

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FM-2



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FM 34

Superconductividad topológica en presencia de desorden

Topological superconductivity under disorder

Supervisores: Francisco Domínguez-Adame Acosta, Dunkan Martínez
Camacho

Sergio de Bustos Ruiz

Grado en Física

Curso académico 2024-2025

Convocatoria ordinaria

Calificación: 9.4

Superconductividad topológica en presencia de desorden

Resumen:

Los superconductores topológicos constituyen una gran alternativa ante los problemas que presentan hoy en día los ordenadores cuánticos, debido a la robustez de estos estados en presencia de perturbaciones. En este trabajo se pretende realizar un estudio de estos sistemas en presencia de desorden y cómo responden frente a este. Para poder abarcar este tema se realizará primeramente una introducción a los sistemas desordenados, donde veremos las consecuencias de introducir un potencial aleatorio al Hamiltoniano del sistema y su resolución a través de la aproximación de enlace fuerte, obteniendo finalmente una transición entre estados localizados y deslocalizados en función del tamaño debido a una ley de escala ^[1]. Posteriormente, revisaremos brevemente los conceptos más básicos de la fenomenología de la superconductividad: características y teoría BCS ^{[2],[3]}. Tras esto, veremos cómo se definen los estados topológicos a través del teorema adiabático ^[4] y la fase de Berry ^[5], así como otros invariantes topológicos como el número de Chern. A continuación, definiremos qué son los fermiones de Majorana y sus propiedades, con lo que pasaremos a estudiar la cadena de Kitaev como modelo de superconductor topológico ^{[6],[7]}. A partir de aquí deduciremos las distintas fases que presentan estos sistemas, definiendo los modos cero de Majorana y cómo el desorden les afecta ^[8]. Finalmente, se realizarán distintos cálculos numéricos para comprobar los resultados teóricos obtenidos.

Abstract:

Topological superconductors present a great alternative to the problems that currently face quantum computing, due to the stability of these states in presence of perturbations. In this project we will study these systems in presence of disorder and how they respond to it. To explore this topic, an introduction to disordered systems will be first introduced. We will examine the consequences of introducing a random potential into the system's Hamiltonian and its resolution using the tight-binding approximation, leading to a transition between localized and delocalized states in function of the size, following a scaling law ^[1]. Then, we will briefly review the basic concepts of superconductivity phenomena: characteristics and BCS theory ^{[2],[3]}. Afterwards, we will see how topological states are defined through the adiabatic theorem ^[4] and Berry's phase ^[5], as well as other topological invariants such as the Chern number. Next, we will define Majorana fermions and its properties, leading us to study Kitaev's chain as a model of topological superconductor ^{[6],[7]}. From there, we will derive the different phases these systems exhibit, defining Majorana zero modes and analyzing how disorder affects them ^[8]. Finally, different numerical calculations will be carried out to confirm the theoretical results obtained.

Índice

1. Introducción	2
2. Desorden en sólidos	2
2.1. Aproximación de enlace fuerte (<i>tight-binding</i>)	4
2.2. Localización de Anderson	4
2.3. Límite no perturbativo	6
3. Superconductividad	6
3.1. Características	7
3.2. Teoría microscópica, BCS	7
4. Superconductividad topológica y desorden	8
4.1. Fermiones de Majorana	9
4.2. Superconductores de onda p (1D)	11
4.3. Superconductores de onda p en presencia de desorden	14
5. Resultados	15
5.1. Superconductividad topológica sin desorden	15
5.2. Superconductividad topológica en presencia de desorden	17
6. Conclusiones	19

1. Introducción

El desarrollo contemporáneo de ordenadores cuánticos plantea diversos problemas, entre ellos la fragilidad de estos a la hora de realizar medidas [9]. La fenomenología de los superconductores topológicos ha despertado el interés en la resolución de estos problemas, ya que estos estados preservan la información cuántica del sistema, haciéndolos más robustos a perturbaciones.

Estos superconductores topológicos se describen a través de unas cuasipartículas llamadas fermiones de Majorana, que son a su vez su propia antipartícula. Estas cuasipartículas surgen de separar los operadores fermiónicos en su parte real e imaginaria, permitiendo describir un fermión como superposición de ambos estados. Estos fermiones de Majorana tienen propiedades muy interesantes no triviales, como la operación de intercambio de dos Majoranas o la recombinación de ellos, por lo que ya de por sí despiertan gran interés en áreas como la física de partículas y materia condensada.

Kitaev fue el primero en describir el Hamiltoniano de un superconductor en la aproximación de enlace fuerte como descomposición de sus Majoranas [7]. Estos sistemas presentan dos fases bien diferenciadas: una fase topológica y una fase trivial. La fase trivial tiene las características de un superconductor normal con estado fundamental no degenerado, de ahí su nombre. En cambio, la fase topológica presenta estados cuya energía de ocupación es nula, transformando el estado fundamental en uno degenerado.

De esta forma, ordenadores cuánticos basados en Majoranas pueden reducir considerablemente el número de operaciones de qubits necesarias para realizar cálculos [8]. Sin embargo, un sistema real se ve afectado por la aparición de desorden. Estas perturbaciones locales no afectan a los Majoranas en el estado fundamental hasta superar un cierto desorden crítico. Esto implica que, para desordenes relativamente bajos, la fase topológica se preservará, haciendo de estos sistemas unos excelentes candidatos para mejorar los tiempos de cálculo de los ordenadores cuánticos.

Por otra parte, el desorden en sólidos presenta otro gran interés en la física de la materia condensada. Un desorden relativamente elevado o un tamaño suficientemente grande del sistema dan lugar al conocido teorema de localización de Anderson, donde las funciones de onda de los electrones se localizan, formando largas colas en la densidad de estados llamadas colas de Lifschitz [1],[10].

Estos fenómenos se ven reflejados bajo una representación de la densidad de estados del sistema; tanto la transición de la fase topológica a la trivial, como la localización de estados y colas de Lifschitz, que veremos en la última sección (5).

Primeramente, será necesario introducir el desorden en sólidos, así como la aproximación de *tight-binding* (enlace fuerte). También resultará útil comentar el fenómeno de la superconductividad así como la teoría BCS, lo que nos ayudará a entender la formulación del Hamiltoniano de Kitaev. Finalmente, ampliaré lo introducido aquí sobre fermiones de Majorana y la superconductividad topológica, así como la presencia de desorden en estos sistemas. Por último, realizaré un análisis numérico de un superconductor topológico para comprobar las predicciones de la teoría.

2. Desorden en sólidos

Las soluciones de un cristal ideal son bien conocidas gracias al teorema de Bloch y también al modelo de Kronig-Penney, que nos da como solución las funciones de Bloch. Sin embargo, un cristal en presencia de desorden no cumplirá el teorema de Bloch; por lo tanto, esto nos lleva a buscar un nuevo modelo. El hecho de que el potencial del cristal no sea periódico nos permite escribirlo como suma de los potenciales en cada sitio:

$$V(\vec{r}) = \sum_i v_i(\vec{r}) \tag{2.1}$$

Nótese que esto nos da libertad en escoger el tipo de potencial que necesitemos. Por tanto, la ecuación de Schrödinger nos queda:

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + \sum_i v_i(\vec{r} - \vec{r}_i)\right) \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (2.2)$$

donde \vec{r} indica la posición del electrón y \vec{r}_i la posición del ion i -ésimo. Por tanto, para esta ecuación tomaremos un *ansatz* del tipo [1]:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_j \psi_j \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (2.3)$$

donde χ_j es el orbital j -ésimo y ψ_j su amplitud. Para obtener χ_j podemos introducir (2.3) en (2.2) para el caso de un solo átomo, obteniendo:

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + v_j(\vec{r} - \vec{r}_j)\right) \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) = \varepsilon_j \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (2.4)$$

Una vez obtenida esta relación, podemos utilizar el *ansatz* general en la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{aligned} \sum_j \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + \sum_i v_i(\vec{r} - \vec{r}_i)\right) \psi_j \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) &= \sum_j E \psi_j \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) \\ \sum_j \left(\varepsilon_j + \sum_{i \neq j} v_i(\vec{r} - \vec{r}_j)\right) \psi_j \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) &= \sum_j E \psi_j \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) \\ \sum_j \left(\varepsilon_j - E + \sum_{i \neq j} v_i(\vec{r} - \vec{r}_j)\right) \psi_j \chi_j(\vec{r} - \vec{r}_j) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Podemos ahora multiplicar la ecuación anterior por la izquierda por χ_l^* e integrar al volumen:

$$\begin{aligned} \chi_l^* \sum_j \left[(\varepsilon_j - E) \chi_j + \sum_{i \neq j} v_i(\vec{r} - \vec{r}_j) \chi_j \right] \psi_j &= 0 \\ \sum_j \left[(\varepsilon_j - E) \tilde{A}_{l,j} + \sum_{i \neq j} \tilde{B}_{l,i,j} \right] \psi_j &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde,

$$\tilde{A}_{l,j} = \int_V d\vec{r} \chi_l^* \chi_j \quad (2.7)$$

$$\tilde{B}_{l,i,j} = \int_V d\vec{r} \chi_l^* v_i(\vec{r} - \vec{r}_j) \chi_j \quad \text{con } (i \neq j) \quad (2.8)$$

De esta forma hemos conseguido que el problema inicial, la forma más general de escribir un potencial en un sólido, se reduzca a resolver una ecuación dependiente de los coeficientes $\tilde{A}_{l,j}$, $\tilde{B}_{l,j}$ y de la amplitud de la función de onda. Para tratar de resolver esta ecuación haremos uso de la aproximación de enlace fuerte o *tight-binding*.

