Sobre los Números Normales de Borel

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas y Estadística

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Javier Leiva Cuadrado

Director: **Teófilo Valdés Sánchez**

Febrero de 2016

Índice

Resumen

Este trabajo contiene los principales resultados sobre Números Normales de Borel, como son los teoremas sobre su medida en el intervalo unitario y algunas caracterizaciones y definiciones alternativas. Se exponen también los ejemplos más conocidos, curiosidades y resultados necesarios en relación con las Leyes de los Grandes Números y la representación en expansión b-ádica.

Abstract

This work contains the main results about Borel's Normal Numbers, like the theorems of their measure in the unitary interval and some characterizations and alternative definitions. It is also shown the most well-known examples, curiosities and necessary results, in relation with the Laws of Large Numbers and the b-adic expansion representation.

Introducción

El concepto de número normal fue introducido por Borel en 1909, en su artículo "*Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*". Lo hizo bajo el contexto de la búsqueda de un modelo matemático riguroso para el experimento aleatorio del lanzamiento de una moneda. La idea intuitiva que plantea para la definición de los números normales en base 2 consiste en considerarlos como aquellos números cuya parte fraccionaria consta de una secuencia infinita de 0's y 1's que se corresponde con el resultado de la repetición teórica sucesiva de tal experimento infinitas veces. Es decir, podemos dar una primera aproximación al concepto de número normal en base 2 como aquel en cuya parte decimal se suceden 0's y 1's de manera "aleatoria". Si se toma una secuencia suficientemente grande de dígitos de dicha parte decimal se observará que los 0's y los 1's aparecen con la misma frecuencia; tal y como pasaría con el experimento aleatorio mencionado. La definición en base 2 se extiende a cualquier base. Se distinguen además distintos tipos de números normales en función de si esa frecuencia asintótica se verifica para dígitos o para secuencias de dígitos de tamaño arbitrario, y en función también de si se verifica para cualquier base o para una en particular (estas distinciones aparecen ya en la obra de Borel).

La importancia de esta aportación que hizo Borel radica sobre todo en la conexión que establece entre la Teoría de la Probabilidad y la Teoría de la Medida. El principal resultado del artículo citado, y también uno de los principales de este trabajo, es el que prueba que el conjunto de los números normales del intervalo unitario tiene medida de Lebesgue 1. Es decir, Borel probó que casi todo número (en el sentido de Lebesgue) del intervalo $(0, 1]$ es normal en base 2 y lo extendió a los números normales en cualquier base dada e incluso a aquellos que son normales en toda base. Hoy en día es sencillo demostrar esto empleando la Ley Fuerte de lo Grandes Números que publicó Kolmogorov en 1933 (o el Teorema de Khintchine, como haremos aquí). Sin embargo, Borel se vale de lo que después se consideraría un caso particular de esta Ley, el cual construye expresamente para esta demostración. Hasta el momento, el único resultado similar era la Ley Débil de los Grandes Números de Jacob Bernoulli (nombrada así por S. D. Poisson en 1837) publicada de forma póstuma en 1713, en el célebre "Ars Conjectandi".

Pese a que casi todo número en el intervalo unitario es un Número Normal de Borel, existen a día de hoy muy pocos ejemplos explícitos (salvo para números normales simples, cuya construcción es trivial). W. Sierpinski y Alan Turing idearon sendos algoritmos que dan como resultado un número normal en toda base (o, como definiremos después, números absolutamente normales). Sin embargo, su computabilidad es inviable y por lo tanto el interés de los algoritmos es puramente teórico y no constructivo. En los primeros años del presente siglo, los matemáticos argentinos Santiago Figueira y Verónica Becher han trabajado en la mejora de estos algoritmos así como en la construcción de otros más eficientes. Quienes sí proporcionaron varios ejemplos explícitos fueron D. Champernowne [9] y Copeland y Erdös [11]. Bailey y Crandall [1] demostraron además que, bajo ciertas hipótesis muy generales, constantes conocidas tales como π, e ó $\log(2)$ son números normales en base 2. Existe una conjetura muy extendida y, por el momento, empíricamente respaldada, que afirma que todo número trascendental es absolutamente normal.

En cuanto a la estructura del trabajo, está dividido en cuatro capítulos. En el primero se desarrollan las herramientas necesarias para la formalización de los Números Normales de Borel, así como para la demostración de los principales resultados que se verán. Estos resultados son fundamentalmente las Leyes de los Grandes Números y el concepto de expansión diádica para la representación única de los elementos del intervalo unitario. Se termina el capítulo con la definición de los tres tipos de números normales que se consideran en este trabajo: números normales simples en base b, números normales en base b y números absolutamente normales. Para referirnos a los tres conjuntos en general diremos Números Normales de Borel. En el segundo capítulo se tratan los resultados principales acerca de Números Normales de Borel. Esto incluye los Teoremas sobre la medida en el intervalo unitario de cada uno de los tipos que distinguimos y distintas caracterizaciones y propiedades de los mismos.

En el tercer capítulo se exponen distintos ejemplos de cada uno de los tipos de Números Normales de Borel y también se habla acerca de los números que no son normales en ninguna base. Se verá en detalle la demostración de la normalidad en base 10 del número de Champernowne, posiblemente el número normal más conocido.

Por último, en el cuarto capítulo se comentará el llamado "Teorema del mono infinito", su relación con los Números Normales de Borel y alguna otra curiosidad.

Capítulo 1

Resultados previos necesarios

Se enunciarán y demostrarán aquí las distintas versiones de las Leyes de los Grandes Números, así como otras herramientas matemáticas necesarias para abordar los principales resultados acerca de los Números Normales de Borel. Con Números Normales de Borel hacemos referencia a los números normales simples en base b, a los números normales en base b y a los números absolutamente normales; los cuales se definirán a lo largo de este capítulo según se vayan viendo los conceptos necesarios para ello.

En particular, se introducirá el concepto de expansión diádica para la representación única y en base 2 de cada número del intervalo unitario. Veremos después que los dígitos de la parte fraccionaria de estos números pueden ser entendidos como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución $Bernoulli(\frac{1}{2})$. Veremos también que, como consecuencia de esto último, el número de veces que se da un cierto dígito (0 ó 1 en este caso) en las n primeras cifras de un número del intervalo unitario es una variable aleatoria con distribución $Binomial(n, \frac{1}{2})$. Todo esto se generalizará después brevemente a toda base b.

1.1. Leyes de los Grandes Números

Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias sobre dicho espacio. El primer resultado que veremos enuncia las condiciones bajo las cuales se garantiza la convergencia en probabilidad de la sucesión de sumas parciales, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 1. *Decimos que una sucesión de variables aleatorias* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *obedece a la Ley Débil de los Grandes Números si existen dos sucesiones de números reales* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $B_n > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ *tales que*

$$\frac{S_n - A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Teorema 2 (Chebyshev)**.** *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con* $E[X_n] < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Si existe* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ *tal que* $V[X_n] \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Es decir, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *obedece a la Ley Débil de los Grandes Números.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por la desigualdad de Chebyshev,

$$P\left(\left|\frac{S_n - E[S_n]}{n}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V[S_n]}{n^2\epsilon^2} \leq \frac{\alpha}{n\epsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

lo cual prueba la convergencia en probabilidad. □

En el siguiente corolario se ve una consecuencia trivial, pero muy útil, del teorema anterior.

Corolario 3. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de media* μ *y varianza* σ^2. *Entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$

Para probar lo mismo en convergencia casi segura necesitamos el siguiente lema.

Lema 4. *(Borel - Cantelli) Sean* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de sucesos. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

entonces

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = 0.$$

Demostración. Puesto que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq n_0$,

$$\sum_n P\left(A_n\right) < \epsilon \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} P(A_k) = 0.$$

Entonces,

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} P\left(A_k\right) = 0.$$

□

El siguiente resultado se debe al matemático polaco Aleksander Rajchman (1890 – 1940) y supone una mejora sustancial frente a los anteriores, pues garantiza lo mismo en convergencia casi segura. La demostración que dio para ello tiene también especial interés al introducir un método simple y muy útil consistente en extender a toda una sucesión un resultado que es válido a priori para tan sólo una subsucesión suya.

Definición 5. *Decimos que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obedece a la Ley Fuerte de los Grandes Números si existen dos sucesiones de números reales $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $B_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ tales que*

$$\frac{S_n - A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0.$$

Teorema 6 (Rajchman)**.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2,*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0. \tag{1}$$

Es decir, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obedece a la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $E[X_i] = 0,\ \forall i \in \mathbb{N}$. Entonces las $X_i's$ son ortogonales. Esto es,

$$E[X_i X_j] = 0,\ \forall i \neq j.$$

Puesto que

$$\sigma^2\left(S_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2\left(X_i\right),$$

se tiene que

$$E[S_n^2] = Mn,$$

donde M es la cota para los momentos de orden 2. Por la desigualdad de Chebyshev, $\forall \epsilon > 0$,

$$P\left(|S_n| > n\epsilon\right) \leq \frac{Mn}{n^2\epsilon^2} = \frac{M}{n\epsilon^2}.$$

Si sumamos en n, la serie que resulta del término de la derecha diverge; pero si sumamos sobre la subsucesión dada por los términos n^2, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|S_{n^2}| > n^2\epsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2\epsilon^2} < \infty.$$

Por el Teorema de Borel-Cantelli,

$$P\left(\limsup_n \{|S_{n^2}| > n^2\epsilon\}\right) = 0;$$

y puesto que

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0 \iff \forall \epsilon > 0,\ P\left(\{\limsup_n |X_n| > \epsilon\}\right) = 0,$$

tenemos que

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow{c.s.} 0. \tag{2}$$

Con esto hemos probado el resultado para una subsucesión. Veamos ahora el método que introdujo Rajchman para extenderlo a toda la sucesión.

$\forall n \geq 1$,

$$D_n = \max_{n^2 \leq k < (n+1)^2} |S_k - S_{n^2}|.$$

Tenemos entonces que

$$E[D_n^2] \leq 2nE[|S_{(n+1)^2} - S_{n^2}|^2] = 2n \sum_{i=n^2+1}^{(n+1)^2} \sigma^2(X_i) \leq 4n^2 M,$$

y por la desigualdad de Chebyshev,

$$P\left(D_n > n^2\epsilon\right) \leq \frac{4M}{\epsilon^2 n^2}.$$

Procediendo como antes,

$$\frac{D_n}{n^2} \xrightarrow{c.s.} 0. \tag{3}$$

Por último, (2) y (3) implican (1), ya que

$$\frac{|S_k|}{k} \leq \frac{|S_n^2| + D_n}{n^2}$$

para $n^2 \leq k \leq (n+1)^2$. □

La hipótesis que el Teorema de Chebyshev exige para garantizar que una sucesión de variables aleatorias independientes obedezca a la Ley Débil de los Grandes Números es que los momentos de orden 2 de dichas variables tengan una cota finita común. El siguiente resultado, debido a Khintchine, establece lo mismo exigiendo simplemente que se verifique la finitud de la media y que las variables aleatorias de la sucesión estén idénticamente distribuidas.

Teorema 7 (Khintchine)**.** *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de media finita μ, entonces*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$

Demostración. Sea $\delta > 0$. Se definen

$$Y_k = \begin{cases} X_k, & \text{si} \quad |X_k| \leq n\delta \\ 0, & \text{si} \quad |X_k| > n\delta \end{cases}$$

$$Z_k = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad |X_k| \leq n\delta \\ X_k, & \text{si} \quad |X_k| > n\delta \end{cases}$$

Se tiene entonces que $X_k = Y_k + Z_k$, $\forall k$ con $1 \leq k \leq n$. Además,

$$\mu_k = E[Y_k] = \int_{-n\delta}^{n\delta} x dF(x) < \infty,$$

luego $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$; y

$$\begin{aligned} V[Y_k] = E[Y_k^2] - \mu_k^2 &= \int_{-n\delta}^{n\delta} x^2 dF(x) - \mu_k^2 \leq \int_{-n\delta}^{n\delta} x^2 dF(x) \\ &= \int_{-n\delta}^{n} |x||x| dF(x) \leq n\delta \int_{-n\delta}^{n\delta} |x| dF(x) \leq n\delta \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) \leq nb, \end{aligned}$$

donde $b = E[|X|] < \infty$.

Sea la variable aleatoria

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n},$$

de media $E[\bar{Y}_n] = \mu_n$.

