin (1979) muestra la existencia de un procedimiento alternativo de cálculo de  $\phi_f(\theta, \omega, x, y)$ , basado en el método de las marcas colectivas, donde tampoco es posible distinguir entre las variables  $L_0$  y  $L_1$ . La complejidad de las expresiones del Teorema 3.6.1 impide deducir los momentos de las variables  $(L_0, L_1, N_f, N_d)$  mediante derivación. Alternativamente, la teoría de los procesos regenerativos es la clave para obtener algunos valores medios dados en el Corolario 3.6.2. Posteriores trabajos pueden orientarse hacia el estudio de la distribución de la cantidad de trabajo inacabado  $U(t)$ . El análisis del sistema  $M/G/1$  con línea de espera y desastres ha sido realizado recientemente por Jain y Sigman (1996).

A continuación se ofrecen algunos comentarios relativos al sistema de colas  $M/M/1$  con disciplina lineal de reintento y mecanismo de aclarado general.

La existencia de la distribución límite del proceso regenerativo  $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ , en la sección 3.7.1, ha sido asegurada con la ayuda de los resultados del capítulo 9 de Çinlar (1975). El estudio de las probabilidades límite  $\{P_{ij}\}_{(i,j) \in \mathcal{E}}$  se reduce al análisis de la distribución dependiente del tiempo del proceso  $\tilde{Y} = \{\tilde{Y}(t), t \geq 0\}$ . La aplicación del método de las *marcas colectivas* al análisis de la distribución en régimen transitorio del vector  $(\tilde{C}(t), \tilde{Q}(t), \tilde{\xi}(t), \tilde{I}(t))$ , cuando  $\tilde{L} \geq t$ , está inspirada en el trabajo de Falin (1979).

Las observaciones recogidas en el Apéndice 3.B reducen el estudio de  $E[e^{-\theta L}]$  y  $E[L]$  al estudio del período de ocupación en el correspondiente sistema en ausencia de desastres.

La versión 2.2 de *Mathematica* (ver Castillo y otros (1994) y Ellis y Lodi (1990)) ha permitido ilustrar gráficamente el presente capítulo.

Los artículos publicados recientemente sobre modelos de colas con desastres (ver Chao (1995) y Jain y Sigman (1996)) no mencionan la literatura existente sobre sistemas de aclarado estocástico (ver Kim y Seila (1993), Stidham (1977) y sus referencias), aunque la relación entre ellos es obvia. De hecho, los sistemas de colas con llegadas negativas y con desastres pueden ser englobados en un mismo grupo. En particular, los conceptos de llegada negativa y de desastre pueden ser generalizados permitiendo que una llegada negativa destruya una cantidad aleatoria de trabajo, que no necesariamente corresponda al trabajo asociado a un número entero de clientes. Posiblemente la variable  $U(t)$  descrita en la sección 3.6 pueda ser estudiada, en términos de ecuaciones de Wiener-Hopf, siguiendo el método propuesto por Boucherie y Boxma (1995) para el sistema  $M/G/1$  con línea de espera. Una posible variante de los sistemas de colas analizados consiste en expulsar a un número aleatorio de clientes en los instantes de

finalización del servicio. El análisis de la distribución límite del sistema  $M/G/1$  con este tipo de estrategia de expulsión puede encontrarse en Bayer y Boxma (1995).

## APENDICE 3

### Apéndice 3.A. Existencia de la distribución límite del proceso $Y$ .

En este apéndice se demuestra que las probabilidades límite del proceso  $Y$  existen y son positivas cuando la cadena de Markov encajada  $Q$  es ergódica.

En primer lugar se propone la definición de función *integrable Riemann en sentido directo*. Sea  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función acotada sobre intervalos finitos. Para cada  $b > 0$  se definen los valores

$$\begin{aligned} \gamma'_b(n) &= \inf\{g(t), nb \leq t < (n+1)b\}, & n \geq 0, \\ \gamma''_b(n) &= \sup\{g(t), nb \leq t < (n+1)b\}, & n \geq 0. \end{aligned}$$

Adicionalmente, se denotan

$$\sigma'_b = b \sum_{n=0}^{\infty} \gamma'_b(n) \quad \text{y} \quad \sigma''_b = b \sum_{n=0}^{\infty} \gamma''_b(n).$$

Se dice que la función  $g$  es integrable Riemann en sentido directo si y sólo si  $\sigma'_b < \infty$ ,  $\sigma''_b < \infty$ , para cada  $b > 0$ , y  $\lim_{b \rightarrow 0} (\sigma''_b - \sigma'_b) = 0$ .

