

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
Departamento de Física Teórica



TESIS DOCTORAL

**Evolución temporal de un campo clásico de dirac  
unidimensional con autoacoplo escalar**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Amador Álvarez Alonso**

Madrid, 2015

Amador Alvarez Alonso

TF  
1980  
162



\* 5 3 0 9 8 5 4 3 3 5 \*  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

X-53-031041-6

EVOLUCION TEMPORAL DE UN CAMPO CLASICO  
DE DIRAC UNIDIMENSIONAL CON AUTOACOPLIO ESCALAR

Departamento de Física Teórica  
Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid  
1980



BIBLIOTECA

© Amador Alvarez Alonso  
Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1980  
Xerox 9200 XB 480  
Depósito Legal: M-40122-1980

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

EVOLUCION TEMPORAL DE UN CAMPO CLASICO  
DE DIRAC UNIDIMENSIONAL CON  
AUTOACOPLO ESCALAR

Memoria que presenta  
AMADOR ALVAREZ ALONSO  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Físicas

Madrid, Mayo 1980

### Agradecimientos

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al Dr. B. Carreras, Director del presente trabajo, por su estímulo y ayuda. Me siento, también, muy obligado con el Dr. M. Soler por sus sugerencias sobre algunas partes de este trabajo, y con el Prof. A. Fernández Rañada por su gentileza al presentarlo.

Igualmente quiero destacar mi agradecimiento a mis compañeros de la J.E.N. A. López Fraguas y V. Delgado por las frecuentes discusiones con ellos mantenidas sobre gran parte de este trabajo. Por otra parte, deseo expresar mi gratitud a la División de Fusión de la J.E.N. por su hospitalidad, y al Instituto de Estudios Nucleares la ayuda financiera. Finalmente, quiero agradecer a la Srta. D. Aranda su cuidadoso mecanografiado.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.  
Facultad de Ciencias Físicas.

EVOLUCION TEMPORAL DE UN CAMPO CLASICO DE  
DIRAC UNIDIMENSIONAL CON AUTOACOPLO ESCA-  
LAR.

Memoria que presenta AMA-  
DOR ALVAREZ ALONSO para optar  
al grado de Doctor en Ciencias  
Físicas.

Madrid, Mayo 1.980

## INDICES

### INTRODUCCION.

#### I. EL CAMPO DE DIRAC CON AUTOACOPLO ESCALAR.

1. Ecuaciones de Campo. Cantidades conservadas.
2. Existencia de ondas solitarias.
3. Estabilidad de las ondas solitarias.

#### II. ESQUEMA NUMERICO PARA LA ECUACION DE DIRAC CON AUTOACOPLO ESCALAR.

1. Discretización de la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar.
2. Propiedades del esquema numérico.
3. Resolución del sistema de ecuaciones numéricas. Método de factorización matricial.

#### III. EVOLUCION DE ALGUNAS CONFIGURACIONES INICIALES.

1. Resultados numéricos.
2. Existencia de soluciones localizadas oscilantes.

#### IV. INTERACCION DE ONDAS SOLITARIAS.

1. Caracterización numérica de las ondas solitarias en una colisión.
2. Interacción de dos ondas solitarias.
3. Formación de pulsones a partir del choque de dos ondas solitarias.
4. Interacción múltiple de ondas solitarias.

### CONCLUSIONES.

APENDICE A.- Sistemas débilmente hiperbólicos.

APENDICE B.- Estabilidad de las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo vectorial o pseudovectorial.

**APENDICE C.- Esquemas de desintegración para la ecuación de Dirac multidimensional con autoacoplo escalar.**

**REFERENCIAS.**

## INTRODUCCION.

El objeto de la presente memoria es el estudio de algunas ecuaciones de evolución no lineales de la Teoría Clásica de Campos. Dichas ecuaciones son la base de posibles modelos de partículas elementales, interpretando éstas como regiones del espacio en donde están localizadas la energía, la carga, etc.

La idea de construir modelos clásicos para partículas elementales es bastante antigua [1 - 4]. Dos dificultades hay que sobrepasar inicialmente en dicha construcción: primero, elegir las ecuaciones clásicas que presenten soluciones regulares y localizadas, que de aquí en adelante denominaremos ondas solitarias, y segundo, demostrar la estabilidad frente a perturbaciones de estas soluciones.

A principios de la pasada década, M. Soler [5] estudió numéricamente el campo espinorial  $\psi$  de Dirac autoacoplado escalarmente mediante el término de cuarto orden  $(\bar{\psi}\psi)^2$ , demostrando que el estado fundamental de dicho campo representa una partícula de spin 1/2. La determinación del parámetro que aparece en la fase temporal de dicho estado lo realizó M. Soler invocando el principio de mínima energía, consiguiendo de este modo una normalización del campo mediante un procedimiento totalmente clásico. Los sucesivos estudios realizados con este campo espinorial no lineal acoplado con otros campos clásicos [6 - 9], sugieren la identificación de la onda solitaria del campo espinorial con los nucleones.

El acuerdo conseguido en la identificación onda solitaria-nucleón nos incita a intentar analizar algunos de los problemas que todavía quedan por resolver en la anterior identificación. Todos ellos pueden resumirse esencialmente en uno: conocer la dinámica que rige la evolución de las ondas solitarias del campo espinorial  $\psi$ . Responder a este problema entraña matemáticamente resolver un sistema de ecuaciones de evolución no lineales, lo que hoy por hoy resulta imposible. Aún la resolución numérica del mencionado sistema en el espacio cuatridimensional de Minkowski implica enormes dificultades. No obstan

te, dar una respuesta, aunque sea parcial, resulta ineludible si deseamos dar consistencia a la ya mencionada identificación.

Recientemente [10 - 16], un gran número de ecuaciones no lineales de evolución (principalmente del tipo Klein-Gordon con autoacoplo de cuarto orden y de Schrödinger con no linealidad logarítmica) han sido estudiadas con vistas a construir modelos para partículas elementales. En todos estos estudios, la metodología usada consiste en pasar de situaciones sencillas, introducidas mediante hipótesis simplificadoras, a otras más realistas pero más complicadas.

Una de las suposiciones más utilizadas es el admitir trabajar en un espacio de Minkowski bidimensional. La fecundidad de esta suposición radica en el hecho de la existencia de ecuaciones de evolución no lineales involucrando sólo una variable espacial, denominadas completamente integrales, cuyo problema de Cauchy es resoluble analíticamente. Sin embargo, la resolución se realiza por el denominado método de la transformada espectral inversa (IST) el cual no es utilizable para la gran mayoría de ecuaciones. Por otra parte, las ondas solitarias de las ecuaciones completamente integrales, denominadas solitones, presentan la propiedad de no sufrir cambio alguno (módulo un desfase) al interaccionar entre ellas. Esta característica no las hace ser buenas candidatas para representar clásicamente a las partículas elementales. Contrariamente, las soluciones de los sistemas no integrales tienen una dinámica que no adolece de la anterior dificultad, y por ello su estudio, aunque principalmente numérico, ofrece gran interés.

Siguiendo algunas veces razonamientos similares a los utilizados para los campos escalares no lineales de Klein-Gordon en el presente trabajo analizaremos la dinámica de formación e interacción de las ondas solitarias del campo espinorial  $\psi$  no lineal en el espacio bidimensional. Aunque recientemente en algunos estudios de las soluciones de los campos no lineales se introducen ideas cuánticas [17 - 18], en el nuestro, clásico significará no cuántico.

En el primer capítulo de esta memoria, deducimos la expresión de las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con

autoacoplo escalar de cuarto orden en el espacio bidimensional. Asimismo, analizamos la estabilidad de dichas ondas bajo los efectos de perturbaciones pequeñas. El método utilizado en este análisis es aplicable a las ondas solitarias para la ecuación de Dirac con otros autoacoplos, aplicación que se realiza en uno de los apéndices de la memoria.

El segundo capítulo contiene el esquema numérico empleado para resolver la ecuación de Dirac no lineal, así como las principales propiedades del mismo que hacen aconsejable su utilización. En el último apéndice se demuestra como una generalización de este esquema es utilizable cuando la ecuación de Dirac involucra dos o tres coordenadas espaciales.

En el capítulo tercero se analiza la evolución de algunas configuraciones iniciales, y como éstas, en ciertos casos, tienen como estado asintótico final uno constituido por un conjunto de ondas solitarias.

En el cuarto y último capítulo, se estudia la interacción binaria y múltiple de ondas solitarias. Al final del trabajo se enumeran las principales conclusiones obtenidas en el presente estudio.

I - EL CAMPO DE DIRAC CON AUTOACOPLO ESCALAR

I.1.- Ecuaciones de campo. Cantidades conservadas.

Utilizando unidades naturales, la ecuación de Dirac unidimensional con autoacoplo escalares ( $g^{\mu\nu} = (1, -1)$ )

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi + 2\lambda (\bar{\psi} \psi) \psi = 0 \quad (\text{I.1.1})$$

la cual deriva del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m (\bar{\psi} \psi) + \lambda (\bar{\psi} \psi)^2$$

siendo  $2\lambda$  la constante positiva de autoacoplo. Siempre que no se diga lo contrario, escogeremos como matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El anterior campo de Dirac tiene como corriente, ten sor energía-impulso y momento angular respectivamente

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \lambda g^{\mu\nu} (\bar{\psi} \psi)^2$$

$$M^{\mu\rho\sigma} = x^\sigma T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\sigma}$$

de donde, via teorema de Noether, se deduce la conservación de las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \right\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_Q(x,t) \\ E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \text{Im}(\psi_1^* \psi_{2x} + \psi_2^* \psi_{1x}) + m(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) \right. \\ &\quad \left. - \lambda (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 \right\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_E(x, ) \\ P &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \text{Im}(\psi_1^* \psi_{1x} + \psi_2^* \psi_{2x}) \right\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_P(x, ) \\ S &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ x \rho_E(x,t) - t \rho_P(x,t) \right\} \end{aligned}$$

siendo  $\psi_1$  y  $\psi_2$  la primera y segunda componente del spinor  $\psi$ . Las tres primeras cantidades conservadas son la carga, energía y momento del campo, mientras que la conservación de la última está relacionada con la invariancia de la velocidad del centro de masas.

Definiendo el espinor conjugado de carga  $\psi$  como  $\psi^c = \gamma^0 \gamma^1 \psi^*$  y teniendo en cuenta [20] que el Lagrangiano anteriormente introducido es invariante bajo la actuación del grupo  $SU(1, 1)$ , es decir bajo transformaciones del tipo

$$\psi \rightarrow \alpha \psi + \beta \psi^c$$

donde los números complejos  $\alpha, \beta$  satisfacen  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ , se deduce a través del teorema de Noether

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi^c) = 0$$

y por tanto otra cantidad conservada es

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1 \psi_2$$

Habida cuenta que otras ecuaciones en derivadas parciales no lineales tienen infinitas leyes de conservación, cabría la posibilidad de que la ecuación que nos ocupa también las tuviese. Ahora bien, ya que la existencia de dicha infinitud es creído [27] que se debe a la factorización en parejas de la interacción múltiple de ondas solitarias y, como veremos más tarde numéricamente, esta factorización no tiene lugar para la ecuación de Dirac con autoacoplamiento escalar, nos inclinamos a pensar que no existen más leyes de conservación o, al menos, un número infinito de ellas.

**I.2.- Existencia de ondas solitarias.**

Si denotamos por  $H^1(\mathbb{R})$  el espacio de Sobolev de las - (clases de equivalencia) funciones  $f(x)$  de cuadrado integrable en  $\mathbb{R}$  con primera derivada generalizada  $f'(x)$  también de cuadrado integrable, viniendo la norma de este espacio definida por

$$\|f\|_{H^1} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

entonces, es bien sabido que la ecuación (I.1.1) tiene solución única global en el espacio

$$H \equiv H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R})$$

Estamos interesados en las soluciones estacionarias de (I.1.1) del tipo

$$\begin{aligned} \Psi_{1s}(x, t) &= A(x) e^{-i\Lambda t} \\ \Psi_{2s}(x, t) &= iB(x) e^{-i\Lambda t} \end{aligned} \quad (I.2.1)$$

Sustituyendo estas expresiones en (I.1.1) y tras un cálculo algebraico deducimos el siguiente sistema de ecuaciones para  $A(x)$  y  $B(x)$

$$\begin{aligned} -m(A^2 - B^2) + \Lambda(A^2 + B^2) + \lambda(A^2 - B^2) &= K \\ 4AB &= -\frac{1}{\Lambda} \frac{d(A^2 - B^2)}{dx} \end{aligned}$$

siendo  $K$  una constante arbitraria. Si  $K \neq 0$ , en la integración del anterior sistema aparecen integrales elípticas; solamente cuando  $K = 0$ , la solución de dicho sistema adopta la siguiente forma compacta

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{m^2 - \lambda^2} \sqrt{m + \lambda} \frac{\text{ch}(\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)}{m + \lambda \text{ch}(2\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)} \\ B(x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{m^2 - \lambda^2} \sqrt{m - \lambda} \frac{\text{sh}(\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)}{m + \lambda \text{ch}(2\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)} \end{aligned} \quad (I.2.2)$$

donde el parámetro  $\lambda$ , que determina unívocamente la solución estacionaria, toma los valores  $0 < \lambda \leq m$ . En el caso  $\lambda = m$  la solución estacionaria es la idénticamente nula.

La expresión de las soluciones estacionarias de (I.1.1) moviéndose con una velocidad  $V$  adopta la siguiente forma

$$\Psi_{1SB}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1-v^2}}} \left\{ \sqrt{1+\sqrt{1-v^2}} \Psi_{1s} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \sqrt{1-\sqrt{1-v^2}} \Psi_{2s} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right\} \quad (\text{I.2.3a})$$

$$\Psi_{2SB}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1-v^2}}} \left\{ \sqrt{1-\sqrt{1-v^2}} \Psi_{1s} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \sqrt{1+\sqrt{1-v^2}} \Psi_{2s} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right\} \quad (\text{I.2.3b})$$

La densidad de carga de (I.2.3a,b) es

$$|\Psi|^2 \equiv |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = \frac{(m^2 - \Lambda^2) \left\{ m \operatorname{ch} \left( 2\sqrt{m^2 - \Lambda^2} \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \Lambda \right\}}{\sqrt{1-v^2} \left\{ m + \Lambda \operatorname{ch} \left( 2\sqrt{m^2 - \Lambda^2} \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right\}^2}$$

y por tanto la citada solución puede interpretarse como un paquete que se mueve con velocidad  $V$ , es decir, la solución (I.2.3a,b) puede considerarse como una onda solitaria. Todo esto queda aún más claro si tenemos en cuenta que la energía y el momento de esta solución vienen dados por

$$E_{SB} = \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \ln \frac{\Lambda}{m - \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}$$

$$P_{SB} = \frac{m}{\lambda} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \ln \frac{\Lambda}{m - \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}$$

de donde deducimos la siguiente relación

$$E_{SB}^2 = P_{SB}^2 + E_{SB}^2 \quad (v = 0)$$

que es la clásica relación relativista entre energía y momento. La carga de las ondas solitaria (I.2.3.a,b) es

$$\rho_{SB} = \frac{\sqrt{m^2 - \Lambda^2}}{\lambda \Lambda}$$

Además de las ondas solitarias anteriores, la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar tiene otras soluciones que se pueden escribir en forma explícita. En efecto, si en (I.1.1) hacemos

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= \hat{A}(x) e^{i\Lambda t} \\ \psi_2(x, t) &= i\hat{B}(x) e^{i\Lambda t} \end{aligned}$$

deducimos el siguiente sistema para  $\hat{A}(x)$  y  $\hat{B}(x)$

$$-m(\hat{A}^2 - \hat{B}^2) + \Lambda(\hat{A}^2 + \hat{B}^2) + \lambda(\hat{A}^2 - \hat{B}^2) = K$$

$$4\Lambda\hat{A}\hat{B} = \frac{d(\hat{A}^2 - \hat{B}^2)}{dx}$$

y haciendo  $K = -\frac{(m-\Lambda)^2}{4\lambda}$  obtenemos

$$\hat{A}(x) = -(\Lambda - m) \sqrt{\frac{m}{2\lambda}} \frac{1}{m \operatorname{ch}(2\sqrt{\Lambda(\Lambda - m)} x) + \sqrt{m\Lambda}}$$

$$\hat{B}(x) = m \sqrt{\frac{\Lambda - m}{2\lambda}} \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{\Lambda(\Lambda - m)} x)}{m \operatorname{ch}(2\sqrt{\Lambda(\Lambda - m)} x) + \sqrt{m\Lambda}}$$

tomando ahora el parámetro  $\Lambda$  los valores  $\Lambda \gg m$ . Como estas soluciones no son localizadas, ya que tienden hacia una constante en el infinito, las desecharemos y concentraremos toda nuestra atención en las ondas solitarias (I.2.1).

### I.3.- Estabilidad de las ondas solitarias.

Uno de los rasgos más comunes de las ondas solitarias de la mayoría de las ecuaciones no lineales es su estabilidad bajo perturbaciones. Habida cuenta que las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar son soluciones del problema variacional

$$\delta(E - \Lambda Q) = 0$$

puede pensarse que la estabilidad de las mismas se deduce, via teoría de Liapunov, de este hecho. Sin embargo, dichas ondas no hacen ni máximo ni mínimo el anterior problema variacional y por tanto nos vemos obligados a estudiar su estabilidad infinitesimal.

Para mayor claridad, esta sección la dividiremos en tres subsecciones: en la primera plantearemos el problema de autovalores asociado a la estabilidad infinitesimal, en la segunda expondremos algunas propiedades de dicho problema de autovalores y en la tercera subsección demostraremos la estabilidad infinitesimal de las ondas solitarias.

#### a) Planteamiento del problema de autovalores.

La ecuación (I.1.1) se puede poner como

$$\begin{aligned} \psi_{1t} + \psi_{2x} + im\psi_1 + 2i\lambda(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\psi_1 &= 0 \\ \psi_{2t} + \psi_{1x} - im\psi_2 + 2i\lambda(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)\psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (I.3.1)$$

donde los subíndices x, t indican derivación respecto a las variables espacial y temporal. Deseamos estudiar la estabilidad infinitesimal de las ondas solitarias.

$$\psi_S(x, t) = \begin{pmatrix} A(x) \\ iB(x) \end{pmatrix} e^{-i\Lambda t}$$

donde A(x) y B(x) vienen dadas por (I.2.2). Estas funciones verifican lo que llamaremos de aquí en adelante las ecuaciones de las ondas solitarias, es decir

$$\frac{dA}{dx} + (m+\lambda)B - 2\lambda(A^2B - B^3) = 0$$

$$\frac{dB}{dx} + (m-\lambda)A + 2\lambda(B^2A - A^3) = 0$$

Si escribimos la solución  $\Psi$  de (I.3.1) como suma de  $\Psi_S$  y una perturbación del modo siguiente

$$\Psi(x, t) = \Psi_S(x, t) + \varepsilon \begin{pmatrix} \alpha(x, t) \\ i\beta(x, t) \end{pmatrix} e^{-i\lambda t} \quad (\text{I.3.3})$$

y sustituimos esta expresión en (1.3.1), quedándonos en primer orden en  $\varepsilon$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_r}{\partial t} &= [(m-\lambda) - 2\lambda(A^2 - B^2)] \alpha_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} &= [-(m-\lambda) + 2\lambda(3A^2 - B^2)] \alpha_r + \left[ -4\lambda AB - \frac{\partial}{\partial x} \right] \beta_r \end{aligned} \quad (\text{I.3.4})$$

$$\frac{\partial \beta_r}{\partial t} = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + [-m - \lambda + 2\lambda(A^2 - B^2)] \beta_i$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} = \left[ -4\lambda AB + \frac{\partial}{\partial x} \right] \alpha_r + [m + \lambda - 2\lambda(A^2 - 3B^2)] \beta_r$$

siendo  $\alpha \equiv \alpha_r + i\alpha_i$ ,  $\beta \equiv \beta_r + i\beta_i$

Nos proponemos resolver el anterior sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales junto con el dato inicial  $\alpha(x, 0) \equiv \alpha_0(x)$ ,  $\beta(x, 0) \equiv \beta_0(x)$  y para ello, supondremos que tanto  $\alpha_0(x)$  como  $\beta_0(x)$  pertenecen al espacio  $H^1(\mathbb{R})$ . Al ser el sistema (I.3.4) débilmente hiperbólico en el anterior espacio, puede resolverse empleando el método de la transformada de Laplace. La definición de este tipo de sistemas, así como algunas de sus propiedades, puede verse en el apéndice A.

Definiendo la transformada de Laplace de  $f(x, t)$  como

$$\hat{f}(x, \Omega) = \int_0^\infty e^{-\Omega t} f(x, t) dt$$

y recordando que si  $f \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , entonces se verifica

$$\frac{\hat{\partial} f}{\partial t} = -f(x, 0) + \Omega \hat{f}(x, \Omega) \equiv -f_o(x) + \Omega f(x, \Omega)$$

el sistema (I.3.4) se nos transforma en

$$\begin{aligned} -\Omega \hat{\alpha}_i - \frac{d\hat{\beta}_r}{dx} + (\Lambda - m)\hat{\alpha}_r + 2\lambda(3A^2 - B^2)\hat{\alpha}_r - 4\lambda AB\hat{\beta}_r &= -\alpha_{oi} \\ \Omega \alpha_r - \frac{d\hat{\beta}_i}{dx} + (\Lambda - m)\hat{\alpha}_i + 2\lambda(A^2 - B^2)\hat{\alpha}_i &= \alpha_{or} \\ -\Omega \beta_i + \frac{d\hat{\alpha}_r}{dx} + (\Lambda + m)\hat{\beta}_r - 2\lambda(A^2 - 3B^2)\hat{\beta}_r - 4\lambda AB\hat{\alpha}_r &= -\beta_{oi} \\ \Omega \beta_r + \frac{d\hat{\alpha}_i}{dx} + (\Lambda + m)\hat{\beta}_i - 2\lambda(A^2 - B^2)\hat{\beta}_i &= \beta_{or} \end{aligned}$$

es decir, el problema de la estabilidad de las ondas solitarias se reduce a estudiar el siguiente problema de autovalores

$$L\phi = \Omega \phi, \quad \Omega \in \mathbb{C}, \quad \phi \in \bigoplus_{i=1}^4 H^1(\mathbb{R}) \quad (\text{I.3.5})$$

siendo el operador

$$L = \begin{pmatrix} 0 & m - \Lambda - 2\lambda(A^2 - B^2) & 0 & \frac{d}{dx} \\ \Lambda - m + 2\lambda(3A^2 - B^2) & 0 & -4\lambda AB - \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & -m - \Lambda + 2\lambda(A^2 - B^2) \\ -4\lambda AB + \frac{d}{dx} & 0 & m + \Lambda - 2\lambda(A^2 - 3B^2) & 0 \end{pmatrix}$$

b) Propiedades del problema de autovalores

1º) Teniendo en cuenta (I.3.5), es fácil darse cuenta que  $\Omega = 0$  es un autovalor con autovectores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A' \\ 0 \\ B' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.6})$$

indicando las primas derivación con respecto a la variable x. Las otras dos soluciones del sistema (I.3.5) con  $\Omega = 0$  no son aceptables como autofunciones. En efecto, para  $\Omega = 0$  el mencionado sistema se desacopla en los dos subsistemas siguientes:

$$\frac{d\phi_2}{dx} = [-m - \Lambda + 2\lambda(A^2 - B^2)] \phi_4$$

$$\frac{d\phi_4}{dx} = [-m + \Lambda + 2\lambda(A^2 - B^2)] \phi_2$$

y

$$\frac{d\phi_1}{dx} = 4\lambda AB\phi_1 + [-(m+\Lambda) + 2\lambda(A^2 - 3B^2)] \phi_3$$

$$\frac{d\phi_3}{dx} = [-(m-\Lambda) + 2\lambda(3A^2 - B^2)] \phi_1 - 4\lambda AB\phi_3$$

de los cuales conocemos una integral para cada uno, por lo tanto, dichos subsistemas son equivalentes (excepto en aquellos valores de  $x$  que anulen  $B$  ó  $B'$ ) a

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\phi}_2}{dx} &= \left[ (m-\Lambda) \frac{A}{B} - 2\lambda \left( \frac{A^3}{B} - BA \right) \right] \tilde{\phi}_2 \\ \frac{d\tilde{\phi}_4}{dx} &= \left[ -(m-\Lambda) \frac{1}{B} + 2\lambda \left( \frac{A^2}{B} - B \right) \right] \tilde{\phi}_2 \end{aligned} \quad (\text{I.3.7a})$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\phi}_1}{dx} &= \left[ 4\lambda AB + (m-\Lambda) \frac{A'}{B'} - 2\lambda(3A^2 - B^2) \frac{A'}{B'} \right] \tilde{\phi}_1 \\ \frac{d\tilde{\phi}_3}{dx} &= \frac{1}{B'} \left[ -(m-\Lambda) + 2\lambda(3A^2 - B^2) \right] \tilde{\phi}_1 \end{aligned} \quad (\text{I.3.7b})$$

donde se ha introducido el siguiente cambio de variable dependiente

$$\begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A' \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que cuando  $x \rightarrow \pm \infty$  entonces

$$A(x) \rightarrow 0 \quad B(x) \rightarrow 0$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \rightarrow \pm \sqrt{\frac{m+\Lambda}{m-\Lambda}} \quad \frac{A'(x)}{B'(x)} \rightarrow \pm \sqrt{\frac{m+\Lambda}{m-\Lambda}}$$

se deduce que (I.3.7a) y (I.3.7b) tienen soluciones que asintóticamente se comportan como

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_4 \end{pmatrix} \sim \left( \frac{1}{2(m+\lambda) \sqrt{m-\lambda}} \begin{matrix} -\lambda \sqrt{\lambda} \\ e^{\sqrt{m^2-\lambda^2} x} \end{matrix} \right) e^{\sqrt{m^2-\lambda^2} x}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} \sim \left( \frac{1}{2(m+\lambda) \sqrt{m-\lambda}} \begin{matrix} +\lambda \sqrt{\lambda} \\ e^{\sqrt{m^2-\lambda^2} x} \end{matrix} \right) e^{\sqrt{m^2-\lambda^2} x}$$

cuando  $x \rightarrow +\infty$ . De todo ésto se infiere que  $\Omega = 0$  es un autovalor doblemente degenerado del operador  $L$ .

La presencia de las autofunciones (I.3.6) es debida a simetrías de la ecuación de Dirac no lineal mas bien que a la estabilidad de las ondas solitarias de dicha ecuación. En efecto, la primera autofunción es una consecuencia de la invariancia gauge de primera especie de la citada ecuación, pues indica que

$$\begin{aligned} e^{i\varepsilon} A e^{-i\lambda t} &\simeq (1+i\varepsilon) A e^{-i\lambda t} \\ e^{i\varepsilon} B e^{-i\lambda t} &\simeq (1+i\varepsilon) B e^{-i\lambda t} \end{aligned}$$

es solución de la mencionada ecuación. La segunda autofunción es una consecuencia de la invariancia traslacional, ya que indica

$$\begin{aligned} \left( A + \varepsilon \frac{dA}{dx} \right) e^{-i\lambda t} &\simeq A(x+\varepsilon) e^{-i\lambda t} \\ \left( B + \varepsilon \frac{dB}{dx} \right) e^{-i\lambda t} &\simeq B(x+\varepsilon) e^{-i\lambda t} \end{aligned}$$

es solución de la susodicha ecuación.

2º) Al ser todos los elementos del operador matricial  $L$  funciones reales se deduce que si  $\phi$  es autofunción de dicho operador con autovalor  $\Omega$ , entonces,  $\phi^*$  también lo es con autovalor  $\Omega^*$ . Igualmente es inmediato deducir la siguiente implicación

$$\Omega \text{ autovalor de } L \text{ con autofunción } \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow -\Omega \text{ autovalor de } L \text{ con autofunción } \begin{pmatrix} \phi_1 \\ -\phi_2 \\ \phi_3 \\ -\phi_4 \end{pmatrix}$$

En definitiva, el espectro de  $L$  es simétrico con respecto a los ejes real e imaginario del plano complejo  $\Omega$ .

3º) Tras una comprobación directa se deduce  $\Omega = -2i\Lambda$  y  $\Omega = 2i\Lambda$  son autovalores de  $L$  con autovalores

$$\begin{pmatrix} B \\ iB \\ A \\ iA \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ -iB \\ A \\ -iA \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.8})$$

respectivamente. Demostraremos ahora que estos dos autovalores son no degenerados. Tomemos  $\Omega = -2i\Lambda$ , igual se haría el caso  $\Omega = 2i\Lambda$ . Es conveniente [28] introducir el siguiente cambio de variable dependiente

$$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \\ \tilde{\phi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{iB}{A} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{B}{A} \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-i}{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

y el problema de autovalores (I.3.5) para  $\Omega = -2i\Lambda$  adopta la forma

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dx} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ l_1 & l_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\phi}$$

donde

$$l_1 = -\frac{2\Lambda}{A} \quad l_2 = i(m-\Lambda) \frac{1}{A} - 2i\lambda(A^2 - B^2) \frac{1}{A}$$

$$N = \begin{pmatrix} 4\lambda AB + \frac{2\Lambda B}{A} & [-i(m-\Lambda) + 2i\lambda(A^2 - B^2)] \frac{B}{A} & -(m+\Lambda) + 2\lambda(A^2 - 3B^2) \\ 2i\Lambda \frac{B}{A} & [(m-\Lambda) - 2\lambda(A^2 - B^2)] \frac{B}{A} & 2i\Lambda \\ -(m-\Lambda) + 2\lambda(3A^2 - B^2) + 2\Lambda & 2i\Lambda - i(m-\Lambda) + 2i\lambda(A^2 - B^2) & -4\lambda AB \end{pmatrix}$$

Luego (I.3.5), para  $\Omega = -2i\Lambda$ , es equivalente a una cuadratura y al

sistema

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.9})$$

Para  $x \rightarrow +\infty$  (I.3.9) se nos transforma en

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Lambda \sqrt{\frac{m-\Lambda}{m+\Lambda}} & -i(m-\Lambda) \sqrt{\frac{m-\Lambda}{m+\Lambda}} & -(m+\Lambda) \\ 2i\Lambda \sqrt{\frac{m-\Lambda}{m+\Lambda}} & (m-\Lambda) \sqrt{\frac{m-\Lambda}{m+\Lambda}} & 2i\Lambda \\ -m+3\Lambda & i(-m+3\Lambda) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.10})$$

Si  $\Lambda \neq \frac{m}{3}$  este sistema asintótico tiene como matriz fundamental

$$P e^{Jx} P^{-1}$$

siendo

$$J = \begin{pmatrix} \sqrt{m^2-\Lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{m^2-9\Lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{m^2-9\Lambda^2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-8\Lambda^2}{m+3\Lambda} & 0 & 0 \\ i(m+3\Lambda) & i\sqrt{m+3\Lambda} & -i\sqrt{m+3\Lambda} \\ \sqrt{m^2-\Lambda^2} & \sqrt{m-3\Lambda} & \sqrt{m-3\Lambda} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{i}{16\Lambda^2} \begin{pmatrix} \frac{m+3\Lambda}{m-3\Lambda} & 2i\sqrt{m^2-9\Lambda^2} & 0 & 0 \\ -i\sqrt{m+3\Lambda}(\sqrt{m^2-\Lambda^2} + \sqrt{m^2-9\Lambda^2}) & \frac{-8\Lambda^2\sqrt{m-3\Lambda}}{m+3\Lambda} & \frac{-8i\Lambda^2}{\sqrt{m+3\Lambda}} \\ -i\sqrt{m+3\Lambda}(\sqrt{m^2-\Lambda^2} - \sqrt{m^2-9\Lambda^2}) & \frac{8\Lambda^2\sqrt{m-3\Lambda}}{m+3\Lambda} & \frac{-8i\Lambda^2}{\sqrt{m+3\Lambda}} \end{pmatrix}$$

De la expresión de esta matriz fundamental es inmediato inferir la no degeneración del autovalor  $\Omega = -2i\Lambda$ . Para el caso  $\Lambda = \frac{m}{3}$ , (I.3.10) se puede resolver directamente llegándose a la misma conclusión. Numéricamente se ha analizado la posible existencia de nuevos autovalores sobre el eje imaginario; para ello se ha utilizado las soluciones asintóticas de (I.3.5) que decrecen exponencialmente, a partir de las cuales, mediante el método de integración de Hamming [23], se ha obtenido la solución de (I.3.5). En todos los casos analizados, salvo para  $\Omega = 0$  y  $\Omega = +2i\Lambda$ , la solución crece exponencialmente en el extremo contrario al que se ha empezado a integrar numéricamente.

La presencia de estos autovalores imaginarios también es debida a simetrías de la ecuación de Dirac no lineal. Demostremoslo para el primero de los autovalores de (I.3.8), de igual forma se haría para el segundo. La existencia de dicho autovalor implica que

$$e^{-2i\Lambda t} \begin{pmatrix} B \\ iB \\ A \\ iA \end{pmatrix}$$

es solución del sistema (I.3.4) y por ser los coeficientes de este sistema funciones reales, también serán soluciones

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-2i\Lambda t} \begin{pmatrix} B \\ iB \\ A \\ iA \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} B \cos 2\Lambda t \\ B \operatorname{sen} 2\Lambda t \\ A \cos 2\Lambda t \\ A \operatorname{sen} 2\Lambda t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{-2i\Lambda t} \begin{pmatrix} B \\ iB \\ A \\ iA \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -B \operatorname{sen} 2\Lambda t \\ B \cos 2\Lambda t \\ -A \operatorname{sen} 2\Lambda t \\ A \cos 2\Lambda t \end{pmatrix}$$

Para estas dos soluciones, (I.3.3) adopta la forma

$$\Psi = \Psi_S + \varepsilon \begin{pmatrix} B(x) \\ iA(x) \end{pmatrix} e^{i\Lambda t} \quad (\text{I.3.11})$$

$$\Psi = \Psi_S + \varepsilon \begin{pmatrix} iB(x) \\ -A(x) \end{pmatrix} e^{i\Lambda t} \quad (\text{I.3.12})$$

Ahora bien, la existencia de este par de soluciones en primer or

den en  $\xi$  de la ecuación de Dirac no lineal es debido a que dicha ecuación es invariante bajo la actuación del grupo  $SU(1, 1)$ . En efecto, ya que la onda solitaria  $\psi_S$  es solución de la ecuación de Dirac no lineal, también será solución  $e^{-i\theta} \psi_S$  y si parametrizamos el anterior grupo del siguiente modo

$$\psi \rightarrow \alpha \psi + \beta \psi^c$$

siendo

$$\alpha = \sqrt{1 + \xi^2} e^{i\theta}, \quad \beta = i\xi e^{i\varphi}, \quad \psi^c = \gamma^0 \gamma^1 \psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi^*$$

también será solución

$$\sqrt{1 + \xi^2} e^{i\theta} e^{-i\theta} \psi_S + \xi e^{i\varphi} (e^{-i\theta} \psi_S)^c$$

que en primer orden en  $\varphi, \theta, \xi$  adopta la forma (I.3.11).

