

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I



ENTROPÍA RELATIVA Y COBERTURA DE
DERIVADOS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Daniel Arrieta Rodríguez

Bajo la dirección del doctor

José Luis Vilar Zanón

MADRID, 2013



**Facultad de Ciencias Económicas y
Empresariales**

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I

ENTROPÍA RELATIVA Y COBERTURA DE DERIVADOS

**Tesis del Programa
Economía Financiera, Actuarial y
Matemática**

Autor: Daniel Arrieta Rodríguez

Director: José Luis Vilar Zanón

Dedicatoria y agradecimientos

Siempre me gustó la cita de Isaac Newton: “*If I have seen further than others, it is by standing upon the shoulders of giants.*”

Por eso dedico mi tesis a mis *gigantes*, todos aquellos que me ha enseñado y dejado que me aúpe a sus hombros para ver todo lo lejos posible: mis padres, mis profesores y mis hermanos. Y por supuesto a Simona, todas mis mujeres en una mujer.

Deseo remarcar mi agradecimiento a mi director José Luis Vilar Zanón por toda su atención y dedicación a lo largo de estos años y al Ministerio de Economía y Competitividad, ECO2010-22065-C03-01 (subprograma ECON).

Asimismo, también quisiera mostrar mi agradecimiento a Héctor Rico Pérez, responsable del departamento de *Quantitative Research* en *Espirito Santo Investment Bank* dónde trabajo, y que siempre ha destacado la importancia de la investigación y la ha fomentado en el ámbito profesional.

Índice

Abstract.....	1
Introducción.....	20
1 Valoración financiera e instrumentos derivados	37
1.1 Definiciones previas	37
1.2 Valoración clásica de derivados	38
1.2.1 Introducción: ejemplo sencillo de valoración relativa.....	39
1.2.2 Metodología Black-Scholes-Merton	41
1.2.3 Valoración Riesgo Neutro	46
2 La Superficie de Volatilidad.....	48
2.1 Volatilidad implícita.....	49
2.2 Causas de la aparición de la Superficie de Volatilidad	49
2.2.1 Causas principales	51
2.3 Problemas asociados a la Superficie de Volatilidad.....	54
2.4 Soluciones al problema de la Superficie de Volatilidad.....	57
2.4.1 Modelo con saltos.....	58
2.4.2 Volatilidad estocástica.....	59
2.4.3 Volatilidad local	61
2.4.4 Weigthed Monte Carlo	63
2.5 Problema de la Superficie de Volatilidad: conclusiones	63
3 Metodología de Entropía Relativa Mínima	65
3.1 Introducción histórica.....	65
3.2 Probabilidad, Información y Entropía	65
3.3 ERM con restricciones en los momentos	70
3.4 Análisis de sensibilidad	72
3.5 Implementación práctica de la ERM	74
3.5.1 Distribución a priori	75
3.5.2 ERM con restricciones en los momentos	75
3.5.3 Utilización de la distribución a posteriori.....	77
4 Modelo de Evolución del Subyacente	80
4.1 Características de las series temporales financieras	81
4.1.1 Exceso de curtosis	81

4.1.2	Memoria en volatilidad.....	82
4.1.3	Volatilidad asimétrica.....	83
4.2	Modelos Econométricos de Series Temporales.....	84
4.2.1	Modelos para la media y varianza condicional	85
4.2.2	Características relevantes de los modelos	88
4.3	Selección, estimación y simulación del modelo.....	90
4.3.1	Análisis previo.....	90
4.3.2	Selección y estimación del modelo	96
4.3.3	Análisis post-estimación y simulación	102
5	Valoración y Cobertura por ERM de opciones <i>Cliquet</i>	105
5.1	Introducción.....	105
5.2	Opciones <i>Cliquet</i>	106
5.2.1	Características generales.....	106
5.2.2	Riesgo de volatilidad	107
5.2.3	Valoración y cobertura en la literatura financiera	109
5.3	Solución a la valoración y cobertura de opciones cliquet	111
5.3.1	Optimal Hedge Monte Carlo	115
5.3.2	Solución propuesta	117
5.3.3	Implementación práctica para opciones <i>Cliquet</i>	121
6	Conclusiones y futuras líneas de investigación.....	136
6.1	Resumen, objetivo y propuesta de la tesis.....	136
6.2	Conclusiones.....	144
6.3	Futuras líneas de investigación.....	148
	Anexo A: Algoritmo de estimación.....	150
	Anexo B: Cobertura de Mínima Varianza.....	151
i.	Cobertura media-varianza en tiempo discreto.....	151
ii.	Equivalencias entre Funciones de Pérdida Cuadráticas	153
	Anexo C: Modelos estimados.....	155
	Anexo D: Código Matlab	158
	Bibliografía.....	171

Abstract

Introduction

The goal of this thesis is to analyze and apply the concept of Entropy to the valuation and hedging of derivative financial instruments issued on equities. More specifically, it develops a methodology based on the lowest relative Entropy to solve the problem of valuation and, above all, hedging of a type of exotic equity option called *Cliquets*.

In an informal manner, financial valuation target is to obtain the value in monetary units of assets whose purpose is the investment or the financing. These assets are defined as financial instruments, and the locations and mechanisms by which are exchanged is called financial markets.

On the other hand, a financial derivative are those instruments whose price depends on, this is, it derives of another variable, this variable is called the underlying, and can be very diverse nature and typology, the vast majority belong to the financial sphere. By way of illustration, we can make a small classification, according to Hull (2003), with the main categories of underlying:

- i. Financial Assets equity shares of companies, stock indices, etc.
- ii. Exchange Rate
- iii. Commodities: oil gas, copper, etc.
- iv. Financial assets in fixed income: bonds, deposits, etc.
- v. Other: credit, temperature, sports betting, ...

The valuation of financial instruments is done via two methodologies:

- i. Absolute Valuation
- ii. Relative Valuation

In a simplified manner, absolute valuation is based on taking into consideration all the cash flows associated with the instrument. A cash flow is simply an amount of cash on a certain date, as for example the periodic payments of a bond in their specific dates and following the example of the bond, in the absolute valuation it suffices to know these flows to obtain its valuation.

On the other hand, the relative valuation also is based on the knowledge of the cash flows of the instrument concerned, but in addition to these, you need other instruments given in financial markets. By comparing the cash flows of the instrument concerned with the market-based instruments, you get a relative valuation.

To continue with this informal overview of the relative valuation, it should be noted that within the same there are two possibilities:

- i. Static: the composition of the hedging portfolio does not vary during the life of the operation.
- ii. Dynamic: the composition of the hedging portfolio varies during the life of the operation.

Generally relative valuation is used in the dynamic version, which means, as detailed in the first chapter of the thesis, a series of extra assumptions and models that are not needed in the static version, it is obvious that more assumptions and models make the dynamic version has more potential weaknesses than the static.

Another aspect that has favored the use of the relative valuation is that mathematically, as evidenced by Harrison and Kreps (1979), the relative valuation can be obtained as a mathematical expectation respect some probability measure implicit in the market, and not the real probabilities. This fact may be little or nothing intuitive assessment relative as mathematical expectation allows a simple valuation once built-in all the market information on these probabilities that we have called implicit and that in the terminology of the valuation is called risk neutral probabilities.

The dynamic version of relative valuation was installed as a paradigm for the pricing of derivatives to the early 1970s with the publication of articles of Black and Scholes (1973) and Merton (1973). Both articles detailed how to get to a valuation formula derived from the creation of a portfolio that replicates the payment of the considered derivative. The portfolio has to be rebalanced dynamically based on models of evolution for the underlying and other instruments already given in the market, such as risk free bonds.

To complete this brief overview of the relative valuation, we had to list the possible problems that may occur in their practical application, among which the following are most relevant:

- i. Limitation for the valuation of more complex derivatives depending on the underlying assumptions. For example, the dynamic replication implies that the hedge portfolio must be continuously rebalanced, a fact that in practice it

is being approximated by recomposing the portfolio several times a day, but if the derivative is more complex the daily approximation to continuity may not be valid.

- ii. Ability to incorporate the maximum of available market information. In fact, Black Scholes model ensures that are valued according to the market only three traded instruments: the underlying itself, the risk-free bond and the European option which strike is being considered.
- iii. Concealment of the hedging portfolio, because of incorporating market information by using the implied probabilities, it is no longer necessary to compute hedging portfolio composition explicitly for the valuation.
- iv. Does not facilitate a relationship between real probabilities and implicit in market.
- v. If it is not possible the total elimination of risk what happens, what probabilities are used to price? Thus is, what is the hedging portfolio composition in this case?

At this point where arises the concept of Entropy, it will be used to answer these issues in the field of pricing and hedging equity derivatives. More specifically, Relative Entropy due to its large implications for hedging.

The concept of Entropy arises for the first time in the mid-nineteenth century, originally is a concept in thermodynamics, but has been adapted to many fields of study, including the Information Theory, Statistical Inference, Biology, and Data Analysis among others. The definition of Entropy that we are going to implement is the one used in statistical inference, following Cover and Thomas (1991). In this field the Entropy quantifies the uncertainty of a random variable; in particular, and as detailed in chapter three of the present thesis, it will use the methodology of Minimum Relative Entropy, henceforth denoted by the acronym MRE.

The MRE methodology was initially introduced by Kullback and Liebler (1951), it is based on minimizing the Relative Entropy, which can be understood as a distance, between a probability distribution of a priori and a posteriori another, so that will satisfy a finite number of restrictions on the moments of the distribution a posteriori.

The concept and methodology based on the Entropy, has been implemented in finance by several authors since the mid 90's. Gulko (1995, 1996) uses the methodology based

on the Entropy in the valuation of bonds and equity derivatives. Buchen and Kelly (1996) used in particular the technique of distribution of Maximum Entropy, to estimate the probability distribution implicit in the market option prices, later, Derman and Zou (1999) used this methodology as a basis for obtaining the historical probability distribution subject to some market restrictions. Avellaneda et al (2001) have also used this technique for the estimation of volatility surfaces and subsequently for derivatives pricing and hedging.

In this thesis we will use this technique in a manner similar to that followed by Avellaneda et al. (2001), with special emphasis on the hedging implications which is derived from the sensitivity analysis. The MRE solution has properties very useful for a practical hedging as outlined in Arrieta (2012) and is detailed in the fifth chapter of the thesis.

This methodology allows problem resolution decomposition in a series of stages, steps or modules. Figure A is shown below detailing these steps.

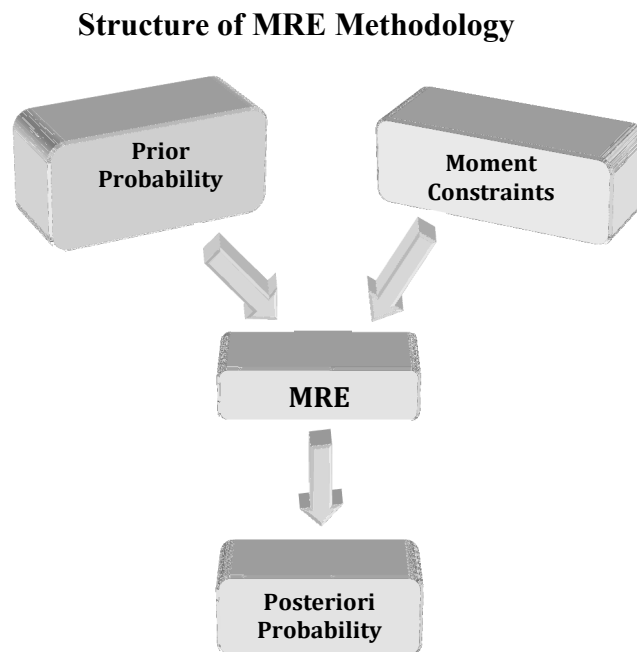


Figure A: MRE Methodology building blocks

A feature of the first two building blocks that make up the MRE methodology reflected in Figure A, is that they are independent, and can be replaced for others without invalidating the whole methodology. This modularity of the operation is very useful and provides great robustness for the use that has been given in this thesis.

Another feature of the MRE is the easy interpretation of each block. In fact, we can relate Figure A modules with clear financial concepts, giving rise to the following table.

<i>MRE Methodology Block</i>	<i>Financial Meaning</i>
Prior probability distribution	Real world underlying model
Constraints in Posteriori probability distribution moments	Market prices for futures and options on the underlying
Posteriori probability distribution	<i>Risk-Neutral</i> Pricer

Table A. Conceptual Relationship MRE - Finance

Problem to be solved in the Thesis

Present thesis deals with the valuation and hedging of exotic equity derivative called *Cliquets*. The *Cliquets* emerged during the last years of the twentieth century and were very successful during the first decade of the current century, as shown in Patel (2002) and in the introduction of Jeffery (2004).

Before proceeding with the *Cliquets*, let's define an exotic derivative as every derivative which is not quoted in organized markets, as opposed to standard derivative which shall be the one that is listed on organized market.

In second place we are going to list and define the instruments, derivatives and no derivatives, which are quoted in organized markets equities, are the following:

- i. Cash: it is money in the physical form of currency.
- ii. Future: it is a standardized contract between two parties to buy or sell a specified asset of standardized quantity and quality for a price agreed upon today, the futures price or strike price, with delivery and payment occurring at a specified future date, the delivery date.
- iii. Options: it is a contract which gives the owner the right, but not the obligation, to buy or sell an underlying asset or instrument at a specified strike price on or before a specified date. The seller incurs a corresponding obligation to fulfill the transaction, that is to sell or buy, if the long holder elects to exercise the option prior to expiration. The buyer pays a premium to the seller for this right. An option which conveys the right to buy something at a specific price is called a call; an option which conveys the right to sell something at a specific price is called a put. Both are commonly traded,

though in basic finance for clarity the call option is more frequently discussed, as it moves in the same direction as the underlying asset, rather than opposite, as does the put.

Exotic derivatives quote in non-standard markets or Over The Counter markets, which any type of derivative agreed by contracting counterparts is traded.

The *Cliquet* option used to be issued on equity indexes, and its main underlying is DJ Euro Stoxx 50. But the main feature of the *Cliquets* is determined by its payoff, which its general expression is

$$P = N \cdot \max\left(C + \sum_{i=1}^n \max(\text{Floor}_i, \min(R_i, \text{Cap}_i)), \text{GlobalFloor}\right)$$

Where $R_i = \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1$ stands for the simple return obtained from the prices of the underlying S_i and S_{i-1} corresponding to the periods $i-1$ and i respectively. N denotes the option notional, C is a constant, Floor_i and Cap_i denote respectively low and high limits for R_i at period i -th. Finally, the sum of these returns has a lower limit implicated by *GlobalFloor*. This kind of product with several threshold levels to rise, the Caps, and the low, the Floors, imply that the payoffs are never too ends nor upwards or downwards, which means that their prices are not too high.

Where is the difficulty in the valuation and on all the hedging of the *Cliquets*?

Especially in the hedging of the so-called forward start, this is, of the periods whose computation of the profitability starts in the future. This is due to the fact that to hedge these periods should be available assets, in particular options that will begin in the future thing that is not true in organized markets. If the latter limitation does not complicate the enough hedging, this joins the restriction that the total sum total is positive, this is a optionality on the embedded forward start options. In addition let us remember that the valuation and hedging of options was of dynamic type which entails a high dependence on the underlying assumptions.

The resolution of these two problems remains an open problem that have attempted to resolve several authors in a variety of ways: Buetow (1999), Wilmott (2003), Forsyth et al (2004), and Eales Tunaru (2004), Tor (2004), Den Iseger and Oldenkamp (2005), Lidebrandt (2007), Gaudenzi and Zanette (2008), Matosek (2008), Petrelli et al (2008), Kilin (2009), Bevhand (2010) and Madan and Schoutens (2010).

But none of the solutions outlined so far in the financial literature, it holds so many properties, both theoretical and practical, as the solution proposed in this thesis for the MRE methodology used, you'll be added some results of the methodology of hedging mean-variance originally proposed by Föllmer and Sondermann (1986), and subsequently extended by various authors as Duffie and Richardson (1991), Schweizer (1992, 1996) , Schäl (1994) , Gouriéroux et al (1998), and Pham et al. (1998). This mean-variance methodology has been adapted and implemented at the Monte Carlo method by Potters et al. (2001), which they have called Optimal Hedge Monte Carlo technique.

With these tools gives a solution, which also can be deployed in practice, for the problem of valuation and above all, hedging options *Cliquet*.

Among the most important achievements contained in this thesis, it should be noted the following:

- i. Assessment consistent with the market-based instruments as a consequence of being a method of valuation risk neutral. More specifically, is a Risk Neutral Pricing tool by interpolation on the market-based instruments.
- ii. Determination of hedging portfolio. Being a Risk Neutral Pricing tool by interpolation on the market-based instruments and due to the properties of the methodology based on MRE, you get the composition of the portfolio of hedging of the derivative static purpose of the valuation.
- iii. Goodness of the hedging portfolio and risk quantification. Again, thanks to the hedging properties of the MRE methodology, it is possible to measure the hedging error and determine, therefore, the goodness of the same.

All these achievements and some more, related to the management of risks, as you will see in the practical examples, will enable us to conclude that the methodology designed and proposed in the thesis to resolve the problem of valuation and hedging of *Cliquet*, perfectly meets both objectives and in addition will enable an analysis of the risk associated with the hedging of the *Cliquets* mode of a thorough and detailed.

Thesis chapter's summary

To finish the introduction a brief summary of each chapter is given below.

In the first chapter we shall define the basic concepts that are going to deal with, mainly the financial valuation and, in particular, the derivative financial instruments. Also in this first chapter, it summarizes the seminal works of Black and Scholes, on the one hand and Merton by another, both published in 1973. In them is shown as should be valued and, more importantly, hedge, derivatives issued on equities, and the structure of valuation and hedging proposal by Black, Scholes and Merton, was adopted by the entire financial industry.

This total acceptance of the Black, Scholes and Merton pricing and hedging paradigm ends with the stock exchange crash of 1987, due to the confirmation as completely wrong of some of model hypothesis.

Second chapter describes the solution adopted by the financial agents that are involved in the options markets: adjust the prices of options through the single parameter not observable in the Black, Scholes and Merton framework: the volatility. This fact gives rise to the emergence of the so-called surface of volatility, which is that for each maturity and each exercise price is assigned a different volatility, named implied volatility. Chapter ends with a brief analysis of the solutions to the problems posed by the advent of the volatility surface.

At the third chapter thesis proposed solution methodology is described and detail analyzed. The methodology is based on the concept of Entropy, this technique has been used for the valuation of derivatives mainly by Gulko (1995, 1996), by Avellaneda et al (2001) and Derman and Zou (1999).

The fourth chapter focuses on a key point of this methodology based on the Entropy: the prior probability model. This chapter lists and describes the main features of the series of temporary financial equities. Also describes the family of econometric models, GARCH, for the evolution of the underlying that will be used in the following chapters of the thesis. Also propose a methodology for estimating and selection within the GARCH family of econometric models used.

Fifth chapter analyzes the properties of the methodology as static hedging technique and its goodness of fit. For this end, to results based on Entropy are added some results of mean-variance hedging originally proposed by Föllmer and Sondermann (1986), and subsequently extended by various authors. This mean-variance methodology has been adapted and implemented at the Monte Carlo method by potters, Bouchad and Sestovic (2001), named Optimal Hedge Monte Carlo. With these tools is given a solution, which also can be implemented in practice, for the problem of valuation and above all, hedging of *Cliquet* options.

The final chapter of the thesis takes up, as it cannot be otherwise, the findings and possible future lines of investigation that this new valuation methodology and hedging of derivatives of variable income opens for the future.

To conclude the introduction I would like to comment on that, for the sake of a better read, the more technical details as well as the computational algorithms used are included in the Annex, the programming language and numerical calculation program has been used MATLAB®.

Goals and achievements

Let us remember that, as stated in the fifth chapter, from the viewpoint of the one who has to hedge the *Cliquet* and minimize the risk through the delta hedging, the maximum danger facing is the exposure to volatility risk. However, this type of derivative has a dependency very subtle of the modeling that will be done on the volatility and the usual technique of hedging of the volatility risk is through the calculation of the Vega, i. e., the derivative of the option price with respect to volatility. The Vega can be used to determine a hedging of the risk, but this only works in the case of the standard options listed, whose hypothesis is of unique volatility. But, as we saw, a single parameter of volatility does not explain the risk of volatility of the *Cliquet* options. This is due to the fact that the derivatives whose Gamma changes sign, the Vega is usually very small in those levels where the sensitivity to the true volatility is very large, fact that is very counterintuitive at first glance. Because of single volatility Vega, is not a good measure of the volatility risk, as it does not reflect the true Surface exposure to volatility at various levels.

A first aspect to take into account is that *Cliquet* options are exposed to forward volatility smile risk and therefore any volatility surface deterministic model calibrated to market prices for vanilla options will not be able to model all this volatility risk. This has caused that *Cliquet* options pricing has not a market consensus, Patel (2002).

A second important point is regarded to volatility risk dynamic management. Jeffery (2004) discusses how erroneous valuation models led to underestimate the cost of this volatility risk dynamic hedging causing millions of dollars in losses related to options known as *Cliquet Reverse* and *Cliquet Napoleon*. Most affected were Goldman Sachs, Natexis Banques Populaires NIBC and Petercam Derivatives. In fact, Goldman Sachs, which gave very aggressive prices during 2002, had to go to the market to hedge a large part of these risks of volatility during early 2003. On the other hand, Natexis gave a loss of EUR 118 million in equity structured products in 2002, and Petercam NIBC Derivatives was doomed to close at 2005 midyear by their losses of more than 60 million euros in his book of exotic equity derivatives.

It is also worth noting that one of volatility risk dynamic hedging keys is the sensitivity known as Volga, this measures the sensitivity of the Vega to changes in volatility, and is defined as

$$Volga \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \sigma}$$

Where V denotes the derivative function value issued on the underlying S . *Cliquet* options, and especially the cases *Reverse* and *Napoleon* have negative Volga, this implies that the vendors of these products need to buy volatility when volatility is rising and sell it when it is dropping. In other words, those who are sold of these products will be long Vega when volatility is low, and short when it is high, so if it is intended to reduce the volatility risk they must buy expensive volatility and sell it cheap. Furthermore, the volatility is less liquid than the own underlying has broader bid-ask spreads, which increases even more the cost of hedging.

As just described, the valuation and on all of the hedging options *Cliquet* has been a problem is not resolved satisfactorily within the financial industry over the past decades to solve this problem has been proposed in the thesis a methodology based on the Entropy.

Concretely it is used the Minimum Relative Entropy methodology. Such a methodology is based on minimizing the relative Entropy between a prior probability distribution and a posteriori one, so that will be satisfied a finite number of restrictions on the posteriori distribution moments.

Remember also the Figure A, where it is reflected the problem resolution structure in a series of stages or modules that are independent even though they are related.

In addition, MRE solution has some very useful properties from a practical point of view. The solution by MRE has some implications that are very efficient for the practical resolution of hedging options. This last key aspect had not been prominent in the financial literature until Arrieta (2012); these properties have been commented out with a profusion and detail in the sections 3.5.3 and 5.3.2.

In addition to MRE methodology, the proposed solution is also based on some theoretical results coming from mean-variance hedging technique, Schäl (1994), implemented via *Optimal Hedge Monte Carlo* or OHMC.

The whole solution is based on three pillars that are interrelated between them:

- i. MRE hedging implications, which properties have been commented with profusion and detail in sections 3.5.3 and 5.3.2
- ii. Underlying evolution model, which reflects the OHMC philosophy and in addition is the prior distribution for the implementation of the MRE. To this modeling has been wholly dedicated the fourth chapter
- iii. Mean-Variance Hedging, taking into account the equivalence of loss measures given in Schäl (1994), and the adjustment of the probability distribution through MRE

ERM hedging implications

As it is detailed in the sections 3.5.3 and 5.3.2, MRE methodology is applied to a prior probability density denoted by f_0 , with some moments constraints that we wished to impose

$$\int g_j(x)f(x)dx = C_j \quad j = 1, \dots, n$$

Where g_j and C_j are functions and numbers given respectively, and n denotes the number of constraints, the aim is to obtain a new posterior probability density f that checking the imposed moments restrictions is closest to the prior density f_0 . If the loss function used is the MRE, then implied that

$$E_f[h(x)] = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)] \quad (\text{A.1})$$

Where h denotes a new function for which you want to calculate their expectation on the new posterior probability measure. And where the independent term is given by

$$\beta_0 = E_f[h(x)] - \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)] \quad (\text{A.2})$$

And the coefficient vector

$$\boldsymbol{\beta} = \text{cov}_f(h(x), \mathbf{G}(x)) [\text{cov}_f(\mathbf{G}(x), \mathbf{G}(x))]^{-1} \quad (\text{A.3})$$

Where \mathbf{G} denotes the matrix whose columns are the g_j , and cov_f is the covariance operator taken on new posterior probability measure.

Let's take a look at the financial interpretation, according to Arrieta (2012), the functions g_j are the payoffs of market instruments, futures, and options that you want the method values well, this is according to the prices given in the market, the C_j 's. For its part the function h denotes the not standard option payoff which is desired to price.

The most important property of (A.1) is that implicitly is decomposing h on to the basis functions g_j , being linear the relationship between h and the basis functions. This allows the following interpretation

$$h(x) = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x) + \varepsilon \quad (\text{A.4})$$

Where ε denotes the error or difference between the linear combination of basis functions g_j and h . In addition financially for our valuation problem we are giving a static hedging portfolio at maturity of the target payoff h through the various market-based instruments g_j . This last fact is derived from the way which are obtained β_0 and β through (A.2) and (A.3). Lastly, (6.4) gives us the ε financial interpretation, which is the random variable reflecting the result of the hedged portfolio, thus is the market based portfolio plus the derivative.

Underlying evolution model

The next step is the prior probability distribution modeling. This distribution, used through Monte Carlo simulations, allows the usage of OHMC and Weighted Monte Carlo. This last name was given by Avellaneda et al (2001) when MRE methodology was applied to a prior a Monte Carlo simulation.

The family of models that have been proposed in the fourth chapter are econometric models given by processes with $ARMAX(R, M, Nx)$ conditional mean and $GARCH(P, Q)$ conditional variance family. In this chapter it is also presented a methodology for selecting the best model within the family of proposed models.

For the underlying that has been used in practical cases, the DJ Euro Stoxx 50, it was selected the $ARMAX(0,0)$ for the conditional mean, and for the conditional variance a model $EGARCH(1,1)$ with Student- t probability distribution with $\nu > 2$.

Mean-variance hedging

As the last part of the proposed methodology, were added theoretical results from the mean-variance hedging methodology. In particular has been used the work of Schäl (1994), whose most relevant conclusions are summarized below.

The first Schäl's work sound conclusion is the equivalence between the measures of risk given by the expressions

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & E[(C_{t+1} - C_t)^2 / \mathcal{F}_t] \\ \text{ii.} \quad & E[(C_T - C_t)^2 / \mathcal{F}_t] \\ \text{iii.} \quad & E[(C_T - C_0)^2 / \mathcal{F}_t] \end{aligned} \tag{A.5}$$

C_t denotes the accumulated cost of the hedging strategy up to time t . We can interpret C_t in the MRE methodology as the cumulative sum of ε_t given by (A.4). \mathcal{F}_k denotes the σ -algebra of the events up to and including time k . Intuitively it is the information available until some time k in the expressions (A.2) and (A.3), these are the estimate by ordinary least squares of a multiple linear regression model. It follows that when using MRE, it is being minimize the expression iii. Schäl (1994) shows that these three expressions, i to iii., are equivalent under certain conditions in the underlying stochastic process S_t .

The equivalence between the expressions given by (A.5) is of great practical importance from the point of view of the hedging risk management. Equivalence between i., ii. and iii. implies that minimizing the hedging risk to maturity (.iii) of the option is equivalent to minimizing in every time step (i.). This fact from the point of view of the hedging portfolio manager is very useful since portfolio composition does not depend on the time scales, so minimizing hedging risk from now until option maturity is achieved with the same portfolio which minimizes hedging risk every time step until maturity. So equivalence of expressions (A.5) ensures that portfolio manager is always minimizing the hedging risk when using the proposed methodology.

Before ending with mean-variance hedging methodology, it should be pointed out that the conditions of equivalence between the three expressions i to iii., are always guaranteed if underlying stochastic process S_t fulfills certain requirements, which may be summed up in that S_t is a martingale. A more detailed analysis of mean-variance hedging methodology and Schäl's (1994) work is attached in Annex B.

Finally, remember that, DJ Euro Stoxx 50, which is the underlying that has been used in the practical cases, has been modeled with an ARMAX(0,0) conditional mean which

verifies these theoretical requirements. But, it is also worth noting that, to do this have been estimated several models and has been tested that the constant in the equation of the conditional mean is statistically null.

Proposed solution methodology joint working

Once summarized the main characteristics of the three methodological building blocks used as solution for the problem proposed in the thesis, we had to list the steps in order to develop its practical application. The use of the hybrid methodology proposal follows the below workflow:

1. Selection and estimation of the best possible model for the real evolution of the underlying, fourth chapter details both a family of models to use and a methodology for selecting among them. The estimate has to try, to the extent possible, that are verified the conditions that allow the expressions of (A.5) being equivalent.
2. Monte Carlo simulation of the model for all the relevant hedging dates. These dates are both the needed to determine the value of the derivative purpose of the valuation, such as the dates required for the evaluation of the market derivatives that will be used for target derivative hedging.
3. Adjustment of the weightings of each trajectory through MRE to incorporate information from market, that is, the payoffs, g_j , and their market prices, C_j , that will be used for target derivative hedging.
4. Target option payoff, h , valuation by means of ratio (A.1), and thus obtaining its market price in line with the market information provided in the previous step.
5. Analysis of the h decomposition through the relationship (A.4), this allows analyze the static hedging goodness and, most important, the hedging error of the target option. In this step is where you should find all the relevant statistics of (A.4) hedging error ε , such as the determination coefficient R^2 , percentiles, ranges, etc. All these statistics will be used in the next step, a practical example is given in section 5.3.3.
6. In the event that the residual risk is high, or do not conform to the expected, it will return to the third step with new hedging instruments that seem most appropriate. It is worth noticing that if any date for evaluation

of these new hedging instruments are not contained in the trajectories of the Monte Carlo simulation, we need to go back to generate trajectories containing all these new dates, as outlined in the second step.

7. If the target option through the instruments of hedging has been achieved break down exactly, that is, there is no error, and therefore the term ε of the equation (A.4) is null for all states, then it have already been obtained the exact market price of the target derivative. If it has not been achieved, and therefore target derivative hedging error term ε is non-null for all states, it has to be analyzed the risk of the states for which the term ε is not annulled. It is remarkable that all new analysis must be performed under the real probability measure. Some examples of various extra analysis are detailed in section 5.3.3.