Para asegurar que existe la distribución límite del proceso  $Y$  cuando la cadena de Markov encajada  $Q$  es ergódica (ver el *Teorema 9.6.12* de Çinlar (1975)), es necesario comprobar que la función  $t \rightarrow K_t((i, j), (k, l))$ , para  $(i, j), (k, l) \in \mathcal{E}$ , es integrable Riemann en sentido directo. Para cada estado  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , se denotan  $P_{(i, j)}(\eta_1 > t) = P(\eta_1 > t / Y(0) = (i, j))$  y  $E_{(i, j)}[\eta_1] = E[\eta_1 / Y(0) = (i, j)]$ . Entonces, la función  $t \rightarrow P_{(i, j)}(\eta_1 > t)$  es monótona decreciente y  $\int_0^{\infty} P_{(i, j)}(\eta_1 > t) dt = E_{(i, j)}[\eta_1] < \infty$ , cuando  $\delta > 0$ . Dado que  $K_t((i, j), (k, l)) \leq P_{(i, j)}(\eta_1 > t)$  y  $K_t((i, j), (k, l))$  es integrable Riemann, se deduce que la función  $K_t((i, j), (k, l))$  es integrable Riemann en sentido directo, para cada  $(i, j), (k, l) \in \mathcal{E}$ .

Entonces, en virtud del *Teorema 9.6.12* de Çinlar (1975), se concluye que la ergodicidad de la cadena de Markov encajada  $Q$  implica la existencia de distribución límite del proceso  $Y$ .

### Apéndice 3.B. Distribución del mínimo de dos variables aleatorias independientes. Aplicación al tiempo de permanencia en el sistema.

En este apéndice se estudia la distribución del mínimo entre dos variables aleatorias independientes y continuas, cuando una de ellas no es necesariamente una variable aleatoria propia. Como aplicación, se deducen las expresiones (3.5.1)-(3.5.7) relativas al tiempo de permanencia  $W$  cuando el sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento es ergódico.

Se considera la variable aleatoria no negativa  $X$ , cuya distribución viene dada por

$$P(X > x) = P_{\infty} + (1 - P_{\infty}) \int_x^{\infty} f(u) du, \quad x \in (0, \infty), \quad (3.B.1)$$

donde  $P_\infty = P(X = \infty)$  y  $(1 - P_\infty)f(x)$  representa la *densidad* asociada al punto  $x$ . Análogamente, sea  $Y$  una variable aleatoria propia, no negativa, con distribución

$$P(Y > x) = \int_x^\infty g(u)du, \quad x \in (0, \infty). \quad (3.B.2)$$

Se define la variable  $U = \min(X, Y)$ . Entonces,  $U$  es una variable aleatoria continua con función de densidad  $h(x)$  dada por

$$h(x) = g(x) \left( P_\infty + (1 - P_\infty) \int_x^\infty f(u)du \right) + f(x)(1 - P_\infty) \int_x^\infty g(u)du. \quad (3.B.3)$$

Además, se tienen

$$P(U = Y) = P_\infty + (1 - P_\infty) \int_0^\infty P(Y < u)f(u)du, \quad (3.B.4)$$

$$P(U \leq x) = 1 - \left( P_\infty + (1 - P_\infty) \int_x^\infty f(u)du \right) \int_x^\infty g(u)du. \quad (3.B.5)$$

Si se asume que  $g(x) = \delta e^{-\delta x}$ ,  $x > 0$ ,  $\delta > 0$ , entonces una simple particularización de las expresiones (3.B.3)-(3.B.5) conduce a

$$h(x) = \delta e^{-\delta x} \left( P_\infty + (1 - P_\infty) \int_x^\infty f(u)du \right) + e^{-\delta x} f(x)(1 - P_\infty), \quad x \in (0, \infty), \quad (3.B.6)$$

$$P(U = Y) = P_\infty + (1 - P_\infty) \int_0^\infty (1 - e^{-\delta u})f(u)du, \quad (3.B.7)$$

$$P(U \leq x) = 1 - e^{-\delta x} \left( P_\infty + (1 - P_\infty) \int_x^\infty f(u)du \right), \quad x \in (0, \infty). \quad (3.B.8)$$

A partir de (3.B.6) se deduce que la transformada de Laplace-Stieltjes de  $U$  es

$$\beta_U(\theta) = (\theta + \delta)^{-1} \left( \delta + (1 - P_\infty)\theta \int_0^\infty e^{-(\theta+\delta)x} f(x)dx \right). \quad (3.B.9)$$

A continuación se particularizan las fórmulas anteriores al caso de la variable  $W$ . Para ello, se asume la ergodicidad del sistema  $M/G/1$  con disciplina lineal de reintento en ausencia de desastres ( $\delta = 0$ ). Si se satisface la condición  $\lambda\beta_1 < 1 - \lambda\delta_{0\mu}/(\lambda + \alpha)$ , entonces,  $\bar{W} < +\infty$  casi seguro. Entonces, se deducen las siguientes relaciones

$$h(x) = \delta e^{-\delta x} P(\bar{W} > x) + e^{-\delta x} f_{\bar{W}}(x), \quad x \in (0, \infty), \quad (3.B.10)$$

$$P(\bar{W} \geq Z) = 1 - \tilde{\beta}(\delta), \quad (3.B.11)$$

$$E[e^{-\theta W}] = \frac{\theta \tilde{\beta}(\theta + \delta) + \delta}{\theta + \delta}, \quad (3.B.12)$$

siendo  $f_{\tilde{W}}(x)$  la función de densidad de  $\tilde{W}$ .