2.1. Aproximación de enlace fuerte (*tight-binding*)

Para resolver la ecuación (2.6) asumiremos que los electrones están fuertemente ligados. Esto implica que orbitales de distintos átomos no solapan, y por tanto podemos tratar el coeficiente $\tilde{A}_{l,j}$ como una delta de Kronecker $\delta_{l,j}$. Aparte, el coeficiente $\tilde{B}_{l,j}$ nos proporciona la interacción del electrón inmerso en un potencial junto con los orbitales atómicos del resto de iones ($k \neq j$), por lo tanto, quedándonos con la interacción a primeros vecinos tenemos que $\tilde{B}_{j,l} = \tilde{B}_{l,l+z}$, donde el subíndice $l+z$ indica el primer vecino. Además, si consideramos que este coeficiente no fluctúa, entonces $\tilde{B}_{l,l+z} = -J$ ($J > 0$). Puede parecer que tras este cambio perdamos demasiada generalidad en la información del desorden, sin embargo, todavía no hemos restringido los valores de ε_j los cuales sí pueden fluctuar. Tras estas aproximaciones la ecuación (2.6) queda:

$$(\varepsilon_l - E)\psi_l - J \sum_z \psi_{l+z} = 0 \quad (2.9)$$

Veamos cómo obtenemos las mismas implicaciones que en el teorema de Bloch si tratamos un cristal ordenado. En el caso de un cristal sin desorden tendremos que las energías de cada orbital atómico son iguales y constantes, esto es:

$$\varepsilon_l = \bar{\varepsilon} = \text{cte.} \quad (2.10)$$

Por tanto, tenemos simetría de traslación y se cumple el teorema de Bloch. Si tenemos un cristal de dimensión d , habrá un número de átomos en él $\mathcal{N} = N^d$ y la función de onda será:

$$\psi_l^0(\vec{K}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}_l} \quad (2.11)$$

donde \vec{K} denota el momento cristalino, $\vec{K} = (2\pi/Na)(k_1, k_2, \dots, k_d)$, de dimensión d y $\vec{R}_l = (l_1a, l_2a, \dots, l_da)$, con a el parámetro de red. La principal implicación de este caso es que la probabilidad del electrón $|\psi_l^0|^2 = 1/\mathcal{N}$ está distribuida de forma uniforme en todo el sólido. Esto significa que la función de onda del electrón está *deslocalizada*. Podemos ver que obtenemos una función de onda de Bloch imponiendo las condiciones adecuadas sobre (2.9).

Sustituyendo esta función de onda en (2.9) obtenemos las autoenergías:

$$E_{\vec{K}}^0 = \bar{\varepsilon} - 2J \sum_{j=1}^d \cos(K_j) \quad (2.12)$$

donde el superíndice 0 indica que estamos tratando un sistema sin desorden y $K_j = \frac{2\pi k_j}{N}$.

2.2. Localización de Anderson

A partir de la ecuación (2.9) tratemos un sistema desordenado, por tanto las energías ε_j son aleatorias. Sin embargo, podemos realizar el cambio de variable $D_l \equiv \varepsilon_l - \bar{\varepsilon}$, que representa la desviación de cada ε_j del promedio $\bar{\varepsilon}$ [1]. Esto nos resultará útil ya que conocemos la solución para un cristal sin desorden.

A partir de ahora trataremos un cristal unidimensional. Sustituyendo el cambio de variable anterior en (2.9) obtenemos:

$$D_l \psi_l + \bar{\varepsilon} \psi_l - J \psi_{l-1} - J \psi_{l+1} = E \psi_l \quad (2.13)$$

La forma más general de tratar este desorden es asumir que la distribución de la probabilidad es *gaussiana*, tal que:

$$\mathcal{P}(D_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{D_l^2}{2\sigma^2}} \quad (2.14)$$

donde $\sigma^2 = \langle D_l D_l \rangle$ y $\langle D_l \rangle = 0$. Notemos que si $\sigma^2 = \langle D_l D_l \rangle = 0$ implica necesariamente que $D_l = 0$. De esta forma, obtenemos nuevamente los resultados del apartado anterior. Ahora, si multiplicamos (2.13) por la función de onda de Bloch (2.11) y sumamos sobre todos los sitios (l), obtenemos la representación en momentos de la ecuación (2.13), esto es:

$$(E - E_K^0)\psi(K) = \sum_{K'} V_{KK'}\psi(K') \quad (2.15)$$

donde,

$$\psi(K) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l \psi_l e^{iKla} \quad (2.16)$$

$$V_{KK'} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} D_l e^{i(K-K')la} \quad (2.17)$$

Nótese que los $V_{KK'}$ son los elementos de una matriz V , cuyos elementos de la diagonal V_{KK} vienen dados por:

$$\Delta E_K = V_{KK} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} D_l \quad (2.18)$$

Vemos que ΔE_k es la corrección de primer orden del estado k -ésimo. Dado que $\langle D_l \rangle = 0$, el valor esperado de $\langle \Delta E_k \rangle = 0$, sin embargo, $\langle D_l D_l \rangle \neq 0$. De esta forma podemos calcular la varianza como:

$$B_{KK} \equiv \langle \Delta E_K \Delta E_K \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{l,l'=0}^{N-1} \langle D_l D_{l'} \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \langle D_l D_l \rangle = \frac{\sigma^2}{N} \quad (2.19)$$

donde hemos utilizado que $\langle D_l D_{l'} \rangle = \langle D_l \rangle \langle D_{l'} \rangle = 0$ si $l \neq l'$, ya que estamos tratando D_l y $D_{l'}$ como variables aleatorias independientes, lo que implica que *no* hay ninguna *correlación*¹.

Aparte, tenemos los elementos fuera de la diagonal, $V_{KK'}$, que describen la interacción entre cuasipartículas de momentos K y K' , por lo que describen procesos de *scattering*. Estas cantidades van a ser las causantes del proceso de *localización*. La varianza de estos elementos no diagonales es:

$$B_{KK'} = \langle |V_{KK'}|^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{l,l'=0}^{N-1} \langle D_l D_{l'} \rangle e^{i(K-K')la} e^{-i(K-K')l'a} = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \langle D_l^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{N} \quad (2.20)$$

Por tanto, la cantidad $\sqrt{B_{KK'}} = \sigma/\sqrt{N}$ nos da las fluctuaciones del acoplamiento entre distintos estados K , por lo que será la responsable de la localización. Esta cantidad la podemos comparar con la diferencia de energía de los niveles más bajos, δE^0 , del cristal ideal (2.12), de forma que, si,

$$\delta E^0 \gg \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sigma_{\text{eff}} \quad (2.21)$$

La mezcla de los estados de Bloch ($B_{KK'}$) es débil, y por tanto, los estados perturbados se encuentran *deslocalizados*. Podemos ver que σ_{eff} decrece con un factor $1/\sqrt{N}$. Por otra parte, desarrollando (2.12) hasta segundo orden, $E_K^0 = \bar{\varepsilon} - 2J + JK^2$, con $K = \frac{2\pi k}{N}$, y por tanto $\delta E^0 = E_1^0 - E_0^0 \simeq \frac{4\pi^2}{N^2} J$. Aquí comprobamos cómo σ_{eff} decrece más lentamente con el tamaño del sistema que δE^0 . Por tanto, si empezamos con la condición $\delta E^0 \gg \sigma_{\text{eff}}$ y hacemos crecer el sistema, tendremos un punto en el que $\delta E^0 = \sigma_{\text{eff}}$, y a partir de ahí $\delta E^0 \ll \sigma_{\text{eff}}$. En este punto el desorden será suficientemente grande para tratarlo como no perturbativo. Podemos concluir de esto que, a partir de un cierto tamaño, los estados de Bloch están fuertemente mezclados, y entonces, sus funciones de onda se encuentran *localizadas*.

¹ Siguiendo la Ref. [11], sistemas que presentan desorden correlacionado de algún tipo no cumplen de forma general el teorema de localización de Anderson, de forma que se tratarán sistemas con desorden no correlacionado.