Conclusions

The objective of this thesis was to present a new hybrid pricing and hedging methodology applied to equity exotic derivatives issued on a single underlying. In particular is intended to solve all the problematic embedded in so called *Cliquet* options. New hybrid proposed methodology is based on three pillars:

- i. Minimum Relative Entropy on Monte Carlo simulations of the prior distribution Avellaneda et al (2001), and its hedging implications Arrieta (2012)
- ii. Mean-Variance Hedging Schäl (1994)
- iii. Optimal Hedge Monte Carlo technique philosophy developed by Bouchaud, Potters and Sestovic (2001)

The first thing to emphasize is that the use of the MRE applied to Monte Carlo simulations as prior distribution, can be used both as a method of interpolation and as adjustment to fix the valuation problem associated with the surface of volatility. Both forms are detailed in Avellaneda et al (2001), where it is called exact fitting to the interpolation way and weighted least-squares to the adjustment, but this second adjustment method lacks the hedging implications of outlined in Arrieta (2012), and it is therefore not used in the present thesis.

The second to highlight in using MRE building block as part of the whole proposed methodology are its hedging implications. Because MRE provides a Risk-Neutral Pricing tool, but also provides a static hedging to maturity of the target payoff, and the hedging portfolio is composed by the various market-based instruments provided. Furthermore, such hedging portfolio is objectively determined by the coefficients β_0 and $\boldsymbol{\beta}$ given by (A.2) and (A.3) respectively. Finally, the way in which the coefficients are obtained β_0 and $\boldsymbol{\beta}$ implies that you are minimizing the variance of the hedging portfolio within a time horizon equal to the maturity of the target derivative purpose of the valuation.

Linked to the static portfolio provided by MRE theoretical results of Schäl (1994) on mean-variance hedging are used, more concretely, the equivalence between risk measures given in (A.5). The equivalence between these risk measures it is a result of great practical importance from the point of view of the hedging risk management as it was shown in the previous paragraph. This theoretical result implies that minimizing the risk up to option maturity, what is being done through MRE, is equivalent to minimizing hedging risk every time step. That is to say, to minimize the risk to the maturity implies the minimization of risk day to day, week to week, etc.

This last feature implies that mean-variance self-financing portfolios are obtained for any time horizon, which is very useful for practical application, because, as a general rule, exotic book portfolio managers do not expect to the maturity to rebalance their portfolios, they usually rebalance several times per week, even per day. So, if proposed methodology is used, equivalence of (A.5) expressions guarantees that always is being minimized the hedging portfolio risk regardless rebalancing times.

The Optimal Hedge Monte Carlo technique developed by Bouchaud, Potters and Sestovic (2001), is based on the explicit analysis of the dynamic hedging strategy to obtain the cost of replication of the goal portfolio. In the OHMC framework underlying asset is simulated based on a model that seeks to capture the main characteristics of the actual process, as we have done in the first step of the methodology proposed in the thesis, as reflected in Figure A and detailed in the fourth chapter. In the OHMC technique hedging ratios and pricing functions are solutions to a problem of statistical hedging error minimization between two time steps, all of this with the constraint of maintaining the position with the lower variance as possible in media.

For this reason the OHMC methodology is very interesting from a practical point of view since it puts in derivatives trader's shoes trying to replicate target option payoff.

Just like the trader the OHMC methodology also analyzes the residual risk that is associated with this whole process of hedging, at the same time that offers information on the average costs to deploy this hedging, all this is possible based on the actual underlying probability distribution and not the Risk Neutral one calibrated to market. It is worthy to notice that Risk Neutral probability distribution serves only under continuous and perfect replication hypothesis, being limited to very specific cases and ideal market situations that very rarely occur in practice. On the other hand, the analysis and explicit knowledge of the residual risk associated with hedging strategies that are being carried out for the derivatives portfolio is of utmost importance for the manager of derivatives portfolios because it helps him/her to have desired risk-return exposure, and will help in the decision-making or not to add new instruments to current hedging portfolio. In a nutshell, all the OHMC philosophy, which focuses on the hedging strategies, their expected costs and its residual risk, it is easily included within proposed methodology proposed in the thesis by how this is structured in its building blocks reflected in Figure A.

It is possible therefore conclude that the methodology designed and proposed in the thesis to properly solve the problem of pricing and hedging *Cliquet* options, meets both of these objectives and in addition enables a detailed risk analysis.

Future research lines

To conclude, many interesting questions arise in relation to the exhibition that has taken place throughout the thesis, most relevant are the following:

- i. Definition of a more systematic and objective methodology for the determination of the components of the hedging portfolio
- ii. Continuing with the search for new underlying evolution models and incorporating them into the methodology
- iii. Extend the methodology to the multivariate case
- iv. Analyze more in depth the relationship between the proposed methodology and mean-variance hedging methodology
- v. Incorporation of risky decision theory for the imperfect hedging
- vi. Analyze the implications for the accounting of exotic derivatives with maturities over the accounting period in which starts the position

Within all the future investigation lines just proposed, the most interesting is the first one. In the case discussed in the thesis, *Cliquet* options, this search is already simplified by the fact that the forward start Call Spreads are the key instruments in the decomposition, since they have exposure to forward volatility skew and with their inclusion as moments constraint in the MRE methodology implies a goodness of fit almost perfect.

If target payoff is not of the type discussed in the thesis, hedging instruments search starts virtually from scratch, taking into account all possible instruments available in the market. In the best of cases, it can be a smaller set that is based on intuition or experience of the trader who is hedging this payoff.

But if it was possible to define an algorithm that, given a target payoff to replicate and given a set of hedging instruments, it automatically selects the optimal set and more efficient hedging instruments. Therefore, if this algorithm was developed for every exotic payoff type then the methodology proposed in the thesis is entirely general for pricing and hedging of any derivative security.

Introducción

El objeto de esta tesis es analizar y aplicar el concepto de entropía a la valoración y cobertura de instrumentos financieros derivados emitidos sobre activos de renta variable. Más concretamente se desarrolla una metodología basada en la Entropía Relativa Mínima para resolver el problema de valoración y, sobre todo, de cobertura de un tipo de opción de renta variable denominadas *Cliquets*.

De un modo informal, la valoración financiera consiste en obtener el valor en unidades monetarias de activos cuya finalidad es la inversión o la financiación. A estos activos se los define como instrumentos financieros, y los lugares y mecanismos mediante los que se intercambian se denominan mercados financieros.

Por otra parte, los instrumentos financieros derivados son aquellos instrumentos cuyo precio depende, esto es, se *deriva*, de otra variable. Dicha variable, se denomina subyacente, y puede ser de muy diversa índole y tipología, la gran mayoría pertenecen al ámbito financiero. A modo ilustrativo, podemos hacer una pequeña clasificación, siguiendo a Hull (2003), con las principales categorías de subyacente:

- vi. Activos financieros de renta variable: acciones de empresas, índices bursátiles, etc.
- vii. Tipo de cambio
- viii. Materias primas: petróleo, gas, cobre, etc.
- ix. Activos financieros de Renta fija: bonos, depósitos, etc.
- x. Otros: crédito, temperatura, apuestas deportivas,

La valoración de instrumentos financieros se realiza mediante dos metodologías:

- iii. Valoración absoluta
- iv. Valoración relativa

De un modo simplificado la valoración absoluta se basa en tener en consideración todos los flujos de caja que lleva asociados el instrumento a valorar. Un flujo de caja es simplemente una cantidad de efectivo en una fecha determinada, como por ejemplo los pagos periódicos de un bono en sus fechas determinadas. Siguiendo con el ejemplo del bono, en la valoración absoluta basta con conocer esos flujos para obtener su valoración.

Por otro lado, la valoración relativa también parte del conocimiento de los flujos de caja del instrumento considerado, pero además de éstos, necesita de otros instrumentos

dados en los Mercados Financieros. Comparando los flujos de caja del instrumento considerado con los de los instrumentos de mercado, se obtiene una valoración relativa. Un ejemplo simplificado sobre la valoración de un inmueble en el centro de una ciudad, puede ser útil para apreciar las diferencias. Supongamos que queremos valorar un apartamento de m metros cuadrados en el centro de una gran ciudad, ¿cómo sería mediante la valoración absoluta?, simplemente se consideran los flujos de caja asociados, esto es, si este apartamento genera un alquiler de x unidades monetarias al mes pues basta considerar que esto es una renta perpetua y obtener su valor.

Y, ¿cómo sería mediante valoración relativa?, simplemente buscando precios de viviendas de similares características para de ellos deducir la valoración buscada. Por ejemplo podríamos encontrar el precio de un apartamento con menos metros cuadrados y otro con más y hacer una sencilla interpolación lineal.

El siguiente aspecto a tener en cuenta en la valoración financiera es el riesgo. De forma genérica se entiende que existe riesgo cuando los flujos de caja no son ciertos. De una forma intuitiva un flujo que no es cierto implica que no es recibido siempre y bajo cualquier circunstancia. Mediante un sencillo ejemplo se verá la importancia de esta nueva situación en la valoración financiera.

Consideremos una apuesta sobre un evento deportivo en el que gana A o B, y cuyo esquema se puede representar mediante la tabla siguiente

<i>Suceso</i>	<i>Gana A</i>	<i>Gana B</i>
<i>Probabilidad</i>	p	$1 - p$
<i>Flujo</i>	90	30

Tabla 1. Apuesta Deportiva

Vemos que ahora los flujos no son ciertos, y por tanto surge el concepto de riesgo, y esta no-certeza está medida por la probabilidad p , un número entre cero y uno que indica la certeza de un suceso. Si p es uno el suceso ocurre con certeza y si es imposible que ocurra p es cero.

¿Y ahora cómo se valora mediante cada una de las dos metodologías?, en la valoración absoluta al no ser ciertos los flujos se ha de tener esto en cuenta incorporando la actitud ante el riesgo del valorador, lo que implica la subjetividad del mismo. Para ello se

utiliza la metodología de Teoría de la Decisión dónde es necesaria la incorporación de funciones de utilidad.

En cambio, la valoración relativa no se ve modificada, pero para ello habría que encontrar un mercado dónde cotizaran instrumentos similares. En este caso podría ser una casa de apuestas, en la que se pueda apostar por este evento deportivo. Supongamos que la cotización de la apuesta es tres a uno para A y uno y medio a uno para B. Esto quiere decir que por cada unidad monetaria apostada por A el apostante recibe tres unidades monetarias en caso de ganar A y ninguna en otro caso, y análogamente por cada unidad monetaria apostada por B recibe una y media en caso de victoria de B y ninguna en otro caso.

Por tanto, ya es posible obtener la valoración mediante las dos metodologías del instrumento dado en la Tabla 1. Para la valoración absoluta vamos a hacer la suposición de indiferencia por el riesgo y por tanto el valor viene dado por la esperanza matemática del instrumento, que es simplemente la suma siguiente

$$V_{abs} = 90 \cdot p + 30 \cdot (1 - p)$$

Dónde V_{abs} denota la valoración absoluta. ¿De dónde obtenemos p ?, si este evento se ha disputado más veces a lo largo de la historia y disponemos de estadísticas fiables, utilizando inferencia estadística es posible estimar p . Supongamos que a lo largo de la historia A ha ganado en un 50% de casos a B y por tanto podemos utilizar ésta como estimación de p y por tanto $V_{abs} = 60$.

Por su parte el valor relativo, sería $V_{rel} = 50$, puesto que un flujo de 90 en caso de ganar A se puede obtener apostando 30 a la victoria de A, que al estar tres a uno nos devuelve el flujo que deseábamos, y por otra parte apostando 20 a la victoria de B obtendríamos un flujo de 30 que es lo deseado para el caso de victoria de B. Por tanto con un total de 50 generamos los flujos pedidos y éste es V_{rel} , es decir, la valoración relativa del instrumento dado en la Tabla1.

¿Cuál de las dos valoraciones es correcta?, en realidad ambas lo son pero asumen supuestos distintos. En el caso de la valoración absoluta ésta será más correcta cuantas más operaciones de este tipo se hagan. De hecho, bajo los supuestos de la valoración absoluta, más concretamente en el uso de la esperanza matemática con herramienta de valoración, subyace un principio denominado Ley de los Grandes Números. En este caso p son las probabilidades reales del evento, y que si son desconocidas se han de estimar mediante inferencia estadística. Pero en este caso de valoración absoluta existe

un riesgo en el resultado final de la operación. En concreto está el riesgo de que gane A y tengamos que pagar al tenedor del instrumento 30 unidades monetarias, recordemos que $V_{abs} = 60$ y que por tanto estas son las unidades monetarias de las que disponemos. Por el contrario si gana B, habremos de pagar también 30 unidades monetarias, y obtendremos por tanto las otras 30 de beneficio.

En el caso de la valoración relativa no existe este riesgo, ya que en ambos casos los dos flujos netos serán nulos. Esto se debe a que implícita en la valoración relativa, por la forma en la que ésta se obtiene, va una forma de actuación. Esta forma de actuación consistía en utilizar los flujos de los instrumentos de mercado ya existentes para replicar los flujos de nuestro instrumento de la Tabla 1. En este ejemplo, consistía en hacer dos apuestas simultáneas de 30 a la victoria de A y 20 a la victoria de B, lo que permitía obtener $V_{rel} = 30 + 20 = 50$. Con estas dos apuestas se obtienen los mismos flujos y en todos los casos posibles, que los del instrumento de la Tabla 1. Y por tanto no hay riesgo. A la acción de eliminar el riesgo se define como cubrir un riesgo, en este caso estamos cubiertos. Otra característica importante de este método de valoración es que sigue siendo posible utilizar la fórmula de la esperanza matemática para obtenerla. Basta con deducir las probabilidades implícitas en el mercado de las apuestas, que es $p_i = \frac{1}{3}$ puesto que la victoria de A se paga tres a uno y el inverso es su probabilidad implícita en la apuesta y por tanto

$$V_{rel} = 90 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 50$$

Estas dos metodologías son las que se aplican en la valoración financiera, en concreto en el caso de los derivados se utiliza la valoración relativa.

El primer objetivo de este ejemplo es contextualizar el objeto general de la tesis que no es otro que la valoración de derivados. Pero no será un evento deportivo el subyacente de los derivados analizados en la tesis, si no que se considerarán activos de renta variable, como pueden ser las acciones de compañías cotizadas en mercados organizados o los índices bursátiles.

Para comprender otra parte del objeto de la tesis: la aplicación de la entropía a la valoración y cobertura de derivados de renta variable, debemos definir lo más claramente posible el concepto de cobertura. Recordemos, tal y como acabamos de ver en el ejemplo, que la cobertura se asocia a la eliminación del riesgo en la valoración relativa.

Cobertura y valoración relativa van íntimamente ligados. Esto se debe al hecho de que, si existe un mercado dónde coticen instrumentos, que al combinarlos, replican el pago del instrumento objetivo que se desea valorar, entonces se puede eliminar el riesgo asociado a la valoración de dicho instrumento objetivo. Esta eliminación del riesgo asociado es la cobertura del instrumento objetivo, y el conjunto de instrumentos de cobertura utilizados es la cartera de cobertura.

Traducido al ejemplo, la apuesta con los flujos de la Tabla 1 sería el instrumento objetivo, y el mercado donde cotizarían los instrumentos que se utilizan para la cobertura sería la casa de apuestas dónde podemos hacer las apuestas individuales que nos sirven para cubrir los flujos del instrumento objetivo. Por último, la cartera de cobertura consistiría en la apuesta de 30 unidades a la victoria de A y 20 a la victoria de B, siendo el precio de la cartera y por ende del instrumento objetivo de 50 unidades.

La posibilidad de la eliminación completa del riesgo hace que la valoración relativa sea la que se usa de modo generalizado en la valoración financiera. De hecho, desde el último cuarto del siglo XX es la metodología adoptada por unanimidad por los mercados y la industria financiera.

Para continuar con esta introducción informal a la valoración relativa hay que destacar que dentro de la misma existen dos posibilidades:

- iii. Estática: la composición de la cartera de cobertura no varía durante la vida de la operación.
- iv. Dinámica: la composición de la cartera de cobertura sí varía durante la vida de la operación.

En general se utiliza la versión dinámica, lo que implica, como se detalla en el primer capítulo de la tesis, una serie de hipótesis y modelos extra que no son necesarios en la versión estática. Es obvio que más hipótesis y modelos hacen que la versión dinámica tenga más debilidades potenciales que la estática.

Otro aspecto que ha favorecido el uso de la valoración relativa es que matemáticamente, tal y como demuestran Harrison y Kreps (1979), la valoración relativa se puede obtener como una esperanza matemática respecto de las probabilidades implícitas en el mercado, y no de las probabilidades reales, hecho este último que puede resultar poco o nada intuitivo. La valoración relativa como esperanza matemática permite una valoración sencilla una vez incorporada toda la información de mercado en esas probabilidades que hemos denominado implícitas y que en la terminología de la valoración relativa se denominan riesgo neutro o *Risk Neutral*.

De hecho, en el ejemplo vimos, de forma intuitiva, como se podía llegar a la valoración relativa mediante el uso de la esperanza matemática utilizando las probabilidades implícitas en las apuestas y no con las históricas que se utilizaban para la valoración absoluta.

La valoración relativa en su versión dinámica se instaló como paradigma de valoración de derivados a principios de la década de 1970 con la publicación los artículos de Black y Scholes (1973), por un lado, y de Merton (1973) por otro. En ambos artículos se detalla cómo se llega a una fórmula de valoración derivados a partir de la creación de una cartera que replica el pago del derivado considerado. Dicha cartera se ha de recomponer de forma dinámica. Todo esto partiendo de un modelo de evolución para el subyacente y de otros instrumentos ya dados en el mercado, como por ejemplo bonos sin riesgo.

En este punto cabe remarcar que, aunque no aparezca de forma explícita, en nuestro ejemplo también hay un modelo de evolución para el subyacente, esto es, para el resultado del evento deportivo que se puede entender como un árbol binomial tal y como se recoge en la figura siguiente.

Modelo Binomial de Evolución

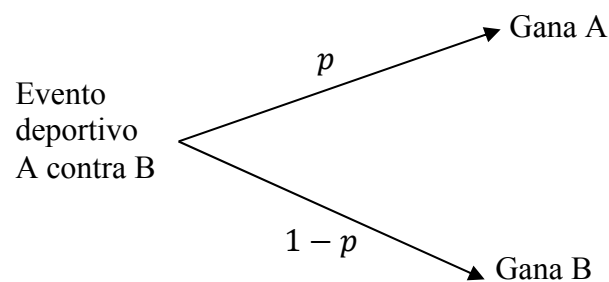


Figura 1. Representación binomial de la Tabla 1.

La diferencia entre el modelo del ejemplo representado en la Figura 1 con el propuesto por Black, Scholes y Merton es que el de estos autores es un modelo continuo, pero la idea y el objetivo final que hay detrás son los mismos.

Para finalizar esta introducción informal a la valoración relativa, pasamos a enumerar los posibles problemas que puede presentar, entre los que hay que destacar los siguientes:

- vi. Limitación para la valoración de derivados más complejos en función de las hipótesis de partida. Por ejemplo, la replicación dinámica implica que se ha de recomponer la cartera continuamente, hecho que en la práctica se aproxima recomponiendo la cartera varias veces al día. Pero si el derivado es más complejo la aproximación diaria a la continuidad puede no ser válida.
- vii. Capacidad de incorporar el máximo de información de mercado disponible. De hecho el modelo de Black Scholes garantiza que con él se valoran bien sólo tres instrumentos cotizados en el mercado: el propio subyacente, el bono libre de riesgo y la opción europea estándar del precio de ejercicio considerado.
- viii. Ocultación de la cartera de cobertura que hay por detrás. Debido a que la incorporación de la información de mercado se puede hacer mediante las probabilidades implícitas y ya no es necesario calcular la composición de la de forma explícita para obtener la valoración.
- ix. No facilita una relación entre probabilidades reales e implícitas en mercado.
- x. Si no es posible la eliminación total del riesgo ¿qué ocurre?, ¿qué probabilidades se utilizan para valorar?, o lo que es equivalente, ¿con qué instrumentos de mercado se crea la cartera de cobertura?

Una de estas limitaciones, la de no cotización de todos los instrumentos necesarios para la eliminación total del riesgo, la podemos trasladar al caso del ejemplo considerado hasta ahora. Sería cuando se dé la ausencia de alguna de las apuestas necesarias para cubrir los pagos de la Tabla 1. Es decir, imaginemos que sólo se puede apostar por la victoria de A, y no por la de B. De aquí surgen varias cuestiones, la primera ¿y si no se puede cubrir la apuesta por B, cómo se valora entonces?, esto se debe a que valorar es lo mismo que utilizar el precio de mercado de lo que se desea valorar, y en este caso el precio de mercado, la apuesta por B, no existe. Derivada de esta primera cuestión surgen otras, ¿utilizamos la probabilidad implícita de A y la real de B?, ¿cómo mezclarlas de forma coherente?, es decir, si queremos incorporar la información de mercado sobre la victoria de A hemos de utilizar su probabilidad implícita ¿pero de dónde obtendríamos la de B? En el caso de sólo dos posibilidades la cuestión no tiene

sentido puesto que la restricción de que las probabilidades sumen uno nos da la respuesta. Pero supongamos que hubiera tres posibilidades victoria de A, victoria de B o empate, y sólo es posible apostar por la victoria de A, ¿de dónde deduciríamos las otras dos probabilidades? En realidad sólo hay que deducir una puesto que de nuevo la restricción de que las probabilidades sumen uno nos daría la tercera. La estimación de probabilidades mediante las técnicas de inferencia estadística a partir de datos históricos nos proporcionará las tres probabilidades de este caso. Pero ¿no sería útil incorporar además la probabilidad de mercado de la victoria de A?, ¿no reduciría el riesgo la inclusión de dicha probabilidad de mercado?, Y si lo reduce, ¿cómo lo medimos?

Es en este punto dónde surge el último concepto del objeto de la tesis: la entropía. Para responder, entre otras, a estas cuestiones relativas a la valoración y cobertura de derivados de renta variable, propondremos su uso. Más concretamente, y debido a sus grandes implicaciones para la cobertura, se utilizará la entropía relativa.

El concepto de entropía surge por primera vez a mediados del siglo XIX. Originalmente es un concepto de la termodinámica, pero se ha adaptado a muchos campos de estudio, entre los que destaca la Teoría de la Información, Inferencia Estadística, Biología, y Análisis de Datos entre otros.

La definición de entropía que vamos a aplicar es la utilizada en Inferencia Estadística, siguiendo a Cover y Thomas (1991). En este campo la entropía cuantifica la incertidumbre de una variable aleatoria. En concreto, y como se detalla en el capítulo tercero de la presente tesis, se utilizará la metodología de entropía relativa mínima, de ahora en adelante denotada por el acrónimo ERM.

La metodología ERM fue introducida originalmente por Kullback y Liebler (1951), se basa en minimizar la entropía relativa, que se puede entender como una distancia, entre una distribución de probabilidad a priori y otra a posteriori, de modo que se satisfacen un número finito de restricciones sobre los momentos de la distribución a posteriori.

El concepto y la metodología basada en la Entropía, han sido aplicados en finanzas por varios autores desde mediados de los 90. Gulko (1995, 1996), utiliza la metodología basada en la entropía en la valoración de bonos y en la valoración de opciones de renta variable respectivamente. Buchen y Kelly (1996), utilizan en concreto la técnica de Distribución de Máxima Entropía, para estimar la distribución de probabilidad implícita en los precios de opciones. Posteriormente, Derman y Zou (1999), utilizan esta metodología para, a partir de la distribución de probabilidad histórica, más unas restricciones en los momentos obtener la nueva densidad de probabilidad teórica.

Avellaneda et al. (2001) también han utilizado esta técnica para la estimación de superficies de volatilidad y posteriormente para valoración y cobertura de derivados.

En esta tesis utilizaremos esta técnica de modo similar a la seguida por Avellaneda et al (2001), haciendo especial hincapié en las implicaciones de cobertura, que se derivan del análisis de sensibilidad. Además, la solución así obtenida al problema de valoración de derivados, tiene unas propiedades muy útiles desde el punto de vista práctico por sus implicaciones para la cobertura, tal y como se expone en Arrieta (2012) y se detalla en el capítulo quinto de la tesis.

Esta metodología permite estructurar la resolución del problema en una serie de etapas, módulos o pasos. Para visualizar mejor su funcionamiento, se puede realizar el esquema recogido en la Figura 1 y que se muestra a continuación.

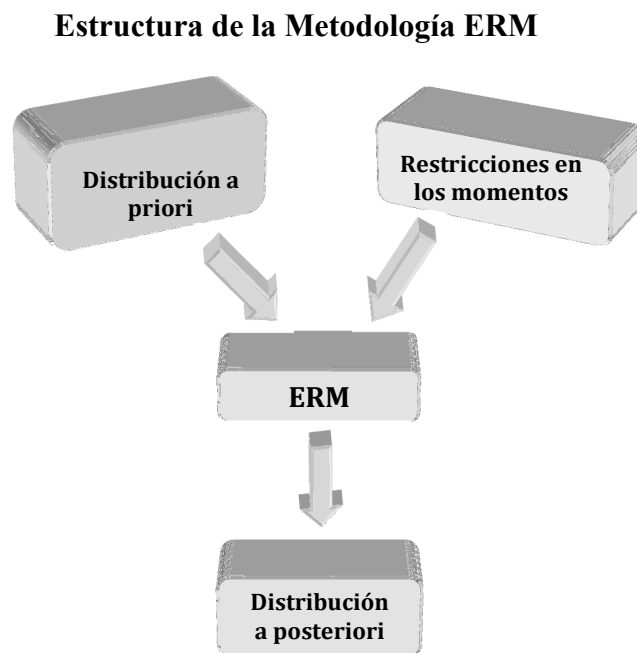


Figura 2: Elementos de la Metodología ERM

Una característica de los dos primeros módulos que componen la metodología ERM reflejados en el Figura 2, es que se obtienen independientemente para luego mezclarse mediante el modulo de ERM. Esta modularidad del funcionamiento es muy útil y proporciona gran robustez esta metodología para el uso que se le ha dado en esta tesis.

Otra característica de la ERM es la facilidad para interpretar cada uno de los módulos en los que se estructura. Para clarificar esto, podemos relacionar los módulos de la ERM de la Figura 2 con el ejemplo considerado hasta ahora, dando lugar a la tabla siguiente.

Interpretación de los elementos de la ERM

<i>Concepto Metodología ERM</i>	<i>Interpretación en el ejemplo</i>
Distribución de probabilidad a priori	Modelo real de evolución del subyacente: árbol binomial para el evento deportivo (Figura 1)
Restricciones en los momentos de la distribución a posteriori	Precios de mercado: apuestas cotizadas (Tabla 1)
Distribución a posteriori	Valorador <i>Risk-Neutral</i> : probabilidades implícitas en las apuestas (p y $1 - p$ implícitas en la Tabla 1)

Tabla 2. Relación Conceptual ERM - Ejemplo

Problema a resolver en la Tesis

Una vez hecha esta breve introducción a la valoración relativa de derivados y a la ERM, ya es posible plantear con más concreción el problema planteado y resuelto en la tesis. En ella se aborda la valoración y cobertura de un tipo de derivados exóticos de renta variable denominados *Cliquets*. Los *Cliquets* surgieron durante el último lustro del siglo XX y tuvieron mucho éxito durante la primera década del XXI, tal y como se recoge en Patel (2002) y en la introducción de Jeffery (2004).

Antes de continuar con los *Cliquets* vamos a definir una serie de conceptos que son necesarios para comprender la problemática que conllevan estos derivados exóticos, para ello nos basaremos de nuevo en Hull (2003).

En primer lugar, vamos a definir como derivado exótico todo aquel derivado que no cotiza en mercados organizados, por contraposición a derivado estándar que será aquel que cotiza en mercado organizado.

En segundo lugar vamos a enumerar y definir los instrumentos, derivados y no derivados, que cotizan en los mercados organizados de renta variable, son los siguientes:

- iv. Contado, es la denominación en el mercado del título de renta variable en sí mismo.
- v. Futuros: es un contrato o acuerdo que obliga a las partes contratantes a comprar o vender un número determinado de valores, títulos de renta variable, en una fecha futura y determinada y con un precio establecido de antemano
- vi. Opciones: son derivados que establecen en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender un activo subyacente a un precio predeterminado, denominado *strike* o precio de ejercicio, hasta una fecha concreta que es el vencimiento. Existen dos tipos de opción de compra o *Call* y opción de venta o *Put*

Por otra parte, los mercados no estándar o mercados OTC¹ por sus siglas en inglés, son a medida y por tanto pueden cotizar cualquier tipo de derivado que acuerden, las contrapartes contratantes.

Por seguir con la analogía del ejemplo, la apuesta que se desea cubrir cuyos flujos venían recogidos en la Tabla 1, y eran de 90 unidades monetarias en caso de ganar A y de 30 en caso de hacerlo B. Sería un derivado exótico puesto que en su conjunto no cotiza en el mercado organizado, que serían las casas de apuestas. Pero las apuestas individuales sobre A y B sí cotizan en el mercado organizado y por tanto sí serían por definición derivados estándar.

Es con los derivados exóticos donde surge la dificultad de aplicar la valoración relativa, puesto que encontrar el modo de expresar el derivado exótico como combinación de los instrumentos de mercado organizado puede ser una tarea nada trivial, como veremos en el caso que ocupa esta tesis y que se detalla en el quinto capítulo.

De hecho el problema de valorar derivados exóticos coherentemente con toda la información dada en mercado, esto es, con el precio de contado del subyacente, y con los precios de sus futuros y opciones, es uno de los grandes problemas de la valoración

¹ Over The Counter

relativa. Esta problemática se aborda con detalle en el segundo capítulo de la tesis llamado La Superficie de Volatilidad.

Pero volvamos a los derivados que nos interesan, los *Cliquets*. En primer lugar reseñar que sus subyacentes suelen ser índices de renta variable, destacando entre ellos el DJ Euro Stoxx 50. Éste es un índice ponderado por capitalización bursátil que es referencia de la bolsa en la Eurozona. Fue creado el 26 de febrero de 1998, y está compuesto por cincuenta compañías de doce países: Alemania, Austria, Bélgica, España, Finlandia, Francia, Grecia, Holanda, Irlanda, Italia, Luxemburgo y Portugal.

Una segunda característica de los *Cliquets* es que tienen la particularidad de que sus pagos dependen de la suma de las rentabilidades del subyacente en periodos disjuntos de tiempo. Los periodos disjuntos de tiempo son intervalos de tiempo consecutivos que no se solapan y cuya unión es la vida total del *Cliquet*.

Para ver en qué consisten las rentabilidades disjuntas, tomamos un ejemplo de la evolución del DJ Euro Stoxx 50 para los periodos que van desde Septiembre de 2010 a Septiembre de 2012 y que viene recogidos en la siguiente figura.

