PEDRO ABELLANAS

SEMIGRUPOS DE LOS SEGMENTOS, ANGULOS, ARCOS Y POLIGONOS

(Publicado en «Cursillos sobre Didáctica
Matemática», Tomo II)

IMPRENTA SAMARAN
MADRID 1969

Depósito Legal, M. Sep. 2199.-1969

Imp. Samarán. Amparo, 103.—Madrid

SEMIGRUPOS DE LOS SEGMENTOS, ANGULOS, ARCOS Y POLIGONOS

por

PEDRO ABELLANAS

1. SEGMENTOS

1. Dibuja un segmento AB en un papel transparente. Dibuja varios segmentos: CD, EF ..., iguales al AB. ¿Es el segmento CD igual al EF? ¿Por qué? (Fig. 1).

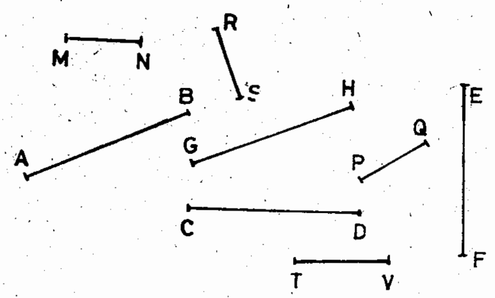

Fig. 1

2. En el mismo papel en el que has dibujado el segmento AB y sus iguales, dibuja otro segmento MN y varios segmentos PQ, RS, ..., iguales al MN. ¿Cómo comprobarías si el segmento PQ es igual al segmento CD? Si el segmento MN es igual al segmento AB, será el segmento PQ igual al CD? Si aquéllos son distintos, ¿lo serán éstos?

3. Sea [AB] el conjunto formado por todos los segmentos iguales al segmento AB.

La familia formada por todos los conjuntos [AB] [HG] ..., ¿produce una partición?

Como consecuencia de ser una partición la familia formada por los conjuntos [AB], a estos conjuntos los llamaremos *clases de segmentos* o *segmentos generales*.

4. Los segmentos que pertenecen a la misma clase los pintaremos

del mismo color. ¿Qué significa que dos segmentos sean rojos? ¿Qué significa que un segmento sea rojo y otro verde?

5. Al segmento general formado por todos los segmentos de color rojo los representaremos por *rojo* o bien por [AB]. Al segmento general formado por todos los segmentos verdes lo representaremos por *verde*, o bien por [RS]. Cualquier segmento rojo se dice que es un representante del segmento general *rojo*.

6. ¿Cuándo son iguales dos conjuntos?

Solución; Cuando están formados por los mismos elementos.

7. ¿Cómo se prueba que dos conjuntos son iguales?

Solución; Probando que cada uno de ellos está contenido en el otro.

Recuerda que la igualdad de conjuntos la has representado por el signo $\equiv$ y que la igualdad de elementos la representamos por el signo $=$.

8. ¿Cómo representarás la igualdad del segmento general [AB] y el segmento general [XY]?

Solución; Escribiendo $[AB] \equiv [XY]$.

9. ¿Cómo representarás la igualdad del segmento AB y el segmento GH?

Solución; $AB = GH$.

10. Considera el conjunto formado por todos los segmentos contenidos en la región A (fig. 2) y el conjunto de tódos los segmentos con-

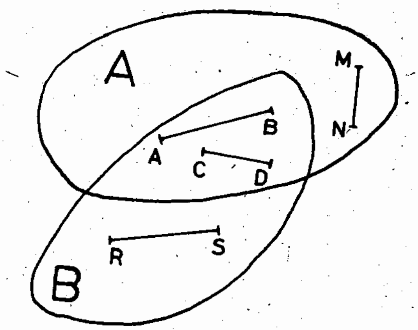

Fig. 2

tenidos en la región B. ¿Son iguales dichos conjuntos? ¿Tienen algún segmento común dichos conjuntos?

11. ¿Pueden tener un segmento común dos clases de segmentos distintos?

12. Si el segmento general [AB] es igual al segmento general [MN], esto es, si $[AB] \equiv [MN]$ y si $CD \in [AB]$ y $PQ \in [MN]$, ¿cómo son CD y PQ?

13. Probar que de $CD \in [AB]$, $PQ \in [MN]$ y $CD = PQ$ se deduce $[AB] \equiv [MN]$.

14. ¿Cómo averiguarás si el segmento rojo es igual o distinto al segmento azul?