Entonces, las expresiones (3.5.1)-(3.5.7) son consecuencia de (3.B.10)-(3.B.12).

## BIBLIOGRAFIA

- J.R. Artalejo (1994), New results in retrial queueing systems with breakdown of the servers, *Statistica Neerlandica* **48**, 23-36.
- R.B. Ash (1972), *Real Analysis and Probability*, Academic Press, Inc..
- N. Bayer and O.J. Boxma (1995), Wiener-Hopf analysis of an  $M/G/1$  queue with negative customers and of a related class of random walks, CWI Report BS-R9525, Amsterdam.
- R.J. Boucherie and O.J. Boxma (1995), The workload in the  $M/G/1$  queue with work removal, CWI Report BS-R9505, Amsterdam.
- E. Castillo, A. Iglesias, J.M. Gutierrez, E. Alvarez y A. Cobo (1994), *Mathematica*, Editorial Paraninfo.
- E. Çinlar (1975), *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- D.R. Cox (1955), The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **51**, 433-441.
- X. Chao (1995), A queueing network model with catastrophes and product form solution, *Operations Research Letters* **18**, 75-79.
- B.D. Choi, D.H. Han and G.I. Falin (1993), On the virtual waiting time for an  $M/G/1$  retrial queue with two types of calls, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* **6**, 11-23.
- R.E. Edwards (1980), *A Formal Background to Mathematics 2a. A Critical Approach to Elementary Analysis*, Springer-Verlag, New York.
- W. Ellis and E. Lodi (1990), *A Tutorial Introduction to Mathematica*, Brooks/Cole.
- G.I. Falin (1979), A single-line system with secondary orders, *Engineering Cybernetics Review* **17**, 76-83.
- G.I. Falin (1990), A survey of retrial queues, *Queueing Systems* **7**, 127-168.
- G.I. Falin and C. Fricker (1991), On the virtual waiting time in an  $M/G/1$  retrial queue, *Journal of Applied Probability* **28**, 446-460.
- F.G. Foster (1953), On the stochastic matrices associated with certain queueing problems, *Annals of Mathematical Statistics* **24**, 355-360.
- D.H. Griffel (1981), *Applied Functional Analysis*, Ellis Horwood Limited.
- G. Jain and K. Sigman (1996), A Pollaczek-Khintchine formula for  $M/G/1$  queues with disasters, *Journal of Applied Probability* (próxima aparición).
- J. Keilson, J. Cozzolino and H. Young (1968), A service system with unfilled requests repeated, *Operations Research* **16**, 1126-1137.
- K. Kim and A.F. Seila (1993), A generalized cost model for stochastic clearing systems, *Computers and Operations Research* **20**, 67-82.
- L. Kleinrock (1975), *Queueing Systems Vol.I: Theory*, Wiley-Interscience.
- A.G. de Kok (1984), Algorithmic methods for single server systems with repeated attempts, *Statistica Neerlandica* **38**, 23-32.
- M. Martin and A. Gomez-Corral (1995), On the  $M/G/1$  retrial queueing system with lineal control policy, *Top* **3**, 285-305.
- H. Schellhaas (1986), Computation of the state probabilities in a class of semi-regenerative queueing systems, in: *Semi-Markov Models: Theory and Applications* (J. Janssen ed.), Plenum Press, 111-130.
- L.I. Sennott, P.A. Humblet and R.L. Tweedie (1988), Mean drifts and the non-ergodicity of Markov chains, *Operations Research* **31**, 783-789.
- K. Sigman and R.W. Wolff (1993), A review of regenerative processes, *SIAM Review* **35**, 269-288.

- S. Stidham, Jr. (1972), Regenerative processes in the theory of queues, with applications to the alternating-priority queue, *Advances in Applied Probability* **4**, 542-577.
- S. Stidham, Jr. (1977), Cost models for stochastic clearing systems, *Operations Research* **25**, 100-127.
- L. Takács (1962), *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press.
- H.C. Tijms (1994), *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Wiley and Sons.
- R.L. Tweedie (1975), Sufficient conditions for regularity, recurrence and ergodicity of Markov processes, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **78**, 125-136.
- R.W. Wolff (1982), Poisson arrivals see time averages, *Operations Research* **30**, 223-231.
- R.W. Wolff (1989), *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice-Hall.