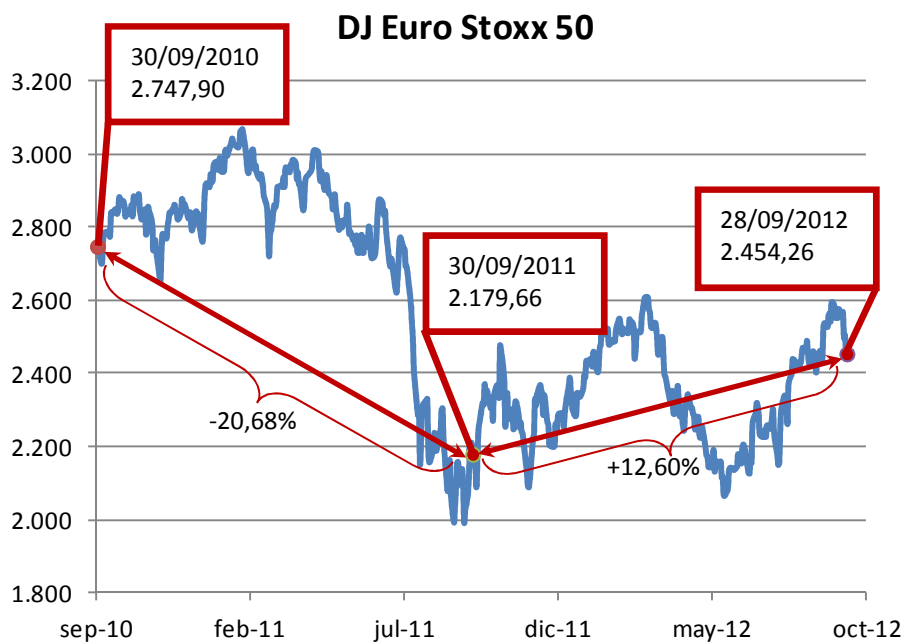


Figura 3: Evolución DJ Euro Stoxx 50 Sep-2010 a Sep-2012

El detalle de cálculo de la evolución de la Figura 3, viene recogido en la tabla siguiente:

<i>Periodo de cálculo</i>	<i>Rentabilidad</i>
Sep-2010 a Sep-2011	$\frac{2.179,66}{2.747,90} - 1 = -20,68\%$
Sep-2011 a Sep-2012	$\frac{2.454,26}{2.179,66} - 1 = 12,60\%$
Sep-2010 a Sep-2012	$\frac{2.454,26}{2.747,90} - 1 = -10,69\%$

Tabla 3. Cálculo de rentabilidades

¿Qué problema conlleva cubrir estas rentabilidades disjuntas?, en principio ninguno basta con comprar y vender el subyacente en las fechas fijadas para obtener las rentabilidades disjuntas.

Pero el *payoff* final de un *Cliquet* no es sólo la suma de estas rentabilidades disjuntas, sino que se obtiene teniendo en cuenta unos límites por arriba y por abajo a cada rentabilidad considerada. Estos límites se denominan *cap local* y *floor local* respectivamente. Una vez se tienen estas rentabilidades limitadas se suman y si dicha suma es positiva, ésta sería el pago del *Cliquet*. lo usual es que el *cap local* y el *floor local* sean iguales pero con el signo cambiado. La expresión general del *payoff* de un *Cliquet* es

$$P = N \cdot \max \left(C + \sum_{i=1}^n \max(\text{Floor}_i, \min(R_i, \text{Cap}_i)), \text{GlobalFloor} \right)$$

Siendo $R_i = \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1$ la rentabilidad simple obtenida de los precios del subyacente S_i y S_{i-1} correspondientes a los periodos $i-1$ e i . N denota el nominal de la opción, C es una constante, Floor_i y Cap_i denotan los límites inferior y superior a la rentabilidad para el periodo i -ésimo. Por último, la suma de estas rentabilidades tiene un límite inferior denotado por *GlobalFloor*. Este tipo de productos con varios niveles límite al alza, los *Caps*, y a la baja, los *Floors*, implican que los *payoffs* no son nunca demasiado extremos ni al alza ni a la baja, por lo que sus precios no son demasiado elevados.

Aunque esta expresión general resulte algo intimidatoria, veremos a través del ejemplo siguiente que la obtención del *payoff* de un *Cliquet* es sencillo. Supondremos que C y el *GlobalFloor* son nulos y que los *Caps* y *Floors* son constantes. Con los datos de la

Tabla 3 podemos calcular el pago de dos *Cliquets* uno para un *cap floor* del +10% y -10% respectivamente y otro para el +15% y el -5% para los datos de la Tabla 3

<i>Cap</i>	<i>Floor</i>	<i>Rent. con cap y floor periodo 1</i>	<i>Rent. con cap y floor periodo 2</i>	<i>Cliquet</i>
10%	-10%	-10%	+10%	0%
15%	-5%	-5%	12,60%	7,60%

Tabla 4. Ejemplos de *Cliquets*

¿Dónde reside la dificultad en la valoración y sobre todo la cobertura de los *Cliquets*? Sobre todo en la cobertura de lo que se denomina periodos *forward start*, esto es, de los periodos cuyo cómputo de la rentabilidad comienza en el futuro. Esto se debe a que para cubrir estos periodos se debería disponer de activos, en concreto opciones que comenzaran en el futuro cosa que no es cierta en los mercados organizados. Si esta última limitación no complicara suficientemente la cobertura, a esto se une la restricción de que la suma total sea positiva, esto es una opcionalidad sobre las opciones *forward start*. Además recordemos que la valoración y cobertura de opciones era de tipo dinámico lo que conlleva una gran dependencia de las hipótesis de partida. En resumen, el aspecto más importante para la valoración de las opciones *Cliquet* es la estimación de los precios de las opciones *forward start* implícitas en el producto. El segundo aspecto fundamental es la ponderación que de cada una de estas opciones *forward start* se hace. Esta ponderación está determinada por el nivel mínimo de la suma de las rentabilidades considerando los *caps* y *floors* locales, y que es la opcionalidad global del *Cliquet*.

La resolución de estos dos problemas sigue siendo un problema abierto que han intentado resolver varios autores de muy diversas maneras: Buetow (1999), Wilmott (2003), Forsyth et al. (2004), Eales y Tunaru (2004), Tor (2004), Den Iseger y Oldenkamp (2005), Lidebrandt (2007), Gaudenzi y Zanette (2008), Matosek (2008), Petrelli et al. (2008), Kilin (2009), Bevhand (2010) y Madan y Schoutens (2010).

Pero ninguna de las soluciones expuestas hasta ahora en la literatura financiera, atesora tantas propiedades, tanto teóricas como prácticas, como la solución propuesta en esta tesis. Para ello a la metodología ERM utilizada, se le añadirá algunos resultados de la metodología de cobertura media-varianza inicialmente propuesta por Föllmer y

Sondermann (1986), y posteriormente extendida por diversos autores como Duffie y Richardson (1991), Schweizer (1992, 1996), Schäl (1994), Gouriéroux et al. (1998), y Pham et al. (1998). Esta metodología media-varianza ha sido adaptada e implementada al método Monte Carlo por Potters et al. (2001), a la que han denominado técnica *Optimal Hedge Monte Carlo*.

Con estas herramientas se da una solución, que además se puede implementar en la práctica, para el problema de valoración y sobre todo, de cobertura de las opciones *Cliquet*.

Entre los logros más importantes contenidos en la presente tesis, cabe destacar los siguientes:

- iv. Valoración coherente con los instrumentos de mercado como consecuencia de ser un método de valoración riesgo neutro. Más concretamente, es un valorador por interpolación sobre los instrumentos de mercado.
- v. Determinación de carteras de cobertura. Al ser un valorador por interpolación sobre los instrumentos de mercado y debido a las propiedades de la metodología basada en ERM, se obtendrá la composición de la cartera de cobertura estática del derivado objetivo de la valoración.
- vi. Bondad de las carteras de cobertura y cuantificación del riesgo. De nuevo gracias a las propiedades de cobertura la metodología ERM, es posible medir el error de cobertura y determinar, por tanto, la bondad de la misma.

Todo estos logros y algunos más, relacionados con la gestión de riesgos, tal y como se verá en los ejemplos prácticos, permitirán concluir que la metodología diseñada y propuesta en la tesis para resolver el problema de la valoración y cobertura de *Cliquets*, cumple perfectamente ambos objetivos. Y además permitirá un análisis del riesgo asociado a la cobertura de los *Cliquets* de un modo pormenorizado y detallado.

Resumen de los capítulos de la tesis

Para finalizar la introducción, se resume a continuación el contenido de los capítulos en los que se ha estructurado la tesis.

En el primer capítulo se definen y establecen los conceptos básicos que se van a tratar. Principalmente la valoración financiera y, en especial, los instrumentos financieros derivados. También en este primer capítulo, se resume los trabajos seminales de Black y Scholes, por un lado y de Merton por otro, ambos publicados en 1973. En ellos se demuestra cómo se debían valorar y, lo que es más importante, cubrir, los derivados emitidos sobre activos de renta variable. La estructura de valoración y cobertura propuesta por Black, Scholes y Merton, de ahora en adelante BSM, fue adoptada por la totalidad de la industria financiera.

Esta total aceptación del paradigma de valoración y cobertura BSM, finaliza con el crash bursátil de 1987. En él se confirmó como totalmente erróneo, asumir que el precio del subyacente² seguía una distribución log-normal³. Esta hipótesis era rechazada sistemáticamente por los datos empíricos.

En el segundo capítulo se describe la solución adoptada por los agentes financieros que participan en los mercados de opciones: ajustar los precios de las opciones a través del único parámetro no observable del modelo BSM: la volatilidad. Este hecho da lugar a la aparición de la denominada superficie de volatilidad, que consiste en que para cada vencimiento y cada precio de ejercicio se asigna una volatilidad, llamada volatilidad implícita. El capítulo finaliza analizando someramente las soluciones a la problemática que plantea la aparición de la superficie de volatilidad.

El tercer capítulo describe y analiza en detalle la solución al problema presentado en el capítulo anterior, mediante la metodología basada en el concepto de Entropía. Esta técnica, ha sido utilizada para la valoración de derivados principalmente por Gulko (1995, 1996), por Avellaneda⁴ et al. (2001) y por Derman y Zou (1999), aunque estos

² Es el activo financiero sobre el que está emitido el derivado considerado.

³ Una de las hipótesis fundamentales del modelo BSM.

⁴ Denominándola *Weighed Monte Carlo*

últimos con otro objetivo. El capítulo finaliza haciendo especial hincapié en las implicaciones teóricas que tiene la solución planteada sobre la cobertura de opciones

El cuarto capítulo se centra en un punto clave de esta metodología basada en la entropía: el modelo a priori. En este capítulo se enumeran y describen las características principales de las series financieras temporales de activos de renta variable. Asimismo se describe la familia de modelos econométricos, de tipo GARCH, para la evolución del subyacente que será utilizada en los siguientes capítulos de la tesis. También se propondrá una metodología para la estimación y selección dentro de la familia de modelos econométricos GARCH utilizada.

En el capítulo quinto, se analizan las propiedades de la metodología basada en Entropía como estimador de cobertura estática y como medidor de la bondad de ésta en un caso práctico concreto que es el objetivo de esta tesis. A estos resultados basados en Entropía se les añadirá algunos resultados de la metodología de cobertura media-varianza inicialmente propuesta por Föllmer y Sondermann (1986), y posteriormente extendida por diversos autores. Esta metodología media-varianza ha sido adaptada e implementada al método Monte Carlo por Potters, Bouchad y Sestovic (2001), a la que han denominado técnica *Optimal Hedge Monte Carlo*. Con estas herramientas se da una solución, que además se puede implementar en la práctica, para el problema de valoración y sobre todo, de cobertura de las opciones *Cliquet*.

El capítulo final de la tesis recoge, como no puede ser de otro modo, las conclusiones y las posibles futuras líneas de investigación que esta nueva metodología de valoración y cobertura de derivados de renta variable abre para el futuro.

Para concluir la introducción quisiera comentar que, en aras de una mejor lectura, los detalles más técnicos así como los algoritmos computacionales utilizados se incluyen en los diversos Anexos. El lenguaje de programación y programa de cálculo numérico utilizado ha sido MATLAB®. Finalmente, respecto de la las tablas y figuras señalar que, aquellas que no sean de elaboración propia llevan indicada la fuente en la leyenda.

1 Valoración financiera e instrumentos derivados

En este primer capítulo se establecen las definiciones de los conceptos básicos que se van a tratar a lo largo de la tesis. Para ello, se hace una breve introducción a la valoración financiera y a los instrumentos financieros derivados. El objetivo es delimitar precisa y unívocamente el marco general en el que se desarrolla la tesis.

1.1 Definiciones previas

Un Activo según la R.A.E. es un bien o derecho con valor monetario que es propiedad de una empresa, institución o individuo, y que se reflejan en su contabilidad. Los instrumentos o activos financieros son aquellos activos de naturaleza financiera, esto es, tienen como fin la inversión o la financiación.

Más concretamente vamos a definir activo financiero como aquel bien o derecho que genera o puede generar una serie flujos de caja. Estos flujos son capitales financieros, y un capital financiero⁵ es un vector bidimensional (C, t) cuya primera componente se denomina cuantía y está medida en unidades monetarias, y la segunda se denomina vencimiento y está medida en unidades temporales, es decir, es una fecha o un momento del tiempo concreto. Al conjunto de los capitales financieros asociados a un activo financiero los denominamos *cashflows*⁶ o flujos de caja.

La siguiente definición es la de *Payoff* de un instrumento financiero⁷. El *Payoff* es la forma de calcular los *cashflows* de dicho instrumento, ya sea una función matemática o una simple enumeración de *cashflows*.

El próximo concepto que vamos a delimitar es el de instrumento financiero derivado o simplemente derivado. Un instrumento financiero derivado es aquel cuyo *payoff* es dependiente del precio de otro activo que se denomina subyacente del derivado. Es importante remarcar que el subyacente puede ser un activo financiero, o no, pudiendo incluso ser una cuantía de cualquier índole o naturaleza. Un caso paradigmático de

⁵ Definición de la matemática financiera clásica

⁶ El mundo financiero es mayoritariamente de habla inglesa, por ello muchos términos que son utilizados en la tesis están en este idioma. Como signo distintivo todos ellos están en letra cursiva.

⁷ Los términos instrumento financiero o activo financiero son utilizados como sinónimos a lo largo de la tesis.

subyacentes no financieros sería el de los denominados *weather derivatives*⁸ cuyos subyacentes se obtienen mediante cálculos sobre temperaturas, precipitaciones en forma de lluvia o nieve, etc.

Por último, vamos a fijar los conceptos de precio y valor de un activo financiero. Precio denotará la cuantía que se ha de pagar por un activo, y valor será la cuantía obtenida a partir los flujos de caja del activo considerado, generalmente mediante una aplicación del espacio de los flujos de caja en \mathbb{R} .

1.2 Valoración clásica de derivados

El principio fundamental⁹ en la valoración financiera es que los activos financieros se valoran por los flujos de caja, tanto ciertos como potenciales, que llevan asociados.

Tal y como se expuso en la introducción, existen dos métodos de valoración:

- i. Valoración Absoluta
- ii. Valoración Relativa

Recordemos también, que es la valoración relativa la que se aplica en el campo de los derivados por lo que expondremos brevemente lo explicado en la introducción. La valoración relativa se basa en la ley del precio único o principio de ausencia de oportunidad de arbitraje: dos activos cualesquiera con flujos de caja idénticos bajo cualquier circunstancia deben de tener el mismo precio.

La idea es comparar los flujos del activo a valorar con los de otros activos cuyos precios sean conocidos. Para ello, se forma una cartera replicante, que es un conjunto de activos más líquidos que globalmente tiene los mismos flujos de caja que el activo que se desea valorar bajo cualquier circunstancia. Es aquí donde entra la modelización, que es utilizada para comprobar que tanto la cartera réplica como el activo objeto de la valoración efectivamente tienen los mismos flujos de caja bajo cualquier circunstancia. Para comprobar esta igualdad en los *payoffs*:

- i. Hay que especificar el concepto de “bajo cualquier circunstancia”
- ii. Hay que encontrar la estrategia para crear la cartera réplica

⁸ http://en.wikipedia.org/wiki/Weather_derivative

⁹ Como se deduce del concepto de valor enunciado en el apartado anterior.

Las formas de replicación son dos:

1. Estática: la composición de la cartera réplica no varía a lo largo del período de replicación.
2. Dinámica: la composición de la cartera réplica varía a lo largo del período de replicación, pudiendo incluso ser dichos ajustes realizados en tiempo continuo.

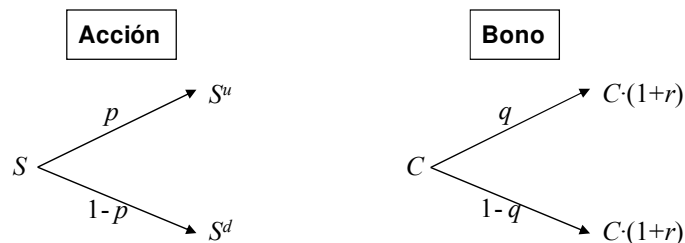
Toda la valoración moderna de derivados se realiza mediante valoración relativa, y éste será el contexto en el que se realiza la tesis.

1.2.1 Introducción: ejemplo sencillo de valoración relativa

La valoración clásica de derivados se basa en la valoración relativa. Veamos un ejemplo sencillo, pero muy ilustrativo de cada uno de los conceptos que definen la valoración clásica de derivados.

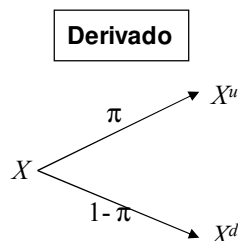
Modelo de mercado

El mercado está compuesto por dos activos básicos: una acción y un bono cupón cero, cuyo modelo de evolución es el siguiente



Derivado

Teniendo estos dos activos, si existe un derecho contingente, esto es, un derivado emitido sobre la acción



Mediante la creación de una cartera de cobertura se puede replicar el pago de este derivado. La idea básica es que por cada movimiento mínimo el riesgo de cubrir un derivado es nulo, y por tanto ¡su precio X es determinista!

Cartera Réplica

Si formamos una cartera φ con Δ_0 acciones y β_0 bonos de nominal unitario, e imponemos que replique el pago del derivado, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Delta_0 S^u + \beta_0(1+r) = X^u$$

$$\Delta_0 S^d + \beta_0(1+r) = X^d$$

Y la solución al sistema es, siempre que $S^u \neq S^d$

$$\Delta_0 = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d}$$

$$\beta_0 = \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(S^u - S^d)(1+r)}$$

Es decir, el precio de la cartera réplica, y por tanto del derivado se obtendría de:

$$X = \varphi(\Delta_0, \beta_0) = \frac{X^u - X^d}{S^u - S^d} S + \frac{X^d S^u - X^u S^d}{(S^u - S^d)(1+r)}$$

Resumen de ideas, definiciones y conceptos

- i. Activos de mercado bono y acción, cuyos precios, S y C , son dados.
- ii. Hipótesis de evolución de los activos de mercado, esto es, modelización.
- iii. Surge un nuevo activo, cuyo *payoff* depende de uno de los activos de mercado, en concreto la acción. El objetivo es determinar su precio X
- iv. Para ello se crea una cartera réplica, su valor actual en el mercado por ausencia de oportunidad de arbitraje ha de ser igual al del derivado.

Conclusiones y generalizaciones

Este ejemplo, aunque sencillo, da todas las claves de la valoración relativa aplicada a derivados financieros. El modelo de evolución del subyacente puede parecer una simplificación excesiva, pero es un punto de partida mucho más general de lo que parece, puesto que nada evita que extendamos el modelo a tantos periodos como se desee alcanzando una infinidad numerable de estados.

1.2.2 Metodología Black-Scholes-Merton

Una vez visto el ejemplo anterior, podemos analizar la metodología BSM¹⁰. De nuevo, el punto de partida es la modelización del mercado, y como en el caso anterior, está compuesto por dos activos básicos: acciones y bonos cupón cero. Los instrumentos derivados que se desea valorar están emitidos sobre el activo de renta variable, esto es, la acción.

Modelo de mercado

El subyacente es modelizado mediante la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1.1)$$

Donde S denota el precio del activo, μ es la tendencia instantánea, dt es la variación infinitesimal de tiempo, σ la volatilidad instantánea y dz denota los incrementos de un movimiento browniano, esto es

$$dz \underset{i.i.d.}{\sim} N(0, +\sqrt{dt})$$

De (1.1) se deduce que el precio sigue una ley log-normal Hull (2003) o Primbs (2010). Por otra parte, la evolución de B , precio del título de renta fija, se modeliza mediante la Ecuación Diferencial Ordinaria

$$\frac{dB}{B} = r dt$$

Donde r denota el tipo de interés libre de riesgo continuo.

Para completar la modelización del mercado se hacen las hipótesis siguientes:

- i. En los activos se puede estar tanto corto como largo;
- ii. No hay costes de transacción;
- iii. Los activos son infinitamente divisibles;
- iv. No hay oportunidades de arbitraje;
- v. El *trading*¹¹ se realiza en tiempo continuo;
- vi. El tipo de interés continuo libre de riesgo es constante e igual a r para todos los vencimientos;
- vii. No hay pagos de dividendos;

¹⁰ Acrónimo que denota el modelo y/o la metodología Black-Scholes-Merton.

¹¹ Término utilizado para denotar la compra-venta de activos, en este caso financieros.

Derivado

Partiendo de este mercado con dos activos y con todas las hipótesis anteriores, ya es posible valorar un derivado emitido sobre la acción. Sea f la función precio de un derivado emitido sobre S , f ha de ser una función de S y t , y aplicando a f el lema de Itô¹² se obtiene

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Y su respectiva versión discreta

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (1.2)$$

Cartera Réplica

El siguiente paso es crear una cartera Π compuesta por un derivado vendido y una cantidad de activo igual a la sensibilidad local del derivado respecto del subyacente

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (1.3)$$

y su variación

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (1.4)$$

ΔS se obtiene discretizando (1.1) y Δf viene dado por (1.2), por lo que substituyendo en (1.4) y simplificando se llega a

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 \right) \Delta t \quad (1.5)$$

Al ser Π una cartera sin riesgo por ausencia de oportunidad de arbitraje su rentabilidad, es decir su variación instantánea, debe de ser igual a la del activo sin riesgo

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

Π viene dado por (1.3) y $\Delta \Pi$ por (1.5), por lo que

$$- \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 \right) \Delta t = r \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

¹² cuya derivación se puede consultar en Hull (2003) o Primbs (2010)

Dando lugar a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S)^2 = rf \quad (1.6)$$

Ésta es la Ecuación en Derivadas Parciales BSM, y es la que ha de verificar cualquier derivado de ejercicio europeo emitido sobre S bajo las hipótesis i. a vii detalladas anteriormente. Para obtener la de un derivado concreto se ha imponer como condición inicial ó de contorno, la función *payoff* del derivado a vencimiento.

La solución de (1.6) viene dada por

$$f(S, \tau) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma \sqrt{\tau} x \right] \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Siendo τ el tiempo a vencimiento, S_0 el valor en el momento de la valoración del subyacente y f el *payoff* concreto a valorar.

Ejemplos e inclusión de dividendos

Los primeros derivados valorados con esta metodología son las *Calls* y *Puts* de ejercicio europeo, cuyos *payoffs* vienen dados por

$$\begin{aligned} f_{call}(S, T) &= \max[S - K, 0] \\ f_{put}(S, T) &= \max[K - S, 0] \end{aligned}$$

Siendo K el precio de ejercicio o *strike*, y T el vencimiento.

Para estos derivados la resolución de (1.6) da lugar a la fórmula de valoración BSM

$$V = e^{-r\tau} \phi \left(FN \left(\phi(d + \sigma\sqrt{\tau}) \right) - KN(\phi d) \right) \quad (1.7)$$

Donde V denota el valor teórico de la opción, ϕ es una variable indicador con los valores 1 y -1 para *call* y *put* respectivamente, τ denota el tiempo a vencimiento, F es el precio *forward* del activo al vencimiento de la opción y $N(z)$ denota la ley de distribución gaussiana¹³ estándar, y la constate d se obtiene de

$$d = \frac{\log \frac{F}{K}}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2} \sigma\sqrt{\tau}$$

Por otra parte, el precio *forward* se obtiene de $F = S_0 \exp(r\tau)$.

¹³ Usualmente conocida como normal estándar.

Incluir el pago de dividendo es directo a través del precio *forward*, basta incluir la tasa de dividendo continuo en el cálculo, esto es

$$F = S_0 \exp((r - q)\tau)$$

El valor de q se obtiene de

$$q = -\frac{1}{\tau} \log\left(1 - \frac{VAN(D)}{S_0}\right)$$

Dónde $VAN(D)$ denota el valor actual neto de los pagos de dividendo asociados al activo subyacente durante la vida del derivado.

Implementación práctica de la metodología BSM: la cobertura delta

La gran ventaja de la estructura de valoración BSM es que explicita una forma de eliminación del riesgo en las posiciones de derivados mediante la denominada cobertura delta. Ésta consiste en que para cada derivado vendido su riesgo instantáneo se elimina si incluimos una cantidad de subyacente igual a Δ siendo

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial V}{\partial S}$$

Siendo V la función valor teórico de un derivado emitido sobre S . Por lo que un derivado equivale a una cartera compuesta por efectivo y Δ unidades de subyacente, cantidad esta última que es denominada delta o ratio de cobertura. Hay que destacar que la cantidad delta ha de ser reajustada en tiempo continuo para cada cambio de S siempre que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \neq 0$$

En resumen, un derivado es *simplemente* una cartera cuya proporción de subyacente ha de reajustarse continuamente. La implementación práctica de la cobertura delta es sencilla: basta con ajustar la cantidad de subyacente en cartera de acuerdo a la Δ de forma continua hasta el vencimiento del derivado. Pero aunque este procedimiento es sencillo, es suficiente con poder comprar y/o vender el subyacente, tiene implícito la continuidad, lo cual no es tan obvio que se pueda lograr.

Para finalizar esta somera introducción a la implementación práctica, hay que destacar que todos los riesgos asociados a una posición en derivados se miden a través del análisis de las derivadas parciales de V respecto de las variables o parámetros utilizados.

Todas estas sensibilidades con conocidas en el mundo de los derivados como griegas. Las variables son S y τ , precio del subyacente y tiempo a vencimiento respectivamente. El parámetro más importante, ya que no es un dato dado a priori, es la volatilidad del subyacente σ . El resto de parámetros r , q , K , T o bien son datos implícitos en el mercado, como los tipos de interés o los dividendos, o están fijados en el contrato de la opción como el precio de ejercicio K o la fecha de vencimiento T .

La delta y la gamma ya las hemos introducido brevemente, la theta es la variación de V ante cambios en el tiempo a vencimiento τ . Y la vega es la correspondiente derivada respecto de σ .

A continuación detallamos las principales griegas, así como sus nombres y las unidades en las que suelen expresarse

<i>Nombre</i>	<i>Expresión</i>	<i>Unidades</i>
<i>Delta</i>	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	Número de subyacentes Unidades monetarias
<i>Gamma</i>	$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	Número de subyacentes Unidades monetarias
<i>Theta</i>	$\theta = \frac{\partial V}{\partial \tau}$	Unidades monetarias
<i>Vega</i>	$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	Unidades monetarias

Tabla 3. Principales Griegas

Metodología BSM y la paradoja de Hakansson

Si, como acabamos de ver, la cobertura delta es factible, entonces se produce la paradoja descrita por Hakansson (1979). Ésta se resume en que si todas las hipótesis de la estructura de valoración BSM se cumplen, entonces los derivados son activos redundantes puesto que pueden ser replicados a través de posiciones en el subyacente ¡y no tiene sentido su existencia!

1.2.3 Valoración Riesgo Neutro

En esta sección se resumen brevemente las conclusiones más relevantes de los trabajos de Harrison y Kreps (1979) y de Harrison y Pliska (1981, 1983). Estos trabajos fueron los primeros en analizar rigurosamente la valoración de derechos contingentes¹⁴, por ausencia de oportunidad de arbitraje en tiempo continuo. En ellos, caracterizaron la Teoría de Valoración por Ausencia de Oportunidad de Arbitraje vía martingalas, cuyos puntos clave son

- i. Un mercado está libre de arbitraje si y sólo si existe alguna medida martingala
- ii. Un mercado es completo si y sólo si la medida martingala es única
- iii. En un mercado libre de arbitraje, no necesariamente completo, el valor de cualquier derecho contingente está dado unívocamente por el precio de la estrategia réplica asociada o por la esperanza riesgo neutro descontada del *payoff* asociado al derecho contingente bajo cualquiera de las medidas martingala equivalentes

Esta teoría permite valorar activos financieros derivados mediante esperanzas de procesos estocásticos que son martingala, dando lugar a la denominada Valoración mediante Martingalas o Valoración Riesgo Neutro, conocidos como *Martingale Pricing* ó *Risk Neutral Pricing* en la literatura anglosajona.

El hecho de que la Valoración Riesgo Neutro se base en la obtención de leyes de probabilidad riesgo neutro y el uso del operador esperanza como valorador hace de ella una herramienta muy útil en la práctica, puesto que muchas veces es mucho más sencillo obtener una esperanza que resolver la ecuación en derivadas parciales correspondiente.

Por ejemplo, la fórmula de valoración BSM dada por (1.7), se obtiene mediante Valoración Riesgo Neutro como la esperanza descontada de los *payoffs*

$$f_{call}(S, T) = \max[S - K, 0]$$

$$f_{put}(S, T) = \max[K - S, 0]$$

¹⁴ Activo derivado en términos más abstractos.

Respecto de la medida de probabilidad riesgo neutro sobre S . Dicha medida viene determinada por la E.D.E.

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dz$$

Que es igual a la dada por (1.1) pero imponiendo la condición riesgo neutro, i. e. $\mu = r$, lo que hace que su solución sea

$$S_T = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} X \right]$$

Donde X denota una ley gaussiana estándar.

Por tano, la esperanza descontada de un *payoff* genérico $f(S, T)$ vendrá dado por

$$E[e^{-r\tau} f(S, T)] = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} x \right] \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx$$

Que coincide, como no podía ser de otra manera, con la solución dada a (1.6), y que por tanto, para el caso de los *payoffs* de la *call* y *put* estándar coincide con la fórmula de valoración BSM dada por (1.7).

2 La Superficie de Volatilidad

Hasta el *crash* de 1987 en las bolsas más importantes del mundo, la metodología BSM era aceptada y aplicada mayoritariamente por la industria financiera. Esto se debía a que explicaba cómo eliminar el riesgo asociado a las posiciones tomadas en derivados a través de la cobertura delta mencionada en el capítulo anterior.

El lunes 19 de Octubre de 1987 el índice *Dow Jones Industrial Average* tuvo una rentabilidad negativa del 22.61%¹⁵, cuya probabilidad de ocurrencia según una ley gaussiana es inferior a una millonésima, es decir una vez cada cuatro mil años. Esto evidenciaba que la hipótesis de modelización para la evolución del subyacente¹⁶ era, al menos, cuestionable. Como la metodología BSM era el estándar de mercado, y como en sus fórmulas de valoración el único parámetro libre es la volatilidad, lo que ocurrió es que se corrigió el precio de las opciones a través de este parámetro. Esto dio lugar a que cada nivel de *strike* o precio de ejercicio lleva asociada una volatilidad distinta.

