

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT36

Integrabilidad, caos y entrelazamiento en sistemas cuánticos

Integrability, chaos and entanglement

Supervisores: Federico Finkel Morgenstern y Artemio González López

Adrián Luis Gutiérrez Arroyo

Doble Grado en Física y Matemáticas Curso

académico 2023-24 Convocatoria Ordinaria

(Junio)

Calificación: 9,9

Entropía de entrelazamiento en la cadena XX de Heisenberg

Resumen:

Se estudia la entropía bipartita de entrelazamiento como medida de cuantificación del entrelazamiento cuántico. Se calcula para el estado fundamental de una cadena de espines resoluble, la cadena unidimensional XX de Heisenberg con condiciones periódicas, que resulta ser equivalente a un modelo de fermiones libres vía una transformación de Jordan-Wigner. Esto permite calcular de manera exacta la entropía bipartita de entrelazamiento entre un bloque de espines con el resto de la cadena. Se obtiene un cálculo analítico del comportamiento asintótico de la entropía con el tamaño del subsistema, usando un caso demostrado de la conjetura de Fisher-Hartwig sobre el comportamiento asintótico de los determinantes de Toeplitz. Los resultados obtenidos confirman que la entropía bipartita de entrelazamiento permite caracterizar las transiciones de fase cuánticas, que quedan controladas por la simetría conforme.

Abstract:

We study the bipartite entanglement entropy as a measure to quantify quantum entanglement. It is calculated for the ground state of a solvable spin chain, the one-dimensional XX Heisenberg chain with periodic boundary conditions, which turns out to be equivalent to a free fermion model via a Jordan-Wigner transformation. This allows for an exact microscopic calculation of the ground state bipartite von Neumann entanglement entropy between a block of spins and the rest of the chain. Using a proven case of the Fisher-Hartwig conjecture on the asymptotic behavior of Toeplitz determinant, we derive the asymptotic behaviour of the entropy as the size of the block tends to infinity. We will show the emergence of universal logarithmic scaling behaviour that characterizes critical points. The obtained results confirm that bipartite entanglement entropy can characterize quantum phase transitions, controlled by conformal symmetry.

Entropía de entrelazamiento en la cadena XX de Heisenberg

I. INTRODUCCIÓN

El entrelazamiento cuántico es una rasgo característico de la mecánica cuántica sin análogo clásico que permite la aparición de correlaciones de largo alcance entre distintas partes de un sistema. Se presenta como un valioso recurso en computación cuántica permitiendo procesar y enviar información de manera novedosa, como es la posibilidad de teleportar información cuántica. Asimismo, el entrelazamiento aparece de manera natural en sistemas cuánticos de muchos cuerpos a bajas temperaturas, dando lugar a fenómenos colectivos como la superconductividad o el efecto Hall cuántico. El estado fundamental es una superposición de un número elevado de estados producto expresados en una base local, lo que determina muchas de sus propiedades relevantes. El entrelazamiento juega también un papel clave en la aparición de correlaciones de largo alcance que caracterizan las transiciones de fase cuánticas. Esto explica el elevado interés actual por investigar el entrelazamiento cuántico tanto en el campo de la materia condensada como en el ámbito de la información y computación cuántica. Centraremos nuestro estudio en las propiedades de entrelazamiento del estado fundamental de hamiltonianos que describen la interacción presente en cadenas de espines. Dado su valor, conviene disponer de una medida que cuantifique el entrelazamiento de un estado cuántico. Definiremos y analizaremos la medida de entrelazamiento más estudiada hasta el momento, la entropía bipartita de entrelazamiento. El objetivo del presente trabajo es introducir el concepto de entropía de entrelazamiento y estudiarlo en detalle para ciertas cadenas de espines. Incidentalmente, se exponen resultados y métodos ampliamente usados y conocidos en el estudio de los sistemas cuánticos de sistemas de muchos cuerpos. Tras definir la entropía de von Neumann como medida satisfactoria de entrelazamiento, se introducen los modelos unidimensionales de espines sujetos a estudio, la cadena XX de Heisenberg y sus variantes. Calculamos de manera explícita la entropía bipartita de entrelazamiento para el estado fundamental entre un bloque de L espines contiguos y el resto de la cadena. Una propiedad fundamental de este tipo de cadenas es el hecho de que la entropía de entrelazamiento se puede expresar en términos de los autovalores de la matriz de correlación del subsistema. Al ser esta matriz de Toeplitz es posible aplicar un caso probado de la conjetura de Fisher-Hartwig para probar rigurosamente el comportamiento asintótico de la entropía de entrelazamiento. De esta manera probaremos que la entropía de entrelazamiento de von Neumann S_L de la cadena XX es asintóticamente proporcional a $\log L$, comprobando que la entropía de entrelazamiento es

un indicador adecuado de la criticalidad. Esto se debe a que en su fase crítica, estos modelos se describen efectivamente por teorías de campos conformes en (1+1) dimensiones, cuya entropía geométrica escala logarítmicamente con la longitud del bloque L [1].

II. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO

El entrelazamiento es una propiedad de los sistemas cuánticos compuestos por varios subsistemas, y emerge de la superposición lineal de estados producto siendo por tanto una propiedad fundamental de la mecánica cuántica (estructura de espacio vectorial del espacio de Hilbert). Fue uno de los primeros aspectos de la física cuántica que se estudió y discutió en detalle (paradoja EPR [2]) y existen varias maneras de cuantificarlo. El problema de medir el entrelazamiento es un campo activo de investigación, con numerosos métodos propuestos en la literatura [3]. El entrelazamiento entre dos partes de un sistema cuántico (sistemas bipartitos) es la caracterización del entrelazamiento en estados puros mejor comprendida, incluso al analizar el entrelazamiento de muchos cuerpos, donde la dimensión del espacio de Hilbert crece exponencialmente con el número de subsistemas que interactúan.

Dado un sistema cuántico, consideremos una partición en dos partes A y B de manera que el espacio de Hilbert que describe el sistema completo pueda factorizarse como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Una de las herramientas matemáticas de mayor utilidad a la hora de cuantificar el entrelazamiento es el **teorema de la descomposición de Schmidt**, el cual establece que dado un estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, puede escribirse como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \alpha_i |w_i^A\rangle \otimes |w_i^B\rangle, \quad (1)$$

donde $\{|w_i^A\rangle\}_{i=1,\dots,d_A}$ y $\{|w_i^B\rangle\}_{i=1,\dots,d_B}$ son ciertas bases ortonormales de \mathcal{H}_A ($d_A = \dim \mathcal{H}_A$) y \mathcal{H}_B ($d_B = \dim \mathcal{H}_B$), respectivamente (las bases dependen del estado $|\psi\rangle$ en cuestión). Los coeficientes α_i se denominan pesos de Schmidt y pueden tomarse como reales y no negativos $\alpha_i \geq 0$, de manera que $\sum_{i=1}^d \alpha_i^2 = 1$ si el estado está normalizado, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$; $d \leq \min(d_A, d_B)$ es el rango de Schmidt, pudiendo ser $d = \infty$. Los pesos de Schmidt codifican el entrelazamiento entre los subsistemas A y B . Si solo hay un peso de Schmidt ($\alpha_1 = 1$), el estado puro considerado se puede escribir como un producto tensorial de dos estados de cada subespacio de la bipartición $|\psi\rangle = |w_i^A\rangle \otimes |w_i^B\rangle$, con lo que no hay entrelazamiento entre A y B . En este

caso el estado puro se denomina **separable**. Se trata de un estado cuasi-clásico, en el que conocer el sistema determina al completo los estados de cada subsistema. En caso contrario, si existen varios pesos de Schmidt $\alpha_i \neq 0$, el estado puro se dice **entrelazado**, no se puede escribirse como un producto tensorial, revelando el entrelazamiento o correlación cuántica entre A y B . El entrelazamiento es una propiedad del estado y de la bipartición del sistema cuántico considerada. Dado un estado, el entrelazamiento del estado dependerá fuertemente de la bipartición considerada, codificado en los pesos de Schmidt. La descomposición de Schmidt no solo proporciona un método directo para determinar si un determinado estado presenta entrelazamiento entre dos partes A y B , también proporciona una manera de cuantificarlo. Las matrices densidad reducidas que representan los subsistemas A y B son estados mezcla como resultado del entrelazamiento. El operador densidad reducido ρ_A , representa el estado físico del subsistema A y se define como el único operador $\rho_A : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_A$ tal que para cualquier operador que actúa solo en el subsistema A , $M : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_A$, se tiene que:

$$\text{tr}_A(M\rho_A) = \text{tr}(\rho(M \otimes \mathbb{I}_B))$$

donde $\text{tr}(\cdot)_A$ denota la traza parcial sobre el subsistema A y ρ es la matriz densidad que representa el estado físico en el sistema completo, que para estados puros se reduce al proyector sobre el estado $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Los operadores densidad reducidos se pueden obtener a partir de la traza parcial sobre el otro subsistema, $\rho_A = \text{tr}_{\mathcal{H}_B}(\rho)$. Al ser la traza parcial un invariante, podemos sumar sobre los elementos de la base ortonormal que proporciona la descomposición de Schmidt 1:

$$\rho_A = \text{tr}_{\mathcal{H}_B}(\rho) = \sum_{i=1}^{d_B} \langle w_i^B | \rho | w_i^B \rangle = \sum_{i=1}^{d_B} \langle w_i^B | \psi \rangle \langle \psi | w_i^B \rangle,$$

que usando la descomposición eq. (1) y la ortonormalidad de la base considerada $\langle w_i^B | w_j^B \rangle = \delta_{ij}$, implican que

$$\rho_A = \text{tr}_{\mathcal{H}_B}(\rho) = \sum_{i=1}^d |\alpha_i|^2 |w_i^A\rangle\langle w_i^A|.$$

Análogamente, se define la matriz densidad reducida del subsistema B , que procediendo de igual manera se puede expresar como:

$$\rho_B = \text{tr}_{\mathcal{H}_A}(\rho) = \sum_{i=1}^d |\alpha_i|^2 |w_i^B\rangle\langle w_i^B|.$$

Se aprecia así que el estado está entrelazado con respecto a los subsistemas A y B si y sólo si los operadores densidad reducido son estados mezcla. Esta propiedad sorprendente no es posible clásicamente, pues teniendo información completa del estado en el que se encuentra el sistema, no se tiene certeza sobre el estado de los

subsistemas. Por lo tanto, a pesar de estar definidos en espacios de Hilbert que pueden diferir enormemente en dimensión, las matrices densidad reducida ρ_A y ρ_B tienen los mismos autovalores no nulos, mostrando de nuevo que el entrelazamiento es una propiedad recíproca entre los subsistemas A y B y no una propiedad exclusiva del estado. Por ejemplo, si se tiene una cadena de N espines, una bipartición posible es que el subsistema A considere un espín de la cadena, $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$, ($\dim \mathcal{H}_A = 2$) y el subsistema B considere los $N - 1$ espines restantes, $\mathcal{H}_B = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N-1}$, ($\dim \mathcal{H}_B = 2^{N-1}$). En este caso habrá a lo sumo dos pesos de Schmidt α_1, α_2 asociados a la descomposición de un estado puro. Esto ejemplifica claramente que la entropía de entrelazamiento S no es una magnitud extensiva de la manera habitual, al no depender del tamaño del subsistema (número de espines en este ejemplo), aunque guarda una estrecha relación con el tamaño de la frontera de los subsistemas (véase la ley de área en [3]). Dado un estado puro y una bipartición, un observador que mida el estado en uno de los subsistemas percibirá un estado cuántico mixto si dicho subsistema está entrelazado con el resto. Además, el entrelazamiento sugiere que la medida de un observable en el subsistema A puede afectar instantáneamente los posibles resultados de las medidas en el subsistema B , independientemente de la distancia entre ellos.

La entropía de von Neumann es la generalización cuántica de la entropía de Shannon. La entropía de Shannon mide la incertidumbre o la sorpresa asociada a una distribución de probabilidad clásica, $\{p_i : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$, definida como $S = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$, considerando $0 \log 0 \equiv 0$ por convenio [18]. Los estados cuánticos quedan descritos con matrices densidad que reemplazan las distribuciones de probabilidad, y von Neumann definió la entropía de un estado cuántico representado por un operador densidad ρ , como $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho)$. La medida de entrelazamiento entre A y B que consideramos es la entropía de von Neumann del estado reducido,

$$S(\rho_A) := -\text{Tr}_A(\rho_A \log \rho_A) \stackrel{\text{eq. (1)}}{=} -\sum_{i=1}^d \alpha_i^2 \log \alpha_i^2. \quad (2)$$

Esta entropía de von Neumann puede interpretarse como la cantidad de información sobre el subsistema A no disponible aún cuando se conoce el estado del sistema completo $A \sqcup B$. En teoría de la información es habitual usar el logaritmo en base 2 de manera que la entropía se mide en bits o unidades de información, pero por conveniencia en los cálculos presentados, \log va a denotar logaritmo en base natural. S proporciona la cantidad de información clásica necesaria para especificar el estado reducido ρ_A . Cuando ρ corresponde a un estado puro, $S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\text{Tr}_A(\rho_B \log \rho_B) \equiv S$, ya que los coeficientes α_i diagonalizan ambos operadores densidad reducidos, aunque escritos en diferentes bases.

Por tanto la sorpresa que un observador del subsistema A experimenta al conocer su correlación con B es idéntica a la que experimenta un observador en B al descubrir su correlación con A . Si $\alpha_1 = 1$ y el resto de pesos se anulan, $|\psi\rangle$ es un estado producto sin entrelazar, con lo que el estado reducido es un estado puro y la entropía de entrelazamiento es $S = 0$. Por otro lado, si todos los coeficientes son iguales $\alpha_i = 1/d$, entonces S alcanza su valor máximo, dado por $S_{max} = \log d$, donde $d = \min(\dim\mathcal{H}_A, \dim\mathcal{H}_B)$. Se define la *entropía de entrelazamiento* en sistemas bipartitos como la entropía de von Neumann del operador densidad reducido de cualquiera de los subsistemas de la partición 2. Esta entropía es la figura de mérito para medir el entrelazamiento más estudiada tanto en materia condensada como en computación cuántica. De hecho, bajo ciertas condiciones de regularidad, la entropía de von Neumann es la única medida posible de entrelazamiento en sistemas bipartitos. Dichas condiciones de regularidad que satisface son: (1) ser invariante bajo operaciones unitarias $S(\rho) = S(U\rho U^{-1}) : U^\dagger = U^{-1}$; (2) ser continua; y (3) ser aditiva $S(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = S(|\psi\rangle) + S(|\phi\rangle)$. Además es una medida adecuada al ser de entrelazamiento monótono[4]. La entropía de entrelazamiento posee una definición natural, buenas propiedades, un significado claro en teoría de la información cuántica y presenta conexiones con la entropía geométrica en teoría cuántica de campos o con la entropía de agujeros negros, revelando el éxito de su estudio. Además, permite caracterizar las transiciones de fase cuánticas, ya que muestra comportamientos y escalados universales en los puntos críticos, conectando con la teoría de campos conformes y permite caracterizar los fenómenos críticos cuánticos y clasificarlos en sus correspondientes clases de universalidad. Por contra, presenta ciertas desventajas como la dificultad de calcular esta cantidad o la imposibilidad de medirse experimentalmente al no ser un observable directo.

