



Matemática de los Seguros No Vida: Modelos, Medición del Riesgo y Solvencia.

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid
2024

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



ÍNDICE

Introducción

1. Introducción. Temas importantes de la Matemática Actuarial
2. Herramientas de la Teoría de la probabilidad.

1ªparte: Modelos del riesgo en seguros

3. Número de siniestros.
4. Cuantías de los siniestros.
5. Aproximaciones y cálculo numérico de distribuciones compuestas

2ªparte: Tarificación y reaseguro

6. Tarificación: primas, medidas del riesgo, ordenación de riesgos y modificaciones de las pólizas.
7. Introducción a los sistemas de tarificación a priori y a posteriori.
8. Reaseguro

3ªparte: Provisiones técnicas

9. Provisiones técnicas: Provisiones de primas y provisión de prestaciones



LECCIÓN 1

Introducción a la asignatura de Matemática Actuarial no vida (Matemática Actuarial III)

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



Índice de la lección 1

1. Características esenciales de los seguros no vida.
2. Temas importantes de la Matemática Actuarial no vida.



1. Características esenciales de los seguros no vida

- Se trata de ir indicando algunas diferencias respecto del caso conocido de los seguros de vida.
- Estas diferencias justifican un tratamiento matemático más complejo para el caso no vida.

1-La duración:

La duración de los contratos es corta (por regla general Pensamos en un año).



Características esenciales (2)

2-Variabilidad de las primas: Debido a....

- La corta duración de los contratos
- Cambios en las condiciones generales que hacen que Aumente o disminuya la frecuencia de los siniestros

3-Aleatoriedad:

- La cuantía de los siniestros es desconocida y suele variar enormemente: *Número y cuantías son alea.*
- Fenómenos “horribles”: existencia de muchos siniestros Pequeños y de unos pocos extremadamente grandes (también llamados extremos).
- Medias poco informativas, no proporcionan suf. Inform.
- Cada riesgo es un nuevo caso que debe ser modelizado Individualmente.



Características esenciales (3)

4-Evolución del riesgo a lo largo del tiempo:

- Totalmente impredecible.

Conclusión:

- Mayor complejidad de nuestros modelos (no se trata solo de calcular esperanzas) matemáticos.
- Mayor complejidad de las matemáticas que nos sirven para modelizar y tomar decisiones.

¿Cuáles son los temas importantes en donde es Imprescindible aplicar métodos matemáticos?



2. Temas importantes de la Matemática Actuarial No vida.

1. Modelización de los ingresos y de las indemnizaciones
2. Ordenación de riesgos, medidas del riesgo.
3. Reaseguro
4. Solvencia y estabilidad del negocio
5. Tarificación

Introduciremos brevemente cada uno de estos temas, hablando de su importancia respecto de la gestión del Negocio asegurador.

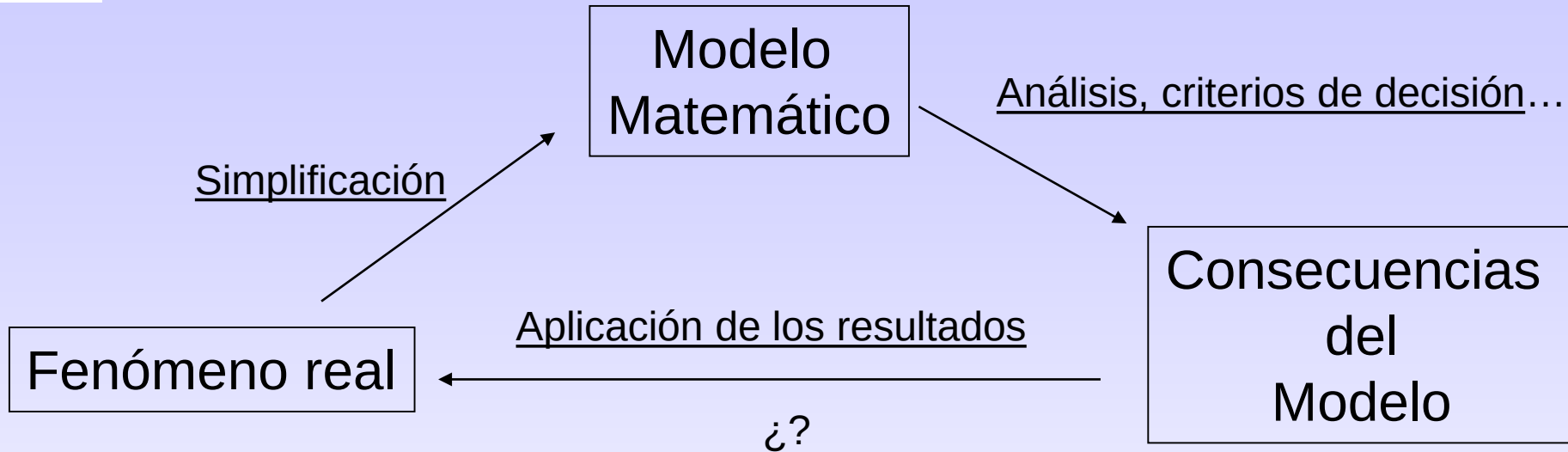


Modelización.

- Selección-simplificación de algunas características (sencillas) del fenómeno real que se quieren recrear.
- Permite un estudio riguroso del resto de los temas:
 - Cálculo de medidas de riesgo, ordenación de riesgos
 - Reaseguro
 - Solvencia y estabilidad del negocio
 - Tarificación
- Ejemplo de fenómenos reales:
 - Siniestralidad de la cartera de pólizas
 - Ingresos por primas
 - Transferencia de riesgo (reaseguro)



Modelización (2)



- Dedicamos la 1ª parte de la Matemática Actuarial 3 a la modelización



2. Ordenación de riesgos, medidas del riesgo

- ¿Podemos establecer preferencias entre riesgos?
- ¿Cómo calcular el capital necesario para cubrir el riesgo de una operación de seguro o una masa de pólizas?

Instrumentos muy relevantes para lograr esto son por ejemplo:

- La Teoría de la Utilidad: Utilidad Esperada.
- Las medidas del riesgo: deberían permitir la Descripción del riesgo mediante un único número:
 - Media, varianza, asimetría, probabilidad de ruina
Var (valor en Riesgo), CVaR, etc..



3. Reaseguro

¿Cómo disminuir la alta “variabilidad” de las cuantías De los siniestros y de las indemnizaciones de una Cartera de pólizas?

- Se plantea la posibilidad de la cesión o transferencia Riesgos: asegurador directo, reaseguradores.

- Que tipos de reaseguro se pueden implantar, e.d., ¿Qué modalidades de reaseguro hay? Modelización.

- La cesión de riesgos implica una cesión de primas, ya que el reaseguro tendrá un precio. También hay una prima de reaseguro



Reaseguro (2)

- Existen dos objetivos difíciles de conciliar:
Min el riesgo $\longrightarrow$ Ceder lo más posible
Max los ingresos $\longrightarrow$ Ceder lo menos posible
- El cálculo de las primas de reaseguro
- La optimización de programas de reaseguro:
¿cómo “liberar” el capital de solvencia calculado previamente?
- Cesión en el **tramo medio** o en el de la **siniestralidad Extrema**: distintos estilos para modelizar



4. Solvencia-estabilidad

- Cálculo del capital necesario para garantizar la solvencia.

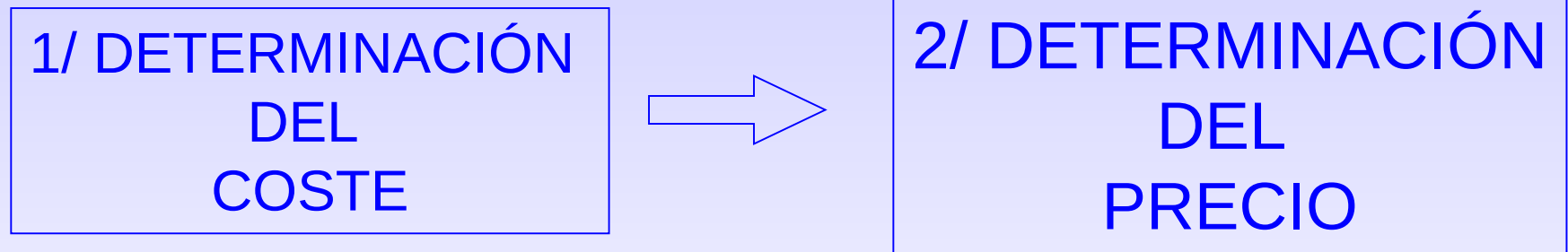
Aquí aparece el tema de las provisiones técnicas:

- Determinación de las provisiones de estabilización (para desviación de la siniestralidad) caso de que se estime necesaria.
- Cálculo de la provisión de prestaciones
- Cálculo de las provisiones de primas: riesgos en curso y primas no consumidas.



5. Tarificación

- El problema fd que se plantea aquí es el de la inversión del proceso:



¿Cómo calcular una prima sin conocer el coste?



Tarificación (2)

- El problema se puede abordar en dos etapas:

1. Tarificación a priori:

¿Como calcular la prima pura de un nuevo riesgo (por tanto desconocido)?

2. Tarificación a posteriori:

¿Cómo ir modificando dicha prima pura para acercarla gradualmente al coste real?

- Teorías indispensables en esta parte :

Teoría de la Credibilidad, Sistemas Bonus-Malus,
En donde se aplican la Inferencia Bayesiana, las
Cadenas de Markov,...



3. Metodología...

Admitiendo la la posibilidad de estimar previamente
Los ingresos por primas...

- Las cuantías de los siniestros se pueden considerar:
 - No predecibles
 - Fenómeno repetitivo (con excepciones: siniestros extr.)
 - Por tanto se trata de un fenómeno aleatorio.
- Supondremos que las cuantías de los siniestros
Vienen dadas por v.a.:

$(X_i)_{i=1}^{\infty} / X_i \equiv$ Cuantía del i-esimo siniestro

$S = \sum_{i=1}^{i?} X_i \equiv$ Daño total durante un periodo futuro fijo



Metodología...(2)

- Tampoco podemos predecir cuantos siniestros sucederán durante el periodo futuro.

Por tanto el número de siniestros durante dicho Periodo también es una $va : N$

En resumen:

Optamos por un modelo aleatorio para la siniestralidad

Un riesgo (póliza o masa de estas tal como una cartera) se modeliza mediante una distribución (o modelo) de probabilidad.



Metodología...(3)

- Aquí surgen dos posibilidades en la modelización:

1. Modelos individuales:

- La cartera la forman n pólizas
- Cada póliza solo puede tener 1 siniestro de cuantía Aleatoria dada por la realización de una v.a. $X_i (i=1 \dots n)$
- El Daño Total será entonces:

$$S_{Ind} = \sum_{i=1}^n X_i$$



Metodología...(4)

2. Modelos Colectivos:

- Se ordenan los siniestros según van sucediendo
Y a continuación se suman sus cuantías aleatorias:

$$S_{Col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

- Este punto de vista es el que adopta por ejemplo la Teoría del Riesgo Colectivo, iniciada a principios Del s. XX por Filip Lundberg.



Metodología...(5)

Ahora haremos algunos comentarios relativos a los Ingresos.

- Ingresos = Ingresos *por primas recargadas*.
- Los modelos orientados hacia el estudio de la Solvencia más sencillos asumen que estos ingresos son un fenómeno predecible, determinista.



El fundamento de la tarificación en seguros

Una vez aceptado el carácter aleatorio de la Siniestralidad, ¿Cuál es el resultado teórico que justifica el cálculo de la prima recargada?

Ley (débil) de los grandes números

Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ *valiid*. Llamemos: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Pr}} E\{X_i\} \quad \left(\forall \varepsilon > 0 : P\left\{ \left| \bar{X}_n - E\{X_i\} \right| > \varepsilon \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right)$$

• Esto nos permite escribir:

Prima Pura=Esperanza de la siniestralidad

Prima Recargada=Prima Pura+Recargo de seguridad



LECCIÓN 2

Introducción:

Herramientas de la Teoría de la Probabilidad

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM

Matemática Actuarial III - Lección 2



ÍNDICE de la lección 2

1. Transformadas de una variable aleatoria (v.a.)

- 1.1- Función generadora de momentos
- 1.2- Función generadora de probabilidad
- 1.3- La transformada de la Laplace
- 1.4- La función característica
- 1.5- Transformadas de la suma de v.a. independientes

2. Distribuciones discretas

- 2.1- Distribución de Poisson $P(\lambda)$
- 2.2- Distribución Binomial $B(m, q)$
- 2.3- Distribución Geométrica $G(\beta)$
- 2.4- Distribución Binomial Negativa $BN(r, \beta)$
- 2.5- Distribución Logarítmica $I(\beta)$

3. Distribuciones continuas

- 3.1- Distribución Exponencial $Exp(\beta)$
- 3.2- Distribución Gamma $G(\alpha, \beta)$
- 3.3- Distribución de Weibull
- 3.4- Distribución χ^2
- 3.5- Distribución normal
- 3.3- Distribución Inversa Gaussiana $IG(\mu, \beta)$
- 3.4- Distribución logarítmico-normal
- 3.5- Distribución de Pareto
- 3.6- Distribución de Cauchy



ÍNDICE de la lección 2

4. Distribución de una suma de v.a.. Convolución

- 4.1- Distribución de la suma de dos v.a. independientes
- 4.2- Convolución n-ésima

5. Distribuciones ponderadas

- 5.1- Interpretación bayesiana.
- 5.2- Transformadas y momentos.

6. Distribuciones de una suma aleatoria de v.a.

- 6.1- Distribución Compuestas
- 6.2- Transformadas de una distribución compuesta
- 6.3- Momentos

7. La familia exponencial de distribuciones*

- 7.1- Caracterización de la FED. Parámetro canónico y función de varianza
- 7.2- Ejemplos de distribuciones pertenecientes a la FED.
- 7.3- La distribución de Tweedie.

8. Introducción a los procesos de renovación*

- 8.1- Definición y clasificación
- 8.2- La función de renovación
- 8.3- Procesos de renovación transitorios

9. Bibliografía



1.- TRANSFORMADAS DE UNA V.A.

Dada una v.a. real X con función de distribución (FD)
 $F(x) = P\{X \leq x\}$, consideremos las siguientes
funciones siendo $z \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = e^{zx}$$

$$g(x) = z^x$$

$$g(x) = e^{-zx}$$

$$g(x) = e^{izx}$$

En cualquiera de los cuatro casos, $E\{g(x)\}$ es una función
de z llamada *Transformada de X* . Para cada uno de los cuatro
casos obtenemos, respectivamente, **la función generadora de momentos,**
la función generadora de probabilidad, la transformada de Laplace
y la función característica.



¿Para qué usaremos las transformadas?

Las transformadas sirven para:

- Identificar modelos de probabilidad para sumas de v.a. independientes
- Calcular momentos de distribuciones (en especial para las compuestas)
- Traducir operaciones “difíciles” sobre funciones (tales como derivada, integral o producto de convolución) en operaciones “fáciles” tales como suma o producto.



1.1- FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS (f.g.m.)

Se obtiene tomando $g(x)$ en el primer caso:

$$M_x(z) = E\{e^{zx}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx} dF(x)$$

Considerando la integral en el sentido de Riemann-Stieltjes.

- Existen distribuciones para las cuales esta integral no es convergente, de manera que algunas v.a. no poseen función generadora de momentos.
- Sin embargo si la fgm existe, entonces determina totalmente el modelo de probabilidad ya que cada fgm proviene de una única distribución de probabilidad.



Segunda utilidad de una transformada: cálculo de los momentos de la distribución.

Si se desarrolla $M_X(z)$ por Taylor alrededor del origen se obtiene:

$$M_X(z) = 1 + M_X^{(1)}(0)z + M_X^{(2)}(0)\frac{z^2}{2} + M_X^{(3)}(0)\frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + \mu_1 z + \mu_2 \frac{z^2}{2} + \mu_3 \frac{z^3}{3!} + \dots$$

siendo μ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) los momentos centrados en el origen de la distribución. Por tanto se tiene

$$\mu_k = \int x^k dF(x) = M_z^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



1.2- Función generadora de probabilidad (f.g.p.)

Se obtiene para la segunda elección de $g(x)$. Utilizaremos esta transformada para el caso de v.a. discretas, razón por la cual la integral se convierte en un sumatorio a lo largo del soporte¹ de la distribución: (aquí $f(x)$ es la función de cuantía)

$$P_X(z) = E\{z^x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} z^x dF(x) = \sum_{x \in \text{Sop}} z^x f(x)$$



Aclaración: Soporte de una distribución

¹Para una *FD discreta*, el **soporte** es el conjunto de puntos con cuantía mayor que cero. En el caso de una v.a. continua es el conjunto de puntos sobre los cuales la densidad es mayor que cero. Llamando $f(x)$ a la función de cuantía o a la función de densidad:

$$\text{Sop}F = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$



Cálculo de las cuantías mediante la fgp

De nuevo, la fgp identifica totalmente la FD y podemos calcular la función de cuantía (fc) de la siguiente forma: (suponiendo que $\text{Sop}F = \{0, 1, 2, \dots\}$)

$$f(k) = \frac{P_z^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Además se pueden calcular los **momentos factoriales** $\mu_{(k)}$ de F a partir de su fgp:

$$\mu_{(k)} = E \{ X (X - 1) (X - 2) \dots (X - k + 1) \} = E \{ X^{(k)} \}$$



Momentos factoriales y centrales

Calcular estos momentos es fácil:

$$\mu_{(k)} = P_X^{(k)}(1)$$

A partir de aquí se pueden calcular los momentos centrados en el origen utilizando la relación entre estos y los momentos factoriales:

$$\mu_{(1)} = \mu_1$$

$$\mu_{(2)} = \mu_2 - \mu_1$$

$$\mu_{(3)} = \mu_3 - 3\mu_2 + 2\mu_1$$

$$\mu_{(4)} = \mu_4 - 6\mu_3 + 11\mu_2 - 6\mu_1$$

$$\mu_1 = \mu_{(1)}$$

$$\mu_2 = \mu_{(2)} + \mu_{(1)}$$

$$\mu_3 = \mu_{(3)} + 3\mu_{(2)} + \mu_{(1)}$$

$$\mu_4 = \mu_{(4)} + 6\mu_{(3)} + 7\mu_{(2)} + \mu_{(1)}$$



1.3- La transformada de Laplace

$$L_X(z) = E\left\{e^{-zx}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-zx} dF(x)$$

Suponiendo que $P\{X \geq 0\} = 1$ la existencia de dicha transformada estará garantizada. Los momentos centrados en el origen vendrán dados por:

$$\mu_k = (-1)^k L_X^{(k)}(0)$$



Notación

Situándonos en el caso continuo, podemos ver la tL como un **operador** que actúa sobre la función de densidad, en cuyo caso adoptaremos la siguiente notación:

$$L_X(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx = \tilde{f}(z)$$



Resumen de las propiedades de la tL :

1-Antitransformada de una tL trasladada “a” unidades:

$$\tilde{f}(z-a) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \left(e^{ax} f(x) \right) dx$$

2-tL de una densidad trasladada “a” unidades

$$e^{-az} \tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} k(x) dx, \text{ siendo } k(x) = \begin{cases} f(x-a), & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

3-tL de una densidad sometida a un cambio de escala:

$$\frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{z}{a}\right) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(ax) dx$$



Propiedades de la tL (I)

4-tL de la derivada de la densidad f' =multiplicación:

$$z \tilde{f}(z) - \tilde{f}(0) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f'(x) dx$$

5-tL de la integral definida de la densidad= división:

$$\frac{\tilde{f}(z)}{z} = \int_0^{\infty} e^{-zx} \left[\int_0^x f(y) dy \right] dx$$

6-Antitransformada de la derivada de la tL=multiplicación por un polinomio de grado 1:

$$\tilde{f}'(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} (-x f(x)) dx$$



Propiedades de la tL (II)

7-Antitransformada de la derivada n-ésima de una tL(producto por polinomio de grado n):

$$\tilde{f}^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \left((-1)^n x^n f(x) \right) dx$$

8-Linealidad de la tL .

transf. Laplace de una convolución=producto de transformadas:

a) $\sim$ es un operador lineal.

b) La tL de una convolución es igual al producto de las tL:

$$\tilde{f}_1(z) \tilde{f}_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \left[\int_0^x f_1(y) f_2(x-y) dy \right] dx$$

Las propiedades **5**, **6** y **8** serán útiles cuando se desarrollen los algoritmos para el cálculo numérico de distribuciones compuestas (lección 4)



1.4- La función característica

Finalmente en el último caso para g se obtiene la función característica de la v.a. X

$$\phi_X(z) = E\left\{e^{izx}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x)$$

La función característica **siempre está garantizada**, y los momentos pueden ser calculados de una forma similar a los anteriores casos.



1.5- Transformadas de la suma de v.a independientes

Si $X_1, \dots, X_n$ son v.a. **independientes (vai)**, y llamemos $T_X(z)$ a cualquiera de las anteriores transformadas:

$$T_{X_1 + \dots + X_n}(z) = \prod_{j=1}^n T_{X_j}(z)$$

Por otra parte, se comprueba fácilmente la siguiente relación entre transformadas:

$$P_X(z) = M_X(\log z)$$

$$L_X(z) = M_X(-z)$$

$$\phi_X(z) = M_X(iz)$$



2. Distribuciones discretas

En esta sección y la siguiente resumiremos brevemente las distribuciones de uso más común al objeto de fijar la notación

2.1- DISTRIBUCIÓN DE POISSON $P(\lambda)$ ($\lambda > 0$)

- Función de cuantía: $p(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, n = 0, 1, 2, \dots$
- $\mu = \sigma^2 = \lambda$
- *fgm* : $M_N(z) = \exp \left\{ \lambda (e^z - 1) \right\}$
- Modelo **reproductivo**
- El EMV de λ es la media muestral



2.2- Distribución binomial $B(m,q)$ ($m \in \mathbb{N}, q \in [0,1]$)

- La distribución de Bernouilli es el modelo para dos posibles sucesos: éxito (1) y fracaso (0) con prob. resp. q y $1 - q$.
- Su fgp es entonces: $P(z) = (1-q)z^0 + qz^1 = 1 + q(z-1)$
- Sumando m va independientes Bernouilli se obtiene una binomial con fgp: $P(z) = (1 + q(z-1))^m$, $q \in (0,1)$

Con f. de cuantía: $p_n = \binom{m}{n} q^n (1-q)^{m-n}$, $n = 0, \dots, m$

en este caso se trata de un modelo **infradisperso**:

$$E\{N\} = mq > mq(1-q) = \text{Var}(N)$$



2.2- Distribución binomial $B(m,q)$ ($m \in \mathbb{N}, q \in [0,1]$)

- *fgm* : $M_N(z) = \left(1 + q(e^z - 1)\right)^m$
- Modelo **reproductivo respecto del parámetro m** .



2.2- Distribución binomial $B(m,q)$ ($m \in \mathbb{N}, q \in [0,1]$). Estimación MV

La log verosimilitud es:

$$l(m, q) = \sum_{k=0}^m n_k \left(\log \binom{m}{k} + k \log q + (m-k) \log(1-q) \right)$$
$$\frac{\partial l}{\partial q} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^m k n_k - \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^m (m-k) n_k = 0 \Leftrightarrow \hat{q} = \frac{1}{m} \frac{\sum_{k=0}^m k n_k}{\sum_{k=0}^m n_k}$$

Cuando m es desconocido:

$$\hat{q} = \frac{1}{\hat{m}} \frac{\sum_{k=0}^m k n_k}{\sum_{k=0}^m n_k}$$

Se puede aplicar un procedimiento iterativo tomando como semilla de $\hat{m}$ el máximo observado y calculando el correspondiente $\hat{q}$, para incrementar m y repetir la estimación de $\hat{q}$. Así hasta alcanzar un máximo de $l(m, q)$



2.3- DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA $G(\beta)$ ($\beta > 0$)

- Función de cuantía:
$$p(n) = \frac{1}{1 + \beta} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^n$$
$$n = 0, 1, 2, \dots \quad \beta > 0$$
- $\mu = \beta$; $\sigma^2 = \beta(1 + \beta)$
- *fgm* : $M_N(z) = \left[1 - \beta(e^z - 1) \right]^{-1}$



2.4- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA $BN(r, \beta)$ ($r > 0, \beta > 0$)

Recordemos que la *función Gamma* se define de la siguiente

forma: $\forall p > 0:$
$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

Sus propiedades la convierten en una extensión continua del factorial de un número natural:

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\forall p > 1: \Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$$

$$\forall p \in \{2, 3, \dots\}: \Gamma(p) = (p-1)!$$

$$\forall p \in (0, 1): \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x^p} dx$$



DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA $BN(r, \beta)$ ($r > 0, \beta > 0$)

• Función de cuantía:
$$P(n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n$$
$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad r, \beta > 0$$

Es un modelo **sobredisperso**:

- $\mu = r\beta < \sigma^2 = r\beta(1+\beta)$
- fgm: $M_N(z) = \left[1 - \beta(e^z - 1) \right]^{-r}$
- Modelo **reproductivo respecto del parámetro r** (siendo β fijo)
- Para $r = 1$ se obtiene la distribución geométrica.



2.5- DISTRIBUCIÓN LOGARÍTMICA I(β)

• Función de cuantía : $p(n) = \frac{q^n}{-n \log(1-q)} = \frac{1}{n \log(1+\beta)} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n$

$n = 1, 2, 3, \dots$ y siendo $0 < q = \frac{\beta}{1+\beta} < 1$

• fgm: $M_N(z) = \frac{\log[1 - \beta(z-1)] - \log(1+\beta)}{-\log(1+\beta)}, \quad |z| < \frac{1}{q}$

• $\mu = \frac{\beta}{\log(1+\beta)};$

$\sigma^2 = \frac{\beta(1+\beta)\log(1+\beta) - \beta^2}{[\log(1+\beta)]^2}$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL $\text{Exp}(\beta)$

La parametrizamos como una $G(1, 1/\beta)$

$$f(x; \beta) = \beta e^{-\beta x}, \quad x > 0, \beta > 0$$

$$F(x; \beta) = 1 - e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

$$Q(p; \beta) = \frac{-\log(1-p)}{\beta}, \quad p \in (0, 1)$$

$$\text{fgm: } M_X(z) = \frac{\beta}{\beta - z} \qquad E\{X\} = \frac{1}{\beta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\text{EMV: } \hat{\beta} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Si $X \sim \text{Exp}(\beta)$, entonces e^X es una Pareto(0, β)



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

DISTRIBUCIÓN GAMMA $G(\alpha, \beta)$

- Función de densidad: $f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}$, $\alpha, \beta > 0$, $x > 0$
- $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$, $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- TL: $L_X(z) = \left(\frac{\beta}{\beta + z} \right)^\alpha$, $z > -\beta$
- Es un modelo reproductivo respecto del parámetro α (siendo β fijo)
- Para $\alpha=1$ se obtiene la distribución exponencial



Otra parametrización de la Gamma

- Alternativamente también se puede escribir $1/\beta$ en el lugar de β . Entonces se obtiene:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad \alpha, \beta > 0, x > 0$$

$$\bullet \mu = \alpha\beta, \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2,$$

$$E\{X^k\} = \beta^k (\alpha + k - 1) \dots \alpha, k \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \text{tL: } L_X(z) = \left(\frac{1}{1 + \beta z} \right)^\alpha, \quad z > -1/\beta$$

$$\text{Moda} = \beta(\alpha - 1), \alpha > 1, 0 \text{ resto}$$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución de Weibull

$$f(x; \beta, k) = \frac{k}{\beta} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{k-1} e^{-(x/\beta)^k}, \quad x > 0, k, \beta > 0$$

$$F(x; \beta, k) = 1 - e^{-(x/\beta)^k}, \quad x > 0, k, \beta > 0$$

$$Q(p; \beta, k) = \beta (-\log(1-p))^{1/k}$$

$$E\{X\} = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \text{Var}(X) = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)^2 \right]$$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución ji 2

$$f(x; k) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2}, \quad x > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Es una $G\left(\frac{k}{2}, 2\right)$. Respecto de la normal tiene la siguiente propiedad: $Z_1, \dots, Z_n$ vai $\sim N(0,1)$: $Q = \sum_{i=1}^k Z_i^2 \sim \chi_k^2$

$$\text{fgm: } E\left(e^{z\chi_k^2}\right) = (1-2z)^{-k/2}, \quad 2z < 1$$

$$E(X) = k, \quad \text{Var}(X) = 2k$$



3-Distribuciones continuas

Distribución normal

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx$$

Teorema Central del Límite:

la media muestral de una suc. de va iid con DT finita tiende a estar normalmente distribuida:

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - nE\{X\}}{\sqrt{nVar(X)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución normal

fgm: $E \left\{ e^{tX} \right\} = e^{t\mu + (t^2\sigma^2/2)}$ La distribución es simétrica

EMV: $\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = S^2 = n^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \simeq V = n(n-1)^{-1} S^2$

Dos funciones relacionadas con la FD normal:
la **función de error y su complementaria**, que se usan frecuentemente en los cálculos estadísticos:

$$\operatorname{erf}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \Phi(x\sqrt{2}) - 1, \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución logarítmico-normal $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Consideramos la v.a.:

$$Y \sim N(\mu, \sigma): f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}, y \in (-\infty, +\infty)$$

Hacemos: $X = e^Y \Leftrightarrow Y = \log X$

La densidad de X será:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_Y(\log(x)) \frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}, x > 0 \end{aligned}$$

$$E\{X\} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{Var}\{X\} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

DISTRIBUCIÓN INVERSA GAUSSIANA $IG(\mu, \beta)$

• Función de densidad:

$$f(x) = \mu (2\pi\beta x^3)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}\right\}, \quad x > 0, \quad \beta, \mu > 0$$

• Función de distribución (Φ es la FD $N(0,1)$)

$$F(x) = \Phi\left[(\beta x)^{-1/2}(x-\mu)\right] + e^{2\mu\beta^{-1}} \Phi\left[-(\beta x)^{-1/2}(x+\mu)\right]$$

• tL: $L(z) = \exp\left\{\frac{\mu}{\beta}\left[1 - (1 + 2\beta z)^{1/2}\right]\right\}, \quad z \geq -\frac{1}{2\beta}$

• Media: μ

Varianza: $\mu\beta$

EMV: $\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\lambda}^{-1} = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i^{-1} - \bar{X}^{-1})$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución de Pareto

$$u, \alpha > 0: f(x; u, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha u^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq u \\ 0, & x < u \end{cases}, \quad F(x; u, \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{u}{x}\right)^\alpha, & x \geq u \\ 0, & x < u \end{cases}$$

$$Q(p; u, \alpha) = u(1 - p)^{-\alpha}$$

$$E(X) = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 1 \\ \frac{\alpha u}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \end{cases} \quad \text{Var}(X) = \begin{cases} \infty, & \alpha \in (1, 2] \\ \frac{u^2 \alpha}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, & \alpha > 2 \end{cases}$$

Si $X \sim \text{Pareto}(u, \alpha)$ entonces $\log(X)$ es una $\text{Exp}(\alpha)$



3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución de Cauchy

$$f(x; \lambda, \theta) = (\pi\lambda)^{-1} \left(1 + \left(\frac{x - \theta}{\lambda} \right)^2 \right)^{-1}, \quad \theta, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0$$

$$F(x; \lambda, \theta) = \frac{1}{2} + \pi^{-1} \arctan \left(\frac{x - \theta}{\lambda} \right)$$

$$Q(p; \lambda, \theta) = \theta + \lambda \tan \left(\pi \left(p - \frac{1}{2} \right) \right), \quad p \in (0, 1)$$

θ , λ son parámetros de localización y escala resp.

La media y la varianza son infinitas.

Moda = Mediana = θ



4. Distribución de una suma. convolución

En las matemáticas de los seguros generales surge de forma inmediata el manejo de la distribución de una suma de v.a.. Por ejemplo para el cálculo de probabilidades referidas a la suma de las cuantías individuales de varios siniestros.

Gran parte de los problemas de cálculo numérico que surgen en Matemática Actuarial (algunos de los cuales trataremos a lo largo del curso) se originan precisamente aquí, en la dificultad para calcular estas probabilidades que son suministradas por el producto de convolución de dos distribuciones.



4.1- Distribución De La Suma De Dos V.A. Independientes.

Consideremos dos v.a. **independientes** (v.a.i.) X, Y con FD respectivas F_X , F_Y . La distribución de la v.a. $S = X + Y$ es la **convolución** de las dos distribuciones

$$F_S(s) = (F_X * F_Y)(s)$$



Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total podemos representar F_s de la siguiente forma

$$F_s(s) = P\{X + Y \leq s\} = P\{X \leq s - Y\}$$

$$A = A \cap \Omega \rightarrow = P\{(X \leq s - Y) \cap \Omega\}$$

$$\Omega = \bigcup_y (Y = y) \rightarrow = P\left\{(X \leq s - Y) \cap \left[\bigcup_y (Y = y)\right]\right\}$$

Conjuntos disjuntos dos a dos

$$= P\left\{\bigcup_y (X \leq s - Y) \cap (Y = y)\right\}$$

$$P\{A \cap B\} = P\{A|B\}P\{B\}$$

$$\rightarrow = \int P\{X \leq s - Y | Y = y\} dP\{Y = y\}$$

$$= \int P\{X \leq s - Y | Y = y\} dF_y(y) = \int F_x(s - y) dF_y(y)$$

En resumen:

$$F_s(s) = P\{X + Y \leq s\} = \int F_x(s - y) dF_y(y)$$



Para el caso de dos v.a. **continuas con densidades** f_x , f_y la densidad de S es
$$f_S(s) = \int f_X(s-y) f_Y(y) dy$$

Para el caso de dos v.a. discretas con cuantías f_X, f_Y la cuantía de S es
$$f_S(s) = \sum_{y \in \text{Sop}} f_X(s-y) f_Y(y)$$

Para el caso de dos **v.a.i. idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.)** con FD $F(x)$ se utiliza la siguiente notación exponencial:

$$F_S(s) = (F * F)(s) = F^{*2}(s)$$

Restringiéndonos ya al caso de las v.a.i.i.d., se puede generalizar la anterior operación a cualquier número de v.a. (finito)



4.2- CONVOLUCIÓN n-ésima

Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.i.i.d.. Entonces la v.a.

$$S = X_1 + \dots + X_n = (X_1 + \dots + X_{n-1}) + X_n$$

tiene como FD a $F^{*n}(s) = (F^{*(n-1)} * F)(s)$

La **convolución cero** de una distribución es la **distribución de Heaviside**

$$F^{*0}(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$



CONVOLUCIÓN n-ésima

La convolucion primera es la propia distribución, $F^{*1}(s) = F(s)$.
Por último observemos que la transformada de una convolución de v.a. independientes verifica

$$T_{X_1 + \dots + X_n}(z) = \left(T_X(z)\right)^n$$

Finalmente, diremos que un modelo de probabilidad es reproductivo cuando es cerrado por convolución
(Ej. Poisson, Binomial, Binomial negativa, Gamma, etc...)



5. DISTRIBUCIONES PONDERADAS

La ponderación de distribuciones es una operación particularmente útil en Mat. Actuarial. Por ejemplo, en lo que atañe a la v.a. número de siniestros, es frecuente observar que en ciertos ramos del seguro los modelos ponderados proporcionan ajustes aceptables (Véase la lección 3).

En la mayoría de los casos este fenómeno refleja la existencia de **riesgos heterogéneos en la cartera**, y constituye el primer paso para aplicar un **Análisis bayesiano** de dichos riesgos (Véase la lección 3)

El punto de partida consiste en considerar el parámetro de la distribución como una v.a.² y no como una constante a estimar. (**interpretaciones bayesiana y clásica**)

² El parámetro podría ser más de uno en cuyo caso tendríamos un vector aleatorio $\bar{\theta}$ con su correspondiente distribución $U(\bar{\theta})$ multidimensional.



Distribuciones Ponderadas (2)

Sea pues X una v.a. con FD $F(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$ desconocido.

Supongamos que interpretamos θ como una v.a. con FD

$$U(\theta) = P\{\theta \leq \theta\}$$

La función de distribución de X sin condicionar a ningún valor de θ es la **ponderación** de F por U :

$$F_X(x) = \int_{\Theta} F(x|\theta) dU(\theta)$$

Cuando U sea una distribución discreta con *soporte finito*, diremos que la integral es una **mixtura** de la distribución F por U .



Distribuciones Ponderadas (3)

Para el cálculo de los momentos centrados en el origen y de las transformadas se tienen las siguientes reglas sencillas. $E\{X^k\}$, $E\{X^k|\theta\}$ son respectivamente los momentos de la FD sin ponderar y ponderada:

$$\mu_k = E\{X^k\} = \int_{\Theta} E\{X^k|\theta\} dU(\theta) = E_{\Theta}\{E\{X^k|\theta\}\}$$

$$T_X(z) = E_{\Theta}\{T_X(z|\theta)\}$$

De manera que, conocida la característica de la distribución “clásica”, es fácil calcular la respectiva de la Distr. Ponderada.



6. DISTRIBUCIÓN DE UNA SUMA ALEATORIA

6.1-DISTRIBUCIONES COMPUESTAS

Las ***distribuciones compuestas*** ocupan un lugar central en la modelización del riesgo en seguros generales. Por ejemplo, la distribución del ***daño total*** (siniestralidad total a lo largo de un cierto periodo) producido en la cartera, o la ***probabilidad de supervivencia*** del negocio en tiempo continuo bajo un horizonte infinito, son dos ejemplos de distribuciones compuestas



Distribuciones Compuestas (2)

Consideremos una sucesión de **v.a.i.i.d.** $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ con distribución $V(x) = P\{X_i \leq x\}$, así como una v.a. discreta N **independiente de las anteriores** y con soporte en $\{0, 1, 2, \dots\}$. Entonces la v.a.

$$S = X_1 + \dots + X_N \quad (S = 0 \text{ cuando } N = 0)$$

Es una **v.a. compuesta**. N es la v.a. **primaria** y X_i es la v.a. **secundaria**, y sus distribuciones respectivas heredan la misma denominación. La distribución de S es una **FD compuesta**. Para deducir esta última, basta con representar así el siguiente suceso:



Distribuciones Compuestas (3)

$$\{S \leq s\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \leq s, N = n\}$$

Tratándose de sucesos **disjuntos dos a dos** y haciendo uso del Teorema de la Probabilidad Total se obtiene que

$$F_S(s) = P\{S \leq s\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S \leq s, N = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_1 + \dots + X_N \leq s, N = n\} =$$

$$P\{A \cap B\} = P\{A|B\}P\{B\}$$



Distribuciones Compuestas (4)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} P \{ X_1 + \dots + X_N \leq s \mid N = n \} P \{ N = n \} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P \{ X_1 + \dots + X_n \leq s \} P \{ N = n \} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P \{ N = n \} V^{*n}(s) = F_S(s) \end{aligned}$$

X_i valid



Distribuciones Compuestas (5)

Así pues, para construir una distribución compuesta necesitamos dos ingredientes:

- Una distribución primaria (discreta con soporte contenido en $\{0,1,2,\dots\}$) para el número aleatorio de sumandos.
- Una distribución secundaria para las cuantías de dichos sumandos.

Si llamamos v a la fc (respectivamente fd) de la distribución secundaria, la fc (respectivamente fd) de S es

$$f_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} v^{*n}(s)$$



Distribuciones Compuestas (6)

Tengamos en cuenta que cuando la distribución secundaria V sea de tipo continuo y tal que $P\{X > 0\} = 1$, la distrib. compuesta será de tipo mixto, ya que tendrá un salto en el origen de amplitud $P\{N = 0\}$.



6.2- Transformadas de una distribución compuesta

La propiedad fundamental de la transformada de una distribución compuesta es que puede ser expresada como composición de las transformadas de las distrib. primaria y secundaria. Por ejemplo, para el caso de la fgm se tiene:

$$M_S(z) = E\left\{e^{zS}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} E\left\{e^{z(X_1 + \dots + X_N)} \mid N = n\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} E\left\{e^{z(X_1 + \dots + X_n)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} M_{X_1 + \dots + X_n}(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} \left(M_X(z)\right)^n = P_N\left(M_X(z)\right)$$



Transformada De una Distribución Compuesta

Análogamente. se verifica lo siguiente para la tL y la fgp de S

$$L_S(z) = P_N(L_X(z))$$

$$P_S(z) = P_N(P_X(z))$$



6.3- MOMENTOS

Los momentos centrados en el origen se pueden calcular mediante la anterior expresión de la transformada (por ejemplo la fgm) haciendo uso de la regla de la cadena. Así teniendo en cuenta:

$$M'_S(z) = P'_N(M_X(z)) M'_X(z)$$

$$M''_S(z) = P''_N(M_X(z)) [M'_X(z)]^2 + P'_N(M_X(z)) M''_X(z)$$



Momentos de una compuesta (2)

Se obtiene lo siguiente:

$$E \{ S \} = M'_S (0) = P'_N (1) M'_X (0) = E \{ N \} E \{ X \}$$

$$E \{ S^2 \} = E \{ N (N - 1) \} E^2 \{ X \} + E \{ N \} E \{ X^2 \}$$

$$Var \{ S \} = Var \{ N \} E^2 \{ X \} + E \{ N \} Var \{ X \}$$

Por tanto todas las características (momentos centrados en el origen, varianza, coeficiente de asimetría, etc.) pueden ser expresados en términos de los momentos de las distribuciones primaria y secundaria.



Ejemplo: Cálculo de momentos de FD compuestas

- En la siguiente hoja de maple se calculan medias varianzas y asimetrías de distribuciones compuestas. Para los casos en que tanto la primaria como la secundaria son discretas, también se calculan sus cuantías



momentoscompu
esta



7-La familia exponencial de distribuciones

La FED está formada por todas aquellos modelos cuya función de densidad o de cuantía puede expresarse como:

$$f_{\theta}(x) = \exp \left\{ \frac{(x\theta - b(\theta))}{a(\phi)} + c(x, \phi) \right\}$$

- a, b, c funciones arbitrarias.
- ϕ es el parámetro de escala
- θ es el parámetro canónico de la distribución



7-La familia exponencial de distribuciones

Ejemplo: la distribución normal

$$\begin{aligned} f_{\mu}(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{-x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2} - \log(\sigma\sqrt{2\pi})\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{x\mu - \mu^2/2}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \log(\sigma\sqrt{2\pi})\right\} \end{aligned}$$

$$\theta = \mu, \quad b(\theta) = \theta^2 / 2 \equiv \mu^2 / 2, \quad a(\phi) = \phi = \sigma^2,$$

$$c(\phi, x) = -\frac{x^2}{2\phi} - \log(\sqrt{\phi}2\pi) \equiv -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \log(\sigma\sqrt{2\pi})$$



7-La familia exponencial de distribuciones

Media y varianza en función de a, b, Φ

El logaritmo de la verosimilitud es:

$$l(\theta) = \log(f_{\theta}(x)) = \frac{x\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(x, \phi)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{x - b'(\theta)}{a(\phi)}$$

Ecuación clave para relacionar los parámetros $\bar{\beta}$ de un GLM con los canónicos θ de un miembro de la FED.

$$E\left\{\frac{\partial l}{\partial \theta}\right\} = \frac{E\{X\} - b'(\theta)}{a(\phi)} : E\{X\} = \mu = b'(\theta)$$

Por otro lado en el valor verdadero del parámetro $\theta = \theta_0$:

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{\partial l}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\theta_0}\right\} &\equiv E\left\{\frac{\partial l}{\partial \theta}\right\} = E\left\{\frac{\partial}{\partial \theta} \log(f(x, \theta))\right\} = \int \frac{1}{f(x, \theta_0)} \frac{\partial f}{\partial \theta} f(x, \theta_0) dx = \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial \theta} dx = \frac{\partial}{\partial \theta} \int f dx = \frac{\partial 1}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$



7-La familia exponencial de distribuciones

Media y varianza en función de a, b, Φ

De forma que diferenciando otra vez la verosimilitud:

Por otro lado se tiene que:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = -\frac{b''(\theta)}{a(\phi)} \quad (1)$$

Derivando resp. de θ en el integrando:

$$\int \frac{\partial \log(f)}{\partial \theta} f dx = 0 \Rightarrow \int \left[\frac{\partial^2 \log(f)}{\partial \theta^2} f + \frac{\partial \log(f)}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] dx = 0 \left\{ \Rightarrow \frac{\partial \log(f)}{\partial \theta} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right.$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial^2 \log(f)}{\partial \theta^2} f dx = - \int \left[\frac{\partial \log(f)}{\partial \theta} \right]^2 f dx$$

Por lo que en el verdadero valor de θ :

$$E \left\{ \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} \right\} = -E \left\{ \left(\frac{\partial l}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)^2 \right\} \quad (2)$$



7-La familia exponencial de distribuciones

Media y varianza en función de a, b, Φ

Ahora sustituimos (1) en (2):

$$\frac{b''(\theta)}{a(\phi)} = \frac{E \left\{ (X - b'(\theta))^2 \right\}}{a(\phi)^2} \Leftrightarrow \begin{aligned} \text{var}(X) &= b''(\theta) a(\phi) = b'' \left([b']^{-1}(\mu) \right) a(\phi) \\ &= b''(\theta(\mu)) a(\phi) \\ &= V(\mu) a(\phi) \end{aligned}$$

Ecuación clave que permite caracterizar un modelo mediante la relación entre su media y su varianza.

La función de varianza:

$$V(\mu) = b'' \left([b']^{-1}(\mu) \right) = b''(\theta(\mu))$$

Para tener modelos manejables se restringe el uso a :

$$a(\phi) = \phi / \omega, \quad \omega \text{ conocido, y escribiendo } V(\mu) = \frac{b''(\theta)}{\omega} \text{ se tiene:}$$

$$\text{var}(X) = V(\mu) \phi$$



7-La familia exponencial de distribuciones

Algunos miembros de la FED

Ejemplo: La binomial Negativa (r, β) pertenece a la familia exponencial de distribuciones.

Para expresar con comodidad la BN en términos de la FED, la reparametrizamos llamando $\kappa = \frac{1}{r}, \mu = r\beta$. Entonces:

$$\theta = \log\left(\frac{\kappa\mu}{1 + \kappa\mu}\right), \quad \phi = 1, \quad b(\theta) = -\frac{1}{\kappa} \log(1 - \kappa e^\theta), \quad V(\mu) = \mu(1 + \kappa\mu), \quad a(\phi) = \phi$$

Otros ejemplos de miembros de la FED se dan a continuación:



7-La familia exponencial de distribuciones

Algunos miembros de la FED

	Normal	Poisson	Binomial	Gamma	Inverse Gaussian
$f(y)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{\mu^y \exp(-\mu)}{y!}$	$\binom{n}{y} \left(\frac{\mu}{n}\right)^y (1 - \frac{\mu}{n})^{n-y}$	$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^\nu y^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\nu y}{\mu}\right)$	$\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi y^3}} \exp\left[-\frac{\gamma(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right]$
Range	$-\infty < y < \infty$	$y = 0, 1, 2, \dots$	$y = 0, 1, \dots, n$	$y > 0$	$y > 0$
θ	μ	$\log(\mu)$	$\log\left(\frac{\mu}{n-\mu}\right)$	$-\frac{1}{\mu}$	$-\frac{1}{2\mu^2}$
ϕ	σ^2	1	1	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\gamma}$
$a(\phi)$	$\phi (= \sigma^2)$	$\phi (= 1)$	$\phi (= 1)$	$\phi (= \frac{1}{\nu})$	$\phi (= \frac{1}{\gamma})$
$b(\theta)$	$\frac{\theta^2}{2}$	$\exp(\theta)$	$n \log(1 + e^\theta)$	$-\log(-\theta)$	$-\sqrt{-2\theta}$
$c(y, \phi)$	$-\frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{\phi} + \log(2\pi\phi) \right]$	$-\log(y!)$	$\log \binom{n}{y}$	$\nu \log(\nu y) - \log\{y\Gamma(\nu)\}$	$-\frac{1}{2} \left[\log(2\pi y^3 \phi) + \frac{1}{\phi y} \right]$
$V(\mu)$	1	μ	$\mu(1 - \mu/n)$	μ^2	μ^3
$g_c(\mu)$	μ	$\log(\mu)$	$\frac{\mu}{n-\mu}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu^2}$
$D(y, \hat{\mu})$	$(y - \hat{\mu})^2$	$2y \log\left(\frac{y}{\hat{\mu}}\right) - 2(y - \hat{\mu})$	$2 \left[y \log\left(\frac{y}{\hat{\mu}}\right) + (n - y) \log\left(\frac{n-y}{n-\hat{\mu}}\right) \right]$	$2 \left[\frac{y-\hat{\mu}}{\hat{\mu}} - \log\left(\frac{y}{\hat{\mu}}\right) \right]$	$\frac{(y-\hat{\mu})^2}{\hat{\mu}^2 y}$

Table 2.1 Some Exponential Family Distributions. Note that when $y = 0$, $y \log(y/\hat{\mu})$ is replaced by zero (its limit as $y \rightarrow 0$).

(Wood, S.N. (2006): Generalized Additive Models. An introduction with R. Chapman & Hall. p61)



7-La familia exponencial de distribuciones

Ejemplo: la distribución de Tweedie

La distribución de Tweedie (p. 10) es un modelo compuesto con primaria Poisson y secundaria Gamma. Por tanto es una distribución mixta (es decir, que tiene un salto en el origen (probabilidad de los siniestros de cuantía nula y a partir de ahí una densidad):

$$f_s(0) = e^{-\lambda} \quad \forall s > 0: f_s(s) = e^{-\beta s} e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^\alpha)^n}{n! \Gamma(n\alpha)} s^{n\alpha-1}$$

Queremos que lograr expresar esta densidad según:

$$f_\theta(s) = \exp \left\{ \frac{(s\theta - b(\theta))}{a(\phi)} + c(s, \phi) \right\} \quad (3)$$

Para así probar que Tweedie es miembro de la FED y a continuación mirar a qué función de varianza corresponde este modelo.



7-La familia exponencial de distribuciones

La distribución de Tweedie como miembro de la FED

Recordemos que la reparametrización usada en la página 10 era:

$$(\mu, p, \phi) \mapsto (\lambda, \alpha, \beta)$$
$$\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}, \quad \alpha = \frac{2-p}{p-1}, \quad \frac{1}{\beta} = \phi(p-1)\mu^{p-1}, \quad p \in (1, 2)$$

Se demuestra que la suma depende de s, ϕ pero no de μ . Por tanto podemos escribir a modo de función $c(s, \phi)$:

$$s > 0 : c(s, \phi) = \log \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^{\alpha})^n}{n! \Gamma(n\alpha)} s^{n\alpha-1} \right], \quad c(0, \phi) = 1$$



7-La familia exponencial de distribuciones

La distribución de Tweedie como miembro de la FED

$$f_s(s) = \exp \left\{ -\beta s - \lambda + \log \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^\alpha)^n}{n! \Gamma(n\alpha)} s^{n\alpha-1} \right] \right\}$$
$$= \exp \left\{ -\beta s - \lambda + c(s, \phi) \right\} = \exp \left\{ \frac{-\beta \phi s - \lambda \phi}{\phi} + c(s, \phi) \right\}$$

Y para conseguir la igualdad con (3):

$$\theta = -\beta \phi \Leftrightarrow \theta(\mu) = \frac{-1}{(p-1)\mu^{p-1}} \Leftrightarrow \mu(\theta) = \left[-(p-1)\theta \right]^{\frac{-1}{p-1}}$$

$$b(\theta) = \lambda \phi = \frac{\mu^{2-p}}{(2-p)} = \frac{1}{2-p} \left[-(p-1)\theta \right]^{\frac{p-2}{p-1}}$$

Y ya podemos expresar la función de varianza:



7-La familia exponencial de distribuciones

Recordemos que:

$$V(\mu) = b''\left([b']^{-1}(\mu)\right) = b''(\theta(\mu))$$

$$b(\theta) = \frac{1}{2-p} \left[-(p-1)\theta \right]^{\frac{p-2}{p-1}} \Rightarrow b'(\theta) = \left[-(p-1)\theta \right]^{\frac{-1}{p-1}}$$

$$\Rightarrow b''(\theta) = \left[-(p-1)\theta \right]^{\frac{-p}{p-1}}$$

Sustituyendo $\theta(\mu)$ obtenemos:

$$V(\mu) = \mu^p$$

Al ser la constante $p \in (1,2)$ esta distribución representa, desde el punto de vista de la sobredispersión, a todos los casos intermedios entre Poisson y Gamma.



