UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

TESIS DOCTORAL

Valores monótonos para juegos con cooperación imperfecta

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Daniel Martín García

Director

Conrado Miguel Manuel García

Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Estudios Estadísticos

Departamento Estadística y Ciencia de los Datos

VALORES MONÓTONOS PARA JUEGOS CON COOPERACIÓN IMPERFECTA

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Daniel Martín García

Bajo la dirección del doctor

Conrado Miguel Manuel García

12 de Mayo de 2021

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Estudios Estadísticos

Departamento Estadística y Ciencia de los Datos

VALORES MONÓTONOS PARA JUEGOS CON COOPERACIÓN IMPERFECTA

Daniel Martín García

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencia de los Datos, realizada bajo la dirección del Dr. D. Conrado M. Manuel García

Madrid, 2021

Agradecimientos

No hay grandeza donde faltan la sencillez, la bondad y la verdad.

Leon Tolstoi

El origen inmediato de esta memoria se puede situar hace cuatro años, cuando decidí comenzar mi camino como investigador. Fue entonces, el momento en el que me inscribí en el programa de Doctorado de la Facultad de Estudios Estadísticos, a la que más adelante dedicaré unas palabras de agradecimiento. No obstante, fue mucho antes cuando mi vida empezó a encarrilarse hacia la investigación. No puedo fijar una fecha exacta de cuando empecé a sentir entusiasmo por el desafío de enfrentarme a un reto mental. Pero sin dudar, puedo identificar quien fue mi principal ejemplo de tal entusiasmo, pues recuerdo con gran nitidez cómo mi madre podía (y puede) estar horas (y días) buscando la solución a cualquier *rompecabezas* que se encontrase. También recuerdo con gran claridad cómo siendo yo un niño muy pequeño mi madre me ayudaba con los deberes escolares de matemáticas (entre otros), contagiándome desde que tengo memoria su gusto por esta ciencia exacta. Es por ello, que desde que supe que podía dedicar mi vida a *'resolver rompecabezas'* decidí que quería ser investigador.

Dicho esto, es para mi muy importante agradecer, como adelantaba antes, haber *caído* en la Facultad de Estudios Estadísticos ya que, fue aquí donde me he sentido más valorado como estudiante.

Me gustaría resaltar que este trabajo no hubiera sido posible sin el incansable apoyo de mi tutor Conrado Miguel Manuel García, quien ha sabido guiar diligentemente mis primeros pasos en este camino investigador, por lo que le agradezco su infinita entrega y paciencia en la dirección de esta memoria. Y, también le agradezco que me mostrase el tipo de profesor que quiero llegar a ser.

Quiero agradecer también a Javier Castro y Rosa Espinola la ayuda e interés que llevan años ofreciéndome. También me gustaría expresar mi sincera gratitud a mis compañeros: Guillermo Villarino, por ser mi referente más cercano desde mi llegada a la Universidad y a Inma, por estar ahí.

Pero por encima de cualquier persona, se lo quiero agradecer a mis padres, cuya dedicación a sus hijos siempre ha sido plena. En especial a mi madre, a quien dedico esta memoria que simboliza el final de mi formación académica, por - como ya mencioné antes - contagiarme desde que tengo uso de razón, su amor por las matemáticas.

Resumen

Valores monótonos para juegos con cooperación imperfecta

La Teoría de Juegos adquiere cada vez mayor relevancia en el mundo actual. El éxito durante las últimas décadas y el interés que despierta esta disciplina es algo que visto con perspectiva parece deberse a su utilidad y versatilidad en el análisis de la toma de decisiones estratégicas. Crece constantemente la variedad de escenarios en los que el ser humano ha empezado a darse cuenta de que tenía que pensar formal y sistemáticamente sobre las interacciones estratégicas. En los últimos tiempos, esta área de las matemáticas y de la economía ha recibido un gran respaldo por parte del mundo académico, al recibir el Premio Nobel de Economía numerosos investigadores en Teoría de Juegos.

Existen dos categorías claramente diferenciadas en la Teoría de Juegos que nacen de la naturaleza del juego que se estudie. Se encuentra por un lado la de los juegos no cooperativos, y por otro, la de los cooperativos, siendo estos últimos el marco de la presente memoria. Dicha diferenciación se lleva a cabo, en función de sí es permitida, o no, la cooperación entre los agentes del juego. Los resultados que obtendremos en este trabajo tienden un puente entre ambos tipos de juegos.

En esta memoria tratamos en primer lugar con juegos cooperativos en los cuales, posiblemente los jugadores tengan diferentes niveles de cooperación o diferente disponibilidad para la cooperación o diferente habilidad de regateo o que pueden hacer esfuerzos diferentes en cooperar. Es decir, para nosotros, en los juegos cooperativos los jugadores no tendrán necesariamente voluntad total de cooperación sino que su interés en ella esta matizado a través de un valor en el intervalo $[0, 1]$. El valor 1 estará asociado a un jugador con interés total en la cooperación (un jugador tipo en los juegos cooperativos clásicos) y, en el otro lado del espectro, el valor 0 representará una capacidad nula de cooperación. Valores intermedios modulan el interés en la cooperación. Entonces, proponemos modificar el juego cooperativo original para tener en cuenta las habilidades cooperativas de los jugadores. Supondremos que, como consecuencia de los diferentes niveles de cooperación, cada coalición con dos o más jugadores retiene solo una proporción de su dividendo. Nuestra propuesta, convenientemente motivada, es que esta proporción es el mínimo de las habilidades de cooperación de sus miembros. Por supuesto, para coaliciones individuales el dividendo no debe verse alterado puesto que

cada jugador siempre estará de acuerdo consigo mismo. Entonces, proponemos como solución puntual para estas situaciones el valor de Shapley del juego modificado. Esta regla de reparto, -un nuevo tipo de valor de Shapley ponderado- es ineficiente, lo que se justifica por la cooperación imperfecta. La regla de asignación definida satisface algunas propiedades interesantes. En particular, para juegos superaditivos, incrementando el peso de un jugador, no decrece su valor. Además, se obtienen diferentes caracterizaciones para esta regla, paralelas a las más prominentes en la literatura del valor de Shapley.

Otro de los objetivos de esta memoria es extender el valor de Myerson a situaciones en las cuales los jugadores tienen sus posibilidades de cooperación restringidas por un grafo y, además, diferentes habilidades de regateo, diferente poder de negociación, diferentes niveles de cooperación o desean llevar a cabo diferentes esfuerzos en la cooperación. La solución propuesta extenderá el valor de Myerson y, por tanto, el valor de Shapley. Como en el caso de los juegos cooperativos sin restricciones en la comunicación modelamos la habilidad de regateo o el nivel de cooperación de cada jugador a través de un peso en el intervalo $[0, 1]$. Siguiendo los pasos de Myerson, modificamos el juego cooperativo original a un nuevo juego el cual es, a su vez, una modificación del juego restringido al grafo de Myerson. Asumiremos que la eventual imperfección de la cooperación de los jugadores implica que estos no pueden obtener todo su dividendo en el juego de Myerson. Entonces proponemos descontar los dividendos de las coaliciones no unitarias multiplicándolos por un factor que depende de los pesos de los jugadores en la coalición, de hecho, el mínimo de tales pesos. Naturalmente, los dividendos de las coaliciones unitarias no se ven afectados dado que cada jugador esta dispuesto a cooperar consigo mismo. Entonces, el grafo establece posibles canales de comunicación, y los pesos modulan el deseo de los jugadores en utilizar los canales abiertos. Proponemos como solución para estas situaciones el valor de Shapley del juego modificado, lo que supone una generalización del valor de Myerson.

El valor obtenido satisface algunas de las propiedades clásicas del valor de Myerson (equidad y contribuciones equilibradas) así como monotonía en las habilidades de negociación y también contribuciones equilibradas en las capacidades de regateo (el daño causado por un jugador a otro, al anular éste su poder de negociación, es simétrico). Sin embargo, una consecuencia natural de descontar el dividendo es la pérdida de eficiencia, que es consistente con la cooperación imperfecta de los jugadores. Entonces, el valor definido no satisface la clásica eficiencia en componentes conexas de Myerson, sino que debe ser reformulada como eficiencia en componentes conexas de negociación. Finalmente, caracterizamos el valor definido de manera paralela al valor de Myerson: usando eficiencia en componentes conexas de negociación y equidad, propiedad que puede ser remplazada por contribuciones equilibradas o contribuciones equilibradas en habilidades de negociación para obtener diferentes caracterizaciones.

Abstract

Monotonous values for games with imperfect cooperation

In last decades, game theory has become increasingly popular. Its usefulness in the analysis of strategic decision making have provided it a great success, so many researchers have focused their attention on this versatile tool. In the field of analysis of strategic decision making, the variety of scenarios constantly grows. Hence, scientists have realized the need for a formal and systematic modeling of strategic interactions. In last times, this area of mathematics and economics has received a great deal of support from the academic world. For example, many game theory experts have received the Nobel Price.

In the field of game theory, two categories can be clearly differentiated. Both depend on the nature of the problem addressed. One of these categories is about non-cooperative games. On the other hand, we contemplate the case of cooperative games, which is the framework of this report. This classification is carried out depending on whether cooperation between the agents of the game is allowed or not.

The first approach of this report is about TU games. In this type of problems, we will assume that players may have several levels of cooperation or different availability for cooperation. Then, we work under the assumption that, in the field of TU games, players do not have to have a total willingness to cooperate. Indeed, their interest cooperation is measured or quantified by means of a value in the range $[0, 1]$. The highest value, 1, is associated with a player who is absolutely interested in cooperation (a typical player in classic TU games). On the contrary, the 0 value represents a null capacity for cooperation. Any intermediate value modulates the interest in cooperation. Then, we propose a modification of the original TU game, in order to take into account the cooperative skills of each player. We assume that, as a result of different levels of cooperation, each coalition with two or more players retains only a proportion of their dividend. In our proposal, this proportion is suggested to be the minimum of the cooperation skills of its members. Needless to say, the dividend should not be altered for individual coalitions, since each player always agrees with himself. So, we propose as a point-solution for these situations the Shapley value of the modified game. This distribution rule -a new type of weighted Shapley value- is inefficient. It is justified by imperfect cooperation. The defined assignment rule satisfies

some interesting properties. Particularly, for superaditive games, increasing the weight of a player his value is not reduced. Furthermore, we introduce several characterizations of this rule, that are parallel to the most prominent in Shapley's value literature.

Another important objective of this report is to extend the Myerson value to situations in which players have their cooperation possibilities restricted by a graph, apart from different bargaining skills, different bargaining power, different levels of cooperation or maybe they want to make different efforts in cooperation. The proposed solution will extend the value of Myerson and the value of Shapley. As in the case of TU-games without restrictions on communication, we model the bargaining ability or the level of cooperation of each player by means of a value in the interval $[0, 1]$. According to the process proposed by Myerson, we modify the original TU game. This new game is a modification of the graph-restricted game of Myerson. We assume that the eventual imperfections of the players' cooperation imply that they cannot obtain their full dividend in the Myerson game. Then, we propose to obtain the dividends from non-unit coalitions, by multiplying them by a factor that depends on the weights of the players in the coalition. Particularly, we propose the use of the minimum of such weights. Naturally, each singleton coalition dividend is not affected, since each player is willing to cooperate with himself. Then, the graph establishes possible communication channels, and the weights modulate the desire of the players to use the open channels. We propose as a solution for these situations the Shapley value of the modified game.

The value obtained satisfies some of the classic properties of the Myerson value (fairness and balanced contributions), as well as monotony in the negotiation skills and also balanced contributions in the bargaining abilities (the damage caused by one player to another, when he annuls his bargaining power, is symmetric). However, as a natural consequence of discounting the dividend, there is a loss of efficiency, which is consistent with the imperfect cooperation of the players. Thus, the defined value does not satisfy the classic efficiency in connected components of the Myerson value. Then, it has to be reformulated as efficiency in bargaining connected components.

Finally, we characterize this value as it was done with Myerson value. We use the efficiency in related negotiation components and equity. This property can be replaced by balanced contributions or balanced contributions in negotiation abilities to obtain different characterizations.

Índice

Capítulo 1

Introducción

En algún lugar, alguna cosa increíble aguarda a ser descubierta.

Carl Sagan

Etimológicamente la palabra *juego* procede del latín *'iocus'*, cuyo significado es *broma, chanza, gracia o chiste.* En su origen esta palabra hacía referencia a una actividad inherente al ser humano y podemos encontrar términos con similar significado en cualquiera de los idiomas y culturas de la humanidad. La definición académica (RAE) afirma que un juego es una *"actividad recreativa física o mental en la que compiten dos o más personas sometiéndose a unas reglas".* Por tanto hace referencia a un divertimento pero, por otro lado, también a aquellas actividades en las que los participantes están sometidos a reglas que se deben cumplir. En los juegos cada jugador intenta conseguir el mejor resultado posible (maximizar su utilidad), pero asumiendo que el resultado del juego depende no sólo de sus acciones, sino también de cómo actúe el resto de los jugadores.

La Teoría de Juegos es una disciplina de las matemáticas aplicadas y de la economía que se ocupa del análisis riguroso y sistemático de los juegos, entendiendo por juego, como se ha descrito anteriormente, toda situación en la que los participantes deben tomar decisiones que optimicen sus ganancias, respetando las reglas establecidas, y asumiendo que el resto de los jugadores también condiciona el resultado con sus decisiones. Así pues, la Teoría de Juegos bien podría llamarse la teoría de las decisiones interactivas. Múltiples situaciones de interés para la economía y para otras ciencias (como sociología o ciencia política) comparten este esquema de toma de decisiones interactivas.

El campo de estudio de la Teoría de Juegos es muy general, no es preciso que haya entretenimiento, pero sí interacción. Las aplicaciones mejor estudiadas de la Teoría de Juegos suponen que los jugadores son agentes (personas, empresas, gobiernos, etc.) racionales, es decir, tienen capacidad de razonamiento y de cálculo para identificar las acciones y estrategias que les conduzcan a los resultados más deseables, y actuarán siempre tratando de maximizar su utilidad.

Esta rama de las matemáticas nació a mediados del siglo pasado cuando Von Neumann y Morgenstern publicaron su célebre *Game Theory and Economic Behaviour* en 1944, aunque hay trabajos anteriores como los de los matemáticos Zermelo (1913), Borel (1921) y el de Von Neumann (1928), en los que se anticipa parte de la base de la Teoría de Juegos. Von Neumann y Morgenstern desarrollaron los pilares de lo que actualmente se conoce como Teoría de Juegos clásica, ofreciendo una solución a los juegos bipersonales de suma cero. En ellos los participantes o jugadores se encuentran en una situación de conflicto absoluto, dado que la ganancia o pérdida de un participante se equilibra con exactitud con las pérdidas o ganancias del resto de jugadores. También establecieron la base para el análisis de juegos con más de dos jugadores. Posteriormente, llegada la década de los años 50, el matemático Nash definió el equilibrio que lleva su nombre y su famoso esquema de regateo. También Shapley (1953) introdujo su célebre valor. Además, estos conceptos sirven para un abanico más amplio de juegos, no solo para aquellos que son modelizados como un conflicto puro. Ya en los años 70 investigadores como Harsanyi (en los juegos con información incompleta), Selten (en los juegos dinámicos) o Myerson (en los juegos con restricciones en la comunicación) introdujeron conceptos de suma importancia que fructificaron en el análisis de la economía u otras disciplinas.

En los últimos tiempos, esta área de las matemáticas y de la economía ha recibido un gran respaldo por parte del mundo académico, al recibir el Premio Nobel de Economía numerosos investigadores en Teoría de Juegos. En 1994 la Real Academia Sueca de las Ciencias otorgó el premio Nobel de Economía a John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten por su papel pionero en el análisis de los equilibrios en el marco la Teoría de Juegos. Hubo que esperar una década para que se volviese a otorgar el Premio Nobel de Economía a dos investigadores en esta disciplina: Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling. El comunicado oficial establece como méritos para el galardón *"haber aumentado nuestra comprensión del conflicto y la cooperación a través del análisis de la Teoría de Juegos"*. Más concretamente, dichos autores aplicaron la Teoría de Juegos al análisis de estrategias en situaciones de conflicto y las ventajas de la cooperación frente a la confrontación en relaciones a largo plazo. La Teoría de Juegos se ha convertido en materia tan imprescindible en el análisis económico que no se considera ya como algo separado de otras forma de estudio, sino que es una herramienta de uso cotidiano para muchos economistas. Existen otras aportaciones galardonadas con el Premio Nobel de Economía apoyadas fuertemente en la Teoría de Juegos. En el periodo de 1994 a 2005 diferentes investigadores recibieron el premio Nobel por contribuciones vinculadas con el enfoque de la Teoría de Juegos. Este es el caso de William Vickrey, a quien se le concedió, junto con James Mirrlees, el Premio en 1996 por sus trabajos sobre la teoría económica de los incentivos bajo información asimétrica. Lo mismo puede decirse de Joseph Stiglitz, George Akerlof y Michael Spence, que fueron galardonados en 2001 por sus análisis de los mercados con información asimétrica. Roger Myerson trabajó refinando la teoría del diseño de los mecanismos que desempeña un papel clave en las relaciones políticas y económicas y que había sido formulada a partir de 1960 por Leonid Hurwicz. Junto a éste y Eric Maskin, obtuvo el galardón en 2007. Por último, mencionamos al principal referente de la presente memoria (junto con Myerson), Lloyd Shapley, quien ha sido considerado por muchos expertos como la personificación misma de la Teoría de Juegos. Junto a Alvin E. Roth, fue laureado con el Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel en 2012.

El éxito durante los últimos 70 años y el interés que despierta la Teoría de Juegos es algo que, visto con perspectiva, parece deberse a su versatilidad y utilidad en el análisis de la toma de decisiones estratégicas. Como explica Rakesh Vohra, profesor de Economía en la Universidad de Pensilvania y alto miembro de la Sociedad de la teoría de los juegos: *"La principal razón de su éxito fue la variedad de escenarios en los que la gente empezó a darse cuenta de que tenía que pensar formal y sistemáticamente sobre las interacciones estratégicas"*.

Existen dos categorías claramente diferenciadas en la Teoría de Juegos que nacen de la naturaleza del juego que se estudie. Se encuentra, por un lado, la de los juegos no cooperativos, que son aquellos en los que hay una descripción exhaustiva del entorno estratégico (conjunto de acciones, orden y consecuencias de las mismas) y en los que no se permite ni comunicación, ni negociación ni acuerdos vinculantes entre los agentes. Por otro lado se encuentran los juegos cooperativos (el trabajo y desarrollo llevado a cabo en esta memoria se centra en el estudio de este segundo tipo de juegos), en los que se reduce notablemente la información estratégica de los diferentes jugadores, centrándonos únicamente en los pagos (representados por un número real) que cada coalición puede asegurarse si los miembros de la misma aceptan cooperar.

Un juego cooperativo de utilidad transferible describe una situación en la cual los actores o jugadores pueden obtener cierto pago o beneficio transferible por medio de la cooperación. Matemáticamente un juego cooperativo consiste en un conjunto de jugadores y una función característica que asigna a cada subconjunto de ellos (coalición) un número real que representa la ganancia o valor alcanzable por ellos si deciden cooperar.

El desarrollo de la teoría de los juegos cooperativos, desde su introducción por Von Neumann y Morgenstern (1944), ha sido profundo, estando con frecuencia centrado en analizar conceptos de solución, es decir, formas de repartir las ganancias en el juego entre los diferentes actores. Sin entrar a exponer la gran cantidad de resultados obtenidos en esta linea, sí vamos a citar el que posiblemente es el concepto de solución más prominente, el valor de Shapley, por su importancia, como se ha dicho, y porque está relacionado estrechamente con esta memoria. Shapley introdujo en 1953 una regla de asignación para los jugadores en un juego cooperativo que está ampliamente aceptada. Bajo este reparto cada jugador recibe una combinación lineal convexa de sus contribuciones marginales, es decir, del superávit que genera en las diferentes coaliciones cuando se incorpora a ellas. Shapley (1953) además caracterizó su reparto mediante axiomas atractivos que Shubik (1962) popularizó como linealidad, simetría, jugador nulo y eficiencia. Desde este punto de partida, la importancia y aplicabilidad del valor siempre ha aumentado, en parte debido a múltiples enfoques, desde diferentes ángulos, para obtener caracterizaciones que nos permiten comprender el valor en mayor profundidad. Varias de estas caracterizaciones axiomáticas (en el conjunto de todos los juegos cooperativos) aparecen, por ejemplo, en Shubik (1962), Myerson (1980), Young (1985; 1994), Hart y Mas-Colell (1989), Chun (1989), Feltkamp (1995), Hamiache (2001), van den Brink (2001), Kongo, Funaki y Tijs (2007) o Manuel, González-Arangüena y van den Brink (2013). Dubey (1975) lo caracterizó en la importante clase de los juegos simples, Neyman (1989) en la clase generada por un solo juego; Algaba, Bilbao, van den Brink y Jiménez-Losada (2003) sobre la clase de juegos cooperativos definidos en antimatroides, Grabish y Lange (2007) sobre juegos de multi-elección y Khmelnitskaya y Yanovskaya (2007) en juegos con estructura de coalición. Albizuri (2010) adapta la caracterización axiomática del valor de Myerson para definir una extensión del valor de Shapley a juegos cooperativos con externalidades. Winter (2002) proporciona un estudió notable sobre el valor de Shapley, que se centra en aspectos técnicos, como la axiomatización. Moretti y Patrone (2008) presentan una excelente colección de aplicaciones. Una colección de recientes resultados tanto teóricos como aplicados están recogidos en el Handbook of the Shapley Value publicado por Algaba, Fragnelli y Sánchez-Soriano (2019). Owen (1972) introdujo las extensiones multilineales de los juegos cooperativos para simplificar el cálculo del valor de Shapley. Con este mismo propósito Castro, Gómez y Tejada (2009) desarrollaron un método polinómico para estimar el valor de Shapley basado en muestreo estadístico.

Las aplicaciones del valor de Shapley, como se mencionaba anteriormente, no han parado de crecer desde su origen. Y, el abanico temático que engloban es muy extenso y variado. Algunas de las más actuales en el marco de las matemáticas aplicadas y la economía se pueden encontrar en, por ejemplo, Hajibagheri, Alvari, Hamzeh y Hashemi (2012), Muros, Maestre, Algaba, Alamo y Camacho (2014), Gallardo, Jiménez y Jiménez-Losada (2016), Song, Seol y Park (2016), Ordoñez y Jiménez-Losada (2017) o Bilbao, Jiménez-Losada y Ordoñez (2019). Las aplicaciones de la Teoría de Juegos y, más específicamente, del valor de Shapley, atañen a un amplio espectro temático y no solo, al marco matemático-económico propio de la investigación operativa. Algunas de estas otras aplicaciones se pueden encontrar en temas como la epidemiología, en estudios como los de Cox (1985), Land y Gefeller (1997; 2000), Gefeller, Land y Eide (1998) y Kargin (2005). Otros temas en los que se pueden encontrar aplicaciones del valor de Shapley son entre otros, la biología molecular, la genética y la biodiversidad. Algunos de los trabajos que conciernen a estos temas son, por ejemplo, los de Weitzman (1998), Keinan, Sandbank, Hilgetag, Meilijson y Ruppin (2004), Kaufman, Kupiec y Ruppin (2004), Kaufman, Keiman, Meilijson, Kupiec y Ruppin (2004), Hartmann y Steel (2006), Moretti, Patrone y Bonassi (2007) y Haake, Kashiwada y Su (2008). Las aplicaciones del valor de Shapley, como se mencionaba anteriormente, no ha parado de crecer, surgiendo constantemente nuevos temas en los que ser utilizado. Uno de estos temas más recientes es, por ejemplo, los juegos de atribución en el entorno de páginas web, abordado en trabajos más recientes como los de Zhao, Mahboobi y Bagheri (2018), Singal, Besbes, Desir, Goyal y Iyengar (2019), Du, Zhong, Nair, Cui y Shou (2019) y Molina, Tejada y Weiss (2020), entre otros.

En sus inicios la Teoría de Juegos cooperativos asumió la ausencia de diferenciación en los jugadores. Todos los jugadores eran tratados como idénticos salvo por la información que aporta la función característica de un juego cooperativo acerca de lo que cada coalición de jugadores puede ganar o debe pagar (según sea un juego de beneficios o costes, respectivamente). Sin embargo, en muchas aplicaciones la suposición de que, con excepción de los parámetros del juego, los jugadores son completamente simétricos, parece poco realista. Así, el uso de generalizaciones no simétricas del valor de Shapley fue propuesto para tales casos.

El primer autor que trata de analizar este nuevo enfoque en el que los jugadores pueden presentar diferencias entre ellos por su naturaleza como individuos o por su participación en el juego fue Shapley, quien ya en su tesis doctoral estudió la regla que hoy conocemos como el valor de Shapley ponderado (1953a). Asumió que cada jugador en un juego cooperativo tiene un peso dado por un número real que representa su habilidad de regateo o negociación en el juego. Propuso repartir los dividendos de las coaliciones (Harsanyi, 1959) de manera proporcional a los pesos, a las habilidades de negociación. Owen (1968) hizo ver que la interpretación de los pesos como habilidades de regateo era incompatible con el hecho de que el valor ponderado de un jugador en un juego cooperativo superaditivo (juego que incentiva la cooperación) pudiera reducirse al aumentar su habilidad de cooperación. Owen (1968) sugirió una interpretación alternativa para los pesos de Shapley, afirmando que debían ser considerados más bien como una medida de la parsimonia en la toma de decisiones [1].

Posteriormente otros autores llevaron a cabo axiomatizaciones de los valores no simétricos, destacando las realizadas por Kalai y Samet (1987) que extendieron el modelo de Shapley definiendo un sistema de pesos sobre los jugadores. También caracterizaron axiomaticamente dos familias de soluciones relacionadas, una de ellas adecuada para problemas de reparto de ingresos simétricos, y la otra para problemas de asignación de costes. Con cada sistema de pesos, estos autores asociaron una distribución de probabilidad que les permite caracterizar estas dos familias de soluciones mediante un enfoque probabilístico del tiempo de llegada a la coalición.

Haeringer (2006) introdujo un nuevo sistema de pesos para el valor de Shapley, en el cual, los pesos pueden ser interpretados como una medida de poder de negociación. Como en Shapley (1953a) la solución propuesta se obtiene extendiendo por linealidad la correspondiente a los juegos de unanimidad (familia de juegos cuya función característica atribuye una unidad de beneficio si existe consenso en una determinada

[1] "It is the purpose of this note to suggest that these weights can better be thought of as coefficients of slowness to reach a decision." Owen (1968), pág. 1.

coalición). Sin embargo, en la propuesta de Haeringer, estos beneficios dependen del signo de los dividendos de las coaliciones. Haeringer (2006) también caracterizó su concepto de solución.

En todas estas caracterizaciones mencionadas el axioma de simetría (jugadores con iguales contribuciones marginales a todas las coaliciones que no los contienen deben recibir lo mismo) es debilitado consistentemente con este marco en el que los jugadores pueden presentar diferencias entre ellos. Sin embargo, el axioma de eficiencia siempre es respetado.

En esta memoria tratamos de tender un puente entre los juegos cooperativos y los no cooperativos. De manera similar a Shapley (1953) vamos a asignar un peso a cada jugador que interpretamos como su deseo, habilidad o interés en la cooperación en el juego. Esta idea también aparece en los juegos difusos de Aubin (1981) y para los juegos cero-normalizados con estructuras de comunicación difusas con todos los arcos, Jiménez-Losada, Fernández, Ordóñez y Grabisch (2010) y Jiménez-Losada, Fernández y Ordóñez (2013). Es decir, para nosotros, en los juegos cooperativos los jugadores no tendrán necesariamente voluntad total de cooperación sino que su interés en ella esta matizado a través de un valor en el intervalo $[0, 1]$. El valor 1 estará asociado a un jugador con interés total en la cooperación (un jugador tipo en los juegos cooperativos clásicos) y en el otro lado del espectro, el valor 0 representará una capacidad nula de cooperación. Valores intermedios modulan el interés en la cooperación. Entonces proponemos modificar el juego cooperativo original para tener en cuenta las habilidades cooperativas de los jugadores. Supondremos que, como consecuencia de los diferentes niveles de cooperación, cada coalición con dos o más jugadores retiene solo una proporción de su dividendo. Nuestra propuesta es que esta proporción es el mínimo de las habilidades de cooperación de sus miembros. Por supuesto, para coaliciones individuales el dividendo no debe verse alterado puesto que cada jugador siempre estará de acuerdo consigo mismo.

Para justificar nuestra elección del factor de descuento, consideremos, por ejemplo, una situación en la que los dos jugadores envueltos pueden generar un beneficio unitario a través de la cooperación. Si la habilidad de regateo (o el esfuerzo en la cooperación) de uno de ellos es menor que la del otro parece natural considerar el mínimo esfuerzo como el resultante y asumir que éste es el beneficio conjunto. Se dice que *dos no riñen si uno no quiere* y no es menos cierto que dos no cooperan si uno no quiere. De esta manera, si alguno de los jugadores de una coalición tiene habilidad de regateo diferente de 1, parte del dividendo de dicha coalición se perderá.

Si dos personas que han heredado un bien no se ponen de acuerdo verosímilmente perderán ingresos, por ejemplo, pagando abogados, y no parece que se pueda alcanzar mayor nivel de cooperación que el correspondiente al menos comprometido. Si una pareja desea establecer una relación, el máximo nivel de intimidad que pueden obtener será el correspondiente al que menos invierta en la relación. Como consecuencia, si todos los jugadores cooperan completamente el juego modificado coincide con el juego original. En el otro extremo, si la habilidad cooperativa de todos los jugadores es nula, el juego original se transformará en un juego inesencial. En éste sentido se ha dicho que tratamos de tender un puente entre los juegos cooperativos y los no cooperativos.

La modificación del juego original para tener en cuenta información adicional tiene larga tradición en la teoría de los juegos cooperativos. Puede ser encontrada en Borm, Owen y Tijs (1992), Gilles, Owen y van den Brink (1992), Bilbao y Edelman (2000), Bergantiños y Sánchez (2001), Jackson (2005), Jiménez-Losada et al. (2010), del Pozo, Manuel, González-Arangüena y Owen (2011), Jiménez-Losada et al. (2013), van den Brink, González-Arangüena, Manuel y del Pozo (2014), Khmelnitskaya, Selçuk y Talman (2016), Zou, Zhang, Borkotokey y Yu (2017) y Gallardo, Jiménez y Jiménez-Losada (2018), por citar solo a unos pocos. En muchas de estas publicaciones las reglas de asignación definidas coinciden con el valor de Shapley del juego modificado.

Nosotros también proponemos como regla de reparto para juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas el valor de Shapley del juego modificado. El valor obtenido satisface monotonía en los pesos para juegos superaditivos y admite varias caracterizaciones paralelas a las más prominentes en la literatura de la Teoría de Juegos para el valor de Shapley: Shapley (1953b), Myerson (1980), Young (1985) y Hart y Mas-Colell (1989). También se pueden adaptar a este marco las extensiones multilineales de Owen (1972). Además, para un juego cero-normalizado con jugadores con diferentes habilidades de cooperación, el valor obtenido coincide con el valor Choquet-Shapley de la extensión de Choquet del juego, introducida por Tsurumi, Tanino y Inuiguchi (2001). También (en el mismo caso) coincide con el valor de Myerson cg-difuso para una estructura de comunicación difusa con todos los arcos Jiménez-Losada et al. (2013).

Además, desde esta perspectiva, abordaremos lo que para nosotros es una consecuencia de la cooperación imperfecta: la ineficiencia. Si, como se ha dicho, en todos los modelos existentes con pesos para los jugadores los repartos procuran mantener la eficiencia, en nuestra propuesta asumiremos que la imperfección en la cooperación conlleva, en general, la pérdida de una parte del valor de la coalición global.

Los juegos cooperativos, como ya se ha mencionado, y como su propio nombre indica, surgieron para modelar aquellas situaciones en la que la cooperación conjunta de los jugadores es posible. En un primer lugar esta categoría de la Teoría de Juegos permitía la cooperación de cualquier conjunto de jugadores, lo cual, no siempre se ajusta a la realidad, dado que la coalición entre dos o más jugadores en un juego puede no ser factible por motivos de afinidad, simpatía, cercanía o cualquier otra razón que imposibilite la cooperación entre miembros de un juego. La introducción de pesos en los jugadores puede verse como un limitante en sus posibilidades de cooperación de estos pero, en la teoría, se han desarrollado otras formas de introducir restricciones en la cooperación de los jugadores.

El trabajo pionero que afrontó la modelización de situaciones con restricciones en la cooperación fue el de Aumann y Dreze (1974) que analizaron los juegos cooperativos con estructura de coaliciones. En este modelo no se permite la cooperación libre entre cualquier subgrupo de jugadores, sino que existe una partición o estructura, dada a priori, que restringe las posibles coaliciones dentro del universo de los jugadores.

Myerson (1977; 1980) propuso un nuevo modelo, el de los juegos con cooperación restringida por un grafo. Al juego coalicional se le añade, entonces, un grafo de comunicaciones factibles en el que los jugadores se identifican con los nodos del grafo y las aristas con las diferentes posibilidades de comunicación directa y simétrica entre aquellos jugadores en los que inciden. Este nuevo modelo solo permite coaliciones de jugadores que sean conexas en el grafo.