Como las variables X_k, $k = 1, ..., n$ son independientes, lo son las variables Y_k, $k = 1, ..., n$. Entonces

$$V[\bar{Y}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V[Y_k] \leq \frac{n}{n^2} n\delta b = \delta b;$$

de donde, $\forall \epsilon > 0$,

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n - \mu_n| > \epsilon\right\}\right) \leq \frac{V\left(\bar{Y}_n\right)}{\epsilon^2} \leq \frac{\delta b}{\epsilon^2}.$$

Tomando n suficientemente grande se tiene que

$$|\mu_n - \mu| < \epsilon. \tag{4}$$

Sea $\omega_0 \in \left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n(\omega) - \mu| > 2\epsilon\right\}$ con n suficientemente grande. Entonces

$$|\bar{Y}_n(\omega_0) - \mu_n + \mu_n - \mu| > 2\epsilon,$$

con lo que

$$|\bar{Y}_n(\omega_0) - \mu_n| + |\mu_n - \mu| > 2\epsilon.$$

Aplicando (4) se tiene que $|\bar{Y}_n(\omega_0) - \mu_n| > \epsilon$, lo cual significa que $\omega_0 \in \left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n(\omega) - \mu_n| > \epsilon\right\}$. Es decir,

$$\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n(\omega) - \mu| > 2\epsilon\right\} \subset \left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n(\omega) - \mu_n| > \epsilon\right\}$$

y por lo tanto

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n - \mu| > 2\epsilon\right\}\right) \leq P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n(\omega) - \mu_n| > \epsilon\right\}\right) \leq \frac{\delta b}{\epsilon^2}$$

para n suficientemente grande.

Sea ahora $\bar{Z}_n = \frac{Z_1,\ldots,Z_n}{n}$. Como $\bar{X}_n = \bar{Y}_n + \bar{Z}_n$, $\bar{X}_n - \mu = \bar{Y}_n - \mu + \bar{Z}_n$; y entonces

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{X}_n - \mu| > 2\epsilon\right\}\right) \leq P\big(&\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Y}_n - \mu| > 2\epsilon\right\} \\ &+ P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Z}_n| \neq 0\right\}\right) \\ \leq \frac{\delta b}{\epsilon^2} &+ P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Z}_n| \neq 0\right\}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Además,

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{Z}_n| \neq 0\right\}\right) &= P\left(\left\{\omega \in \Omega : \bar{Z}_n| \neq 0\right\}\right) \\ &= P\left(\left\{\omega \in \Omega : Z_1(\omega) + \ldots + Z_n(\omega) \neq 0\right\}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} P\left(\left\{\omega \in \Omega : Z_k(\omega) \neq 0\right\}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Cada sumando de esta última expresión es

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\omega \in \Omega : Z_k(\omega) \neq 0\right\}\right) &= \int_{|x| \geq n\delta} dF(x) = \int_{|x| \geq n\delta} \frac{|x|}{|x|} dF(x) \\ &\leq \frac{1}{n\delta} \int_{|x| \geq n\delta} |x| dF(x) \end{aligned}$$

y $E[|X|] < \infty$; con lo que $\int_{|x|\delta} |x| dF(x)$ se puede hacer menor que δ^2 para n suficientemente grande. Así,

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : Z_k(\omega) \neq 0\right\}\right) \leq \frac{\delta^2}{n\delta} = \frac{\delta}{n}$$

con lo que, por (6),

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : Z_k(\omega) \neq 0\right\}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{n} = \frac{n\delta}{n} = \delta.$$

Sustituyendo en (5),

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{X}_n - \mu| > 2\epsilon\right\}\right) \leq \frac{\delta b}{\epsilon^2} + \delta$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left\{\omega \in \Omega : |\bar{X}_n - \mu| > 2\epsilon\right\}\right) = 0;$$

es decir,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \mu.$$

□

1.2. Concepto de expansión diádica

Una vez vistos los principales resultados sobre las Leyes de los Grandes Números pasamos a formalizar el concepto de expansión diádica (en base 2), que será más tarde generalizado al de expansión b-ádica (en cualquier base $b \geq 2$). Esto nos permitirá representar la parte decimal de cada número $\omega \in \Omega$ como una secuencia infinita de elementos del conjunto $\{0, 1, ..., b-1\}$. La finalidad de esto, como veremos, es caracterizar cada uno de los tipos de Números Normales de Borel atendiendo a si los posibles valores que puede tomar cada dígito de su expansión b-ádica presentan o no una frecuencia asintótica igual y a si esto ocurre en alguna base concreta o en toda base b.

De aquí en adelante se trabajará sobre el espacio de probabilidad $(\Omega = (0,1], \mathscr{A} = \mathbb{B}, P = \lambda)$, donde $\mathbb{B}$ es la σ-álgebra de Borel sobre Ω y λ la medida de Lebesgue.

Definición 8. *Dado $i \in \{1, 2, ...\}$, para cada $j \in \{1, 2, ..., 2^i\}$ se define el intervalo diádico j-ésimo de orden i como*

$$I = \left(\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i} \right] \subset \Omega.$$

Los intervalos diádicos tienen entonces longitud $\frac{1}{2^i}$. Además, para cada $i \in \{1, 2, ...\}$, la clase de intervalos diádicos $\{I_{i1},\ I_{i2},\ ...,\ I_{i2^i}\}$ constituye una partición de Ω.

Consideremos ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, la función $d_i : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, que asigna a cada $\omega \in \Omega$ el valor 0 si ω pertenece a la unión de los intervalos diádicos I_{ij}, en los que j es un número impar de $\{1, 2, ..., 2^i\}$, y el valor 1 si ω pertenece a la unión de los intervalos diádicos I_{ij} en los que j es un número par de $\{1, 2, ..., 2^i\}$. Así, d_1 (ω toma el valor 0 si $\omega \in I_{11}$ y el valor 1 si $\omega \in I_{12}$.

Una manera de expresar esto de forma más rigurosa es la siguiente:

Definición 9. *Sea*

$$\begin{array}{cccc} F: & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & \omega & \longmapsto & F(\omega) = \begin{cases} 2\omega & , \text{ si } \omega \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2\omega - 1 & , \text{ si } \omega \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array} .$$

Entonces,

$$\begin{array}{rccl} d_1: & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & \omega & \longmapsto & d_1(\omega) = \begin{cases} 0 & , \, si\ \omega \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1 & , \, si\ \omega \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} , \end{array}$$

y para cada $i \in \mathbb{N}$*,*

$$\begin{array}{rccl} d_i: & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & \omega & \longmapsto & d_i(\omega) = d_1\left(F^{i-1}(\omega)\right). \end{array}$$

Veamos en detalle con un ejemplo cómo funciona la formalización que acabamos de definir. Consideremos el número $\omega = \frac{3}{4}$ y calculemos los tres primeros dígitos de su expansión diádica. Los intervalos diádicos de orden i con $i = 1, 2, 3$ son los que aparecen representados en el siguiente diagrama:

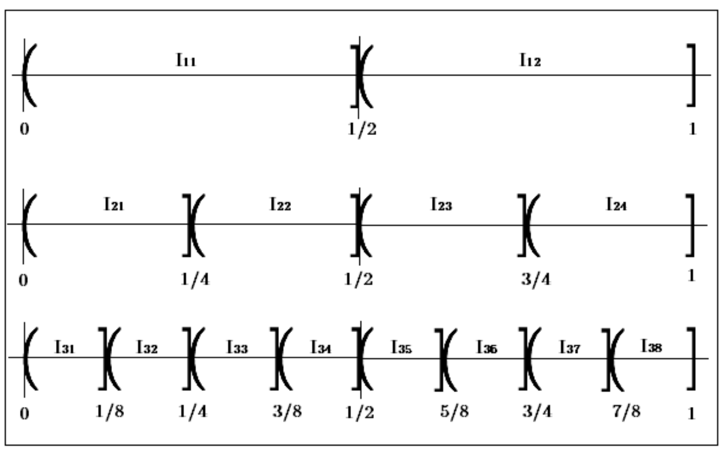

Figura 1: $\omega = \frac{3}{4}$ se sitúa en la segunda mitad de $(0, 1]$, en la primera mitad de $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ y en la segunda de $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

Como se ve fácilmente, $d_1\left(\frac{3}{4}\right) = 1$, $d_2\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ y $d_3\left(\frac{3}{4}\right) = 1$. Si utilizamos la Definición 9,

$$d_1\left(\frac{3}{4}\right) = 1.$$

Que d_2 tome el valor 0 ó 1 depende únicamente de que ω esté en la primera o en la segunda mitad del intervalo diádico de orden 1 al que pertenezca (da igual si este es I_{11} ó I_{12}). De modo más general, dado $i \in \mathbb{N}$, que d_i tome el valor 0 ó 1 sólo depende de que ω esté en la primera o a la segunda mitad del intervalo diádico de orden $i-1$ al que pertenezca. Esta idea es la que motiva la definición de la función F, pues $F(\omega)$ pertenece a la primera o la segunda mitad del intervalo $(0,1]$ en función de si ω pertenece a la primera o a la segunda mitad del intervalo diádico de orden 1 que corresponda (en este caso $I_{12} = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ (ver la Figura 2).

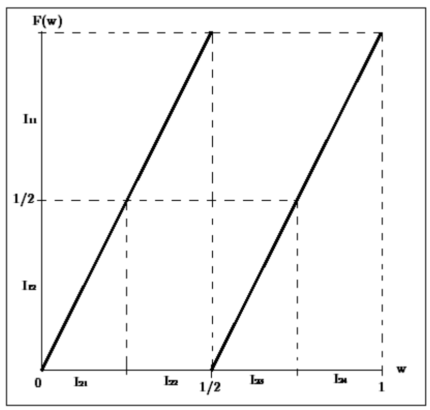

Figura 2: F transforma los intervalos I_{21} e I_{23} en I_{11} y los intervalos I_{22} e I_{24} en I_{12}, para poder así aplicar d_1.

De ahí que

$$d_2(\omega) = d_1(F(\omega)),$$

con lo que

$$d_2\left(\frac{3}{4}\right) = d_1\left(F\left(\frac{3}{4}\right)\right) = d_1\left(F\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0.$$

Para calcular d_i, aplicamos F $i-1$ veces sobre ω, lo que consigue reescalarlo hasta que ocupe en $(0,1]$ la posición relativa que ocupaba en el intervalo diádico de orden $i-1$ al que pertenece. Dicha posición es la que determina lo que vale d_i, con lo que

$$d_3\left(\frac{3}{4}\right) = d_1\left(F^2\left(\frac{3}{4}\right)\right) = d_1\left(F\left(F\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right) = d_1\left(F\left(\frac{1}{2}\right)\right) = d_1(1) = 1.$$

Proposición 10. *De acuerdo con la Definición 9, para las funciones d_i, $i \in \mathbb{N}$, se tiene que para cada $\omega \in \Omega$,*

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(\omega)}{2^i}.$$

Demostración. Sea $\omega \in \Omega$. Entonces,

$$F^2(\omega) = F(F(\omega)) = \begin{cases} F(2\omega) & \text{, si } \omega \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ F(2\omega - 1) & \text{, si } \omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

donde

$$F(2\omega) = \begin{cases} 2(2\omega) & \text{, si } 2\omega \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \omega \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \\ 2(2\omega) - 1 & \text{, si } 2\omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow \omega \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

y

$$F(2\omega - 1) = \begin{cases} 2(2\omega - 1) & \text{, si } 2\omega - 1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \omega \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 2(2\omega - 1) - 1 & \text{, si } 2\omega - 1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow \omega \in \left(\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Se puede probar por inducción sobre n que para $k = 0, 1, ..., 2^n - 1$,

$$F^n(\omega) = 2^n\omega - k \Leftrightarrow \frac{k}{2^n} < \omega \leq \frac{k+1}{2^n} \Leftrightarrow k < 2^n\omega \leq k + 1 \Leftrightarrow k = \lceil 2^n\omega \rceil - 1,$$

con lo que

$$F^n(\omega) = 2^n\omega - \lceil 2^n\omega \rceil + 1. \tag{7}$$

Veamos ahora, también por inducción, que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \omega - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(\omega)}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Para cada $\omega \in \Omega$,

$$0 < \omega - \frac{d_1(\omega)}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Supongamos cierto que

$$0 < \omega - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(\omega)}{2^k} \leq \frac{1}{2^n} \tag{8}$$

y probemos que, de ser así, se cumple para $n + 1$:

Si se verifica (2), entonces

$$0 < 2^n\omega - \sum_{k=1}^{n} d_k(w)2^{n-k} \leq 1. \tag{9}$$

Sea

$$m = \sum_{k=1}^{n} d_k(\omega) 2^{n-k}.$$

$d_k(\omega) \in \{0, 1\}$, con lo que m es un entero. Además, despejando (3) tenemos

$$m < 2^n \omega \leq m + 1, \tag{10}$$

luego

$$m + 1 = \lceil 2^n \omega \rceil \leq m + 1$$

y

$$2^n \omega - m = 2^n \omega - \lceil 2^n \omega \rceil + 1. \tag{11}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} d_{n+1}(\omega) = d_1(F^n(\omega)) &= d_1(2^n \omega - \lceil 2^n \omega \rceil + 1) \\ &= d_1(2^n \omega - m) = \begin{cases} 1 & , \text{si } 2^n \omega - m > \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{si } 2^n \omega - m \leq \frac{1}{2} \end{cases} , \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} 2^n \omega - m > \frac{1}{2} &\Leftrightarrow w - \frac{m}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\Leftrightarrow w - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(\omega)}{2^k} > \frac{1}{2^n} \\ &\Leftrightarrow w - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_k(\omega)}{2^k} > 0, \end{aligned}$$

por lo que, en todos los casos,

$$0 < \omega - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d_k(\omega)}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \tag{12}$$

(2)$\Rightarrow$ (6) y, por inducción, (2) se da $\forall n \in \mathbb{N}$. Por último, como $\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$,

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\omega)}{2^k}.$$

$\square$

Una vez probado esto tenemos que cada $\omega \in \Omega$ puede ser representado en base 2 de la forma

$$0{,}d_1(\omega)d_2(\omega)...d_n(\omega)... \tag{13}$$

A esta forma de representar un número, consistente en un 0, una coma y una secuencia infinita de ceros y unos como parte decimal, la llamaremos expansión diádica de ω, y a cada $d_i(\omega)$ el i-ésimo dígito de la expansión diádica de ω.