8. Introducción a los procesos de renovación

Los procesos de renovación y la Teoría de la Renovación son temas clásicos dentro de la Teoría de los Procesos Estocásticos.

Su interés en Matemática Actuarial es que suministran una herramienta potente para el cálculo de expresiones analíticas de las probabilidades de ruina y supervivencia en tiempo continuo bajo horizonte infinito



8. Introducción a los procesos de renovación

Definición y Clasificación

Partiendo de un proceso de Poisson $N(t)$ ($t \geq 0$), se pueden considerar las siguientes v.a. asociadas al proceso:

- $(t_n)_{n=0}^{\infty} \equiv$ Instantes en que ocurren los sucesos
- $(T_n)_{n=1}^{\infty} \mid T_{n+1} = t_{n+1} - t_n \equiv$ Intervalos de espera entre dos sucesos consecutivos

Como es sabido, T_n son v.a.i.i.d. según una exponencial (caracterización del proceso de Poisson mediante sus tiempos de espera). Es al nivel de estos tiempos de espera en donde se puede llevar a cabo una generalización del proceso que conduce a la definición de proceso de renovación.



8. Introducción a los procesos de renovación

Definición de proceso de renovación

Consideremos un proceso puntual $N(t)$ ($t \geq 0$) y llamemos $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de los tiempos de espera entre dos sucesos consecutivos. Supongamos que $t_0 = 0$ (instante del primer suceso), y llamemos

$$t_{n+1} = t_n + T_{n+1} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Se dice que $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ es un proceso de renovación si las $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ son v.a.i.i.d. y no negativas casi seguro. $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ son los instantes de renovación.



8. Introducción a los procesos de renovación

Clasificación

Llamemos H a la FD de las T_n . Si se permite que $H(0) > 0$, se admite la posibilidad de que ocurra más de un suceso en el mismo instante (sucesos múltiples), de manera que de ahora en adelante supondremos que $H(0) = 0$. También supondremos que la media de H es finita.

Los procesos de renovación pueden ser clasificados en dos categorías:

1. $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ es recurrente si $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < T_n < +\infty$



8. Introducción a los procesos de renovación

Clasificación

2. $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ es transitorio si $\exists n \in \mathbb{N} \mid T_n = +\infty$, en cuyo caso t_{n+1} sería la última renovación

La consecuencia en cada caso sobre la distribución de los T_n es:

1. $H(\infty) = 1$: H es una distribución *propia*

2. $H(\infty) < 1$: H es una distribución *defectiva*; el defecto de la distribución $1 - H(\infty) > 0$ se interpreta como la probabilidad de que $\{T_n = \infty\}$, es decir, de que el proceso *finalice*.



8. Introducción a los procesos de renovación

LA FUNCIÓN DE RENOVACIÓN

Consideremos la v.a.

$$N(t) \equiv \text{Número de renovaciones en } [0, t]$$

Su función de cuantía es (recordemos que $t_0 = 0$ se considera la primera renovación)

$$\begin{aligned} n=1,2,3,\dots : \quad P\{N(t) = n\} &= P\{t_{n-1} \leq t\} - P\{t_n \leq t\} = \\ &= H^{*n-1}(t) - H^{*n}(t) \end{aligned}$$



8. Introducción a los procesos de renovación

La función de renovación

Por tanto llamando $R(t)$ al número medio de renovaciones en $[0, t]$ se tiene:

$$\begin{aligned} R(t) &= E\{N(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} n P\{N(t) = n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left[H^{*n-1}(t) - H^{*n}(t) \right] = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} H^{*n}(t)} \end{aligned}$$

$R(t)$ se denomina *función de renovación*. Se tiene que $R(t) < +\infty \quad \forall t \geq 0$, siempre que sea $H(0) < 1$.



8. Introducción a los procesos de renovación

Procesos de renovación transitorios

Consideramos a continuación un proceso de renovación $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que la distribución H de los tiempos de espera T_n sea defectiva: $H(\infty) < 1$. Entonces t_n también es efectiva con distribución H^{*n} cuya masa total es $H^{*n}(\infty) = H(\infty)^n$.

El defecto $(1 - H(\infty)^n)$ se interpreta como la probabilidad de que el proceso finalice antes de la renovación $n + 1$.



8. Introducción a los procesos de renovación

Procesos de Renovación transitorios (II)

Para el caso de los procesos de renovación transitorios, se puede afirmar que la función de renovación es finita $\forall t \in [0, \infty)$ puesto que en $t = \infty$ se tiene

$$R(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} H^{*n}(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} H(\infty)^n = \frac{1}{1 - H(\infty)}$$

La probabilidad de que t_n sea la ñultima renovación siendo menos o igual que un cierto t es

$$(1 - H(\infty)) H^{*n}(t)$$



8. Introducción a los procesos de renovación

Procesos de Renovación transitorios (III)

Definiendo entonces el instante *de finalización del proceso*

como

$$M = \max_{n \geq 0} \{t_n\}$$

se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA : Un proceso de renovación transitorio *finaliza* con probabilidad 1

Además de la v.a. M (instante de finalización del proceso) posee la siguiente distribución propia:

$$P\{M \leq t\} = (1 - H(\infty))R(t)$$

siendo $R(t)$ la *función de renovación del proceso*.



8. Introducción a los procesos de renovación

Procesos de Renovación transitorios (IV)

La afirmación relativa a la terminación del proceso es fácil de comprobar ya que:

$$P\{M < \infty\} = (1 - H(\infty))R(\infty) = (1 - H(\infty))(1 - H(\infty))^{-1} = 1$$

Por otro lado, el suceso $\{M \leq t\}$ se puede expresar como unión de sucesos disjuntos dos a dos de la siguiente forma:

$$\{t_0 \leq t\} \cup \{M = t_1 \leq t\} \cup \dots \cup \{M = t_k \leq t\} \cup \dots$$

obteniéndose directamente la segunda conclusión:

$$P\{M \leq t\} = (1 - H(\infty))R(t)$$



9. Bibliografía

La referencia (2) contiene una exposición completa de los procesos y Teoría de la Renovación. Una exposición más sencilla puede hallarse en (1). En las referencias (4) y (5) se pueden encontrar el resto de los temas tratados en este capítulo. En (3) y (6) hay una introducción a la familia exponencial de distribuciones y los modelos lineales generalizados.

- (1) Cox,D.R. (1962): *Renewal Theory*. Methuen & Co.
- (2) Feller,W. (1966): *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Volume 2, John Willey.
- (3) de Jong P., Heller, G. Z. (2008): *Generalized Linear Models for Insurance Data*. Cambridge University Press.
- (4) Klugmann, Panjer, Willmot (1998): *Loss Distributions. From Data to Decisions*. John Wiley
- (5) Panjer, H.H./ Willmot, G.E. (1992): *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries,
- (6) Wood,S.N.(2006): *Generalized Additive Models. An introduction with R*. Chapman & Hall.



LECCIÓN 3

Modelización del Número de siniestros.

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



Índice de la lección 3

1. Distribuciones compuestas para el daño total.

2. Distribuciones contadoras para el número de siniestros

- La clase $C(a, b, 0)$
- Distribuciones de Poisson ponderadas:
 - a) Ponderación por una gamma: la BN.
 - b) Ponderación por una IG.
- Distribuciones de Poisson compuestas
- La clase $C(a, b, 1)$.
 - a) Miembros de la $C(a, b, 1)$
 - b) Modificación de distribuciones. Inflado de ceros.



1-Distribuciones compuestas

Variables fundamentales

$N \equiv$ NUMERO DE SINIESTROS producidos por el riesgo durante el periodo de tiempo

$\{X_1, X_2, \dots\}$ es una sucesion de v.a. en donde:

$X_i \equiv$ CUANTIA del i-esimo SINIESTRO producido por el riesgo

$S \equiv$ DAÑO TOTAL PRODUCIDO POR EL RIESGO DURANTE EL PERIODO DE TIEMPO

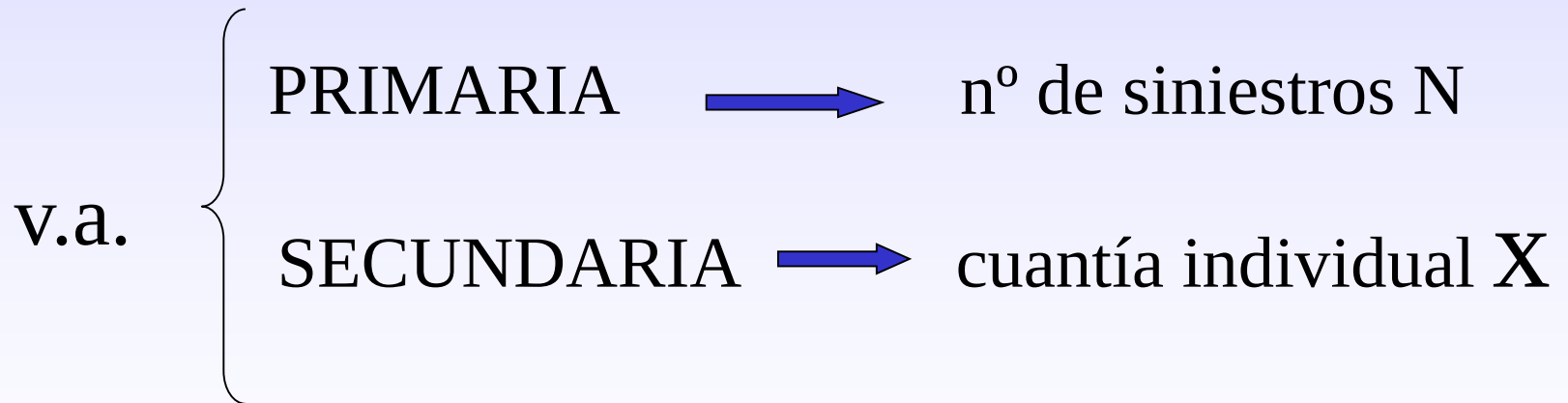


1-Distribuciones compuestas

Variables aleatorias Compuestas

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \quad (S = 0, \text{ si } N = 0)$$

S es una v.a. **COMPUESTA**



Sus distribuciones heredan la misma terminología



1-Distribuciones compuestas

Hipótesis Probabilísticas

1. $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ son v.a. independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) y su distribución no depende del tiempo

$$X \sim V(x) = P\{X \leq x\}, \quad V(0)=0$$

Su función de cuantía (resp. densidad) la notaremos $v(x)$

2. N, X son v.a. independientes

Gracias a estas hipótesis podemos deducir una expresión simbólica de la distribución compuesta



1-Distribuciones compuestas

Expresión simbólica

Función de distribución compuesta:

$$F(s) = P\{S \leq s\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} V^{*(n)}(s)$$

En cualquier caso, notando $v(s)$ ya sea a la Funcion de Cuantia (f.c.) o a la Funcion de Densidad (f.d.) de X :

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} v^{*(n)}(s)$$



1-Distribuciones compuestas

Clasificación de las funciones compuestas

¿ Qué tipo de modelo (discreto, continuo mixto) es F ?

V DISCRETA $\longrightarrow$ F. DISCRETA

V CONTINUA $\longrightarrow$ F. MIXTA

- 1 SALTO EN EL ORIGEN $S=0$
DE AMPLITUD $P\{N=0\}$
- EN $\{S>0\}$ ESTÁ EN EL TROZO CONTINUO

Puesto que $V(s) = 0, \forall s < 0$, resulta que tambien
es $F(s) = 0, \forall s < 0$



1-Distribuciones compuestas

Propiedad Fundamental de la transformada

f.g.m. $M_S(z) = P_N (M_X(z))$

T. Laplace: $L_S(z) = P_N (L_X(z))$

f.g.p. $P_S(z) = P_N (P_X(z))$

Esto es muy útil para:

- Calcular momentos de S (o también de N)
- Reconocer modelos.



1-Distribuciones compuestas

Momentos de una compuesta

$$M'_S(z) = P'_N(M_X(z)) M'_X(z)$$

$$M''_S(z) = P''_N(M_X(z))(M'_X(z))^2 + P'_N(M_X(z)) M''_X(z)$$

Y sustituyendo $z = 0$

$$E\{S\} = E\{N\} E\{X\}$$

$$E\{S^2\} = E\{N(N-1)\} E^2\{X\} + E\{N\} E\{X^2\}$$

$$Var\{S\} = Var\{N\} E^2\{X\} + E\{N\} Var\{X\}$$



1-Distribuciones compuestas

Ejemplo: Distribución de Tweedie

- Primaria: Poisson(λ) $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0, n = 0, 1, \dots$
- Secundaria: Gamma(α, β) $v(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0, \alpha, \beta > 0$
- Compuesta: $f_s(0) = e^{-\lambda} \quad \forall s > 0: f_s(s) = e^{-\beta s} e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^\alpha)^n}{n! \Gamma(n\alpha)} s^{n\alpha-1}$
- Media: $\mu = \lambda \frac{\alpha}{\beta}$
- Varianza: $\sigma^2 = \lambda \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} = \phi \mu^p, \quad \mu, \phi > 0, p \in (1, 2)$



Tweedie
Momentos

La reparametrización se consigue así: $(\mu, \sigma, \phi) \mapsto (\lambda, \alpha, \beta)$

$$\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}, \quad \alpha = \frac{2-p}{p-1}, \quad \frac{1}{\beta} = \phi(p-1)\mu^{p-1}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

La clase $C(a,b,0)$

Está formada por las distribuciones que verifican la siguiente recursión:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Obsérvese que su soporte contiene a $n = 0$

LOS ÚNICOS MIEMBROS DE LA CLASE $C(a,b,0)$ SON:

$$P(\lambda) \quad , \quad B(m, q) \quad , \quad G(\beta) \quad , \quad BN(r, \beta)$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Miembros de la clase $C(a,b,0)$

Los valores de las constantes a, b , son:

$$P(\lambda) \rightarrow a = 0, \quad b = \lambda > 0$$

$$B(m, q) \rightarrow a = \frac{-q}{1-q}, \quad b = (m+1) \frac{q}{1-q}, \quad q \in (0,1), m = 1, 2, \dots$$

$$G(\beta) \rightarrow a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0, \quad \beta > 0$$

$$BN(r, \beta) \rightarrow a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = (r-1) \frac{\beta}{1+\beta}, \quad r > 0, \beta > 0$$



Cuantias BiNeg
Iculadas segun Ca



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución Binomial (véase la lección anterior)

- La distribución de Bernouilli es el modelo para dos posibles sucesos: éxito (1) y fracaso (0) con prob. resp. q y $1 - q$.
- Su fgp es entonces: $P(z) = (1-q)z^0 + qz^1 = 1 + q(z-1)$
- Sumando m va independientes Bernouilli se obtiene una binomial con fgp: $P(z) = (1 + q(z-1))^m$, $q \in (0,1)$

Con f. de cuantía: $p_n = \binom{m}{n} q^n (1-q)^{m-n}$, $n = 0, \dots, m$

en este caso se trata de un modelo infradisperso:

$$E\{N\} = mq > mq(1-q) = \text{Var}(N)$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución Binomial. Estimación

La log verosimilitud es:

$$l(m, q) = \sum_{k=0}^m n_k \left(\log \binom{m}{k} + k \log q + (m-k) \log(1-q) \right)$$
$$\frac{\partial l}{\partial q} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^m k n_k - \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^m (m-k) n_k = 0 \Leftrightarrow \hat{q} = \frac{1}{m} \frac{\sum_{k=0}^m k n_k}{\sum_{k=0}^m n_k}$$

Cuando m es desconocido:

$$\hat{q} = \frac{1}{\hat{m}} \frac{\sum_{k=0}^m k n_k}{\sum_{k=0}^m n_k}$$

Se puede aplicar un procedimiento iterativo tomando como semilla de $\hat{m}$ el máximo observado y calculando el correspondiente $\hat{q}$, para incrementar m y repetir la estimación de $\hat{q}$. Así hasta alcanzar un máximo de $l(m, q)$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson

- Esta es una FD a partir de la cual se obtienen otras mediante composición y ponderación.

$$P(\lambda): \quad p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad , \quad \lambda > 0, \quad \mu = \sigma^2 = \lambda, \quad M_N(z) = e^{\lambda(e^z - 1)}$$

- El EMV de λ es la media muestral
- De entrada, si la media y varianza muestrales son distintas, entonces este modelo no nos servirá.
- Pero si el modelo se ajustase bien a una muestra, se trataría de una cartera homogénea.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson. Carteras heterogéneas

- Un mismo parámetro de poisson $\lambda > 0$ caracteriza o describe a todas las pólizas de la cartera.
- Vistas desde la perspectiva de la v.a. N , son indistinguibles.
- DECIMOS ENTONCES QUE LA CARTERA DE PÓLIZAS ES **HOMOGÉNEA**.
- Todas las pólizas tendrían el mismo número medio de siniestros por periodo.
- Es muy difícil que esto se dé en la realidad: por regla general, la FD de Poisson nos proporcionará ajustes muy pobres. La explicación sea quizás que las carteras reales suelen ser heterogéneas.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Carteras heterogeneas

Aquí se persiguen dos objetivos:

1. Obtener modelos con la cola derecha más pesada que Poisson,
2. Capaces de capturar la heterogeneidad de una cartera, es decir, cuando las pólizas tienen parámetros de Poisson distintos.
3. Que verifiquen la sobredispersión

•HIPÓTESIS: Dada una póliza cualquiera de la cartera, su v.a. N está distribuida según $P(\lambda)$, PARA CIERTO $\lambda > 0$ QUE DESCONOCEMOS Y QUE NO PODEMOS ESTIMAR DE FORMA INDIVIDUALIZADA.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Carteras heterogeneas

Si bien por hipótesis nos resulta imposible saber cual es el λ de cada póliza concreta, sí que podemos estudiar sus frecuencias en la cartera

$$U(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$$

$U(\lambda)$ es la distribución de los λ en la cartera.

Λ, λ : variable de estructura de la cartera.

U : función de estructura de la cartera.

Bajo esta hipótesis:

$$p_n = P\{N = n\}, n = 0, 1, 2, \dots?$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Deducción

Conociendo el valor del parametro $\Lambda = \lambda$ de la poliza

$$p\{N = n | \Lambda = \lambda\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$p_n = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} dU(\lambda), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Distribución de Poisson ponderada por U



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Mixturas de Poisson

En el caso U continua, tendrá una f. densidad $u(\lambda)$

$$p\{N = n\} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u(\lambda) d\lambda$$

En el caso discreto, U tendrá una f. cuantía $u_\lambda = P\{\Lambda = \lambda\}$, y llamando $Sop\Lambda = \{\lambda : u_\lambda > 0\}$ al conjunto soporte de la distribución:

$$p\{N = n\} = \sum_{\lambda \in Sop\Lambda} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u_\lambda$$

Para el caso discreto lo llamaremos MIXTURA DE POISSON



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Mixturas de Poisson

Ejemplo: El modelo del riesgo bueno riesgo malo:
Imaginemos una cartera en donde solo existen dos tipos de riesgos cada uno de los cuales tiene una cierta frecuencia:

$$\lambda_1 = 0.05 \quad u_{\lambda_1} = 0.9$$

$$\lambda_2 = 0.08 \quad u_{\lambda_2} = 0.1$$

$$p\{N = n\} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u(\lambda) d\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sop}\Lambda} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u_{\lambda}$$

$$= \frac{0.05^n}{n!} e^{-0.05} 0.9 + \frac{0.08^n}{n!} e^{-0.08} 0.1$$

$$M_N(z) = \sum_{\lambda \in \text{Sop}\Lambda} M_{\lambda}(z) u_{\lambda} = \exp\{0.05(e^z - 1)\} 0.9 + \exp\{0.08(e^z - 1)\} 0.1$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Transformada

Función generadora de probabilidad de N:

$$\begin{aligned} P_N(z) &= E\{z^N\} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n P\{N=n\} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} dU(\lambda) = \end{aligned}$$

fgp de una $P(\lambda)$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \right) dU(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda(z-1)} dU(\lambda)$$

Como la Transformada de Laplace de Λ es $L_\Lambda(z) = \int_0^{+\infty} e^{-z\lambda} dU(\lambda)$ resulta que:

$$P_N(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(1-z)} dU(\lambda) = L_\Lambda(1-z)$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Momentos

Llamando $\mu_k(\lambda)$ al momento de orden k de la $P(\lambda)$, y μ_k al de la Poisson ponderada:

$$\mu_k = E_{\lambda} \{ \mu_k(\lambda) \} = \int_0^{+\infty} \mu_k(\lambda) dU(\lambda)$$

Para estas distribuciones se tiene que $\pi < \sigma^2$, proporcionando toda una variedad de FD sobredispersas

$$\mu_1 = E \{ \Lambda \} = E \{ N \}, \quad \mu_2 = \int_0^{+\infty} (\lambda + \lambda^2) dU(\lambda) = E \{ \Lambda \} + E \{ \Lambda^2 \}$$

$$\begin{aligned} \text{Var} \{ N \} &= \mu_2 - \mu_1^2 = E \{ \Lambda \} + E \{ \Lambda^2 \} - E^2 \{ \Lambda \} = \\ &= E \{ \Lambda \} + \text{Var} \{ \Lambda \} > E \{ \Lambda \} = E \{ N \} \end{aligned}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Momentos

Seguimos con nuestro ejemplo:

$$u(\lambda) = \begin{cases} 0.06 & \lambda=0.9 \quad (90\% \text{ de la cartera son } \textit{polizas BUENAS} \text{ aprox.}) \\ 0.08 & \lambda=0.1 \quad (10\% \text{ de la cartera son } \textit{polizas MALAS} \text{ aprox.}) \end{cases}$$

$$M_N(z) = \exp\{0.06(e^z - 1)\} \cdot 0.9 + \exp\{0.08(e^z - 1)\} \cdot 0.1$$

$$\mu_1 = \left. \frac{dM_N}{dz} \right|_{z=0} = 0.06 \times 0.9 + 0.08 \times 0.1 = 0.062$$

$$\mu_2 = \left. \frac{d^2 M_N}{dz^2} \right|_{z=0} = 0.06588$$

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = 0.062036 > \mu_1$$

A continuación estudiaremos algunos casos particulares de Estructuras continuas.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Binomial negativa

Tomando para Λ una estructura $U(\lambda)$

$$G(r, \beta) (r, \beta > 0) : \quad u(\lambda) = \frac{\lambda^{r-1}}{\beta^r \Gamma(r)} e^{-\lambda/\beta}, \quad \lambda > 0.$$

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad (r > 0)$$

$$E(\Lambda) = r\beta, \quad \text{Var}(\Lambda) = r\beta^2$$

$$\text{Transf. Laplace} : L_{\Lambda}(z) = \left(\frac{1}{1 + \beta z} \right)^r, \quad z > -1/\beta$$

La binomial negativa es:

$$p_n = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Binomial negativa

Vamos a comprobar que al ponderar $P(\lambda)$ por $G(\alpha, \beta)$, la distribución que resulta es una $BN(r = \alpha, \beta)$

En efecto: $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P\{N = k\} = p_k &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\beta} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha) k!} \int_0^{+\infty} \lambda^{k+\alpha-1} e^{-\lambda(1+\frac{1}{\beta})} d\lambda = \end{aligned}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson ponderadas. Binomial negativa

$$\text{Cambio: } y = \lambda \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{y}{1 + \frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow d\lambda = \frac{dy}{1 + \frac{1}{\beta}}$$

$$\lambda = 0, y = 0$$

$$\lambda \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha) k!} \int_0^{+\infty} \frac{y^{k+\alpha-1}}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{k+\alpha}} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha) k! \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{k+\alpha}} = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha) k!} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$$

Esto es la f.c. de una $BN(r = \alpha, \beta)$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución Binomial Negativa

Para el ajuste a carteras heterogéneas suele dar mejor resultado esta distribución BN:

$$p_n = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(r)k!} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^k, r, \beta > 0, n = 0, 1, \dots$$

$$M_N(z) = \left(1 - \beta(e^z - 1) \right)^{-r}$$

La sobredispersión es una explicación de por qué puede proporcionar mejores ajustes:

$$E\{N\} = r\beta < r\beta(1+\beta) = \text{Var}(N)$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución Binomial Negativa. Estimación

$\bar{X} \equiv$ media muestral, $S^2 \equiv$ varianza muestral, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ estimadores por momentos

$$\begin{cases} \bar{X} = r\beta \\ S^2 = r\beta(1+\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \bar{r} = \frac{\bar{X}^2}{S^2 - \bar{X}}, \quad \bar{\beta} = \frac{S^2}{\bar{X}} - 1,$$

Para el cálculo de los EMVs maximizamos la log-verosim

$$\begin{aligned} l(r, \beta) &= \sum_{k=0}^{\infty} n_k \log p_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left[\log \left(\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!} \right) - r \log(1+\beta) + k \log(\beta) - k \log(1+\beta) \right] \end{aligned}$$

Para hallar el máximo anulamos las derivadas parciales



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución Binomial Negativa. Estimación

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \beta} = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(\frac{k}{\beta} - \frac{r+k}{1+\beta} \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kn_k - r\beta n = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} kn_k = r\beta \\ \frac{\partial l}{\partial r} = -n \log(1+\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{r+m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \hat{r}\hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{r}} \\ n \log(1+\hat{\beta}) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\hat{r}+m} \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene:

$$H(\hat{r}) = n \log\left(1 + \frac{\bar{x}}{\hat{r}}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} n_k \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\hat{r}+m} = 0$$

Su raíz solo puede ser aproximada numéricamente



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Otras distribuciones de Poisson ponderadas

- Existen muchos otros modelos de Poisson ponderados, que se obtienen considerando otras funciones de estructura: Inversa Gaussiana, logarítmica, etc...
- Todos ellos comparten la característica interesante de la sobredispersión ($\text{varianza} > \text{media}$)
- De hecho, dada una media y varianzas fijas, siempre se puede conseguir uno de estos modelos con una asimetría tan grande como se quiera, lo que les hace muy flexibles a la hora del ajuste desde el punto de vista de la cola pesada.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Ejemplos de ajustes con la binomial negativa.

Nº de SINIESTROS	Nº de PÓLIZAS
0	370.412
1	46.545
2	3.935
3	317
4	28
5	3
TOTAL	421.240

Problema: Ajustar una distribución a la v.a. N = Número de siniestros por póliza durante el periodo futuro de tiempo.

El siguiente código R permite el ajuste de una binomial negativa a distintos datos de siniestros del tipo mostrado en la tabla:



Ajuste BiNeg a
una muestra dada



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Ejemplos con la binomial negativa.

Simulación del número de siniestros de una cartera de pólizas (código R):



R Simulacion
BiNeg



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson ponderada por Inversa Gaussiana

$$\text{Densidad } IG(\mu, \beta): u(\lambda) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\beta} \lambda^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2\beta\lambda}(\lambda-\mu)^2}, \lambda > 0, \mu, \beta > 0$$

La distribución de Poisson ponderada tiene cuantías:

$$p_k = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} u(\lambda) d\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pero estas integrales pueden ser difíciles de calcular en este caso...



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson ponderada por Inversa Gaussiana

Se pueden calcular recursivamente así:

$$p_0 = e^{\frac{\mu}{\beta} \left[1 - (1 + 2\beta)^{-\frac{1}{2}} \right]}$$

$$p_1 = \mu p_0 (1 + 2\beta)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\vdots$$

$$p_k = \frac{\beta}{(1 + 2\beta)} \left(2 - \frac{3}{k} \right) p_{k-1} + \frac{\mu^2}{(1 + 2\beta) k (k-1)} p_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson ponderada por Inversa Gaussiana

- Media y varianza del número de siniestros

$$E\{N\} = \mu \quad , \quad Var\{N\} = \mu(1 + \beta)$$

- Estimación por momentos

$$\bar{\mu} = \bar{X} \quad \bar{\beta} = \frac{\overline{S^2}}{\bar{X}} - 1$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson ponderada por Inversa Gaussiana

Notemos μ, β a los estimadores maximo verosimiles

$$n_k \equiv \text{Frec. Observadas}, \quad n = \sum n_k$$

$$\text{Entonces:} \quad \mu = \bar{X},$$

$$\beta \text{ es la raiz positiva de la ecuacion: } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} n_k T_k(\beta) = \bar{X}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} T_0(\beta) &= \bar{X} (1 + 2\beta)^{-\frac{1}{2}} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

$$T_k(\beta) = \frac{1}{1 + 2\beta} \left[(2k - 1)\beta + \frac{\bar{X}^2}{T_{k-1}(\beta)} \right], \quad k = 1, 2, \dots$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson ponderada por Inversa Gaussiana

Nota: Sobre la distribución Inversa Gaussiana en R

- Entre las distintas formas que hay para utilizar la IG en R, tomaremos las funciones del paquete **SuppDists**.
- En este paquete la parametrización usada (ν, λ) es distinta de la (μ, β) usada por nosotros (véase la lección 2). Por ello tenemos que usar el siguiente cambio o reparametrización:

$$\nu = \mu, \quad \lambda = \mu^2 / \beta$$



R emv IG.R



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

Una interpretacion:

$$R = M_1 + M_2 + \dots + M_N \quad \left\{ \begin{array}{l} N \equiv \text{n}^\circ \text{ de catastrofes o accidentes} \\ M \equiv \text{n}^\circ \text{ de siniestros por accidente} \\ R \equiv \text{n}^\circ \text{ total de siniestros} \end{array} \right.$$

Distribuciones que ya conocemos:

$$P(\lambda), \quad B(n, q), \quad BN(r, \beta), \quad G(\beta)$$

Componiéndolas, podemos definir nuevas distribuciones para N

A recordar que la fgp de una compuesta se obtiene por composicion:

$$f.g.p.: \quad P_N(z) = P_1(P_2(z))$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

Número de parámetros de una FD compuesta

$$\text{Nº Total de Parametros de la compuesta} = \sum \left(\begin{array}{c} \text{Parametros de las distribuciones} \\ \text{primaria y secundaria} \end{array} \right)$$

Vamos a fijar la primaria $P(\lambda)$, y solo nos queda elegir la secundaria.

A continuacion veremos un ejemplo.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

Ejemplo: la BN como una Poissoncompuesta con logarítmica

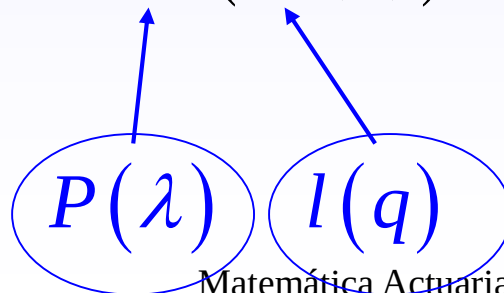
Primaria: Poisson $P(\lambda)$ Secundaria: Logarítmica $l(q)$

Para $l(q)$, recordemos que su f.cuantia es (lección 2):

$$f(n) = \frac{q^n}{-n \log(1-q)} = \frac{1}{n \log(1+\beta)} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n$$

Reparametrización: $0 < q = \frac{\beta}{1+\beta} < 1$

Sabiendo que: $P_N = P_1(P_2(z)) = \dots$





2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

Ejemplo: la BN como una Poissoncompuesta con logarítmica

Puesto que : $P_1(z) = e^{\lambda(z-1)}$, $P_2(z) = \frac{\log(1-qz)}{\log(1-q)}$

$$\dots = \exp \left\{ \lambda \left[\frac{\log(1-qz)}{\log(1-q)} - 1 \right] \right\} = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\log(1-q)} \log \left(\frac{1-qz}{1-q} \right) \right\} =$$

$$= \left(\frac{1-qz}{1-q} \right)^{\frac{\lambda}{\log(1-q)}} = \left[\frac{1-qz - q + q}{1-q} \right]^{-r} = \left[1 - \frac{q}{1-q} (z-1) \right]^{-r} =$$

$$r = \frac{-\lambda}{\log(1-q)}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

Ejemplo: la BN como una Poissoncompuesta con logarítmica

$$= \left[1 - \beta(z-1) \right]^{-r}$$
$$\beta = \frac{q}{1-q}$$

¡ Esta es la f.g.p. de una $BN(r, \beta)$!
(véase Lección 1)

CONCLUSIÓN: Los dos modelos son idénticos:

POISSON-LOGARITMICA $\equiv$ BINOMIAL NEGATIVA



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

Conclusión del ejemplo

OBSERVACIÓN: Este es el 1º ejemplo de distribución con las dos siguientes interpretaciones:

(a) PONDERADA
(Poisson con Gamma)

(b) COMPUESTA
(Poisson –Logarítmica)

¿ EXISTEN OTRAS?

Nos preguntamos:

¿Cuáles son las distribuciones de Poisson ponderadas que son al mismo tiempo de Poisson compuestas?



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

FD Infinitamente divisible

■ **Cálculo numérico de estas distribuciones:** Para estas distrib. de Poisson Ponderadas, el cálculo de sus cuantías puede hacerse usando los algoritmos para compuestas de la próxima lección (esto es más sencillo que calcular integrales), o mediante la técnica de las transformadas usada a lo largo de la lección 2



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

FD Infinitamente divisible

■ **Def:** Una F. de Distrib. es **INFINITAMENTE DIVISIBLE** si:

$\forall n = 1, 2, 3, \dots$, su función característica $\Phi(z) = E_F \{e^{izx}\}$

puede representarse como $\Phi(z) = [\Phi_n(z)]^n$, siendo $\Phi_n(z)$

la f.característica de alguna F.Distribución.

[Es decir: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ (X_i identicam. dist.)]

- Ejemplos: la normal, la gamma, la inversa gaussiana. Solo hay que mirar la forma de la transformada para saber si tiene la propiedad



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de Poisson compuestas

Teorema: sobre la equivalencia entre modelos de Poisson ponderados y compuestos

Sea $P(z)$ la f.g.p. de una Poisson Ponderada con función de estructura $U(\lambda)$ INFINITAMENTE DIVISIBLE. Entonces: $P(z)$ es la f.g.p. de una Poisson Compuesta y se puede escribir así:

$$P(z) = e^{\lambda(Q(z)-1)}$$

$(\lambda > 0, \quad Q(z) \text{ f.g.p. de la secundaria})$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Clasificación de las distrib. Poisson compuestas I

Las clasificamos según se elija la secundaria. Esta última puede ser:

$$P(\lambda); B(m, q); BN(r, \beta); g(\beta); l(q); \underline{BNET(r, \beta)}$$

Binomial Negativa Extendida y Truncada
 $r \in (-1, 0]$, $\beta > 0$. Nueva F.Distrib. Discreta que
introduciremos más adelante.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Clasificación de las distrib. Poisson compuestas II

DISTR. SECUNDARIA	DISTR. POISSON COMPUESTA
POISSON	NEYMAN TIPO A
BINOMIAL	POISSON-BINOMIAL
LOGARÍTMICA	BINOMIAL NEGATIVA
BINOMIAL NEGATIVA	POISSON.PASCAL
GEOMÉTRICA	POLYA-AEPPLI
BNET	POISSON-PASCAL GENERALIZADA
Caso part.: $BNET(r = -1/2, \beta > 0)$	POISSON-INVERSA GAUSSIANA (Otra ponderada que es compuesta)

A continuación introducimos uno a uno estos modelos



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros Poisson compuesta con binomial (modelo triparamétrico)

f.g.p.: $P(z) = \exp \left\{ \lambda \left[(1 + q(z-1))^m - 1 \right] \right\}$

¿Cálculo de las cuantías? → mediante la fgp o la siguiente lección

Aplicando las expresiones de los momentos de distrib.
compuestas (véase lección 1):

$$\mu = m\lambda q$$

$$\sigma^2 = \mu(1 + (m-1)q)$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Poisson compuesta con binomial (modelo triparamétrico)

Asimetría en función de μ, σ^2

$$\gamma = (\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} \left[3\sigma^2 - 2\mu + \frac{m-2}{m-1} \frac{(\sigma^2 - \mu)^2}{\mu} \right]$$

Puesto que es: $0 < \frac{m-2}{m-1} < 1$ ($m = 2, 3, 4, \dots$),

para μ, σ^2 dados, γ tiene un rango MUY REDUCIDO.

- Para cada FD Poisson compuesta representaremos la asimetría En función de la media y la varianza.
- *Lo único que cambiará de un modelo a otro será el coeficiente enmarcado, y*
- Esto nos va a permitir **comparar** las asimetría de los distintos modelos para media y varianza dadas.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Poisson compuesta con Poisson: Neyman tipo A (modelo biparamétrico)

$$\text{f.g.p.: } P(z) = \exp \left\{ \lambda_1 \left(e^{\lambda_2(z-1)} - 1 \right) \right\}$$

$(\lambda_1, \lambda_2 > 0, \text{ parámetros de primaria y secundaria})$

¿Cálculo de las cuantías? Fgp o la Siguiete lección.

$$\mu = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\sigma^2 = \lambda_1 \lambda_2 (1 + \lambda_2)$$

$$\gamma = \frac{1 + 3\lambda_2 + \lambda_2^2}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} (1 + \lambda_2)^{3/2}}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Poisson compuesta con Poisson: Neyman tipo A (modelo biparamétrico)

Asimetría en función de μ, σ^2

$$\gamma = (\sigma^2)^{-3/2} \left(3\sigma^2 - 2\mu + \frac{(\sigma^2 - \mu)^2}{\mu} \right)$$

EL COEFICIENTE ES IGUAL A 1: PARA μ, σ^2 DADAS, ESTE γ ES MÁS GRANDE QUE EL ANTERIOR.

Pero, por ejemplo, es más pequeño que el λ de la Poisson-Logarítmica:

$$\gamma = (\sigma^2)^{-3/2} \left[3\sigma^2 - 2\mu + 2 \frac{(\sigma^2 - \mu)}{\mu} \right]$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

DISTRIBUCIÓN SECUNDARIA: ya conocemos la familia

$BN(r, \beta)$ ($r, \beta > 0$), que está formada por BN y el caso $r = 1$ ($G(\beta)$)

VAMOS A AMPLIAR ESTA FAMILIA CON 2 DISTRIBUCIONES:

Una conocida ($l(q)$) y otra nueva (BNET $\equiv$ Binomial Negativa extendida y Truncada)

La terminología BNET quedará clara más adelante....



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

La logarítmica como caso límite de la BN

Consideramos las v.a.: $X \sim BN(r, \beta)$, $Y = X | X > 0$

La función de cuantía de la va Y es:

$$\begin{aligned} y = 1, 2, 3, \dots: p_y &= \frac{P\{X = y\}}{1 - P\{X = 0\}} = \\ &= \frac{1}{(1 + \beta)^r - 1} \frac{r}{r} \frac{\Gamma(r + y)}{\Gamma(r) y!} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^y = \\ &= \frac{r}{(1 + \beta)^r - 1} \frac{\Gamma(r + y)}{\Gamma(r + 1) y!} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^y \end{aligned}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

La logarítmica como caso límite de la BN (2)

Haciendo tender $r \searrow 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{r \searrow 0} p_y &= \frac{1}{y} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^y \lim_{r \searrow 0} \frac{r}{(1+\beta)^r - 1} = \frac{1}{y} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^y \frac{1}{\log(1+\beta)} = \\ &= \frac{\left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^y}{-y \log \left(1 - \frac{\beta}{1+\beta} \right)} = \frac{q^y}{-y \log(1-q)}\end{aligned}$$

$q = \frac{\beta}{1+\beta}$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

La logarítmica como caso límite de la BN (3)

CONCLUSIÓN : LA FD $l(q)$ ES EL CASO LÍMITE cuando $r \searrow 0$, de la $BN(r, \beta)$. POR TANTO EN LA FAMILIA BN PODEMOS ESCRIBIR : $r \in [0, \infty)$ siendo el caso $r = 0$: $l(q)$.

El siguiente caso consiste en ampliar el rango del parámetro r al intervalo $(-1, 0)$, de manera que finalmente tengamos para la familia BN : $r \in (-1, +\infty)$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

Binomial negativa extendida y truncada (BNET)

•Consideramos:

$N \in \{0, 1, 2, \dots\} \sim BN(r, \beta) (r > 0, \beta > 0)$ con cuantías $(p_n)_{n=0}^{\infty}$

$$\text{Fgp} \longrightarrow P_{BN}(z)$$

La FD BN Truncada: le quitamos la cuantía del origen $n=0$.

Aquí se justifica parte del nombre **BNETruncada**. Cuantías: $(q_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\text{Fgp de la BNET } (r, \beta) \text{ con } r \in (-1, 0), \beta > 0 \longrightarrow P(z)$$

$$\begin{aligned} P_{BN}(z) &= E\{z^N\} = \\ &= P\{N=0\}E\{z^N | N=0\} + (1 - P\{N=0\})E\{z^N | N \in \{1, 2, \dots\}\} = \\ &= p_0 + (1 - p_0)P(z) \end{aligned}$$

Así pues:

$$P(z) = \frac{P_{BN}(z) - P_0}{1 - P_0}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

fgp de la BNET

Y puesto que es: $p_0 = (1 + \beta)^{-r}$

Obtenemos finalmente:

$$P(z) = \frac{\left[1 - \beta(z - 1)\right]^{-r} - (1 + \beta)^{-r}}{1 - (1 + \beta)^{-r}}$$

Media:

$$\mu = \frac{r\beta}{1 - (1 + \beta)^{-r}}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

Cuantías de la BNET

$$n = 1, 2, 3, \dots: q_n = \frac{r}{(1 + \beta)^r - 1} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^n \frac{\Gamma(n + r)}{\Gamma(r + 1) n!}$$

Truncamiento: no hay p_0

Extensión: $-1 < r < 0$

$$q_1 = \frac{r\beta}{\left[(1 + \beta)^r - 1 \right] (1 + \beta)} \quad (\text{puede calcularse a partir de } P(z))$$

Otras expresiones para q_n :

$$n = 1, 2, 3, \dots: q_n = q_1 \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{n-1} \frac{\Gamma(n + r)}{\Gamma(r + 1) n!}$$

$$n = 2, 3, \dots: q_n = \frac{n + r - 1}{n} \frac{\beta}{1 + \beta} q_{n-1}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

BNET (r, β) comparada con cuantías de BN

$$BNET(r, \beta) \quad r \in (-1, 0), \quad \beta > 0:$$

$$n = 1, 2, 3, \dots: p_n = p_1 \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{n-1} \frac{\Gamma(n + r)}{n! \Gamma(r + 1)}$$

$$BN(r > 0, \beta > 0):$$

$$p_n = \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^r \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^n \frac{\Gamma(n + r)}{n! \Gamma(r)}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

Explicación del nombre BNET

- * Difieren en 1 cte: p_1 vs. $\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r$
 - * El soporte de BNET empieza en $n=1$
 - * $r \in (-1, 0)$ extensión del rango del parámetro
- Truncamiento de la BN



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

RESUMEN de la familia paramétrica "BN"

De ahora en adelante, la "familia BN" contiene: $r \in (-1, +\infty)$, $\beta > 0$:

$$r \in (-1, 0): \quad BNET$$

$$r = 0 \quad l(q) \quad \left(q = \frac{\beta}{1 + \beta} \right)$$

$$r = 1 \quad G(\beta)$$

$$r \in \text{Resto}: \quad BN(r, \beta)$$

Cualquiera de estas puede ser tomada como secundaria de la Poisson Compuesta.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal generalizada

Se denomina así al caso en que se toma como secundaria a una bnet $-1 < r < 0$, $\beta > 0$.

$$f.g.p.: P(z) = \exp \left\{ \lambda \left[\frac{(1 - \beta(z-1))^{-r} - (1 + \beta)^{-r}}{1 - (1 + \beta)^{-r}} - 1 \right] \right\}$$

Media: $\mu = \lambda \left(1 - (1 + \beta)^{-r} \right)^{-1} r \beta$

Varianza: $\sigma^2 = \mu \left(1 + (r + 1) \beta \right)$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

La asimetría de una Poisson-Pascal generalizada (1)

Considerando una secundaria perteneciente a la clase
bn $r > -1$:

La asimetría en función de μ , σ^2 es:

$$\gamma = (\sigma^2)^{-3/2} \left[3\sigma^2 - 2\mu + \underbrace{\left(\frac{r+2}{r+1} \right)}_{\downarrow} \frac{(\sigma^2 - \mu)^2}{\mu} \right]$$

Nos fijamos en este coeficiente para estudiar el Rango de variación de la asimetría.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

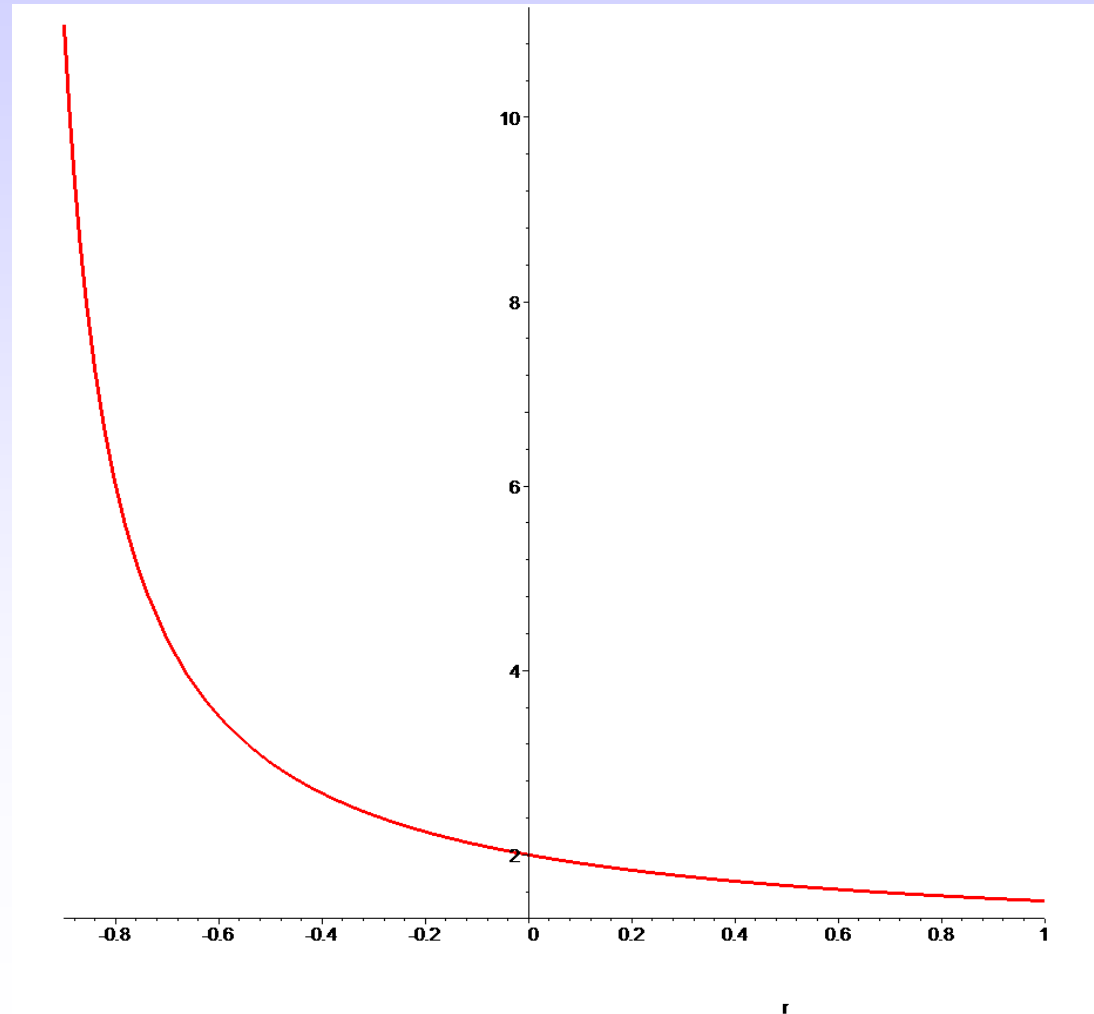
Distribución de Poisson Pascal

La asimetría de una Poisson-Pascal generalizada (1)

$$f(r) = \frac{r+2}{r+1} \text{ es decreciente } \forall r > -1$$

Cuando $r \rightarrow -1^+$, $f(r) \nearrow +\infty$

Cuando $r \rightarrow +\infty$, $f(r) \searrow 1$





2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribución de Poisson Pascal

La asimetría de una Poisson-Pascal generalizada (1)

Recordemos que 1 es precisamente el valor del coeficiente para la NEYMAN TIPO A.

Otros valores:

Coeficiente de la asimetría para el caso de la Poisson ponderada por Inversa Gaussiana $\equiv$ Poisson compuesta

con $\text{BNET}(r = -\frac{1}{2})$

$$\text{BNET}(r = -\frac{1}{2}, \beta) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

Coeficiente de asimetría de la BN (Poisson compuesta con $l(q)$)

Logaritmica: $r = 0 \Rightarrow f(r) = 2$

Esta distribución puede ajustarse a datos con asimetría muestral tan grande como sea.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Procedimiento para el ajuste por momentos

Dados unos datos, ¿cómo determinar una Poisson compuesta Candidata para el ajuste?