Partiendo de una parametrización del grupo  $SU(1, 1)$  del tipo

$$\psi \rightarrow \alpha \psi + i\beta \psi^c$$

se llega a la conclusión de que la existencia de (I.3.12) es igualmente debida a la invariancia de la ecuación de Dirac no lineal bajo la actuación del anterior grupo pseudo-unitario especial.

4º) Exceptuando las transformaciones de Lorentz puras, todas las simetrías continuas conocidas de la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar han sido asociadas a los tres autovalores encontrados del operador lineal  $L$ . Demostremos ahora que la asociación autovalor  $\leftrightarrow$  grupo continuo de simetría no es posible para dichas transformaciones Lorentz.

Si representamos la transformación de Lorentz pura a lo largo del eje espacial de velocidad  $th\xi$  por

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} \text{ch } \xi & \text{sh } \xi \\ \text{sh } \xi & \text{ch } \xi \end{pmatrix}$$

entonces, el resultado de la actuación de esta transformación sobre la onda solitaria viene dado por

$$\psi_S'(x) = S(\Lambda_L) \psi_S(\Lambda_L^{-1} x) \quad (\text{I.3.13})$$

donde

$$S(\Lambda_t) = I - \frac{1}{2} \xi \sigma^{01} \equiv I + \frac{\xi}{4} [\gamma^0, \gamma^1]$$

Desarrollando (I.3.13) en potencias de  $\xi$  y quedándonos en primer orden en ese parámetro obtenemos

$$\psi(x, t) = \begin{pmatrix} A(x) \\ iB(x) \end{pmatrix} e^{-i\Lambda t} + \xi \begin{pmatrix} -t \frac{dA}{dx} + i\Lambda xA + \frac{iB}{2} \\ i \left[ -t \frac{dB}{dx} + i\Lambda xB - \frac{iA}{2} \right] \end{pmatrix} e^{-i\Lambda t}$$

de donde deducimos que la solución del sistema (I.3.4) asociada con las transformaciones de Lorentz puras es

$$\begin{pmatrix} -t \frac{dA}{dx} \\ \Lambda xA + \frac{B}{2} \\ -t \frac{dB}{dx} \\ \Lambda xB - \frac{A}{2} \end{pmatrix} \equiv \chi(x, t)$$

y la extensión analítica de la transformada de Laplace de la anterior solución es

$$\begin{pmatrix} -\Omega^{-2} \frac{dA}{dx} \\ (\Lambda xA + B/2)\Omega^{-1} \\ -\Omega^{-2} \frac{dB}{dx} \\ (\Lambda xB - A/2)\Omega^{-1} \end{pmatrix} \equiv \hat{\chi}(x, \Omega), \Omega \neq 0$$

El vector  $\hat{\chi}(x, \Omega)$  es solución del problema inhomogéneo

$$L\phi + \begin{pmatrix} \alpha_{or} \\ \alpha_{oi} \\ \beta_{or} \\ \beta_{oi} \end{pmatrix} = \Omega\phi$$

siendo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{or} \\ \alpha_{oi} \\ \beta_{or} \\ \beta_{oi} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda xA + \frac{B}{2} \\ 0 \\ \Lambda xB - \frac{A}{2} \end{pmatrix} = \chi(x, t=0)$$

y por ende, inferimos que las transformaciones de Lorentz puras están asociadas a una solución particular del problema inhomogéneo.

5º) Determinemos el espectro continuo del operador  $L$ . Para ello plantearemos el siguiente problema de autovalores

$$L_{\infty} \phi = i\mu \phi, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \phi \in \bigoplus_{l=1}^4 H^1(\mathbb{R}) \quad (I.3.14)$$

siendo  $L_{\infty}$  la parte asintótica de  $L$ , es decir

$$L_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & m-\Lambda & 0 & \frac{d}{dx} \\ -m+\Lambda & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & -m-\Lambda \\ \frac{d}{dx} & 0 & m+\Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones independientes de (I.3.14) son

$$\begin{pmatrix} \sqrt{m+\Lambda+\mu} \\ +i\sqrt{m+\Lambda+\mu} \\ -\sqrt{m-\Lambda-\mu} \\ -i\sqrt{m-\Lambda-\mu} \end{pmatrix} e^{\sqrt{(m+\Lambda+\mu)(m-\Lambda-\mu)} x}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{m+\Lambda-\mu} \\ +i\sqrt{m+\Lambda-\mu} \\ \sqrt{m-\Lambda+\mu} \\ -i\sqrt{m-\Lambda+\mu} \end{pmatrix} e^{\sqrt{(m+\Lambda-\mu)(m-\Lambda+\mu)} x}$$

$$\begin{pmatrix} +\sqrt{m+\Lambda+\mu} \\ i\sqrt{m+\Lambda+\mu} \\ +\sqrt{m-\Lambda-\mu} \\ i\sqrt{m-\Lambda-\mu} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{(m+\Lambda+\mu)(m-\Lambda-\mu)} x}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{m+\Lambda-\mu} \\ -i\sqrt{m+\Lambda-\mu} \\ \sqrt{m-\Lambda+\mu} \\ -i\sqrt{m-\Lambda+\mu} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{(m+\Lambda-\mu)(m-\Lambda+\mu)} x}$$

De estas soluciones asintóticas se deduce que el interior del espectro continuo del operador  $L$  es

$$\{Z : Z = ir, r \in (-\infty, -m + \lambda) \cup (m - \lambda, \infty)\}$$

siendo la parte del espectro continuo representada por

$$\{Z : Z = ir, r \in (-\infty, -m - \lambda) \cup (m + \lambda, \infty)\}$$

cuatro veces degenerada, mientras que la incluida en

$$\{Z : Z = ir, r \in (-m - \lambda, -m + \lambda) \cup (m - \lambda, m + \lambda)\}$$

es doblemente degenerada. En todos estos conjuntos hay que excluir para  $\lambda > \frac{m}{3}$  los puntos  $Z = \pm 2i\lambda$  que como se ha dicho anteriormente pertenecen al espectro puntual de  $L$ .

6º) Las partes reales de los autovalores de  $L$  están acotadas. En efecto, introduzcamos la siguiente descomposición del citado operador

$$L = L_A + 2\lambda L_H$$

siendo

$$L_A = L_{\infty} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & -2A^2 + B^2 & 0 & AB \\ 2A^2 - B^2 & 0 & -AB & 0 \\ 0 & AB & 0 & A^2 - 2B^2 \\ -AB & 0 & -A^2 + 2B^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_H = \begin{pmatrix} 0 & A^2 & 0 & -AB \\ A^2 & 0 & -AB & 0 \\ 0 & -AB & 0 & B^2 \\ -AB & 0 & B^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando el operador  $L_H$  como una familia de matrices que depende del parámetro  $x$ , deducimos que el radio espectral de esta familia es

$$r(L_H) \equiv \sup_{\lambda \in \sigma(L_H)} |\lambda| = A^2(x) + B^2(x)$$

de donde recordando que  $L_H$  es autoadjunto

$$\|L_H\| = r(L_H) \leq \sup_x [A^2(x) + B^2(x)] = \begin{cases} \frac{m-\lambda}{\lambda} & \text{si } \frac{m}{2} \leq \lambda \leq m \\ \frac{m^2}{4\lambda\Lambda} & \text{si } 0 < \lambda \leq \frac{m}{2} \end{cases}$$

siendo la anterior norma la espectral

Si  $\phi$  es una autofunción de  $L$  con autovalor  $\Omega$ , deducimos

$$\phi^+(x) \phi(x) \operatorname{Re} \Omega \equiv \phi^+(x) \phi(x) \Omega_R = 2\lambda \phi^+(x) L_H \phi(x)$$

luego

$$|\Omega_R| = 2\lambda \left| \frac{\phi^+(x) L_H \phi(x)}{\phi^+(x) \phi(x)} \right| \leq 2\lambda \|L_H\|$$

de donde deducimos que los autovalores de  $L$  están en la siguiente banda del plano complejo  $\Omega$

$$|\Omega_R| \leq \begin{cases} 2(m-\lambda) & \text{si } \frac{m}{2} \leq \lambda \leq m \\ \frac{m^2}{2\lambda} & \text{si } 0 < \lambda \leq \frac{m}{2} \end{cases}$$

c) Estabilidad bajo perturbaciones continuas.

Anteriormente hemos planteado el problema de autovalores asociado a la estabilidad infinitesimal en el espacio  $\bigoplus_{i=1}^4 H^1(\mathbb{R})$ .

Recordando que el lema de Sobolev [31] nos dice que todo elemento de  $H^1(\mathbb{R})$  es, módulo una redefinición en un conjunto de medida nula, una función continua anulándose en el infinito, supondremos que las autofunciones del operador  $L$  son funciones continuas en todo el eje real.

Si introducimos las siguientes definiciones

$$L_1 \equiv \begin{pmatrix} m-\lambda-2\lambda(A^2-B^2) & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & -m-\lambda+2\lambda(A^2-B^2) \end{pmatrix}$$

$$L_2 \equiv \begin{pmatrix} \lambda-m+2\lambda(3A^2-B^2) & -4\lambda AB - \frac{d}{dx} \\ -4\lambda AB + \frac{d}{dx} & m+\lambda-2\lambda(\Lambda^2-3B^2) \end{pmatrix}$$

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad \psi \equiv \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

el problema de autovalores se puede poner del siguiente modo

$$\begin{aligned} L_1 \psi &= \Omega \phi \\ L_2 \phi &= \Omega \psi \end{aligned}$$

de donde deducimos

$$\begin{aligned} \phi^+ L_2 L_1 \psi &= \Omega^2 \phi^+ \psi \\ \psi^+ L_1 L_2 \phi &= \Omega^2 \psi^+ \phi \end{aligned}$$

Los miembros de estas igualdades deben entenderse como productos matriciales de elementos de  $\mathbb{C}^2$ . De la última de ellas y del hecho de que tanto  $L_1$  como  $L_2$  son herméticos, se deduce

$$\phi^+ L_2 L_1 \psi = (\Omega^*)^2 \phi^+ \psi$$

que junto a las relaciones anteriores nos permite afirmar

$$[\Omega^2 - (\Omega^*)^2] \phi^+ \psi = 0$$

y por ende, se verifica la siguiente alternativa

$$\Omega^2 \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad \phi_1^*(x)\phi_2(x) + \phi_3^*(x)\phi_4(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Habida cuenta, como será demostrado a continuación, de que

$$\Omega^2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \phi_1^*(0)\phi_2(0) + \phi_3^*(0)\phi_4(0) \neq 0$$

se deduce que la primera posibilidad de la anterior alternativa es la que tiene siempre lugar, y por tanto, el espectro de  $L$  está contenido en los ejes real e imaginario.

Demostremos ahora la anterior implicación. Recordando las simetrías de las funciones  $A(x)$  y  $B(x)$  se deduce que no es ninguna limitación exigir que las dos primeras componentes de las autofunciones de  $L$  sean de una cierta paridad y las otras dos de la contraria. Admitamos que dichas paridades sean par e impar - respectivamente (análogos razonamientos se utilizarían en el caso contrario) y por tanto  $\phi_3(0) = \phi_4(0) = 0$ . Ahora bien, si evaluamos en  $x = 0$  la expresión

$$\sum_{i=1}^4 \phi_i^*(x) \phi_i(x) \Omega_{\mathbb{R}} = \sum_{i,j=1}^4 2\lambda \phi_i^*(x) (L_{H_{ij}}) \phi_j(x)$$

obtenemos

$$\Omega_R (|\phi_1(0)|^2 + |\phi_2(0)|^2) = 2(m-\Lambda) (\phi_1^*(0)\phi_2(0) + \phi_1(0)\phi_2^*(0))$$

Como por hipótesis  $\Omega_R \neq 0$ , de la anterior igualdad se deduce que la anulación en  $x = 0$  de una de las dos primeras componentes de la autofunción  $\phi$  implica la anulación de dicha autofunción en el citado punto. Ahora bien, esta autofunción debe ser la idénticamente nula, puesto que en caso contrario, existirían otras tres soluciones (no necesariamente de cuadrado integrable) del sistema diferencial involucrado por el problema de autovalores que - junto a ella formarían un sistema linealmente independiente, lo cual es imposible pues su Wronskiano se anularía en un punto. La no anulación de las dos primeras componentes en  $x = 0$ , demuestra la anterior implicación.

Numéricamente se ha analizado la existencia de autovalores del operador  $L$  en el intervalo del eje real  $[0, 2(m-\Lambda)]$  ó  $[0, \frac{m^2}{2\Lambda}]$ , según que  $\frac{m}{2} \leq \Lambda \leq m$  ó  $0 < \Lambda \leq \frac{m}{2}$ , mediante la utilización

del método de Hamming [23] para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Del resultado negativo de este análisis deducimos que las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar son estables frente a pequeñas perturbaciones.

Todo lo dicho anteriormente puede extenderse a las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo vectorial (modo de Thirring) y a las de la misma ecuación autoacoplada pseudo vectorialmente. Sin embargo, no se puede extender para las ondas solitarias del campo de Dirac con autoacoplo pseudoescalar, ya que en este caso las ondas solitarias presentan una fuerte singularidad en  $x = 0$ . Toda esta extensión puede verse en el apéndice B.

II - ESQUEMA NUMERICO PARA LA ECUACION DE DIRAC  
CON AUTOACOPLO ESCALAR.

II.1. Discretización de la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar.

En esta sección expondremos el esquema numérico utilizado para resolver el siguiente problema de Cauchy

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi + 2\lambda (\bar{\psi} \psi) \psi = 0 \quad (\text{II.1.1})$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \quad , \quad |\psi_0(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

donde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A efectos de cálculo numérico es conveniente hacer el siguiente cambio en las funciones y variables

$$\psi = \sqrt{\frac{m}{2\lambda}} u \quad , \quad x' = mx \quad , \quad t' = mt$$

Volviendo a denotar sin primas las variables espacial y temporal, la ecuación (II.1.1) se nos transforma en

$$i\gamma^\mu \partial_\mu u - u + (\bar{u} u) u = 0 \quad (\text{II.1.2})$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad |u_0(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

Introduciendo la siguiente notación

$$w \equiv \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re } u_1 \\ \text{Im } u_1 \\ \text{Re } u_2 \\ \text{Im } u_2 \end{pmatrix}$$

la ecuación (II.1.2) se puede escribir como

$$0 = \frac{\partial w}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & -1 + F(w) & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 1 - F(w) & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 - F(w) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 + F(w) & 0 \end{pmatrix} w \equiv$$

$$\equiv N(w) \quad (II.1.3)$$

$$\text{siendo } F(w) \equiv w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - w_4^2.$$

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (II.1.3) utilizaremos el siguiente esquema de Crank-Nicholson [22]

$$(1 + \frac{\xi}{2} \Lambda^j) w^{j+1} = (1 - \frac{\xi}{2} \Lambda^j) w^j \quad (II.1.4)$$

donde

$$\Lambda^j = N(w^j) + \frac{\xi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{w=w^j}$$

indicando los superíndices la discretización de la variable temporal y siendo  $\xi$  el paso de la malla numérica en esta variable. Sustituyendo las derivadas temporales por las espaciales mediante (II.1.3) e introduciendo la siguiente discretización en la variable espacial

$$\frac{\partial w^j}{\partial x} \rightarrow \frac{w^j(x+h) - w^j(x-h)}{2h} \equiv D_o w_i^j$$

obtenemos

$$(1 \pm \frac{\xi}{2} \Lambda_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & \mp k_i^j & \pm \frac{\xi}{2} D_o & 0 \\ \pm k_i^j & 1 & 0 & \pm \frac{\xi}{2} D_o \\ \pm \frac{\xi}{2} D_o & 0 & 1 & \mp k_i^j \\ 0 & \pm \frac{\xi}{2} D_o & \mp k_i^j & 1 \end{pmatrix} \quad (II.1.5)$$

donde por comodidad se ha utilizado la siguiente notación

$$k_i^j = \frac{\xi}{2} (1 - f_i^j) - \frac{\xi^2}{2} g_i^j$$

$$f_i^j = (w_{1i}^j)^2 + (w_{2i}^j)^2 - (w_{3i}^j)^2 - (w_{4i}^j)^2 \quad (II.1.6)$$

$$g_i^j = -w_{1i}^j D_o w_{3i}^j + w_{3i}^j D_o w_{1i}^j - w_{2i}^j D_o w_{4i}^j + w_{4i}^j D_o w_{2i}^j$$

siendo  $w_i^j$  la solución numérica del sistema (II.1.3) en  $x = ih$  y  $t = j\bar{t}$ .

A efectos de computación es conveniente reintroducir las funciones complejas u discretizadas. Para ello incorporaremos (II.1.5) en (II.1.4), obteniéndose la siguiente forma final del esquema Crank-Nicholson para la ecuación de Dirac no lineal (II.1.2)

$$\gamma u_{i-1}^{j+1} + \beta_i^j u_i^{j+1} + \alpha u_{i+1}^{j+1} = Q_i^j \quad (\text{II.1.7})$$

en donde

$$u_i^j = \begin{pmatrix} u_{1i}^j \\ u_{2i}^j \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\bar{t}}{4h} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = -\alpha$$

$$\beta_i^j = \begin{pmatrix} 1 + ik_i^j & 0 \\ 0 & 1 - ik_i^j \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.8})$$

$$Q_i^j = \begin{pmatrix} Q_{1i}^j \\ Q_{2i}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - ik_i^j) u_{1i}^j - \frac{\bar{t}}{2} D_0 u_{2i}^j \\ (1 + ik_i^j) u_{2i}^j - \frac{\bar{t}}{2} D_0 u_{1i}^j \end{pmatrix}$$

II.2. Propiedades del esquema numérico.

En esta sección expondremos algunas propiedades del esquema numérico introducido anteriormente. La primera de ellas, es su estabilidad siempre que las condiciones en las fronteras sean periódicas. La introducción de fronteras en el problema de valor inicial es debido a que en la práctica la variable espacial tiene un dominio acotado en vez de infinito. Estas fronteras ficticias deben ser incorporadas en el esquema numérico de una manera que distorsionen lo menos posible el problema original.

Demostremos la citada propiedad. Para ello dotaremos al espacio vectorial real de las 4-plas  $w_i^j$  de una estructura de espacio euclideo mediante la norma

$$\|w_i^j\|^2 = (w_i^j, w_i^j) = \sum_{k=1}^4 (w_{ki}^j)^2 \quad (\text{II.2.1})$$

Si al esquema de Crank-Nicholson, puesto como

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\tau} + \Lambda_i^j \frac{w_i^{j+1} + w_i^j}{2} = 0$$

lo multiplicamos escalarmente por  $(w_i^{j+1} + w_i^j)/2$  y sumamos respecto al índice espacial, obtenemos

$$\sum_{i=0}^N \|w_i^{j+1}\|^2 = \sum_{i=0}^N \|w_i^j\|^2 \quad (\text{II.2.2})$$

siempre que se verifiquen las tres igualdades siguientes

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N \left[ (w_i^j, \Lambda_i^j w_i^{j+1}) + (w_i^{j+1}, \Lambda_i^j w_i^j) \right] = \\ & = (w_{3,N}^{j+1} w_{1,N+1}^j - w_{3,0}^{j+1} w_{1,-1}^j + w_{1,N}^j w_{3,N+1}^{j+1} - w_{1,0}^j w_{3,-1}^{j+1} + \\ & + w_{4,N}^{j+1} w_{2,N+1}^j - w_{4,0}^{j+1} w_{2,-1}^j + w_{2,N}^j w_{4,N+1}^{j+1} - w_{2,0}^j w_{4,-1}^{j+1} + w_{1,N}^{j+1} w_{3,N+1}^j - \\ & - w_{1,0}^{j+1} w_{3,-1}^j + w_{3,N}^j w_{1,N+1}^{j+1} - w_{3,0}^j w_{1,-1}^{j+1} + w_{2,N}^{j+1} w_{4,N+1}^j - w_{2,0}^{j+1} w_{4,-1}^j + \end{aligned}$$

$$+ w_{4,N}^j w_{2,N+1}^{j+1} - w_{4,0}^j w_{2,-1}^{j+1})/2h = 0 \quad (\text{II.2.3a})$$

$$\sum_{i=0}^N (w_i^j, \wedge_i^j w_i^j) = (w_{4,N}^j w_{2,N+1}^j - w_{4,0}^j w_{2,-1}^j + w_{2,N}^j w_{4,N+1}^j - w_{2,0}^j w_{4,-1}^j + w_{3,N}^j w_{1,N+1}^j - w_{3,0}^j w_{1,-1}^j + w_{1,N}^j w_{3,N+1}^j - w_{1,0}^j w_{3,-1}^j)/2h = 0 \quad (\text{II.2.3b})$$

$$\sum_{i=0}^N (w_i^{j+1}, \wedge_i^j w_i^{j+1}) = (w_{1,N}^{j+1} w_{2,N+1}^j - w_{4,0}^{j+1} w_{2,-1}^{j+1} + w_{2,N}^{j+1} w_{4,N+1}^{j+1} - w_{2,0}^{j+1} w_{4,-1}^{j+1} + w_{3,N}^{j+1} w_{1,N+1}^{j+1} - w_{3,0}^{j+1} w_{1,-1}^{j+1} + w_{1,N}^{j+1} w_{3,N+1}^{j+1} - w_{1,0}^{j+1} w_{3,-1}^{j+1})/2h = 0 \quad (\text{II.2.3c})$$

Una condición suficiente para que se verifiquen (II.2.3) es que impongamos condiciones periódicas en las fronteras de la variable espacial, es decir

$$w_{i,-1} = w_{i,N} \quad w_{i,0} = w_{i,N+1} \quad i = 1, \dots, 4$$

La igualdad (II.2.2) nos dice que el esquema de Crank-Nicholson es incondicionalmente estable, respecto a la norma introducida anteriormente, para la ecuación de Dirac autoacoplada escalarmente, es decir, la estabilidad del esquema es independiente de la longitud de los pasos temporal y espacial utilizados.

Otra propiedad del esquema es su consistencia con el sistema de ecuaciones en derivadas parciales. En efecto, definamos  $T_i^j$  del siguiente modo

$$T_i^j = \frac{(w)_i^{j+1} - (w)_i^j}{\tau} + \wedge_i^j \frac{(w)_i^{j+1} + (w)_i^j}{2}$$

siendo  $(w)_i^j$  el valor que toma en el nudo de la red  $(i,j)$  la solución exacta del sistema (II.1.3). Desarrollando  $(w)_i^{j+1}$  en serie de Taylor de la variable temporal, teniendo en cuenta (II.1.3) y por tanto

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [N(w)]^2 w - \frac{\partial N}{\partial t} w$$

se deduce

$$\begin{aligned} \max_{t_j} \| T_i^j \| &= \max_{t_j} \| -N_i^j (w)_i^j + \Lambda_i^j (w)_i^j + \\ &+ \frac{\xi}{2} \left[ (N_i^j)^2 - \left( \frac{\partial N}{\partial t} \right)_i^j - \Lambda_i^j N_i^j \right] (w)_i^j + O(\xi^2) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la norma definida en (II.2.1). Recordando que

$$\Lambda_i^j = N_i^j + \frac{\xi}{2} \left( \frac{\partial N}{\partial t} \right)_i^j$$

se infiere

$$\max_{t_j} \| T_i^j \| = O(\xi^2)$$

es decir, el esquema de Crank-Nicholson tiene un error de truncamiento en la variable temporal del orden de  $\xi^2$ . De la discretización utilizada en la variable espacial es inmediato deducir que el error de truncamiento en esta variable es  $O(h^2)$ .

Por último, otra propiedad que sugiere la utilización del esquema numérico introducido anteriormente es que conserva exactamente las mismas simetrías bajo inversión espacial que la ecuación de Dirac no lineal (II.1.2). Así por ejemplo, si  $u_1(x,0)$  es par y  $u_2(x,0)$  impar, también tendrán estas simetrías  $u_1(x,t)$  y  $u_2(x,t)$ . Pues bien, de la definición (II.1.6) y teniendo en cuenta (II.1.8) se infiere que si  $u_{1,i}^j = u_{1,-i}^j$  y  $u_{2,i}^j = -u_{2,-i}^j$  entonces se verifica

$$\beta_i^j = \beta_{-i}^j \quad \varrho_{1,i}^j = \varrho_{1,-i}^j \quad \varrho_{2,i}^j = -\varrho_{2,-i}^j$$

y por tanto  $u_{1,i}^{j+1} = u_{1,-i}^{j+1}$  y  $u_{2,i}^{j+1} = -u_{2,-i}^{j+1}$ . Análogamente se demostraría el caso en que la primera y segunda componente del espinor del dato inicial fuesen impar y par respectivamente. Esta última propiedad nos permite aumentar la velocidad de cómputo en los casos en que los datos iniciales presenten las mencionadas simetrías, ya que nos limitaremos a calcular los valores de  $u_i^{j+1}$  en un semieje de la variable espacial en vez de hacerlo en todo el eje.

Las propiedades anteriores son condiciones necesarias para poder aplicar el esquema numérico. Como los datos iniciales que utilizaremos son analíticos, es de preveer que la solución numérica tenderá a la no discretizada cuando los pasos de la malla numérica tiendan a cero. La bondad de los resultados obtenidos ha sido comprobada observando la conservación en la evolución temporal de las constantes del movimiento.

El hecho de que la propiedad en que nos hemos basado para demostrar la estabilidad del esquema sea la conservación de la carga y por tanto, independiente del número de variables espaciales, sugiere que el esquema Crank-Nicholson admite una generalización para la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar en el espacio de Minkowski cuadridimensional. En efecto, dicha generalización multidimensional es factible y ha sido llevada a cabo en el apéndice C.

II.3. Resolución del sistema de ecuaciones numéricas, Método de factorización matricial.

Para resolver el sistema (II.1.7) se puede utilizar el siguiente método iterativo de Jacobi [23].

$$\begin{pmatrix} u_{1i}^{(m+1)} \\ u_{2i}^{(m+1)} \end{pmatrix} = \frac{\zeta}{2[1+(k_i^j)^2]} \begin{pmatrix} 0 & -(1-ik_i^j)D_o \\ 1(1+ik_i^j)D_o & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1i}^{(m)} \\ u_{2i}^{(m)} \end{pmatrix} + \frac{1}{1+(k_i^j)^2} \begin{pmatrix} (1-ik_i^j) Q_{1i}^j \\ (1+ik_i^j) Q_{2i}^j \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.1})$$

donde sin peligro de confusión se han sustituido los superíndices  $j+1$  por el orden de iteración. Es fácil ver que la norma del operador a iterar está acotada por  $\zeta/2h$ ; por lo tanto, la condición que se debe imponer a la malla numérica para que el sistema (II.1.7) sea resoluble por este método iterativo es que  $\zeta < 2h$ . Habida cuenta que el recorrido del índice espacial suele ser bastante grande, la convergencia de (II.3.1) es demasiado lenta si queremos mantener precisión y llegar a tiempos de evolución de la ecuación (II.1.2) suficientemente significativos.

En vez de acelerar la convergencia del método iterativo, se ha creído más oportuno resolver el sistema de ecuaciones (II.1.7) mediante el método de factorización matricial [21, 22]. Para ello busco soluciones del tipo

$$u_i^{j+1} = \Omega_{i+1}^{j+1} u_{i+1}^{j+1} + \Gamma_{i+1}^{j+1} \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad (\text{II.3.2})$$

siendo  $\Omega_{i+1}^{j+1}$  una matriz  $2 \times 2$  y  $\Gamma_{i+1}^{j+1}$  un vector  $2 \times 1$ . Sustituyendo (II.3.2) en (II.1.7) se encuentran las siguientes fórmulas recurrentes

$$\begin{aligned} \Omega_{i+1}^{j+1} &= -(\gamma \Omega_i^{j+1} + \beta_i^j)^{-1} \alpha \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ \Gamma_{i+1}^{j+1} &= (\gamma \Omega_i^{j+1} + \beta_i^j)^{-1} (Q_i^j - \gamma \Gamma_i^{j+1}) \quad (\text{II.3.3}) \end{aligned}$$

$$= \Omega_{i+1}^{j+1} \alpha^{-1} \Gamma_i^{j+1} - \Omega_{i+1}^{j+1} \alpha^{-1} \rho_i^j \quad 1 \leq i \leq N-1$$

Si se toma el recorrido del índice espacial lo suficientemente amplio, a efectos prácticos es lícito suponer

$$\Omega_1^{j+1} = \Omega_N^{j+1} = 0 \quad \Gamma_1^{j+1} = \Gamma_N^{j+1} = 0 \quad (\text{II.3.4})$$

lo cual, junto con (II.3.3) y (II.3.2), nos permiten evaluar  $u_i^{j+1}$  ( $0 \leq i \leq N$ ), conocido  $u_i^j$  en  $0 \leq i \leq N$ .

Para dar por terminada la exposición del método empleado en resolver el sistema (II.1.7) solamente nos queda por demostrar que en dicho método recursivo los errores de cálculo no se amplifican, ó como se suele decir, el método es espacialmente estable [21]. La demostración la haremos en dos etapas. En la primera deduciremos una acotación para la norma espectral de las matrices  $\Omega_i^{j+1}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) y en la segunda abordaremos la demostración propiamente dicha.

En esta primera etapa razonaremos inductivamente. Recordando (II.3.3), (II.3.4) y suponiendo  $\zeta = h$ , deducimos

$$\Omega_2^{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4(1 + ik_1^j)} \\ \frac{1}{4(1 - ik_1^j)} & 0 \end{pmatrix}$$

donde es interesante recalcar que los elementos de dicha matriz son en módulo menores que la unidad y por tanto, la norma espectral de  $\Omega_2^{j+1}$  está acotada por la unidad. Ahora bien, si

$$\Omega_i^{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad |z_1| < 1, |z_2| < 1$$

deducimos de la primera expresión de (II.3.3) que

$$\Omega_{i+1}^{j+1} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4(1 + ik_1^j - \frac{z_2}{4})} \\ \frac{1}{4(1 - ik_1^j - \frac{z_1}{4})} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.5})$$

de donde se infiere la acotación buscada

$$\|\Omega_i^{j+1}\| < 1 \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{II.3.6})$$

Vayamos con la segunda etapa. Si denotamos por  $\delta \Omega_{i+1}^{j+1}$  el error cometido al calcular  $\Omega_{i+1}^{j+1}$  a partir de  $\Omega_i^{j+1}$ , de (II.3.3) obtenemos

$$\delta \Omega_{i+1}^{j+1} = -\Omega_{i+1}^{j+1} \delta \Omega_i^{j+1} \Omega_{i+1}^{j+1} \quad 1 \leq i \leq N-1$$

y teniendo en cuenta (II.3.6)

$$\|\delta \Omega_{i+1}^{j+1}\| \leq \|\delta \Omega_i^{j+1}\| \quad 1 \leq i \leq N-1$$

es decir, en la evaluación de  $\Omega_i^{j+1}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) los errores de computación se van amortiguando. También de (II.1.8) deducimos

$$\delta \Gamma_{i+1}^{j+1} = \Omega_{i+1}^{j+1} \alpha^{-1} \gamma \delta \Gamma_i^{j+1}$$

y por tanto

$$\|\delta \Gamma_{i+1}^{j+1}\| \leq \|\delta \Gamma_i^{j+1}\|$$

luego el cálculo de  $\Gamma_i^{j+1}$  ( $0 \leq i \leq N$ ) goza de la misma propiedad respecto a la propagación de errores que el de  $\Omega_i^{j+1}$ . Tampoco en el cómputo de  $u_i^{j+1}$ , mediante (II.3.2), se amplifican los errores, pues

$$\delta u_i^{j+1} = \Omega_{i+1}^{j+1} \delta u_{i+1}^{j+1}$$

En definitiva, el método de factorización matricial propuesto para resolver no iterativamente el sistema (II.1.7) es esencialmente estable, su eficacia es muy considerable y ha sido empleado exhaustivamente.

En el caso de que los datos iniciales presenten las simetrías par-impar o impar-par, el método de factorización matricial debe ser modificado para incorporar dichas simetrías. Supongamos que  $x = 0$  es alcanzado cuando  $i = p$ ; del (II.3.3) y (II.3.4) deducimos

$$\Omega_{p+1}^{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & R_{p+1} \\ S_{p+1} & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{p+1}^{j+1} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{p+1} \\ \hat{S}_{p+1} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_p^{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & R_p \\ S_p & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_p^{j+1} = \begin{pmatrix} \hat{R}_p \\ \hat{S}_p \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$u_{1p}^{j+1} = R_{p+1} u_{2p+1}^{j+1} + \hat{R}_{p+1}$$

$$u_{2p-1}^{j+1} = S_p u_{1p}^{j+1} + \hat{S}_p$$

Si el dato inicial es del tipo par-impar, entonces

$$u_{2p+1}^{j+1} = -u_{2p-1}^{j+1}$$

que junto a las dos últimas igualdades, nos dice que el valor de la primera componente del espinor en  $x = 0$  es

$$u_{1p}^{j+1} = \frac{\hat{R}_{p+1} - \hat{S}_p R_{p+1}}{1 + S_p R_{p+1}}$$

mientras que el de la segunda componente es por paridad

$$u_{2p}^{j+1} = 0$$

En definitiva, en caso de que las componentes del espinor del dato inicial fuesen par e impar respectivamente, en el método de factorización matricial los valores del espinor en  $x = 0$  son conocidos, y por tanto dicho método se puede, y es conveniente, aplicar solamente a la mitad del rango de la variable espacial.