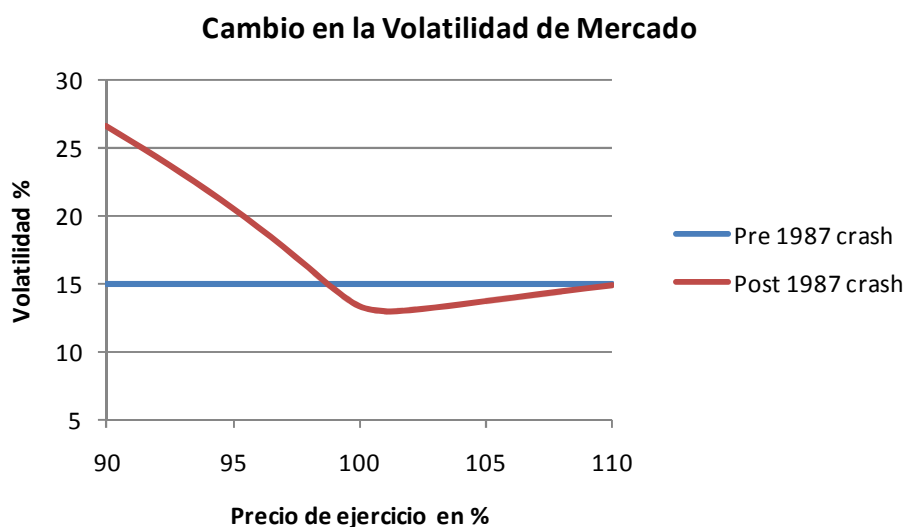


Figura 3: Volatilidad de Mercado

Esta curva representada en la Figura 3 se denomina *smile* o *smirk* de volatilidad, y se produce para cada uno de los vencimientos de mercado del subyacente considerado. La unión de todos los *smiles* da lugar a una superficie, ésta es la que definimos como superficie de volatilidad del subyacente considerado.

¹⁵ Cayó 508 puntos para situarse en 1738.74

¹⁶ El precio sigue una ley log-normal, esto es, la rentabilidad continua sigue una ley Gaussiana o normal.

2.1 Volatilidad implícita

La volatilidad implícita, que denotaremos por Σ , se define como

$$V_{BSM}(\Sigma, \Theta) = V_{MARKET}$$

Donde $V_{BSM}(\Sigma, \Theta)$ es la fórmula de valoración del modelo BSM, Σ denota el parámetro de volatilidad y Θ el resto de parámetros¹⁷, por último V_{MARKET} denota el precio al que cotiza el derivado en el mercado.

Por otra parte la definición de superficie de volatilidad es:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+: (K, T) \rightarrow \Sigma(K, T)$$

Donde K es el precio de ejercicio y T el tiempo a vencimiento en años, $\Sigma(K, T)$ denotará la volatilidad implícita de mercado.

2.2 Causas de la aparición de la Superficie de Volatilidad

Aunque, como hemos analizado al comienzo del capítulo, la causa de la aparición de la superficie de volatilidad se debió principalmente a la constatación del error de modelización del subyacente, es posible distinguir dos grandes grupos de causas: las estructurales y las psicológicas.

Las casusas estructurales son aquellas ligadas al error o al incumplimiento de alguna o algunas de las hipótesis de la metodología BSM, y que han sido enumeradas en la sección 1.2.2 del capítulo anterior. Entre las casusas estructurales destacan las siguientes:

- i. Modelo de evolución de la rentabilidad continua del subyacente no gaussiana o lo que es equivalente hipótesis de que la evolución del precio sigue una ley log-normal. Ésta es la hipótesis dada por la ecuación (1.1) e implica que la ley gaussiana es un buen modelo para la rentabilidad continua del subyacente, hipótesis muy frecuentemente rechazada por los datos empíricos. Para subsanar este defecto se han propuesto diversos modelos que substituyen al dado por la ecuación (1.1), como por ejemplo volatilidad local, volatilidad estocástica, procesos con saltos, etc. Los más importantes

¹⁷ observables en mercado: tipo de interés, tasa de dividendo, precio de ejercicio, valor de contado del subyacente y tiempo a vencimiento.

son analizados más adelante en la tesis. Otro fenómeno muy común en la evolución real de los subyacentes financieros, y que también pone en duda la validez del modelo de evolución, es el denominado *leverage effect* o efecto apalancamiento, esto es, la asimetría entre rentabilidades positivas y negativas. Y como es bien sabido la ley gaussiana es simétrica e incapaz de reflejar dicho efecto.

- ii. Imposibilidad de cobertura en tiempo continuo, una de las claves para conseguir la réplica sin riesgo era la posibilidad de cobertura en tiempo continuo por lo que si esto no es alcanzable, existe un riesgo que el vendedor de la opción añadirá al precio de la misma, y por tanto modificará la volatilidad.
- iii. Costes de transacción: horquillas *bid-ask*¹⁸, tipos de interés distintos según sea para financiación o para inversión, *repo rates*, etc. La aparición de diversos costes de transacción hace que la cobertura sin riesgo no sea alcanzable y al igual que el caso anterior esto se traduce en modificaciones en el precio al que se cotizan las opciones y por tanto de su volatilidad.

Psicológicas, esto es, todas aquellas causas o motivos que influyen en el comportamiento de los agentes participantes en el mercado. Entre ellas cabe destacar las siguientes:

- i. Protección ante caídas y/o subidas de precios, las opciones puede ser utilizadas como seguros que garantizan precios mínimos/máximos para un subyacente. Y al igual que ocurre con los seguros, su demanda es mayor en momentos de incertidumbre lo que causa mayores precios en las opciones.
- ii. Expectativas de cambio en volatilidad, los agentes participantes en mercado saben que la volatilidad no es constante a lo largo del tiempo. Por ejemplo, las empresas en fechas cercanas a anuncios sobre sus beneficios suelen estar más volátiles que en circunstancias normales, por lo que unos días antes de eventos de este tipo los vendedores de opciones realizan ajustes en las volatilidades cotizadas para cubrirse el posible riesgo de noticias inesperadas que alteren la volatilidad de dichas empresas.

¹⁸ Diferencia entre las cotizaciones de compra y venta de un determinado activo.

- iii. Niveles de soporte y/o resistencia en determinados *strikes*, las opciones también pueden ser utilizadas como inversión apalancada¹⁹ en los subyacentes sobre los que están emitidas, y por tanto los inversores en tendencia pueden utilizarlos en lugar de comprar o vender el propio subyacente, por lo que determinados *strikes* pueden tener una demanda mayor al tratarse de precios de referencia en análisis técnico o niveles psicológicos.
- iv. Demanda de productos estructurados de coste cero, otra forma de que se vea alterada la demanda de opciones es la preferencia de los inversores por determinadas estrategias, muchas de ellas de coste cero. Por ejemplo la compra de una *call* y venta una *put* del mismo vencimiento pero con *strikes Out the Money*²⁰ hace que las opciones con esos *strikes* estén ligados y por tanto sus volatilidades se alteren a la vez.

2.2.1 Causas principales

Error de modelización del subyacente

Las distribuciones empíricas de la rentabilidad continua de activos financieros de renta variable suelen ser leptocúrticas

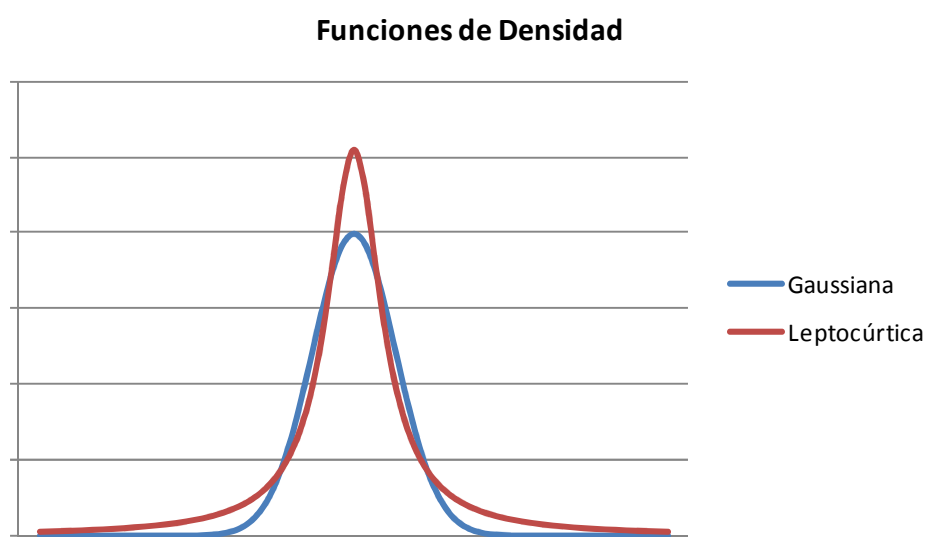


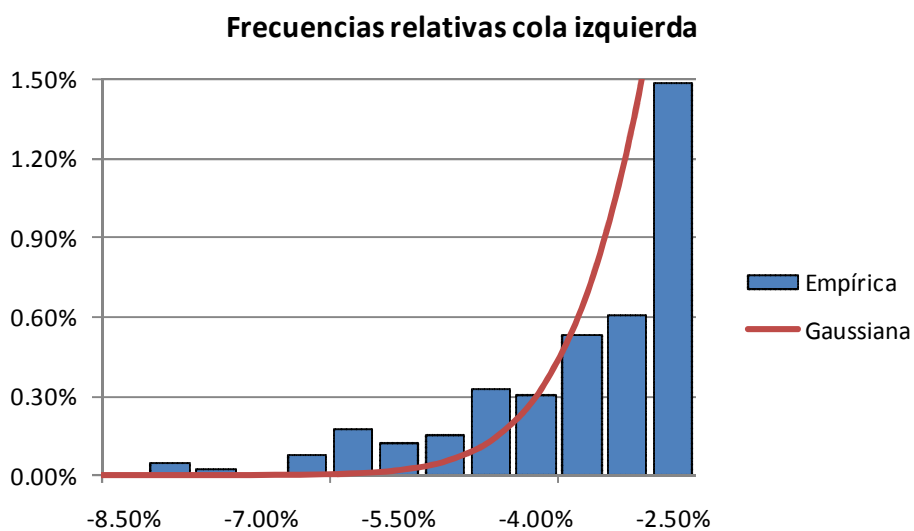
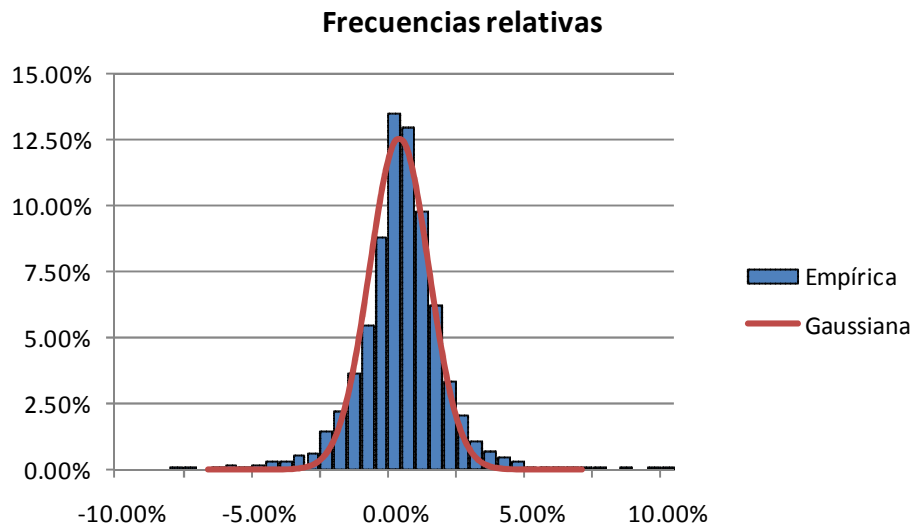
Figura 4: Distribuciones Gaussiana y Leptocúrtica

¹⁹ Debido a que en general la prima de una opción es mucho menor que el valor de su subyacente.

²⁰ Término que indica que el valor de ejercicio en el momento de la compra es cero.

Como vemos en la Figura 4, una característica de las distribuciones leptocúrticas es que la probabilidad de eventos extremos es superior a la equivalente gaussiana.

Como ejemplo, vamos a analizar la distribución empírica de las rentabilidades continuas diarias del índice Dow Jones Euro Stoxx 50 para el período 2000 – 2011. El histograma de dichas rentabilidades será comparado con su distribución teórica gaussiana.



Figuras 5 y 6: Distribuciones Frecuencias Relativas y Detalle Cola izquierda

En las Figuras 5 y 6 se aprecia muy claramente un hecho muy importante: la infraestimación de probabilidades de ejercicio. Por ejemplo, para un nivel del -4.50% la probabilidad asignada por la ley gaussiana es del 0.15% siendo la frecuencia que

realmente se ha dado del 0.33%, lo que nos indica a grosso modo una infraestimación de la probabilidad de ejercicio de más del 50% con todo lo que esto implica para la valoración de derivados asociadas a dicho nivel de *strike*. Por tanto si el precio de un derivado depende de la probabilidad de ejercicio es obvio que los precios dados por el modelo BSM, que supone que la rentabilidad continua del subyacente sigue una ley gaussiana, infravalora sistemáticamente las opciones muy alejadas del nivel de precio actual.

Por ello, los operadores de mercado ajustan al alza las volatilidades de las opciones cuyos precios de ejercicio están alejados del precio de contado del subyacente. Esto es así porque el único grado de libertad de la fórmula BSM es la volatilidad y al aumentarla incrementan el precio del derivado considerado.

Protección: cobertura de riesgos

Precio y volatilidad en el modelo BSM son lo *mismo*, por lo que volatilidades altas pueden ser causadas por demandas elevadas. Puesto que mayor demanda de las opciones como cobertura de los eventos arriesgados implica mayor precio esto se traduce en mayores volatilidades para las opciones que cubren dichos riesgos.

Es posible analizar, en función del tipo de subyacente, cuáles son los eventos que los agentes de mercados están más interesados en cubrir:

- i. **Materias primas:** subidas de precio
- ii. **Renta variable:** caídas de precio
- iii. **Tipo de cambio:** tanto subidas como bajadas

Hay claros ejemplos para cada uno de estos casos. En materias primas, una compañía aérea tiene un riesgo si sube el precio del petróleo y podría mitigar o reducir este riesgo mediante la compra de opciones *call*.

En el caso de los mercados de renta variable un gestor de carteras tiene riesgo de que bajen los precios de las acciones que componen su cartera. Para ajustar o reducir este riesgo puede adquirir un conjunto de *puts* que le garanticen un precio mínimo para su cartera.

Por último, respecto de los mercados de tipo de cambio, un importador de un bien denominado en otra divisa está claramente expuesto al riesgo de subidas de la divisa en la que paga, por lo que estaría interesado en *calls*. A la inversa ocurriría con un exportador de un bien que está denominada en otra divisa, si baja el tipo de cambio

recibe menos unidades de su divisa, por lo que caídas del tipo de cambio son el riesgo a cubrir, para ello las *puts* son un seguro idóneo.

En el siguiente gráfico se recogen tres ejemplos paradigmáticos de *smiles* para los tipos de subyacente antes enumerados.

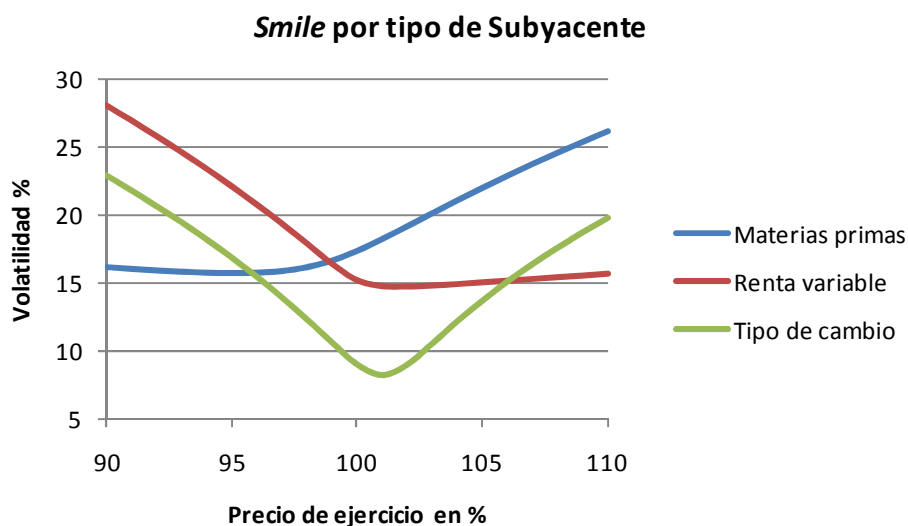


Figura 7: Tipología de *Smiles* para los distintos mercados

2.3 Problemas asociados a la Superficie de Volatilidad

El primer gran problema es el de cobertura de opciones estándar²¹. El segundo gran problema es la valoración y sobre todo la cobertura de opciones exóticas.

Aunque toda la industria financiera asume como errónea la metodología BSM, el parámetro de volatilidad de dicho modelo sigue siendo utilizado como mecanismo de cotización²² en mercados de opciones estándar. Pero, si la fórmula de valoración BSM no es correcta, tampoco lo es la estrategia de cobertura asociada, esto es, el ratio de cobertura o delta. Por ello, habría que preguntarse por la forma correcta de cubrir las opciones estándar en este nuevo contexto.

Por otra parte están también los derivados exóticos, que son todos aquellos cuyos *payoffs* no son estándar, como por ejemplo: barreras, asiáticas, asiáticas con *lookback*, digitales, *cliquets*, etc. que llevan asociados más de un precio de ejercicio y/o

²¹ Calls y puts de ejercicio europeo o americano, conocidas popularmente como *vanillas*.

²² Del mismo modo que la t.i.r. para la de cotización de bonos.

vencimiento y por tanto varias volatilidades que el modelo BSM es incapaz de manejar simultáneamente.

La respuesta a estas cuestiones es la inevitable corrección, modificación, ajuste o reemplazamiento de la metodología BSM, pero ¿de qué modo o por cuál?

Veamos un par de ejemplos sencillos de los dos tipos de problemas más relevantes.

Ejemplo 1: Cobertura Delta

Partiendo del concepto de ratio de cobertura o delta, definido en el capítulo anterior como

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Dónde V denota el precio del derivado y S el del subyacente.

Ahora hay que tener en cuenta que la volatilidad del subyacente σ depende del nivel de strike K , o lo que es lo mismo del valor de S , esto es

$$\sigma = f(S)$$

La nueva delta, denotada por Δ_{Total} , por la regla de la cadena se obtiene de

$$\Delta_{Total} = \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial S}$$

En esta delta *total*, hay tres componentes con un significado financiero muy claro que se recoge en la tabla siguiente

Expresión	Significado financiero
$\frac{\partial V}{\partial S}$	Delta sin <i>smile</i>
$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	Vega, sensibilidad a cambios en la volatilidad
$\frac{\partial \sigma}{\partial S}$	<i>Pendiente del smile</i>

Tabla 4. Componentes de la Delta Total

Por lo que podemos concluir que el cálculo de ratios de cobertura tiene que tener en cuenta el *smile* a través de la *pendiente del smile* y de la vega.

Ejemplo 2: Valoración de una opción exótica con dos *strikes* implicados

Partiendo de la función *payoff* siguiente

$$f(S, T) = C I_{\{S_T \geq K\}}$$

Que es el de una opción digital emitida sobre S de nominal C , vencimiento T y strike K . El precio de esta opción según la metodología BSM descrita en el capítulo anterior viene dado por

$$V = e^{-r\tau} C N(d)$$

Donde de nuevo V denota el valor teórico de la opción, y $N(z)$ denota la ley de distribución gaussiana estándar y la constante d se obtiene de

$$d = \frac{\log \frac{F}{K}}{\sigma \sqrt{\tau}} - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\tau}$$

Para este ejemplo, supongamos que S cotiza en múltiplos de 0.01 unidades monetarias, y también que existe un mercado de opciones estándar europeas o *vanilla* con vencimiento $T = 1$, en base anual, y cuyos *strikes* y volatilidades viene recogidos en la Tabla 5 de la página siguiente.

Strike uu.mm.	Volatilidad
0.98	62.50 %
0.99	61.00 %
1.00	60.50 %
1.01	60.25 %
1.02	60.20 %

Tabla 5. Datos de Mercado

La opción digital a valorar es $C = 100$, $K = 1.00$, con $S_0 = 1.00$ y por simplicidad asumiremos que, $r = 0.00\%$ y que $F = 1.00$

En este caso el *payoff* es

$$f(S, T) = \begin{cases} 0, & S_T < 1.00 \\ 100, & S_T \geq 1.00 \end{cases}$$

Y los parámetros $\tau = 1$, $e^{-r\tau} = 1$ y $d = -0.3025$, lo que da un precio de 38.11, pero ¿es este precio correcto y coherente con las opciones cotizadas recogidas en la Tabla 5? Si creamos una cartera con 10,000 opciones de *strike* $K_1 = 0.99$ compradas y otras con 10,000 opciones de *strike* $K_2 = 1.00$ vendidas, entonces su *payoff* es el mismo que el de la opción digital considerada. Por ausencia de oportunidad de arbitraje sus precios deben de ser iguales, con los datos anteriores

$$V_1 = 0.2773$$

$$V_2 = 0.2358$$

Por lo que la cartera réplica, cuyo precio denotaremos por V_C , viene dado por

$$V_C = 10,000(V_1 - V_2)$$

Tiene un precio de mercado de 57.38

Al valorar mediante la cartera réplica lo que implícitamente se está haciendo es incluir el *smile* en la valoración. Hay que destacar que el precio correcto es, ¡más de un 50% mayor que en el modelo BSM sin *smile*!

Este último ejemplo se pone de manifiesto cuán importante es incluir los precios de mercado, o lo que es equivalente, el *smile* de volatilidad cuando más de un precio de ejercicio está implicado en el derivado a valorar.

2.4 Soluciones al problema de la Superficie de Volatilidad

En este apartado vamos a enumerar las soluciones más utilizadas por la industria financiera para incorporar la superficie de volatilidad a la valoración y cobertura de derivados. No pretende ser una lista detallada y exhaustiva sólo mostrar los aspectos fundamentales de las distintas metodologías y analizar sus pros y contras.

Puesto que el problema viene de la hipótesis sobre el modelo de evolución del subyacente, la mayoría de propuestas se basan en generalizar la E.D.E. asumida en la metodología BSM.

2.4.1 Modelo con saltos

Fue propuesto por primera vez en Merton (1976), esta modelización supone que hay dos fuentes aleatorias que rigen la E.D.E: un proceso de Wiener y un proceso de Poisson. La E.D.E. propuesta por Merton para modelizar el subyacente es

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda \bar{k})dt + \sigma dz + kd\pi$$

Donde S denota el precio del activo, α es la tendencia instantánea, σ la volatilidad instantánea, dz son los incrementos de un movimiento browniano y $d\pi$ denota los incrementos de un proceso de Poisson de parámetro λ . La variable aleatoria porcentaje de salto condicionado a la ocurrencia de un salto se denota por k y \bar{k} denota su media.

Características

Esta propuesta: distribución de Poisson de saltos no cubribles pero diversificables.

Las implicaciones prácticas de este modelo son:

- i. *Smiles* de corto plazo muy pronunciados, derivados de los saltos instantáneos.
- ii. *Smiles* de largo plazo tienden a aplanarse debido a que el proceso de difusión se impone a los saltos.
- iii. Una mayor frecuencia de saltos produce *smiles* más pronunciados en cada vencimiento.

Pros

- i. Realismo en la modelización del mercado de opciones: *smiles* de corto plazo pronunciados y *smiles* de largo plazo planos, lo cual concuerda muy bien con los datos empíricos.
- ii. Realismo en la modelización de la evolución del subyacente: los saltos, por incorporación de nuevas noticias, fricciones entre mercados, etc. Son frecuentes en las series financieras.

Contras

- i. Imposibilidad de cobertura perfecta: cobertura de los saltos en media a través de la diversificación.
- ii. Estimación de nuevos parámetros.
- iii. Inestabilidad de los nuevos parámetros estimados.

2.4.2 Volatilidad estocástica

Todos los modelos con volatilidad estocástica se basan en que el coeficiente que pondera proceso browniano es a su vez estocástico y está regido por otra E.D.E. con otro proceso browniano distinto al del subyacente. A cada uno de los procesos brownianos se los denomina como factores de riesgo, por lo que estos modelos son conocidos como modelos de dos factores.

El primer modelo propuesto fue Hull y White (1987), y el sistema de E.D.E. que rigen el proceso

$$\begin{aligned}dS &= \phi S dt + \sqrt{V} S d\omega \\dV &= \mu V dt + \xi V dz\end{aligned}$$

Donde de nuevo S denota el precio del activo y V es la varianza instantánea. Por su parte, ϕ es un parámetro que puede depender de S , V y t , y las variables μ y ξ pueden depender de V y t pero no de S . Por último, $d\omega$ y dz son los procesos brownianos de S y V respectivamente y cuya correlación es ρ .

Posteriormente Heston (1993), propone un modelo que admite valoración semi-analítica

$$\begin{aligned}dS &= \mu S dt + \sqrt{v} dz_1 \\dv &= \kappa(\theta - v) dt + \sigma \sqrt{v} dz_2\end{aligned}$$

Donde ahora la varianza instantánea v sigue un proceso de reversión a la media de tipo C.I.R. propuesto por Cox, Ingersoll y Ross (1985). En dicho proceso κ es la velocidad de reversión y θ el nivel de reversión. Por su parte σ denota la volatilidad de la varianza instantánea. Por último, dz_1 y dz_2 son los procesos brownianos de S y v respectivamente y cuya correlación es ρ .

Y finalmente Bates (1996) propone un modelo de Heston con saltos

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= (\mu - \lambda \bar{k}) dt + \sqrt{V} dZ + kdq \\dV &= (\alpha - \beta V) dt + \sigma_v \sqrt{V} dZ_v \\cov(dZ, dZ_v) &= \rho dt \\prob(dq = 1) &= \lambda dt\end{aligned}$$

Siendo una vez más S el precio del activo y V la varianza instantánea. En el proceso de S , μ denota la tendencia instantánea, dq denota los incrementos de un proceso de Poisson de parámetro λ y k es la variable aleatoria del porcentaje de salto condicionado a la ocurrencia de un salto tal que

$$\ln(1 + k) \underset{i.i.d.}{\sim} N\left(\ln(1 + \bar{k}) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2\right)$$

Por su parte el proceso V es un modelo C.I.R. igual que en el anterior. Por último, dZ y dZ_v son los procesos brownianos de S y V respectivamente.

La implicación teórica más importante de este tipo de modelos es que ahora sólo se puede replicar, i. e., eliminar todo el riesgo que conlleva la cobertura de un derivado, si se puede comprar y/o vender la volatilidad del mismo modo que el subyacente. Esto se debe a que los modelos con volatilidad estocásticas son modelos con dos factores o fuentes de incertidumbre²³ y por tanto, ambas deben de ser eliminadas mediante cobertura. Esto se traduce en que son necesarios dos activos, que han de ser comprados y/o vendidos de forma continua, para la creación de la cartera réplica.

Características

Las implicaciones prácticas de este modelo son:

- i. Necesidad del *market price of risk* para la volatilidad.
- ii. Se han de cubrir simultáneamente y en tiempo continuo ambos factores de riesgo. Para ello es necesario comprar y/o vender dos activos cuyos precios dependan de ambos factores. Uno será el propio subyacente y el otro generalmente serán opciones.
- iii. Dificilmente producen *smiles* de corto plazo muy pronunciados, son más pronunciados los de vencimientos más largos.

Pros

- i. Realismo en la modelización de la evolución del subyacente: este tipo de modelos dan lugar a distribuciones leptocúrticas de rentabilidad y pueden

²³ Modelizadas por los brownianos

recoger también los efectos de memoria y asimetría en la volatilidad. Todas características verificadas empíricamente por las series financieras²⁴.

- ii. Flexibilidad en la modelización del *smile* de volatilidad. El parámetro de correlación entre los factores de riesgo, ρ , permite ajustar la forma del *smile* modelizado. Cuando ρ es negativo estos modelos reproducen *smiles* con pendiente negativa, tal y como ocurre en los mercados de derivados de renta variable. Y cuando ρ es positivo reproducen *smiles* con pendiente positiva, tal y como ocurre en los mercados de materias primas.

Contras

- i. Imposibilidad de cobertura perfecta: cobertura continua con opciones impracticable en los mercados reales, debido a horquillas, costes de transacción, falta de liquidez y vencimientos...
- ii. Muy difícil conocer la verdadera E.D.P. estocástica que modeliza la volatilidad
- iii. Estimación de parámetros nuevos: la correlación que es aún más estocástica que la propia volatilidad.

2.4.3 Volatilidad local

Este modelo es la extensión más natural al modelo BSM, fue propuesto en primer lugar por Dupire (1994). Se basa en la E.D.E. siguiente

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(S, t) dz$$

Dónde ahora el coeficiente que pondera el browniano dz es una función de S y t .

Dupire demostró que existe una única función $\sigma^2(S, t)$ denominada varianza local²⁵, y que se obtiene de

$$\sigma^2(S, t) = 2 \frac{C_T + \mu C_K + (r - \mu)C}{K^2 C_{KK}}$$

²⁴ Analizadas detalladamente en el cuarto capítulo de la tesis.

²⁵ Aunque quizá sería más apropiado varianza instantánea.

Donde C denota la función precio de la *call* europea estándar de *strike* K y T años a vencimiento, y los subíndices denotan derivadas parciales respecto de la variable denotada en el subíndice.

La versión numérica es a través de los denominados árboles implícitos, desarrollados por Derman y Kani (1994), por una parte, y por Rubinstein (1994) por otra.

Características

Las implicaciones prácticas de este modelo son:

- i. Un solo factor de riesgo dz .
- ii. Función volatilidad local $\sigma(S, t)$ calculable a partir de la superficie de mercado, esto es de $C(K, T)$.
- iii. Debido a i. y a ii. Es la metodología más extendida y aceptada como solución a los errores de BSM.

Pros

- i. Extensión mínima de la metodología BSM, sigue habiendo un único factor, lo que implica la cobertura perfecta sigue siendo posible.

Contras

- i. Estimación de la función $\sigma(S, t)$ es un problema mal condicionado como muestran por ejemplo Lagnado y Osher (1997). Los problemas mal condicionados conllevan muchas inestabilidades desde el punto de vista numérico. De hecho se puede hacer la analogía con el problema de, a partir de una media aritmética, deducir cada uno de los sumandos que se han utilizado para obtener dicha media. La media aritmética sería la volatilidad de mercado y cada uno de estos sumandos utilizados serían las diversas volatilidades locales que vienen dadas por la función $\sigma(S, t)$ que se desea estimar.
- ii. Necesidad de un continuo de opciones cotizadas tanto en *strike* como en vencimiento.