El modelo creado por Myerson ha despertado mucha atención, siendo objeto de múltiples análisis y generalizaciones. Winter (1992) señaló que el valor de Myerson admite una función potencial, siguiendo el enfoque sugerido por Hart y Mas-Colell (1989) para el valor de Shapley, Van den Nouweland, Borm, y Tijs (1992) extendieron el valor de Myerson a los casos en los que las posibilidades de comunicación de los jugadores están modeladas por un hipergrafo. Jackson y Wolinsky (1996) introdujeron la regla de poder de negociación igualitaria, una extensión del valor de Myerson para los juegos en una red. Algaba, Bilbao, Borm y López (2001) caracterizaron el valor de Myerson para uniones estables. Calvo, Lasaga y van den Nouweland (1999) lo extienden al caso de los juegos con grafos probabilísticos, en los que cada par de nodos tiene una probabilidad dada de comunicación directa, siendo estas probabilidades independientes. Gómez, González-Arangüena, Manuel y Owen (2008) consideran un entorno más general, en el que se proporciona una distribución de probabilidad sobre el conjunto de todos los grafos posibles. Casajus (2009) introdujo el valor χ del grafo, una extensión sensible a las opciones externas del valor de Myerson. Béal, Remilá y Solal (2010) estudian juegos cooperativos con un árbol en el conjunto de jugadores que representa las posibles limitaciones en la cooperación e introducen extensiones de la solución promedio de árbol-enraizado (*average rooted-tree*), desarrollada por primera vez en Herings, van der Laan y Talman (2008). González-Arangüena, Manuel y del Pozo (2015) obtienen otra extensión del valor de Myerson para el caso de los juegos restringidos a grafos con arcos ponderados. Gómez, González-Arangüena, Manuel, Owen, del Pozo y Tejada (2003) propusieron utilizar el valor de Myerson como medida de centralidad para los actores en una red social. Jiménez-Losada et al. (2013) utilizan el valor de Myerson como medida de solución para las situaciones de comunicación con estructuras difusas. Los estudios y las aplicaciones del valor de Myerson no paran de crecer. Algunos de los trabajos más recientes son, por ejemplo, Manuel, Ortega y del Pozo (2020) donde se estudia el marginalismo del valor de Myerson, Li y Shan (2020) que desarrollan un valor de Myerson para juegos restringidos a grafos dirigidos.

Otro de los objetivos de esta memoria es extender el valor de Myerson a situaciones en las cuales los jugadores tienen sus posibilidades de cooperación restringidas por un grafo y además, diferentes habilidades de regateo, diferente poder de negociación, diferentes niveles de cooperación o desean llevar a cabo diferentes esfuerzos en la cooperación. La solución propuesta extenderá el valor de Myerson y el valor de Shapley. Como en el caso de los juegos cooperativos sin restricciones en la comunicación modelamos la habilidad de regateo o el nivel de cooperación de cada jugador a través de un peso en el intervalo $[0, 1]$. Siguiendo los pasos de Myerson, modificamos el juego cooperativo original a un nuevo juego el cual es, a su vez, una modificación del juego restringido al grafo de Myerson. Asumiremos que la eventual imperfección de la cooperación de los jugadores implica que estos no pueden obtener todo su dividendo en el juego de Myerson. Entonces proponemos descontar los dividendos de las coaliciones no unitarias multiplicándolos por un factor que depende de los pesos de los jugadores en la coalición, de hecho, el mínimo de tales pesos. Naturalmente, los dividendos de las coaliciones unitarias no se ven afectados dado que cada jugador está dispuesto a cooperar consigo mismo. De esta manera, si alguno de los jugadores de una coalición tiene habilidad de regateo diferente de 1, parte del dividendo de dicha coalición (en el juego restringido al grafo) se perderá. Resumiendo, los dividendos de las coaliciones no conectadas son nulos (como consecuencia de la definición de Myerson del juego restringido al grafo) pero, además, para las coaliciones conexas el dividendo sufre un descuento como consecuencia de las habilidades de negociación. Si al menos uno de ellos tiene peso nulo, el dividendo también desaparece. Entonces, el grafo establece posibles canales de comunicación, y los pesos modulan el deseo de los jugadores en utilizar los canales abiertos.

Como se ha dicho, la modificación del juego original para incluir información adicional y el uso del valor de Shapley para el juego modificado es una forma estándar de trabajo en los juegos cooperativos con algún tipo de restricción. Consecuentemente, nuestra propuesta como regla de reparto para juegos cooperativos con restricciones en la comunicación dadas por un grafo y con jugadores con diferentes habilidades de cooperación será el valor de Shapley del juego modificado. El valor obtenido satisface algunas de las propiedades clásicas del valor de Myerson (equidad y contribuciones equilibradas) así como monotonía en las habilidades de negociación y también contribuciones equilibradas en las capacidades de regateo (el daño causado por un jugador a otro, al anular éste su poder de negociación, es simétrico). Sin embargo, una consecuencia natural de descontar el dividendo es la pérdida de eficiencia, que es consistente con la cooperación imperfecta de los jugadores. Entonces, el valor definido no satisface la clásica eficiencia en componentes conexas de Myerson, sino que ésta debe ser sustituida por eficiencia en componentes conexas de negociación.

Finalmente, caracterizamos el valor definido de manera paralela al valor de Myerson: usando eficiencia en componentes conexas de negociación y equidad, propiedad que puede ser remplazada por contribuciones equilibradas o contribuciones equilibradas en habilidades de negociación, obteniendo así diferentes caracterizaciones.

Los resultados incluidos en esta memoria relativos a los juegos y situaciones de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de cooperación, así como la propuesta de solución puntual en ambos casos, han dado lugar a las publicaciones:

- Manuel, C. and Martín, D. (2020). A Monotonic Weighted Shapley Value. Group Decision and Negotiation, 29, 627–654.
- Manuel, C. and Martín, D. (2021a). A Value for Communication Situations with Players Having Different Bargaining Abilities. Annals of Operations Research, 301, 161-182.

La organización de la presente memoria es la siguiente: después de este apartado introductorio y motivacional, aparece un capítulo de preliminares donde se definen formalmente los prerrequisitos necesarios para la introducción de los resultados posteriores. A continuación, en el capítulo 3, se definen los nuevos juegos donde los jugadores pueden tener diferentes habilidades de negociación, así como una solución puntual para estos nuevos juegos. Posteriormente, en el capítulo 4, se analiza con detenimiento la propiedad de monotonía que subyace en la motivación del desarrollo de la presente memoria. En los capítulos 5 y 6 se obtienen respectivamente, diversas caracterizaciones y una generalización de las extensiones multilineales de Owen (1972) para el valor definido en el capítulo 3. En el capitulo 7 se introducen las situaciones de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas para, en el capítulo 8, introducir una generalización del valor de Myerson para este tipo de situaciones que caracterizamos en el capítulo 9. Por último, esta memoria cuenta con un capítulo donde se plantean futuras líneas de investigación que pueden ser desarrolladas a partir de los resultados aquí obtenidos.

Capítulo 2

Preliminares

Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo.

Arquímedes de Siracusa

En este capítulo se exponen aquellos conceptos, ideas y resultados que constituyen los cimientos a partir de los cuales se construye el presente trabajo: los juegos n-personales cooperativos en forma de función característica, los grafos y las situaciones de comunicación (juegos cooperativos con comunicación restringida por un grafo o red social). También se incluyen las reglas de reparto para juegos cooperativos -el valor de Shapley- y para situaciones de comunicación -el valor de Myerson- que se utilizarán en esta memoria. Finalmente se presentan los juegos cooperativos ponderados y su relación con los juegos difusos.

2.1. Juegos cooperativos n-personales

A continuación se define formalmente un juego cooperativo n-personal en forma de función característica.

Definición 2.1.1 *Un juego cooperativo n-personal con utilidad transferible es un par (N, v). $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v, la función característica, es una aplicación real definida sobre 2^N que satisface $v(\emptyset) = 0$.*

Cada subconjunto $S \subseteq N$ representa una posible coalición y $v(S)$ es el valor que S puede asegurar si todos sus miembros cooperan. Por simplicidad, en ocasiones, identificaremos el juego (N, v) con su función característica v, cuando no exista ambigüedad sobre N.

Para aligerar la notación, notaremos con s el cardinal $|S|$ de la coalición $S \subseteq N$ y con G^N al conjunto de todos los juegos cooperativos de utilidad transferible en los que el conjunto de jugadores es $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Ejemplo 2.1.1 *En un partido político cuyas bases están formadas por un total de 150 individuos con derecho a voto, las decisiones se aprueban por mayoría absoluta de sus miembros. En esta situación, el juego viene dado por el conjunto de jugadores* $N = \{1, 2, ..., 150\}$*, y la función característica, que es una función indicador* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *por:*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & si\ s \geq 76 \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Los valores 1 y 0 indican, en este caso, el que una coalición de jugadores sea ganadora o perdedora, respectivamente.

G^N tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, con dimension $2^n - 1$. Dados (N, v), $(N, w) \in G^N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la suma interna $(N, v + w)$ y el producto externo por un escalar $(N, \lambda \cdot v)$ son los juegos con funciones características respectivas $(v+w)(S) = v(S)+w(S)$ y $(\lambda \cdot v)(S) = \lambda \cdot v(S)$, para todo $S \subseteq N$.

Además, se puede definir un producto interno en G^N tal que para (N, v), $(N, w) \in G^N$, $(N, v \cdot w)$ tiene función característica $(v \cdot w)(S) = v(S) \cdot w(S)$ para todo $S \subseteq N$.

Una base muy útil de G^N es la llamada base de unanimidad formada por los juegos con funciones características $\{u_S\}_{\emptyset \neq S \subseteq N.}$

Definición 2.1.2 *Para cada coalición* $S \subseteq N$*,* $S \neq \emptyset$ *el juego de unanimidad* (N, u_S) *tiene función característica*

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & si\ S \subseteq T \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Los coeficientes (coordenadas) de una función característica, v, en la base de unanimidad, son conocidos como los *dividendos de Harsanyi* (Harsanyi, 1959). Estos coeficientes $\{\Delta_v(S)\}_{\emptyset \neq S \subseteq N}$ se obtienen en términos de los valores de las coaliciones mediante la siguiente expresión:

$$\Delta_v(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T), \text{ para cada } \emptyset \neq S \subseteq N.$$

Dado $(N, v) \in G^N$ y $S \subseteq N$, el valor que pueden alcanzar conjuntamente los miembros de la coalición S puede calcularse a partir de los dividendos de Harsanyi mediante la siguiente expresión:

$$v(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} \Delta_v(T), \text{ para cada } \emptyset \neq S \subseteq N.$$

Ejemplo 2.1.2 *Consideremos* $(N, v) \in G^N$ *con* $N = \{1, 2, 3\}$ *y*

$$v(S) = \begin{cases} s - 1, & si\ s \geq 2 \\ 0, & otro\ caso. \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, v puede ser escrito como:

$$v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}} + u_{\{2,3\}} - u_{\{1,2,3\}}.$$

Como se ha dicho, podemos calcular el valor de cualquier coalición a partir de la función característica o de los dividendos de sus subcoaliciones. Por ejemplo para

$$S = \{1,2,3\},\ v(S) = 3 - 1 = 2 \text{ ó}$$

$$\begin{aligned} v(S) &= \Delta_v(\{1\})+\Delta_v(\{2\})+\Delta_v(\{3\})+\Delta_v(\{1,2\})+\Delta_v(\{1,3\})+\Delta_v(\{2,3\})+\Delta_v(\{1,2,3\}) \\ &= 0+0+0+1+1+1-1 = 2 \end{aligned}$$

La restricción de un juego a una coalición se define de la siguiente manera.

Definición 2.1.3 *Dado $(N,v) \in G^N$ y $S \subseteq N$, se define el juego restringido a la coalición S, $(N, v_{|S})$ como aquel juego n-personal con función característica:*

$$v_{|S}(T) = \begin{cases} v(T \cap S), & \text{si } T \subseteq N \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Así mismo, notaremos $(S, v_{|S}) \in G^S$ al juego con función característica:

$$v_{|S}(T) = v(T).$$

Definición 2.1.4 *Dado $(N,v) \in G^N$ y una coalición $T \subseteq N$, se dice que T es un soporte del juego (N,v) si se cumple que para cualquier coalición $S \subseteq N$:*

$$v(S) = v(S \cap T).$$

Definición 2.1.5 *Dado $(N,v) \in G^N$, $i \in N$ y $S \subseteq N \setminus \{i\}$ llamamos contribución marginal del jugador i a la coalición S en el juego v, a la diferencia:*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

A partir de la definición anterior, dado un juego $(N,v) \in G^N$ y dos jugadores $i, j \in N$ se pueden definir diferentes clases o tipos de jugadores.

Definición 2.1.6 *Diremos que $i \in N$ es un jugador nulo en (N,v), si*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0 \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\},$$

es decir, si la contribución marginal de i a cualquier coalición S a la que se una es cero.

Definición 2.1.7 *Diremos que $i \in N$ es un jugador pasivo o títere en el juego (N,v), si*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\}) \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i\},$$

es decir, si contribuye marginalmente a cada coalición con la cantidad que puede conseguir por sí mismo.

Definición 2.1.8 *Diremos que $i \in N$ es un jugador necesario (van den Brink and Gilles, 1996) en el juego (N, v), si para $S \subseteq N$,*

$$v(S) = 0 \text{ si } i \notin S.$$

Es decir, un jugador es necesario si cualquier coalición en la que no esté él, tiene pago nulo.

Definición 2.1.9 *Diremos que i y $j \in N$ son jugadores simétricos en el juego (N, v), si*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \text{ para todo } S \subseteq N \setminus \{i, j\},$$

es decir, si la contribución marginal a toda coalición a la que no pertenezcan ambos es la misma. Esto establece que dos jugadores simétricos son intercambiables en el juego, al menos, a efectos prácticos.

2.2. Clases de Juegos.

A partir de las diferentes propiedades de la función característica de un juego podemos definir diversas clases de juegos cooperativos que serán relevantes en el resto de la presente memoria.

Definición 2.2.1 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es monótono si para todo $S, T \subseteq N$ con $S \subseteq T$, se tiene que:*

$$v(S) \leq v(T),$$

es decir, si al añadirse jugadores a una coalición, el valor de ésta no disminuye.
En términos de las contribuciones marginales un juego es monótono, si y solo si, la diferencia $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ es no negativa para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Definición 2.2.2 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es superaditivo si para todo $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$, se tiene que:*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Un juego superaditivo es un juego donde se preserva la idea de que *la unión hace la fuerza*, es decir, la unión de coaliciones disjuntas no puede empeorar la suma de los beneficios de ellas. Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es subaditivo.

Definición 2.2.3 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es convexo si para todo $S, T \subseteq N$, se verifica que:*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Los juegos convexos son aquellos en los que si dos coaliciones (no necesariamente disjuntas) se unen, entonces la suma de las ganancias de la unión e intersección es al menos igual a la suma de los beneficios de las coaliciones que se unen. Trivialmente todo juego convexo es superaditivo. Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es cóncavo.

Definición 2.2.4 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es casi-positivo (almost-positive, Vasil'ev, 1975) si se verifica que:*

$$\Delta_v(S) \geq 0 \text{ para todo } \emptyset \neq S \subseteq N.$$

Todo juego casi-positivo es convexo y, por tanto, superaditivo. El recíproco (en general) no es cierto.

Definición 2.2.5 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es cero-normalizado si se verifica que:*

$$v(\{i\}) = 0, \text{ para todo } i \in N.$$

Todo juego (N, v) admite una versión cero-normalizada, (N, v_0), con

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}) \text{ para todo } S \subseteq N.$$

En esta memoria utilizaremos la notación G_0^N para hacer referencia al subespacio de G^N formado por los juegos cero-normalizados con conjunto de jugadores N.

La cero-normalización de un juego es un caso particular de la equivalencia estratégica, que se define a continuación.

Definición 2.2.6 *Dados (N, v) y $(N, w) \in G^N$, diremos que son estratégicamente equivalentes si existen constantes reales λ, α_1, α_2, ... , α_n tales que para todo $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,*

$$v(S) = \lambda w(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i.$$

Ejemplo 2.2.1 *Se considera el siguiente juego $(N, v) \in G^N$ con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:*

$$v(S) = \begin{cases} 2, & \text{si } S = \{1, 2\} \\ 1, & \text{si } S = \{1, 3\} \\ 3, & \text{si } S = \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, v puede escribirse como:

$$v = 2u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}}.$$

Puede observarse que este juego es monótono, superaditivo, convexo, cero-normalizado y casi-positivo.

Definición 2.2.7 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es (0,1)-normalizado si se verifica que:*

$$v(\{i\}) = 0, \text{ para todo } i \in N \text{ y } v(N) = 1.$$

El juego del Ejemplo 2.1.1 también cumple la definición de juego (0,1)-normalizado.

Definición 2.2.8 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es simple si para todo $S \subseteq N$, se verifica que:*

$$v(S) = 0 \text{ ó } v(S) = 1.$$

En un juego simple diremos que una coalición $S \subseteq N$ es ganadora si $v(S) = 1$. En caso contrario, diremos que es perdedora. Un juego simple queda completamente determinado por su conjunto de coaliciones ganadoras.

Los juegos de votación como el del Ejemplo 2.1.1 son los más habituales dentro de esta clase de juegos. Llamaremos juego de votación a un juego simple, no trivial y monótono. Es decir, un juego con $v(N) = 1$ y en el que, dadas dos coaliciones S,$T \subseteq N$ con $S \subseteq T$, si S es ganadora, entonces T también ha de serlo.

Definición 2.2.9 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es inesencial o aditivo si para todo $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que:*

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T).$$

Para estos juegos el incentivo a la cooperación desaparece, lo cual ocasiona que los beneficios o ganancias de los jugadores se vean inalterados por las coaliciones que se lleguen a formar, dado que estos juegos satisfacen trivialmente que:

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}), \text{ para todo } \emptyset \neq S \subseteq N.$$

Definición 2.2.10 *Un juego $(N, v) \in G^N$ es simétrico si existe una función $f : N \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $S \subseteq N$, $v(S) = f(s)$.*

En un juego simétrico, dos jugadores cualesquiera son simétricos, es decir, el valor de una coalición depende solo del número de jugadores que la integren, y no de la identidad de los mismos. El juego del Ejemplo 2.1.2 es simétrico.

2.3. Conceptos de solución para juegos cooperativos

Sea $(N, v) \in G^N$. Si los jugadores deciden cooperar, el problema que se presenta es el de repartir el valor $v(N)$ entre todos.

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ un vector de distribución de pagos, en el que para cada $i = 1, 2, ..., n$, x_i representa el pago que recibe el jugador i. Para cualquier coalición $S \subseteq N$, consideramos:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, \text{ si } S \neq \emptyset,$$

y

$$x(\emptyset) = 0.$$

Definición 2.3.1 *El conjunto de preimputaciones de un juego* (N, v) *es el conjunto de vectores de distribución eficientes, es decir,*

$$PI(N, v) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N)\}.$$

Es razonable pensar que ningún jugador aceptará un pago inferior al que obtendría individualmente, sin unirse a ninguna coalición (racionalidad individual).

Definición 2.3.2 *El conjunto de imputaciones de un juego* (N, v) *es el subconjunto de PI formado por los vectores de distribución que cumplen el principio de racionalidad individual,*

$$I(N, v) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in PI(N, v) \text{ y } x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo } i = 1, 2, ..., n\}.$$

Ejemplo 2.3.1 *(Pérez, Jimeno y Cerdá; 2003) Se considera el siguiente juego con* $N = \{1, 2, 3\}$ *y*

$$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 2,\ v(\{1, 2, 3\}) = 5.$$

Se tiene que,

$$PI(N, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 5\}.$$

El conjunto de preimputaciones del juego definido es cualquier punto del plano que corta a los ejes en los puntos $(5, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ *y* $(0, 0, 5)$.

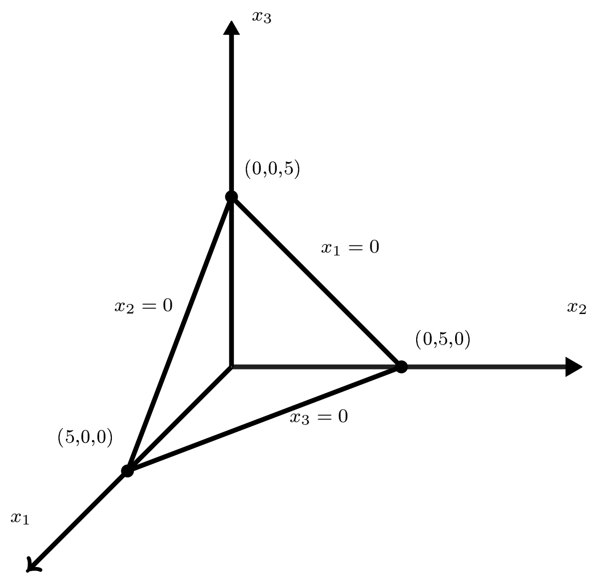

Figura 2.3.1. Representación gráfica de las Preimputaciones.

Si aplicamos el principio de racionalidad individual, para calcular el conjunto de imputaciones del juego tenemos

$$I(N,v) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 5,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}.$$

El conjunto de Imputaciones de este juego es cualquier punto del triángulo con vértices $(5,0,0)$, $(0,5,0)$ *y* $(0,0,5)$ *en el espacio de tres dimensiones.*

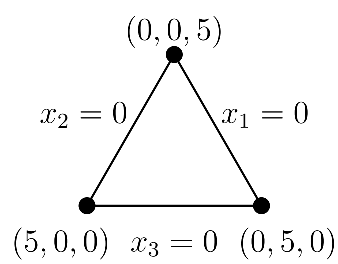

Figura 2.3.2. Representación gráfica de las Imputaciones.

Si extendemos el principio de racionalidad individual a todas las posibles coaliciones, denominándolo principio de racionalidad coalicional, llegamos entonces al concepto de *Core* de un juego cooperativo.

Definición 2.3.3 *Dado* $(N,v) \in G^N$, *se llama Core de* (N,v), *notado* $C(N,v)$, *a*

$$C(N,v) = \{\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S),\ \textit{para todo}\ S \subseteq N\}$$

El core contiene las asignaciones de pagos estables, en el sentido de que ninguna coalición podría, por sí misma, conseguir más de lo que cualquiera de estas asignaciones les permitiría.

Esta noción de Core como concepto de solución general de un juego cooperativo fue desarrollada por Shapley (1952) y Gillies (1953, 1959). Pese a ser un concepto de solución muy intuitivo, presenta propiedades que no en todos los casos se considerarán deseables. Entre ellas, el hecho de que no proporciona, en general, un único vector de pagos para cada juego (lo que, por otra parte, puede resultar enriquecedor en ocasiones) o, lo que es peor, que puede ser vacío.

Ejemplo 2.3.2 *(Pérez J. et. al. 2003) Una finca rústica está valorada por su actual propietario (jugador 1) en 350 mil unidades monetarias. Una empresario (jugador 2) le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría las 700 mil u.m. Una empresa constructora (jugador 3) le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización la finca alcanzaría un valor de 775 mil u.m.*

El juego en forma coalicional viene dado por (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y

$$v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\ v(\{1\}) = 350$$

$$v(\{1, 2\}) = 700,\ v(\{1, 3\}) = 775,\ v(\{2, 3\}) = 0,\ v(\{1, 2, 3\}) = 775.$$

Se observa que el jugador 1 es un jugador necesario en el juego, dado que cualquier coalición en la que no esté presente dicho jugador, es una coalición que no puede alcanzar ningún beneficio. Pasamos ahora al cálculo del Core.

Pertenecen al Core los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfacen las siguientes restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 775 \text{ (Principio de eficiencia)},$$

$$x_1 \geq 350,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \text{ (Principio de racionalidad individual)},$$

$$x_1 + x_2 \geq 700,\ x_1 + x_3 \geq 775,\ x_2 + x_3 \geq 0 \text{ (Principio de racionalidad coalicional)}.$$

Teniendo en cuenta las restricciones impuestas por el principio de eficiencia y el principio de racionalidad coalicional se tiene que:

$$x_2 + x_3 \geq 0 \text{ ó equivalentemente } x_1 \leq 775,$$

$$x_1 + x_3 \geq 775 \text{ ó equivalentemente } x_2 \leq 0,$$

$$x_1 + x_2 \geq 700 \text{ ó equivalentemente } x_3 \leq 75.$$

Y por último, si añadimos las restricciones impuestas por el principio de racionalidad individual a las restricciones anteriores podemos calcular el Core:

$$C(N, v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 775, 350 \leq x_1 \leq 775, x_2 = 0, 0 \leq x_3 \leq 75\}$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 350 \leq 775 - x_3 \leq 775, x_2 = 0, 0 \leq x_3 \leq 75\}$$
$$= \{(775 - x_3, 0, x_3) \mid 0 \leq x_3 \leq 75\}.$$

Como se puede apreciar, en los repartos del Core figura el hecho de que el segundo jugador solo sirve para elevar el precio de la parcela hasta 700 mil unidades monetarias (pero no recibe nada a cambio) mientras el tercero recibirá una parte de las 75 mil unidades monetarias que se pueden conseguir por encima de las 700 mil urbanizando la parcela.

Una regla de asignación, reparto o solución unipuntual para juegos cooperativos n-personales con conjunto de jugadores N es una aplicación $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$, en la que $\psi_i(N, v)$ representa el beneficio del jugador i en el juego (N, v).

Shapley (1953) introdujo una solución para juegos cooperativos que, hoy por hoy, es considerada como la más relevante. Esta regla de reparto, conocida como el valor de Shapley, asigna a cada jugador una combinación lineal convexa de sus contribuciones marginales a las diferentes coaliciones.

Definición 2.3.4 *El valor de Shapley, Sh, es la regla de asignación definida en G^N y dada por:*

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n - s - 1)!s!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big], \quad i \in N.$$

Alternativamente, el valor de Shapley se puede expresar en términos de los dividendos como sigue:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N : i \in S} \frac{\Delta_v(S)}{s}, \quad i \in N.$$

Shapley (1953) caracterizó su valor de una manera elegante utilizando los siguientes axiomas:

i) Soporte. Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad del soporte si para todo juego $(N, v) \in G^N$ y para todo soporte T de (N, v), se tiene que:

$$\sum_{i \in T} \psi_i(N, v) = v(T).$$

ii) Simetría. Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ es simétrica si para todo juego $(N, v) \in G^N$ y para toda permutación π de N, se verifica que:

$$\psi_{\pi(i)}(N, v) = \psi_i(N, \pi v) \text{ para todo } i \in N,$$

donde el juego πv se define como:

$$\pi v(S) = v(\pi(S)).$$

iii) Aditividad. Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ es aditiva si para todo par de juegos $(N, v_1), (N, v_2) \in G^N$ se tiene que:

$$\psi(N, v_1 + v_2) = \psi(N, v_1) + \psi(N, v_2).$$

Dada la preeminencia de este valor, otros autores han obtenido caracterizaciones alternativas.

Shubik (1962) caracterizó el valor de Shapley sustituyendo el axioma del soporte por el de *eficiencia* y el de *jugador nulo*:

- *Eficiencia.* Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ es eficiente si para todo juego $(N, v) \in G^N$ se verifica que:
$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(N, v) = v(N).$$

- *Jugador nulo.* Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad del jugador nulo si para todo juego $(N, v) \in G^N$ y para todo jugador i nulo en (N, v), se verifica que:
$$\psi_i(N, v) = 0.$$

Myerson (1980) caracterizó el valor de Shapley utilizando los axiomas de *eficiencia* y *contribuciones equilibradas:*

- *Contribuciones equilibradas.* Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si para todo juego $(N, v) \in G^N$ y para cada i, $j \in N$,
$$\psi_i(N, v) - \psi_i(N, v_{|_{N\setminus\{j\}}}) = \psi_j(N, v) - \psi_j(N, v_{|_{N\setminus\{i\}}}).$$

Young (1985) obtiene una caracterización en términos de *eficiencia, simetría* y *monotonía fuerte (marginalismo)* [2] , [3]*:*

- *Monotonía fuerte.* Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de monotonía fuerte si para todo par de juegos (N, v), $(N, w) \in G^N$ y para todo $i \in N$ tal que
$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S), \text{ si } S \subseteq N \setminus \{i\},$$
se tiene que
$$\psi_i(N, v) \geq \psi_i(N, w).$$

[2]Young (1985) definió la propiedad de monotonía fuerte, pero en la demostración de su caracterización usó una versión más débil de esta propiedad *'a type of independece'* (ambas desigualdades son remplazadas por igualdades). Este axioma más débil es conocido como marginalismo después de Chun (1989).

[3]El término en inglés es *marginality* y su traducción al castellano compleja. La Real Academia Española admite marginalidad pero con un significado que no se adapta a este escenario. Por otro lado es habitual hablar de marginalismo económico, pero el término no es aceptado por la RAE. Frente a esta dicotomía hemos optado por respetar el significado económico, asumiendo el coste de utilizar un término no aceptado por la Academia.

Ejemplo 2.3.3 *Consideramos* $(N,v) \in G^N$ *con* $N = \{1,2,3,4\}$ *y*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & si\ S \in \{\{4\},\{3,4\}\} \\ 2, & si\ S \in \{\{1\},\{2\},\{1,3\},\{2,3\}\} \\ 3, & si\ S \in \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\} \\ 4, & si\ S \in \{\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\} \\ \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, v puede ser escrito como:

$$v = 2u_{\{1\}} + 2u_{\{2\}} + u_{\{4\}} - u_{\{1,2\}}.$$

Dado este juego podemos observar que:

i) Los jugadores 1 y 2 son simétricos ya que sus contribuciones marginales son siempre iguales, es decir, para todo $S \subseteq N$,

$$v(S \cup \{1\}) - v(S) = v(S \cup \{2\}) - v(S).$$

ii) El jugador 3 es un jugador nulo ya que sus contribuciones marginales son siempre nulas, es decir, para todo $S \subseteq N$,

$$v(S \cup \{3\}) - v(S) = 0.$$

iii) El jugador 4 es un jugador títere ya que sus contribuciones marginales son siempre iguales, es decir, para todo $S \subseteq N$,

$$v(S \cup \{4\}) - v(S) = 1 = v(\{4\}).$$

iv) No hay jugadores necesarios en (N,v).

v) El soporte de (N,v) *es* $T = \{1,2,4\}$. *El soporte de un juego está formado por el conjunto de jugadores no nulos.*

El valor de Shapley para el juego (N,v) *es* $Sh(N,v) = (2-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}, 0, 1) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1)$ *y por tanto* $Sh(N,v)$ *satisface:*

i) La propiedad del soporte dado que

$$\sum_{i\in T} Sh_i(N,v) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = v(T) = 4.$$

ii) La propiedad de eficiencia dado que

$$\sum_{i\in N} Sh_i(N,v) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 0 + 1 = v(N) = 4.$$

iii) La propiedad de simetría dado que

$$Sh_1(N, v) = \frac{3}{2} = Sh_2(N, v).$$

iv) La propiedad de jugador nulo dado que

$$Sh_3(N, v) = 0.$$

Para mostrar en este ejemplo que el valor de Shapley satisface la propiedad de aditividad definimos el juego $w = u_{\{1,2,3,4\}}$, *entonces,*

$$(v + w)(S) = \begin{cases} v(S), & si\ S \subset N \\ 5, & si\ S = N. \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, $(v + w)$ *puede ser escrito como:*

$$(v + w) = 2u_{\{1\}} + 2u_{\{2\}} + u_{\{4\}} - u_{\{1,2\}} + u_{\{1,2,3,4\}}.$$

Entonces, el valor de Shapley satisface aditividad dado que

$$Sh(N, v + w) = (\frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1) + (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = Sh(N, v) + Sh(N, w).$$

También se puede observar que los valores de Shapley obtenidos satisfacen la propiedad de monotonía fuerte, dado que para todo $i \in N$ *y para todo* $S \subseteq N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$ *y, también* $Sh_i(N, v) \geq Sh_i(N, w)$. *En particular, para el jugador* 1 *tenemos que las contribuciones marginales en el juego* v *y* w *son respectivamente,*

$$v(S \cup \{1\}) - v(S) = \begin{cases} 1, & si\ S \in \{\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \\ 2, & si\ S \in \{\{\emptyset\}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}. \end{cases}$$

y,

$$w(S \cup \{1\}) - w(S) = \begin{cases} 1, & si\ S = \{2, 3, 4\} \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Se observa que $v(S \cup \{1\}) - v(S) \geq w(S \cup \{1\}) - w(S)$ *para todo* $S \subseteq N \setminus \{1\}$ *y, por otro lado,* $Sh_1(N, v) = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{4} = Sh_1(N, w)$, *y así, queda ejemplificada la propiedad de monotonía fuerte para el jugador* 1.