En nuestro caso particular, estamos centrados en calcular la entropía de entrelazamiento para un estado físicamente relevante de una cadena de espines y no estados arbitrarios del espacio de Hilbert, con lo que centramos la atención en el estado fundamental, que es el que aparece a temperatura nula. Los estados físicamente relevantes como estados térmicos o el fundamental, presentan un elevado grado de entrelazamiento cuando se expresan en bases locales (productos tensoriales de las bases de los espacios de Hilbert de cada partícula) involucrando un número exponencial de coeficientes (2^N), lo que hace muy costoso tratarlos computacionalmente. Afortunadamente, tratamos con modelos sencillos de los que podremos calcular exactamente su estado fundamental. Para poder capturar la distribución global del entrelazamiento a lo largo de la cadena y estudiar las correlaciones cuánticas entre los espines de la cadena, vamos a

considerar el entrelazamiento entre un bloque de L espines consecutivos con el resto de la cadena. Esto permite considerar biparticiones parametrizadas por la longitud del bloque L , de manera que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_{N-L}$. Esto nos permitirá estudiar cómo depende el entrelazamiento con el tamaño del bloque, L . De esta manera, se podrá explorar el comportamiento de las correlaciones cuánticas en diferentes escalas de longitud y capturar la emergencia de una ley de escala universal típica de los fenómenos críticos. Denotando $|\psi\rangle$ al estado fundamental de la cadena de N espines, la matriz densidad reducida que representa el bloque de L espines consecutivos viene dada:

$$\rho_L = \text{tr}_{N-L} |\psi\rangle \langle \psi|,$$

donde tr_{N-L} denota la traza sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{N-L} del resto de espines de la cadena que no configuran el bloque. Cuando el estado fundamental sea translacionalmente invariante, se tiene que ρ_L no depende de la posición del bloque de L espines, sino únicamente de su tamaño. Consideraremos condiciones de contorno periódicas en la cadena, con lo que se tendrá esta invariancia traslacional en el estado fundamental. Usaremos como medida de entrelazamiento de la bipartición considerada la entropía de entrelazamiento de von Neumann eq. (2):

$$S_L \equiv -\text{tr}(\rho_L \log \rho_L),$$

Por invariancia traslacional y al ser la entropía de entrelazamiento la misma para ambos subsistemas se tiene que $S_L = S_{N-L}$

III. EL MODELO XX DE HEISENBERG

Las cadenas de espines resolubles proporcionan un marco de trabajo sencillo que permite explorar los conceptos teóricos y derivar expresiones analíticas para propiedades físicas relevantes. El modelo XX de Heisenberg aun capturando la esencia de una transición de fase cuántica es suficientemente sencillo para resolverse de manera explícita. Consiste en una cadena unidimensional de N partículas de espín-1/2 con interacción a primeros vecinos en un campo magnético externo λ orientado en la dirección z del espacio de espines. En unidades naturales ($\hbar = 1$) el hamiltoniano del modelo es:

$$H_{XX} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y) - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^z, \quad (3)$$

donde j etiqueta los espines de la cadena y los operadores para espín-1/2 son las matrices de Pauli, cuya representación matricial en la base de autoestados de σ_i^z es

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cada posición en la cadena tiene asociado un subespacio $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$. Los autoestados de los operadores σ_i^z con autovalores $+1, -1$ constituyen una base del subespacio y se representan como espines orientados hacia arriba o hacia abajo $|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$. Los productos tensoriales de estas bases locales forman una base del espacio de Hilbert de la cadena completa, \mathcal{B} . El signo negativo del primer término, típico de un modelo ferromagnético, favorece el alineamiento entre espines vecinos. Este hamiltoniano conmuta con el operador magnetización a lo largo del eje z , $M_z = \sum_{i=1}^N \sigma_i^z$, ya que el primer sumando es un término que voltea los espines contiguos de los estados de la base \mathcal{B} . En efecto, podemos reescribir este sumando en términos de los operadores escalera, $\sigma_j^+ = (\sigma_j^x + i\sigma_j^y)/2, \sigma_j^- = (\sigma_j^x - i\sigma_j^y)/2$, como:

$$\begin{aligned} \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ &= \frac{1}{4} (2\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + 2\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y - i\cancel{\sigma_j^x \sigma_{j+1}^y} \\ &+ i\cancel{\sigma_j^y \sigma_{j+1}^x} + i\cancel{\sigma_j^x \sigma_{j+1}^y} - i\cancel{\sigma_j^y \sigma_{j+1}^x}) = \frac{1}{2} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y), \end{aligned}$$

que se trata en efecto de un término que voltea el espín de vecinos contiguos si están antialineados; por ejemplo $(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^- \sigma_1^+) |\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$. El hamiltoniano conserva entonces la componente z de la magnetización total del sistema M_z , una cantidad bien definida. Podemos reescribir el hamiltoniano entonces como

$$H_{XX} = - \sum_{j=1}^N (\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z.$$

Pese a tratar con una cadena unidimensional, se considera el espín como un operador vectorial con tres componentes, $\vec{S}_j = \frac{1}{2}(\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z)$ pero restringiendo la interacción entre espines al plano xy . El espacio de Hilbert del modelo es simplemente el producto tensorial de los N espacios de Hilbert asociados a cada espín individual, $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathbb{C}^2$, de dimensión 2^N . Consideramos además condiciones de contorno periódicas, $\sigma_{N+1} \equiv \sigma_1$, de manera que el término de interacción entre espines incluye el sumando $\sigma_N^x \sigma_1^x + \sigma_N^y \sigma_1^y$, formando una cadena cerrada de N espines. Podemos asumir que el campo magnético está orientado a lo largo del eje z positivo, $\lambda > 0$, pues en caso contrario se puede transformar el sistema en uno equivalente con $\lambda > 0$ sin más que intercambiar los espines orientados hacia arriba y hacia abajo (es decir, un cambio de orientación del eje z). El modelo XY de Heisenberg introduce un parámetro γ que representa el grado de anisotropía de la interacción entre espines,

$$H_{XY} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{1+\gamma}{2} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \frac{1-\gamma}{2} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \right) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^z, \quad (4)$$

que incluye al modelo XX cuando la interacción en el plano xy es isotrópica ($\gamma = 0$) así como al modelo de Ising con un campo magnético transversal ($\gamma = 1$). Estos modelos ampliamente estudiados [5, 6] son sencillos y resolubles, lo que permite determinar su estado

fundamental mediante técnicas bien conocidas. A su vez son físicamente relevantes ya que presentan una transición de fase cuántica entre una fase magnética ordenada y otra desordenada y describe las propiedades de compuestos magnéticos así como otros fenómenos cuánticos. Por ejemplo, el modelo XX se corresponde a un caso límite del modelo de Bose-Hubbard, que permite representar pares de Cooper de electrones en superconductores o átomos de helio moviéndose en un sustrato [5]. Calculamos el espectro de H_{XX} para obtener las energías y autoestados y así determinar la entropía de entrelazamiento de su estado fundamental.

La herramienta fundamental para la resolución del modelo es la transformación de Jordan-Wigner, que muestra la equivalencia entre un modelo unidimensional de espines 1/2 (o qubits en el marco de la información cuántica) y un gas de Fermi unidimensional. Ambos problemas tienen los mismos grados de libertad, existiendo un mapeado sencillo entre los espacios de Hilbert de ambos problemas al identificar el estado de un espín en una posición de la cadena con el número de ocupación del correspondiente modo fermiónico. Esto sugiere transformar los operadores escalera de espín actuando en el sitio j , $\sigma_j^+ = (\sigma_j^x + i\sigma_j^y)/2, \sigma_j^- = (\sigma_j^x - i\sigma_j^y)/2$, en operadores de creación y destrucción de estados fermiónicos en la posición j -ésima de la cadena, a_j^\dagger, a_j . Los operadores escalera de espín, como los de cualquier momento angular, anticonmutan en todas las posiciones de la cadena $\{\sigma_j^+, \sigma_j^-\} = 1$, donde las llaves denotan el anticonmutador de dos operadores, $\{A, B\} := AB + BA$. Pero al estar definidos localmente, si se consideran sitios distintos de la cadena los operadores conmutan, $[\sigma_j^\pm, \sigma_k^\pm] = 0$ si $j \neq k$, donde ahora los corchetes denotan el operador conmutador, $[A, B] := AB - BA$. No obstante, los operadores fermiónicos definidos en un espacio de Fock anticonmutan para todos los sitios de la cadena, y conviene que ambos operadores cumplan las mismas relaciones algebraicas. Jordan y Wigner propusieron la transformación no local

$$a_j = \left(\prod_{m=1}^{j-1} \sigma_m^z \right) \sigma_j^-, \quad a_j^\dagger = \left(\prod_{m=1}^{j-1} \sigma_m^z \right) \sigma_j^+,$$

donde los prefactores tienen en cuenta el signo apropiado para que los operadores creación y destrucción cumplan las relaciones de anticonmutación canónicas que caracterizan a los operadores fermiónicos, es decir:

$$\{a_l^\dagger, a_j\} = \delta_{lj}, \quad \{a_l, a_j\} = 0, \quad \{a_l^\dagger, a_j^\dagger\} = 0.$$

Esto se comprueba rutinariamente teniendo en cuenta los siguientes conmutadores de los operadores escalera asociados a un momento angular:

$$[\sigma_i^+, \sigma_j^-] = \delta_{ij} \sigma_j^z, \quad [\sigma_i^z, \sigma_j^\pm] = \pm 2\delta_{ij} \sigma_j^\pm.$$

Un operador momento angular, \vec{S} se relaciona con sus correspondientes operadores escalera con $S_+S_- = \vec{S}^2 - S_z^2 - S_z$, que para nuestro caso de espín 1/2 implica $\sigma^+\sigma^- = 3/4 - 1/4 - \sigma^z/2$, y por tanto para cada espín, $\sigma_j^z = 2\sigma_j^+\sigma_j^- - \mathbb{I}$, donde \mathbb{I} es la identidad. Por otra parte, los operadores son locales y actúan en los subespacios de Hilbert de cada espín j , con lo que conmutan para posiciones distintas de la cadena:

$$a_j^\dagger a_j = \left(\prod_{m=1}^{j-1} (\sigma_m^z)^2 \right) \sigma_j^+ \sigma_j^- = \sigma_j^+ \sigma_j^-,$$

ya que $(\sigma^z)^2 = \mathbb{I}$. Así, la transformación de Jordan-Wigner mapea la componente z del operador de espín a $\sigma_j^z = 2a_j^\dagger a_j - \mathbb{I}$. Por otro lado, mapea el operador que voltea espines vecinos antiparalelos al operador de salto de un fermión entre sitios contiguos de la cadena, ya que:

$$\begin{aligned} a_j^\dagger a_{j+1} &= \left[\left(\prod_{m=1}^{j-1} \sigma_m^z \right) \sigma_j^+ \right] \left[\left(\prod_{m=1}^j \sigma_m^z \right) \sigma_{j+1}^- \right] = \\ &= \sigma_j^+ \left(\prod_{m=1}^{j-1} (\sigma_m^z)^2 \right) \sigma_j^z \sigma_{j+1}^- = \sigma_j^+ \sigma_j^z \sigma_{j+1}^- = \\ &= \sigma_j^+ (2\sigma_j^+ \sigma_j^- - 1) \sigma_{j+1}^- = -\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^-. \end{aligned}$$

donde se ha usado la conmutación de operadores actuando en posiciones distintas y que los operadores escalera al cuadrado son nulos $(\sigma^\pm)^2 = 0$. Análogamente, se tiene que, $a_j^\dagger a_{j+1} = -\sigma_j^- \sigma_{j+1}^+$, con lo que en efecto el término de interacción se transforma como $(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+) = -(a_j^\dagger a_{j+1} + a_j a_{j+1}^\dagger)$. El hamiltoniano transformado resultante es un modelo de fermiones libres sin espín con potencial químico λ :

$$H_{XX} = - \sum_{j=1}^N (a_j^\dagger a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger a_j) + \lambda \sum_{j=1}^N a_j^\dagger a_j - \frac{\lambda N}{2}.$$

Este hamiltoniano modeliza una cadena de N posiciones que pueden ser ocupados por fermiones, bajo un potencial químico λ y sin interaccionar. El último sumando constante $-\lambda N/2$ desplaza el origen de energías, con lo que se va a ignorar sin que afecte la diagonalización del hamiltoniano. Realmente se tiene la equivalencia unitaria en el límite termodinámico, $N \rightarrow \infty$, pues para una cadena finita se tiene un término extra de frontera debido a que $a_{N+1} = (\prod_{m=1}^N \sigma_m^z) \sigma_{N+1}^- \equiv (\prod_{m=1}^N \sigma_m^z) \sigma_1^- \neq a_1 = \sigma_1^-$. Este término de borde debido a la transformación no local es del orden de $O(1/N)$, con lo que lo podremos despreciar en el límite $N \rightarrow \infty$. La diagonalización del hamiltoniano se efectúa en el límite termodinámico en la cadena $N \rightarrow \infty$.

El primer sumando es un término de salto de ocupación entre sitios contiguos de la cadena (fermionic hopping). El operador aniquilación a_j^\dagger crea un fermión en el sitio j -ésimo de la cadena, y cada sitio puede estar vacío

(es decir, en el estado $|0\rangle_j$) u ocupada por un fermión (en el estado $|1\rangle_j$). Por lo tanto, el espacio de Hilbert es el espacio de Fock 2^N dimensional construido actuando sobre el estado del vacío, $|0, \dots, 0\rangle$, con los operadores creación a_j^\dagger . El espacio de Fock no es más que el conjunto de estados generado por todas las posibles combinaciones de números de ocupación en los sitios de la cadena. Esta base de estados se suele denotar $|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle$ donde n_i es el número de fermiones o número de ocupación en el sitio i -ésimo de la cadena, que por ser fermiones están restringidos a $n_i \in \{0, 1\}$. Se corresponde con el autovalor del operador $a_i^\dagger a_i$ e indica la ocupación de la posición i -ésima de la cadena. El estado del vacío es aquel para el que ninguna posición de la cadena está ocupada por un fermión y está debidamente normalizado, $\langle 0|0\rangle = 1$. Muchos modelos de cadenas de espines con interacciones de corto y largo alcance resultan ser unitariamente equivalentes a modelos fermiónicos [7],[8], permitiendo así la diagonalización de los hamiltonianos. Puede resultar más conveniente expresar el espacio de Fock en términos de estados individuales de partícula con momento bien definido, en lugar de tener la posición bien definida como se está considerando. Debido a las condiciones de contorno periódicas, el modelo es translacionalmente invariante, lo que sugiere introducir la transformada de Fourier discreta de los operadores creación y destrucción para diagonalizar el hamiltoniano.