Existe una cantidad numerable de elementos de Ω que poseen dos representaciones distintas pero equivalentes en base 2. Estos son los pertenecientes al conjunto

$$D = \left\{\omega \in \Omega : \omega = \frac{p}{2^k},\ k \in \mathbb{Z},\ k > 0,\ p \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ puede representarse en base 2 como

$$0{,}10000...\ \text{ó}\ 0{,}01111..., \tag{14}$$

del mismo modo que en base 10 puede ser representado como 0,50000... ó 0,49999... . La principal ventaja de la representación en expansión diádica que acabamos de ver es que es única. En particular, en los elementos de D se toma la opción en la que no existe un dígito a partir del cual todos son 0. Por ejemplo, si calculamos la expansión diádica de $\frac{1}{2}$ por el método explicado antes,

$$\begin{aligned}
d_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 0\\
d_2\left(\frac{1}{2}\right) &= d_1\left(F\left(\frac{1}{2}\right)\right) = d_1(1) = 1\\
d_3\left(\frac{1}{2}\right) &= d_1\left(F^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = d_1\left(F\left(F\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = d_1(F(1)) = 1\\
&\vdots\\
d_n\left(\frac{1}{2}\right) &= 1,\ \forall n \geq 2,
\end{aligned}$$

con lo que, efectivamente, estamos tomando la segunda opción de (14).

Veamos cómo relacionar cada dígito de la expansión diádica de un $\omega \in \Omega$ con experimentos aleatorios de tipo Bernoulli.

Definición 11. *Sean $a \in \{0,1\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\omega \in \Omega$ se define $S_{a,n}(\omega)$ como el número de veces que se da el dígito a entre los n primeros dígitos de la expansión diádica de ω. Esto es,*

$$\begin{array}{rccl} S_{a,n}: & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & \omega & \longmapsto & S_{a,n}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[d_i(\omega)=a]}. \end{array}$$

Proposición 12. *Para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $a \in \{0,1\}$, las funciones $\left\{1_{[d_i=a]}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \lambda)$, siguiendo una distribución Bernoulli $\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Demostración. El hecho de que, para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $a \in \{0,1\}$, la función $1_{[d_i=a]}$ siga una distribución *Bernoulli* $\left(\frac{1}{2}\right)$ se extrae del siguiente razonamiento:

Para cada $i \in \mathbb{N}$, $d_i(\omega) = 0$ si $d_i(\omega) \in I_{ij}$ para algún j impar de $\{1,2,...,2^i\}$; y $d_i(\omega) = 1$ si $d_i(\omega) \in I_{ij}$ para algún j par de $\{1,2,...,2^i\}$. Entonces $d_i(\omega)$ toma el valor 0 en la mitad del intervalo $\Omega = (0,1]$, y 1 en la otra mitad, sean cuales sean los valores de i y a. Por tanto, puesto que P es la medida de Lebesgue, $\forall a \in \{0,1\}$ y $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$P(1_{[d_i=a]}) = \frac{1}{2}.$$

Veamos ahora que las variables aleatorias de la sucesión $\left\{1_{[d_i=a_i]}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ son además independientes. Sean $n_1, n_2, ..., n_k$ con $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ y $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k} \in \{0,1\}$. Sabemos que

$$d_{n_k} = 0, \text{ si } \omega \in I_{n_k 1} \cup I_{n_k 3} \cup I_{n_k 5} \cup \cdots \cup I_{n_k (2^{n_k}-1)}$$

y

$$d_{n_k} = 1, \text{ si } \omega \in I_{n_k 2} \cup I_{n_k 4} \cup I_{n_k 6} \cup \cdots \cup I_{n_k (2^{n_k})}.$$

Luego sea $a_{n_k} = 0$ ó $a_{n_k} = 1$, existen $\frac{2^{n_k}}{2} = 2^{n_k-1}$ intervalos de longitud $\frac{1}{2^{n_k}}$ en los que se satisface $d_{n_k}(\omega) = a_{n_k}$. Pero solamente en la mitad de cada uno de esos intervalos se da además $d_{n_{k-1}}(\omega) = a_{n_{k-1}}$; es decir, existen solamente 2^{n_k-2} intervalos en los que se verifican al mismo tiempo $d_{n_k}(\omega) = a_{n_k}$ y $d_{n_{k-1}}(\omega) = a_{n_{k-1}}$, y tales intervalos tienen longitud $\frac{1}{2^{n_k}}$. Sólo en la mitad de ellos se da además $d_{n_{k-2}}(\omega) = a_{n_{k-2}}$; y así sucesivamente. De modo que $d_{n_1}(\omega) = a_{n_1}, d_{n_2}(\omega) = a_{n_2}, ..., d_{n_k}(\omega) = a_{n_k}$ se da únicamente en 2^{n_k-k} intervalos de longitud $\frac{1}{2^{n_k}}$, y por lo tanto

$$P(d_{n_1} = a_{n_1},\ d_{n_2} = a_{n_2},\ ...,\ d_{n_k} = a_{n_k}) = 2^{n_k-k}\frac{1}{2^{n_k}} = \frac{1}{2^k} = \prod_{i=1}^{k} P(d_{n_i} = a_{n_i}).$$

Entonces $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y, puesto que $d_i = a_i$ si, y sólo si, $1_{[d_i=a_i]} = 1$, $\{1_{d_i=a_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ también lo es. □

Corolario 13. *Para cada dígito $a \in \{0,1\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_{a,n}$ es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ con distribución Binomial$(n, \frac{1}{2})$. Es decir,*

$$P(S_{a,n} = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Demostración. Por definición de $S_{a,n}$ y por la proposición anterior. □

Llegamos con esto a la definición del primer tipo de Número Normal de Borel.

Definición 14. *Decimos que un número $\omega \in \Omega$ es normal simple en base 2 si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{a,n}(\omega)}{n} = \frac{1}{2},\ \forall a \in \{0,1\};$$

es decir, si el 0 y el 1 aparecen con la misma frecuencia asintótica en su expansión diádica.

Llegado a este punto, en el que hemos definido el concepto de número normal simple para una base en concreto, cabe preguntarse por la generalización del concepto a cualquier base $b \geq 2$.

1.3. Generalización a cualquier base b

Empecemos por extender los intervalos diádicos a cualquier base para poder así definir sobre ellos la expansión b-ádica de cada número $\omega \in \Omega$.

Definición 15. *Sean $i, b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$ y $j \in \{1, 2, ..., b^i\}$. Llamamos intervalo b-ádico j-ésimo de orden i al intervalo*

$$I_{ij}^b = \left(\frac{j-1}{b^i}, \frac{j}{b^i} \right] \subset \Omega$$

La longitud de cada intervalo b-ádico es $\frac{1}{b^i}$. Además, para cada $i \in \mathbb{N}$, y cada base $b \geq 2$, la clase de intervalos $\{I_{i1}^b, I_{i2}^b, ..., I_{ib^i}^b\}$ es una partición de Ω:

$$\bigcup_{j=1}^{b^i} I_{ij}^b = I_{i1}^b \cup I_{i2}^b \cup \cdots \cup I_{i2^i}^b = \left(0, \frac{1}{b^i}\right] \cup \left(\frac{1}{b^i}, \frac{2}{b^i}\right] \cup \cdots \cup \left(\frac{b^{i-1}}{b^i}, 1\right] = (0, 1] = \Omega$$

y

$$\left(\frac{j-1}{b^i}, \frac{j}{b^i} \right] \cap \left(\frac{(j+1)-1}{b^i}, \frac{j+1}{b^i} \right] = \varnothing, \ \forall j \in \{1, 2, ..., b^i - 1\}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, las funciones d_i que indican a qué intervalo diádico pertenece cada $\omega \in \Omega$ pueden generalizarse a cualquier base $b \geq 2$, con lo que tendríamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
d_i^b(\omega) &= 0 \quad \text{si} \ \ \omega \in I_{i1}^b \cup I_{i(b+1)}^b \cup I_{i(2b+1)}^b \cup \cdots \cup I_{i(b^i-b+1)}^b \\
d_i^b(\omega) &= 1 \quad \text{si} \ \ \omega \in I_{i2}^b \cup I_{i(b+2)}^b \cup I_{i(2b+2)}^b \cup \cdots \cup I_{i(b^i-b+2)}^b \\
&\ \vdots \\
d_i^b(\omega) &= b-1 \ \ \text{si} \ \ \omega \in I_{ib}^b \cup I_{i(2b)}^b \cup I_{i(3b)}^b \cup \cdots \cup I_{ib^i}^b;
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{array}{cccc}
d_1^b : & \Omega & \longrightarrow & \{0, 1, ..., b-1\} \\
& \omega & \longmapsto & d_1^b(\omega) = \begin{cases} 0 & , \text{si } \omega \in \left(0, \frac{1}{b}\right] \\ 1 & , \text{si } \omega \in \left(\frac{1}{b}, \frac{2}{b}\right] \\ \vdots & \qquad \vdots \\ b-1 & , \text{si } \omega \in \left(\frac{b-1}{b}, 1\right] \end{cases}
\end{array},$$

y

$$d_k^b(\omega) = d_1^b(F^{k-1}(\omega)), \ k \geq 2,$$

con

$$F(\omega) = \begin{cases} b\omega & \text{, si } \omega \in \left(0, \frac{1}{b}\right] \\ b\omega - 1 & \text{, si } \omega \in \left(\frac{1}{b}, \frac{2}{b}\right] \\ \vdots & \quad \vdots \\ b\omega - (b-1) & \text{, si } \omega \in \left(\frac{b-1}{b}, 1\right] \end{cases},$$

pudiendo entonces expresar cada $\omega \in \Omega$ como la suma infinita

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i^b(w)}{b^i}, \tag{15}$$

que da lugar a la expansión b-ádica de ω, formada por un 0 seguido de la secuencia infinita de elementos de $\{0, 1, ..., b-1\}$ que determinan los sucesivos intervalos b-ádicos a los que pertenece; esto es, el número

$$0{,}d_1^b(\omega)d_2^b(\omega)...d_n^b(\omega)... \in \Omega.$$

La demostración de la igualdad (15) es completamente análoga a la dada para el caso de $b = 2$. Tan sólo hay que tener en cuenta que aquí las funciones d_i^b pueden tomar b valores diferentes en lugar de 2.

Siguiendo con la generalización de lo visto en base 2, veamos cómo expresar $S_{a,n}$ en cualquier base $b \geq 2$ y probemos después que se trata de una variable aleatoria con distribución $Binomial(n, \frac{1}{b})$.

Definición 16. *Sean $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$, $a \in \{0, 1, ..., b-1\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\omega \in \Omega$ se define $S_{a,n}^b(\omega)$ como el número de veces que se da el dígito a entre los n primeros dígitos de la expansión b-ádica de ω. Esto es,*

$$\begin{array}{rccl} S_{a,n}^b: & \Omega & \longrightarrow & \{0, 1, ..., b-1\} \\ & \omega & \longmapsto & S_{a,n}^b(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{[d_i^b(\omega)=a]}. \end{array}$$

Pasemos ahora a probar que $\{1_{d_i^b=a}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias idénticamente distribuidas.