Por último, vamos a ilustrar la propiedad de contribuciones equilibradas del valor de Shapley en el presente ejemplo. Para ello vamos a analizar en qué medida los jugadores 1 *y* 2 *se ven afectados cuando el otro abandona el juego.*

Se tiene que $v_{|_{N\setminus\{1\}}} = 2u_{\{2\}} + u_{\{4\}}$. *Entonces,* $Sh(N, v_{|_{N\setminus\{1\}}}) = (0, 2, 0, 1)$ *y similarmente* $Sh(N, v_{|_{N\setminus\{2\}}}) = (2, 0, 0, 1)$ *y, por tanto,*

$$Sh_1(N, v) - Sh_1(N, v_{|_{N\setminus\{2\}}}) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} = Sh_2(N, v) - Sh_2(N, v_{|_{N\setminus\{1\}}}).$$

Para las parejas $\{3, i\}$ con $i \neq 3$ y $\{4, i\}$ con $i \neq 4$ la propiedad se satisface trivialmente por la naturaleza de 3 y 4 (jugador nulo y títere, respectivamente) sus asignaciones por el valor de Shapley son siempre constantes, es decir,

$$Sh_3(N, v) = Sh_3(N, v_{|_{N\setminus\{i\}}}) = 0, \text{ para todo } i \neq 3$$

y

$$Sh_4(N, v) = Sh_4(N, v_{|_{N\setminus\{i\}}}) = v(\{4\}) = 1, \text{ para todo } i \neq 4.$$

Tratando también de vincular el marginalismo económico con la solución de Shapley, Hart y Mas-Colell (1989) consideraron funciones reales P sobre $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} G^N$. Para cada P y cada juego $(N, v) \in G^N$ definieron el vector de las contribuciones marginales de los diferentes jugadores,

$$\big(P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v_{|_{N\setminus\{i\}}})\big)_{i\in N}.$$

Una función $P : G \to \mathbb{R}$ con $P(\emptyset, v) = 0$ es llamada potencial si satisface la condición de eficiencia:

$$\sum_{i\in N} \big[P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v_{|_{N\setminus\{i\}}})\big] = v(N).$$

Hart y Mas-Colell probaron que existe una única función potencial P. Además el vector de las contribuciones marginales resultante $\big(P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v_{|_{N\setminus\{i\}}})\big)_{i\in N}$ coincide con el valor de Shapley.

En el siguiente ejemplo se ilustra el cálculo de la función potencial y su relación con el valor de Shapley.

Ejemplo 2.3.4 *Consideramos $(N, v) \in G^N$ con $N = \{1, 2, 3\}$ y*

$$v(S) = \begin{cases} 30, & \text{si } S = \{1\} \\ 50, & \text{si } S \in \{\{3\}, \{1, 2\}\} \\ 80, & \text{si } S \in \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\} \\ 100, & \text{si } S = \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, v puede ser escrito como:

$$v = 30u_{\{1\}} + 50u_{\{3\}} + 20u_{\{1,2\}} + 30u_{\{2,3\}} - 30u_{\{1,2,3\}},$$

y, por tanto, $Sh(N, v) = (30 + 10 - 10, 10 + 15 - 10, 50 + 15 - 10) = (30, 15, 55)$.

Dado que la función potencial satisface la condición de eficiencia, es decir,

$$\sum_{i\in N} \big[P(N, v) - P(N \setminus \{i\}, v_{|_{N\setminus\{i\}}})\big] = v(N),$$

se puede calcular su valor en el conjunto de todos los jugadores $i \in N$ despejando $P(N,v)$ de la ecuación anterior:

$$P(N,v) = \frac{1}{n}\big[v(N) + \sum_{i\in N} P(N\setminus\{i\}, v_{|N\setminus\{i\}})\big]$$

y recursivamente,

$$P(N\setminus\{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}) = \frac{1}{n-1}\big[v(N\setminus\{i\}) + \sum_{j\in N, j\neq i} P(N\setminus\{i,j\}, v_{|N\setminus\{i,j\}})\big].$$

Entonces,

$$P(N,v) = \frac{1}{n}\big[v(N) + \sum_{i\in N}\frac{1}{n-1}\big(v(N\setminus\{i\}) + \sum_{j\in N, j\neq i} P(N\setminus\{i,j\}, v_{|N\setminus\{i,j\}})\big)\big].$$

Para el ejemplo se tiene que,

$$P(N,v) = \frac{1}{3}\big[100 + \frac{1}{2}(80+50) + \frac{1}{2}(80+50+30) + \frac{1}{2}(50+30)\big] = 95,$$

siendo:

$$\begin{aligned}
P(N\setminus\{1\}, v_{N\setminus\{1\}}) &= \frac{1}{n-1}\big[v(N\setminus\{1\}) + \sum_{j\in N, j\neq 1} P(N\setminus\{1,j\}, v_{|N\setminus\{1,j\}})\big] \\
&= \frac{1}{2}(80+50) = 65. \\
P(N\setminus\{2\}, v_{N\setminus\{2\}}) &= \frac{1}{n-1}\big[v(N\setminus\{2\}) + \sum_{j\in N, j\neq 2} P(N\setminus\{2,j\}, v_{|N\setminus\{2,j\}})\big] \\
&= \frac{1}{2}(80+50+30) = 80. \\
P(N\setminus\{3\}, v_{N\setminus\{3\}}) &= \frac{1}{n-1}\big[v(N\setminus\{3\}) + \sum_{j\in N, j\neq 3} P(N\setminus\{3,j\}, v_{|N\setminus\{3,j\}})\big] \\
&= \frac{1}{2}(50+30) = 40.
\end{aligned}$$

Comprobamos por último que el vector de contribuciones marginales resultante $\big(P(N,v) - P(N\setminus\{i\}, v_{|_{N\setminus\{i\}}})\big)_{i\in N}$ coincide con el valor de Shapley:

- *Para $i = 1$, $P(N,v) - P(N\setminus\{1\}, v_{|_{N\setminus\{1\}}}) = 95 - 65 = 30 = Sh_1(N,v)$.*
- *Para $i = 2$, $P(N,v) - P(N\setminus\{2\}, v_{|_{N\setminus\{2\}}}) = 95 - 80 = 15 = Sh_2(N,v)$.*
- *Para $i = 3$, $P(N,v) - P(N\setminus\{3\}, v_{|_{N\setminus\{3\}}}) = 95 - 40 = 55 = Sh_3(N,v)$.*

2.4. Grafos

A continuación se exponen los conceptos relacionados con la teoría de grafos que serán utilizados en la presente memoria.

Definición 2.4.1 *Un grafo o una red social es un par* (N, γ) *en el cual* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *es el conjunto de nodos y* γ *es un subconjunto de* γ_N *(grafo completo) siendo* $\gamma_N = \{\{i, j\}, i, j \in N, i \neq j\}$. *Si no existe ambigüedad con respecto a* N, *identificaremos el grafo con* γ. *Cada arista* $\{i, j\} \in \gamma$ *representa una relación directa o canal de comunicación entre* i *y* j. Γ^N *denota la familia de todos los grafos con conjunto de nodos* N.

Diremos que dos nodos i y j están *directamente conectados* en (N, γ) si $\{i, j\} \in \gamma$. Y diremos que están *conectados* en γ si existe una sucesión de nodos $i_1, i_2, \ldots i_k$ con $i_1 = i$ y $i_k = j$ tal que $\{i_l, i_{l+1}\} \in \gamma$, para $l = 1, \ldots, k-1$.

Para $(N, \gamma) \in \Gamma^N$ y $\emptyset \neq S \subseteq N$, la *restricción del grafo* γ al conjunto S es el grafo $(S, \gamma_{|S})$. Un conjunto $S \subseteq N$ es conexo en γ si cada par de nodos en S están conectados en $(S, \gamma_{|S})$. Asumimos que si$s = 1$, S es conexo.

Definición 2.4.2 *Una componente conexa,* C, *en el grafo* (N, γ) *es un subconjunto conexo maximal, es decir,* C *es conexo en el grafo y, para todo* $C' \subseteq N$, *si* $C \subsetneq C'$ *entonces,* C' *no es conexo. Notaremos* N/γ *a la partición de* N *en componentes conexas inducida por* (N, γ).

Denotaremos S/γ al conjunto de las componentes conexas de S en $(S, \gamma_{|S})$. Un subgrafo de (N, γ) es (N, γ') con $\gamma' \subseteq \gamma$. Dado $(N, \gamma) \in \Gamma^N$ y una arista $l \in \gamma$, $(N, \gamma \setminus \{l\})$ es el subgrafo obtenido cuando la relación l se rompe. Para $i \in N$, (N, γ_i) con $\gamma_i = \{l \in \gamma \mid i \in l\}$ es el subgrafo de las aristas que inciden en i, y (N, γ_{-i}) con $\gamma_{-i} = \gamma \setminus \gamma_i$ es el subgrafo en el cual i está aislado después de eliminar todos sus aristas.

Definición 2.4.3 *Un conjunto conexo en* (N, γ), $S^* \subseteq N$, *es un conjunto minimal de conexión de* $S \subseteq S^*$ *si no hay ningún* $S' \subsetneq S^*$ *con* $S \subseteq S'$ *y* S' *conexo.* $\mathcal{MCS}(S, N, \gamma)$ *denotará la familia (ocasionalmente vacía) de todos los conjuntos minimales de conexión de* S *en* (N, γ).

El siguiente ejemplo pretende aclarar algunos de los conceptos anteriormente definidos.

Ejemplo 2.4.1 *Sea el grafo* $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}$. *Una representación aparece en la Figura 2.4.1. Consideremos los conjuntos* $S = \{1, 2, 3\}$ *y* $T = \{1, 3\}$.

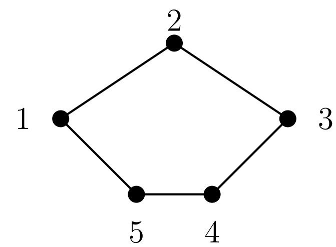

Figura 2.4.1

Se tiene que,

i) El grafo γ es conexo dado que todos los nodos están conectados, es decir, se puede ir de un nodo i a otro j utilizando una sucesión de aristas de γ.

ii) El conjunto T no es conexo dado que el grafo $(T, \gamma_{|T})$ no es un grafo conexo.

iii) El conjunto S es conexo dado que el grafo $(S, \gamma_{|S})$ es un grafo conexo.

iv) La familia de los conjuntos minimales de conexión de T en (N, γ) es $\mathcal{MCS}(T, N, \gamma) = \big\{\{1,2,3\}, \{1,3,4,5\}\big\}$.

2.5. Situaciones de comunicación y reglas de reparto

Una *situación de comunicación* es un modelo para juegos cooperativos en los cuales los jugadores tienen restricciones en la comunicación dadas por un grafo o red social.

Definición 2.5.1 *Una situación de comunicación es una terna (N, v, γ), donde (N, v) es un juego cooperativo y (N, γ) un grafo (red). Los nodos en el grafo son los jugadores en el juego. $\mathcal{CS}^N$ denotará al conjunto de toda las situaciones de comunicación con conjunto de jugadores-nodos N.*

Para situaciones de comunicación (N, v, γ), Myerson (1977) definió el *juego restringido al grafo* (N, v^{γ}), en el cual la función característica viene dada por:

$$v^{\gamma}(S) = \sum_{C \in S/\gamma} v(C), \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Representa el beneficio de cada coalición bajo las restricciones en la comunicación impuestas por el grafo. Actualmente es frecuente hacer referencia a (N, v^{γ}) como el *juego de Myerson*.

Dado una red (N, γ) y $\emptyset \neq S \subseteq N$, si $\mathcal{MCS}(S, N, \gamma)$ no es vacío y $\mathcal{MCS}(S, N, \gamma) = \{S_1, S_2, ..., S_r\}$, entonces, Gómez et al. (2003) probaron que

$$(u_S)^\gamma = \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{r} (\mathbf{1} - u_{s_i}),$$

donde $\mathbf{1}$ es el juego definido por $\mathbf{1}(S) = 1$, para todo $S \neq \emptyset$, es decir, el elemento unidad del producto interno en G^N. Si, $\mathcal{MCS}(S, N, \gamma) = \emptyset$, entonces $(u_S)^\gamma = \mathbf{0}$.

Definición 2.5.2 *Una regla de asignación ψ en $\mathcal{CS}^N$ es una aplicación $\psi : \mathcal{CS}^N \to \mathbb{R}^n$, donde $\psi_i(N, v, \gamma)$ representa el pago o beneficio del jugador i en la situación de comunicación (N, v, γ).*

Dada la preeminencia del valor de Shapley como solución puntual para juegos cooperativos, Myerson propuso como regla de reparto para situaciones de comunicación el valor de Shapley del juego restringido al grafo. Ahora esta regla, μ, es conocida como el valor de Myerson. Entonces $\mu(N, v, \gamma) = Sh(N, v^\gamma)$. El valor de Myerson del i-ésimo jugador en la situación de comunicación (N, v, γ) viene dado por:

$$\mu_i(N, v, \gamma) = Sh_i(N, v^\gamma) = \sum_{S \subseteq N : i \in S} \frac{\Delta_{v^\gamma}(S)}{s}, \quad i \in N.$$

Myerson obtuvo dos caracterizaciones para su regla. La primera (Myerson, 1977) en términos de eficiencia en componentes y equidad (fairness):

- *Eficiencia en componentes.* Una regla de asignación ψ sobre $\mathcal{CS}^N$ satisface *eficiencia en componentes* si, para todo $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y todo $C \in N/\gamma$,

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \gamma) = v(C).$$

- *Equidad.* Una regla de asignación ψ sobre $\mathcal{CS}^N$ satisface *equidad* si, para todo $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y cada $l = \{i, j\} \in \gamma$,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma \setminus \{l\}) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma \setminus \{l\}).$$

La segunda (Myerson, 1980), a partir de eficiencia en componentes y contribuciones equilibradas.

- *Contribuciones equilibradas.* [4] Una regla de asignación ψ sobre $\mathcal{CS}^N$ satisface *contribuciones equilibradas* si, para todo $(N, v, \gamma) \in \mathcal{CS}^N$ y todo $i, j \in N$,

$$\psi_i(N, v, \gamma) - \psi_i(N, v, \gamma_{-j}) = \psi_j(N, v, \gamma) - \psi_j(N, v, \gamma_{-i}).$$

[4] Nótese que esta propiedad de contribuciones equilibradas adaptada al contexto de los juegos cooperativos fue introducida en la Sección 2.3, dado que el hecho de que un jugador rompa sus relaciones en el grafo γ y, por tanto, se aísle, puede entenderse como un abandono del juego.

En el siguiente ejemplo se muestra el cálculo del valor de Myerson en una situación concreta.

Ejemplo 2.5.1 *Consideramos el grafo del Ejemplo* 2.4.1. *Dado el juego* (N, v) *con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y* $v = u_{\{1,3\}}$, *se tiene que* $\mathcal{MCS}(\{1, 3\}, N, \gamma) = \big\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4, 5\}\big\}$ *y entonces,*

$$v^{\gamma} = u^{\gamma}_{\{1,3\}} = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - u_{\{1,2,3\}})(\mathbf{1} - u_{\{1,3,4,5\}}) = u_{\{1,2,3\}} + u_{\{1,3,4,5\}} -$$

$$u_{\{1,2,3\}} \cdot u_{\{1,3,4,5\}} = u_{\{1,2,3\}} + u_{\{1,3,4,5\}} - u_{\{1,2,3,4,5\}}.$$

De donde,

$$\mu(N, v, \gamma) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \frac{1}{4} - \frac{1}{5}) =$$

$$(\frac{23}{60}, \frac{2}{15}, \frac{23}{60}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}).$$

2.6. Juegos cooperativos ponderados

Uno de los axiomas que caracteriza el valor de Shapley es el axioma de simetría. Sin embargo, en muchas aplicaciones, la suposición de que, a excepción de los parámetros del juego, los jugadores son completamente simétricos, parece poco realista. Por lo tanto, en tales casos se propuso el uso de generalizaciones no simétricas del valor de Shapley.

Los valores de Shapley ponderados fueron introducidos por Shapley en su tesis doctoral (Shapley, 1953a). Owen (1968, 1972) estudió los valores de Shapley ponderados a través de enfoques probabilísticos. Las axiomatizaciones de valores no simétricos fueron realizadas (entre otros autores) por Shapley (1981), Kalai y Samet (1987) y Hart y Mas-Colell (1987).

Considérese, por ejemplo, una situación que involucra a dos jugadores. Si los dos jugadores cooperan en un proyecto conjunto, pueden generar un beneficio unitario, mientras que por sí solos no pueden generar ganancias. El valor de Shapley considera que esta situación es simétrica y reparte el beneficio de la cooperación por igual entre los dos jugadores. Sin embargo, en algunas aplicaciones puede haber falta de simetría. Puede ser, por ejemplo, que para que el proyecto tenga éxito, se necesite un mayor esfuerzo por parte del jugador 1 que por parte del jugador 2. Otro ejemplo surge en situaciones en las que el jugador 1 representa una gran electorado, mientras que el jugador 2 representa un electorado más pequeño. Además, la falta de simetría puede surgir cuando los jugadores tienen diferentes habilidades de negociación.

Para calcular el valor de Shapley ponderado, Sh^w, se asocia un peso real positivo λ_i a cada jugador $i \in N$ en un juego cooperativo, (N, v).

Shapley propuso dividir la unidad que los jugadores pueden obtener en un juego de unanimidad proporcionalmente a los pesos de los jugadores del soporte, es decir, para $i \in N$,

$$Sh_i^w(N, u_S, \{\lambda_i\}_{i\in N}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_{j\in S} \lambda_j}, & \text{si } i \in S \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y, luego extender el valor por linealidad a cualquier juego.

Este marco generaliza al de los juegos cooperativos clásicos en los que, si ignoramos el valor de las coaliciones, los jugadores son completamente simétricos. También el valor de Shapley ponderado generaliza el valor de Shapley (Shapley, 1953b), que es el caso particular obtenido si todos los pesos coinciden.

Shapley (1953a) sugirió la habilidad de negociación de cada jugador como una posible interpretación de sus pesos. Sin embargo, esta interpretación presenta un comportamiento anti-intuitivo. Para mostrar dicho comportamiento vamos a utilizar el mismo ejemplo que Owen (1968).

Ejemplo 2.6.1 *Consideramos el juego de mayoría simple* $(N, v) \in G^N$ *con* $N = \{1, 2, 3\}$ *y*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & si\ s \geq 2 \\ 0, & otro\ caso. \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, v puede ser escrito como:

$$v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}} + u_{\{2,3\}} - 2u_{\{1,2,3\}}.$$

Supongamos que el vector de ponderaciones es $\boldsymbol{\lambda} = (3, 1, 1)$. *Entonces,* $Sh^w(N, v) = (\frac{6}{20}, \frac{7}{20}, \frac{7}{20})$. *Owen (1968) observó que no parece razonable interpretar en este ejemplo los pesos de cada jugador como su capacidad de cooperación dado que el valor de Shapley ponderado asigna un menor beneficio (o indice de poder en este caso) al jugador con mayor habilidad de negociación.*

Por otro lado, si aumentamos la habilidad de regateo del jugador 1 *de 3 a 4 unidades, manteniendo el resto de pesos sin variar, el valor de Shapley ponderado para esta nueva situación es el vector* $Sh^w(N, v) = (\frac{8}{30}, \frac{11}{30}, \frac{11}{30})$. *Se observa que el poder del jugador* 1 *se ha visto reducido al incrementarse su peso, lo que resulta anti-intuitivo si se desea interpretar los pesos de los jugadores como capacidades de negociación.*

Como se ha dicho, Owen (1968) proporcionó otra interpretación para dichos pesos. Sugirió que podían ser vistos como coeficientes de lentitud o parsimonia para llegar a una decisión por parte de los miembros de una coalición (véase nota 1, pag. 5).

2.7. Extensiones multilineales

Owen (1972, 1982) justifica de la siguiente manera la introducción de las extensiones multilineales de un juego: *"Una de las principales dificultades con el valor de Shapley es que su cálculo generalmente requiere la suma de una gran cantidad de términos. Por lo tanto, incluso cuando la función característica sea fácil de definir, la evaluación puede requerir una gran cantidad de trabajo. Una posible opción es recurrir a la extensión multilineal del juego"*.

Owen (1972) introdujo la extensión multilineal para un juego cooperativo $(N, v) \in G^N$ como una función definida en $[0,1]^n$ y dada por

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} [\prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i)] v(S),$$

para $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, ..., n$. Si representamos con α^S los puntos extremos del cubo (vértices),

$$\alpha_i^S = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in S \\ 0, & \text{si } i \notin S, \end{cases}$$

es fácil ver que $f(\alpha^S) = v(S)$, ya que

$$f(\alpha^S) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} [\prod_{i \in T} \alpha_i^S \prod_{i \notin S} (1 - \alpha_i^S)] v(T),$$

y, es evidente que $\prod_{i \in T} \alpha_i^S \prod_{i \notin S} (1 - \alpha_i^S) = 0$, excepto para $T = S$, que será igual a la unidad. Así f es de hecho una extensión de v. Además es multilineal (i.e., lineal en cada variable) y es la única función multilineal que coincide con v en los vértices α^S.

La extensión multilineal puede ser interpretada como el valor esperado si se selecciona aleatoriamente una coalición asumiendo que cada jugador $i \in N$ tiene probabilidad x_i de unirse a la coalición.

En Owen (1972) se prueba que f admite la siguiente expresión alternativa:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} [\sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T)] \prod_{j \in S} x_j,$$

que puede ser escrito, usando los dividendos de Harsanyi como:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \Delta_v(S) \prod_{j \in S} x_j.$$

Owen (1972) probó que el valor de Shapley para un juego (N, v) y un jugador $i \in N$ puede calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$Sh_i(N, v) = \int_0^1 (\frac{\delta}{\delta x_i} f)(t, ..., t) dt.$$

Ejemplo 2.7.1 *Sea v el juego tripersonal de mayoría en la normalización (0,1). Su extensión multilineal es*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_1x_2x_3$$

y las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3 - 2x_2x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 - 2x_1x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 - 2x_1x_2$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(t, t, t) = 2t - 2t^2.$$

El valor de Shapley para el jugador 1 es

$$Sh_1(N, v) = \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_1} f(t, t, t))dt = \int_0^1 (2t - 2t^2)dt = \left[t^2 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

y similarmente $Sh_2(N, v) = Sh_3(N, v) = \frac{1}{3}$.

2.8. Juegos y estructuras de comunicación con coaliciones difusas

A continuación, se introducen definiciones básicas de los juegos y estructuras de comunicación con coaliciones difusas.

Sea K un conjunto finito. Un conjunto difuso en K, (Zadeh, 1965), es una función $\tau : K \to [0, 1]$. La familia de conjuntos difusos en K se denota como $[0, 1]^K$. Cada subconjunto $Q \subseteq K$ está asociado al conjunto difuso $e^Q \in [0, 1]^K$ con

$$e^Q(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in Q \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

En particular, denotaremos $e^\emptyset = \mathbf{0}$. Si $\tau \in [0, 1]^K$, el soporte de τ se define como $sop(\tau) = \{i \in K \mid \tau(i) \neq 0\}$.

Aubin (1981) definió una coalición difusa como un conjunto difuso $\tau \in [0, 1]^N$ de jugadores donde cada coordenada $\tau(i)$ es interpretada como el grado de membresía del jugador $i \in N$ a la coalición y el $sop(\tau)$ es el conjunto de jugadores activos. Consideramos un juego nítido v (juego cooperativo clásico). Aubin propuso una forma de valorar una coalición difusa por medio de v usando la siguiente afirmación: *Los jugadores organizan coaliciones nítidas donde todos los jugadores trabajan al mismo nivel.* Entonces, para cada coalición difusa, introdujo la idea de una familia equilibrada que entendemos como una división por niveles. Si $\tau \in [0,1]^N$ entonces una partición por niveles de τ es un conjunto finito de coaliciones nítidas y niveles $(S_k, s_k)_{k=1}^{k=m}$ tal que $s_k \in [0,1]$ y $\tau = \sum_{k=1}^{m} s_k e^{S_k}$. Podemos ver que una partición habitual de una coalición nítida S es una partición por niveles de una coalición difusa e^S. Sea f una partición por niveles $f(\tau) = (S_k, s_k)_{k=1}^{k=m}$ para cada $\tau \in [0,1]^N$ y satisfaciendo $f(e^S) = (S,1)$ para todo $S \subseteq N$. La extensión de v por f es una nueva función característica $f(v)$ sobre las coaliciones difusas definida como

$$f(v)(\tau) = \sum_{k=1}^{m} s_k v(S_k).$$

Un caso particular de la extensión de un juego nítido es la extensión de Choquet definida por Tsurumi et al. (2001). Sea $\tau \in [0,1]^N$ una coalición difusa. Para los diferentes niveles (no nulos) en τ, $h_1 < \ldots < h_m$, tomamos los conjuntos $S[k] = \{i \in N \mid \tau(i) = h_k\}$ y $S_k = \{i \in N \mid \tau(i) \geq h_k\}$ para todo $k = 1, \ldots, m$.

Tsurumi et al. (2001) consideraron la partición por niveles $Ch(\tau) = (S_k, h_k - h_{k-1})_{k=1}^{k=m}$ con $h_0 = 0$ y entonces la extensión de Choquet de v está definida por

$$Ch(v)(\tau) = \sum_{k=1}^{m} [h_k - h_{k-1}] v(S_k).$$

Tsurumi et al. (2001) también introdujeron una extensión del valor de Shapley, el valor Choquet-Shapley de un juego v para la coalición $\tau \in [0,1]^N$ es

$$Sh^{ch}(v)(\tau) = \sum_{k=1}^{m} [h_k - h_{k-1}] Sh(v_{S_k}).$$

Sea γ el conjunto de comunicaciones bilaterales entre los jugadores en N. Jiménez et al., definieron una estructura de comunicación difusa para el juego v en un grafo no dirigido difuso sobre N, como una dupla (τ, ρ) con $\tau \in [0,1]^N$ el conjunto difuso de vértices y $\rho \in [0,1]^\gamma$ el conjunto de aristas que satisface $\rho(i,j) \leq \text{mín}\{\tau(i), \tau(j)\}$ para todo $\{i,j\} \in \gamma$. Notaron FCS^N al conjunto de estructuras de comunicación difusas con conjunto de jugadores N. Sea $(\tau, \rho) \in FCS^N$ una estructura de comunicación difusa. El número $\tau(i)$ es interpretado como el nivel real de membresía de $i \in N$ en el juego v. El número $\rho(i,j)$ representa el nivel máximo con el que la arista $\{i,j\}$ puede ser usado.

Capítulo 3

Un valor σ para juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas (o habilidades de negociación)

Lo que sabemos es una gota de agua; Lo que ignoramos es el océano.

Isaac Newton

En este capítulo se desarrollan las dos primeras aportaciones que se han llevado a cabo en la presente memoria. En primer lugar, definimos de manera formal los juegos de cooperación imperfecta. Y, en segundo lugar, definimos el valor propuesto para dar solución a dichos juegos.

3.1. Juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas

En esta sección extendemos la clásica definición de juego cooperativo para admitir la posibilidad de que los jugadores puedan tener diferentes habilidades de negociación o diferentes niveles de cooperación como en Shapley (1953a). Estas habilidades de negociación se introducen por medio de un vector $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in [0,1]^n$. λ_i representa la capacidad de negociación [5] del jugador $i \in N$. Cuanto mayor es λ_i, mayor es el nivel de cooperación del jugador i. El caso $\lambda_i = 1$ corresponde a la plena cooperación (jugador típico en un juego cooperativo clásico) mientras que $\lambda_i = 0$ indica un comportamiento absolutamente no cooperativo. Cada vector de habilidades de cooperación $\boldsymbol{\lambda} \in [0,1]^n$ también puede ser visto como una coalición difusa (Aubin, 1981).

[5] Shapley (1953a) supuso que las habilidades de negociación son valores en $\mathbb{R}^+$.

Como consecuencia, asumiremos que en estas situaciones, el valor de las diferentes coaliciones se modifica debido a la cooperación imperfecta. Nuestra propuesta es que el juego inicial se trasforma en un nuevo juego cooperativo en el que los dividendos iniciales son modificados a través de un factor de descuento que mide la proporción del dividendo que los jugadores en la coalición pueden retener como consecuencia de la falta de habilidad en la cooperación o de su falta de interés en ella. Así, proponemos que el factor de descuento se corresponda con la mínima habilidad de negociación de los jugadores involucrados en cada dividendo (bajo el supuesto de que no se puede tener un mayor nivel de cooperación que el correspondiente al jugador con el menor deseo de cooperar). Los dividendos de las coaliciones individuales no se descontarán ya que cada jugador siempre está de acuerdo consigo mismo.

Para un juego en el que los jugadores tienen diferentes habilidades cooperativas nuestra propuesta de solución puntual es el valor de Shapley del juego modificado. Debe destacarse que (en el espíritu de los valores ponderados de Shapley) se puede obtener la misma solución sin modificar el juego original, pero distribuyendo equitativamente entre los jugadores no nulos del juego de unanimidad $(N, u_S), \emptyset \neq S \subseteq N, s \geq 2$ el mínimo (1, si S es una coalición individual) de sus habilidades de negociación y 0 para los jugadores nulos, extendiendo después por linealidad. Antes de formalizar estas ideas y para tratar de aclararlas, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.1 *En un parlamento la distribución de los escaños es* 16 % *para el partido anti-austeridad,* 35 % *para el partido de izquierdas,* 9 % *para el partido de centro y* 40 % *para el partido de la derecha. Se requiere más del* 50 % *de los votos a favor para formar gobierno. Como consecuencia, se necesita el acuerdo de al menos dos partidos para obtener la mayoría. Esta situación se puede modelar mediante el juego de mayoría simple,* (N, v)*, con* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*, y*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S=\{1,2\},\ S=\{1,4\},\ S=\{2,4\} \text{ o } s \geq 3 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos que los deseos de cooperación de los diferentes partidos vienen dados por $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 1, 0.8, 0.1)$ [6]*. Esto puede ocurrir si, por ejemplo, el partido de anti-austeridad prefiere nuevas elecciones (estima un mayor número de escaños en ellas) y también si el partido de la derecha no quiere participar en un gobierno de coalición. Como ejemplo, en España, después de las elecciones del 20 de diciembre de 2015, la falta de capacidad de cooperación de los partidos involucrados (entre otras causas) motivó nuevas elecciones el 26 de Junio de 2016. Esta falta de capacidad de negociación continuó y, después de las elecciones del 28 de abril de 2019, la falta de acuerdos para formar una mayoría llevó a una nueva convocatoria de elecciones el 10 de noviembre*

[6] Admitimos como una debilidad de nuestra propuesta la dificultad inherente para medir y verificar las habilidades de los jugadores. Esta crítica, por supuesto, puede extenderse a modelos relacionados en la literatura.

de 2019.

En este caso, en términos de la base de unanimidad, v puede ser escrito como:

$$v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,4\}} + u_{\{2,4\}} - 2u_{\{1,2,4\}}$$

y el juego modificado es

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}u_{\{1,2\}} + \min\{\lambda_1, \lambda_4\}u_{\{1,4\}} + \min\{\lambda_2, \lambda_4\}u_{\{2,4\}} - 2\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4\}u_{\{1,2,4\}}$$

$$= \min\{0.2, 1\}u_{\{1,2\}} + \min\{0.2, 0.1\}u_{\{1,4\}} + \min\{1, 0.1\}u_{\{2,4\}} - 2\min\{0.2, 1, 0.1\}u_{\{1,2,4\}}$$

$$= 0.2u_{\{1,2\}} + 0.1u_{\{1,4\}} + 0.1u_{\{2,4\}} - 0.2u_{\{1,2,4\}}.$$

La solución propuesta es el valor Shapley de este último juego y, entonces,

$$Sh(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) = (\frac{0.2}{2} + \frac{0.1}{2} - \frac{0.2}{3}, \frac{0.2}{2} + \frac{0.1}{2} - \frac{0.2}{3}, 0, \frac{0.1}{2} + \frac{0.1}{2} - \frac{0.2}{3})$$

$$= (0.0833, 0.0833, 0, 0.0333).$$

El valor de Shapley del juego original v (en el que las habilidades de negociación son ignoradas o equivalentemente todas ellas valen 1) es

$$(0.3333, 0.3333, 0, 0.3333)$$

y el valor de Shapley ponderado (Shapley, 1953a) para los pesos dados por $\boldsymbol{\lambda}$ *es*

$$(0.5256, 0.2040, 0, 0.2704).$$

El valor propuesto es claramente ineficiente (uno de nuestros supuestos es que la cooperación imperfecta conduce a la ineficiencia). Pero podemos comparar el poder relativo de los partidos. El partido de centro siempre es un jugador nulo. El valor de Shapley es igual para los otros tres partidos. Según nuestra propuesta, con las habilidades consideradas, los partidos 1 y 2 tienen el mismo poder, que es 2.5 veces el poder del cuarto partido. Bajo el valor de Shapley ponderado, el primero es el más poderoso, seguido del cuarto y éste, a su vez, del segundo.

Definición 3.1.1 *Un juego cooperativo con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación (o de cooperación) es una terna* $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ *en la cual* (N, v) *es un juego cooperativo y* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i \in N}$ *es un vector, con* $\lambda_i \in [0, 1]$, *para todo* $i \in N$. λ_i *representa la habilidad de negociación del jugador* i. G^N_Λ *denota al conjunto de todos los juegos cooperativos, con conjunto de jugadores* $N = \{1, 2, ..., n\}$ *y que tienen diferentes habilidades de cooperación.*

Observación 3.1.1 *Identificaremos* G^N *con el subconjunto de los* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$ *en los que* $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, *siendo* $\mathbf{1}$ *el vector con todas sus componentes iguales 1.*

Observación 3.1.2 $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$ *con* (N, v) *un juego cero-normalizado puede ser descrito como una estructura de comunicación difusa (Jiménez-Losada et al. 2010, 2013) con todas las aristas.*

3.2. El juego modificado

En la siguiente definición modificamos la función característica de un juego cooperativo para tener en cuenta que los jugadores pueden tener diferentes habilidades de regateo. Nuestra propuesta asume que los jugadores en un juego de unanimidad (de una coalición no individual) solo pueden retener una fracción de su dividendo que coincide con el mínimo de sus habilidades. Como se mencionó, es razonable suponer que cada jugador es totalmente cooperativo consigo mismo y, por lo tanto, en la siguiente definición, los dividendos de las coaliciones individuales no se descuentan. Se dice que *dos no riñen si uno no quiere* y, de manera similar, asumiremos que *dos (o más) no cooperan si uno (o algunos) no quieren.* Esta es la idea que subyace en nuestra suposición.