Solución; Tomarás un representante arbitrario AB del segmento rojo (fig. 3) y otro CD del segmento azul. Doblando el papel por la recta AC, volverás a doblar de modo que la recta AC coincida consigo misma y el punto C coincida con A y calcarás el segmento CD, con lo que obtendrás el segmento AE. Doblando por la bisectriz del ángulo EAB y calcado AE obtendrás el segmento AF. El segmento AF es un segmento azul. ¿Por qué? Si el segmento AF coincide con el segmento AB

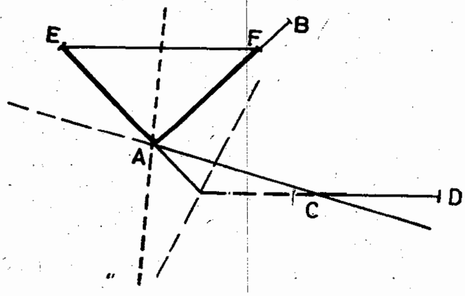

Fig. 3

sería también un segmento rojo y, por tanto, todo segmento azul sería rojo y viceversa; luego sería: [rojo] ≡ [azul].

15. Los segmentos AB y BC de la figura 4, que tienen un extremo común, se llaman *concatenados*. Dibuja tres segmentos, cada uno concatenado con el siguiente. Haz lo mismo con cuatro y con cinco segmentos.

16. Los lados de un triángulo, ¿son concatenados? ¿Lo son los de un polígono cualquiera?

17. Los segmentos AB y BC de la figura 4, *c)*, son *consecutivos*, y no lo son los segmentos de las figuras 4 *a)* y 4*b)*. ¿Qué diferencia ves entre los segmentos de las figuras 4 *a)*, 4 *b)* y 4 *c)*?

18. Dibuja dos segmentos consecutivos. Dibuja tres segmentos, consecutivos dos a dos. Dibuja cuatro segmentos consecutivos dos a dos.

19. ¿Son consecutivos los lados de un polígono? ¿Por qué?

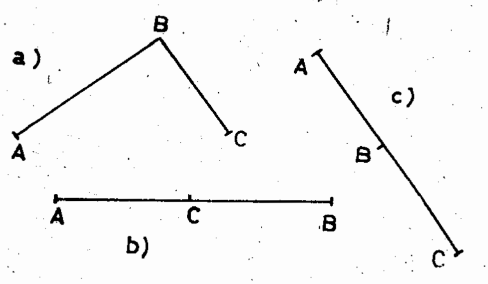

Fig. 4

20. Dibuja un segmento rojo MN y otro azul PQ. Comprueba que existen un segmento rojo y otro azul consecutivos (fig. 5).

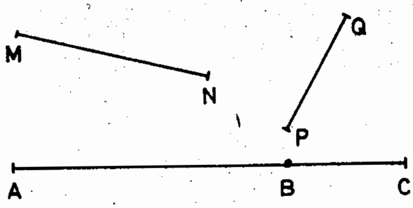

Fig. 5

Definición de adición.

Dados dos segmentos generales a y b, se llama *suma* y se representa por $a + b$ al segmento general obtenido del siguiente modo: se toma un representante AB del segmento a y otro BC del segmento b que sean consecutivos, se define:

$$a + b = [AC]$$

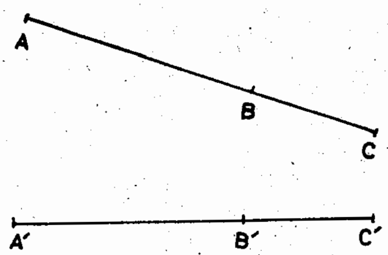

Fig. 6

21. Dibuja los segmentos MN, PQ, RS, TV y sean: $a = [MN]$, $b = [PQ]$, $c = [RS]$, $d = [TV]$.

Construye los siguientes segmentos:

a) $(a + b) + c$; b) $a + (b + c)$; c) $(a + b) + (c + d)$;
d) $[(a + b) + c] + d$; e) $a + (b + c) + d$; f) $a + [(b + c) + d]$.

22. Comprueba la uniformidad de la adición:

Solución; Sean AB y A'B' representantes de a y BC, B'C' representantes de b, tales que AB y BC sean consecutivos y A'B' y B'C' también Entonces, $a + b = [AC]$ y $a + b = [A'C']$. Se trata de comprobar mediante doblado del papel que $[AC] = [A'C']$ (fig. 6).

23. Demostrar la propiedad asociativa.

Solución; Toma los segmentos consecutivos $AB \in a$, $BC \in b$, $CD \in c$ (fig. 7). Se verifica que $a + b = [AC]$, $b + c = [BD]$, $(a + b) + c = [AD]$, $a + (b + c) = [AD]$.