En el caso de que el dato inicial fuese impar-par, se razonaría análogamente a lo dicho anteriormente, tomando el espinor en  $x = 0$  los valores

$$u_{1p}^{j+1} = 0 \quad u_{2p}^{j+1} = \frac{\hat{S}_{p+1} - \hat{R}_p S_{p+1}}{1 + R_p S_{p+1}}$$

III. EVOLUCION DE ALGUNAS CONFIGURACIONES INICIALES.

### III.1. Resultados numéricos.

En esta sección analizaremos la evolución temporal de algunas configuraciones iniciales para la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar. Deseamos saber si, como ocurre en otras ecuaciones de evolución no lineales, las ondas solitarias de esta ecuación son los estados finales a los que tienden dichas configuraciones y, en caso afirmativo, establecer como son alcanzados dichos estados.

Por limitaciones de computación, debemos restringirnos a datos iniciales que presumiblemente alcancen rápidamente su estado final. Las configuraciones iniciales analizadas son

$$\begin{array}{ll} \text{I) } u_1(x, 0) = \alpha e^{-0.05 x^2} & \text{II) } u_1(x, 0) = \alpha / \text{ch}x \\ u_2(x, 0) = 0 & u_2(x, 0) = 0 \end{array}$$

Las dos familias uniparamétricas anteriores presentan la característica común de que su primera componente es par y la segunda impar. Esto nos permite restringirnos, sin pérdida de generalidad, a estudiar su evolución sólo para valores negativos de la variable espacial. La bondad de los resultados numéricos es controlada observando la conservación numérica de la carga y energía. Estas dos cantidades se mantienen constantes en la evolución numérica con un error menor que 0.05 % y 0.5 % respectivamente. Nótese que las otras constantes del movimiento se conservan, salvo errores de truncamiento en el método de integración de dichas constantes, debido a la simetría del dato inicial.

A partir de la expresión analítica de las ondas solitarias, así como de sus densidades de carga y de energía, se deduce que si representamos por  $\rho_Q(x, t)$  y  $\rho_E(x, t)$  las densidades de carga y energía de la configuración en un cierto tiempo  $t$ , - unas condiciones necesarias para que el estado final de las dos familias anteriores sea una onda solitaria son

$$\begin{array}{l} 1) \quad \rho_Q(0, t) / \rho_E(0, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 \\ 2) \quad - \text{ Fase } (u_1(0, t)) / t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Lambda^{(2)} \\ 3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \rho_Q(0, t) / 2) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \rho_E(0, t) / 2) = \Lambda^{(3)} \end{array}$$

verificándose  $\Lambda^{(2)} = \Lambda^{(3)}$ . La constante  $\Lambda^{(2)}$  la identificaremos con el parámetro  $\Lambda$  que determina unívocamente la onda solitaria del estado final.

La evolución temporal de la familia I dependen del valor del parámetro  $\alpha$ . Para mayor claridad, distinguiremos los cuatro siguientes (salvo un cambio de signo en el espinor, la evolución de las configuraciones con  $\alpha < 0$  son idénticas a las que poseen  $\alpha > 0$ ):

i)  $0 < \alpha < 0.3$  La gaussiana inicial tiende a aproximarse hacia la solución nula. Es imposible determinar numéricamente si el dato inicial se dispersa totalmente o, por el contrario, - el estado final es una onda solitaria con  $\Lambda \lesssim 1$ .

ii)  $0.3 \leq \alpha < 0.8$  El estado final es una onda solitaria. El criterio segundo nos da rápidamente ( $t \lesssim 40$ ) el valor  $\Lambda^{(2)}$  - que coincide con el obtenido mediante el tercer criterio. La verificación de este último criterio, al igual que ocurre con el primero, se realiza a tiempos sustancialmente mayores que los - empleados para el segundo criterio (fig. III.1 y 2), y dichos - tiempos van en aumento con  $\alpha$ .

iii)  $0.8 \leq \alpha \leq 1.1$  En este rango sólo el segundo criterio es aplicable, ya que los máximos de las densidades de carga y - energía presentan oscilaciones muy bruscas que apenas se amortiguan

iv)  $1.1 < \alpha$ . Ninguno de los tres criterios se verifica y ni siquiera se puede intuir el estado asintótico.

De todo lo anterior deducimos que para  $\alpha \leq 1.1$  el estado asintótico final de la familia I es una onda solitaria. En la tabla III.1 damos los valores de la semicarga ( $Q$ ) y de la semienergía ( $E$ ) de la configuración inicial para distintos valores del - parámetro  $\alpha$ . También quedan recogidos en la misma tabla los valores  $\Lambda^{(2)}$  de las correspondientes ondas solitarias finales. De la observación de las dos últimas columnas de la mencionada tabla, - donde se exponen los valores de la semicarga ( $Q_S/2$ ) y de la semienergía ( $E_S/2$ ) de dichas ondas, deducimos que las mismas son alcanzadas mediante emisión de densidad de carga y de energía positiva.

Para su estudio, la familia I presenta la dificultad de la excesiva lentitud de su evolución. Teniendo en cuenta que la -

configuración inicial de la familia II tiene el mismo comportamiento asintótico en la variable espacial que las ondas solitarias, - es de esperar que sus estados finales sean alcanzados rápidamente. Los casos que se presentan para esta familia son

i)  $0 < \alpha \leq 0.5$  Los resultados son análogos a los de su homónimo de la familia I.

ii)  $0.5 < \alpha \leq 1.4$  La configuración inicial evoluciona hacia una onda solitaria, dando los tres criterios más arriba mencionados el valor del parámetro  $\Lambda$  de dicha onda. Dos hechos importantes diferencian esta evolución con la del mismo caso de la familia anterior; primero, su rapidez y segundo, para  $0.8 \leq \alpha$  la onda solitaria del estado final posee más energía que la configuración inicial, o dicho de otra manera, el estado asintótico es alcanzado emitiendo radiación constituida por densidades de energía negativas. Toda esta fenomenología queda expuesta en la tabla III.2 y en las figuras III.3 y 4.

iii)  $1.4 < \alpha \leq \sqrt{3}$  La evolución se realiza mediante fuertes oscilaciones de las densidades de carga y energía. La presencia de estas oscilaciones nos obliga a utilizar pasos de malla muy pequeños si queremos mantener una buena conservación de la carga y energía. Hasta tiempos del orden de  $\approx 100$  no se ha observado una escisión del paquete inicial ni un amortiguamiento apreciable en las oscilaciones que nos permita deducir el parámetro  $\Lambda$  de la onda solitaria del estado final (fig. III.5).

iv)  $\alpha = 1.8$  El interés de este caso radica en el hecho de que su energía total es negativa, como se deduce de la expresión de ésta en función del parámetro

$$E(\alpha) = 2\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right)$$

El estado final en este caso consiste de dos ondas solitarias - alejándose entre si. En la figura III.6 hemos representado -  $\rho_Q(x, t)$  para diferentes tiempos. A diferencia de lo que - ocurre para otras ecuaciones no lineales, como la KdV, se observa una gran dificultad en la formación de estados constituidos por dos ondas solitarias. La lentitud de formación de estos estados queda todavía más patente en la figura III.7, donde se ha representado la evolución temporal de los máximos de las densidades de carga, energía y momento de una de las ondas solitarias del estado final, así como la velocidad de la misma.

Del análisis de la evolución de las dos familias anteriores, así como del realizado para otras configuraciones iniciales, deducimos que dicha evolución depende muy directamente de la densidad de energía inicial. Si la configuración en  $t = 0$  presenta zonas con densidades de energía positivas y otras con negativas, la evolución se realiza mediante grandes oscilaciones y lentamente, ya que las densidades negativas tienden a ser radiadas hacia el infinito y esta radiación interacciona bruscamente con la parte no radiada. En caso de presentarse sólo densidades positivas, la evolución hacia el estado final se realiza rápidamente. En el caso contrario de presentarse sólo densidades negativas, la configuración inicial es radiada totalmente, como puede observarse en la figura III.8, donde exponemos la evolución de la configuración inicial  $u_1(x, 0) = 0$ ,  $u_2(x, 0) = -1.1e^{-0.05x^2}$ .

Tabla III.1 Resultados numéricos de la familia I.

$\alpha$	$Q$	$E$	$\Lambda^{(2)}$	$Q_{S/2}$	$E_{S/2}$
0.3	0.2522	0.2442	0.98	0.20	0.20
0.5	0.7006	0.6387	0.83	0.67	0.63
0.7	1.3732	1.1353	0.64	1.20	1.02
0.9	2.2700	1.6199	0.46	1.93	1.41
1.1	3.3910	1.9403	0.34	2.77	1.74

Tabla III.2 Resultados numéricos de la familia II.

$\alpha$	$Q$	$E$	$\Lambda^{(2)}$	$Q_{S/2}$	$E_{S/2}$
0.6	0.3600	0.3168	0.96	0.29	0.29
0.8	0.6400	0.5035	0.87	0.57	0.54
1.0	1.0000	0.6667	0.74	0.91	0.82
1.2	1.4400	0.7488	0.62	1.27	1.06
1.4	1.9600	0.6795	0.56	1.47	1.18

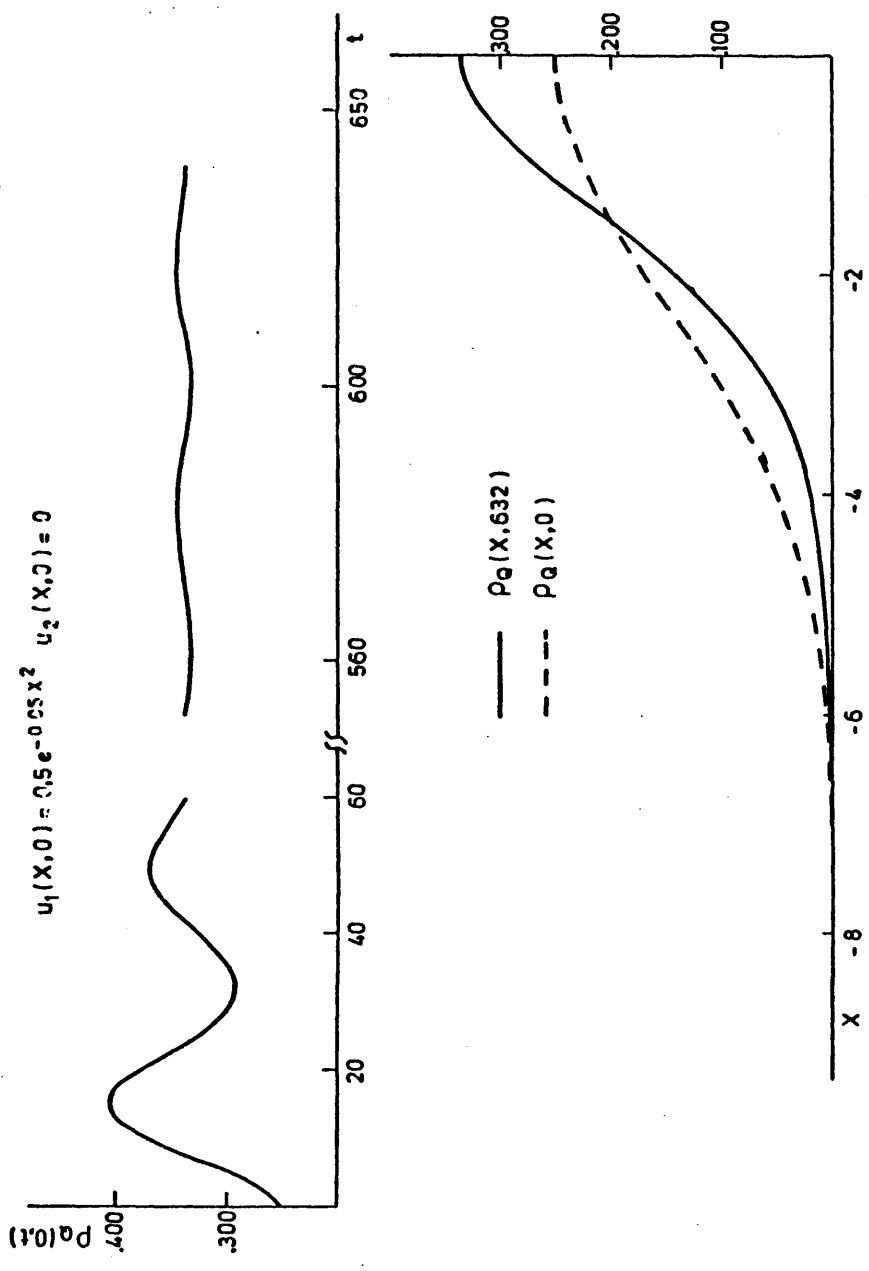


Fig. III.1

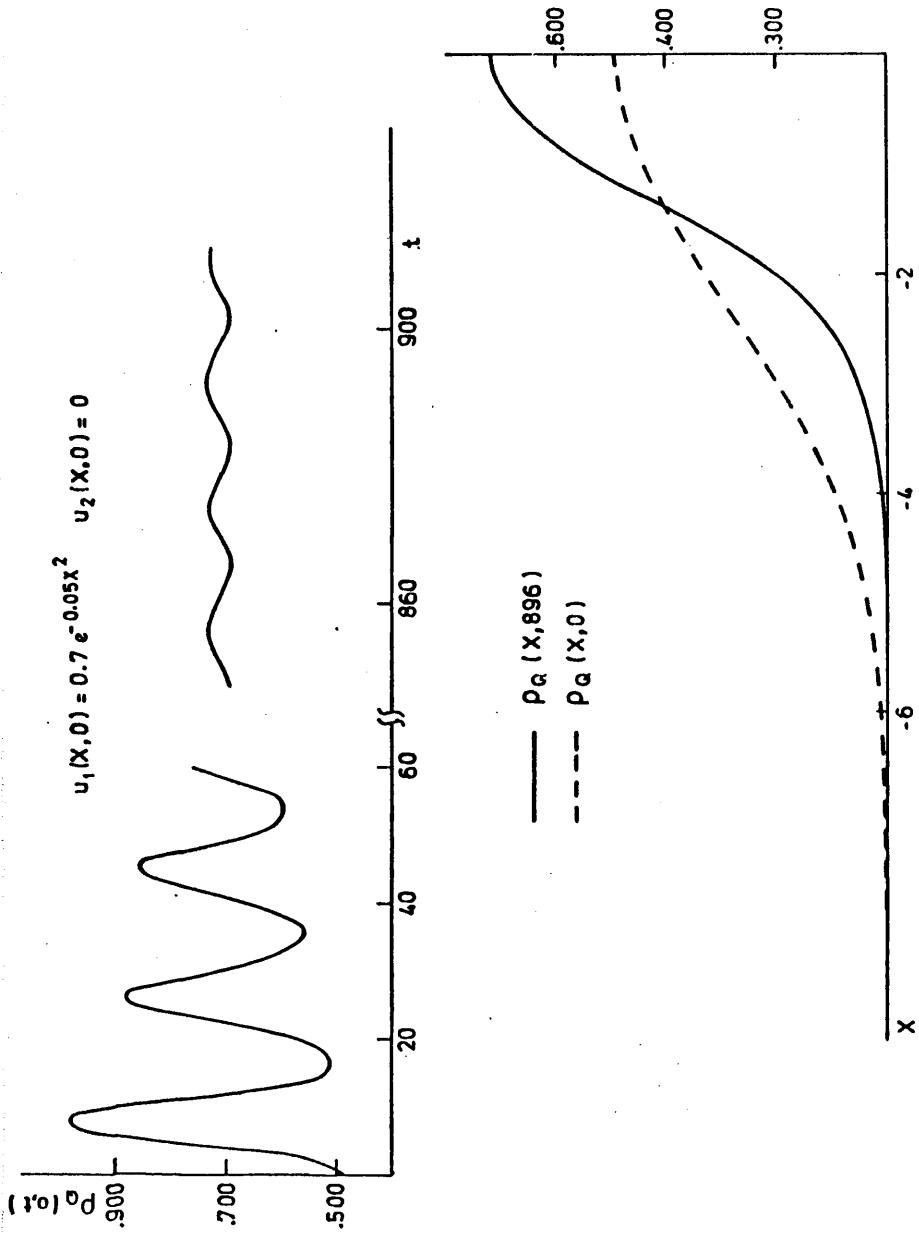


Fig. III. 2

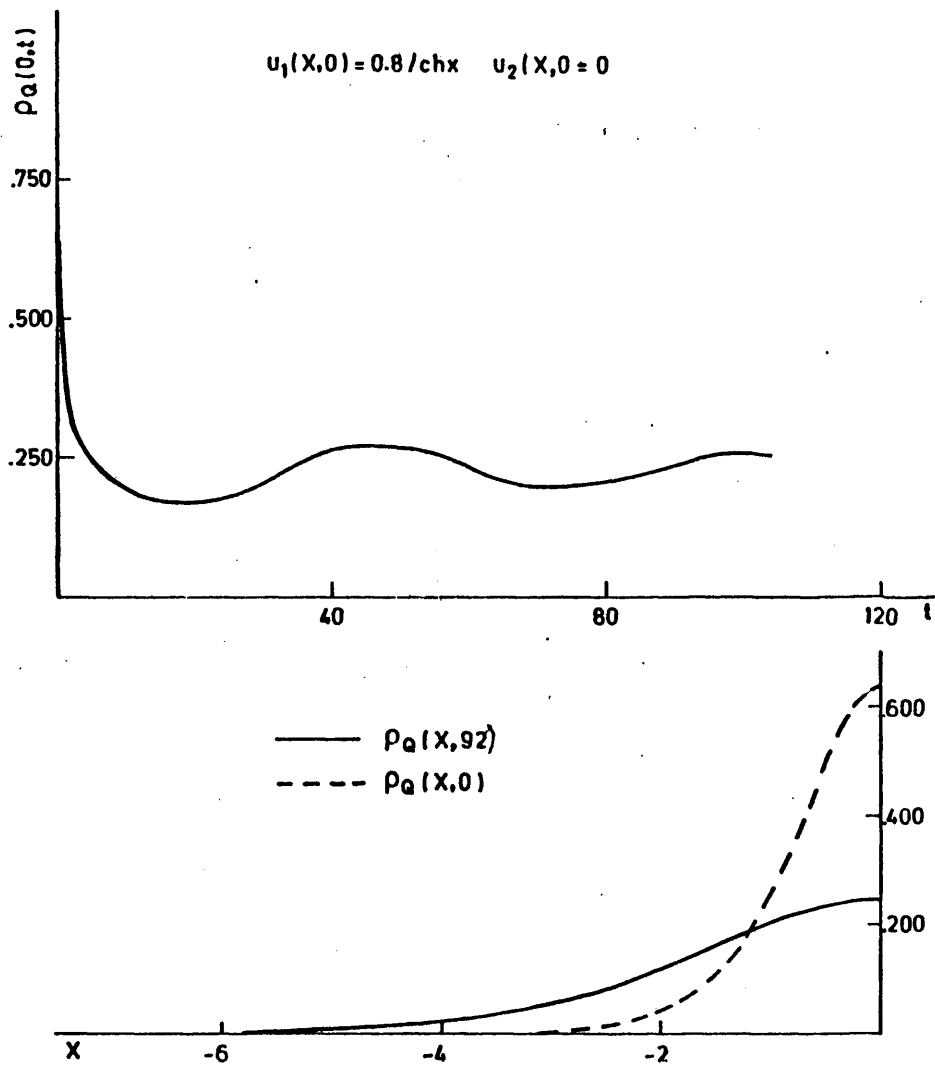


Fig. III.3

$u_1(X,0) = 1.2 / \text{ch}x \quad u_2(X,0) = 0$

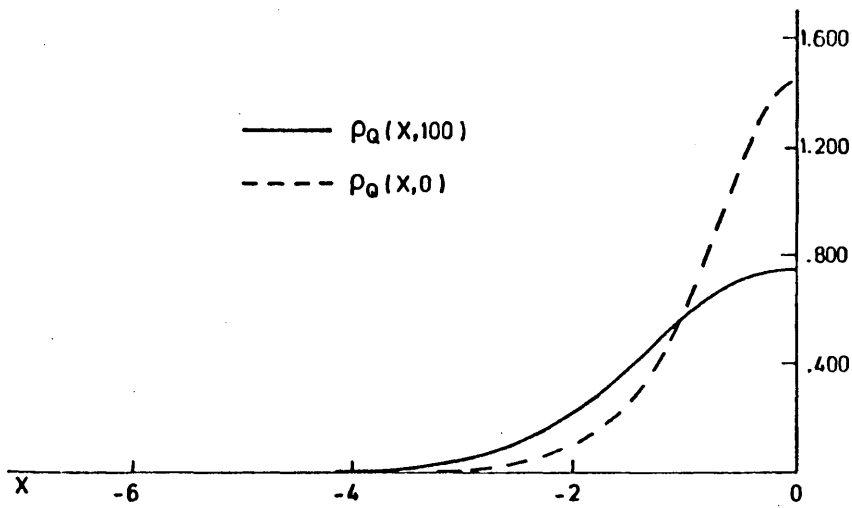
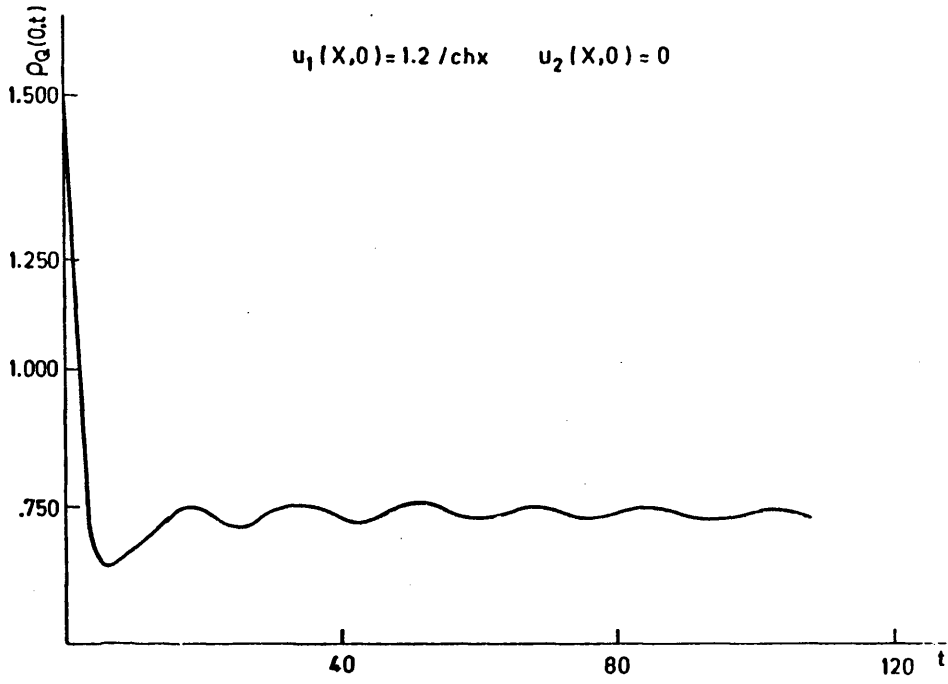


Fig. III.4

44

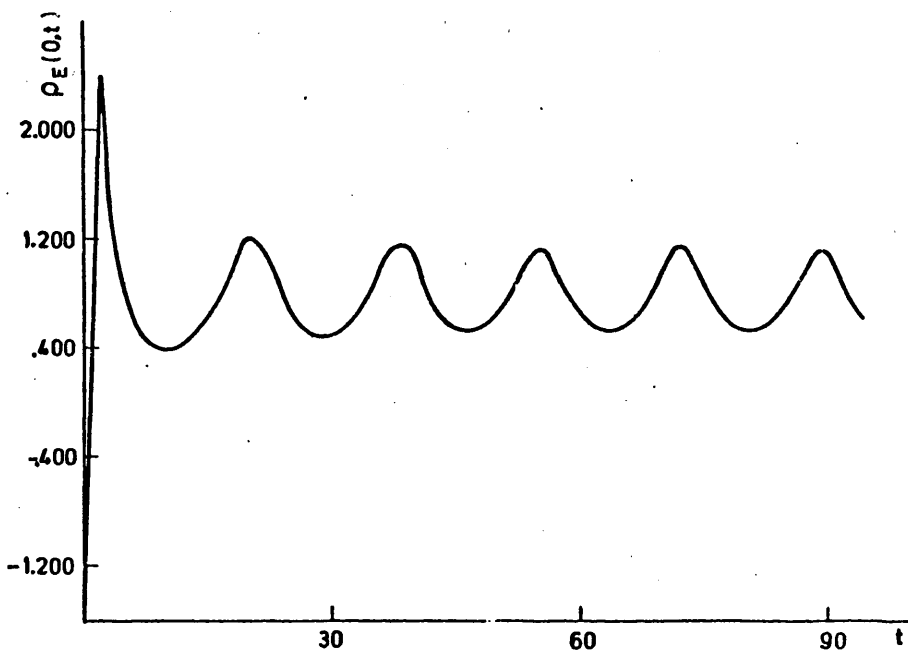
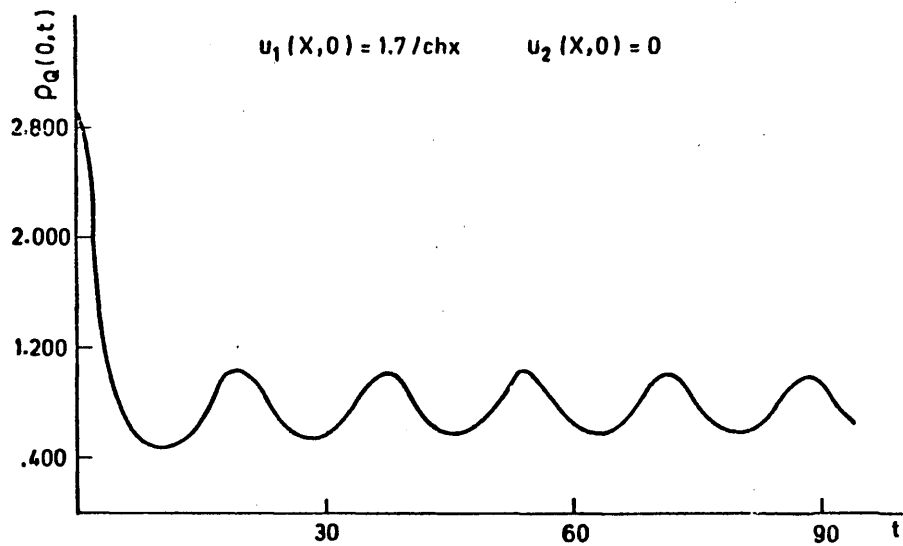


Fig. III. 5

1,5

$$u_1(x,0) = 1.8/\text{ch}x \quad u_2(x,0) = 0$$

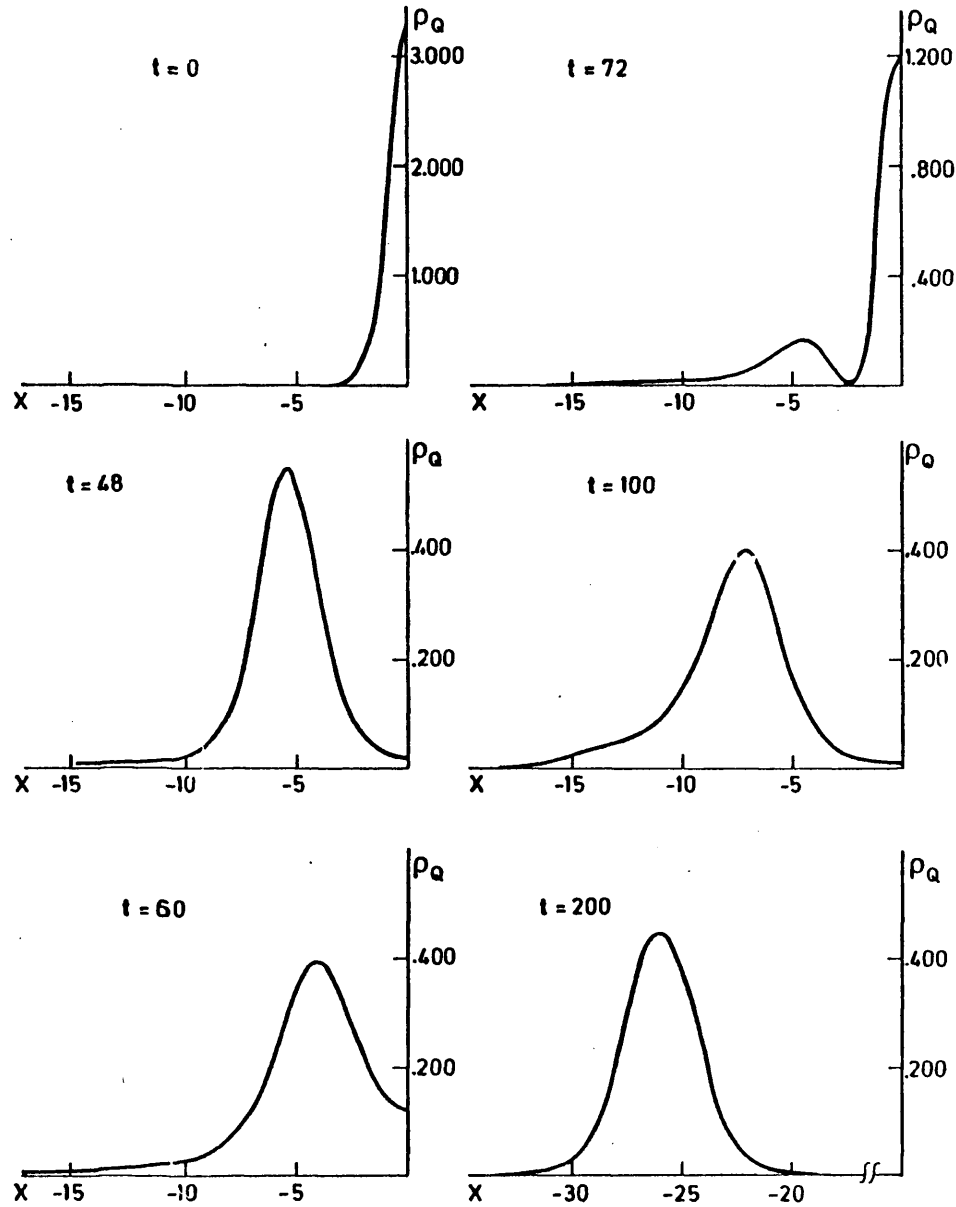


Fig. III.6

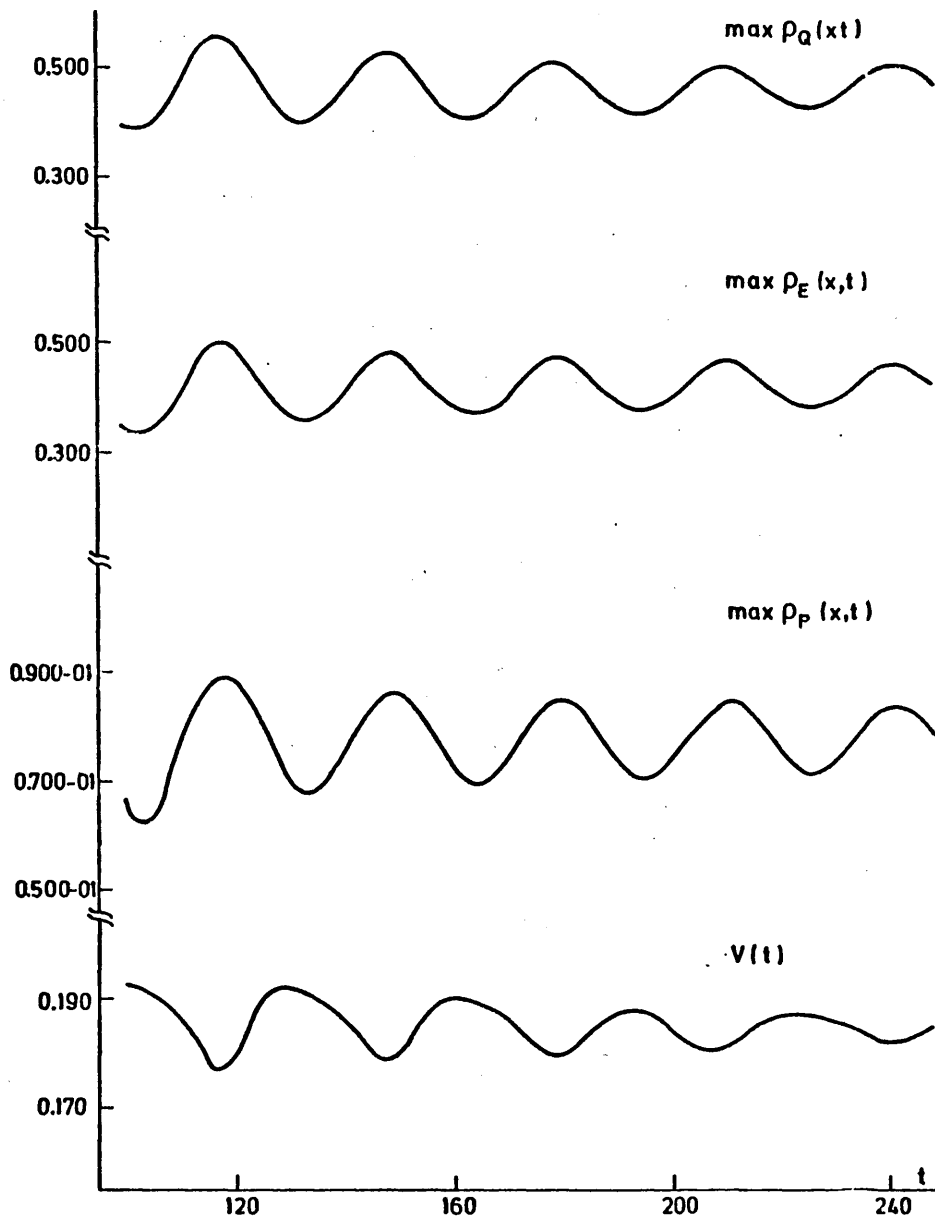


Fig. III.7

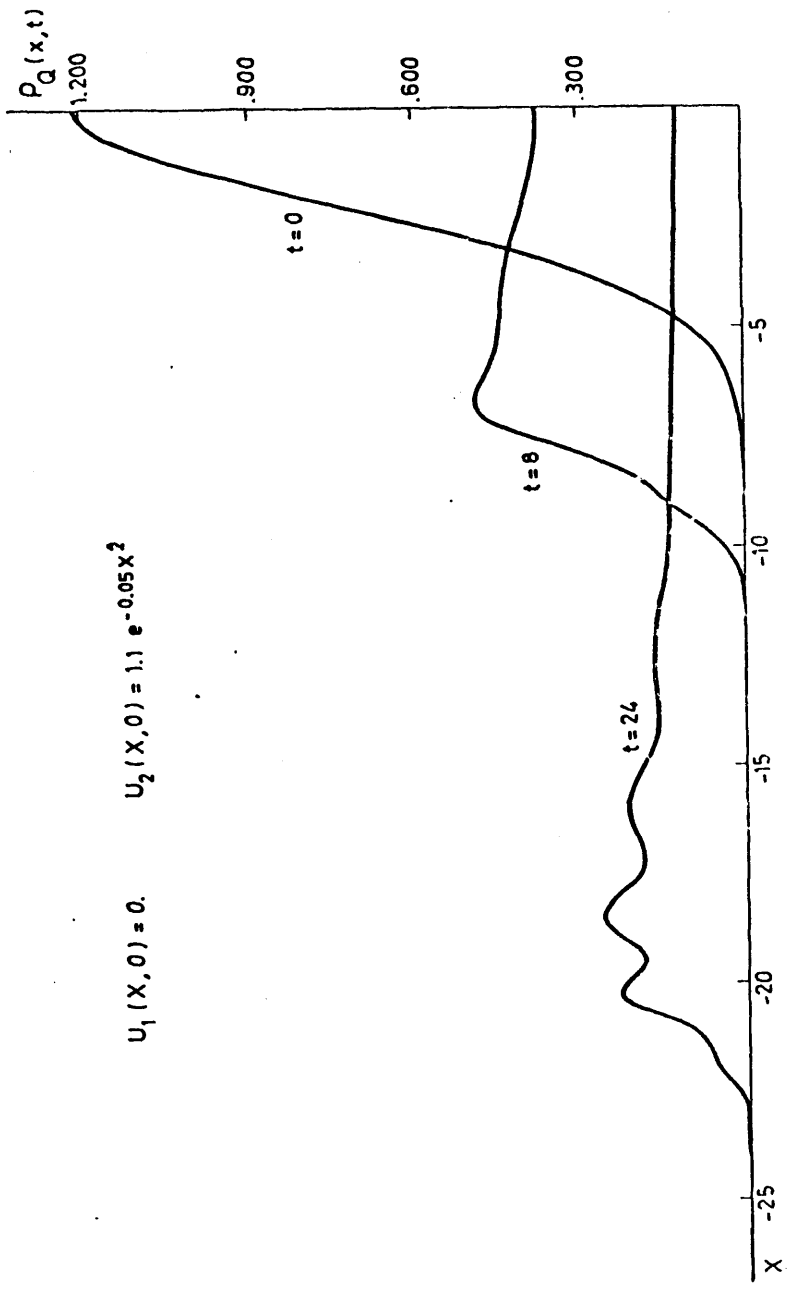


Fig. III. 8

### III.2 Existencia de soluciones localizadas oscilantes.

El hecho de que la formación de estados con dos ondas solitarias en su estado final se haga via formación de un estado metaestable, sugiere la existencia de soluciones localizadas diferentes de las ondas de las ondas solitarias. Esta conjetura queda confirmada observando la evolución de la familia