En primer lugar calculamos las siguientes características muestrales: $\mu^*, \sigma^{*2}, \gamma^*$

Luego sustituimos en la asimetría dejando indeterminado el coeficiente C

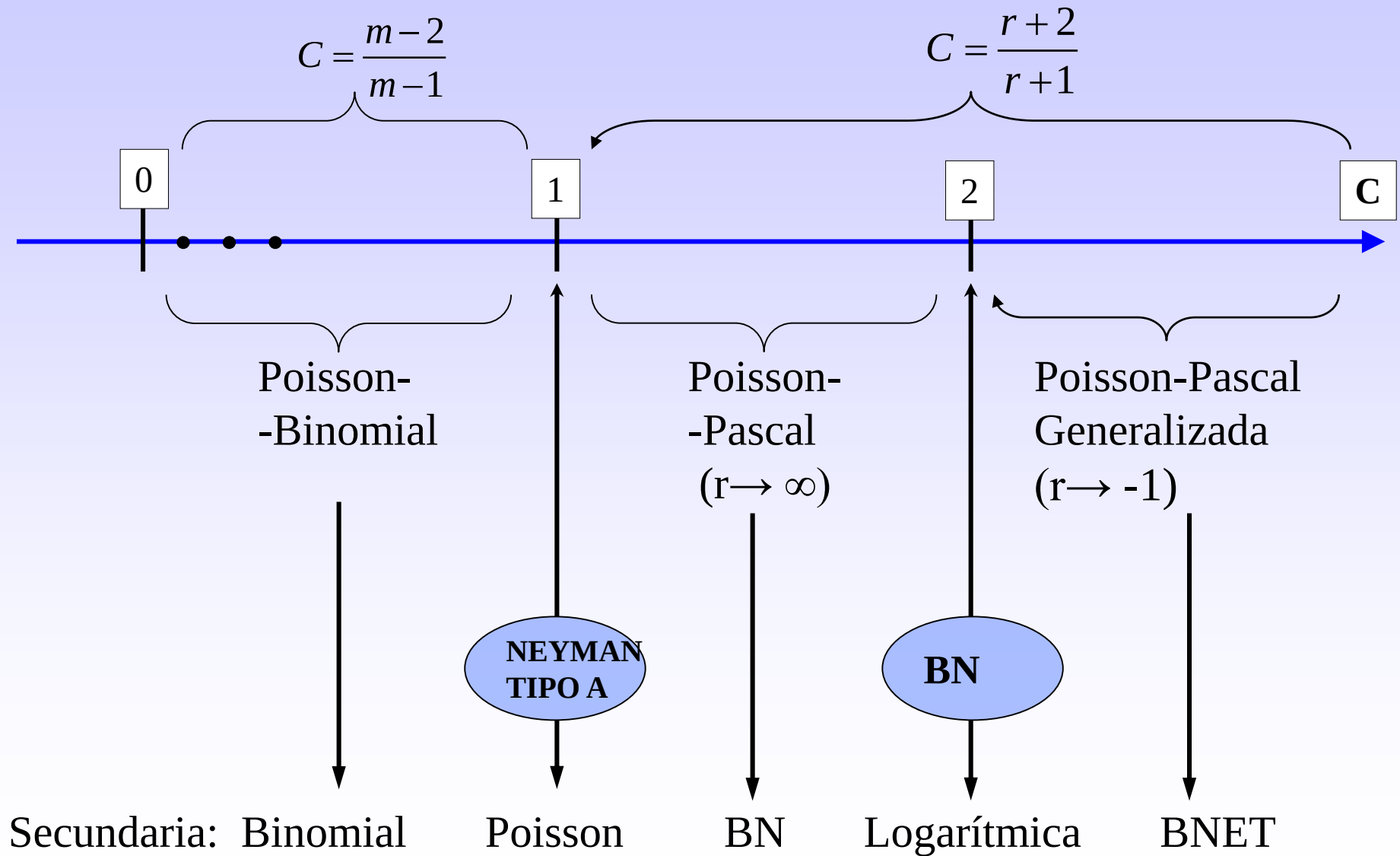
$$\gamma^* = (\sigma^{*2})^{-3/2} \left(3\sigma^{*2} - 2\mu^* + C \frac{(\sigma^{*2} - \mu^*)}{\mu^{*2}} \right)$$

Despejamos C y según su valor sabremos que secundaria debemos elegir como candidata.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Selección de la secundaria





2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Extensión

Hemos visto dos ejemplos de distribución de Poisson Compuesta que también es ponderada:

Poisson comp. Logarítmica $\longleftrightarrow$ Poisson ponderada por gamma

Poisson comp. BNET($-1/2, \beta$) $\longleftrightarrow$ Poisson ponderada por IG($1/2, \beta$)

El último caso no es único. De hecho, cualquier Poisson comp. con BNET(r, β) ($-1 < r < 0$) equivale a una Poisson ponderada por una **Distribución Estable** con índice de estabilidad $-r \in (0, 1)$.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

La clase $C(a,b,1)$

Las distribuciones de la clase $C(a, b, 1)$ la misma recursión pero solo a partir de $n = 1$,

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Todas las distribuciones de $C(a, b, 0)$ sin la cuantía sobre $n = 0$ pertenecen a esta nueva clase. Por tanto podemos hacer dos tipos de operaciones para obtenerlas:

- Truncamiento: quitamos la p_0 y normalizamos (T)
- Modificación: imponemos una p_0 y normalizamos (M)



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de la clase $C(a,b,1)$

Los parámetros a, b quedan iguales, pero podemos cambiar las cuantías en 0

- Poisson, Poisson ZT, Poisson ZM:

$$p_0 = e^{-\lambda}, \quad 0, \quad \text{arbitraria}$$

- Binomial, ZT Binomial, ZM Binomial:

$$p_0 = (1 - q)^m, \quad 0, \quad \text{arbitraria}$$

- BN, ZT BN, ZM BN:

$$p_0 = (1 + \beta)^{-r}, \quad 0, \quad \text{arbitraria}$$

Además también pertenecen la logarítmica o la binomial negativa extendida y truncada, según comprobamos a continuación.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de la clase $C(a,b,1)$

Ejemplo:

➤ Para $m = 1$, tenemos la clase $C(a,b,1)$

Una distribución de $C(a,b,1)$ es la logarítmica $l(q)$, ya que:

$$\forall n \geq 2: \quad \frac{p_n}{p_{n-1}} = q \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{siendo } a = q, \quad b = -q$$

Recordemos que: $p(n) = \frac{q^n}{-n \log(1-q)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

➤ Otro miembro de la clase $C(a,b,1)$ es la BNET:

$$r \in (-1, 0): \quad a = \frac{\beta}{1 + \beta}, \quad b = (r - 1) \frac{\beta}{1 + \beta}$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de la clase $C(a,b,1)$

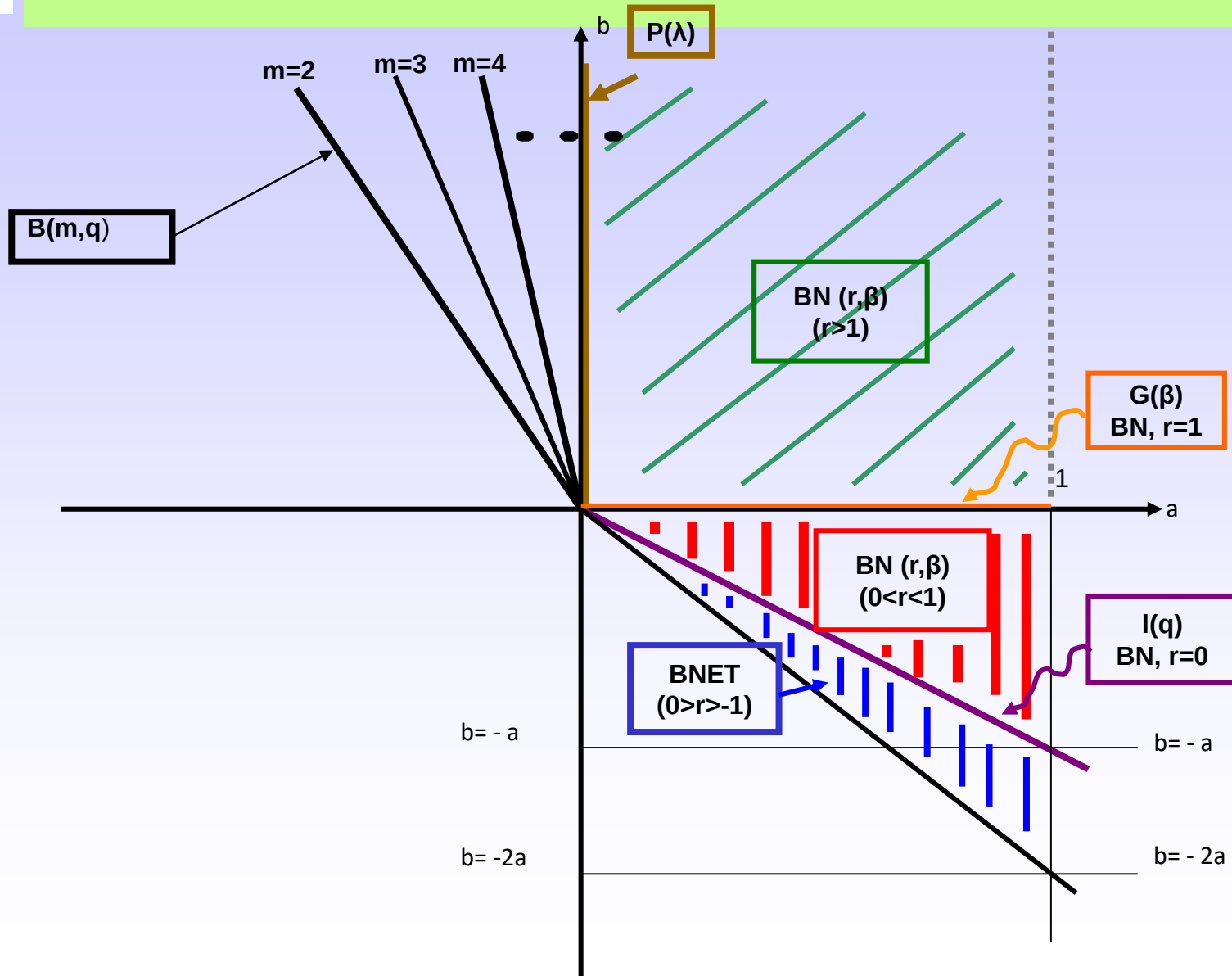
En el siguiente gráfico se identifica el par de constantes (a,b) con un punto del plano.

- De esta forma, cada distribución se representa mediante un punto (a,b)
- Y cada familia paramétrica ocupa una región del plano.
- Algunas regiones corresponden a valores del par (a,b) que no generan distribuciones de probabilidad mediante la recursión que define a las clases $C(a,b)$ dan lugar a p_n 's mayores que 1 o cuya suma es mayor que 1



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de la clase $C(a,b,1)$





2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

Distribuciones de la clase $C(a,b,1)$

Los parámetros a, b quedan iguales, pero podemos cambiar las cuantías en 0

- Poisson, Poisson ZT, Poisson ZM:

$$p_0 = e^{-\lambda}, \quad 0, \quad \text{arbitraria}$$

- Binomial, ZT Binomial, ZM Binomial:

$$p_0 = (1 - q)^m, \quad 0, \quad \text{arbitraria}$$

- BN, ZT BN, ZM BN:

$$p_0 = (1 + \beta)^{-r}, \quad 0, \quad \text{arbitraria}$$

Además también pertenecen la logarítmica o la binomial negativa extendida y truncada, según hemos visto

Los modelos inflados de ceros (ZM), se adaptan al frecuente fenómeno de la altas frecuencias observadas para 0 siniestros.



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros $C(a,b,1)$. Estimación.

Consideramos el caso ZM ya que ZT es una caso particular.

El EMV de la cuantía en 0 es común a todos los modelos

$$\hat{p}_0^M = \frac{n_0}{n}$$

La estimación del resto de parámetros cambia según el modelo ya que las logverosimilitudes son distintas.

En general podemos descomponerla en dos partes

$$l = l_0 + l_1$$

de forma que la 1a depende solo de $\hat{p}_0^M$ y la 2a de a, b .

$$l = l_0 + l_1 = n_0 \log p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \log(1 - p_0^M) + \sum_{k=1}^{\infty} n_k (\log p_k - \log(1 - p_0))$$



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros $C(a,b,1)$. Estimación Poisson ZM

En este caso tenemos:

$$l_1 = -(n - n_0) \left(\lambda + \log(1 - e^{-\lambda}) \right) + n\bar{x} \log \lambda + c$$

siendo:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} kn_k, \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k$$

Derivando respecto del parámetro:

$$\frac{\partial l_1}{\partial \lambda} = -\frac{n - n_0}{1 - e^{-\lambda}} + \frac{n\bar{x}}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} (1 - e^{-\lambda}) = \frac{n - n_0}{n} \lambda$$

Y se resuelve numéricamente resp. de λ :



R Ajuste Poisson
ZM



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros

$C(a,b,1)$. Estimación Binomial ZM

$$l_1 = n\bar{x} \log q + m(n - n_0) \log(1 - q) - n\bar{x} \log(1 - q) - (n - n_0) \log(1 - (1 - q)^m) + c$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial q} = \frac{n\bar{x}}{q} - \frac{m(n - n_0)}{1 - q} + \frac{n\bar{x}}{1 - q} - \frac{(n - n_0)m(1 - q)^{m-1}}{1 - (1 - q)^m} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1 - \hat{p}_0^M}{1 - p_0} mq$$

$$\text{Siendo: } p_0 = (1 - q)^m$$

Incluso si m es conocido, debemos aplicar un procedimiento numérico para aproximar la raíz $\hat{q}$.

Si m es desconocido se puede seguir el método iterativo mencionado anteriormente



2-Distribuciones contadoras para el número de siniestros $C(a,b,1)$. Estimación Binomial Negativa ZM

$$l_1 = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \log p_k - (n - n_0) \log (1 - p_0)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} n_k \log \left[\binom{k+r-1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^k \right] - (n - n_0) \log \left(1 - \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^r \right)$$

Se puede maximizar la segunda línea respecto de (r, β) o la primera respecto de a, b sustituyendo por la relación recursiva de $C(a, b, 1)$.



\R Estimacion
BiNeg ZM



Bibliografía

Para todo lo relativo a modelos del riesgo en seguros consúltense (2) y (3).
Para modelos del número de siniestros también se puede consultar (1)

- (1) Denuit M, Maréchal X, Pitrebois S, Walhin JF (2007): Actuarial modelling of claim counts. John Wiley.
- (2) Klugmann, Panjer, Willmot (1998): *Loss Distributions. From Data to Decisions*. John Wiley.
- (3) Panjer, H.H./ Willmot, G.E. (1992): *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.

Lesson 4: Severity Modelling

Master Degree in Actuarial and Financial Sciences
(MCAF)

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
Universidad Complutense de Madrid

Contents:

- Two data ranges:
 - Low or intermediate range, and
 - Extreme or large claims range.
- Intermediate range modelling: empirical distribution, fitting (frequencies) parametric or semi parametric models, graphical tools also: qq-plots.
- Extremes range modelling:
 - a) Generalized Extreme Value Distribution (GEVD) for max, Generalized Pareto distribution (GPD) for excesses.
 - b) Graphical techniques for threshold estimation.
 - c) Hill estimator for the GPD shape. Also: MLE, Bayes estimation.

Aggregate Loss Models, Claims Severities

- The compound model given one time period:

Claims severities: $X \sim V(z) = P\{X \leq x\} \text{ iid}, \quad V(0) = 0.$

$N \equiv N^\circ$ of claims, independent of time $\sim (p_n)_{n=1}^\infty$
 X, N are i.r.v.

- Then S is the compound rv of the **total loss**:

$$S = \sum_{i=1}^N Z_i, (S = 0 \text{ if } N = 0)$$

- Its DF is a compound one: $F_S(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n V^{*n}(s)$

Scarce versus many sample points

Firstly we should aware on the possibility of large claims. Suppose they can happen.

Then the kind of problems to be solved in each range are different:

- **1st range (intermediate or low): many sample points**
 - ✓ Abundance of sample points allows us trying to fit some parametric model. It will be posible to check the fitting thanks to many sample points: frequencies will be meaningful.
 - ✓ Hypothesis testing like (χ^2 , Kolmogorov--Smirnov, etc).
 - ✓ But we can try also graphical analysis like qq-plots, more appealing as these are visual tools.

Scarce versus many sample points

- **2nd range (large claims):** If we know that claims with high severities might happen we must model this second range.
 - This can be addressed either as the modeling of the maxima of the severity distribution or of its excesses i.e. its **right tail**.
 - We will proceed following the second possibility which is easier.

But: the difficulty is that the **sample will be scarce or even non existent** (may be a large claim did not happen yet in our portfolio of risks)

Then, how could we succeed? Modelling with no sample?!

Scarce versus many sample points

We see an extreme event as a claim with severity exceeding some established threshold. Thus the definition of “extreme event” in that line of business depends on the estimation of this threshold.

Therefore:

- ✓ 1st step: threshold estimation
- ✓ 2nd step: Fit a parametric model to the severities excesses over this threshold. That is to say, to the **severity tail**.
 - ✓ What kind of techniques? Graphical analysis (qq-plots, sample mean excess, Hill plots), parametric models provided by Extreme Value Theory (EVT) (using an **asymptotic** argument and not a frequentist one as in the intermediate section), estimation of the shape parameter.

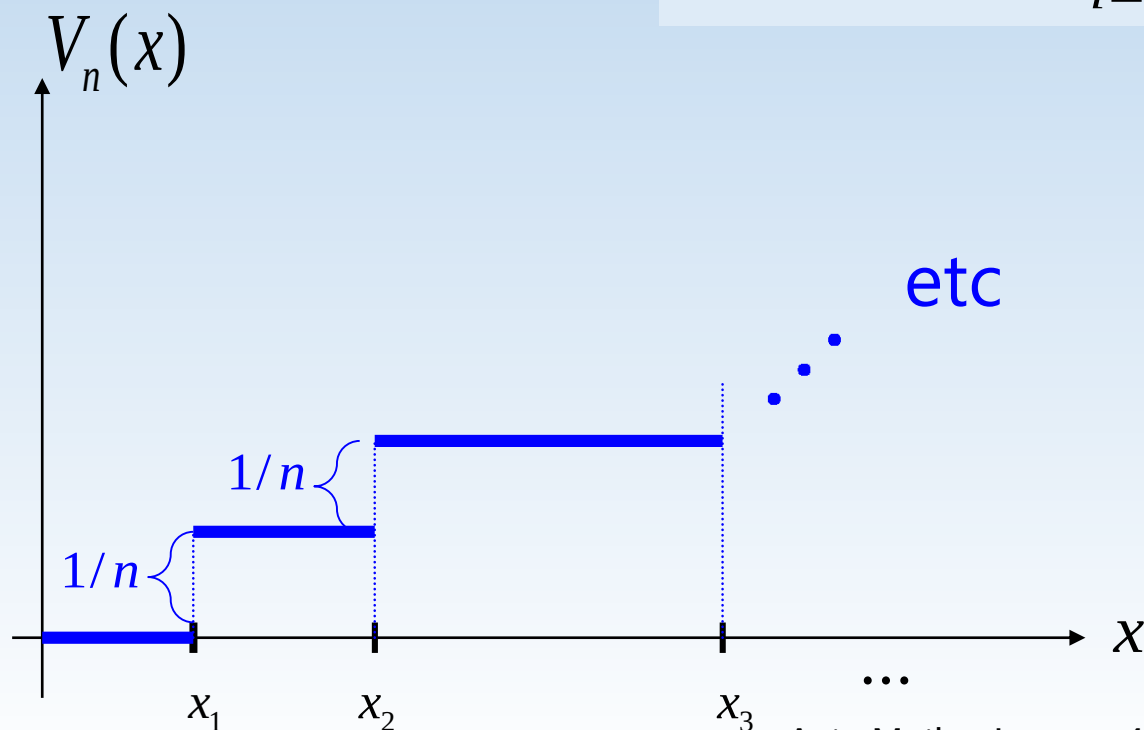
1st range: the empirical distribution function (edf)

We note the sorted sample as: $x_1, \dots, x_n$

Then we use the indicator function: $1_{\{x_i \leq x\}} \equiv \#\{x_i \leq x\}$

To define the edf as:

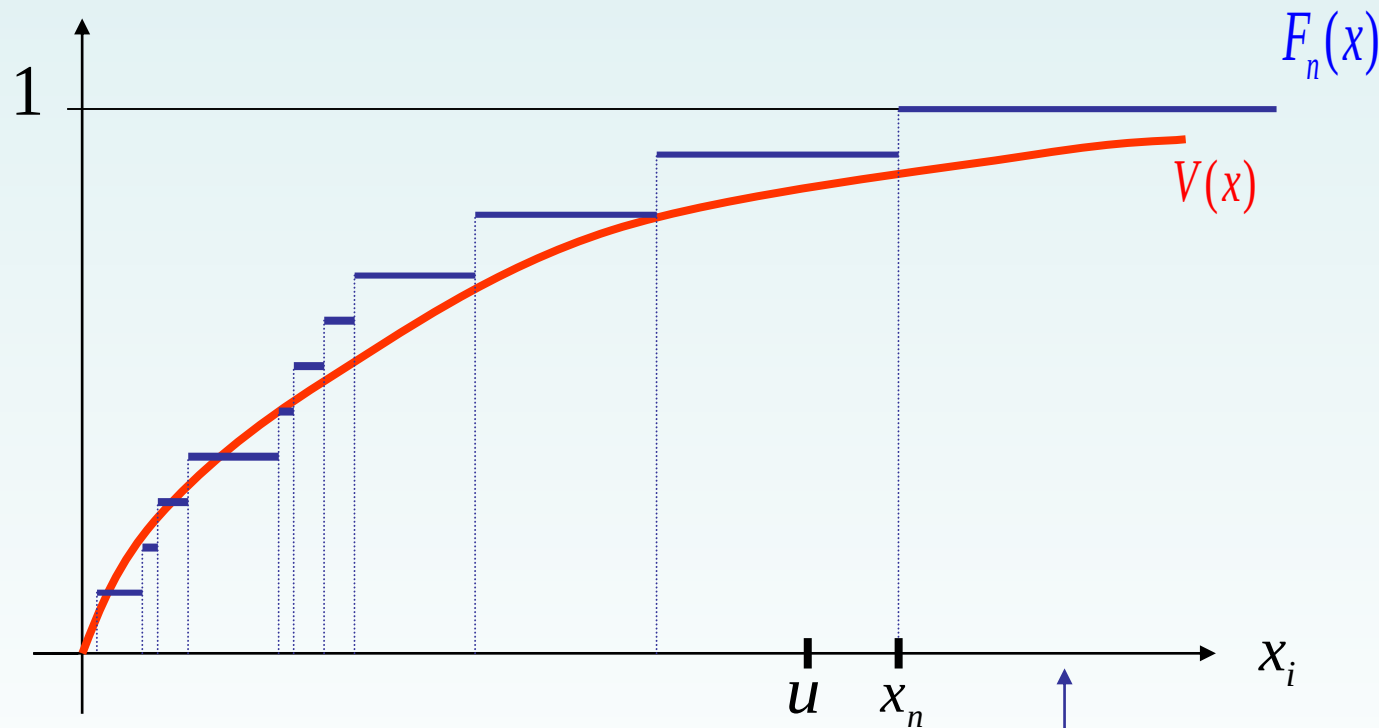
$$V_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \leq x\}}$$



1st range: the empirical distribution function (edf)

The bigger the sample is ($n \rightarrow \infty$), the better the continuous DF V is approximated by the stairs V_n .

But...



...Using the stairs we quickly run out of quantiles

1st range: Kernel density estimator

A kernel is a function K such that:

$$\int K(x)dx = 1, \quad \int xK(x)dx = 0, \quad \sigma_K^2 = \int x^2 K(x)dx > 0$$

Some commonly used kernels:

- Boxcar: $K(x) = \frac{1}{2}I(x)$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

- Gaussian: $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

- Epanechnikov: $K(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)I(x)$

- Tricube: $K(x) = \frac{70}{81}(1-|x|^3)^3 I(x)$ etc.....

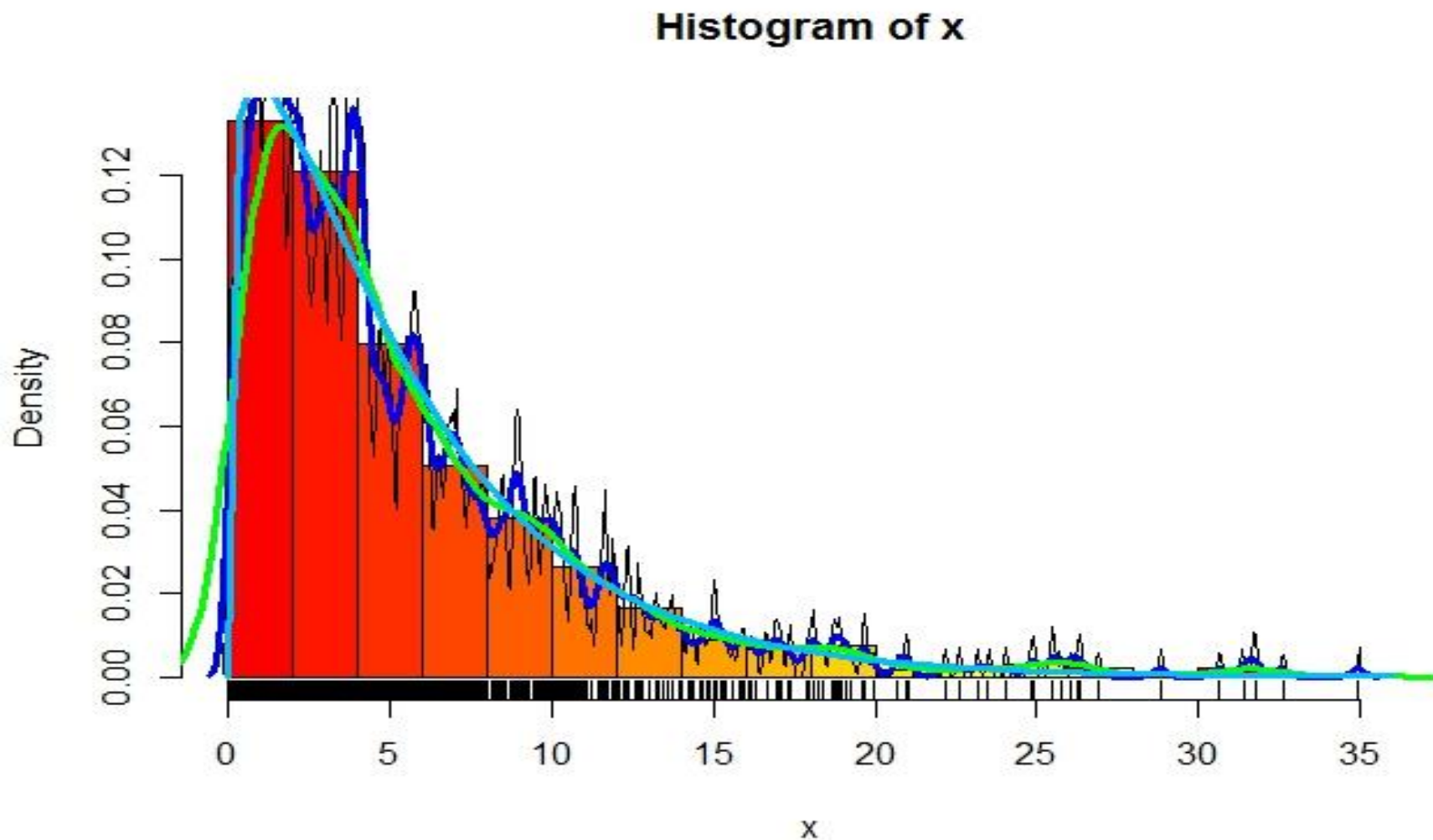


ecdf

Then we get the Kernel Density Estimator, with band width $h > 0$

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)$$

1st range: Kernel density estimator



1st range: the empirical distribution function (edf)

- The edf may be useful here, where many sample points exist, though it will always underestimate the tail of the severity (2nd range) because a sample has only a finite number of points.
 - We need another kind of technique to be applied in the 2nd range, to assess how dangerous the severity distribution might be.
- We can also use the sample to fit a parametric model in the 1st range.

QQ-Plots

We try to detect visually the suitable model for given data (sorted). Suppose there are n sample points:

1. Consider the sample quantiles $Q_n \left(\frac{i}{n} \right) = x_{in}, i = 1, \dots, n$, (or may be some useful function of this quantiles).
2. Probability runs through $[0,1]$ by means of

$$p_{in} = \frac{i}{n+1}, i = 1, \dots, n,$$

(this is how we eliminate the value 1 corresponding to quantile ∞)

3. Consider the quantile function $F^{-1}(x)$, of a parametric model candidate of being responsible of sample:

$$F^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right), i = 1, \dots, n.$$

4. Plot $\left(F^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right), x_{in} \right), i = 1, \dots, n$, then check if these points are more or less aligned.

QQ-Plots

Example for some parametric families:

Exponential(α): $(-\log(1 - p_{in}), x_{in})$

Normal: $(\Phi^{-1}(p_{in}), x_{in})$

lognormal: $(\Phi^{-1}(p_{in}), \log(x_{in}))$

Pareto: $(-\log(1 - p_{in}), \log(x_{in}))$

Weibull: $(\log(-\log(1 - p_{in})), \log(x_{in}))$

Exemples QQ-Plots

Exemples:

- Maple sheet:



M Graficas QQ
plots

- R code:



R qqplots

Generalized Extreme Value Distribution

The DGVE parametric family is given by:

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}}, & \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-x}}, & \xi = 0 \end{cases}, \quad \text{for } x / 1 + \xi x > 0$$

ξ is the shape parameter, key to determine the model.

Three particular cases:

- $\xi > 0$: **Fréchet Distribution.**
- $\xi = 0$: **Gumbel Distribution.**
- $\xi < 0$: **Weibull Distribution**

Including localization and scale parameters μ, σ :

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = H_{\xi}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$



dgev

GEVD as a limit DF for a sequence of maxima of random variables: The Fisher-Tipett Theorem

The Fisher Tipett theorem:

- Describes the asymptotic behavior for the maxima of a sequence of i.i.d. r.v.
- It is to random variables maxima the same as the Central Limit Theorem is for sums of random variables.
- It is the key to one of the two possible approximation to the problem of studying maxima of random variables.

GEVD as a limit DF for a sequence of máxima of random variables: The Fisher-Tipett Theorem

Consider: $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ iid rv $\sim V(x) = P\{X \leq x\}$

Define the r.v.: $M_n = \max(X_1, \dots, X_n), n = 1, 2, 3, \dots$

Suppose there exist localizing b_n and scaling a_n constants such that the sequence of normalized r.v. M_n converges in distribution to a non degenerate distribution:

$$P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x) \text{ non degenerate}$$

Then H is a GEVD H_{ξ} for some ξ (to be estimated).

DGVE: Model classification depending on the tail danger

- We say that the DF $V(x)$ belongs to the Domain of Attraction of the Maximum of H_ξ : $V \in DAM(H_\xi)$
- The DAM classifies the DF $V(x)$ depending on their tail danger (the probability under their right tails):

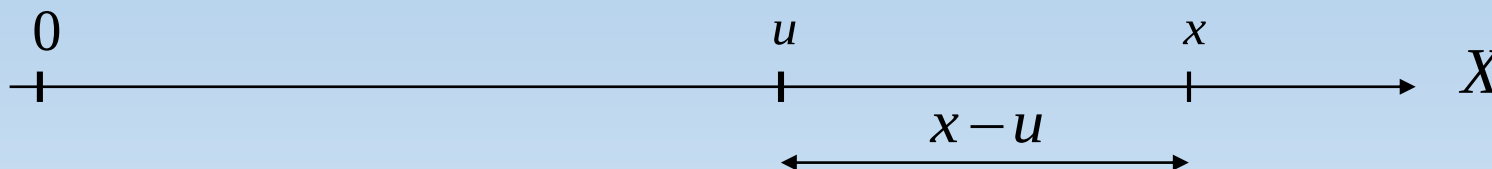
Weibull DAM: $\xi < 0$ Uniform, beta, ... (light tails)

Gumbell DAM: $\xi = 0$ Normal, exponential, gamma, Log-normal. (moderately heavy tails)

Fréchet DAM: $\xi > 0$ Pareto, Cauchy, ... Densities with polynomial decay (heavy tails)

Generalized Pareto Distribution (GPD): Excesses over a threshold

- Given a r.v. X and a threshold $u > 0$, we can define the r.v. excess over the threshold: $(X - u)_+ = \max(X - u, 0)$



- Noting x_0 the right extreme of the support of the DF $V(x)$ (could be ∞), its DF is given by : $Z = (X - u) | X > u$

$$V_u(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X - u \leq z | X > u\} = \frac{V(z + u) - V(u)}{1 - V(u)}, \quad \forall z \in [0, x_0 - u].$$

Generalized Pareto Distribution

- The GPD is a model for the excess r.v. when the threshold turns to be very large. This will be the case of large claims in an insurance portfolio.

$$(\sigma > 0)$$

$$G_{\xi,u,\sigma}(z) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi z}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-z/\sigma}, & \xi = 0 \end{cases}$$

Its support is:

$$\begin{cases} z \geq 0, & \text{when } \xi \geq 0 \\ 0 \leq z \leq -\frac{\sigma}{\xi}, & \text{when } \xi < 0 \end{cases}$$

$\xi > 0$: Reparametrization of Pareto ($\alpha=1/\xi$)

$\xi = 0$: Exponential

$\xi < 0$: Pareto de type II



Dist Pareto
Generalizada

- Do not forget there is a localization parameter u .

$$G_{\xi,u,\sigma}(z), \quad z = x - u > 0$$

GPD as a limit of for the excesses DF: The Pickands-Balkema-de Hann Theorem

If $V \in DAM(H_\xi)$ for some $\xi \in \mathbb{R}$, then the DF of the excess over u , V_u , converges when $u \rightarrow x_0$ to the GPD with the same shape parameter ξ .

Rephrasing:

- For a large enough threshold u , the excess DF V_u can be approximated by a GPD $G_{\xi,\sigma}$, for some values of the parameters ξ, σ that must be estimated

Also:

- For $z = x - u \geq 0$, the DF $V_u(z)$ can be approximated by a GPD:

$$G_{\xi,u,\sigma}(z)$$

DF classification by means of the mean excess function

Given a threshold u the mean excess function (m.e.f.) is

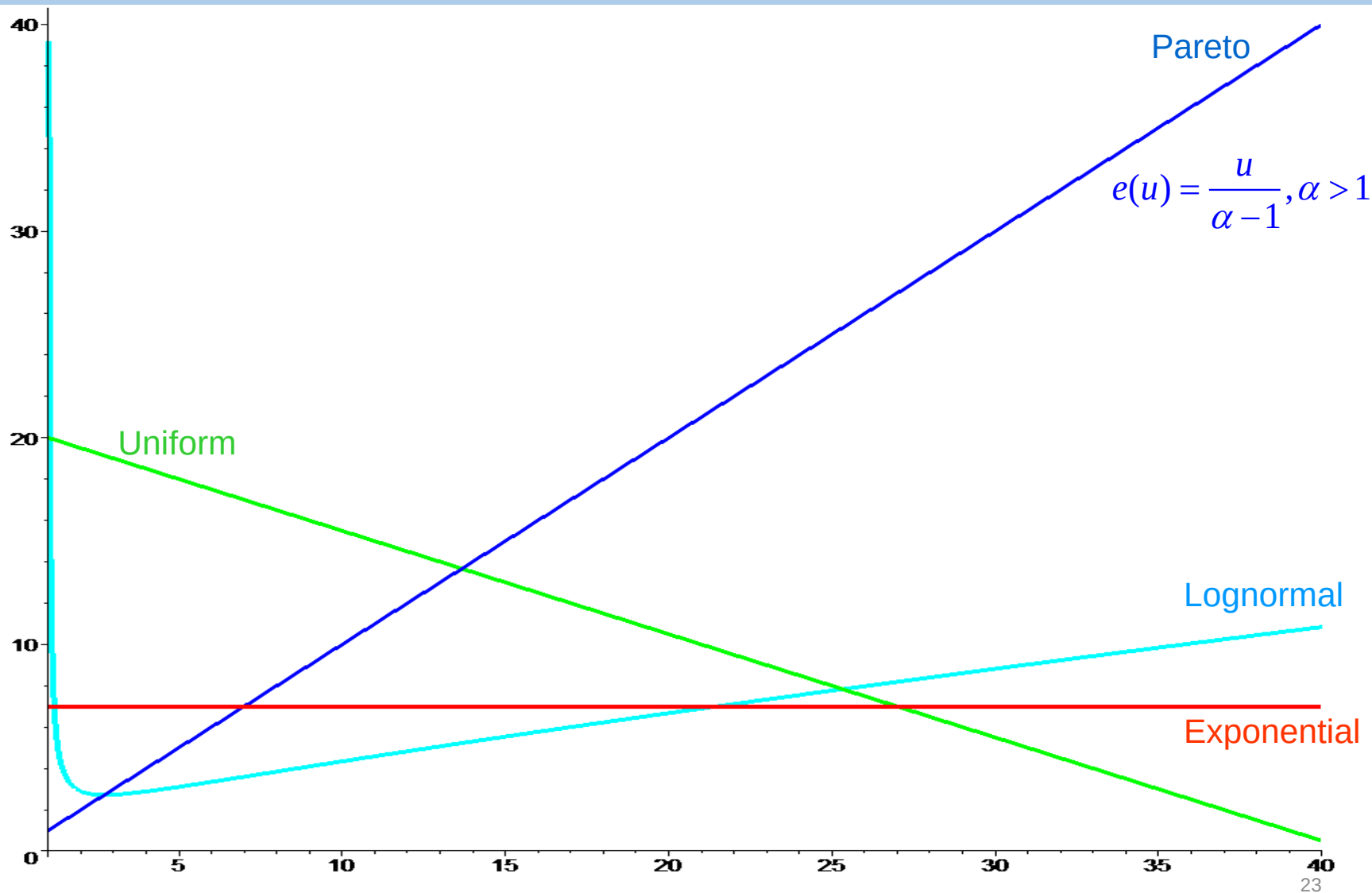
$$e(u) = E(X - u | X > u), \quad (E(X) < \infty)$$

The mef classifies the DF depending on their tail probability:

- Exponential tail: constant mef $X \sim \text{Exp}(\alpha) : e_{\text{exp}}(u) = \frac{1}{\alpha}$
- Sub exponential tail: decreasing mef:
 $U(0,1) : e_{\text{Unif}}(u) = \frac{1}{2}(1-u), (u < 1)$
- Super exponential tail: increasing mef

$$\text{Pareto: } e_{\text{Pareto}}(u) = \frac{u}{\alpha - 1}, \alpha > 1 \quad \text{Lognormal: } e_{\text{LN}}(u) = \frac{u}{\log(u)}$$

DF classification by means of the mean excess function



Graphical techniques: Sample mean excess

Given a sample $x_1, \dots, x_n$:

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i 1_{(u, +\infty)}(x_i)}{\#\{x_i > u\}} - u$$

We can choose as a threshold any of the order statistics then plot the points and look if they follow one of the patterns shown in the precedent figure

$$E_{k,n} : \hat{e}_n(x_{n-k}^*) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{n-j+1}^* - x_{n-k}^* \longrightarrow (x_{n-k}^*, E_{k,n})$$



Funcion de
exceso medio

Or equivalently the thresholds can be forward enumerated:

$$E_{k,n} : \hat{e}_n(x_k^*) = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} x_{k+j}^* - x_k^*$$



Mean excess

Shape parameter ξ estimation. Hill Estimator.

- The shape estimate is key to know in what of the three cases we are. **We assume the Fréchet case.**
- Let us suppose we take as a threshold each of the points x_{n-k}^* from a sorted sample $(x_k^*)_{k=1}^n$.
- The advantage that the Hill estimator for the shape parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ (relationship with the Pareto index) will be the same as the MLE and also to the Bayes estimate with gamma non informative prior.
This is why we will always consider the excesses “anchored” in some sample order statistics.

Shape parameter ξ estimation. Hill Estimator.

If the tail severity was Pareto:

- From a certain threshold x_{n-k}^* the exceedances would be Pareto.
- Thus from that threshold on the logarithm of those exceedances would be exponential: $\log(x_{n-k}^*) \sim \text{Exp}(\alpha)$
- Therefore the qq plot of $\log(x_k^*)$ would be a straight line with slope $1/\alpha$
- Conclusion: Slope estimation $1/\alpha = \hat{\xi}$

We estimate the slope as an arithmetic mean of slopes with respect to the threshold when we let the threshold vary through our sample.

$$\hat{\xi} = H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log(x_{n-j+1}^*) - \log(x_{n-k}^*)$$

$$\hat{\alpha} = \left(H_{k,n} \right)^{-1}$$

Shape parameter ξ estimation. Hill Estimator.

$$\hat{\xi} = H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log(x_{n-j+1}^*) - \log(x_{n-k}^*) \quad \hat{\alpha} = (H_{k,n})^{-1}$$

For large thresholds (i.e. small k) we expect to find Hill estimate at the same level (or altitude) more or less. This is very useful for estimating the threshold value. But mind that:

- For very small k , the variance of the Hill estimator is very high
 - For big k , the bias of the Hill estimator is very high.
- Therefore there is a trade off between Hill bias and variance.

Shape parameter ξ estimation. Hill, MLE and Bayes Estimators.

Once we have estimated a threshold $\hat{u}$ we can alternatively try:

- Set the Hill estimator for the shape parameter and estimate $\hat{\sigma} = \hat{u}$
- With the estimated threshold, calculate the MLE estimates for $\hat{\xi}, \hat{\sigma}$. The log-likelihood is:

$$l((\xi, \beta); z_1, \dots, z_n) = -n \log(\beta) - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{\xi}{\beta} z_i \right)$$

- This can be solved numerically to obtain the MLE estimates $\hat{\xi}_n, \hat{\sigma}_n$. Also asymptotically:



$$n^{1/2} \left(\xi_n - \xi, \frac{\beta_n}{\beta} - 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \Sigma) \quad \text{with} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 + \xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Shape parameter ξ estimation. Hill, MLE and Bayes Estimators.

It is finally possible to calculate the Bayes estimate by means of some conjugate scheme. For instance:

Gamma $\longrightarrow$ GPD $\longrightarrow$ Gamma

In this case we can choose a non informative-improper prior

$$\pi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

Then we get the posterior for the Pareto index:

$$G\left(n, \sum_{i=1}^n \log(1+z_i)\right)$$

Then the Bayes estimator will be equal to the MLE (given a sigma-scale fixed to the estimated threshold).

ISSUES in the modelling process.

There is a rather serious issue flying over all that has been explained:

The scarce information , very few number of sample excesses

This will make impossible the threshold estimation and all the subsequent calculations.

This is particularly true when we face the modelling process with the information coming from a single portfolio.

BUT:

The larger is our information on the business line (to the “market” limit) the better is our position for modelling the severities and executing the subsequent calculations: pricing, capital reserving etc...

ISSUES in the modelling process.

Bayesian inference can be combined in the number of excesses and excesses to produce a whole estimation procedure to get the total loss distributions for the collective (set of portfolios) and for each of the individual portfolios contributing to the whole sample.

This is thanks to the fact that the same priors work well in conjugate schemes either in Poisson (number of excesses) and pareto (excesses) distributions.

As a result we can calculate XL premiums either in the collective and individual (portfolios cases).

An example.

Sample:

- 10 Spanish liability motor insurance portfolios.
- 395 claims greater than 25 millions pesetas from year 1992 to year 2001
- $1\text{€} = 166.386 \text{ Pts}$, $150,253.02 \text{ €} = 25 \text{ Millions Pts}$

Claims were deflated to year 2001

We achieve our bayesian estimation process using the Generalized Inverse Gaussian (GIG) family which Works fine as conjugate scheme for both number of excesses and excesses.

It also contains many parametric subfamilies where we can find many Bayes estimates.

An example.

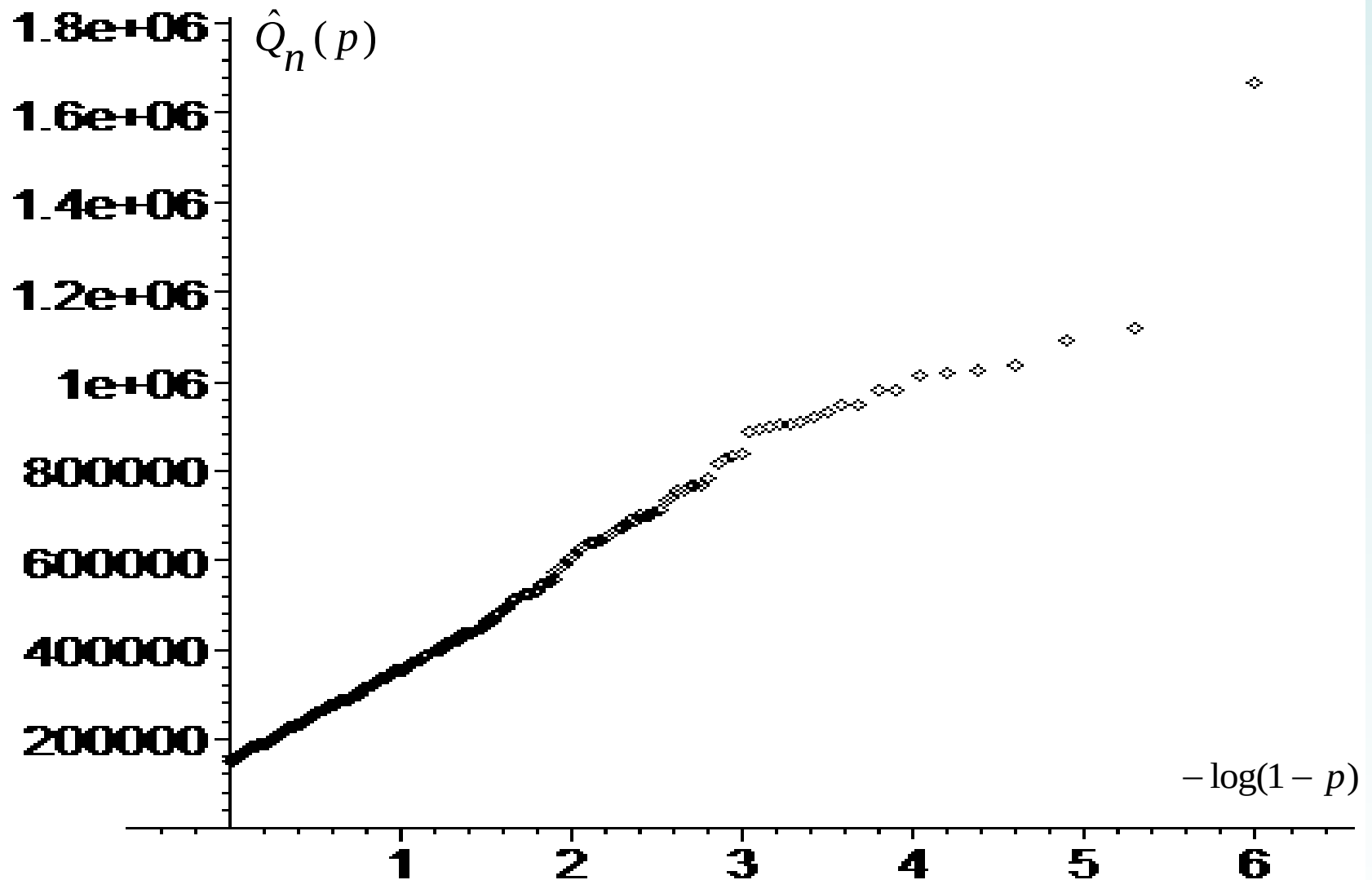


Figure 1: Exponential QQ-plot for the 395 claim data.

An example.

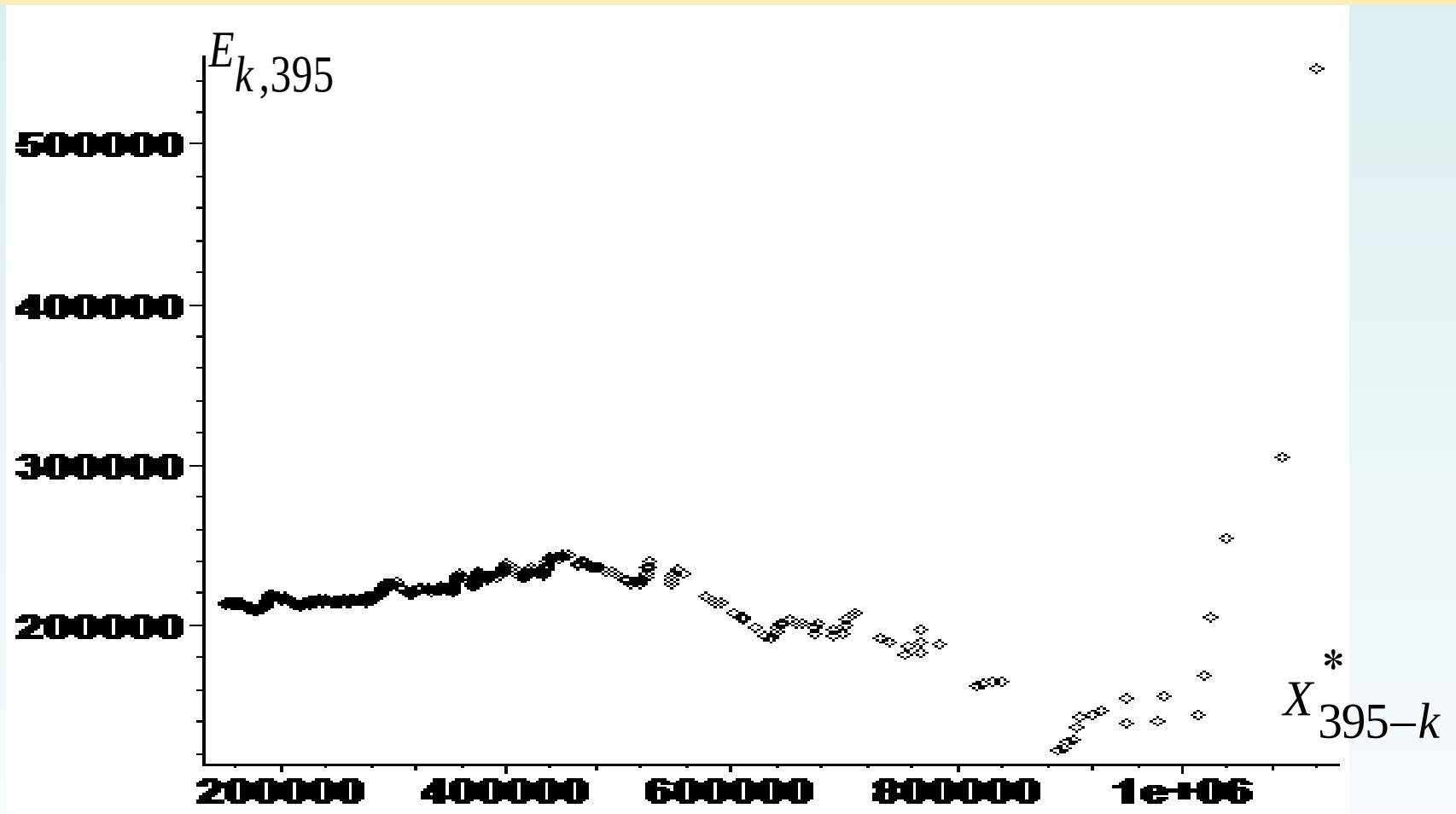


Figure 2: Abscissas: ordered sample. Ordinates: sample mean excesses $E_{k,395}$, $k = 1, \dots, 394$. The lowest point is attained at $k=18$ with a size of 888,310.66 €

An example.

- Figure 2 allows us choosing as the threshold $X_{395-18}^* = 888,310.66 \text{ €}$ this value being the one where the mean excesses begin to increase.
- We adjust by least squares a straight line to the first 377 data, obtaining:

$$y = 218969.1049 x + 150253.0261$$

The linear correlation coefficient is $.99753753$

An example.

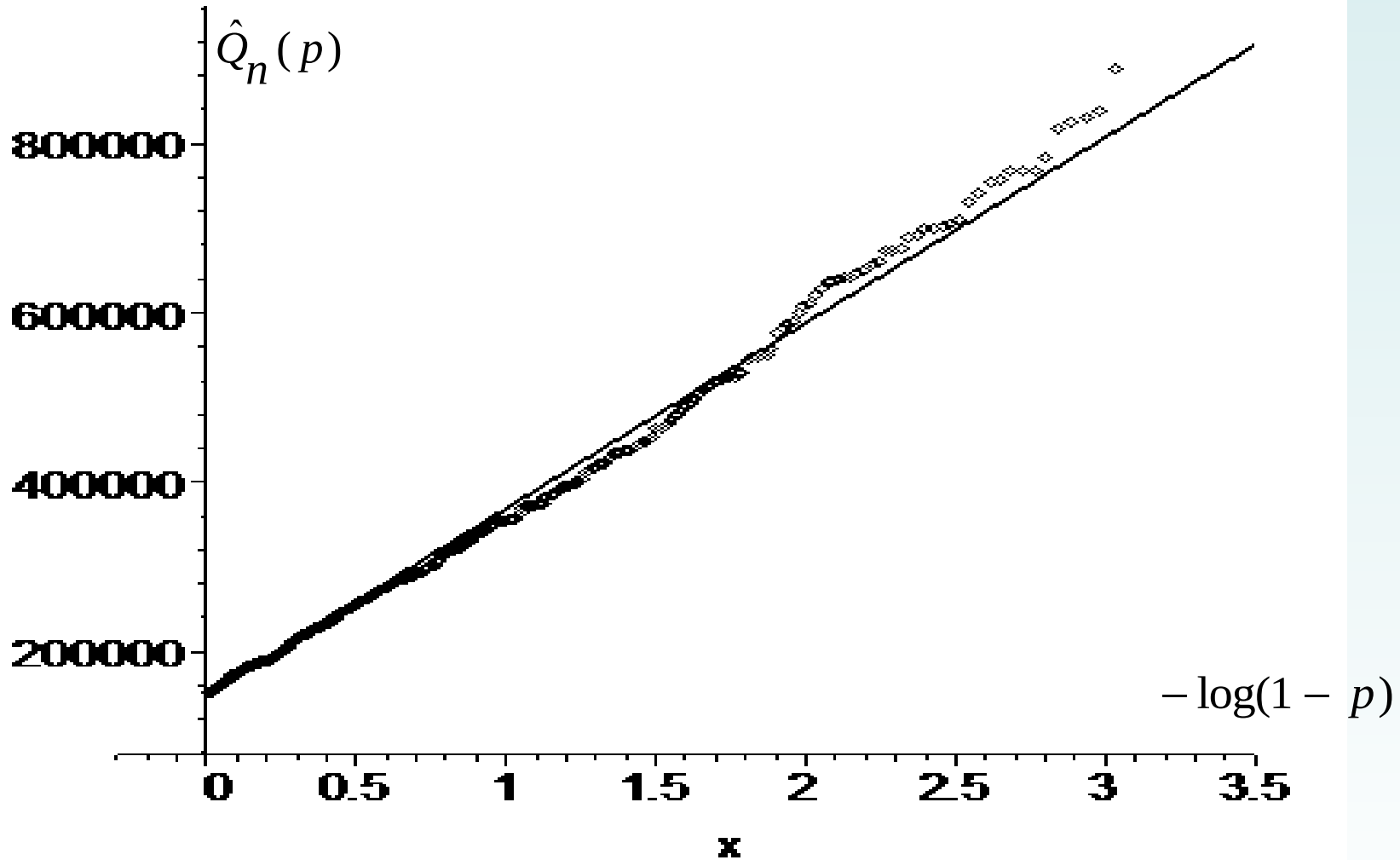


Figure 3: Line adjusted by least squares to the QQ-plot of the first 377 data.