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N a_j e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}, \quad k \in \{1, \dots, N\}$$

Como la transformación es unitaria los operadores b_k definidos satisfacen las relaciones canónicas de anticonmutación, $\{b_k^\dagger, b_j\} = \delta_{jk}$, $\{b_k, b_j\} = 0$, con lo que representan un nuevo conjunto de operadores fermiónicos (se prueba más adelante eq. (11)). De hecho, el operador b_k^\dagger crea un fermión deslocalizado de momento $p = \frac{2\pi k}{N} \pmod{2\pi}$. Usando la transformada inversa de Fourier,

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N b_k e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad (5)$$

el hamiltoniano queda diagonalizado en el espacio de momentos. En efecto, como $e^{\frac{2\pi i}{N}}$ es una raíz N -ésima de la unidad, es raíz también del polinomio $1 + z + \dots + z^{N-1} = \frac{z^N - 1}{z - 1}$, con lo que se tiene la siguiente relación:

$$\sum_{j=1}^N e^{\frac{2\pi im}{N}} = 0 \implies \sum_{j=1}^N e^{\frac{2\pi i(k-q)j}{N}} = N \cdot \delta_{k,q}.$$

donde la suma no se anula salvo si $k = q$, en cuyo caso es la suma de N veces 1. Usando esta identidad, se comprueba fácilmente cómo queda escrito el hamiltoniano en términos de los operadores b_k y sus

adjuntos b_k^\dagger :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N a_j^\dagger a_{j+1} &= \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} b_k^\dagger \right) \left(\sum_{q=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}q(j+1)} b_q \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \sum_{k,q=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}kj} e^{i\frac{2\pi}{N}q(j+1)} b_k^\dagger b_q \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k,q=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}q} b_k^\dagger b_q \underbrace{\sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}(q-k)j}}_{N\delta_{k,q}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k,q=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}q} b_k^\dagger b_q \cdot N\delta_{q,k} = \sum_{k=1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}k} b_k^\dagger b_k,
\end{aligned}$$

y de manera análoga se tiene que:

$$\sum_{j=1}^N a_{j+1}^\dagger a_j = \sum_{k=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}k} b_k^\dagger b_k, \quad \sum_{j=1}^N a_j^\dagger a_j = \sum_{k=1}^N b_k^\dagger b_k.$$

Por lo tanto, el hamiltoniano es verdaderamente diagonal en términos de los operadores creación y aniquilación en el espacio de momentos:

$$H_{XX} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_N(k) b_k^\dagger b_k.$$

donde

$$\varepsilon_N(k) = \lambda - e^{i\frac{2\pi}{N}k} + e^{-i\frac{2\pi}{N}k} = \lambda - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right).$$

representan las autoenergías asociadas a cada modo k . De la misma manera, el operador momento total P del sistema viene dado por:

$$P = \sum_{k=1}^N \frac{2\pi k}{N} b_k^\dagger b_k,$$

de manera que el operador creación b_k^\dagger crea un fermión deslocalizado con energía bien definida $\varepsilon_N(k)$ y momento $p_k = \frac{2\pi k}{N} \pmod{2\pi}$. El módulo 2π se debe a que momentos cuya diferencia es 2π representan estados con la misma energía, como se aprecia claramente en la expresión $\varepsilon_N(k)$. Denotamos el operador número para estos operadores fermiónicos como $n_k = b_k^\dagger b_k$, cuyos autovalores son $\{0,1\}$ al tratarse de partículas fermiónicas. Los operadores número $b_k^\dagger b_k$, con $k \in \{1, \dots, N\}$ constituyen un conjunto completo de operadores que conmutan en el espacio de Fock 2^N dimensional, concluyendo que el modelo XX unidimensional es integrable. Se suele definir el estado de vacío como aquel aniquilado por todos los operadores b_k , es decir, $b_k |0\rangle = 0$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$, normalizado de forma que $\langle 0|0\rangle = 1$. El hamiltoniano es diagonal

en la base de estados del espacio de Fock construida mediante la actuación los operadores de creación de modos fermiónicos sobre el estado de vacío $|0, \dots, 0\rangle \equiv |0\rangle$:

$$b_{k_1}^\dagger \cdots b_{k_j}^\dagger |0, \dots, 0\rangle, \quad 1 \leq k_1 < \cdots < k_j \leq N,$$

y su energía correspondiente viene dada por:

$$E(k_1, \dots, k_j) = \sum_{l=1}^j \varepsilon_N(k_l),$$

definiendo el espectro de energías. Este estado corresponde a un estado de j partículas fermiónicas sin espín con energías $\varepsilon_N(k_1), \dots, \varepsilon_N(k_j)$ y momentos $p_1 = 2\pi k_1/N, \dots, p_j = 2\pi k_j/N$. Estos son estados de varias partículas, mientras que los estados de una partícula, escritos como $b_k^\dagger |0, \dots, 0\rangle$ (con $1 \leq k \leq N$) representan excitaciones de un único modo fermiónico con energía $\varepsilon_N(k)$. Se hace notar que estas partículas no están localizadas en el espacio, sino que b_k^\dagger crea autoestados del operador momento. Otro aspecto a resaltar es que el estado del vacío en la representación de estados con posición bien definida coincide con el estado del vacío en representación de momentos. Es decir, el estado del espacio de Fock definido como el estado aniquilado por los operadores a_n , ($a_n |0\rangle_a = 0 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$) y el estado definido como el aniquilado por todos los operadores resultantes de la transformación discreta de momentos, b_k , ($b_k |0\rangle_b = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$) son el mismo estado, $|0\rangle_a \equiv |0\rangle_b$. Esto es claro a partir de la definición de la transformada discreta de Fourier, aunque no todas las transformaciones entre modos fermiónicos preservan el estado de vacío. Las energías $\varepsilon_N(k)$ dependen del modo k y del número de fermiones en la cadena N a través del momento correspondiente $2\pi k/N$, es decir:

$$\varepsilon_N(k) = \mathcal{E}(2\pi k/N), \quad 1 \leq k \leq N,$$

lo que permite definir la relación de dispersión para nuestro modelo $\mathcal{E}(p) = \lambda - 2 \cos(p)$, donde ahora el momento p es una variable continua, $p \in (0, 2\pi)$. Definir la relación de dispersión para cada modelo permite tratar las cadenas en el límite termodinámico. Las relaciones de dispersión asocian la energía que corresponde a los modos de momento, y para condiciones de contorno periódicas son simétricas respecto de π , con lo que:

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}(2\pi - p),$$

lo que permite centrar el estudio en el intervalo $(0, \pi)$. Para las energías discretas, las condiciones de contorno periódicas implican la simetría $\varepsilon_N(k) = \varepsilon_N(N - k)$. En nuestro caso, la relación de dispersión $\mathcal{E}(p) = \lambda - 2 \cos(p)$ es monótona en el intervalo $(0, \pi)$, pero existen modelos más generales que resultan equivalentes a modelos de fermiones libres y presentan

relaciones de dispersión no monótonas [8]. La relación de dispersión del modelo XY eq. (4) viene dada por $\mathcal{E}(p) = \sqrt{(\lambda - 2 \cos p)^2 + \gamma^2 \sin^2 p}$ [6]. Este modelo que generaliza al XX requiere una transformación adicional de Bogoliubov para ser reescrito como un modelo equivalente de fermiones libres, una técnica habitual a la hora de diagonalizar hamiltonianos en una dimensión [5].

A. Estado fundamental del modelo

Con el Hamiltoniano diagonalizado, resulta inmediato determinar el **estado fundamental del modelo**, es decir, el autoestado con menor energía, que denotamos $|\psi\rangle$. La dependencia de las autoenergías $\varepsilon_N(k)$ con el parámetro λ implican una dependencia del estado fundamental con λ , que se podía asumir $\lambda \geq 0$ sin pérdida de generalidad. Cuando $\lambda > 2$, todos los modos fermiónicos k tienen asociadas energías positivas, $\varepsilon_N(k) > 0 \quad \forall k$, por lo que el estado fundamental es el estado de vacío, el estado aniquilado por todos los b_k :

$$b_k |\psi\rangle = 0 \quad , \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \implies |\psi\rangle = |0, \dots, 0\rangle .$$

que tiene energía 0 al no tener modos excitados. En la base original de espines, se corresponde con el estado con todos los espines alineados con el campo externo, $|\Psi\rangle \equiv |\uparrow\rangle^{\otimes N}$. Así, el parámetro λ indicador de la intensidad del campo magnético externo vence la interacción entre espines vecinos en el rango $\lambda > 2$. En esta fase ferromagnética, el estado fundamental es un estado producto sin entrelazar y por ende la entropía de entrelazamiento es cero, $S_L = 0$.

Por otra parte, si $0 \leq \lambda < 2$, los modos excitados en el estado fundamental son aquellos con energía asociada negativa, $\varepsilon_N(k) < 0$, cuyos momentos $p_k = 2\pi k/N$ satisfacen la condición $\lambda < 2 \cos \frac{2\pi k}{N}$. El resto de modos están sin ocupar, aniquilados por los operadores b_k . El estado fundamental $|\psi\rangle$ queda determinado entonces por las condiciones:

$$\begin{cases} b_k |\psi\rangle = 0, & \text{si } \varepsilon_N(k) > 0 \quad \text{Modos no ocupados} \\ b_k^\dagger |\psi\rangle = 0, & \text{si } \varepsilon_N(k) < 0 \quad \text{Modos excitados} \end{cases}$$

Si $\lambda = 2 \cos \frac{2\pi k}{N}$ para cierto k , el modo con momento $\frac{2\pi k}{N}$, y por simetría el modo $\frac{2\pi(N-k)}{N}$, tienen asociadas una energía nula $\varepsilon_N(k) = \varepsilon_N(N-k) = 0$, con lo que pueden estar tanto excitados como sin ocupar en el estado fundamental. Esto supone una degeneración en el estado fundamental ($g = 4$ vectores linealmente independientes con la misma energía mínima), pero al interesar el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$, supondremos sin pérdida de generalidad que $\lambda \neq 2 \cos \frac{2\pi k}{N}$, para $1 \leq k \leq N$, con lo que el estado fundamental es único. Sea k_0 la raíz de la ecuación $2 \cos \frac{2\pi k_0}{N}$ en el intervalo $k_0 \in [0, N/2]$, que existe y es única por la monotonía de la relación de

dispersión en $\mathcal{E}(p)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Viene dada por:

$$k_0 = \frac{N}{2\pi} \arccos \frac{\lambda}{2},$$

que está bien definida pues $\lambda/2 \leq 1$ y por las consideraciones previas $k_0 \notin \mathbb{Z}$. Definiendo el valor crítico k_c como la parte entera de esta raíz, $k_c = \lfloor k_0 \rfloor$, es claro por la monotonía de la relación de dispersión que los modos ocupados en el estado fundamental con energías negativas ($\varepsilon_N(k) < 0$) se corresponden a índices $k \in \{1, \dots, k_c\} \cup \{N - k_c, \dots, N\}$, mientras que los índices que corresponden a modos sin excitar con $\varepsilon_N(k) > 0$ son $k \in \{k_c + 1, \dots, N - 1 - k_c\}$. Los modos ocupados constituyen lo que se suele denominar el mar de Fermi. Esta discusión queda clarificada con la representación gráfica en fig. 1. La energía del estado fundamental es entonces:

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{k=1}^N \varepsilon_N(k) \langle \psi | b_k^\dagger b_k | \psi \rangle = \sum_{k=1}^{k_c} \varepsilon_N(k) + \sum_{k=N-k_c}^N \varepsilon_N(k)$$

Como los operadores aniquilación y destrucción son adjuntos el uno del otro, se tiene para los bras correspondientes:

$$\begin{cases} \langle \psi | b_k^\dagger = 0, & \varepsilon_N(k) > 0 \Leftrightarrow k \in \{k_c + 1, \dots, N - 1 - k_c\} \\ \langle \psi | b_k = 0, & \varepsilon_N(k) < 0 \Leftrightarrow k \in \{1, \dots, k_c\} \cup \{N - k_c, \dots, N\} \end{cases}$$

de manera que los siguientes momentos de orden dos se anulan:

$$\begin{cases} \langle \psi | b_k^\dagger b_k | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \psi | b_k b_k^\dagger | \psi \rangle = 1, & \varepsilon_N(k) > 0 \\ \langle \psi | b_k b_k^\dagger | \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \psi | b_k^\dagger b_k | \psi \rangle = 1, & \varepsilon_N(k) < 0 \end{cases}$$

donde se ha tenido en cuenta que los operadores fermiónicos anticonmutan, $b_k^\dagger b_k + b_k b_k^\dagger = \mathbb{I}$. Teniendo en cuenta que $n_k = b_k^\dagger b_k$ es el operador número de ocupación asociado a los operadores fermiónicos b_k , esta expresión refleja que los modos con energía positiva están desocupados mientras que los modos ocupados son los de energía negativa. La composición de operadores fermiónicos de aniquilación y destrucción de modos distintos tiene siempre un valor esperado nulo $\langle b_k^\dagger b_j \rangle_{|\psi\rangle} = 0$ para $j \neq k$, al suponer el producto escalar de dos estados ortonormales del espacio de Fock. En resumen,

$$\langle b_j^\dagger b_k \rangle = \langle \psi | b_j^\dagger b_k | \psi \rangle = \begin{cases} 0, & \varepsilon_N(k) > 0 \\ \delta_{jk}, & \varepsilon_N(k) < 0. \end{cases} \quad (6)$$

B. Criticalidad del modelo

Una vez determinado el estado fundamental, se estudia el comportamiento crítico de la cadena, distinguiendo dos regímenes claros. Las transiciones de fase cuánticas [5] ocurren a temperatura nula y conllevan

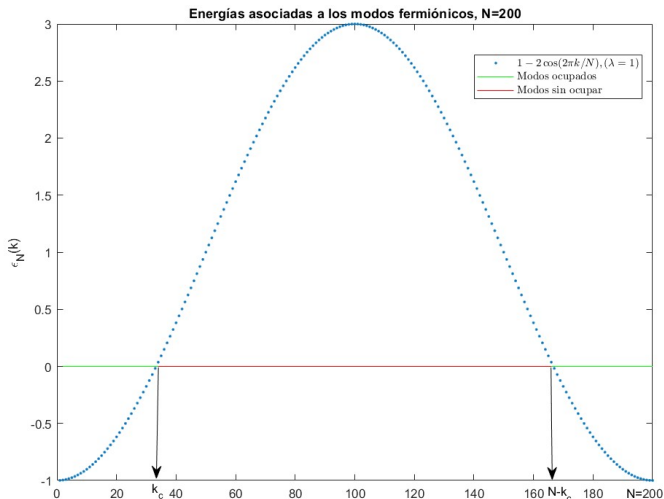


Figura 1: Energías asociadas a los modos fermiónicos en el espacio de momentos para la cadena XX con $N = 200$ espines y un campo magnético externo $\lambda = 1$. Coincide con la relación de dispersión en función del número de modo, $\varepsilon_N(k) = \mathcal{E}(2\pi k/N)$, con $\mathcal{E}(p) = \lambda - 2\cos(p)$. Los modos excitados en el estado fundamental de la cadena dado se representan en verde para el valor $\lambda = 1$.

singularidades en la energía del estado fundamental del sistema. Surgen así fenómenos críticos caracterizados por la aparición de correlaciones de largo alcance en el estado fundamental. En contraste con las transiciones de fase clásicas originadas por fluctuaciones térmicas, en los sistemas cuánticos a $T = 0$ a pesar de conocer el estado en el que se encuentran, las fluctuaciones de naturaleza cuántica regidas por el principio de incertidumbre de Heisenberg implican una estructura fuertemente entrelazada de su estado fundamental. A parte de una longitud de correlación divergente, los puntos críticos cuánticos vienen caracterizados en términos del gap de energía Δ , definido como la diferencia de energía entre el estado fundamental y el primer estado excitado de la cadena. Diremos que la cadena es **crítica** cuando el gap de energía tiende a cero en el límite termodinámico $\Delta \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, lo que se conoce como un espectro de energía **gapless**. Un espectro gapless implica una longitud de correlación divergente. Por el contrario, un espectro de energía que presenta un gap finito $\Delta > 0$, da lugar a una escala de longitud escala característica y esto supone una longitud de correlación finita ξ , con lo que los correladores decaen exponencialmente:

$$\langle \sigma_i^a \sigma_{i+L}^b \rangle - \langle \sigma_i^a \rangle \langle \sigma_{i+L}^b \rangle \sim \exp(-L/\xi),$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota el valor esperado sobre el estado fundamental $|\psi\rangle$. Estos correladores entre espines distanciados L posiciones en la cadena, definen la longitud de correlación ξ , que es finita para cadenas no críticas e implica una saturación del entrelazamiento en dichas cadenas. Analizando para qué valores del campo magnético existe un gap finito entre el estado fundamental y el primer estado excitado de la cadena

infinita, distinguimos dos regímenes en nuestro modelo.