Proposición 17. *Sea una base $b \geq 2$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $a \in \{0, 1, ..., b-1\}$, las funciones $\left\{1_{[d_i^b=a]}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, \lambda)$, siguiendo una distribución Bernoulli $\left(\frac{1}{b}\right)$.*

Demostración. Fijado $b \geq 2$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $a \in \{0, 1, ..., b-1\}$, la función $1_{[d_i^b = a]}$ sigue una distribución *Bernoulli* $\left(\frac{1}{b}\right)$:

$$
\begin{aligned}
&d_i^b(\omega) = 0 \text{ si } \ d_i^b(\omega) \in I_{ij}^b \ \text{ para algún } j \equiv 1 \pmod{b} \ \text{ con } j \in \{1, 2, ..., 2^i\} \\
&d_i^b(\omega) = 1 \text{ si } \ d_i^b(\omega) \in I_{ij}^b \ \text{ para algún } j \equiv 2 \pmod{b} \ \text{ con } j \in \{1, 2, ..., 2^i\} \\
&\qquad \vdots \\
&d_i^b(\omega) = b-1 \text{ si } \ d_i^b(\omega) \in I_{ij}^b \ \text{ para algún } j \equiv 0 \pmod{b} \ \text{ con } j \in \{1, 2, ..., 2^i\}
\end{aligned}
$$

Entonces, para cada $a \in \{0, 1, ..., b-1\}$, $d_i^b(\omega)$ toma el valor a en 1 de cada b intervalos b-ádicos de orden i y, puesto que $P(\Omega) = 1$,

$$P(1_{[d_i^b = a]}) = \frac{1}{b}.$$

Ver que las variables aleatorias de la sucesión $\left\{1_{[d_i^b = a_i]}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ son variables aleatorias independientes es de nuevo análogo a lo visto en base 2, con la única salvedad de que aquí cada intervalo b-ádico de orden i tiene una longitud b veces menor que cada uno de orden $i-1$, y no la mitad. □

Por último, llegamos a la generalización a cualquier base del Corolario 13.

Corolario 18. *Dada una base $b \geq 2$, para cada dígito $a \in \{0, 1, ..., b-1\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_{a,n}^b$ es una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ con distribución Binomial$(n, \frac{1}{b})$. Es decir,*

$$P(S_{a,n}^b = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{b}\right)^k \left(\frac{b-1}{b}\right)^{n-k}.$$

Demostración. Por definición y por la Proposición 17 , $S_{a,n}^b$ es suma de variables aleatorias con distribución *Bernoulli*$(\frac{1}{b})$. □

Ya estamos en disposición de introducir los números normales simples en base $b \geq 2$.

Definición 19. *Sea $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. Decimos que un número $\omega \in \Omega$ es normal simple en base b si*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_{a,n}^b(\omega)}{n} = \frac{1}{b}, \ \forall a \in \{0, 1, ..., b-1\};$$

es decir, si cada uno de los posibles valores de a aparece con la misma frecuencia asintótica en su expansión b-ádica.

Hasta ahora sólo hemos considerado frecuencias asintóticas de aparición de dígitos. En la siguiente definición pasamos a considerar secuencias de dígitos.

Definición 20. *Sea* $b \in \mathbb{N}$ *con* $b \geq 2$*. Decimos que un número* $\omega \in \Omega$ *es normal en base* b *si cada secuencia* σ *formada por* k *dígitos de* $\{0, 1, ..., b-1\}$ *verifica*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S^b_{\sigma,n}(\omega)}{n} = \frac{1}{b^k};$$

es decir, si todas las posibles secuencias formadas por k *dígitos de* $\{0, 1, ..., b-1\}$ *aparecen con la misma frecuencia asintótica en su expansión b-ádica.*

Se trata entonces de números en los que, en cierta base, la probabilidad de hallar una determinada secuencia en los n primeros dígitos depende únicamente de la longitud de la misma.

Por último, llegamos a la definición del tipo más restringido de números normales de Borel:

Definición 21. *Decimos que un número* $\omega \in \Omega$ *es absolutamente normal si es normal en base* b *para cada* $b \in \mathbb{N}$ *con* $b \geq 2$*.*

Capítulo 2

Resultados sobre Números Normales de Borel

En este capítulo se verán los principales resultados sobre Números Normales de Borel. En concreto veremos resultados sobre la medida de los distintos conjuntos de Números Normales de Borel en Ω, proposiciones que los relacionan entre sí, propiedades de densidad y no-numerabilidad de dichos conjuntos y de sus complementarios y caracterizaciones de los mismos.

2.1. Medida del conjunto de los números normales simples en base b

El siguiente Teorema fue enunciado y demostrado por Borel en 1909. Sin embargo, la versión definitiva de la Ley Fuerte de los Grandes Números fue dada por Kolmogorov en sus Fundamentos de Probabilidad, en 1933, por lo que la demostración dada por Borel no era tan sencilla y empleaba directamente la definición de conjunto de medida cero, probando así un caso particular de dicha Ley Fuerte.

Teorema 22 (Borel)**.** *Sea $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. Todo número $\omega \in \Omega$ es normal simple en base b, excepto los pertenecientes a un subconjunto $N^c \subset \Omega$ de medida cero. Es decir,*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{S^b_{a,n}(\omega)}{n} = \frac{1}{b}\right\}\right) = 1, \ \forall a \in \{0, 1, ..., b-1\}.$$

Demostración. Por la Proposición 17, las variables aleatorias $\left\{1_{[d_i^b=a_i]}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ son independientes y siguen una distribución $Bernoulli(b)$. Por el Corolario 18, las variables aleatorias $\left\{S_{a,n}^b\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ siguen una distribución $Binomial(n,b)$, $\forall a \in \{0,1,...,b-1\}$. Entonces $E[1_{[d_i^b=a_i]}] = \frac{1}{b} < \infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$, y por la Ley Fuerte de los Grandes Números,

$$\frac{S_{a,n}^b}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} \frac{1}{b};$$

o lo que es lo mismo,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_{a,n}^b}{n} = \frac{1}{b}\right) = 1.$$

□

2.2. Caracterizaciones de los números normales en base b

Una vez probado que casi todo número $\omega \in \Omega$ es normal simple en cualquier base b dada, nuestro objetivo es ir un paso más allá y demostrar que, dada una base $b \geq 2$, casi todo número $\omega \in \Omega$ es, de hecho, normal en base b. Para probarlo necesitamos primero establecer distintas caracterizaciones de los números normales en base b.

Proposición 23. *Sea $\omega \in \Omega$ un número normal simple en base b^n, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces ω es normal simple en base b.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\omega \in \Omega$ es normal simple en base b^n. Por hipótesis tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_{a,N}^{b^n}(\omega)}{N} = \frac{1}{b^n},\ \forall a \in \{0,1,...,b^n-1\};$$

y queremos ver que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_{\alpha,N}^{b}(\omega)}{N} = \frac{1}{b},\ \forall \alpha \in \{0,1,...,b-1\}.$$

Denotemos $\omega_{b^n} = 0{,}a_1a_2a_3...$ a la expansión b^n-ádica de ω y $\omega_b = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3,...$ a la expansión b-ádica de ω. Es claro entonces que $a_i \in \{0,1,...,b^n-1\}$ y $\alpha_i \in \{0,1,...,b-1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Cada $a_i \in \{0,1,...,b^n-1\}$ puede expresarse de forma única mediante

$$a_i = \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{a_i} b^j, \ c_j^a \in \{0,1,...,b-1\};$$

de modo que $c_0^a c_1^a ... c_{n-1}^a$ es la expresión en base b de a. Entonces, si a_t es el t-ésimo dígito de ω_{b^n}, los dígitos $\alpha_{(t-1)n+1}\alpha_{(t-1)n+2},...,\alpha_{tn}$ se corresponden con los coeficientes $c_0^{a_t} c_1^{a_t} ... c_{n-1}^{a_t}$ que verifican

$$a_t = \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{a_t} b^j.$$

Así, dado $a_t \in \{0,1,...,b^n-1\}$, $\alpha \in \{0,1,...,b-1\}$ aparece k veces entre los dígitos α_m con $m \in [(t-1)n+1, \ tn]$ si, y sólo si, k de los n coeficientes $c_j^{a_t}$, $j = 0,1,...,n-1$, valen α. Sea $A_\alpha(k)$ el conjunto de dígitos $a_i \in \{0,1,...,b^n-1\}$ entre cuyos n coeficientes $c_j^{a_t}$, $j = 0,1,...,n-1$, hay k que valen α. Para cada k, el cardinal de $A_\alpha(k)$ es

$$\# A_\alpha(k) = \binom{n}{k}(b-1)^{n-k}. \tag{16}$$

En efecto, hay $\binom{n}{k}$ formas de escoger los k coeficientes que valen α. Los $n-k$ coeficientes restantes pueden tomar cada uno de los $b-1$ valores distintos de α.

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{S^b_{\alpha,Nn}(\omega)}{Nn} &\overset{(i)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \sum_{a\in A_\alpha(k)} \frac{S^{b^n}_{a,N}(\omega)}{N} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \sum_{a\in A_\alpha(k)} \lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^n}_{a,N}(\omega)}{N} \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k}(b-1)^{n-k} \lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^n}_{a,N}(\omega)}{N} \\
&\overset{(iii)}{=} \frac{1}{b^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k}(b-1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{b^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1}(b-1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{b^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k}(b-1)^{n-k-1} \\
&\overset{(iv)}{=} \frac{1}{b}.
\end{aligned}$$

(i) Cada vez que un $a \in A_\alpha(k)$ aparece en ω_{b^n}, α aparece k veces en ω_b; de ahí multiplicar por k en cada sumando. Además, N se multiplica por n en la expresión de la izquierda porque los N primeros dígitos de ω en base b^n se corresponden con los Nn primeros dígitos de ω en base b.

(ii) Por (16).

(iii) Por hipótesis.

(iv) Por el Teorema del Binomio.

Debido a que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\left|S^b_{\alpha,N+r}(\omega) - S^b_{\alpha,N}(\omega)\right| \leq r$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \left| \frac{S^b_{\alpha,N}(\omega)}{N} - \frac{1}{b} \right| &= \lim_{N\to\infty} \left| \frac{S^b_{\alpha,N}(\omega) - S_{\alpha,n\lceil N/n\rceil}(\omega)}{N} + \frac{S_{\alpha,n\lceil N/n\rceil}(\omega)}{N} - \frac{1}{b} \right| \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \left(\left| \frac{S^b_{\alpha,N}(\omega) - S^b_{\alpha,n\lceil N/n\rceil}(\omega)}{N} \right| + \left| \frac{S^b_{a,n\lceil N/n\rceil}(\omega)}{N} - \frac{1}{b} \right| \right) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \left(\frac{n}{N} + \left| \frac{S^b_{\alpha,n\lceil N/n\rceil}}{N} - \frac{1}{b} \right| \right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S^b_{\alpha,N}(\omega)}{N} = \frac{1}{b};$$

es decir, ω es normal simple en base b. $\square$

Observación 24. *El recíproco no es cierto: existen números normales simples en alguna base b que no son normales simples en b^n para algún $n \in \mathbb{N}$. Un ejemplo de esto es el número en base 2 $0{,}\widehat{01}$, que es obviamente normal simple en dicha base, pero no en base 4, donde su representación es $0{,}\widehat{1}$.*

Corolario 25. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$. ω es normal simple en base b^{nk} para todo $k \in \mathbb{N}$ si, y sólo si, ω es normal simple en base b^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. En primer lugar, si ω es normal simple en base b^{nk} para todo k, entonces es normal simple en base b^k, por la proposición anterior. Además, si ω es normal simple en base b^k, $\forall k \in \mathbb{N}$; entonces lo es en base b^{kn}, $\forall n, k \in \mathbb{N}$, ya que $kn \in \mathbb{N}$. $\square$

Que ω sea normal simple en base b^k, $\forall k \in \mathbb{N}$ es equivalente, como veremos más adelante, a la definición que hemos dado para ω normal en base b. Esta caracterización es tomada por definición de número normal en base b por algunos autores, como por ejemplo G. Harman en [12] (concretamente lo denomina "enteramente normal en base b").