An example.

- Severity distribution between 150,253.0261 € and 888,310.6632 €:
shifted and truncated exponential distribution with estimated parameter $\hat{\theta} = .4566854308e - 5$
$$v(x) = \hat{\theta} \exp\{-\hat{\theta} (x - 150253.0261)\}$$
- Cumulated probability in the interval $[150253.0261, 888310.6632]$
 $.9656310486$
- Tail probability $p^u = P\{X > 888310.6632\} = .0343689514$

About 3.5% of the claim severities greater than 150,253.02 € will be above the threshold

Large Claims sample

	A	C	E	F	H
1992	949,459		1,667,634		
1993	905,909		1,119,830		
1994		1,014,673			
1995			978,507		949,494
1996	1,018,229				888,310 929,092
1997		894,461	903,656 1,088,642		1,038,262
1998			908,713 1,023,955	898,126	
1999		918,619			
2000		982,315			
2001					

Table 1: The eighteen claims rounded to the nearest unit, over the threshold $X_{377}^* = 888,310.66 \text{ €}$ (last column in bold characters), grouped by portfolios (columns A, C, E, F, H) and years (rows 1992, ..., 2001). No claim above the threshold was communicated either in the other six insurance companies or in year 2001.

Hill estimates

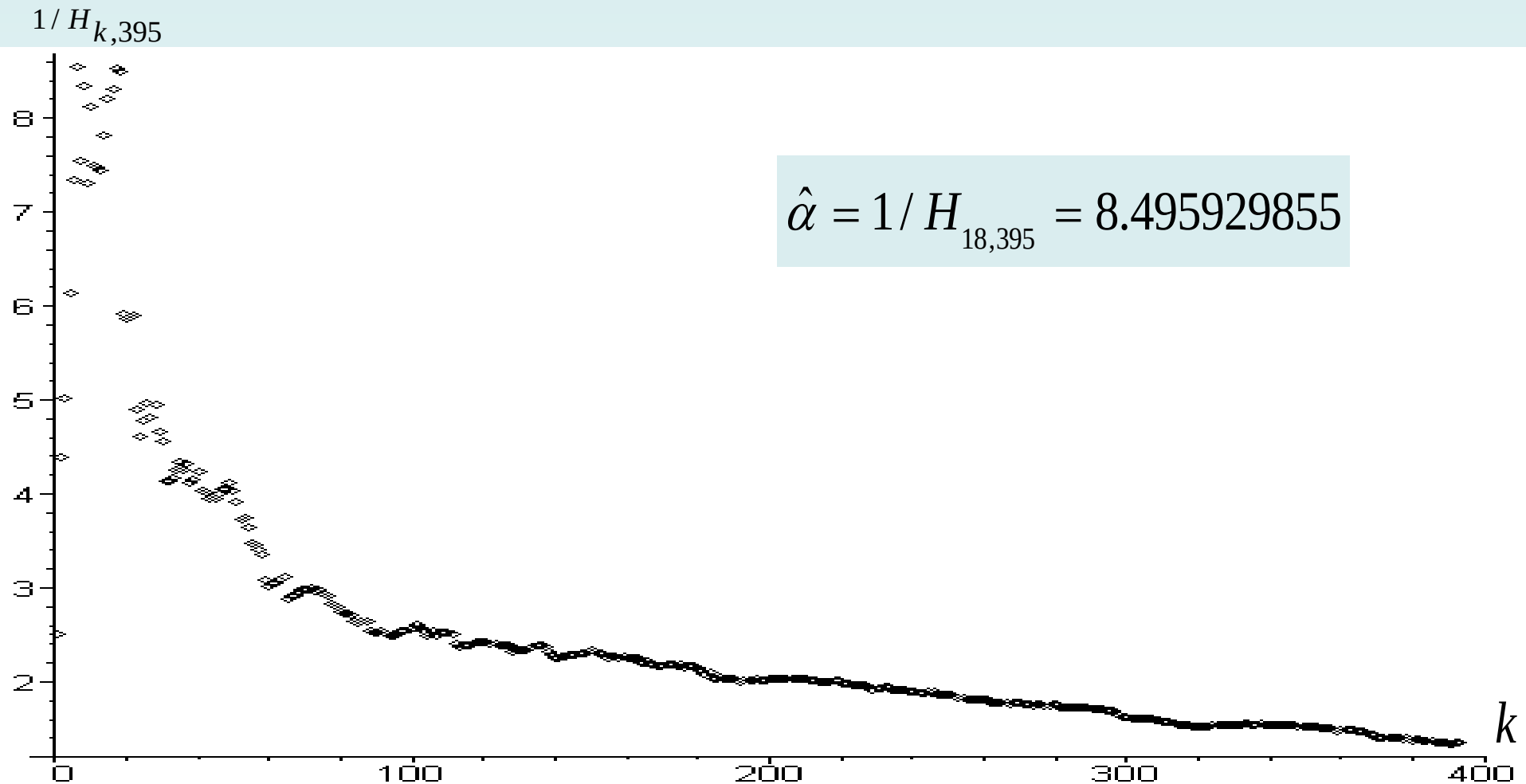


Figure 4: Inverses of the Hill estimates corresponding to the number of excesses $k = 1, \dots, 395$. These could be considered as well as the MLE in case of a previously fixed threshold $u = X_{395-18}^* = 888,310.6632$

Aggregate Loss Models

- The compound model:
Excesses over u : $Z = \frac{(X - u)}{u} \sim F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$ iid

$N^u \equiv N^o$ of excesses over the threshold u independent with Z ,
indep. of time $\sim (p_n)_{n=1}^{\infty}$

- Then S is the compound rv of the large losses:

$$S = \sum_{i=1}^{N^u} Z_i, (S = 0 \text{ if } N^u = 0)$$

- Its DF is a compound one:

$$F_S(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n V_Z^{*n}(s)$$

Bayesian analysis of compound distributions

Primary as well as the secondary rv can be modeled considering random parameters (Bayes).

How can we consider both effects at once?

We assume:

$$\Lambda > 0(a.s.) \sim U(\lambda) / \frac{dU}{d\lambda} = u(\lambda)$$

N_i number of claims in different years **conditionally independent given Λ** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0 : P\{N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k | \Lambda\} = \prod_{i=1}^k P\{N_i = n_i | \Lambda\} \quad (a.s.)$$

and **conditionally Poisson distributed**

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : P\{N_i = n | \Lambda\} = \frac{(\Lambda)^n}{n!} e^{-\Lambda} \quad (a.s.)$$

Therefore:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : p_n = \Pr\{N_i = n\} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u(\lambda) d\lambda$$

Bayesian analysis of compound distributions

$$A > 0(a.s.) \sim \Pi(\alpha) / \frac{d\Pi}{d\alpha} = \pi(\alpha)$$

X_i conditionally independent given A:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n | A\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i \leq x_i | A\} \quad (a.s.)$$

and conditionally Pareto distributed:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall x > 0 : P\{X_i \leq x | A\} = 1 - \frac{1}{(1+x)^A} \quad (a.s.)$$

Therefore:
$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} \pi(\alpha) d\alpha$$

Finally we assume **independence between**

$$(N_1, \dots, N_k, \Lambda) \quad \text{and} \quad (X_1, \dots, X_n, A), \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$

This allows us writing the joint prior.....

Bayesian analysis of compound distributions (3)

- Prior joint density for (Λ, A) $w(\lambda, \alpha) = u(\lambda)\pi(\alpha)$
- Posterior: given observed samples during k years

$$n = \sum_{i=1}^k n_i, \quad (x_1, \dots, x_n)$$

$$w(\lambda, \alpha | n_1, \dots, n_k; x_1, \dots, x_n) = u(\lambda | n_1, \dots, n_k) \pi(\alpha | x_1, \dots, x_n)$$

where $u(\lambda | n_1, \dots, n_k) \propto \Pr\{N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k | \Lambda = \lambda\} u(\lambda)$

$$\pi(\alpha | x_1, \dots, x_n) \propto \underbrace{g(x_1, \dots, x_n | A = \alpha)}_{\text{Pareto likelihood}} \pi(\alpha)$$

Pareto likelihood

- Remember the GIG family is closed under both Poisson and Pareto samplings

Bayesian estimates: $\hat{\lambda}, \hat{\alpha}$

- Considering the squared error as a loss function, the Bayes estimates are the posterior means:

$$\lambda(n_1, \dots, n_k) = E\{\Lambda | N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k\} = \int_0^{+\infty} \lambda u(\lambda | n_1, \dots, n_k) d\lambda$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = E\{A | x_1, \dots, x_n\} = \int_0^{+\infty} \alpha \pi(\alpha | x_1, \dots, x_n) d\alpha$$

- We can also get the mean of the compound r.v.

(XL pure premium):

$$\begin{aligned} P(n_1, \dots, n_k; x_1, \dots, x_n) &= E\{S | \Lambda = \lambda(n_1, \dots, n_k), A = \alpha(x_1, \dots, x_n)\} \\ &= E\{N | \Lambda = \lambda(n_1, \dots, n_k)\} E\{X | A = \alpha(x_1, \dots, x_n)\} \\ &= \frac{\lambda(n_1, \dots, n_k)}{\alpha(x_1, \dots, x_n) - 1} \end{aligned}$$

The Generalized Inverse Gaussian distribution

Mixing Poisson or Pareto with the **Generalized Inverse Gaussian (GIG)**

$$u_{\beta, \chi, \psi}(\lambda) = \frac{(\psi / \chi)^{\beta/2}}{2K_{\beta}(\sqrt{\chi\psi})} \lambda^{\beta-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\chi}{\lambda} + \psi\lambda\right)}, \lambda > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \chi, \psi > 0$$

$$K_{\beta}(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^{\beta-1} e^{-\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{y} + y\right)} dy, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \omega > 0 \text{ is a Bessel function of the third kind}$$

• The central moments and variance of the GIG are

$$E\{\Lambda^j\} = \left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{j/2} \frac{K_{\beta+j}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\beta}(\sqrt{\chi\psi})}, \quad \chi\psi > 0, \quad j \in \mathbb{R} \quad \text{Var}\{\Lambda\} = \frac{\chi}{\psi} \left[\frac{K_{\beta+2}(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\beta}(\sqrt{\chi\psi})} - \frac{K_{\beta+1}^2(\sqrt{\chi\psi})}{K_{\beta}^2(\sqrt{\chi\psi})} \right], \quad \chi\psi > 0$$

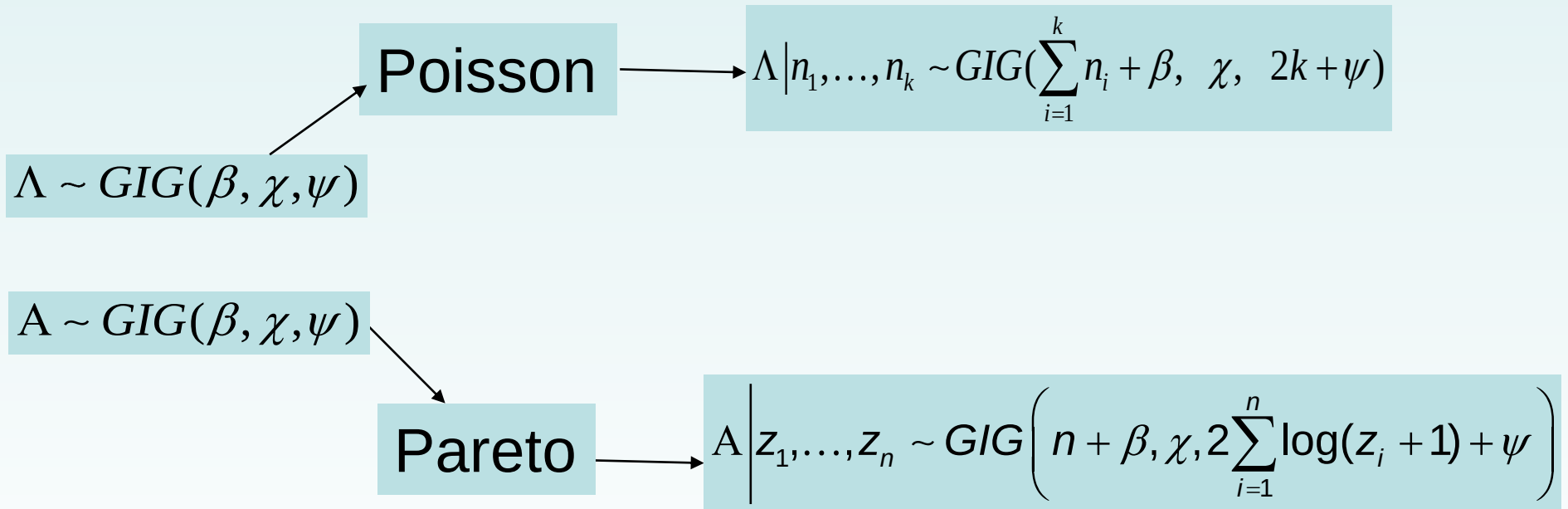
GIG contains many subfamilies: Gamma, Reciprocal Gamma, Inverse Gaussian, Reciprocal Inverse Gaussian...

This is useful for modelling the prior knowledge on the parameter.

The Generalized Inverse Gaussian distribution

- The GIG family is closed under Poisson and Pareto samplings:

$(n_1, \dots, n_k)$ observed number of claims occurred during k years



Given samples and a prior knowledge we can estimate the parameters through their posterior means.

Bayesian estimation: collective case

	Reciprocal gamma	Gamma reference	Inverse Gaussian	Rec. inverse Gaussian	Gamma
95% Prob. interval	(4.5 , 11.88)	(3.94 , 12.09)	(2.52 , 6.49)	(2.54 , 6.43)	(2.92 , 5.64)
μ	7.714613	8.495929	4.736500	4.707062	4.435569
σ	1.888458	2.002509	0.975273	0.959308	0.822091
σ / μ	0.244789	0.235702	0.205905	0.203802	0.185340
γ	0.499636	0.471404	0.464210	0.464210	0.370681

Table 2: The collective Pareto index. Rows: a 95% probability α -interval, posterior mean, standard deviation, coefficient of variation and skewness. Columns: successive priors are chosen as reciprocal gamma (mean=2.5, standard deviation= ∞), gamma reference, inverse Gaussian (mean=2.5, coefficient variation=0.3), reciprocal inverse Gaussian (mean=2.5, coefficient variation =0.3), and gamma (mean=2.5, coefficient variation =0.3).

Bayesian estimation: individual case, vague or no prior information

Portf	α Prior	95% Prob. Interval	μ	σ	σ / μ	γ
A	Rec. gamma	(1 , 17.70)	7.070347	4.973582	0.703442	1.690130
	Gamma ref.	(1 , 28.46)	13.47173 3	7.777909	0.577350	1.154700
E	Rec. gamma	(1 , 7.38)	4.238813	1.680509	0.396457	0.873800
	Gamma ref.	(1 , 8.82)	5.210403	1.969347	0.377964	0.755928
H	Rec. gamma	(1 , 15.33)	6.137050	4.191834	0.680374	1.659250
	Gamma ref.	(1 , 23.81)	11.21588	6.475493	0.577350	1.154700

Table 3: The Posterior individual Pareto indexes. Rows: for each portfolio (A,E,H) we consider the cases of vague (reciprocal gamma with mean=2.5 and standard deviation= ∞) and no prior knowledge (gamma reference). Columns: a 95% probability α -interval, posterior mean, standard deviation, coefficient of variation and skewness.

Bayesian estimation: individual case, prior information available

Portf	α Prior	95% Prob. Interval	μ	σ	σ / μ	γ
A	Gamma	(1.46 , 4.14)	3.023507	0.804878	0.266206	0.532413
	Inverse Gaussian	(0.76 , 4.65)	3.045151	0.875818	0.287610	0.793319
	Rec. inverse Gaussian	(0.80 , 4.63)	3.043348	0.869265	0.285622	0.766482
E	Gamma	(1.73 , 4.17)	3.129127	0.735276	0.234978	0.469956
	Inverse Gaussian	(1.20 , 4.57)	3.143024	0.792164	0.252038	0.647198
	Rec. inverse Gaussian	(1.23 , 4.56)	3.142330	0.787341	0.250559	0.629559
H	Gamma	(1.45 , 4.10)	2.994767	0.797227	0.266206	0.532413
	Inverse Gaussian	(0.77 , 4.59)	3.011321	0.862422	0.286393	0.790522
	Rec. inverse Gaussian	(0.80 , 4.57)	3.010001	0.856504	0.284552	0.764241

Table 4: The individual Pareto indexes with some prior knowledge. Columns: a 95% probability α -interval, posterior mean, standard deviation, coefficient of variation and skewness. Rows: portfolios A, E, H, with priors gamma, inverse Gaussian and reciprocal inverse Gaussian. All these considered with mean 2.5 and coefficient of variation 0.3.

Example: plots for posterior α densities

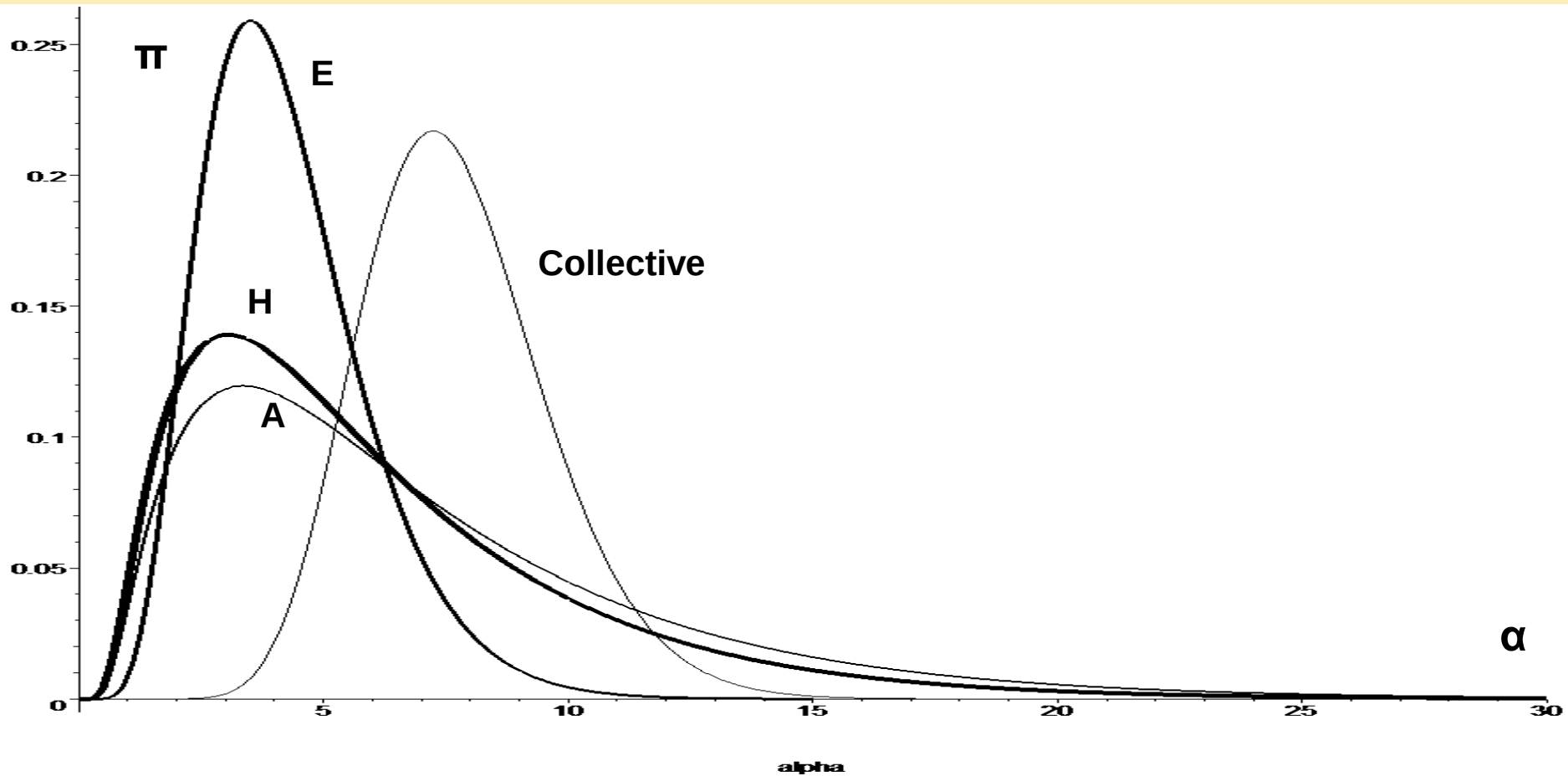


Figure 5: Posterior A-densities when the prior is a reciprocal gamma: portfolios A, H, E and the collective.

Λ -posterior densities

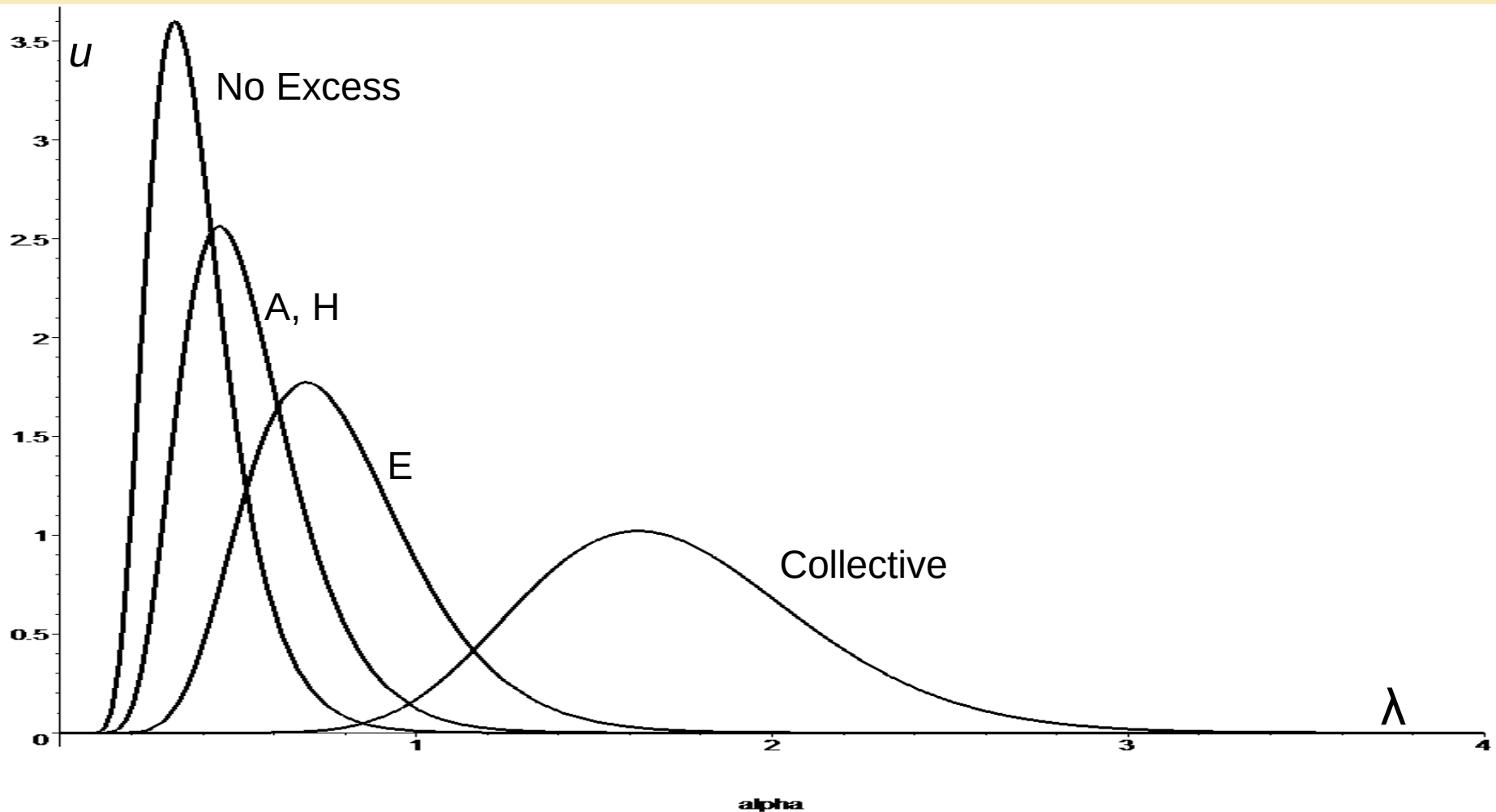


Figure 7: Posterior Λ -densities for each portfolio and the collective

Net premiums, portfolios Expected Shortfalls, vague or no prior information case

Portfolio	Posterior λ	95% Prob. Interval	XL Premium	E.SF. 50% level	α Prior distribution
Collective	1.722697	(0.80 , 2.44)	7,833	14,223	Reciprocal gamma
			7,016	12,713	Gamma reference
A	0.524104	(0.04 , 0.84)	2,636	5,192	Reciprocal gamma
			1,283	2,530	Gamma reference
E	0.781445	(0.15 , 1.22)	7,366	14,387	Reciprocal gamma
			5,666	11,372	Gamma reference
H	0.524104	(0.04 , 0.84)	3,115	6,244	Reciprocal gamma
			1,566	3,145	Gamma reference
No excess	0.381603	(0.01 , 0.61)	1,735	3,458	Reciprocal gamma
			1,554	3,121	Gamma reference

Table 5: Reinsurance premiums rounded to the nearest unit (fourth column). vague or no prior information case

Net premiums, portfolios Expected Shortfalls, prior information case

Portfolio	α Prior distribution	E.SF. 50% level	XL Premium
Collective	Gamma	28,204	15,309
	Inverse Gaussian	25,765	14,076
	Reciprocal inverse Gaussian	25,771	14,188
A	Gamma	15,829	7,908
	Inverse Gaussian	15,666	7,824
	Reciprocal inverse Gaussian	15,659	7,830
E	Gamma	22,486	11,205
	Inverse Gaussian	22,182	11,133
	Reciprocal inverse Gaussian	22,748	11,136
H	Gamma	16,329	8,022
	Inverse Gaussian	15,836	7,955
	Reciprocal inverse Gaussian	15,920	7,961
No excess	Gamma	6,729	3,391
	Inverse Gaussian	6,140	3,118
	Reciprocal inverse Gaussian	6,387	3,143

Table 6: Reinsurance premiums rounded to the nearest unit (fourth column). precise prior information case

Bibliography

- (1) Beirlant J., Teugels J., Vynckier P. (1996): *Practical Analysis of Extreme Values*. Leuven University Press.
- (2) Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1999) Modelling of Extremal Events for insurance and finance. Springer.
- (3) Klugmann, Panjer, Willmot (1998): *Loss Distributions. From Data to Decisions*. John Wiley.
- (4) Panjer, H.H./ Willmot, G.E. (1992): *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.
- (5) Reiss R.D, Thomas M. (2001): *Statistical analysis of Extreme Values*. Birkhauser.
- (6) Vilar J.L, Lozano C. (2007): On Pareto conjugate priors and their application to large claims reinsurance premium calculation. *Astin Bulletin*, 37(2), 405-428.
- (7) Wasserman L. (2006): *All of non parametric Statistics*. Springer texts in Statistics.



LECCIÓN 5

Distribuciones Compuestas para el Daño Total: Aproximaciones, Simulación y Cálculo Numérico

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



Índice de la lección 5

- 1- El cálculo de probabilidades con una distribución compuesta: dificultades y desafíos.
- 2-El cálculo de las cuantías de una compuesta en el caso de una secundaria discreta: aplicación de las transformadas (fgp y fgm).
- 3-Aproximaciones Normal y Normal-Power.
- 4-Simulación de distribuciones compuestas.
- 5- Formulas recursivas para el cálculo efectivo de las probabilidades de una distribución compuesta: algoritmo de Panjer.
- 6-Bibliografía



1-Cálculo de probabilidades con una compuesta

$$P\{S \leq s\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k V^{*k}(s) = F(s)$$

Dificultades para calcular esta probabilidad:

- (1) El ajuste de las distribuciones no siempre se consigue.
- (2) El cálculo de las convoluciones $V^{*k}(s)$ es un desafío numérico formidable.
- (3) La suma infinita es difícil de tratar: ¿Dónde truncarla?



1-Cálculo de probabilidades de una compuesta

Estrategias para resolver el problema del cálculo de las probabilidades de una compuesta

Dependiendo de nuestro nivel de información (¿conocemos la primaria y la secundaria?) podemos:

(1) Si no disponemos de información:

Aproximar $F(s)$ por otra distribución conocida y de fácil manejo

- Distribución Normal (Teorema Central del Límite)
- Distribución Normal-Power (N.P.)

(2) Si disponemos de información:

- * Simular una muestra de la compuesta y trabajar con la distribución muestral que aproxima a la auténtica distribución compuesta.
- * Intentar el cálculo numérico del valor exacto mediante el algoritmo recursivo de Panjer y algún método de aritmetización de la distribución secundaria
- * No olvidemos el método de la transformada de una compuesta (fgp, fgm, véase lección 2):
 - Permite el cálculo de las cuantías en el caso de una secundaria aritmética
 - Permite el cálculo de las características de la compuesta (media, varianza, etc) en cualquier caso.



2-Cálculo de probabilidades de una compuesta

El caso de la secundaria discreta (aritmética): uso de las transformadas

- Según vimos en la **lección 2**, para un daño total $S = \sum_{i=0}^N X_i$ compuesto con variable primaria N (nº de siniestros) y variable secundaria X (cuantías de los siniestros), su transformada verifica la siguiente regla de composición de transformadas:
 - Fgp: $P_S(z) = P_N(P_X(z))$
 - Fgm: $M_S(z) = P_N(M_X(z))$
- Esto permite calcular las cuantías (fgp) y las características (fgm) del daño total S .



3-Aproximaciones

Aproximación normal: el Teorema Central del Límite

Esta se basa en el Teorema Central del Límite:

$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ v.a.i.i.d. con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$.

Consideremos las va $S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n \leq s\} = \Phi(s) \sim N(0,1)$$



3-Aproximaciones

Aproximación normal: el Teorema Central del Límite

- Nuestro modelo general de un riesgo, o masa de riesgos (p.ej. una cartera):

$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ va iid (cuantías del i-esimo siniestro de la cartera)

N va discreta, independiente de X (nº de siniestros)

$$S = \sum_{i=0}^N X_i \quad (S = 0, N = 0) \quad P\{S \leq s\} = F(s) \text{ (FD compuesta)}$$

Cuando la masa de riesgos es grande podemos esperar que el número de siniestros provocada por esta sea muy alto, de manera

que la va N se realizará en un número n muy elevado.

Este n elevado nos debería garantizar una buena aproximación Normal en un entorno de la media de la distribución compuesta.



3-Aproximaciones

Aproximación normal: el Teorema Central del Límite

1. Tipificamos la variable dañado total S :

$$\bar{S} = \frac{S - E\{S\}}{\sigma\{S\}}$$

2. Calculamos la aproximación normal:

$$P\{\bar{S} \leq \bar{s}\} \approx N(\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{s}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$1 - \varepsilon = P\{N(0,1) \leq z_\varepsilon\}$ $1 - \varepsilon = P\{S \leq y_\varepsilon\}$

Cálculo de un cuantil de la compuesta

$$y_\varepsilon \approx \sigma\{S\} z_\varepsilon + E\{S\}$$

Pero hay grandes inconvenientes...



3-Aproximaciones

Aproximación normal: el Teorema Central del Límite

En la siguiente hoja de maple se utiliza la aproximación normal



Maple 8
Worksheet File

También podemos encontrar la aproximación normal dentro del paquete de R actuar, como una opción dentro de la función **aggregateDist()**.



3-Aproximaciones

Aproximación normal: el Teorema Central del Límite

La distribución normal es simétrica ($\gamma=0$). Cuanto más grande sea el coeficiente de asimetría de F , peor será la aproximación, ya que subestimaré la cola de F .

Esto podría suceder por ejemplo con carteras pequeñas en donde la va N se realiza en valores bajos.

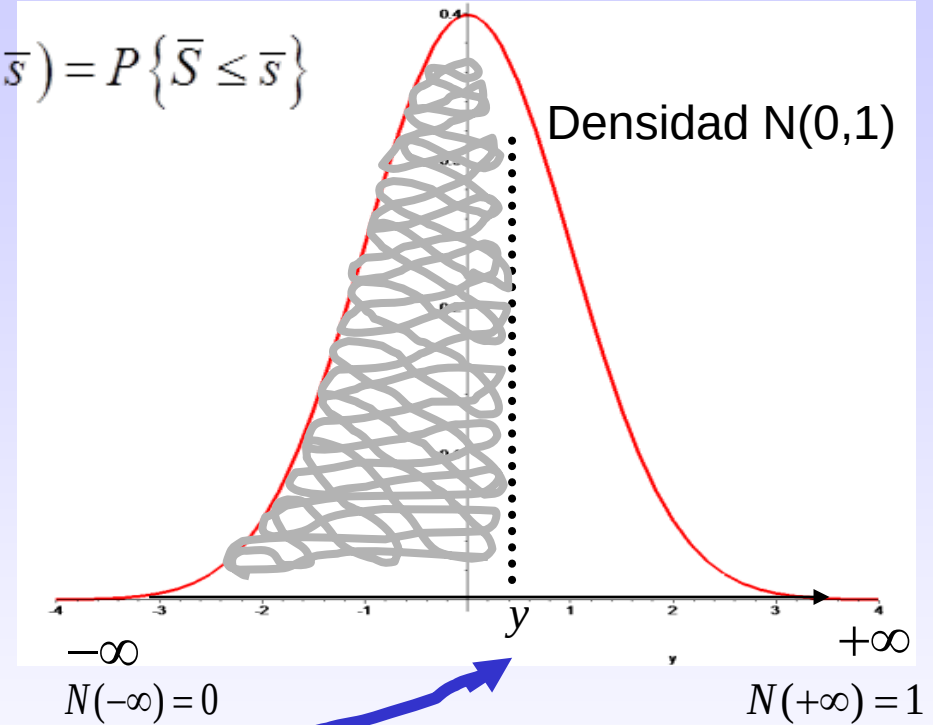
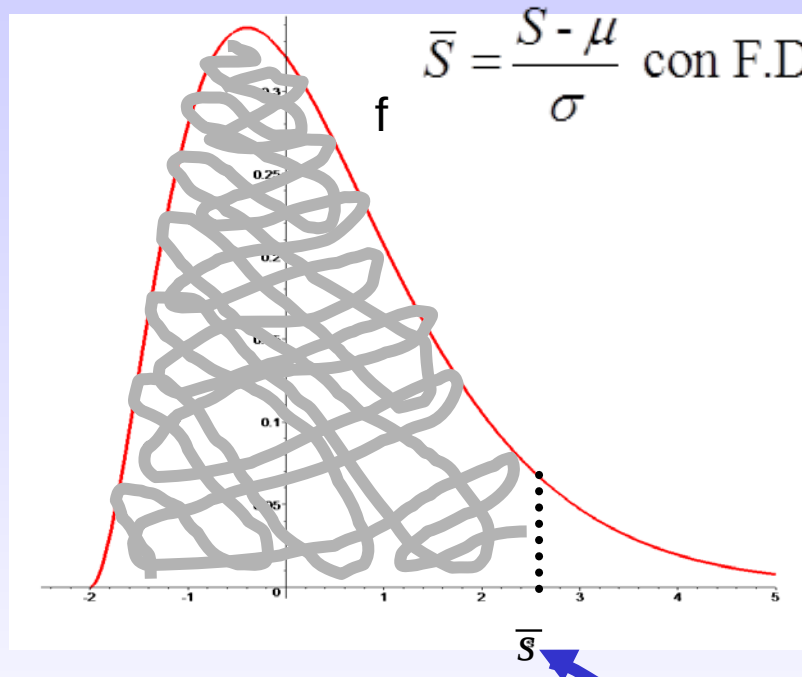
Si γ es pequeño (cartera reasegurada y suficientemente grande), la aproximación puede ser satisfactoria. El valor crítico suele tomarse como:

$\gamma > 0,1$: Aproxim. Normal desaconsejada.



3- Aproximaciones

Aproximación normal-power



Dar un valor aproximado $y / F(\bar{s}) \simeq N(y)$

Con la información disponible μ, σ, γ , encontrar las funciones inversas que relacionan S , y .

$$S \xrightleftharpoons[V_{\gamma}^{-1}]{V_{\gamma}} y$$



3- Aproximaciones

Aproximación normal-power

Llamemos: $\gamma = \frac{E\{(S - \mu)^3\}}{\sigma^3}$, $g = \frac{\gamma}{6}$, $\bar{s}_0 = -\sqrt{\frac{7}{4}}$

La función $y = v_\gamma^{-1}(\bar{s})$

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{1}{4g^2} + \frac{\bar{s}}{g}} - \frac{1}{2g} & , \bar{s} \geq 1 \\ \bar{s} - g(\bar{s}^2 - 1) + g^2(4\bar{s}^3 - 7\bar{s})\varepsilon(\bar{s}_0 - \bar{s}) & , \bar{s} < 1 \end{cases}$$

siendo $\varepsilon(\bar{s}_0 - \bar{s}) = \begin{cases} 1 & , \bar{s} < \bar{s}_0 \\ 0 & , \bar{s} \geq \bar{s}_0 \end{cases}$ Con esto ya podemos calcular $y = v_\gamma^{-1}(\bar{s})$

Supuesto que hemos encontrado la función v_γ (depende de γ)

aproximamos la probabilidad de $F(\bar{s})$ de la siguiente forma:

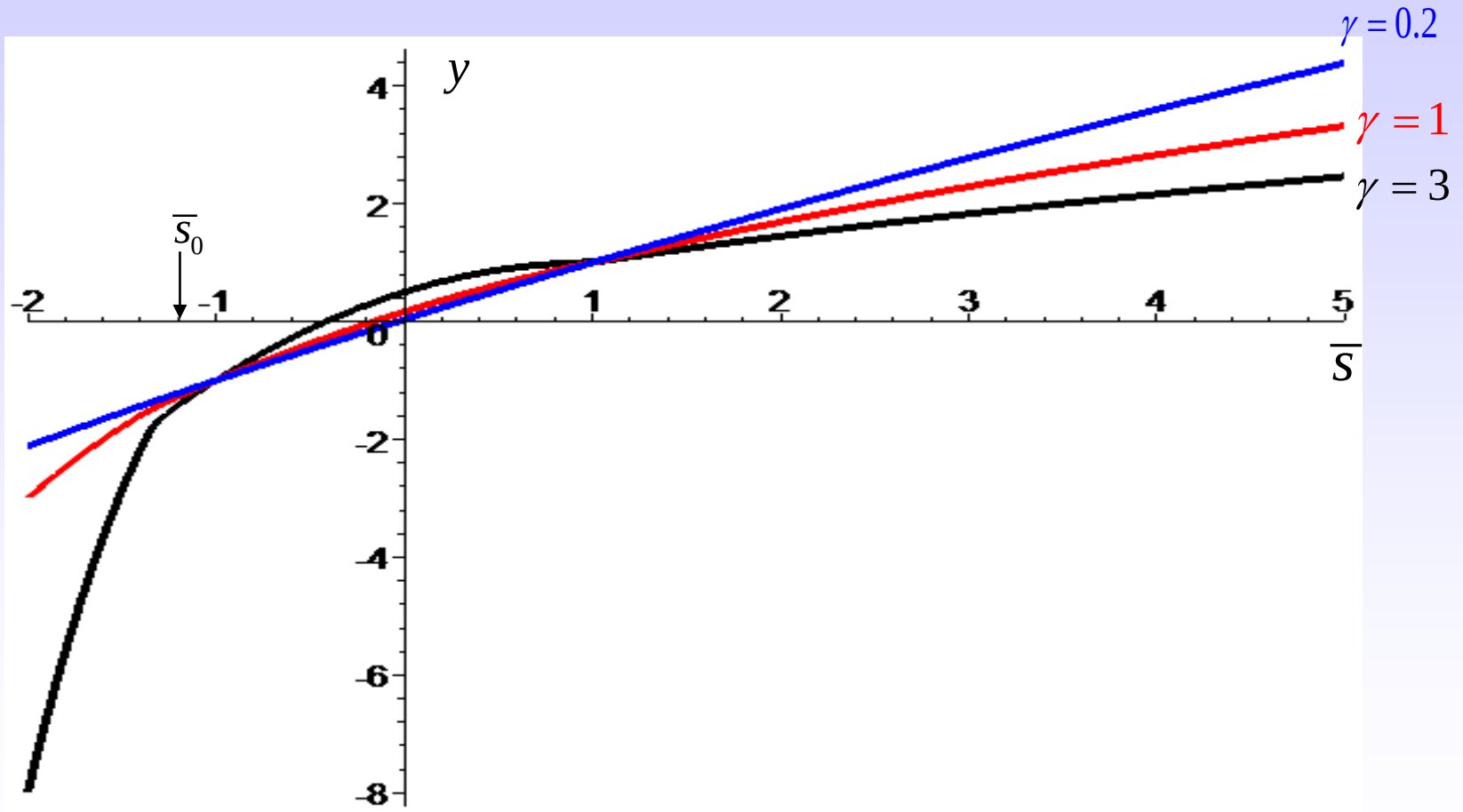
(1) Calculamos $y = v_\gamma^{-1}(\bar{s})$

(2) Aproximamos: $F(\bar{s}) \approx N(v_\gamma^{-1}(\bar{s})) = N_\gamma(y)$



3- Aproximaciones

Aproximación normal-power





3- Aproximaciones

Aproximación normal-power

Aproximación de los cuantiles con la aproximación NP

1. Se calculan las constantes auxiliares:

$$y_0 = -\sqrt{\frac{7}{4}} - \frac{3}{4}g$$

$$D = \sqrt{P^3 + Q^2}$$

$$P = \frac{11}{144} \frac{1}{g^2} - \frac{7}{12}$$

$$Q = \frac{17}{1728} \frac{1}{g^3} + \frac{5}{96} \frac{1}{g} - \frac{1}{8} \frac{y}{g^2}$$

y es la raíz de la ecuación: $\varepsilon = F(\bar{s}) = N(y) \Leftrightarrow N^{-1}(F(\bar{s})) = y$



3- Aproximaciones

Aproximación normal-power

2. La función $\bar{s} = v_\gamma(y)$

$$\bar{s} = \begin{cases} y + g(y^2 - 1) & , \text{ si } y \geq 1 \\ \frac{1}{2g} - \sqrt{\frac{1}{4g^2} + 1 - \frac{y}{g}} & , \text{ si } y \in [y_0, 1) \\ \sqrt[3]{D - Q} - \sqrt[3]{D + Q} + \frac{1}{12g} & , \text{ si } y < y_0 \end{cases}$$

3. Obtenemos el cuantil S_ε destipificando:

$$S_\varepsilon = \mu + \bar{s}\sigma$$



3- Aproximaciones

Aproximación normal-power. Comentarios finales

- La aproximación N.P. consiste en definitiva en realizar un cambio de variable $y = v_{\gamma}^{-1}(s)$ dentro de la Normal $N(0,1)$. Así se obtiene otra distribución $NP(0,1,\gamma)$ que distribuye a la variable $s = \frac{S - \mu}{\sigma}$
- Datos necesarios: μ, σ, γ . Tengamos en cuenta que con sólo conocer estos tres datos NO es posible construir $F(s,t)$.
- La aproximación N.P. es tanto más exacta cuanto mayor es λt . Según Beard (1984, p. 108) funciona bien para $\lambda t \geq 25$ y siempre que sea $\gamma < 1.5$ ó 2



3- Aproximaciones

Aproximación normal-power. Cálculo efectivo.

- En la siguiente hoja maple se realizan aproximaciones de probabilidades del daño total con la aproximación NP



Maple 8
Worksheet File

- También es posible encontrar la aproximación NP como una opción de la función **aggregateDist()** del paquete R **actuar**.
 - Pero hay que tener precaución ya que solo se encuentra programado el tramo de derecha de la aproximación.
 - Además la aproximación de los cuantiles no está incluida. Esta última es el tema de uno de los ejercicios (Ej.12)



4- Simulación del daño total

Simulación de una distribución compuesta

Otra posibilidad es la de generar una muestra de daños totales $\{s_i: i = 1, \dots, n\}$ para luego trabajar con la distribución muestral.

- Por ejemplo para estimar medidas de riesgo del daño total S (Ej.24)



4- Simulación del daño total

Simulación de una distribución compuesta

Algoritmo para la simulación de una v.a. compuesta S (véase el ejercicio 9)

Para el caso de una única póliza :

1. Simular el número de siniestros n de la póliza utilizando la distribución de la v.a. primaria N . (Poisson, BN, etc...)
2. Simular n valores de la v.a. secundaria X ($x_1, \dots, x_n$). (gamma, IG, Pareto, etc...)
3. $s = \sum_{i=1}^n x_i$ es el valor simulado de la compuesta.



4- Simulación del daño total

Simulación de una distribución compuesta

Algoritmo para la simulación del daño total S (véase el ejercicio 9) de una cartera de pólizas:

Para el caso de una cartera con m pólizas :

Para todas las póliza $k = 1, \dots, m$:

1. Simular los parámetros de Poisson $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de las pólizas utilizando la función de estructura de la variable de estructura Λ .(gamma, IG, etc...)
2. Simular los números de siniestros $(n_1, \dots, n_k)$, cada una de las k pólizas, generado a partir de la distribución Poisson(λ_k) del número de siniestros de la póliza k .
3. Para cada póliza k simular las n_k cuantías de los siniestros de la póliza: $(x_1^k, \dots, x_{n_k}^k)$ según la distribución de las cuantías individuales elegida (gamma, IG, Pareto, etc...).
4. Generar los k daños totales de las pólizas $s^k = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^k$.
5. La muestra de daños totales de la cartera es:

$$(s^1, \dots, s^k)$$

¡ATENCIÓN! HAY QUE APROVECHARSE DE QUE R ES UN LENGUAJE VECTORIAL, PARA PODER CODIFICAR DE FORMA MUY ABREVIADA Y SENCILLA ESTE ALGORITMO.



4- Simulación del daño total

Simulación de una distribución compuesta

- La simulación de daños totales es el tema de los ejercicios 9 y 24.
- Se puede programar en R sin problemas, huyendo de las estructuras iterativas (for, while, repeat), sacando provecho de que R es un lenguaje vectorial.
- No obstante, la simulación del daño total de una póliza figura como una de las opciones de la función **aggregateDist()** del paquete R **actuar**.



5.Cálculo Numérico de Distribuciones Compuestas.

La densidad o cuantía de la distribución compuesta es:

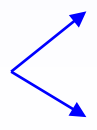
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n v^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

siendo :

$(p_n)_{n=1}^{\infty}$ la distribución PRIMARIA

$V(x)$ la distribución SECUNDARIA tal que:

$$V(0) = 0 \quad (\Rightarrow F(0) = p_0)$$

Dificultades para calcular $f(x)$ 

CONVOLUCIONES

SUMA



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

La clase $C(a,b,0)$ de distribuciones contadoras

La clase $(a,b,0)$ está formada por las distribuciones $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ que verifican:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}, n = 1, 2, 3, \dots, \text{ para dos constantes } a, b \in \mathbb{R}$$

LOS ÚNICOS MIEMBROS DE LA CLASE $(a,b,0)$ SON:

$$P(\lambda) \quad , \quad B(m, q) \quad , \quad G(\beta) \quad , \quad BN(r, \beta)$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

La clase $C(a,b,0)$ de distribuciones contadoras

Los valores de las constantes a, b , son respectivamente:

$$P(\lambda) \rightarrow a = 0, \quad b = \lambda$$

$$B(m, q) \rightarrow a = \frac{-q}{1-q}, \quad b = (m+1) \frac{q}{1-q}$$

$$G(\beta) \rightarrow a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0$$

$$BN(r, \beta) \rightarrow a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = (r-1) \frac{\beta}{1+\beta}$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

La clase $C(a,b,m)$ de distribuciones contadoras

En general podemos definir la CLASE $C(a,b,m)$ formada por todas las distribuciones cuyas cuantías verifican:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n}, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

Ejemplo:

Para $m=1$, tenemos la clase $C(a,b,1)$

Una distribución de $C(a,b,1)$ es la logarítmica $l(q)$, ya que:

$$\forall n \geq 2: \quad \frac{p_n}{p_{n-1}} = q \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad \text{siendo } a = q, \quad b = -q$$

Recordemos que: $p(n) = \frac{q^n}{-n \log(1-q)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

La clase $C(a,b,m)$ de distribuciones contadoras

Otro miembro de la clase $C(a,b,1)$ es la BNET:

$$r \in (-1, 0): \quad a = \frac{\beta}{1 + \beta}, \quad b = (r - 1) \frac{\beta}{1 + \beta}$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

La clase $C(a,b,m)$ de distribuciones contadoras

Utilidad de la clase $C(a,b,m)$ respecto del cálculo de probabilidades de compuestas:

Siempre que la distribución primaria esté contenida en una de estas clases, el cálculo de la compuesta se simplificará (tendremos que calcular menos convoluciones)

Nosotros estudiaremos esta simplificación para el caso de la primaria perteneciente a la clase $C(a,b,0)$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Teorema previo

TEOREMA:

Para las distribuciones de la clase $C(a, b, 0)$ se verifica:

$$L'_S(z) = a L_X(z) L'_S(z) + (a + b) L'_X(z) L_S(z)$$

siendo X v.a. secundaria, S v.a. compuesta, L, L' la TL y su derivada

Comentario: De este resultado se sigue como consecuencia inmediata el algoritmo que nos permite calcular probabilidades de compuestas con un cálculo mínimo de Convoluciones, en sus dos versiones para secundaria discreta y continua.

Son pues 2 corolarios.



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Algoritmo recursivo de Panjer- Demostración

Supongamos que $(p_n)_{n=0}^{\infty} \in C(a, b, 0)$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n} \Leftrightarrow p_n = a p_{n-1} + \frac{b}{n} p_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow n p_n = n a p_{n-1} + b p_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow n p_n = (n-1) a p_{n-1} + (a+b) p_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Restamos y sumamos $a p_{n-1}$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por

$[L_X(z)]^{n-1} L'_X(z)$ y sumamos para $n = 1, 2, 3, \dots$



5. Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Teorema previo - Demostración

Factorizando $L'_X(z)$

esta suma es $L'_S(z)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} np_n [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z) =$$

$$= a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1} [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z) + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} [L_X(z)]^{n-1} L'_X(z) \Leftrightarrow$$

Factorizando $L_X(z)$

esta suma es: $L'_S(z)$

$$L_S(z) = P_N(L_X(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (L_X(z))^n$$

$$L'_S(z) = L'_X(z) P'_N(L_X(z)) = L'_X(z) \sum_{n=0}^{\infty} np_n (L_X(z))^{n-1}$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Teorema previo - Demostración

$$\Leftrightarrow L'_S(z) = a L_X(z) L'_S(z) + (a + b) L_S(z) L'_X(z)$$

(cqđ)

Como primer corolario, vamos a probar la validez de una expresión para la cuantía de la compuesta **que carece de convoluciones**, para el caso en que la **secundaria sea discreta y aritmética**.