$$u_1(x, 0) = \frac{\alpha}{\text{ch}(x+\beta)} + \frac{\alpha}{\text{ch}(x-\beta)}$$
$$u_2(x, 0) = 0$$

con  $\alpha = 1$  y  $\beta = 3$ . Si representamos

$$\hat{Q} \equiv \int_{-15}^0 \rho_Q(x, t) dx \quad \hat{E} \equiv \int_{-15}^0 \rho_E(x, t) dx$$

en función del tiempo, observamos (fig. III.9) que la evolución se produce inicialmente ( $T \lesssim 100$ ) mediante una fuerte emisión de carga y energía negativa. Pasado este intervalo inicial, la emisión se hace cada vez más lentamente, siendo ahora positiva la energía emitida.

El estado final de la anterior configuración inicial está constituido por un paquete que experimenta oscilaciones isócronas de periodo  $T \simeq 20$  (fig. III.10). Este estado, cualitativamente tan diferente a una onda solitaria, le denominaremos pulsón habida cuenta de que estados similares a él, encontrados como soluciones de ecuaciones de Klein-Gordon no lineales, han sido bautizados de esa manera. Al igual que ocurre en estas ecuaciones, estas soluciones oscilantes pueden formarse, como veremos en el siguiente capítulo, por el choque de dos ondas solitarias suficientemente lentas.

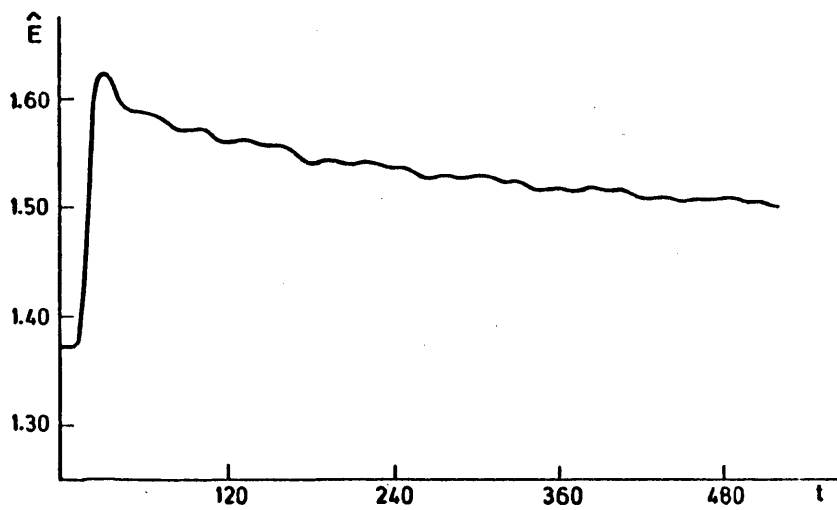
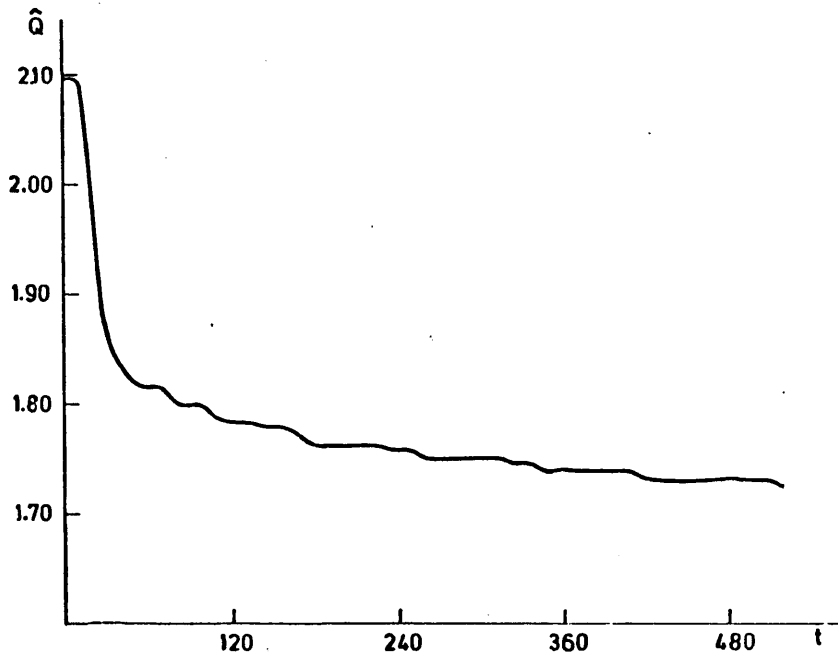
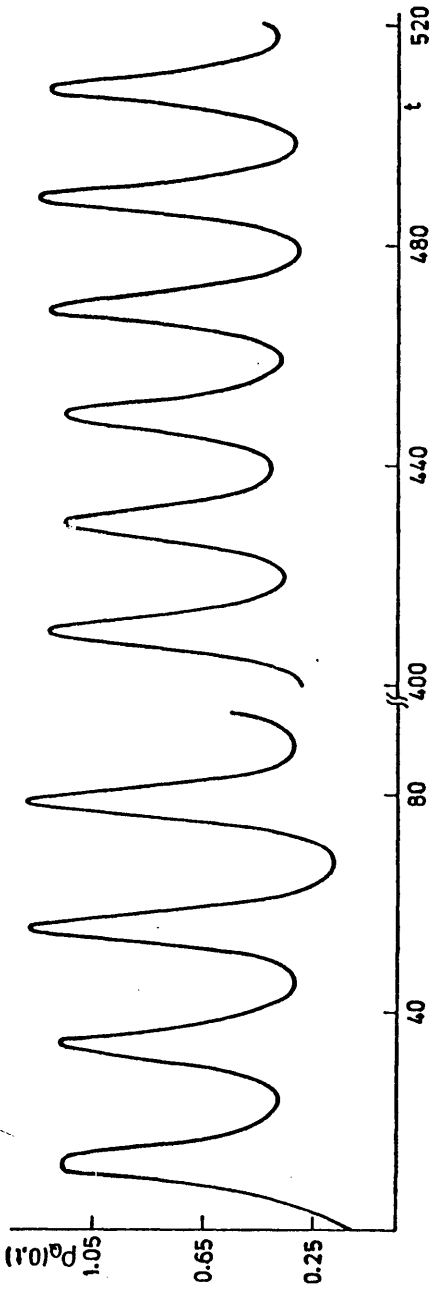


Fig. III.9



50

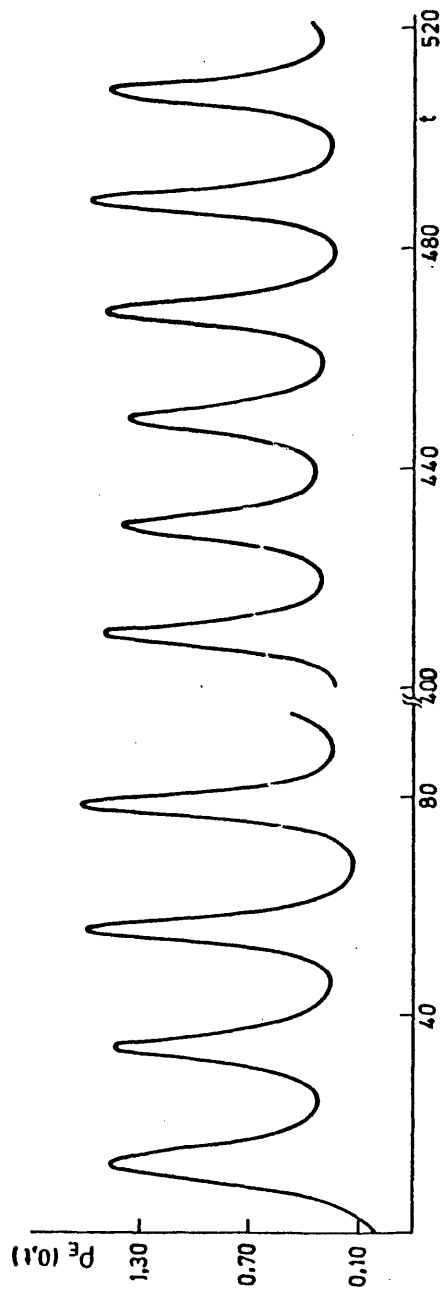


Fig. III.10

IV. INTERACCION DE ONDAS SOLITARIAS.

IV.1. Caracterización numérica de las ondas solitarias en una colisión.

En el primer capítulo hemos dicho que la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar tiene soluciones tipo onda solitaria; deseamos saber si dichas ondas son solitones. Existen en la literatura varias definiciones de este concepto. Así para R. Friedberg et al. [30] un solitón es toda solución de una ecuación no lineal de evolución que i/ tenga una energía en reposo finita no nula y ii/ está confinada indefinidamente en una región limitada del espacio. Para V. Makhankov [15] un solitón es una onda solitaria que al interactuar con otras del mismo tipo mantiene, dentro de cierto margen, su identidad. Esta definición, aunque muy operativa, conlleva cierta imprecisión, mientras que en la primera definición se hace más incapié en las propiedades estáticas que en las dinámicas.

Nosotros estamos interesados en estas últimas y por ello adoptaremos la definición de solitón dada por Scott et al. [19]. Es decir, una onda solitaria es un solitón si tanto su forma como su velocidad permanecen inalterables al interactuar con otras ondas solitarias. En concreto, sea

$$\rho_{QS}^j(x, t) = |u_{1S}^j(x, t)|^2 + |u_{2S}^j(x, t)|^2$$

la densidad de carga correspondiente a una onda solitaria que denotaremos con el superíndice  $j$ , y supondremos que  $\rho(x, t)$  es la densidad de carga de una cierta configuración del campo  $\begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(x, t) = \sum_{j=1}^N \rho_{QS}^j(\xi_j)$$

donde  $\xi_j = \frac{x - v_j t}{\sqrt{1 - v_j^2}}$  ( $v_j$  son constantes verificando  $0 \leq v_j < 1$ ).

Entonces, si  $\begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$  evolucionando en el tiempo

de acuerdo con las ecuaciones del movimiento (II.1.2) verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = \sum_{j=1}^N \rho_{QS}^j(\xi_j + \delta_j)$$

siendo las  $\delta_j$  unas constantes, diremos que las anteriores ondas solitarias son solitones.

Por claridad, en la anterior definición hemos decidido utilizar la carga, igualmente se podría haber empleado la energía. De hecho, a la hora de determinar los parámetros que caracterizan los paquetes finales de una colisión utilizaremos las densidades de carga, energía y momento. En el caso de que las ondas solitarias se comporten de manera semejante a los solitones, pero sin serlo exactamente, hablaremos de comportamiento solitónico o que las ondas solitarias son cuasisolitones (solitonlike en la literatura anglosajona).

Establecido lo que entendemos por solitón, veamos si las ondas solitarias del primer capítulo lo son. Para ello haremos colisionar numéricamente dos de tales ondas, las cuales en el tiempo inicial están completamente libres. Este requisito es incorporado prácticamente estableciendo una separación entre las dos ondas solitarias iniciales, de modo tal que la región central de solapamiento entre dichas ondas es en el peor de los casos mil veces menor que la altura inicial de la onda solitaria más pequeña de la colisión.

En el choque entre ondas solitarias, ocurre a veces (como veremos posteriormente) que parte de ellas es radiada hacia el infinito. Lo característico de esta radiación es que se realiza en forma de pequeños paquetes, los cuales se van dispersando disminuyendo su altura a la vez que se alejan hacia el infinito. El hecho de que no mantengan su altura, nos elimina la posibilidad de identificarlos con ondas solitarias muy pequeñas ( $\lambda \lesssim m$ ). Siempre que digamos que en una colisión no se produce radiación, debe entenderse que si se emiten paquetes hacia el infinito, éstos tienen una altura a lo sumo de orden inferior a la altura mínima de la región de solapamiento del estado inicial.

Una vez que han interactuado las dos ondas solita-

rias, como resultado final de la colisión numérica, obtenemos, además de una posible radiación, un par de paquetes que se van alejando. Deseamos establecer criterios cuantitativos para saber si dichos paquetes finales son ondas solitarias y, en caso afirmativo, determinar sus parámetros, o lo que es lo mismo, sus  $\lambda$  y sus velocidades. A establecer dichos criterios están destinados los siguientes párrafos.

Si la transformación de Lorentz de velocidad  $th\theta$  la escribimos como

$$X'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} X^{\nu} \quad \text{con} \quad A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \text{ch}\theta & \text{sh}\theta \\ \text{sh}\theta & \text{ch}\theta \end{pmatrix}$$

el tensor energía-impulso del campo de Dirac se transforma del siguiente modo

$$T'^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} A^{\mu}_{\rho} A^{\nu}_{\sigma} T_{\rho\sigma}$$

Recordando  $\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$  y que las ondas solitarias son soluciones estacionarias y localizadas, se deduce que si  $T^{\mu\nu}$  representa el tensor energía-impulso de una tal onda, entonces se verifican las siguientes implicaciones

$$\partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} = 0 \Rightarrow \partial_1 T^{10} = 0 \Rightarrow T^{10} = 0$$

$$\partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11} = 0 \Rightarrow \partial_1 T^{11} = 0 \Rightarrow T^{11} = 0$$

Teniendo presente que para una onda solitaria en reposo  $T^{01} = 0$ , de las anteriores implicaciones y de (IV.1.1) obtenemos

$$T'^{00} = \text{ch}^2 \theta T^{00}$$

$$T'^{01} = \text{sh} \theta T^{00}$$

y por tanto, si  $\max_x \rho_{QS}$  y  $\max_x \rho_{ES}$  son los máximos de las densidades de carga y energía de una onda solitaria en reposo mientras que  $\max_x \rho'_{QS}$  y  $\max_x \rho'_{ES}$  son las de esa onda animada con una velocidad  $th\theta$ , se verifica

$$\max_x \rho'_{ES} = \text{ch}^2 \theta \max_x \rho_{ES} \quad (\text{IV.1.2})$$

$$\max_x \rho'_{pS} = \text{sh}\theta \text{ch}\theta \max_x \rho'_{ES} \quad (\text{IV.1.3})$$

igualdades que nos dicen que la velocidad de la onda solitaria viene dada por  $\max_x \rho'_{pS} / \max_x \rho'_{ES}$ .

Sabiendo que el cuadrivector corriente se transforma del modo siguiente

$$j'^{\mu} = \text{ch}\theta j^{\mu} + \text{sh}\theta j^1$$

y que además para una onda solitaria inmóvil  $j^1$  es impar respecto al centro de la onda, inferimos que para una onda solitaria se verifica

$$\max_x \rho'_{QS} = \text{ch}\theta \max_x \rho_{QS} \quad (\text{IV.1.4})$$

Por tanto, de las igualdades  $\max_x \rho_Q = \max_x \rho_E = 2(1-\Lambda)$  y de las expresiones (IV.1.2,4) deducimos que el parámetro  $\Lambda$  de una onda solitaria animada con una velocidad  $\text{th}\theta$  viene dada por  $1 - (\max_x \rho'_{QS})^2 / 2 (\max_x \rho'_{ES})$ . Incidentalmente, es interesante hacer notar que de (IV.1.2, 4) deducimos la siguiente desigualdad para los máximos de las densidades de carga y energía de una onda solitaria

$$\max_x \rho'_{QS} \leq \max_x \rho'_{ES}$$

verificándose la igualdad solamente cuando  $v = 0$ .

Sean ahora  $\max_x \rho'_Q$ ,  $\max_x \rho'_E$  y  $\max_x \rho'_p$  los máximos de las densidades de carga, energía y momento de uno de los paquetes finales de una colisión binaria de ondas solitarias. Supongamos que estamos observando dicho paquete en un tiempo suficientemente grande para que la carga, energía y momento del mismo permanezca constante; representaremos estas magnitudes por  $Q_p$ ,  $E_p$  y  $P_p$ , respectivamente. Recordando lo dicho anteriormente sobre los máximos de las densidades de carga, energía y momento de una onda solitaria, la expresión de la carga de ésta y de la misma se comporta cinemáticamente como una partícula relativista, deducimos los siguientes criterios para decidir si dicho paquete final es una onda solitaria

1/  $\max_x \rho'_p / \max_x \rho'_E$  se mantiene constante en el tiempo. Esta cons

tante la identificaremos con la velocidad de la onda solitaria.

- 2/  $1 - (\max \varphi' \varphi)^2 / 2(\max \varphi' E)$  es constante y será identificada con el parámetro  $\Lambda^*$  de la onda solitaria.
- 3/  $(1 + Q_P^2/4)^{-1/2}$  es constante y coincide con la obtenida mediante el anterior criterio
- 4/  $1/\text{ch} \left[ \sqrt{E_P^2 - P_P^2} / 2 \right]$  es una constante que coincide con las obtenidas mediante los criterios 2/ y 3/.

Los cuatro criterios anteriores sólo son condiciones necesarias para que un paquete sea una onda solitaria. Sin embargo, dichos criterios son complementarios en el sentido de que mientras los dos primeros sólo hacen referencia a la altura que alcanza dicho paquete, los otros dos están basados sobre la cantidad de carga, energía y momento que arrastra el mismo. Por tanto, la verificación de dichos criterios, junto a la comparación cualitativa de las condiciones iniciales y finales, nos proporciona una base lo suficientemente fiable para determinar si las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplamiento son solitones.

Para cerrar esta sección introduciremos dos definiciones que nos serán muy útiles posteriormente [29]:

- a) Interacción débil: Diremos que dos ondas solitarias interactúan débilmente, si durante su colisión, y antes de separarse, llegan a fusionarse totalmente formando un máximo central.
- b) Interacción fuerte: Diremos que dos ondas solitarias interactúan fuertemente, si intercambian sus formas apareciendo en todo el tiempo que dura la interacción un mínimo central.

#### IV.2. Interacción de dos ondas solitarias.

En esta sección analizaremos la interacción entre dos ondas solitarias en un rango de velocidades que especificaremos más adelante. Hemos estudiado diferentes casos según los distintos valores de los dos parámetros  $\Lambda$  de las ondas solitarias del estado inicial. Como cualitativamente los resultados son semejantes, nos limitaremos a exponer los resultados para el caso típico en que dichos parámetros son  $\Lambda_K = 0.6$ , para la onda solitaria situada inicialmente en  $x = -8$ , y  $\Lambda_C = 0.8$  para la situada en  $x = +8$ .

La interacción se realizará en el sistema centro de masas. Recordando que las energías en reposo de las dos ondas solitarias anteriores son

$$E_K = 2 \ln \frac{\Lambda_K}{1 - \sqrt{1 - \Lambda_K^2}}$$

$$E_C = 2 \ln \frac{\Lambda_C}{1 - \sqrt{1 - \Lambda_C^2}}$$

se deduce que fijando una de las velocidades, por ejemplo  $\theta_K$ , la anulación del momento nos impone para la otra onda solitaria

$$\theta_C = \arg \operatorname{sh} \left( - \frac{E_K}{E_C} \operatorname{sh} \theta_K \right)$$

Teniendo en cuenta que en la práctica hay inevitablemente un solapamiento inicial entre las ondas solitarias, en vez de utilizar el valor de  $\theta_C$  anterior, se modifica algo dicho valor hasta conseguir que el momento inicial total sea del orden del error de truncamiento del método de integración numérico de las constantes del movimiento; ya que dicho método es la regla de Boole y que nuestro paso de malla es  $h = 1/16$ , el momento inicial es del orden de  $10^{-8}$ .

Con esta disposición de los datos iniciales, es conveniente considerar separadamente los casos en que  $\theta_K \gtrsim 0.13$  de

los que  $\theta_K \lesssim 0.13$ , ya que se obtienen resultados muy diferentes para ambos casos. En esta sección supondremos  $\theta_K \gtrsim 0.13$ , dejando para la siguiente el análisis de la interacción con  $\theta_K \lesssim 0.13$ . Por comodidad, hablaremos de región de altas o bajas velocidades según se esté en el primero o segundo caso.

Antes de continuar, es conveniente fijar la notación que será utilizada en la exposición de los resultados numéricos. La colocación de una flecha como subíndice en una cierta magnitud nos indicará que la misma se refiere al paquete del estado final que se mueve en la dirección marcada por la flecha. El superíndice que acompaña a los parámetros del estado final, indicará el número del criterio de la sección anterior utilizado para calcular dichos parámetros. Así por ejemplo,  $\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$  nos indica el valor del parámetro  $\Lambda$  de la onda solitaria del estado final que se mueve hacia la izquierda y que ha sido calculado utilizando el segundo criterio, la velocidad de dicha onda la representaremos por  $v_{\leftarrow}^{(1)}$ . Las magnitudes del estado inicial se representarán con subíndices "K" ó "C" según hagan referencia a la onda solitaria que se mueva hacia la derecha o hacia la izquierda respectivamente.

En la región de altas velocidades se han analizado las cuatro interacciones siguientes

i/ $\theta_K = 0.15$	$\theta_C = -0.23676364$
ii/ $\theta_K = 0.1833$	$\theta_C = -0.28830527$
iii/ $\theta_K = 0.20$	$\theta_C = -0.31399810$
iv/ $\theta_K = 0.40$	$\theta_C = -0.61210023$

Existen dos características comunes a los cuatro casos anteriores. La primera es la no presencia de emisión de radiación y la segunda, su carácter fuerte. Sin embargo, esta última característica se hace menos acusada a medida que se aumenta la velocidad de las ondas solitarias.

La exposición de los resultados, tanto numéricos como gráficos, de cada una de las cuatro interacciones anteriores se realizará de una manera análoga; por ello, sólo detallaremos el caso i/. Los resultados numéricos de dicho caso son dados en

las tablas IV.i.1 y IV.i.2. En la primera fila de aquella se dan los parámetros de las ondas solitarias iniciales, mientras que en la segunda fila de la misma vienen expuestos los parámetros de las ondas solitarias del estado final, calculados en un intervalo temporal dado en la primera columna. También se especifica, según la notación introducida anteriormente, el criterio utilizado para calcular dichos parámetros. Cuando se emplean los criterios primero y segundo, en vez de dar un sólo valor, se dan los valores mínimo y máximo del citado valor. Esto es debido a que dichos dos criterios utilizan información proveniente del máximo de las ondas solitarias finales, y éste tiene unas leves oscilaciones que se van amortiguando en el tiempo. Los criterios tercero y cuarto dan, dentro de una aproximación suficiente, un solo valor para los parámetros finales, el cual es compatible con los obtenidos mediante los dos primeros criterios.

En la tabla IV.i.2 se recogen en las cuatro primeras columnas los errores relativos máximos a lo largo de la evolución temporal de la energía (E), carga (Q),  $ReP$  e  $ImR$ . Las dos últimas columnas de dicha tabla son los errores absolutos máximos del momento  $P$  y de la posición del centro de masas (S). El considerar el error absoluto para el momento, en vez del relativo, es debido a que dicha constante del movimiento es prácticamente nula inicialmente y oscila alrededor de este valor a lo largo de la evolución temporal. La conveniencia de utilizar el error absoluto para la posición del centro de masas se deduce de la invariancia traslacional de la ecuación de evolución.

Lo primero que llama la atención de los errores relativos expuestos, es su diferente orden de magnitud. Esta diferencia es debido a que los valores de la energía y de la carga son del orden de la unidad, mientras que los de  $ImR$  y  $ReR$  son del orden de  $10^{-5}$  y  $10^{-6}$ .

Para apreciar el amortiguamiento de los máximos de las ondas solitarias del estado final, se han representado en la figura IV.i.1 los máximos de las densidades de carga en función del tiempo de las ondas que se dirigen hacia la izquierda y derecha del citado estado. En la figura IV.i.2 se dibujan los máximos de las energías en función del tiempo de las mismas ondas, mientras que en las figuras IV.i.3 y IV.i.4 representamos los parámetros  $\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$ ,  $\Lambda_{\rightarrow}^{(2)}$  y  $|\sqrt{\leftarrow}^{(1)}|$ ,  $\sqrt{\leftarrow}^{(1)}$  respectivamente.

Un aspecto general de la colisión de las ondas solitarias del caso i/ puede verse en las figuras IV.i.5 y IV.i.6, donde representamos  $\varphi_0(x, t)$  para diferentes tiempos. El comportamiento de las ondas solitarias en las interacciones ii, iii y iv puede verse en las tablas y figuras adjuntas a esta sección.

Como resumen, deducimos las siguientes propiedades de la interacción de dos ondas solitarias diferentes en la región de altas velocidades.

a/ Solamente con las velocidades del caso ii/, las ondas solitarias con parámetros  $\Lambda_K = 0.6$  y  $\Lambda_C = 0.8$  no sufren cambio alguno al interactuar. Abusando del lenguaje podemos decir que estas dos ondas solitarias son solitones para las velocidades del citado caso.

b/ Para otras velocidades, dichas ondas se comportan como cuasisolitones.

c/ En el rango de velocidades entre los casos i/ y -iii/, los parámetros de las ondas solitarias del estado final dependen continua y monótonamente de las velocidades iniciales. Fue aprovechando esta propiedad como se determinaron las velocidades iniciales del caso ii/.

Para finalizar esta sección, enunciaremos las dos características fundamentales de la interacción de dos ondas solitarias iguales:

1º/ Existe un valor de la velocidad inicial de las ondas solitarias, dependiente del parámetro  $\Lambda$  de las mismas, tal que dos de dichas ondas con velocidad superior a ese valor interactúan sin emitir radiación, y por tanto, se comportan como solitones.

2º/ Para velocidades inferiores al anteriormente citado valor, hay emisión de radiación, siendo ésta tanto mayor cuanto menor sea la velocidad de las ondas solitarias. Este caso será analizado detalladamente en la sección siguiente.

Tabla IV.i.1. Resultados numéricos de la interacción i/

$t=0$	$\Lambda_K=0.6$	$V_K=0.1489$	$\Lambda_C=0.8$	$V_C=-0.2324$
	$\Lambda^{(2)} \rightarrow$	$\Lambda^{(3)} \rightarrow$	$\Lambda^{(4)} \rightarrow$	$V^{(1)} \rightarrow$
	$\Lambda^{(2)} \leftarrow$	$\Lambda^{(3)} \leftarrow$	$\Lambda^{(4)} \leftarrow$	$V^{(1)} \leftarrow$
$80 \leq t \leq 100$	0.575	0.5758	0.5758	0.175
	0.577			0.828
				0.177
				0.838
				0.8334
				0.8332
				-0.311
				-0.313

Tabla IV.i.2. Errores numéricos de las constantes del movimiento de la interacción i/

$\Delta E/E$	$\Delta Q/Q$	$\Delta(\text{Re}R)/(\text{Re}R)$	$(\text{Im}R)/(\text{Im}R)$	$\Delta P$	$\Delta S$
0.01%	0.01%	0.5%	4%	$10^{-3}$	$h/5^{(*)}$

(\*) h es el paso espacial de la malla numérica,  $h = 1/16$ .

Tabla IV.ii.1. Resultados numéricos de la interacción ii/

$t=0$	$\Lambda_K=0.6$	$V_K=0.1813$	$\Lambda_C=0.8$	$V_C=-0.2806$
	$\Lambda \rightarrow^{(2)}$	$V \rightarrow^{(1)}$	$\Lambda \leftarrow^{(2)}$	$V \leftarrow^{(1)}$
	$\Lambda \rightarrow^{(3)}$		$\Lambda \leftarrow^{(3)}$	
	$\Lambda \rightarrow^{(4)}$		$\Lambda \leftarrow^{(4)}$	
$80 \leq t \leq 116$	0.598	0.180	0.797	-0.279
	0.600		0.8001	0.7999
	0.601	0.181	0.804	-0.281

Tabla IV.ii.2 Errores numéricos de las constantes del movimiento de la interacción ii/

$\Delta E/E$	$\Delta Q/Q$	$\Delta(\text{Re}R)/(\text{Re}R)$	$\Delta(\text{Im}R)/(\text{Im}R)$	$\Delta P$	$\Delta S$
0.03%	0.03%	4%	0.8%	$10^{-3}$	$h/5^{(*)}$

(\*) h es el paso espacial de la malla numérica,  $h = 1/16$ .

Tabla IV.iii.1. Resultados numéricos de la interacción iii/.

$t=0$	$\Lambda_K=0.6$	$V_K=0.1974$	$\Lambda_C=0.8$	$V_C=-0.3041$
	$\Lambda^{(2)} \rightarrow$	$\Lambda^{(1)} \rightarrow$	$\Lambda^{(2)} \leftarrow$	$\Lambda^{(4)} \leftarrow$
	0.609	0.189	0.783	-0.275
$80 \leq t \leq 100$	0.6108	0.6107	0.7859	0.7858
	0.613	0.190	0.790	-0.277

Tabla IV.iii.2 Errores numéricos de las constantes del movimiento de la interacción iii/

$\Delta E/E$	$\Delta Q/Q$	$\Delta(\text{Re}R)/(\text{Re}R)$	$\Delta(\text{Im}R)/(\text{Im}R)$	$\Delta P$	$\Delta S$
0.03%	0.03%	4%	0.5%	$10^{-3}$	$h/5^{(*)}$

(\*) h es el paso espacial de la malla numérica,  $h = 1/16$ .

Tabla IV.iv.1. Resultados numéricos de la interacción iv/.