Cuando $\lambda \in [0, 2]$, el espectro de energía es *gapless*. En efecto, si $0 \leq \lambda \leq 2$, los modos excitados del modo fundamental son aquellos con $k \in \{1, \dots, k_c\} \cup \{N - k_c, \dots, N\}$, como se aprecia en fig. 1. En este caso, el gap entre el estado fundamental y el primer estado excitado viene dado por:

$$\Delta E = \min \left(\lambda - 2 \cos \frac{2\pi(k_c)}{N}, 2 \cos \frac{2\pi(k_c + 1)}{N} - \lambda \right) \quad (7)$$

Este primer estado excitado se consigue excitando el modo $k_c + 1$ del estado fundamental, $b_{k_c+1}^\dagger |\psi\rangle$ (o su simétrico $N - k_c - 1$) o bien desocupando el modo k_c del estado fundamental (o su simétrico $N - k_c + 1$) $b_{k_c} |\psi\rangle$, según donde se alcance el mínimo en eq. (7). Como además, $\lambda = 2 \cos \frac{2\pi k_0}{N}$ y $k_c = \lfloor k_0 \rfloor$, se tiene que ΔE es del orden de $O(\frac{1}{N})$. Por lo tanto, el gap tiende a cero $\Delta \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ y el modelo es gapless. (Estamos asumiendo sin pérdida de generalidad por la orientación del eje z que $\lambda > 0$. El intervalo crítico en el que el modelo es gapless puede extenderse a $\lambda \in [-2, 2]$). Por otro lado, fuera de este intervalo crítico, $\lambda > 2$, el espectro presenta un gap de energía finito $\Delta E = \lambda - 2 > 0$. El estado fundamental tiene todos los modos sin ocupar (estado vacío) y el primer estado excitado se consigue excitando los modos de menor energía, $b_1^\dagger |0, \dots, 0\rangle$, (el primer estado excitado presenta degeneración pudiendo ocuparse el modo $k = 1$, su simétrico $k = N - 1$ o ambos). En este caso, la diferencia de energía es:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_{k=1}^N \varepsilon_N(k) - \sum_{k=2}^N \varepsilon_N(k) \\ &= \varepsilon_N(1) = \lambda - 2 \cos \frac{2\pi}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda - 2 > 0, \end{aligned}$$

con lo que el gap permanece finito en el límite $N \rightarrow \infty$. De hecho, este régimen no crítico se caracteriza por un estado fundamental de vacío fermiónico $|0, \dots, 0\rangle$, que para la cadena de espines originales se corresponde a un estado con todos los espines alineados con el campo magnético. El intervalo $\lambda > 2$ define la fase ferromagnética en el que el modelo es no crítico y el estado fundamental es un estado producto en la base espines, con entropía de entrelazamiento nula. Este análisis sugiere que existe una transición de fase cuántica en $\lambda = 2$ con un cambio entre un estado fundamental ordenado sin entropía y sin entrelazar en la fase ferromagnética ($|\lambda| \geq 2$) y otro desordenado muy entrelazado en la fase crítica ($|\lambda| \leq 2$), con la entropía de entrelazamiento como parámetro de orden de la transición. En la sección V se estudia la entropía de entrelazamiento como un indicador alternativo del régimen crítico. Los estados fundamentales críticos se caracterizan por una entropía de entrelazamiento del bloque de L espines que diverge de manera

logarítmica, con unos coeficientes multiplicativos que dependen únicamente de la clase de universalidad de la transición de fase a la que pertenece el modelo. Así, el entrelazamiento en los puntos críticos obedece una ley de escala universal. Se comprobará la criticalidad del modelo derivando una fórmula asintótica exacta para la entropía de von Neumann S_L que escala asintóticamente con el logaritmo del número de espines del bloque $\log L$ cuando el campo pertenece al intervalo crítico, $\lambda \in (0, 2)$. Cabe mencionar que el método empleado para determinar la criticalidad de la cadena se puede extender a modelos de fermiones libres con una relación de dispersión arbitraria que sea monótona en $[0, \pi]$ [7].

IV. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO DEL BLOQUE EN EL ESTADO FUNDAMENTAL

Siguiendo las ideas desarrolladas en [9], se determina la entropía de entrelazamiento de un bloque de L espines consecutivos en el estado fundamental de la cadena XX, según la definición dada en la sección II, $S_L = S(\rho_L) = -\text{tr}(\rho_L \log \rho_L)$. Por la invariancia traslacional debida a las condiciones de contorno periódicas, se considera sin pérdida de generalidad la matriz densidad reducida de los L primeros espines de la cadena, $\rho_L = \text{tr}_{N-L} |\psi\rangle \langle \psi|$. La idea fundamental detrás del cálculo es que el modelo de fermiones libres considerado es gaussiano, con lo que los autoestados están completamente caracterizados por los los momentos de orden 2 de un conjunto de operadores fermiónicos. El estado fundamental del modelo es gaussiano respecto de las distintas familias de operadores fermiónicos que se han definido, en el sentido de que los valores esperados de los distintos operadores locales son nulos y el emparejamiento fermiónico de los operadores de las familias consideradas es proporcional a la identidad [10]. El teorema de Wick establece entonces que los momentos de cualquier orden de los operadores fermiónicos quedan determinados por los momentos de orden 2. Particularizando, se tiene que el valor esperado del producto de operadores b_m y b_n^\dagger puede escribirse en términos de los momentos de orden 2: $\langle b_m b_p^\dagger \rangle$, $\langle b_m b_p \rangle$ y sus complejos conjugados. Por ejemplo, se tiene que [6]

$$\begin{aligned} \langle b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3}^\dagger b_{k_4}^\dagger \rangle &= \langle b_{k_1} b_{k_2} \rangle \langle b_{k_3}^\dagger b_{k_4}^\dagger \rangle - \langle b_{k_1} b_{k_3}^\dagger \rangle \langle b_{k_2} b_{k_4}^\dagger \rangle \\ &+ \langle b_{k_1} b_{k_4}^\dagger \rangle \langle b_{k_2} b_{k_3}^\dagger \rangle \end{aligned}$$

Esto permite determinar la matriz densidad reducida, $\rho_L = \text{tr}_{N-L} |\psi\rangle \langle \psi|$, en términos de los autovalores de la matriz de correlación del estado fundamental sobre el bloque:

$$A_{mn} = \langle \psi | a_m^\dagger a_n | \psi \rangle = \langle a_m^\dagger a_n \rangle, \quad 1 \leq m, n \leq L.$$

Ya que los L primeros espines de la cadena se corresponden unitariamente con el bloque de los L primeros fermiones. Cuando el campo magnético es suficientemente grande para vencer el acoplamiento

entre espines, $\lambda \geq 2$, se ha visto que el estado fundamental no presenta entrelazamiento. Se considera el intervalo crítico $\lambda \in (0, 2)$. Con la transformada inversa de Fourier (5), se determinan los elementos de matriz A_{mn} en términos de los correladores de los operadores fermiónicos del espacio de momentos (6):

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N e^{-i2\pi mj/N} b_j^\dagger \right) \left(\sum_{k=1}^N e^{i2\pi nk/N} b_k \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j,k=1}^N e^{-i2\pi mj/N} e^{i2\pi nk/N} \langle b_j^\dagger b_k \rangle \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{k_c} + \sum_{k=N-k_c}^N \right) e^{-2\pi i(m-n)k/N} \\ &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{k_c} \cos \left[\frac{2\pi}{N} k(m-n) \right] \end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta que el último sumando es $e^{-i2\pi(m-n)k_c} = 1$ y que se puede agrupar el sumando de cada modo $k \in \{1, \dots, k_c\}$ con el sumando del modo simétrico $N-k \in \{N-k_c, \dots, N-1\}$, ya que $e^{-i2\pi(m-n)(N-k)} = e^{i2\pi(m-n)k}$ y la suma de estas exponenciales define el coseno, $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$. En el límite termodinámico en la cadena, $N \rightarrow \infty$, y considerando como variable el momento $p_k = \frac{2\pi k}{N}$, la anterior suma es una integral y se puede determinar analíticamente:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{k_c} \cos \left[\frac{2\pi}{N} k(m-n) \right] \quad (8) \\ &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{k_c} \cos(p_k(m-n)) \underbrace{\Delta p_k}_{\frac{2\pi}{N}} \\ &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\pi} \int_0^{p_0} \cos(p(m-n)) dp = \frac{\sin(p_0(m-n))}{\pi(m-n)} \end{aligned}$$

donde se ha definido el momento de Fermi $p_0 := \frac{2\pi k_0}{N}$. Este momento es precisamente la raíz $\mathcal{E}^{-1}(0) = \arccos \frac{\lambda}{2}$ en el intervalo $(0, \pi)$. Por la simetría de la relación de dispersión, $\mathcal{E}(2\pi - p_0) = 0$. La expresión última es válida cuando $m \neq n$. Cuando $m = n$, todos los sumandos son 1, de manera que $A_{mm} = \frac{2(k_c-1)}{N}$, y en el límite termodinámico $A_{mm} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2k_0}{N} = \frac{p_0}{\pi}$. Se tiene determinada así la matriz de correlación del bloque de L fermiones en el espacio de posiciones, una matriz cuadrada de orden L .

Para relacionar esta matriz de correlación con la matriz densidad reducida del bloque ρ_L , ha de considerarse la propiedad que la define. ρ_L es el único operador actuando sobre \mathcal{H}_L , $\rho_L : \mathcal{H}_L \rightarrow \mathcal{H}_L$, tal que

$$\text{tr}_L(M\rho_L) = \text{tr}((M \otimes \mathbb{I}_{N-L})\rho) \quad (9)$$

para cualquier operador que actúa localmente sobre el

primer factor $M : \mathcal{H}_L \rightarrow \mathcal{H}_L$. Al representar un estado puro, la matriz densidad del estado fundamental se reduce al proyector sobre el estado, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, con lo que se tiene:

$$\text{tr}_L(a_m^\dagger a_n \rho_L) \stackrel{\text{eq. (9)}}{=} \text{tr}(a_m^\dagger a_n |\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi| a_m^\dagger a_n |\psi\rangle = A_{mn}$$

Siguiendo el procedimiento establecido por Latorre y Riera en [6], se considera una base alternativa de operadores fermiónicos cuya matriz de correlación es diagonal. Por definición de operador adjunto, $\langle\psi| a_m^\dagger a_n |\psi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\psi| a_n^\dagger a_m |\psi\rangle$, con lo que la matriz A_L es hermítica, $A_{mn} = \overline{A_{nm}}$. Existe entonces una matriz unitaria U que diagonaliza la matriz A_L :

$$U A_L U^\dagger = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_L) \equiv G \quad (U^{-1} = U^\dagger), \quad (10)$$

donde $\nu_1, \dots, \nu_L \in [0, 1]$ son los autovalores de A_L . Se definen entonces:

$$g_p = \sum_{m=1}^L \overline{u_{pm}} a_m, \quad p \in \{1, \dots, L\},$$

de manera que el conjunto de operadores $\{g_p, g_q^\dagger\}_{1 \leq p, q \leq L}$ satisface las relaciones canónicas de anticonmutación propias de operadores fermiónicos, al tratarse de una transformación unitaria de operadores fermiónicos. En efecto, usando identidades conocidas de los anticonmutadores se tiene que:

$$\{g_p, g_q\} = \sum_{n,m=1}^L \overline{u_{pm}} u_{qn} \{a_m, a_n\} = 0,$$

$$\{g_p^\dagger, g_q^\dagger\} = \{g_q, g_p\}^\dagger = 0,$$

$$\{g_p^\dagger, g_q\} = \sum_{n,m=1}^L \overline{u_{pm}} u_{qn} \underbrace{\{a_m^\dagger, a_n\}}_{\delta_{mn}} \quad (11)$$

$$= \sum_{m=1}^L \overline{u_{pm}} u_{qm} = (U^\dagger U)_{pq} = \delta_{pq}. \quad (12)$$

Esto prueba en general que una transformación unitaria arbitraria de operadores fermiónicos define otro conjunto de operadores que satisfacen las relaciones de anticonmutación canónicas. Esto confirma que la transformación discreta de Fourier de los operadores a_k, a_k^\dagger define a su vez un conjunto de operadores fermiónicos en el espacio de momentos b_k, b_k^\dagger .