Definición:

Una FD es aritmética $\exists h > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ tal que su soporte esta incluido en el conjunto:

$$\{x_0 \pm nh\}$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 1: Algoritmo recursivo de Panjer caso de una secundaria discreta aritmética

Para una primaria de la clase $C(a, b, 0)$ y una secundaria acumulada en $\{1, 2, 3, \dots\}$ con cuantía $v(x)$ ($v(0) = 0$), se verifica la siguiente fórmula recursiva para la cuantía f de la compuesta:

$$f(x) = \sum_{y=1}^x \left(a + b \frac{y}{x} \right) v(y) f(x-y) \quad , \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Observaciones :

1. ¡¡No hay ninguna convolución!!
2. Para arrancar el algoritmo necesitamos el valor inicial

$$f(0) = p_0$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 1: Algoritmo recursivo de Panjer caso de una secundaria discreta aritmética

3.Recursividad : debemos conocer (y por tanto almacenar) $f(0), \dots, f(x-1)$ para poder calcular $f(x)$

4.El resultado solo sirve para: v aritmética con cuantía nula en el origen, y $(p_n)_{n=0}^{\infty} \in C(a, b, 0)$

El corolario 2 generaliza este resultado a una $v(x)$ continua



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 1- Demostración

Se trata de antitransformar la identidad del anterior teorema.

$$L'_S(z) = aL_X(z)L'_S(z) + (a+b)L_S(z)L'_X(z)$$

sacando provecho de las propiedades de la transformada de Laplace (véase lección 2, pag. 14,15,16).

- L^{-1} es la antitransformada: a cada transformada le asocia su distribución antecedente.
- Vamos a aplicar L^{-1} a ambos miembros de la identidad.
- En la identidad resultante aparecerán pues distribuciones



5. Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 1- Demostración

$$L'_S(z) = aL_X(z)L'_S(z) + (a+b)L_S(z)L'_X(z)$$

● $L'_S(z) \xrightarrow{L^{-1}} -x f(x)$ Esta es la antitransformada del 1º miembro
(Propiedad 6)

Para antitransformar el 2º miembro lo hacemos en dos pasos por la propiedad 8
Sobre la linealidad de la TL:

● $aL_X(z)L'_S(z) \xrightarrow{L^{-1}} -a \sum_{y=1}^x (x-y)f(x-y)v(y)$
(Propiedad 6)

$$\left. \begin{array}{l} L'_S(z) \xrightarrow{L^{-1}} -x f(x) \\ L_X(z) \xrightarrow{L^{-1}} v(x) \end{array} \right\} - \sum_{y=1}^x (x-y)f(x-y)v(y)$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 1- Demostración

$$L'_S(z) = aL_X(z)L'_S(z) + (a+b)L_S(z)L'_X(z)$$

$$(a+b)L_S(z)L'_X(z) \xrightarrow{\text{(Propiedad 6)}^{L^{-1}}} -(a+b)\sum_{y=1}^x f(x-y)y v(y)$$

$$\left. \begin{array}{l} L_S(z) \xrightarrow{L^{-1}} f(x) \\ L'_X(z) \xrightarrow{L^{-1}} -x v(x) \end{array} \right\} - \sum_{y=1}^x f(x-y)y v(y)$$

A continuación ya solo queda por sustituir 1º Y 2º miembros para obtener la identidad antitransformada. Reordenando el resultado se obtiene la expresión del enunciado.

EJERCICIO: termine los pasos que acabamos de indicar.



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 2: Algoritmo recursivo de Panjer caso de una secundaria continua

Para una primaria de la $C(a, b, 0)$ y una distribución secundaria V de tipo continuo con soporte en $x > 0$, se tiene la siguiente ecuación integral:

$$f(x) = p_1 v(x) + \int_0^x \left(a + b \frac{y}{x} \right) f(x-y) v(y) dy, \quad x > 0$$

OBSERVACIONES:

- 1) No hay convoluciones de la distribución V .
- 2) Este resultado se puede aplicar cuando

$$\begin{cases} \text{La secundaria } V \text{ sea de TIPO CONTINUO} \\ (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C(a, b, 0) \end{cases}$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 2: Algoritmo recursivo de Panjer caso de una secundaria continua

3) Esta ecuación es de la forma:

$$h(x) = J(x) + \int_0^x k(x, y) h(y) dy$$

Es por tanto una ECUACIÓN de VOLTERRA que debe ser integrada numéricamente para aproximar la solución $h(x)$.
(Panjer 1992, Apéndice, pág. 415)



5. Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 2 – Demostración

La distribución compuesta F es de tipo mixto con una cuantía $P\{S = 0\} = p_0 > 0$ en el origen (Por ser secundaria V de tipo continuo)

Por tanto podemos expresar F como una mixtura de sus trozos discreto ($x=0$) y Continuo ($x>0$):

$$f(x) = p_0 \delta(x) + (1 - p_0) f(x)$$

Notamos $\sim$ a la transformada de Laplace (véase lección 2)

Llamamos: $g(x) = (1 - p_0) f(x)$



5. Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 2 – Demostración

Recordamos que la TL es lineal (véase lección 2 pag. 17).

Por tanto:

$$\tilde{f}(z) = L_S(z) =$$

$$= p_0 \int e^{zx} \delta(x) dx + \int e^{zx} (1 - p_0) f(x) dx =$$

$$= p_0 \int e^{zx} \delta(x) dx + \tilde{g}(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L_S(z) = p_0 + \tilde{g}(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{g}(z) = L_S(z) - p_0$$

Transformada de Laplace
del TROZO CONTINUO de
la COMPUESTA

A partir de aquí volvemos a sustituir en la identidad del Teorema pag. 23, teniendo en cuenta que es:

$$\tilde{g}'(z) = L'_S(z)$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 2 – Demostración

Recordemos que la identidad del teorema era:

$$L'_S(z) = a L_X(z) L'_S(z) + (a+b) L'_X(z) L_S(z)$$

Sustituyendo:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}'(z) &= a L_X(z) \tilde{g}'(z) + (a+b) L'_X(z) \tilde{g}(z) + (a+b) p_0 L'_X(z) \\ \frac{p_n}{p_{n-1}} &= a + \frac{b}{n} \Leftrightarrow p_1 = (a+b) p_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{g}'(z) = a L_X(z) \tilde{g}'(z) + (a+b) L'_X(z) \tilde{g}(z) + p_1 L'_X(z)$$

A partir de aquí se procede igual que en el corolario 1: antitransformamos ambos Miembros de la identidad y reordenamos lo que resulta hasta obtener la identidad del Corolario 2.

Como ejercicio, siga los pasos indicados y termine la prueba.



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 2 – Conclusiones

Con los corolarios 1 y 2 se pueden calcular cuantías de distribs. Compuestas, siempre para una primaria dentro de la clase $(a,b,0)$, para los casos:

V secundaria {
ARITMÉTICA t.q. $V(0)=0$
CONTINUA

¿Qué pasa en el resto de los casos?



Secuncaria Discreta no aritmétrica

Ej./ Func. Distrib. empírica



Secundaria de tipo Mixto

Ej./ F. Dist. Empírica con una cola ajustada



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Corolario 2 – Conclusiones

Se puede aplicar el Corolario 1 , siempre que hayamos sustituido la secundaria por una F.D. aritmética “EQUIVALENTE”.

Los métodos de Aritmetización sustituyen una dist. por otra aritmética equivalente en el sentido de que preserva ciertas características de la distribución original:

- masa,
- momentos centrales hasta cierto orden.



5. Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

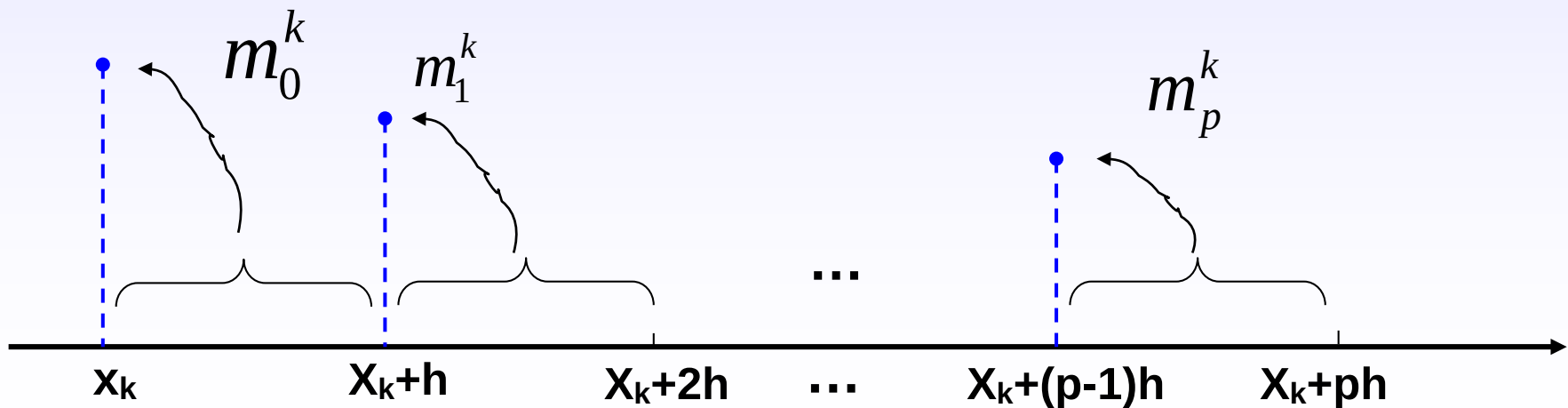
Aritmetización de distribuciones.

Método del ajuste local de los momentos

PROBLEMA: Consideramos un intervalo de amplitud ph :
 $[x_k, x_k + ph]$. Se trata de determinar las $(p+1)$ cuantías:

$$m_0^k, m_1^k, \dots, m_p^k$$

Localizadas en $x_k, x_k + h, \dots, x_k + ph$, tal que los p primeros momentos se convengan.





5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Aritmetización de distribuciones.

Método del ajuste local de los momentos

Traduciendo al idea:

$$r = 0, 1, 2, \dots, p : \sum_{j=0}^p \left(x_j + jh \right)^r m_j^k = \int_{x_k}^{x_k + ph} x^r dV(x)$$

Momentos Locales de la FD aritmética

Momentos Locales de la FD dada: C_{rp}

- $r = 0$ Conservación de la **masa** en el intervalo
- $r = 1, \dots, p$ Conservación de los **momentos** en el intervalo

Solución del sistema:

$$j = 0, 1, 2, \dots, p : m_j^k = \int_{x_k}^{x_k + ph} \prod_{i \neq j} \frac{x - x_k - ih}{(j - i)h} dV(x) ,$$

• Integración Numérica



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Aritmetización de distribuciones.

Método del ajuste local de los momentos

Es suficiente aplicar el método con $p=2$ (varianza)

El sistema tiene solución única, ya que su determinante siempre es distinto de cero (se trata de un determinante de Vandermonde).

Sin embargo nada nos garantiza que la solución sea no Negativa.

Para algunas FD de tipo discreto o mixto puede suceder que la solución tenga alguna cuantía negativa, dejando de ser válida como tal.

A veces conviene pues aplicar un método un poco diferente:



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Aritmetización de distribuciones.

Método del ajuste local de los momentos.

Codificación

- La aritmetización de la distribución secundaria es pues un paso esencial previo a la aplicación de corolario 1 (algoritmo de Panjer) mediante la función **aggregateDist()** del paquete R **actuar**.
- Dentro del mismo paquete tenemos la función **discretize()** que lleva a cabo esta aritmetización.
- El ejercicio 10 trata precisamente de llevar a cabo este cálculo numérico de probabilidades de distribuciones compuestas.



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Ampliación del corolario 1.

Finalmente vamos a ampliar la aplicabilidad del Corolario 1 al caso en que la secundaria es aritmética con $v(0) > 0$

Llamemos $v_0 = P(X=0)$ a la cuantía de V en $x=0$.
Repitiendo el razonamiento realizado en la demostración del Corolario 2:

$$L_X(z) = v_0 + (1 - v_0) L_{X^+}(z)$$

$$\text{siendo } X^+ = X \mid X > 0$$



5. Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Ampliación del corolario 1.

Por otro lado, $P(\lambda)$, $B(m, q)$, $BN(r, \beta)$ son tales que sus f.g.p. se pueden expresar así:

$$P_N(z; \theta) = B(\theta(z-1))$$

siendo $\begin{cases} \theta \rightarrow \text{Parámetro} \\ B(\cdot) \rightarrow \text{Función que no depende de } \theta \end{cases}$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Ampliación del corolario 1.

$$\text{POISSON: } P_N(z; \lambda) = e^{\lambda(z-1)} = B(\lambda(z-1))$$

$$\theta = \lambda \quad B(x) = e^x$$

$$BN: P_N(z, \beta) = \left[\frac{1}{1 - \beta(z-1)} \right]^r = B(\beta(z-1))$$

$$\theta = \beta \quad B(x) = (1-x)^{-r}$$

$$B: P_N(z; q) = (1 + q(z-1))^m = B(q(z-1))$$

$$\theta = q \quad B(x) = (1+x)^m$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas. Ampliación del corolario 1.

Por tanto, para las F.D. de la clase $(a, b, 0)$ primarias, la Transformada de Laplace de la compuesta se puede expresar así:

$$L_S(z) = P_N(L_X(z)) = B(\theta(L_X(z) - 1))$$

Veamos que esto es cierto:



5. Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas. Ampliación del corolario 1.

$$\begin{aligned} \underline{L_S(z)} &= P_N(L_X(z)) \\ &= P_N(L_X(z); \theta) = \\ &= P_N(v_0 + (1-v_0)L_{X^+}(z)) = \\ &= B\left(\theta(v_0 + (1-v_0)L_{X^+}(z) - 1)\right) = \\ &= B\left(\theta((1-v_0)L_{X^+}(z) - (1-v_0))\right) = \\ &= B\left(\theta(1-v_0)(L_{X^+}(z) - 1)\right) = \\ &= P_N(L_{X^+}(z); \theta(1-v_0)) \end{aligned}$$



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Ampliación del corolario 1.

- ★ El modelo original es idéntico a otro en donde la secundaria es tal que $v_0 = 0$ (se trata de $X^+ = X | X > 0$) y la primaria tiene como parámetro a $\theta(1 - v_0)$

(Rectificación del parámetro de la primaria).



- ★ A esta F.D. Compuesta sí que le podemos aplicar el Corolario nº1.



Maple 8
Worksheet File



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas. Codificación

- Aquí tenemos una hoja Maple en donde está codificado el algoritmo de Panjer (corolario 1)



Maple 8
Worksheet File

- También lo podemos encontrar como una de las opciones de la función **aggregateDist()** del paquete de R **actuar**.



5.Cálculo Numérico De Distribuciones Compuestas.

Ampliación del corolario 1-

EJEMPLO: Cuantías Nulas con Probabilidad >0 y Reaseguro XL

El reasegurador paga el exceso de $d=100.000$ €

Cartera del asegurador directo :

$$\left\{ \begin{array}{l} N : \quad BN(r = 800; B = 0.5) \quad (\mu=400; \sigma^2 = 600) \\ X : \text{Pareto con } \mu=15.000; \sigma = 60.000 \end{array} \right.$$

$$\text{Así pues:} \quad f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \quad (x > 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 17.000 \\ \alpha = 32/15 \end{cases}$$

$$\text{Observemos que:} \quad P\{X \leq 100.000\} = 0.983676$$



5.Cálculo Numérico de Distribuciones Compuestas.

Ampliación del corolario 1-

Ejemplo: Cuantías Nulas con Probabilidad >0 y Reaseguro XL

DISTRIBUCIONES DEL REASEGURADOR:

$$v(x) = \begin{cases} 0.983676 & , x = 0 \quad (\text{Atómo}) \\ \frac{\alpha(\lambda)^{\alpha}}{(\lambda + x + d)^{\alpha+1}} & , x > 0 \end{cases}$$

La distribución del daño total puede ser descrita:

$$\left\{ \begin{array}{l} BN \quad r = 800, \quad \beta = (1 - 0.983676) \frac{1}{2} = 0.008162 \\ v(x) = \frac{\alpha(\lambda + d)^{\alpha}}{(\lambda + x + d)^{\alpha+1}}, \quad x > 0 \end{array} \right.$$

Podemos aplicar el Algoritmo Recursivo



6-Bibliografía

En las siguientes referencias encontraran las técnicas expuestas a lo largo de esta lección. (1) es la referencia principal para las aproximaciones, (2) y (3) para el cálculo numérico de compuestas.

(1) Beard, Pentikainen, Pesonen (1984): *Risk Theory. The stochastic basis of insurance*. Chapman and Hall.

(2) Klugmann, Panjer, Willmot (1998): *Loss Distributions. From Data to Decisions*. John Wiley

(3) Panjer, H.H./ Willmot, G.E. (1992): *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries,



LECCIÓN 6

Tarificación, medidas de riesgo, ordenación de riesgos

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



Índice de la lección 6

1. Regulación
2. Clases de primas
3. Principios del cálculo de primas y medidas del riesgo
4. Ordenación de riesgos.
5. Participación del asegurado: Franquicias y límites en las garantías



1- Regulación

- ★ Tarificación: Actividad encaminada a determinar la prima aplicable a los diferentes riesgos cubiertos en un determinado ramo o modalidad de seguro.
- ★ Prima: Aportación económica que ha de satisfacer el contratante o asegurado a la entidad aseguradora en concepto de contraprestación por la cobertura de riesgo que éste le ofrece.

Real decreto 1060/2015 de 20 de noviembre de Ordenación Supervisión y Solvencia de Entidades Aseguradoras (ROSSEAR)



2- Clases de primas

PRIMA PURA: Esperanza matemática de la siniestralidad

$$P = E(S) = E(N)E(X)$$

PRIMA RECARGADA: Prima Pura + Recargo de Seguridad

$$P_I = (1 + \theta)P = P + \theta P$$

PRIMA de INVENTARIO: Prima Recargada + Recargo para Gastos de gestión interna.

PRIMA COMERCIAL: Prima de Inventario + Recargo para Gastos de gestión externa + Recargo para beneficio.



2- Clases de primas

PRIMA COMERCIAL=PRIMA DE TARIFA

$$P'' = (1 + \theta)P + g_1 P'' + g_2 P'' + g_b P''$$

$$P'' = \frac{(1 + \theta)P}{1 - g_1 - g_2 - g_b}$$



3- Medidas del riesgo

- Para hacer frente al riesgo el asegurador debe establecer una reserva inicial de capital que le permita seguir haciendo frente a sus obligaciones en caso de siniestralidad desfavorable.
- La medición el riesgo tiene como objetivo calcular ese capital.
 - Mientras que los asegurados querrán que sea lo más alto posible, los accionistas querrán que sea lo más bajo posible.



3- Medidas del riesgo

- Existen diversos tipos de medidas de riesgo y la utilización de una u otra es un tema de discusión. Por eso se estudian sus propiedades
- Algunas de estas propiedades se reúnen en axiomas que dan lugar a la Teoría de las **medidas de riesgo coherentes**.
- Vamos a introducir dos tipos de medidas de riesgo:
 - Las que se deducen de la **Teoría de la Utilidad Esperada**.
 - Las que se deducen de las **funciones de distorsión**.



3- Medidas del Riesgo.

Definición de medida de riesgo

- Suponemos los riesgos modelizados por v.a. no negativas:

$$P(X \geq 0) = 1 \text{ (} X \text{ representa una pérdida)}$$

- Llamemos $\mathcal{X}$ al conjunto de todas estas v.a.

Definición: Una medida del riesgo es un funcional $\rho: \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty)$

A cada v.a. X le hace corresponder un numero real positivo $\rho(X)$.



3- Medidas del Riesgo.

Definición de medida de riesgo

- Valores de $\rho(X)$: pérdida en valores monetarios.
- $\rho(X)$ se interpreta como el capital necesario para compensar el riesgo de una cartera representada por la v.a. X .
- $X - \rho(X)$ debería ser ya considerado como un riesgo aceptable desde el punto de vista de la solvencia. (Veremos que esto equivale a que ρ es *invariante por translaciones*).
- Las medidas de riesgo se usan para calcular provisiones y capitales necesarios para compensar los riesgos.



3-Medidas del riesgo

Principios para el cálculo de primas

Definición: Un principio para el cálculo de primas le asocia a cada riesgo X la prima mínima $\Pi(X)$ a cambio de la cual el asegurador se puede hacer cargo del riesgo. Se corresponde pues con la **prima recargada**.

- Recargo de seguridad = $\Pi(X) - E(X)$
- Los principios son ejemplos de medidas del riesgo utilizadas en seguros.
- Se caracterizan por el hecho de que su resultado es un candidato a ser fijado como prima asociada a una póliza en vez de como capital.
- Existe el consenso acerca de cómo medir la prima pura, pero no sobre cómo medir el recargo. De ahí la variedad de principios.



3- Medidas del riesgo

Principios para el cálculo de primas. Ejemplos



PRINCIPIO DEL VALOR ESPERADO

$$\Pi(Fs) = (1 + \theta) E(S)$$

θ : Recargo de Seguridad en tanto por uno

No tiene en cuenta la variabilidad del riesgo



PRINCIPIO DE LA VARIANZA

$$\Pi(Fs) = E(S) + \alpha Var(S)$$



PRINCIPIO DE LA DESV. TÍPICA

$$\Pi(Fs) = E(S) + \beta \sqrt{Var(S)}$$



3- Medidas del riesgo

Propiedades deseables de las medidas de riesgo

Llamamos: (la v.a. X representa pérdidas)

$$\mathcal{X} = \{X \geq 0, v.a.\}$$

1- Recargo no excesivo (no-ripoff):

$$\rho(X) \leq \max(X) = F_X^{-1}(1), \forall X \in \mathcal{X}$$

La medida del riesgo no debe ser mayor que la máxima pérdida posible

2- Recargo no negativo:

$$\rho(X) \geq E(X), \forall X \in \mathcal{X}$$

La medida del riesgo no debe ser inferior a la pérdida media



3- Medidas del riesgo

Propiedades deseables de las medidas de riesgo

3- Invariante por translaciones:

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c, \forall c \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{X}$$

Si el riesgo se incrementa en una cantidad determinista el capital necesario para compensarlo permanece constante. Así se tiene que: $\rho(X - \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$

De manera que un capital $\rho(X) \geq 0$ cubre el riesgo de X según la medida del riesgo ρ .

4- Constancia: $\rho(c) = c, \forall c \geq 0$

Una pérdida segura añade un riesgo por valor de su mismo importe.



3- Medidas del riesgo

Propiedades deseables de las medidas de riesgo

5- Subaditividad:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}$$

- Esta propiedad expresa la idea de que el riesgo puede ser reducido por diversificación.
- La subaditividad junto a la homogeneidad positiva 7 garantizan que los programas de minimización de medidas de riesgo que verifican simultáneamente estas dos propiedades sean **convexos**, lo que a su vez **garantiza la existencia y unicidad de mínimos globales**.



3- Medidas del riesgo

Propiedades deseables de las medidas de riesgo

6- Aditividad comonótona: Se dice un **vector** aleatorio X es comonótono cuando existen una v.a. Z y n funciones **no decrecientes** $t_1, \dots, t_n$ tales que las distribuciones de X y de $(t_1(Z), \dots, t_n(Z))$ son iguales

Entonces la medida es **comonótona** si cumple que

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{X} \text{ comonótonas}$$

Así pues, esta propiedad expresa la idea de que *agregar riesgos comonótonos no tiene ningún efecto diversificador.*



3- Medidas del riesgo

Propiedades deseables de las medidas de riesgo

7- Homogeneidad positiva: $\rho(cX) = c\rho(X), \forall X \in \mathcal{X}, \forall c \geq 0$

- Esto se interpreta como: 1/ invarianza respecto de la moneda que se esté usando en la medición del riesgo.
- 2/ Escalabilidad: capital por unidad monetaria (Mates Finan.)

8- Monotonía: $X, Y \in \mathcal{X}: P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

9- Continuidad respecto de la F de distribución:

Sea la sucesión de riesgos $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n) = \rho(X)$$

10- Objetividad: $\rho(X)$ depende de X solo a través de su f.d. F_X



3- Medidas del riesgo

Medidas del riesgo coherentes. Capital económico

➤ Definición:

Una medida del riesgo es **coherente** si es **invariante por translaciones, homogénea positiva, subaditiva y monótona**.

- Las empresas de seguros deben dotar un capital para compensar la siniestralidad elevada de una línea de negocio. Esto se materializa en el concepto de **Capital Económico**:



3- Medidas del riesgo

Medidas del riesgo coherentes. Capital económico

Definición: Dadas una línea de negocio S y una medida del riesgo ρ , el **capital económico** EC es:

$$EC(S) = \rho(S) - E(S)$$



3- Medidas del riesgo

VaR: definición y propiedades

Definición: Dados un riesgo X y una probabilidad $p \in (0,1)$:

$$VaR[X; p] = F_X^{-1}(p)$$

Propiedades:

No-ripoff, Invariante por translaciones, recargo no negativo positivo homogéneo, no recarga injustificadamente, comonótonamente aditivo, monotona, continua respecto de la f.d., objetiva.

- **Pero no verifica la subaditividad. Excepto para el caso de la distribución normal o de las distribuciones elípticas.**
- **Solo en este último caso es el VaR una medida de riesgo coherente.**



3- Medidas del riesgo

El VaR como capital de solvencia.

Supongamos que se pretende calcular el **capital de solvencia** necesario para un riesgo X , es decir, un capital $\rho(X)$ tal que $P(X > \rho(X))$ sea suficientemente pequeña.

Queremos que dicho capital verifique simultáneamente dos condiciones:

- Optimización de la solvencia, y
- Optimización del coste del capital.



3- Medidas del riesgo

El VaR como capital de solvencia.

- Optimización de la solvencia:

$$\min_{\rho(X)} \left\{ E \left[(X - \rho(X))_+ \right] \right\}$$

- Optimización del coste de capital: $\min_{\rho(X)} \varepsilon \rho(X), \quad 0 < \varepsilon < 1$

- Por tanto se trata de resolver el programa:

$$\min_{\rho(X)} \left\{ E \left[(X - \rho(X))_+ \right] + \varepsilon \rho(X) \right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

- La solución de este último programa es el VaR:

$$\rho(X) = \text{VaR}[X; 1 - \varepsilon]$$



3- Medidas del riesgo

Cálculo del capital económico mediante el VaR

- Llamemos S a la siniestralidad total a lo largo de un periodo de una línea de negocio, P a sus ingresos por primas.

Entonces se necesita un capital $VaR(S; p) - P$ que hace técnicamente solvente a la línea de negocio, con una probabilidad p .

- Para un nivel de confianza $1 - p$ el Capital Económico basado en el VaR es:

$$EC[S; p] = VaR[S; p] - E[S]$$



3- Medidas del riesgo

Tail Value at Risk - TVaR

- El VaR tiene el inconveniente de que no nos da una apreciación del peligro que hay en la cola de la distribución.
 - No nos da una medida de “cuánto hay de malo” más allá del VaR
- Esto motiva el uso de otra medida del riesgo:

Definición: TVaR

$$TVaR[X; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X; \xi] d\xi, \quad 0 < p < 1, \quad X \in \mathcal{X}$$

El TVaR con nivel p es pues **una media aritmética de todos los VaR al nivel de confianza p .**



3- Medidas del riesgo

Estimación muestral del VaR y del TVaR

- El VaR a un nivel p se **estima** como el cuantil p de una muestra simulada de la distribución.

- El TVaR a un nivel p para una muestra ordenada x se **estima** como :

$$\frac{1}{\# \{x_i > VaR_p(x)\} + 1} \sum_{x_i > VaR_p(x)} x_i$$

- En <https://jlvilarz.shinyapps.io/ShinyJLVZ> hay una App-ejemplo con distribuciones “Poisson compuesta con Gamma”.

(Entren de uno en uno para que no se cuelgue)



3- Medidas del riesgo

Conditional Tail Expectation (CTE)

Si calculamos la pérdida media condicionada a una **pérdida** mayor que el VaR, obtenemos el CTE:

Definición: (CTE) $CTE[X; p] = E[X \mid X > VaR[X; p]]$

el CTE nos proporciona una estimación de las pérdidas medias por encima del VaR, suponiendo que hayamos fijado el VaR como umbral crítico (para dotar el capital de solvencia por ejemplo).



3- Medidas del riesgo

VaR condicional (CVaR) y Expected Shortfall (ES)

Una alternativa al CTE es el CVaR. Este es el valor medio de los **excesos** por encima del VaR:

Definición: CVaR

$$\begin{aligned} CVaR[X; p] &= E[X - VaR[X; p] | X > VaR[X; p]] \\ &= CTE[X; p] - VaR[X; p] \end{aligned}$$

La relación entre el CVaR y la **función de exceso medio** es:

$$CVaR[X; p] = e_x(VaR[X; p])$$

Definición: ES

$$ES[X; p] = E[(X - VaR[X, p])_+]$$



3- Medidas del riesgo

Relaciones entre las medidas del riesgo

1- Relación entre TVaR y Expected Shortfall:

$$\begin{aligned} ES[X; p] &= E\left[\left(X - VaR[X, p]\right)_+\right] \\ &= \int_0^{+\infty} \left(x - VaR[X, p]\right)_+ dF_X(x) \dots \text{Cambiando a: } x = F_X^{-1}(\xi), \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \xi = 0 \\ x = +\infty \Rightarrow \xi = 1 \end{cases} \\ &= \int_0^1 \left(VaR[X, \xi] - VaR[X, p]\right)_+ d\xi \\ &= \int_0^p \left(VaR[X, \xi] - VaR[X, p]\right)_+ d\xi + \int_p^1 \left(VaR[X, \xi] - VaR[X, p]\right)_+ d\xi \\ &= \int_p^1 \left(VaR[X, \xi] - VaR[X, p]\right) d\xi \\ &= \int_p^1 VaR[X, \xi] d\xi - VaR[X, p] \int_p^1 d\xi \\ &= (1-p)TVaR[X; p] - VaR[X, p](1-p) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow TVaR[X; p] = VaR[X, p] + \frac{1}{1-p} ES[X; p]$$



3- Medidas del riesgo

Relaciones entre las medidas del riesgo

2- Relación entre CTE y ES:

$$\begin{aligned}CTE[X; p] &= E[X | X > VaR[X; p]] \\&= \frac{1}{1 - F_X(VaR[X, p])} \int_{VaR[X, p]}^{+\infty} x dF_X(x) \\&= \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X, p])} \int_{VaR[X, p]}^{+\infty} (x - VaR[X, p] + VaR[X, p]) dF_X(x) \\&= \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X, p])} \left[\int_{VaR[X, p]}^{+\infty} (x - VaR[X, p]) dF_X(x) + VaR[X, p] (1 - F_X(VaR[X, p])) \right] \\&= \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X, p])} ES[X; p] + VaR[X, p]\end{aligned}$$

$$CTE[X; p] = VaR[X, p] + \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X, p])} ES[X; p]$$



3- Medidas del riesgo

Relaciones entre las medidas del riesgo

3- Relación entre CVaR y ES:

$$\begin{aligned} CVaR[X; p] &= E[X - VaR[X; p] | X > VaR[X; p]] \\ &= \frac{(1 - F_X(VaR[X; p]))}{(1 - F_X(VaR[X; p]))} E[X - VaR[X; p] | X > VaR[X; p]] \\ &= \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X; p])} E[(X - VaR[X; p])_+] \\ &= \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X; p])} ES[X; p] \end{aligned}$$

$$CVaR[X; p] = \frac{ES[X; p]}{\bar{F}_X(VaR[X; p])}$$



3- Medidas del riesgo

Relaciones entre las medidas del riesgo

4- Relación entre CTE y TVaR en el caso continuo:

$$CTE[X; p] = TVaR[X; p], p \in (0, 1)$$

5- Relación entre CTE y TVaR en el caso general:

$$TVaR[X; p] = CTE[X; p] + \underbrace{\left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{\bar{F}_X(VaR[X; p])} \right)}_{\text{Esta diferencia es } > 0 \text{ en los saltos de la distribución}} ES[X; p]$$

Esta diferencia es > 0 en los saltos de la distribución

6- Relación entre CVaR y TVaR en el caso continuo:

$$\left. \begin{array}{l} TVaR[X; p] = CTE[X; p] \\ CVaR[X; p] = CTE[X; p] - VaR[X; p] \end{array} \right\} \Rightarrow TVaR[X; p] = VaR[X; p] + CVaR[X; p]$$



3- Medidas del riesgo

Propiedades del TVaR

TVaR verifica todas las propiedades deseables:

No-riporff, no induce recargo injustificado, induce un recargo no negativo, **invariante por translaciones**, **positivamente homogéneo**, comonotonamente aditiva, **monótona**, **subaditiva**, objetiva y continua respecto de la función de distribución.

- **TVaR es pues una medida del riesgo coherente.**



3- Medidas del riesgo

Capital Económico basado en el TVaR

- Llamando S a la siniestralidad total de una cartera a lo largo de un periodo, y P a los ingresos por primas.
- Si reservamos un capital igual a $TVaR[S; p] - P$, logramos que cuando la siniestralidad excede $VaR[S; p]$ todavía podamos hacerle frente siempre que sea inferior a $TVaR[S; p]$.
- Para una probabilidad $p \in (0,1)$ el capital económico basado en el TVaR es:

$$EC[S; p] = TVaR[S; p] - E(S)$$



3- Medidas del riesgo

Propiedades del CTE

El TVaR y el CTE coinciden para distribuciones continuas.
Por tanto para distribuciones continuas el CTE hereda todas las propiedades del TVaR.



3- Medidas del riesgo

El principio de la utilidad nula

Consideramos una Cía con función de utilidad $u(x)$ no decreciente.

La Cía cubre el riesgo X calculando la prima como la raíz de la siguiente ecuación:

$$E\left[u\left(\Pi(X) - X\right)\right] = u(0)$$

- **El principio de utilidad nula** verifica: no ripoff, recargo no negativo cuando $u(x)$ es cóncava, invariante por translaciones.
- En general no es positivamente homogéneo.



3- Medidas del riesgo

La medida del riesgo de Esscher. Prima de Esscher.

Para un riesgo X queremos calcular la prima P que maximiza la utilidad del contrato: $E\{u(P - X)\}$.

Para no obtener como solución $P = +\infty$ ($u(\cdot)$ es creciente), vamos a modificar la idea de la siguiente forma: maximizando la anterior esperanza para $P = E\{Xw(X)\}$, para cierta función $w(\cdot)$ a determinar, y tomando como función de utilidad exponencial:

$$u(x) = \frac{1 - e^{-cx}}{c} \Rightarrow c = -\frac{u''}{u'}$$

De forma que c mide la *aversión al riesgo* de la Cía, según la medida de Aversión al riesgo de Arrow-Pratt.



3- Medidas del riesgo

La medida del riesgo de Esscher o Prima de Esscher.

El resultado restringiéndonos a las funciones w / $E\{w(X)\} = 1$:

$$w(x) = \frac{e^{cx}}{M_X(c)}$$

Recordemos que:

$$M_X(c) = E\{e^{cX}\} = \int_0^{+\infty} e^{cx} dF_X(x)$$

Entonces la prima resultante o **Prima de Esscher** es:

$$E\{Xw(X)\} = E\left\{X \frac{e^{cX}}{M_X(c)}\right\} = \int_0^{+\infty} x \frac{e^{cx}}{M_X(c)} f_X(x) dx$$

Hemos ponderado el riesgo original de forma que

$f^*(x) = w(x) f_X(x)$, y $w(\cdot)$ pone mayor masa en valores elevados de X , luego implica un recargo.



3- Medidas del riesgo

La prima de Esscher. Transformada de Esscher.

Prima de Esscher:

$$Es[X; c] = \frac{E\{Xe^{cX}\}}{M_X(c)} = \frac{d}{dc}[\log M_X(c)]$$

Transformada de Esscher de la FD $F_X(x)$:

$$dF_{X,c}(x) = \frac{e^{cx} dF_X(x)}{M_X(c)}, c > 0$$

$dF_{X,c}(x)$ es la función de distribución de una nueva v.a. X_c , de manera que su esperanza es la prima de Esscher:

$$Es[X; c] = E\{X_c\} = \int_0^{+\infty} x dF_{X,c}(x)$$



3- Medidas del riesgo

Propiedades de la transformada de Esscher.

Prop 1: La transformación $c \mapsto Es[X; c] = E\{X_c\}$ es creciente en c para cualquier riesgo X .

- Como consecuencia se tiene que la prima de Esscher tiene recargo positivo y no excesivo:

$$Es[X; 0] = E\{X\} \Rightarrow \forall c \geq 0 : Es[X; c] \geq E\{X\}$$

$$\forall c > 0 : Es[X; c] \leq \lim_{c \rightarrow +\infty} Es[X; c] = \max(X)$$



3- Medidas del riesgo

Transformada de Esscher. Relación con la Probabilidad Neutral al Riesgo en Finanzas.

- En Finanzas los precios de las opciones se calculan como una esperanza sobre todos las posibles liquidaciones. **Pero NO respecto de la probabilidades frecuentistas.**
- La esperanza se calcula respecto de las **Probabilidades Neutrales al Riesgo.**
- Una possible PNR viene dada por la transformada de Esscher $dF_{X,c}(x)$.



3- Medidas del riesgo

La medida de Wang

Definición:

La **medida de Wang** ρ_g para un riesgo $X \in \mathcal{X}$ se define como

$$\rho_g [X] = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_X(x)) dx$$

para alguna función no decreciente g tal que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

La función g es la **función de distorsión**.

Nota: $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$



3- Medidas del riesgo

Propiedades de la medida de Wang

La medida de Wang verifica:

- No ripoff,
- homogénea positiva,
- invariante por translaciones,
- monótona,
- comonótonamente aditiva, y
- subaditiva si y solo si la función de distorsión es cóncava.



3- Medidas del riesgo

Casos particulares de medidas de Wang

1- VaR es una medida de Wang

$$g(x) = 1_{\{x \geq 1-p\}}, 0 \leq x \leq 1, p \in [0,1) \Rightarrow \rho_g[X] = \text{VaR}[X; p]$$

Como la función de distorsión no es cóncava, VaR no es subaditivo.

2- TVaR es una medida de Wang

$$g(x) = \min \left\{ \frac{x}{1-p}, 1 \right\}, 0 \leq x \leq 1, p \in [0,1] \text{ fijo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_g[X] = \frac{1}{1-p} \int_0^{1-p} \text{VaR}[X; 1-\xi] d\xi \underset{\substack{\text{CAMBIO} \\ u=1-\xi}}{=} \frac{1}{1-p} \int_p^1 \text{VaR}[X; u] du$$

3- Ni ES ni CTE son medidas de Wang

[Ir a la pág.69](#)



3- Medidas del riesgo

Casos particulares de medidas de Wang

➤ **Medida de riesgo de potencia dual:**

$$g(p) = 1 - (1 - p)^\xi, \xi \geq 1 \Rightarrow \rho_g[X] = \int_0^{+\infty} \left(1 - (F(x))^\xi\right) dx$$

Cuando ξ es un entero esta medida se interpreta como la esperanza del $\max\{X_1, \dots, X_\xi\}$.

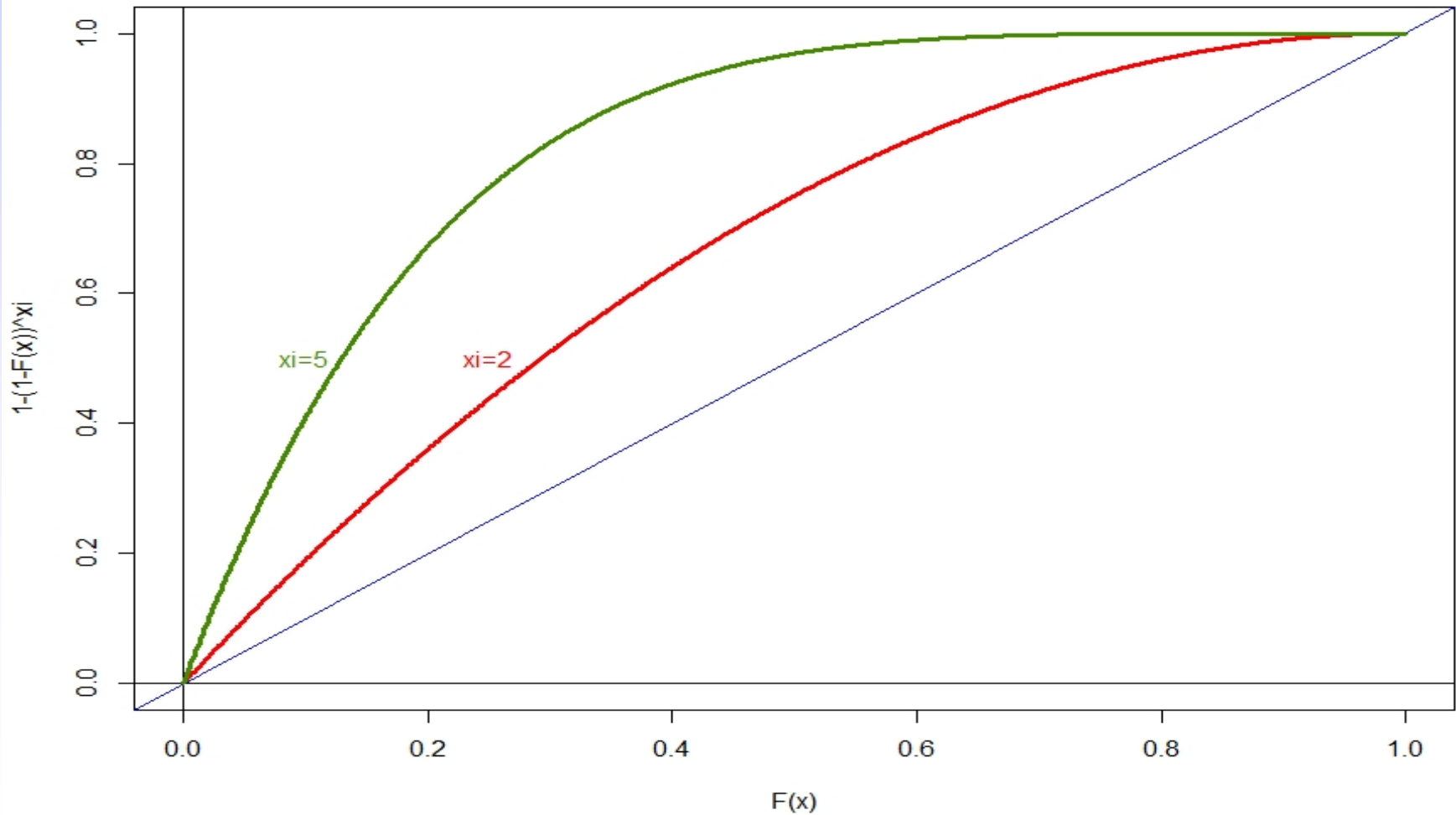
Así pues esta medida sería muy conservadora en el sentido de que procede primero calculando el máximo de las v.a. (que es el valor menos favorable) para a continuación calcular la esperanza de este máximo.



3- Medidas del riesgo

Casos particulares de medidas de Wang

Distorsión de la medida de riesgo potencia dual





3- Medidas del riesgo

Casos particulares de medidas de Wang

- Medida del riesgo de la transformada función de potencia o **Proportional Hazard (PH) risk measure**.

$$g(p) = p^{1/\xi}, \xi \geq 1 \Rightarrow PH_{\xi} [X] = \rho_g [X] = \int_0^{+\infty} \left(\bar{F}(x) \right)^{1/\xi} dx$$

$\xi \geq 1$ se interpreta como un parámetro de aversión al riesgo.

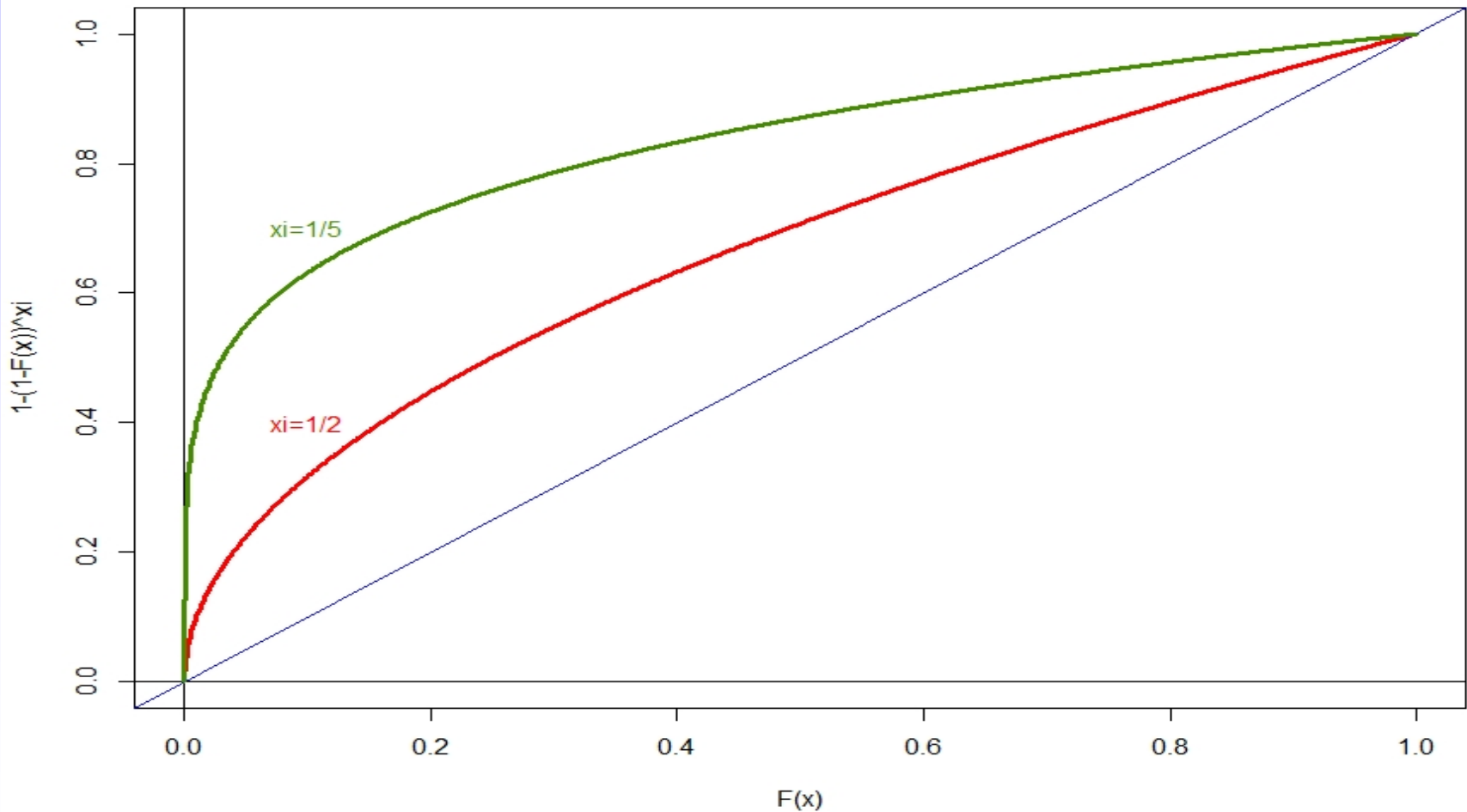
La función $\left(\bar{F}(x) \right)^{1/\xi} = \left(1 - F(x) \right)^{1/\xi}$ depende de la cola de la distribución. La medida es pues la esperanza de esa función de la cola.



3- Medidas del riesgo

Casos particulares de medidas de Wang

Distorsión de la medida de riesgo proportional hazard





4-Ordenación de riesgos

Ordenes parciales sobre riesgos

Para ordenar riesgos hablamos indistintamente de sus F.D.

$F_X(x)$ o de las variables aleatorias X .

Definición: Dado un conjunto de F.D $\mathcal{F}$, un orden parcial $\leq$

en $\mathcal{F}$ verifica : $\forall F_X, F_Y, F_Z$

1-Transitiva:
$$\begin{matrix} F_X \leq F_Y \\ F_Y \leq F_Z \end{matrix} \Rightarrow F_X \leq F_Z$$

2-Reflexiva: $F_X \leq F_X$

3-Antisimétrica:
$$\begin{matrix} F_X \leq F_Y \\ F_X \geq F_Y \end{matrix} \Rightarrow F_X \equiv F_Y$$

Además el orden es TOTAL si cumple:

$$\forall F_X, F_Y : F_X \leq F_Y \text{ o bien } F_X \geq F_Y$$

(Todos los riesgos son comparables)



4- Ordenación de riesgos

Propiedades deseables de los ordenes de riesgos

Estabilidad por ponderación: $(X | \Lambda = \lambda) \leq (Y | \Lambda = \lambda), \forall \lambda \Rightarrow X \leq Y$

Estabilidad por convolución:

$$(X_i)_{i=1}^{\infty}, (Y_i)_{i=1}^{\infty} / \forall i : X_i \leq Y_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \leq \sum_{i=1}^n Y_i, \forall n \in \mathbb{N}$$

Una consecuencia es la estabilidad por composición:

$$\left. (X_i)_{i=1}^{\infty}, (Y_i)_{i=1}^{\infty} \text{ v.a.i.} / \forall i : X_i \leq Y_i, \quad N = 0, 1, 2, \dots \text{ v.a.i.} \quad (X_i)_{i=1}^{\infty}, (Y_i)_{i=1}^{\infty} \right\} \Rightarrow$$

$\leq$ estable por ponderación y convolución

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N X_i \leq \sum_{i=1}^N Y_i$$



4- Ordenación de riesgos

Propiedades deseables de los ordenes de riesgos

Estabilidad por composición: En los supuestos anteriores, si además:

$$M = 0, 1, 2, \dots \text{ v.a. tal que: } N \leq M : \sum_{i=1}^N X_i \leq \sum_{i=1}^M X_i$$

Estabilidad por paso al límite:

$$(X_i)_{i=1}^{\infty}, (Y_i)_{i=1}^{\infty} / \forall i : X_i \leq Y_i, \quad X_i \xrightarrow{d} X, Y_i \xrightarrow{d} Y \Rightarrow X \leq Y.$$



4- Ordenación de riesgos

Ordenes estocásticos por integrales

Una técnica para definir un orden estocástico es :

1. Considerar una clase de funciones U_* . Por ejemplo: crecientes, convexas, cóncavas, etc....
2. Ordenar las v.a. mediante sus esperanzas respecto de dicha clase (esperanza=integral):

Dos v.a. X, Y están estocásticamente ordenadas según el orden $\leq_*$ generado por la clase U_* si:

$$X \leq_* Y \Leftrightarrow E \{t(X)\} \leq E \{t(Y)\}, \quad \forall t \in U_*$$

Por ejemplo, si las $t(x)$ son funciones de utilidad, estaremos hablando de Teoría de la Utilidad Esperada.



4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica

Otra idea sencilla para definir ordenes sobre riesgos consiste en tomar una medida de riesgo, y graduar los riesgos según dicha medida, para aquellos riesgos que quedan “uniformemente” clasificados. Veamos el primer ejemplo con el VaR.

Definición: Sean dos riesgos (v.a. positivas) X, Y :

$$X \leq_{ST} Y : VaR[X; p] \leq VaR[Y; p], \forall p \in (0, 1).$$

Para dar una forma de visualizar la dominancia Estocástica,

definimos la siguiente: $x \mapsto VaR[X, F_Y(x)]$

Precaución

Esto se llama función de distribución inversa relativa.



4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica- Caracterización tipo qq.