2.4.4 Weighed Monte Carlo

Es un método no paramétrico para, a partir de una distribución a priori, obtener una distribución a posteriori minimizando la entropía relativa sujeto a unas restricciones, que consiste en valorar correctamente una serie de instrumentos de mercado. Fue aplicado por Avellaneda y otros (1999) a distribuciones a priori generadas por Monte Carlo, en las que se modificaba su probabilidad de $\frac{1}{n}$ a la de mínima entropía relativa sujeta a las restricciones dadas. Como es el método en el que se basa la tesis, es desarrollado profusamente en el siguiente capítulo.

2.5 Problema de la Superficie de Volatilidad: conclusiones

La primera conclusión importante es que el problema de la superficie se ha tratado de resolver en la mayoría de casos mediante modelos de evolución más sofisticados que recogieran las características principales de las series financieras. Además estos nuevos modelos deben de poder estimarse a partir de la información de mercado disponible, esto es, ser coherente con la información de mercado actual. Por último, no se debe olvidar que las nuevas metodologías deben implicar estrategias de cobertura.

Pero hasta hoy en día no existe, o no se conoce públicamente, el modelo que tenga estas tres características, todo ello teniendo en consideración que un modelo es sólo un idealización simplificada de la realidad y recoge sólo las características más importantes no todas. Por ejemplo un modelo *perfecto* habría de incorporar tipos de interés estocásticos evoluciones n -dimensionales para varios subyacentes con matriz de varianzas-covarianzas estocástica, etc.

Esto nos hace tener una pequeña reflexión acerca de la base de la valoración de derivados que se expuso en el capítulo anterior. Recordemos que el punto de partida es la valoración relativa, y que ésta es la única ley fiable en finanzas. Si se desea valorar algún instrumento financiero, relativamente ilíquido, se busca en mercado el precio de algo similar y líquido. Tal y como se expuso en el primer capítulo, aquí era posible distinguir dos casos, el primero era la replicación estática y el segundo la replicación dinámica. La replicación estática es la mejor, la más robusta, no necesita sistemas ni hipótesis. El segundo, la replicación dinámica, necesita de modelos sobre los activos

involucrados, calibración a mercado, hipótesis sobre la liquidez y una gran inversión en tecnología, como se puede deducir de los modelos alternativos que se han expuesto como soluciones a lo largo de este capítulo. Si ninguna de las dos opciones de replicación es posible, entonces los mercados son incompletos y es necesaria una función de utilidad, para una mayor profundización en este enfoque véase por ejemplo Carr et al. (2001).

La mejor manera de manejar la valoración con *smile* es no utilizar ningún modelo. Para un *payoff* genérico, si todos sus valores pueden ser replicados exactamente mediante una combinación lineal de futuros, *forwards*, bonos, opciones estándar de diversos *strikes* y vencimientos. Entonces en el precio de la cobertura está incluida la superficie. La cobertura será perfecta independientemente de saltos, volatilidad, etc. El único riesgo que queda es el riesgo de contrapartida. Tal y como se expuso en la introducción el objetivo de esta tesis es proponer una metodología práctica que solucione esta problemática para un tipo muy concreto de derivado exótico los denominados *Cliquets*.

3 Metodología de Entropía Relativa Mínima

3.1 Introducción histórica

El concepto de Entropía surge por primera vez a mediados del siglo XIX en Física, en concreto en el acampo de la termodinámica. Aunque originalmente era un concepto de la Física, posteriormente se ha adaptado a muchos campos de estudio, entre los que destaca la Teoría de la Información. El punto de partida de la Teoría de la Información, tal y como hoy se concibe, se asocia a Shannon (1948).

La Teoría de la Información es una rama de Matemática Aplicada e Ingeniería que trata de la medición de la información. Desde sus comienzos ha encontrado aplicaciones en muy diversas áreas, entre las que destacan Inferencia Estadística, Biología, Teoría Cuántica de la Información y Análisis de Datos.

En Teoría de la Información una medida clave es la denominada entropía de la información, que generalmente se expresa como la cantidad media de bits que son necesarios en la comunicación o en el almacenamiento de la información. El concepto de Teoría de la Información que vamos a utilizar es el de Entropía Relativa²⁶, veamos de dónde surgen estos conceptos.

3.2 Probabilidad, Información y Entropía

En lo que sigue tomaremos el enfoque dado por Kullback y Leibler (1951), Kullback (1967) y Cover et al. (1991). La probabilidad mide la incertidumbre respecto de la ocurrencia de un suceso aleatorio. Para una variable aleatoria dada X , ¿qué es posible deducir de una observación $X = x$?

La información cambia nuestra percepción del mundo. Parece obvio que la cantidad de información contenida en la ocurrencia de un evento dependerá en lo que se haya asumido previamente sobre lo verosímil que dicho evento es. Un ejemplo en el contexto

²⁶ O también Entropía de *Kullback-Leibler*

financiero, si una acción se espera que suba mañana y en realidad baja, este evento es mucho más sorprendente e informativo que si hubiera sucedido lo esperado. El objetivo es por tanto cuantificar la noción de información suministrada/proporcionada por un evento cualquiera.

Se busca por tanto una función, que será denotada por $I(\cdot)$, que pueda representar la información proporcionada por la ocurrencia de un evento cuya probabilidad sea p . Se impondrá asimismo que dicha función sea no negativa y decreciente. Intuitivamente $I(\cdot)$ es no negativa porque la ocurrencia de un evento proporcionará alguna información o como mínimo ninguna. Por otra parte, $I(\cdot)$ debe ser decreciente puesto que cuanto más probable creamos que es un evento menos información proporcionará su ocurrencia.

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, tales que

$$P(X = x) = p \text{ y } P(Y = y) = q$$

Dado que son independientes, su probabilidad conjunta vendrá dada por

$$P(X = x, Y = y) = pq$$

Cuando ambos eventos independientes, $X = x$ e $Y = y$, suceden, la información asociada $I(\cdot)$ a cada uno de ellos debe sumarse a la información total, y por tanto

$$I(p \cdot q) = I(p) + I(q)$$

Diferenciando esta última relación primero respecto de p y después respecto de q , se obtienen las ecuaciones

$$q \frac{\partial I(pq)}{\partial (pq)} = \frac{\partial I(p)}{\partial p}$$

$$p \frac{\partial I(pq)}{\partial (pq)} = \frac{\partial I(q)}{\partial q}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, se llega a

$$\frac{q}{p} = \frac{\frac{\partial I(p)}{\partial p}}{\frac{\partial I(q)}{\partial q}}$$

O lo que es igual

$$q \frac{\partial I(q)}{\partial q} = p \frac{\partial I(p)}{\partial p}$$

Como q y p son las probabilidades de dos sucesos independientes, cada término de esta última ecuación debe ser constante. Denotando dicha constante por $-c$, e integrando se llega a

$$I(q) = A - c \log q$$

Y dado que un evento con probabilidad $q = 1$ no proporciona nada de información, se deduce que $A = 0$, además como $0 \leq q \leq 1$, y se ha impuesto que $I(\cdot)$, como función de q , sea decreciente y no negativa, c debe de ser positivo. Por conveniencia se toma $c = 1$, lo cual define la medida de una unidad de información.

Finalmente, la información dada por la ocurrencia de un evento cuya probabilidad sea como función de p vendrá dada por

$$I(p) = -\log p$$

Una vez definida y determinada la función información $I(\cdot)$, pasamos a delimitar el concepto de Entropía. Como es sabido, la probabilidad asignada a un evento es una medida de la incertidumbre de su ocurrencia. Se define la Entropía de una variable aleatoria R , cuyo suceso i -ésimo tiene probabilidad de ocurrencia p_i , como la esperanza matemática de la información suministrada por la ocurrencia de los sucesos de dicha distribución, esto es

$$H(R) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

Dado que $0 \leq p_i \leq 1$ para $i = 1, \dots, n$, la Entropía es siempre positiva. Un valor alto de la entropía, esto es, de la información esperada, significa que la distribución de probabilidad es ancha. Por el contrario, un valor pequeño significará que dicha distribución es estrecha y por tanto no hay mucha información contenida en la ocurrencia de un evento.

Por ello, la Entropía es la función matemática que mide la incertidumbre contenida en una distribución, esto es consistente con la intuición de partida de que máxima entropía se corresponde con máxima incertidumbre.

Si la distribución se concentra en un único evento j cuya $p_j = 1$, siendo $p_i = 0 \forall i \neq j$, entonces $H = 0$, esto es, mínima entropía. Por otra parte, es sencillo probar que la entropía máxima es igual a $\log n$, cuando $p_i = \frac{1}{n} \forall i$, esto es, si todos los sucesos tienen la misma probabilidad hay máxima incertidumbre.

Habiendo establecido que el concepto de Entropía de una distribución de probabilidad recoge la cantidad de información esperada, es posible cuantificar la información que se obtiene al cambiar de una distribución de probabilidad a otra, debido, por ejemplo, a la llegada de nueva información. Supongamos que tenemos una variable aleatoria X con distribución a priori P y que como consecuencia de la llegada de nueva información pasa a tener una distribución a posteriori Q , entonces, ¿cómo medir la variación en la Entropía?, aquí surge como elección obvia la entropía relativa, que denotaremos por $H(P / Q)$, y que vendría dada por:

$$H(P / Q) = E_Q[\log Q - \log P] = \sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i} = - \sum_{i=1}^n q_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

La función $-\log(\cdot)$ es convexa, por tanto, y debido a la desigualdad de Jensen, la media aritmética de los $-\log \frac{p_i}{q_i}$ es mayor que $-\log(\cdot)$ de la media aritmética de los $\frac{p_i}{q_i}$. Y por tanto

$$H(P / Q) > -\log \sum_{i=1}^n q_i \frac{p_i}{q_i} = -\log \sum_{i=1}^n p_i = -\log 1 = 0$$

Por lo que $H(P / Q)$ es estrictamente no negativa y es cero si y sólo si $P \equiv Q$. Por estos motivos puede ser considerado una *distancia*²⁷ entre las distribuciones de probabilidad. Por tanto, es posible concluir que para mantener la máxima incertidumbre dada nueva información, nuestro objetivo será minimizar esta Entropía Relativa o *distancia* entre la distribución a priori y la distribución a posteriori.

La definición de entropía que vamos a utilizar a lo largo de la tesis es ésta última en su aplicación en Inferencia Estadística. En concreto utilizaremos la Metodología de Entropía Relativa Mínima, que de ahora en adelante denotaremos por ERM. La ERM es una metodología general que se basa en minimizar la entropía relativa entre una distribución de probabilidad a priori y otra a posteriori, de modo que se satisfacen un número finito de restricciones sobre los momentos de la distribución a posteriori. En general la solución es única y estable, i. e., depende de la *suavidad* de las restricciones impuestas. La búsqueda de una distribución con un conjunto dado de momentos es un problema clásico en estadística, véase por ejemplo Panjer y Willmot (1992), De Vylder (1996) o Vilar (2000).

²⁷ Matemáticamente no es una distancia por no ser simétrica.

En la aplicación financiera de la ERM, los momentos o restricciones, serán los precios actuales de mercado de una serie de instrumentos de referencia, por lo que la distribución que se obtiene es un modelo de valoración riesgo neutro²⁸.

Es sabido que este problema está mal condicionado: puede no tener solución o tener múltiples soluciones. Financieramente implica que no existe distribución de probabilidad riesgo neutro alguna que valore correctamente todos los instrumentos de referencia. Esto puede indicar o bien que existe arbitraje, o lo que es más probable, que la distribución no es única, esto es, el mercado no es completo.

El concepto y la metodología basada en la Entropía, han sido aplicados en finanzas por varios autores desde mediados de los 90.

Gulko (1995, 1996) utiliza la metodología basada en la entropía en la valoración de bonos y en la valoración de opciones de renta variable respectivamente. Su objetivo es la obtención de fórmulas analíticas para valoración.

Buchen y Kelly (1996), utilizan en concreto la técnica de Distribución de Máxima Entropía, para estimar la distribución de probabilidad implícita en los precios de opciones.

Posteriormente, Derman y Zou (1999), utilizan esta metodología para, a partir de la distribución de probabilidad histórica, más unas restricciones en los momentos que eran la valoración correcta del *forward* y la opción *at the money*, obtener la nueva densidad de probabilidad teórica. Esta distribución de probabilidad resultante, que denominan *at the Money Risk Neutral Historical Density*, les sirve para estimar los precios teóricos de opciones implícitos los datos históricos de precios del subyacente, de modo que pueden estimar el *smile fair*, esto es, el precio medio correcto de las opciones.

Avellaneda et al. (2001) también han utilizado esta técnica para la estimación de superficies de volatilidad y posteriormente para valoración y cobertura de derivados.

En esta tesis utilizaremos esta técnica de modo similar a la seguida por Avellaneda, haciendo especial hincapié en las implicaciones de cobertura, que se derivan del análisis de sensibilidad.

²⁸ puesto que los precios son las esperanzas de los valores actuales.

3.3 ERM con restricciones en los momentos

Tanto este apartado como los dos siguientes, se basan en el enfoque dado en Avellaneda et al. (2001). El punto de partida es la búsqueda de una distribución de probabilidad $f(x)$, para una variable real x , que satisfaga

$$\int g_i(x)f(x)dx = C_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

Donde $g_i(x)$ y C_i son funciones y números dados respectivamente, y n denota el número de restricciones.

Financieramente vamos definir x como la variable *estado de la economía*, $g_i(x)$ será el valor actual del instrumento i -ésimo para el estado x y C_i será su precio actual de mercado.

El método escogido, siguiendo Buchen y Kelly (1996), para calcular $f(x)$ va ser minimizar el funcional

$$H(f(x) / f_0(x)) = \int f(x) \log \frac{f(x)}{f_0(x)} dx$$

Donde $f_0(x)$ es la densidad de probabilidad a priori. La expresión H es la entropía relativa de $f(x)$ respecto de $f_0(x)$, y tal y como se ha visto en la sección anterior, representa la *distancia en información* entre ambas distribuciones. Es importante recordar que no es una distancia en sentido matemático estricto puesto que no es simétrica. H mide la diferencia de información que hay al pasar de la densidad de probabilidad $f_0(x)$ a $f(x)$.

Tal y como se demuestra en Cover y Thomas (1991), si existe una función de densidad de probabilidad $f(x)$ que verifique todas las restricciones dadas en (3.1) y tal que su $H(f(x) / f_0(x))$ sea finito, la solución del problema de minimización de la entropía con restricciones existe, y puede ser hallada mediante el método de los multiplicadores de Lagrange

$$\inf_{\lambda_i} \sup_{f(x)} \left\{ -H(f(x) / f_0(x)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int g_i(x)f(x)dx - C_i \right) \right\} \quad (3.2)$$

En primer lugar fijamos $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y buscamos la densidad que maximiza el lagrangiano.

De nuevo siguiendo a Cover y Thomas (1991), el cálculo de las primeras condiciones de óptimo, i. e., gradiente nulo, da lugar a que para cada Λ la función de densidad óptima viene dada por

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{Z(\Lambda)} \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) \quad (3.3)$$

Donde $Z(\Lambda)$ denota el factor de normalización, cuya expresión es

$$Z(\Lambda) = \int f_0(x) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) dx$$

Substituyendo (3.3) en (3.2) se sigue que la optimización del lagrangiano es equivalente a minimizar la expresión

$$\log Z(\Lambda) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \quad (3.4)$$

sobre el espacio de multiplicadores de Lagrange $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. La condición de primer orden de mínimo para el componente i -ésimo del gradiente de (3.4)

$$\frac{1}{Z(\Lambda)} \frac{\partial Z(\Lambda)}{\partial \lambda_i} = C_i$$

y como

$$\frac{\partial Z(\Lambda)}{\partial \lambda_i} = \int g_i(x) f_0(x) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) dx$$

La condición de primer orden, tal y como se expone en Cover y Thomas (1991) y Avellaneda et al. (2001), es lo mismo que,

$$E_f[g_i(x)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Z(\Lambda)} \int g_i(x) f_0(x) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) dx = C_i$$

Esto verifica, como no podía ser de otro modo, que en el punto crítico de (3.4) la densidad $f(x)$ está ajustada a las restricciones.

Por otra parte, es necesario que la función objetivo sea convexa en Λ , de hecho la derivada cruzada de (3.3), es decir la componente i - j -ésima de la matriz Hessiana

$$H_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Z(\lambda)} \frac{\partial^2 Z(\lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} - \frac{1}{Z(\lambda)^2} \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda_j}$$

Y como

$$\frac{\partial^2 Z(\boldsymbol{\Lambda})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = \int g_i(x) g_j(x) f_0(x) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) dx$$

Por lo que

$$H_{i,j} = \text{cov}_f(g_i(x), g_j(x))$$

Esto es, la matriz Hessiana es la matriz de varianzas-covarianzas de las $g_i(x)$ respecto de la distribución a posteriori $f(x)$ y por tanto es definida positiva siempre y cuando las $g_i(x)$ sean linealmente independientes. Por ello el punto crítico de (3.4) es un mínimo.

3.4 Análisis de sensibilidad

La propiedad más importante de este método es el que se deriva del análisis de sensibilidad. Éste se deduce de utilizar la densidad estimada para obtener la esperanza de otra función $h(x)$:

$$E_f[h(x)] = \frac{1}{Z(\boldsymbol{\Lambda}^*)} \int h(x) f_0(x) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^* g_i(x)\right) dx \quad (3.5)$$

Donde λ^* denota el valor óptimo de cada multiplicador.

La derivada de (3.5) respecto de un C_k genérico se obtiene mediante la regla de la cadena, al depender los $\boldsymbol{\Lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$ de ellos

$$\frac{\partial E_f[h(x)]}{\partial C_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E_f[h(x)]}{\partial \lambda_j^*} \frac{\partial \lambda_j^*}{\partial C_k}$$

Y no es difícil ver que

$$\frac{\partial E_f[h(x)]}{\partial \lambda_j^*} = \text{cov}_f(h(x), g_j(x)) \quad (3.6)$$

Por otra parte, como $E_f[g_k(x)] = C_k$, y por analogía con (3.6) entonces

$$\frac{\partial E_f[g_k(x)]}{\partial \lambda_j^*} = \text{cov}_f(g_k(x), g_j(x)) \quad (3.7)$$

Por lo que substituyendo (3.6) y el inverso de (3.7) en (3.5) y utilizando notación matricial

$$\nabla_C E_f[h(x)] = \text{cov}_f(h(x), \mathbf{G}(x)) \cdot [\text{cov}_f(\mathbf{G}(x), \mathbf{G}(x))]^{-1} \quad (3.8)$$

Esta es la expresión de los coeficientes de un modelo de Regresión Lineal General, sobre la distribución ajustada $f(x)$, estimada por Mínimos Cuadrados Ordinarios.

Esto implica que la esperanza de cualquier otra función $h(x)$ se puede expresar como:

$$E_f[h(x)] = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)] \quad (3.9)$$

Donde

$$\beta_0 = E_f[h(x)] - \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)] \quad (3.10)$$

Y el vector de coeficientes

$$\boldsymbol{\beta} = \text{cov}_f(h(x), \mathbf{G}(x)) [\text{cov}_f(\mathbf{G}(x), \mathbf{G}(x))]^{-1} \quad (3.11)$$

Que es el gradiente obtenido en (3.8).

De estas propiedades podemos deducir también que implícitamente se está descomponiendo $h(x)$ en las funciones base $g_j(x)$, siendo lineal la relación entre $h(x)$ y las funciones base

$$h(x) = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x) + \varepsilon \quad (3.12)$$

Donde ε denota el error o diferencia entre la combinación lineal de las funciones base $g_j(x)$ y la función $h(x)$. Cuando la variable ε no es idénticamente nula entonces la descomposición de $h(x)$ en las funciones base $g_j(x)$ se realiza en media bajo tal y como expresa (3.9) minimizando la varianza de ε tal y como implican los coeficientes dados por (3.11), y todo bajo la distribución a posteriori $f(x)$.

Es importante notar que este no es un modelo estadístico clásico de regresión lineal múltiple, donde hay una serie de hipótesis sobre el tipo de relación entre las variables, el término error, etc. La expresión (3.12) es sólo una característica del método de estimación de $f(x)$ y no una especificación del modelo a priori.

Esta propiedad será la más importante y la de mayor aplicación financiera tal y como se indica en Arrieta (2012) y como veremos a lo largo de la tesis.

3.5 Implementación práctica de la ERM

La aplicación práctica de la técnica de ERM que vamos a utilizar es la denominada por Avellaneda et al. (2001) como *Weighed Monte Carlo*, que se puede traducir como Monte Carlo Ponderado. La idea es generar la distribución de probabilidad a priori mediante técnicas de Monte Carlo, y considerar los precios de instrumentos de mercado como las restricciones en los momentos de la distribución a posteriori. Uniendo estas dos piezas se minimiza la entropía relativa y se obtiene la nueva distribución de probabilidad.

Recordando la Figura 2, que ya se expuso en la introducción, la metodología se representa en los cuatro módulos o etapas siguientes:

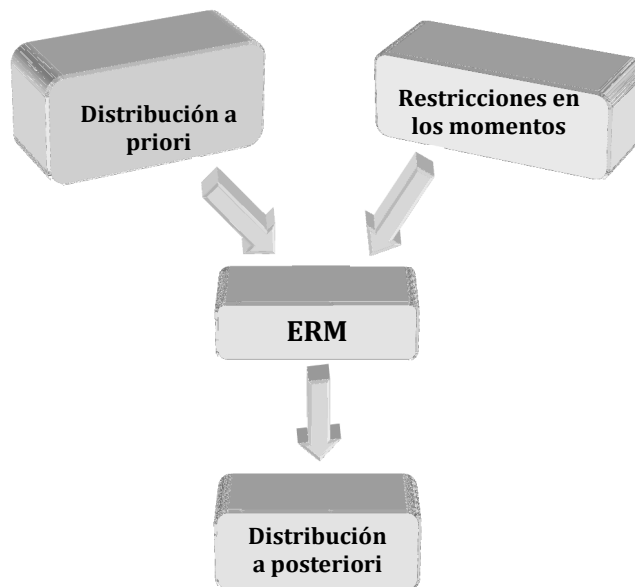


Figura 2: Elementos de la Metodología ERM

Cada uno de estos tres módulos, que se relacionan a través de la ERM en la Figura 2, son explicados con detalle a continuación.

3.5.1 Distribución a priori

La distribución a priori la generamos mediante simulación de Monte Carlo del proceso de evolución real que hayamos estimado para el subyacente. Como la modelización de la evolución real del subyacente es el punto de partida y además es un dato crucial le dedicamos de forma integral el siguiente capítulo.

Para continuar con este capítulo, supondremos que ya hemos generado n evoluciones del subyacente, acorde al modelo que hayamos escogido, con tantos saltos como sea necesario para evaluar todas las referencias. La trayectoria genérica simulada la denotaremos por ω .

3.5.2 ERM con restricciones en los momentos

Partimos de un mercado líquido de derivados en el que cotizan m instrumentos que denominaremos *referencias*. Asumiremos asimismo que las *referencias* son tales que sus flujos asociados a la trayectoria ω están completamente determinados por la propia trayectoria.

El precio de un instrumento de mercado genérico Π_h con flujo descontado asociado a la trayectoria ω_i igual a h_i , viene dado por

$$\Pi_h = \sum_{i=1}^n h_i p_i$$

Donde p_i denotan las probabilidades a posteriori. Asimismo vamos a denotar las probabilidades a priori por q_i y en el caso del Monte Carlo estándar

$$q_i = \frac{1}{n} \quad i = 1, \dots, n$$

Mediante la ERM deseamos estimar las nuevas probabilidades, tal que éstas verifican que:

- i. Los precios de las *referencias* coinciden exactamente con sus precios de mercado;
- ii. Son lo más cercanas posible a $\frac{1}{n}$, esto es, su entropía relativa es mínima respecto de la distribución a priori;

Denotaremos por C_j el valor de mercado²⁹ de la referencia j -ésima, y por m el número total de referencias. Asimismo, $g_{i,j}$ denota el flujo descontado en la trayectoria i para el instrumento j , g_j el vector columna de flujos descontados del instrumento j y por $\mathbf{g} = \{g_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ la matriz donde la columna j -ésima es g_j . Asimismo los vectores de probabilidades a priori y posteriori serán \mathbf{q} y \mathbf{p} respectivamente. La relación entre las referencias y el vector de probabilidades a posteriori es

$$C_j = \sum_{i=1}^n g_{i,j} p_i \quad j = 1, \dots, m$$

El vector de probabilidades $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ es el que hay que determinar. El sistema de n restricciones admite infinitas soluciones puesto que el número de trayectorias m es mayor que el número de restricciones.

El criterio que se va seguir en la estimación de \mathbf{p} es minimizar la entropía relativa entre la distribución a posteriori y la a priori, es decir, aplicaremos la técnica de ERM con restricciones en los momentos.

Dados $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, vectores de probabilidad definidos sobre un espacio de probabilidad con n estados, la entropía relativa de \mathbf{p} respecto de \mathbf{q} viene dada por

$$ER(\mathbf{p}/\mathbf{q}) \stackrel{\text{def}}{=} E_{\mathbf{p}} \left[\log \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \right] = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

Se desea

$$\min_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} \left[\log \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \right] = \min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

$$\text{s. a. } E_{\mathbf{p}}[g_j] = C_j \quad j = 1, \dots, m$$

Introduciendo multiplicadores de Lagrange, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y recordando que en el caso de Monte Carlo estándar $q_i = \frac{1}{n}$

$$D(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} ER(\mathbf{p}/\mathbf{q}) = \log n + \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

²⁹ mid price en general

Quedando las probabilidades a posteriori

$$p_i = \frac{\exp(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{i,j})}{\sum_{i=1}^n \exp(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{i,j})}$$

Por otra parte, siguiendo de nuevo Avellaneda et al. (2001), la función a optimizar dada por (3.3) puede expresarse como

$$W(\boldsymbol{\Lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \log Z(\boldsymbol{\Lambda}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j = \log \left(\sum_{i=1}^n \exp \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j g_{i,j} \right) \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j C_j \quad (3.13)$$

El proceso de estimación de \mathbf{p} se resume en los pasos siguientes:

- i. Generación de n trayectorias del subyacente
- ii. Cálculo de la matriz de flujos descontados \mathbf{g}
- iii. Mediante un algoritmo³⁰ se minimiza $W(\boldsymbol{\Lambda})$ y se obtiene el valor $\boldsymbol{\Lambda}$ que minimiza (3.13) y que denotaremos por $\boldsymbol{\Lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$
- iv. Cálculo del vector de probabilidades $\mathbf{p}(\boldsymbol{\Lambda}^*)$

3.5.3 Utilización de la distribución a posteriori

Una vez estimado el vector de multiplicadores de Lagrange, y por tanto el vector de probabilidades $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, y en consecuencia el valorador *Risk Neutral*, es posible utilizar \mathbf{p} para valorar cualquier otro derivado emitido sobre el mismo subyacente y cuyo *payoff* sea calculable dadas las trayectorias obtenidas mediante simulación Monte Carlo. Denotaremos por Π_T el precio o valor actual de un instrumento $\mathbf{T} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, cuya componente i -ésima t_i es el flujo descontado asociado a la trayectoria ω_i , entonces dicho precio viene dado por

$$\Pi_T \equiv E_{\mathbf{p}}[\mathbf{T}] = \sum_{i=1}^n t_i p_i \quad (3.14)$$

Debido a la propiedad de la metodología ERM dada por (3.9), (3.14) se puede expresar como

³⁰ en el Anexo B se propone uno concreto

$$E_{\mathbf{p}}[\mathbf{T}] = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j C_j \quad (3.15)$$

Dónde β_0 se obtiene de (3.10), y viene dado por

$$\beta_0 = E_{\mathbf{p}}[\mathbf{T}] - \sum_{j=1}^m \beta_j E_{\mathbf{p}}[g_j]$$

Y el vector de coeficientes viene dado por (3.11), esto es

$$\boldsymbol{\beta} = \text{cov}_{\mathbf{p}}(\mathbf{T}, \mathbf{G}) [\text{cov}_{\mathbf{p}}(\mathbf{G}, \mathbf{G})]^{-1}$$

Siendo $\text{cov}_{\mathbf{p}}$ el operador covarianza tomado sobre \mathbf{p} . Recordemos que \mathbf{G} es la matriz cuyas columnas son las \mathbf{g}_j , esto es, cada columna contiene los *payoffs* descontados de los instrumentos de mercado impuestos como restricciones en el método ERM, y por tanto sus precios son exactamente los de mercado.

Por otra parte, la obtención de β_0 y $\boldsymbol{\beta}$ mediante las dos últimas ecuaciones se puede interpretar como que se está descomponiendo \mathbf{T} en las funciones base \mathbf{g}_j , siendo lineal la relación entre \mathbf{T} y las funciones \mathbf{g}_j , esto es una regresión lineal múltiple bajo la medida de probabilidad \mathbf{p} . Lo que permitía obtener (3.12), y por tanto escribir la relación

$$t_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j g_{i,j} + \varepsilon_i \quad (3.16)$$

Donde ε_i denota el error o diferencia entre la combinación lineal de las \mathbf{g}_j y la función \mathbf{T} para la trayectoria ω_i bajo la distribución de probabilidad \mathbf{p} .

Tal y como se indica en Arrieta (2012), la relación (3.16) es de una gran utilidad práctica. Sus aplicaciones más importantes son:

- i. **Cobertura estática:** a parte de un valorador *Risk-Neutral*, la ERM proporciona una cobertura estática a vencimiento del *payoff* del nuevo derivado a valorar \mathbf{T} mediante los distintos instrumentos de mercado \mathbf{g}_j . Además, dicha cobertura estática viene determinada objetivamente mediante los β_0 y $\boldsymbol{\beta}$.
- ii. **Bondad de la cobertura estática:** dados los valores de β_0 y $\boldsymbol{\beta}$ mediante (7) se puede deducir los valores de los ε_i lo que permite determinar la bondad del ajuste de la cobertura estática.

- iii. **Desestructuración:** si todos los ε_i son nulos, entonces lo que se ha obtenido es una descomposición perfecta de T en instrumentos de mercado, esto es, se ha desestructurado T . Por tanto, el método nos garantiza, que de existir una desestructuración³¹ del derivado considerado T es encontrada y perfectamente valorada acorde a mercado.
- iv. **Análisis de riesgo:** en caso de que no todos los ε_i son nulos, el análisis detallado de su distribución, bajo la medida de probabilidad real, proporciona toda la información relevante sobre la parte del riesgo no cubierto del derivado objetivo T . Por ejemplo, permite localizar explícitamente los escenarios de máximo riesgo desde el punto de vista de la cobertura y diseñar estrategias de cobertura ad hoc que sean mucho más efectivas.
- v. **Relación medidas real y Risk-Neutral:** como se acaba de exponer en el punto iv., es posible utilizar ambas medidas de probabilidad según sea necesario. Para que esto sea factible y realmente útil, la modelización para la distribución a priori ha de reflejar las características más relevantes del comportamiento del subyacente.