Notése que los nuevos operadores g_p , pese a ser altamente no locales al considerar la combinación lineal de distintos operadores destrucción en distintos sitios de la cadena, actúan únicamente sobre el espacio de Hilbert del bloque de los L primeros espines, \mathcal{H}_L , al ser combinación lineal de operadores a_m , $1 \leq m \leq L$,

que actúan sobre \mathcal{H}_L , $a_m : \mathcal{H}_L \rightarrow \mathcal{H}_L$. Se puede usar de nuevo la propiedad que caracteriza a la matriz densidad reducida del bloque:

$$\text{tr}_L(g_p^\dagger g_q \rho_L) = \text{tr}(g_p^\dagger g_q |\psi\rangle\langle\psi|) = \langle g_p^\dagger g_q \rangle = \nu_p \delta_{pq} = G_{pq},$$

ya que por construcción los operadores g_p diagonalizan la matriz A_L . (10). Se dispone de un conjunto de operadores fermiónicos definidos sobre el bloque \mathcal{H}_L con una matriz de correlación $\langle g_p^\dagger g_q \rangle$ diagonal. Como se discute en [11], esta última igualdad junto con el teorema de Wick para estados gaussianos implican que la matriz densidad reducida está descorrelacionada para los L modos fermiónicos definidos, es decir factoriza como:

$$\rho_L = \varrho_1 \otimes \dots \otimes \varrho_L$$

donde ϱ_m denota la matriz densidad correspondiente al modo fermiónico excitado por g_m^\dagger (matrices densidad de una partícula). Estos modos fermiónicos tienen una estructura altamente no local, con lo que el anterior producto no se corresponde en general a la factorización en espacios de Hilbert de dos dimensiones para las posiciones de los L espines iniciales. Con los nuevos operadores fermiónicos el espacio de Hilbert \mathcal{H}_L puede escribirse como el producto tensorial de los espacios de dos dimensiones de cada modo fermiónico, generados por los vectores $|0\rangle_m, g_m^\dagger |0\rangle_m$ donde $g_m |0\rangle_m = 0$, $1 \leq m \leq L$. La matriz densidad de cada modo viene dada por [11]:

$$\varrho_m = \nu_m g_m^\dagger g_m + (1 - \nu_m) g_m g_m^\dagger,$$

o equivalentemente por las relaciones de anticonmutación, $g_m^\dagger g_m + g_m g_m^\dagger = \mathbb{I}$, como:

$$\varrho_m = (2\nu_m - 1) g_m^\dagger g_m + (1 - \nu_m) \mathbb{I}.$$

En la base de modos fermiónicos $\{|0\rangle_m, g_m^\dagger |0\rangle_m\}$, la matriz densidad ϱ_m es diagonal con respectivos autovalores $\nu_m, 1 - \nu_m$ y representación matricial:

$$\varrho_m = \begin{pmatrix} \nu_m & 0 \\ 0 & 1 - \nu_m \end{pmatrix}.$$

La entropía de von Neumann de la matriz densidad ϱ_m es $S(\varrho_m) = -\text{tr}(\varrho_m \log \varrho_m) = H_2(\nu_m)$, donde $H_2(x) = -x \log(x) - (1-x) \log(1-x)$ denota la entropía binaria de Shannon. Usando la aditividad de la entropía de von Neumann, $S_L = S(\rho_L) = \sum_{m=1}^L S(\varrho_m)$, se tiene que la entropía entre el bloque de L espines y el resto de la cadena es la suma de las entropías de los modos

fermiónicos descorrelacionados:

$$\begin{aligned} S(\rho_L) &= \sum_{m=1}^L H_2(\nu_m) \\ &= \sum_{m=1}^L -\nu_m \log \nu_m - (1 - \nu_m) \log(1 - \nu_m). \end{aligned} \quad (13)$$

Esta ecuación nos proporciona una expresión exacta de la entropía de entrelazamiento de un bloque de L espines para el estado fundamental del modelo XX a partir de los autovalores $\{\nu_1, \dots, \nu_L\}$ de la matriz de correlación, $A_{mn} = \langle a_m^\dagger a_n \rangle_\psi$ con $1 \leq n, m \leq L$, cuyos elementos de matriz vienen dados por la expresión (8). Este método es computacionalmente eficiente pues el tiempo de computación para evaluar numéricamente la entropía escala polinómicamente con el número de espines del bloque, $O(L^3)$, al suponer la diagonalización de una matriz de orden L . Esto supone un gran contraste con el crecimiento exponencial de la dimensión del espacio de Hilbert del bloque de espines, $\dim \mathcal{H}_L = 2^L$. Además, la expresión obtenida de la matriz densidad reducida ρ_L del estado fundamental permite calcular sus autovalores. Los 2^L autovalores de ρ_L ($2^L = \dim \mathcal{H}_L$) corresponden a todos los posibles productos de los 2 autovalores $\nu_m, 1 - \nu_m$ de los L modos fermiónicos:

$$\lambda_{x_1 x_2 \dots x_L} = \prod_{m=1}^L \nu_m^{x_m} (1 - \nu_m)^{1-x_m}, \quad x_m = 0, 1 \quad \forall m.$$

El método de cálculo empleado permite calcular la entropía de entrelazamiento para un modelo genérico de fermiones libres sin espín, y de cualquier modelo unitariamente equivalente a él. Numerosas cadenas de espines de largo y corto alcance resultan ser unitariamente equivalentes a modelos de fermiones libres [3], con lo que el método descrito permitiría obtener su correspondiente entropía de entrelazamiento diagonalizando la matriz de correlación de los operadores fermiónicos y evaluando los autovalores en (10). De hecho, para modelos con una relación de dispersión $\mathcal{E}(p)$ monótona, el cálculo del elemento de matriz A_{mn} es válido (8), a excepción del momento de Fermi que depende de cada relación de dispersión, $p_0 = \mathcal{E}^{-1}(0)$. Así, para modelos de fermiones libres con relación de dispersión monótona la entropía de entrelazamiento del bloque para el estado fundamental es una función universal del momento de Fermi p_0 . La relación de dispersión así definida $\mathcal{E}(p)$ depende del potencial químico de los fermiones λ , por lo que el momento de Fermi dependerá a su vez de dicho potencial.

Conviene notar un detalle sutil omitido en la discusión previa. La matriz densidad reducida calculada corresponde a un bloque de L fermiones del modelo de fermiones libres que se probó unitariamente equivalente al modelo XX . No obstante, se desea calcular la entropía de entrelazamiento del estado fundamental

para el bloque de L espines de la cadena del modelo original, lo que puede sugerir invertir la transformación unitaria de Jordan-Wigner para expresar el estado fundamental en la base original de espines. No obstante, la transformación unitaria respeta los coeficientes de los estados expresados en la base de espines y en la base del espacio de Fock generada por los operadores construcción actuando sobre el vacío fermiónico. Más precisamente,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i_1, \dots, i_N \in \{\uparrow, \downarrow\}} C^{i_1, \dots, i_N} \underbrace{|i_1, \dots, i_N\rangle}_{\text{Base original de espines}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_N \in \{0, 1\}} C^{i_1, \dots, i_N} \underbrace{(a_1^\dagger)^{i_1} \dots (a_N^\dagger)^{i_N} |0, \dots, 0\rangle}_{\text{Base espacio de Fock de fermiones}} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la combinación lineal son los mismos tanto en la base de espines original como en la base de fermiones del modelo equivalente, así como la bipartición del espacio de Hilbert, con lo que la matriz densidad reducida es idéntica para ambos modelos. La sencilla transformación unitaria no ha cambiado la distribución espacial de los estados, con lo que la entropía de entrelazamiento y el espectro de la matriz densidad reducida coinciden con la de nuestro modelo de partida. No obstante, conviene recordar que la entropía de entrelazamiento depende de la distribución espacial del estado y una transformación unitaria entre modelos equivalentes puede cambiar las propiedades del estado y por ende su entrelazamiento.

V. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO

La expresión (13) permite computar fácilmente la entropía de entrelazamiento S_L en función del tamaño del bloque L y la intensidad del campo magnético λ . El resultado numérico obtenido a partir de diagonalizar la matriz de correlación se presenta en la fig. 2, mostrando un crecimiento sin acotar de la entropía de entrelazamiento con el tamaño del bloque. La máxima entropía de entrelazamiento se tiene en ausencia de campo externo, $\lambda = 0$, que se corresponde a un estado fundamental con mitad de los modos ocupados, como puede deducirse visualizando la relación de dispersión fig. 1 con $\lambda = 0$. Al incrementar el campo magnético, la entropía decrece aunque mantiene el mismo comportamiento asintótico, hasta que se supera el umbral crítico $\lambda > 2$ y la entropía satura al ser el estado fundamental un estado producto en la fase ferromagnética. Vidal [9] y Latorre [6] detectaron que dicha entropía calculada numéricamente se ajusta perfectamente a un crecimiento logarítmico dado por:

$$S_L = \frac{1}{3} \log(L) + c(\lambda)$$

donde $c(\lambda)$ es una constante que depende únicamente del campo $\lambda \in (-2, 2)$. Este crecimiento logarítmico fue

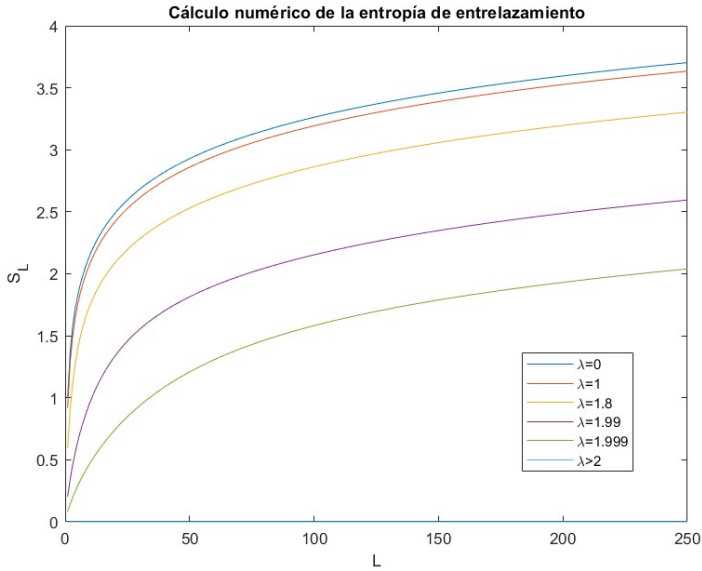


Figura 2: Entropía de entrelazamiento de un bloque de L espines en el estado fundamental para la cadena XX en el límite $N \rightarrow \infty$ para distintos valores del campo magnético externo λ . Cálculo numérico basado en la diagonalización de la matriz de correlación A_{mn} y la expresión exacta de S_L , eq. (13). La entropía es máxima cuando no hay campo externo ($\lambda = 0$). El campo magnético reduce el entrelazamiento hasta $\lambda = 2$, donde el sistema alcanza el límite ferromagnético y el estado fundamental es un estado producto en la base de espines.

demostrado analíticamente de manera rigurosa por Jin y Korepin [11] y se presenta a continuación.

La estructura particular de la matriz de correlación permite obtener una expresión analítica para el escalado de la entropía de entrelazamiento con el tamaño del bloque L y confirmar el resultado numérico obtenido. La idea fundamental es que los elementos de la matriz de correlación A_{nm} dependen únicamente de la diferencia $m - n$. Es por tanto una matriz con elementos constantes en las diagonales descendientes de izquierda a derecha, es decir, una matriz de Toeplitz. Es claro de la expresión eq. (8) que:

$$A_L = \begin{pmatrix} f_0 & f_{-1} & \cdots & f_{1-L} \\ f_1 & f_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & \cdots & & f_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{L \times L}(\mathbb{R}),$$

con $f_0 = \frac{2\pi k_0}{N}$ y $f_n = \frac{\sin p_0 n}{\pi n}$. Las matrices de Toeplitz han sido ampliamente estudiadas, dando lugar a la famosa conjetura de Fisher-Hartwig [12] sobre el comportamiento asintótico (orden de las matrices tendiendo a infinito $L \rightarrow \infty$) del determinante de matrices de Toeplitz, demostrada solo para casos determinados. La forma de nuestra matriz A_L permite usar un caso particular de la conjetura de Fisher-Hartwig, que fue probado por E. Basor en [13], siendo por tanto un teorema. La expresión exacta de

la entropía eq. (13) es la suma de la entropía binaria de Shannon evaluada sobre los autovalores de la matriz de correlación A_L . Interpretando $H_2(z)$ como una función de variable compleja, el teorema de los residuos permite expresar la suma como una integral en el plano complejo de $H_2(z) \cdot f(z)$, para cierta función meromorfa $f(z)$ con polos simples en los autovalores ν_m , sobre un camino cerrado que rodee los autovalores. Basta tomar como $f(z)$ la derivada logarítmica de una función holomorfa con ceros simples en ν_m , como es el polinomio característico de la matriz $P_L(z) = \prod_{m=1}^L (z - \nu_m)$. Este polinomio característico es precisamente el determinante de la matriz $z\mathbb{I}_L - A_L$, $z \in \mathbb{C}$, que al ser de nuevo una matriz Toeplitz permite aplicar la conjetura de Fisher-Hartwig para aproximar asintóticamente su expresión. Este fue el resultado obtenido por Jin y Korepin [11], que usaron la aproximación asintótica demostrada del polinomio característico para calcular la integral y obtener rigurosamente una expresión analítica asintótica de la entropía de entrelazamiento del modelo XX. A continuación, se presenta con detalle este cálculo.

Los autovalores de la matriz hermítica A_L están en el intervalo $\nu_m \in [0, 1] \quad \forall m$. Esto se debe a que tanto A_L como $\mathbb{I} - A_L$ son matrices semidefinidas positivas. A fin de tener un planteamiento más simétrico que simplifique los cálculos, se reparametrizan por conveniencia los autovalores:

$$\mu_m := 2\nu_m - 1 \Leftrightarrow \nu_m = \frac{\mu_m + 1}{2},$$

de manera que μ_1, \dots, μ_L pertenecen al intervalo $[-1, 1]$ y constituyen los autovalores de la también matriz de Toeplitz:

$$T_L := (\mu + 1)\mathbb{I} - 2A_L \in \mathcal{M}_{L \times L}(\mathbb{R}). \quad (14)$$

Para expresar la entropía como una suma de una función evaluada en estos autovalores, se define la función

$$s(x) = -\frac{1+x}{2} \log\left(\frac{1+x}{2}\right) - \frac{1-x}{2} \log\left(\frac{1-x}{2}\right), \quad (15)$$

de manera que $s(x) = H_2\left(\frac{1+x}{2}\right)$ y por tanto $S_L = \sum_{m=1}^L s(\mu_m)$. El polinomio característico correspondiente es:

$$D_L(\mu) \equiv \det T_L(\mu) = \det((\mu+1)\mathbb{I} - 2A_L) = \prod_{m=1}^L (\mu - \mu_m),$$

que se va a interpretar como una función compleja, $\mu \in \mathbb{C}$, que al tratarse de un polinomio es entera (holomorfa en todo el plano). Los ceros de $D_L(\mu)$ son precisamente los autovalores μ_1, \dots, μ_L , y la derivada logarítmica de $D_L(\mu)$ es una función meromorfa con polos simples en

los ceros de $D_L(\mu)$:

$$f(\mu) \equiv \frac{d}{d\mu} \log D_L(\mu) = \sum_{m=1}^L \frac{1}{\mu - \mu_m},$$

con $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\mu_1, \dots, \mu_m\})$. El **teorema de los residuos** establece que la integral en un camino cerrado simple positivamente orientado γ de una función holomorfa en un abierto salvo en unos puntos aislados $g \in \mathcal{H}(U_0)$, $U_0 = U \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \stackrel{\text{ab}}{\subset} \mathbb{C}$ puede calcularse como la suma de sus residuos sobre las singularidades que encierra el camino:

$$\oint_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(g, a_k).$$

Para aplicar el teorema a la función meromorfa $s(\mu)f(\mu)$ con polos en los autovalores $\mu_m \in [-1, 1]$, debe considerarse un camino cerrado que rodee estos autovalores. Como función compleja, $s(z)$ se define para la determinación principal del logaritmo, con argumentos entre $(-\pi, \pi]$, de manera que $\log z = \log|z| + i \arg_{(-\pi, \pi]}$, holomorfa en todo el plano complejo salvo en el semieje real negativo, $\text{Re}(z) \leq 0$, que constituye la rama de dicha determinación. Consecuentemente, $s(z)$ dada por eq. (15) presenta dos ramas en $\text{Re}(1+z) \leq 0$ y $\text{Re}(1-z) \leq 0$, con lo que $-1, 1$ constituyen dos puntos de ramificación. Cualquier contorno cerrado que rodee el intervalo $[-1, 1]$ cortará por tanto las ramificaciones de $s(z)$ donde esta función no es analítica. Para estar en las hipótesis del teorema de los residuos, se modifica ligeramente el integrando con un parámetro $\varepsilon > 0$:

$$s_{\varepsilon}(z) = -\frac{1+\varepsilon+z}{2} \log\left(\frac{1+\varepsilon+z}{2}\right) - \frac{1+\varepsilon-z}{2} \log\left(\frac{1+\varepsilon-z}{2}\right).$$

Las ramificaciones de $s_{\varepsilon}(z)$ son $\text{Re}(1+z+\varepsilon) \leq 0$ y $\text{Re}(1+\varepsilon-z) \leq 0 \Leftrightarrow |\text{Re}z| \geq 1+\varepsilon$, y no presenta más singularidades en un entorno abierto de $[-1, 1]$ suficientemente pequeño. Se considera como contorno de integración $\gamma_{\varepsilon, \delta}$, el formado por dos arcos centrados en ± 1 de radio $\varepsilon/2$ unidos por segmentos verticales de altura $\pm i\delta$ con $\delta > 0$, recorrido en sentido directo y representado en la fig. 3. Este contorno delimita un entorno de $[-1, 1]$ donde $s_{\varepsilon}(z)$ es holomorfa y aplica el teorema de los residuos de Cauchy:

$$S_L = \sum_{m=1}^L s(\mu_m) = \sum_{m=1}^L \text{Res}(s(\mu) \cdot f(\mu), \mu_m) \stackrel{\text{T. Cauchy}}{=} \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\varepsilon, \delta}} s_{\varepsilon}(\mu) f(\mu) d\mu \quad (16)$$

Al estimar la derivada logarítmica de $D_L(\mu)$ mediante la conjetura de Fisher-Hartwig, se sustituye $f(\mu)$ por su aproximación y con ella se realiza la anterior integral

compleja, obteniendo así una expresión analítica cerrada para la entropía de entrelazamiento S_L .