Proposición:

$$X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow VaR[X, F_Y(x)] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

$$(\Rightarrow) X \leq_{ST} Y \Rightarrow VaR[X; F_Y(x)] \underset{\text{DEF de ST}}{\leq} VaR[Y; F_Y(x)] = F_Y^{-1}(F_Y(x)) \underset{F_Y^{-1}(p) = \inf\{x/F_Y(x)=p\}}{\leq} x$$

$$(\Leftarrow) VaR[X, F_Y(x)] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F_X^{-1}(F_Y(x)) \leq x$$

$$\underset{F \text{ no decreciente}}{\Rightarrow} F_X(F_X^{-1}(F_Y(x))) = F_Y(x) \leq F_X(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow VaR[X, p] \leq VaR[Y, p], \forall p \in (0,1)$$

(cqdd)



4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica, monotonía y prima stop-loss.

Proposición:

$$X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \exists \tilde{X}, \tilde{Y} \text{ v.a. / } X =_d \tilde{X}, Y =_d \tilde{Y} \text{ y además } P\{\tilde{X} \leq \tilde{Y}\} = 1$$

Proposición:

Si ρ es una medida de riesgo objetiva y monótona, entonces:

$$X \leq_{ST} Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

La prima stop-loss (SL) para un riesgo X es: $\pi_X(t) = E\{(X - t)_+\}$

Proposición:

$$X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \pi_Y(t) - \pi_X(t) \text{ es no creciente en } t \in \mathbb{R}$$



4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica y preferencias sobre riesgos

Vamos a considerar unas funciones de utilidad lo más sencillas posible:

$$\forall t \in \mathbb{R} : u_t(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq t \\ 1 & , x > t \end{cases}$$

Describe a aquellos decisores que se sienten satisfechos cuando su nivel de riqueza alcanza t , pero que no les importa no incrementar dicho nivel.

Entonces es claro que si prefirieran X a Y :

$$E \{u_t(x)\} = \int_t^{+\infty} dF_X(x) = \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) = \int_t^{+\infty} dF_Y(x) = E \{u_t(Y)\}$$

Ahora consideremos a todos los decisores que están dotados de estas funciones de utilidad.

¿Que sucede cuando todos ellos prefieren un riesgo X a otro Y ?



4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica y preferencias sobre riesgos

Proposición:

Si todos los decisores con estas utilidades prefieren a un riesgo X sobre otro Y , entonces:

Demostración: $X \leq_{ST} Y$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq F_Y(t) \\ &\Leftrightarrow \forall p \in [0,1] : VaR[X; p] \leq VaR[Y; p] \end{aligned}$$

Consecuencia sobre las gráficas de las FD:

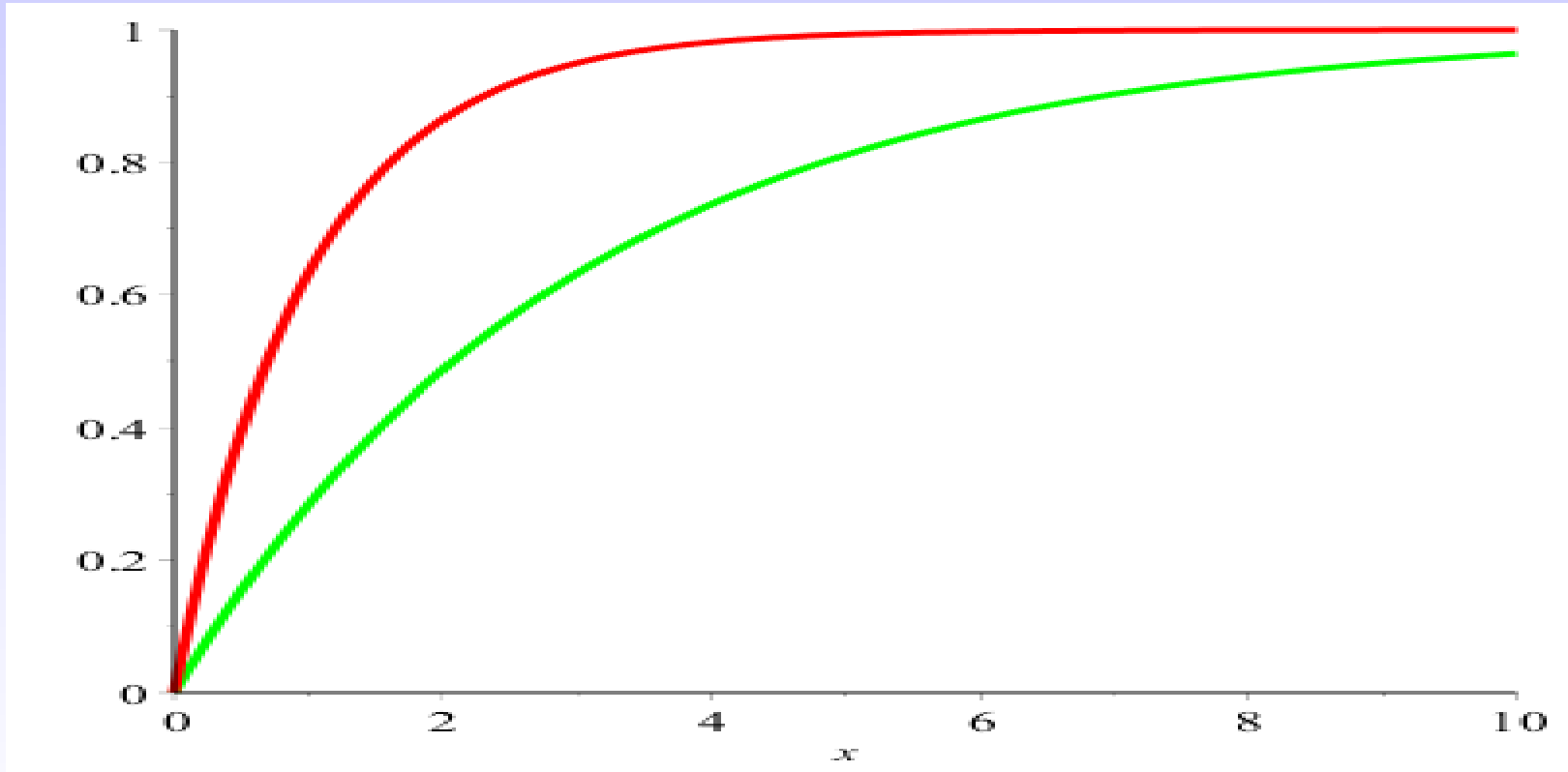
$$X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq F_Y(t)$$





4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica y preferencias sobre riesgos



$$X \sim \text{Exp}(1) \text{ (rojo)}, Y \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (verde)}: X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq F_Y(t)$$



4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica y preferencias de decisores con funciones de utilidad crecientes

Proposición:

$$X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow E \{v(X)\} \leq E \{v(Y)\}, \forall v(x) \text{ no decreciente } (v' \geq 0)$$

Demostración:

$(\Leftarrow) u(z) = I_{\{x \geq z\}}(x)$ es función no decreciente en x , $\forall z \in \mathbb{R}$. Además recordando:

$$\bar{F}_X(z) = E \{I_{\{x \geq z\}}(X)\}, \bar{F}_Y(z) = E \{I_{\{y \geq z\}}(Y)\} \Rightarrow \bar{F}_X(z) \leq \bar{F}_Y(z), \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow X \leq_{ST} Y$$

$(\Rightarrow) X \leq_{ST} Y \Rightarrow P\{\tilde{X} \leq \tilde{Y}\} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E \{v(X)\} = E \{v(\tilde{X})\} \leq E \{v(\tilde{Y})\} = E \{v(Y)\} \quad (\text{cqnd})$$

El orden de la Dominancia Estocástica es el orden de los decisores que prefieren siempre aumentar su riqueza.





4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica y medidas de Wang.

Proposición:

$X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \forall g$ distorsión no decreciente :

$$\int_0^{+\infty} g(\bar{F}_X(x))dx = \rho_g[X] \leq \rho_g[Y] = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_Y(y))dy,$$

Demostración:

$$(\Rightarrow) X \leq_{ST} Y \Rightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t), \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

g no decreciente

$$\Rightarrow g(\bar{F}_X(t)) \leq g(\bar{F}_Y(t)), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \rho_g[X] \leq \rho_g[Y]$$

$(\Leftarrow)$ Inmediato por la proposición anterior ya probada (cqdd)

El orden de la Dominancia Estocástica es el orden de los decisores con funciones de distorsión no decrecientes.





4- Ordenación de riesgos

Dominancia Estocástica y funciones de masa de v.a. discretas.

Proposición: Consideramos $N, M = 0, 1, 2, 3, \dots$ v. a. Entonces:

$N \leq_{ST} M \Leftrightarrow$ Condiciones equivalentes:

$$(i) \forall i \in \mathbb{N} : \sum_{j=0}^i P\{N = j\} \geq \sum_{j=0}^i P\{M = j\}$$

$$(ii) \forall i \in \mathbb{N} : \sum_{j=i}^{+\infty} P\{N = j\} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} P\{M = j\}$$



4- Ordenación de riesgos

Orden convexo (cvx) $\leq_{SL,=}$

Orden CVX:

X, Y v.a. tales que: $E\{X\} = E\{Y\}$.

$X \leq_{SL,=} Y$ cuando:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \pi_X(t) = E\{(X - t)_+\} \leq E\{(Y - t)_+\} = \pi_Y(t)$$

Las primas puras son iguales pero la prima SL es menor para X .

Consecuencia: $X \leq_{SL,=} Y \Rightarrow \begin{cases} \min(Y) \leq \min(X) \\ \max(Y) \geq \max(X) \end{cases}$

(Y tiene un rango más “ancho” que X)



4- Ordenación de riesgos

Orden Stop-Loss (SL), $\leq_{SL}$

Orden Stop-Loss (SL):

X, Y v.a.: $X \leq_{SL} Y$ cuando: $\pi_X(t) \leq \pi_Y(t), \forall t \in \mathbb{R}$

Relación con el orden CVX, $\leq_{SL,=}$:

$$\left. \begin{array}{l} X \leq_{SL} Y \\ E\{X\} = E\{Y\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow X \leq_{SL,=} Y$$



4- Ordenación de riesgos

Orden convexo (cvx) $\leq_{SL,=}$ y preferencias sobre riesgos

Proposición:

$$X \leq_{SL,=} Y \Leftrightarrow E\{v(X)\} \leq E\{v(Y)\}, \forall v(x) \text{ función convexa } (v''(x) \geq 0)$$

Consecuencia sobre las varianzas (a igualdad de medias):

Como $v(x) = x^2$ es una función convexa tenemos que:

$$X \leq_{SL,=} Y \Rightarrow E\{X^2\} - E^2\{X\} = \text{Varianza}(X) \leq \text{Varianza}(Y) = E\{Y^2\} - E^2\{Y\}$$

Por esta razón al orden Convexo también se le denomina orden de la **variabilidad**.



4- Ordenación de riesgos

Orden convexo (cvx) $\leq_{SL,=}$ y Teoría de la Utilidad Esperada

Consideremos un decisor averso al riesgo y con riqueza inicial w .

Supongamos también dos riesgos $X \leq_{SL,=} Y$

Como la función: $t \mapsto -u(w-t)$ es convexa:

$$E \{ -u(w-X) \} \leq E \{ -u(w-Y) \} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E \{ u(w-X) \} \geq E \{ u(w-Y) \} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X \text{ es preferido a } Y$$

El orden convexo $\leq_{SL,=}$ es el orden de los decisores aversos al riesgo





4- Ordenación de riesgos

Orden Stop-Loss (SL), $\leq_{SL}$, y preferencias sobre riesgos

Proposición:

$$X \leq_{SL} Y \Leftrightarrow E\{v(X)\} \leq E\{v(Y)\},$$

$\forall v(x)$ función no decreciente convexa ($v'(x) \geq 0, v''(x) \geq 0$)

Consideremos un decisor averso al riesgo y con riqueza inicial w .
Supongamos también dos riesgos $X \leq_{SL} Y$

Como la función: $t \mapsto -u(w-t)$ es no decreciente y convexa:

$$E\{-u(w-X)\} \leq E\{-u(w-Y)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E\{u(w-X)\} \geq E\{u(w-Y)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X \text{ es preferido a } Y$$

De manera que un decisor averso al riesgo prefiere X a Y .





4- Ordenación de riesgos

Orden Stop-Loss (SL), $\leq_{SL}$, y medidas de Wang

$$X \leq_{SL} Y \Leftrightarrow \rho_g[X] \leq \rho_g[Y], \forall g \text{ no decreciente y cóncava}$$

El orden SL es el de los decisores con distorsiones no decrecientes y cóncavas.



Consecuencia:

Teniendo en cuenta el resultado anterior y tomando una distorsión ([ver pág. 47](#)):

$$g(x) = \min \left\{ \frac{x}{p}, 1 \right\}, p \in (0, 1)$$

Se obtiene que:

$$X \leq_{SL} Y \Leftrightarrow TVaR[X; p] \leq TVaR[Y; p], \forall p \in [0, 1]$$

El orden SL es el “natural” respecto del TVaR





5-Participación del asegurado en las garantías. Límites en la garantía

Franquicias:

El asegurado se hace cargo de siniestros de pequeña cuantía

Límites en la garantía:

El asegurado se hace cargo de indemnizaciones de gran tamaño.



5-Participación del asegurado en las garantías. Seguro con franquicia absoluta

Sea A la franquicia

Sea X la cuantía de un siniestro

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } X \leq A & \begin{cases} X \text{ a cargo del asegurado} \\ 0 \text{ a cargo de la empresa} \end{cases} \\ \text{si } X > A & \begin{cases} A \text{ a cargo del asegurado} \\ X-A \text{ a cargo de la empresa} \end{cases} \end{array} \right.$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Seguro con franquicia absoluta. Función de Distribución

Llamemos a la v.a. franquiciada: $X_A = (X - A)_+$. Entonces su función de distribución es de tipo mixto:

$$P(X_A = 0) = P(X \leq A) = F_X(A) \quad (\text{salto en } x = 0)$$

$$f_{X_A}(x) = f_X(x + A), x > 0 \quad (\text{trozo continuo})$$

La función de distribución de X_A :

$$F_{X_A}(x) = F_X(x + A), x \geq 0$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Seguro con franquicia absoluta

Si V es la f. distr.. de la cuantía de un siniestro

$$\begin{aligned} E(X_A) &= 0 \int_0^A dV(X) + \int_A^{+\infty} (X - A) dV(X) \\ &= \int_A^{+\infty} X dV(X) - A(1 - V(A)) \end{aligned}$$

Donde $E(X_A)$ es el coste medio de un siniestro con franquicia A . La prima pura es $P = E(N)E(X_A)$



5-Participación del asegurado en las garantías. Seguro con franquicia relativa

Sea A la franquicia

Sea X la cuantía de un siniestro

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } X \leq A & \begin{cases} X \text{ a cargo del asegurado} \\ 0 \text{ a cargo de la empresa} \end{cases} \\ \text{si } X > A & \begin{cases} 0 \text{ a cargo del asegurado} \\ X \text{ a cargo de la empresa} \end{cases} \end{array} \right.$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Seguro con franquicia relativa

$$E(X_A) = 0 \int_0^A dV(X) + \int_A^{+\infty} X dV(X)$$

$$P = E(N) E(X_A)$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Franquicia como porcentaje

Sea $0 < \alpha < 1$

X cuantía de un siniestro

$$X_{\alpha} = \begin{cases} \alpha X, & \text{a cargo de la empresa} \\ (1-\alpha) X, & \text{a cargo del asegurado} \end{cases}$$

La función de densidad de la v.a. franquiciada es:

$$f_{X_{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} f_X \left(\frac{x}{\alpha} \right)$$

$$E(X_{\alpha}) = \int_0^{+\infty} \alpha X \, dV(X) = \alpha E(X)$$

$$P = E(N) E(X_{\alpha})$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Límites en la garantía

Sean: L : el límite en la garantía

X : cuantía de un siniestro

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } X \leq L & \begin{cases} X & \text{a cargo de la empresa} \\ 0 & \text{a cargo del asegurado} \end{cases} \\ \text{Si } X > L & \begin{cases} L & \text{a cargo de la empresa} \\ X - L & \text{a cargo del asegurado} \end{cases} \end{array} \right.$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Límites en la garantía

El coste medio de un siniestro con un límite L es:

$$\begin{aligned} E(X_L) &= \int_0^L X \, dV(x) + L \int_L^{+\infty} dV(X) = \\ &= \int_0^L X \, dV(X) + L(1 - V(L)) \end{aligned}$$

y la prima pura:

$$P = E(N)E(X_L)$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Franquicia y límite en la garantía

Sean A y L

X cuantía de un siniestro

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } X \leq A & \begin{cases} 0 & \text{a cargo de la empresa} \\ X & \text{a cargo del asegurado} \end{cases} \\ \\ \text{Si } A \leq X \leq L & \begin{cases} X - A & \text{a cargo de la empresa} \\ A & \text{a cargo del asegurado} \end{cases} \\ \\ \text{Si } X > L & \begin{cases} L - A & \text{a cargo de la empresa} \\ X - L - A & \text{a cargo del asegurado} \end{cases} \end{array} \right.$$



5-Participación del asegurado en las garantías. Franquicia y límite en la garantía

$$\begin{aligned} E(X_{AL}) &= \int_A^L (X - A) dV(X) + (L - A) \int_L^{+\infty} dV(X) = \\ &= \int_A^L X dV(X) + M(1 - V(L)) - A(1 - V(A)) \end{aligned}$$



Bibliografía

1. **Denuit M, Dahene J, Kaas R (2005): Actuarial Theory for dependent risks. Wiley.**
2. Tse Y.K. (2009): Nonlife Actuarial Models. Cambridge University Press.
3. Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados.



LECCIÓN 7

Sistemas de Tarificación

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



Índice de la lección 7

1. Sistemas de tarificación
2. Sistemas de tarificación a priori
3. Sistemas de tarificación a posteriori



Sistemas de Tarificación

Principios técnicos en los que se basa la elaboración de una tarifa.

➤ TARIFICACIÓN A PRIORI:

Agrupación de los riesgos con clase homogéneos de acuerdo a unos determinados factores de riesgo que hay que determinar previamente

➤ TARIFICACIÓN A POSTERIORI:

La prima se modifica de acuerdo a la experiencia de siniestralidad de cada riesgo.



Sistemas de Tarificación a Priori

Eta 1: Selección de los Factores de Riesgo o Variables de Tarifa

FACTORES DE RIESGO: Aquellas características de los asegurados que permiten distinguirlas a unas de otras y que influyen significativamente en la siniestralidad

- En seguros de vida: edad y sexo
- En seguros de no vida: más complejo, muchos factores, algunos de ellos de difícil observación.



Sistemas de Tarificación a Priori

Etapas 1: Selección de los Factores de Riesgo o Variables de Tarifa

Se han de seleccionar los factores que mayor influencia tienen en la siniestralidad

Se han de recurrir a distintas técnicas estadísticas:

- Regresión y **modelos lineales generalizados**
- Análisis de la varianza
- Análisis discriminante



Sistemas de Tarificación a Priori

Etaapa 2: Determinación de las clases homogéneas de riesgo.

Los factores de riesgo seleccionados se presentarán con un distinto nivel de intensidad en los diferentes asegurados.

Ejemplo:

Consideremos por ejemplo el factor “**nº de kilómetros recorridos en un año**” Para el seguro del automóvil.

Se ha de agrupar en distintas clases el nivel de intensidad con que puede presentarse cada factor.

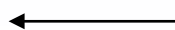
Así los kms recorridos:

0-5000

5000-7500

7500-10000

⋮



CLUSTER ANALYSIS Matemática Actuarial Selección 7



Sistemas de Tarificación a Priori

Etaapa 2: Determinación de las clases homogéneas de riesgo.

- Imaginemos que ya tenemos las clases homogéneas:

$F_2 \backslash F_1$	N_1^1	N_2^1	N_3^1	N_4^1
N_1^2	C_{11}	C_{21}	C_{31}	C_{41}
N_2^2	C_{12}	C_{22}	C_{32}	C_{42}
N_3^2	C_{13}	C_{23}	C_{33}	C_{43}

Correspondientes por ejemplo, a dos Factores F_1 y F_2

C_{ij} : clase de riesgos que posee el factor 1 al nivel i y el factor 2 al nivel j .



Sistemas de Tarificación a Priori

Etapa 2: Determinación de las clases homogéneas de riesgo.

A lo largo de todo este proceso se tiene que alcanzar un delicado equilibrio:

- Las clases de riesgo han de ser lo suficientemente grandes en cuantía al n° de asegurados como para que pueda estimarse la prima adecuadamente.
- Pero han de ser lo suficientemente pequeñas como para que puedan diferenciarse adecuadamente unos riesgos de otros.



Sistemas de Tarificación a Priori

Etapa 3: Determinación de la prima correspondiente a cada clase homogénea

Normalmente se obtiene una prima Base correspondiente a una de las clases homogéneas.

Las primas para el resto de las clases se obtienen multiplicando por un coeficiente estimado previamente.

Todo este proceso se explica en la asignatura
*Aplicaciones Actuariales de Programación Matemática y
Sistemas Dinámicos*
del segundo semestre.



Sistemas de Tarificación a Priori

Ejemplo del seguro del automóvil

Factores de riesgo básicos:

- Zona de circulación (garaje) (3 zonas)
- Categoría
 - Turismos
 - Camiones
 - Motos
- Potencia del vehículo

Factores de riesgo no básicos:

- Uso del vehículo
 - Privado
 - Público
- Características del conductor
 - Edad
 - Antigüedad carnet
 - Sexo



Sistemas de Tarificación a Priori

Ejemplo del seguro del automóvil

Prima base: de acuerdo a factores básicos

Sobre la prima base se aplican recargos o descuentos
En función de los factores no básicos.



Sistemas de Tarificación a Priori

Conclusiones

En general:

- Los factores de riesgo seleccionados no son los que determinan en mayor medida la siniestralidad
- Las “clases homogéneas” presentan “heterogeneidad” ya que los riesgos que la componen no son iguales (distinta distribución de siniestralidad).
- Este es el motivo de la introducción de sistemas de Tarificación a posteriori



Sistemas de Tarificación a Posteriori

Breve Introducción

- Estos sistemas buscan, una vez establecida una tarifa que a cada póliza le calcula una prima, ir modificando esta última en función de la experiencia de la siniestralidad annual de la póliza.
- Básicamente existen dos tipos de metodologías:
 1. Teoría de la credibilidad
 2. sistemas Bonus Malus



Sistemas de Tarificación a Posteriori

Teoría de la Credibilidad

- Se compone a su vez de distintas teorías que se originan en EEUU en la segunda década del siglo XX.
 - Teoría de la Credibilidad por fluctuación limitada
 - Teoría de la Credibilidad Total.
 - Teoría de la credibilidad Exacta.
 - Teoría de la Credibilidad de Bühlman

- En todos los casos se trata de confrontar:
 1. la información colectiva de la cartera que puede dar lugar una **prima colectiva, ABUNDANTE.**
 2. la información individual del riesgo, **ESCASA.**
 3. Ambas se mezclan en una **fórmula de credibilidad**, que depende de un **coeficiente de credibilidad**, para obtener una **estimación de la prima individual.**



Sistemas de Tarificación a Posteriori

Sistemas Bonus Malus

- El origen de esta metodología es europeo y de la mitad del s.XX
- La idea aquí es la de:
 1. Dividir la cartera en clases de bonus malus
 2. Definir unas reglas de transición para poder clasificar las pólizas dependiendo de la siniestralidad en el periodo anterior.
 3. Calcular una escala de primas, una prima por cada clase de bonus malus



Sistemas de Tarificación a Posteriori

Sistemas Bonus Malus

- Con un sistema bonus malus se logra, al menos en teoría:
 1. Que las peores pólizas suban en la escala de BM y acaben pagando más.
 2. Que las mejores bajen y paguen menos
 3. Se puede estudiar la clasificación de las pólizas a largo plazo, por medio de la distribución estacionaria.
 4. Se intenta que el equilibrio financiero de la cartera sea preservado.

Estas metodologías se explican en la asignatura
*Aplicaciones Actuariales de Programación Matemática y
Sistemas Dinámicos*
del segundo semestre.



LECCIÓN 8

Reaseguro.

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



Índice de la lección 8

1. Introducción
2. Modalidades de reaseguro
 - i. Proporcionales:
 - a) Cuota parte
 - b) Excedente
 - ii. No proporcionales
 - a) Excess-Loss
 - b) Stop-Loss
3. Introducción al Reaseguro óptimo.
 - i. Optimalidad de contratos
 - ii. Reaseguro óptimo con varias subcarteras
 - a) Cuota parte
 - b) Excess Loss



Introducción

- La mayor amenaza para la solvencia es la de la fluctuación aleatoria de la siniestralidad.
- El objetivo del reaseguro es precisamente el de amortiguar dicha fluctuación mediante la transferencia o cesión del riesgo.
- Tenemos que modelizar los contratos de reaseguro, averiguar cuál es óptimo desde el punto de vista de la cedente y como se prodría determinar el nivel de cesión óptimo.



Modalidades de reaseguro

Reaseguro facultativo

- El reaseguro facultativo es el tipo de reaseguro en el que tanto el asegurador (o cedente) como el reasegurador tienen la facultad de ceder o aceptar el negocio de que se trate.
- El reaseguro facultativo se suele efectuar sobre riesgos aislados, nominados y detallados individualmente.
- Ramos singulares, pólizas con sumas aseguradas especialmente altas, riesgos con pequeño número de pólizas, riesgos excluidos de contratos obligatorios, nuevas modalidades de seguro que se introducen en el mercado.



Modalidades de reaseguro

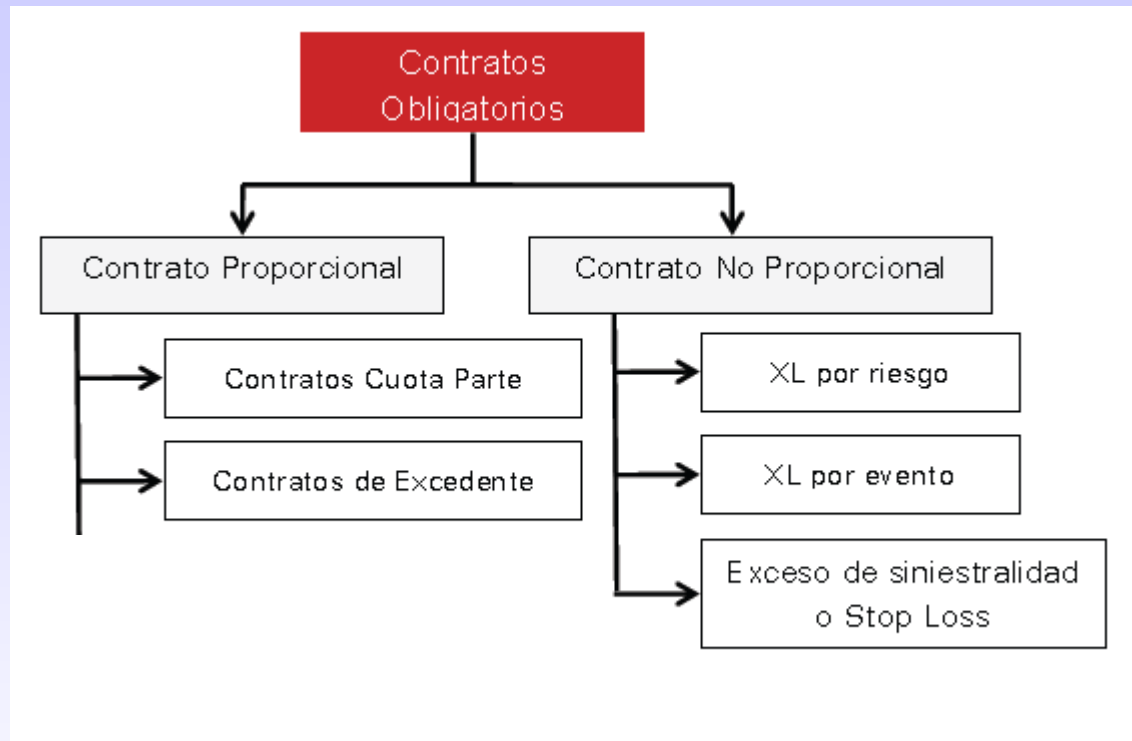
Reaseguro obligatorio

- Una vez que se establecen las condiciones del reaseguro para un tipo de operaciones, el asegurador está obligado a cederlas y el reasegurador a aceptarlas.
- La cobertura consiste en todos los riesgos asegurados en toda o parte de una cartera, especificada en el contrato obligatorio.
- Facilidades comerciales para el asegurador directo:
No tiene que buscar reaseguro riesgo a riesgo.



Contratos de reaseguro

Reaseguro obligatorio



- Por riesgo o por evento dependiendo si se quiere actuar contra los cúmulos de siniestros.
- Nosotros vamos a introducir los contratos CP, Excedente, XL y SL.



Contratos proporcionales

Cuota Parte

Los contratos proporcionales están diseñados de modo

que:
$$\frac{\text{Primas Cedidas}}{\text{Primas Brutas}} = \frac{\text{Siniestralidad Cedida}}{\text{Siniestralidad Bruta}}$$

Veamos en primer lugar el cuota Parte:

Se fija una cuota $a \in (0,1)$. Sucedido un siniestro de cuantía X :

A cargo de la Cedente: aX

A cargo del Reasegurador: $(1 - a)X$

Risk	Premiums	Claims
Total	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$S = \sum_{i=1}^n S_i$
Retained	aP	aS
Ceded	$(1 - a)P$	$(1 - a)S$



Contratos proporcionales

Cuota Parte

- La gestión de los siniestros la lleva a cabo la cedente por lo que estos contratos son de gestión sencilla y barata para el reasegurador.
- Es por ello que le suele pagar una comisión de reaseguro a la cedente para compensarla por los gastos de gestión.



Contratos proporcionales

Cuota Parte. Influencia en las distribuciones

Desde el punto de vista de la cedente, una vez fijada la cuota $a \in (0,1)$:

$$V_a(x) = P\{aX \leq x\} = P\left\{X \leq \frac{x}{a}\right\} = V\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$v_a(x) = \frac{1}{a} v\left(\frac{x}{a}\right)$$

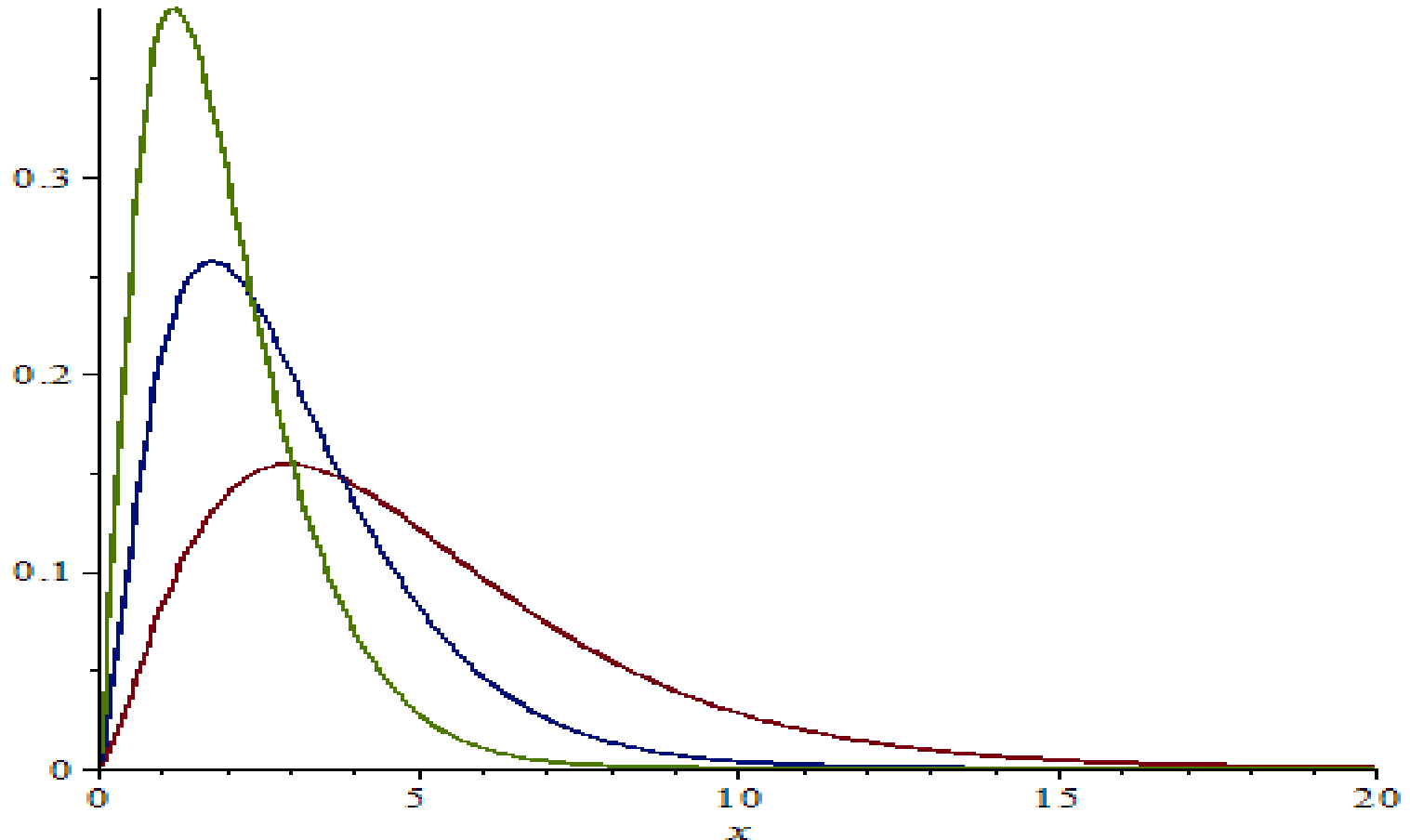
$$E(X_a) = aE(X), \quad \text{Var}(X_a) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$E(S_a) = aE(S), \quad \text{Var}(S_a) = a^2 \text{Var}(S)$$



Contratos proporcionales

Cuota Parte. Influencia en las distribuciones



Densidad Gamma con $\alpha = 1, 0.6, 0.4$



Contratos proporcionales

Excedente

Dados los riesgo i , con sumas aseguradas S_i , la cedente y el reasegurador pactan:

1. El **pleno de retención** R_i (para S_i inferior no se cede).
2. La **capacidad del contrato** como múltiplo del pleno: l_i

De aquí se obtiene el **pleno de suscripción inmediata**:

$$K_i = R_i + l_i R_i = (1 + l_i)R_i$$

Entonces la cesión del riesgo es:

$$1 - a_i = \frac{\min \left[(S_i - R_i)_+, (K_i - R_i)_+ \right]}{S_i}$$

La cía puede aceptar cualquier riesgo cuya suma asegurada no supere el pleno de suscripción inmediata.

- A partir de ahí el contrato funciona como un Cuota-Parte



Contratos proporcionales

Excedente

Ejemplo 1:

Supongamos un pleno de 1 millón € con una capacidad de 4 plenos. La capacidad de suscripción es por tanto de 5. Entonces las cuotas de cesión $(1 - a_i)$ para los siniestros y las primas, dependiendo del riesgo i son por ejemplo:

Insured value (millions of euros)	≤ 1	1.5	2	3	4	5
Cession rate (%)	0	33	50	67	75	80

(Haga los cálculos para comprobarlo).



Contratos proporcionales

Excedente

Ejemplo 2:

Pleno de retención: 10,000€

Tratado de 5 plenos

Pleno de suscripción inmediata: 60,000€

Consideremos una póliza con $S=50,000€$, y una prima $P=500€$.

$$1 - a = \frac{\min[40,000, ; 50,000]}{50,000} = 0.8, \quad a = \frac{10,000}{50,000} = 0.2$$

Para la cedente:

Suma asegurada: $50,000 \times 0.2 = 10,000€$

Prima: $500 \times 0.2 = 100€$

➤ Para la reaseguradora:

Suma asegurada: $50,000 \times 0.8 = 40,000€$

Prima: $500 \times 0.8 = 400€$

➤ Si acaece un siniestro de cuantía 20,000€:

➤ A cargo de la cedente: $20,000 \times 0.2 = 4,000€$

➤ A cargo de la reaseguradora: $20,000 \times 0.8 = 16,000€$



Contratos proporcionales

Excedente

Ejemplo 3:

Pleno de retención: 1,000€

1º excedente: 10 plenos ; 2º excedente: 5 plenos

Pleno de suscripción inmediata: 16,000€

Consideremos una póliza con $S=14,000€$, y una prima $P=1,000€$. Los porcentajes de reparto son entonces:

Para la Cedente: $\frac{1,000}{14,000} = \frac{1}{14}$;

Para las aceptantes: 1ºExcedente: $\frac{10,000}{14,000} = \frac{10}{14}$; 2ºExcedente: $\frac{3,000}{14,000} = \frac{3}{14}$

➤ Como se reparte la prima:

Para la Cedente: $1,000 \times \frac{1}{14} = 71.428$; Para las aceptantes:

1ºExcedente: $1,000 \times \frac{10}{14} = 714.28$; 2ºExcedente: $1,000 \times \frac{3}{14} = 214.285$

➤ Cómo se reparte un siniestro de cuantía 5,000€:

Para la Cedente: $5,000 \times \frac{1}{14} = 357.14$;

Para las aceptantes: 1ºExcedente: $5,000 \times \frac{10}{14} = 3571.4$;

2ºExcedente: $5,000 \times \frac{3}{14} = 1,785.71$



Contratos no proporcionales

Excess Loss (XL)

Se fija una prioridad $M > 0$. Entonces el reparto es así:

Para el asegurador directo:
$$X_A = \begin{cases} X, & X \leq M \\ M, & X > M \end{cases}$$

Para el reasegurador:

$$X_R = (X - M)_+ = \max \{0, X - M\} = \begin{cases} 0, & X \leq M \\ X - M, & X > M \end{cases}$$

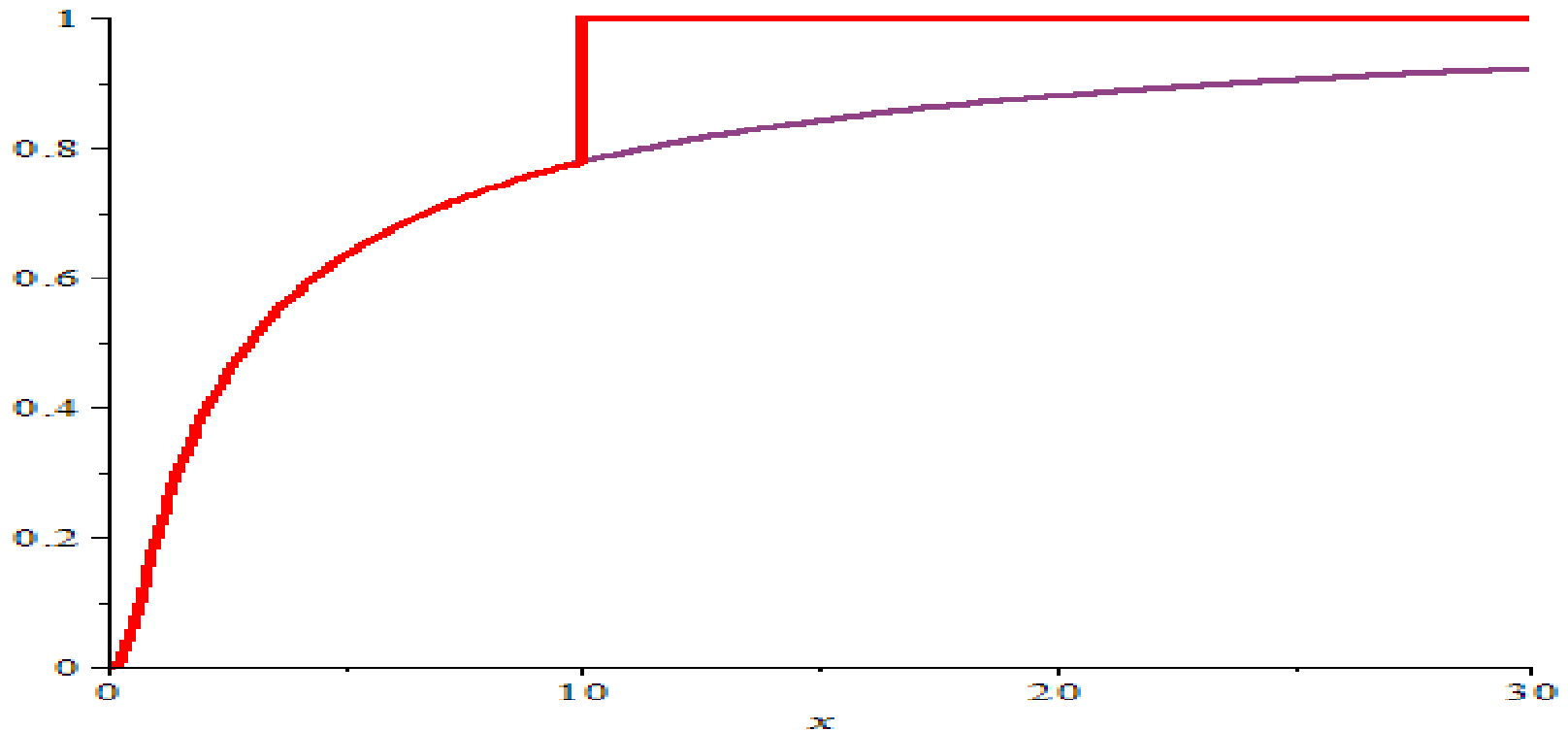


Contratos no proporcionales

Excess Loss (XL). Influencia en las distribuciones.

Despues de reaseguro al directo le quedan las cuantías :

$$V_A(x) = P\{X_A \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V(x), & x \in [0, M] \\ 1, & x \geq M \end{cases}$$





Contratos no proporcionales

Excess Loss (XL). Influencia en las distribuciones.

$$E(X_A) = \int_0^M x dV(x) + M(1 - V(M)) = \int_0^M (1 - V(x)) dx \leq E(X)$$

$$\text{Var}(X_A) = \int_0^M (x - \mu)^2 dV(x) + \int_0^M (M - \mu)^2 dV(x)$$

$$= \int_0^M (x - \mu)^2 dV(x) + (M - \mu)^2 (1 - V(M)) \leq \text{Var}(X)$$



Contratos no proporcionales

Excess Loss (XL). Influencia en las distribuciones.

Para el reasegurador la situación es:

$$V_R(x) = P\{X_R \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V(M), & x = M \\ V(x), & x \geq M \end{cases}$$

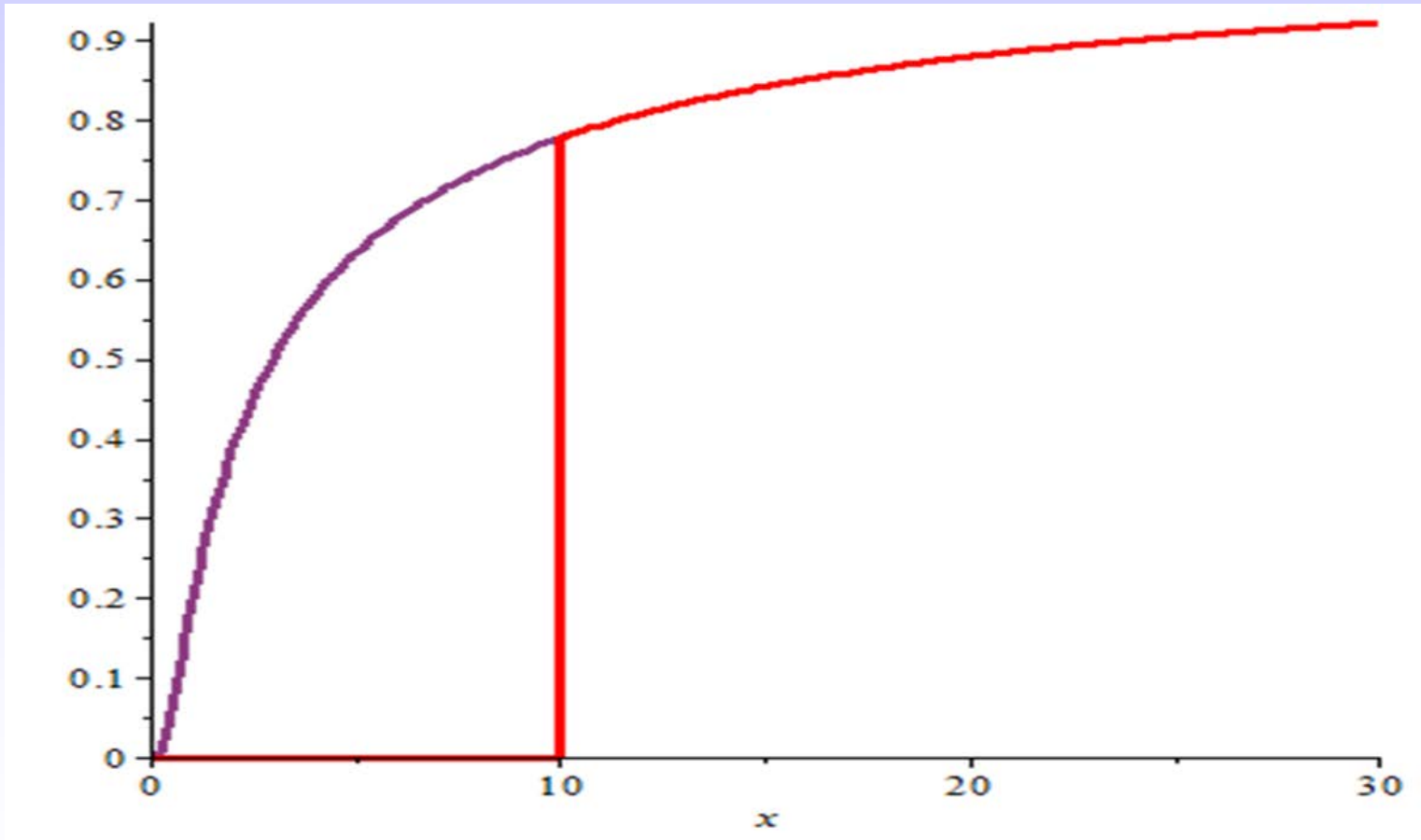
La prima neta de reaseguro es:

$$E(X) = E(X_A) + E(X_R) \Leftrightarrow E(X_R) = \int_M^{+\infty} (1 - V(x)) dx$$



Contratos no proporcionales

Excess Loss (XL). Influencia en las distribuciones.





Contratos no proporcionales

Stop Loss (SL).

Se fija un pleno $M > 0$. Entonces el reparto es así:

Para el asegurador directo:

$$S_A = \begin{cases} S, & S \leq M \\ M, & S > M \end{cases}$$

Para el reasegurador:

$$S_R = (S - M)_+ = \max \{0, S - M\} = \begin{cases} 0, & S \leq M \\ S - M, & S > M \end{cases}$$



Contratos no proporcionales

Stop Loss (SL).

Las características son similares a las del XL, pero cambiando la distribución de las cuantías individuales por la de la siniestralidad total.

La prima Stop Loss es:

$$E\left([S - M]_+\right) = \int_M^{+\infty} (1 - F(x)) dx$$

siendo F la distribución de la siniestralidad Total.



Contratos de reaseguro

El caso general. representación gráfica.

- Consideremos un riesgo X a lo largo de un periodo. Llamaremos contrato de reaseguro a toda función I tal que:

$$I: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto I(x) = \text{Riesgo Cedido}$$

Con las siguientes propiedades:

1. Continua
2. No decreciente
3. $I(x)$ no crece más rápidamente que x . Por tanto cualquier contrato tiene que ser descrito por una función perteneciente al conjunto:

$$\mathcal{I} = \{I(x) / I(0) = 0, 0 \leq I'(x) \leq 1\}$$

- El conjunto de todos los contratos con prima μ calculada de acuerdo al principio de la esperanza:

$$\mathcal{I}_\mu = \{I(x) \in \mathcal{I} / E(I(x)) = \mu\}$$

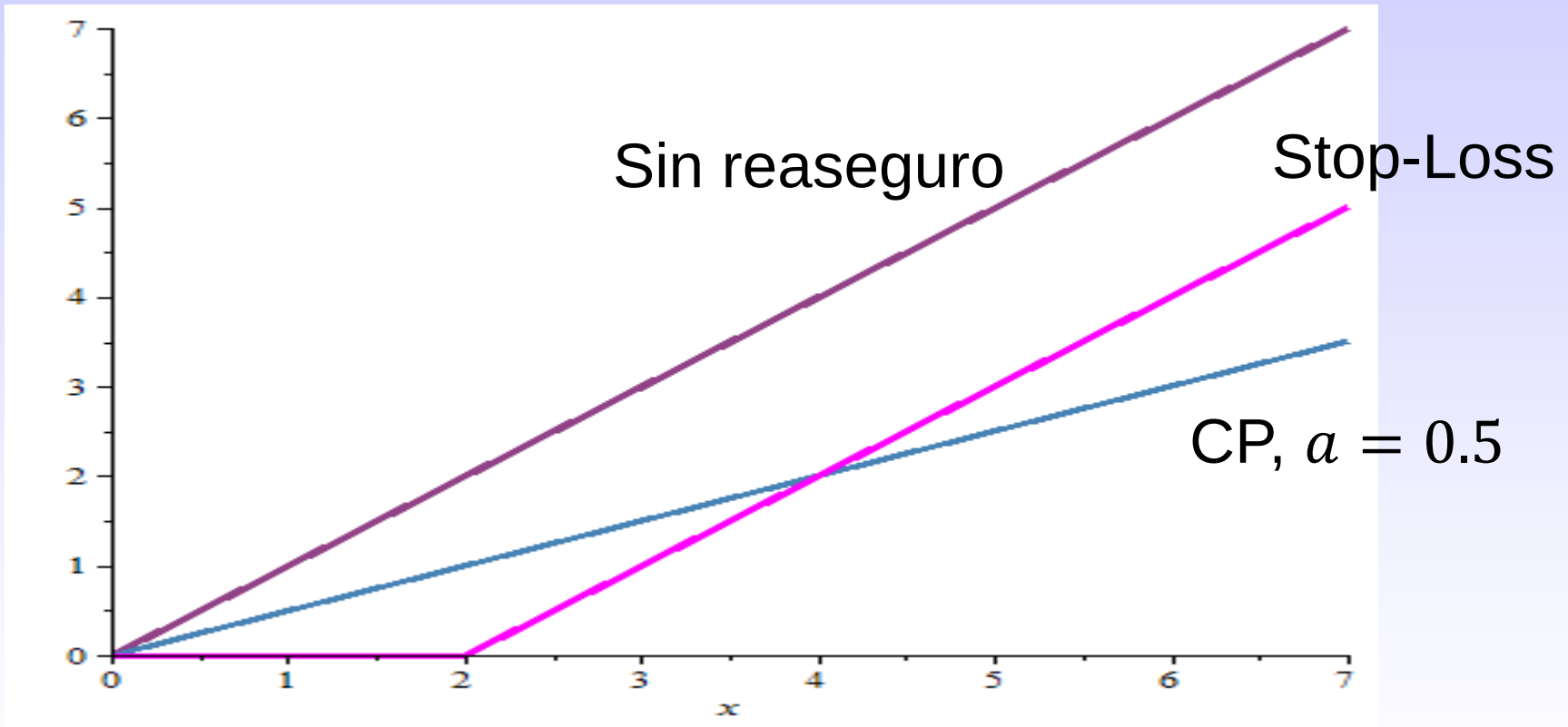
- La parte retenida se escribe así:

$$X_A = X - I(X)$$



Contratos de reaseguro

El caso general. representación gráfica.





Contratos de reaseguro

Optimalidad de contratos.

- Llamemos F_A a la distribución del riesgo retenido. Esta puede ser la de las cuantías (XL) o la de la siniestralidad total (CP, SL).
- Para investigar la optimalidad de los contratos hace falta algún criterio. supongamos que este sea:

Obtener un riesgo retenido con mínima varianza para un prima de reaseguro fija.