³¹ O cobertura estática perfecta.

4 Modelo de Evolución del Subyacente

En la aplicación de la metodología ERM, expuesta en el capítulo anterior, se parte de una función de densidad de probabilidad a priori, i. e., de un modelo de evolución para el subyacente. Recordando la estructura modular de la metodología ERM, recogida en la Figura 2 de la página 56, en ella se visualiza el papel del modelo de evolución para el subyacente: es el input de partida. Esto que es una desventaja, por la dificultad que entraña la elección, no es un grave problema para la metodología ERM puesto que una función de densidad de probabilidad a priori no del todo adecuada no invalida el resto de la metodología ERM por el carácter modular de la misma tal y como se refleja en dicha Figura 2. Es más, si otro modelo mejor es aceptado o considerado éste se utiliza como nuevo punto de partida y se puede seguir utilizando toda la estructura ERM. Este último hecho es una gran ventaja respecto otros métodos cuya validez está asociada al modelo de evolución, como por ejemplo BSM.

Por otra parte, como se demuestra en Harrison y Kreps (1979), en la valoración de derivados por ausencia de arbitraje aparece un mundo nuevo: el riesgo neutro o implícito en mercado, este mundo tiene su propia medida de probabilidad, que es equivalente a la real, pero en general distinta. Si hacemos el *esfuerzo* de modelizar el mundo real, entonces este método nos da la forma de relacionar ambos mundos con todas las ventajas que esto nos reportará en el análisis de la cobertura de derivados.

Con el fin de obtener ese primer módulo de la metodología ERM, denominado *Distribución a priori* en la Figura 2, este capítulo se estructura en dos grandes bloques:

- i. Recoger, enumerar y describir las características principales de las series financieras temporales de activos de renta variable.
- ii. Proponer, seleccionar, estimar, testar y simular una familia de modelos para la evolución del subyacente que será utilizada en los siguientes capítulos de la tesis.

Por último, es muy importante tener en cuenta que la modelización de la evolución del subyacente es una cuestión abierta tanto a nivel teórico como práctico. Como ya se mencionó en el segundo capítulo, la simplicidad del modelo de evolución BSM es una de las causas de la aparición de la Superficie de Volatilidad. Actualmente no hay un consenso, ni en el mundo académico ni en el de la industria financiera, sobre el modelo idóneo para los subyacentes de los diversos mercados.

4.1 Características de las series temporales financieras

Como cualquier modelo³² su objetivo es resumir las propiedades más relevantes del proceso a estudiar, las series temporales financieras empíricamente muestran las características:

- i. Exceso de curtosis
- ii. Memoria en volatilidad o *volatility clustering*
- iii. Volatilidad asimétrica
- iv. Presencia de saltos

Para ilustrar todas estas características, vamos a utilizar los datos de las rentabilidades continuas diarias del índice Dow Jones Euro Stoxx 50 para el período 1999 – 2011.

4.1.1 Exceso de curtosis

Este fenómeno es conocido como exceso de curtosis, colas gruesas o leptocurtosis.

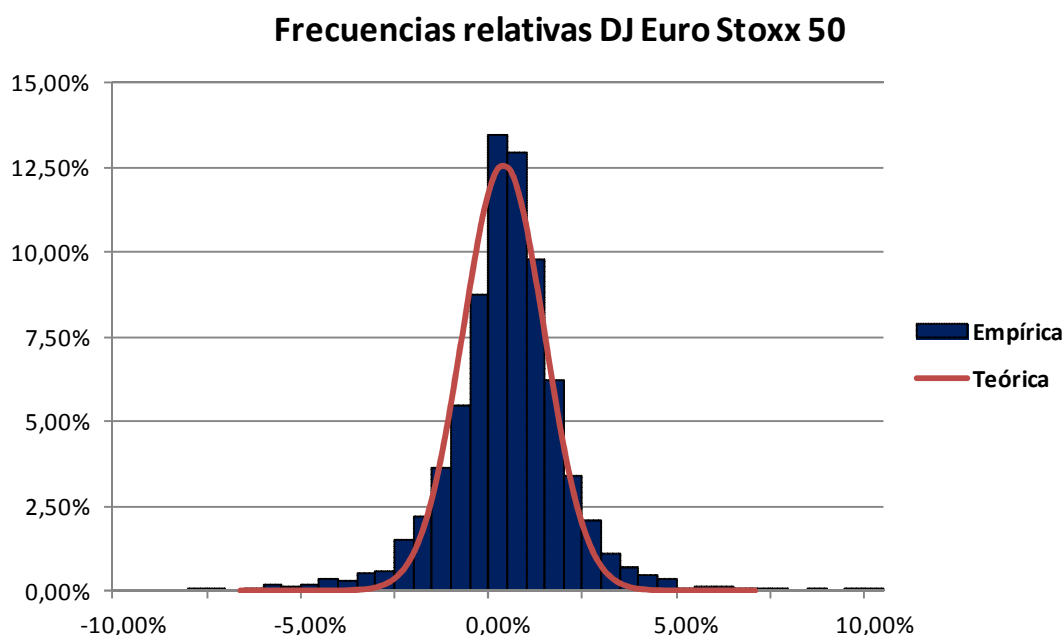


Figura 8: Distribuciones Empírica y Teórica

³² R.A.E.: Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

En la Figura 8 en rojo se representa la densidad teórica gaussiana estimada de los datos y en azul la densidad empírica, que es, obviamente, leptocúrtica.

Como ya vimos³³ una de las consecuencias de que la distribución empírica de las rentabilidades sea leptocúrtica es que exhiben colas más gruesas que la distribución gaussiana equivalente. Esto es, las probabilidades de eventos extremos, tanto positivos como negativos, son infraestimados por las distribuciones gaussianas respecto de las que sean leptocúrticas.

Un ejemplo extremo de esta leptocurtosis, que ya fue mencionando en el primer capítulo, fue el comportamiento del índice *Dow Jones Industrial Average* el lunes 19 de Octubre de 1987. Aquel día dicho índice tuvo una rentabilidad negativa del 22.61%, cuya probabilidad de ocurrencia según una ley gaussiana es inferior a una millonésima, dato totalmente inconsistente con los datos empíricos.

4.1.2 Memoria en volatilidad

Las series temporales financieras frecuentemente muestran la característica conocida como memoria en volatilidad o *volatility clustering*. Esto implica que rentabilidades grandes en valor absoluto, tienden a ser seguidas por rentabilidades grandes en valor absoluto, y rentabilidades pequeñas en valor absoluto tienden a ser seguidas por rentabilidades pequeñas en valor absoluto. En ambos casos las rentabilidades de un periodo a otro son impredecibles en signo, pero no tanto en la *amplitud* de la rentabilidad. La memoria en volatilidad es un tipo de heterocedasticidad que causa una parte, pero no todo, el exceso de curtosis que se observa típicamente en las series financieras.

Para ilustrar gráficamente el concepto de memoria en volatilidad, la serie temporal de las rentabilidades de los datos reales que estamos utilizando, vienen recogidos en la Figura 9 de la página siguiente.

³³ Segundo capítulo sección 2.2

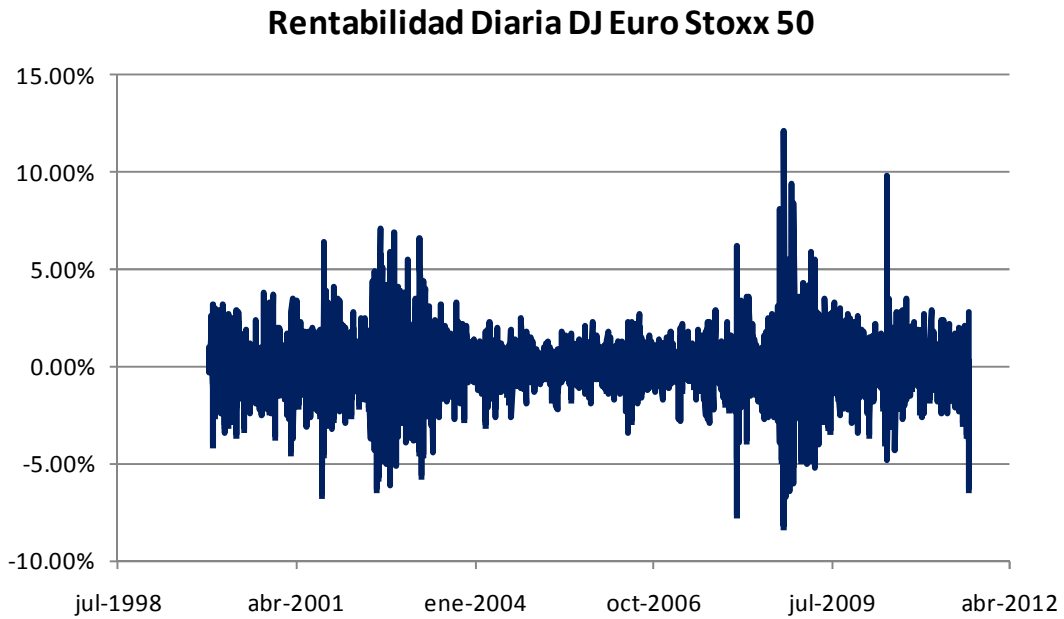


Figura 9: Rentabilidad Diaria

En esta última figura podemos observar claramente como las variaciones más grandes tienden a agruparse.

4.1.3 Volatilidad asimétrica

También tenemos el efecto asimétrico en la volatilidad. Este concepto intenta reflejar el efecto de que las rentabilidades negativas suelen incrementar la volatilidad, no ocurriendo lo contrario, esto es, las rentabilidades positivas no suelen incrementar las volatilidades.

Para visualizar este efecto realizamos un mismo gráfico en el que se representan tanto la evolución de la cotización diaria como la volatilidad de nuestro índice de referencia el Dow Jones Euro Stoxx 50 entre los años 1999 – 2011.

Ambas variables, la cotización y la volatilidad, vienen representadas en la Figura 10. En dicha figura, podemos observar como las caídas en cotización suelen llevar asociados incrementos en la volatilidad, mientras que subidas en cotización pueden provocar tanto incrementos como decrementos en volatilidad.

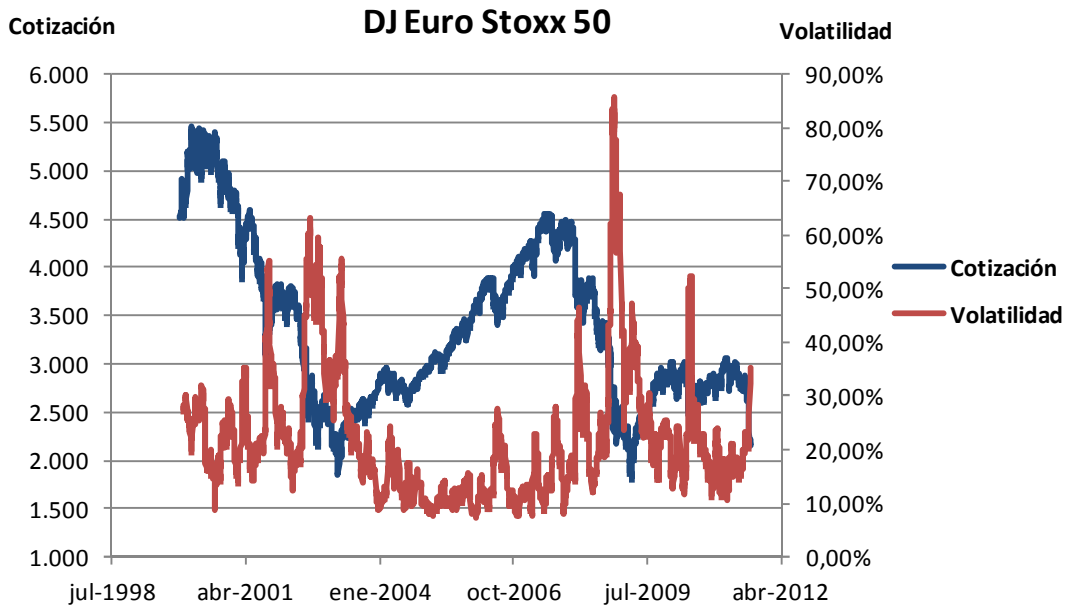


Figura 10: Caídas en precio e incrementos en volatilidad

4.2 Modelos Económicos de Series Temporales

Hay una gran y extensa bibliografía sobre modelos de series temporales entre los que destacan: Novales (1993), Hamilton (1994), Box, Jenkins y Reinsel (1994). Para las siguientes secciones de este capítulo en concreto seguiremos Box, Jenkins y Reinsel (1994).

Una serie temporal puede ser considerada como una secuencia o sucesión de variables aleatorias. Esta secuencia o proceso estocástico, puede tener cierta dependencia entre sus valores. La estructura de esta dependencia puede ser utilizada para predecir los valores futuros del proceso basándose en las observaciones pasadas. De existir dicha estructura, puede permitir descomponer la serie temporal en:

- i. Una componente determinista (predicción)
- ii. Una componente aleatoria (error asociado a la predicción)

El modelo univariante de serie temporal que utilizaremos para la rentabilidad continua del subyacente en el momento t , y que denotaremos por y_t , es

$$y_t = f(t - 1, X) + \varepsilon_t$$

Donde $f(t - 1, X)$ es una función no lineal que modeliza la parte determinista, y que denominaremos media o tendencia condicional de la serie. En ella se recoge toda la información disponible hasta $t - 1$, incluyendo:

- i. Observaciones pasadas $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$
- ii. Residuos pasados $\{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\}$
- iii. Cualquier otra variable explicativa relevante, denotada por X

Por otra parte, ε_t denota el término de error aleatorio, que modeliza las desviaciones en torno al término de tendencia $f(t - 1, X)$.

La hipótesis más comunes sobre ε_t son:

$$E[\varepsilon_t] = 0$$

$$E[\varepsilon_{t_i} \varepsilon_{t_j}] = 0$$

Siempre que $t_i \neq t_j$.

Aunque los sucesivos términos de error son incorrelados, no son independientes, y el proceso de generación es

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

Dónde σ_t es la desviación estándar condicional, y z_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida de una determinada distribución de probabilidad, que en nuestro caso por el *software*³⁴ usado son dos: gaussiana estándar y t de Student.

4.2.1 Modelos para la media y varianza condicional

Media condicional

La media condicional, siguiendo de nuevo la metodología propuesta por Box, Jenkins y Reinsel (1994), la modelizaremos con el modelo general ARMAX(R, M, Nx)

$$y_t = C + \sum_{i=1}^R \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^M \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^{Nx} \beta_k X(t, k) \quad (4.1)$$

³⁴ Econometric Toolbox MATLAB® R2009a

Dónde ϕ_i y θ_j denotan el coeficiente autorregresivo i -ésimo y de media móvil j -ésimo respectivamente. $X(t, k)$ es una matriz de variables explicativas del modelo clásico de regresión lineal.

El modelo para la media condicional (4.1) será el utilizado para todos los modelos de la varianza condicional σ_t^2 .

Varianza condicional

La varianza condicional del término ε_t viene dada por

$$\text{Var}_{t-1}[y_t] = E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$$

Y la modelizaremos con un modelo de la familia *GARCH*.

Modelos *GARCH*

GARCH es el acrónimo inglés para *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. La autorregresividad indica que las observaciones pasadas se incorporan en la última, el término condicional indica que la varianza tiene dependencia del pasado inmediato. Y por último, la heterocedasticidad es el término econométrico que indica que la varianza es cambiante en el tiempo³⁵, o lo que es lo mismo, la volatilidad. Estos modelos fueron introducidos por Bollerslev (1986), quién generalizó los modelos ARCH de Engle (1982). Los modelos *GARCH* pueden ser más parsimoniosos, esto es, tienen menos parámetros lo que incrementa la eficiencia computacional. Los modelos *GARCH* incluyen tanto el efecto de leptocurtosis como el de memoria en volatilidad que vimos en el apartado 4.1. De la familia de modelos *GARCH* utilizaremos tres tipos: *GARCH* Bollerslev (1986), *GJR* acrónimo para el modelo propuesto por Glosten, Jagannathan, y Runkle (1993) y *EGARCH* que es una generalización del modelo propuesto por Nelson (1991).

Aunque estos modelos son muy útiles, caben reseñar algunas de sus limitaciones:

- i. Funcionan mejor bajo condiciones estables de mercado
- ii. No modelizan saltos, esto es, crashes o cambios estructurales
- iii. No suelen recoger toda la leptocurtosis de las series reales, esto puede ser compensado utilizando la t de *Student* en lugar de la gaussiana

³⁵ En contraposición al término homocedasticidad cuando esto no ocurre.

Modelo $GARCH(P, Q)$

Este modelo para la varianza condicional viene dado por:

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (4.2)$$

Con las restricciones

$$\sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j < 1$$

$$\kappa > 0$$

$$G_i \geq 0$$

$$A_j \geq 0$$

Éste es un proceso de varianza simétrico por lo que el signo de ε_t no se tiene en cuenta.

Modelo $GJR(P, Q)$

Este modelo para la varianza condicional viene dado por:

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^Q L_j S_{t-j} \varepsilon_{t-j}^2 \quad (4.3)$$

Dónde $S_{t-j} = 1$ si $\varepsilon_{t-j} < 0$ y $S_{t-j} = 0$ en el resto de casos.

Con las restricciones

$$\sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q L_j < 1$$

$$\kappa > 0, \quad G_i \geq 0, \quad A_j + L_j \geq 0$$

Modelo EGARCH(P, Q)

Este modelo para la varianza condicional, tiene término de apalancamiento y explícita la distribución de probabilidad, viene dado por:

$$\log \sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right] \right] + \sum_{j=1}^Q L_j \left(\frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right) \quad (4.4)$$

Dónde

$$E[|z_{t-j}|] = E \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Para la distribución gaussiana, y

$$E[|z_{t-j}|] = E \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right] = \sqrt{\frac{\nu-2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

Para la t de Student con ν grados de libertad, siendo $\nu > 2$.

4.2.2 Características relevantes de los modelos

Hay que destacar que en la literatura actual sobre modelos econométricos de la familia *GARCH*, no existe un consenso sobre su definición. Aunque la forma funcional del modelo *GARCH(P, Q)* es estándar, existen restricciones de positividad alternativas. Estas alternativas implican ciertas desigualdades no lineales difícilmente imponibles en la práctica. Éstas no afectan al modelo *GARCH(1, 1)* que es, de lejos, el modelo más utilizado. Las restricciones de positividad detalladas en cada uno de los modelos para la varianza condicional descritos son las estándar y las que utiliza el *software*³⁶ utilizado.

También es reseñable, que una buena parte de la literatura actual llama *TGARCH*, i. e. *Threshold GARCH*, al modelo *GJR*. Otros autores en cambio, hacen una distinción muy clara entre ambos³⁷. El modelo *GJR* utilizado, que es el definido por (4.3), es bastante estándar. De hecho las especificaciones dadas, incluidas las restricciones, para los modelos *GARCH* y *GJR* permiten la interpretación de que el modelo *GJR* es una

³⁶ En concreto la *Econometric Toolbox*.

³⁷ Para un análisis detallado se puede consultar Hamilton (1994).

extensión del modelo *GARCH*, éste último puede ser considerado una versión restringida del GJR lo cual es muy útil para la realización de tests estadísticos basados en la razón de verosimilitudes.

En los modelos *GARCH*(P, Q) y *GJR*(P, Q), el valor de los retardos P y Q y las magnitudes de los términos G_i y A_j determinan la longitud de la persistencia en los residuos, esto es, la memoria en volatilidad. Estos valores también determinan la cantidad mínima de datos preliminares para la simulación de los modelos. Por otra parte, los *EGARCH* reflejan esta característica únicamente mediante los términos G_i .

La forma funcional *EGARCH*(P, Q) dada por (4.4) es relativamente estándar, aunque difiere de la dada originalmente por Nelson (1991). Otra forma funcional para estos modelos es la que viene dada por

$$\log \sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^P G_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}| + L_j \varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right] \quad (4.5)$$

Esta forma ofrece la ventaja de no hacer hipótesis explícita sobre la distribución de probabilidad condicional, esto es, no asume que $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ siga una ley gaussiana o t de *Student*, lo cual es necesario para la simulación de Monte Carlo del modelo en ausencia de datos previos.

Aunque los modelos no requieren restricciones de positividad en los parámetros para garantizar la positividad de la varianza condicional, las restricciones de estacionariedad sí lo son. Para ello, el *software* utilizado trata los modelos *EGARCH*(P, Q) como si el logaritmo de la varianza condicional siguiera un modelo *ARMA*(P, Q) con las restricciones de estacionariedad estándar sobre el polinomio característico y sus autovalores.

Los modelos *EGARCH* y *GJR* son modelos asimétricos que, a diferencia de los *GARCH*³⁸, capturan la correlación negativa entre las rentabilidades y la volatilidad del subyacente. Esto lo hacen mediante los términos L_j , que ambos modelos incluyen, y que recogen explícitamente el signo y la magnitud de los residuos. Aunque ambos modelos están diseñados para reflejar este efecto asimétrico, difieren en el modo de hacerlo. En

³⁸ Ignoran el signo del residuo

los modelos *EGARCH* los L_j 's actúan directamente sobre los residuos. Mientras que en los *GJR* los L_j 's actúan a través de unas variables *dummy*. Además, si este efecto asimétrico se da, los L_j 's serán negativos para los *EGARCH* y positivos para los *GJR*.

Por último, destacar que los modelos *GARCH* y *GJR* incluyen términos relacionados directamente a los residuos $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ mientras que los *EGARCH* incluyen términos relacionados a los residuos estandarizados $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ que son utilizados para forzar las varianzas condicionales y las del propio residuo. Esta última característica hace únicos a los modelos *EGARCH*.

4.3 Selección, estimación y simulación del modelo

Para la estimación del modelo se van a utilizar los datos de cotizaciones de cierre diarias del índice Dow Jones Euro Stoxx 50 durante cuatro años. Más concretamente, se han utilizado los precios diarios del período que comienza el 10 Octubre de 2007 y finaliza el 7 de Octubre 2011. En total son 1029 precios de los que se obtendrán las rentabilidades continuas diarias que conformaran la muestra para la selección y estimación del modelo.

Respecto del periodo muestral escogido, cabe destacar, que contiene varias características deseables, principalmente:

- i. Recoge períodos de subidas y bajadas
- ii. Casa con la vida media de los derivados a analizar en los siguientes capítulos

4.3.1 Análisis previo

Antes de comenzar la selección y estimación del modelo econométrico es recomendable realizar un análisis previo de los datos muestrales para verificar ciertas propiedades estadísticas en la serie de datos.

En primer lugar se realiza un análisis visual de la muestra tanto en precio como en rentabilidades. Este análisis visual se puede llevar a cabo mediante los gráficos que se recogen en la Figura 11, y que representan:

- i. Evolución de una serie de precios de un activo de renta variable (izquierda)
- ii. Rentabilidades continuas de esa misma serie de precios (derecha)

Cotizaciones y Rentabilidades

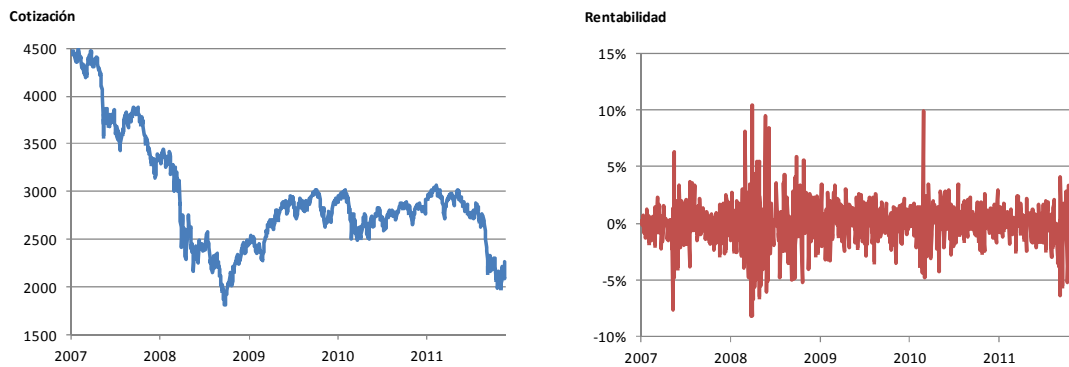


Figura 11: Cotizaciones y Rentabilidades

De estos gráficos, en concreto del de rentabilidades, se visualiza claramente el efecto de memoria en volatilidad o *volatility clustering* descrito con detalle en el apartado 4.1.2, y que indica que la familia de modelos escogidos para la varianza condicional son adecuados.

En segundo lugar, y siguiendo a Box, Jenkins y Reinsel (1994), se analizan las denominadas funciones de autocorrelación sobre la muestra de rentabilidades.

Los coeficientes de autocorrelación proporcionan información sobre la relación lineal entre los valores de la serie separados por k unidades temporales. Es decir, indican el grado de correlación entre cada valor de la serie y su correspondiente valor desplazado k unidades temporales, dicho desplazamiento temporal se denomina retardo. La representación gráfica de estos coeficientes de correlación para un conjunto de retardos sucesivos dará lugar a la función de autocorrelación simple. Junto con estos coeficientes de autocorrelación se definen los de autocorrelación parcial que mide la correlación entre dos momentos de tiempo después de eliminar el efecto de los momentos

intermedios. La representación gráfica de estos coeficientes recibe el nombre de función de autocorrelación parcial.

En el análisis de series temporales las funciones de autocorrelación simple y parcial juegan un papel importante en la identificación del retardo en un modelo autorregresivo del tipo $ARMAX(R, M, Nx)$ dado por (4.1). En concreto, mediante el gráfico del función de autocorrelación parcial es posible determinar el retardo adecuado para el modelo a estimar.

Además, en los los gráficos de las funciones de autocorrelación simple y parcial, se añaden unas bandas, al 5% de significación, del test de que las autocorrelaciones son nulas. Este es un test asintótico y se basa en que el tamaño muestral n es relativamente grande, i. e. $n \geq 30$ y que la distribución de la serie es gaussiana n -dimensional.

En la siguiente figura se recogen las dos funciones de autocorrelación la simple y la parcial para la serie temporal de las rentabilidades.

Funciones de Autocorrelación de la Serie de Rentabilidades

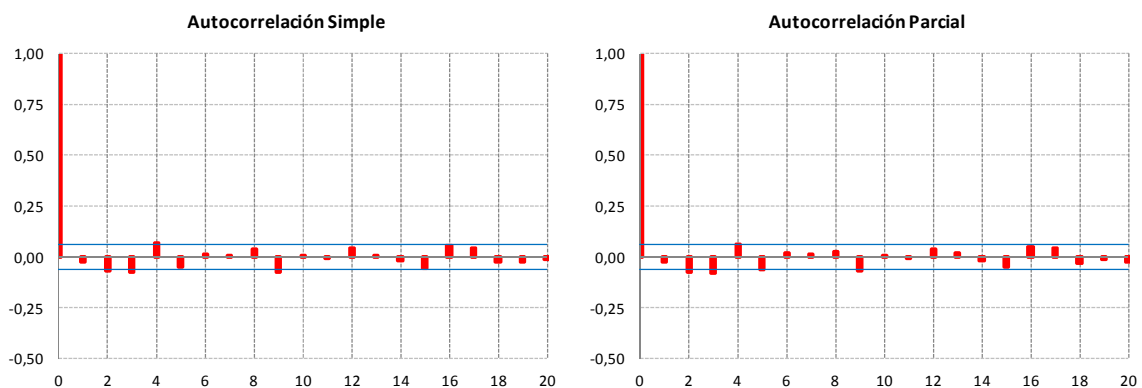


Figura 12: Autocorrelaciones Simple y Parcial de las Rentabilidades

Lo más relevante del análisis de las funciones de autocorrelación de la Figura 12 es la aparente independendencia de las series de rentabilidad hecho que será testado más cuantitativamente a lo largo de esta sección.

El siguiente análisis gráfico que se ha de realizar es el de las funciones de autocorrelación tanto simple como parcial pero ahora en la serie de las rentabilidades al

cuadrado. El análisis de la serie de rentabilidades al cuadrado puede mostrar la existencia de memoria o persistencia en los momentos de segundo orden, o lo que es igual de la varianza de la serie y por tanto de su volatilidad. Además, la presencia de esta memoria o persistencia en los momentos de segundo orden, puede indicar la aparición de efectos ARCH, que posteriormente también serán testados cuantitativamente mediante el test correspondiente.

En la figura siguiente se representa la función de autocorrelación simple

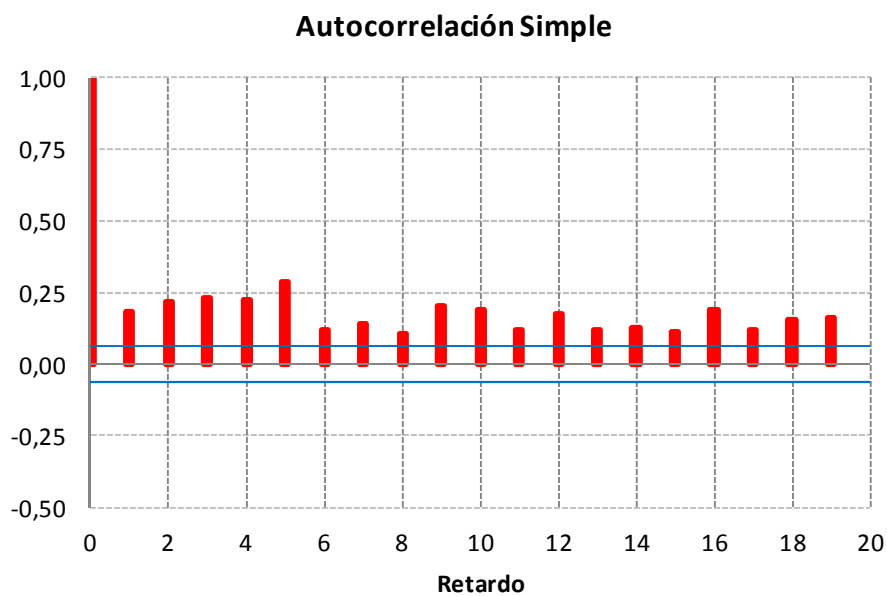


Figura 13: Función de Autocorrelación Simple de las Rentabilidades al Cuadrado

La Figura 13 muestra que, a pesar de que las rentabilidades en sí mismas están muy poco correlacionadas, la varianza del proceso sí muestra alguna correlación que no debe ser ignorada. De hecho la lenta convergencia de la función de autocorrelación indica la posibilidad del que proceso en varianza sea no-estacionario.

Para clarificar el orden de la no-estacionariedad del proceso se analiza la función de autocorrelación parcial, tal y como se recoge en la Figura 14 adjunta en la página siguiente.