$t=0$	$\Lambda_K=0.6$	$V_K=0.3799$	$\Lambda_C=0.8$	$V_C=-0.5456$
$40 \leq t \leq 80$	$\Lambda_{\rightarrow}^{(2)}$	$\Lambda_{\rightarrow}^{(3)}$	$\Lambda_{\rightarrow}^{(4)}$	$V_{\rightarrow}^{(1)}$
	0.636	0.640	0.640	0.388
			$\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$	$\Lambda_{\leftarrow}^{(3)}$
			0.736	0.749
			$\Lambda_{\leftarrow}^{(4)}$	$V_{\leftarrow}^{(1)}$
			0.748	-0.472
			0.395	0.772
				-0.477

Tabla IV.iv.2 Errores numéricos de las constantes del movimiento de la interacción iv/

$\Delta E/E$	$\Delta Q/Q$	$\Delta(\text{Re}R)/(\text{Re}R)$	$\Delta(\text{Im}R)/(\text{Im}R)$	$\Delta P$	$\Delta S$
0.01%	0.01%	5%	4%	$10^{-3}$	$h/2^{(*)}$

(\*) h es el paso espacial de la malla numérica,  $h = 1/16$ .

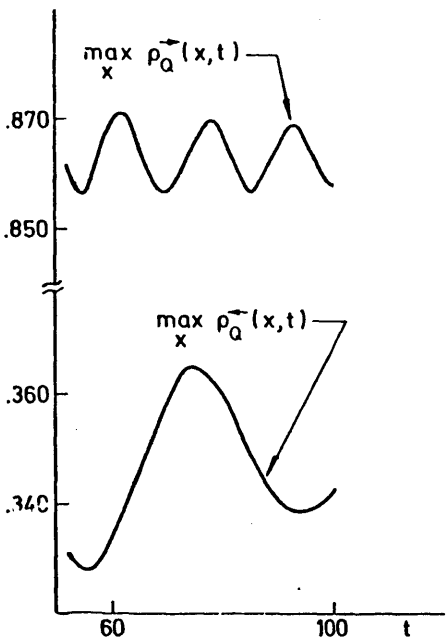


Fig. IV.i1

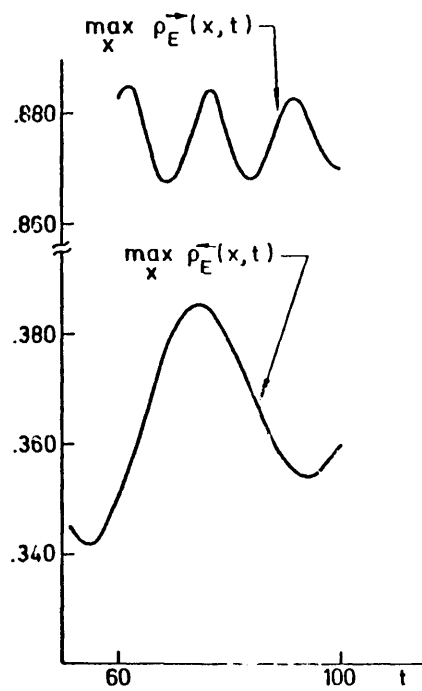


Fig. IV.i2

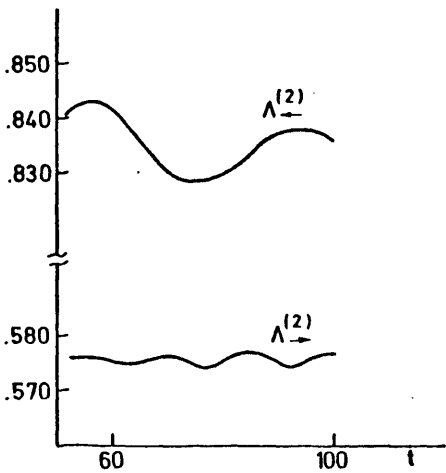


Fig. IV.i3

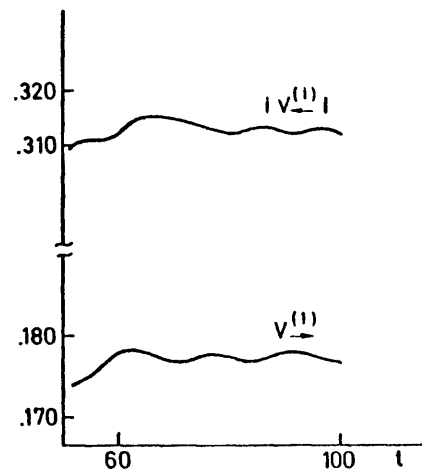


Fig. IV.i4

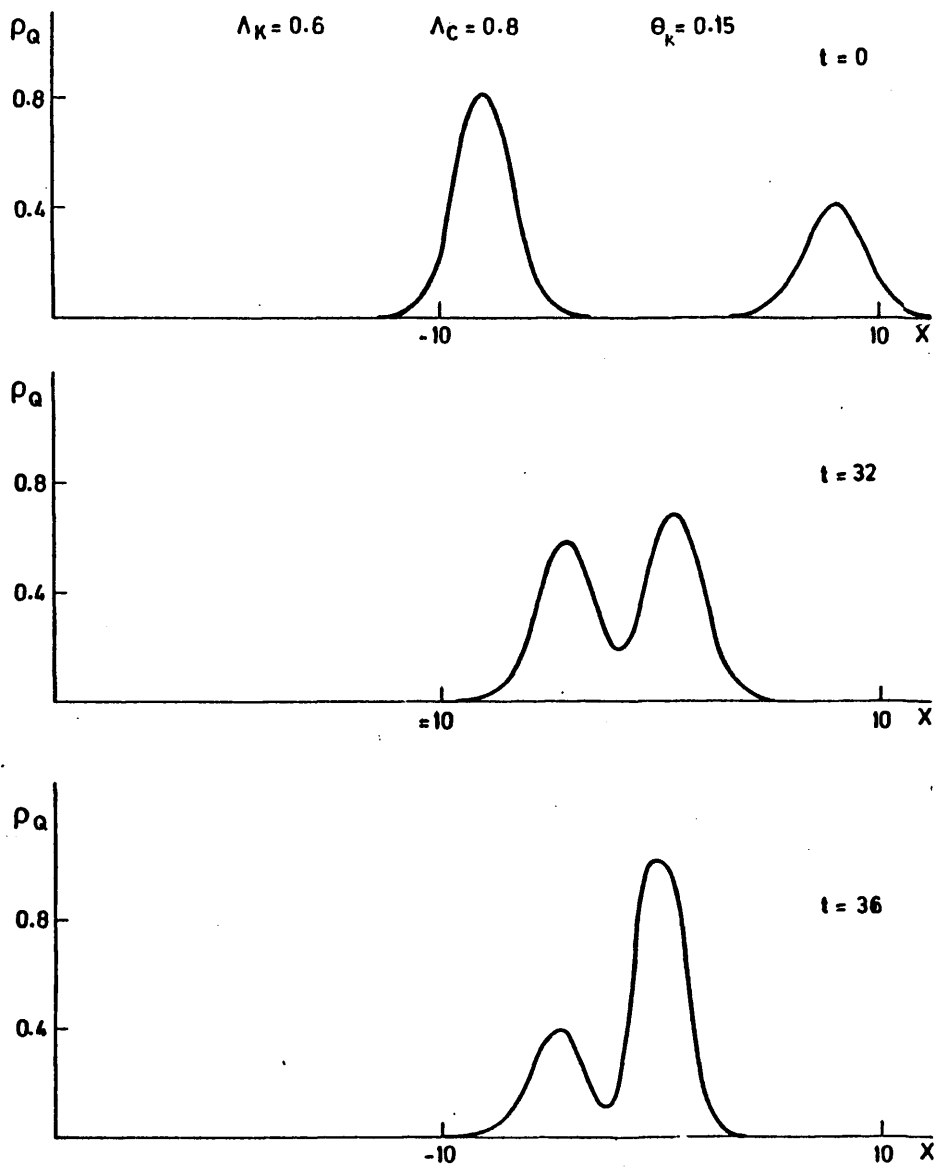


Fig. IV i5

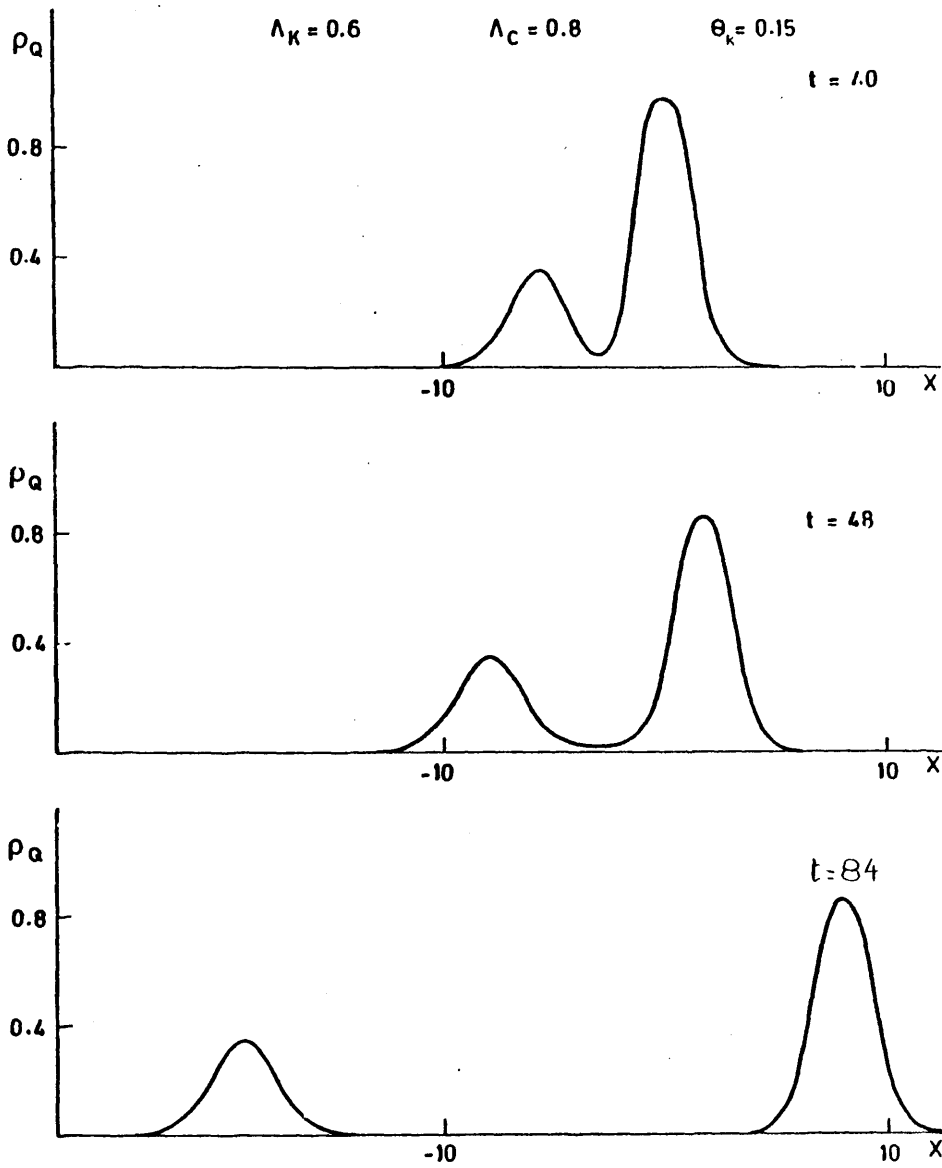


Fig. IV i 6

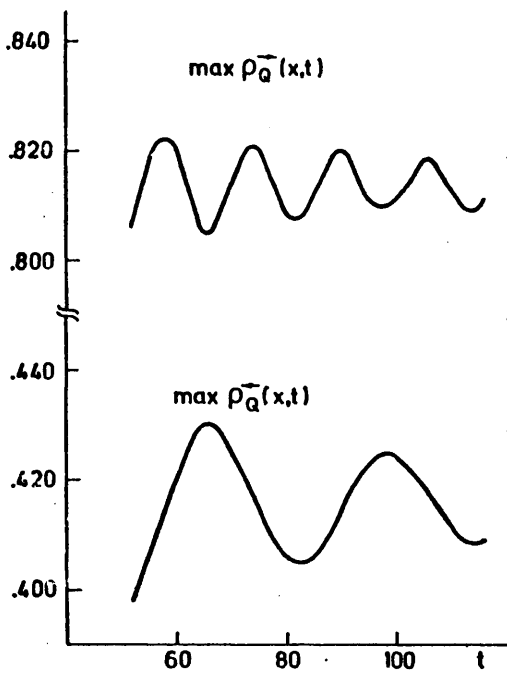


Fig. IV ii 1

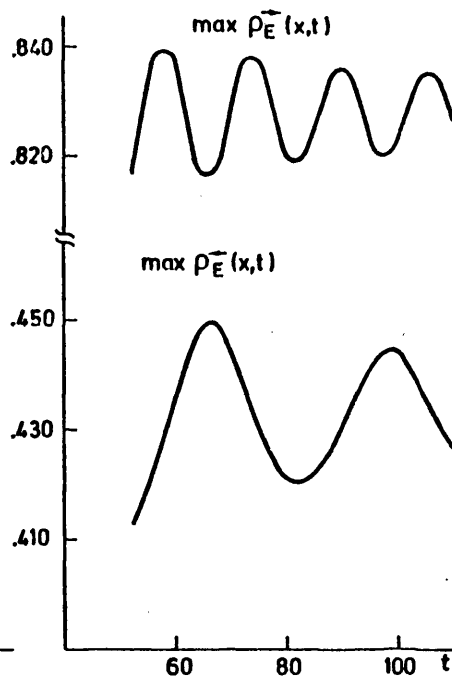


Fig. IV ii 2

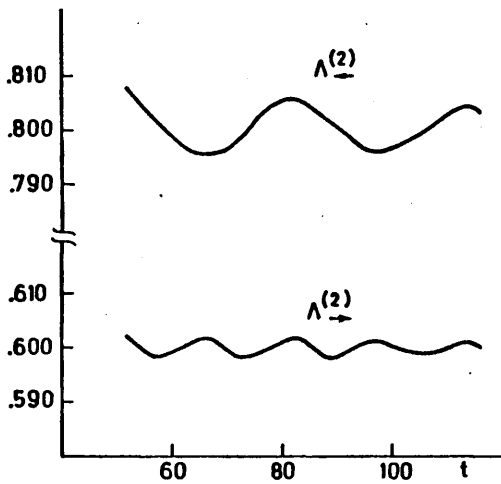


Fig. IV ii 3

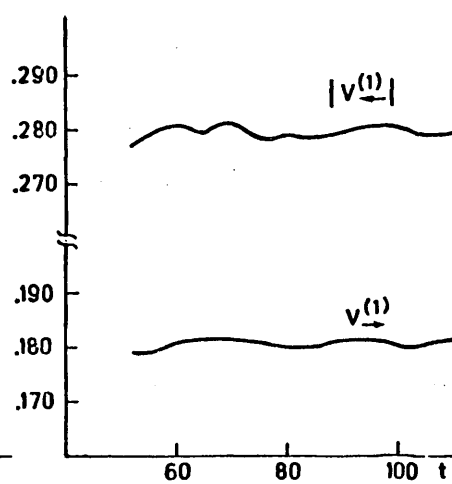


Fig. IV ii 4

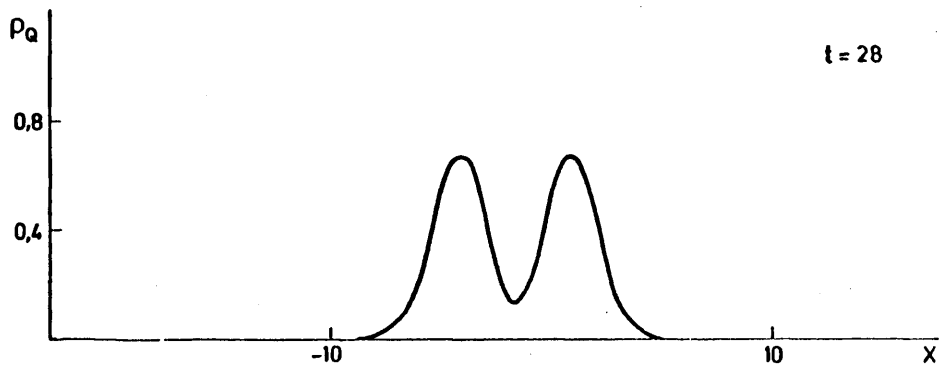
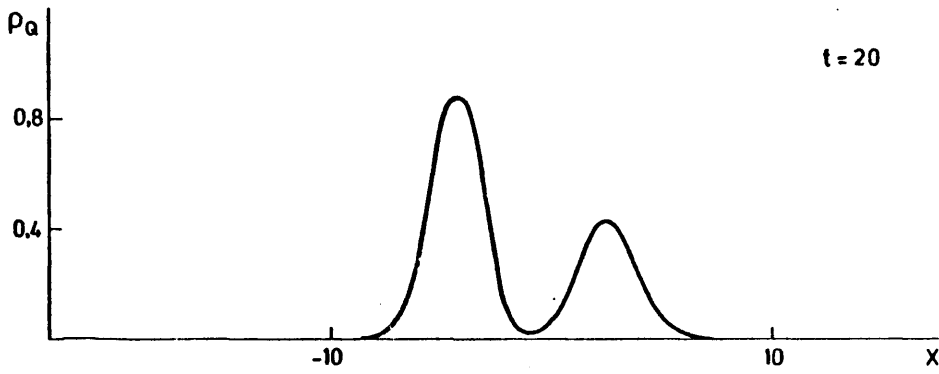
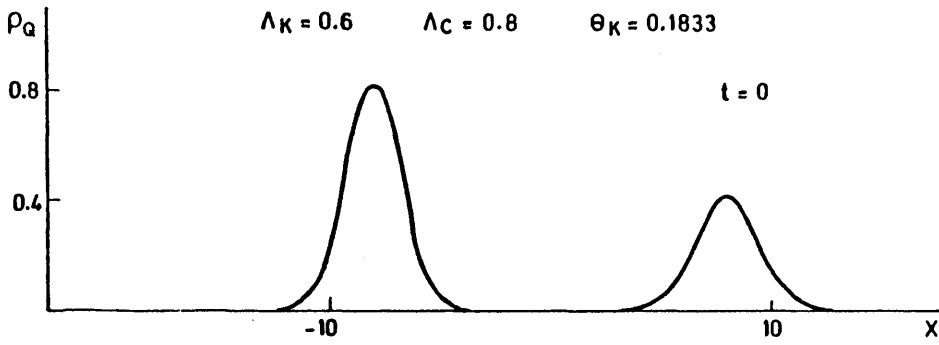


Fig. IVii 5

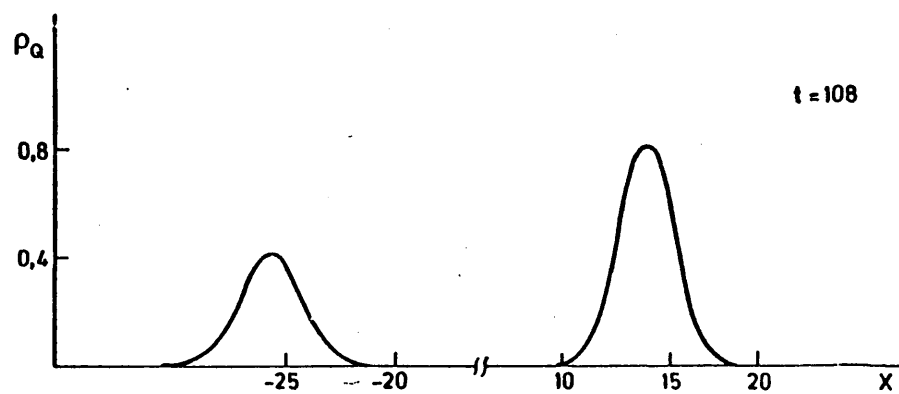
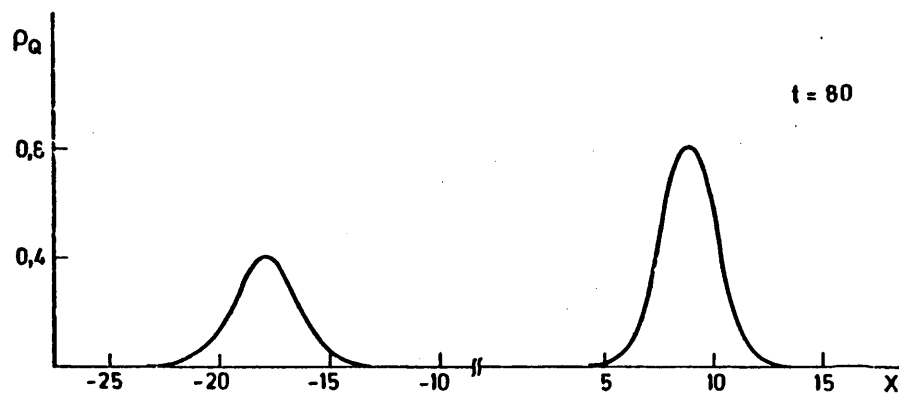
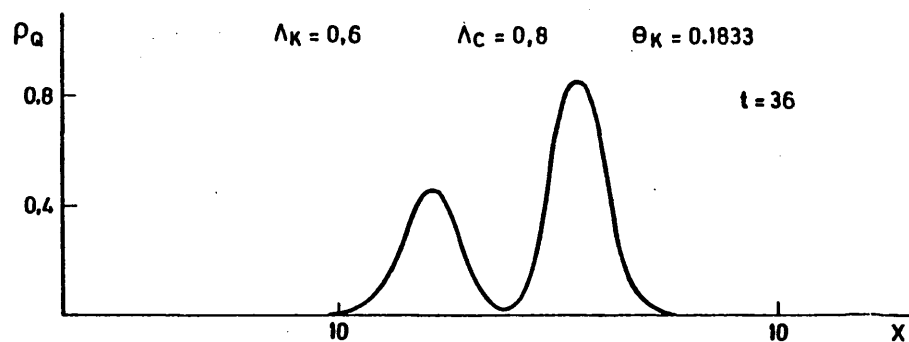


Fig. IVii 6

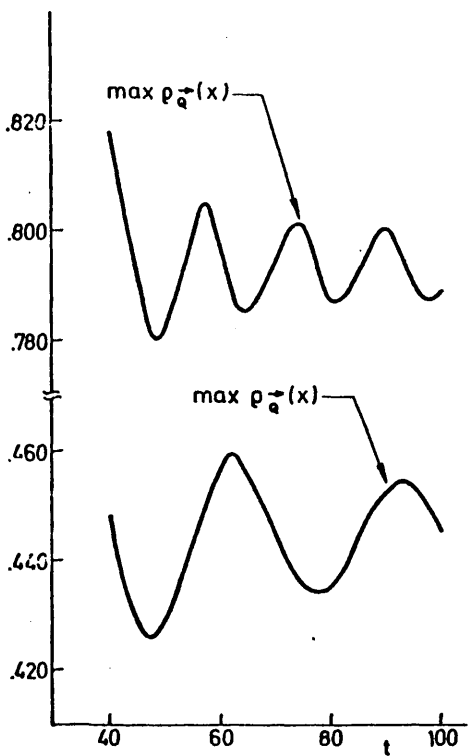


Fig. IV iii 1

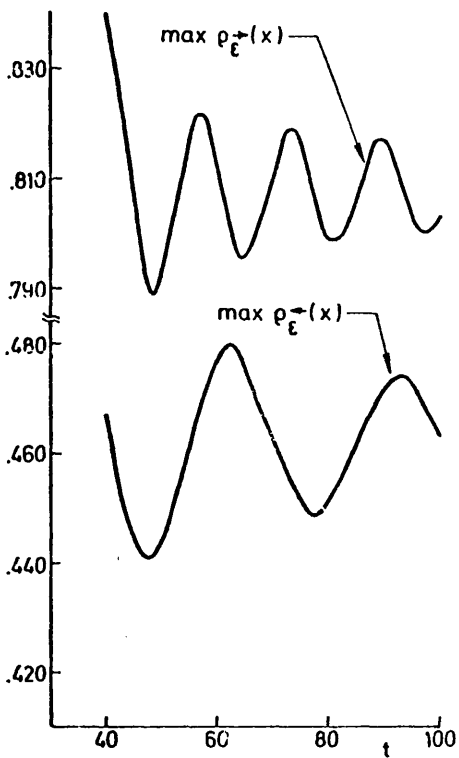


Fig. IV iii 2

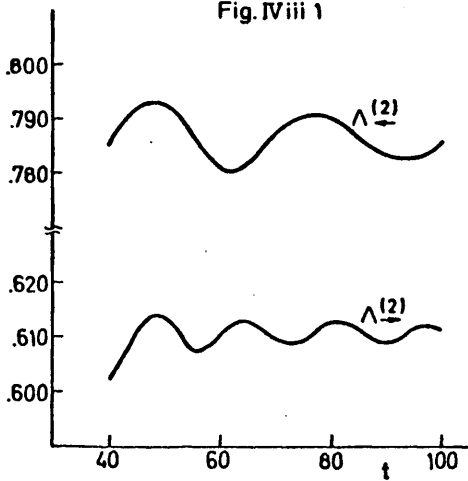


Fig. IV iii 3

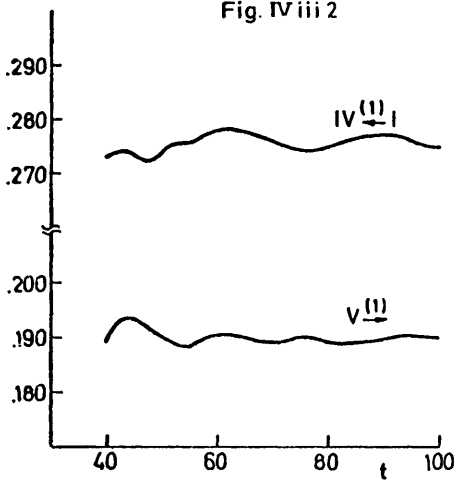


Fig. IV iii 4

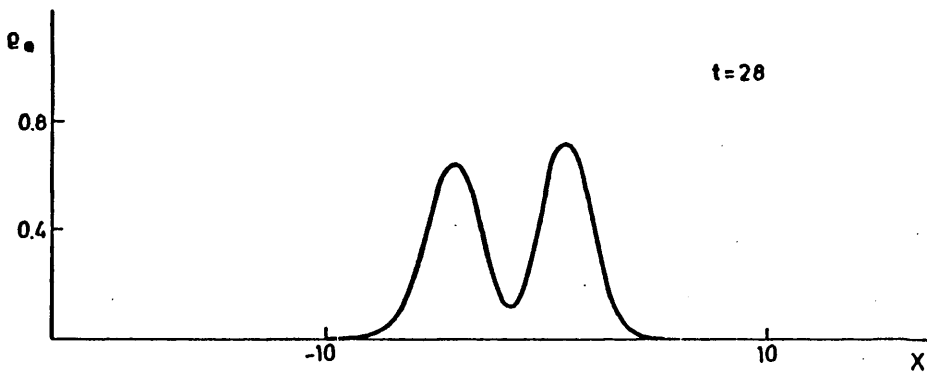
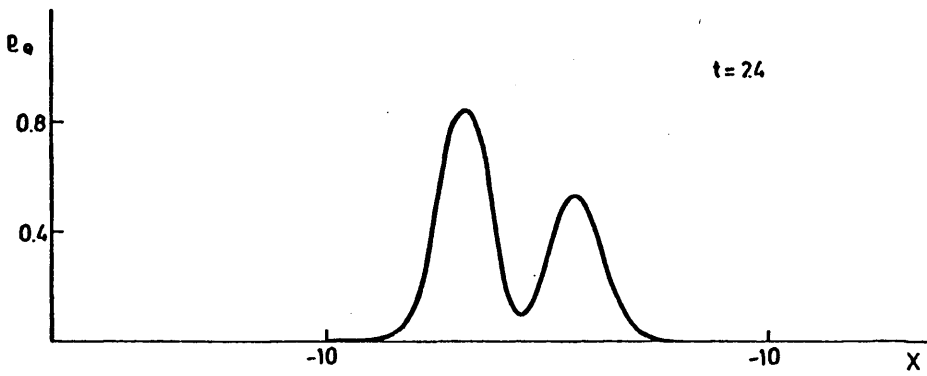
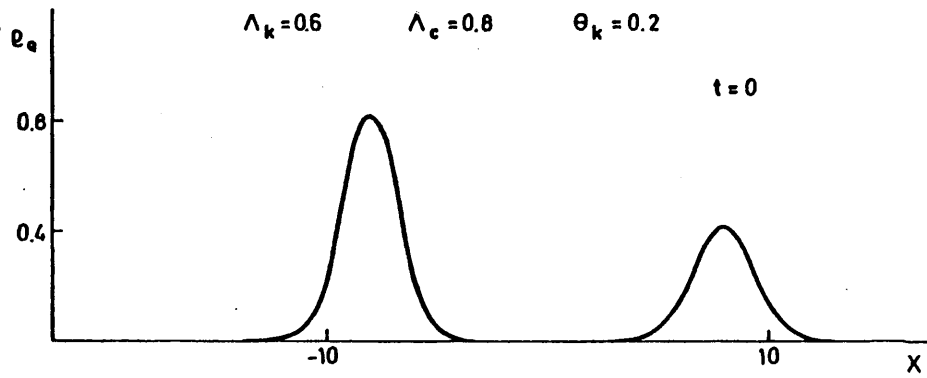


Fig. IV iii 5

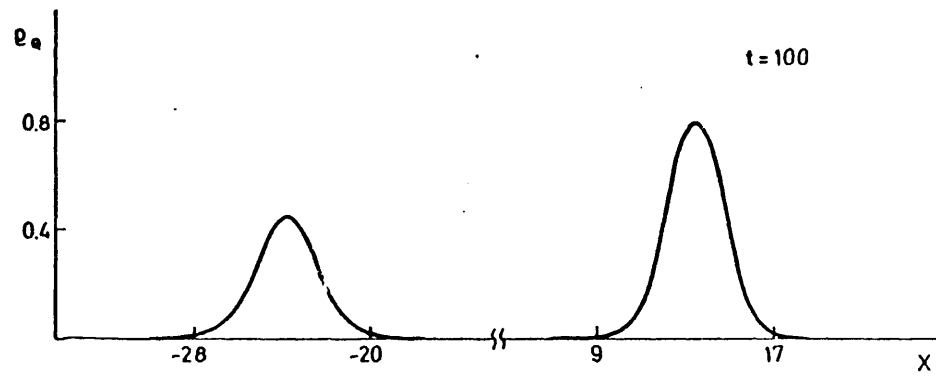
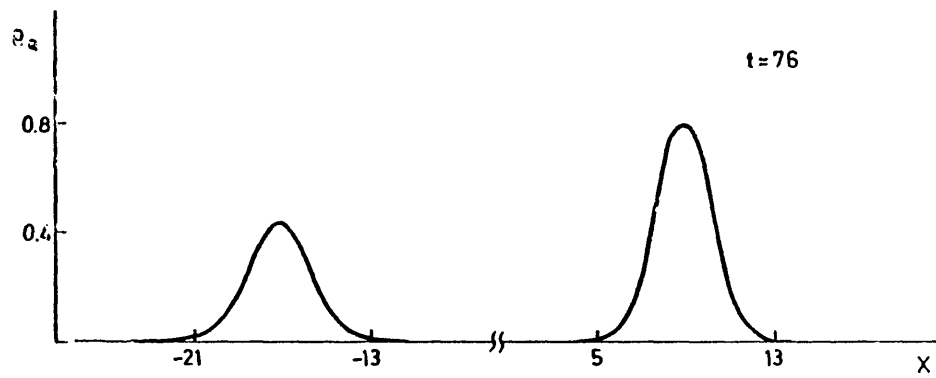
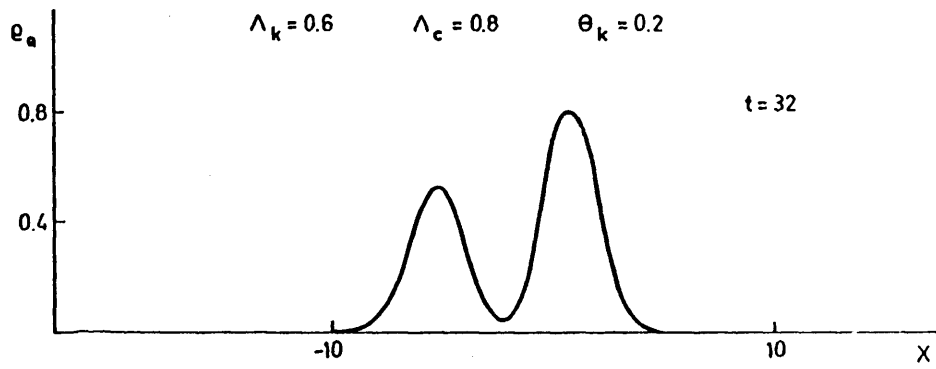