2.3. Límite no perturbativo

Del apartado anterior concluimos que, para sistemas con un desorden suficientemente alto o suficientemente grande, los estados se encuentran espacialmente localizados. En este caso, las autofunciones de menor energía se localizan en segmentos de tamaño N^* , agrupándose de forma local con 2 o más estados en el mismo segmento. Por lo tanto, la mínima separación de energía en este segmento será $E_1^{*0} - E_0^{*0}$, donde a E_K^{*0} viene dada por (2.12), y el superíndice * indica que reemplazamos N por N^* . De esta forma podemos calcular N^* [12]-[13]. Usando (2.21) y $\delta E^{*0} \simeq \frac{4\pi^2 J}{N^{*2}}$, tenemos:

$$\delta E^{*0} = \frac{\sigma}{\sqrt{N^*}} = \frac{4\pi^2 J}{N^{*2}} \quad (2.22)$$

$$N^* = \left(\frac{4\pi^2 J}{\sigma} \right)^{(2/3)} = 11,59 \left(\frac{J}{\sigma} \right)^{(2/3)} \quad (2.23)$$

El factor numérico en (2.23) depende de las condiciones de contorno, en este caso periódicas. En el caso de una cadena con condiciones de contorno abiertas tenemos $N^* = (3\pi^2 J/\sigma)^{(2/3)} \simeq 9,57(J/\sigma)^{(2/3)}$ [1],[12],[13].

Si bien nos hemos restringido al caso unidimensional, el mismo argumento utilizado en el apartado anterior nos sirve para tres dimensiones. En este modelo, δE^0 en el centro de la banda decrece como $1/N$; sin embargo, en 3 dimensiones, $\sigma_{\text{eff}} \sim 1/N^{3/2}$, por lo que el desorden efectivo decrece más rápido y los estados situados en el centro de la banda se encuentran localizados (para un desorden moderado). Esto nos permite entender cómo en el modelo de Anderson tridimensional aparecen transiciones localización-deslocalización de los estados.

3. Superconductividad

En 1911, H. Kamerlingh Onnes observó que la resistencia de varios materiales desaparecía a un rango muy bajo de temperaturas a partir de una temperatura crítica, T_c , característica del material [2]. Si bien esta propiedad fue la primera descubierta históricamente, presentan otras características como el diamagnetismo perfecto, también conocido como efecto Meissner, descubierto en 1933 por Meissner y Ochsenfeld. Estos materiales, en presencia de un campo magnético externo, son capaces de apantallar completamente en su interior. Sin embargo, también se observa que cierta cantidad de campo es expulsado a medida que la muestra se enfría. La existencia de este campo implica que la superconductividad puede ser destruida a partir de un campo crítico H_c . Estas propiedades dan lugar a las ecuaciones de London:

$$\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \vec{J}_s) \quad (3.1)$$

$$\vec{h} = -c \nabla \times (\Lambda \vec{J}_s) \quad (3.2)$$

donde, $\Lambda = m/(n_s e^2)$, n_s la densidad de electrones superconductores, c la velocidad de la luz y \vec{J}_s la corriente superconductora.

Otra característica esencial es la aparición de un *gap* de anchura 2Δ ($\Delta \in \mathbb{C}$) centrado en el nivel de Fermi [3]. Estas propiedades forman la base de una multitud de fenómenos que hacen de los superconductores un extenso campo de estudio. Por ejemplo, los conductores convencionales son buenos conductores del calor; en cambio, los superconductores son malos conductores térmicos. Esto indica que no aparece efecto Peltier y, por tanto, los electrones encargados de conducir la corriente no contribuyen entrópicamente.

3.1. Características

Como se ha comentado anteriormente, a partir de un campo exterior H_c , el estado superconductor se puede romper volviendo al estado normal. Esto se debe a que, para apantallar un cierto campo H , el superconductor debe generar corrientes para que el campo en su interior sea nulo, requiriendo una cantidad de energía. Por tanto, si el campo exterior es lo suficientemente grande, puede ser más beneficioso para el superconductor volver a su fase normal, dejando penetrar el campo en su interior. A este campo se le conoce como campo crítico, H_c , y nos permite diferenciar entre dos tipos de superconductores.

Los superconductores de tipo 1 no dejan penetrar flujo de campo en su interior por debajo de H_c , sin embargo, por encima de este, el superconductor vuelve a su estado normal por completo. Por otra parte, están los superconductores de tipo 2. Estos presentan dos campos críticos $H_{c2} > H_{c1}$. Cuando el campo exterior es superior a H_{c2} el superconductor vuelve a su estado normal por completo, mientras que, si el campo exterior es menor que H_{c1} el campo no penetra en su interior. Sin embargo, cuando el campo se encuentra entre H_{c2} y H_{c1} , existe penetración parcial de flujo en el interior del superconductor en forma de filamentos. En el interior de estos, el material se encuentra en el estado normal, mientras que fuera de ellos se encuentra en el estado superconductor.

El calor específico también varía respecto a un conductor normal. Se puede realizar un análisis de este aplicando un campo magnético a un superconductor por debajo de T_c , devolviéndolo a la fase normal y tomando datos de ambas fases. Como resultado se obtiene que el calor específico, a bajas temperaturas, en un superconductor tiene como parte dominante $\exp(-\Delta/k_B T)$. De hecho, sabiendo que:

$$k_B T_c = 1,13 \hbar \omega e^{-1/N_0 V_0} \quad (3.3)$$

$$\Delta(0) = 2 \hbar \omega e^{-1/N_0 V_0} \quad (3.4)$$

Obtenemos que $\Delta(0)$ y $k_B T_c$ son del mismo orden.

$$\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} = 1,76 \quad (3.5)$$

3.2. Teoría microscópica, BCS

La teoría de la superconductividad requiere una atracción neta entre electrones en la frontera de la superficie de Fermi; por tanto, el movimiento de los iones debe ser capaz de apantallar la fuerza de Coulomb entre electrones. Esto se da si la energía entre ellos es del orden de $\hbar \omega_D$ (energía de un fonón), con ω_D la frecuencia de Debye. Además, es necesario contar con el principio de exclusión de Pauli, lo cual ayuda a que estos estados ligados entre electrones se formen.

De esta forma, uno puede construir el estado fundamental en el cual todos los electrones formen parejas de Cooper. Si a cada pareja la describimos mediante una función de onda $\phi(\vec{r} s, \vec{r}' s')$, siendo s el espín, la función de onda total para N electrones será:

$$\Psi(\vec{r}_1 s_1, \dots, \vec{r}_N s_N) = \phi(\vec{r}_1 s_1, \vec{r}_2 s_2) \dots \phi(\vec{r}_{N-1} s_{N-1}, \vec{r}_N s_N) \quad (3.6)$$

Antisimetrizando la expresión anterior, obtenemos el estado fundamental BCS:

$$\Psi_{\text{BCS}} = \mathcal{A} \Psi \quad (3.7)$$

A temperaturas mayores del 0 absoluto, una fracción de las parejas se disocian. Esto implica que si subimos la temperatura hasta T_c , todas las parejas de electrones superconductores se habrán disociado y el superconductor se encontrará en su fase normal.

Para obtener los resultados de las ecuaciones (3.3) y (3.4) es necesario tomar dos aproximaciones [14]. Primeramente, debido a que diversos materiales presentan una transición al estado superconductor de forma muy parecida, podemos ignorar tanto la estructura cristalina como la de bandas, características de cada material. Además, la interacción entre electrones cercanos a la energía de Fermi se simplifica a una interacción efectiva H_1 , teniendo como elementos de matriz:

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | H_1 | \vec{k}_3 \vec{k}_4 \rangle = \begin{cases} -\frac{V_0}{\Omega} & \text{si } \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4, |\varepsilon(\vec{k}_i) - \varepsilon_F| < \hbar\omega, i = 1, \dots, 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.8)$$

Todas estas consideraciones nos permiten explicar gran variedad de superconductores convencionales, así como las ecuaciones (3.3-3.5).

Estos conceptos nos permitirán entender las distintas interacciones de los sistemas que estudiaremos a continuación, además de hacernos una idea del orden de magnitudes con las que trabajaremos y sus interpretaciones físicas.

4. Superconductividad topológica y desorden

La fenomenología de las transiciones de fase puede ser entendida en gran medida gracias a la teoría de Landau. La transición de fase se dará cuando una simetría del sistema se rompa de forma local. Sin embargo, en los últimos años se han descubierto varios estados de la materia conocidos como *topológicos* [5], los cuales presentan un parámetro de orden no local. Una forma de entender un estado topológico es a través de los aislantes topológicos [15].

Como sabemos, un aislante normal presenta un *gap* de energía entre la banda de valencia (ocupada) y la banda conductora (vacía). De esta forma, distintos aislantes de este tipo pertenecen a una misma fase, es decir, podemos variar de forma adiabática de un Hamiltoniano a otro sin cerrar el *gap*. Podemos entender estos estados entonces como topológicamente equivalentes. Sin embargo, no todos los estados de la materia son topológicamente equivalentes, por ejemplo, el efecto Hall cuántico no lo es con los aislantes convencionales².

El efecto Hall cuántico se produce cuando los electrones, confinados en una superficie, son sometidos a un campo magnético externo muy elevado. En este caso, los niveles de energía de Landau son de la forma $\varepsilon_m = \hbar\omega_c(m + 1/2)$, con ω_c la frecuencia de ciclotrón. Si N electrones ocupan N estados de Landau, se formará un *gap* separando los estados ocupados y los vacíos. Estos ejemplos nos permiten diferenciar entre dos estados topológicamente no equivalentes, al igual que un toro y una esfera.