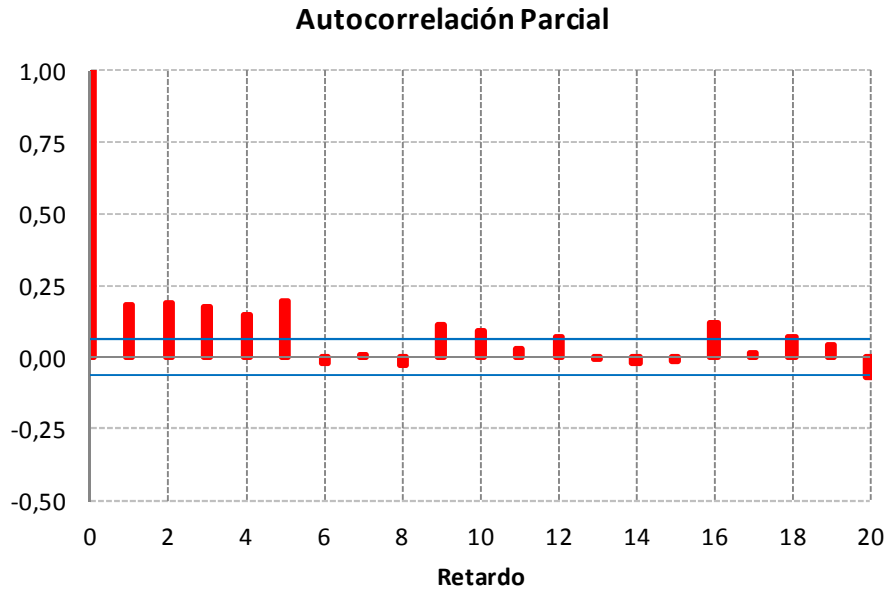


Figura 14: Función de Autocorrelación Parcial de las Rentabilidades al Cuadrado

Cuantificando la correlación

En vista de las funciones de autocorrelación simple y parcial recogidas en las Figuras 13 y 14 respectivamente, para la serie de rentabilidades al cuadrado, es conveniente comprobar de un modo más cuantitativo la independencia de dicha serie. Para ello, se utilizan los dos tests siguientes:

- i. Ljung-Box-Pierce Q -test propuesto en Box, Jenkins y Reinsel (1994)
- ii. ARCH test de Engle (1982).

El test de Ljung-Box-Pierce es un test estadístico diseñado para comprobar si un conjunto de autocorrelaciones de una serie temporal son distintas de cero. Las hipótesis son

H_0 : La correlación de la población de la que se ha extraído la muestra es cero, y por tanto las autocorrelaciones son debidas al error de muestreo.

H_1 : Los datos no están independientemente distribuidos

Se basa en el estadístico Q dado por

$$Q = n(n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k}$$

Siendo n el tamaño muestral, $\hat{\rho}_k^2$ el cuadrado de la autocorrelación muestral para el retardo k -ésimo y h el número de retardos considerados en el test. Bajo H_0 Q sigue una distribución χ^2 con h grados de libertad, tal y como se muestra en Box y Pierce (1970) y Box y Ljung (1978)

El ARCH test de Engle (1982) un test diseñado para comprobar la presencia de efectos ARCH/GARCH sobre la muestra de residuos de una serie temporal. Las hipótesis son

H_0 : Los residuos son gaussianos i.i.d.

H_1 : Los residuos no son gaussianos i.i.d. y presentan efectos ARCH

Dados los residuos obtenidos del ajuste de una curva o modelo, la presencia de efectos ARCH de orden m se testa regresando los cuadrados de los residuos en un constante y m retardos. El estadístico TR^2 , donde T es número de residuos al cuadrado utilizados en la regresión y R^2 es el coeficiente de determinación múltiple de la regresión, se distribuye asintóticamente χ^2 con m grados de libertad bajo la hipótesis nula.

El siguiente paso de este análisis previo es realizar estos tests tanto a la serie de rentabilidades como a la serie de rentabilidades al cuadrado. Esto nos servirá para confirmar que la familia de modelos econométricos es adecuada para nuestros propósitos de modelización. Primero se realiza el test Ljung-Box-Pierce sobre la serie de rentabilidades para varios retardos, resumimos los resultados en la tabla siguiente

Test Ljung-Box-Pierce sobre la serie de Rentabilidades

H₀	P-valor	Valor del Estadístico	Valor Crítico	Nivel del significación	Nº de retardos
Se rechaza	0,002585	27,0206	18,3070	5 %	10
Se rechaza	0,005257	32,6435	24,9958	5 %	15
Se rechaza	0,006714	38,9756	31,4104	5 %	20

Tabla 6. Resultados del test Ljung-Box-Pierce sobre la serie de Rentabilidades

Seguidamente se repite este último test pero sobre la serie de rentabilidades al cuadrado, cuyos resultados se detallan en la Tabla 7.

Test Ljung-Box-Pierce sobre la serie de Rentabilidades al Cuadrado

H₀	P-valor	Valor del Estadístico	Valor Crítico	Nivel del significación	Nº de retardos
Se rechaza	0	402,3932	18,3070	5 %	10
Se rechaza	0	493,0197	24,9958	5 %	15
Se rechaza	0	602,6364	31,4104	5 %	20

Tabla 7. Resultados del test Ljung-Box-Pierce sobre la serie de Rentabilidades al Cuadrado

Por último, y para testar la posible presencia de efectos ARCH/GARCH sobre la muestra de la serie temporal de rentabilidades al cuadrado, se realiza el ARCH test de Engle para varios retardos. Se resumen los resultados en la Tabla 8.

ARCH test de Engle sobre la serie de Rentabilidades al Cuadrado

H₀	P-valor	Valor del Estadístico	Valor Crítico	Nivel del significación	Nº de retardos
Se rechaza	0	1005,07	18,3070	5 %	10
Se rechaza	0	999,65	24,9958	5 %	15
Se rechaza	0	993,79	31,4104	5 %	20

Tabla 8. Test de Engle sobre la serie de Rentabilidades al Cuadrado

En vista del rechazo masivo a las hipótesis nulas, recogidas en las Tablas 6, 7 y 8, parece adecuada la modelización econométrica escogida.

4.3.2 Selección y estimación del modelo

El siguiente paso es seleccionar y estimar diversos modelos de la familia y escoger el mejor. En primer lugar estimamos los modelos más parsimoniosos de cada modelo para la varianza condicional, esto es:

- i. GARCH(1, 1)
- ii. EGARCH(1, 1)
- iii. GJR(1, 1)

Para cada uno de estos modelos se calculan tres índices de la calidad del modelo para seleccionar entre ellos. Los tres índices serán:

1. Valor del logaritmo de la función de verosimilitud, que se denotará por sus siglas en inglés *LLF*, i. e. *Log-Likelihood Function*.
2. Criterio de información de Akaike.
3. Criterio de información de Bayes.

Criterios de Información de Akaike y Bayes

El criterio de información de Akaike (1974) es una medida relativa de bondad del ajuste de un modelo estadístico. Se basa en el concepto de entropía de la información ofreciendo una medida relativa de pérdida de información cuando se ajusta un modelo a datos reales. Por lo que permite comparar y ordenar entre modelos estimados. Dado un conjunto de modelos estimados para una muestra de datos, el modelo con AIC mínimo es el preferido.

El criterio de información de Akaike viene dado por

$$AIC = 2k - 2 \log LF$$

Dónde k es el número de parámetros estimados y LF el valor maximizado de la función de verosimilitud para el modelo considerado. De la definición vemos que es un modelo que, además de ponderar la bondad del ajuste, penaliza de modo creciente por el número de parámetros estimados lo cual evita el sobreajuste.

El criterio de información Bayesiano desarrollado en Schwarz (1978), es también conocido como criterio de Schwarz, y es un índice estadístico de bondad del ajuste. Se utiliza para seleccionar entre modelos y está basado en el logaritmo de la función de verosimilitud y muy ligada al criterio de información de Akaike. El criterio de información de Bayes viene dado por

$$BIC = k \log n - 2 \log LF$$

Dónde k es el número de parámetros estimados, n denota el tamaño muestral y LF el valor maximizado de la función de verosimilitud para el modelo considerado. La gran diferencia con el criterio de Akaike es que este último criterio penaliza aún más el sobreajuste, esto es, el número de parámetros estimados. Al igual que ocurre con el criterio anterior el mejor modelo es aquél con el mínimo criterio de información de Bayes.

Selección del modelo mediante los Criterios de Información de Akaike y Bayes

Como punto de partida se estiman los modelos ARMAX(0,0,0) para la media condicional y los modelos GARCH(1,1), EGARCH(1,1) y GJR(1,1) para la varianza condicional, para las distribuciones de probabilidad condicional gaussiana y t .

Toda la información relevante para la selección del modelo queda resumida³⁹ en las tablas siguientes que recogen el valor de la *LLF*, y los criterios de información de Akaike y de Bayes.

Bondad de Ajuste Distribución Condicional Gaussiana

Modelo	Nº de Parámetros	LLF	Akaike	Bayes
GARCH(1,1)	4	2798,70	-5589,40	-5569,66
EGARCH(1,1)	5	2843,31	-5676,63	-5651,96
GJR(1,1)	5	2836,27	-5662,55	-5637,87

Tabla 9. Bondad de Ajuste Distribución Condicional Gaussiana

Bondad de Ajuste Distribución Condicional t de Student

Modelo	Nº de Parámetros	LLF	Akaike	Bayes
GARCH(1,1)	5	2813,10	-5616,21	-5591,53
EGARCH(1,1)	6	2847,70	-5683,41	-5653,80
GJR(1,1)	6	2841,62	-5671,24	-5641,63

Tabla 10. Bondad de Ajuste Distribución Condicional t

Ahora estimamos modelos con media condicional ARMAX(1,1,0), y de nuevo recopilamos la información relevante en las Tablas 11 y 12

Bondad de Ajuste Distribución Condicional Gaussiana

Modelo	Nº de Parámetros	LLF	Akaike	Bayes
GARCH(1,1)	6	2801,34	-5590,68	-5561,07
EGARCH(1,1)	7	2843,32	-5672,64	-5638,10
GJR(1,1)	7	2836,68	-5659,37	-5624,82

Tabla 11. Bondad de Ajuste Distribución Condicional Gaussiana

³⁹ En el Anexo F se detallan todos los modelos estimados.

Bondad de Ajuste Distribución Condicional *t* de Student

Modelo	Nº de Parámetros	LLF	Akaike	Bayes
GARCH(1,1)	7	2814,09	-5614,18	-5579,63
EGARCH(1,1)	8	2847,86	-5679,72	-5640,24
GJR(1,1)	8	2841,65	-5667,31	-5627,83

Tabla 12. Bondad de Ajuste Distribución Condicional *t*

De los resultados anteriores podemos concluir que los dos mejores modelos son los recogidos en la tabla siguiente

Bondad de Ajuste Mejores Modelos

Media Cond.	Varianza Cond.	Params.	LLF	Akaike	Bayes
ARMAX(0,0,0)	EGARCH(1,1)	6	2847,70	-5683,41	-5653,80
ARMAX(1,1,0)	EGARCH(1,1)	8	2847,86	-5679,72	-5640,24

Tabla 13. Bondad de Ajuste Mejores Modelos

Para discernir entre ambos y al ser modelos anidados, esto es, uno es un modelo restringido respecto del otro, parece adecuado realizar un test de razón de verosimilitudes tal y como se describe en Godfrey (1997). El test de razón de verosimilitudes se basa en el estadístico

$$LLR = 2(LLF_U - LLF_R)$$

Dónde LLR denota el valor del estadístico, LLF_U y LLF_R denotan los valores maximizados del logaritmo de la función de verosimilitud en los casos no restringido y restringido respectivamente. Las hipótesis son:

H_0 : El vector de parámetros pertenece al espacio paramétrico restringido.

H_1 : El vector de parámetros pertenece al espacio paramétrico sin restringir.

Bajo la hipótesis nula el estadístico se distribuye asintóticamente como una χ^2 con grados de libertad igual a la diferencia de dimensión de los espacios paramétricos, esto es, el número de parámetros restringidos.

En este caso se recoge toda la información del test en la tabla siguiente

Resultado Test Razón de Verosimilitud

H₀	P-valor	Valor del Estadístico	Valor Crítico	Nivel del significación
No se rechaza	0,8564	0,3101	5,9915	5%

Tabla 14. Resultado Test Razón de Verosimilitud

Por lo que el mejor modelo sería el primero, como ya indicaban claramente los criterios de Akaike y Bayes. Finalmente se estima el modelo seleccionado cuyos datos se resumen en la Tabla 15

Estimación del Modelo Seleccionado

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			EGARCH(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			<i>t</i> de Student
Número de parámetros estimados			6
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
<i>C</i>	-0,000693161	0,000409426	-1,693007255
κ	-0,234620577	0,054154675	-4,332415944
<i>G</i> ₁	0,971929001	0,006636934	146,4424621
<i>A</i> ₁	0,135052118	0,03291173	4,103464541
<i>L</i> ₁	-0,187731828	0,022032298	-8,520755656
Grados de Libertad	12,24571234	4,989156293	2,454465569

Tabla 15. Estimación modelo seleccionado

Debido a la poca significación estadística del término independiente *C*, podemos estimar un modelo más que sería el mismo pero con el parámetro *C* restringido a cero. De nuevo calculamos todos los estadísticos relevantes para la comparación en la Tabla 16 que se adjunta en la página siguiente.

Bondad de Ajuste Mejores Modelos

Media Cond.	Varianza Cond.	Params.	LLF	Akaike	Bayes
ARMAX(0,0,0)	EGARCH(1,1)	6	2847,70	-5683,41	-5653,80
ARMAX(0,0,0)	EGARCH(1,1)	5	2846,19	-5682,37	-5657,70

Tabla 16. Bondad de Ajuste modelo con y sin término independiente

En vista de que el criterio de Bayes, tal y como recoge la Tabla 16, favorece al último modelo, de nuevo realizamos el test razón de verosimilitudes. Cuyos resultados se adjuntan en la Tabla 17.

Resultado Test Razón de Verosimilitud

H ₀	P-valor	Valor del Estadístico	Valor Crítico	Nivel del significación
No se rechaza	0,0811	3,0419	3,8415	5%

Tabla 17. Resultado Test Razón de Verosimilitud

Por lo que finalmente el modelo escogido es

Estimación del Modelo Seleccionado

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			EGARCH(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			t de Student
Número de parámetros estimados			5
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
κ	-0,209955782	0,051180219	-4,102283769
G_1	0,975952409	0,006067611	160,8462262
A_1	0,132787884	0,032820105	4,045931077
L_1	-0,184017488	0,022117963	-8,319820869
Grados de Libertad	11,42084084	4,350874031	2,624953231

Tabla 18. Estimación modelo seleccionado

4.3.3 Análisis post-estimación y simulación

Una vez estimado el modelo verificamos que mediante los tests ya empleados en la sección 4.3.1 dedicada al análisis previo, a la selección y estimación del modelo, que el modelo escogido tiene todas las propiedades deseables.

En primer lugar, se han analizar las relaciones entre la serie original de rentabilidades y la serie de desviaciones estándar condicionales dado el modelo ajustado cuyos parámetros y estadísticos están recogidos en la Tabla 18. Para ello se realizan los gráficos recogidos en la figura siguiente.

Rentabilidades y Desviaciones Estándar Condicionales

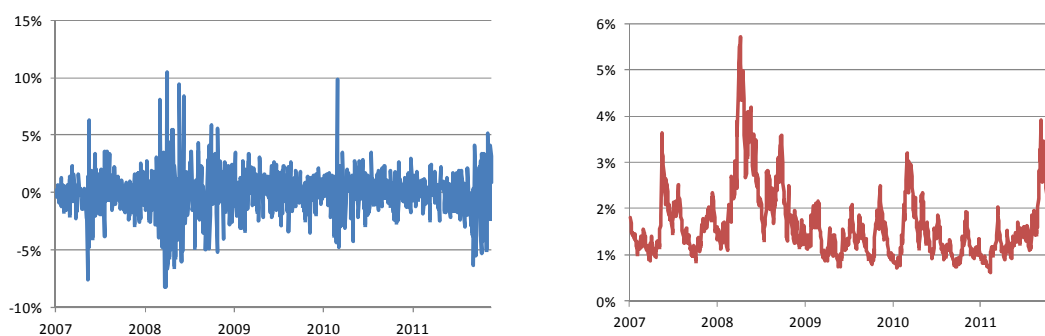


Figura 15: Rentabilidades y Desviaciones Estándar Condicionales

En la Figura 15 se recogen la serie de rentabilidades a la izquierda y a la derecha la serie de las desviaciones estándar de la serie del modelo ajustado. A simple vista aparentemente el modelo es capaz de captar las oscilaciones en la volatilidad de la serie original así como la memoria y persistencia en volatilidad.

Para confirmar las virtudes del modelo que se han intuido del análisis de los gráficos de la Figura 15, lo siguiente es analizar los residuos estandarizados del modelo. Para ello se recogen en la Figura 16 de la página siguiente los gráficos de los residuos estandarizados, izquierda, y su correspondiente función de autocorrelación simple.

Análisis de los Residuos Estandarizados

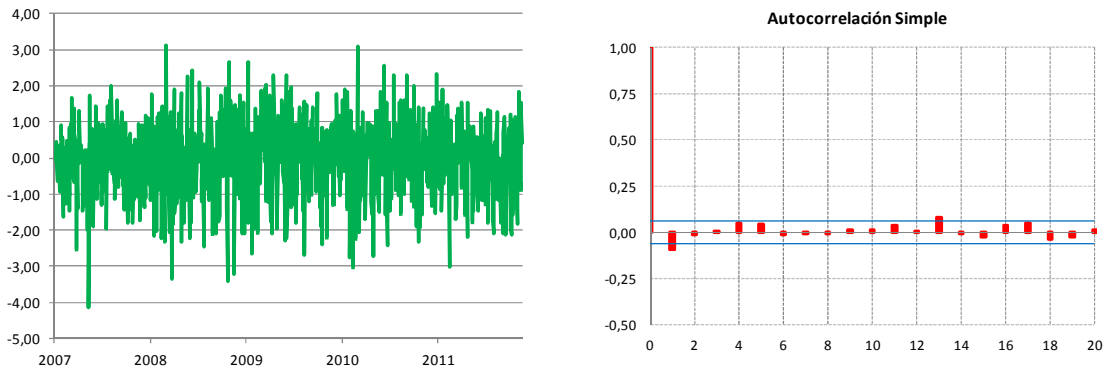


Figura 16. Análisis de los Residuos Estandarizados

Los gráficos recogidos en la Figura 16 parecen confirmar que el modelo estimado es capaz de captar toda esas características de las series financieras relacionadas con la memoria en volatilidad. Pero al igual que se hizo en el análisis previo, es mejor objetivar estas cualidades mediante los tests utilizados para cuantificar la correlación. Con este fin se realizan los tests Ljung-Box-Pierce y ARCH de Engle, sus resultados ser resumen en las Tablas 19 y 20

Test Ljung-Box-Pierce sobre la serie de residuos estandarizados al cuadrado

H ₀	P-valor	Valor del Estadístico	Valor Crítico	Nivel del significación	Nº de retardos
No se rechaza	0,18436	13,7572	18,3070	5 %	10
No se rechaza	0,10497	22,1092	24,9958	5 %	15
No se rechaza	0,0894	28,9169	31,4104	5 %	20

Tabla 19. Test Ljung-Box-Pierce sobre la serie de residuos estandarizados al cuadrado

ARCH test de Engle sobre la serie de rentabilidades estandarizadas al cuadrado

H ₀	P-valor	Valor del Estadístico	Valor Crítico	Nivel del significación	Nº de retardos
No se rechaza	0,1342	14,9410	18,3070	5 %	10
No se rechaza	0,0612	24,2341	24,9958	5 %	15
No se rechaza	0,0820	29,2991	31,41043	5 %	20

Tabla 20. ARCH test sobre la serie de rentabilidades estandarizadas al cuadrado

De los resultados de los tests de las dos tablas anteriores se puede concluir que la modelización es aceptable para la serie financiera considerada.

Por último, el modelo nos permite la simulación Monte Carlo del mismo, pudiendo obtener una vez fijado el horizonte temporal:

- i. Trayectorias en base diaria de la rentabilidad y por tanto del precio del activo subyacente modelizado.
- ii. Histogramas de frecuencia de la rentabilidad acumulada al periodo deseado.

Por ejemplo es posible obtener tantas evoluciones posibles como se desee a un horizonte temporal prefijado. También es posible la obtención de histogramas de rentabilidad acumulada, i. e., distribuciones marginales. Dos gráficos, de cada uno de estos ejemplos, se adjuntan a continuación.

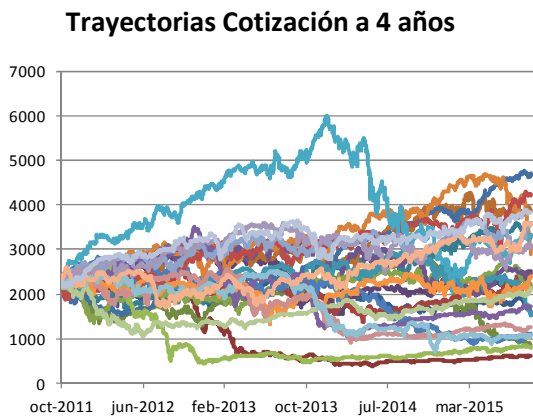


Figura 18: Trayectorias Monte Carlo con salto diario del Modelo Estimado

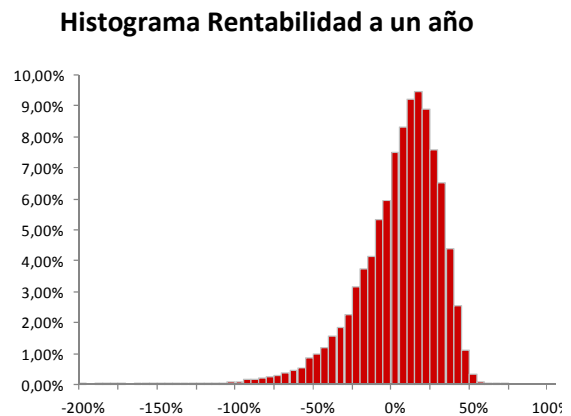


Figura 19: Histograma de la Simulación Monte Carlo de la rentabilidad acumulada a un año

En la Figura 18 se han representado veinticinco trayectorias, en base diaria y hasta cuatro años, obtenidas de la simulación Monte Carlo del modelo escogido. Por su parte, la Figura 19 refleja el histograma de rentabilidad acumulada a un año para varios miles de trayectorias simuladas del modelo escogido. Este último histograma muestra la asimetría de las distribuciones por Monte Carlo de las rentabilidades del modelo econométrico seleccionado para el subyacente.

5 Valoración y Cobertura por ERM de opciones *Cliquet*

5.1 Introducción

En este capítulo analizaremos las propiedades de la metodología de ERM como estimador de cobertura estática, tal y como se destaca en Arrieta (2012) y fue detallado en la sección 3.5.3, y también las propiedades como medidor de la bondad de dicha cobertura estática en un caso práctico concreto que es el objetivo de esta tesis. Para ello se va a aplicar la metodología a un tipo de opciones exóticas denominadas *Cliquet* o *Ratchet*.

Como ya se expuso en el tercer capítulo, la ERM es una metodología general que se basa en minimizar la entropía relativa entre una distribución de probabilidad a priori y otra a posteriori, de modo que se satisfacen un número finito de restricciones sobre los momentos de la distribución a posteriori. Los momentos o restricciones, serán los precios de mercado de los instrumentos de utilizados para la cobertura de la opción. En general serán el propio subyacente, futuros y opciones europeas estándar a los vencimientos de mercado⁴⁰.

A estos resultados por ERM se les añadirá algunos resultados de la metodología de cobertura media-varianza inicialmente propuesta por Föllmer y Sondermann (1986), y posteriormente extendida por diversos autores como Duffie y Richardson (1991), Schweizer (1992, 1996), Schäl (1994), Gouriéroux et al. (1998), Pham et al. (1998) y Laurent y Pham (1999). Esta metodología media-varianza ha sido adaptada e implementada al método Monte Carlo por Bouchaud, Potters y Sestovic (2001), a la que han denominado técnica *Optimal Hedge Monte Carlo*.

Con estas herramientas se da una solución, que además se puede implementar en la práctica, para el problema de valoración y sobre todo, de cobertura de las opciones *Cliquet*.

⁴⁰ O incluso a las fechas relevantes para el cálculo del *Payoff*

5.2 Opciones Cliquet

5.2.1 Características generales

Este tipo de opciones fueron durante finales del siglo XX y la primera década del XXI la última moda en el mundo de los derivados de renta variable. El *payoff* general de este tipo de opciones viene dado por

$$P = N \cdot \max \left(C + \sum_{i=1}^n \max(\text{Floor}_i, \min(R_i, \text{Cap}_i)), \text{GlobalFloor} \right) \quad (5.1)$$

Siendo $R_i = \frac{S_i}{S_{i-1}} - 1$ la rentabilidad simple obtenida de los precios del subyacente S_i y S_{i-1} correspondientes a los períodos $i-1$ e i . N denota el nominal de la opción, C es una constante, Floor_i y Cap_i denotan los límites inferior y superior a la rentabilidad para el período i -ésimo. Por último, la suma de estas rentabilidades tiene un límite inferior denotado por *GlobalFloor*.

Derivados con *payoffs* de la familia dada por (5.1) eran atractivos para los inversores por su protección contra el riesgo de caída pero sin renunciar a cierta exposición potencial alcista. Este tipo de productos con varios niveles límite al alza, los *Caps*, y a la baja, los *Floors*, implican que los *payoffs* no son nunca demasiado extremos ni a al alza ni a la baja, por lo que sus precios no son demasiado elevados.

Tres casos particulares del *payoff* dado por 5.1 han sido los que más han proliferado en el mercado de derivados *OTC* de renta variable, en la tabla siguiente se resumen sus características principales.

<i>Nombre</i>	C	Cap_i	Floor_i
<i>Cliquet</i> o <i>Ratchet</i>	Cero	Mayor que cero	Menor que cero
<i>Reverse Cliquet</i>	Mayor que cero	Cero	-100 %
<i>Napoleon Cliquet</i>	Mayor que cero	$\begin{cases} R_{\min} & \text{si } R_i = R_{\min} \\ 0 & \text{si } R_i \neq R_{\min} \end{cases}$ donde $R_{\min} = \min_i R_i$	Igual que el Cap_i

Tabla 21. Tipología de Opciones *Cliquet*

En todos ellos el *GlobalFloor* se solía fijar como cero o como una pequeña rentabilidad mínima positiva garantizada en algunos casos.

5.2.2 Riesgo de volatilidad

Desde el punto de vista del vendedor de este tipo de opciones, esto es, desde la perspectiva del que tiene que cubrir el derivado y minimizar el riesgo mediante la cobertura delta, el máximo peligro al que se enfrenta es la exposición al riesgo de volatilidad. Sin embargo, este tipo de derivado tiene una dependencia muy sutil de la modelización que se haga sobre la volatilidad. La técnica habitual de cobertura del riesgo de volatilidad es mediante el cálculo de la vega, i. e., la derivada del precio de la opción respecto de la volatilidad. La vega puede ser utilizada para determinar una cobertura del citado riesgo, pero esto sólo funciona en el caso de las opciones estándar listadas, cuya hipótesis es de volatilidad constante. Pero, como veremos más adelante, al igual que ocurría en los ejemplos del capítulo segundo, un único parámetro de volatilidad no explica el riesgo de volatilidad de las opciones *Cliquet*. Como bien demuestra Taleb (1997), cualquier derivado cuya Gamma cambia de signo, la Vega suele ser precisamente muy pequeña en esos niveles donde la sensibilidad a la verdadera volatilidad es muy grande. Este hecho que es anti intuitivo a primera vista, puede ser explicado, y se debe a que la Vega asumiendo que la volatilidad es constante no es una buena medida de dicho riesgo de volatilidad. Como primer ejemplo veamos la representación gráfica respecto de S_i de una pieza de la suma dada por (5.1)

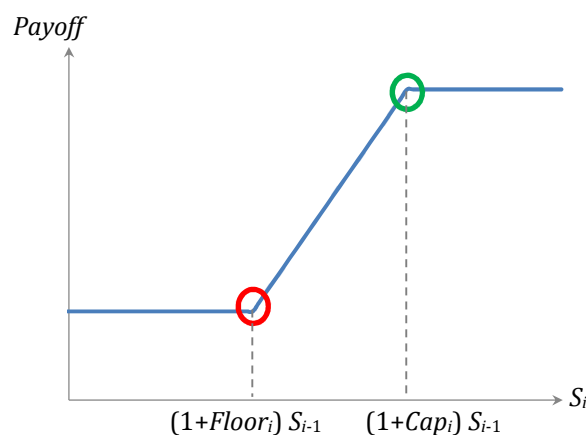


Figura 20: Componente i -ésimo de un *Cliquet*

Claramente la Gamma tiene signo contrario para los valores del subyacente cercanos al *Floor* que en los valores cercanos al *Cap*, remarcados en el gráfico en rojo y verde respectivamente. Por lo que el punto de inflexión de la Gamma se encontrará entre estos niveles. Además, y esto es lo que hace la dependencia de la volatilidad sea tan compleja, es que los niveles a los que se está expuesto, esto es $(1+Floor_i)S_{i-1}$, $(1+Cap_i)S_{i-1}$ y el punto de inflexión de la Gamma, sólo son conocidos con un periodo de antelación, antes son una variable aleatoria dependiente de S .

Por esto, un primer punto a tener en cuenta es que las opciones *Cliquet* están expuestas al riesgo del *smile* de la volatilidad *forward* y por tanto cualquier modelo determinista de la Superficie de Volatilidad calibrado a los precios de mercado de opciones *vanilla* no va ser capaz de modelizar todo este riesgo de volatilidad. Esto ha provocado que en la valoración del *Cliquet* no haya un consenso de mercado, como muy bien se ha expuesto en Patel (2002).

Un segundo punto importante es el referente a la gestión dinámica del riesgo de volatilidad. Jeffery (2004) analiza como modelos erróneos de valoración llevaron a la infraestimación del coste de gestión dinámica de este riesgo de volatilidad provocando pérdidas millonarias en la gestión de *Cliquet Reverse* y *Napoleon*. Los más afectados fueron Goldman Sachs, Natexis Banques Populaires y NIBC Petercam Derivatives. De hecho, Goldman Sachs que dio precios muy agresivos durante 2002 tuvo que acudir al mercado a cubrir gran parte de estos riesgos de volatilidad durante comienzos de 2003. Por otra parte, Natexis dio una pérdida de 118 millones de € en productos estructurados de renta variable en 2002, y NIBC Petercam Derivatives se vio abocado al cierre a mediados de 2005 por sus pérdidas de más de 60 millones de € en su libro de derivados exóticos de renta variable.