Las definiciones de cada tipo de Números Normales de Borel varían mucho dependiendo de la fuente, ya sea porque utilizan caracterizaciones equivalentes o porque llaman a lo mismo de distinta forma. Podemos encontrar autores que distinguen sólo uno o dos tipos; como W. Sierpinski [18], que considera únicamente los números normales simples en base b y los números absolutamente normales. Hay quien llama número normal (sin especificar base) a lo que hemos definido como número absolutamente normal, e incluso quien considera los números normales simples en toda base b.

La condición de la izquierda en la doble implicación de la siguiente proposición considera los números $\omega \in \Omega$ tales que ω, $b\omega$, $b^2\omega$,... son todos ellos normales simples en todas las bases b, b^2, b^3,... Se trata de la caracterización más extendida de número normal en base b. Existen también autores que la consideran la definición de número normal en base b; de hecho, fue la primera definición que dio el propio Borel para tales números [8]. Es necesario establecer su equivalencia con la definición que hemos dado, ya que muchas demostraciones de importantes resultados sobre Números Normales de Borel se han hecho a partir de esta caracterización y no directamente mediante la frecuencia asintótica de secuencias de longitud arbitraria. Aquí se ha preferido tomar como definición de número normal en base b lo dicho en la Definición 20 por ser más intuitivo y suponer una generalización de la definición dada para número normal simple en base b. Es también la elección de autores como Copeland y Erdös [11] o Champernowne [9].

En primer lugar, estableceremos la equivalencia entre las definiciones de Borel y Harman y después veremos que la de Borel es equivalente a la dada aquí en la Definición 20.

Proposición 26. *La parte fraccionaria de $b^j\omega$ (a la que denotaremos $[b^j\omega]$) es normal simple en base b^k, $\forall j \geq 0$, $\forall k \geq 1$ si, y sólo si, ω es normal simple en base b^n para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $b \geq 2$ y $\omega \in \Omega$ tales que $[b^j\omega]$ es normal simple en base b^k, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ y para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $[b^{nj}\omega]$ es normal simple en base b^{nk}, al ser nk natural y $nj \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto es condición suficiente para que ω sea normal simple en base b^n, $\forall n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 25.

Para la otra implicación se usará un método similar al visto en la Proposición 23, basado en el concepto de cambio de base. Partimos de que ω es normal simple en base b^n, $\forall n \in \mathbb{N}$ y queremos probar que $[b^j\omega]$ es normal simple en base b^n $\forall n \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 25, basta probar por inducción sobre j que $[b\omega]$ es normal simple en base b^j, $\forall j \in \mathbb{N}$. Si $j = 1$,

$$\left| S^b_{\sigma,N}([b\omega]) - S^b_{\sigma,N}(\omega) \right| \leq 1, \ \forall \sigma \in \{0, 1, ..., b-1\};$$

con lo que $[b\omega]$ es normal simple en base $b^j = b$. Probaremos ahora que $[b\omega]$ es normal simple en base b^j, $j \geq 2$, usando que, por el Corolario 25, ω es normal simple en base b^{jr}, $\forall r \in \mathbb{N}$. Sean $a \in \{0, 1, ..., b^j - 1\}$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Cada $\alpha \in \{0, 1, ..., b^{jr} - 1\}$ puede expresarse como

$$\alpha = \sum_{m=0}^{r-1} g^{\alpha}_m b^{jm}, \ g^{\alpha}_m \in \{0, 1, ..., b^j - 1\}.$$

Para cada k se define el conjunto

$$A_a(k) = \left\{ \alpha \in \{0, 1, ..., b^{jr} - 1\} : \alpha \text{ tiene } k \text{ coeficientes } g^{\alpha}_m \text{ que valen } a \right\}.$$

A_k tiene $\binom{r-1}{k} b^j (b^j - 1)^{r-k-1}$ elementos y, por definición,

$$S^{b^j}_{a,Nr}([b\omega]) \geq \sum_{k=0}^{r-1} k \sum_{\alpha \in A_k} S^{b^{jr}}_{\alpha,N}(\omega).$$

Como ω es normal simple en base b^{jr},

$$\begin{aligned}
\liminf_N \frac{S^{b^j}_{a,Nr}([b\omega])}{Nr} &\geq \sum_{k=0}^{r-1} \frac{k}{r}\binom{r-1}{k} b^j (b^j-1)^{r-k-1} \lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^{jr}}_{\alpha,N}(\omega)}{N} \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{k}{r}\binom{r-1}{k} b^j (b^j-1)^{r-k-1} \frac{1}{b^{jr}} \\
&= \sum_{l=0}^{r-2} \frac{l+1}{r}\binom{r-1}{l+1} b^j (b^j-1)^{r-l-2} \frac{1}{b^j r} \\
&= \sum_{l=0}^{r-2} \frac{r-1}{r}\binom{r-2}{l} b^j (b^j-1)^{r-l-2} \frac{1}{b^{jr}} \\
&= \frac{r-1}{r} b^j b^{jr-2j} \frac{1}{b^{jr}} = (1-\frac{1}{r})\frac{1}{b^j}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\liminf_N \frac{S^{b^j}_{a,N}([b\omega])}{N} \geq \left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b^j}. \tag{17}$$

Utilizando esto, y que $\sum_{a=0}^{b^j-1} \frac{S^{b^j}_{a,N}}{N} = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\limsup_N \frac{S^{b^j}_{a,N}}{N} &= \limsup_N \left(\sum_{a=0}^{b^j-1} - \sum_{a_0=0,\ a_0\neq a} \frac{S^{b^j}_{a_0,N}}{N} \right) \\
&= 1 - \sum_{a_0=0,\ a_0\neq a}^{b^j-1} \liminf_N \frac{S^{b^j}_{a_0,N}}{N} \\
&\leq 1-(b^j-1)\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b^j} \\
&= \frac{1}{b^j}\left(1+\frac{b^j-1}{r}\right).
\end{aligned}$$

Tanto esto último como (17) se verifican para r tan grande como se quiera, lo cual implica que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S^{b^j}_{a,N}}{N} = \frac{1}{b^j},\ \forall a \in \{0,1,...,b^j-1\}.$$

Es decir, $[b\omega]$ es normal simple en base b^j, $\forall j \in \mathbb{N}$, como queríamos probar. □

Pasamos ahora a demostrar la equivalencia más importante: la que se da entre la definición que hemos dado de número normal en base b y el hecho de que $[b^j\omega]$ sea normal simple en base b^k, $\forall j \geq 0$, $\forall k \geq 1$.

Proposición 27. *Sean $\omega \in \Omega$ y $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. La parte fraccionaria de $b^j\omega$, $[b^j\omega]$, es normal simple en base b^k, $\forall j \geq 0$, $\forall k \geq 1$ si, y sólo si, ω es normal en base b.*

Demostración. Supongamos que $[b^j\omega]$ es normal simple en base b^k, $\forall j \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sean $A = a_1a_2\cdots a_k$ una secuencia de longitud k de dígitos de $\{0, 1, ..., b-1\}$ y $a \in \{0, 1, ..., b^k - 1\}$ la secuencia A en base b^k. Es decir, a es un b^k-dígito y A una secuencia de b-dígitos. Entonces, que se dé

$$d^b_{kr+j+1}(\omega) = a_1,\ d^b_{kr+j+2}(\omega) = a_2,\ ...,\ d^b_{kr+j+k}(\omega) = a_k$$

es equivalente a que a esté en la $(r-1)$-ésima posición de la expansión b^k-ádica de $[b^j\omega]$. En efecto, al desplazarnos r dígitos a la derecha en ω en base b^k estamos desplazándonos kr dígitos en ω en base b. Si además multiplicamos por b^j y tomamos la parte fraccionaria, estamos desplazándonos j dígitos más.

Por lo tanto,

$$\frac{S^b_{A,nk}(\omega)}{nk} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{S^{b^k}_{a,n}(b^j\omega)}{n} = \frac{1}{b^k}(1 + o(1)),$$

ya que $[b^k\omega]$ es normal simple en base b^k por hipótesis. Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S^b_{A,n}(\omega)}{n} = \frac{1}{b^k};$$

es decir, la secuencia A de longitud k aparece en los n primeros dígitos de la expansión b-ádica de ω con probabilidad $\frac{1}{b^k}$, lo cual es la definición de número normal en base b para ω.

Para la otra implicación se quiere demostrar que si ω es normal en base b entonces $[b^j\omega]$ es normal simple en base b^k, $\forall j \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. En [3, pag. 12-14] se prueba que si ω es normal en base b entonces es normal simple en base b^r para todo $r \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 26, esto es equivalente a lo que queremos demostrar. □

La demostración completa de la anterior equivalencia puede verse también en [12] o en [21]. Esta última referencia fue la primera en la que apareció la demostración de la equivalencia, aunque Borel ya la planteaba en [8].

Vamos a ver ahora una última caracterización. Después se recopilarán todas a modo de resumen.

Corolario 28. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un número $\omega \in \Omega$ es normal en base b si, y sólo si, ω es normal en base b^n.*

Demostración. Si $\omega \in \Omega$ es normal en base b entonces, por la equivalencia dada en la Proposición 27, $[b^j\omega]$ es normal simple en base b^k, $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \geq 0$. Esto es equivalente a que ω sea normal simple en base b^k, $\forall k \in \mathbb{N}$, por la Proposición 26. Por el Corolario 25, ω es normal simple en base b^{nk}, $\forall k \in \mathbb{N}$. De nuevo por la Proposición 26, $[(b^n)^j\omega]$ es normal simple en base $(b^n)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$; y por la equivalencia de la Proposición 27, ω es normal en base b^n.

Por otro lado, si ω es normal en base b^n entonces es normal simple en base b^{nk}, por la Proposición 26. Por el Corolario 25, ω es normal simple en base b^k, $\forall k \in \mathbb{N}$ y, de nuevo por la Proposición 26, ω es normal en base b. □

A modo de aclaración, lo que hace el Corolario anterior es aplicar a ambos lados de la doble implicación del Corolario 25 la equivalencia entre la definición de número normal en base b dada por Harman [12] y la dada aquí en la Definición 20. Para ello se usan las proposiciones 26 y 27

Con los últimos resultados vistos en esta sección hemos establecido que los siguientes enunciados son equivalentes para cierto $\omega \in \Omega$ y $b \geq 2$:

1. ω es normal en base b.

2. $[b^j\omega]$ es normal simple en base b^k, $\forall j \geq 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

3. ω es normal simple en base b^k $\forall k \in \mathbb{N}$.

4. ω es normal en base b^n, $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Medida de los conjuntos de números normales en base b y números absolutamente normales

Teorema 29. *Sea $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. Todo número $\omega \in \Omega$ es normal en base b salvo aquellos pertenecientes a un conjunto $N^c \subset \Omega$ de medida cero.*

Demostración. Sea $b \geq 2$ una base. Para cada $j \geq 0$ y cada $k \geq 1$, denotamos M_{ij} al conjunto

$$M_{kj} = \{\omega \in \Omega : [b^j \omega] \text{ es normal simple en base } b^k\}.$$

Se tiene que $\{[b^j \omega] : \omega \in \Omega\} = \Omega$, y si aplicamos el Teorema 22 con base b^k, tenemos que M_{kj}^c tiene medida cero, $\forall j \geq 0$, $\forall k \geq 1$.

Por último, puesto que la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, el conjunto N_b^c de los números que no son normales en base b tiene medida cero; ya que

$$N_b^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} M_{k,j}^c.$$

□

Habiendo demostrado esto, es muy sencillo extender la medida 1 al conjunto de los números absolutamente normales usando que la intersección numerable de conjuntos con probabilidad 1 tiene también probabilidad 1:

Corolario 30. *Casi todo número $\omega \in \Omega$ es absolutamente normal.*

Demostración. Para cada $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, sea N_b el conjunto de los números normales en base b. Entonces

$$N = \bigcap_{b=2}^{\infty} N_b$$

es el conjunto de los números absolutamente normales, y puesto que $P(N_b) = 1$ $\forall b \geq 2$,

$$P(N) = 1,$$

por ser intersección numerable de conjuntos de probabilidad 1. □

2.4. Densidad y no-numerabilidad de los Números Normales de Borel y de sus conjuntos complementarios

El último resultado de esta sección se refiere a las propiedades de densidad y no-numerabilidad de cada conjunto de Números Normales de Borel y de cada uno de sus conjuntos complementarios.