Por tanto, estos estados pertenecen a distintas clases, caracterizadas por un invariante topológico $n \in \mathbb{Z}$, conocido como invariante (o número) de Chern. Este invariante puede explicarse mediante la fase de Berry.

Como hemos anotado al principio, es necesario que dos Hamiltonianos estén conectados de forma adiabática para que pertenezcan a la misma fase topológica. Esto nos permite estudiar la relación entre estos estados mediante el teorema adiabático [4]. Este enuncia que, si tenemos un Hamiltoniano que depende de una serie de parámetros los cuales evolucionan “lentamente” con el tiempo, entonces los autovalores son los correspondientes a los de los estados evolucionando, salvo por una fase. Pongamos que el estado $|n(t)\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano $H(t)$ con autovalor $E_n(t)$. Entonces, la ecuación de Schrödinger queda:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (4.1)$$

² Siguiendo la Ref. [15], si definimos una celda unidad $2\pi\hbar c/eB$ encerrando un cuanto de flujo, entonces los operadores de traslación en la red conmutan con H , por lo que el teorema de Bloch se cumple y la estructura de bandas es idéntica a la de un aislante normal.

donde $|\psi(t)\rangle = e^{-i\theta(t)}|n(t)\rangle$. Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger y multiplicando por $\langle n(t)|$ tenemos^[5]:

$$E_n(t) - i\hbar\langle n(t)|\frac{d}{dt}|n(t)\rangle = \hbar\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) \quad (4.2)$$

obteniendo así una expresión para la fase acumulada en la evolución de $H(t)$:

$$\theta(t) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t dt' E_n(t') - i\int_0^t dt' \langle n(t')|\frac{d}{dt'}|n(t')\rangle \quad (4.3)$$

El primer término de la expresión (4.3) se conoce como fase “*dinámica*”, mientras que el segundo se conoce como fase de Berry.

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t dt' \langle n(t')|\frac{d}{dt'}|n(t')\rangle \quad (4.4)$$

Además, el Hamiltoniano anterior depende del tiempo debido a una serie de parámetro $\vec{R}(t)$, por tanto, $|n(t)\rangle \equiv |n(\vec{R}(t))\rangle$ y la derivada en (4.4) pasa a ser un gradiente:

$$\langle n(t)|\frac{d}{dt}|n(t)\rangle = \langle n(t)|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n(t)\rangle\frac{d\vec{R}}{dt} \quad (4.5)$$

Ya que ambos Hamiltonianos en una misma fase topológica pueden ser conectados adiabáticamente, podemos definir los límites de la integral de forma que sea cerrada:

$$\gamma_n(C) = \oint_C \vec{A}_n(\vec{R})d\vec{R} = \int [\vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \vec{A}_n(\vec{R})]d\vec{\alpha} \quad (4.6)$$

$$\vec{A}_n \equiv i\langle n(t)|\vec{\nabla}_{\vec{R}}|n(t)\rangle \quad (4.7)$$

donde hemos empleado el teorema de Stokes generalizado. El hecho de poder escribir la fase de Berry de esta forma es de gran relevancia, ya que es invariante bajo la elección de gauge ($\vec{A}_n(\vec{R}) \rightarrow \vec{A}_n(\vec{R}) - \vec{\nabla}_{\vec{R}}\phi(\vec{R})$), aún más, es interpretable como el flujo de $\vec{B}_n(\vec{R}) = \vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \vec{A}_n(\vec{R})$ a través de la superficie acotada por C . De esta forma se puede obtener este flujo para la zona de Brillouin:

$$n_m = \frac{1}{2\pi} \int d^2\vec{k} \vec{B}_m(\vec{k}) \quad (4.8)$$

Finalmente se tiene que la suma de los n_m sobre las bandas ocupadas $n = \sum_{m=1}^N n_m$ es invariante topológico, conocido como número total de Chern.

4.1. Fermiones de Majorana

Como hemos visto en el apartado anterior, la fase topológica es una fase de la materia que puede estar presente tanto en aislantes como en superconductores. Para poder explicar la fenomenología de la superconductividad topológica, es necesario comprender la física de los fermiones de Majorana, desarrollada por Ettore Majorana en 1937. Estos fermiones son cuasipartículas que son a la vez su propia antipartícula. Estos fermiones pueden obtenerse descomponiendo un fermión en su parte real e imaginaria, como veremos más adelante. Esto implica que un fermión puede ser descrito como la superposición de dos fermiones de Majorana, los cuales se encuentran espacialmente separados^[6]. Esta particularidad de que sean su propia antipartícula lleva de forma natural a estudiarlas en sistemas superconductores. Con estas propiedades podemos escribir entonces:

$$f_i = \frac{\gamma_{2i-1} + i\gamma_{2i}}{2} \quad (4.9)$$

$$f_i^\dagger = \frac{\gamma_{i,1} - i\gamma_{i,2}}{2} \quad (4.10)$$

Con la relación inversa:

$$\gamma_{2i-1} = f_i^\dagger + f_i \quad (4.11)$$

$$\gamma_{2i} = i \left(f_i^\dagger - f_i \right) \quad (4.12)$$

donde estamos realizando una notación suponiendo una cadena de fermiones, y por tanto, el doble de fermiones de Majorana. De las relaciones anteriores se observa que es un operador hermítico, $\gamma_j = \gamma_j^\dagger$. Se obtiene, además, que su anticonmutador

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{i,j} \quad (4.13)$$

difiere del fermiónico normal $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{i,j}$, ya que un fermión de Majorana es su propia antipartícula $\gamma_i^2 = 1$.

Como es sabido, se puede construir el operador número fermiónico de la forma:

$$n_i = f_i^\dagger f_i \quad (4.14)$$

con autovalores $n_i = 0, 1$ debido al principio de exclusión de Pauli. Sin embargo, no tiene sentido construir un operador número para fermiones de Majorana de la misma forma, ya que tendríamos que, $n_i^{MF} = \gamma_i^\dagger \gamma_i = 1 = \gamma_i \gamma_i^\dagger = n_i^{MF}$. Para solucionar esto, podemos usar que dos Majoranas próximos forman un operador fermiónico; en cambio, dos Majoranas que estén separados no lo formarán. Esto implica que el número total de fermiones $\sum_{i=1}^N n_i$ será un invariante topológico. Si, por ejemplo, tenemos una cadena con un número impar de sitios y el número de fermiones es par, nos indica que tenemos al menos dos fermiones de Majorana separados (simetría par-impar). De forma que, para cambiar la paridad de nuestra cadena, tenemos que añadir o quitar fermiones físicamente. Por tanto, si los fermiones de Majorana están separados, el estado fundamental está 2^N veces degenerado.

Otra propiedad interesante de los fermiones de Majorana es su estadística no abeliana. Para ello es necesario que el estado fundamental esté degenerado, ya que el intercambio adiabático de dos Majoranas puede modificar el estado pero no su autoenergía. Esta propiedad se entiende mejor en un superconductor bidimensional $p_x \pm ip_y$.

Si tenemos dos Majoranas (γ_1, γ_2) separados en un superconductor bidimensional, estos aparecerán en vórtices. En el interior de los vórtices, la fase superconductora y el *gap* de energía desaparecen.

Es importante notar que definir el intercambio de dos vórtices puede ser complicado, ya que es necesario introducir una línea de referencia a partir del cual se da un giro completo, acumulando una fase de 2π en la fase superconductora (condensado de Cooper). Mientras no se atraviese esa línea de referencia la fase se mantendrá en ϕ , véase la figura (1). Por tanto, el Majorana en el vórtice 1 adquirirá una fase π al intercambiarse con el vórtice 2. Así que la operación de intercambio de dos vórtices puede describirse como [6]:

$$\gamma_1 \rightarrow -\gamma_2 \quad (4.15)$$

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \quad (4.16)$$

Esta transformación puede ser descrita mediante el operador trenza o *braid operator*:

$$B_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_1 \gamma_2) \quad (4.17)$$

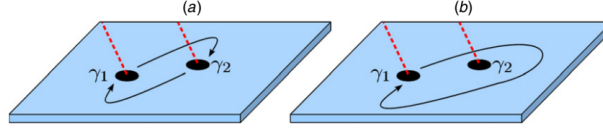


Figura 1: Visualización de la operación de intercambio de dos Majoranas, en (a) se representa el intercambio de γ_1 con γ_2 adquiriendo γ_1 una fase igual a π . En (b) movemos el vórtice 1 alrededor del vórtice 2, por lo que ambos adquieren una fase igual a π . Referencia [6].

El efecto de este operador sobre los estados es:

$$B_{12}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)|0\rangle \quad (4.18)$$

$$B_{12}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)|1\rangle \quad (4.19)$$

Como se puede observar, el intercambio de dos Majoranas no es trivial, y esta propiedad adquiere gran relevancia en computación cuántica topológica en el intercambio de al menos 4 Majoranas [6].