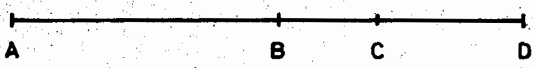

Fig. 7

24. Demuestra la propiedad conmutativa.

Solución; Toma los segmentos consecutivos $AB \in a$ y $BC \in b$ (figura 8). Se verifica que $a + b = [AC] = [CA] = b + a$.

Fig. 8

25. Se define

$$na = a + a + \overset{[n}{\ldots} + a$$

Construye

$$2a, \quad 3a, \quad 5a$$

26. Demuestra que

$$(m + n)a = m\,a + n\,a$$

Solución;

$$(m + n)a = (a + a + \overset{[m}{\ldots} + a) + (a + \overset{[n}{\ldots} + a) = ma + na$$

27. Demuestra que

$$m\,(a + b) = ma + mb$$

Solución;

$$m(a + b) = (a + b) + \overset{(m}{\ldots} + (a + b) = (a + \overset{(m}{\ldots} + a) + (b + \overset{(m}{\ldots} + b)$$
$$= m\,a + m\,b$$

28. Demuestra que

$$(m\,n)a = m\,(n\,a)$$

Solución;

$$(mn)a = (a + \overset{(n}{\ldots} + a) + \overset{(m}{\ldots} + (a + \overset{(n}{\ldots} + a) =$$
$$= na + \overset{(m}{\ldots} + na = m\,(na)$$

Definición de sustracción.

Admitimos la equivalencia de las siguientes igualdades:

$$a + b = c \Longleftrightarrow a = c - b \Longleftrightarrow b = c - a$$

En $a = c - b$, a c se le llama *minuendo*: a b, *sustraendo*, y a a, *diferencia*.

29. Construye la diferencia $c - b$ (fig. 9).

Solución; Si OB $\in b$ y OC $\in c$, $c - b = [BC]$

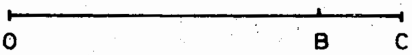

Fig. 9

30. Comprueba que:

I) $(a - b) + b = a$.

Solución; La relación I es equivalente a $a - b = a - b$.

31. Comprueba que:

II) $(a + b) - b = a$.

Solución; La relación II es equivalente a $a + b = a + b$.

32. Comprueba que:

III) $(a + b) - c = a + (b - c)$.

Solución; En virtud de I, III es equivalente a

$$a + b = [a + (b - c)] + c = a + [(b - c) + c] = a + b$$

33. Comprueba que:

IV) $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Solución; En virtud de I, IV es equivalente a

$$a = [(a - b) - c] + (b + c) = [(a - b) - c] + (c + b) =$$
$$= ([(a - b) - c] + c) + b = (a - b) + b = a$$

34. Comprueba que:

V) $a - (b - c) = (a + c) - b$.

Solución; En virtud de I, V) es equivalente a:

$$a = [(a + c) - b] + (b - c) = ([(a + c) - b] + b) - c =$$
$$= (a + c) - c = a$$

Ejercicios. 1.º Demuestra que $m(a - b) = ma - mb$., siendo m un número natural.

2.º Demuestra que $(m - n)a = ma - na$.

Definición de desigualdad.

Se dice que el segmento general a es menor que el b cuando exista otro, c, tal que

$$b = a + c$$

es decir, que

$$a < b \Longleftrightarrow b = a + c$$

35. Demuestra la transitividad de la desigualdad; esto es, que

$$a < b \text{ y } b < c \Longrightarrow a < c$$

Solución; Las hipótesis son equivalentes a $a + m = b$, $b + n = c$, de donde

$$(a + m) + n = a + (m + n) = c$$

36. Demuestra que la condición n. y s. para que $a < b$ es que existan representantes de a y b con un extremo común y con el segundo extremo del primero interior al segundo.

II. Angulos

Todos los ángulos que vamos a considerar a continuación se suponen convexos. Por consiguiente, un ángulo queda determinado por sus lados.