Teorema 31. *Sea $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. El conjunto de los números normales simples en base b, el de los números normales en base b y el de los números absolutamente normales, así como cada uno de sus conjuntos complementarios, son todos ellos densos y no numerables en Ω.*

Demostración. Para los conjuntos de números normales simples en base b, números normales en base b y números absolutamente normales, se extrae directamente del hecho de que cada uno de ellos tiene probabilidad 1 en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Sea el conjunto N_b de los números normales simples en base b. Vamos a probar que su complementario, el conjunto de los números que no son normales simples en base b, es no numerable. Definimos el conjunto

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega = 0,(b-1)(b-1)a_1(b-1)(b-1)a_2 \cdots \},$$

con $a_i \in \{0, 1, ..., b-1\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Sea $\omega \in A$. Si promediamos sus dígitos en el límite,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(b-1)+(b-1)+a_1+(b-1)+(b-1)+a_2+\cdots+(b-1)+(b-1)+d_n^b(\omega)}{n} \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \frac{(b-1)+(b-1)+0+(b-1)+(b-1)+0+\cdots+(b-1)+(b-1)+0}{n} \\
&= \frac{2(b-1)}{3},
\end{aligned}$$

pero si ω fuese normal simple en base b ese límite tendría que ser

$$\frac{\sum_{k=1}^{b-1} k}{b} = \frac{b-1}{2}.$$

Entonces $\omega \in N_b^c$ y $A \subset N_b^c$. Además se tiene que existe una correspondencia biyectiva entre cada elemento de A y el conjunto

$$\{0, 1, ..., b-1\}^\infty = \{0, 1, ..., b-1\} \times \{0, 1, ..., b-1\} \times \cdots ,$$

que es no numerable. Entonces N_b^c contiene un subconjunto no numerable y por tanto es no numerable.

Con esto queda probado que el conjunto de números que no son normales simples en ninguna base es no numerable. Para extenderlo al resto de conjuntos mencionados basta tomar complementarios en la siguiente expresión, que se obtiene directamente de las definiciones:

$$\begin{aligned} \text{Números normales simples en base } b &\supseteq \text{ Números normales en base } b \\ &\supseteq \text{ Números absolutamente normales} \end{aligned}$$

Por último, veamos que estos conjuntos son densos en Ω. De nuevo lo probamos para los números que no son normales simples en ninguna base y después, como este conjunto está contenido en el resto el resultado se extiende. Se probará en base $b = 2$ por simplicidad, pudiéndose probar para cualquier base b con el mismo razonamiento. Sean $a, b \in \Omega$ de forma que

$$a = 0{,}a_1a_2a_3... \text{ y } b = 0{,}b_1b_2b_3...$$

con $a < b$. Sea $k \geq 0$ tal que $a_i = b_i \ \forall i \leq k$ y $a_i \neq b_i \ \forall i > k$. Obsérvese que no se pierde generalidad en Ω por asumir que sus elementos son de esta forma, puesto que pueden tener dígitos distintos desde la posición $i = 1$. Además ha de ser $a_{k+1} = 0$ y $b_{k+1} = 1$, porque de lo contrario se daría $a \not< b$.Entonces el número

$$c = 0{,}a_1a_2...a_ka_{k+1}1111...$$

no es normal simple en ninguna base y cumple que

$$a \leq c \leq b.$$

Luego todo par de números en Ω tiene entre medias un número que no es normal simple en base b y por lo tanto el conjunto de los números no normales simples en base b, N_b^c, es denso en Ω. □

Capítulo 3

Construcciones de Números Normales y ejemplos

Se darán aquí ejemplos de los distintos tipos de números normales de Borel. Nos detendremos especialmente en el número de Champernowne, dando la demostración completa de su normalidad en base 10.

3.1. Números normales simples en base b

Construir números normales simples en una base dada es muy sencillo. Podemos considerar por ejemplo el número

$$\frac{123456789}{9999999999} = 0{,}\widehat{0123456789}\ , \tag{18}$$

normal simple en base 10; o, más sencillo aun, el número $0{,}\widehat{10}$ en base 2. Que estos números sean normales simples en una determinada base b no significa que lo sean en cualquier otra. Esto ocurre, por ejemplo, en el número dado en la Observación 24.

3.2. Números normales en base b

Pese a que, como se ha demostrado en la sección anterior, casi todo número en Ω es normal en base b, no es trivial dar ejemplos de tales números.

Los números de Champernowne

Aunque su existencia ya había sido probada, el primer ejemplo explícito de número normal en alguna base lo da Champernowne en 1933 [9]; de hecho, proporciona dos números normales concretos en base 10, un método para generar infinitos números normales en base 10 y un método para construir un número normal en cualquier base b.

Concretamente demostró lo siguiente:

- El número formado al concatenar los números naturales no primos,

$$0{,}4689101214151618...,$$

  es normal en base 10.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número

$$0{,}\lceil n\rceil\lceil 2n\rceil\lceil 3n\rceil\lceil 4n\rceil...$$

  es normal en base 10. En particular, la concatenación de los múltiplos de cualquier número natural es normal en base 10.

- El número

$$0{,}\lceil\log(1)\rceil\lceil 2\log(2)\rceil\lceil 3\log(3)\rceil\lceil 4\log(4)\rceil...$$

  es normal en base 10.

- El número de Champernowne,

$$0,12345678910111213...$$

  es normal en base 10. De hecho, si $n_1^b, n_2^b, n_3^b, ...$ son los números naturales, en orden creciente y en base b; el número de Champernowne en base b,

$$0, n_1^b n_2^b n_3^b ... \ ,$$

  es normal en base b.

Otra aportación de Champernowne fue conjeturar la normalidad en base 10 del número formado por la concatenación de los números primos,

$$0,23571113... \ ,$$

lo cual no fue probado hasta 1946 por Copeland y Erdös [11].

A continuación se detallarán los resultados necesarios para la demostración de la normalidad del número de Champernowne.

Proposición 32. *Si γ_r denota la secuencia*

$$\gamma_r = 0..,0\ 0..,01\ 0..,02\ ...\ 0..,09\ 10..,0\ ...\ 9..,9,$$

en la que cada bloque tiene longitud r, entonces el número

$$\Gamma = 0,\gamma_1\gamma_2...$$

es normal en base 10.

Demostración. En primer lugar, para facilitar la comprensión se separará cada bloque de dígitos con una barra ("/"), quedando de la siguiente forma:

$$\gamma_1 = 0/1/2/.../9$$

$$\gamma_2 = 00/01/02/03/.../09/10/11/12/.../19/20/21/22/.../51/52/.../99$$

$$\Gamma = 0, 0/1/.../9/00/01/.../99/000/...$$

Sean D_t una secuencia de t dígitos de $\{0, 1, ..., 9\}$, $\Gamma_r = \gamma_1\gamma_2, ..., \gamma_r$, l_r el número de dígitos de γ_r y L_r es número de dígitos de Γ_r. La parte fraccionaria de Γ es una sucesión infinita de bloques de la forma $/ \cdot /$. Si D_t aparece en Γ con una barra entre dos de sus dígitos, diremos que D_t aparece partida. Si aparece sin ninguna barra entre medias diremos que D_t aparece no-partida. Por ejemplo, la secuencia 12 aparece partida en γ_1. En γ_2 aparece tanto partida como no-partida.

Si $r < t$, D_t no puede ocurrir no-partida en γ_r por ser de menor longitud que cada uno de sus bloques. Por el contrario,

$$\text{si } r \geq t,\ D_t \text{ aparece no-partida en } \gamma_r \text{ exactamente } (r-t+1)10^{r-t} \text{ veces.} \quad (19)$$

En efecto, si $r \geq t$ existen $r - t + 1$ posiciones en las cuales D_t puede ocurrir (dejando los $r - t$ dígitos restantes a la derecha, dejando 1 dígito a la izquierda y los otros $r-t-1$ restantes a la derecha... y así hasta dejar los $r-t$ dígitos restantes a la izquierda). Una vez fijada la posición de D_t dentro del bloque, los restantes $r-t$ dígitos del mismo pueden tomar cada uno 10 valores distintos, que en total son 10^{r-t} posibles combinaciones. De ahí que D_t ocurra no-partida exactamente $(r-t+1)10^{r-t}$ veces.

Por otro lado, γ_r contiene 10^r barras y D_t aparece partida por barras menos de t veces. Por lo tanto,

$$D_t \text{ no puede ocurrir partida en } \gamma_r \text{ más de } t10^r \text{ veces.} \tag{20}$$

Entonces, por (19) y (20), D_t aparece no-partida 0 veces si $r < t$ y $(r-t+1)10^{r-t}$ veces si $r \geq t$; y partida, como mucho, $t10^r$ veces. Como l_r es el tamaño de γ_r, el número de veces que aparece D_t en γ_r en base 10 es

$$S^{10}_{D_t,l_r}(\gamma_r) = (r-t+1)10^{r-t} + O(10^r),$$

cuando $r \to \infty$. Puesto que el número de dígitos de γ_r es $l_r = r10^r$, se tiene que

$$S^{10}_{D_t,l_r}(\gamma_r) = \frac{r-t+1}{10^t r} + O(10^r) = \frac{l_r}{10^t} + \frac{(1-t)l_r}{10^t r} + O(10^r) = \frac{l_r}{10^t} + o(l_r). \tag{21}$$

Entonces, el número de veces que aparece D_t en Γ_r es

$$\lim_{k\to\infty} S^{10}_{D_t,k}(\Gamma_r) = \sum_{s=1}^{r} S_{D_t,l_s}(\gamma_s) + O(r);$$

es decir, la suma de las veces que D_t aparece dentro de cada uno de los γ_s, $s = 1, 2, ..., r$, que componen Γ_r más la cantidad extra de veces que puede aparecer en los puntos de unión de dichos γ_s.

Finalmente, puesto que el número de dígitos de Γ_r es $L_r = \sum_{s=1}^{r} l_s$,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} S^{10}_{D_t,k}(\Gamma) &= \left(\sum_{s=1}^{r}(s-t+1)10^{s-t} + O(10^s)\right) + O(r) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{r}\frac{(s-t+1)10^s}{10^t} + O(10^s)\right) + O(r) \\
&= \frac{1}{10^t}\left(L_r + \sum_{s=1}^{r}(1-t)10^s + O(10^s)\right) + O(r) \\
&= \frac{L_r}{10^t} + o(L_r).
\end{aligned} \tag{22}$$

Veamos ahora cuántas veces puede aparecer D_t no-partida en cada posición en los l primeros dígitos de γ_r, para hallar así $S^{10}_{D_t,l}(\gamma_r)$. Si el l-ésimo dígito de γ_r se encuentra en un bloque de γ_r con la forma $/p_{r-1}p_{r-2}...p_1p_0/$, tenemos que

$$l = r\sum_{n=0}^{r-1} p_n 10^n + r\theta, \quad 0 < \theta \leq 1. \tag{23}$$

Para entender mejor esto último veamos un ejemplo. Consideremos la secuencia γ_2 que describimos más arriba. Si el l-ésimo dígito de γ_r está en el bloque $/p_1p_2/=/52/$ entonces, por (23),

$$l = 2\sum_{n=0}^{r-1} p_n 10^n + 2\theta = 104 + 2\theta, \quad 0 < \theta \leq 1.$$

Es decir, si el l-ésimo dígito de γ_r pertenece a ese bloque, entonces $l \in (104, 106]$, lo cual es cierto ya que cada bloque tiene $r = 2$ dígitos y $/52/$ es el bloque número 53.

Sea $S^{10}_{D_t,l,k}(\gamma_r)$ el número de veces que D_t aparece no-partida en la secuencia formada por los primeros l dígitos de γ_r, donde el primer dígito de D_t es el k-ésimo dígito de algún bloque de γ_r. Entonces, si $k > r - t + 1$,

$$S^{10}_{D_t,l,k}(\gamma_r) = 0, \tag{24}$$

ya que la secuencia D_t no cabría en el bloque si empieza en la posición k-ésima del mismo. De lo contrario, si $k \leq r - t + 1$,

$$S^{10}_{D_t,l,k}(\gamma_r) = 10^{r-t-k+1}\left(\sum_{n=r-k+1}^{r-1} p_n 10^{n+k-r-1} + \theta'\right), \quad 0 \leq \theta' \leq 1. \tag{25}$$

Una vez fijada la secuencia D_t dentro del bloque en cuestión, pueden darse $10^{n+k-r-1}$ combinaciones diferentes de últimos $r - t - k + 1$ dígitos. Fijado el bloque, para asegurarnos de que se encuentra entre los l primeros dígitos de γ_r, se pueden escoger los primeros $k - 1$ dígitos del bloque de

$$\sum_{n=r-k+1}^{r-1} p_n 10^{n+k-r-1} \quad \text{ó} \quad \sum_{n=r-k+1}^{r-1} p_n 10^{n+k-r-1} + 1$$

formas diferentes. Entonces, el número de veces que D_t puede aparecer no-partida en la k-ésima posición de su bloque, entre los primeros l dígitos de γ_r, es coherente con lo estimado en (25).