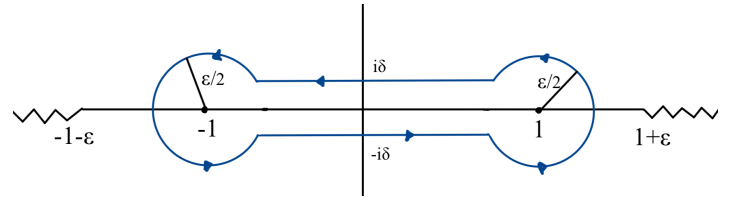


Figura 3: Contorno de integración $\gamma_{\varepsilon, \delta}$ de eq. (16). En línea quebrada se representan los cortes de ramificación de $s_{\varepsilon}(z)$ dados por $|\text{Re}z| \geq 1 + \varepsilon$.

1. Comportamiento asintótico del determinante $D_L(\mu)$

Para determinar el comportamiento asintótico del determinante $D_L(\mu)$ conviene definir el símbolo de una matriz de Toeplitz. Recordamos que una matriz T_L de orden L es Toeplitz si sus elementos diagonales son constantes, o equivalentemente sus elementos de matriz t_{nm} dependen únicamente de la diferencia $n - m$. Se dice que una matriz de Toeplitz es generada por una función compleja definida en la circunferencia unidad $c: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, si sus elementos de matriz pueden expresarse como:

$$(T_L)_{nm} = c_{n-m}, \quad 1 \leq n, m \leq L,$$

donde c_n son los coeficientes de Fourier de la función $c(z)$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Se dice que la función compleja $c(z)$ es el *símbolo* de la matriz Toeplitz T_L . El integrando es una función 2π -periódica, $c(e^{i(\theta+2\pi)})e^{-in(\theta+2\pi)} = c(e^{i\theta})e^{-in\theta}$, con lo que pueden definirse los coeficientes de Fourier integrando sobre cualquier intervalo de longitud 2π . La conjetura de Fisher-Hartwig se aplica a matrices de Toeplitz generadas por un símbolo singular que satisface una serie requisitos, y puede encontrarse formulada en [12]. Se enuncia una versión más simplificada del caso particular probado por Basor [13], que es suficiente para aplicar a nuestra matriz de Toeplitz T_L .

Teorema V.1. (Caso particular probado de la conjetura de Fisher-Hartwig). Sea T_L una matriz de Toeplitz de orden L cuyo símbolo $c(z)$ tiene la siguiente forma:

$$c(z) = b \prod_{r=1}^R t_{\beta_r} (e^{i(\theta-\theta_r)}), \quad (17)$$

para ciertas constantes $b, \beta_r \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{N}$, donde $t_{\beta}(z)$ es una función dada por $t_{\beta}(z) = e^{i\beta(\theta-\pi)}$ y donde se ha considerado una determinación del argumento en

$[0, 2\pi)$, es decir, $\theta \equiv \arg_{[0, 2\pi)} z$. Supongamos además que

$$|\operatorname{Re}(\beta_r)| < \frac{1}{2}, \quad r = 1, \dots, R.$$

Entonces, se tiene el siguiente comportamiento asintótico (a orden dominante) del determinante de la matriz Toeplitz T_L cuando su orden tiene a infinito ($L \rightarrow \infty$):

$$\det T_L = b^L L^M E,$$

donde

$$M = - \sum_{r=1}^R \beta_r^2,$$

y la constante E viene dada por:

$$E = \prod_{1 \leq s < r \leq R} \left[2 \left| \sin \frac{\theta_r - \theta_s}{2} \right| \right]^{2\beta_r \beta_s} \times \prod_{r=1}^R G(1 + \beta_r) G(1 - \beta_r).$$

donde la función de Barnes $G(z)$ es una función entera $G \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definida por un producto infinito (no expresable en términos de funciones elementales):

$$G(1+z) = (2\pi)^{z/2} e^{-(z+1)(z/2) - \gamma_E z^2/2} \times \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n e^{-z + z^2/(2n)} \right],$$

donde γ_E es la constante de Euler-Macheroni, definida como la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural:

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Por la determinación del argumento considerada, las funciones $t_\beta(e^{i(\theta - \theta_0)})$ definidas tienen en general una discontinuidad de salto en los puntos $z = e^{i\theta_0}$ (salvo que la constante β sea un número entero). Las singularidades de los símbolos que se pueden factorizan como en eq. (17) vienen determinadas por estos puntos en los que las funciones t_β son discontinuas. Por otra parte, al ser uniforme la convergencia del producto infinito que define la función de Barnes, se pueden manipular los productos en $G(1+z)G(1-z)$ de manera que las exponenciales $e^z e^{-z} = 1$ se anulan entre sí mientras que las exponenciales en la variable z^2 , $e^{(-z)^2} = e^{z^2}$ se suman, que junto con la identidad $(1-z/n)(1+z/n) = 1 - z^2/n^2$, reduce la expresión a:

$$G(1+z)G(1-z) = e^{-(1+\gamma_E)z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)^n e^{z^2/n}. \quad (18)$$

Para aplicar este teorema y derivar el comportamiento asintótico de $D_L(\mu)$, se determina en primera instancia el símbolo de nuestra matriz Toeplitz $T_L(\mu) = (\mu+1)\mathbb{I} - 2A_L$. Se recuerda que $D_L(\mu) = \det(T_L(\mu))$ denota el

polinomio característico de la matriz $2A_L - \mathbb{I}$, siendo A_L la matriz de correlación del bloque de L espines (8). Para la relación de dispersión del modelo XX, es sencillo expresar los elementos de matriz de la matriz de correlación A_L en términos de una integral compleja con una exponencial:

$$(A_L)_{mn} = \frac{\sin[p_0(m-n)]}{\pi(m-n)} = \frac{e^{ip_0(m-n)} - e^{-ip_0(m-n)}}{2\pi i(m-n)} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-p_0}^{p_0} e^{-i(m-n)\theta} d\theta,$$

donde p_0 denota el momento de Fermi del modelo, $p_0 = \arccos \frac{\lambda}{2}$. Así expresada, es inmediato obtener el símbolo $f(z)$ de la matriz de Toeplitz A_L :

$$f(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & -p_0 < \theta < p_0 \\ 0, & p_0 < \theta < 2\pi - p_0 \end{cases}$$

(el símbolo se define sobre la circunferencia unidad o equivalentemente sobre cualquier intervalo real de longitud 2π). Se trata de una función continua a trozos con una discontinuidad de salto en $z = e^{ip_0}$. A partir del símbolo $f(z)$ de A_L se determina el símbolo $c(z)$ de la matriz de Toeplitz T_L que coincide con la matriz $-2A_L$ salvo en la diagonal principal, cuyos se elementos diferencian en $(T_L)_{nn} = \mu + 1 - (-2A_L)_{nn}$. El símbolo de la matriz $-2A_L$ es:

$$g(e^{i\theta}) = \begin{cases} -2, & -p_0 < \theta < p_0 \\ 0, & p_0 < \theta < 2\pi - p_0 \end{cases}$$

El único coeficiente de Fourier en el que se diferencian los símbolos $g(z)$ (de la matriz $-2A_L$) y $c(z)$ (de la matriz T_L) es el coeficiente 0, ya que $c_0 = (T_L)_{nn} = \mu + 1 + (2A_L)_{nn} = \mu + 1 + g_0$ y el resto de coeficientes coinciden $g_n = c_n$, $n \neq 0$. Como $\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = 2\pi \cdot \delta_{n0}$, sumar una constante al símbolo $g(z)$ constante a trozos define otro símbolo que difieren únicamente en el coeficiente de Fourier de orden 0. Sea C la constante sumada que se desea determinar, $c(z) = C + g(z)$. Para determinar C , basta imponer que:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(e^{i\theta}) d\theta \equiv 1 + \mu + g_0 \\ = 1 + \mu + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) d\theta = 1 + \mu - \frac{p_0}{\pi}.$$

Al integral los símbolos, esta ecuación se reescribe como:

$$\frac{1}{2\pi} (2p_0(C-2) + C(2\pi - p_0)) = 1 + \mu - \frac{p_0}{\pi}.$$

Despejando se tiene que $C = \mu + 1$, obteniendo el símbolo de la matriz de Toeplitz T_L :

$$c(e^{i\theta}) = \begin{cases} \mu - 1, & -p_0 < \theta < p_0 \\ \mu + 1, & p_0 < \theta < 2\pi - p_0, \end{cases} \quad (19)$$

que de nuevo es una función constante a trozos en la

circunferencia unidad con dos discontinuidades de salto en $z = e^{\pm i p_0}$. Estas discontinuidades sugieren factorizar el símbolo como:

$$c(e^{i\theta}) = b \cdot t_\beta(e^{i(\theta+p_0)}) \cdot t_{-\beta}(e^{i(\theta-p_0)})$$

para ciertas constantes b, β . Veamos que en efecto se puede factorizar el símbolo $c(z)$ de esta manera, que verifica las hipótesis del teorema V.1. Para verificar la factorización propuesta, veamos la expresión que toman las funciones en el intervalo $(-p_0, 2\pi - p_0)$, para poder compararlas con la expresión del símbolo $c(z)$ obtenida en eq. (19). Para ello se trasladan los argumentos al intervalo $(0, 2\pi)$, que es la determinación del argumento considerada en las funciones $t_{\pm\beta}(z)$. En primer lugar, si $\theta \in (-p_0, 2\pi - p_0) \Leftrightarrow \theta + p_0 \in (0, 2\pi)$, con lo que el argumento en todo el intervalo es precisamente $\theta + p_0$:

$$t_\beta(e^{i(\theta+p_0)}) = e^{i\beta(\theta+p_0-\pi)}, \quad -p_0 < \theta < 2\pi - p_0.$$

Por otra parte, si $\theta \in (p_0, 2\pi - p_0)$, entonces $\theta - p_0$ no está necesariamente en el intervalo $(0, 2\pi)$ y debe considerarse el argumento equivalente en dicho intervalo. Por un lado, si $p_0 < \theta < 2\pi - p_0$, restando p_0 se tiene que $0 < \theta - p_0 < 2\pi - 2p_0 \leq 2\pi$, con lo que en este intervalo, $\arg_{[0, 2\pi]} e^{i(\theta-p_0)} = \theta - p_0$ y por lo tanto:

$$t_{-\beta}(e^{i(\theta-p_0)}) = e^{-i\beta(\theta-p_0-\pi)}, \quad p_0 < \theta < 2\pi - p_0.$$

Por otro lado, si $-p_0 < \theta < p_0$, sumando $2\pi - p_0$ a estas desigualdades se tiene que $0 \leq 2\pi - 2p_0 < \theta - p_0 + 2\pi < 2\pi$ y por lo tanto para este intervalo $\arg_{[0, 2\pi]} e^{i(\theta-p_0)} = \theta - p_0 + 2\pi$, con lo que:

$$t_{-\beta}(e^{i(\theta-p_0)}) = e^{-i\beta(\theta-p_0+\pi)}, \quad -p_0 < \theta < p_0.$$

Considerando el producto de ambas funciones se tiene entonces:

$$t_\beta(e^{i(\theta+p_0)}) \cdot t_{-\beta}(e^{i(\theta-p_0)}) = \begin{cases} e^{2i\beta(p_0-\pi)}, & -p_0 < \theta < p_0 \\ e^{2i\beta p_0} & p_0 < \theta < 2\pi - p_0. \end{cases}$$

Para que se cumpla la factorización propuesta y teniendo en cuenta eq. (19), se deben satisfacer las ecuaciones:

$$b \cdot e^{2i\beta(p_0-\pi)} = \mu - 1, \quad b \cdot e^{2i\beta p_0} = \mu + 1.$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera y despejando b de la segunda, se reescriben como:

$$e^{2i\beta - \zeta\zeta\pi} = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}, \quad b = (\mu + 1)e^{-2i\beta p_0}$$

Para $\mu \neq \pm 1$, estas ecuaciones admiten infinitas soluciones (β, b) , pero resulta conveniente tomar como soluciones las encontradas por Jin y Korepin [11]:

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{\mu + 1}{\mu - 1}, \quad b = (\mu + 1) \left(\frac{\mu + 1}{\mu - 1} \right)^{-p_0/\pi} \quad (20)$$

considerando ahora la rama principal del logaritmo, es

decir, aquella determinación cuyos argumentos están en $(-\pi, \pi]$, $\log z \equiv \log |z| + i \arg_{(-\pi, \pi]} z$. También se ha considerado la función potencial correspondiente $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$. En particular, son constantes no nulas, dependientes del parámetro espectral. Se tiene la factorización del símbolo deseada eq. (17), con:

$$R = 2, \quad \beta_1 = -\beta_2 = \beta, \quad \theta_1 = -\theta_2 = p_0.$$

Para aplicar el teorema se debe verificar la hipótesis $|\operatorname{Re}(\beta_1)| = |\operatorname{Re}(\beta_2)| = |\operatorname{Re}(\beta)| < \frac{1}{2}$, que se satisface para $\mu \notin [-1, 1]$. En efecto, se tiene que $\operatorname{Re} \beta = -\operatorname{Im} \beta = \log \frac{\mu+1}{\mu-1}$ y por tanto:

$$\mu \notin [-1, 1] \Rightarrow |\operatorname{Re}(\beta)| = \frac{1}{2\pi} \left| \arg_{(-\pi, \pi]} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1} \right) \right| \leq \frac{1}{2},$$

pues por definición, $-\pi < \arg_{(-\pi, \pi]} \leq \pi$. La igualdad se alcanza cuando el argumento vale π . Los números complejos con argumento $-\pi$ son precisamente los números reales negativos.