# Índice de materias

## C

Cadena encajada, 20, 54, 81  
Camino aleatorio, 29, 32, 34  
Clasificación de estados, 3, 19, 21, 69  
Clientes heterogéneos, 5  
Clientes no persistentes, 5, 20  
Clientes prioritarios, 5  
Comienzo del servicio, 20, 64, 71  
Criterio de Foster, 117, 164

## D

Descomposición estocástica, 3, 71, 108, 109  
Disciplina clásica de reintento, 4, 20, 109  
Disciplina constante de reintento, 4, 20, 25, 28, 39, 59, 61, 67, 68, 72, 109, 112, 136  
Disciplina *FCFS*, 8, 19, 28, 70, 131  
Disciplina lineal de reintento, 5, 19, 20, 39, 47, 50, 51, 52, 68, 76, 78, 85, 111, 115, 132, 137  
Distribución Binomial, 35  
Distribución Binomial Negativa, 34  
Distribución Coxian-2, 128, 158, 161  
Distribución Determinista, 128, 158, 161  
Distribución Exponencial, 101, 127, 158, 161  
Distribución Erlang, 103, 128, 158, 162  
Distribución Gamma, 31  
Distribución Hiperexponencial, 105, 128, 159  
Distribución límite, 3, 9, 19, 21, 23, 25, 26, 85, 86, 109, 116, 118, 155

## E

Ecuación integral de Fredholm, 9, 85, 90, 107  
Ergodicidad, 19, 21, 25, 26, 28, 33, 35, 53, 60, 64, 96, 117, 132

Error relativo, 101  
Espacio de Banach, 145, 165  
Espacio de estados, 20, 86, 116, 154  
Estrategia *RCE*, 8, 9, 19, 28, 70, 85, 86  
Explosividad, 22, 70

## F

Finalización del servicio, 19, 20, 53, 54, 58, 60, 71  
Fórmula de Little, 37  
Función Beta incompleta, 70  
Función de Dirac, 37, 62  
Función de impulso unitario, 37  
Función de Kronecker, 20  
Función generatriz, 23, 40, 55, 59, 88, 93, 109, 119, 135, 149, 153  
Función modificada de Bessel, 31, 34, 65, 100

## G

Generador infinitesimal, 21

## I

Identidad de Wald, 98, 126  
Input cuasi-aleatorio, 96, 124  
Integrabilidad Riemann en sentido directo, 116  
Inversión de transformadas, 34, 37, 38, 62

## L

Línea de espera clásica, 38, 64, 98

## Ll

Llegadas en grupo, 5

Llegadas negativas, 7, 19, 20, 39, 85

## M

Método de la variable suplementaria, 86, 107, 118, 164

Método de las catástrofes, 133, 149

Método de las marcas colectivas, 156, 164, 165

Momentos factoriales, 19, 23, 24, 25, 26, 43, 49, 58, 59, 70, 111

## N

Norma del supremo, 145

Número de clientes expulsados, 39, 43, 49, 75, 77, 142, 153

Número de clientes servidos, 39, 43, 50, 75, 77, 142, 153

## O

Operador lineal, 145, 165

Orbita, 2, 20, 65, 96, 116

## P

Período de ocupación, 4, 19, 39, 43, 48, 49, 74, 76, 116, 142, 152, 160

Principio de reflexión, 32

Proceso de Markov, 19, 98, 124

Proceso de nacimiento y muerte, 19, 22, 24

Proceso de Poisson, 20, 86, 116

Proceso estándar, 20

Proceso regenerativo, 53, 54, 70, 85, 96, 108, 124, 154, 164, 165

Proceso semi-regenerativo, 116

Propiedad *PASTA*, 96, 108, 124

## R

Recurrencia nula, 21

## S

Serie hipergeométrica, 22, 23, 26, 51, 54, 61, 62, 63,

67, 71, 72

Sistema de aclarado estocástico, 9, 115, 154, 165

Sistema de colas  $G/M/1$ , 6

Sistema de colas  $M/G/1$ , 85, 115

Sistema de colas  $M/M/1$ , 19, 64, 116, 154

Sistema de colas  $M/M/c$ , 6

## T

Tendencias medias, 117, 164

Teorema de Rouché, 120, 164

Test de comparación por paso al límite, 23

Test de Raabe, 23, 25, 58, 59, 63

Test del cociente, 23, 25, 52, 58, 59, 63, 72

Tiempo de espera, 3, 37

Tiempo de permanencia, 8, 19, 28, 36, 38, 70, 116, 131

Transformada de Laplace-Stieltjes, 29, 34, 35, 60, 61, 64, 86, 90, 116, 132, 149, 155, 160

Transitoriedad, 21