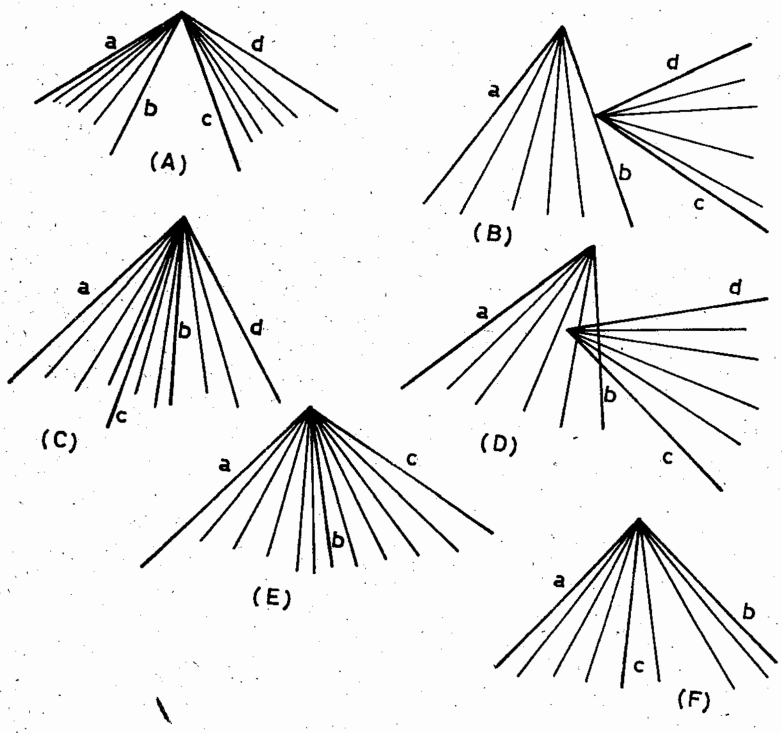

Fig. 10

Dos ángulos son *iguales* cuando se pueden superponer mediante un movimiento. Si dos ángulos *ab* y *cd* son iguales, escribiremos:

$$a\,b = c\,d$$

1. Dibuja un ángulo *ab* y varios ángulos *cd*, *ef*, ..., iguales a él. ¿Es el ángulo *cd* igual al *ef*? ¿Por qué?

2. En el mismo papel en que has dibujado los ángulos ab, cd, ..., dibuja otro ángulo mn y los ángulos pq, ..., iguales a mn. Si el ángulo pq es igual al ef, serán iguales ab y mn. Si aquéllos son distintos, ¿lo serán éstos?

3. Sea $[ab]$ el conjunto de todos los ángulos iguales al ab. ¿Es una partición la familia formada por todos los subconjuntos $[ab]$?

4. A la clase $[ab]$ se le llama *ángulo general*. Los ángulos que pertenecen a la misma clase los pintamos del mismo color. Por tanto, podremos hablar del ángulo general [rojo] cuyos ángulos son todos rojos; del ángulo general azul, cuyos ángulos son todos azules. Si decimos que ab y cd son dos ángulos rojos, ¿podrás escribir

$$(1) \qquad ab = cd \text{ ?}$$

¿Podrás escribir

$$(2) \qquad ab \in [cd] \text{ ?}$$

¿Y si ab es rojo y cd azul, podrás escribir (1) ó (2)?

5. Si $[ab] \equiv [cd]$, ¿qué relación existe entre ab y cd?

6. Si $ab = cd$, ¿qué relación existe entre $[ab] = [cd]$?

7. Dibuja dos ángulos arbitrarios ab y cd y comprueba, mediante simetrías, si son o no iguales.

Definición.—Dos ángulos (convexos) se llaman *consecutivos* cuando tienen un lado común, y ninguna otra semirrecta común.

(Nota: Esta definición debe de obtenerla el propio alumno, a partir de un conjunto de ejemplos convenientemente seleccionados. Por ejemplo (fig. 10), se dibujan los ángulos de la figura 10 y se dice que únicamente los ángulos ab y bc de (E) son consecutivos, no siéndolo los ángulos de las figuras 10 (A), (B), (C), (D) y (F). Que analicen las figuras 10 y den la definición de ángulos consecutivos).

8. Dibuja dos ángulos ab y cd y construye dos ángulos consecutivos mn y np tales que

$$mn \in [ab] \quad , \quad np \in [cd]$$

Solución (fig. 11). Dibuja la semirrecta m, de origen O. Si doblas el papel por la mediatriz h de AO y calcas el ángulo ab, obtendrás el ángulo $a'b'$; y doblando por la mediatriz l de CO y calcando el ángulo cd, obtendrás el ángulo $c'd'$. Dobla el papel por la bisectriz k del ángulo $a'm$ y calca el ángulo $a'b'$; obtendrás el ángulo mn. Dobla, finalmente, el papel por la bisectriz, j, del ángulo nc', y calca el ángulo $c'd'$: obtendrás el ángulo np. Los ángulos mn y np son consecutivos y $mn \in [ab]$, $np \in [cd]$.