De (25) se obtiene que

$$S^{10}_{D_t,l,k}(\gamma_r) = \frac{1}{10^t}\left(\sum_{n=r-k+1}^{r-1} p_n 10^n + 10^{r-k+1}\theta'\right), \quad 0 \leq \theta' \leq 1.$$

con lo que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r-t+1} S^{10}_{D_t,l,k}(\gamma_r) &= \frac{1}{10^t}\left(\sum_{k=1}^{r-t+1}\sum_{n=r-k+1}^{r-1} p_n 10^n\right) + O(10^r) \\ &= \frac{1}{10^t}\left(\sum_{k=1}^{r-t+1}((n+1-t)p_n 10^n)\right) + O(10^r).\end{aligned} \tag{26}$$

Por otra parte, D_t no puede aparecer partida en γ_r más de $t10^r$ veces, lo cual, junto con (23) y (26) implica que

$$S^{10}_{D_t,l}(\gamma_r) = \frac{l}{10^t} + O(10^r) = \frac{l}{10^t} + o(l_r) \tag{27}$$

cuando $r \to \infty$ y l es tal que tiene sentido el número $S^{10}_{D_t,l}(\gamma_r)$.

Por último, supongamos que el l-ésimo dígito de Γ es el m-ésimo dígito de γ_r. Se tiene que $l = L_{r-1} + m$, luego

$$S^{10}_{D_t,l}(\Gamma) = \lim_{k\to\infty} S_{D^{10}_{t,k}}(\Gamma_{r-1}) + S^{10}_{D_t,m}(\gamma_r) + O(1)$$

cuando $l \to \infty$. Esto último, junto con (21), (22) y (27) implica que

$$S^{10}_{D_t,l}(\Gamma) = \frac{L_{r-1}}{10^t} + \frac{m}{10^t} + O(10^r) = \frac{l}{10^t} + o(l).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{S^{10}_{D_t,l}(\Gamma)}{l} = \frac{1}{10^t};$$

es decir, Γ es normal en base 10. $\square$

La demostración de la normalidad del número de Champernowne en base 10 está basada, como se verá después, en un caso particular de lo establecido en la siguiente proposición.

Proposición 33. *Si $\gamma_{r,\mu}$ es la secuencia formada repitiendo γ_r μ veces entonces el número*

$$0{,}\gamma_{1,\mu}\gamma_{2,\mu}\gamma_{3,\mu}\cdots$$

es normal en base 10.

Demostración. En primer lugar, introduzcamos nueva notación para la demostración de este resultado. Denotaremos con $\Gamma_{r,\mu}$ a la cadena

$$\Gamma_{r,\mu} = \gamma_{1,\mu}\gamma_{2,\mu}...\gamma_{r,\mu}$$

y con Γ_μ a la cadena

$$\Gamma_\mu = \gamma_{1,\mu}\gamma_{2,\mu}...$$

Denotaremos además con $L_{r,\mu}$ y $l_{r,\mu}$ al número de dígitos de $\Gamma_{r,\mu}$ y $\gamma_{r,\mu}$ respectivamente.

Al igual que en la Proposición 32, el objetivo será calcular $S^{10}_{D_t,l}(\Gamma_\mu)$. Supongamos que el l-ésimo dígito de Γ_μ es el m-ésimo dígito de $\gamma_{r,\mu}$, y que el m-ésimo dígito de $\gamma_{r,\mu}$ es además el q-ésimo dígito de algún γ_r de $\gamma_{r,\mu}$, de forma que

$$l = L_{r-1,\mu} + m = L_{r-1,\mu} + sl_r + q, \quad 0 \le s < \mu, \quad 0 < q \le l_r. \tag{28}$$

Veamos en detalle cómo se descompone la cadena Γ_μ para entender mejor así la notación que venimos arrastrando:

$$\Gamma_\mu = \overbrace{\gamma_{1,\mu}\gamma_{2,\mu}...\gamma_{r-1,\mu}}^{L_{r-1,\mu}\text{ dígitos}}\gamma_{r,\mu}...$$

$$\gamma_{r,\mu} = \overbrace{\underset{(1)}{\gamma_r}\underset{(2)}{\gamma_r}...\ \underset{(s-1)}{\gamma_r}\ \underset{(s)}{\gamma_r}...\underset{(\mu)}{\gamma_r}}^{l_{r,\mu} = \mu 10^r\text{ dígitos}}$$

$$\gamma_r = \overbrace{/\ \underbrace{00..,0}_{r\text{ dígitos}}\ /\ \underbrace{00..,1}_{r\text{ dígitos}}\ /.../\ \underbrace{99..,9}_{r\text{ dígitos}}\ /}^{r10^r\text{dígitos}}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu &= \gamma_{1,\mu}\gamma_{2,\mu}...\gamma_{r,\mu}\gamma_{r+1,\mu}...\\
&= \gamma_{1,\mu}\gamma_{2,\mu}...\Big[\gamma_r\gamma_r...\gamma_r\gamma_r...\gamma_r\Big]\gamma_{r+1,\mu}...\\
&= \underbrace{\gamma_{1,\mu}\gamma_{2,\mu}...\Big[\underbrace{\gamma_r\gamma_r...\gamma_r\Big[\underbrace{/00..,0/00..,1/00...2}_{q\text{ dígitos}}}_{m\text{ dígitos}}}_{l\text{ dígitos}}/.../99..,9/\Big]...\gamma_r\Big]\gamma_{r+1,\mu}...
\end{aligned}$$

El dígito 2 que aparece rodeado es un ejemplo de l-ésimo dígito de Γ_μ, m-ésimo dígito de $\gamma_{r,\mu}$ y q-ésimo dígito del γ_r al que pertenece.

Entonces

$$S^{10}_{D_t,l}(\Gamma_\mu) = \lim_{j\to\infty} S^{10}_{D_t,j}(\Gamma_\mu) = S_{D_t,L_{r-1},\mu}(\Gamma_{r-1,\mu}) + s\cdot S^{10}_{D_t,l_r}(\gamma_r) + S^{10}_{D_t,q}(\gamma_r) + O(r).$$

Esto, junto con (21), (22) y (27), implica que

$$S^{10}_{D_t,l}(\Gamma_\mu) = \frac{1}{10^t}(L_{r-1,\mu} + s\cdot l_r + q) + o(l);$$

de donde, aplicando (28),

$$S^{10}_{D_t,l}(\Gamma_\mu) = \frac{l}{10^t} + o(l);$$

con lo que el número

$$0{,}\Gamma_{r,\mu}$$

es normal en base 10.

$\square$

Teorema 34 (Normalidad del número de Champernowne). *El número de Champernowne,*

$$0,1234567891011...$$

es normal en base 10.

Demostración. La Proposición 33 afirmaba que $0{,}\Gamma_\mu$ (a partir de ahora Γ_μ, para simplificar) es normal en base 10, $\forall\mu \in \mathbb{N}$. Lo que se probará aquí es que el número Γ_9^*, obtenido al añadir un dígito extra tras cada barra, es normal en base 10. Eligiendo correctamente ese dígito podemos formar el número de Champernowne. Sea r el número de dígitos que tiene el bloque de Γ_9 que contiene su l-ésimo dígito y sea $C(l)$ el número de barras

en los primeros l dígitos de Γ_9. Entonces, puesto que $r10^r = O(l)$ cuando $l \to \infty$,

$$C(l) = O(10^r) = o(l).$$

Supongamos que el l-ésimo dígito de Γ_9 se convierte en el l^*-ésimo dígito de Γ_9^*. Entonces l viene dado en función de $l^* > 0$ salvo si l^* es uno de los dígitos que hemos añadido. En ese caso se define como $l = l^* - 1$. De esta forma,

$$l^* = l + C(l) + O(1) = l + o(l),$$

ya que se añade un dígito por cada barra. Incluir un nuevo dígito en Γ_9 no puede alterar $S^{10}_{D_t,l}(\Gamma_9)$ por más de t. Entonces, si $\left(S^{10}_{D_t,l^*}(\Gamma_9^*)\right)^*$ es el número de veces que aparece D_t en los l^* primeros dígitos de Γ_9^*,

$$\left(S^{10}_{D_t,l^*}(\Gamma_9^*)\right)^* = S^{10}_{D_t,l}(\Gamma_9) + O(C(l)) = \frac{l}{10^t} + o(l) = \frac{l^*}{10^t} + o(l^*),$$

con lo que Γ_9^* es normal en base 10.

Podemos escoger los dígitos que añadimos a Γ_9 de manera que formemos el número de Champernowne. Por lo tanto el número de Champernowne es normal en base 10.

□

Los números de Stoneham

Para introducir otro ejemplo, los números de Stoneham, necesitamos una definición previa.

Definición 35. *Decimos que a es raíz primitiva de n si para cada entero b primo relativo con a existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a^k \equiv b \pmod{n}$.*

Definición 36. *Sean b y c dos naturales primos relativos con c impar y b raíz primitiva de c^2. Llamamos número de Stoneham a*

$$\xi_{bc} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c^j b^{c^j}}.$$

R.G. Stoneham probó en 1973 [19] que dichos números son normales en base b.

Definición 37. *Sean b y c primos relativos con $b, c > 1$. Se llama número de Stoneham generalizado al número*

$$\eta_{bc} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c^j b^{c^j}}.$$

En 2002, Bailey y Crandall [2] probaron que los números de Stoneham generalizados son normales en base b.

3.3. Números absolutamente normales

Algoritmos de Sierpinski y Turing

El primero en dar un ejemplo de número absolutamente normal fue Sierpinski, en 1917 [18]. Para ello se vale de un método, que él mismo propone, consistente en la construcción de infinitos conjuntos de intervalos abiertos con extremos racionales. Finalmente define el número como el mínimo de un conjunto no numerable resultado de sucesivas intersecciones de dichos intervalos. No queda claro si el número en cuestión es o no computable.

También Alan Turing propuso un método para la construcción de números absolutamente normales. Fue publicado en 1992 en unos manuscritos del propio Turing, pero no fue hasta 2007 cuando Verónica Becher y Santiago Figueira [5] publicaron una transcripción de los resultados contenidos en el manuscrito con la correspondiente formalización lógica y matemática. Turing dejó sin demostrar algunos de los lemas necesarios para probar la validez de su método. Algunos de ellos no han podido ser probados aun, pero sí una versión más débil que sigue permitiendo formalizar el algoritmo bajo la idea original. El algoritmo en cuestión es doblemente exponencial, por lo que en la práctica es inservible. Antes de eso, en 2002, Verónica Becher y Santiago Figueira [4] habían publicado también un método recursivo basado en el de Sierpinski que producía un número computable y absolutamente normal. El único problema es que la complejidad del algoritmo es exponencial. Finalmente, en 2013, V. Becher, P. Heiber y T. Slaman [6] publicaron un algoritmo de complejidad polinómica basado en el de Turing que devuelve un número absolutamente normal.

La constante de Chaiting

Otro número absolutamente normal es la constante de Chaiting, Ω (no confundir con el espacio de sucesos Ω), que representa la probabilidad de que un programa elegido al azar detenga correctamente una Máquina de Turing determinada. También puede definirse de la siguiente manera:

Definición 38. *Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de todos los programas que detienen su ejecución en un tiempo finito y sea $|p|$ el tamaño en bits de un programa p. Se define la constante de Chaiting como*

$$\Omega = \sum_{p \in \mathscr{P}} 2^{-|p|}.$$

Una forma más intuitiva de expresar el número es agrupando por el tamaño de los programas:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{p \in \mathscr{P} : |p| = n\}} 2^{-n}.$$

Para entender su construcción veamos un ejemplo simplificado. Supongamos que sólo existieran dos programas cuya ejecución se detiene y cuyas representaciones en binario fuesen, por ejemplo, 100010 y 101. Tomar uno de ellos al azar de entre todos los programas finitos es equivalente a obtener una de dichas secuencias de 0's y 1's de forma aleatoria. La probabilidad de que esto ocurra es $\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3} = 0{,}15625$.

Obviamente, el número de programas que se detienen es infinito, por lo que Ω está formado por una suma infinita de términos de la forma $\frac{1}{2^n}$. Podría parecer que tal suma puede ser mayor que 1, pero Chaiting define con rigor las condiciones necesarias para que un programa sea válido, haciéndolo de tal modo que $0 < \Omega < 1$. Los dígitos de Ω varían en función del lenguaje de programación escogido. No obstante, sus propiedades son siempre las mismas:

- Absolutamente normal.
- Algorítmicamente aleatorio.
- No computable.