Esta descripción de los operadores fermiónicos mediante fermiones de Majorana puede parecer puramente cualitativa, sin grandes implicaciones físicas aparte de las mencionadas en esta sección. Sin embargo, distintos modelos de Hamiltonianos permiten explorar la física de los fermiones de Majorana en gran detalle. Entre ellos se encuentran los superconductores de onda p (1 dimensión), que trataremos a continuación en detalle

4.2. Superconductores de onda p (1D)

Estos superconductores fueron descritos por primera vez por Kitaev en el año 2001[7]. En este modelo tenemos una cadena unidimensional en la aproximación de *tight-binding*, vista en la sección (2.1). El Hamiltoniano que describe este modelo es el siguiente:

$$H_{\text{chain}} = -\mu \sum_{i=1}^N n_i - \sum_{i=1}^{N-1} \left[t \left(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i \right) + |\Delta| \left(c_i c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i^\dagger \right) \right] \quad (4.20)$$

donde μ es el potencial químico, $n_i = c_i^\dagger c_i$ es el operador número, t es el *hopping* (J en la sección [2.1]) y Δ el *gap* del superconductor. Además, como $\Delta = e^{i\phi}|\Delta|$, hemos elegido un *gauge* en el que $\phi = 0$ por simplicidad. Es relevante anotar que en este modelo trabajamos con tan solo una proyección del espín, por tanto, solo utilizamos un subíndice para los operadores creación y destrucción. Aunque parezca esto una elección por simplicidad, estos sistemas se han predicho para el estado fundamental de Sr_2RuO_4 [16]. Podemos deducir de este Hamiltoniano cómo la energía de *hopping* está relacionada con la creación de un electrón en el sitio i y destrucción en $i+1$ y viceversa. También que Δ está relacionada con la energía de creación/destrucción de un par de electrones contiguos (pares de Cooper). Finalmente, podemos comprobar que μ está relacionada con la energía de creación y destrucción de un electrón en la posición i , y por tanto con su energía de sitio.

Como hemos visto en la sección anterior, podemos descomponer entonces este Hamiltoniano en sus fermiones de Majorana [5]:

$$H_{\text{chain}} = -\frac{i}{2}\mu \sum_{i=1}^N \gamma_{2i-1}\gamma_{2i} + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{N-1} [(t + |\Delta|) \gamma_{2i}\gamma_{2i+1} + (-t + |\Delta|) \gamma_{2i-1}\gamma_{2i+2}] \quad (4.21)$$

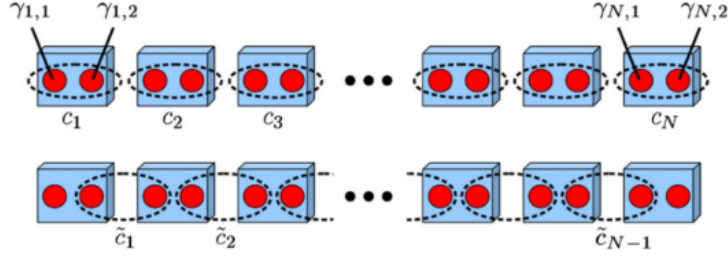


Figura 2: Representación de la cadena de Kitaev. En la figura de arriba vemos cada c_i separado en sus Majoranas. En la figura de abajo vemos la representación de (4.25). En esta figura los Majorana $\gamma_{i,1}$ y $\gamma_{i,2}$ corresponden con γ_{2i-1} y γ_{2i} , respectivamente, en nuestra notación. Referencia [6].

Podemos apreciar que el factor i es necesario ya que $(\gamma_{2i-1}\gamma_{2i})^\dagger = -\gamma_{2i}\gamma_{2i-1}$ es antihermítico, por tanto el factor i asegura la hermiticidad del Hamiltoniano. A continuación, tomemos $\mu = 0$ y $t = \Delta$, por lo que nuestro Hamiltoniano queda de la forma:

$$H_{\text{chain}} = it \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_{2i}\gamma_{2i+1} \quad (4.22)$$

Aunque simplemente hemos desarrollado el Hamiltoniano (4.20) y hemos realizado una elección de parámetros, nada nos impide reagrupar los fermiones de Majorana con tal de que formen nuevos electrones. Escribiéndolo de la misma forma que (4.9) tenemos:

$$\tilde{c}_i = \frac{\gamma_{2i} + i\gamma_{2i+1}}{2} \quad (4.23)$$

Y por tanto,

$$\tilde{n}_i = \tilde{c}_i^\dagger \tilde{c}_i = \frac{1}{4} (\gamma_{2i} - i\gamma_{2i+1}) (\gamma_{2i} + i\gamma_{2i+1}) = \frac{i}{2} \gamma_{2i}\gamma_{2i+1} \quad (4.24)$$

Donde hemos utilizado la relación de anticonmutación (4.13). Entonces, el Hamiltoniano anterior nos queda:

$$H_{\text{chain}} = 2t \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{c}_i^\dagger \tilde{c}_i \quad (4.25)$$

Lo que hemos conseguido en la expresión anterior es diagonalizar el Hamiltoniano (4.20) en la base de los Majoranas. Lo relevante aquí es que vemos que en esta nueva base el número total de electrones es $N - 1$, esto lo podemos ver en (4.22) ya que en este Hamiltoniano faltan los Majoranas γ_1 y γ_{2N} , que se encuentran en los extremos de la cadena. Podemos entonces definir un operador fermiónico para estos Majoranas:

$$\tilde{c}_M = \frac{\gamma_{2N} + i\gamma_1}{2} \quad (4.26)$$

Y también un operador número:

$$n_M = \tilde{c}_M^\dagger \tilde{c}_M = 0(1) \quad \text{par (impar)} \quad (4.27)$$

Por tanto, nos encontramos ante un estado altamente extendido, ya que sus Majoranas se encuentran completamente localizados en los extremos de la cadena. Como este estado no se encuentra en el Hamiltoniano anterior, la energía necesaria para ocuparlo es nula. Estos son los conocidos modos cero de Majorana. En la sección (3) vimos que el estado fundamental, no degenerado, de un

superconductor es aquel en el que todos los electrones forman parejas, y por tanto, necesitamos un número par de ellos. En cambio, en un superconductor topológico podemos tener un número impar de cuasipartículas con energía nula y, entonces, el estado fundamental es dos veces degenerado ($n_M = 0, 1$).

Como podemos ver, esta elección de parámetros $\mu = 0$, $|\Delta| = t$ tiene como consecuencia la aparición de un estado topológico y por tanto decimos que el superconductor está en su fase topológica.

Por otra parte, elijamos los parámetros $\mu < 0$, $|\Delta| = t = 0$. Para ver que ocurre en este caso escribamos el Hamiltoniano (4.20) en forma matricial ^[17]:

$$H_{\text{chain}} = \frac{1}{2} \Psi^\dagger \begin{pmatrix} H_0 & H_\Delta \\ -H_\Delta^* & -H_0^* \end{pmatrix} \Psi \quad (4.28)$$

con

$$H_0 = \begin{pmatrix} -\mu & -t & 0 & \cdots & 0 \\ -t & -\mu & -t & \cdots & 0 \\ 0 & -t & -\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$H_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

donde $\Psi = (c_1, \dots, c_N, c_1^\dagger, \dots, c_N^\dagger)^T$. Por tanto, bajo la elección de parámetros anterior obtenemos una matriz diagonal, que únicamente depende de μ . Además, la región de $\mu < 0$ y $\mu > 0$ son completamente simétricas según (4.28), en las que además se presenta un *gap*. Si vamos aumentando Δ lentamente, observamos que el sistema se mantiene con un *gap*, sin que se cierre en ningún momento, y por lo tanto pueden conectarse adiabáticamente ambas fases ($\Delta = 0$ y $\Delta \neq 0$) para un valor fijo de μ . Esto mismo ocurre para $\mu > 0$.

Este es el argumento perfecto para demostrar que bajo la elección de parámetros $\mu < 0$, $|\Delta| = t = 0$ el superconductor se encuentra en una fase distinta a la topológica, a la que llamamos fase trivial. Nótese que en cambio, no podemos conectar adiabáticamente $\mu < 0$ con $\mu > 0$ ya que justamente en $\mu = 0$ se cierra el *gap*.

Si bien hemos estudiado ambas fases en este tipo de superconductores, cabe de esperar que estas se den en un rango de valores, no simplemente en unos discretos. Para analizar estos valores es necesario realizar una transformada de Fourier del Hamiltoniano (4.20) al espacio de momentos, esto es ^[5]:

$$H_{\text{chain}} = \frac{1}{2} \sum_p \Psi_p^\dagger \begin{pmatrix} -2t \cos(p) - \mu & 2i|\Delta| \sin(p) \\ -2i|\Delta| \sin(p) & 2t \cos(p) + \mu \end{pmatrix} \Psi_p \quad (4.31)$$

donde $\Psi_p = (c_p \quad c_{-p}^\dagger)^T$. Diagonalizando el Hamiltoniano anterior obtenemos las autoenergías en función de p :

$$\epsilon(p) = \pm \sqrt{(2t \cos(p) + \mu)^2 + 4|\Delta|^2 \sin^2(p)} \quad (4.32)$$

Como hemos deducido antes, el cambio entre la fase trivial y la topológica vendrá dada cuando el *gap* de energía se cierre, y por tanto $\epsilon(p_c) = 0$. Esto ocurre para $p = 0$ y $\mu_c = -2t$. Viendo la forma matricial del Hamiltoniano sospechamos que los signos de t y μ no son relevantes. Por tanto, en el rango en el que $2|t| < |\mu|$ estaremos en la fase trivial, al atravesar $|\mu| = |2t|$ el *gap* se

cerrará y en el dominio $2|t| > |\mu|$ nos encontraremos en la fase topológica, ya que por la elección de parámetros para deducir ambas fases hemos tomado $\mu = 0$, $t \neq 0$ para la fase topológica y $\mu < 0$, $t = 0$ para la fase trivial.