9. Repite la construcción anterior dibujando con la regla, la escuadra y el compás.

Definición de adición de ángulos generales.

Dados los ángulos generales $[ab]$ y $[cd]$ de llama *suma* y se designa por $[ab] + [cd]$ al ángulo general $[mp]$ tal que mn y np son dos ángulos consecutivos y

$$mn \in [ab] \quad , \quad np \in [cd]$$

10. Dibuja dos ángulos ab y cd y construye un representante de ángulo $[ab] + [cd]$.

11. Comprueba que si $ab = cd$ y $mn = pq$ se verifica que:

$$[ab] + [mn] = [cd] + [pq]$$

12. Demuestra que la adición de ángulos generales es asociativa.

13. Demuestra que la adición de ángulos generales es conmutativa.

14. Se define $n\,[ab]$, siendo n un número natural, del siguiente modo:

$$n\,[ab] = \overbrace{[ab] + \ldots + [ab]}^{n}$$

Demuestra las siguientes relaciones, en donde m y n son números naturales:

A) $(m + n)\,[ab] = m\,[ab] + n\,[ab]$
B) $m\,([ab] + [cd]) = m\,[ab] + m\,[cd]$
C) $(m\,n)\,[ab] = m\,(n\,[ab])$.

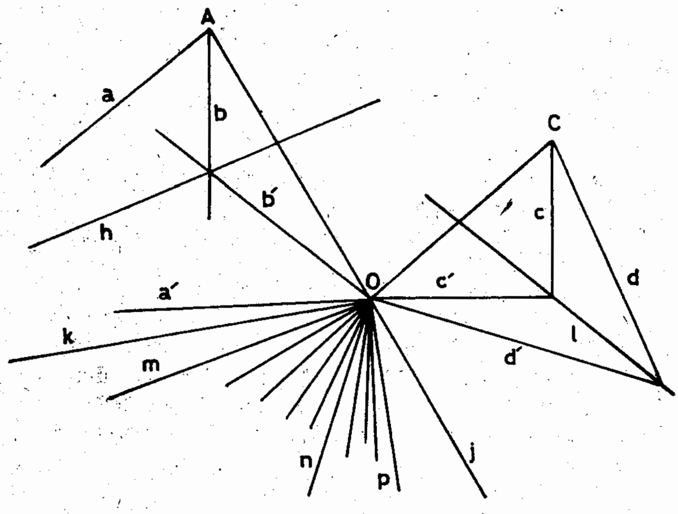

Fig. 11

Definición de la sustracción.

Las tres igualdades siguientes son equivalentes:

$[ab] + [cd] = [mn]$,, $[ab] = [mn] - [cd]$,, $[cd] = [mn] - [ab]$

15. Construye la diferencia $[mn] - [cd]$.

16. Enuncia para ángulos generales las propiedades 30, 31, 32, 33 y 34 de los segmentos generales.

17. Define la desigualdad entre ángulos generales y demuestra la transitividad de esta relación.

III. Arcos

En todo este capítulo consideraremos arcos de una misma circunferencia.

Si A y B son dos puntos de la circunferencia, se llama *arco de extremos A y B* a la intersección de la circunferencia con uno de los semiplanos de borde AB. A la intersección de la circunferencia con el semiplano AB.C la representamos por ACB y a la intersección con el semiplano AB.D por ADB (fig. 12).

Consideramos únicamente arcos, cuyos extremos no sean diametralmente opuestos y situados en el semiplano que no contiene al centro de la circunferencia. Por consiguiente, en lugar de arco ACB escribirán simplemente AB.

1. Dobla el papel por un diámetro de la circunferencia y calca el arco AB, obtendrás un arco A'B' igual al AB. Los arcos iguales entre sí los pintaremos del mismo color.

A la clase formada por todos los arcos iguales al arco AB la representaremos por [AB] o también, si AB es rojo, por [rojo], y le llamaremos *arco general.*

2. ¿Cómo se averigua si el arco general [AB] es o no igual al arco general [CD]?

3. Si AB = CD, ¿es [AB] ≡ [CD]?

4. Los pares de arcos (AB, BC) (AB, CD) (AD, CB) (AC, BD) (figura 12) no son consecutivos. El par (AB, BD) es un par de arcos consecutivos. Enuncia la definición de arcos consecutivos (inferiores a media circunferencia).

5. Dibuja dos arcos AB y CD. A partir de un punto M, dibuja dos arcos consecutivos, MN y NP, tales que AB = MN y CD = NP.