Si σ es una secuencia de dígitos y $K(\sigma)$ es el tamaño mínimo en bits que puede tener un programa que genera σ, decimos que σ es una secuencia algorítmicamente aleatoria si $K(\sigma) \geq |\sigma| - c$. Que sea no computable significa que no puede ser determinado con precisión arbitraria. La idea de la demostración de su no computabilidad es la siguiente:

Alan Turing demostró que no existe un algoritmo que sea capaz de identificar si un programa dado detendrá su ejecución en algún momento o si, por el contrario, continuará indefinidamente. Esto se conoce como el problema de la parada. Supongamos que existiese un programa finito que pudiera computar cualquier dígito de la expansión diádica de Ω. Entonces tal programa resolvería el problema de la parada para todos los programas finitos sin importar el tamaño, lo cual es imposible. Entonces tal programa no existe.

Números trascendentales e irracionales algebraicos

Es aun una cuestión abierta si los números trascendentales tales como π, e ó $\log(2)$ son o no absolutamente normales. Sin embargo, los decimales de tales constantes que han podido ser calculados hasta día de hoy (en el caso de π, por ejemplo, se superaron hace años los 10 billones) parecen comportarse como los de un número absolutamente normal. Lo que sí fue probado, por Bailey y Crandall en 2001 [1], es que, bajo una hipótesis muy general, esas y otras constantes también muy conocidas son normales en base 2.

Existe a día de hoy también la conjetura de que todo número irracional algebraico es absolutamente normal, ya que no se han encontrado contraejemplos de tal afirmación. Cabe señalar que tampoco se ha demostrado la absoluta normalidad de ningún número irracional algebraico.

3.4. Números no-normales

Con números no-normales nos referimos a números que no son normales en ningúna base b.

Resulta paradójico que, pese a que los números normales en base b conforman un subconjunto de $(0, 1]$ que tiene medida de Lebesgue 1, sea tan complicado dar ejemplos explícitos; y que, sin embargo, quizás por la naturaleza de nuestro sistema de numeración o por las herramientas que hemos desarrollado hasta ahora, seamos capaces de encontrar ejemplos de números no-normales con bastante facilidad.

Como sabemos, cualquier número normal en base b ha de tener infinitos decimales, por lo que cualquier número entero es un ejemplo de número no-normal. Los racionales, aunque pueden ser normales simples en base b, como en (18), no son normales en ninguna base:

Proposición 39. *Los números racionales no son normales en ninguna base.*

Demostración. Sea $\omega \in \Omega \cap \mathbb{Q}$. Por la equivalencia dada en la Proposición 27, ω sería normal en base b si $[b^j\omega]$ fuese normal simple en base b^m, $\forall j \geq 0$, $\forall m \geq 1$. Al ser racional, sus dígitos en base b se repiten a partir de cierta posición, digamos a partir del $(n+1)$-ésimo dígito, en bloques de longitud k. La parte fraccionaria de $b^n\omega$,

$$[b^n\omega] = d_1^{b^k}([b^n\omega])d_2^{b^k}([b^n\omega])...,$$

debería ser un número normal simple en base b^k; pero no lo es, ya que $d_i^{b^k}([b^n\omega]) = a \; \forall i \in \mathbb{N}$ para cierto $a \in \{0, 1, ...b^k - 1\}$. Esto es debido a que al multiplicar por b^n nos posicionamos justo antes de que comience la secuencia de bloques de k dígitos que se repiten. Después se toma la parte fraccionaria y se cambia a base b^k, con lo que se toman bloques de dígitos en base b que se repiten. □

Los números normales en base b han de ser entonces irracionales pero no todos los irracionales son normales en base b. Por ejemplo, la constante de Liouville

$$\mathscr{L} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = 0{,}110001000000000000000001000...$$

es irracional no-normal.

Capítulo 4

El Teorema del mono infinito y otras curiosidades

En base a las definiciones dadas para un $\omega \in \Omega$ normal en base b es fácil ver que cualquier número natural en base b se encuentra en la expansión diádica de ω. Este hecho es el que ha dado lugar al popularmente conocido como "*Teorema del mono infinito*" o "*Teorema de los infinitos monos*", que afirma que si tuviésemos a infinitos monos aporreando una máquina de escribir durante tiempo infinito, alguno de ellos acabaría escribiendo cualquier texto existente, incluido el presente trabajo de fin de grado.

La idea original fue planteada por el propio Borel, quien en su obra *Mécanique Statistique et Irréversibilité* (1913) afirmaba que incluso un millón de monos mecanografiando al azar durante 10 horas al día tenían muy pocas posibilidades de producir algo legible. Se trataba de una metáfora para ilustrar la dificultad de que un suceso altamente improbable tuviera lugar. La idea de Borel se fue desarrollando con los años hasta llegar a lo que hoy se conoce por dicho teorema. Cabe señalar antes de nada que no es necesario que tanto los monos como el tiempo empleado por estos en teclear sean ambos infinitos para que se produzca cualquier texto. Bastaría un mono infinito tiempo o infinitos monos pulsando una sola vez una tecla al azar.

Fijemos un texto cualquiera y supongamos que cada mono pulsa las teclas de forma totalmente aleatoria, teniendo así todas ellas la misma probabilidad de ser pulsadas; y que el resultado de cada pulsación es independiente de las anteriores. Supongamos también que la máquina de escribir que golpean tiene 50 teclas, entre las que se incluyen letras, números, el carácter espacio, el carácter salto de línea y distintos signos de puntuación. Si algún símbolo presente en el texto fijado no está entre los producidos por esas 50 teclas, consideraremos que el mono ha escrito el símbolo cuando haya escrito su transcripción al castellano. Por ejemplo, daremos por válido que el mono escriba "*Omega*" cuando en el texto aparezca "Ω". Tenemos ya entonces bien definida una correspondencia entre cada carácter de nuestro texto y cada tecla o secuencia de teclas que lo producen. Pues bien, de entre todas las veces que un mono pulse una tecla, 1 de cada 50 veces habrá pulsado la tecla que produce el primer carácter del texto fijado. Del mismo modo, 1 de cada 50 veces que eso ocurra, la siguiente tecla en ser pulsada por el mismo mono será la tecla que produce el segundo carácter del texto (recordemos que son sucesos independientes). Es decir, 1 de cada $50^2 = 2500$ veces que un mono pulse dos teclas (una después de la otra) habrá reproducido seguidos los dos primeros caracteres del texto; y así sucesivamente hasta reproducir todo el texto en una cantidad finita de pulsaciones aleatorias.

Obviamente la frecuencia con la que un mono acierta una secuencia determinada es menor conforme mayor es la longitud de la misma y, pese a que todos los monos antes o después producirán cualquier secuencia de caracteres, por muy larga que sea; el tiempo en el que lo hacen crece rápidamente con la longitud de la misma. Por ejemplo, si un mono pulsa una tecla al azar cada segundo, tardará en escribir una determinada palabra de 6 letras aproximadamente $50^6 = 15{,}625{,}000{,}000$ segundos, que equivalen a 495 años. Si la palabra tiene 7 letras el tiempo promedio para conseguirlo pasa a ser de unos 24.750 años.

Este curioso experimento teórico fue también considerado hace ya más de dos siglos por Jonathan Swift en su novela "*Los viajes de Gulliver*" (1782). En el capítulo 5 de la parte 3 se habla de un profesor que tiene la intención de generar todo el conocimiento humano obligando a sus alumnos a producir secuencias aleatorias de letras mediante el accionamiento de un ingenio mecánico que lleva desarrollando desde su juventud.

Volviendo al experimento del mono, veamos cómo está relacionado con los

Números Normales de Borel. La secuencia de teclas que pulsa un mono es equivalente, por ser cada pulsación aleatoria e independiente, a la expansión b-ádica de un número normal en base $b = 50$. En realidad, la condición de que todas las teclas deban tener la misma probabilidad de ser pulsadas es necesaria únicamente para poder establecer esta correlación entre sucesivas teclas pulsadas al azar y sucesivos dígitos de un número normal en cierta base. Basta con exigir que todas las teclas tengan una probabilidad mayor que 0 de ser pulsadas para garantizar que cualquier texto será escrito, aunque esto, obviamente, dispara aun más el tiempo que se tardaría en conseguir.

Estableciendo una correspondencia adecuada entre teclas y caracteres podemos relacionar la secuencia de tecleado con un número normal en cualquier otra base b. Por ejemplo, podemos simplificar el planteamiento considerando que cualquier texto puede ser traducido a código morse, de modo que contenga sólo puntos y líneas, asociables a 0s y 1s. Otra forma de simplificarlo es considerar que cada texto escrito con un programa de ordenador que lo almacene en un archivo con un determinado formato, no es más que, en última instancia, una secuencia de 0's y 1's que el ordenador interpreta cada vez que se abre (con este razonamiento pueden considerarse no sólo textos sino cualquier cosa que un ordenador sea capaz de procesar, como imágenes o audios). Entonces, se puede simplificar el problema poniendo al mono ante una máquina con dos únicas teclas o ante cualquier otro mecanismo con dos posibles opciones que accione de manera aleatoria e independiente. Igualmente generará cualquier texto en tiempo finito. Y del mismo modo, cualquier número normal en base 2 contendrá en algún lugar de su expansión diádica, con probabilidad 1, la transcripción numérica de cualquier texto que queramos buscar en él.

Fijado cualquier número natural $b > 1$, todo el conocimiento humano, escrito y por escribir, está entonces contenido en cada número normal en base b; y lo más sorprendente de todo es que, como se vió en el Teorema 29, todos los números del intervalo Ω son normales en base b salvo los pertenecientes a un conjunto de medida cero. Es decir, casi todo número en Ω contiene en su expansión b-ádica todo el conocimiento humano.

Bibliografía

[1] **Bailey, D. & Crandall, R. :** *On the random character of fundamental constant expansions.* Experimental Mathematics, Vol. 10 (2001).

[2] **Bailey, D. & Crandall, R. :** *Random Generators and Normal Numbers.* Experimental Mathematics Vol. 11 (2002).

[3] **Basulto Elías, G. :** *Sobre los números normales de Borel y algunas variantes.* Universidad de Guanajuato (2009).

[4] **Becher, V. & Figueira, S. :** *An example of a computable absolutely normal number.* Theoretical Computer Science, Vol. 270 (2002).

[5] **Becher, V. & Figueira, S. :** *Turing's unpublished algorithm for normal numbers.* Theoretical Computer Science, Vol. 377 (2007).

[6] **V. Becher, P. Heiber, T. Slaman. :** *A polynomial-time algorithm for computing absolutely normal numbers.* Information and Computation, Vol. 232 (2013).

[7] **Billinsley, P. :** *Probability and Measure.* John Wiley Sons Inc., Segunda edición (1986).

[8] **Borel, É. :** *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol. 27 (1909).

[9] **Champernowne, D. G. :** *The construction of decimals normal in the scale of ten.* Journal of the London Mathematical Society, Vol. 8 (1933).

[10] **Chung, K. L. :** *A course in probability theory.* Probability and Mathematical Statistics Vol. 21 (1970).

[11] **Copeland, A. & Erdös, P. :** *Note on normal numbers.* Bulletin American Mathematical Society, Vol. 52 (1946)

[12] **Harman, G. :** *Metric Number Theory.* Oxford University Press, USA (1998)

[13] **Ibarrola, I., Pardo, L. :** *Teoría de la probabilidad.* Editorial Síntesis (1997).

[14] **Khoshnevisan, D. :** *Normal Numbers are Normal.* University of Utah (2006).

[15] **Khoshnevisan, D. :** *On the normality of normal numbers.* Clay Mathematics Institute Annual Report (2006).

[16] **Quesada, V. Pardo, L. :** *Curso superior de probabilidades.* Promociones y publicaciones universitarias (1987).

[17] **Saxberg, B. :** *Chaitin's Constant: An Uncomputable Number.*

[18] **Sierpinski, W. :** *Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'une tel nombre.* Bulletin de la Société Mathématique de France, Vol. 45 (1917).

[19] **Stoneham, R. :** *On Absolute (j, ϵ)-Normality in the Rational Fractions with Applications to Normal Numbers.* Acta Arith, Vol. 22 (1973).

[20] **Turing, A. M. :** *A note on normal numbers.* In J.L.Britton, editor Collected Works of A.M. Turing: Pure Mathematics (1992).

[21] **Zuckerman, H. :** *On the definition of normal numbers.* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 1 (1951).