Se puede construir una versión continua para el Hamiltoniano de forma^[6]:

$$H_{1D} = \int dx \left[\Psi^\dagger(x) \left(\frac{p_x^2}{2m} - \mu \right) \Psi(x) + \Psi(x) |\Delta| e^{i\phi} p_x \Psi(x) + \text{h.c.} \right] \quad (4.33)$$

donde $\Psi^\dagger(x)$ es el operador creación en el espacio real, p_x es el momento y m la masa efectiva del electrón. Por tanto, si tenemos un sistema separado por dos regiones, una en la que $|\mu| < 2|t|$ y otra donde $|\mu| > 2|t|$ observaremos una transición entre la fase topológica y la fase trivial. De esta forma aparecerán dos fermiones de Majorana en el punto de transición de las fases para mantener invariante el número de Majoranas en la fase topológica. Esto nos lleva a estudiar qué ocurre en estos sistemas en presencia de *desorden*.

4.3. Superconductores de onda p en presencia de desorden

Para realizar el estudio de este modelo en presencia de desorden es necesario reescribir su Hamiltoniano de la siguiente forma^[8]:

$$H = \left(\frac{p^2}{2m} + V(x) - \mu \right) \sigma_z - \Delta' p \sigma_x \quad (4.34)$$

Vemos que estamos describiendo el problema anterior de un par (electrón-hueco) libre, como antes, pero añadiendo un potencial del tipo (2.1). En este Hamiltoniano tenemos que σ_x y σ_y representan las matrices de Pauli en el espacio electrón-hueco. Como vimos en la sección (2) el potencial de este Hamiltoniano seguirá una distribución gaussiana, y por tanto $\langle V(x)V(x') \rangle = (\text{cte.})\delta(x-x')$, relacionado con el recorrido libre medio l en el estado normal, ya que como avanzamos en la sección (2), los términos cruzados $V_{KK'}$ corresponden a fenómenos de *scattering*. Por otra parte, $\Delta = \Delta' p_F = \hbar v_F / \xi$, donde ξ es la longitud de coherencia del superconductor.

Bajo estas implicaciones, esperamos que en presencia de desorden los modos cero de Majorana se puedan romper, generando excitaciones de energía ε_0 que decrecen exponencialmente con L/ξ (siendo L la longitud de nuestra cadena). Por otro lado, debido al *gap* superconductor Δ , esperamos colas de Lifschitz por debajo y encima de este, ya que el espectro es simétrico, debido a la localización de Anderson de los estados en el material masivo.

Los procesos de dispersión vendrán dados por una matriz de scattering 2×2 . Para construirla consideremos que nuestra cadena tiene un tamaño finito de 0 a L . De esta forma, si $x \in (0, L)$, $\mu = p_F^2/2m$. Por otra parte, para $x < 0$ y $x > L$ $\mu = -\infty$. Entonces; para $x < x'$ (propagación de izquierda a derecha) nuestro Hamiltoniano será (4.34), mientras que para $x > x'$ tomaremos el de una partícula libre:

$$H = \frac{p^2}{2m} \sigma_z \quad (4.35)$$

Tomando estas consideraciones y parametrizando la matriz de scattering (S) tenemos^[8]:

$$S(\varepsilon, x') = -\frac{1}{2} \sum_{\pm} \begin{pmatrix} \pm e^{i\phi} \tanh(y_{\pm}) & -i \tanh(y_{\pm}) \\ i \tanh(y_{\pm}) & \pm e^{-i\phi} \tanh(y_{\pm}) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

donde hemos parametrizado las energías ε como $\tanh(y_{\pm})$, donde y_{\pm} toma valores en el eje real $\pm i\pi/4$. Con la condición $\det[1 + S(\varepsilon, L)] = 0$ podemos calcular los niveles de energía:

$$\cos \phi = \coth(y_- - y_+) \quad (4.37)$$

La relevancia de este desarrollo es que podremos calcular las distribuciones de probabilidad $p_{0,\max}$ y $p_{1,\min}$ correspondientes a los valores máximos y mínimos de ε_0 y ε_1 respectivamente, donde ε_1 es el primer nivel de energía del *bulk*. Estas distribuciones de probabilidad nos dan como resultado que para $\ln(\varepsilon_{0,\max}/2\Delta)$ se sigue una distribución normal con media y varianza:

$$\langle \ln(\varepsilon_{0,\max}/2\Delta) \rangle = -L \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2l} \right) \quad (4.38)$$

$$\sigma^2(\ln(\varepsilon_{0,\max}/2\Delta)) = \frac{L}{2l} \quad (4.39)$$

De (4.38) podemos concluir que, si estamos en la fase topológica, $\varepsilon_{0,\max}$ será menor que el *gap* superconductor 2Δ y la media tendrá un valor negativo. Por tanto, el estado topológico se preservará cuando $2l > \xi$.

De esta forma, cuando aumente el desorden, l disminuirá hasta tener la condición que anula la media $2l = \xi$ ($\varepsilon_{0,\max} = 2\Delta$). Esta condición identifica el punto crítico del desorden, ya que si lo seguimos aumentando ($2l < \xi$), $\varepsilon_{0,\max}$ superará el *gap* superconductor, llevando el estado a la fase trivial.

Finalmente, podemos concluir que con un desorden moderadamente bajo, los modos cero de Majorana se han de preservar, ya que el sistema tenderá a mantenerse en la fase topológica. Es decir, el estado topológico protege al sistema frente al desorden. Sin embargo, al atravesar un desorden crítico dado, los modos de Majorana entrarán en la región del espectro del *bulk* (definido por $\varepsilon_{1,\min}$) transicionando así a la fase trivial.

Si bien el modelo de la cadena de Kitaev es el más utilizado para tratar principalmente el problema de la superconductividad topológica, otros modelos amplían la física de los superconductores topológicos, como los superconductores de onda $p_x \pm ip_y$ (2D), donde los modos cero de Majorana aparecen en los bordes del sistema y en vórtices, tal como adelantamos en [4.1].

5. Resultados

De la sección anterior podemos concluir que los superconductores topológicos presentan características únicas, con y sin desorden, en sus distintas fases. Por tanto, en esta sección presentaré distintos resultados y cálculos que he realizado sobre la cadena de Kitaev.

Primeramente, presentaré cálculos realizados sobre una cadena sin desorden, tanto en su fase topológica como la trivial. De esta forma podremos apreciar las distintas características de ambas fases así como poder comprobar las predicciones teóricas.

Por otra parte, veremos como se comporta este mismo superconductor topológico en presencia del desorden. Podremos ver la distinta fenomenología del desorden revisada en la sección (2), así como el comportamiento de un superconductor topológico en presencia de desorden.

5.1. Superconductividad topológica sin desorden

Como hemos visto en la sección (4), podemos escribir el Hamiltoniano de forma matricial (4.28) de tamaño $2N \times 2N$ debido a la forma de este. Una vez construida la matriz, calculamos los autovalores (autoenergías) y autovectores. Veamos entonces el espectro de energía para un superconductor topológico en la fase topológica y trivial.

En la figura (3) podemos apreciar el *gap* superconductor $2\Delta = 0,6$ y cómo el espectro es simétrico, propio de un superconductor. Además, la línea que aparece en el espectro centrada en cero es la correspondiente a los modos cero de Majorana. Mientras esta línea esté dentro del *gap*, sabremos que $|\mu| < 2|t|$, y por tanto nos encontraremos en la fase topológica. Además, podemos ver en (4a) y (4b) que las autofunciones decrecen rápidamente, pero vuelven a crecer en el centro

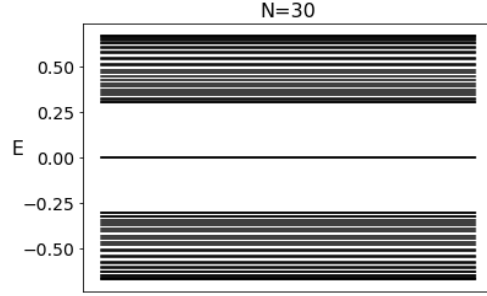
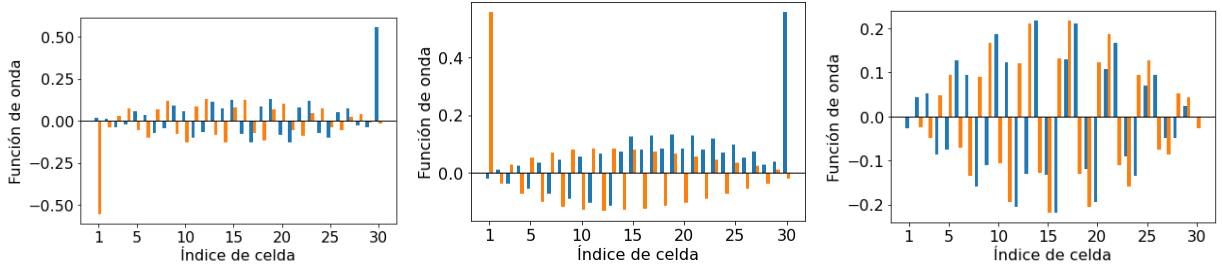


Figura 3: Espectro de energía en la fase topológica para $\mu = 0$; $t = |\Delta| = 0,3$.