- Entonces los contratos óptimos son:
 - ☐ Individual: XL
 - ☐ General: SL

$$\text{Min } \text{Var}(X_A)$$

$$\text{s.a : } I \in \mathcal{I}_\mu$$



Reaseguro óptimo con varias subcarteras

Cuota Parte.

Las hipótesis de partida son las siguientes:

- La cartera está dividida en k subcarteras en las que ya se ha decidido reasegurar con CPs. Quedan por determinar las cuotas. Este es el problema a resolver.
- Supondremos que la FD compuesta del daño total de cada subcartera ha sido aproximada por una normal.
- Suponemos también que el decisor es averso al riesgo (su función de utilidad es cóncava).
- Las dos últimas hipótesis justifican la adopción de un **modelo de decisión media-varianza en el marco de la Teoría de la Utilidad y de la toma de decisiones racionales.**



Reaseguro óptimo con varias subcarteras

Cuota Parte.

- El modelo de decisión media varianza para fijar las cuotas óptimas desde el punto de vista de la cedente, consiste en un programa multiobjetivo:
 - Maximizar el beneficio esperado después de reaseguro
 - Minimizar la varianza (riesgo) de dicho beneficio.

Al tratarse de una distribución normal, dicho criterio ordena las preferencias sobre los beneficios después de reaseguro para un decisor averso al riesgo (con una función de utilidad creciente y cóncava)



Reaseguro óptimo con varias subcarteras

Cuota Parte.

Para el primer objetivo, (maximizar ingresos):

θ_i al recargo de seguridad

s_0 a la reserva inicial de la cartera

$P_i = E(X_i)$, a la las primas puras de la cartera

a_i a la cuota de la cartera

$a_i(1 + \theta_i)P_i$, primas que quedan en poder del directo

a_iP_i , siniestralidad esperada despues de reaseguro

$B_{ir} = a_i(1 + \theta_i)P_i - a_iP_i = a_i\theta_iP_i = a_iB_i$, Beneficio técnico
despues de reaseguro

Las reservas despues de reaseguro son entonces:

$$s_0 + \sum_{i=1}^k a_i B_i$$



Reaseguro óptimo con varias subcarteras

Cuota Parte.

Para el segundo objetivo, minimizar riesgo:
En este esquema muy sencillo hemos elegido como medida del riesgo a la varianza de la siniestralidad total:

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 a_i^2$$

- Al tratarse de un programa multiobjetivo se obtienen como solución los óptimos de Pareto: soluciones factibles tales que no es posible a partir de ellas mejorar simultáneamente los dos objetivos.
- Por tanto en un paso posterior que no daremos hay que elegir uno de los óptimos.



Reaseguro óptimo con varias subcarteras

Cuota Parte.

En definitiva el criterio media varianza aplicado en este contexto resulta en el siguiente programa:

$$\left. \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^k B_i a_i \equiv \min - \sum_{i=1}^k B_i a_i \\ \min \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 a_i^2 \end{array} \right\} \min \sum_{i=1}^k \left(\alpha \sigma_i^2 a_i^2 - (1-\alpha) B_i a_i \right), \alpha \in [0,1]$$

↗ Objetivo escalarizado

$s.a : 0 \leq a_i \leq 1, i = 1, \dots, k$



Reaseguro óptimo con varias subcarteras

Cuota Parte.

El conjunto de los óptimos de Pareto del programa es:

1. Llamamos :
$$R_i = \frac{B_i}{2\sigma_i^2 + B_i}, i = 1, 2, \dots, k$$

2. Los ordenamos: $0 \leq R_1 \leq \dots \leq R_k \leq 1$

3. Según los valores de $\alpha \in [0,1]$:

$$0 \leq \alpha \leq R_1 : \overset{(k)}{(1, \dots, 1)}$$

$$R_1 < \alpha \leq R_2 : \left(\frac{(1-\alpha)B_1}{2\alpha\sigma_1^2}, 1, \dots, 1 \right)$$

$$R_2 < \alpha \leq R_3 : \left(\frac{(1-\alpha)B_1}{2\alpha\sigma_1^2}, \frac{(1-\alpha)B_2}{2\alpha\sigma_2^2}, 1, \dots, 1 \right)$$

$$R_k < \alpha \leq 1 : \left(\frac{(1-\alpha)B_1}{2\alpha\sigma_1^2}, \frac{(1-\alpha)B_2}{2\alpha\sigma_2^2}, \dots, \frac{(1-\alpha)B_k}{2\alpha\sigma_k^2} \right)$$

$$\alpha = 1 : (0, \dots, 0)$$



Reaseguro óptimo con varias subcarteras

Cuota Parte.

- La línea de eficiencia es la curva cuyos puntos tienen como coordenadas a las dos funciones objetivo (ingresos, riesgo) a lo largo de los óptimos de Pareto, es decir, para el parámetro α variando.
- El último paso consiste en elegir un óptimo de Pareto, un valor de α , un punto de la curva eficiente. Esta elección representa la posición del decisor ante el balance riesgo-beneficio.
- Se puede utilizar la probabilidad de ruina a un año, por ejemplo, que nos puede suministrar aquél valor de α para el cual dicha probabilidad es menor que un cierto valor pequeño.



Bibliografía

1. Fundación Mapfre (2010): *Introducción al reaseguro*.
2. Deelstra G, Plantin G. (2014): *Risk Theory and reinsurance*. Springer Verlag.
3. Denuit M, Dahene J, Kaas R (2005): *Actuarial Theory for dependent risks*. Wiley
4. Gil, Heras, Vilar (1996): Decisiones racionales en reaseguro. Cuadernos de la Fundación Mapfre nº32.
http://www.fundacionmapfre.org/fundacion/es_es/ciencias-del-seguro/publicaciones/cuadernos-fundacion/cuadernos-fundacion-del-1-100/default.jsp
5. Goovaerts M, Kaas R, et al.(1990): *Effective Actuarial Methods*. Elsevier



LECCIÓN 9

Provisiones técnicas: Provisiones de primas y Provisión de prestaciones

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras
Universidad Complutense de Madrid

Prof. José Luis Vilar Zanón
Departamento de Economía Financiera y Actuarial y Estadística
UCM



Índice de la lección 9

1. Introducción
2. Provisiones de primas
 - i. Provisión de primas no consumidas:
 - ii. Provisión para riesgos en curso
3. Provisión de prestaciones: los siniestros pendientes.
 - i. El triángulo de siniestros
 - ii. Grossing up y link ratios
 - iii. El método Chain Ladder
 - iv. El método Bornhueter- Fregusson
 - v. Mezcla de dos métodos.



Índice de la lección 9

4. El método Chain-Ladder (CL) estocástico.
 - i. Hipótesis de 1º orden, estimación del triángulo inferior, factores CL.
 - ii. Propiedades estadísticas de los factores y los estimadores CL
5. La bondad de las predicciones. El error cuadrático medio del proceso (condicionado o descondicionado).
 - i. Deficiencias del método CL
6. El modelo de Thomas Mack (1993).
 - i. Hipótesis de 2º orden
 - ii. Varianza condicional del proceso
 - iii. El error condicional de la estimación



Introducción.

La normativa vigente (Solvencia I): ROSSP

ROSSPP: RD 2486/1998 pag. 20 Sección 1.ª Provisiones técnicas

Artículo 29. Concepto y enumeración de la provisiones técnicas.

1. Las provisiones técnicas deberán reflejar en el balance de las entidades aseguradoras el importe de las obligaciones asumidas que se derivan de los contratos de seguros y reaseguros. Se deberán constituir y mantener por un importe suficiente para garantizar, atendiendo a criterios prudentes y razonables, todas las obligaciones derivadas de los referidos contratos, así como para mantener la necesaria estabilidad de la entidad aseguradora frente a oscilaciones aleatorias o cíclicas de la siniestralidad o frente a posibles riesgos especiales. La corrección en la metodología utilizada en el cálculo de las provisiones técnicas y su adecuación a las bases técnicas de la entidad y al comportamiento real de las magnitudes que las definen, serán certificadas por un Actuario de Seguros, sin perjuicio de la responsabilidad de la entidad aseguradora.

En el caso de que se elaboren balances con periodicidad diferente a la anual, el cálculo y la constitución de las provisiones técnicas se efectuarán aplicando los criterios establecidos en este Reglamento con la adaptación temporal necesaria.



Introducción.

La normativa vigente (Solvencia I): ROSSP

2. Las provisiones técnicas son las siguientes:

- a) **De primas no consumidas.**
- b) **De riesgos en curso.**
- c) De seguros de vida.
- d) De participación en beneficios y para extornos.
- e) **De prestaciones.**
- f) La reserva de estabilización.
- g) Del seguro de decesos.
- h) Del seguro de enfermedad.
- i) De desviaciones en las operaciones de capitalización por sorteo.



Provisión de primas no consumidas y Provisión de riesgos en curso

Consultar los artículos 30 y 31 del ROSSPP.

Siguiendo Solvencia I, y a efectos contables:

- La PPNC periodifica las primas
- La PRC se dota en caso de que la anterior sea insuficiente.

De acuerdo con solvencia II, y a efectos del balance económico:

- Provisión de primas que cubre el riesgo de un año

Esto se explicará en la asignatura de **Ampliación de Matemática Actuarial**.



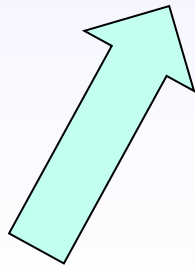
Provisión de Prestaciones

El triángulo de siniestros: datos y dimensiones

$i=0, \dots, I$ son los años de origen de los siniestros
 $j=0, \dots, I$ son los años de desarrollo de los siniestros.

Según convenga tendremos datos:

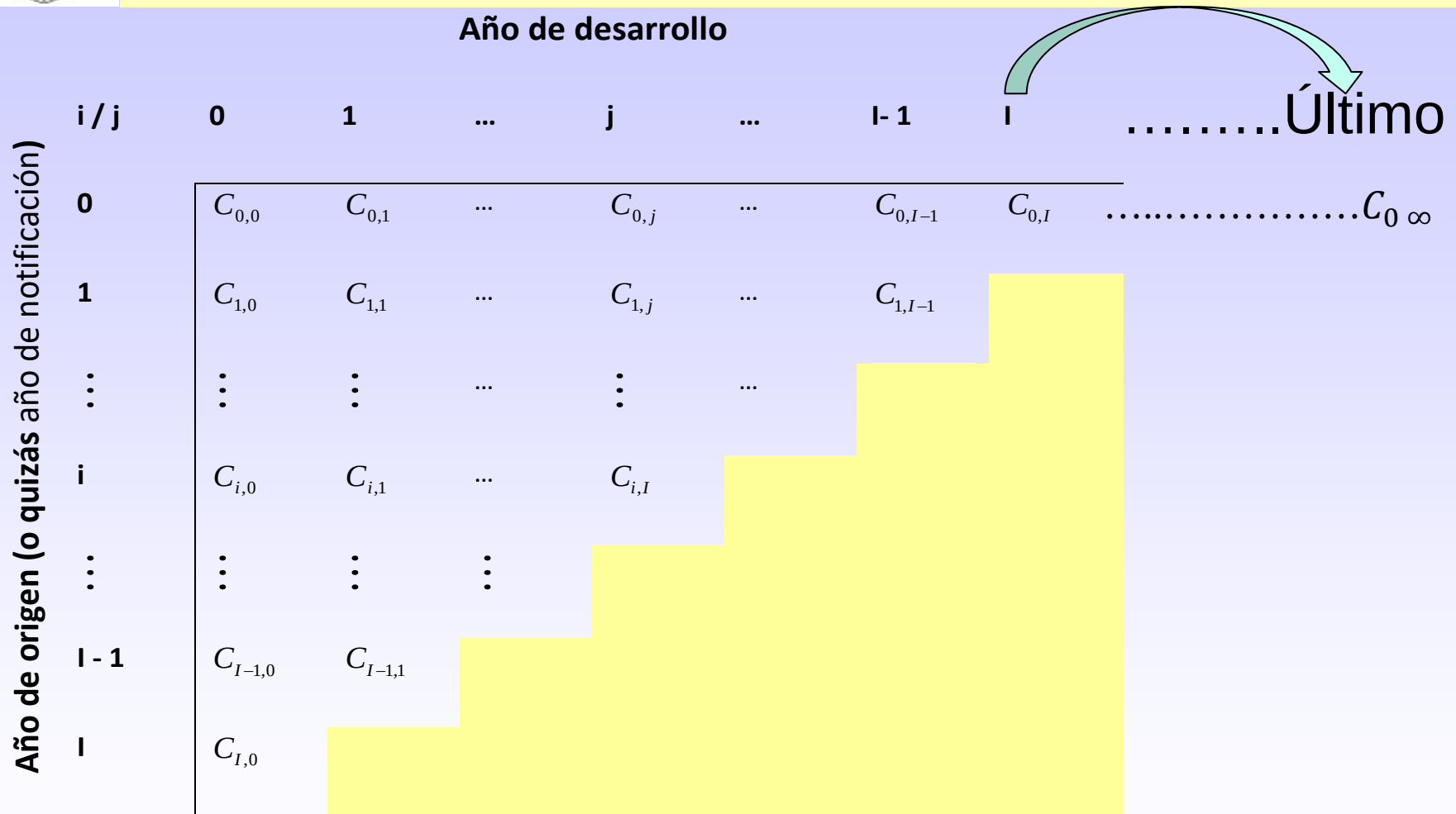
- Incrementales: $X_{ij} \equiv$ Pagos en relación con los siniestros el año de origen i realizados en el año de desarrollo j .
- Acumulados: $C_{ij} = \sum_{k=0}^j X_{ik} \equiv$ Acumulados para el origen i hasta el año j .





El triángulo de siniestros

Visualización



Análogamente si los datos son incrementales



El triángulo de siniestros

Las dos mitades del rectángulo

Dividimos el triángulo en dos mitades:

- Conocida, siniestralidad ya aflorada:

$$D_I = \{X_{ij} : i + j \leq I, 0 \leq j \leq I\}$$

- Desconocida, siniestralidad por aflorar:

$$D_I^c = \{X_{ij} : i + j > I, 0 \leq j \leq I\}$$

Esta es la mitad que deseamos estimar con la ayuda de la mitad superior

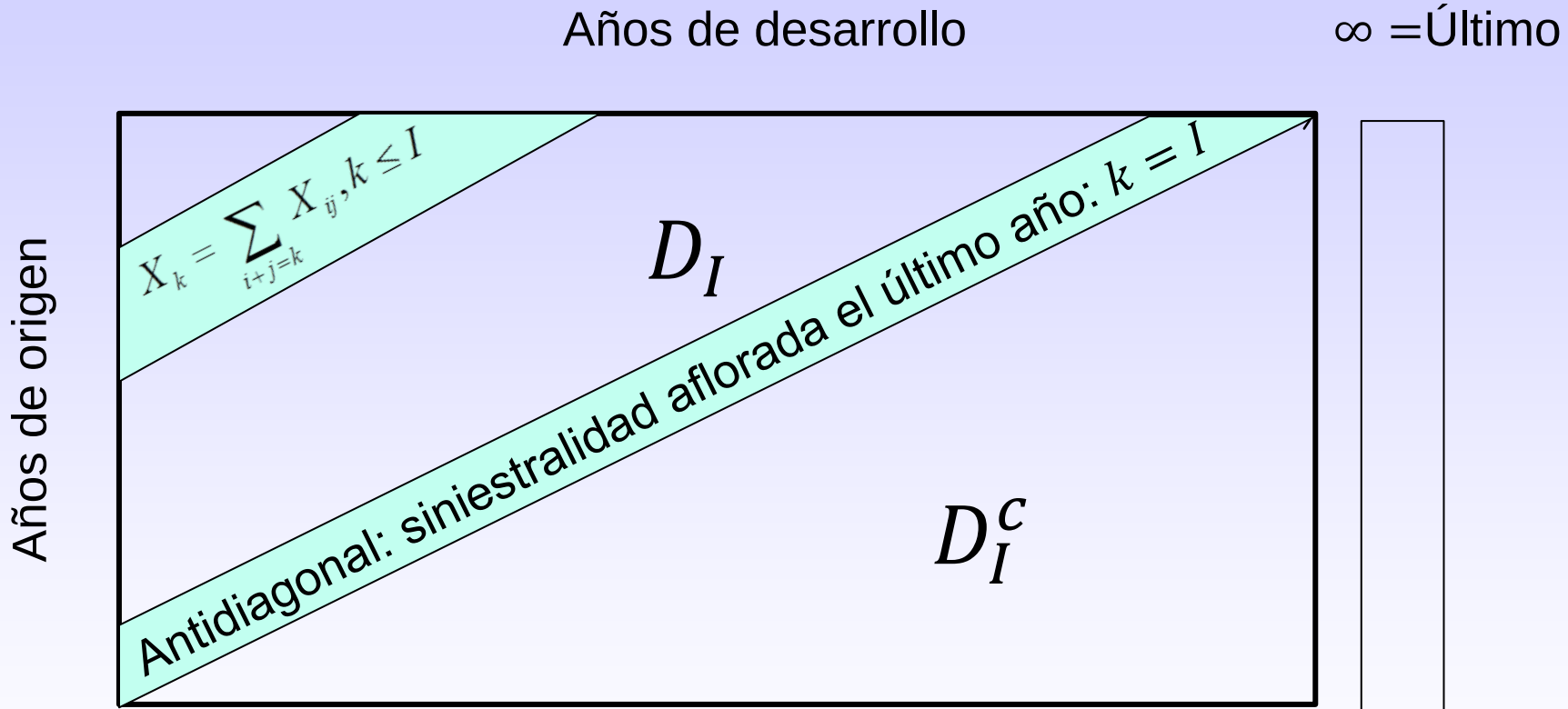
- La siniestralidad aflorada durante cada año natural se obtiene sumando las diagonales:

$$X_k = \sum_{i+j=k} X_{ij}, k \leq I$$



El triángulo de siniestros

Las dos mitades del rectángulo





El triángulo de siniestros

Los factores de desarrollo individuales

Estos factores representan, para un año de origen dado $i=0, \dots, I$, el desarrollo (incremento) de un año de desarrollo $j-1$ al siguiente j :

$$F_{i,j} = \frac{C_{ij+1}}{C_{ij}}, \forall i + j \leq I$$

A partir de aquí existen dos enfoques, que dan contenido a **esta lección** y a parte de la asignatura optativa de **Ampliación de Matemática Actuarial**.



El triángulo de siniestros

Los factores de desarrollo individuales

- **Determinista:** Si los factores son números determinados, ¿Podemos estimar el valor $\hat{f}_j$ correspondiente a cada año de desarrollo?
- **Estocástico:** ¿Podríamos suponer que para cada año de desarrollo existe un factor de desarrollo $f_j, j = 0, \dots, j-1$ **aleatorio** cuyas realizaciones se manifiestan a través de los datos D_I ?
A partir de ahí ¿Cómo dar una estimación $\hat{f}_j$?



El triángulo de siniestros

Significado de las variables

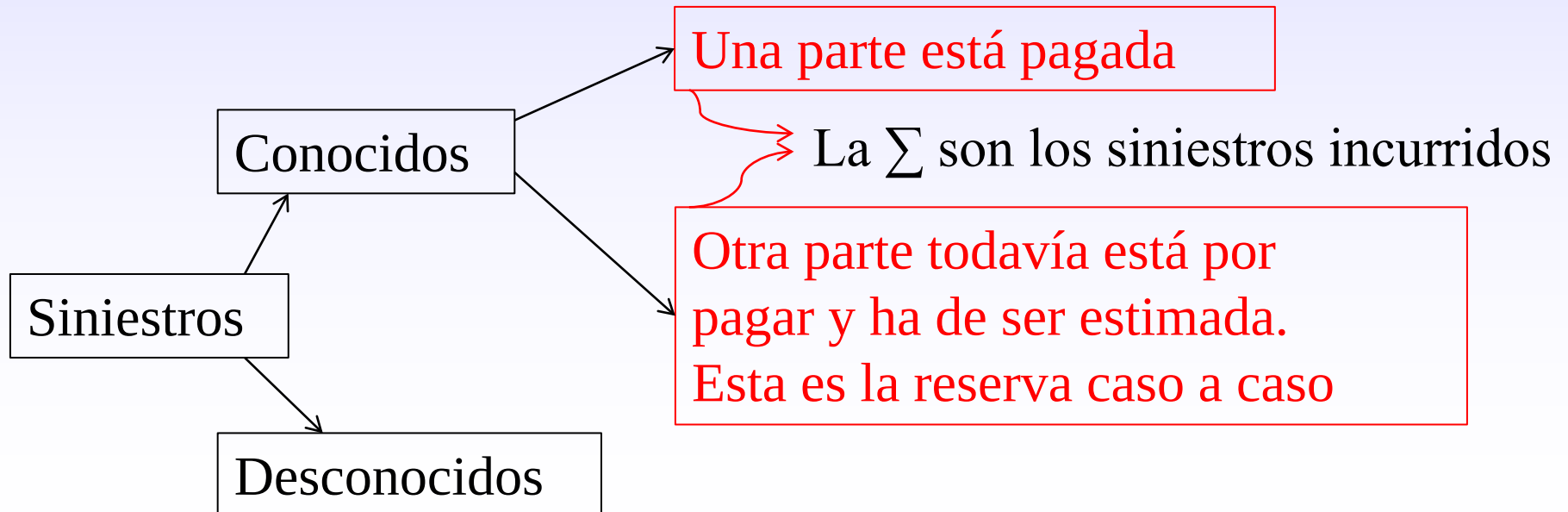
$X_{ij} \equiv$ Incremento en pagos $\leftrightarrow C_{ij} \equiv$ Pagos acumulados (conocidos)

$X_{ij} \equiv$ N° de siniestros con origen en i declarados en $j \leftrightarrow C_{ij} \equiv$ N° total de siniestros declarados con origen en i

$X_{ij} \equiv$ Incremento en pagos + Reserva caso a caso $\leftrightarrow C_{ij} \equiv$ siniestros incurridos para ese año de origen y año de desarrollo j

Siniestros incurridos = Siniestros pagados + Reserva caso a caso

¿Qué es la reserva caso a caso?





El triángulo de siniestros

Significado de las variables

- Lo habitual es considerar el triángulo con datos de siniestralidad correspondientes a años de origen.
 - En este caso la reserva estimada es la reserva total
- Si se toma el triángulo por años de notificación, la reserva Calculada es la de los siniestros conocidos.
 - La reserva para siniestros desconocidos deberá ser entonces calculada por otro método a parte.
- En general puede haber tres triángulos:
 - Pagados
 - Reserva caso a caso (estimados individualmente)
 - La suma de los dos es el triángulo de incurridos.
- Nosotros vamos a pensar siempre en el triángulo de pagados.



El triángulo de siniestros

Cálculo de la reserva una vez estimado D_I^c

- La reserva para los siniestros pendientes correspondientes al año de origen i , haciendo uso de una cierta **curva de tipos**

$$\hat{R}_i = \sum_{k=j+1}^I (1+r_k)^{-k+1/2} X_{ik}, i = 1, \dots, I, \quad i + j = I$$

- Y el **best estimate** (valor esperado de la reserva descontado) de la reserva total:

$$\hat{R} = \sum_i \hat{R}_i$$

- Si suponemos un tipo de interés nulo:

$$\hat{R}_i = \sum_{k=j+1}^I X_{ik}, i = 1, \dots, I \Rightarrow \hat{R} = \sum_i \hat{R}_i$$



Estimación de D_I^c - Grossing up y Link Ratios

Factores de desarrollo individuales de $j-1$ a j :

$$F_{ij} = \frac{C_{ij+1}}{C_{ij}}, \forall i + j \leq I \Rightarrow C_{ij} = F_{ij} C_{ij}, j = 0, \dots, I, \infty$$

La solución del problema de la estimación de D_I^c consiste en encontrar por cada año de desarrollo una estimación del correspondiente factor de desarrollo $\hat{f}_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, I$).

- Para ello contamos en cada columna con una muestra de dicho factor $\hat{f}_j$: F_{ij} , $i + j \leq I$, que son los factores de proyección individuales.
- Cuanto mayor es el año de desarrollo j , más escasa es esta muestra y mayor es la dificultad para estimar el correspondiente factor de desarrollo.



Estimación de D_I^c - Grossing up y Link Ratios

Supongamos que hemos sido capaces de estimar estos factores de desarrollo $\hat{f}_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, I$). Entonces se tiene:

1. Método Link Ratio:

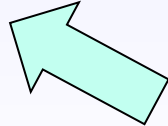
$$\forall i = 0, 1, \dots, I, \quad j / i + j = I : \hat{f}^i = \prod_{k=j+1}^I \hat{f}_k = \frac{C_{i,\infty}}{C_{ij}} \Rightarrow \hat{R}_i = (\hat{C}_{i,\infty} - C_{ij}) = \left(1 - \frac{1}{\hat{f}^i}\right) \hat{C}_{i,\infty}$$

1. Método Grossing up:

$$\forall i = 0, 1, \dots, I, \quad j / i + j = I : \hat{g}^i = \frac{1}{\hat{f}^i} = \frac{C_{ij}}{C_{i,\infty}} \Rightarrow \hat{R}_i = (\hat{C}_{i,\infty} - C_{ij}) = (1 - \hat{g}^i) \hat{C}_{i,\infty}$$



Estimación de D_I^c - Grossing up y Link Ratios

- Distintos métodos para estimar los factores de desarrollo $\hat{f}_j$
- Solo mediante los factores correspondientes al primer año de origen $i = 0$. (el año de origen más completo)
 - Si tenemos en cuenta en cada año de desarrollo a todos los factores de desarrollo individuales F_{ij} :
 - Método del peor caso (factor máximo para cada año de desarrollo)
 - **Una media ponderada en cada año de desarrollo.** (De aquí sale el método **Chain Ladder**). 
 - También podemos incluir años de origen con la siniestralidad ya desarrollada y considerar sus factores.



Estimación de D_I^c - Grossing up y Link Ratios

Ejemplo:

	j = 0	1	2	3	4	5	∞
i = 0	1,001	1,855	2,423	2,988	3,335	3,483	3,705 ← Estimado
1	1,113	2,103	2,774	3,422	3,844	4,015	4,270
2	1,265	2,433	3,233	3,977	4,439	4,636	4,931
3	1,490	2,873	3,880	4,785	5,340	5,577	5,933
4	1,725	3,261	4,260	5,253	5,863	6,123	6,513
5	1,889	3,500	4,572	5,639	6,293	6,573	6,991

$$\hat{f}_j = F_{0,j} = \frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} \Rightarrow \forall i = 0, 1, \dots, I : C_{i,j+1} = \hat{f}_j C_{i,j}, j = 1, \dots, I, Ultimo$$

	0	1	2	3	4	5
$F_{0,j}$	1.8531	1.3062	1.2332	1.1161	1.0444	1.0637
$F_{1,j}$	1.8895	1.3191	1.2336	1.1233		
$F_{2,j}$	1.9233	1.3288	1.2301			
$F_{3,j}$	1.9282	1.3505				
$F_{4,j}$	1.8904					



Estimación de D_I^C - Grossing up y Link Ratios

$$\forall (i, j) / i + j = I: C_{ij} \left(\prod_{k=j+1}^I \hat{f}_k \right) = C_{\text{Último}}$$

	j = 0	1	2	3	4	5	∞
i = 0	1,001	1,855	2,423	2,988	3,335	3,483	3,705
1	1,113	2,103	2,774	3,422	3,844	4,015	4,270
2	1,265	2,433	3,233	3,977	4,439	4,636	4,931
3	1,490	2,873	3,880	4,785	5,340	5,577	5,933
4	1,725	3,261	4,260	5,253	5,863	6,123	6,513
5	1,889	3,500	4,572	5,639	6,293	6,573	6,991

Para el último
año de origen:

$$C_{50} * \hat{f}_0 * \hat{f}_1 * \hat{f}_2 * \hat{f}_3 * \hat{f}_4 * \hat{f}_5 = C_{5\infty} = C_{\text{Última}}$$

$$\sum_{i=0}^5 (C_{i\infty} - C_{ij}) = \sum_{i=0}^5 R_i = R$$

No olvidar:
$$R_i = \sum_{k=j+1}^I (1 + r_k)^{k-1/2} (C_{ik} - C_{i,k-1}), i = 1, \dots, I, i + j = I$$



Estimación de D_I^C - Método Chain Ladder

Los factores de desarrollo Chain Ladder

$$j = 0, \dots, I - 1$$

$$\hat{f}_j^{CL} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \right) \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

MEDIA PONDERADA

FACTORES DE DESARROLLO
INDIVIDUALES F_{ij}

PESO ASOCIADO A CADA
FACTOR DE DESARROLLO



Estimación de D_I^C - Método Chain Ladder

Los factores de desarrollo Chain Ladder.

Nombres

En la próxima tabla usamos las denominaciones:

$$\hat{f}_j^{CL} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \right) \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} F_{ij}$$

$$= \frac{1}{\left(\sum \text{Pesos} \right)} \sum \text{Peso} \times \text{Factor de Desarrollo}$$



Estimación de D_I^c - Método Chain Ladder

Los factores de desarrollo Chain Ladder

Ejemplo de cómo se calcula el primer factor de desarrollo chain ladder:

F_{ij}	$Peso$	$F_{ij} \times Peso$
1,853	1,001	1,855
1,889	1,113	2,103
1,923	1,265	2,433
1,928	1,490	2,873
1,890	1,725	3,261

Σ Pesos

6,594

Σ (PesoxFij)

12,525

$1/(\Sigma \text{ Pesos}) \times \Sigma (\text{PesoxFij})$

$$12,525/6,594 = 1.899 = \hat{f}_0^{CL}$$

y así sucesivamente para cada uno de los años de desarrollo.



Estimación de D_I^c - Método Chain Ladder

Los factores de desarrollo Chain Ladder

Repitiendo estos mismos cálculos obtenemos los factores de desarrollo chain ladder:

j	0	1	2	3	4	5
$\hat{f}_j$	1.899	1.329	1.232	1.120	1.044	1.064

A partir de aquí para estimar D_I^c vuelve a ser:

$$(i, j) / i + j = I : C_{ij} \left(\prod_{k=j+1}^I \hat{f}_0^{CL} \right) = C_{\text{Último}}$$

Ejercicio: Terminar las estimaciones del rectángulo y calcular la reserva.



Estimación de D_I^c . Método del Loss Ratio ingenuo

La idea aquí consiste en que :

- Se dispone de experiencia acerca del loss ratio λ para años en donde la siniestralidad está totalmente desarrollada, y *se puede aplicar a los años que no han terminado todavía de desarrollarse.*
- Se dispone de los volúmenes de primas P_i ingresados para cada año de origen.

Estonces es fácil calcular las siniestralidad última para cada año de origen y a partir de ahí la reserva correspondiente:

$$C_{i, \text{Último}} = \lambda P_i$$

$$\forall i = 1, \dots, I, \quad j / i + j = I : R_i = C_{i, \text{Último}} - C_{ij},$$



Estimación de D_I^C . Método Bornhuetter Ferguson

En el método de BF mezclamos con un método de proyección Grossing up o link ratio. Para cada año de origen usamos el factor de desarrollo obtenido mediante link ratio o grossing up y sus Primas P :

$$\frac{1}{f} C_{\infty} = g C_{\infty}$$

$$\left(1 - \frac{1}{f}\right) \times C_{\infty} = (1 - g) \times C_{\infty}$$

Siniest. Alforada

Siniestralidad por Aflorar

$$C_{\infty} = \lambda P$$

1. Conociendo P_i y λ , calculamos $C_{i,\infty}$
2. Calculamos los factores CL y el factor

$$\forall i = 0, 1, \dots, I, \quad j / i + j = I : f^i = \prod_{k=j+1}^I f_k = \frac{C_{i,\infty}}{C_{ij}}, \quad \text{o bien} \quad g^i = \frac{1}{f^i} = \frac{C_{ij}}{C_{i,\infty}}$$

3. Siniestralidad por Aflorar = $(1 - 1/f^i) C_{i,\infty} = (1 - g^i) C_{i,\infty}$



Estimación de las reservas mediante dos métodos y una fórmula de credibilidad.

Supongamos que nos dan el triángulo y que calculamos los factores grossing up (o también link ratios):

$$0 < g_0 < g_1 < \dots < g_I < 1 = g_\infty, \quad g_j = \frac{C_{ij}}{\hat{C}_{i\infty}} \quad j = 0, \dots, I$$

Tenemos dos métodos, CL y BF, mediante los cuales podemos calcular las estimaciones de las Reservas para cada año de origen:

$$\forall i = 0, \dots, I : \hat{R}_i^{CL} \quad , \quad \hat{R}_i^{BF}$$



Estimación de las reservas mediante dos métodos y una fórmula de credibilidad.

A continuación “mezclamos” ambas estimaciones mediante una fórmula de credibilidad:

$$\forall j = 0, \dots, I : \quad R_{I-j}^{Cred} = g_j R_{I-j}^{CL} + (1 - g_j) R_{I-j}^{BF}$$

De esta forma:

- Para años de origen remotos (j grandes) el método CL tiene menos importancia que BF.
- Para años de origen recientes (j pequeños) pequeños el método CL tiene mas importancia que BF.

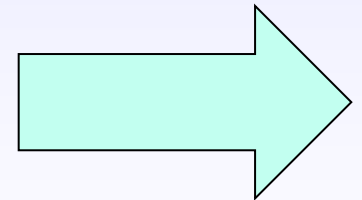
Es así como podemos satisfacer un requerimiento del ROSSPP.



Estimación de las reservas mediante dos métodos y una fórmula de credibilidad.

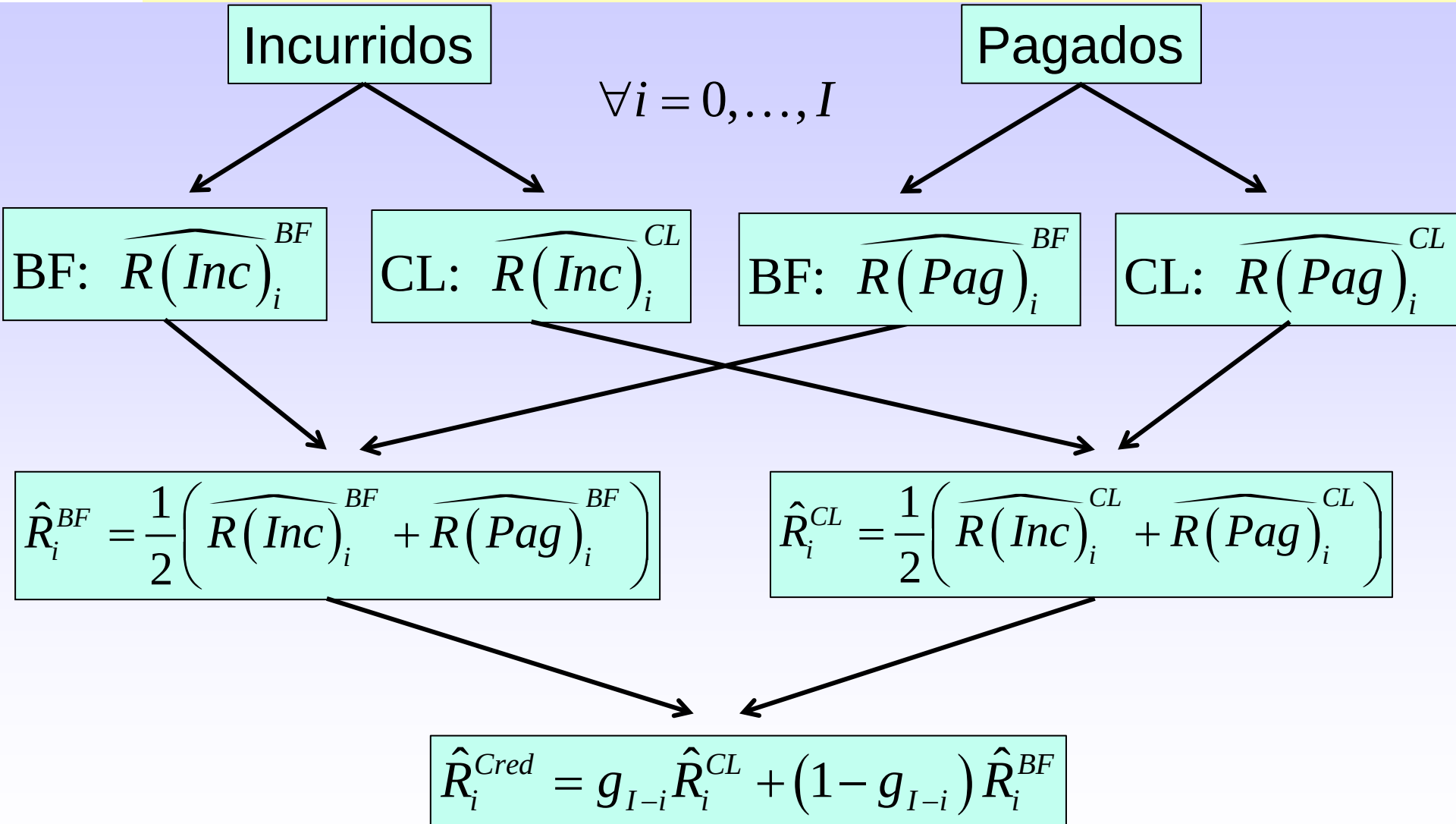
Para la estimación de la reserva podemos seguir el siguiente procedimiento:

1. Tomar los triángulos de incurridos y de pagados
2. Estimar ambos por CL y BF obteniendo así 4 estimaciones.
3. Producir una única estimación de la siguiente forma:





Estimación de las reservas mediante dos métodos y una fórmula de credibilidad.





El método Chain Ladder

Hipótesis A, factores de desarrollo, y problema a resolver

Hipotesis A:

A.1: Los C_{ij} son v.a. independientes $\forall i = 0, \dots, I$

A.2: Existen unos factores de desarrollo

$f_0, \dots, f_{I-1}$ tales que $\forall i = 0, \dots, I \quad j = 0, \dots, I :$

$$E\left(C_{ij} \mid C_{i0}, \dots, C_{i,j-1}\right) = E\left(C_{ij} \mid C_{i,j-1}\right) = f_{j-1} C_{i,j-1}$$

Definición: f 's son los factores de desarrollo que permiten estimar D_I^c

Problema: ¿Cómo estimamos los factores de desarrollo?



El método Chain Ladder

La estimación del triángulo inferior

Con las hipótesis A estamos trabajando únicamente con los momentos de primer orden de las v.a.

Los datos desconocidos del triángulo inferior son las medias:

$$E\left(C_{ij} \mid D_I\right), i + j > I$$

Y la siniestralidad total del año de origen i es:

$$E\left(C_{iI} \mid D_I\right), i = 0, \dots, I$$

el siguiente resultado nos da la clave para la estimación de estas siniestralidades totales en cada año de origen: recupera en ambiente estocástico lo que habíamos establecido en el determinístico.



El método Chain Ladder

La estimación del triángulo inferior

Lema 1.1: $E(C_{iI} | D_I) = E(C_{iI} | C_{i,I-1}) = C_{i,I-i} f_{I-i} \cdots f_{I-1}, i = 1, \dots, I$

En efecto:

$$\begin{aligned} E(C_{iI} | D_I) &= E(C_{iI} | C_{i0}, \dots, C_{i,I-i}) \stackrel{A.2}{=} E(E(C_{iI} | C_{i,I-1}) | C_{i0}, \dots, C_{i,I-i}) \stackrel{A.2}{=} \\ &\stackrel{A.2}{=} E(f_{I-1} C_{i,I-1} | C_{i0}, \dots, C_{i,I-i}) = f_{I-1} E(C_{i,I-1} | D_I) \stackrel{A.2}{=} f_{I-1} E(E(C_{i,I-1} | C_{i,I-2}) | C_{i0}, \dots, C_{i,I-i}) \stackrel{A.2}{=} \\ &\stackrel{A.2}{=} f_{I-1} E(f_{I-2} C_{i,I-2} | C_{i0}, \dots, C_{i,I-i}) = f_{I-1} f_{I-2} E(C_{i,I-2} | C_{i0}, \dots, C_{i,I-i}) = \dots \\ &\dots = f_{I-1} f_{I-2} \cdots f_{I-i} E(C_{i,I-i} | C_{i0}, \dots, C_{i,I-i}) = f_{I-1} f_{I-2} \cdots f_{I-i} C_{i,I-i}. \end{aligned}$$



El método Chain Ladder

La estimación del triángulo inferior y de las siniestralidades últimas

Cómo se estima la siniestralidades últimas C_{iJ}

$$E(C_{iI} | D_I) = C_{i,I-i} f_{I-i} \cdots f_{I-1}, i = 1, \dots, I$$

Y la siniestralidad por aflorar para el año de origen i es pues:

$$E(C_{iI} | D_I) - C_{i,I-i} = C_{i,I-i} (f_{I-i} \cdots f_{I-1} - 1), i = 1, \dots, I$$



El método Chain Ladder

Los factores Chain Ladder (CL). La estimación CL

Definición: (Factores CL) $j = 0, \dots, J - 1$

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \right) \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

MEDIA PONDERADA

FACTORES DE DESARROLLO
INDIVIDUALES

PESO ASOCIADO A CADA
FACTOR DE DESARROLLO

Ahora sí que podemos preguntarnos:

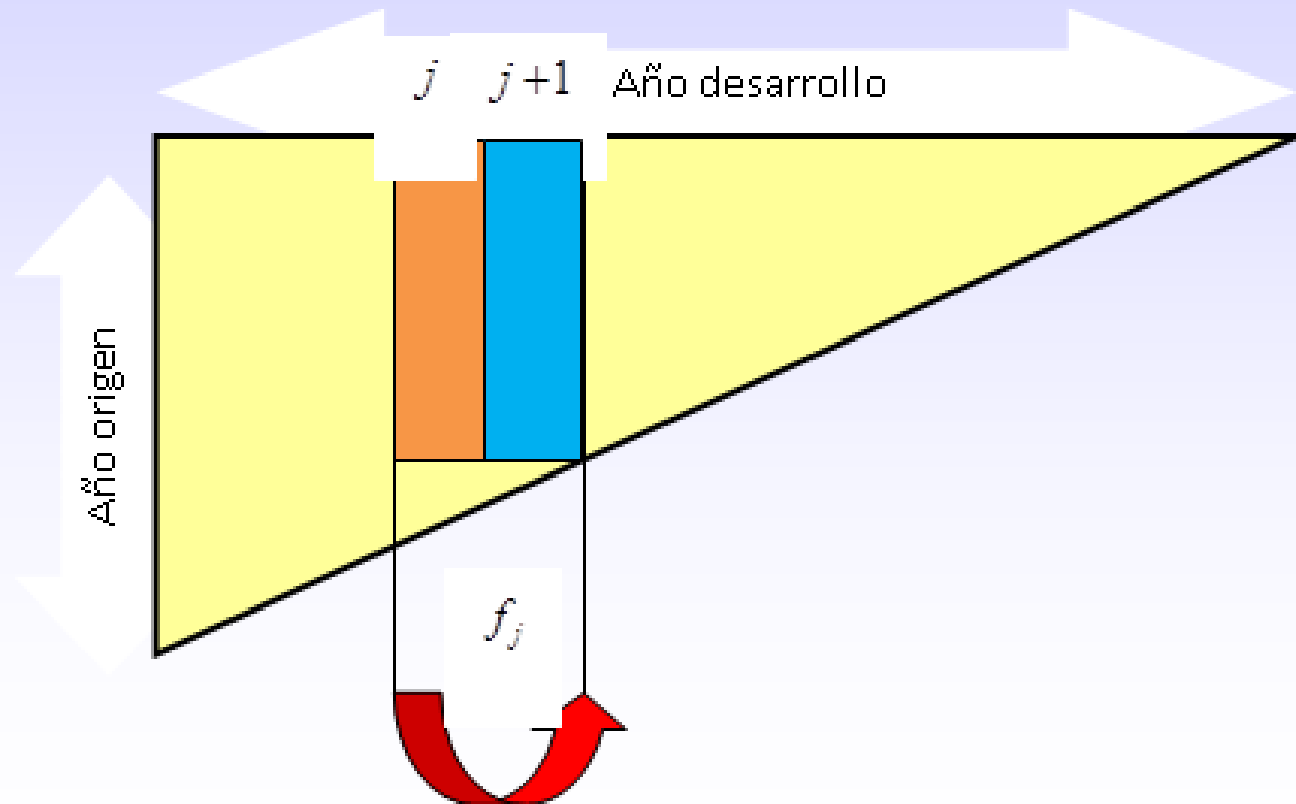
¿Por qué elegir estos estimadores y no otros?



El método Chain Ladder

Los factores Chain Ladder (CL). La estimación CL

$$\hat{C}_{ij}^{CL} = \hat{E}\left(C_{ij} \mid D_I\right) = C_{i, I-i} \hat{f}_{I-i} \cdots \hat{f}_{I-1}, \forall i + j > I$$



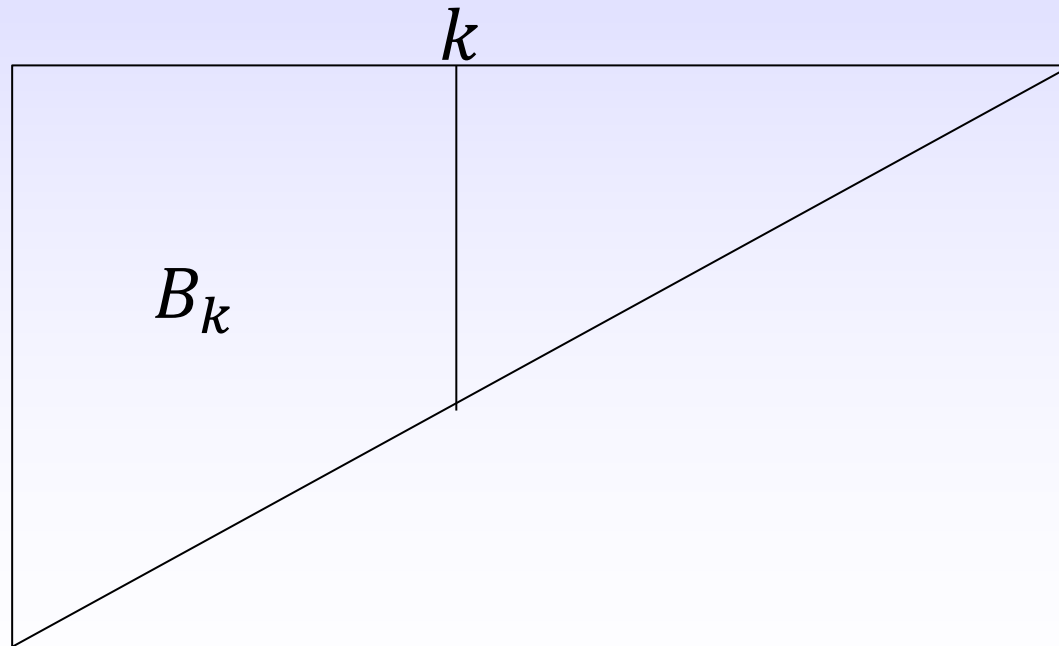


El método Chain Ladder

Propiedades estadísticas: factores CL, estimadores CL.

De ahora en adelante usaremos los siguientes subconjuntos de datos como información a la que se condicionan los cálculos:

$$B_k = \{C_{ij} : i + j \leq I, 0 \leq j \leq k\} \subset D_I$$





El método Chain Ladder

Propiedades estadísticas: factores CL, estimadores CL.

Lema 1.2: Bajo las hipótesis A1, A2:

(a) Dado B_j , $\hat{f}_j$ es insesgado: $E(\hat{f}_j | B_j) = f_j$

(b) $\hat{f}_j$ es incondicionalmente insesgado: $E(\hat{f}_j) = f_j$

(c) Los $\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{I-1}$ son incorrelados: $E(\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{I-1}) = \prod_j E(\hat{f}_j)$

(d) Dado $C_{i,I-i}$, el estimador $\hat{C}_{iI}^{CL}$ es insesgado de $E(C_{iI} | C_{i,I-i}) = E(C_{iI} | D_I)$:

$$E(\hat{C}_{iI}^{CL} | C_{i,I-i}) = E(C_{iI} | D_I)$$

(e) $\hat{C}_{iI}^{CL}$ es incondicionalmente insesgado: $E(\hat{C}_{iI}^{CL}) = E(C_{iI})$



El método Chain Ladder

Propiedades estadísticas: factores CL, estimadores CL.

$$(a) E(\hat{f}_j | B_j) \stackrel{\text{DEF de } \hat{f}_j}{=} \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} E(C_{i,j+1} | B_j)}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \stackrel{A2}{=} \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} f_j}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = f_j$$

$$(b) E(\hat{f}_j) = E(E(\hat{f}_j | B_j)) \stackrel{(a)}{=} E(f_j) = f_j$$

$$(c) E(\hat{f}_0 \dots \hat{f}_j) = E(E(\hat{f}_0 \dots \hat{f}_j | B_j)) = E(\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{j-1} E(\hat{f}_j | B_j)) \stackrel{(a)}{=} E(\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{j-1}) f_j \stackrel{(b)}{=} E(\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{j-1}) E(\hat{f}_j)$$

.....y así sucesivamente.....

$$(d) E(\hat{C}_{il}^{CL} | C_{i,I-i}) \stackrel{\text{Estimador CL}}{=} E(C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{I-2} \hat{f}_{I-1} | C_{i,I-i}) = E(C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{I-2} E(\hat{f}_{I-1} | B_{I-1}) | C_{i,I-i}) \stackrel{(a)}{=} \\ \stackrel{(a)}{=} f_{I-1} E(C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{I-2} | C_{i,I-i}) \stackrel{\text{Estimador CL}}{=} f_{I-1} E(\hat{C}_{i,I-1}^{CL} | C_{i,I-i}) = \dots$$

...y así sucesivamente se llega a....

$$E(\hat{C}_{il}^{CL} | C_{i,I-i}) = f_{I-1} f_{I-2} \dots f_{I-i} C_{i,I-i} \stackrel{\text{LEMA 1.1}}{=} E(C_{il} | D_I)$$



Medición la bondad de las estimaciones

Error cuadrático medio del proceso (ecmp)

➤ Gracias a los momentos de primer orden hemos podido dar estimaciones de las casillas inferiores del triángulo y por tanto de las reservas (**en términos de valores medios**).

➤ La bondad de estas estimaciones $\hat{X}$ se mide evaluando su variabilidad. Veremos que una parte de esta variabilidad es

inherente al carácter aleatorio del fenómeno, mientras que otra parte se debe al método de estimación en sí mismo.

➤ Para medir la variabilidad necesitamos los momentos de orden

2 y por la tanto será necesario añadir más hipótesis.

Pero antes debemos introducir el **error cuadrático medio del proceso condicionado (resp. descondicionado)**:

$$ecmp_{X|D}(\hat{X}) = E\left(\left(\hat{X} - X\right)^2 | D\right), \quad ecmp_X(\hat{X}) = E\left(ecmp_{X|D}(\hat{X})\right)$$



Medición la bondad de las estimaciones

Descomposición del ecmp condicionado

Al condicionar a D , estamos considerando un **valor** de $\hat{X}$, junto a la va X :

Sumamos
restamos
 $E^2(X|D)$

$$\begin{aligned}emcp_{X|D}(\hat{X}) &= E\left((\hat{X} - X)^2 | D\right) = E(\hat{X}^2 | D) - 2\hat{X}E(X | D) + E(X^2 | D) \\&= E(X^2 | D) - E^2(X | D) + \hat{X}^2 - 2\hat{X}E(X | D) + E^2(X | D) = \\&= Var(X | D) + (\hat{X} - E(X | D))^2\end{aligned}$$

Variación puramente aleatoria
debida al carácter estocástico
del proceso

Error debido a la estimación
de los parámetros

Este es el error que debemos estudiar.
 $E(X|D)$ es desconocido y lo estimamos
mediante $\hat{X}$.