Fig. IV iii 6

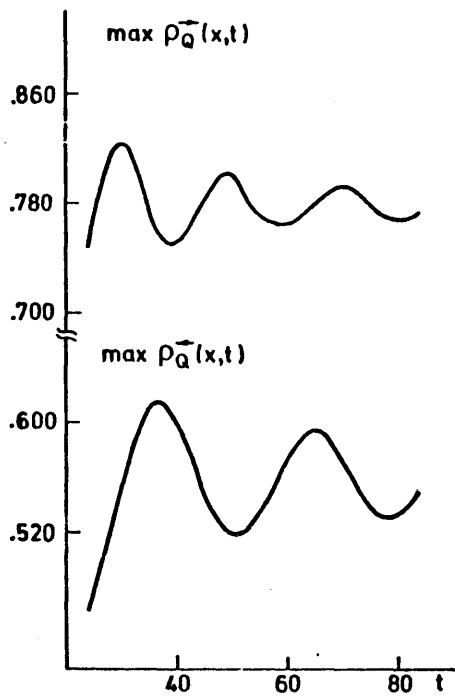


Fig. IV iv 1

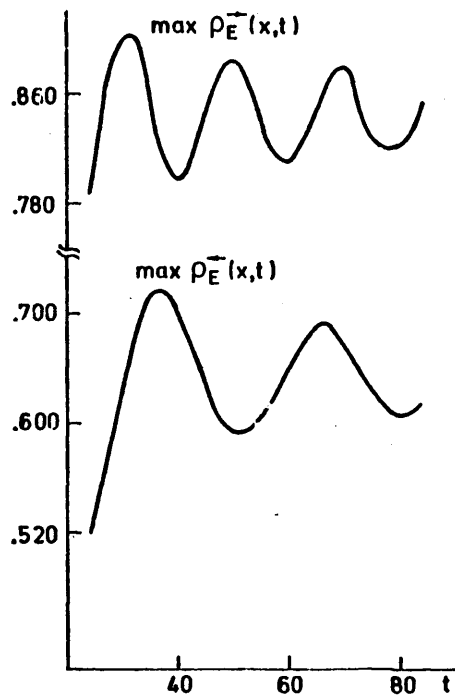


Fig. IV iv 2

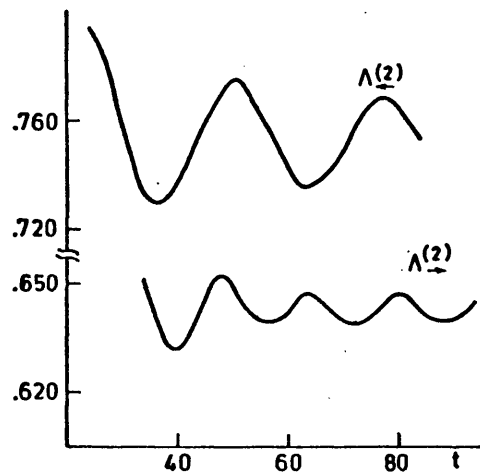


Fig. IV iv 3

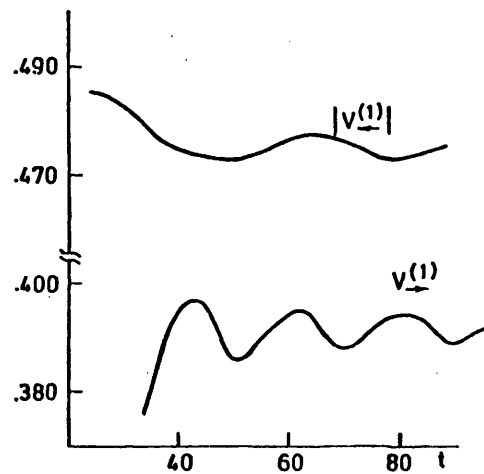


Fig. IV iv 4

75

$\Lambda_K = 0.6$     $\Lambda_C = 0.8$     $\Theta_K = 0.4$

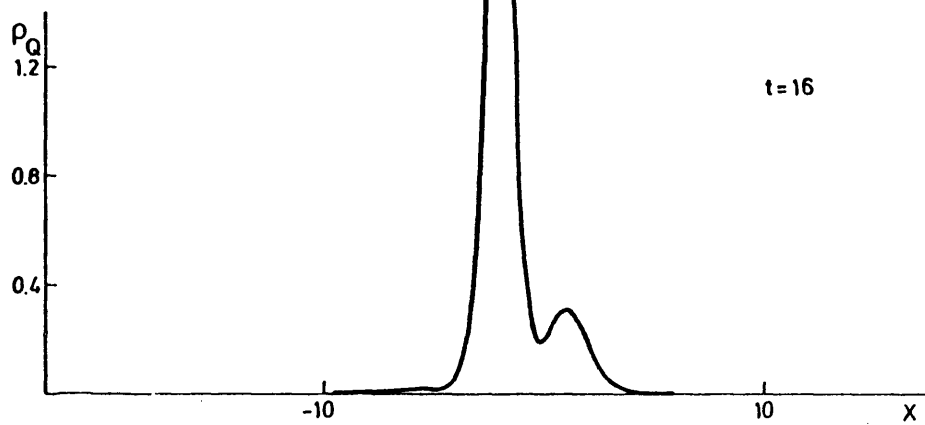
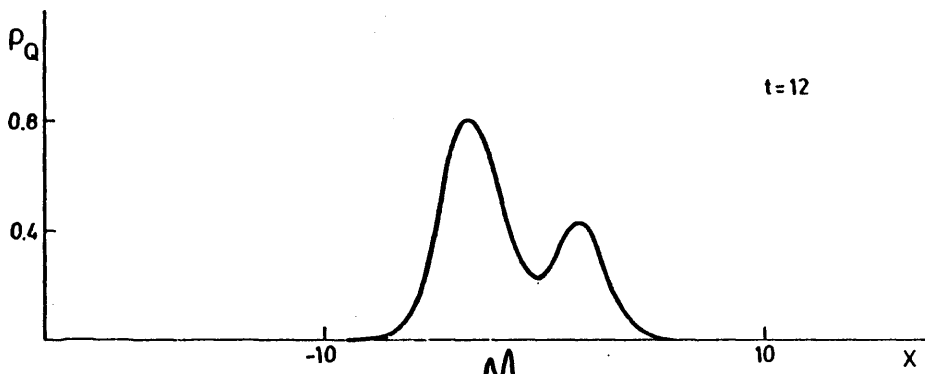
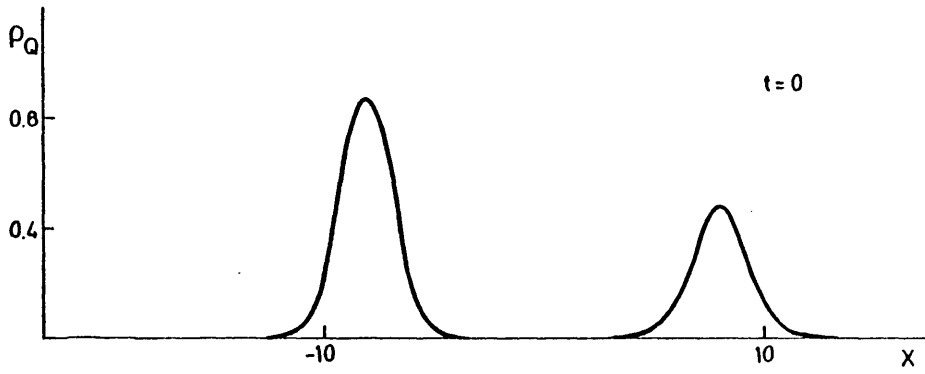


Fig. IV iv 5

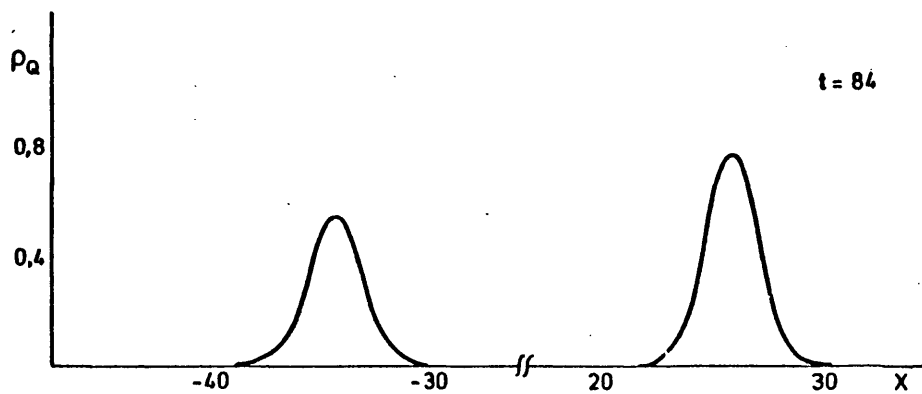
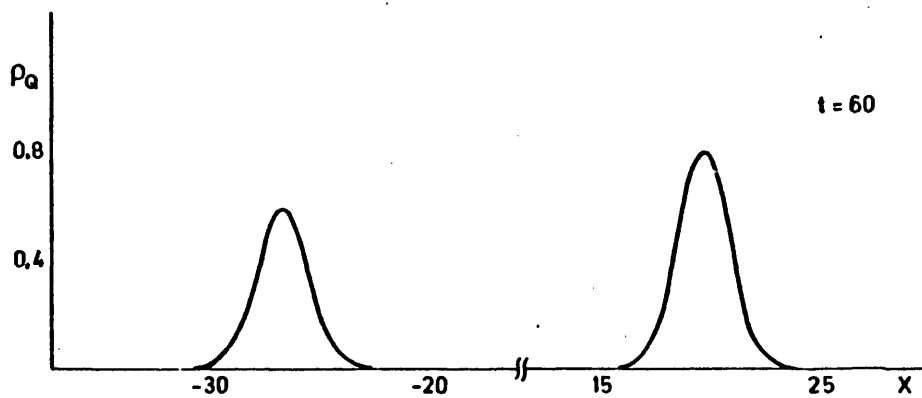
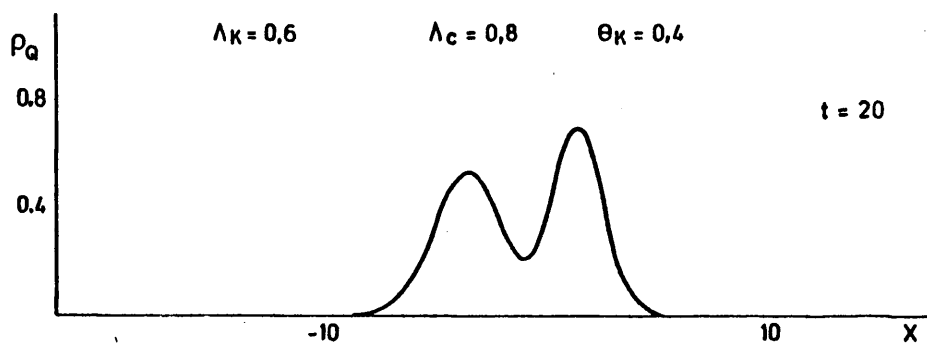


Fig. IV iv 6

#### IV.3. Formación de pulsones a partir del choque de dos ondas solitarias.

En esta sección analizaremos la colisión de las ondas solitarias de la sección anterior en la región de bajas velocidades. En concreto, las ondas solitarias del caso que vamos a analizar tienen los siguientes parámetros iniciales

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \Lambda_K &= 0.6 & \Lambda_C &= 0.8 \\ \theta_K &= 0.10 & \theta_C &= -0.15852180 \end{aligned}$$

Dos cambios cualitativos fundamentales tienen lugar con respecto a los casos ya analizados. El primero es la presencia de emisión de radiación, mientras que el segundo, consiste en que la interacción es débil en vez de fuerte como ocurría anteriormente.

El hecho, como queda reflejado en la tabla IV.a.1, - de que los parámetros  $\Lambda$  de las ondas solitarias del estado final sean mayores que los iniciales, es una muestra de que dichas ondas han disminuido, y por ende, de la existencia de radiación. La bondad de la evolución numérica queda recogida en la tabla IV.a.2, donde se exponen los errores máximos de algunas constantes del movimiento. En dicha tabla no se dan los errores de  $\text{Re}R$  e  $\text{Im}R$  debido a que no son significativos, ya que los valores de esas dos constantes del movimiento son, para esta colisión, del mismo orden que el error de truncamiento del método de integración numérico de las cantidades conservadas.

Las oscilaciones de los máximos de las ondas solitarias del estado final de la anterior colisión vienen expuestas en las gráficas IV.a.1 - 4, mientras que un aspecto general de dicha interacción puede verse en la figura IV.a.5 - 7.

El hecho de que a baja velocidad hay emisión de radiación, sugiere la posibilidad de existencia de soluciones localizadas con un tiempo de vida largo y formadas a partir de un choque entre ondas solitarias suficientemente lentas, de modo que la radiación emitida en tal colisión compense la energía cinéti

ca inicial de las ondas solitarias. Ahora bien, una velocidad pequeña de las ondas solitarias implica un tiempo grande en la ejecución del programa, esta dificultad técnica nos obliga a estudiar numéricamente la formación de estados ligados a partir de la colisión de ondas solitarias iguales, ya que de este modo podemos introducir en el esquema numérico las mejoras mencionadas en el capítulo segundo.

En las figuras IV.b.1 - 3 (donde, como es habitual en los casos que existe simetría respecto al origen, sólo representamos lo que ocurre en la mitad del eje espacial) se representa la interacción de dos ondas solitarias cuyos parámetros iniciales son:

$$\begin{array}{ll} \text{b)} & \Lambda_K = 0.6 & \Lambda_C = 0.6 \\ & \theta_K = 0.05 & \theta_C = -0.05 \end{array}$$

Como puede apreciarse en las mismas, se forma un estado ligado cualitativamente similar al pulsón. El hecho de que la formación dinámica de estos estados ligados sea igual a la que tiene lugar para los pulsores del campo escalar de Higgs [10], nos reafirma en denominarlos pulsores.

La cuantía de la radiación emitida en la anterior interacción puede observarse en la figura IV.b.4, donde se representan

$$\hat{Q}_R \equiv \int_{-20}^0 \rho_Q(x, t) dx$$

y

$$\hat{E}_R \equiv \int_{-20}^0 \rho_E(z, t) dz$$

en función del tiempo. Teniendo presente que la energía y la carga se conservan con un error menor que 0.9% y 0.1% respectivamente (las restantes constantes del movimiento son conservadas por simetría del dato inicial) se deduce que la variación de  $\hat{Q}_R$  y  $\hat{E}_R$  no es debida a una deficiente evolución numérica. A

primera vista, la anterior gráfica da la impresión de una aniquilación de las dos ondas solitarias; no obstante, si esta aniquilación tiene lugar, debe de ocurrir en un tiempo muy elevado, ya que la radiación emitida es muy pequeña, pues en  $T = 520$  sólo se ha emitido el 2% de la energía y el 2.34% de la carga. A este respecto, es ilustrativo tener en cuenta que la vida media (tiempo necesario para emitir la mitad de la energía del estado inicial) de los pulsos de la ecuación de Higgs, deducida por medios analíticos [11], es 1750 en unidades adimensionales.

Otro argumento que sugiere la estabilidad del pulsón de la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar, viene dado por el hecho de que los dos paquetes que lo forman se alejan cada vez menos entre sí en cada rebote, y por tanto es de preveer el colapso final de ambos en un solo paquete.

Teniendo en cuenta que para  $\theta_K = 0.06$  no se forma estado ligado (ver figura IV.c.1) podemos afirmar que la velocidad máxima para que las ondas solitarias  $\Lambda_K = \Lambda_C = 0.6$  formen un pulsón es

$$V_{\rightarrow} = -V_{\leftarrow} = v_{lim} = 0.055 \pm 0.005$$

la cual es cuatro veces menor que la velocidad límite para la formación del pulsón de la ecuación de Higgs.

Tabla IV.a.1. Resultados numéricos de la interacción a/

$t = 0$	$\Lambda_K = 0.6$	$V_K = 0.0997$	$\Lambda_C = 0.8$	$V_C = -0.1572$
	$\Lambda_{\rightarrow}^{(2)}$	$\Lambda_{\rightarrow}^{(3)}$	$\Lambda_{\rightarrow}^{(4)}$	$\Lambda_{\leftarrow}^{(1)}$
	0.598	0.604	0.604	0.058
				$\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$
				0.792
				$\Lambda_{\leftarrow}^{(3)}$
				0.801
				$\Lambda_{\leftarrow}^{(4)}$
				0.801
$160 \leq t \leq 200$	0.611			$V_{\leftarrow}^{(1)}$
				-0.088
				-0.090

Tabla IV.a.2 Errores numéricos de las constantes del movimiento de la interacción a/

$\Delta E/E$	$\Delta Q/Q$	$\Delta P$	$\Delta S$
0.2%	0.1%	$10^{-3}$	$h/2^{(*)}$

(\*) h es el paso espacial de la malla numérica,  $h = 1/8$ .

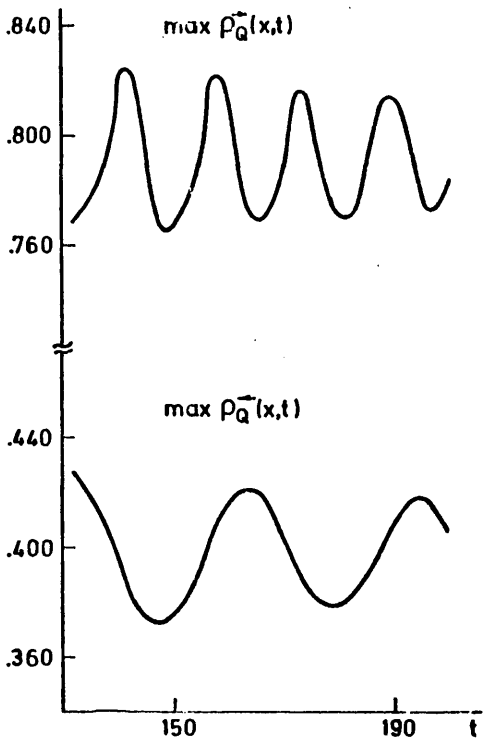


Fig. IV a 1

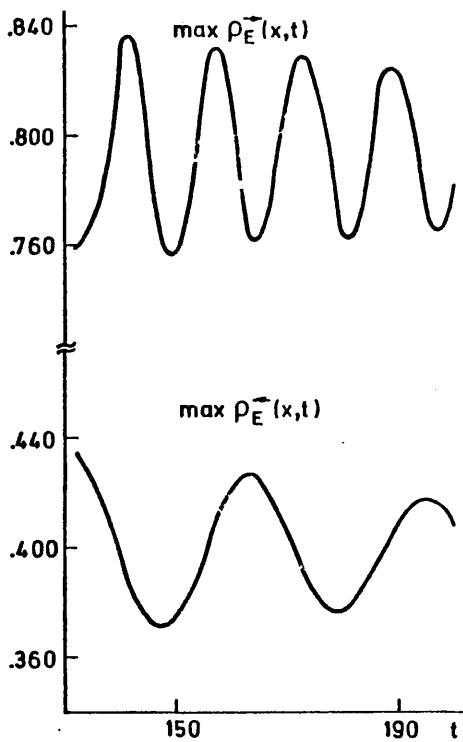


Fig. IV a 2

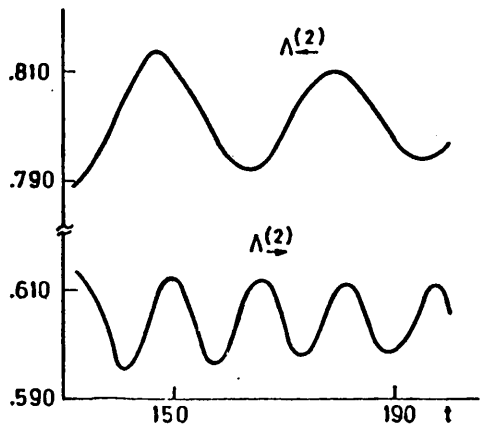


Fig. IV a 3

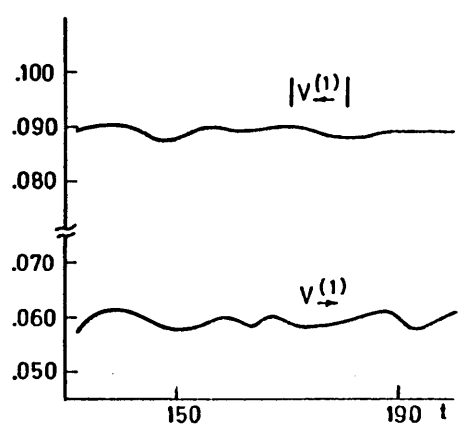


Fig. IV a 4

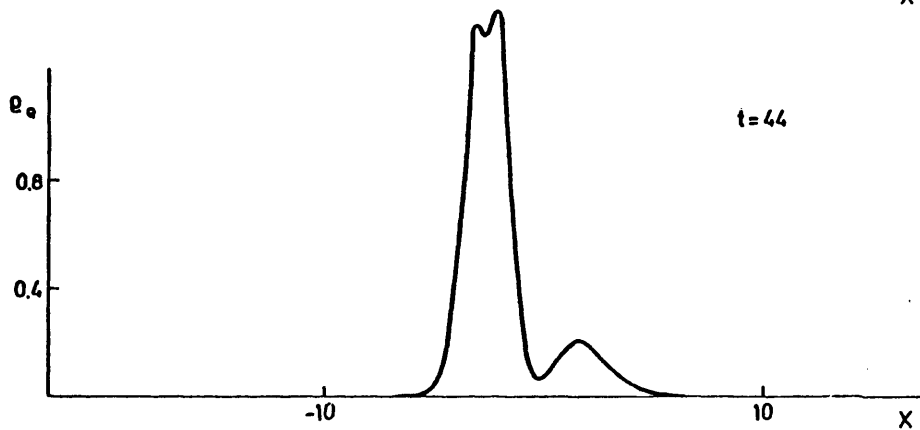
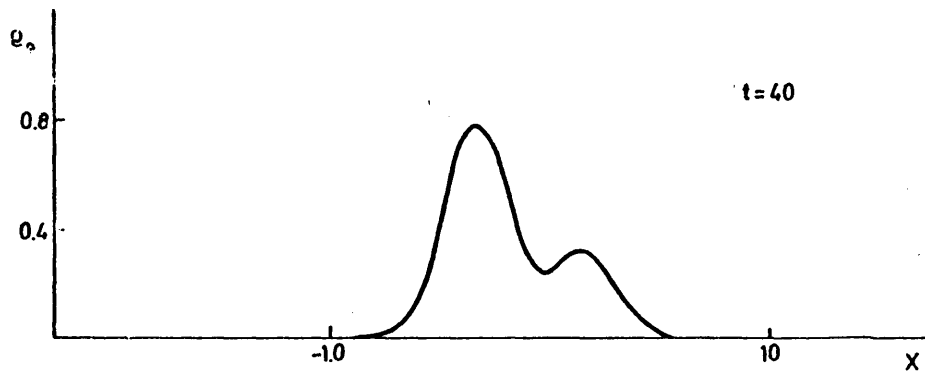
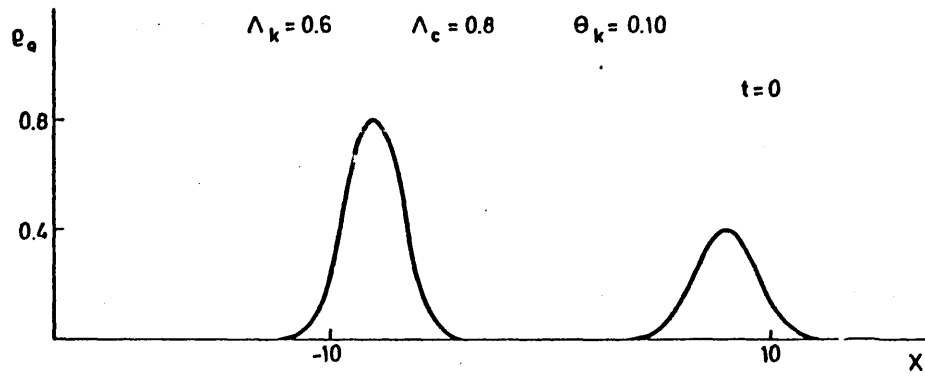


Fig. IV a 5

83

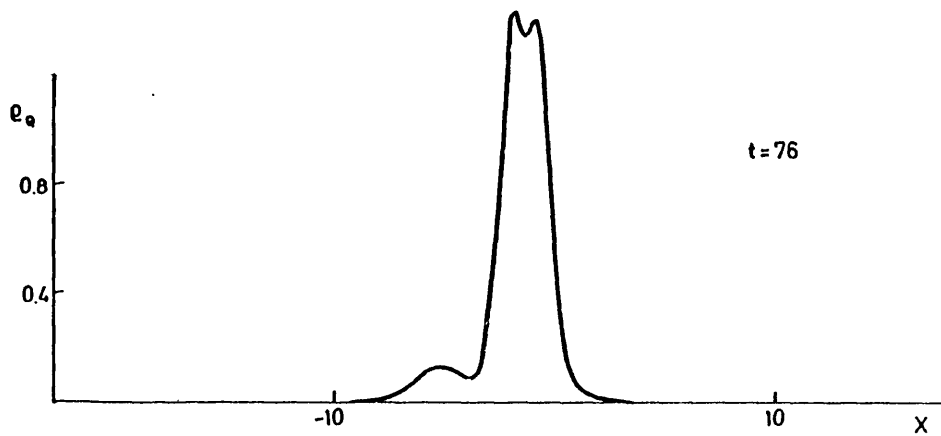
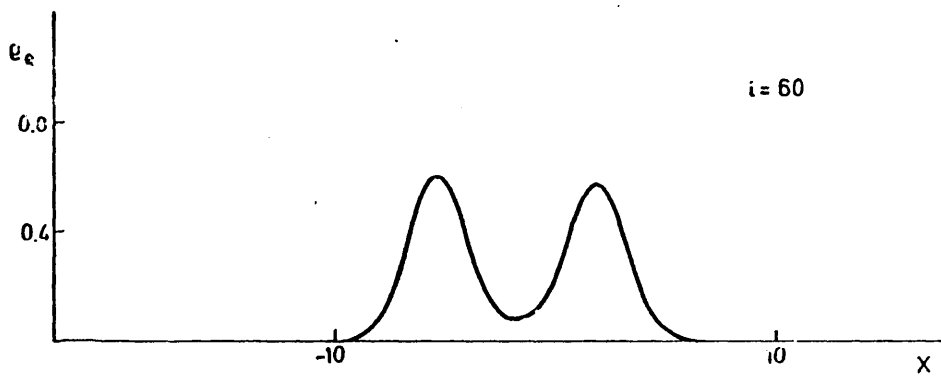
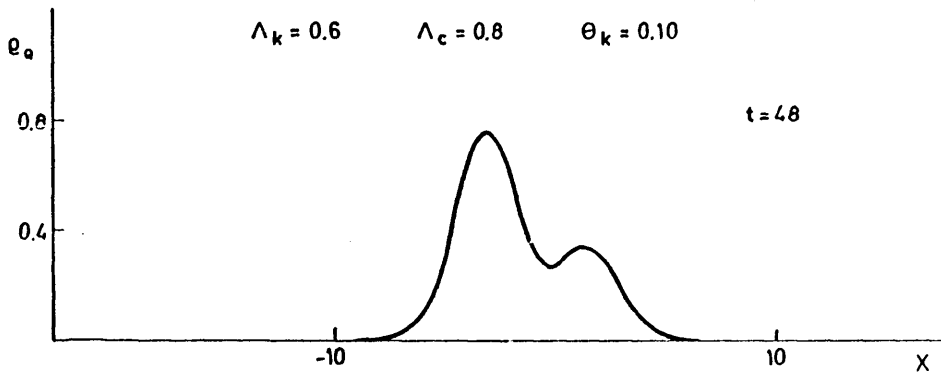


Fig. IV a 6

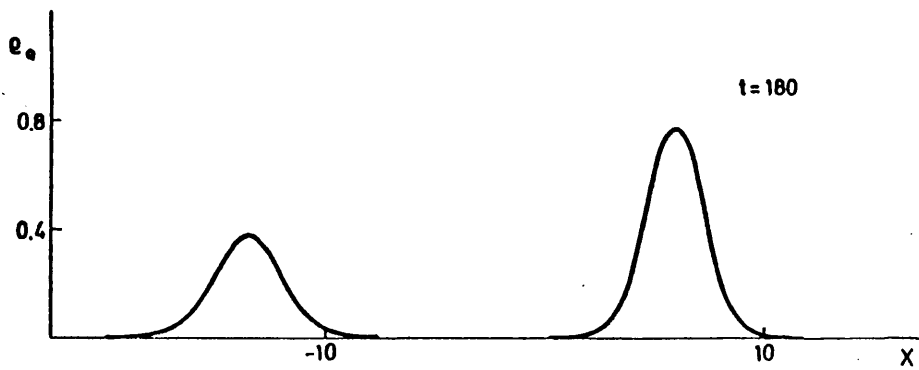
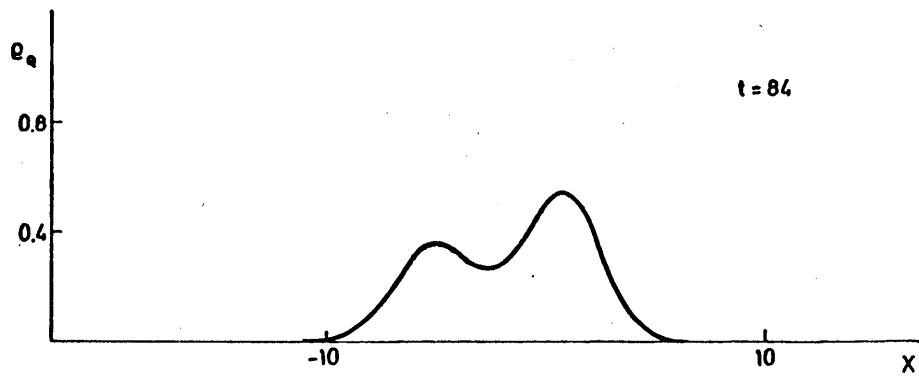
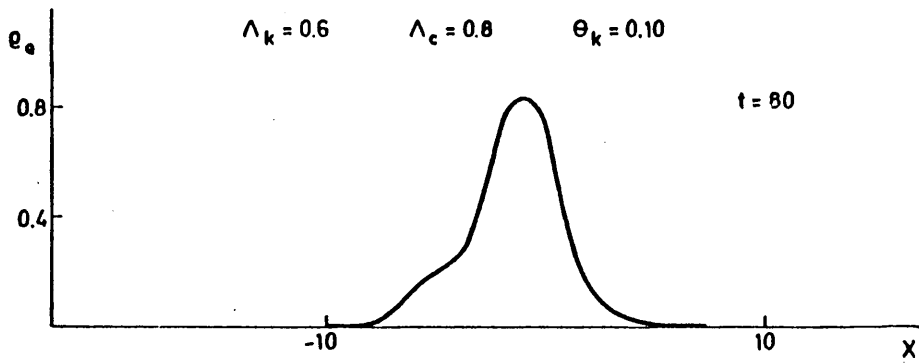


Fig. IV a 7

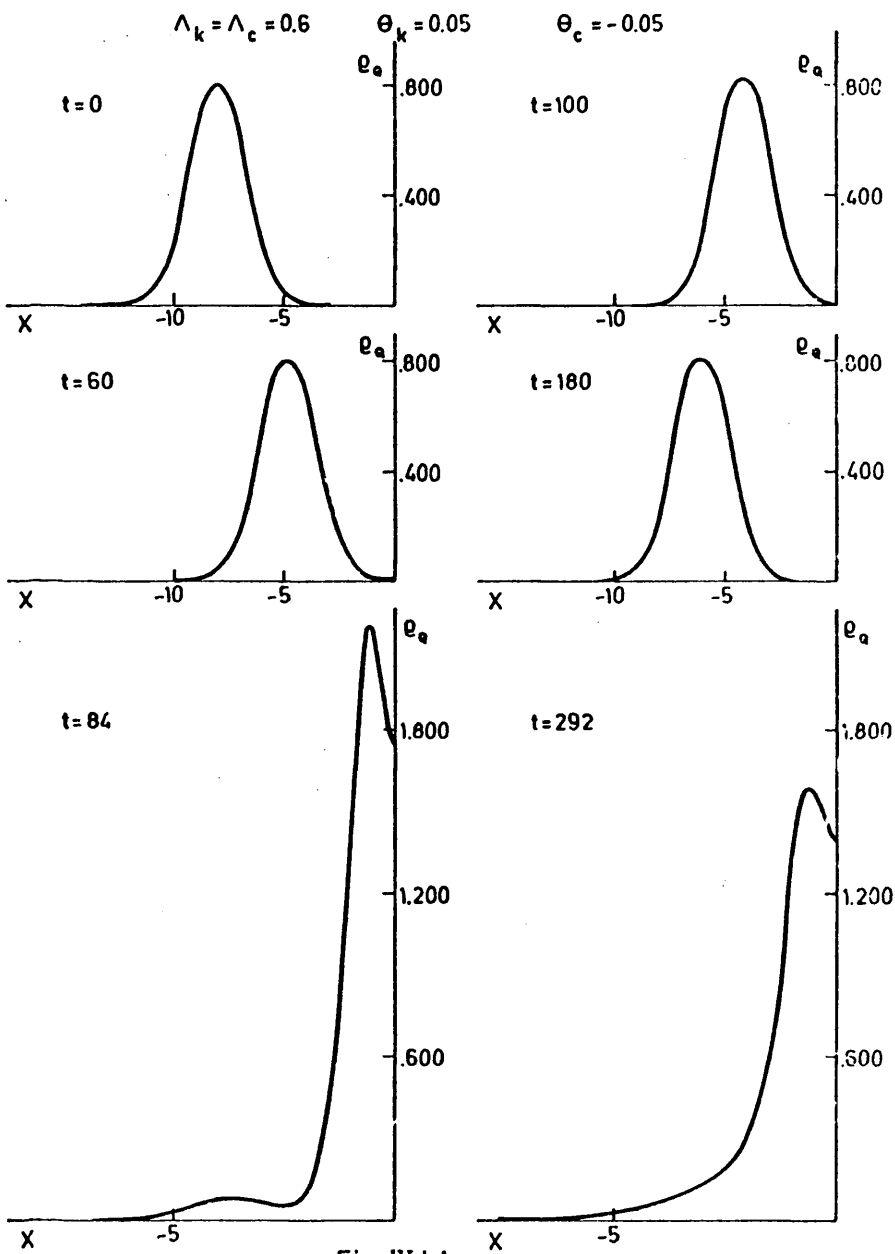
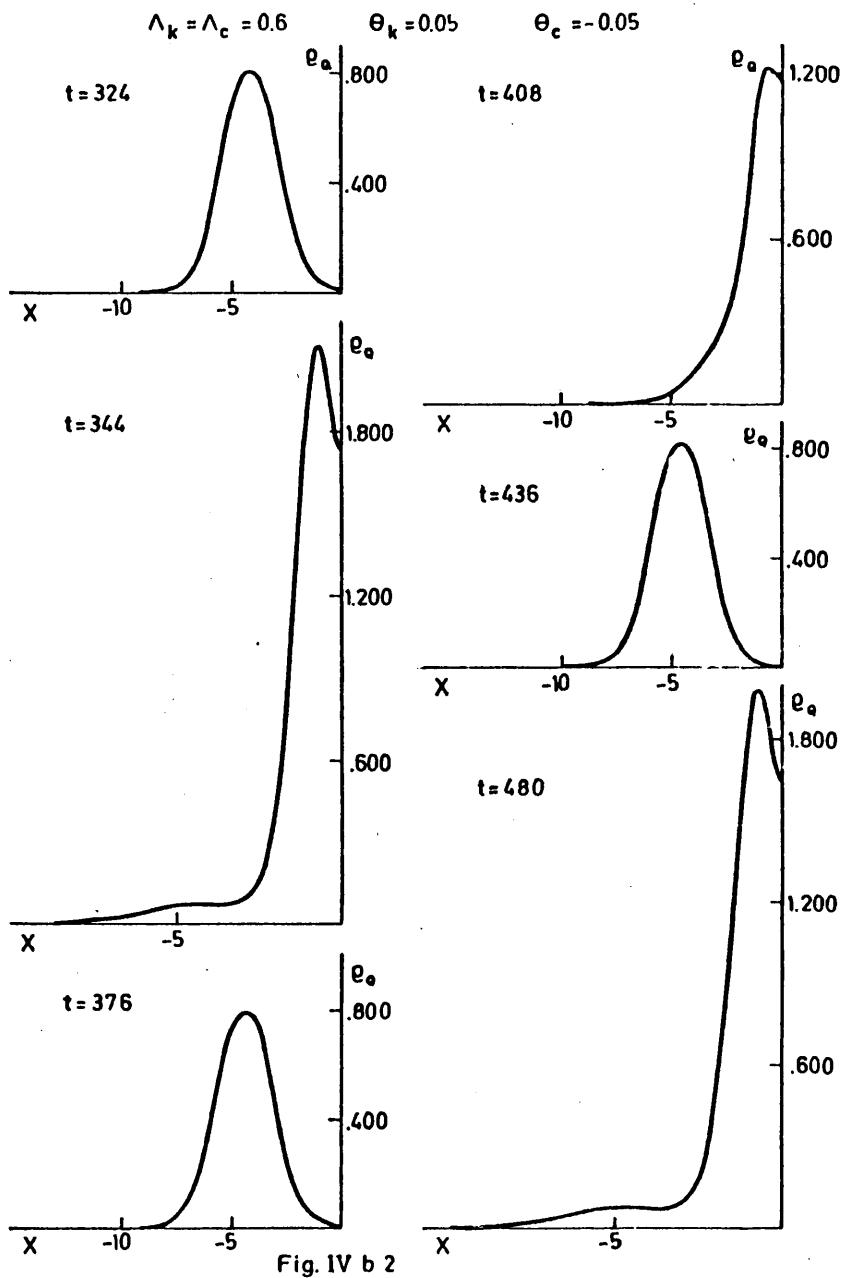