Definición 3.2.1 *A cada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ le asociamos un nuevo juego cooperativo, $(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) \in G^N$, con función característica dada por:*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_v(T) \min_{i \in T}\{\lambda_i\} + \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}), \text{ para todo } S \subseteq N, S \neq \emptyset,$$

y $v^{\boldsymbol{\lambda}}(\emptyset) = 0$.

Observación 3.2.1 *En la definición anterior es fácil ver que $v^{\boldsymbol{\lambda}} \equiv v$ siempre que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$. Por otro lado, si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ (el vector nulo), entonces,*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) = \sum_{i \in S} v^{\boldsymbol{\lambda}}(\{i\}),$$

para todo $\emptyset \neq S \subseteq N$, y por tanto, $v^{\boldsymbol{\lambda}}$ es un juego inesencial, lo que es consistente con la absoluta falta de interés en la cooperación de todos los jugadores pertenecientes a N. Ademas si $\lambda_i = \lambda \in [0, 1]$ para todo $i \in N$, se tiene que para $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) &= \lambda \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_v(T) + \lambda \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) + (1 - \lambda) \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) \\ &= \lambda v(S) + (1 - \lambda) \sum_{i \in S} v(\{i\}), \end{aligned}$$

y por tanto $v^{\boldsymbol{\lambda}}$ es estratégicamente equivalente a v.

Observación 3.2.2 *Cabe señalar que la definición anterior no garantiza que para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$, $v^{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ coincida con*

$$v_*^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \begin{cases} \min_{i \in S}\{\lambda_i\} v(S), & \text{si } s \geq 2 \\ v(S), & \text{si } s = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta hubiera sido una posible definición alternativa (también coherente con la idea de mínima capacidad cooperativa). Sin embargo, esta definición tiene serias desventajas.

Superadititividad, convexidad y casi-positividad del juego (N,v) no son heredadas por el juego $(N,v_*^{\boldsymbol{\lambda}})$. Como ejemplo, consideremos $N=\{1,2,3\}$,

$$v(S)=\begin{cases} 1, & \textit{si } s\geq 2\\ 0, & \textit{en otro caso,}\end{cases}$$

(convexo y superaditvo) y $\boldsymbol{\lambda}=(0.1,0.2,0.3)$. Entonces,

$$v_*^{\boldsymbol{\lambda}}(S)=\begin{cases} \min_{i\in S}\{\lambda_i\}, & \textit{si } s\geq 2\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

Por lo tanto

$$v_*^{\boldsymbol{\lambda}}(N)=0.1\leq v_*^{\boldsymbol{\lambda}}(\{2,3\})+v_*^{\boldsymbol{\lambda}}(\{1\})=0.2,$$

es decir, $(N,v_*^{\boldsymbol{\lambda}})$ no es convexo ni superaditivo. Similarmente para $N=\{1,2,3\}$,

$$v(S)=\begin{cases} \binom{s}{2}, & \textit{si } s\geq 2\\ 0, & \textit{en otro caso,}\end{cases}$$

(juego casi-positivo), y $\boldsymbol{\lambda}=(0.1,0.2,0.3)$, $v_*^{\boldsymbol{\lambda}}$ no es casi-positivo, ya que

$$v_*^{\boldsymbol{\lambda}}=0.1u_{\{1,2\}}+0.1u_{\{1,3\}}+0.2u_{\{2,3\}}-0.1u_{\{1,2,3\}}.$$

Observación 3.2.3 *Para $(N,v,\boldsymbol{\lambda})\in G_\Lambda^N$ con (N,v) un juego cero-normalizado, $(N,v^{\boldsymbol{\lambda}})\in G^N$ coincide con el juego definido en (6) de Jiménez-Losada et al. (2013) cuando la medida del beneficio es la de Choquet en grafos. Si el juego no es cero-normalizado, las coaliciones individuales reciben un tratamiento diferente a nuestro enfoque. La idea de mantener los dividendos de las coaliciones individuales puede encontrarse también en Fernández, Gallego, Jiménez-Losada y Ordóñez (2018) (en particular en la definición del cg-position value, Definición 6, en dicho artículo).*

3.3. Un valor σ para juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas

A continuación se define una solución puntual para los juegos con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación.

Definición 3.3.1 *Una regla de reparto (o asignación) ψ en G_Λ^N es una función $\psi: G_\Lambda^N\to\mathbb{R}^n$ que satisface $\psi(N,v,\mathbf{0})=\big[v(\{1\}),...,v(\{n\})\big]$. Para cada $i\in N$, $\psi_i(N,v,\boldsymbol{\lambda})$ representa el pago para el jugador i en $(N,v,\boldsymbol{\lambda})$.*

En la definición anterior se exige que la solución para los juegos donde todos los jugadores tienen capacidad nula de negociación, coincida con el beneficio que cada uno puede obtener por sí mismo sin participar en ninguna coalición, es decir, sin cooperar.

Definición 3.3.2 *La regla de reparto σ en G_Λ^N se define como*

$$\sigma(N,v,\boldsymbol{\lambda}) = Sh(N,v^{\boldsymbol{\lambda}}),$$

para todo $(N,v,\boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$.

Observación 3.3.1 *La restricción de σ a la familia $\{(N,v,\mathbf{1})\}_{(N,v)\in G^N} \subset G_\Lambda^N$ coincide con el valor de Shapley en G^N. Además, para todo $(N,v,\boldsymbol{\lambda})$ con $\lambda_i = \lambda$ para todo $i \in N$,*

$$\sigma_i(N,v,\boldsymbol{\lambda}) = \lambda Sh_i(N,v) + (1-\lambda)v(\{i\}),$$

para todo $i \in N$. En particular, si (N,v) es un juego cero-normalizado y $\boldsymbol{\lambda} = \lambda.\mathbf{1}$, $\sigma(N,v,\boldsymbol{\lambda}) = \lambda.Sh(N,v)$.

Entonces, en juegos donde todos los jugadores tienen capacidad máxima de negociación la regla σ reparte igual que el valor de Shapley del juego clásico. Por otro lado, cuando todos los jugadores tengan la misma capacidad constante de negociación y el juego sea cero-normalizado, el pago propuesto por σ es proporcional al valor de Shapley. Ello es consistente con el hecho de que en tal situación el juego modificado y el original son proporcionales.

Observación 3.3.2 *El valor de Shapley de $(N,v_*^{\boldsymbol{\lambda}})$ (véase Observación 3.2.2) tiene un comportamiento anti-intuitivo. Consideramos el juego (N,v) con $N=\{1,2\}$ y para $\emptyset \neq S \subseteq N$,*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & si\ s=1 \\ 3, & si\ s=2. \end{cases}$$

Entones, cada jugador puede obtener 1 unidad por sí mismo, y juntos pueden obtener 3 unidades. Supongamos que la disposición a cooperar de uno de ellos (o de ambos) es nula. En tal caso,

$$v_*^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \begin{cases} 1, & si\ s=1 \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

y por tanto, $Sh_1(N,v_*^{\boldsymbol{\lambda}}) = Sh_2(N,v_*^{\boldsymbol{\lambda}}) = 0$. No parece muy intuitivo que cada jugador pierda lo que puede obtener de manera unilateral, precisamente cuando no quiere cooperar.

Sin embargo, es fácil ver que el valor Shapley de $(N,v_*^{\boldsymbol{\lambda}})$ es también monótono en los pesos.

Observación 3.3.3 *Los lectores críticos con la definición anterior de σ (quizá con el uso del juego modificado para calcular la solución, en vez de utilizar el juego original) pueden adoptar otro punto de vista, paralelo al considerado en (Shapley, 1953a) para los valores de Shapley ponderados, definiendo σ para los juegos de unanimidad (con jugadores que pueden tener diferentes habilidades de negociación) como:*

$$\sigma_i(N,u_T,\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \frac{\min_{j\in T}\{\lambda_j\}}{t}, & si\ i\in T, t\geq 2 \\ 1, & si\ T=\{i\} \\ 0, & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

para $i = 1, 2, ..., n$, y extendiendo por linealidad a G_Λ^N [7].

Observación 3.3.4 *Para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ con (N, v) un juego cero-normalizado, σ coincide con el valor cg-Myerson para (N, v) y una estructura de comunicación difusa completada en aristas. En el Teorema 8 de Jiménez-Losada et al. (2010) y en el Teorema 7 de Jiménez-Losada et al. (2013) se demuestra que dicho valor coincide con el valor Choquet-Shapley de la extensión de (N, v) introducida por Tsurumi et al. (2001).*

[7] Para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ e $i = 1, 2, ..., n$,

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) = Sh_i[N, (\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \Delta_v(T) u_T)^{\boldsymbol{\lambda}}]$$

$$= Sh_i[N, \sum_{T \subseteq N, t \geq 2} \Delta_v(T) \min_{j \in T}\{\lambda_j\} u_T + \sum_{j \in N} \Delta_v(\{j\}) u_{\{j\}}]$$

$$= \sum_{T \subseteq N, i \in T, t \geq 2} \Delta_v(T) \frac{\min_{j \in T}\{\lambda_j\}}{t} + \Delta_v(\{i\}) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \Delta_v(T) \sigma_i(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}).$$

Capítulo 4

Monotonía de σ en las habilidades de cooperación

Equipado con sus cinco sentidos, el hombre explora el universo que lo rodea y a sus aventuras las llama Ciencia.

Edwin Powel Hubble

En esta sección, abordaremos el problema de determinar en qué medida la regla de asignación definida, σ, satisface monotonía en los pesos, en el sentido de que si el juego subyacente es superaditivo, entonces, si se incrementa el nivel de cooperación del jugador i, manteniéndose fijo todo lo demás, el pago de tal jugador no debe disminuir.

El análisis de hasta qué punto se verifica esta propiedad es una de las principales motivaciones para el desarrollo de la presente memoria, dado que es el incumplimiento de ella por parte de los valores de Shapley ponderados (Shapley, 1953a) lo que nos ha inducido al estudio de estos juegos desde un punto de vista diferente al que Shapley desarrollo en su trabajo original.

4.1. Descomposición lineal de juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas

A continuación probamos que el juego modificado puede ser escrito como una combinación lineal positiva de juegos en G^N. En particular, el siguiente lema muestra que para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$ con (N, v) un juego cero-normalizado, la función característica $v^{\boldsymbol{\lambda}}$ es la extensión de Choquet de v (Choquet, 1953; Sugeno y Murofushi, 1987; Grabisch, Murofushi y Sugeno 1992; Tsurumi et al. 2001).

Dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ asociaremos al juego modificado $(N, v^{\boldsymbol{\lambda}})$ un conjunto de números reales y_h, $h = 0, 1, ..., r$, donde $r \leq n$ es el número de diferentes valores entre los pesos de los jugadores en $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$. Entonces, definimos $y_0 = 0$, y para $h = 1, 2, ..., r$, $y_h = \min\limits_{i \in N}\{\lambda_i \mid \lambda_i > y_{h-1}\}$.

Lema 4.1.1 *Dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$, siendo (N, v) un juego cero-normalizado, se tiene que*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1} (y_{h+1} - y_h) v_{|N_{h+1}}$$

con $N_{h+1} = \{i \in N \mid \lambda_i \geq y_{h+1}\}$, para $h = 0, ..., r-1$.

Demostración: Consideremos $S \subseteq N$. Entonces,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T) \min_{i \in T}\{\lambda_i\}.$$

Supongamos $T \subseteq N$ tal que $T \subseteq S$. Para determinar el coeficiente que multiplica al dividendo $\Delta_v(T)$ en

$$\sum_{h=0}^{r-1} (y_{h+1} - y_h) v_{|N_{h+1}}(S) = \sum_{h=0}^{r-1} (y_{h+1} - y_h) v(S \cap N_{h+1}),$$

definimos $k = \max\limits_{h} \{h \mid T \subseteq N_{h+1}\}$.
Como $\Delta_v(T)$ es uno de los sumandos en

$$v(S \cap N_{h+1}) = \sum_{\emptyset \neq R \subseteq S \cap N_{h+1}} \Delta_v(R)$$

solo si $T \subseteq S \cap N_{h+1}$, se tiene que el factor que multiplica $\Delta_v(T)$ es nulo para $h > k$. Entonces,

$$\sum_{h=0}^{r-1} (y_{h+1} - y_h) v_{|N_{h+1}}(S) = \Delta_v(T) \sum_{h=0}^{k} (y_{h+1} - y_h) + \sum_{h=0}^{k} (y_{h+1} - y_h) \left[v_{|N_{h+1}}(S) - \Delta_v(T)\right]$$

$$+ \sum_{h=k+1}^{r-1} (y_{h+1} - y_h) v_{|N_{h+1}}(S).$$

$\Delta_v(T)$ no aparece ni en la segunda ni en la tercera suma, y por lo tanto el coeficiente resultante es igual a $\sum\limits_{h=0}^{k} (y_{h+1} - y_h) = y_{k+1}$. En consecuencia, solo se necesita probar que $\min\limits_{i \in T}\{\lambda_i\} = y_{k+1}$.

Dado que para todo $i \in T$, $\lambda_i \geq y_{k+1}$, se tiene que $\min_{i \in T}\{\lambda_i\} \geq y_{k+1}$. Por reducción al absurdo, supongamos que $y_{k+1} < \min_{i \in T}\{\lambda_i\}$. Entonces, para todo $i \in T$, $\lambda_i > y_{k+1}$, lo cual implica que para $i \in T, \lambda_i \geq y_{k+2}$. Ello contradice la definición de k, quedando entonces el resultado probado. ■

Como consecuencia directa del lema anterior, se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 4.1.1 *Dado* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$*, supongamos que* (N, v_o) *es la cero-normalización de* (N, v)*. Entonces*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{o_{|N_{h+1}}} + \sum_{i \in N} v_{|\{i\}},$$

con $N_{h+1} = \{i \in N \mid \lambda_i \geq y_{h+1}\}$*, para* $h = 0, ..., r - 1$*.*

Demostración: Dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$, la función característica v puede ser escrita como $v = v_o + \sum_{i \in N} v_{|\{i\}}$, siendo v_o la cero-normalización de v. Entonces,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = v_o^{\boldsymbol{\lambda}} + \sum_{i \in N} v^{\boldsymbol{\lambda}}_{|\{i\}} = v_o^{\boldsymbol{\lambda}} + \sum_{i \in N} v_{|\{i\}},$$

y por tanto, utilizando el lema previo, el resultado queda probado. ■

Corolario 4.1.2 *Dado* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$*, se tiene que*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|N_{h+1}} + \sum_{i \in N}(1 - \lambda_i)v_{|\{i\}},$$

con $N_{h+1} = \{i \in N \mid \lambda_i \geq y_{h+1}\}$*, para* $h = 0, ..., r - 1$*.*

Demostración: Es claro que, dado $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i \in N}$, la transformación que asigna a cada $(N, v) \in G^N, (N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) \in G^N$ es lineal en $\boldsymbol{\lambda}$, es decir, para $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}' + \boldsymbol{\lambda}''$, con $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\lambda}'' \in [0, 1]^n$, $v^{\boldsymbol{\lambda}} = v^{\boldsymbol{\lambda}'} + v^{\boldsymbol{\lambda}''}$. Dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$, $v = v_o + \sum_{i=1}^{n} v_{|\{i\}}$ con (N, v_o), la cero-normalización de (N, v). Y, por tanto, usando la linealidad,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = v_o^{\boldsymbol{\lambda}} + \sum_{i=1}^{n}(v_{|\{i\}})^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{o_{|N_{h+1}}} + \sum_{i=1}^{n} v_{|\{i\}},$$

donde la última igualdad se obtiene a partir el lema anterior y como consecuencia de que $(v_{|\{i\}})^{\boldsymbol{\lambda}} = v_{|\{i\}}$ para todo $\boldsymbol{\lambda}$.

Entonces, tenemos que

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{o_{|N_{h+1}}} + \sum_{i=1}^{n} v_{|\{i\}} = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)\big[v_{|N_{h+1}} - \sum_{i\in N_{h+1}} v_{|\{i\}}\big] +$$

$+\sum_{i=1}^{n} v_{|\{i\}} = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|N_{h+1}} - \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h) \sum_{i\in N_{h+1}} v_{|\{i\}} + \sum_{i\in N} v_{|\{i\}}$, donde la segunda igualdad se obtiene porque, para (N, v) y su cero-normalización (N, v_o), tenemos que $v = v_o + \sum_{i\in N} v_{|\{i\}}$.

Para $i_o \in N$, sea $t \in \{1, ..., r\}$ tal que $\lambda_{i_o} = y_t$ (naturalmente, t depende de i_o). Entones, $i_o \in \bigcap_{h=1}^{t} N_h$. Como consecuencia, en la expresión $\sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h) \sum_{i\in N_{h+1}} v_{|\{i\}}$, $v_{|\{i_0\}}$ está multiplicado por

$$y_t - y_{t-1} + y_{t-1} - y_{t-2} + ... + y_1 - y_o = y_t = \lambda_{i_o}$$

lo que completa la demostración. ■

Proposición 4.1.1 *Dado $(N, v, \lambda) \in G^N_\Lambda$, si (N, v) es un juego superaditivo, entonces, $v^\lambda(N) \leq v(N)$.*

Demostración: Vamos a suponer primero que (N, v) es un juego cero-normalizado. Como se sabe, si un juego cooperativo es cero-normalizado y superaditivo, también es monótono. Entonces, usando la expresión de Choquet

$$v^\lambda(N) = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|N_{h+1}} = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v(N \cap N_{h+1}).$$

Como por la monotonía, $v(N \cap N_{h+1}) \leq v(N)$, para todo $h = 0, ..., r - 1$

$$v^\lambda(N) \leq v(N) \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h) = v(N) \cdot y_r \leq v(N).$$

Si (N, v) no es cero-normalizado, entonces

$$v = v_0 + \sum_{i=1}^{n} v_{|\{i\}}$$

Y por tanto,

$$v^\lambda = v^\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} v^\lambda_{|\{i\}}.$$

Entonces

$$v^{\lambda}(N) = v_0^{\lambda}(N) + \sum_{i=1}^{n} v^{\lambda}_{|\{i\}}(N) = v_0^{\lambda}(N) + \sum_{i\in N} v(\{i\}).$$

Como (N, v) es superaditivo, se tiene que (N, v_0) también lo es, y haciendo uso de que $v_0^{\lambda}(N) \leq v_0(N)$ tenemos,

$$v^{\lambda}(N) = v_0^{\lambda}(N) + \sum_{i\in N} v(\{i\}) \leq v_0(N) + \sum_{i\in N} v(\{i\}) = v(N),$$

lo que completa la demostración. ■

A continuación, se particularizan los resultados anteriores en un ejemplo concreto. Se muestra que dada una coalición S cualquiera podemos calcular el valor de esta coalición en el juego $v^{\lambda}(S)$ mediante la definición de v^{λ} en términos de los dividendos o mediante la descomposición en suma de juegos cooperativos clásicos.

Ejemplo 4.1.1 *Sea* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_{\Lambda}$ *con* $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.5, 0.5, 0.7)$ *y*

$$v(S) = \begin{cases} s-1, & \textit{si } s \geq 2 \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

En términos de la base de la unanimidad, v *puede ser escrito como:*

$$v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}} + u_{\{1,4\}} + u_{\{2,3\}} + u_{\{2,4\}} + u_{\{3,4\}} - u_{\{1,2,3\}} - u_{\{1,2,4\}}$$

$$-u_{\{1,3,4\}} - u_{\{2,3,4\}} + u_{\{1,2,3,4\}},$$

y así, por definición,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.2u_{\{1,2\}} + 0.2u_{\{1,3\}} + 0.2u_{\{1,4\}} + 0.5u_{\{2,3\}} + 0.5u_{\{2,4\}} + 0.5u_{\{3,4\}}$$
$$-0.2u_{\{1,2,3\}} - 0.2u_{\{1,2,4\}} - 0.2u_{\{1,3,4\}} - 0.5u_{\{2,3,4\}} + 0.2u_{\{1,2,3,4\}},$$

de donde,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \begin{cases} 0.2, & \textit{si } S=\{1,2\} \textit{ o } S=\{1,3\} \textit{ o } S=\{1,4\} \\ 0.5, & \textit{si } S=\{2,3\} \textit{ o } S=\{2,4\} \textit{ o } S=\{3,4\} \\ 0.7, & \textit{si } S=\{1,2,3\} \textit{ o } S=\{1,2,4\} \textit{ o } S=\{1,3,4\} \\ 1, & \textit{si } S=\{2,3,4\} \\ 1.2, & \textit{si } S=N \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Utilizando la notación del Lema 4.1.1 *tenemos que* $r = 3$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0.2$, $y_2 = 0.5$ *e* $y_3 = 0.7$*. Entonces,* $(N, v^{\boldsymbol{\lambda}})$ *admite la siguiente descomposición:*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.2v + (0.5 - 0.2)v_{|_{\{2,3,4\}}} + (0.7 - 0.5)v_{|_{\{4\}}},$$

o alternativamente,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = 0.2v(S) + 0.3v(S \cap \{2,3,4\}) + 0.2v(S \cap \{4\}), \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Consideremos, por ejemplo, la coalición $S = \{1,3,4\}$, entonces

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(\{1,3,4\}) = 0.2v(\{1,3,4\}) + 0.3v(\{1,3,4\} \cap \{2,3,4\}) + 0.2v(\{1,3,4\} \cap \{4\})$$

$$= 0.2v(\{1,3,4\}) + 0.3v(\{3,4\}) + 0.2v(\{4\}) = 0.7.$$

4.2. Propiedades heredadas por el juego modificado

En el juego del ejemplo anterior (N,v) y $(N,v^{\boldsymbol{\lambda}})$ son superaditivos y convexos. (N,v) es simétrico, pero $(N,v^{\boldsymbol{\lambda}})$, obviamente no lo es. En la siguiente proposición, que se apoya en el lema que la precede, probaremos que la superaditividad, convexidad y casi-positividad de (N,v) son heredadas por $(N,v^{\boldsymbol{\lambda}})$, para todo $\boldsymbol{\lambda}$.

Lema 4.2.1 *Dado $(N,v) \in G^N$ y $R \subseteq N$, si (N,v) es convexo (superaditivo) entonces $(N,v_{|_R})$ es también convexo (superaditivo).*

Demostración: Para probar que las restricciones conservan la convexidad, consideremos (N,v) convexo y S, $T \subseteq N$. Entonces,

$$v_{|_R}(S \cup T) + v_{|_R}(S \cap T) = v[R \cap (S \cup T)] + v(R \cap S \cap T) = v[(R \cap S) \cup (R \cap T)]$$

$$+ v[(R \cap S) \cap (R \cap T)] \geq v(R \cap S) + v(R \cap T) = v_{|_R}(S) + v_{|_R}(T),$$

donde la desigualdad se tiene porque (N,v) es convexo.

Por otro lado, para probar la superaditividad de $v_{|R}$ dada la de v, consideramos S, $T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$. Entonces,

$$v_{|_R}(S \cup T) = v[R \cap (S \cup T)] = v[(R \cap S) \cup (R \cap T)] \geq v(R \cap S) + v(R \cap T)$$

$$= v_{|_R}(S) + v_{|_R}(T),$$

donde la desigualdad se tiene por la superaditividad de (N,v). ■

Proposición 4.2.1 *Dado $(N,v,\boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$,*

i) Si (N,v) es convexo, entonces $(N,v^{\boldsymbol{\lambda}})$ también lo es.

ii) Si (N,v) es superaditivo, entonces $(N,v^{\boldsymbol{\lambda}})$ también lo es.

iii) Si (N,v) es casi-positivo, entonces $(N,v^{\boldsymbol{\lambda}})$ también lo es.

Demostración:

i) Sea $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$, con (N, v) un juego convexo. Entonces para todo S, $T \subseteq N$, como una consecuencia del Corolario 4.1.2,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S \cup T) + v^{\boldsymbol{\lambda}}(S \cap T) = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|_{N_{h+1}}}(S \cup T) + \sum_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i)v_{|_{\{i\}}}(S \cup T)$$
$$+ \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|_{N_{h+1}}}(S \cap T) + \sum_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i)v_{|_{\{i\}}}(S \cap T).$$

Utilizando la convexidad de (N, v) y por lo tanto (Lema 4.2.1) la convexidad de $(N, v_{|_{N_{h+1}}})$, para $h = 0, ..., r-1$, y la de $(N, v_{|_{\{i\}}})$ para $i = 1, .., n$,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S \cup T) + v^{\boldsymbol{\lambda}}(S \cap T) \geq \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)\big[v_{|_{N_{h+1}}}(S) + v_{|_{N_{h+1}}}(T)\big]$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i)\big[v_{|_{\{i\}}}(S) + v_{|_{\{i\}}}(T)\big] = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|_{N_{h+1}}}(S) + \sum_{1=1}^{n}(1 - \lambda_i)v_{|_{\{i\}}}(S)$$
$$+ \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|_{N_{h+1}}}(T) + \sum_{1=1}^{n}(1 - \lambda_i)v_{|_{\{i\}}}(T) = v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) + v^{\boldsymbol{\lambda}}(T),$$

y, por tanto, $v^{\boldsymbol{\lambda}}$ hereda la convexidad de v.

ii) Sea $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$, con (N, v) un juego superaditivo. Entonces, para todo S, $T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, como consecuencia del Corolario 4.1.2,

$$v^{\lambda}(S \cup T) = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|_{N_{h+1}}}(S \cup T) + \sum_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i)v_{|_{\{i\}}}(S \cup T).$$

Utilizando la suparaditividad de (N, v) y por lo tanto (Lema 4.2.1) la superaditividad de $(N, v_{|_{N_{h+1}}})$, para $h = 0, ..., r-1$, y la de $(N, v_{|_{\{i\}}})$ para $i = 1, .., n$,

$$v^{\lambda}(S \cup T) \geq \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)\big[v_{|_{N_{h+1}}}(S) + v_{|_{N_{h+1}}}(T)\big]$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i)\big[v_{|_{\{i\}}}(S) + v_{|_{\{i\}}}(T)\big] = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|_{N_{h+1}}}(S) + \sum_{1=1}^{n}(1 - \lambda_i)v_{|_{\{i\}}}(S)$$
$$+ \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1} - y_h)v_{|_{N_{h+1}}}(T) + \sum_{1=1}^{n}(1 - \lambda_i)v_{|_{\{i\}}}(T) = v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) + v^{\boldsymbol{\lambda}}(T),$$

y entonces $v^{\boldsymbol{\lambda}}$ hereda la superaditividad de v.

iii) Como $\Delta_{v^{\boldsymbol{\lambda}}}(S) = \Delta_v(S) \min_{i \in S}\{\lambda_i\}$ para $s \geq 2$ and $\Delta_{v^{\boldsymbol{\lambda}}}(S) = \Delta_v(S)$ para $s = 1$, si $\Delta_v(S) \geq 0$ para todo $S \subseteq N$, también $\Delta_{v^{\boldsymbol{\lambda}}}(S) \geq 0$. ■

4.3. Monotonía en las habilidades de cooperación

En la siguiente proposición probamos que el valor definido, σ, satisface monotonía en las habilidades de cooperación. Esta propiedad establece que, para un juego superaditivo, si el peso de un jugador aumenta, manteniéndose igual todo lo demás, entonces el pago a ese jugador no puede disminuir.

Proposición 4.3.1 *Dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$, $(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) \in G^N_\Lambda$, con (N, v) un juego superaditivo y tal que existe $k \in N$ con $\lambda'_k > \lambda_k$ y $\lambda'_j = \lambda_j$ para todo $j \neq k$, $j \in N$, se tiene que*

$$\sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) \geq \sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}).$$

Demostración: Si λ_k se transforma en $\lambda'_k > \lambda_k$ algunos de los pares $(y_{h+1}, v_{|N_{h+1}})$, para $h = 0, 1, ..., r-1$, son modificados. Supongamos que $\lambda_k = y_t$ con $t < r$ (el caso en el que el máximo peso, y_r, se incrementa, es trivial) y consideremos seis posibilidades diferentes:

i) Algunos jugadores tienen peso igual a λ_k pero $\lambda'_k < y_{t+1}$. Entonces, si (N, v_o) es la cero-normalización de (N, v), haciendo uso del Corolario 4.1.1,

$$\sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) - \sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$= (\lambda'_k - y_t) Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) \geq 0,$$

donde la desigualdad se tiene porque $\lambda'_k - y_t \geq 0$, y el valor de Shapley de un jugador en un juego superaditivo y cero-normalizado[8] es no negativo[9].

ii) Algunos jugadores tienen peso igual a λ_k, pero $\lambda'_k = y_{t+1}$. Entonces,

$$\sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) - \sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$= (y_{t+1} - y_t) Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) \geq 0.$$

iii) Algunos jugadores tienen peso igual a λ_k, pero $y_{t+1} < \lambda'_k < y_{t+2}$. En consecuencia,

$$\sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) - \sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}) =$$

[8] Como se ha probado, la restricción de un juego superaditivo a cualquier subconjunto de jugadores es también superaditivo. Es sencillo probar que la cero-normalización de un juego superaditivo es también superaditiva.

[9] Vamos a probar que el valor de Shapley para un juego superaditivo y cero-normalizado es no negativo. Para ello consideremos $(N, v) \in G^N$ con v un juego superadtivo y cero-normalizado. Como sabemos, el valor de Shapley para un jugador $i \in N$ se calcula como una media ponderada de sus contribuciones marginales, mediante la expresión $Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big]$. Por otro lado, dado que v es un juego superaditivo, tenemos que $v(S \cup \{i\}) \geq v(S) + v(\{i\})$, si y solo si, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(\{i\})$ y, dado que v es un juego cero-normalizado, tenemos que $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq 0$. Entonces, bajo superaditividad y cero normalización el valor de Shapley es una media ponderada de contribuciones marginales, todas ellas no negativas, y será no negativo

$$= (y_{t+1} - y_t)Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq y_t\}}}) + (\lambda'_k - y_{t+1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) \geq 0.$$

iv) Solo un jugador tiene peso igual a λ_k, pero $\lambda'_k < y_{t+1}$. Entonces,

$$\sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) - \sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$= (\lambda'_k - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) - (\lambda_k - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) =$$

$$= (\lambda'_k - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) - (\lambda_k - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}})$$

$$= (\lambda'_k - \lambda_k)Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) \geq 0.$$

v) Solo un jugador tiene peso igual a λ_k, pero $\lambda'_k = y_{t+1}$. En consecuencia,

$$\sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) - \sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$= (y_{t+1} - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) - (y_t - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) =$$

$$= (y_{t+1} - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) - (y_t - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}})$$

$$= (y_{t+1} - y_t)Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) \geq 0.$$

vi) Solo un jugador tiene peso igual a λ_k, pero $\lambda'_k > y_{t+1}$. Entonces,

$$\sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}) - \sigma_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$(y_{t+1} - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda_k\}}}) + (\lambda'_k - y_{t+1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) -$$

$$-(\lambda_k - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) =$$

$$= (y_{t+1} - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) + (\lambda'_k - y_{t+1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) -$$

$$-(\lambda_k - y_{t-1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) =$$

$$= (y_{t+1} - \lambda_k)Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda_j \geq \lambda_k\}}}) + (\lambda'_k - y_{t+1})Sh_k(N, v_{o_{|\{j \ | \ \lambda'_j \geq \lambda'_k\}}}) \geq 0,$$

quedando así probado el resultado . ■

A continuación retomamos el Ejemplo 2.6.1 para mostrar que nuestro valor definido σ no presenta los comportamientos anti-intuitivos que observó Owen (1968) para el valor de Shapley ponderado.

Ejemplo 4.3.1 *Consideramos el juego de mayoría simple* $(N, v) \in G^N$ *con* $N = \{1, 2, 3\}$ *y*

$$v(S) = \begin{cases} 1, & si\ s \geq 2 \\ 0, & otro\ caso. \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, v puede ser escrito como:

$$v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,3\}} + u_{\{2,3\}} - 2u_{\{1,2,3\}}.$$

Si el vector de ponderaciones es $\boldsymbol{\lambda} = (0.3, 0.1, 0.1)$[10]*, entonces,*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.1u_{\{1,2\}} + 0.1u_{\{1,3\}} + 0.1u_{\{2,3\}} - 0.2u_{\{1,2,3\}}.$$

Y por tanto,

$$\sigma(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = (\frac{0.1}{2} + \frac{0.1}{2} - \frac{0.2}{3}, \frac{0.1}{2} + \frac{0.1}{2} - \frac{0.2}{3}, \frac{0.1}{2} + \frac{0.1}{2} - \frac{0.2}{3}$$

$$= (\frac{1}{30}, \frac{1}{30}, \frac{1}{30}).$$

Observamos que la distribución del poder es igualitaria para los tres jugadores, lo que es razonable, ya que aunque el jugador 1 tiene mayor capacidad de cooperación, no puede pertenecer a una coalición ganadora sin negociar o asociarse con alguno de los demás jugadores.