Medición la bondad de las estimaciones

El ecmp descondicionado

Caso 1: X son v.a.i. y por tanto son independientes de las observaciones D :

$$E(X|D) = E(X), \quad \text{Var}(X|D) = \text{Var}(X)$$

$$\begin{aligned} \text{ecmp}_X(\hat{X}) &= E\left(\text{ecmp}_{X|D}(\hat{X})\right) = \text{Var}(X) + E\left(\left(\hat{X} - E(X)\right)^2\right)_{\substack{\hat{X} \text{ insesgado} \\ E(\hat{X}) = E(X)}} \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(\hat{X}) \end{aligned}$$

Pero este no será nuestro caso



Medición la bondad de las estimaciones

El ecmp descondicionado

Caso 2: Las X **NO** son independientes de las observaciones D .

$$ecmp_X(\hat{X}) = E(ecmp_{X|D}(\hat{X})) = E(Var(X|D)) + E\left(\left(\hat{X} - E(X|D)\right)^2\right) = \dots$$

$$Var(X) = E(Var(X|D)) + Var(E(X|D)) \Leftrightarrow E(Var(X|D)) = Var(X) - Var(E(X|D))$$

$$\begin{aligned} \dots &= Var(X) - Var(E(X|D)) + E\left(\left(\hat{X} - E(X|D)\right)^2\right) \\ &\quad \text{Sumamos } E(X) \text{ en la tercera esperanza} \\ &\quad \text{restamos } E(X|D) = E(X) \\ &= Var(X) - E\left(\left(E(X|D) - E(X)\right)^2\right) + E\left(\left(\hat{X} - E(X) + E(X) - E(X|D)\right)^2\right) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \text{ sumando} &= E\left(\left(\hat{X} - E(X)\right)^2 + \left(E(X) - E(X|D)\right)^2 + 2\left(\hat{X} - E(X)\right)\left(E(X) - E(X|D)\right)\right) = \\ &= E\left(\left(\hat{X} - E(X)\right)^2\right) + E\left(\left(E(X) - E(X|D)\right)^2\right) - 2Cov(\hat{X}, E(X|D)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \text{Suponemos } \hat{X} \text{ insesgado: } E(\hat{X}) = E(X) \\ &= Var(X) + E\left(\left(\hat{X} - E(X)\right)^2\right) - 2Cov(\hat{X}, E(X|D)) \end{aligned}$$

(Expresión general del ecmp descond. para cualquier método de estimación de la reserva).



Medición la bondad de las estimaciones

Hacia una distribución de las reservas

- Puestos a medir la bondad de las estimaciones, lo mejor sería disponer de la distribución para cada R_i , de forma que pudiésemos calcular su varianza, sus VaR o incluso cualquier medida del riesgo como el TVaR, CVaR, etc.
- Pero raras veces podremos obtener esta distribución analíticamente. En esos casos aún podremos simular los valores de R_i para luego estudiar la distribución empírica.
- Podemos estudiar la distribución aplicando:
 - Métodos bayesianos
 - Bootstrap
 - Simulando una vez hemos aplicado algún modelo GLM



Deficiencias del método Chain ladder

1. Los factores de desarrollo f_j deben ser homogéneos a lo largo del tiempo. Por lo tanto no se admiten tendencias para estos factores. Caso de que existiesen tendencias, los datos deberían ser transformados, o divididos en subrectángulos que sí verifiquen la homogeneidad.
2. Para estimar los factores f_j para j muy grande se tienen muy pocos datos, y las estimaciones pueden que ya no sean representativas para los años de origen recientes. Por ejemplo, si el desarrollo es $I=20$, estaríamos estimando en 2018 lo que va a suceder dentro de 20 años con información actual.
3. Si nos falta un dato en la última diagonal, esta ausencia se proyectará hacia la derecha hasta el final del desarrollo.
4. Pueden darse casos en que los datos acumulados decrecen:
$$C_{ij} > C_{ij+1}$$

y esta casuística no la soporta el método chain ladder.



El modelo de Mack (1993)

Hipótesis B para los momentos de segundo orden

Nuevas hipótesis que incluyen a los momentos de orden 2:

Hipotesis B: (+Hipótesis A)

B.1: Los C_{ij} son v.a. independientes $\forall i = 0, \dots, I$

B.2: $(C_{ij})_{j \geq 0}$ son un cadena de Markov y además existen

factores $f_0, \dots, f_{J-1} > 0$ y parámetros de varianza

$$\sigma_0^2, \dots, \sigma_{I-1}^2 > 0 : \forall i, j \in \{0, \dots, I\} :$$

$$E(C_{ij} | C_{i,j-1}) = f_{j-1} C_{i,j-1}$$

$$Var(C_{ij} | C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}$$



El modelo de Mack (1993)

Hipótesis B con momentos de segundo orden. Estimación de parámetros

- No se hace ninguna suposición acerca de la distribución de C_{ij} condicionada a $C_{i,j-1}$
- Se asume que $C_{ij} > 0$ dada la condición sobre la varianza.
- **Estimación de los parámetros f_j , σ_j^2 a partir de los datos:**

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{ij}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{kj}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}}{1}$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$



El modelo de Mack (1993)

Hipótesis B con momentos de segundo orden. Discusión sobre los factores CL

Recordemos tres propiedades de los estimadores de los factores CL:

- (a) Dado B_j , $\hat{f}_j$ es insesgado: $E(\hat{f}_j | B_j) = f_j$
- (b) $\hat{f}_j$ es incondicionalmente insesgado: $E(\hat{f}_j) = f_j$
- (c) Los $\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{J-1}$ son incorrelados: $E(\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{J-1}) = \prod_j E(\hat{f}_j)$

La pregunta clave a contestar a continuación sigue siendo
¿Por qué CL utiliza estos estimadores?

$$\hat{f}_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{C_{ij}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{kj}} \right) \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$$

¿Por qué esos pesos y no otros?



El modelo de Mack (1993)

Justificación de la elección de los estimadores de los factores CL

Lema 1.3: (los estimadores CL de los factores de desarrollo tienen varianza condicional mínima)

El estimador CL $\hat{f}_j$ es el estimador de varianza condicional mínima de entre todas las combinaciones lineales de $(F_{i,j+1})_{0 \leq i \leq I-j-1}$ (factores de desarrollo individuales) que son estimadores insesgados de los f_j :

$$\text{Var}\left(\hat{f}_j \mid B_j\right) = \underset{\alpha_i \in \mathbb{R}, \sum \alpha_i = 1}{\text{Min}} \text{Var}\left(\sum_{i=0}^{I-j-1} \alpha_i F_{i,j+1} \mid B_j\right)$$

Además esta varianza condicional mínima es igual a:

$$\text{Var}\left(\hat{f}_j \mid B_j\right) = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}}$$



2.2-El modelo de Mack (1993)

Justificación de la elección de los estimadores de los factores CL

Para probar este importante resultado necesitamos un lema previo

Lema 1.4: Consideremos $P_1, \dots, P_H$ estimadores de μ insesgados e independientes, con varianzas respectivas $\sigma_1^2, \dots, \sigma_H^2 > 0$

Entonces el estimador insesgado de mínima varianza combinación lineal CVX de $P_1, \dots, P_H$ es:

$$P = \left(\sum_{h=1}^H \frac{1}{\sigma_h^2} \right)^{-1} \sum_{h=1}^H \frac{P_h}{\sigma_h^2}$$



El modelo de Mack (1993)

Justificación de la elección de los estimadores de los factores CL

Demostración del lema previo:

$$\text{Var}(P) = \text{Var}\left(\sum_{h=1}^H \alpha_h P_h\right) \stackrel{P_h \text{ Independientes}}{=} \sum_{h=1}^H \alpha_h^2 \text{Var}(P_h) = \sum_{h=1}^H \alpha_h^2 \sigma_h^2$$

$$E(P) = E\left(\sum_{h=1}^H \alpha_h P_h\right) = \sum_{h=1}^H \alpha_h E(P_h) = \mu \sum_{h=1}^H \alpha_h \stackrel{\text{Combinación Lineal CVX}}{=} \mu$$

Ahora queremos minimizar la varianza sujeta a que la CL sea CVX:

$$\begin{cases} \text{Min}_{\alpha_1, \dots, \alpha_H} \frac{1}{2} \text{Var}(P) \\ \text{s.a.} : E(P) = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Min}_{\alpha_1, \dots, \alpha_H} \frac{1}{2} \sum_{h=1}^H \alpha_h^2 \sigma_h^2 \\ \text{s.a.} : \sum_{h=1}^H \alpha_h = 1 \end{cases}$$

Como la función objetivo es CVX, tenemos que considerar la lagrangiana y anular su gradiente:

$$L(\bar{\alpha}, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^H \alpha_h^2 \sigma_h^2 + \lambda \left(\sum_{h=1}^H \alpha_h - 1 \right); \quad \nabla L = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_h^2 \alpha_h + \lambda = 0, h = 1, \dots, H \\ \sum_{h=1}^H \alpha_h = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_h = (\sigma_h^2)^{-1} \left(\sum_{h=1}^H (\sigma_h^2)^{-1} \right)^{-1}$$



El modelo de Mack (1993)

Justificación de la elección de los estimadores de los factores CL

Demostración del lema 1.3:

$F_{i,j+1} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ son los factores de desarrollo individuales, y condicionados a B_j son estimadores de f_j independientes e insesgados. Sus varianzas son tales que:

$$\text{Var}\left(F_{i,j+1} \mid B_j\right) = \text{Var}\left(F_{i,j+1} \mid C_{ij}\right) \stackrel{B.2}{=} \frac{\sigma_j^2}{C_{ij}}$$

Ahora aplicamos el lema previo:

$\text{Var}\left(\hat{f}_j \mid B_j\right) = \text{Var}\left(\sum_{i=0}^{I-j-1} \alpha_i F_{i,j+1} \mid B_j\right)$ y para que sea mínima, según el lema previo:

$$\alpha_i = \left(\text{Var}\left(F_{i,j+1} \mid B_j\right)\right)^{-1} \left(\sum_{\hat{i}=0}^{I-j-1} \frac{1}{\text{Var}\left(F_{\hat{i},j+1} \mid B_j\right)}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{C_{ij}}{\sigma_j^2} \left(\sum_{\hat{i}=0}^{I-j-1} \frac{C_{\hat{i}j}}{\sigma_j^2}\right)^{-1} = \frac{C_{ij}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}}$$

Pesos de los estimadores CL
de los factores de desarrollo.



El modelo de Mack (1993)

Propiedades estadísticas de los estimadores de los parámetros σ_j^2 de las varianzas.

Lema 1.5: (los estimadores de σ_j^2 son insesgados)

Bajo las hipótesis B se tiene que los estimadores

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

(a) Condicionados a B_j son insesgados:

$$E\left(\hat{\sigma}_j^2 \mid B_j\right) = \sigma_j^2$$

(b) Son incondicionalmente insesgados: $E\left(\hat{\sigma}_j^2\right) = \sigma_j^2$

Observación: Los lemas 1.2, 1.3 y 1.5 (este último para las varianzas de los factores de desarrollo) justifican la elección de los estimadores CL para los factores de desarrollo desde el punto de vista estadístico, ya que nos dicen que son estimadores insesgados y de mínima varianza



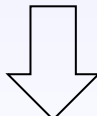
El modelo de Mack (1993)

Propiedades estadísticas de los estimadores de los parámetros σ_j^2 de las varianzas.

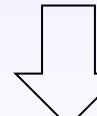
Demostración del lema 1.5:

(a) Consideraremos de momento únicamente los cuadrados incluidos en los sumatorios dentro de los estimadores:

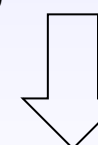
$$\begin{aligned} E \left(\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 \middle| B_j \right) &\stackrel{\text{sumamos restamos } f_j}{=} E \left(\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - f_j + f_j - \hat{f}_j \right)^2 \middle| B_j \right) = \\ &= E \left(\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - f_j \right)^2 \middle| B_j \right) + E \left((f_j - \hat{f}_j)^2 \middle| B_j \right) - 2E \left(\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - f_j \right) (f_j - \hat{f}_j) \middle| B_j \right) = \dots \end{aligned}$$



I



II



III

Analizamos los tres sumandos por separado



El modelo de Mack (1993)

Propiedades estadísticas de los estimadores de los parámetros σ_j^2 de las varianzas.

$$(I) = Var\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| B_j\right) \stackrel{C_{ij} \text{ conocido en } B_j}{=} \frac{1}{C_{ij}^2} Var\left(C_{i,j+1} \middle| B_j\right) \stackrel{B2}{=} \frac{1}{C_{ij}^2} C_{ij} \sigma_j^2 = \frac{\sigma_j^2}{C_{ij}}$$

$$(III) = Cov\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}, \hat{f}_j \middle| B_j\right) \stackrel{\hat{f}_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\frac{C_{ij}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{kj}} \right) \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}}{=} \stackrel{\text{INDEPENDENCIA ENTRE DISTINTOS AÑOS DE ORIGEN}}{=} \frac{C_{ij}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{kj}} Var\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| B_j\right) \stackrel{(I)}{=} \frac{\sigma_j^2}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{kj}}$$

$$(II) = Var\left(\hat{f}_j \middle| B_j\right) \stackrel{\text{LEMA 1.3}}{=} \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}}$$



El modelo de Mack (1993)

Propiedades estadísticas de los estimadores de los parámetros σ_j^2 de las varianzas.

Y sustituyendo (I), (II) y (III) tenemos finalmente que:

$$\dots = \frac{\sigma_j^2}{C_{ij}} + \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} - 2 \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} = \sigma_j^2 \left(\frac{1}{C_{ij}} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} \right)$$

Y volviendo al enunciado (a) del lema:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_j^2 | B_j) &= \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} E \left(\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 \middle| B_j \right) = \\ &= \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \frac{1}{C_{i,j}} \sigma_j^2 - \frac{1}{I-j-1} \frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij} \sigma_j^2 = \\ &= \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} \sigma_j^2 - \frac{1}{I-j-1} \sigma_j^2 = \left(\frac{I-j}{I-j-1} - \frac{1}{I-j-1} \right) \sigma_j^2 = \sigma_j^2 \quad \text{(cqdd)} \end{aligned}$$



El modelo de Mack (1993)

Propiedades estadísticas de los estimadores de los parámetros σ_j^2 de las varianzas.

Antes de pasar a lo siguiente observamos que:

$$\begin{aligned} E\left(\hat{f}_j^2 \mid B_j\right) &= Var\left(\hat{f}_j \mid B_j\right) + E^2\left(\hat{f}_j \mid B_j\right) = \\ &= Var\left(\hat{f}_j \mid B_j\right) + \hat{f}_j^2 = \\ &= \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} + \hat{f}_j^2 \end{aligned}$$

Esto lo utilizaremos en la página 62.



El modelo de Mack (1993)

El error cuadrático medio del proceso (ecmp)

Recordemos la estimación CL de la siniestralidad última para un año de origen dado:

$$\hat{C}_{iJ}^{CL} = C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \cdots \hat{f}_{J-1}, i = 1, \dots, I$$

Nuestro siguiente objetivo es estimar ecmp condicional:

$$\begin{aligned} ecmp_{C_{iJ}|D_I}(\hat{C}_{iJ}^{CL}) &= E\left(\left(\hat{C}_{iJ}^{CL} - C_{iJ}\right)^2 | D_I\right) = \\ &= Var\left(C_{iJ} | D_I\right) + \left(\hat{C}_{iJ}^{CL} - E\left(C_{iJ} | D_I\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Y el ecmp agregando todos los años de origen.

$$ecmp_{\sum_i C_{iJ}|D_I}\left(\sum_{i=1}^I \hat{C}_{iJ}^{CL}\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^I \hat{C}_{iJ}^{CL} - \sum_{i=1}^I C_{iJ}\right)^2 | D_I\right)$$

Queremos estimar
estos
dos sumandos:

Varianza condicional del
Proceso

Error condicional de la
Estimación



La varianza condicional del proceso

1º sumando: $\text{Var}(C_{iJ}|D_I)$

$$\text{Var}(C_{iJ}|D_I) = \text{Var}(C_{iJ}|C_{i,I-i}) = \dots \left(\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X|D)) + \text{Var}(E(X|D)) \right) \dots$$

$$\dots = E(\text{Var}(C_{iJ}|C_{i,J-1})|C_{i,I-i}) + \text{Var}(E(C_{iJ}|C_{i,J-1})|C_{i,I-i}) \stackrel{\text{B.2}}{=}$$

$$= \sigma_{J-1}^2 E(C_{i,J-1}|C_{i,I-i}) + f_{J-1}^2 \text{Var}(C_{i,J-1}|C_{i,I-i}) =$$

APLICANDO B.2 REPETIDAS
VECES EN EL 1º SUMANDO

$$(*) = \sigma_{J-1}^2 C_{i,I-i} \prod_{m=I-i}^{J-2} f_m + f_{J-1}^2 \text{Var}(C_{i,J-1}|C_{i,I-i}) =$$

Repetimos aquí el cálculo
tantas veces como sean
necesarias

$$= \sigma_{J-1}^2 C_{i,I-i} \prod_{m=I-i}^{J-2} f_m + f_{J-1}^2 \left[\sigma_{J-2}^2 E(C_{i,J-2}|C_{i,I-i}) + f_{J-2}^2 \text{Var}(C_{i,J-2}|C_{i,I-i}) \right] =$$

$$= \sigma_{J-1}^2 C_{i,I-i} \prod_{M=I-i}^{J-2} f_m + f_{J-1}^2 \sigma_{J-2}^2 E(C_{i,J-2}|C_{i,I-i}) + f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 \text{Var}(C_{i,J-2}|C_{i,I-i}) =$$

Notación:

I

II



La varianza condicional del proceso

1º sumando: $\text{Var}(C_{iJ}|D_I)$

$$\begin{aligned} &= I + II + f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 \left[\sigma_{J-3}^2 E(C_{i,J-3} | C_{i,I-i}) + f_{J-3}^2 \text{Var}(C_{i,J-3} | C_{i,I-i}) \right] = \\ &= I + II + f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 \sigma_{J-3}^2 E(C_{i,J-3} | C_{i,I-i}) + f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 f_{J-3}^2 \text{Var}(C_{i,J-3} | C_{i,I-i}) = \\ &= I + II + III + IV = \dots \end{aligned}$$

$$I = \sigma_{J-1}^2 C_{i,I-i} \prod_{M=i-I}^{j-2} f_m$$

$$II = f_{J-1}^2 \sigma_{J-2}^2 E(C_{i,J-2} | C_{i,I-i})$$

$$III = (\text{Iterando}) = f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 \sigma_{J-3}^2 E(C_{i,J-3} | C_{i,I-i}) = f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 \sigma_{J-3}^2 f_{I-i} f_{I-i+1} \dots f_{J-4} C_{i,I-i}$$

$$\begin{aligned} IV &= f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 f_{J-3}^2 \text{Var}(C_{i,J-3} | C_{i,I-i}) \stackrel{2^a}{=} \\ &\quad \text{Iteración} \\ &= f_{J-1}^2 f_{J-2}^2 f_{J-3}^2 \left[\sigma_{J-4}^2 E(C_{i,J-4} | C_{i,I-i}) + f_{J-4}^2 \text{Var}(C_{i,J-4} | C_{i,I-i}) \right] = \dots \text{y seguiríamos con esta Varianza...} \end{aligned}$$

...Hasta obtener la siguiente expresión:



La varianza condicional del proceso

1º sumando: $\text{Var}(C_{iJ}|D_I)$

$$I + II + III + IV =$$

$$= C_{i,I-i} \sum_{j=I-i}^{J-1} \left(\prod_{n=j+1}^{J-1} f_n^2 \right) \sigma_j^2 \prod_{m=I-i}^{j-1} f_m \quad \text{PROYECCIÓN CL} =$$

$$= \sum_{j=I-i}^{J-1} \left(\prod_{n=j+1}^{J-1} f_n^2 \right) \sigma_j^2 E(C_{ij} | C_{i,I-i}) \quad \begin{array}{l} \text{Multiplicamos dividimos por} \\ f_j^2 E(C_{ij} | C_{i,I-i}) \end{array} =$$

$$= \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\sigma_j^2}{f_j^2 E(C_{ij} | C_{i,I-i})} f_j \left(\prod_{n=j+1}^{J-1} f_n \right) E(C_{ij} | C_{i,I-i}) f_j \left(\prod_{n=j+1}^{J-1} f_n \right) E(C_{ij} | C_{i,I-i}) =$$

$$= E^2(C_{iJ} | C_{i,I-i}) \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\sigma_j^2 / f_j^2}{E(C_{ij} | C_{i,I-i})}$$



La varianza condicional del proceso

1º sumando: $\text{Var}(C_{iJ}|D_I)$ y su estimación

➤ Resumimos lo obtenido en el siguiente:

LEMA 2.4: (Varianza del proceso para un año de origen)

$$\text{Var}(C_{iJ} | D_I) = E^2(C_{iJ} | C_{i,I-i}) \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\sigma_j^2 / f_j^2}{E(C_{ij} | C_{i,I-i})}$$

➤ Estimación de esta varianza:

$$\widehat{\text{Var}}(C_{iJ} | D_I) = \hat{E} \left((C_{iJ} - E(C_{iJ} | D_I))^2 | D_I \right) = (\hat{C}_{iJ}^{CL})^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\hat{C}_{ij}^{CL}}$$

➤ Expresión recursiva de la varianza del proceso:

$$\widehat{\text{Var}}(C_{ij} | D_I) \stackrel{(*)\text{pg57}}{=} f_{j-1}^2 \text{Var}(C_{i,j-1} | D_I) + \hat{\sigma}_{j-1}^2 \hat{C}_{i,j-1}^{CL}, \quad j \in \{I-i+1, \dots, J\}$$



La varianza condicional del proceso

1º sumando: $\text{Var}(C_{iJ}|D_I)$ agregado para años de origen

La agregación de las varianzas de todos los años de origen se hace teniendo en cuenta la independencia

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^I C_{iJ} | D_I\right) &= \sum_{i=1}^I \text{Var}(C_{iJ} | D_I) \Rightarrow \\ \Rightarrow \widehat{\text{Var}}\left(\sum_{i=1}^I C_{iJ} | D_I\right) &= \sum_{i=1}^I \widehat{\text{Var}}(C_{iJ} | D_I)\end{aligned}$$

Finalmente el coeficiente de variación para un año:

$$Vco_i = \widehat{Vco}(C_{iJ} - C_{i,I-i} | D_I) = \frac{\widehat{\text{Var}}(C_{iJ} | D_I)^{1/2}}{\hat{C}_{iJ}^{CL} - C_{i,I-i}}$$

De esta forma, hemos estimado el error del proceso, el que se debe a la aleatoriedad propia de las v.a.



El error condicional de la estimación

Para un año de origen

Aquí queremos obtener una estimación de la exactitud de las estimaciones obtenidas mediante los factores CL $\hat{f}_j$. Recordemos que esta es la segunda componente del ecmp condicional [pg58](#) (el sumando que está elevado al cuadrado)

$$\left(\hat{C}_{iJ}^{CL} - E(C_{iJ} | D_I) \right)^2 = \dots \left(\begin{array}{l} \hat{C}_{iJ}^{CL} = \hat{E}(C_{iJ} | D_I) = C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{J-1}, \forall i + j > I \\ E(C_{iJ} | D_I) = E(C_{iJ} | C_{i,I-i}) = C_{i,I-i} f_{I-i} \dots f_{J-1}, i = 1, \dots, I \end{array} \right)$$

$$\dots(**) = C_{i,I-i}^2 \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}_j^2 + \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^2 - 2 \prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}_j f_j \right)$$

¿CÓMO CALCULAR ESTO?

AQUÍ ESTÁ LA MAYOR DIFICULTAD Y NOS CONCENTRAMOS EN ELLO

ESTO ES FÁCIL DE CALCULAR EN MEDIA POR SER LOS f_j INSESGADOS E INCORRELADOS



El error condicional de la estimación

Para un año de origen. La aproximación de T. Mack (1993)

Vamos a introducir las siguientes variables:

$$j \in \{I - i, \dots, J - 1\} : T_j = \hat{f}_{I-i} \cdots \hat{f}_{j-1} (f_j - \hat{f}_j) f_{j+1} \cdots f_{J-1}$$

Fijarse en lo siguiente:

$$\left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}_j - \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j \right)^2 = \left(\sum_{j=I-i}^{J-1} T_j \right)^2$$

Y esto implica que:

$$\left(\hat{C}_{iJ}^{CL} - E(C_{iJ} | D_I) \right)^2 = C_{i,I-i}^2 \left(\sum_{j=I-i}^{J-1} T_j^2 + 2 \sum_{I-i \leq j < k \leq J-1} T_j T_k \right)$$



El error condicional de la estimación

Para un año de origen. La aproximación de T. Mack (1993)

$$\begin{aligned} E(T_k | B_k) &= \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{k-1} E(f_k - \hat{f}_k | B_k) f_{k+1} \dots f_{J-1} = \dots \\ &\dots \left(E(f_k - \hat{f}_k | B_k) = f_k - E(\hat{f}_k | B_k) \stackrel{\text{INSESGADO}}{=} f_k - f_k = 0 \right) \dots \\ &\dots = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall j < k : E(T_j T_k | B_k) = T_j E(T_k | B_k) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto los dobles productos son cero en media y solo nos queda estimar los cuadrados T_j^2 . Vamos a ello:



El error condicional de la estimación

Para un año de origen. La aproximación de T. Mack (1993)

$$\begin{aligned} E\left(T_j^2 | B_j\right) &= \hat{f}_{I-i}^2 \cdots \hat{f}_{j-1}^2 E\left(\left(f_j - \hat{f}_j\right)^2 | B_j\right) f_{j+1}^2 \cdots f_{J-1}^2 = \\ &= \hat{f}_{I-i}^2 \cdots \hat{f}_{j-1}^2 \text{Var}\left(\hat{f}_j | B_j\right) f_{j+1}^2 \cdots f_{J-1}^2 = \\ &= \hat{f}_{I-i}^2 \cdots \hat{f}_{j-1}^2 \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0} C_{ij}} f_{j+1}^2 \cdots f_{J-1}^2 \end{aligned}$$

Por tanto una estimación de (**) pg 64 es (¡por fin!):

$$(**) = C_{i,I-i}^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}_{I-i}^2 \cdots \hat{f}_{j-1}^2 \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0} C_{ij}} f_{j+1}^2 \cdots f_{J-1}^2$$

AHORA TENEMOS QUE
SUSTITUIR ESTOS
PARÁMETROS POR
SUS ESTIMACIONES



El error condicional de la estimación

Para un año de origen. La aproximación de T. Mack (1993)

Sustitución de los parámetros por sus estimaciones:

$$\begin{aligned}
 & C_{i,I-i}^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \hat{f}_{I-i}^2 \cdots \hat{f}_{j-1}^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\sum_{i=0} C_{ij}} \hat{f}_{j+1}^2 \cdots \hat{f}_{J-1}^2 \quad \begin{array}{l} \text{MULTIPLICAMOS} \\ \text{DIVIDIMOS POR } \hat{f}_j^2 \end{array} = \\
 & = C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i-1}^{J-1} \hat{f}_j^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{i=0} C_{ij}}
 \end{aligned}$$



El error condicional de la estimación

Para un año de origen. La aproximación de T. Mack (1993)

En resumen **hemos obtenido la siguiente estimación del ecmp condicionado**

$$ecmp_{C_{iJ}|D_I}(\hat{C}_{iJ}^{CL}) = Var(C_{iJ} | D_I) + \left(\hat{C}_{iJ}^{CL} - E(C_{iJ} | D_I) \right)^2$$

$$\widehat{ecmp}_{C_{iJ}|D_I}(\hat{C}_{iJ}^{CL}) = \left(\hat{C}_{iJ}^{CL} \right)^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\hat{C}_{iJ}^{CL}} + C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i-1}^{J-1} \hat{f}_j^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} = \dots$$

$$\dots\dots\dots \left(C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i-1}^{J-1} \hat{f}_j^2 = \left(\hat{C}_{iJ}^{CL} \right)^2 \right) \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots = \left(\hat{C}_{iJ}^{CL} \right)^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{iJ}^{CL}} + \frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}} \right)$$



El error condicional de la estimación

Para varios años de origen. La aproximación de T. Mack

$$\widehat{ecmp}_{\sum_i C_{iJ} | D_I} \left(\sum_{i=1}^I \hat{C}_{iJ}^{CL} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^I \widehat{ecmp}_{C_{iJ} | D_I} \left(\hat{C}_{iJ}^{CL} \right) + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq J} \hat{C}_{iJ}^{CL} \hat{C}_{kJ}^{CL} \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{ij}}$$



Bibliografía

1. Claim Reserving Manual, The Institute of Actuaries.
2. Mack T. (1993): Measuring the variability of chain Ladder reserves estimates.
3. Mack T. (2010): Credible claims reserves: the Benktander method. Astin Bulletin, Vol30, N2, pp333-347.
4. Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados.
5. Würthrich M., Merz M.(2008): Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance. Wiley.

Ejercicios de Matemáticas de los Seguros No vida: Modelos, Medición del Riesgo y Solvencia.

Prof. José Luis Vilar Zanón

Departamento Economía Financiera y Actuarial y Estadística

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

Universidad Complutense de Madrid

12 de septiembre de 2023

Resumen

Hoja de ejercicios de la asignatura. Las entregas deberán ser hechas en las fechas fijadas en el campus virtual.

Índice

1. Cálculo de probabilidades de distribuciones compuestas mediante transformadas	2
2. Modelos para el número de siniestros: heterogeneidad, ajuste, sobredispersión e inflado de ceros.	2
3. Aproximación, Cálculo Numérico y simulación de distribuciones compuestas	5
4. Medidas del riesgo	7
5. Ordenación de riesgos.	9
6. Reaseguro.	9
7. Triángulos de siniestros. Métodos para el cálculo de la provisión de siniestros	10

1. Cálculo de probabilidades de distribuciones compuestas mediante transformadas

Ejercicio 1. Transformadas de distribuciones compuestas

Expresa las funciones generadoras de probabilidad (f.g.p.) de las siguientes distribuciones compuestas:

1. Poisson($\lambda = 1,2$)-Poisson($\lambda = 0,5$), Poisson($\lambda = 1,2$)-Binomial Negativa($r = 0,4, \beta = 1,3$).
2. Para cada uno de esos dos modelos, calcule las quince primeras cuantías $p_0, \dots, p_{14}$, y compruebe que suman (casi) 1.
3. Para cada uno de esos tres modelos, calcule la media, varianza, coeficiente de asimetría y la curtosis

Observaciones 1. Tenga en cuenta las siguientes cuestiones:

- Use el programa Maple para calcular las funciones compuestas y sus derivadas.
- Este ejercicio sirve para ejemplificar la propiedad de la transformada de una distribución compuesta (lección 2 p. 56-57, lección 3 p.9) y el cálculo de probabilidades de distribuciones compuestas cuando la secundaria es discreta.
- Este método para calcular probabilidades de distribuciones compuestas sirve cuando la secundaria es discreta. Es un método complementario a los métodos de Cálculo Numérico que se estudian en la lección 5.

Ejercicio 2. Transformadas de distribuciones compuestas

Escriba las transformadas de Laplace (TL) de las siguientes distribuciones compuestas:

1. Geométrica($\beta = 0,8$)-Exponencial($\alpha = 8,2$), Poisson($\lambda = 0,1$)-Gamma($\alpha = 8,2, \beta = 0,8$)
2. Calcule la media, varianza y coeficiente de asimetría de esas dos distribuciones compuestas.

Observaciones 2. Use el programa Maple para el cálculo simbólico. Observe que en este caso las distribuciones secundarias son continuas.

2. Modelos para el número de siniestros: heterogeneidad, ajuste, sobredispersión e inflado de ceros.

Ejercicio 3. Cálculo de las cuantías de distribuciones contadoras.

Escriba un programa informático que calcule cuantías de las siguientes distribuciones aprovechando su pertenencia a las clases $C(a, b, 0)$ o $C(a, b, 1)$

1. Poisson($\lambda = 0,4$)

2. Binomial Negativa $BN(r = 0,2, \beta = 1,4)$
3. Binomial Negativa Extendida y truncada $BNET(r = -0,6, \beta = 1,4)$
4. Logarítmica $L(\beta = 0,5)$

Ejercicio 4. Ajuste de la binomial negativa.

Considere las siguientes frecuencias observadas para la variable número de siniestros acaecidos durante el último año (muestras A,B,C,...,G):

k	A	B	C	D	E	F	G
0	8,740	20,592	370,412	103,704	565,664	96,978	99
1	1,317	2,651	46,545	14075	68,714	9,240	65
2	239	297	3,935	1,766	5,177	704	57
3	42	41	317	255	365	43	35
4	14	7	28	45	24	9	20
5	4	0	3	6	6	0	10
6	4	1	0	2	0	0	4
7	1	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	3
9	0	0	0	0	0	0	4
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1
Total	9,461	23,589	421,240	119,853	639,950	106,974	298

(1)

Mediante la estimación por máxima verosimilitud y la prueba de bondad en el ajuste de la χ^2 , intente ajustar el modelo binomial negativa.

1. En cada caso, estimense los parámetros por máxima verosimilitud.
2. En cada caso, anótense los siguientes valores y decida si rechaza o no el modelo:
 - a) Frecuencias observadas y teóricas en dos columnas contiguas.
 - b) Estadístico de Pearson.
 - c) p-valor. (rechácese la hipótesis nula para un p-valor $< 0,04$)

Observaciones 3. Use los códigos R vistos en clase.

Ejercicio 5. Ajuste de la Poisson ponderada por Inversa Gaussiana.

Mediante la estimación por máxima verosimilitud y la prueba de bondad en el ajuste de la χ^2 , intente ajustar una distribución Poisson ponderada por Inversa Gaussiana a las muestras del ejercicio 4.

1. En cada caso, estímense los parámetros por máxima verosimilitud.
2. En cada caso, anótense los siguientes valores y decida si rechaza o no el modelo:
 - a) Frecuencias observadas y teóricas en dos columnas contiguas.
 - b) Estadístico de Pearson.
 - c) p-valor. (rechácese la hipótesis nula para un p-valor $< 0,04$)

Observaciones 4. Use los códigos R vistos en clase.

Ejercicio 6. Carteras heterogéneas.

Elija una muestra detectada en cada uno de los dos últimos ejercicios (incluidas por tanto en las muestras presentadas en el ejercicio 4, un total de dos muestras) para las que no haya rechazado el modelo correspondiente. Conteste a las siguientes preguntas:

1. La muestra, ¿ha sido producida por una cartera heterogénea?
2. En caso afirmativo escriba cuál es la estructura de la cartera y calcule las siguientes probabilidades:
 - a) $P\{\Lambda \leq 0,09\}$
 - b) $P\{\Lambda > 1\}$
 - c) Interprete estos dos sucesos y sus respectivas probabilidades en términos de pólizas de la cartera.

Ejercicio 7. Modelo de Poisson ponderado por Inversa Gaussiana.

Calcule las cuantías de una Poisson ponderada por una inversa gaussiana de parámetros $\mu = 0,5, \beta = 0,15$.

Observaciones 5. Resuélvalo aplicando la relación recursiva introducida en la teoría, lección 3 p.35.

Ejercicio 8. Inflado de cerros.

Ajuste un modelo (Poisson o binomial negativa) a cada una de las siguientes cuatro muestras de número de siniestros.

1. Estime sus parámetros por máxima verosimilitud.
2. Utilice la prueba de bondad del ajuste de la χ^2 para decidir si el modelo es apto.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	74745	8353	1945	470	104	24	8	1	1	1	0
	134563	6198	487	33	6	0	0	0	0	0	0
	57315	543	113	20	5	3	0	1	0	0	0
	37646	244	68	18	17	2	1	2	0	1	1

Observaciones 6. Utilice el código R visto en clase. Proceda con cuidado en el momento de unir la frecuencia estimada para 0 siniestros y el resto de frecuencias correspondientes al trozo dado por el modelo paramétrico.

3. Aproximación, Cálculo Numérico y simulación de distribuciones compuestas

Ejercicio 9. Simulación del número de siniestros de un riesgo.

Supongamos que tenemos una cartera con 150,000 pólizas. Anualmente la función de estructura de la cartera es una $\text{Gamma}(\alpha = 0,8, \beta = 0,1)$, y las cuantías de los siniestros están distribuidas según una $\text{IG}(\mu = 0,8, \theta = 0,1)$.

Simule una muestra de 150,000 daños totales producidos por las pólizas de esa cartera.

Observaciones 7.

1. Realice la simulación en R usando la semilla `set.seed(123)`.
2. Aplique el algoritmo visto en la lección 5, sobre simulación de los daños totales de las pólizas de una cartera.

Ejercicio 10. Aproximaciones Normal-Power de probabilidades.

Consideremos una cartera cuya distribución del daño total S anual tiene las siguientes características: ($1u.m. = 10^5\text{€}$)

$$\mu = 20, \sigma = 5, \gamma = 0,9$$

Considere un periodo futuro unitario de tiempo. Aproxime las probabilidades de los siguientes sucesos:

$$\{S \leq 20\}, \quad \{S \geq 22\}, \quad \{18 \leq S \leq 22\}$$

Observaciones 8. 1. Utilice la función **aggregateDist()** del paquete R **actuar**.

2. Si lo prefiere, puede usar la hoja maple **NP.mws** vista en clase.

Ejercicio 11. Aproximaciones de cuantiles.

Escriba un código que permita calcular los valores aproximados de S correspondientes a las probabilidades $\alpha = 0,99, 0,995$, considerando los valores de los parámetros μ, σ, γ dados en el ejercicio 10.

Observaciones 9. Se trata de codificar el procedimiento inverso estudiado para la aproximación Normal-Power a lo largo de la lección 5 páginas 13 y 14.

Ejercicio 12. Algoritmo Recursivo de Panjer.

1. Teniendo en cuenta que ya tiene instalado el paquete R **actuar**, use la función **discretize()** para aritmetizar la distribución $\text{gamma}(\alpha = 2,1, \beta = 3,5)$.
 - a) Obtenga las cuatro variedades de distribuciones discretizadas que puede calcular la función **discretize()**.
 - b) Escriba el código de manera que se puedan representar gráficamente la distribución continua y sus cuatro versiones discretas.

2. A continuación, tome una de esas discretizaciones y calcule las cuantías del daño total S suponiendo que el número de siniestros N está distribuido según:
 - a) Poisson de parámetro $\lambda = 0,3$.
 - b) Binomial negativa $r = 0,7$, $\beta = 1,5$
3. Represente gráficamente las distribuciones obtenidas.
4. Simule una muestra de valores de la distribución del daño total S con la distribución de Poisson dada en 2a como primaria y la gamma dada en 1 como secundaria.
 - a) Represente gráficamente la distribución muestral.

Observaciones 10. 1. Lea la ayuda de la función **discretize()**, así como sus ejemplos que se pueden copiar y pegar.

2. En el apartado 2 utilice las funciones del paquete **actuar** de R: función **aggregate-Dist()**. Lea primero la ayuda.

Ejercicio 13. * Responsabilidad civil autos España 1992-2002.

Considere la muestra de 395 cuantías de siniestros recogida en el mercado español entre 1992 y 2002 y homogeneizada, con un nivel de comunicación de 150,253,02 €¹. Encontrará dicha muestra en la hoja Excel (Datos Autos Spain resp civil 1992_2002.xls) en el campus virtual. Se trata de aplicar a estos datos reales todo lo visto para las cuantías en la lección 3.

1. Represente el qq-plot exponencial para estos datos y decida si hay lugar para declarar dos tramos.
2. Estime el umbral u a partir del cual los siniestros se denominarán “grandes”.
3. Estime la probabilidad de que un siniestro exceda al umbral u , y la probabilidad de que sea inferior a u .
4. Ajuste un modelo paramétrico al primer tramo. Puede intentar usar algún método gráfico (qq-plot). Recuerde que los datos están censurados a la izquierda. Si usted usa el modelo exponencial tendrá que ser pues el exponencial trasladado (shifted).
5. Para el segundo tramo, considere una Pareto Generalizada y estime por máxima verosimilitud los parámetros de forma ξ y de escala σ . Use el paquete de R **fextremes**.
6. Escriba la distribución de las cuantías.
7. Estime la media de los excesos sobre el umbral.

¹Esto significa que solo han sido recogidas las cuantías que superan dicho nivel de comunicación. Dicho de otro modo, la muestra de cuantías está censurada a la izquierda en dicho valor.

4. Medidas del riesgo

Ejercicio 14. * VaR no es subaditiva.

Consideremos 100 bonos X_i , $i = 1, \dots, 100$ cada uno con una probabilidad de “default” del 1 %, un cupón del 2 % si no hay default, y valor facial 100€:

$$X_i = \begin{cases} -100 & , \text{ probabilidad} = 0,01 \\ 2 & , \text{ probabilidad} = 0,99 \end{cases}$$

Consideremos dos carteras: una diversificada que agrega las v.a. $X_i : C_1 = \sum_{i=1}^{100} X_i$, y otra C_2 no diversificada que considera los 100 bonos tomados de uno en uno. Entonces la medición del riesgo de cada una de estas carteras sería:

$$VaR(C_1) = VaR\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right), \quad VaR(C_2) = \sum_{i=1}^{100} VaR(X_i) = 100VaR(X_i)$$

Encuentre un nivel de probabilidad p para el cual no se verifique la subaditividad, es decir que se verifique:

$$VaR(C_1) > VaR(C_2)$$

Ejercicio 15. VaR para riesgos normalmente distribuidos.

Considere un riesgo $X \sim N(\mu, \sigma)$.

1. Demuestre que es:

$$VaR[X; p] = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p), \quad p \in (0, 1),$$

donde Φ es la distribución $N(0, 1)$ y Φ^{-1} es su función cuantil.

2. Pruebe que en este caso VaR sí que es subaditiva.

Ejercicio 16. VaR para riesgos logarítmico normales.

Considere un riesgo $X \sim LN(\mu, \sigma)$.

1. Demuestre que es:

$$VaR[X; p] = \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(p)), \quad p \in (0, 1)$$

2. Calcúlelo para $\mu = 2$, $\sigma = 1$, $p = 0,995$

Ejercicio 17. * TVaR para riesgos normalmente distribuidos.

Considere un riesgo $X \sim N(\mu, \sigma)$.

1. Demuestre que es:

$$TVaR[X; p] = \mu + \sigma \frac{\Phi'(\Phi^{-1}(p))}{1 - p}, \quad p \in (0, 1)$$

2. Calcúlelo para $\mu = 2$, $\sigma = 1$, $p = 0,995$

Ejercicio 18. * TVaR para riesgos logarítmico normales.

Considere un riesgo $X \sim LN(\mu, \sigma)$.

1. Demuestre que:

$$TVaR[X; p] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Phi(\sigma - \Phi^{-1}(p))}{1 - p}, \quad p \in (0, 1).$$

2. Calcúlelo para $\mu = 2$, $\sigma = 1$, $p = 0,995$

Ejercicio 19. ES para riesgos normalmente distribuidos.

Considere un riesgo $X \sim N(\mu, \sigma)$.

1. Demuestre que:

$$ES[X; p] = \sigma \Phi'(\Phi^{-1}(p)) - \sigma \Phi^{-1}(p)(1 - p), \quad p \in (0, 1).$$

2. Calcúlelo para $\mu = 2$, $\sigma = 1$, $p = 0,995$

Ejercicio 20. * ES para riesgos logarítmico normales.

Considere un riesgo $X \sim LN(\mu, \sigma)$.

1. Demuestre que:

$$ES[X; p] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(p)) - \exp(\mu + \sigma \Phi^{-1}(p))(1 - p), \quad p \in (0, 1).$$

2. Calcúlelo para $\mu = 2$, $\sigma = 1$, $p = 0,995$

Ejercicio 21. Medida *Proportional Hazard* (PH) para un riesgo Pareto.

Considérese un riesgo distribuido según una Pareto $Par(u, \alpha)$ (mire la página 36 de la lección 2).

1. Calcule la expresión de la cola de la función de distribución $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, y compruebe que $(\bar{F}(x))^{1/\xi}$ se corresponde con la cola de una $Par(u, \frac{\alpha}{\xi})$.
2. Compruebe que es:

$$PH_{\xi}[X] = \begin{cases} \frac{u}{1 - \frac{\alpha}{\xi}} & , \quad \xi < \alpha \\ +\infty & , \quad \xi \geq \alpha \end{cases}$$

Ejercicio 22. Medida PH para un riesgo Exponencial.

Para un riesgo $X \sim Exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, demostrar que se tiene $PH_{\xi}[X] = \xi\alpha$

Ejercicio 23. Medida PH para un riesgo Uniforme.

Para un riesgo $X \sim Unif(0, a)$, demostrar que se tiene $PH_{\xi}[X] = \frac{\xi a}{\xi + 1}$

Ejercicio 24. * Estimación muestral de medidas de riesgo para una distribución compuesta. Realice los siguientes pasos:

1. Tomando la semilla 6789, simule una muestra de tamaño= 10^5 para el daño total de un riesgo cuyo número de siniestros es $N \sim BN(r = 0,7, \beta = 1,1)$, y cuyas cuantías individuales son $X \sim IG(\mu = 10, \theta = 3)$.
2. Calcule para un nivel de probabilidad $p = 0,995$ para dicha muestra las medidas Var, TVaR, CVaR y ES.
3. Calcule el capital económico asociado a este riesgo basado en el VaR a un nivel de probabilidad $p = 0,995$.
4. Estudie la variabilidad de dichas medidas VaR, CVaR y ES según el tamaño de la muestra. Considere muestras sucesivamente más grandes e investigue como van evolucionando las medidas de riesgo.

5. Ordenación de riesgos.

Ejercicio 25. Orden estocástico y familia exponencial trasladada.

La familia exponencial trasladada tiene la siguiente distribución de parámetros ($\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$):

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-\alpha)} & , \quad x \geq \alpha \\ 0 & , \quad \text{resto} \end{cases}$$

Considere dos de estos riesgos y encuentre las condiciones sobre los parámetros λ, θ y α, β para que se cumpla

$$X \leq_{ST} Y$$

Ejercicio 26. Ordenación de riesgos y familias paramétricas.

Justifique las siguientes ordenaciones:

1. $\text{Unif}(a_1, b_1) \leq_{ST} \text{Unif}(a_2, b_2)$, siendo $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$.
2. $LN(\mu_1, \sigma_1) \leq_{SL} LN(\mu_2, \sigma_2)$, siendo $e^{\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}} \leq e^{\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}, \sigma_1 \leq \sigma_2$.
3. $N(\mu_1, \sigma_1) \leq_{SL} N(\mu_2, \sigma_2)$, siendo $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1 \leq \sigma_2$.
4. $N(\mu_1, \sigma_1) \leq_{SL} N(\mu_2, \sigma_2)$, siendo $\mu_1 \leq \mu_2, \sigma_1 \leq \sigma_2$.

6. Reaseguro.

Ejercicio 27. * Reaseguro óptimo con varias subcarteras.

Considérese una cartera compuesta de las siguientes dos subcarteras:

	subcart. 1	subcart.2
λ_i	60	40
c_{1i}	4	2
c_{2i}	29,4	12,1
σ_i^2	1764	484
θ_i	0,1	0,05
P_i	240	80
B_i	24	4

en donde λ_i son los números esperados de siniestros, c_{ji} , $(i, j = 1, 2)$ son los momentos centrados en el origen para las cuantías de los siniestros, $\sigma_i^2 = \lambda_i c_{2i}$ son las varianzas de los daños totales, θ_i son los recargos de seguridad, $P_i = \lambda_i c_{1i}$ son las primas puras, y $B_i = \theta_i P_i$ son los beneficios esperados.

Se trata de determinar cuál sería la combinación óptima de cesiones en ambas subcarteras, suponiendo que ambas se reaseguran cuota-parte. Para ello, resuelva las siguientes cuestiones:

1. Escriba el programa multiobjetivo media-varianza que modeliza este problema (con sus dos objetivos).
2. Escriba el programa escalarizado en función de un parámetro $\alpha \in [0, 1]$.
3. Calcule los coeficientes R_i ($i = 1, 2$).
4. Expresé los óptimos de Pareto del programa en función del parámetro α .
5. Representar gráficamente los óptimos de Pareto dentro del cuadrado unidad $(a_1, a_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$.
6. Representar gráficamente la línea de eficiencia, es decir, el resultado de substituir los óptimos de Pareto dentro de la función objetivo escalarizada obtenida en el apartado 2.

7. Triángulos de siniestros. Métodos para el cálculo de la provisión de siniestros

Ejercicio 28. Método chain-ladder.

Escriba un programa que aplique el método chain ladder a un triángulo de siniestros y aplíquelo para reproducir los resultados del ejemplo visto en clase, cuyos datos de siniestros PAGADOS son:

Pagados	j = 0	1	2	3	4	5	∞ =Last
i = 0	1,001	1,855	2,423	2,988	3,335	3,483	3,705
1	1,113	2,103	2,774	3,422	3,844		
2	1,265	2,433	3,233	3,977			
3	1,490	2,873	3,880				
4	1,725	3,261					
5	1,889						

	0	1	2	3	4	5
$F_{0,j-1}$	1.8531	1.3062	1.2332	1.1161	1.0444	1.0637
$F_{1,j-1}$	1.8895	1.3191	1.2336	1.1233		
$F_{2,j-1}$	1.9233	1.3288	1.2301			
$F_{3,j-1}$	1.9282	1.3505				
$F_{4,j-1}$	1.8904					

F_{ij}	Peso	$F_{ij} \times \text{Peso}$
1,853	1,001	1,855
1,889	1,113	2,103
1,923	1,265	2,433
1,928	1,490	2,873
1,890	1,725	3,261
Σ Pesos	6,594	
Σ (PesoxFij)		12,525
$1/(\Sigma \text{ Pesos}) \times \Sigma$ (PesoxFij)		12,525/6,594=1.899

Ejercicio 29. Método Bornhuetter Ferguson.

Escriba un programa que aplique el método B-F a un triángulo de siniestros y aplíquelo al triángulo de siniestros pagados del ejercicio anterior, teniendo en cuenta los siguientes ingresos por primas correspondientes a cada año de origen, y tomando un loss ratio igual al 83 %.

Origen	5	4	3	2	1	0
P	8,502	7,482	6,590	5,680	5024	4,486

Ejercicio 30. * Estimación de la provisión de prestaciones de acuerdo con el Reglamento.

Siguiendo los dos ejercicios anteriores, supongamos que el correspondiente triángulo de incurridos es:

<u>Incurridos</u>	<u>j = 0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>∞=Last</u>
<u>i = 0</u>	2,866	3,334	3,503	3,624	3,719	3,720	3,720
<u>1</u>	3,359	3,889	4,033	4,040	4,100		
<u>2</u>	3,848	4,503	4,600	4,702			
<u>3</u>	4,673	5,400	5,420				
<u>4</u>	5,369	6,142					
<u>5</u>	5,818						

Con idénticos ingresos por primas y el mismo loss ratio que en el ejercicio anterior. Aplique el método explicado en clase para estimar la provisión y calcule dicha estimación.

Observaciones 11. El método es el de la lección 9 p.30.

Ejercicio 31. * Método de Mack.

Para el triángulo y las estimaciones Chain-Ladder calculadas en el ejercicio 29:

1. Aplicando el modelo de Mack, calcule una estimación del Error Cuadrático Medio del Proceso (ecmp) cometido.
2. Conocidos los valores medios de las reservas y su ecmp (que hará el papel de desviación típica de la distribución de las reservas), considere sucesivamente una aproximación normal y logarítmico normal para la distribución de dichas reservas, y a continuación calcule las siguientes medidas de riesgo para la reserva (son cuatro valores):

a) $Var[R, 0,995]$.

b) $TVaR[R, 0,995]$.

Observaciones 12. Para el apartado 1 utilice el paquete R “Chain Ladder”, en donde se encuentra programado el método de Mack. Para el apartado 2 utilice los ejercicios 15, 16, 17, 18, en donde se dan las expresiones analíticas de estas dos medidas de riesgo en los casos normal y logarítmico normal.