Solución; Dobla por el diámetro *d* perpendicular a AM y calca el arco AB. Obtendrás el arco MN = AB. Dobla por el diámetro *e* perpendicular a CN y calca el arco CD. Obtendrás el arco NP = CD(fig. 13).

6. Dados dos arcos generales, [AB] y [CD] y un punto N, cons-

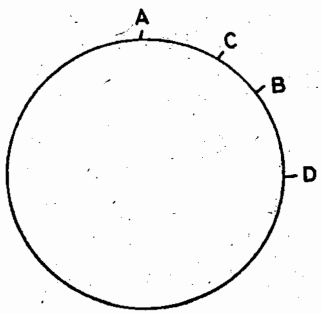

Fig. 12

truye dos arcos consecutivos, MN y NP, tales que MN $\in$ [AB] y NP $\in$ [CD].

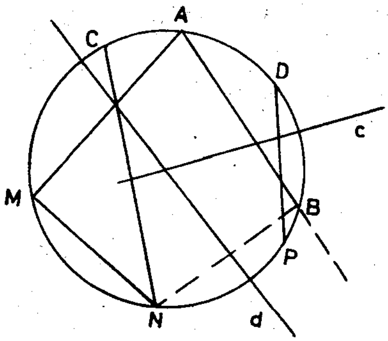

Fig. 13

Definición de adición de arcos generales.

Dados dos arcos generales, [AB] y [CD], se llama *suma* y se representa por [AB] + [CD], al arco general [MP], tal que MN y NP sean arcos consecutivos y [MN] = [AB], [NP] = [CD].

7. Construye el arco [AB] + [CD].
8. Comprueba la uniformidad de la adición.
9. Demuestra la asociatividad de la adición.
10. Demuestra la conmutatividad de la adición.
11. Se define n [AB], siendo n un número natural, por:

$$n\,[AB] = [AB] + \overset{(n}{\ldots} + [AB]$$

Demuestra las siguientes relaciones:

A) $(m + n)\,[AB] = m\,[AB] + n\,[AB]$
B) $m\,([AB] + [CD]) = m\,[AB] + m\,[CD]$
C) $(mn)\,[AB] = m\,(n\,[AB])$

Definición de sustracción de arcos generales.

Las igualdades siguientes son equivalentes:

$$[AB] + [CD] = [MN] \Longleftrightarrow [AB] = [MN] - [CD] \Longleftrightarrow [CD] = [MN] - [AD]$$

12. Dados los arcos generales [MN] y [CD] construye, si es posible, el arco [MN] — [CD].

13. Demuestra que si no existe el arco [MN] — [CD], existe el [CD] — [MN].

14. Enuncia y demuestra las cinco propiedades de la diferencia, análogas a las vistas para los segmentos generales.

15. Demuestra que si $m > n$, es

$$(m - n)\,[AB] = m\,[AB] - (n\,[AB]).$$

16. Demuestra que si existe $[AB] - [CD]$ es

$$m\,([AB] - [CD]) = m\,[AB] - (m\,[CD])$$

Definición de ordenación de arcos generales.

Se define:

$$[AB] \leqslant [CD] \Leftrightarrow [AB] + [MN] = [CD]$$

17. Demuestra que

$$[AB] < [CD] \text{ y } [CD] < [EF] \Rightarrow [AB] < [EF]$$

18. Demuestra que

$$[AB] < [CD] \Rightarrow [AB] + [MN] < [CD] + [MN]$$

19. Demuestra que

$$[AB] < [CD] \text{ y } [MN] < [PQ] \Rightarrow [AB] + [MN] < [CD] + [PQ]$$

20. Demuestra que

$$[AB] < [CD]\,,\ n \text{ natural} \Rightarrow n\,[AB] < n\,[CD]$$

21. Demuestra que si existe $[AB] - [MN]$ de $[AB] < [CD]$ y $[MN] > [PQ]$ se deduce que

$$[AB] - [MN] < [CD] - [PQ]$$

IV. Polígonos

Definición.—Dos triángulos son *consecutivos* (el triángulo rojo y el azul de la figura 14) cuando tienen un lado común y no tiene ningún otro punto común. Una cadena de triángulos es un conjunto de trián-

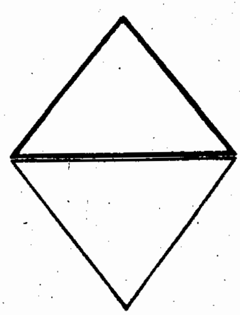

Fig. 14

gulos tal que: 1.º Dos cualesquiera de ellos o son consecutivos o no pueden tener más punto común que un vértice. 2.º Si T y S son dos triángulos no consecutivos de la cadena, existen los triángulos $T_1, \ldots, T_r$ de la cadena, tales que T y T_1 son consecutivos, T_1 y T_2 son consecutivos, ..., T_r y S son consecutivos.