Fig. IV b1



$\Lambda_k = \Lambda_c = 0.6$      $\theta_k = 0.05$      $\theta_c = -0.05$

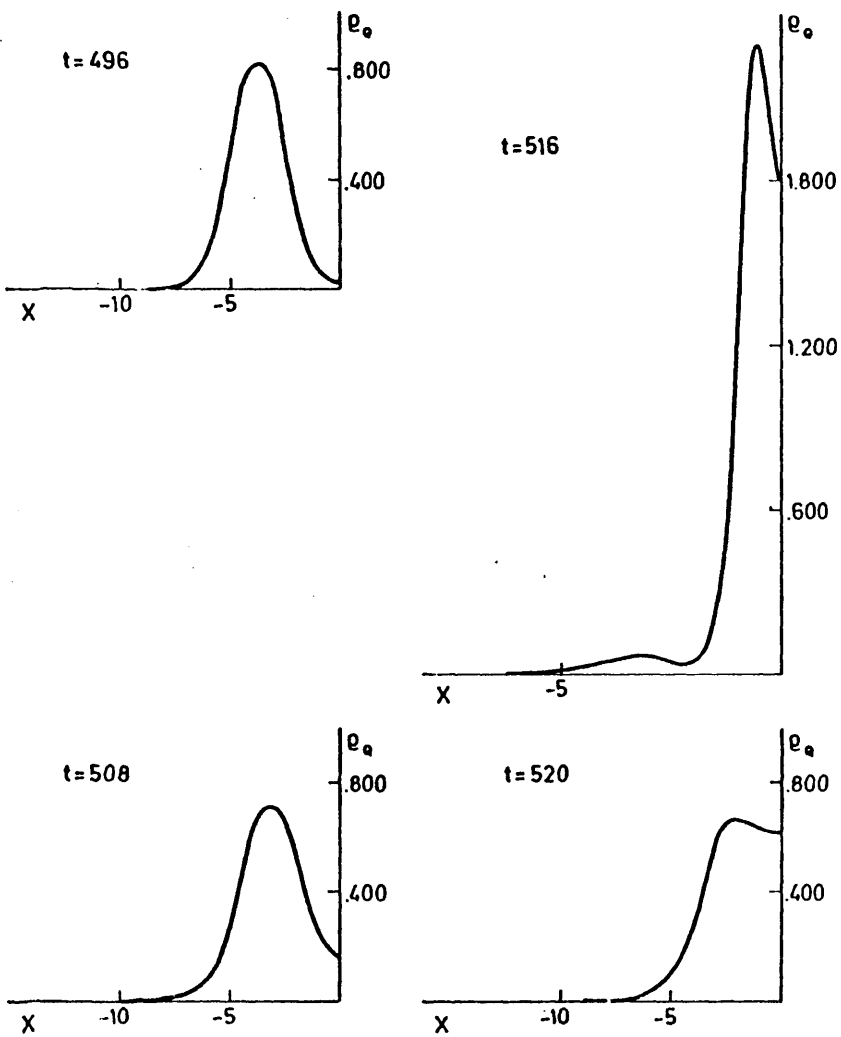


Fig. IV b 3

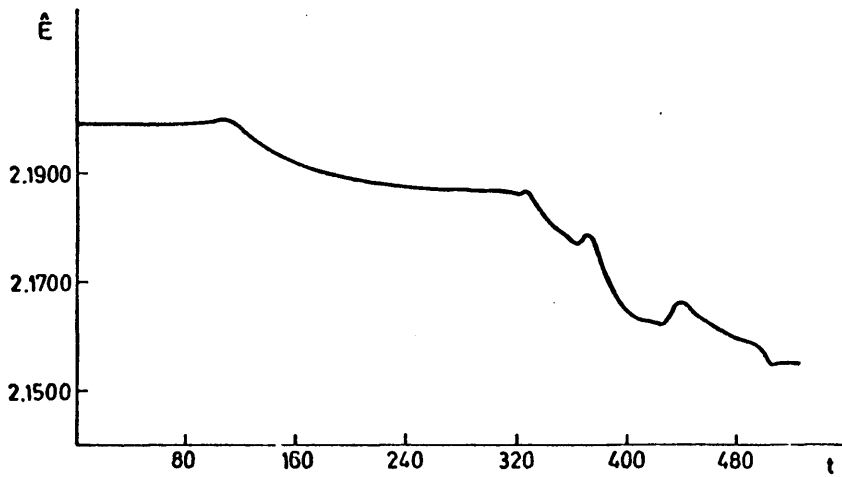
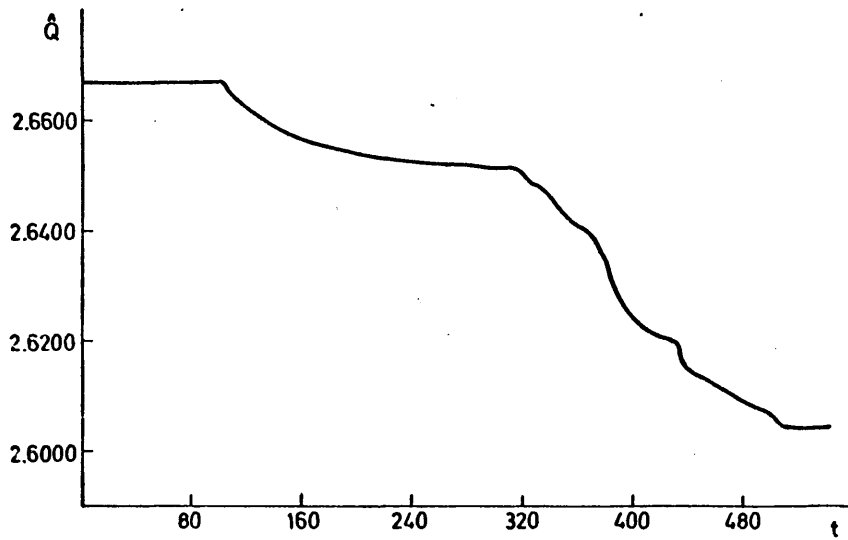


Fig. IV b 4

$\Lambda_k = \Lambda_c = 0.6$      $\theta_k = 0.06$      $\theta_c = -0.06$

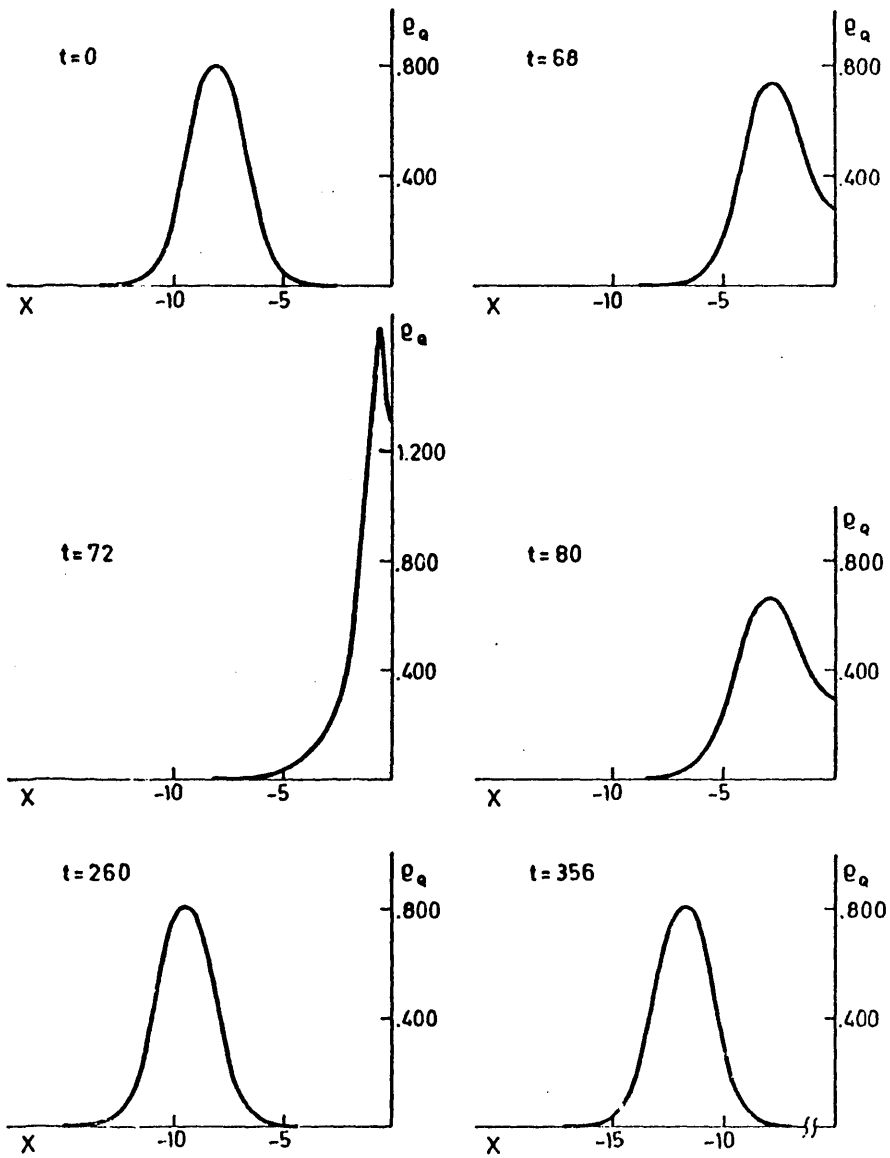


Fig. IV c 1

#### IV.4. Interacción múltiple de ondas solitarias.

Un doble motivo nos guía al estudiar la interacción múltiple de ondas solitarias. En primer lugar, es bien conocido que todo sistema resoluble por el método de la transformada espectral inversa (IST), y por ende con solitones, tiene infinitas leyes de conservación. Sin embargo, la existencia de esta infinitud parece [27] estar más relacionada con el hecho de que toda interacción múltiple de solitones se puede factorizar en parejas que con la existencia de solitones. Deseamos saber si la citada factorización tiene lugar para nuestro caso. El segundo motivo está relacionado con la interacción tan peculiar entre dos ondas solitarias, concretamente, estamos interesados en saber si también en las interacciones múltiples sólo existen unas velocidades bajo las cuales las ondas solitarias son solitones y se forman estados ligados a bajas velocidades.

Hemos estudiado la interacción de las tres ondas solitarias  $\Lambda_K = \Lambda_C = \Lambda_p = 0.9$  en los casos

$$\begin{array}{ll} \text{i)'} & \theta_p = 0 \quad \theta_K = -\theta_C = 0.15 \\ \text{ii)'} & \theta_p = 0 \quad \theta_K = -\theta_C = 0.3 \\ \text{iii)'} & \theta_p = 0 \quad \theta_K = -\theta_C = 0.4 \end{array}$$

La onda solitaria cuyos parámetros llevan subíndice p la colocamos inicialmente en el origen de coordenadas, mientras que las de subíndices K y C las situamos en  $Z = -20$  y  $Z = 20$  respectivamente. Características comunes a las anteriores colisiones son su carácter fuerte y la conservación del número de las ondas solitarias, quedando una centrada en el origen de coordenadas y las otras dos alejándose del mismo.

La metodología para la determinación de los parámetros de las ondas solitarias en movimiento del estado final es similar a la utilizada en el caso de interacciones binarias. El parámetro  $\Lambda$  de la onda solitaria inmóvil, que denotaremos  $\Lambda_0$ , se deduce a partir del máximo de su densidad de carga, ya que lo identificaremos con  $1 - \int \rho(0, t)/2$ . Para que tal identificación sea correcta debe realizarse en un tiempo lo sufi-

cientemente elevado de modo que  $\rho_Q(0, t)/\rho_E(0, t) = 1$ .

Los resultados numéricos de las tres colisiones vienen recogidos en las tablas IV.i', ii', iii', donde solo damos los parámetros de la onda solitaria central y la que se dirige hacia la izquierda, ya que por simetría se deducen los de la que se dirige hacia la derecha.

Los máximos de las ondas solitarias del estado final sufren oscilaciones que se van amortiguando en el transcurso del tiempo. A título de ejemplo, en las gráficas IV.1', 4' representamos, de manera análoga el caso de interacción binaria, las correspondientes a la interacción ii'.

Es de resaltar que los valores obtenidos para  $\Lambda^{(2)}$  y  $\Lambda_0$  son compatibles con la redistribución de la carga del estado final. En efecto, limitándonos al caso i', idénticos razonamientos son válidos para los otros dos casos, tenemos que  $\Lambda_0 = 0.886$  y por tanto, la semicarga de la onda solitaria central es

$$Q_{S/2} \frac{\sqrt{1 - \Lambda_0^2}}{\Lambda_0} = 0.523$$

Como la semicarga total, calculada numéricamente, es  $Q=1.4538$  para  $T \geq 260$ , deducimos que cada uno de los paquetes finales en movimiento lleva una carga dada por

$$Q_{\leftarrow} \equiv Q - Q_{S/2} = 0.931$$

y por consiguiente, si este paquete es una onda solitaria, su parámetro  $\Lambda$  es

$$\left(1 + \frac{Q_{\leftarrow}^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.907$$

valor que coincide con  $\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$  y nos indica la compatibilidad antes mencionada.

En las figuras IV.i', IV.ii' y IV.iii' representamos las tres interacciones anteriores. De la observación de

las mismas y de lo dicho anteriormente deducimos lo siguiente:

a/ En lo que se refiere a la dependencia continua y monótona de los parámetros finales respecto a las velocidades iniciales, existe un comportamiento análogo al caso de colisiones binarias. Así por ejemplo, las ondas solitarias con parámetros  $\Lambda_K = \Lambda_C = \Lambda_P = 0.9$  se comportan como solitones solamente con las velocidades del caso ii'.

b/ Teniendo en cuenta que a alta velocidad dos ondas solitarias iguales interactúan sin cambiar de forma, - mientras que cuando la colisión es múltiple si lo hacen, deducimos que esta interacción no se puede factorizar en interacciones binarias y por tanto es de preveer la no existencia de infinitas leyes de conservación para la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar.

Por último, es interesante señalar la dificultad - que tienen las ondas solitarias de la ecuación de Dirac para formar estados ligados de tres de tales ondas (tritones). En efecto, los resultados numéricos de las interacciones

$$\text{IV}' / \Lambda_K = \Lambda_C = \Lambda_P = 0.9 \quad \theta_P = 0 \quad \theta_K = -\theta_C = 0.05$$

$$\text{V}' / \Lambda_K = \Lambda_C = \Lambda_P = 0.6 \quad \theta_P = 0 \quad \theta_K = -\theta_C = 0.05$$

vienen dados en las tablas IV.iv' y IV.v'. Aunque inelásticas, en dichas interacciones no se emite radiación alguna. Este comportamiento es completamente diferente al de las ondas solitarias de la ecuación de Higgs, pues es conocido [11] que los tritones de esta ecuación son más fáciles de formar que los pulsones, ya que la velocidad límite de formación de aquéllos es  $0.75 \pm 0.03$  mientras que la de éstos es  $0.20 \pm 0.01$ .

Tabla IV.i' Resultados numéricos de la interacción i'/'

$t=0$	$\Lambda_K = \Lambda_C = 0.9$	$V_K = -V_C = 0.149$	$\Lambda_P = 0.9$	$V_P = 0$
	$\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$	$V_{\leftarrow}^{(1)}$	$\Lambda_o$	$\beta_o/\beta_E$
	0.905	-0.152	0.885	
$280 \leq t \leq 320$				1.000
	0.907	-0.154	0.887	

Tabla IV.ii' Resultados numéricos de la interacción ii'/'

$t=0$	$\Lambda_K = \Lambda_C = 0.9$	$V_K = -V_C = 0.291$	$\Lambda_P = 0$	$V_P = 0$
	$\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$	$V_{\leftarrow}^{(1)}$	$\Lambda_o$	$\beta_o/\beta_E$
	0.899	-0.291	0.901	
$140 \leq t \leq 180$				1.000
	0.901	-0.292	0.898	

Tabla IV.iii' Resultados numéricos de la interacción iii'/'

$t=0$	$\Lambda_K = \Lambda_C = 0.9$	$V_K = -V_C = 0.380$	$\Lambda_P = 0.9$	$V_P = 0$
	$\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$	$V_{\leftarrow}^{(1)}$	$\Lambda_o$	$\beta_o/\beta_E$
	0.891	-0.374	0.913	
$140 \leq t \leq 180$				1.000
	0.893	-0.375	0.916	

Tabla IV.iv'. Resultados numéricos de la interacción iv'/

$t=0$	$\Lambda_K = \Lambda_C = 0.9$	$V_K = -V_C = 0.05$	$\Lambda_p = 0.9$	$V_p = 0$
	$\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$	$V_{\leftarrow}^{(1)}$	$\Lambda_o$	$\beta_o/\beta_E$
	0.907	-0.062		
$300 \leq t \leq 340$			0.883	1.000
	0.909	-0.063		

Tabla IV.v' Resultados numéricos de la interacción v'/

$t=0$	$\Lambda_K = \Lambda_C = 0.6$	$V_K = -V_C = 0.05$	$\Lambda_p = 0.6$	$V_p = 0$
	$\Lambda_{\leftarrow}^{(2)}$	$V_{\leftarrow}^{(1)}$	$\Lambda_o$	$\beta_o/\beta_E$
	0.629	-0.107	0.542	
$300 \leq t \leq 340$				1.000
	0.631	-0.108	0.544	

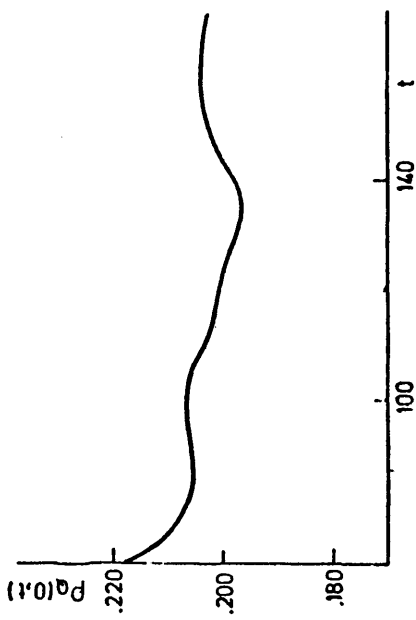


Fig. IV 2'

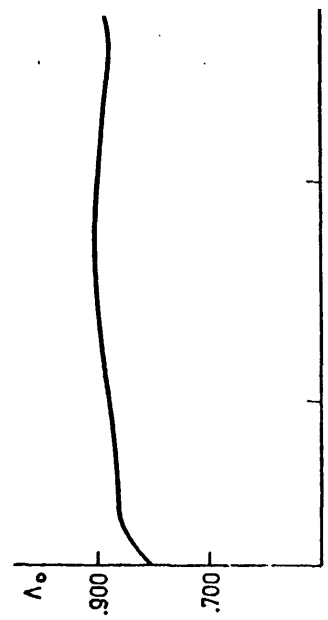


Fig. IV 4'

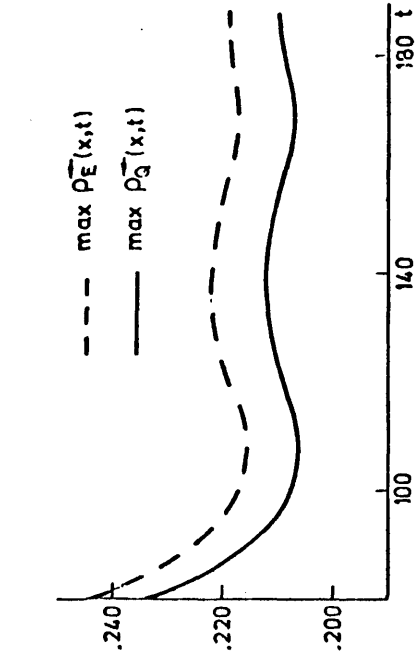


Fig. IV 1'

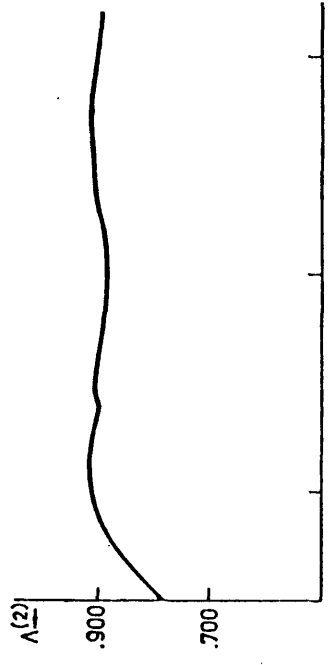


Fig. IV 3'

$$\Lambda_k = \Lambda_c = \Lambda_p = 0.9 \quad \theta_k = 0.15 \quad \theta_c = -0.15 \quad \theta_p = 0$$

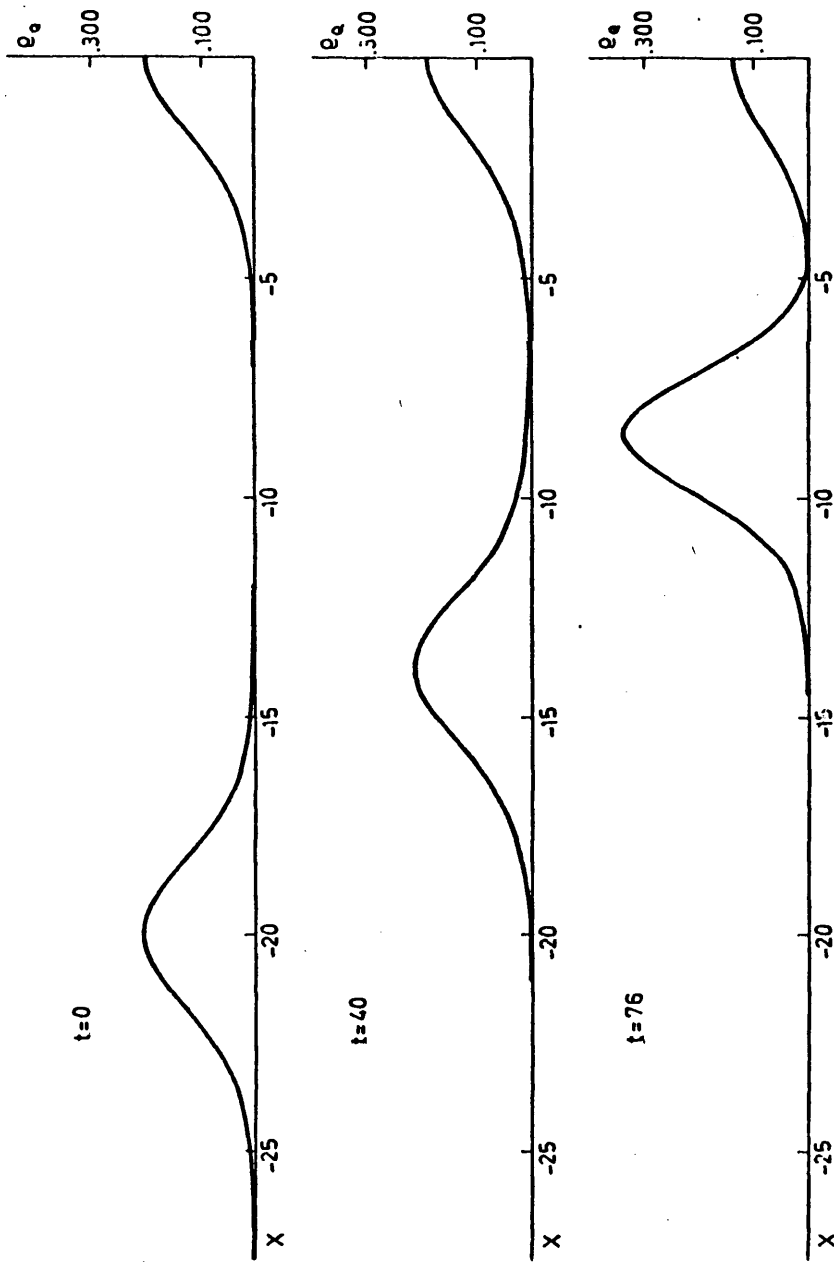
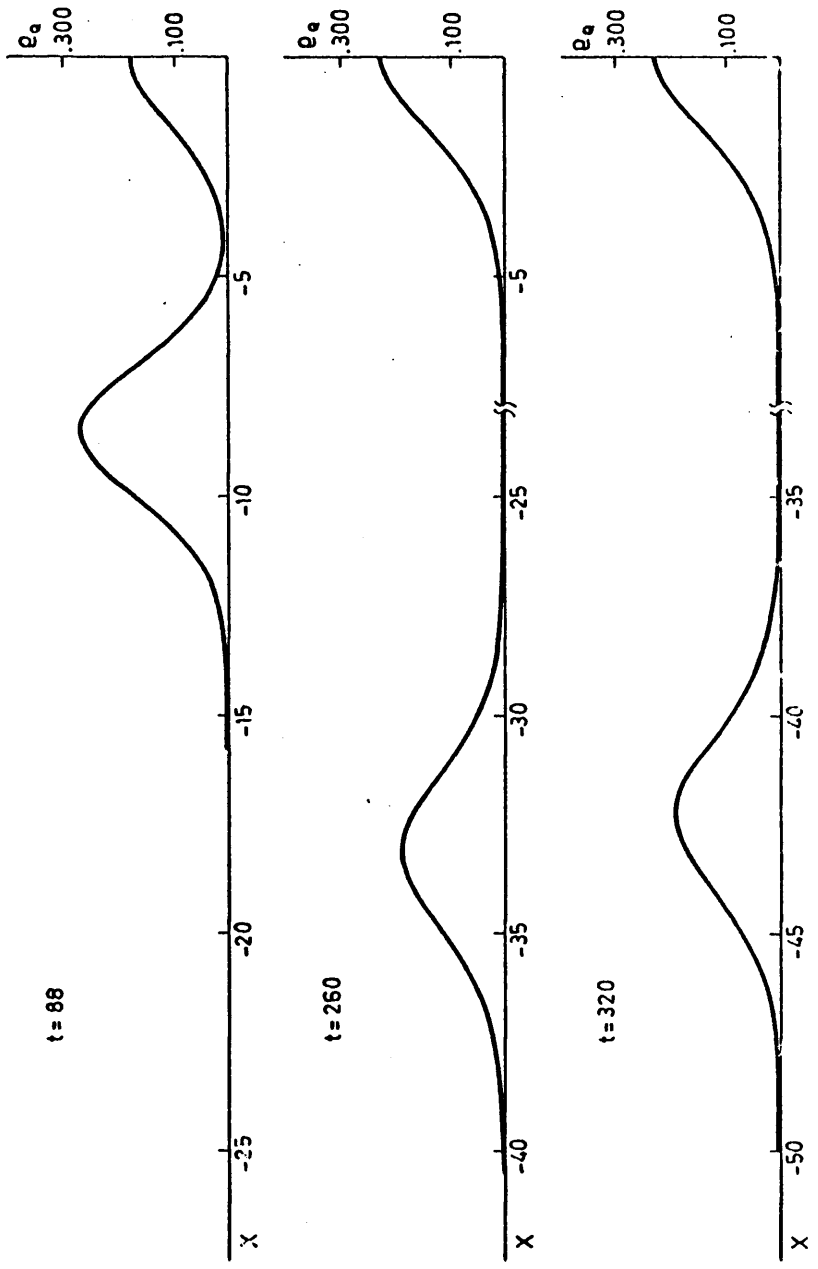


Fig. IV'1

$\Lambda_k = \Lambda_c = \Lambda_p = 0.9$     $\theta_k = 0.15$     $\theta_c = -0.15$     $\theta_p = 0$



91

Fig. IV'1'2

$\Lambda_K = \Lambda_C = \Lambda_P = 0.9$     $\Theta_K = 0.3$     $\Theta_C = 0.3$     $\Theta_P = 0$

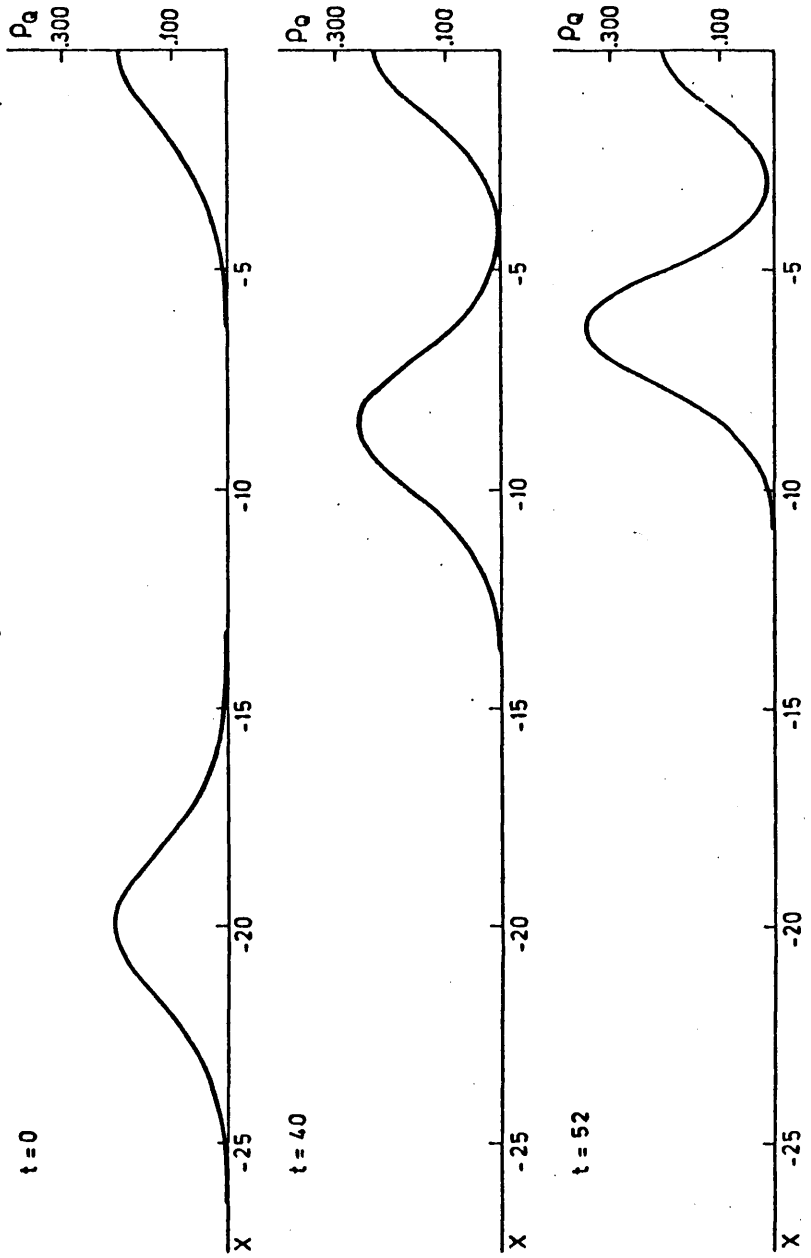
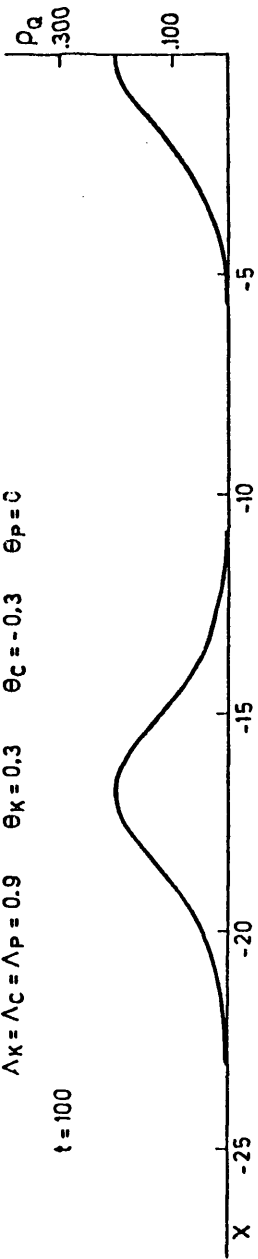