Por otro lado, si aumentamos la capacidad de cooperación del jugador 1 *de 0.3 a 0.4 unidades, manteniendo el resto de pesos sin variar, el valor* σ *para esta nueva situación es el vector* $\sigma(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = (\frac{1}{30}, \frac{1}{30}, \frac{1}{30})$*. Se observa que el poder del jugador* 1 *no se ha visto reducido al ampliar su peso, lo que es completamente razonable y contrario a lo que pasaba con el valor de Shapley ponderado.*

Si se aumentamos la capacidad de cooperación del jugador 2 *de* 0.1 *a* 0.2*, manteniendo el resto de pesos sin variar, su valor aumenta de* $\frac{1}{30}$ *a* $\frac{5}{60}$.

[10]Los pesos no son los utilizados por Owen (1968), ya que consideró $3, 1, 1$, que no pertenecen al intervalo [0.1] como se precisa en nuestra propuesta para las habilidades de cooperación. Por ello se han adaptado utilizando una décima parte de cada uno.

Capítulo 5

Caracterizaciones del valor σ

Si los hechos no encajan con la teoría, cambie los hechos.

Albert Einstein

En esta sección introducimos cuatro caracterizaciones del valor definido, σ. Están inspiradas en las de Shapley (1953b)[11], Myerson (1980), Young (1985) y Hart y Mas-Colell (1989) para el valor de Shapley.

5.1. Propiedades del valor definido

En primer lugar, se definen las propiedades que posteriormente serán utilizadas en las diferentes caracterizaciones.

Definición 5.1.1 *Una regla de asignación ψ definida en G_Λ^N satisface $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, si para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$,*

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = v^{\boldsymbol{\lambda}}(N).$$

La $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, que será crucial en las diferentes caracterizaciones, no es, obviamente, la eficiencia en la que se reparte el valor de la coalición global $v(N)$ entre los jugadores. Como se ha reiterado la cooperación imperfecta de los juegos cooperativos con jugadores con diferentes habilidades cooperativas conlleva ineficiencia.

Definición 5.1.2 *Una regla de asignación ψ definida en G_Λ^N satisface la propiedad del jugador nulo si, dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ e $i \in N$, tal que para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$,*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0,$$

[11]Siendo rigurosos, la primera caracterización llevada a cabo para el valor definido va en paralelo a la caracterización de Shubik (1962) que, como se mencionó en los preliminares, modificó la caracterización de Shapley sustituyendo el axioma del soporte por el de eficiencia y jugador nulo. La literatura existente mezcla con frecuencia la caracterización de Shapley con la de Shubik

entonces

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = 0.$$

Definición 5.1.3 *Dado* $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ *y* $(N, w, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$*, definimos*

$$(N, v, \boldsymbol{\lambda}) + (N, w, \boldsymbol{\lambda}) = (N, v + w, \boldsymbol{\lambda}).$$

Definición 5.1.4 *Una regla de asignación* ψ *definida en* G_Λ^N *es aditiva (en el juego) si, dados* $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$*,* $(N, w, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$*,*

$$\psi[(N, v, \boldsymbol{\lambda}) + (N, w, \boldsymbol{\lambda})] = \psi(N, v, \boldsymbol{\lambda}) + \psi(N, w, \boldsymbol{\lambda}).$$

Definición 5.1.5 *Una regla de asignación* ψ *definida en* G_Λ^N *satisface la propiedad de igual trato para jugadores necesarios si, para* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ *e i,j jugadores necesarios en* (N, v)*, se tiene que*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}).$$

Bajo esta propiedad si dos jugadores son necesarios en el juego (el valor de las coaliciones que no los contienen es nulo), ambos deberán recibir el mismo pago.

Definición 5.1.6 *Una regla de asignación* ψ *definida en* G_Λ^N *satisface la propiedad de las contribuciones equilibradas en habilidades de negociación si, para todo* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ *y todo* $i, j \in N$*,*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}),$$

siendo $\boldsymbol{\lambda}^{-k}$ *el vector* $\{\lambda_l^{-k}\}_{l \in N} \in [0,1]^n$ *con*

$$\lambda_l^{-k} = \begin{cases} \lambda_l, & si\ l \neq k \\ 0, & si\ l = k. \end{cases}$$

Esta propiedad afirma que cuando un jugador $i \in N$ se queda sin capacidad de negociación, otro jugador j se ve afectado de la misma manera que i se vería afectado si es j el que no quiere negociar.

Definición 5.1.7 *Una regla de asignación* ψ *definida en* G_Λ^N *satisface la propiedad de monotonía fuerte si, dados* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}), (N, w, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ *e* $i \in N$ *tal que*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$$

para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$*, entonces,*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \geq \psi_i(N, w, \boldsymbol{\lambda}).$$

Monotonía fuerte implica marginalismo, propiedad obtenida cuando en la definición anterior ambas desigualdades se reemplazan por igualdades.

La propiedad anterior establece que si las contribuciones marginales de un jugador cualquiera i en un juego v son siempre mayores o iguales que sus contribuciones marginales en otro juego w, entonces el pago que recibirá este jugador i en el juego w nunca será mayor que el pago que recibirá en v, independientemente de su capacidad de negociación (a condición de que ésta se mantenga invariante en ambos juegos).

A continuación se prueba que la regla de reparto definida, σ, satisface las propiedades enunciadas anteriormene.

Proposición 5.1.1 *La regla de asignación $\sigma : G^N_\Lambda \to \mathbb{R}^n$ satisface las propiedades de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, aditividad, jugador nulo, jugadores necesarios, contribuciones equilibradas en habilidades de negociación, monotonía fuerte y marginalismo.*

Demostración: $i)$ σ satisface $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia dado que para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$,

$$\sum_{i\in N} \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i\in N} Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) = v^{\boldsymbol{\lambda}}(N),$$

donde la última igualdad se tiene por la eficiencia del valor de Shapley.

$ii)$ Dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}), (N, w, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$,

$$\sigma[(N, v, \boldsymbol{\lambda}) + (N, w, \boldsymbol{\lambda})] = \sigma(N, v + w, \boldsymbol{\lambda}) = Sh(N, (v + w)^{\boldsymbol{\lambda}})$$

$$= Sh(N, v^{\boldsymbol{\lambda}} + w^{\boldsymbol{\lambda}}) = Sh(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) + Sh(N, w^{\boldsymbol{\lambda}}) = \sigma(N, v, \boldsymbol{\lambda}) + \sigma(N, w, \boldsymbol{\lambda}).$$

La primera igualdad se tiene por la definición de aditividad en G^N_Λ; la segunda, a partir de la definición de σ; la tercera, debido a la definición del juego modificado y la última por la aditividad del valor de Shapley. Por lo tanto, σ satisface aditividad.

$iii)$ Si $i \in N$ es un jugador nulo en (N, v), entonces para todo $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i\in N}$, i es un jugador nulo en $(N, v^{\boldsymbol{\lambda}})$ y por lo tanto,

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) = 0,$$

dado que el valor de Shapley satisface la propiedad de jugador nulo. Entonces, σ también satisface dicha propiedad.

$iv)$ Si $i \in N$ es un jugador necesario en (N, v) e $i \notin S \subseteq N$ entonces,

$$\Delta_v(S) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{s-t} v(T) = 0.$$

Como consecuencia, si $i, j \in N$ son jugadores necesarios en (N, v), entonces, $i, j \in S$ para todo S tal que $\Delta_v(S) \neq 0$ y así, para todo $\boldsymbol{\lambda} \in [0, 1]^n$,

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) = Sh_j(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) = \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}).$$

La segunda igualdad se debe a que, como sabemos, el valor de Shapley reparte equitativamente el dividendo de cada coalición entre sus miembros. Entonces, σ satisface la propiedad de igual trato de los jugadores necesarios.

v) Para probar que σ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación [12], sea $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ e $i, j \in N$. Entonces,

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) - Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}^{-j}}) = Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}} - v^{\boldsymbol{\lambda}^{-j}})$$

$$= Sh_i[N, \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i\notin T, j\notin T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l\} + \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i\in T, j\notin T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l\}$$

$$+ \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i\notin T, j\in T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l\} + \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i,j\in T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l\} + \sum_{k\in N} \Delta_v(\{k\})]$$

$$-Sh_i[N, \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i\notin T, j\notin T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l^{-j}\} + \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i\in T, j\notin T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l^{-j}\}$$

$$+ \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i\notin T, j\in T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l^{-j}\} + \sum_{T\subseteq N, t\geq 2, i,j\in T} \Delta_v(T) \min_{l\in T}\{\lambda_l^{-j}\} + \sum_{k\in N} \Delta_v(\{k\})]$$

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \Delta_v(S\cup\{i,j\}) \frac{\min\limits_{k\in S\cup\{i,j\}}\{\lambda_k\}}{s+2},$$

expresión que es simétrica en i y j. Por tanto,

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}).$$

vi) Para probar que σ satisface monotonía fuerte, supongamos que $(N, v, \boldsymbol{\lambda}), (N, w, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$, $i \in N$, y que para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$,

$$v(S\cup\{i\}) - v(S) \geq w(S\cup\{i\}) - w(S).$$

Entonces,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S\cup\{i\}) - v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{h=0}^{r-1} (y_{h+1} - y_h) v_{|\{N_{h+1}\}}(S\cup\{i\})$$

[12] Cabe observar que σ satisface una versión generalizada de la propiedad de contribuciones equilibradas en habilidades de negociación: dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$, e $i, j \in N$

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j,c}) = \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i,c}),$$

con $\boldsymbol{\lambda}^{-k,c} = \{\lambda_l^{-k,c}\}_{l\in N} = \begin{cases} \lambda_l, & \text{si } l \neq k \\ c < \lambda_k, & \text{si } l = k \end{cases} \quad k = i, j.$

Entonces, $\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j,c}) = \sum\limits_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{\Delta_v(S\cup\{i,j\})}{s+2}\big[\min\limits_{k\in S\cup\{i,j\}}\{\lambda_k\} - \min\{\min\limits_{k\in S}\{\lambda_k\}, c\}\big]$,

expresión que es simétrica en i, y j.

$$+\sum_{j=1}^{n}(1-\lambda_j)v_{|_{\{j\}}}v(S\cup\{i\}) - \Big[\sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1}-y_h)v_{|_{\{N_{h+1}\}}}(S)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(1-\lambda_j)v_{|_{\{j\}}}v(S)\Big] = \sum_{h=0}^{r-1}(y_{h+1}-y_h)\big[v_{|_{\{N_{h+1}\}}}(S\cup\{i\})$$

$$-v_{|_{\{N_{h+1}\}}}(S)\big] + (1-\lambda_i)v_{|_{\{i\}}},$$

y similarmente para $w^{\boldsymbol{\lambda}}(S\cup\{i\}) - w^{\boldsymbol{\lambda}}(S)$.

Además

$$v_{|_{N_{h+1}}}(S\cup\{i\}) - v_{|_{N_{h+1}}}(S) = v\big[(S\cup\{i\})\cap N_{h+1}\big] - v(S\cap N_{h+1}) =$$

$$= \begin{cases} v[(S\cap N_{h+1})\cup\{i\}] - v(S\cap N_{h+1}), & \text{si } i\in N_{h+1} \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

y análogamente para $w_{|_{N_{h+1}}}(S\cup\{i\}) - w_{|_{N_{h+1}}}(S)$.

Si, por hipótesis, para todo $S\subseteq N\setminus\{i\}$,

$$v(S\cup\{i\}) - v(S) \geq w(S\cup\{i\}) - w(S),$$

tenemos

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S\cup\{i\}) - v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) \geq w^{\boldsymbol{\lambda}}(S\cup\{i\}) - w^{\boldsymbol{\lambda}}(S).$$

Dado que el valor de Shapley satisface monotonía fuerte, se obtiene que $Sh_i(N,v^{\boldsymbol{\lambda}}) \geq Sh_i(N,w^{\boldsymbol{\lambda}})$, y por tanto, $\sigma_i(N,v,\boldsymbol{\lambda}) \geq \sigma_i(N,w,\boldsymbol{\lambda})$. En consecuencia, como la regla satisface monotonía fuerte también satisface marginalismo, dado que ésta es una propiedad más débil. ■

5.2. Caracterizaciones

Una vez demostrado que la regla de reparto σ definida satisface las propiedades anteriores, vamos a analizar en qué medida dichas propiedades (o algún subconjunto de ellas) permiten caracterizar σ.

Proposición 5.2.1 *σ es la única regla de asignación en G^N_Λ que satisface las propiedades de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, aditividad, jugador nulo y jugadores necesarios.*

Demostración:

Se ha probado anteriormente que σ satisface las propiedades de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, aditividad, jugador nulo y jugadores necesarios. Recíprocamente, supongamos que ψ es una regla de asignación en G^N_Λ que satisface estos cuatro axiomas. Entonces, por aditividad, es suficiente con probar que $\psi = \sigma$ para todo $(N, au_S, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ con $S \subseteq N, S \neq \emptyset$ y $a \in \mathbb{R}$. Si $i \notin S$, i es un jugador nulo en (N, au_S) y así

$$\psi_i(N, au_S, \boldsymbol{\lambda}) = 0 = \sigma_i(N, au_S, \boldsymbol{\lambda}).$$

Para todo $i \in S$, i es un jugador necesario en (N, au_S) y por lo tanto

$$\psi_i(N, au_S, \boldsymbol{\lambda}) = c.$$

Entonces, como consecuencia de la $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia,

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N, au_S, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in S} \psi_i(N, au_S, \boldsymbol{\lambda}) = cs = (au_S)^{\boldsymbol{\lambda}}(N),$$

y por lo tanto $c = \frac{(au_S)^{\boldsymbol{\lambda}}(N)}{s}$. El mismo argumento prueba que también $\sigma_i(N, au_S, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{(au_S)^{\boldsymbol{\lambda}}(N)}{s}$ para todo $i \in S$, quedando entonces el resultado probado. ■

Proposición 5.2.2 *σ es la única regla de asignación en G_Λ^N que satisface las propiedades de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia y contribuciones equilibradas en habilidades de negociación.*

Demostración: Se ha probado anteriormente que σ satisface las propiedades de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia y contribuciones equilibradas en habilidades de negociación. Recíprocamente, supongamos que ψ es una regla de asignación en G_Λ^N que satisface estas propiedades. Debemos probar entonces que $\psi(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$. Se hará por inducción sobre $\delta(\boldsymbol{\lambda})$, el cardinal de $d(\boldsymbol{\lambda}) = \{\lambda_i, i \in N \mid \lambda_i > 0\}$.

Si $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 0$, entonces $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, y por definición de regla de asignación $\psi_i(N, v, \mathbf{0}) = v(\{i\}) = \sigma_i(N, v, \mathbf{0})$ para todo $i \in N$.

Si $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$, supongamos que $i \in N$ es tal que $\lambda_i > 0$. Entonces, como ψ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación, para cada $j \neq i, j \in N$,

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}).$$

Dado que $\boldsymbol{\lambda}^{-j} = \boldsymbol{\lambda}$,

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = 0,$$

entonces,

$$\psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}) = \psi_j(N, v, \mathbf{0}) = v(\{j\}).$$

Utilizando la $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia,

$$\sum_{k \in N} \psi_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k \neq i} v(\{k\}) + \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = v^{\boldsymbol{\lambda}}(N) = \sum_{k \in N} v(\{k\}),$$

y por lo tanto $\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = v(\{i\})$.

Teniendo en cuenta que σ también satisface la propiedad de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia y contribuciones equilibradas en habilidades de negociación, se obtiene similarmente que $\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = v(\{i\})$ para todo $i \in N$ y, por tanto, ambas reglas de asignación coinciden.

Supongamos ahora por la hipótesis de inducción que $\psi(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ para todo $(N, v) \in G^N$ y todo $\boldsymbol{\lambda}$ tal que $\delta(\boldsymbol{\lambda}) \leq r - 1$, y consideremos $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ con $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = r$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, ..., \lambda_r > 0$, y $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \lambda_n = 0$. Por tanto, como ψ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación, para $i \in \{1, ..., r\}$ y $j = \{r + 1, ..., n\}$, y de forma similar al caso en el que $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$,

$$0 = \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}),$$

lo cual implica que $\psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}) = \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i})$, donde la última igualdad se obtiene utilizando la hipótesis de inducción. Como σ también satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación,

$$0 = \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}),$$

y finalmente $\psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ para todo $j = \{r + 1, ..., n\}$.

Por otro lado si $i, j \in \{1, ..., r\}$, por la propiedad de contribuciones equilibradas en habilidades de negociación,

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}),$$

lo cual implica que

$$\begin{gathered}\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \\ \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}) = \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}) - \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}) = \\ \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}),\end{gathered}$$

donde la segunda igualdad se obtiene, otra vez, por la hipótesis de inducción y la última, dado que σ también satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en habilidades de negociación. Entonces,

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}),$$

para todo $i, j \in \{1, ..., r\}$. Por lo tanto

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = c,$$

para todo $i \in \{1, ..., r\}$. Usando la $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia de ambas reglas de asignación,

$$rc = \sum_{i=1}^{r} [\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda})] = \sum_{i=1}^{r} \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$= v^{\boldsymbol{\lambda}}(N) - \sum_{i=r+1}^{n} \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - [v^{\boldsymbol{\lambda}}(N) - \sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda})] = 0,$$

y por tanto $c = 0$, lo cual completa la demostración. ∎

Proposición 5.2.3 *σ es la única regla de asignación en G_Λ^N que satisface las propiedades de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, jugadores necesarios y marginalismo* [13].

Demostración:
Se ha probado anteriormente que σ satisface las propiedades de $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, jugadores necesarios y marginalismo. Recíprocamente, supongamos que ψ es una regla de asignación sobre G_Λ^N que satisface estos tres axiomas. Probaremos que $\psi = \sigma$ por inducción sobre $\delta(N, v)$ el cardinal de $d(N, v) = \{S \subseteq N \mid \Delta_v(S) \neq 0\}$. Si $\delta(N, v) = 0$, entonces todo jugador en (N, v) es un jugador necesario y, por lo tanto, $\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = c$ para todo $\boldsymbol{\lambda}$. Por la $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, $\sum_{i \in N} \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = nc = 0$, y entonces $c = 0$. Similarmente $\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = 0$ para todo $i \in N$.

Supongamos, entonces, por hipótesis de inducción, que el resultado es cierto para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ con $\delta(N, v) \leq k - 1$ y consideremos $(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ con $\delta(N, v) = k$. Entonces, $v = \sum_{r=1}^{k} \Delta_v(S_r) u_{S_r}$. Si $i \in N$ es tal que $i \notin \bigcap_{r=1}^{k} S_r$, entonces, considerando el juego (N, v_i) con $v_i = \sum_{S_r : i \in S_r} \Delta_v(S_r) u_{S_r}$, tenemos, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$,

$$v_i(S \cup \{i\}) - v_i(S) = v_i(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{i\}) - v(S),$$

y, por lo tanto, $\psi(N, v_i, \boldsymbol{\lambda}) = \psi(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ ya que ψ satisface marginalismo.

Por la hipótesis de inducción $\psi(N, v_i, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma(N, v_i, \boldsymbol{\lambda})$ ya que $\delta(N, v_i) \leq k - 1$. Además

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda}}) = Sh_i(N, v_i^{\boldsymbol{\lambda}}) = \sigma_i(N, v_i, \boldsymbol{\lambda}),$$

y, por lo tanto,

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \psi_i(N, v_i, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma_i(N, v_i, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}).$$

Si, por otro lado, $i \in \bigcap_{r=1}^{k} S_r$ entonces i es un jugador necesario en (N, v). Todos los jugadores necesarios tienen la misma recompensa y, por lo tanto, utilizando la $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia, la recompensa de todos ellos está determinada de manera única. ∎

[13] Dado que la propiedad de marginalismo es una propiedad más débil que la de monotonía fuerte, y dado que σ satisface monotonía fuerte, el resultado podría enunciarse remplazando marginalismo por monotonía fuerte.

Para caracterizar el valor definido en términos de funciones potenciales, introducimos primero la definición de éstas para juegos cooperativos en los que los jugadores tienen diferentes habilidades cooperativas.

Definición 5.2.1 *Sea* $G_\Lambda = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_\Lambda^N$. *Una función*

$$P : G_\Lambda \to \mathbb{R},$$

que satisface

$$P(\emptyset, v, \boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

y,

$$\sum_{i\in N}[P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{i\}, v, \boldsymbol{\lambda})] = v^{\boldsymbol{\lambda}}(N) \text{ para todo } (N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda$$

es llamada función potencial.

Teorema 5.2.1 *Existe una única función potencial, P, en G_Λ. Viene dada por* [14]

$$P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{n}[v^{\boldsymbol{\lambda}}(N) + \sum_{i\in N} P(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}, \boldsymbol{\lambda})] \tag{5.1}$$

y

$$P(\emptyset, v, \boldsymbol{\lambda}) = 0. \tag{5.2}$$

Además para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda$ y todo $i \in N$,

$$\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Demostración: La expresión (5.1) y la condición (5.2) determinan $P(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda$. Entonces P existe y es única.

Además

$$Q(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{S\subseteq N, s\geq 2} \frac{\Delta_v(S)}{s} \min_{i\in S}\{\lambda_i\} + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\}), & \text{para } N \neq \emptyset \\ 0, & \text{para } N = \emptyset, \end{cases}$$

satisface $Q(\emptyset, v, \boldsymbol{\lambda}) = 0$, por definición, y

$$\sum_{i\in N}[Q(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - Q(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}, \boldsymbol{\lambda})] = \sum_{i\in N} \Big[\sum_{S\subseteq N, s\geq 2, i\in S} \frac{\Delta_v(S)}{s} \min_{j\in S}\{\lambda_j\} + \Delta_v(\{i\})\Big] =$$

$$= \sum_{i\in N} \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = v^{\boldsymbol{\lambda}}(N)$$

[14] En puridad para juegos $(N\setminus\{i\}, v_{|N\setminus\{i\}})$, $i \in N$, el vector de habilidades debería ser escrito $\boldsymbol{\lambda}_{|N\setminus\{i\}}$ y no solo $\boldsymbol{\lambda}$. Nos hemos permitido el abuso para no recargar demasiado la notación.

y, por tanto, $Q = P$.

Finalmente para todo $i \in N$,

$$P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - Q(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}, \boldsymbol{\lambda})$$

$$= \sum_{S\subseteq N, s\geq 2, i\in S} \frac{\Delta_v(S)}{s} \min_{j\in S}\{\lambda_j\} + \Delta_v(\{i\}) = \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}).$$

■

Ejemplo 5.2.1 *Retomamos el Ejemplo 2.3.4 donde considerábamos $(N, v) \in G^N$ con $N = \{1, 2, 3\}$ y*

$$v(S) = \begin{cases} 30, & \textit{si } S = \{1\} \\ 50, & \textit{si } S \in \{\{3\}, \{1,2\}\} \\ 80, & \textit{si } S \in \{\{1,3\}, \{2,3\}\} \\ 100, & \textit{si } S = \{1,2,3\} \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

En términos de la base de unanimidad, v puede ser escrito como:

$$v = 30u_{\{1\}} + 50u_{\{3\}} + 20u_{\{1,2\}} + 30u_{\{2,3\}} - 30u_{\{1,2,3\}}.$$

Consideremos también que la capacidad de cooperación de los jugadores viene dada por el vector $\boldsymbol{\lambda} = (0.3, 0.5, 0.7)$. Entonces, por definición

$$v^{\boldsymbol{\lambda}} = 30u_{\{1\}} + 50u_{\{3\}} + 20\min\{\lambda_1, \lambda_2\}u_{\{1,2\}} + 30\min\{\lambda_2, \lambda_3\}u_{\{2,3\}} -$$

$$30\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}u_{\{1,2,3\}} = 30u_{\{1\}} + 50u_{\{3\}} + 6u_{\{1,2\}} + 15u_{\{2,3\}} - 9u_{\{1,2,3\}}.$$

y, por tanto,

$$\sigma(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = (30 + 3 - 3, 3 + \frac{15}{2} - 3, 50 + \frac{15}{2} - 3) = (30, \frac{15}{2}, \frac{109}{2}).$$

Expresando $v^{\boldsymbol{\lambda}}$ en su forma coalicional,

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \begin{cases} 30, & \textit{si } S = \{1\} \\ 50, & \textit{si } S = \{3\} \\ 36, & \textit{si } S = \{1,2\} \\ 80, & \textit{si } S = \{1,3\} \\ 65, & \textit{si } S = \{2,3\} \\ 92, & \textit{si } S = \{1,2,3\} \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Dado que la función potencial satisface la condición de $\boldsymbol{\lambda}-$eficiencia, es decir,

$$\sum_{i\in N} \left[P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{i\}, v_{|_{N\setminus\{i\}}}, \boldsymbol{\lambda})\right] = v^{\boldsymbol{\lambda}}(N),$$

se puede calcular la función potencial del conjunto de todos los jugadores N despejando $P(N, v, \boldsymbol{\lambda})$ de la ecuación anterior:

$$P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{n}\big[v^{\boldsymbol{\lambda}}(N) + \sum_{i\in N} P(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}, \boldsymbol{\lambda})\big]$$

y de manera recursiva

$$P(N \setminus \{i\}, v_{|N\setminus\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{n-1}\big[v^{\boldsymbol{\lambda}}(N \setminus \{i\}) + \sum_{j\in N, j\neq i} P(N \setminus \{i, j\}, v_{|N\setminus\{i,j\}}, \boldsymbol{\lambda})\big].$$

Entonces,

$$P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{n}\big[v^{\boldsymbol{\lambda}}(N) + \sum_{i\in N} \frac{1}{n-1}\big(v^{\boldsymbol{\lambda}}(N \setminus \{i\}) + \sum_{j\in N, j\neq i} P(N \setminus \{i, j\}, v_{|N\setminus\{i,j\}}, \boldsymbol{\lambda})\big)\big].$$

Para el ejemplo se tiene que,

$$P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{3}\big[92 + \frac{1}{2}(65 + 50) + \frac{1}{2}(80 + 50 + 30) + \frac{1}{2}(36 + 30)\big] = \frac{175}{2},$$

siendo:

$$\begin{aligned}
P(N \setminus \{1\}, v_{N\setminus\{1\}}, \boldsymbol{\lambda}) &= \frac{1}{n-1}\big[v^{\boldsymbol{\lambda}}(N \setminus \{1\}) + \sum_{j\in N, j\neq 1} P(N \setminus \{1, j\}, v_{|N\setminus\{1,j\}}, \boldsymbol{\lambda})\big] \\
&= \frac{1}{2}(65 + 50) = \frac{115}{2}, \\
P(N \setminus \{2\}, v_{N\setminus\{2\}}, \boldsymbol{\lambda}) &= \frac{1}{n-1}\big[v^{\boldsymbol{\lambda}}(N \setminus \{2\}) + \sum_{j\in N, j\neq 2} P(N \setminus \{2, j\}, v_{|N\setminus\{2,j\}}, \boldsymbol{\lambda})\big] \\
&= \frac{1}{2}(80 + 50 + 30) = 80, \\
P(N \setminus \{3\}, v_{N\setminus\{3\}}, \boldsymbol{\lambda}) &= \frac{1}{n-1}\big[v^{\boldsymbol{\lambda}}(N \setminus \{3\}) + \sum_{j\in N, j\neq 3} P(N \setminus \{3, j\}, v_{|N\setminus\{3,j\}}, \boldsymbol{\lambda})\big] \\
&= \frac{1}{2}(36 + 30) = 33.
\end{aligned}$$

Comprobamos por último que el vector de contribuciones marginales de la función potencial resultante $\big(P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{i\}, v_{|_{N\setminus\{i\},\lambda}})\big)_{i\in N}$ coincide con el valor σ.

- *Para $i = 1$, $P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{1\}, v_{|_{N\setminus\{1\}}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{175}{2} - \frac{115}{2} = 30 = \sigma_1(N, v, \boldsymbol{\lambda})$*
- *Para $i = 2$, $P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{2\}, v_{|_{N\setminus\{2\}}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{175}{2} - 80 = \frac{15}{2} = \sigma_2(N, v, \boldsymbol{\lambda})$*
- *Para $i = 3$, $P(N, v, \boldsymbol{\lambda}) - P(N \setminus \{3\}, v_{|_{N\setminus\{3\}}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{175}{2} - 33 = \frac{109}{2} = \sigma_3(N, v, \boldsymbol{\lambda})$*

Capítulo 6

Extensión multilineal para juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación

A fuerza de construir bien, se llega a buen arquitecto.

Aristóteles

En este apartado se estudian las extensiones multilineales para juegos con jugadores que tienen diferentes habilidades de cooperación. Como ya se mencionó en el apartado de los *Preliminares* la extensión multilineal de un juego cooperativo fue introducida por Owen (1972), ofreciendo una alternativa (con menor coste de cómputo) para el cálculo del valor de Shapley, dado que frecuentemente dicho cómputo precisa una cantidad ingente de trabajo.

6.1. Definición de la extensión multilineal

La extensión multilineal para un juego $(N, v) \in G^N$ es una función definida en $[0,1]^n$ y dada por

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \{\prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i)\} v(S).$$

En Owen (1972) se prueba que f admite la siguiente expresión alternativa:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \Delta_v(S) \prod_{j \in S} x_j.$$

Esta última expresión nos sugiere la generalización de la extension multilineal para juegos en G_Λ^N.

Definición 6.1.1 *La extensión multilineal de* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ *es una función*

$$f_{\boldsymbol{\lambda}} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N, s \geq 2} \big[\Delta_v(S) \min_{i \in S}\{\lambda_i\} \prod_{i \in S} x_i\big] + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\}) x_i. \tag{6.1}$$

Una expresión alternativa para $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ se obtiene en la siguiente proposición.

Proposición 6.1.1 *Dado* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$*,* $f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, ..., x_n)$*, definida en* (6.1) *puede, alternativamente, expresarse de la siguiente manera:*

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \big\{ \prod_{i \in S} x_i \big[\sum_{S \subseteq T} (-1)^{t-s} \min_{i \in T}\{\lambda_i\} \prod_{i \in T \setminus S} x_i \big] v(S) \big\} + \sum_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i) v(\{i\}) x_i.$$

Demostración: Tenemos, para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$,

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, ..., x_n) &= \sum_{T \subseteq N, t \geq 2} \big[\Delta_v(T) \min_{i \in T}\{\lambda_i\} \prod_{i \in T} x_i\big] + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\}) x_i \\
&= \sum_{T \subseteq N, t \geq 2} \big\{ \prod_{i \in T} x_i \big[\sum_{S \subseteq T} (-1)^{t-s} v(S) \big] \min_{i \in T}\{\lambda_i\} \big\} + \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) x_i \\
&= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \big\{ \prod_{i \in S} x_i \big[\sum_{S \subseteq T, t \geq 2} (-1)^{t-s} \min_{i \in T}\{\lambda_i\} \prod_{i \in T \setminus S} x_i \big] v(S) \big\} + \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) x_i \\
&= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \big\{ \prod_{i \in S} x_i \big[\sum_{S \subseteq T} (-1)^{t-s} \min_{i \in T}\{\lambda_i\} \prod_{i \in T \setminus S} x_i \big] v(S) \big\} - \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i v(\{i\}) + \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) x_i \\
&= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \big\{ \prod_{i \in S} x_i \big[\sum_{S \subseteq T} (-1)^{t-s} \min_{i \in T}\{\lambda_i\} \prod_{i \in T \setminus S} x_i \big] v(S) \big\} + \sum_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i) v(\{i\}) x_i,
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se obtiene escribiendo cada dividendo en términos del valor de las subcualiciones, la segunda permutando el orden de los sumandos y la tercera, sumando y restando el valor de las coaliciones de tamaño uno. ■

6.2. Propiedades de la extensión multilineal

La siguiente proposición resume varias propiedades de $f_{\boldsymbol{\lambda}}$.