1. Di cuáles son cadenas y cuáles no en la figura 15.

Definición.—Al conjunto de todos los puntos de una cadena de triángulos se le llama *polígono*.

2. Nombra los polígonos de la figura 15.

Si el polígono **P** está formado por la cadena de triángulos T_i, $i = 1 \ldots n$, escribiremos:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

y diremos que los triángulos T_i constituyen una *descomposición* de, polígono **P**.

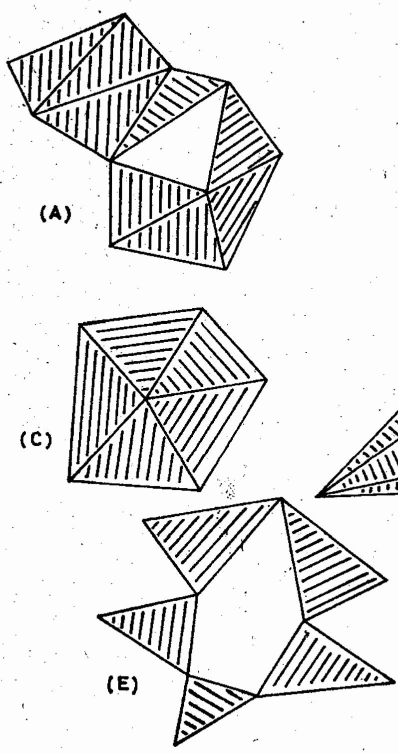

Fig. 15

3. Descompón los polígonos de la figura 15 en triángulos distintos de los de dicha figura.

4. Si tienes dos polígonos, por ejemplo el (B) y (D) de la figura 15, de láminas de plata del mismo espesor, ¿cómo averiguarás si son del mismo precio?

5. Si divides el polígono **P**, de lámina de plata, en dos polígonos **P′** y **P″**, ¿qué relación existe entre el precio de **P** y los precios de **P′** y **P″**?

6. Si suponemos que todos los polígonos son de plata, se pueden clasificar del siguiente modo: dos polígonos **P** y **Q** pertenecen a la misma clase cuando colocados en los platillos de una balanza la equilibramos. Demuestra que de este modo se obtiene, efectivamente, una partición del conjunto de los polígonos.

7. Si dos polígonos, **P** y **Q**, son iguales, esto es, se pueden superponer mediante un movimiento, ¿pertenecen a la misma clase según la clasificación anterior?

8. Si **P** y **Q** se pueden descomponer en el mismo número de triángulos iguales, ¿pertenecen **P** y **Q** a la misma clase según la definición anterior?

Definición.—Dos polígonos **P** y **Q** pertenecen a la misma clase cuando o son iguales (e.e. se pueden superponer) o se pueden descomponer en el mismo número de triángulos iguales. Dos polígonos que pertenecen a la misma clase se llaman *equivalentes*. Si el polígono **P** es equivalente al polígono **Q** escribiremos:

P E Q

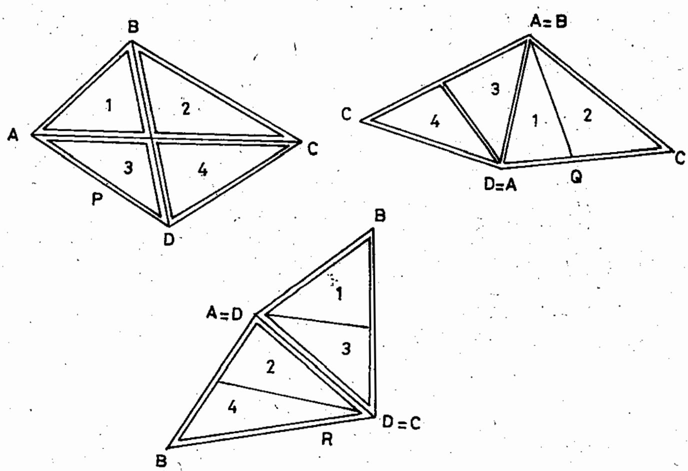

Fig. 16

9. ¿Es todo polígono equivalente a sí mismo?

10. Si **P** es equivalente a **Q**, ¿es **Q** equivalente a **P**?

11. Si **P** es equivalente a **Q** y **Q** es equivalente a **R**, se verifica que **P** es equivalente a **R** (fig. 16).