(a) Autofunción menor energía en (b) Autofunción menor energía en (c) Autofunción con mayor $|E|$ respecto a (4a) y (4b).
valor absoluto. valor absoluto.

Figura 4: Representación de las autofunciones en cada sitio para la fase topológica con $N = 30$.

de la cadena. Esto se debe a que, si la cadena no es suficientemente larga, las autofunciones de los Majorana en los extremos pueden solapar.

Por otra parte, en la figura (4) vemos que las autofunciones de menor $|E|$ de la cadena están principalmente localizadas en la primera y última celda, mientras que una autofunción con mayor $|E|$, respecto a las anteriores, toma valores mínimos justo en esas celdas. Esto es el indicio claro de que nos encontramos en la fase topológica. Como anotamos en la sección anterior, en esta fase los Majoranas γ_1 y γ_{2N} no aparecen en el Hamiltoniano y se encuentran localizados en los extremos. Es relevante observar las escalas de cada figura. En las figuras (4a) y (4b) se toman valores en torno a 0,6 claramente localizados. En cambio, la figura (4c) toma valores máximos en torno a 0,4; distribuidos en el *bulk*, y mínimos en los extremos. Veamos a continuación qué sucede en la fase trivial con $\mu = 0,7$, $t = |\Delta| = 0,3$.

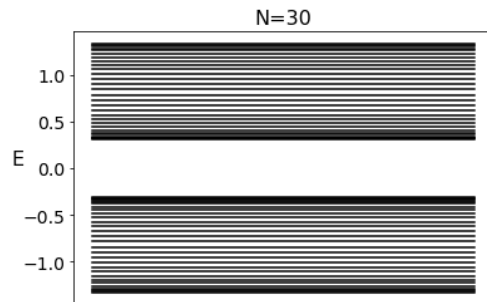
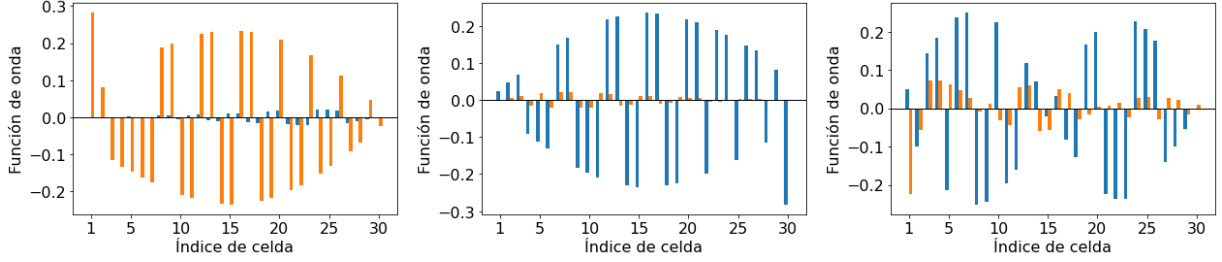


Figura 5: Espectro de energía en la fase trivial $\mu = 0,7$; $t = |\Delta| = 0,3$.

Como podemos observar en (5), obtenemos un espectro de energías de un superconductor normal, con *gap* igual a 2Δ , tal como predecíamos en la sección anterior. En la figura (6) vemos una



(a) Autofunción menor energía en valor absoluto. (b) Autofunción menor energía en valor absoluto. (c) Autofunción con mayor $|E|$ respecto a (6a) y (6b).

Figura 6: Representación de las autofunciones en cada sitio para la fase trivial con $N = 30$.

clara diferencia con el estado topológico. No encontramos estados localizados, lo que es el argumento final para concluir que nos encontramos en la fase trivial. Aún más, para poder diferenciar con más claridad la separación entre ambas fases, podemos representar las autoenergías en función del potencial químico.

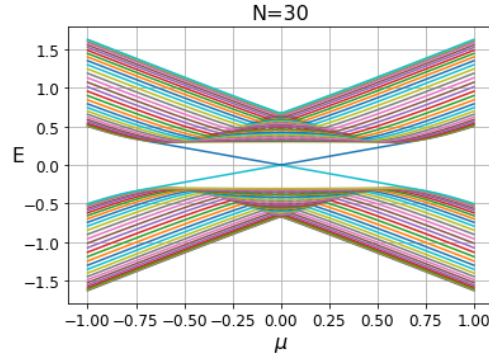


Figura 7: Espectro de energías de la cadena de Kitaev en función del potencial químico.

Observamos claramente que, mientras $|\mu| < 2|t| = 0,6$, nos encontramos en la fase topológica con funciones de onda localizadas en los extremos. En cambio, cuando $|\mu|$ supera este valor, el sistema pasa a la fase trivial y las funciones de onda de los extremos dejan de localizarse.

Podemos concluir por tanto, que los cálculos numéricos apoyan la teoría. Observamos diferencia clara entre ambas fases y cómo las autofunciones se localizan cuando $|\mu| < 2|t|$.

5.2. Superconductividad topológica en presencia de desorden

El desorden en nuestro sistema lo introduciremos a partir del potencial químico. El procedimiento será el siguiente. Para una distribución de probabilidad uniforme generaremos un número aleatorio $w \in [-W, W]$, introduciendo este valor en H a través de μ podremos calcular sus autoenergías. Repitiendo este proceso suficientes veces podremos promediar las autoenergías. Tras promediar las autoenergías, aumentaremos W con tal de obtener una relación entre E y W .

Por otra parte, podemos realizar los mismo cálculos para una distribución normal, donde introduciremos W como la desviación típica. De esta forma, comparando ambas distribuciones para distintos tamaños, obtenemos la figura (8).

Lo primero que podemos observar es el comportamiento respecto a N . Además, podemos observar claramente cómo para valores por debajo de W_c se mantiene la fase topológica. Sin embargo,

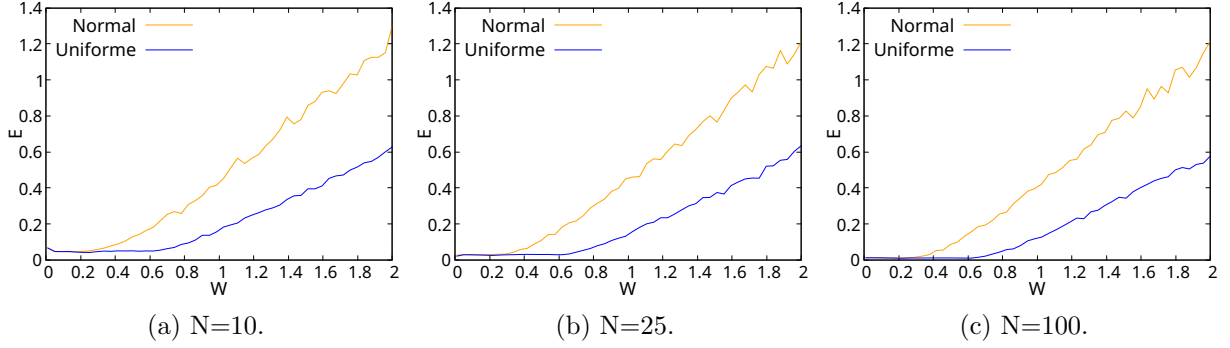


Figura 8: Modo cero de Majorana en función de W para ambas distribuciones en la fase topológica $\mu = 0$; $t = |\Delta| = 0,2$, con un total de 1000 datos promediados para cada W .

al superarla se rompe el estado topológico. También es interesante comprobar que para una distribución normal W_c es menor que para una uniforme. Esto es debido a que la desviación típica es inversamente proporcional a l (4.39). Si bien las gráficas anteriores son útiles para tener una estimación del desorden, resulta mucho más útil obtener la densidad de estados (DOS) en función de W . Representando la DOS para $N = 25$ obtenemos:

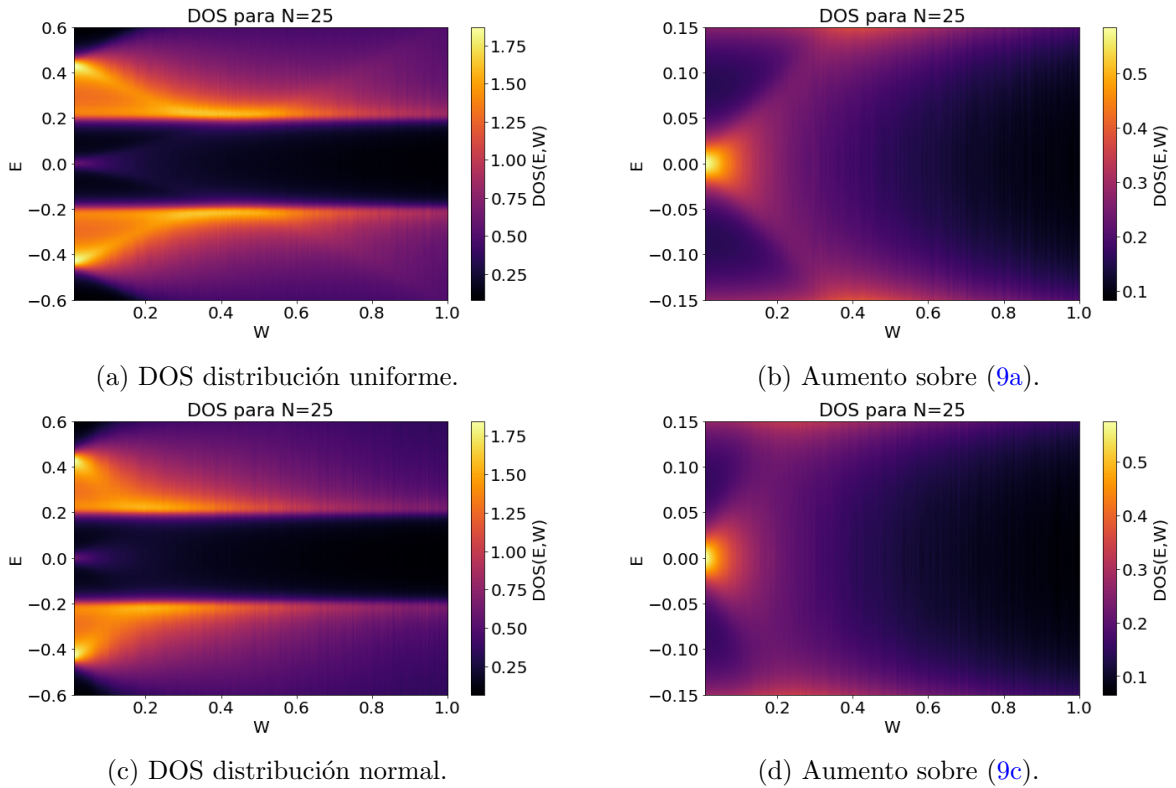


Figura 9: DOS en función de W para ambas distribuciones, realizando 1000 promedios sobre las autoenergías de H para cada W , con $N = 25$.

En la figura (9) podemos ver claramente cómo los modos cero de Majorana se mantienen para desórdenes relativamente bajos y desaparecen a partir de W_c . Podemos observar en el espectro del *bulk* las colas de Lifshitz por la localización de Anderson. Además, observamos que el W_c para una distribución normal es menor que para uniforme, como se ha argumentado anteriormente.

6. Conclusiones

Podemos concluir, de la sección anterior, que el cálculo numérico corrobora lo ya predicho por la teoría. Primeramente, observamos que la distribución de la amplitud de las funciones de onda es una prueba definitiva para determinar si el sistema se encuentra en la fase topológica o trivial. Si obtenemos estados localizados sabremos con certeza que nos encontramos en la fase topológica. Además, hemos observado cómo el sistema cambia entre fases en los límites estudiados en la sección (4). Por otra parte, vemos cómo los estados se comportan en presencia del desorden y cómo varía W_c en función de la distribución de probabilidad.

En general, en este trabajo hemos visto cómo se comportan los electrones en una red desordenada, aplicando la aproximación de enlace fuerte, teniendo como consecuencia una transición localización-deslocalización en función del tamaño del sistema, viendo finalmente el teorema de deslocalización de Anderson.

Hemos revisado brevemente la fenomenología de los superconductores, la aparición de un *gap* de energía en su espectro y la teoría BCS, lo que nos ha permitido introducir posteriormente la cadena de Kitaev.

Aparte, hemos podido definir qué es un estado topológico a través del teorema adiabático y la fase de Berry. Esto nos ha permitido diferenciar entre las fases topológica y trivial de la cadena de Kitaev. Finalmente, hemos visto cómo afecta la introducción del desorden en el Hamiltoniano de la cadena, preservándose la fase topológica hasta un desorden crítico. Finalmente, hemos podido comparar distintas distribuciones de probabilidad del desorden viendo cómo estas afectan al desorden crítico.

En el ámbito de la investigación este tema es muy actual y de mucha actividad. El hecho de que los modos cero de Majorana tengan energía nula, hace de su detección una tarea muy complicada. De todas formas, su posible implementación en ordenadores cuánticos permitiría un gran avance en estas tecnologías. Existen a su vez múltiples trabajos modelizando sistemas reales donde se pudiesen detectar estos modos cero de Majorana [17].

Aunque sus aplicaciones sean prometedoras, el estudio de estos sistemas ya es de gran relevancia por sí misma. Avances en este campo nos permiten entender más sobre la física fundamental que rodea la superconductividad topológica, los fermiones de Majorana y el comportamiento de distintos sistemas de muchos cuerpos en presencia de desorden.

Referencias

- [1] Domínguez-Adame y Malyshev, “A simple approach to Anderson localization in one-dimensional disordered lattices,” *American Journal of Physics*, vol. 72, n.º 2, págs. 226-230, 2004, ISSN: 0002-9505. DOI: [10.1119/1.1593660](https://doi.org/10.1119/1.1593660).
- [2] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, Inc., 1996.
- [3] N. W. Ashcroft y N. D. Mermin, *Solid State Physics*. Harcourt College Publishers, 1976.
- [4] J. J. Sakurai y J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, Third. Cambridge University Press, 2021.
- [5] B. A. Bernevig y T. L. Hughes, *Topological insulators and topological superconductors*. Princeton University Press, 2013.
- [6] M. Leijnse y K. Flensberg, “Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions,” *Semiconductor Science and Technology*, vol. 27, n.º 12, pág. 124 003, nov. de 2012. DOI: [10.1088/0268-1242/27/12/124003](https://doi.org/10.1088/0268-1242/27/12/124003).
- [7] A. Y. Kitaev, “Unpaired Majorana fermions in quantum wires,” *Physics-Uspekhi*, vol. 44, n.º 10S, pág. 131, oct. de 2001. DOI: [10.1070/1063-7869/44/10S/S29](https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10S/S29).
- [8] P. W. Brouwer, M. Duckheim, A. Romito y F. von Oppen, “Probability Distribution of Majorana End-State Energies in Disordered Wires,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, pág. 196 804, 19 nov. de 2011. DOI: [10.1103/PhysRevLett.107.196804](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.196804).
- [9] V. Lahtinen y J. Pachos, “A Short Introduction to Topological Quantum Computation,” *SciPost Physics*, vol. 3, n.º 3, sep. de 2017, ISSN: 2542-4653. DOI: [10.21468/scipostphys.3.3.021](https://doi.org/10.21468/scipostphys.3.3.021).
- [10] B. Simon, “Lifschitz tails for the Anderson model,” en *J. Stat. Phys.*, vol. 38, n.º 1-2, págs. 65-76, ene. de 1985. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01017848>.
- [11] E. Díez, Á. Sánchez y F. Domínguez-Adame, “Conjetura que algo queda: el ”teorema” de localización de Anderson,” *Revista Española de Física*, vol. 13, n.º 4, págs. 23-26, 1999.
- [12] V. Malyshev, “Localization length of a 1D exciton and temperature dependence of the radiative lifetime in frozen dye solutions with J aggregates,” *Optics and Spectroscopy*, vol. 71, pág. 505, ene. de 1991.
- [13] V. Malyshev, “Localization length of one-dimensional exciton and low-temperature behaviour of radiative lifetime of J-aggregated dye solutions,” *Journal of Luminescence*, vol. 55, n.º 5, págs. 225-230, 1993, ISSN: 0022-2313. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-2313\(93\)90017-H](https://doi.org/10.1016/0022-2313(93)90017-H).
- [14] L. N. Cooper, “Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas,” *Phys. Rev.*, vol. 104, págs. 1189-1190, 4 nov. de 1956. DOI: [10.1103/PhysRev.104.1189](https://doi.org/10.1103/PhysRev.104.1189).
- [15] M. Z. Hasan y C. L. Kane, “Colloquium: Topological insulators,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, págs. 3045-3067, 4 nov. de 2010. DOI: [10.1103/RevModPhys.82.3045](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.3045).
- [16] S. Das Sarma, C. Nayak y S. Tewari, “Proposal to stabilize and detect half-quantum vortices in strontium ruthenate thin films: Non-Abelian braiding statistics of vortices in a $p_x + ip_y$ superconductor,” *Phys. Rev. B*, vol. 73, pág. 220 502, 22 jun. de 2006. DOI: [10.1103/PhysRevB.73.220502](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.220502).
- [17] F. G. Medina, D. Martínez, Á. Díaz-Fernández, F. Domínguez-Adame, L. Rosales y P. A. Orellana, “Manipulation of Majorana bound states in proximity to a quantum ring with Rashba coupling,” en *Sci. Rep.*, vol. 12, n.º 1, pág. 1071, ene. de 2022. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-05043-y>.