Proposición 6.2.1 *Dado* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$ *y* $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ *su extensión multilineal, se tiene que:*

i) $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ *es la única función multilineal que coincide con* $v^{\boldsymbol{\lambda}}$ *cuando se restringe a los puntos extremos (esquinas) de* $[0,1]^n$*.*

ii) $f_{\mathbf{1}}(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n)$ *para todo* $(N, v, \mathbf{1}) \in G_\Lambda^N$ *y, por tanto, la extensión multilineal definida coincide la de Owen (1972) para juegos en los cuales los jugadores son completamente cooperativos.*

iii) $f_{\mathbf{0}}(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})x_i$*, que es la extensión multilineal de Owen para juegos inesenciales.*

iv) $\sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\boldsymbol{\lambda}})(t,...,t)dt$*.*

Demostración: *i)* Sea $f_{\boldsymbol{\lambda}}$ de la forma

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1,...,x_n) = \sum_{T \subseteq N} C_T \prod_{i \in T} x_i.$$

Entonces, para cada $\emptyset \neq S \subseteq N$,

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha^S) = \sum_{T \subseteq S} C_T.$$

Así, la condición $f_{\boldsymbol{\lambda}}(\alpha^S) = v^{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ se reduce a

$$\sum_{T \subseteq S} C_T = v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) \text{ para todo } S \subseteq N. \tag{6.2}$$

Tenemos que demostrar que el sistema (6.2) tiene una única solución para los coeficientes $C_T, T \subseteq N$. Es fácil ver que el sistema de ecuaciones anterior es un sistema compatible determinado, dado que es un sistema con 2^n incógnitas y el mismo número de ecuaciones en el que la matriz de los coeficientes es triangular y con los elementos de la diagonal principal distintos de cero (iguales a 1, de hecho) y por tanto, de rango completo.

ii) Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, para todo $S \subseteq N$, $\emptyset \neq S$,F

$$f_{\mathbf{1}}(x_1,...,x_n) = \sum_{S \subseteq N, s \geq 2} [\Delta_v(S) \min_{i \in S}\{\lambda_i\} \prod_{i \in S} x_i] + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\})x_i$$

$$= \sum_{S \subseteq N, s \geq 2} [\Delta_v(S) \min_{i \in S}\{1,...,1\} \prod_{i \in S} x_i] + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\})x_i = \sum_{S \subseteq N, s \geq 2} [\Delta_v(S) \prod_{i \in S} x_i]$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\})x_i = \sum_{S\subseteq N} \Delta_v(S) \prod_{i\in S} x_i = f(x_1, ..., x_n).$$

iii) Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, para todo $S \subseteq N$, $\emptyset \neq S$,

$$f_{\mathbf{0}}(x_1, ..., x_n) = \sum_{S\subseteq N, s\geq 2} \big[\Delta_v(S) \min_{i\in S}\{\lambda_i\} \prod_{i\in S} x_i\big] + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\})x_i$$

$$= \sum_{S\subseteq N, s\geq 2} \big[\Delta_v(S) \min_{i\in S}\{0, ..., 0\} \prod_{i\in S} x_i\big] + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\})x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\})x_i = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})x_i.$$

iv) Tenemos que para $i \in N$, y $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G_\Lambda^N$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big[\sum_{S\subseteq N, s\geq 2} \Delta_v(S) \min_{j\in S}\{\lambda_j\} \prod_{j\in S} x_j + \sum_{i=1}^{n} \Delta_v(\{i\})x_i\big]$$

$$= \sum_{i\in S\subseteq N, s\geq 2} \big[\Delta_v(S) \min_{j\in S}\{\lambda_j\} \prod_{j\in S, j\neq i} x_j\big] + \Delta_v(\{i\}).$$

Entonces,

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\boldsymbol{\lambda}})(t, ..., t) = \sum_{i\in S\subseteq N, s\geq 2} \Delta_v(S)\big[\min_{j\in S}\{\lambda_j\} t^{s-1}\big] + \Delta_v(\{i\}),$$

y, por tanto

$$\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\boldsymbol{\lambda}})(t, ..., t)dt = \sum_{i\in S\subseteq N, s\geq 2} \Delta_v(S)\big[\frac{\min_{j\in S}\{\lambda_j\}}{s}\big] + \Delta_v(\{i\}) = \sigma_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}).$$

■

Ejemplo 6.2.1 *Sea v el juego tripersonal de mayoría en la normalización (0,1) y sea $\boldsymbol{\lambda} = (0.8, 0.5, 0.3)$. Su extensión multilineal es*

$$f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, x_2, x_3) = 0.5x_1x_2 + 0.3x_1x_3 + 0.3x_2x_3 - 0.6x_1x_2x_3$$

y las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, x_2, x_3) = 0.5x_2 + 0.3x_3 - 0.6x_2x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, x_2, x_3) = 0.5x_1 + 0.3x_3 - 0.6x_1x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f_{\boldsymbol{\lambda}}(x_1, x_2, x_3) = 0.3x_1 + 0.3x_3 - 0.6x_1x_2.$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_{\boldsymbol{\lambda}}(t, t, t) = 0.8t - 0.6t^2$$

El valor de σ para el jugador 1 es

$$\sigma_1(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_1} f_{\boldsymbol{\lambda}}(t, t, t))dt = \int_0^1 (0.8t - 0.6t^2)dt = 0.4t^2 - 0.2t^3\Big]_0^1 = \frac{1}{5},$$

de manera similar $\sigma_2(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma_1(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{5}$, y por último, el valor σ para el jugador 3 es

$$\sigma_3(N, v, \boldsymbol{\lambda}) = \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_3} f_{\boldsymbol{\lambda}}(t, t, t))dt = \int_0^1 (0.6t - 0.6t^2)dt = 0.3t^2 - 0.2t^3\Big]_0^1 = \frac{1}{10}.$$

La $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia en este caso es igual a 0.5.

Capítulo 7

Situaciones de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación

Valor es lo que se necesita para levantarse y hablar; pero también es lo que se requiere para sentarse y escuchar.

Winston Churchill

En este capítulo extendemos el concepto de situación de comunicación para incluir la posibilidad de que los jugadores tengan diferentes habilidades de cooperativas, diferente poder de negociación o estén dispuestos a hacer un esfuerzo diferente para cooperar.

7.1. El juego restringido al grafo con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación

A continuación se define de manera formal las situaciones de comunicación propuestas.

Definición 7.1.1 *Una situación de comunicación con jugadores que tienen diferente capacidad de negociación es una cuaterna* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ *en la cual* (N, v) *es un juego cooperativo,* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i \in N}$ *es un vector de pesos, con* $\lambda_i \in [0, 1]$ *para todo* $i \in N$*, y* (N, γ) *es un grafo. Para* $i \in N$*,* λ_i *representa la capacidad de negociación del jugador i-ésimo.*

En la definición anterior, cuanto mayor sea λ_i, mayor es el nivel de cooperación del jugador $i \in N$. El caso $\lambda_i = 1$ se corresponde con una cooperación completa o máxima mientras que $\lambda_i = 0$ indica un comportamiento totalmente no cooperativo. $\mathcal{CS}_{\Lambda}^{N}$ denotará al conjunto de todas las situaciones de comunicación con N jugadores que tienen diferente capacidad o habilidad de negociación.

Observación 7.1.1 *$\mathcal{CS}^N$, el conjunto de todas las situaciones de comunicación, puede ser identificado con el subconjunto de todas las $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}^N_\Lambda$ con $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1} = (1, 1, ..., 1) \in [0, 1]^n$. Por otro lado G^N_Λ, el conjunto de todos los juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes capacidades de negociación puede ser identificado con el subconjunto de todos los $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma_N) \in CS^N_\Lambda$, y G^N, con el subconjunto de todos los $(N, v, \mathbf{1}, \gamma_N) \in CS^N_\Lambda$.*

Observación 7.1.2 *Una situación de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación puede verse como un juego con estructura de comunicación difusa, definido en Jiménez-Losada et al. (2010; 2013). En una estructura de comunicación difusa cada jugador tiene un nivel de participación en el juego y un nivel máximo en el que una arista puede ser usado* [15].

En la siguiente definición, para cada situación de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación, introducimos un nuevo juego cooperativo, realmente una modificación del juego (clásico) restringido al grafo (o juego de Myerson), para tener en cuenta el nivel de cooperación de los jugadores.

En esta definición se asume que los jugadores en una coalición (conexa) no individual descuentan su dividendo por un factor que es el mínimo de sus habilidades de negociación. Este mínimo establece las posibilidades auténticas de cooperación entre los jugadores de la coalición. Por otro lado, en el caso de coaliciones individuales, es natural suponer que cada jugador coopera completamente consigo mismo y, por tanto, no se descuenta el pago.

Definición 7.1.2 *A cada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}^N_\Lambda$ le asociamos un nuevo juego cooperativo $(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}) \in G^N$ con función característica dada por*

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_{v^\gamma}(T) \min_{i \in T}\{\lambda_i\} + \sum_{i \in S} v(\{i\}), \text{ para todo } S \subseteq N, S \neq \emptyset,$$

y $(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(\emptyset) = 0$.

Llamaremos a $(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}})$ juego restringido al grafo con jugadores que tienen diferentes habilidades o capacidades de negociación.

Para aclarar la definición anterior consideramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1.1 *En cierto parlamento la distribución de los escaños es del 25 % para el partido de la anti-austeridad (jugador 1), 30 % para el partido de izquierda (jugador 2), 5 % para el partido de centro (jugador 3) y 40 % para el partido de derecha (jugador 4). Para que se apruebe un proyecto de ley se requiere más del 50 % de los votos a favor. Como consecuencia, se necesita el acuerdo de al menos dos partidos para obtener la*

[15] En la definición de estructuras de comunicación difusa en Jiménez-Losada et. al. (2010) los grafos estaban restringidos a no poseer ciclos.

mayoría. Esta situación se puede modelar mediante el juego de mayoría simple, (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S=\{1,2\},\ S=\{1,4\},\ S=\{2,4\} \text{ o } s \geq 3 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los partidos tienen filias y fobias que pueden modelarse mediante el gráfico (N, γ) (ver Figura 7.1.1) que representa las coaliciones factibles. Supondremos que los dividendos de estas coaliciones también se ven afectados por las habilidades de negociación de los actores. En otras palabras, es impensable una coalición entre partidos 1 y 3 y así $\Delta_{v^\gamma}(1, 3) = 0$ (esto viene dado por el gráfico) pero en nuestra propuesta el dividendo de la coalición (factible y conectada) $\{1, 2, 3\}$ se ve afectado por las habilidades de negociación de todos sus miembros.

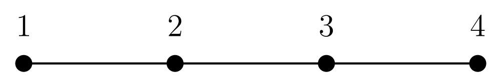

Figura 7.1.1

En este caso

$$v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,4\}} + u_{\{2,4\}} - 2u_{\{1,2,4\}},$$

y

$$v^\gamma = u_{\{1,2\}} + u_{\{2,3,4\}} - u_{\{1,2,3,4\}}.$$

Entonces, para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$,

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}u_{\{1,2\}} + \min\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}u_{\{2,3,4\}} - \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}u_{\{1,2,3,4\}}.$$

7.2. Propiedades del juego restringido al grafo con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación

En la siguiente proposición se detallan algunas propiedades interesantes del juego definido en el apartado anterior.

Proposición 7.2.1 *Dada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$, tenemos,*

i) Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, entonces $(v^\gamma)^{\mathbf{1}} \equiv v^\gamma$. Si todos los jugadores tienen capacidad total de cooperación, entonces el juego definido coincide con el juego clásico restringido al grafo o juego de Myerson.

ii) Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, entonces $(N, (v^\gamma)^{\mathbf{0}})$ es un juego inesencial; es decir, cuando la capacidad de negociación de cada jugador desaparece, el juego restringido se convierte en un juego (esencialmente) no cooperativo.

iii) *Si* $\gamma = \gamma_N$ *entonces* $(v^{\gamma_N})^{\boldsymbol{\lambda}} = v^{\boldsymbol{\lambda}}$, *con*

$$v^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_v(T) \min_{i \in T}\{\lambda_i\} + \sum_{i \in S} v(\{i\}),$$

es decir, si el grafo es completo (todo par $\{i, j\}$ *de nodos está directamente conectado) el juego restringido al grafo con jugadores que tienen diferentes capacidades de negociación coincide con el juego cooperativo donde los jugadores tienen diferentes habilidades de negociación.*

iv) *Si* $\gamma = \gamma_N$ *y* $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$ *entonces,*

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}} = v.$$

Cooperación completa y ausencia de restricciones en la comunicación, no modifica el juego original.

v) *Si* $\boldsymbol{\lambda} = \lambda.\mathbf{1} = \lambda(1, ..., 1)$ *y* (N, v) *es un juego cero-normalizado entonces,*

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda.v^{\gamma}.$$

vi) *Si* $\gamma = \emptyset$ *entonces,* $(N, (v^{\emptyset})^{\boldsymbol{\lambda}})$ *es un juego inesencial que coincide con* $(v^{\gamma})^{\mathbf{0}}$ *para todo* (N, γ)*. La falta de comunicación o la falta de capacidad de negociación conducen al mismo juego inesencial.*

vii) *Dado* $i \in N$*, si* $\gamma_i = \emptyset$ *entonces,*

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}} = (v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda^{-i}}},$$

donde $\boldsymbol{\lambda}^{-i} \in [0, 1]^n$ *viene dado por* $\lambda_i^{-i} = 0$ *y* $\lambda_j^{-i} = \lambda_j$ *para todo* $j \neq i$*.*

Para un jugador aislado en el grafo, su capacidad de cooperación es irrelevante, y en particular, da igual que sea nula.

viii) *Dado* $i \in N$ *y* $\boldsymbol{\lambda^{-i}}$ *definido como en* *vii)*, *entonces*

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}^{-i}} = (v^{\gamma_{-i}})^{\boldsymbol{\lambda}} = (v^{\gamma_{-i}})^{\boldsymbol{\lambda}^{-i}},$$

siendo γ_{-i} *el grafo en el cual el jugador i ha roto todas sus comunicaciones, es decir:* $\gamma_{-i} = \gamma \setminus \gamma_i$*. Consecuentemente, para un jugador, es equivalente aislarse a reducir sus habilidades de negociación a cero.*

Demostración:

i) Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, para todo $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,

$$(v^{\gamma})^{\mathbf{1}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_{v^{\gamma}}(T) + \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} \Delta_{v^{\gamma}}(T) = v^{\gamma}(S).$$

ii) Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, tenemos que para todo $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,

$$(v^\gamma)^{\mathbf{0}}(S) = \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) = \sum_{i \in S} (v^\gamma)^{\mathbf{0}}(\{i\}),$$

y así $(v^\gamma)^{\mathbf{0}}$ es inesencial.

iii) Si $\gamma = \gamma_N$, entonces $v^\gamma \equiv v$, y por tanto $(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}$, puede verse como el juego cooperativo (N, v) con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación dadas por $\boldsymbol{\lambda}$.

iv) Trivial a partir de *i*) y *iii*).

v) Si (N, v) es cero-normalizado, para todo $\emptyset \neq S \subseteq N$,

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq S} \Delta_{v^\gamma}(T)\lambda = \lambda v^\gamma(S).$$

vi) Dado $S \subseteq N$, $\Delta_{v^\emptyset}(T) = 0$ para todo $\emptyset \neq T \subseteq S$ tal que $t \geq 2$, y así

$$(v^\emptyset)^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{i \in S} \Delta_v(\{i\}) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) = \sum_{i \in S} v^\emptyset(\{i\}) = (v^\gamma)^{\mathbf{0}}(S),$$

para todo $(N, \gamma) \in \Gamma^N$. La última igualdad se tiene por *ii*).

vii) Para todo $S \subseteq N$, si $\gamma_i = \emptyset$,

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_{v^\gamma}(T) \min_{j \in T}\{\lambda_j\} + \sum_{j \in S} \Delta_v(\{j\})$$

$$= \sum_{T \subseteq S \setminus \{i\}, t \geq 2} \Delta_{v^\gamma}(T) \min_{j \in T}\{\lambda_j\} + \sum_{j \in S} \Delta_v(\{j\}),$$

dado que para $i \in T$, $\Delta_{v^\gamma}(T) = 0$ (en este caso T es necesariamente no conexo dado que i esta aislado en γ). Por otro lado,

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}^{-i}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_{v^\gamma}(T) \min_{j \in T}\{\lambda_j^{-i}\} + \sum_{j \in S} \Delta_v(\{j\})$$

$$= \sum_{T \subseteq S \setminus \{i\}, t \geq 2} \Delta_{v^\gamma}(T) \min_{j \in T}\{\lambda_j\} + \sum_{T \subseteq S, i \in T, t \geq 2} \Delta_{v^\gamma}(T)0 + \sum_{j \in S} \Delta_v(\{j\}) = (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(S),$$

y así $(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}^{-i}}$ cuando $\gamma_i = \emptyset$.

viii) Para todo $\emptyset \neq S \subseteq N$,

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}^{-i}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_{v^\gamma}(T) \min_{j \in T}\{\lambda_j^{-i}\} + \sum_{j \in S} \Delta_v(\{j\})$$

$$= \sum_{T\subseteq S\setminus\{i\},t\geq 2} \Delta_{v^{\gamma}}(T) \min_{j\in T}\{\lambda_j\} + \sum_{j\in S} \Delta_v(\{j\}),$$

ya que para $T \subseteq S$ con $i \in T$, $\min\limits_{j\in T}\{\lambda_j^{-i}\} = 0$.
Por otro lado,

$$(v^{\gamma_{-i}})^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{T\subseteq S,t\geq 2} \Delta_{v^{\gamma_{-i}}}(T) \min_{j\in T}\{\lambda_j\} + \sum_{j\in S} \Delta_v(\{j\})$$

$$= \sum_{T\subseteq S\setminus\{i\},t\geq 2} \Delta_{v^{\gamma_{-i}}}(T) \min_{j\in T}\{\lambda_j\} + \sum_{j\in S} \Delta_v(\{j\}),$$

pues $\Delta_{v^{\gamma_{-i}}}(T) = 0$ si $i \in T$. Además, para $T \subseteq S \setminus \{i\}$, usando la definición de los dividendos de Harsanyi y del juego restringido a grafo, tenemos,

$$\Delta_{v^{\gamma}}(T) = \sum_{R\subseteq T}(-1)^{t-r}v^{\gamma}(R) = \sum_{R\subseteq T}(-1)^{t-r}[\sum_{C\in R/\gamma} v(C)]$$

$$= \sum_{R\subseteq T}(-1)^{t-r}[\sum_{C\in R/\gamma_{-i}} v(C)],$$

donde la última igualdad se obtiene porque $i \notin T$. Pero,

$$\sum_{R\subseteq T}(-1)^{t-r}[\sum_{C\in (T\setminus R)/\gamma_{-i}} v(C)] = \Delta_{v^{\gamma_{-i}}}(T),$$

y así $(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}^{-i}}(S) = (v^{\gamma_{-i}})^{\boldsymbol{\lambda}}(S)$ para todo $S \subseteq N$.

Finalmente γ_{-i} es un grafo tal que $(\gamma_{-i})_i = \emptyset$ y así, por *vii*), $(v^{\gamma_{-i}})^{\boldsymbol{\lambda}} = (v^{\gamma_{-i}})^{\boldsymbol{\lambda}^{-i}}$, lo que completa la demostración. ■

En la siguiente proposición y sus corolarios probamos que, para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}^N_\Lambda$, el correspondiente juego restringido al grafo con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación puede ser escrito como combinación lineal positiva de juegos de Myerson. La expresión obtenida en la siguiente proposición es la forma integral de Choquet de $(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}}$ (para v un juego cero-normalizado), como se definió en Tsurumi et al. (2001) [16].

A cada vector de pesos $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in N} \in [0, 1]^n$ le asociaremos un conjunto de números reales $\lambda_{(h)}$, $h = 0, 1, ..., r$, donde $r \leq n$ es el número de diferentes valores entre los pesos en $\boldsymbol{\lambda}$. Entonces, definimos $\lambda_{(0)} = 0$, y para $h = 1, 2, ..., r$, $\lambda_{(h)} = \min\limits_{i\in N}\{\lambda_i \mid \lambda_i > \lambda_{(h-1)}\}$.

[16] Detalles sobre la integral de Choquet para medidas difusas puede encontrarse en Choquet (1953), Sugeno y Murofushi (1987), y Grabisch et al. (1992).

Proposición 7.2.2 *Dada* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_{\Lambda}^{N}$, *con* (N, v) *un juego cero-normalizado, tenemos que:*

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v^{\gamma_{|N_h}}$$

con $N_h = \{i \in N \mid \lambda_i \geq \lambda_{(h+1)}\}$, *para* $h = 0, ..., r-1$.

Demostración:
Para $S = \emptyset$ el resultado es trivial. Consideremos $\emptyset \neq S \subseteq N$. Entonces, por definición,

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_{v^{\gamma}}(T) \min_{i \in T}\{\lambda_i\} \tag{7.1}$$

Para probar que

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}}(S) = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v^{\gamma_{|N_h}}(S) = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_{v^{\gamma_{|N_h}}}(T) \tag{7.2}$$

es suficiente ver que para cada $T \subseteq S$, $t \geq 2$, el coeficiente de $\Delta_{v^{\gamma}}(T)$ es el mismo en el lado izquierdo y derecho de (7.2) y, por lo tanto, es igual a $\min_{i \in T}\{\lambda_i\}$ ya que éste es el coeficiente en el lado izquierdo de (7.2), como consecuencia de la expresión (7.1). Recordemos que para $h = 0, ..., r-1$ y $T \subseteq N$, $t \geq 2$,

$$\Delta_{v^{\gamma_{|N_h}}}(T) = \begin{cases} \Delta_{v^{\gamma}}(T), & \text{si } T \subseteq N_h \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

ya que restringiendo el juego a N_h, los dividendos de las coaliciones contenidas en N_h se conservan y aquellos correspondientes a las coaliciones no contenidas en N_h desaparecen.

Para cada $T \subseteq S$, $t \geq 2$, definimos

$$r_T^* = \max_h \{h = 0, 1, ..., r-1 \mid \Delta_{v^{\gamma_{|N_h}}}(T) = \Delta_{v^{\gamma(T)}}\}.$$

Entonces en el lado derecho de (7.2) el coeficiente de $\Delta_{v^{\gamma}}(T)$ es

$$\sum_{h=0}^{r_T^*} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) = \lambda_{(r_T^*+1)} - \lambda_{(0)} = \lambda_{(r_T^*+1)} = \min_{i \in T}\{\lambda_i > \lambda_{(r_T^*)}\}.$$

En consecuencia, solo necesitamos probar que $\lambda_{(r_T^*+1)} = \min_{i \in T}\{\lambda_i\}$. Como T es conexo en $\gamma_{|N_{r_T^*}}$ todos los nodos de T están en $N_{r_T^*} = \{i \in N \mid \lambda_i \geq \lambda_{(r_T^*+1)}\}$, y entonces, $\min_{i \in T}\{\lambda_i\} \geq \lambda_{(r_T^*+1)}$.

Pero, si $\min_{i \in T}\{\lambda_i\} > \lambda_{(r_T^*+1)}$, se tiene que, para todo $i \in T$, $i \in N_{r_T^*+1}$. Como T es conexo en $\gamma_{|N_0}, \gamma_{|N_1}, \ldots, \gamma_{|N_{r_T^*}}$ y los nodos de T están en $N_{r_T^*+1}$, T es conexo en $\gamma_{|N_{r_T^*+1}}$. Esta contradicción con la definición de r_T^* prueba el resultado. ■

Corolario 7.2.1 *Dada* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$, *suponemos que* (N, v_o) *es la cero-normalización de* (N, v), *entonces,*

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v_0^{\gamma_{|N_h}} + \sum_{i \in N} v_{|\{i\}},$$

con $N_h = \{i \in N \mid \lambda_i \geq \lambda_{(h+1)}\}$, *para* $h = 0, ..., r-1$.

Para aclarar el significado y los cálculos relacionados con la proposición anterior (y su corolario) consideramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2.1 *Sea* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$ *con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.6, 0.3, 0.5, 0.1, 0.4)$, $v = u_{\{1,3\}}$ *y* $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}$. *Una representación de* (N, γ) *con los pesos de los jugadores está dada en la Figura 7.2.1.*

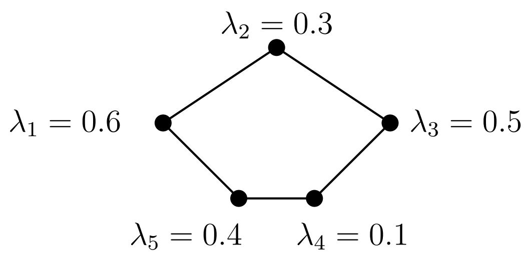

Figura 7.2.1

En este caso tenemos $r = 5$, $\lambda_{(0)} = 0$, $\lambda_{(1)} = 0.1$, $\lambda_{(2)} = 0.3$, $\lambda_{(3)} = 0.4$, $\lambda_{(4)} = 0.5$, $\lambda_{(5)} = 0.6$. *Además,* $N_0 = N$, $N_1 = \{1, 2, 3, 5\}$, $N_2 = \{1, 3, 5\}$, $N_3 = \{1, 3\}$, $N_4 = \{1\}$. *Entonces,*

$$\sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v^{\gamma_{|N_h}} + \sum_{i \in N} v_{|_{\{i\}}} = 0.1 v^{\gamma_{|N}} + (0.3 - 0.1) v^{\gamma_{|N_1}} + (0.4 - 0.3) v^{\gamma_{|N_2}}$$

$$+ (0.5 - 0.4) v^{\gamma_{|N_3}} + (0.6 - 0.5) v^{\gamma_{|N_4}} + \sum_{i \in N} v_{|_{\{i\}}}$$

$$= 0.1 v^\gamma + 0.2 v^{\gamma_{|N_1}} = 0.1(u_{\{1,2,3\}} + u_{\{1,3,4,5\}} - u_N) + 0.2 u_{\{1,2,3\}}$$

$$= 0.3 u_{\{1,2,3\}} + 0.1 u_{\{1,3,4,5\}} - 0.1 u_N,$$

que coincide con $(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}$ *obtenido a partir de la Definición* 7.1.2.

De forma similar, para $\boldsymbol{\lambda}' = (0.6, 0.6, 0.5, 0.1, 0.1)$, $r = 3$, $\lambda'_{(0)} = 0$, $\lambda'_{(1)} = 0.1$, $\lambda'_{(2)} = 0.5$, $\lambda'_{(3)} = 0.6$. *Además,* $N_0 = N$, $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{1, 2\}$, *y así, para* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}', \gamma)$,

$$\sum_{h=0}^{r-1} (\lambda'_{(h+1)} - \lambda'_{(h)}) v^{\gamma_{|N_h}} + \sum_{i \in N} v_{|_{\{i\}}} = 0.1 v^{\gamma_{|N}} + (0.5 - 0.1) v^{\gamma_{|N_1}} + (0.6 - 0.5) v^{\gamma_{|N_2}}$$

$$= 0.1v^{\gamma} + 0.4v^{\gamma_{|N_1}} = 0.1(u_{\{1,2,3\}} + u_{\{1,3,4,5\}} - u_N) + 0.4u_{\{1,2,3\}}$$
$$= 0.5u_{\{1,2,3\}} + 0.1u_{\{1,3,4,5\}} - 0.1u_N,$$

que coincide con $(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}'}$*, obtenido a partir de su definición.*

Observación 7.2.1 *Supongamos que en el ejemplo anterior la arista* $\{1,3\}$ *es añadido y* $\gamma' = \gamma \cup \{\{1,3\}\}$*. Se puede comprobar que* $(v^{\gamma'})^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.5u_{\{1,3\}}$*, lo que es consistente con el hecho de que los jugadores* 1 *y* 3*, teniendo una relación directa, no pagarán intermediarios para conectarse.*

En la proposición siguiente se demuestra que la superaditividad del juego original es heredada por el juego restringido al grafo con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación.

Proposición 7.2.3 *Dado* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}^N_{\Lambda}$*, si* (N, v) *es un juego superaditivo entonces* $(N, (v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}})$ *es también superaditivo.*

Demostración:
Usando el Corolario 7.2.1, tenemos

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v_0^{\gamma_{|N_h}} + \sum_{i \in N} v_{|\{i\}},$$

con $N_h = \{i \in N \mid \lambda_i \geq \lambda_{(h+1)}\}$, para $h = 0, ..., r-1$, y v_0 la cero-normalización de v. Y así, para todo $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$,

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}}(S \cup T) = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v_0^{\gamma_{|N_h}}(S \cup T) + \sum_{i \in S \cup T} v(\{i\})$$

$$\geq \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v_0^{\gamma_{|N_h}}(S) + \sum_{i \in S} v(\{i\}) + \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v_0^{\gamma_{|N_h}}(T) + \sum_{i \in T} v(\{i\})$$
$$= (v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}}(S) + (v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}}(T).$$

La desigualdad se tiene porque, para todo $h = 0, 1, ..., r-1$, $\lambda_{(h+1)} \geq \lambda_{(h)}$ y $(N, v_0^{\gamma_{|N_h}})$ es superaditivo. Recordemos que (N, v) superaditivo implica (N, v_0) superaditivo y, consecuentemente, $(N, v_0^{\gamma_{|N_h}})$ superaditivo (Owen, 1986). ■

Capítulo 8

Un valor $\bar{\mu}$ para situaciones de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.

Lobachevski

En este capítulo, primero se propone una regla de asignación para las situaciones de comunicación introducidas en la sección anterior. Además, se introduce una descomposición del valor definido, la cual es de gran utilidad para su cálculo, así como para la demostración de varias de sus propiedades.

8.1. Definición del valor

A continuación se define una solución puntual para las nuevas situaciones de comunicación donde los jugadores pueden tener diferentes habilidades de negociación.

Definición 8.1.1 *Una regla de asignación ψ sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ es una aplicación $\psi : \mathcal{CS}_\Lambda^N \to \mathbb{R}^n$. $\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ representa el pago para el jugador i en $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$.*

Definición 8.1.2 *La regla de asignación $\bar{\mu}$ sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ se define como $\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = Sh(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}})$, para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$.*

Nótese que $Sh(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}})$ coincide con $\sigma(N, v^\gamma, \boldsymbol{\lambda})$, siendo σ el valor definido anteriormente para juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas.

La restricción de $\bar{\mu}$ a la familia de los $(N, v, \mathbf{1}, \gamma) \in \mathcal{CS}_{\Lambda}^{N}$ (familia que identificamos con $\mathcal{CS}^{N}$) coincide con el valor de Myerson, μ, en $\mathcal{CS}^{N}$. Además, para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ con $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, ..., n$,

$$\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \lambda\mu_i(N, v, \gamma) + (1 - \lambda)v(\{i\}),$$

$i \in N$. En particular, si (N, v) es un juego cero-normalizado, y $\boldsymbol{\lambda} = \lambda.\mathbf{1}$,

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \lambda\mu(N, v, \gamma).$$

Finalmente, para $(N, v, \mathbf{1}, \gamma_N) \in \mathcal{CS}_{\Lambda}^{N}$,

$$\bar{\mu}(N, v, \mathbf{1}, \gamma_N) = Sh(N, v).$$

Para ilustrar los efectos en $\bar{\mu}$ de las habilidades de negociación de los jugadores, fijado el juego y el grafo, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.1.1 *Retomando el ejemplo del parlamento (Ejemplo* 7.1.1*), en el que* $N = \{1, 2, 3\}$, $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ *y*

$$v = u_{\{1,2\}} + u_{\{1,4\}} + u_{\{2,4\}} - 2u_{\{1,2,4\}}$$

se tiene que

$$v^{\gamma} = u_{\{1,2\}} + u_{\{2,3,4\}} - u_{\{1,2,3,4\}}.$$

Y, para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$,

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}} = \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2\}u_{\{1,2\}} + \text{mín}\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}u_{\{2,3,4\}} - \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}u_{\{1,2,3,4\}}.$$

Es fácil ver que el partido 2 es el que tiene mayor poder independientemente de las habilidades de negociación.

Sin embargo, la distribución del poder entre los partidos puede verse seriamente afectada por sus habilidades de negociación.

Consideremos tres marcos diferentes:

i) Supongamos $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.8, 1, 0.2)$. *En este caso*

$$(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.2u_{\{1,2\}} + 0.2u_{\{2,3,4\}} - 0.2u_{\{1,2,3,4\}}.$$

Y así

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \left(\frac{3}{60}, \frac{7}{60}, \frac{1}{60}, \frac{1}{60}\right).$$

$\bar{\mu}$ *es proporcional al valor de Myerson. La distribución del poder es* $(\frac{3}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ *o* $(25\,\%, 58,33\,\%, 8,33\,\%, 8,33\,\%)$.

La $\boldsymbol{\lambda}$-eficiencia en $(N, v^\gamma, \boldsymbol{\lambda})$ es muy baja, $\frac{1}{5}$. En esta situación, los partidos con más ganas de cooperar no tienen mayoría. Como consecuencia puede ocurrir que no se llegue a un acuerdo para formar gobierno y se deban convocar nuevas elecciones.

En España, después de las elecciones celebradas el 20 de diciembre de 2015, la falta de capacidad de negociación (entre otras causas) hizo necesarias nuevas elecciones el 26 de junio de 2016. Como se ha dicho, esta falta de capacidad continuó y, después de las elecciones del 28 de Abril de 2019, la no existencia de acuerdos para formar una mayoría llevó a una nueva convocatoria de elecciones el 10 de Noviembre de 2019.

ii) Supongamos ahora que $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.8, 1, 0.8)$

En este caso

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.2u_{\{1,2\}} + 0.8u_{\{2,3,4\}} - 0.2u_{\{1,2,3,4\}},$$

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \left(\frac{3}{60}, \frac{15}{60}, \frac{9}{60}, \frac{9}{60}\right),$$

y la distribución del poder es $(8,33\,\%, 41,66\,\%, 25\,\%, 25\,\%)$.

iii) Supongamos finalmente que $\boldsymbol{\lambda} = (1, 0.8, 0.2, 0.2)$. *Entonces*

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.8u_{\{1,2\}} + 0.2u_{\{2,3,4\}} - 0.2u_{\{1,2,3,4\}},$$

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \left(\frac{21}{60}, \frac{25}{60}, \frac{1}{60}, \frac{1}{60}\right),$$

y la distribución del poder es $(43.75\,\%, 52.08\,\%, 2.08\,\%, 2.08\,\%)$.

Estos ejemplos nos muestran que incluir las habilidades de negociación como un elemento adicional en las situaciones de comunicación, puede ayudarnos a matizar el valor de Myerson.

8.2. Descomposición lineal del valor definido

Para situaciones de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación y en las que el juego es cero-normalizado, el valor definido se puede calcular como una combinación lineal de valores de Myerson de situaciones de comunicación clásicas.

Dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS^N_\Lambda$ asociaremos al juego modificado $(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}})$ un conjunto de números reales $\lambda_{(h)}$, $h = 0, 1, ..., r$, donde $r \leq n$ es el número de diferentes valores entre los pesos de los jugadores en $(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}})$. Entonces, definimos $\lambda_{(0)} = 0$, y para $h = 1, 2, ..., r$, $\lambda_{(h)} = \min\limits_{i \in N}\{\lambda_i \mid \lambda_i > \lambda_{(h-1)}\}$.

Proposición 8.2.1 *Dada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$, con v un juego cero-normalizado, se tiene que:*

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) \mu(N, v, \gamma_{|N_h}),$$

con $N_h = \{i \in N \mid \lambda_i \geq \lambda_{(h+1)}\}$, para $h = 0, ..., r-1$.

Demostración: Dada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$, siendo (N, v) cero-normalizado, e $i \in N$, por la Proposición 7.2.2,

$$\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = Sh_i\big(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}\big) = Sh_i\big(N, \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) v^{\gamma_{|N_h}}\big) =$$

$$= \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) Sh_i(N, v^{\gamma_{|N_h}}) = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) \mu_i(N, v, \gamma_{|N_h}).$$

■

Corolario 8.2.1 *Dada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$, e $i \in N$,*

$$\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \sum_{h=0}^{r-1} (\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)}) \mu_i(N, v_0, \gamma_{|N_h}) + v(\{i\}),$$

siendo (N, v_0) la cero-normalización de (N, v), y $N_h = \{i \in N \mid \lambda_i \geq \lambda_{(h+1)}\}$, para $h = 0, ..., r-1$.

Ejemplo 8.2.1 *Consideremos, nuevamente, la situación $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ introducida en el Ejemplo 7.2.1. Entonces*

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.3u_{\{1,2,3\}} + 0.1u_{\{1,3,4,5\}} - 0.1u_N.$$

Y así, podemos calcular $\bar{\mu}$ desde la definición, es decir,

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = Sh\big(N, 0.3u_{\{1,2,3\}} + 0.1u_{\{1,3,4,5\}} - 0.1u_N\big)$$

$$= \left(\frac{21}{200}, \frac{2}{25}, \frac{21}{200}, \frac{1}{200}, \frac{1}{200}\right),$$

o desde la Proposición 8.2.1,

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) &= 0.1\mu(N, v, \gamma_{|_N}) + (0.3 - 0.1)\mu(N, v, \gamma_{|_{N_1}}) + (0.4 - 0.3)\mu(N, v, \gamma_{|_{N_2}}) \\ &\quad + (0.5 - 0.4)\mu(N, v, \gamma_{|_{N_3}}) + (0.6 - 0.5)\mu(N, v, \gamma_{|_{N_4}}) \\ &= 0.1\left(\frac{23}{60}, \frac{2}{15}, \frac{23}{60}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}\right) + 0.2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right) \\ &= \left(\frac{21}{200}, \frac{2}{25}, \frac{21}{200}, \frac{1}{200}, \frac{1}{200}\right).\end{aligned}$$

Capítulo 9

Caracterizaciones del valor $\bar{\mu}$

Defiende tu derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.

Hipatia de Alejandría

En este capítulo se incluyen diferentes propiedades de las reglas de asignación para situaciones de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación y se analiza, primero, hasta qué punto son satisfechas por la regla $\bar{\mu}$ y, segundo, que conjunto (o conjuntos) de ellas sirven para caracterizar dicha regla.

9.1. Algunas propiedades para reglas de asignación en situaciones de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas

En este apartado se definen de manera formal y se ejemplifican algunas propiedades, cuyo estudio hemos considerado importante, ya sea por su cumplimiento, o no.

Definición 9.1.1 *Una regla de asignación ψ definida sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ satisface eficiencia en componentes conexas si, para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS_\Lambda^N$, y para todo $C \in N/\gamma$,*

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = v(C).$$

Definición 9.1.2 *Dada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$ diremos que dos jugadores $i, j \in N$ están conectados en la negociación si existe $i_1 = i, i_2, ..., i_r = j$ con $\lambda_{i_k} > 0$, para $k = 1, ..., r$ y de tal forma que $\{i_k, i_{k+1}\} \in \gamma$ para $k = 1, ...r-1$. Además, asumiremos que cada jugador está conectado en la negociación consigo mismo.*

Esta definición introduce una relación binaria (de equivalencia) en N. Denotemos con $N/(\boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ la partición que induce en N. A cada elemento de $N/(\boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ lo llamaremos componente conexa de negociación.

Ejemplo 9.1.1 *Consideramos* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$ *con* $N = \{1,2,3,4,5\}$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.6, 0, 0.3, 0.4, 0.1)$ *y* $\gamma = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}$. *Una representación de* (N,γ) *con los pesos de los jugadores está dada en la Figura 9.1.1.*

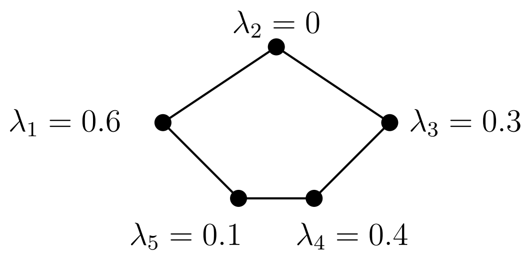

Figura 9.1.1

En la situación de comunicación clásica (N, v, γ), *la relación de equivalencia dada por la conexión de nodos induce en* N *la partición* $N/\gamma = \{N\}$, *formada en este caso por una única componente conexa. Por otro lado, si tenemos en cuenta el vector* $\boldsymbol{\lambda}$ *de las diferentes capacidades de negociación de los jugadores, nos encontramos en un marco distinto, en el que se observa que el jugador* 2 *tiene capacidad nula de negociación, lo que provoca que la partición* $N/(\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ *que acabamos de introducir sea* $N/(\boldsymbol{\lambda},\gamma) = \{\{1,3,4,5\},\{2\}\}$.

Definición 9.1.3 *Una regla de asignación* ψ *definida sobre* $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ *satisface eficiencia en componentes conexas de negociación si, para todo* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS_\Lambda^N$, *y para todo* $C \in N/(\boldsymbol{\lambda},\gamma)$,

$$\sum_{i \in C} \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(C).$$

Observación 9.1.1 *Como se aprecia en el ejemplo anterior, la eficiencia en componentes conexas de negociación difiere de la clásica eficiencia en componentes.*

Observación 9.1.2 *En las situaciones de comunicación clásicas, la cooperación (en general) incompleta dada por el grafo, motiva ineficiencia pues* $v^\gamma(N)$ *es, con frecuencia, menor que* $v(N)$. *Al añadir imperfecciones en la cooperación como consecuencias de las habilidades de negociación de los jugadores, la eficiencia sufre otro revés y, si* $C \in N/(\boldsymbol{\lambda},\gamma)$, C *será un subconjunto de alguna componente* $C^* \in N/\gamma$, *teniéndose, en general, que para los juegos superaditivos,* $(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(C) < v^\gamma(C^*)$. *Así mismo, se tendrá, en general, que* $(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(N) < v^\gamma(N)$.

Ejemplo 9.1.2 *Retomamos el Ejemplo* 9.1.1 *en el que* $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$ *con* $N = \{1,2,3,4,5\}$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.6, 0, 0.3, 0.4, 0.1)$ *y* $\gamma = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}$. *Una representación de* (N,γ) *con los pesos de los jugadores está dada en la Figura 9.1.1, y sea* $v = u_{\{1,3\}}$. *Entonces por definición*

$$v^\gamma = u_{\{1,2,3\}} + u_{\{1,3,4,5\}} - u_{\{1,2,3,4,5\}},$$

y

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.1u_{\{1,3,4,5\}}.$$

Entonces,

$$v^\gamma(N) = 1 + 1 - 1 = 1,$$

y

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(N) = 0.1.$$

Se observa, como se anticipaba en la observación anterior que, si a las restricciones en la comunicación se añade la imperfección en la cooperación, la eficiencia se ve deteriorada.

Definición 9.1.4 *Una regla de asignación ψ definida sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas si, para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$ y todo $i, j \in N$,*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma_{-j}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma_{-i}).$$

Definición 9.1.5 *Una regla de asignación ψ definida sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ satisface la propiedad de equidad (fairness) si, para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS_\Lambda^N$ y todo $l = \{i, j\} \in \gamma$,*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma \setminus \{l\}) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma \setminus \{l\}).$$

Definición 9.1.6 *Una regla de asignación ψ definida sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ satisface monotonía en las aristas o estabilidad si, para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS_\Lambda^N$, con (N, v) un juego superaditivo, y todo $l = \{i, j\} \in \gamma$,*

$$\psi_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \geq \psi_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma \setminus \{l\}) \text{ para } k = i, j.$$

Definición 9.1.7 *Una regla de asignación ψ definida sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ satisface monotonía es las habilidades de negociación, si dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$, $(N, v, \boldsymbol{\lambda}', \gamma) \in CS_\Lambda^N$, con (N, v) un juego superaditivo, y para algún $i \in N$, $\lambda_i' \geq \lambda_i$, y $\lambda_j' = \lambda_j$, para $j \neq i$, se verifica que*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \leq \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}', \gamma).$$

Definición 9.1.8 *Una regla de asignación ψ definida sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en habilidades de negociación si, para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS_\Lambda^N$ y todo $i, j \in N$,*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}, \gamma) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}, \gamma),$$

donde para $k \in N$, $\boldsymbol{\lambda}^{-k}$ es el vector en $[0, 1]^n$ con $\lambda_l^{-k} = \begin{cases} \lambda_l, & si\ l \neq k \\ 0, & si\ l = k. \end{cases}$

Definición 9.1.9 *Una regla de asignación ψ definida sobre $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ satisface equidad en habilidades de negociación si, para $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS_\Lambda^N$ e $i, j \in N$,*

$$\psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}', \gamma) = \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \psi_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}', \gamma),$$

con $\lambda_k' = \lambda_k$ para todo $k \neq i, j$ y $\lambda_i' \neq \lambda_i$, $\lambda_j' \neq \lambda_j$.

9.2. Propiedades del valor definido

En esta sección estudiaremos el cumplimiento, o no, de las propiedades anteriormente definidas.

Proposición 9.2.1 *La regla de asignación $\bar{\mu} : \mathcal{CS}_\Lambda^N \to \mathbb{R}^n$ satisface eficiencia en componentes conexas de negociación.*

Demostración: Sea $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$, y $C \in N/(\boldsymbol{\lambda}, \gamma)$. Tenemos:

$$\sum_{i\in C} \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \sum_{i\in C} Sh_i(N, (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}})$$

$$= \sum_{i\in C} Sh_i(C, [(v^\gamma)^\lambda]_{|C}) = [(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}]_{|C}(C) = (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(C),$$

la primera igualdad se tiene por la definición de $\bar{\mu}$; la segunda, dado que el valor de Shapley del jugador i en $(v^\gamma)^\lambda$ solo depende de los miembros que están en su componente conexa de negociación y la tercera, ya que el valor de Shapley es eficiente. ∎

La regla de asignación $\bar{\mu} : \mathcal{CS}_\Lambda^N \to \mathbb{R}^n$ no satisface eficiencia en componentes conexas.

Contraejemplo 9.2.1 *Retomamos el Ejemplo* 9.1.2 *donde*

$$(v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = 0.1u_{\{1,3,4,5\}},$$

entonces $\bar{\mu}_1(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \bar{\mu}_3(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \bar{\mu}_4(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \bar{\mu}_5(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \frac{0.1}{4}$ *y* $\bar{\mu}_2(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = 0$. *Y así*

$$\sum_{i\in N} \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \frac{0.1}{4} + 0 + \frac{0.1}{4} + \frac{0.1}{4} + \frac{0.1}{4} = 0.1 < 1 = v(N),$$

y, por tanto $\bar{\mu}$ no es eficiente en componentes conexas.

Proposición 9.2.2 *La regla de asignación $\bar{\mu} : \mathcal{CS}_\Lambda^N \to \mathbb{R}^n$ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación.*[17]

[17] De hecho, $\bar{\mu}$ satisface la siguiente versión generalizada de la propiedad de contribuciones equilibradas en habilidades de negociación: dado $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$, e $i, j \in N$

$$\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j,c}, \gamma) = \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i,c}, \gamma),$$

para $k = i, j$, $\boldsymbol{\lambda}^{-k,c} = \left(\lambda_l^{-k,c}\right)_{l\in N} = \begin{cases} \lambda_l, & \text{si } l \neq k \\ c < \lambda_k, & \text{si } l = k. \end{cases}$
La demostración de este es similar a la llevada a cabo en la Proposición 9.2.2

Demostración: Como es obvio por su definición, $\bar{\mu}$ es lineal en el juego. Entonces es suficiente con probar que $\bar{\mu}$ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación para elementos en $\mathcal{CS}_\Lambda^N$ de la forma $(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$, con $\emptyset \neq T \subseteq N$. Vamos a considerar en primer lugar el caso en el que $T = \{i\}$ para $i \in N$. Entonces $u_{\{i\}}^\gamma = u_{\{i\}}$ y por tanto $\bar{\mu}_i(N, u_{\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = 1$ y $\bar{\mu}_j(N, u_{\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = 0$ para $j \neq i$, lo que no depende de los elementos de $\boldsymbol{\lambda}$. Entonces, si j reduce su habilidad de negociación a cero,

$$\bar{\mu}_i(N, u_{\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, u_{\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}^{-j}, \gamma) = 1 - 1 = 0,$$

y similarmente

$$\bar{\mu}_j(N, u_{\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_j(N, u_{\{i\}}, \boldsymbol{\lambda}^{-i}, \gamma) = 0 - 0 = 0.$$

Entonces, para juegos de unanimidad de coaliciones individuales el resultado queda probado. Supongamos ahora que $\emptyset \neq T \subseteq N$, $t \geq 2$.

Si $\mathcal{MCS}(T, N, \gamma) = \{T_1, ..., T_m\}$, (el caso $\mathcal{MCS}(T, N, \gamma) = \emptyset$ es trivial) entonces la función característica $(u_T^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}$ está dada por:

$$(u_T^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{r=1}^{m} (\min_{k \in T_r}\{\lambda_k\}) u_{T_r} - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{l=r+1}^{m} (\min_{k \in T_r \cup T_l}\{\lambda_k\}) u_{T_r \cup T_l}$$
$$+ ... + (-1)^{m-1} (\min_{k \in \cup_{r=1}^m T_r}\{\lambda_k\}) u_{\cup_{r=1}^m T_r}$$

y así,

$$\bar{\mu}(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = Sh\big[N, \sum_{r=1}^{m} (\min_{k \in T_r}\{\lambda_k\}) u_{T_r} - \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{l=r+1}^{m} (\min_{k \in T_r \cup T_l}\{\lambda_k\}) u_{T_r \cup T_l}$$
$$+ ... + (-1)^{m-1} (\min_{k \in \cup_{r=1}^m T_r}\{\lambda_k\}) u_{\cup_{r=1}^m T_r}\big].$$

Supongamos ahora que el jugador $j \in N$ reduce su habilidad de negociación a cero, y el resto de habilidades se mantiene invariante. Entonces,

$$\bar{\mu}(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}^{-j}, \gamma) = Sh\big[N, \sum_{r=1}^{h} (\min_{k \in T_{j_r}}\{\lambda_k\}) u_{T_{j_r}} - \sum_{r=1}^{h-1} \sum_{l=r+1}^{h} (\min_{k \in T_{j_r} \cup T_{j_l}}\{\lambda_k\}) u_{T_{j_r} \cup T_{j_l}}$$
$$+ ... + (-1)^{h-1} \min_{k \in \cup_{r=1}^h T_{j_r}}\{\lambda_k\} u_{\cup_{r=1}^h T_{j_r}}\big]$$

con $\{T_{j_1}, ..., T_{j_h}\}$ el subconjunto de los elementos de $\mathcal{MCS}(T, N, \gamma)$ para los cuales $j \notin T_{j_r}$ para todo $r = 1, ..., h$. Como consecuencia, para $i \in N$, $i \neq j$, la diferencia $\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}, \gamma)$ es una combinación lineal del valor de Shapley (de i) en juegos de la forma u_R con $i, j \in R$. Si ese jugador $i \in N$ reduce su capacidad de negociación a cero, entonces la diferencia, $\bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}, \gamma)$ es la misma combinación lineal del valor de Shapley (de j) en los mismos juegos u_R con $i, j \in R$. Por la simetría del valor de Shapley, ambas diferencias

$$\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}, \gamma),$$

y

$$\bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}, \gamma),$$

coinciden. Y así queda probado que $\bar{\mu}$ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación. ■

Proposición 9.2.3 *La regla de asignación $\bar{\mu} : \mathcal{CS}_\Lambda^N \to \mathbb{R}^n$ satisface contribuciones equilibradas.*

Demostración: Consideramos $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$ e $i, j \in N$. Entonces,

$$\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma_{-j}) = Sh_i(N, (v^{\gamma_{-j}})^{\boldsymbol{\lambda}}) = Sh_i(N, (v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}^{-j}}) = \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}, \gamma)$$

donde la segunda igualdad se tiene por *viii*) de la Proposición 7.2.1. Y así, para todo $i, j \in N$,

$$\bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma_{-j}) = \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-j}, \gamma) =$$

$$= \bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}, \gamma),$$

siendo la última igualdad valida dado que $\bar{\mu}$ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación. Finalmente, usando de nuevo *viii*) de la Proposición 7.2.1,

$$\bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}^{-i}, \gamma) = \bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_j(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma_{-i})$$

y así $\bar{\mu}$ satisface contribuciones equilibradas. ■

Observación 9.2.1 *Una consecuencia directa de la demostración anterior es que la propiedad de contribuciones equilibradas equivale a la de contribuciones equilibradas en habilidades de negociación.*

Proposición 9.2.4 *La regla de asignación $\bar{\mu} : \mathcal{CS}_\Lambda^N \to \mathbb{R}^n$ satisface equidad.*

Demostración: Para probar que $\bar{\mu}$ satisface equidad, es suficiente mostrar que la propiedad se verifica para $(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ con $T \subseteq N$, dado que $\bar{\mu}$ es lineal en el juego. Supongamos $l = \{i, j\} \in \gamma$. Entonces, $\bar{\mu}(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma \backslash \{l\})$ es una combinación lineal de valores de Shapley de juegos u_R con $i, j \in R$. Esto ocurre dado que todo los elementos que están en $\mathcal{MCS}(T, N, \gamma)$ y no están en $\mathcal{MCS}(T, N, \gamma \backslash \{l\})$ contienen a $\{i, j\}$. Usando la simetría del valor de Shapley,

$$\bar{\mu}_i(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_i(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma \backslash \{l\}) = \bar{\mu}_j(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_j(N, u_T, \boldsymbol{\lambda}, \gamma \backslash \{l\})$$

lo que completa la demostración. ■

Proposición 9.2.5 *La regla de asignación* $\bar{\mu} : \mathcal{CS}_\Lambda^N \to \mathbb{R}^n$ *satisface monotonía en las habilidades de negociación.*

Demostración: Consideremos $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ y $(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) \in \mathcal{CS}_\Lambda^N$ con (N, v) un juego superaditivo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que (N, v) es también cero-normalizado. Usaremos en la prueba la descomposición obtenida en la Proposición 8.2.1 (en el caso de un juego no cero-normalizado, la prueba es análoga usando el Corolario 8.2.1). Supongamos para un valor fijo $k \in N$, $\lambda'_k > \lambda_k$ y $\lambda_j = \lambda'_j$ para $j \neq k$.

Al cambiar λ_k por $\lambda'_k > \lambda_k$ alguno de los pares $(\lambda_{(h+1)}, v^{\gamma_{|N_h}})$ para $h = 0, 1, ..., r-1$ son modificados. Suponemos que $\lambda_k = \lambda_{(t)}$ con $t < r$ (el caso en el que el máximo peso, $\lambda_{(r)}$, es incrementado es trivial) y consideremos las seis posibilidades siguientes (que son exhaustivas):

i) Algunos jugadores tienen peso igual a λ_k pero $\lambda'_k < \lambda_{(t+1)}$. Entonces, usando la Proposición 8.2.1,

$$\bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) - \bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = (\lambda'_k - \lambda_{(t)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N'_k}) \geq 0,$$

con $N'_k = \{i \in N \mid \lambda'_i \geq \lambda'_{(k+1)}\}$.

La desigualdad se obtiene dado que $\lambda'_k > \lambda_{(t)}$ y que el valor de Myerson para una situación de comunicación con un juego superaditivo y cero-normalizado es no negativo (ya que es el valor Shapley de un juego superaditivo y cero-normalizado).

ii) Algunos jugadores tienen peso igual a λ_k pero $\lambda'_k = \lambda_{(t+1)}$. Entonces,

$$\bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) - \bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = (\lambda_{(t+1)} - \lambda_{(t)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N'_k}) \geq 0.$$

iii) Algunos jugadores tienen peso igual a λ_k pero $\lambda_{(t+1)} < \lambda'_k < \lambda_{(t+2)}$. Entonces,

$$\bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) - \bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$$

$$= (\lambda_{(t+1)} - \lambda_{(t)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) + (\lambda'_k - \lambda_{(t+1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N'_k}) \geq 0.$$

iv) Solamente un jugador tiene peso igual a λ_k pero $\lambda'_k < \lambda_{(t+1)}$. Entonces,

$$\bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) - \bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda'_k - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N'_k}) - (\lambda_k - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) \\ &= (\lambda'_k - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) - (\lambda_k - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) \\ &= (\lambda'_k - \lambda_k)\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) \geq 0. \end{aligned}$$

v) Solamente un jugador tiene peso igual a λ_k pero $\lambda'_k = \lambda_{(t+1)}$. Entonces,

$$\bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) - \bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda_{(t+1)} - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N'_k}) - (\lambda_{(t)} - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) \\
&= (\lambda_{(t+1)} - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) - (\lambda_{(t)} - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) \\
&= (\lambda_{(t+1)} - \lambda_{(t)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) \geq 0.
\end{aligned}$$

vi) Solamente un jugador tiene peso igual a λ_k pero $\lambda'_k > \lambda_{(t+1)}$. Entonces,

$$\bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) - \bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda_{(t+1)} - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) + (\lambda'_k - \lambda_{(t+1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N'_k}) \\
&\quad -(\lambda_k - \lambda_{(t-1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) \\
&= (\lambda_{(t+1)} - \lambda_k)\mu_k(N, v, \gamma_{|N_k}) + (\lambda'_k - \lambda_{(t+1)})\mu_k(N, v, \gamma_{|N'_k}) \geq 0.
\end{aligned}$$

y así el resultado queda probado. ■

Proposición 9.2.6 *La regla de asignación $\bar{\mu} : \mathcal{CS}^N_\Lambda \to \mathbb{R}^n$ satisface estabilidad.*

Demostración: Consideremos $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ y $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma \setminus \{l\}) \in \mathcal{CS}^N_\Lambda$ con $l = \{i, j\}$, v un juego superaditivo y v_0 su cero-normalización. Para $k = i, j$, por la Proposición 8.1,

$$\bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu}_k(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma\backslash\{l\})$$

$$= \sum_{h=0}^{r-1}(\lambda_{(h+1)} - \lambda_{(h)})[\mu_k(N, v_0, \gamma_{|N_h}) - \mu_k(N, v_0, (\gamma \setminus \{l\})_{|N_h})]$$

con $N_h = \{i \in N \mid \lambda_i \geq \lambda_{(h+1)}\}$, para $h = 0, ..., r-1$.

Como $\lambda_{(h+1)} \geq \lambda_{(h)}$ para $h = 0, ..., r-1$, y el valor de Myeron satisface estabilidad (v superaditivo implica v_0 superaditivo), el resultado queda probado. ■

Sin embargo, el valor propuesto $\bar{\mu}$ no satisface equidad en habilidades de negociación, como se puede observar en el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 9.2.2 *Consideramos de nuevo el Ejemplo* 7.2.1 *con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\boldsymbol{\lambda} = (0.6, 0.3, 0.5, 0.1, 0.4)$, $v = u_{\{1,3\}}$ *y* $\gamma = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}$. *Una representación de* (N, γ) *con los pesos de los jugadores está dada en la Figura 9.3.1.*

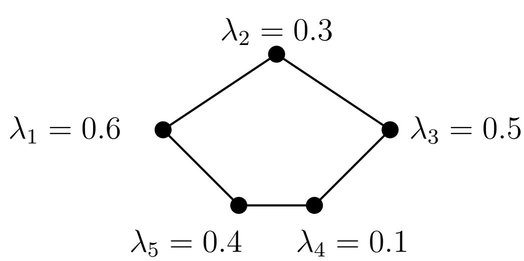

Figura 9.3.1

Entonces,

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \left(\frac{21}{200}, \frac{2}{25}, \frac{21}{200}, \frac{1}{200}, \frac{1}{200}\right).$$

Sea $\boldsymbol{\lambda'} = (0.6, 0, 0.5, 0.1, 0)$*, es decir: la capacidad de negociación de los jugadores 2 y 5 se anula. Tenemos* $\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) = (0, 0, 0, 0, 0)$*, y así*

$$\bar{\mu_2}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu_2}(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma) = \tfrac{2}{25} \neq \tfrac{1}{200} = \bar{\mu_5}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu_5}(N, v, \boldsymbol{\lambda'}, \gamma).$$

Supongamos ahora $\boldsymbol{\lambda''} = (0.6, 0.2, 0.5, 0.1, 0.3)$*, es decir, ambos jugadores (2 y 5) reducen su capacidad de negociación en la misma cantidad. Tenemos*

$$\bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda''}, \gamma) = (\frac{43}{600}, \frac{7}{150}, \frac{43}{600}, \frac{1}{200}, \frac{1}{200}),$$

y así

$$\bar{\mu_2}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu_2}(N, v, \boldsymbol{\lambda''}, \gamma) = \frac{1}{30} \neq 0 = \bar{\mu_5}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) - \bar{\mu_5}(N, v, \boldsymbol{\lambda''}, \gamma).$$

Entonces, la propiedad de equidad en habilidades de negociación no se satisface ni cuando dos jugadores modifican su capacidad de negociación hasta igualarla ni cuando la reducen en la misma cantidad.

9.3. Caracterizaciones

En esta sección introducimos dos caracterizaciones del valor definido, $\bar{\mu}$. Están inspiradas en las de Myerson (1977, 1980).

Proposición 9.3.1 *$\bar{\mu}$ es la única regla de asignación sobre CS_Λ^N que satisface eficiencia en componentes conexas de negociación y contribuciones equilibradas en habilidades de negociación.*

Demostración: Ya se ha probado que $\bar{\mu}$ satisface eficiencia en componentes conexas de negociación y contribuciones equilibradas en habilidades de negociación. Recíprocamente, supongamos que ψ es una regla de asignación sobre CS_Λ^N que satisface estas dos propiedades. Vamos a probar que $\psi(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) = \bar{\mu}(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma)$ para todo $(N, v, \boldsymbol{\lambda}, \gamma) \in CS_\Lambda^N$, por inducción sobre $d(\boldsymbol{\lambda})$, el cardinal de $\delta(\boldsymbol{\lambda}) = \{\lambda_i, i \in N \mid \lambda_i > 0\}$.

Si $d(\boldsymbol{\lambda}) = 0$, entonces $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, y cada componente conexa de negociación es un jugador individual. Como ψ y $\bar{\mu}$ satisfacen eficiencia en componentes conexas de negociación,

$$\psi_i(N, v, \mathbf{0}, \gamma) = (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(\{i\}) = v(\{i\}) = \bar{\mu}_i(N, v, \mathbf{0}, \gamma),$$

para todo $i \in N$.

Supongamos ahora que $\psi(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)=\bar{\mu}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ para toda situación de comunicación con jugadores que tienen diferentes capacidades de negociación en CS_{Λ}^{N} con $d(\boldsymbol{\lambda})\leq k$, $k\geq 0$, y consideremos $(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)\in CS_{\Lambda}^{\gamma}$ con $d(\boldsymbol{\lambda})=k+1$. Sea $i\in N$ y $C_i^{N,\gamma}$ la componente conexa de negociación a la cual i pertenece.

Si $C_i^{N,\gamma}=\{i\}$, entonces, de nuevo, como ψ y $\bar{\mu}$ satisfacen eficiencia en componentes conexas de negociación,

$$\psi_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)=(v^{\gamma})^{\boldsymbol{\lambda}}(\{i\})=v(\{i\})=\bar{\mu}_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma),$$

y así ambas reglas coinciden en este caso.

Alternativamente, supongamos que $|C_i^{N,\gamma}|>1$, y sea $j\in C_i^{N,\gamma}$, $j\neq i$. Por definición de las componentes conexas de negociación, existe un conjunto de jugadores $i=i_1,i_2,i_3,...,i_r=j$ con $i_l\in C_i^{N,\gamma}$ para $l=1,2,...,r$ y tal que $\{i_l,i_{l+1}\}\in\gamma$, para cada $l=1,2,...,r-1$, y $\lambda_{i_l}>0$ para $l=1,2,..,r$. Como ψ satisface contribuciones equilibradas en habilidades de negociación,

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_2},\gamma)=\psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_1},\gamma).$$

Se tiene que $d(\boldsymbol{\lambda}^{-i_1})\leq k$ y $d(\boldsymbol{\lambda}^{-i_2})\leq k$, y entonces usando la hipótesis de inducción,

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_2},\gamma)=\bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_2},\gamma)$$

y

$$\psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_1},\gamma)=\bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_1},\gamma).$$

Además:

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)=\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_2},\gamma)-\psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_1},\gamma)$$
$$=\bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_2},\gamma)-\bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda}^{-i_1},\gamma)=\bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma),$$

donde la última igualdad se tiene dado que $\bar{\mu}$ satisface la propiedad de contribuciones equilibradas en habilidades de negociación. Como consecuencia

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)=\psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma).$$

Usando el razonamiento anterior de manera iterativa,

$$\psi_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\bar{\mu}_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)=\psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma),$$

para cada $j\in C_i^{N,\gamma}$ y así, existe $h_{C_i^{N,\gamma}}\in\mathbb{R}$ tal que

$$\psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)=h_{C_i^{N,\gamma}},$$

para todo $j\in C_i^{N,\gamma}$. Entonces

$$|C_i^{N,\gamma}|h_{C_i^{N,\gamma}}=\sum_{j\in C_i^{N,\gamma}}[\psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)-\bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)]$$

$$= \sum_{j\in C_i^{N,\gamma}} \psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \sum_{j\in C_i^{N,\gamma}} \bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma).$$

Por la eficiencia en componentes conexas de negociación de ambas reglas ψ y $\bar{\mu}$, esta última expresión es igual a cero y así, $h_{C_i^{N,\gamma}} = 0 = \psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ para todo $j \in C_i^{N,\gamma}$ y, en particular, para i, lo cual completa la demostración. ■

Proposición 9.3.2 *$\bar{\mu}$ es la única regla de asignación sobre CS_Λ^N que satisface eficiencia en componentes conexas de negociación y equidad.*

Demostración: Ya se ha probado que $\bar{\mu}$ satisface eficiencia en componentes conexas de negociación y equidad. Recíprocamente, supongamos ψ is una regla de asignación sobre CS_Λ^N que satisface estas dos propiedades. Vamos a probar que $\psi(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) = \bar{\mu}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ para todo $(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) \in CS_\Lambda^N$ por inducción sobre $|\gamma|$.

Si $|\gamma| = 0$, entonces, cada componente conexa de negociación es un jugador individual. Como ψ y $\bar{\mu}$ satisfacen eficiencia en componentes conexas de negociación,

$$\psi_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\emptyset) = (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(\{i\}) = v(\{i\}) = \bar{\mu}_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\emptyset),$$

para todo $i \in N$.

Supongamos ahora que $\psi(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) = \bar{\mu}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ para toda situación de comunicación con jugadores que tienen diferentes habilidades de negociación en CS_Λ^N con $|\gamma| \leq k$, $k \geq 0$, y consideremos $(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) \in CS_\Lambda^\gamma$ con $|\gamma| = k+1$. Sea $i \in N$ y supongamos que $C_i^{N,\gamma}$ es la componente conexa de negociación de $(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ a la que i pertenece.

Si $C_i^{N,\gamma} = \{i\}$, entonces, de nuevo, como ψ y $\bar{\mu}$ satisfacen eficiencia en componentes conexas de negociación, $\psi_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) = (v^\gamma)^{\boldsymbol{\lambda}}(\{i\}) = v(\{i\}) = \bar{\mu}_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ y así ambas reglas coinciden.