Demostración.—Sea el polígono **Q** que se descompone en los triángulos ABC y ACD iguales a los triángulos ABC y ADC del polígono **Q**. Por consiguiente,

P E **Q**

Por otra parte, **P** se descompone en los triángulos ABD y BCD iguales a los triángulos ABC y BCD del polígono **R**. Por consiguiente,

P E **R**

Superponiendo en **P** las dos descomposiciones se obtiene la descomposición en los triángulos 1, 2, 3, 4, que son, respectivamente, iguales a los 1, 2, 3, 4 de **Q** y a los 1, 2, 3, 4 de **R**. Por consiguiente, **Q** y **R** quedan descompuestos en los triángulos 1, 2, 3, 4 iguales a los 1, 2, 3, 4, respectivamente; luego **QER**.

A la clase formada por todos los polígonos equivalentes al polígono **P** la representaremos por [**P**].

12. Demuestra que si [**P**] = [**Q**] se verifica que **PEQ**.

13. Demuestra que si **PEQ** es [**P**] = [**Q**].

Dos polígonos son *consecutivos* cuando tienen un lado común y no tienen ningún otro punto común.

14. Dibuja dos triángulos ABC y MNP que no tegan ningún lado del uno igual a un lado del otro y construye dos polígonos, **Q** y **R**, consecutivos tales que **Q** sea equivalente a ABC y **R** equivalente a MNP.

Solución (fig. 17): Toma **R** = MNP y CD = NP. El triángulo BCD llévalo a coincidir con el HPN (B → H, C → P, D → N) y lleva a continuación ADB sobre KPJ. El polígono Q es el NHKJP.

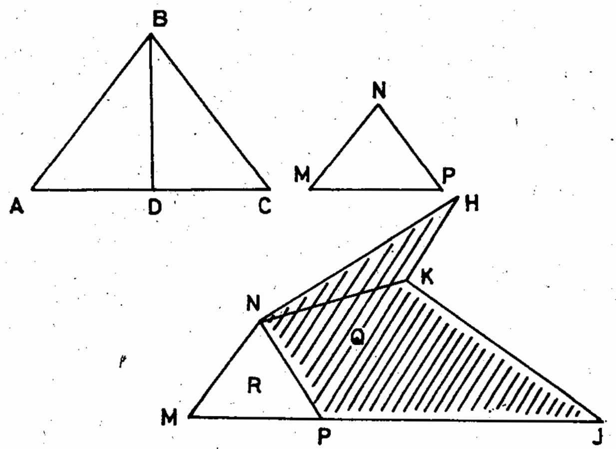

Fig. 17

15. Dadas dos clases de polígonos [P] y [Q] construye un polígono de la clase [P] y otro de la clase [Q] que sean consecutivos. Al polígono formado por todos los triángulos que forman al polígono A y el polígono B cuando A y B son dos polígonos consecutivos le llamaremos polígono A + B.

Definición de adición de clases de polígonos.

Dadas dos clases de polígonos [A] y [B] se llama clase *suma* de las dos clases, y se representa [A] + [B] a la clase [M + N], siendo M y N polígonos consecutivos, tales que M $\in$ [A] y N $\in$ [B].

16. Recorta dos polígonos A y B de papel y construye la clase suma de las clases [A] y [B].

17. Comprueba que la clase suma de dos clases no depende de los polígonos M y N que se emplean para construirla.

18. Demuestra la asociatividad de la adición.

19. Demuestra la conmutatividad de la adición.

20. Construye la clase 3 [A] = [A] + [A] + [A].

Se define:

$$n\,[A] = [A] + \overset{[n}{\dots} + [A]$$

21. Demuestra que:

1) $(m + n)\,[A] = m\,[A] + n\,[A]$.
2) $m\,([A] + [B]) = m\,[A] + m\,[B]$.
3) $(m\,n)\,[A] = m\,(n\,[A])$.

Definición de la sustracción.

Las relaciones $[A] + [B] = [C]$, $[A] = [C] - [B]$, $[B] = [C] - [A]$ son equivalentes.

22. Construye, si es posible, la clase [A] — [B].

23. Enuncia y demuestra las cinco relaciones de la sustracción.

24. Si $m < n$, demuestra que $(m - n)\,[A] = m\,[A] - (n\,[A])$.

25. Si existe [A] — [B] demuestra que:

$$m\,([A] - [B]) = m\,[A] - (n\,[B])$$

Definición de ordenación.

Son equivalentes las relaciones siguientes:

$$[A] < [B] \Rightarrow [A] + [C] = [B]$$

26. Demuestra la transitividad de la relación de ordenación.