$$\begin{aligned} \arg_{(-\pi, \pi]} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1} \right) = \pi &\Leftrightarrow \frac{\mu+1}{\mu-1} \in (-\infty, 0) \\ &\Leftrightarrow \mu \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Se ha usado que $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ y que la función $h(x) = \frac{1+x}{1-x}$ tiene imagen $(-\infty, 0)$ solo en el intervalo $x \in (-1, 1)$. Cuando μ está fuera del intervalo cerrado $[-1, 1]$, estamos en las hipótesis del teorema V.1, ($|\operatorname{Re}(\beta)| < 1/2$) con lo que se puede aplicar dicho caso probado de la conjetura (la variable de integración μ recorre el camino cerrado $\gamma_{\epsilon, \delta}$ que rodea el intervalo $[-1, 1]$ fig. 3, con lo que $\mu \notin [-1, 1]$). Con la notación empleada en V.1 se tiene que:

$$M = -\beta_1^2 - \beta_2^2 = -2\beta^2$$

$$\begin{aligned} E &= 2 \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^{2\beta_1\beta_2} \\ &\times G(1 + \beta_1)G(1 - \beta_1)G(1 + \beta_2)G(1 - \beta_2) \\ &\Rightarrow E = (2 \sin p_0)^{-2\beta^2} G(1 + \beta)^2 G(1 - \beta)^2 \end{aligned}$$

Con lo que aplicando el teorema V.1 para las constantes dadas en (20), el determinante de $T_L(\mu)$ puede escribirse asintóticamente cuando $L \rightarrow \infty$ como:

$$\begin{aligned} D_L(\mu) &\simeq (\mu + 1)^L \left(\frac{\mu + 1}{\mu - 1} \right)^{-L p_0/\pi} L^{-2\beta^2} \\ &\times (2 \sin p_0)^{-2\beta^2} \times G(1 + \beta)^2 G(1 - \beta)^2 \quad (21) \end{aligned}$$

2. Comportamiento asintótico de la entropía de entrelazamiento

Con la aproximación del determinante eq. (21) se calcula analíticamente la integral en el plano complejo eq. (16) para derivar una fórmula asintótica

de la entropía de entrelazamiento en el límite $L \rightarrow \infty$. Primero calcula la derivada logarítmica del determinante eq. (21). Tomando logaritmos naturales en eq. (21) se tiene:

$$\log D_L(\mu) \simeq L \left(1 - \frac{p_0}{\pi} \right) \log(\mu + 1) + \frac{Lp_0}{\pi} \log(\mu - 1) - 2\beta^2 \log(2L \sin p_0) + 2 \log[G(1 + \beta)G(1 - \beta)].$$

Nótese que β depende del parámetro espectral $\beta(\mu)$, que hace de variable de integración, con lo que debe tenerse en cuenta la regla de la cadena al derivar. La derivada de $\beta(\mu)$ (20) es:

$$\frac{d\beta(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\mu + 1} - \frac{1}{\mu - 1} \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{-2}{\mu^2 - 1} = \frac{i}{\pi(\mu^2 - 1)}.$$

Usando la regla de la cadena, se tiene la siguiente expresión asintótica para la derivada logarítmica:

$$\frac{d}{d\mu} \log D_L(\mu) \simeq L \left(\frac{1 - p_0/\pi}{\mu + 1} - \frac{p_0/\pi}{\mu - 1} \right) - 4\beta \log(2L \sin p_0) \frac{d\beta}{d\mu} + 2 \frac{d}{d\beta} (\log[G(1 + \beta)G(1 - \beta)]) \frac{d\beta}{d\mu} \quad (22)$$

La derivada logarítmica del producto de las funciones de Barnes se puede calcular a partir de eq. (18):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\beta} \log[G(1 + \beta)G(1 - \beta)] \\ &= \frac{d}{d\beta} \left\{ -(1 + \gamma_E)\beta^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \log \left(1 - \frac{\beta^2}{n^2} \right) + \frac{\beta^2}{n} \right] \right\} \\ &= -2(1 + \gamma_E)\beta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \frac{-2\beta/n^2}{1 - \beta^2/n^2} + 2\frac{\beta}{n} \right) \\ &= -2(1 + \gamma_E)\beta - 2\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 - \beta^2} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -2\beta \left(1 + \gamma_E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^2}{n(n^2 - \beta^2)} \right) \end{aligned}$$

Por conveniencia se define:

$$\Upsilon(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^2(\mu)/n}{n^2 - \beta(\mu)^2},$$

de manera que

$$-\frac{1}{2\beta} \frac{d}{d\beta} \log[G(1 + \beta)G(1 - \beta)] = 1 + \gamma_E + \Upsilon(\mu).$$

Con lo que se puede escribir finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \log D_L(\mu) &\simeq L \left(\frac{1 - p_0/\pi}{\mu + 1} - \frac{p_0/\pi}{\mu - 1} \right) \\ &+ \frac{4i\beta(\mu)}{\pi(1 - \mu^2)} [\log(2L \sin p_0) + 1 + \gamma_E + \Upsilon(\mu)] \quad (23) \end{aligned}$$

y sustituir esta expresión asintótica en la integral eq. (16) para calcular la entropía. El primer término proporcional a L no contribuye a la integral, ya que las funciones $\frac{s_\varepsilon(\mu)}{\mu \mp 1}$ son funciones meromorfas con polos simples en $\mu = \pm 1$ y $\text{Res}(\frac{s_\varepsilon(\mu)}{\mu \mp 1}, \pm 1) = s_\varepsilon(\pm 1)$ con lo que por el teorema de los residuos de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\varepsilon, \delta}} s_\varepsilon(\mu) \frac{d\mu}{\mu \mp 1} = s_\varepsilon(\pm 1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} s(\pm 1) = 0$$

Ya que $s(x) = H_2((1+x)/2)$ se anula en ± 1 (la entropía binaria de Shannon se anula precisamente en $H_2(0) = H_2(1) = 0$). Se reduce entonces la integral eq. (16) a:

$$S_L \simeq \frac{2}{\pi^2} \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_{\varepsilon, \delta}} \frac{s_\varepsilon(\mu)\beta(\mu)}{1 - \mu^2} \times [\log(2L \sin p_0) + (1 + \gamma_E + \Upsilon(\mu))] d\mu. \quad (24)$$

La contribución a la integral de los arcos circulares del contorno $\gamma_{\varepsilon, \delta}$ es nula. En efecto, dichos arcos se transforman el uno en el otro bajo la transformación $\mu \mapsto -\mu$, pero el integrando cambia de signo bajo esta transformación. Es claro que $s_\varepsilon(\mu) = s_\varepsilon(-\mu)$ y $(1 - \mu^2) = (1 - (-\mu)^2)$ pero β cambia de signo:

$$\beta(-\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{-\lambda + 1}{-\lambda - 1} \right) = \frac{-1}{2\pi i} \left(\frac{-(\lambda + 1)}{-\lambda - 1} \right) = -\beta(\mu),$$

y como $\Upsilon(\mu)$ depende de μ a través de $\beta^2(\mu)$, $\Upsilon(\mu) = \Upsilon(-\mu)$. En definitiva, la integral en uno de los arcos es cancelada por la integral opuesta sobre el otro arco. La integral se reduce a los segmentos horizontales de altura $\pm i\delta$, teniendo en cuenta la distinta orientación de los segmentos:

$$S_L \simeq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi^2} \left(\int_{-1-i\delta}^{1-i\delta} - \int_{-1+i\delta}^{1+i\delta} \right) d\mu \frac{s_\varepsilon(\mu)\beta(\mu)}{1 - \mu^2} \times [\log(2L \sin p_0) + (1 + \gamma_E + \Upsilon(\mu))] \quad (25)$$

Para evaluar dichas integrales se parametrizan los segmentos horizontales del contorno como $\lambda = x \pm i\delta$, con $x \in (-1, 1)$. Conviene estudiar el comportamiento de la variable $w = (\mu + 1)/(\mu - 1)$ de la que depende $\beta(\mu)$ en dichos segmentos:

$$w \equiv \frac{\mu + 1}{\mu - 1} = \frac{x + 1 \pm i\delta}{x - 1 \pm i\delta} \cdot \frac{x - 1 \mp i\delta}{x - 1 \mp i\delta} = \frac{x^2 - 1 \pm 2i\delta + \delta^2}{(1 - x)^2 + \delta^2}$$

En $\beta(\mu)$ se considera el logaritmo natural $\log(w) = \log|w| + i \arg_{(-\pi, \pi]}$, e interesa el límite $\delta \rightarrow 0^+$. Para el módulo se tiene:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} |w| = \frac{x^2 - 1}{(1 - x)^2} = \frac{(1 + x)(1 + x)}{(1 - x)^2} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Para determinar el argumento, se nota que

$$\text{Re} w = \frac{x^2 - 1 + \delta^2}{(1 - x)^2 + \delta^2}$$

es negativo para δ suficientemente pequeño, puesto que el denominador es positivo mientras que el numerador es negativo ya que $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$ y por tanto $\text{Re } w < 0$. Por otro lado, consideramos el signo de la tangente del argumento de w que viene dado por el cociente:

$$\tan \theta = \frac{\text{Im}(w)}{\text{Re}(w)} = \frac{\pm 2\delta}{1 - x^2 - \delta^2},$$

que tiende a cero en el límite $\delta \rightarrow 0^+$, y tiene el mismo signo que $\pm\delta$. Una sucesión de números complejos en el semiplano izquierdo que tienen argumento con tangente nula ($-\delta$) pertenecen al tercer cuadrante mientras que si su argumento tiene tangente positiva ($+\delta$) pertenecen al cuarto cuadrante. Así, para $-\delta$, el límite se acerca al semieje real negativo desde el tercer cuadrante, el argumento tiende a π ; mientras que para $+\delta$, el límite se acerca desde el cuarto cuadrante, el argumento tiende por tanto a $-\pi$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \arg_{(-\pi, \pi]} w = \mp \pi.$$

Como $\beta(w) = \frac{1}{2\pi i} (\log |w| + i \arg_{(-\pi, \pi]}) = \frac{1}{2\pi} \arg(w) - \frac{i}{2\pi} \log |w|$, tomando el límite se tiene que para $x \in (-1, 1)$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \beta(x \pm i\delta) = \frac{1}{2\pi} (\mp \pi) - \frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \equiv \mp \frac{1}{2} - iB(x),$$

donde se ha definido la función real:

$$B(x) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1.$$

Se sustituye este límite en eq. (25), se usa la linealidad de la integral y que el contorno colapsa al intervalo $(-1, 1)$ cuando $\delta \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} S_L &\simeq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi^2} \left(\int_{-1-i\delta}^{1-i\delta} - \int_{-1+i\delta}^{1+i\delta} \right) d\mu \frac{s(\mu)\beta(\mu)}{1-\mu^2} \Upsilon(\mu) \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 dx \frac{s(x)}{1-x^2} \left(\frac{-iB(x)}{2} + \frac{1}{2} \right) [\log(2L \sin p_0) + 1 + \gamma_E] \\ &- \int_{-1}^1 dx \frac{s(x)}{1-x^2} \left(\frac{-iB(x)}{2} - \frac{1}{2} \right) [\log(2L \sin p_0) + 1 + \gamma_E] \\ &= \underbrace{\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi^2} \left(\int_{-1-i\delta}^{1-i\delta} - \int_{-1+i\delta}^{1+i\delta} \right) d\mu \frac{s(\mu)}{1-\mu^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(\mu)^3/n}{n^2 - \beta(\mu)^2}}_{I_2} \\ &+ (\log(2L \sin p_0) + 1 + \gamma_E) \underbrace{\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 dx \frac{s(x)}{1-x^2}}_{I_1} \end{aligned}$$

Se ha considerado que la integral de las partes imaginarias de β , representadas en ambos segmentos por $-iB(x)$ se cancelan entre sí, mientras que las partes reales constantes se han sumado, debido a que cambia tanto la orientación de la integral como el signo del integrando, con lo que $(1/2) - (-1/2) = 1$. Se han definido las integrales I_1, I_2 , de manera que la entropía

se puede escribir asintóticamente como:

$$S_L \simeq I_1 [\log(2L \sin p_0) + (1 + \gamma_E)] + I_2.$$

Ahora, I_1 se puede integrar elementalmente:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{s(x)}{1-x^2} dx = \\ &\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 -\frac{1+x}{2} \log \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} \log \frac{1-x}{2} \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La segunda integral se reescribe como:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\int_{-1}^1 \frac{s(x)}{1-x^2} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2} - iB(x)\right)^2}{n^2 - \left(\frac{1}{2} - iB(x)\right)^3} \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \frac{s(x)}{1-x^2} \times \left(\frac{\left(-\frac{1}{2} - iB(x)\right)^3}{n^2 - \left(\frac{1}{2} + iB(x)\right)^2} \right) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{s(x)}{1-x^2} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2} - iB(x)\right)^2}{n^2 - \left(\frac{1}{2} - iB(x)\right)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{1}{2} + iB(x)\right)^3}{n^2 - \left(\frac{1}{2} + iB(x)\right)^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Agrupando las constantes en una única, se define $\Upsilon_1 \equiv \frac{1}{3}(1 + \gamma_E) + I_2$, de manera que:

$$S_L \simeq \frac{1}{3} \log L + \frac{1}{3} \log(2 \sin p_0) + \Upsilon_1 \quad (26)$$

La constante Υ_1 se puede simplificar más, como explicitaron Jin & Korepin [11]:

$$\Upsilon_1 = - \int_0^{\infty} dt \left(\frac{e^{-t}}{3t} + \frac{1}{t \sinh^2(t/2)} - \frac{\cosh(t/2)}{2 \sinh^3(t/2)} \right)$$

Podemos expresar el resultado asintótico obtenido en términos del campo magnético aplicado a la cadena, λ . En el modelo XX el momento de Fermi satisface $\cos p_0 = \lambda/2$, con lo que $\sin^2 p_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$, y como $p_0 \in (0, \pi)$ el seno es positivo, $\sin p_0 = + \left(1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\right)^{1/2}$. Esto permite expresar la expresión analítica del escalado asintótico de la entropía de von Neumann con el tamaño del bloque como:

$$S_L \simeq \frac{1}{3} \log L + \frac{1}{6} \log \left(1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \right) + \frac{\log 2}{3} + \Upsilon_1 \quad (27)$$

En la fig. 4 se compara esta fórmula analítica con la entropía exacta calculada numéricamente diagonalizando la matriz de correlación, con un error relativo del orden de 10^{-6} para bloques con $L = 400$ espines, lo que muestra la gran precisión de la aproximación asintótica (27).

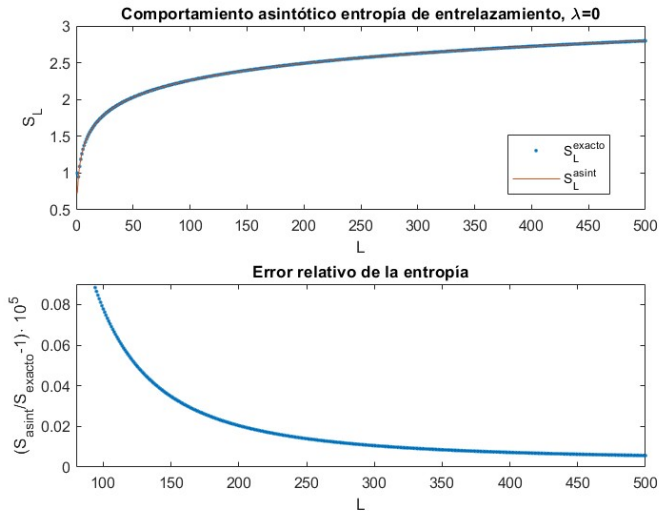


Figura 4: La figura superior compara la fórmula asintótica aproximada eq. (27) obtenida para la entropía de entrelazamiento, S_L^{asinto} con la expresión exacta, S_L^{exacto} computada a partir de la diagonalización de la matriz de correlación eq. (13), para un valor nulo del campo magnético $\lambda = 0$. La figura inferior representa el error relativo de la aproximación, definido como $r_L := S_L^{asint}/S - 1$, que tiende asintóticamente a cero al aumentar el tamaño del bloque.