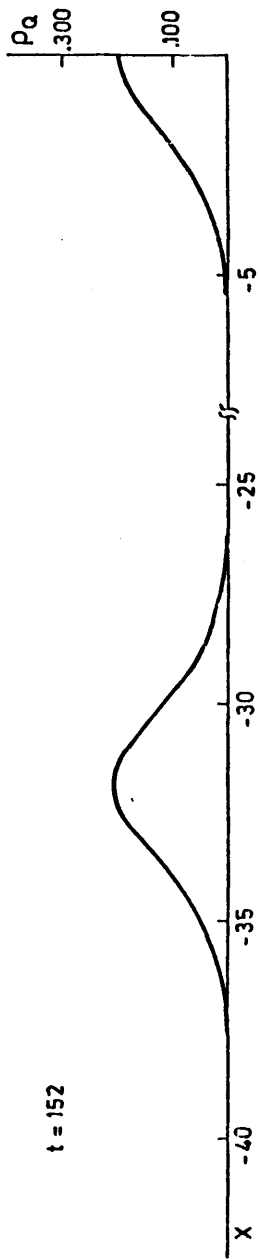
Fig. IVii'1

$$\Lambda_K = \Lambda_C = \Lambda_P = 0.9 \quad \Theta_K = 0.3 \quad \Theta_C = -0.3 \quad \Theta_P = 0$$

t = 100



t = 152



t = 184

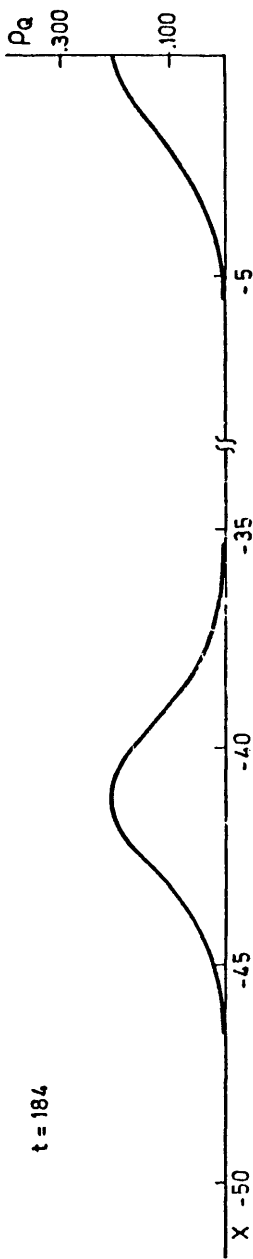
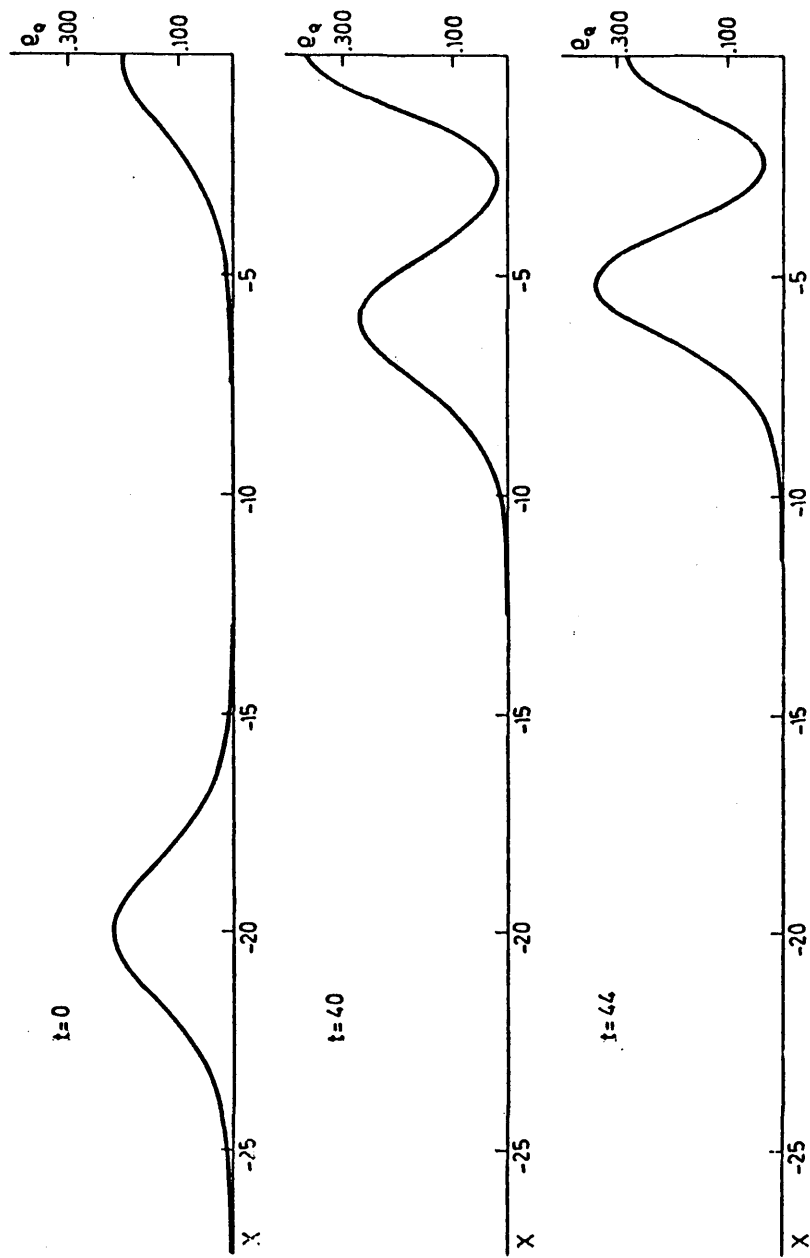


Fig. IV ii' 2

$\Delta k = \Delta c = \Delta p = 0.9$      $\theta_k = 0.4$      $\theta_c = -0.4$      $\theta_p = 0$

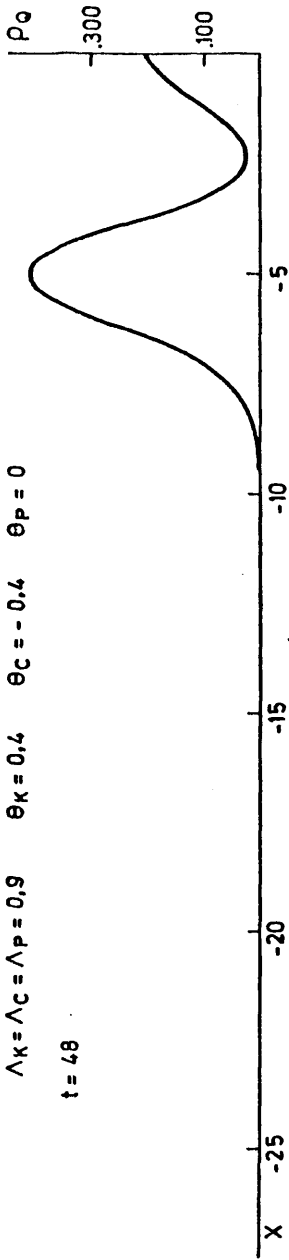


100

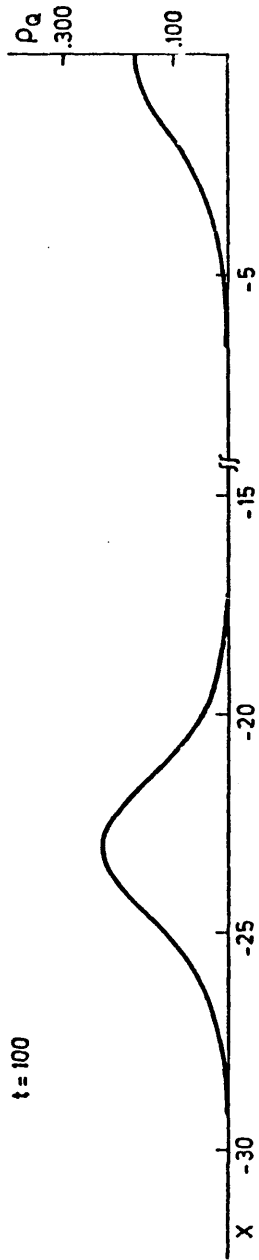
Fig. IViii'1

$$\Lambda_K = \Lambda_C = \Lambda_P = 0.9 \quad \Theta_K = 0.4 \quad \Theta_C = -0.4 \quad \Theta_P = 0$$

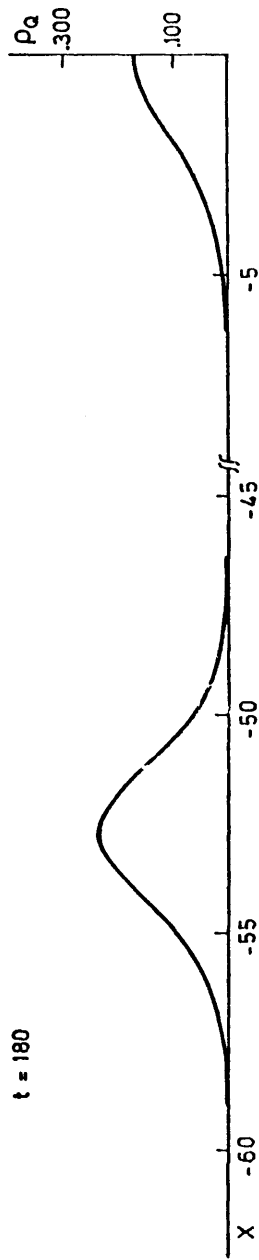
$t = 48$



$t = 100$



$t = 180$



101

Fig. IV iii' 2

CONCLUSIONES.

1/ La ecuación de Dirac con autoacoplo escalar de cuarto orden tiene, en el espacio bidimensional de Minkowski, una familia de soluciones del tipo onda solitaria. El parámetro  $\Lambda$  que caracteriza dicha familia toma los valores  $0 < \Lambda \leq m$ , siendo el tamaño de dichas ondas inversamente proporcional al valor del citado parámetro. Igualmente, se han encontrado expresiones analíticas para otras soluciones de la misma ecuación, cualitativamente semejantes a las ondas solitarias salvo que tienden hacia una constante no nula en el infinito.

2/ Se ha demostrado la estabilidad de las ondas solitarias en primer orden de perturbación. El método seguido es el estudio del problema de autovalores asociado a las ecuaciones variacionales del problema de evolución no lineal. El mismo tipo de argumentos se ha utilizado para demostrar la estabilidad de las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo pseudovectorial o vectorial (modelo de Thirring).

3/ Para la resolución numérica de la ecuación de Dirac autoacoplada escalarmente es recomendable la utilización del esquema implícito de Crank-Nicholson, no sólo por la bondad de los resultados obtenidos, sino que además el citado esquema es adaptable, via esquemas de desintegración, al caso multidimensional. También es factible estudiar con el mismo esquema la ecuación de Dirac con otros autoacoplos.

4/ Además de las ondas solitarias, la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar posee otras soluciones localizadas. Estas nuevas soluciones, encontradas numéricamente, son cualitativamente semejantes a las soluciones oscilantes del campo escalar de Higgs. Debido a esta analogía, hemos denominado a estas soluciones oscilantes del campo espinorial de igual manera que las correspondientes del campo escalar, es decir, pulsones.

5/ Se ha estudiado la evolución de algunas configuraciones iniciales cuyo estado final está constituido por -

una solución localizada y radiación. Esta evolución se realiza emitiendo hacia el infinito paquetes de ondas que en el transcurso del tiempo se van dispersando. En algunos casos, estos paquetes están constituidos por densidades de energía negativa, y por ende, la solución localizada del estado final tiene más energía que la configuración inicial. La presencia en ésta de zonas con densidades de energía de distinto signo implica una mayor lentitud en la evolución.

6/ La interacción entre dos ondas solitarias depende fundamentalmente de la velocidad que tengan en la configuración inicial. A velocidades altas la interacción se realiza sin emisión de radiación y es fuerte, mientras que a bajas velocidades la colisión va acompañada de emisión de radiación y se realiza de una manera débil. La delimitación de estas dos zonas depende del tamaño de las ondas solitarias iniciales, realizándose el tránsito de una zona a la otra de una manera continua.

Solo con ciertas velocidades incidentes, yacientes en la zona no radiativa, las ondas solitarias no sufren cambio alguno (módulo un desfase) al interaccionar. Fijados los parámetros de las ondas solitarias iniciales, y en un entorno de estas velocidades incidentes, los parámetros y las velocidades de las ondas solitarias emergentes de la colisión depende continuamente de las velocidades iniciales.

7/ Aunque la emisión de radiación sólo se hace apreciable a velocidades muy bajas, dinamicamente tiene una gran importancia debido a que permite la formación de estados ligados a partir del choque de dos ondas solitarias suficientemente lentas. Siguiendo la analogía con lo que sucede con el campo escalar de Higgs, hemos identificado estos estados ligados con los pulsones.

8/ A diferencia de lo que ocurre en el campo escalar de Higgs, no se ha observado emisión de radiación en la interacción de tres ondas solitarias lentas. Esta falta de emisión implica la imposibilidad de formación de estados ligados a partir de tres ondas solitarias (tritones).

Algunas de las cuestiones abiertas que se deducen del presente estudio son:

i/ ¿Cual es la expresión analítica de los pulsones? Estudios hechos para otras ecuaciones [12], sugieren que la herramienta a utilizar para responder a este interrogante es la teoría de los desarrollos asintóticos de Bogolyubov - Mitropolskii [15].

ii/ Teniendo en cuenta que la ecuación de Dirac con autoacoplo vectorial es resoluble analíticamente y que, para valores pequeños de la constante de acoplo, la misma ecuación con autoacoplo escalar puede considerarse como una aproximación de aquélla, no es aventurado conjeturar la posibilidad de resolver la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar mediante el método de Karpman - Maslov [24].

iii/ Habida cuenta que la ecuación de Dirac autoacoplada escalarmente posee ondas solitarias incluso cuando se involucre dos o tres variables espaciales [5], ofrece gran interés estudiar su dinámica mediante los esquemas multidimensionales introducidos en esta memoria. En este caso multidimensional es de preveer que el acoplamiento del campo espinorial con el electromagnético acelerará la evolución hacia los estados finales.

105

A P E N D I C E S

APENDICE A

Sistemas débilmente hiperbólicos.

En el primer capítulo se ha resuelto formalmente el sistema diferencial (I.3.4) utilizando la transformada de Laplace. En este apéndice demostraremos que todo lo hecho formalmente es matemáticamente correcto.

Consideremos el problema de evolución lineal siguiente

$$\frac{du}{dt} = A u(t), \quad t > 0; \quad u(0) = u_0 \quad (A.1)$$

donde  $u$  toma valores en un espacio de Banach y supondremos que el operador  $A$  es independiente del tiempo.

**Definición.** Diremos que la ecuación de evolución (A.1) asociada al operador  $A$  es débilmente hiperbólica, si existen tres constantes  $p, r, \lambda_0$ , tales que  $R_\lambda \equiv (\lambda I - A)^{-1}$  existe y satisface  $\|R_\lambda\| \leq p |\lambda|^r$  cuando  $|\lambda| \geq \lambda_0$  y  $\text{Re } \lambda \geq C |\text{Im } \lambda|^a$ , donde  $0 < a < 1$ .

Se demuestra [25, 26] que si (A.1) es débilmente hiperbólica, la solución única de dicha ecuación puede ser calculada por el método de la transformada de Laplace. La solución de (A.1) viene dada, utilizando el anterior método, por

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_\lambda d\lambda u_0$$

donde  $\Gamma$  es el contorno que limita la región introducida en la anterior definición.

Deseamos establecer algún criterio práctico para saber si el sistema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_j M_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + N(x) u \quad (A.2)$$

es débilmente hiperbólico en el espacio  $\bigoplus_{i=1}^m H^1(\mathbb{R}^n)$  siendo, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M_j(x)$  y  $N(x)$  matrices  $m \times m$ . Introduciendo la notación

$$a(x; \xi, q) \equiv \det \left( qI - \sum_j \xi_j A_j(x) \right)$$

el criterio buscado viene dado por el siguiente

**Teorema [25].** Si para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , todas las raíces de  $a(x; \xi, q) = 0$  son reales y no nulas, verificándose

$$|a(x; \xi, 0)| \geq C |\xi|^m$$

donde  $C$  es independiente de  $x$  y  $\xi$ , y si además, los elementos matriciales de  $A_j(x)$  y  $B(x)$  tienen respectivamente derivadas -segundas y primeras continuas y acotadas, entonces el sistema (A.2) es débilmente hiperbólico en  $\bigoplus_{i=1}^m H^1(\mathbb{R})$ .

Aplicamos el anterior teorema al sistema (I.3.4). En este caso  $m = 4$  y  $n = 1$ . Como

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se deduce que las raíces de

$$a(x; \xi, q) = \det \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & -\xi \\ 0 & q & \xi & 0 \\ 0 & \xi & q & 0 \\ -\xi & 0 & 0 & q \end{pmatrix} = 0$$

son  $q = \pm \xi$ . Además es inmediato deducir

$$a(x; \xi, 0) = \xi^4$$

Ya que en nuestro caso los elementos matriciales de  $M$  y  $N$  son analíticos y con derivadas acotadas, se deduce la aplicabilidad del anterior teorema y por ende, queda justificado la utilización hecha de la transformada de Laplace en el primer capítulo

APENDICE B.

Estabilidad de las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo vectorial o pseudovectorial.

El método para demostrar la estabilidad de las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo escalar, bajo la actuación de perturbaciones que se anulen en el infinito y sean continuas, es aplicable a las ondas solitarias de la ecuación de Dirac con autoacoplo vectorial o pseudovectorial. En este apéndice expondremos muy sucintamente los hechos más notables que se presentan en la demostración de la estabilidad de estas ondas solitarias.

Las ecuaciones de Dirac con autoacoplo vectorial y pseudovectorial son

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi + 2\lambda (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \gamma^\mu \psi = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi + 2\lambda (\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi) \gamma^5 \gamma^\mu \psi = 0 \quad (\text{B.2})$$

donde  $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1$ . Desarrollándolas obtenemos

$$\partial_0 \psi + \gamma^2 \gamma^1 \partial_1 \psi + im\psi \mp 2i\lambda [(\psi^\dagger \psi) \psi - (\psi^\dagger \gamma^5 \psi) \gamma^5 \psi] = 0 \quad (\text{B.3})$$

correspondiendo el signo superior o inferior al autoacoplo vectorial o pseudovectorial, respectivamente. Aún cuando estas dos ecuaciones difieren sólo en el signo de la constante de acoplo, sus ondas solitarias presentan diferencias apreciables. Dichas ondas son

$$\psi_{1s}^v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{m^2 - \lambda^2} \sqrt{m + \lambda} \frac{\text{ch}(\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)}{\lambda + m \text{ch}(2\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)} e^{-i\lambda t} \equiv A e^{-i\lambda t}$$

$$\psi_{2s}^v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{m^2 - \lambda^2} \sqrt{m - \lambda} \frac{\text{sh}(\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)}{\lambda + m \text{ch}(2\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)} e^{-i\lambda t} \equiv iB e^{-i\lambda t} \quad (\text{B.4})$$

$$\Psi_{1s}^A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{m^2 - \lambda^2} \sqrt{m + \lambda} \frac{\text{sh}(\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)}{\text{mch}(2\sqrt{m^2 - \lambda^2} x) - \lambda} e^{-i\lambda t} \equiv A e^{-i\lambda t} \quad (\text{B.5})$$

$$\Psi_{2s}(x, t) = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{m^2 - \lambda^2} \sqrt{m - \lambda} \frac{\text{ch}(\sqrt{m^2 - \lambda^2} x)}{\text{mch}(2\sqrt{m^2 - \lambda^2} x) - \lambda} e^{-i\lambda t} \equiv iB e^{-i\lambda t}$$

donde los superíndices  $V$  y  $A$  se refieren a los acoplos vectorial y pseudovectorial y  $\lambda \leq m$ .

El operador  $L$  es ahora

$$L = \begin{pmatrix} 0 & m - \lambda \mp 2(A^2 - B^2) & 0 & \mp 4\lambda AB + \frac{d}{dx} \\ -m + \lambda \pm 2\lambda(A^2 + B^2) & 0 & \pm 4\lambda AB - \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \mp 4\lambda AB - \frac{d}{dx} & 0 & -m - \lambda \pm 2\lambda(A^2 - B^2) \\ \pm 4\lambda AB + \frac{d}{dx} & 0 & m + \lambda \pm 2\lambda(A^2 + 3B^2) & 0 \end{pmatrix}$$

correspondiendo los signos superiores al acoplo vectorial y - los inferiores al pseudovectorial, mientras que  $A$  y  $B$  deben ser sustituidos por las expresiones correspondientes dadas por (B.4) ó (B.5). Además, la condición de que las perturbaciones se arulan en el infinito la traducimos matemáticamente por el hecho de que el anterior operador  $L$  actua en el espacio

$$\bigoplus_{i=1}^4 H^1(\mathbb{R})$$

La descomposición de  $L$  viene dada por

$$L = L_A + 2\lambda L_H$$

con

$$L_H = \pm \begin{pmatrix} 0 & A^2 + B^2 & 0 & 0 \\ A^2 + B^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^2 + B^2 \\ 0 & 0 & A^2 + B^2 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos

$$\|L_H\| \leq \sup_x (A^2 + B^2)$$

y por ende

$$|\Omega_R| \leq \frac{m-\Lambda}{\lambda} \quad (\text{acoplo vectorial})$$

$$|\Omega_R| \leq \frac{m+\Lambda}{\lambda} \quad (\text{acoplo pseudovectorial})$$

siendo  $\Omega_R$  la parte real de un autovalor  $\Omega$  de L.

El resto de la demostración de la estabilidad de las ondas solitarias (B.4) y (B.5) sigue idénticos pasos a los ya utilizados en el primer capítulo, debido a la semejanza del operador L anterior con el que aparece para el caso de autoacoplo escalar.

APENDICE C.

Esquemas de desintegración para la ecuación de Dirac multidimensional con autoacoplo escalar.

La ecuación de Dirac autoacoplada escalarmente en el espacio cuatridimensional de Minkowski es

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi + 2\lambda (\bar{\psi} \psi) \psi = 0$$

donde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

siendo I la matriz identidad de orden dos y  $\sigma^i (i = 1, 2, 3)$  - las tres matrices de Pauli. El anterior campo espinorial posee soluciones localizadas tipo onda solitaria [5] y es por tanto interesante encontrar un esquema numérico para la resolución del problema de Cauchy asociado a la anterior ecuación. Demostremos en este apéndice que el esquema unidimensional introducido en el segundo capítulo, admite una generalización a este caso multidimensional.

Si introducimos la notación siguiente

$$w \equiv \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \text{Re } \psi_1 \\ \text{Im } \psi_1 \\ \vdots \\ \text{Im } \psi_4 \end{pmatrix}$$



$$N_1 \equiv \begin{pmatrix} M & J \frac{\partial}{\partial x} \\ J \frac{\partial}{\partial x} & -M \end{pmatrix} \quad N_2 \equiv i \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad N_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \frac{\partial}{\partial z} \\ \gamma^0 \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & -m+F & 0 & 0 \\ m-F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m+F \\ 0 & 0 & m-F & 0 \end{pmatrix}$$

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad F \equiv 2\lambda(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2)$$

la ecuación de Dirac no lineal anterior se escribe como

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 N_i w = 0$$

Teniendo en cuenta que  $\forall f \in \bigoplus_{i=1}^8 L^2(\mathbb{R})$  se verifica

$$(f, N_i f) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

se deduce [21, 22] que un esquema numérico apropiado para la mencionada ecuación de Dirac es del tipo de los llamados de -desintegración. Este consiste en sustituir las ecuaciones en derivadas parciales por el sistema siguiente de ecuaciones en diferencias

$$\frac{w^{n+\frac{1}{3}} - w^n}{\xi} + \Lambda_1^n \frac{w^{n+\frac{1}{3}} + w^n}{2} = 0$$

$$\frac{w^{n+\frac{2}{3}} - w^{n+\frac{1}{3}}}{\xi} + \Lambda_2^n \frac{w^{n+\frac{2}{3}} + w^{n+\frac{1}{3}}}{2} = 0$$

$$\frac{w^{n+1} - w^{n+\frac{2}{3}}}{\xi} + \Lambda_3^n \frac{w^{n+1} + w^{n+\frac{2}{3}}}{2} = 0$$

donde  $\Lambda_i^n = N_i(w^n) + \frac{\xi}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial t} \right)_w = w^n$  ( $i = 1, 2, 3$ ). El superíndice  $n$  nos indicará la discretización de la variable temporal, mientras que  $\xi$  será el paso de dicha variable.

Introduciendo las sustituciones

$$\frac{\partial w_{ijk}}{\partial x} \rightarrow \frac{w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k}}{2h} \equiv D_{ox} w_{ijk}$$

$$\frac{\partial w_{ijk}}{\partial y} \rightarrow \frac{w_{i,j+1,k} - w_{i,j-1,k}}{2h} \equiv D_{oy} w_{ijk}$$

$$\frac{\partial w_{ijk}}{\partial z} \rightarrow \frac{w_{ijk+1} - w_{ijk-1}}{2h} \equiv D_{oz} w_{ijk}$$

y la siguiente notación

$$F_{ijk}^n \equiv F(\psi_{ijk}^n)$$

$$G_{ijk}^n \equiv \left[ \text{Re}(\psi_{1x} \psi_4^* - \psi_1 \psi_{4x}^* + \psi_{2x} \psi_3^* - \psi_2 \psi_{3x}^* + \psi_{1z} \psi_3^* - \psi_1 \psi_{3z}^* + \psi_{4z} \psi_2^* - \psi_{2z} \psi_4^*) + \text{Im}(\psi_1 \psi_{4y}^* - \psi_{1y} \psi_4^* - \psi_2 \psi_{3y}^* + \psi_{2y} \psi_3^*) \right] \psi = \psi_{ijk}^n$$

$$K_{ijk}^n \equiv \frac{\xi}{2} [-m + F_{ijk}^n] + \lambda \zeta^2 G_{ijk}^n$$

el esquema numérico adopta, tras un largo cálculo algebraico, la siguiente forma final

$$\gamma_x \psi_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \beta_{x;i,j,k}^n \psi_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \alpha_x \psi_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \varrho_{x;i,j,k}^n$$

$$\gamma_y \psi_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}} + \beta_y \psi_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \alpha_y \psi_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} = \varrho_{y;i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$$

$$\gamma_z \psi_{i,j,k-1}^{n+1} + \beta_z \psi_{i,j,k}^{n+1} + \alpha_z \psi_{i,j,k+1}^{n+1} = \varrho_{z;i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}$$

siendo

$$\gamma_x \equiv \frac{\tau}{4h} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_x \equiv -\gamma_x \quad \beta_{x;i,j,k} \equiv \begin{pmatrix} I+iK_{ijk}^n & 0 \\ 0 & I-iK_{ijk}^n \end{pmatrix}$$

$$\gamma_y \equiv \frac{-\tau}{4h} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_y \equiv -\gamma_y \quad \beta_y \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\gamma_z \equiv \frac{-\tau}{4h} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_z \equiv -\gamma_z \quad \beta_z \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$Q_{x;i,j,k}^n \equiv \begin{pmatrix} I - iK_{ijk}^n & -\frac{\tau}{2} \sigma^1 D_{ox} \\ -\frac{\tau}{2} \sigma^1 D_{ox} & I + iK_{ijk}^n \end{pmatrix} \Psi_{i,j,k}^n$$

$$Q_{y;i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} \equiv \begin{pmatrix} I & \frac{\tau}{2} \sigma^2 D_{oy} \\ \frac{\tau}{2} \sigma^2 D_{oy} & I \end{pmatrix} \Psi_{ijk}^{n+\frac{1}{3}}$$

$$Q_{z;i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} \equiv \begin{pmatrix} I & -\frac{\tau}{2} \sigma^3 D_{oz} \\ -\frac{\tau}{2} \sigma^3 D_{oz} & I \end{pmatrix} \Psi_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}}$$

Admitiendo condiciones periódicas en la frontera, el anterior esquema numérico es incondicionalmente estable. Su orden de aproximación, tanto en la variable espacial como en la temporal, es dos.

Para una resolución efectiva del sistema de ecuaciones numéricas, debe emplearse sucesivamente el método de factorización matricial para cada una de las tres ecuaciones que componen el mencionado sistema. La estabilidad espacial de este método se sigue, al igual que para el caso unidimensional, de las siguientes acotaciones

$$\| \Omega_{ijk}^{n+\frac{1}{3}} \| < 1 \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\| \Omega_{ijk}^{n+\frac{2}{3}} \| < 1 \quad 1 \leq j \leq N$$

$$\| \Omega_{ijk}^{n+1} \| < 1 \quad 1 \leq k \leq N$$

Unas condiciones suficientes para la verificación de las mismas son

$$\Omega_{ijk}^{n+\frac{1}{3}} = \Omega_{iik}^{n+\frac{2}{3}} = \Omega_{ijl}^{n+1} = 0$$

$$\Omega_{Njk}^{n+\frac{1}{3}} = \Omega_{iNk}^{n+\frac{2}{3}} = \Omega_{ijN}^{n+1} = 0$$

ó lo que es lo mismo, la solución de la ecuación de Dirac no lineal que deseamos encontrar numéricamente debe anularse en la frontera.

Todo lo dicho anteriormente para el caso tridimensional se puede aplicar cuando la ecuación de Dirac sólo involucre dos variables espaciales. Obviamente, en este caso el esquema numérico será mucho más simple, ya que se trabajará con matrices bidimensionales en vez de hacerlo con matrices cuadrimensionales.

REFERENCIAS.

- [1] N. Rosen, Phys. Rev. 55, 94 (1939).
- [2] R. Finkelstein, R. Lelevier and M. Ruderman, Phys. Rev. 83, 326 (1951).
- [3] R. Finkelstein, C. Fronsdal and P. Kaus, Phys. Rev. 103, 1571 (1956).
- [4] T. Wakano, Prog. Theor. Phys. 35, 1117 (1966).
- [5] M. Soler, Phys. Rev. D1, 2766 (1970).
- [6] M. Soler, Phys. Rev. D8, 3424 (1973).
- [7] A. F. Rañada and M. Soler, Phys. Rev. D8, 3450 (1973).
- [8] A. F. Rañada, M. F. Rañada, M. Soler and L. Vázquez, Phys. Rev. D10, 517 (1974).
- [9] A.F. Rañada and L. Vázquez, Prog. Theor. Phys. 56, 311 (1976).
- [10] A.E. Kudryavtsev, JETP Lett. 22, 82 (1975).
- [11] B.S. Getmanov, JETP Lett. 24, 291 (1976).
- [12] I.L. Bogolyubskii, JETP Lett. 24, 535 (1976).
- [13] I.L. Bogolyubskii and V.G. Makhankov, JETP Lett. 24, 12 (1976).
- [14] I.L. Bogolyubskii and V.G. Makhankov, JETP Lett. 25, 107 (1977).
- [15] V.G. Makhankov, Phys. Reports 35C, 1 (1978).
- [16] I. Bialynicki-Birula and I. Mycielski, Ann. Phys. 100, 62 (1976).
- [17] R. Rajaraman, Phys. Reports 21C, 228 (1975).

- [18] R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. 49, 681 (1977).
- [19] A.C. Scott, F.Y. Chu and D.W. McLaughlin, Proc. IEEE 61, 1443 (1973).
- [20] A. Galindo, Lett. Nuovo Cimento 20, 210 (1977).
- [21] N.N. Yanenko, "Méthode a pas fractionnaires", Armand Colin Paris (1968).
- [22] G.I. Marchuk, "Methods of Numerical Mathematics", Springer-Verlag, Berlin (1975).
- [23] A. Ralston, "A First Course in Numerical Analysis", McGraw-Hill, New-York (1965).
- [24] V.I. Karpman and E.M. Maslov, Sov. Phys. JETP 46, 281 - (1977).
- [25] R. Beals, Arch. Rat. Mech. Anal. 48, 123 (1972).
- [26] R. Beals, "Laplace transform for evolution equations" en "Boundary Value Problems for Linear Evolution Partial Differential Equations" editado por H.G. Garnir, Reidel (1977)
- [27] P.P. Kulish, Lecture at the Conference on Non-linear Evolution Equations Solvable by the Inverse Spectral Transform, Roma, June 1977.
- [28] E.A. Coddington and N. Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, New-York (1955).
- [29] L.Y. Shih, J. Phys. A, 7, 2109 (1974).
- [30] R. Friedberg, T.D. Lee and A. Sirlin, Phys. Rev. D, 13, 2739 (1976).
- [31] W. Rudin, "Functional Analysis", McGraw-Hill, New-York (1973).