Alternativamente, supongamos que $|C_i^{N,\gamma}| > 1$, y sea $j \in C_i^{N,\gamma}$, $j \neq i$. Por la definición de componente conexa de negociación, existe un conjunto de jugadores $i = i_1, i_2, i_3, ..., i_r = j$ con $i_l \in C_i^{N,\gamma}$ para $l = 1,2,...,r$ y tal que $\{i_l, i_{l+1}\} \in \gamma$, para cada $l = 1,2,...,r-1$, y además $\lambda_{i_l} > 0$ para $l = 1,2,...,r$. Como ψ satisface equidad,

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma\setminus\{i_1,i_2\}) = \psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma\setminus\{i_1,i_2\}).$$

Por ser $|\gamma \setminus \{i_i, i_2\}| \leq k$, utilizando la hipótesis de inducción,

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma\setminus\{i_1,i_2\}) = \bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma\setminus\{i_1,i_2\})$$

y

$$\psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma\setminus\{i_1,i_2\}) = \bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma\setminus\{i_1,i_2\}).$$

Entonces,

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) = \psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma \setminus \{i_1,i_2\}) - \psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma \setminus \{i_1,i_2\}) =$$

$$\bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma \setminus \{i_1,i_2\}) - \bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma \setminus \{i_1,i_2\}) = \bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma),$$

donde la última igualdad se obtiene porque $\bar{\mu}$ satisface la propiedad de equidad. Como consecuencia,

$$\psi_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_{i_1}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) = \psi_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_{i_2}(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma).$$

Usando el razonamiento anterior de forma iterativa,

$$\psi_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_i(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) = \psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma),$$

para todo $j \in C_i^{N,\gamma}$, y así, existe $h_{C_i^{N,\gamma}} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) = h_{C_i^{N,\gamma}},$$

para todo $j \in C_i^{N,\gamma}$. Entonces,

$$|C_i^{N,\gamma}|h_{C_i^{N,\gamma}} = \sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} [\psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)]$$

$$= \sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} \psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \sum_{j \in C_i^{N,\gamma}} \bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma).$$

Por la eficiencia en componentes conexas de negociación de ambas reglas ψ y $\bar{\mu}$, esta última expresión es igual a cero y así, $h_{C_i^{N,\gamma}} = 0 = \psi_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma) - \bar{\mu}_j(N,v,\boldsymbol{\lambda},\gamma)$ para todo $j \in C_i^{N,\gamma}$ y, en particular para i, lo cual completa la demostración. ■

Proposición 9.3.3 *$\bar{\mu}$ es la única regla de asignación sobre CS_Λ^N que satisface eficiencia en componentes conexas de negociación y contribuciones equilibradas.*

Demostración: Es una consecuencia directa de la Proposición 9.3.1 y la Observación 9.2.1 ■

Capítulo 10

Conclusiones y futuras líneas de investigación

Podemos ver poco sobre el futuro, pero lo suficiente para darnos cuenta de que hay mucho por hacer.

Alan Turing

En este apartado se expone, en primer lugar, un resumen de todas las ideas que la presente tesis ofrece como novedades o aportaciones a la Teoría de Juegos. En segundo, y último lugar, se describen algunas metas, objetivos o curiosidades que nos han surgido en los últimos años y, a los que previsiblemente dedicaremos nuestros esfuerzos en los próximos.

10.1. Conclusiones

En esta memoria se ha construido un puente entre los juegos cooperativos y los no cooperativos. Para nosotros, en los juegos cooperativos los jugadores no tienen necesariamente voluntad total de cooperación sino que su interés en ella está matizado a través de un valor en el intervalo $[0, 1]$. Hemos propuesto modificar el juego cooperativo original para tener en cuenta las habilidades cooperativas de los jugadores. Suponemos que, como consecuencia de los diferentes niveles de cooperación, cada coalición con dos o más jugadores retiene solo una proporción de su dividendo. Nuestra propuesta es que esta proporción es el mínimo de las habilidades de cooperación de sus miembros. Por supuesto, para coaliciones individuales el dividendo no debe verse alterado puesto que cada jugador siempre estará de acuerdo consigo mismo.

Nosotros también hemos propuesto como regla de reparto para juegos cooperativos con jugadores que tienen diferentes habilidades cooperativas el valor de Shapley del juego modificado. El valor obtenido satisface monotonía en los pesos para juegos superaditivos y admite varias caracterizaciones paralelas a las más prominentes en la literatura de la Teoría de Juegos para el valor de Shapley.

Hemos abordado lo que para nosotros es una consecuencia de la cooperación imperfecta: la ineficiencia. Si, como se ha dicho, en todos los modelos existentes con pesos para los jugadores los repartos procuran mantener la eficiencia, en nuestra propuesta asumiremos que la imperfección en la cooperación conlleva, en general, la perdida de una parte del valor de la coalición global.

Otro de los objetivos de esta memoria ha sido extender el valor de Myerson a situaciones en las cuales los jugadores tienen sus posibilidades de cooperación restringidas por un grafo y además, diferentes habilidades de regateo. La solución propuesta generaliza el valor de Myerson y el valor de Shapley.

10.2. Futuras lineas de investigación

Los resultados introducidos en la presente memoria pueden ser generalizados siguiendo diferentes caminos. Por ejemplo, se puede suponer que las habilidades de negociación de cada jugador dependen de las del resto de jugadores. Entonces, dado $(N,v) \in G^N$ podemos asociar a cada jugador $i \in N$ un vector $\boldsymbol{\lambda_i} = (\lambda_{ij})_{j=1,\ldots,n}$ con $\lambda_{ij} \in [0,1]$ y $\lambda_{ii} = 1$. λ_{ij} representa la habilidad de negociación del jugador i con respecto al jugador j. Por supuesto $\lambda_{ii} = 1$, asumiendo que el nivel de cooperación de i consigo mismo es total. También λ_{ij} puede ser diferente de λ_{ji} dado que las habilidades de cooperación no necesitan ser simétricas. Entonces,

$$G^N_{\Lambda^n} = \{(N, v, \boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}) \mid (N,v) \in G^N,\ \boldsymbol{\lambda_i} \in [0,1]^n \text{ con } \lambda_{ii} = 1 \text{ para todo } i \in N\}$$

es el conjunto de todos los juegos cooperativos, en los cuales, el conjunto de jugadores N puede tener diferentes habilidades de negociación que dependen de las del resto de jugadores.

Cada $(N, v, \boldsymbol{\lambda}) \in G^N_\Lambda$ puede ser identificado con el elemento $(N, v, \boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}) \in G^N_{\Lambda^n}$ en los que, para todo $i \in N$ $\lambda_{ij} = \lambda_i$, si $j \neq i$, y $\lambda_{ii} = 1$. Y por tanto, G^N_Λ es isomorfo a un subconjunto $(G^N_\Lambda)^*$ de $G^N_{\Lambda^n}$.

En este nuevo escenario, el juego generalizado $(N, v^{\boldsymbol{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}) \in G^N$ tiene función característica dada por

$$v^{\boldsymbol{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_v(T) \min_{i,j \in T} \{\lambda_{ij}\} + \sum_{i \in N} \Delta_v(\{i\}).$$

$(N, v^{\boldsymbol{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}})$ coincide con $(N, v^{\boldsymbol{\lambda}})$, siendo $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si para cada $i \in N$, $\lambda_{ij} = \lambda_i$, $j \neq i$ y $\lambda_{ii} = 1$.

Una regla de reparto en $G^N_{\Lambda^n}$ es una función $\psi : G^N_{\Lambda^n} \to \mathbb{R}^n$ que satisface

$$\psi(N, v^{\boldsymbol{\lambda_1},...,\boldsymbol{\lambda_n}}) = [v(1), ..., v(n)]$$

siempre que $\lambda_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ y $\lambda_{ii} = 1$ para todo $i = 1, ..., n$.

La regla de reparto $\sigma^* : G^N_{\Lambda^n} \to \mathbb{R}^N$ dada por $\sigma^*(N, v, \boldsymbol{\lambda_1, ..., \lambda_n}) = Sh(N, v^{\boldsymbol{\lambda_1},...,\boldsymbol{\lambda_n}})$ coincide con σ cuando se restringe a $(G^N_\Lambda)^*$. Las caracterizaciones obtenida en la presente memoria para σ pueden ser adaptada para caracterizar σ^*.

Otra generalización puede ser obtenida asumiendo que las habilidades de cooperación de cada jugador dependen de las coaliciones en la que participa. Entonces, asociaríamos a cada jugador $i \in N$ en un juego cooperativo (N, v) un vector $\boldsymbol{\lambda_i} = (\lambda_{i,S})_{S \in N, i \in S}$ con $\lambda_{i,S} \in [0, 1]$ para todo $i \in S, S \subseteq N$ y $\lambda_{i,\{i\}} = 1$. El juego modificado $(N, v^{\boldsymbol{\lambda_1},...,\boldsymbol{\lambda_n}}) \in G^N$ está dado por

$$v^{\boldsymbol{\lambda_1},...,\boldsymbol{\lambda_n}}(S) = \sum_{T \subseteq S, t \geq 2} \Delta_v(T) \min_{i \in T}\{\lambda_{i,T}\}) + \sum_{i \in N} \Delta_v(\{i\}), \text{ para } S \subseteq N,\ S \neq \emptyset,$$

y $v^{\boldsymbol{\lambda_1},...,\boldsymbol{\lambda_n}}(\emptyset) = 0$. La regla de reparto natural en este marco sería $\sigma_*(N, v, \boldsymbol{\lambda_1, ..., \lambda_n}) = Sh(N, v^{\boldsymbol{\lambda_1},...,\boldsymbol{\lambda_n}})$.

Este escenario generaliza ambas consideraciones anteriores. En particular, el caso en que las habilidades de negociación del jugador $i \in N$ dependen de las del resto de jugadores, es decir, estas habilidades están dadas por $\boldsymbol{\lambda_i} = (\lambda_{ij})_{j=1,...,n}$ con $\lambda_{ii} = 1$, es un caso especial de éste, en el cual $\lambda_{i,S} = \min_{j \in S}\{\lambda_{ij}\}$, si $S \subseteq N,\ i \in S$.

Además σ_* generaliza las reglas de asignación, ψ, sobre G^N que satisfacen las propiedades de linealidad, simetría, $\psi_i(N, u_{\{i\}}) = 1$, para $i \in N$, y jugador nulo. Es fácil ver que $\sigma_*(N, v, \boldsymbol{\lambda_1, ..., \lambda_n}) = \psi(N, v)$ si para $T \subseteq N$ y $i \in T$, $\lambda_{i,T} = t\psi_i(N, u_T)$. Para probar esto, se tiene en cuenta que la simetría de ψ implica que $\psi_k(N, u_T) = \psi_{k'}(N, u_T)$ para todo $k, k' \in T$, y así para $i = 1, 2, ..., n$,

$$\sigma_{*i}(N, v, \boldsymbol{\lambda_1, ..., \lambda_n}) = Sh_i(N, v^{\boldsymbol{\lambda_1},...,\boldsymbol{\lambda_n}}) =$$

$$= Sh_i(N, \sum_{T \subseteq N, t \geq 2} \Delta_v(T) \min_{j \in T}\{\lambda_{j,T}\})u_T + \sum_{j \in N} \Delta_v(\{j\})u_{\{j\}}) =$$

$$= \sum_{T \subseteq N, t \geq 2} \Delta_v(T) \min_{j \in T}\{\lambda_{j,T}\})Sh_i(N, u_T) + \sum_{j \in N} \Delta_v(\{j\})Sh_i(N, u_{\{j\}}) =$$

$$= \sum_{T \subseteq N, i \in T, t \geq 2} \Delta_v(T)t\psi_i(N, u_T)(1/t) + \Delta_v(\{i\}) =$$

$$= \psi_i(N, \sum_{T \subseteq N, t \geq 2} \Delta_v(T)u_T + \sum_{j \in N} \Delta_v(\{j\})u_{\{j\}}) = \psi_i(N, v).$$

En particular el valor de Shapley es obtenido para $\lambda_{i,S} = sSh_i(N, u_S) = 1$ para $i \in S$, $S \subseteq N$; el valor de Banzhaf-Coleman[18], B (Banzhaf, 1964, 1968; Coleman, 1971), si $\lambda_{i,S} = sB_i(N, u_S) = \frac{s}{2^{s-1}}$, $i \in S$, $S \subseteq N$.

Estas ideas también pueden utilizarse para generalizar las situaciones de comunicación. Asumiendo que los jugadores pueden tener habilidades de cooperación que dependen de los otros jugadores o de las coaliciones a las que se incorporan

En muchas ocasiones, la propiedad de eficiencia parece natural, por ejemplo cuando la finalidad del juego es distribuir costes o repartir beneficios. En otras ocasiones, por ejemplo en el contexto de situaciones de votación modelizadas como juegos cooperativos, no existe un beneficio a repartir, por lo que podría argumentarse que no tiene sentido la propiedad de eficiencia, ya que la finalidad del juego es medir el poder, no distribuirlo. En esta linea se desarrolló el anteriormente citado valor de Banzhaf, el cual, se puede caracterizar paralelamente al valor de Shapley sustituyendo el axioma de eficiencia por una propiedad que cuantifica el poder total[19] que subyace en el juego. El estudio del comportamiento de este valor para los juegos considerados en la presente memoria es una linea de investigación que queda abierta, y en la que ya estamos trabajando actualmente. Ha dado lugar a la aportación:

- Manuel, C. and Martín, D. (2021). A Monotonic Weighted Banzhaf Value for Voting Games. Mathematics, 9(12), 1343.

Desde el trabajo pionero de Shapley (1953), el valor ha sido estudiado ampliamente desde un punto de vista teórico. Muchos estudios también se han focalizado en las aplicaciones potenciales del valor de Shapley para juegos específicos. Sin embargo, desde el punto de vista de computación el valor de Shapley es un problema NP-completo. El problema de su cálculo debe abordarse antes de que pueda emplearse como una herramienta útil en situaciones reales.

La estimación del valor de Shapley basado en muestreo surge para dar salida a estas situaciones en las que calcular el valor exacto no es posible dados los recursos de computación en la actualidad. La literatura sobre las técnicas de muestreo es muy

[18]Dado un juego $(N, v) \in G^N$, esta solución asigna a cada jugador $i \in N$ el número real:

$$B_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big].$$

[19]Una solución $\psi : G^N \to \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de poder total si para todo juego $(N, v) \in G^N$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(N, v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \big[v(S \cup \{i\}) - v(S)\big].$$

extensa y ampliamente desarrollada. No obstante, la investigación de estas técnicas para la estimación de valores propios de la Teoría de Juegos, como el valor de Shapley, es relativamente moderna, siendo Castro et al. (2009) el trabajo pionero en este marco.

El valor de Shapley para un jugador cualquiera es una media ponderada de las contribuciones marginales de dicho jugador. La estimación del valor de Shapley mediante las técnicas de muestro consiste en inferir el valor real a través de una muestra de las contribuciones marginales de cada jugador. De esta manera es posible inferir cualquier valor de Shapley con independencia del tamaño del juego.

En Castro, Gómez, Molina y Tejada (2017) se desarrolla un método inferencial para el cálculo del valor de Shapley a través de un muestreo estratificado con afijación óptima. La afijación óptima consiste en determinar las unidades que se extraen de cada estrato para la muestra de forma que, para un coste fijo C, la varianza de los estimadores sea mínima.

En la actualidad, el autor de la presente memoria, junto con el director de la misma y el Dr. Javier Castro, estamos trabajando en el desarrollo de un método inferencial para la estimación de los valores introducidos en esta tesis doctoral[20].

Y así, del mucho leer y del poco dormir, se le secó el celebro de manera que vino a perder el juicio.

Miguel de Cervantes Saavedra

[20]Para ser más exactos, la investigación que se está llevando a cabo no se limita a la inferencia de los valores de la presenta memoria, sino que se pretende crear un proceso de estimación para cualquier juego que pueda expresarse en términos de sus dividendos.

Bibliografía

[1] Albizuri, M.J. (2010). Games with Externalities: Games in Coalition Configuration Function Form. Mathematical Methods of Operations Research 72, 171-186.

[2] Algaba, E., Bilbao, J.M., Borm, P. and López, J.J. (2001). The Myerson Value for Union Stable Systems. Mathematical Methods of Operations Research, 54, 359-371.

[3] Algaba, E., Bilbao, J.M., van den Brink, R. and Jimenez-Losada, A. (2003). Axiomatizations of the Shapley Value for Cooperative Games on Antimatroids. Mathematical Methods of Operations Research 57, 49–65.

[4] Algaba, E., Fragnelli, V. and Sánchez-Soriano, J. (Eds.). (2019). Handbook of the Shapley value. CRC Press.

[5] Aubin, J.P. (1981). Cooperative Fuzzy Games. Mathematics of Operation Research 6, 1-13.

[6] Aumann, R.J. and Dreze, J.H. (1974). Cooperative Games with Coalition Structures. International Journal of Game Theory, 3, 217–237.

[7] Banzhaf III and John F. (1964). Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis. Rutgers Law Review, 19, 317-343.

[8] Banzhaf III and John F. (1968). One Man, 3.312 Votes: A Mathematical Analysis of the Electoral College. Villanova Law Review, 13, 304-332.

[9] Béal, S., Rémila, E. and Solal, P. (2010). Rooted-Tree Solutions for Tree Games. European Journal of Operational Research. 203, 404-408.

[10] Béal, S., Casajus, A. and Huettner, F. (2018). Eficient Extensions of Communication Values. Annals of Operations Research, 264, 41-56.

[11] Bergantiños, G. and Sánchez, E. (2001). Weighted Shapley values for Games in Generalized Characteristic Function Form. TOP 9(1), 55-67.

[12] Bilbao, J. M., Jiménez-Losada, A., and Ordóñez, M. (2019). Augmenting and Decreasing Systems. In Mathematics Applied to Engineering, Modelling, and Social Issues. Springer, Cham, 489-528.

[13] Bilbao, J.M. and Edelman, P.H. (2000). The Shapley Value on Convex Geometries. Discrete Applied Mathematics, 103(1), 33-40.

[14] Borel, E. (1921). La Théorie du jeu et les Equation Intégrales à Noyau Symétrique Gauche. Comptes Rendus de L'Académie des Sciences, 173, 1304–1308.

[15] Borm, P., Owen, G. and Tijs, S. (1992). On the Position Value for Communication Situations. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 5(3), 305-320.

[16] Calvo, E., Lasaga, J. and van den Nouweland A. (1999). Values of Games with Probabilistic Graphs. Mathematical Social Sciences, 37, 79-95.

[17] Carreras, F. and Puente M.A. (2012). Symmetric Coalitional Binomial Semivalues. Group Decision and Negotiation, 21, 637-662.

[18] Casajus, A. (2009). Networks and Outside Options. Social Choice and Welfare, 32, 1-13.

[19] Castro, J., Gómez, D. and Tejada, J. (2009). Polynomial Calculation of the Shapley Value Based on Sampling. Computers and Operations Research, 36, 1726-1730.

[20] Castro, J., Gómez D., Molina, E. and Tejada, J. (2017). Improving Polynomial Estimation of the Shapley Value by Stratified Random Sampling with Optimum Allocation. Computers and Operations Research, 82, 180-188.

[21] Choquet, G. (1953). Theory of Capacities. Annales de I'institut Fourier, 5, 131-295.

[22] Chun, Y. (1989). A New Axiomatization of the Shapley Value. Games Economic Behavio, 1, 119-130.

[23] Cohen, S., Dror, G. and Ruppin, E. (2005). Feature Selection Based on the Shapley Value. In: International Joint Conference on Artificial Intelligence, 665–670.

[24] Coleman J.S. (1971). Control of Collectivities and the Power of a Collectivity to Act. Social Choice, 269-300.

[25] Cox Jr, L.A. (1985). A New Measure of Attributable Risk for Public Health Applications. Management Science, 31, 800–813.

[26] Du, R., Zhong, Y., Nair, H., Cui, B. and Shou, R. (2019). Causally Driven Incremental Multi Touch Attribution Using a Recurrent Neural Network. arXiv preprint arXiv:1902.00215.

[27] Dubey, P. (1975). On the Uniqueness of the Shapley Value. International Journal of Game Theory, 4, 131–139.

[28] Fernández, J.R., Algaba, E., Bilbao, J.M., Jiménez, A., Jiménez, N. and López, J.J. (2002). Generating Functions for Computing the Myerson Value. Annals of Operations Research, 109, 143-158.

[29] Fernández, J.R., Gallego, A., Jiménez-Losada, A. and Ordóñez, M. (2018). The CG-position Value For Games on Fuzzy Communication Structures. Fuzzy Sets and Systems, 341, 37-58.

[30] Feltkamp, V. (1995). Alternative Axiomatic Characterizations of the Shapley and Banzhaf Values. International Journal of Game Theory, 24, 179–186.

[31] Freixas J. and Pons M. (2017). Using the Multilinear Extension to Study Some Probabilistic Power Indices. Group Decision and Negotiation, 26, 437-452.

[32] Gallardo, J.M., Jiménez, N. and Jiménez-Losada, A. (2016). A Shapley Measure of Power in Hierarchies. Information Sciences, 372, 98-110.

[33] Gallardo, J.M., Jiménez, N. and Jiménez-Losada, A. (2018). A Shapley Distance in Graphs. Information Sciences, 432, 269-277.

[34] Gefeller, O., Land, M. and Eide, G.E. (1998). Averaging Attributable Fractions in the Multifactorial Situation: Assumptions and Interpretation. Journal of Clinical Epidemiology, 51, 437–441.

[35] Gillies, D. B. (1953). Some Theorems on N-Person Games. Princeton University. Unpublished Doctoral Dissertation.

[36] Gillies, D.B. (1959). Solutions to General Non-Zero-Sum Games. Contributions to the Theory of Games, 4, 47-85.

[37] Gilles, R.P., Owen G. and van den Brink, R. (1992). Games with Permission Structures: the Conjunctive Approach. International Journal of Game Theory, 20(3), 277-293.

[38] Gómez, D., González Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G., del Pozo, M. and Tejada, J. (2003). Centrality and Power in Social Networks: A Game Theoretic Approach. Mathematical Social Sciences, 46, 27-54.

[39] Gómez, D., González Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G. and del Pozo, M. (2008). A Value for Probabilistic Communication Situations. European Journal of Operational Research, 190, 539-556.

[40] González Arangüena, E., Manuel, C. and del Pozo, M. (2015). Values of Games with Weighted Graphs. European Journal of Operational Research, 243, 248-257.

[41] González Arangüena, E., Manuel, C., Owen, G. and del Pozo, M. (2017). The Within Groups and the Between Groups Myerson Values. European Journal of Operational Research, 257, 586-600.

[42] Grabisch, M., Murofushi, T. and Sugeno, M. (1992). Fuzzy Measure of Fuzzy Events Defined by Fuzzy Integrals. Fuzzy Sets and Systems, 50,293-313.

[43] Grabish, M. and Lange, F. (2007). Games on Lattice, Multichoice Games and the Shapley Value. Mathematical Methods of Operations Research, 65, 156–167.

[44] Haake, C.J., Kashiwada, A. and Su, F.E. (2008). The Shapley Value of Phylogenetic Trees. Journal of Mathematical Biology, 56, 479–497.

[45] Haeringer, G. (1999). Weighted Myerson Value. International Game Theory Review, 1, 187-192.

[46] Haeringer, G. (2006). A New Weight Scheme for the Shapley Value. Mathematical Social Science, 52, 88-98.

[47] Hajibagheri, A., Alvari, H., Hamzeh, A. and Hashemi, S. (2012). Social Networks Community Detection Using the Shapley Value. The 16th CSI International Symposium on Artificial Intelligence and Signal Processing. Shiraz, Fars, 222-227.

[48] Hamiache, G. (2001). Associated Consistency and Shapley Value. International Journal of Game Theory, 30, 279–289.

[49] Harsanyi, J.C. (1959). A Bargaining Model for Cooperative N-Person Games. In A. W. Tucker, R. D. Luce (Eds.). Contributions to the Theory of Games IV, 325-355. Princeton, NJ: Priceton University Press.

[50] Hart, S. and Mas-Colell, A. (1989). Potential, Value, and Consistency. Econometrica, 57, 589-614.

[51] Hartmann, K. and Steel, M. (2006). Maximizing Phylogenetic Diversity in Biodiversity Conservation: Greedy Solutions to the Noah's Ark Problem. Systematic Biology, 55, 644–651.

[52] Heitzig, J., Donges, J.F., Zou, Y., Marwan, N. and Kurths, J. (2012). Node-weighted Measures for Complex Networks with Spatially Embedded, Sampled, or Differently Sized Nodes. The European Physical Journal, 85-38.

[53] Herings, P.J.J., van der Laan, G. and Talman, D. (2008). The Average Tree Solution for Cycle Free Games. Games and Economic Behavior, 62, 77-82.

[54] Jackson, M.O. and Wolinsky, A. (1996). A Strategic Model of Social and Economic Networks. Journal of Economic Theory, 71, 44-74.

[55] Jackson, M.O. (2005). Allocation Rules for Network Games. Games and Economic Behavior, 51(1), 128-154.

[56] Jiménez-Losada, A., Fernández, J.R., Ordóñez, M., Grabisch, M. (2010). Games on Fuzzy Communication Structures with Choquet Players. European Journal of Operational Research, 207, 836-847.

[57] Jiménez-Losada A., Fernández, J.R. and Ordóñez, M. (2013). Myerson Values for Games with Fuzzy Communication Structures. Fuzzy sets and Systems, 213, 74-90.

[58] Kalai, E. and Samet D. (1987). On Weighted Shapley Values. International Journal of Game Theory, 16, 205-222.

[59] Kargin, V. (2005). Uncertainty of the Shapley Value. International Game Theory Review, 33, 959–976.

[60] Kaufman, A., Kupiec, M. and Ruppin, E. (2004). Multi-Knockout Genetic Network Analysis: the Rad6 Example. In: Proceedings of the 2004 IEEE Computational Systems Bioinformatics Conference (CSB'04), 16–19.

[61] Kaufman, A., Keinan, A., Meilijson, I., Kupiec, M. and Ruppin, E. (2005). Quantitative Analysis of Genetic and Neuronal Multi-Perturbation Experiments. PLoS Computational Biology, 1(6).

[62] Keinan, A., Sandbank, B., Hilgetag, C.C., Meilijson, I. and Ruppin, E. (2004). Fair Attribution of Functional Contribution in Artificial and Biological Networks. Neural Computation, 16, 1887–1915.

[63] Khmelnitskaya, A. and Yanovskaya, B. (2007). Owen Coalitional Value Without Additivity Axiom. Mathematical Methods of Operations Research, 66, 255–261.

[64] Khmelnitskaya, A., Selçuk, Ö. and Talman, D. (2016). The Shapley Value for Directed Graph Games. Operations Research Letters, 44(1), 143-147.

[65] Kongo, T.,Funaki, Y. and Tijs, S. (2007). New Axiomatization and an Amplementation of the Shapley Value. Center Discussion Paper Series.

[66] Land, M. and Gefeller, O. (1997). A Game-Theoretic Approach to Partitioning Attributable Risks in Epidemiology. Biometrical Journal, 39(7), 777–792.

[67] Land, M. and Gefeller, O. (2000). A Multiplicative Variant of the Shapley Value for Factorizing the Risk of Disease. In: Patrone F, Garcia-Jurado I, Tijs S (eds) Game Practice: Contributions from Applied Game Theory. Kluwer Academic, Dordrecht, pp 143–158.

[68] Li, D.L. and Shan, E. (2020). The Myerson Value for Directed Graph Games. Operations Research Letters, 48(2), 142-146.

[69] Manuel, C., González-Arangüena, E. and van den Brink, R. (2013). Players Indifferent to Cooperate and Characterizations of the Shapley Value. Mathematical Methods of Operations Research, 77, 1–14.

[70] Manuel, C. and Martín, D. (2020). A Monotonic Weighted Shapley Value. Group Decision and Negotiation, 29, 627–654.

[71] Manuel, C. and Martín, D. (2021a). A Value for Communication Situations with Players Having Different Bargaining Abilities. Annals of Operations Research, 301, 161-182.

[72] Manuel, C. and Martín, D. (2021b). A Monotonic Weighted Banzhaf Value for Voting Games. Mathematics. (Under review).

[73] Manuel, C., Ortega, E. and del Pozo, M. (2020). Marginality and Myerson values. European Journal of Operational Research, 284(1), 301-312.

[74] Molina, E., Tejada, J. and Weiss, T. (2020). Some game theoretic marketing attribution models. arXiv preprint arXiv:2012.00812.

[75] Moretti, S., Patrone, F. and Bonassi, S. (2007). The Class of Microarray Games and the Relevance Index for Genes. Top 15, 256–280.

[76] Moretti, S. and Patrone, F. (2008). Transversality of the Shapley Value. Top 16, 1–41.

[77] Muros, F.J., Maestre, J.M., Algaba, E., Alamo, T. and Camacho, E.F. (2014). An Iterative Design Method for Coalitional Control Networks with Constraints on the Shapley Value. IFAC Proceedings Volumes, 47, 1188-1193.

[78] Myerson, R.B. (1980). Conference Structures and Fair Allocation Rules. International Journal of Game Theory, 9, 169-182.

[79] Myerson, R.B. (1977). Graphs and Cooperation in Games. Mathematics of Operations Research, 2, 225-229.

[80] Navarro, F. (2018). Necessary Players, Myerson Fairness and the Equal Treatment of Equals. Annals of Operations Research, 280, 111-119.

[81] Neyman, A. (1989). Uniqueness of the Shapley Value. Games and Economic Behavior, 1, 116–118.

[82] Ordóñez, M. and A. Jiménez-Losada, A. (2017). Duality on combinatorial structures. An Application to Cooperative Games. International Journal of General Systems, 46(8), 839-852.

[83] Owen, G. (1968). A Note on the Shapley Value. Management Science, 14, 731-732.

[84] Owen G. (1972). Multilinear Extensions of Games. Management Science 18:64-79.

[85] Owen, G. (1986). Values of Graph-Restricted Games. SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 7, 210-220.

[86] Pérez, J., Jimeno, J.L. and Cerdá, E. (2003). Teoría de juegos. ISBN: 84-205-3726-8. Pearson prentice hall, 461-464.

[87] del Pozo, M., Manuel, C., González-Arangüena, E. and Owen, G. (2011). Centrality in Directed Social Networks. A Game Theoretic Approach. Social Networks, 33, 191-200.

[88] Shapley, L.S. (1953a). Additive and Nom-Additive Set Functions, Ph.D. Thesis, Princeton University.

[89] Shapley, L.S. (1953b). A Value for N-Person Games. In: Kuhn HW, Tucker AW (Eds), Annals of Mathematics Studies, 28, Princeton Univ Press, Princeton, NJ. 307-317.

[90] Shubik, M. (1962). Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Join Costs and Internal Pricing. Management Science, 8,325-343.

[91] Singal, R., Besbes, O., Desir, A., Goyal, V. and Iyengar, G. (2019). Shapley Meets Uniform: An Axiomatic Framework for Attribution in Online Advertising. In The World Wide Web Conference (pp. 1713-1723).

[92] Song, B., Seol, H. and Park, Y. (2016). A Patent Portfolio-Based Approach for Assessing Potential R and D partners: An application of the Shapley Value. Technological Forecasting and Social Change, 103, 156-165.

[93] Sugeno, M. and Murofushi, T. (1987). Choquet's Integral as an Integral Form for a General Class of Fuzzy Measures. Preprints of Second IFSA Congresss 1, 408-411.

[94] Tsurumi M., Tanino T. and Inuiguchi M. (2001). A Shapley Function on a Class of Cooperative Fuzzy Games. European Journal of Operational Research, 129, 596-618.

[95] van den Brink, R. and Gilles, R.P. (1996). Axiomatizations of the Conjunctive Permission Value for Games with Permission Structures. Games and Economic Behaviour, 12, 112-126.

[96] van den Brink, R,. González-Arangüena, E., Manuel, C. and del Pozo, M. (2014). Order Monotonic Solutions for Generalized Characteristic Functions. European Journal of Operational Research, 238(3), 786-796.

[97] van den Brink, R. (2001) An axiomatization of the Shapley Value Using a Fairness Property. International Journal of Game Theory, 30, 309–319.

[98] van den Nouweland, A., Borm, P. and Tijs, S. (1992). Allocation Rules for Hypergraph Communication Situations. International Journal of Game Theory, 20, 255-268.

[99] Vasil'ev, V.A. (1975). The Shapley Value for Cooperative Games of Bounded Polynomial Variation. Optimizacija Vyp, 17, 5-27.

[100] von Neumann, J. (1928). Die Zerlegung Eines Intervalles in Abzählbar viele kongruente Teilmengen. Fundamenta Mathematicae, 1(11), 230-238.

[101] von Neumann, J. and Morgestern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[102] Weitzman, M.L. (1998). The Noah's Ark Problem. Econometrica 66, 1279–1298.

[103] Winter, E. (1992). The Consistency and Potential for Values of Games with Coalition Structure. Games and Economic Behavior, 4, 132-144.

[104] Winter, E. (2002). The Shapley Value. In: Aumann, R.J., Hart, S. (eds) Handbook of Game Theory, vol III, Chap 53. North-Holland, New York, pp 2025–2054.

[105] Young H.P. (1985). Monotonic Solutions of Cooperative Games. International Journal of Game Theory, 14, 65-72.

[106] Young H.P. (1994). Cost Allocation. In: Aumann RJ, Hart S (eds) Handbook of Game Theory, vol II, Chap 34. North-Holland, New York, pp 1193–1235

[107] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control, 8, 338-353.

[108] Zemp, D.C., Wiedermann, M., Kurths, J., Rammig, A. and Donges, J.F. (2014). Node-Weighted Measures for Complex Networks with Directed and Weighted Edges for Studying Continental Moisture Recycling. A Letters Journal Exploring The Frontiers of Physics, 107K(5), 58005.

[109] Zermelo, E. (1913). Über Eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians. Cambridge UP, Cambridge, 2, 501-504.

[110] Zhao, K., Mahboobi, S.H. and Bagheri, S.R. (2018). Shapley Value Methods for Attribution Modeling in Online Advertising. ArXiv Preprint ArXiv: 1804.05327.

[111] Zou, Z., Zhang, Q., Borkotokey, S. and Yu, X. (2017). The Extended Shapley Value for Generalized Cooperative Games Under Precedence Constraints. Operational Research, 1-27.