La fórmula obtenida es válida para un modelo general de fermiones libres bajo un potencial químico λ al expresar los resultados en términos de su correspondiente momento de Fermi, $p_0 = \mathcal{E}^{-1}(0)$. La única particularidad del modelo XX es el valor de $p_0 = \arccos \lambda/2$. En efecto, la fórmula obtenida (27) se basa únicamente en la forma de la matriz de correlación eq. (8), que como se discutí es una función universal de p_0 para esta clase de modelos. Para el modelo anisótropo (XY), se tiene que la cadena es crítica para un único valor del campo externo, $\lambda_c = 1$, en cuyo caso Jin y Korepin demostraron con técnicas similares basadas en el estudio asintótico de matrices Toeplitz, el siguiente comportamiento asintótico [14]:

$$S_L(XY) = \frac{1}{6} \log L + a(\gamma), \quad \lambda_c = 1 \quad (28)$$

donde $a(\gamma)$ depende únicamente del parámetro de anisotropía γ . La cadena crítica presenta de nuevo un escalado logarítmico en la entropía de entrelazamiento (lo que sugiere una universalidad asociada a los fenómenos críticos), pero con un prefactor $1/6$ frente al factor $1/3$ del modelo isótropo XX. Para $\lambda \neq 1$, la entropía de entrelazamiento se acerca asintóticamente a un valor de saturación S_{max} .

VI. CRITICALIDAD Y TEORÍA DE CAMPOS CONFORMES

El escalado logarítmico de la entropía de entrelazamiento para el modelo XX es compartido por otros modelos unidimensionales que pasan por

una transición de fase cuántica, que refleja un comportamiento emergente universal característico de las transiciones de fase. De manera general, en cadenas de espines alejadas de los puntos críticos (con un gap de energía) la entropía de entrelazamiento del estado fundamental entre un bloque de L espines con el resto de la cadena o bien se anula para todo L o bien crece asintóticamente con el tamaño hasta un valor máximo de saturación S_{max} [9]. En cambio, para cadenas en el régimen crítico, la entropía crece logarítmicamente con el tamaño del bloque, $S_L \approx k \log L$ difiriendo únicamente en el prefactor k , según la clase de universalidad a la que pertenezca la transición de fase. El escalado de la entropía de entrelazamiento permite caracterizar de manera sencilla si un determinado modelo unidimensional es crítico (gapless) o no (presenta gap de energía finito). Un gap de energía define una escala de longitud en el sistema ($\hbar v/\Delta$) que implica una longitud de correlación finita, y a esto a su vez un entrelazamiento débil en el estado fundamental que explica la saturación de la entropía en cadenas no críticas. En cambio, los modelos críticos se caracterizan por una longitud de correlación divergente $\xi \rightarrow \infty$ (de manera equivalente, un decaimiento algebraico con la distancias de los correladores $\langle \sigma_i^j \sigma_{i+L}^j \rangle - \langle \sigma_i^j \rangle \langle \sigma_{i+L}^j \rangle \sim L^{-\tau}$), que implica un estado fundamental altamente entrelazado. La ausencia de gap en una transición de fase cuántica hace que las correlaciones cuánticas se extiendan a largas distancias: la longitud de correlación infinita y la ausencia de una longitud característica vuelven el sistema invariante bajo cambios de escala. Los hamiltonianos críticos presentan invariancia bajo cambios de escala, rotaciones y traslaciones, con lo que comparten la simetría del grupo conforme, definido como el conjunto de transformaciones que preservan los ángulos entre curvas que se cortan (por ejemplo, todas las funciones complejas holomorfas son conformes en el conjunto de puntos donde no se anula). Esto permite una descripción efectiva de los modelos críticos unidimensionales en términos de una teoría conforme de campos en un espacio-tiempo de (1+1) dimensiones en el régimen de bajas energías. Estas teorías permiten clasificar los modelos críticos en distintas clases de universalidad. Según la hipótesis de universalidad, en los puntos críticos emergen comportamientos universales compartidos por modelos de distinta naturaleza, pues la invariancia por escala vuelve irrelevante los detalles de la interacción microscópica. Las cantidades universales compartidas dependen únicamente de la dimensión y de las simetrías de la cadena y permite clasificar los modelos en clases de universalidad. El escalado universal logarítmico de la entropía de entrelazamiento en cadenas críticas emerge de la invariancia conforme que caracteriza las transiciones de fase cuánticas. Para una teoría de campos conformes en (1+1) dimensiones (con una única dimensión espacial), la entropía geométrica, análoga a la entropía de von Neumann

del bloque de espines pero definida para un modelo continuo, crece logarítmicamente con la longitud del intervalo considerado, L [1]:

$$S_L \sim \frac{c + \bar{c}}{6} \log L \quad (29)$$

donde c y \bar{c} son las llamadas cargas centrales de los sectores holomorfos y antiholomorfos que clasifican la correspondiente teoría conforme, confirmando la conexión entre cadenas críticas y teorías de campos conformes. Las cargas centrales son unos parámetros universales que cuantifican los grados de libertad efectivos en la teoría. Para bosones libres $c = 1$ mientras que para fermiones libres $c = 1/2$. El estudio asintótico de la entropía de entrelazamiento en una cadena crítica determina las cargas centrales de la teoría conforme efectiva que la describe en un rango de energías (29), determinando la clase de universalidad a la que pertenece. El comportamiento asintótico probado para el modelo XX crítico ($\lambda \in [-2, 2]$) determina una carga conforme $c = \bar{c} = 1 \Leftrightarrow (c + \bar{c})/6 = 1/3$, con lo que el modelo XX crítico pertenece a la clase de universalidad de bosones libres. Por otra parte, el modelo XY (incluye a Ising para $\gamma = 1$) es crítico para $\lambda = 1$, y su divergencia logarítmica (28) es compatible con una teoría conforme con carga central $c = \bar{c} = 1/2 \Leftrightarrow (c + \bar{c})/6 = 1/6$, dentro de la clase de universalidad de fermiones libres. En el caso no crítico, $\lambda \neq 1$, la presencia de un gap de energía define una longitud característica en el modelo que implica una saturación de la entropía de entrelazamiento. Cálculos asintóticos en otros modelos críticos [15] confirman que el escalado logarítmico de la entropía viene controlado por la simetría conforme subyacente en la transición de fase. No obstante, conviene señalar que el escalado logarítmico de la entropía es solo una condición necesaria de que una cadena crítica presente simetría conforme y pueda describirse de manera efectiva por una teoría conforme, pero no una condición suficiente. En modelos con interacción no local como el modelo Lipkin-Meshov-Glick, la entropía presenta una divergencia logarítmica en los puntos críticos pero no presenta simetría conforme [16]. No obstante, la gran mayoría de cadenas con interacciones locales y con invariancia traslacional sí presentan invariancia conforme en los puntos críticos, apareciendo la divergencia logarítmica de S_L como consecuencia de esta simetría. La teoría de campos conforme en (1+1) dimensiones proporciona un amplio repertorio de métodos para calcular cantidades de las cadenas críticas que describen de manera efectiva, las cuales resultan inaccesibles para modelos complicados no integrables. Esta conexión permite calcular entropías de entrelazamiento para particiones de la cadena que no son contiguas o para estados térmicos (a una cierta temperatura finita), entre otros [1, 17].

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una introducción al entrelazamiento en sistemas cuánticos de muchos cuerpos, centrándose en cadenas críticas unidimensionales. Tras definir el entrelazamiento cuántico, se presentan la principal medida estudiada que permite cuantificarlo, la entropía bipartita de entrelazamiento de von Neumann. Se trabaja con el modelo XX de Heisenberg, una cadena unidimensional de espines exactamente resoluble que proporciona un sencillo marco de trabajo con el que explorar diversos conceptos teóricos. Mediante técnicas propias de sistemas unidimensionales se diagonaliza el hamiltoniano del modelo. Una transformación de Jordan-Wigner muestra la equivalencia de espines $1/2$ con una cadena de fermiones libres. La invariancia traslacional de la cadena permite diagonalizarla mediante una transformada discreta de Fourier. El espectro de energías permite determinar el estado fundamental del modelo y el primer estado excitado, mostrando que la cadena es crítica (el gap de energías entre ambos estados tiende a cero en el límite termodinámico), para valores del campo magnético en $\lambda \in (-2, 2)$, mientras que fuera de este rango $|\lambda| > 2$ el estado fundamental es un estado producto sin entrelazar (fase ferromagnética, $S_L = 0$). El estado fundamental del modelo es gaussiano y un análogo al Teorema de Wick permite descorrelacionar la matriz densidad del subsistema del bloque de espines ρ_L y obtener sus autovalores a partir de la matriz de correlación de L operadores fermiónicos. Esto permite expresar de manera exacta la entropía de entrelazamiento en términos de los autovalores de la matriz de correlación, lo que reduce la complejidad del problema numérico a un tiempo polinómico (diagonalizar matriz $L \times L$). El estudio numérico del comportamiento asintótico de la entropía de entrelazamiento revela una divergencia logarítmica. La ausencia de gap en cadenas críticas conlleva la ausencia de una longitud característica lo que implica invariancia bajo cambios de escala. Las cadenas críticas con interacción local presentan una simetría aún mayor, son invariantes bajo el grupo conforme y el escalado logarítmico de la entropía emerge como manifestación de dicha simetría. A partir de la expresión exacta obtenida para la entropía de entrelazamiento se prueba rigurosamente el escalado logarítmico asintótico de la entropía. El interés en probar el comportamiento asintótico reside en que en que el coeficiente que multiplica a $\log L$ revela la carga central c de la teoría de campos conforme que describe efectivamente la cadena crítica, lo que a su vez demuestra la clase de universalidad a la que pertenece. La matriz de correlación es Topelitz, cuyo comportamiento asintótico ha sido ampliamente estudiado, lo que sugiere expresar la entropía como una integral compleja que involucre el determinante de la matriz de Toeplitz. Un caso probado de la conjetura

de Fisher Hartwig permite estudiar el comportamiento asintótico del determinante en términos del símbolo de la matriz y evaluar así las integrales. La expresión analítica asintótica de la entropía de entrelazamiento permite deducir la carga conforme de la subyacente teoría conforme, $c = 1$, que corresponde con una teoría de bosones libres y describe las propiedades universales de la transición de fase. La entropía de entrelazamiento queda controlada por la simetría conforme subyacente, con un escalado logarítmico universal que sugiere que la entropía de von Neumann es un buen indicador de la criticalidad de una cadena de espines (si presentan o no gap), permitiendo estudiar para qué valores de un parámetro externo se da la transición de fase cuántica.

El modelo XX ha resultado muy manejable, pudiendo resolver de manera exacta problemas que para modelos más generales son altamente no triviales: el hamiltoniano es unitariamente equivalente a una suma de partículas individuales libres, se diagonaliza de manera exacta la matriz densidad reducida (de orden 2^N) y la forma específica de la matriz de correlación (Toeplitz) permite obtener una expresión

asintótica analítica de la entropía. Para modelos más generales y en dimensiones mayores estos problemas son líneas abiertas de investigación y el trabajo presente proporciona un fundamento teórico básico. La principal conclusión que se deriva del trabajo es la conexión entre cadenas críticas y teorías conformes de campos, que establece un rico intercambio de resultados y técnicas entre ambas disciplinas de la que queda aún por explorar. Resultaría interesante traducir los resultados obtenidos al marco de la información cuántica, donde el entrelazamiento figura como un recurso valioso dentro de la computación cuántica. Por otra parte, el elevado entrelazamiento que caracteriza las cadenas críticas supone una barrera a la hora de realizar simulaciones eficientes de sistemas cuánticos. Todavía queda mucho trabajo para lograr una comprensión profunda del papel que juega el entrelazamiento en los sistemas cuánticos de muchos cuerpos, una línea de investigación que se beneficia de ideas tanto de física de la materia condensada, como de computación cuántica o teoría cuántica de campos.

-
- [1] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and conformal field theory*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42** (2009) 504005.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Physical Review* **47** (1935) 777.
- [3] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh and V. Vedral, *Entanglement in many-body systems*, *Reviews of Modern Physics* **80** (2008) 517.
- [4] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, *Concentrating partial entanglement by local operations*, *Physical Review A* **53** (1996) 2046.
- [5] S. Sachdev, *Quantum phase transitions*, Cambridge University Press (2021).
- [6] J. I. Latorre, E. Rico and G. Vidal, *Ground state entanglement in quantum spin chains*, *arXiv preprint quant-ph/0304098* (2003).
- [7] J. A. Carrasco, F. Finkel, A. González-López, M. A. Rodríguez and P. Tempesta, *Critical behavior of su (1/1) supersymmetric spin chains with long-range interactions*, *Physical Review E* **93** (2016) 062103.
- [8] J. A. Carrasco, F. Finkel, A. González-López and M. A. Rodríguez, *Supersymmetric spin chains with nonmonotonic dispersion relation: Criticality and entanglement entropy*, *Physical Review E* **95** (2017) 012129.
- [9] G. Vidal, J. I. Latorre, E. Rico and A. Kitaev, *Entanglement in quantum critical phenomena*, *Physical Review Letters* **90** (2003) 227902.
- [10] C. V. Kraus, M. M. Wolf, J. I. Cirac and G. Giedke, *Pairing in fermionic systems: A quantum-information perspective*, *Physical Review A* **79** (2009) 012306.
- [11] B.-Q. Jin and V. E. Korepin, *Quantum spin chain, toeplitz determinants and the fisher—hartwig conjecture*, *Journal of Statistical Physics* **116** (2004) 79.
- [12] M. E. Fisher and R. E. Hartwig, *Toeplitz determinants: some applications, theorems, and conjectures*, *Stochastic Processes in Chemical Physics* **15** (2007) 333.
- [13] E. L. Basor, *A localization theorem for toeplitz determinants*, *Indiana University Mathematics Journal* **28** (1979) 975.
- [14] A. R. Its, B.-Q. Jin and V. E. Korepin, *Entanglement in the xy spin chain*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** (2005) 2975.
- [15] J. Latorre and A. Riera, *A short review on entanglement in quantum spin systems*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42** (2009) 504002.
- [16] H. J. Lipkin, N. Meshkov and A. Glick, *Validity of many-body approximation methods for a solvable model:(i). exact solutions and perturbation theory*, *Nuclear Physics* **62** (1965) 188.
- [17] J. Cardy, *Conformal field theory and statistical mechanics, Exact Methods in Lowdimensional Statistical Physics and Quantum Computing (Oxford University Press, Oxford, 2010)* (2008) 65.
- [18] En teoría de la información, la entropía de una variable aleatoria es un valor medio de la información, sorpresa o incertidumbre inherente a los posibles sucesos de la variable aleatoria.