Una de las claves de la gestión dinámica del riesgo de volatilidad se puede medir mediante la *Volga*⁴¹, ésta se define como

$$Volga \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \sigma}$$

Siendo V la función valor teórico de un derivado emitido sobre el subyacente S . Como se deduce de la definición la *Volga* es la sensibilidad de la Vega a cambios en la volatilidad. Las opciones *Cliquet*, y sobre todo los casos *Reverse* y *Napoleon* tienen *Volga* negativa, esto implica que los vendedores de estos productos necesitan comprar volatilidad cuando ésta aumenta y venderla cuando baja. O lo que es igual, quienes

⁴¹ También conocida como Vomma o Volgamma.

estén vendidos de estos productos estarán largos de Vega cuando la volatilidad sea baja, y cortos cuando sea alta, por lo que si se pretende reducir el riesgo de volatilidad se está abocado a comprar volatilidad cara y venderla barata. Además, la volatilidad al ser menos líquida que el propio subyacente, tiene horquillas más amplias, lo que incrementa aún más el coste de cobertura.

5.2.3 Valoración y cobertura en la literatura financiera

Como se acaba de exponer, el primer aspecto más importante para la valoración de las opciones *Cliquet* es la estimación del *smile forward*, o lo que es igual la valoración de las opciones *forward start* implícitas en el producto. El segundo aspecto fundamental es la ponderación que de cada una de estas opciones *forward start* se hace. Esta ponderación está determinada por el *floor* global de la estructura y la suma de las rentabilidades acumulada considerando los *caps* y *floors* locales si ha pasado al menos una fecha de fijación.

En este apartado vamos a resumir el enfoque que se la ha dado en la literatura a la valoración y cobertura de este tipo de opciones.

La valoración de opciones *forward start* fue abordada primeramente por Rubinstein (1991), quién simplemente utilizó los datos *forward* implícitos de volatilidad, tipos, y dividendos, para una opción de tiempo a vencimiento igual al tiempo de vida efectivo una vez comenzada la opción y para un *spot* igual al precio *forward* del subyacente para la fecha de inicio del contrato. Esta metodología es ampliamente utilizada en la actualidad para la valoración de opciones *vanilla forward start*, pero para periodos *forward start* que no superen los dos o tres meses. Este es uno de los motivos por los que esta solución no es satisfactoria para opciones *Cliquet*.

Buetow (1999) valora bajo la estructura Black-Scholes-Merton, incluyendo además estructuras temporales tanto de tipos como de volatilidad y descarta un modelo de dos factores cuyo segundo factor modeliza el tipo de interés.

Wilmott (2003) utiliza los denominados *Uncertain Volatility Models*, basándose en los trabajos de Avellaneda et al. (1995, 1996) y de Lyons (1995).

Forsyth et al. (2004) analizan tres métodos de valoración: *Jump Diffusion* de Merton, Volatilidad Local y de nuevo el *Uncertain Volatility Model*. Eales y Tunaru (2004) utilizan la metodología de valoración BSM y además el modelo de volatilidad local

CEV pero para el caso de *Cliquets* sobre tipos de interés. Tor (2004) propone la valoración BSM, utilizando la transformada de Fourier.

Den Iseger y Oldenkamp (2005) desarrollan algoritmos muy eficientes desde el punto de vista computacional para la valoración y el cálculo de griegas bajo las metodologías BSM, *jump diffusion* y volatilidad estocástica.

Lidebrandt (2007) expone tres métodos de variables de control para valoración de asiáticas y *Cliquet* para un Monte Carlo determinista.

Gaudenzi y Zanette (2008) proponen el uso de árboles, estilo Cox-Ross-Rubinstein, para la valoración. Matosek (2008) analiza, sin precisar demasiado, la cobertura de *Cliquets* mediante *call spreads*, no dando una justificación clara del motivo de la elección de estos instrumentos de cobertura, y con la clásica cobertura delta. Hace estos tests en tres hipótesis, volatilidad constante, volatilidad estocástica y bajo un supuesto modelo dinámico de la superficie de volatilidad.

Petrelli et al. (2008) proponen la técnica de *Optimal Hedge Monte Carlo* para cobertura de *reset strike puts*, a los que también denominan *Cliquets* pero no con la definición dada por (5.1), no obstante la filosofía del *Optimal Hedge Monte Carlo* es muy interesante y parte es utilizada más adelante en este capítulo.

En su tesis Kilin (2009) analiza los modelos de volatilidad estocástica de Heston, Bates y Bardorff-Nielsen y Shephard, y asimismo, los modelos de Levy con régimen de tiempo estocástico. Aplica todos estos modelos a la valoración, cobertura y análisis de riesgo de opciones *forward start*, *variance swaps*, *volatility swaps*, opciones sobre la varianza realizada, *reverse cliquets*, *accumulators* y *Napoleon cliquets*.

Otra tesis, Bevhand (2010) analiza instrumentos financieros cuyos precios dependen del *smile forward* de volatilidad. Considera como paradigma de este tipo de instrumentos los *cliquet* con *floor* global. En primer lugar analiza los modelos estándar de volatilidad constante a la BSM, y también los de volatilidad local. Posteriormente, analiza el modelo *Discrete Stochastic Implied Volatility* (DSIV). Este modelo determina el dinamismo del *smile forward* directamente en tiempos discretos, lo que le confiere un mayor realismo y control sobre la dinámica del *smile*. Posteriormente utiliza este modelo para la valoración de *cliquets* y hace una comparativa contra los precios que dan los estándares de mercado.

En su artículo Madan y Schoutens (2010) testan contra 246 precios de Mercado de *cliquets* cuanto de su riesgo puede ser cubierto mediante opciones *vanilla*. Para ello ajustan procesos de Sato que pasan a procesos de Levy.

En resumen, excepto la metodología utilizada por Petrelli et al. (2008), todos los autores utilizan tres modelos de valoración: BSM, Volatilidad Local y Volatilidad Estocástica. Estos tres modelos son siempre calibrados a mercado, esto es, son modelos de valoración riesgo neutro cuyas implicaciones para la cobertura de las opciones *Cliquet* se han considerado de forma implícita, lo cual dificulta una aplicación práctica eficiente y comprensible por parte de los *traders* usuarios de estos modelos.

Como ya se adelantó en la introducción del presente capítulo, la solución propuesta en esta tesis se basa en una combinación de la metodología ERM con algunos resultados de cobertura media-varianza⁴² implementados vía *Optimal Hedge Monte Carlo*. En el siguiente apartado se detallan los motivos de esta elección así como la implementación y funcionamiento de esta nueva metodología híbrida.

5.3 Solución a la valoración y cobertura de opciones cliquet

Como acabamos de ver las soluciones dadas en la literatura financiera a la problemática de planteada por las opciones *Cliquet* se basan mayoritariamente en utilizar métodos de valoración que incorporen de algún modo la información de mercado, esto es, la Superficie de Volatilidad. Esto es debido a la exposición implícita de este tipo de opción a los *smiles forward* de volatilidad, y que como vimos anteriormente, es muy relevante para la valoración y la cobertura. La mayoría de autores proponen modelos de volatilidad estocástica como solución para incorporar *smiles forward* realistas puesto que los modelos de volatilidad local como norma general dan lugar a *smiles forward* muy aplanados.

Bien, llegados a este punto, se ha de escoger un modelo, que refleje bien la superficie de volatilidad actual, y también, si es posible que genere *smiles forward* realistas. Schoutens, Simons y Tistaert (2004), analizan una serie de modelos cuyo ajuste a la superficie de volatilidad de mercado, esto es, a los precios de las opciones *vanilla* cotizadas en el mercado es prácticamente perfecto. Para ello utilizan procesos de Levy⁴³ y les añaden volatilidad estocástica. Los modelos de volatilidad estocástica que utilizan son los clásicos: Heston, Heston con saltos, procesos de reversión a la media Ornstein–

⁴² Cuyos detalles técnicos se adjuntan en el Anexo B

⁴³ Principalmente procesos Variance-Gamma y modelos de Barndorff-Nielsen y Shephard.

Uhlenbeck y procesos Cox-Ingersoll-Ross. Los resultados que obtienen son recogidos en la Tabla 22.

Modelos Calibrados a Mercado y su Error Medio⁴⁴

Modelo	Acrónimo	Error
Black-Scholes-Merton de volatilidad constante	BS	13.48 %
Meixner	MEIXNER	8.36 %
Volatilidad estocástica a la Heston	HEST	1.74 %
Volatilidad estocástica a la Heston más saltos	HEST-J	1.26 %
Barndorff-Nielsen y Shephard	BN-S	2.21 %
Variance-Gamma con Cox-Ingerson-Ross	VG-CIR	1.06 %
Variance-Gamma con OU Gamma	VG-OUG	1.90 %
Normal Inverse Gaussian con Cox-Ingerson-Ross	NIG-CIR	0.99 %
Normal Inverse Gaussian con OU Gamma	NIG-OUG	1.75 %

Tabla 22. Modelos Calibrados a Mercado y su Error

Fuente: Schoutens, Simons y Tistaert (2004)

Una vez calibrados, utilizan los mejores modelos para valorar las siguientes opciones exóticas:

- i. *Call barrera Down-and-Out (CDO)*
- ii. *Call barrera Up-and-In (CUI)*
- iii. *Call Lookback*
- iv. Barreras digitales
- v. *Cliquets*

En el caso concreto de las opciones *Cliquet*, analizan dos, ambas sobre el índice DJ Euro Stoxx 50 y con vencimiento a tres años. La primera con las características siguientes: $C = 0$, $Floor_i = -8\%$, $Cap_i = 8\%$, y $n = 3$, esto es, tres fijaciones anuales. En este primer ejemplo, la máxima diferencia que se da para un *floor* global nulo, viene dada entre los modelos NIG-OUG y HEST, y ésta es igual a 1.73% lo que para un rango de precios de entre 6.64% y 8.37% es muy elevada. Por otra parte, y como no podía ser de otra manera, cuanto mayor es el *floor* global menor es la diferencia puesto que la

⁴⁴ Media del valor absoluto de la diferencia de precios entre el mercado y el modelo, sobre el precio de mercado.

opción converge al valor del *floor* descontado ya que el componente de renta fija absorbe todo el valor del derivado.

Todas estas características viene reflejadas en la representación gráfica del precio de la opción en función del *floor* global, y que se muestra a continuación.

Precio del *Cliquet* 1 bajo diferentes modelos

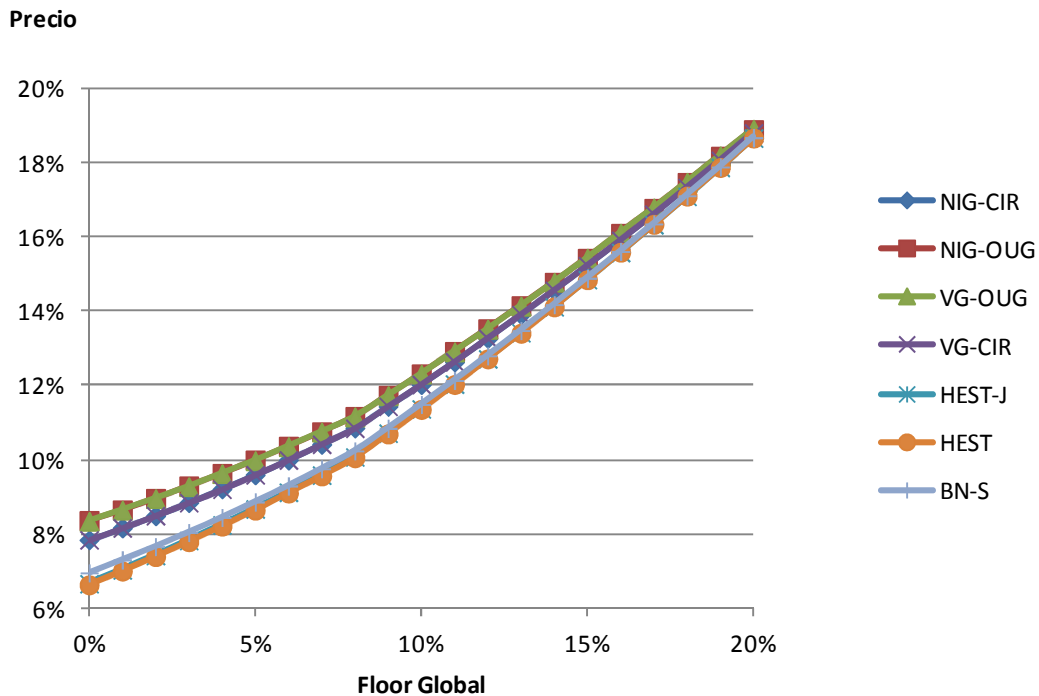


Figura 21: Precio del *Cliquet* 1 bajo diferentes modelos

Fuente: Schoutens, Simons y Tistaert (2004)

La segunda opción *Cliquet* analizada está determinada por las características: $C = 0$, $Floor_i = -3\%$, $Cap_i = 5\%$, y $n = 6$, esto es, consta de seis fijaciones una en cada semestre.

En este segundo ejemplo, la máxima diferencia se da de nuevo para un *floor* global nulo. Dicha diferencia máxima viene dada entre los modelos VG-OUG y HEST-J, y ésta es igual a 4.07% para un rango de precios de entre 7.24% y 11.31%. Como se ve esta diferencia es aún más elevada que en el caso del primer *Cliquet*.

De nuevo todas estas características se ven reflejadas en la representación gráfica del precio de la opción en función del *floor* global, y que se adjunta a continuación.

Precio del *Cliquet 2* bajo diferentes modelos

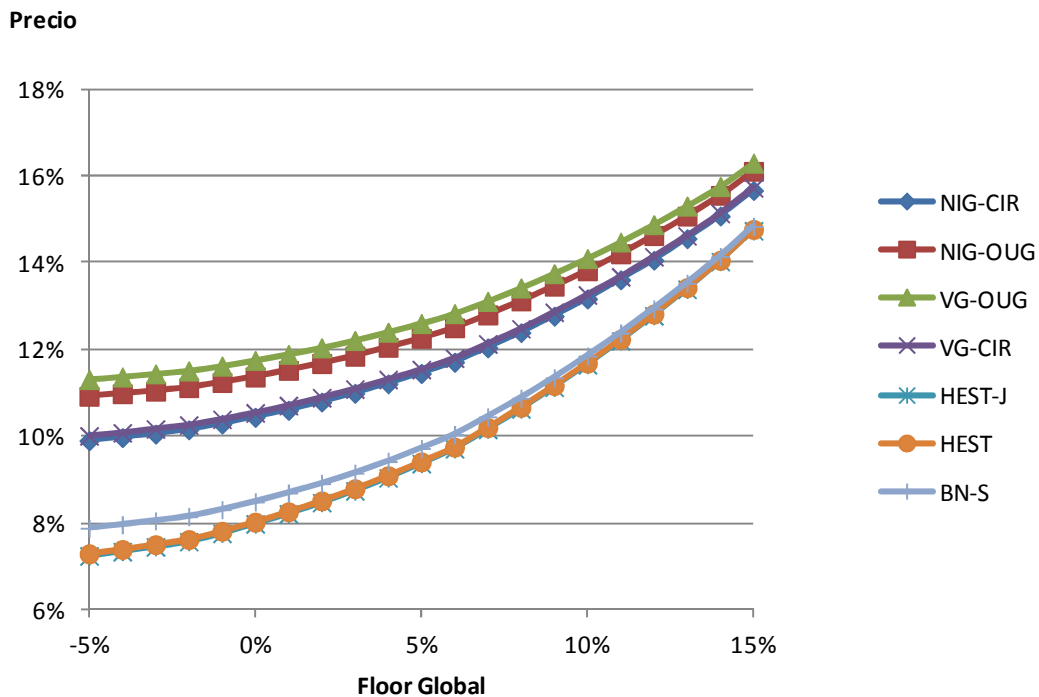


Figura 22: Precio del *Cliquet 2* bajo diferentes modelos

Fuente: Schoutens, Simons y Tistaert (2004)

Como primera conclusión podemos ver que el ajuste a mercado es un requisito que cumplen la gran mayoría de estos modelos. Esto no debe sorprendernos puesto que como sabemos desde el trabajo seminal de Breeden y Litzenberger (1978), la información de mercado implícita en los precios de las opciones sólo determinan unívocamente las distribuciones marginales de probabilidad del subyacente a cada vencimiento pero no dan ninguna información acerca de las probabilidades de transición entre los diversos vencimientos.

La siguiente conclusión es que tenemos un conjunto de modelos que se ajustan muy bien a los datos de mercado, pero ¿son sus parámetros estables?, en su tesis Nykvist (2009) analiza en detalle la consistencia temporal del modelo de volatilidad estocástica de Heston (1993) y del modelo de volatilidad local de Dupire (1994). Para ello, estima cada día ambos modelos respecto de los datos de mercado de opciones durante unos doscientos días hábiles. Llegando a las mismas conclusiones que Schoutens, Simons y Tistaert (2004), esto es, que los modelos reflejan bastante bien la superficie de

volatilidad. Pero, en la segunda parte de la tesis, que trata de la estabilidad en el tiempo de los modelos, los resultados no son tan satisfactorios. Esto se debe a que bajo condiciones no estables de mercado, las fluctuaciones de dicho mercado conllevan una fuerte oscilación en los valores de los parámetros lo que implica una gran inconsistencia temporal en los modelos.

En resumen, todos estos modelos analizados por Schoutens, Simons y Tistaert (2004) tanto como los basados en volatilidad local carecen de la estabilidad necesaria para calcular precios y ratios de cobertura estables y coherentes por lo que la solución que se propone en la tesis se basa la metodología *Optimal Hedge Monte Carlo* más la metodología ERM apoyada en los resultados de Schäl (1994) para cobertura media-varianza.

5.3.1 Optimal Hedge Monte Carlo

La técnica de valoración de derivados *Optimal Hedge Monte Carlo*, de ahora en adelante OHMC, es una metodología que se basa en optimizar la cobertura de una cartera de instrumentos financieros derivados emitidos sobre un subyacente. Este enfoque ha sido desarrollado por Bouchad et al. (2001), basándose en los trabajos de Schweizer (1992), Pham et al. (1998) y Laurent y Pham (1999). Todos estos artículos se basan en el análisis explícito de la estrategia de cobertura dinámica para obtener el coste de replicación de la cartera objetivo.

En la valoración mediante OHMC el activo subyacente es simulado basándose en un modelo que trata de capturar las características del proceso real. Los ratios de cobertura y las funciones de valoración son buscadas en cada paso temporal de la simulación de modo que la posición total, cobertura más el derivado, sea lo menos volátil posible entre intervalos de cobertura. La estimación numérica de la cobertura se comienza en el paso temporal inmediatamente anterior al vencimiento. Los ratios de cobertura y las funciones de valoración son soluciones a un problema de minimización de una medida del error estadístico de cobertura entre dos pasos temporales, todo esto con la restricción de mantener la posición con la menor variabilidad posible en media.

Por ello la metodología OHMC es muy interesante desde el punto de vista práctico puesto que se pone en el lugar de un *trader* de derivados que intenta replicar el *payoff*

de la opción que tenga en cartera. Al igual que el *trader* la metodología OHMC también analiza el riesgo residual que viene asociado a todo este proceso de cobertura, al mismo tiempo que ofrece información sobre los costes en media de implementar dicha cobertura. Todo esto es posible al basarse en la distribución real del subyacente y no en una distribución de probabilidad *riesgo neutro* calibrada a mercado de modo que sirva sólo para valorar. De hecho, el enfoque riesgo neutro, basado en la replicación continua y perfecta, está limitada a casos muy concretos y situaciones ideales de mercado que muy rara vez se dan en la práctica. Algunas de estas limitaciones ya ha sido analizadas en capítulos previos de la tesis y son los que causan la aparición de la superficie de volatilidad.

Por otra parte, el análisis y conocimiento explícito del riesgo residual asociado con las estrategias de cobertura de que se estén llevando a cabo para la cartera de derivados es de suma importancia para el gestor del libro puesto que le ayuda a tener una exposición rentabilidad-riesgo deseada por él, y le ayudará en la toma de decisiones de añadir o no nuevos instrumentos a su cartera. Por tanto, se puede resumir que la OHMC se centra en las estrategias de cobertura, sus costes esperados y su riesgo residual.

Es importante recordar que la idea central de la replicación de derivados es la determinación del coste asociado a las estrategias de cobertura que eliminan el riesgo. Sin embargo, la valoración *riesgo neutro* se limita a tomar esperanzas de los *payoffs* de las opciones bajo esa herramienta que es la medida de probabilidad riesgo neutral, sin explicitar todo el proceso de cobertura que implícitamente se asume alcanzable en esta metodología. Esta última metodología no distingue entre las opciones que son difíciles de cubrir de las que no lo son. La gran ventaja es que ofrece una forma de valoración objetiva e independiente del funcionamiento real de la cobertura, ¿pero entonces se están midiendo bien los riesgos?, ¿y qué ocurre con los valores contables de los derivados?, todas estas cuestiones darían para varias tesis cada una, pero para nosotros son razones más que suficientes para utilizar otra metodología de valoración, máxime cuando el objeto de cobertura, las opciones *Cliquet*, es tan complicado de cubrir.

5.3.2 Solución propuesta

La solución propuesta para el problema de valoración y cobertura de las opciones *Cliquet* se basa en tres pilares que están interrelacionados entre ellos:

- i. Implicaciones de cobertura de la ERM
- ii. Modelo de evolución del subyacente, que refleje la filosofía OHMC y además sea la distribución a priori para la aplicación de la ERM
- iii. Cobertura media-varianza, teniendo en cuenta los instrumentos de mercado, la equivalencia de funciones de pérdida Schäl (1994) y el ajuste de la distribución de probabilidad mediante ERM

Implicaciones de cobertura de la ERM

Recordemos que como ya vimos en detalle en el tercer capítulo y en concreto en la sección 3.5.3, la metodología ERM se aplicaba para a partir de una densidad de probabilidad a priori, denotada por f_0 , y unas restricciones sobre los momentos que se deseaba imponer

$$\int g_j(x)f(x)dx = C_j \quad j = 1, \dots, n$$

Donde g_j y C_j son funciones y números dados respectivamente, y n denota el número de restricciones. El objetivo es obtener una nueva densidad de probabilidad a posteriori f que verificando las restricciones impuestas sea lo más cercana a la densidad a priori f_0 . Si la función de pérdida utilizada es la ERM, entonces implicaba que

$$E_f[h(x)] = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)] \quad (5.2)$$

Dónde h denota una nueva función para la que se desea calcular su esperanza sobre la nueva medida de probabilidad, siendo el término independiente

$$\beta_0 = E_f[h(x)] - \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)]$$

Y el vector de coeficientes

$$\boldsymbol{\beta} = \text{cov}_f(h(x), \mathbf{G}(x)) [\text{cov}_f(\mathbf{G}(x), \mathbf{G}(x))]^{-1}$$

Donde \mathbf{G} denota la matriz cuyas columnas son las g_j , y cov_f es el operador covarianza tomado sobre la nueva medida de probabilidad.

Todos los detalles sobre la forma de la nueva densidad de probabilidad a posteriori f fueron detallados en el tercer capítulo, asimismo en el Anexo A se adjunta un algoritmo de cálculo de f en el caso Monte Carlo, que es el que utilizaremos a lo largo de lo que sigue de tesis.

Pasemos a la interpretación financiera, siguiendo a Arrieta (2012), las funciones g_j son los *payoffs* de los instrumentos de mercado, futuros y opciones que se desea que el método valore bien, esto es acorde a los precios dados en el mercado, los C_j . Por su parte la función h denota el *payoff* de la opción que no es de mercado y se desea valorar. Recordemos también la propiedad más importante de (5.2), y es que implícitamente se está descomponiendo h en las funciones base g_j , siendo lineal la relación entre h y las funciones base, lo que permite la interpretación

$$h(x) = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x) + \varepsilon \quad (5.3)$$

Donde ε denota el error o diferencia entre la combinación lineal de las funciones base g_j y la función h . Financieramente para nuestro problema de valoración además estamos dando una cobertura estática a vencimiento del *payoff* objetivo h mediante los distintos instrumentos de mercado g_j .

Modelo de evolución del subyacente

El siguiente paso es determinar la distribución de probabilidad a priori. Como además vamos a utilizar simulaciones de Monte Carlo de nuestra densidad a priori esto nos permite adoptar los enfoques OHMC y *Weighed Monte Carlo*, que es el nombre que le dieron Avellaneda et al. (2001) a la metodología ERM aplicada a una densidad a priori que sea una simulación de Monte Carlo.

La familia de modelos que fueron propuestos en el cuarto capítulo son los modelos econométricos dados por los procesos de media condicional $\text{ARMAX}(R, M, Nx)$. Y la varianza condicional la modelizaremos con un modelo de la familia *GARCH*: *GARCH*, *GJR* y *EGARCH*.

Para nuestro subyacente concreto, el DJ Euro Stoxx 50, recordemos que utilizamos el modelo para la media condicional ARMAX(0,0,0)

$$y_t = \varepsilon_t$$

Y la varianza condicional del término ε_t , $Var_{t-1}[y_t] = E_{t-1}[\varepsilon_t^2]$, que denotaremos por σ_t^2 y la modelizaremos con un modelo EGARCH(1,1), con distribución de probabilidad t de Student con ν grados de libertad, $\nu > 2$. Viene dada por:

$$\log \sigma_t^2 = \kappa + G_1 \log \sigma_{t-1}^2 + A_j \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{\frac{\nu-2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right] + L_1 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right)$$

En concreto, las estimaciones halladas en el capítulo anterior fueron

κ	G_1	A_1	L_1	ν
-0,209955782	0,975952409	0,132787884	-0,184017488	11,42084084

Tabla 23. Estimaciones Parámetros del Modelo de Evolución

Cobertura media-varianza

Por último nos falta el pilar de la cobertura media-varianza, y para ellos nos basaremos en los trabajos de Schäl (1994).

El punto de partida es un modelo general en tiempo discreto. El activo subyacente se modeliza mediante un proceso estocástico X_k definido en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , \mathcal{F}_k denota la σ -álgebra de los sucesos hasta tiempo k , con él incluido, esto es $k = 1, 2, \dots, T$. Sea H la función *payoff* en el vencimiento T sobre X_T . Para la cobertura o replicación de H se crea una cartera, V , tal que

$$V_t = \xi_t X_t + \eta_t$$

Dónde V_t denota el valor de la cartera en tiempo t , ξ_t denota el número de acciones de X compradas en tiempo $t - 1$, \mathcal{F}_{t-1} medible, i. e., predecible, y por último η_t denota el dinero en efectivo que se pone en la cuenta bancaria en t , \mathcal{F}_t medible, i.e., adaptado). Se asume para simplificar la notación que los tipos de interés son cero.

También se impone una condición final sobre V

$$V_T = H$$

Esto siempre se consigue mediante la flexibilidad obtenida de η_t , y por tanto la autofinanciación no está garantizada.

El coste acumulado de la estrategia, denotado por C_t , viene dado por

$$C_t = V_t - \sum_{j=1}^t \xi_j \Delta X_j$$

El riesgo local se define como

$$E[(C_{t+1} - C_t)^2 / \mathcal{F}_t] = E[(V_{t+1} - V_t - \xi_{t+1} \Delta X_{t+1})^2 / \mathcal{F}_t] \quad (5.4)$$

Un análisis más detallado de toda esta metodología de cobertura media-varianza, se detalla en el Anexo B.

Es también interesante analizar la relación entre las medidas de riesgo locales y las globales. La función de pérdida a minimizar era el riesgo local definido en (5.4). Schäl (1994) demostró que las siguientes funciones de pérdida cuadráticas

- i. $E[(C_{t+1} - C_t)^2 / \mathcal{F}_t]$
- ii. $E[(C_T - C_t)^2 / \mathcal{F}_t]$
- iii. $E[(C_T - C_0)^2 / \mathcal{F}_t]$

son equivalentes bajo determinadas condiciones en el proceso estocástico del subyacente X en tiempo discreto.

En concreto la condición, que es suficiente, se puede resumir en que

$$E[X_{t+1} / \mathcal{F}_t] = X_t \quad (5.5)$$

i. e., que X sea una martingala.

Llegados a este punto, es importante reseñar que la condición de martingala dada por (5.5), la tenemos garantizada al ser el modelo para la media condicional un ARMAX(0,0,0), pero para que esto fuera así se han estimado varios modelos y se ha testado que la constante en la ecuación de la media condicional sea estadísticamente nula.

En caso de que no se cumpla la condición de martingala hay que recordar que las condiciones dadas por Schäl (1994), y recogidas las más importantes en el Anexo B, son suficientes y que la condición de martingala es aún más restrictiva que éstas. Por lo que el no cumplimiento de (5.5) no implica la imposibilidad de la equivalencia entre las tres funciones de pérdida cuadrática consideradas.

Funcionamiento conjunto de las tres metodologías de la solución propuesta

Una vez determinadas las herramientas que van a ser utilizadas, el funcionamiento de la metodología híbrida propuesta sería como sigue:

1. Estimación del mejor modelo posible para la evolución real del subyacente, intentando en la medida de lo posible que se verifique (5.5).
2. Simulación de Monte Carlo del modelo para todas las fechas relevantes para la cobertura.
3. Ajuste de las ponderaciones de cada trayectoria mediante ERM para incorporar la información de mercado, esto es, los *payoffs* g_j y los precios C_j de los instrumentos que se van utilizar para la cobertura.
4. Valoración del *payoff* de la opción objetivo h mediante la relación (5.2).
5. Análisis de la descomposición, cobertura y error, del *payoff* de la opción objetivo h mediante la relación (5.2).
6. En caso de que el riesgo residual sea elevado, o no se ajuste a lo esperado, se vuelve al paso 3 con nuevos instrumentos de cobertura que parezcan más adecuados.
7. Si se ha conseguido descomponer exactamente la opción objetivo mediante los instrumentos de cobertura, esto es, no hay error y por tanto el término ε de la ecuación (5.3) es nulo para todos los estados, ya se ha obtenido el precio exacto de mercado del derivado objetivo. Si no se ha conseguido, esto es, el término ε de la ecuación (5.3) no es nulo para todos los estados, se ha de analizar el riesgo de los estados para los que el término ε no se anula bajo la medida de probabilidad real.

Para una mayor clarificación del funcionamiento de la solución se describen a continuación unos ejemplos de opciones *Cliquet* con datos reales.

5.3.3 Implementación práctica para opciones *Cliquet*

En todos los casos se van analizar posiciones en las que se ha de replicar el pago del *Cliquet* considerado ya que esta es la problemática real a la que se enfrentan los gestores de libros de derivados exóticos. Por tanto, la opción *Cliquet* estará vendida y la cartera de cobertura correspondiente comprada.

Para analizar el funcionamiento de la metodología de valoración y cobertura se han simulado 10.000 trayectorias Monte Carlo del modelo estimado para el subyacente en el cuarto capítulo y recordado en la sección anterior. Todos los datos de mercado han sido facilitados por Espíritu Santo Investment Bank.

Por comodidad todos los cálculos se hacen por unidad monetaria, de modo que los precios se expresan en porcentaje.

Vamos a analizar la opción *Cliquet* con las características siguientes:

Parámetros de la *Cliquet*

<i>Fecha de valoración</i>	7/10/2011
<i>Subyacente</i>	DJ Euro Stoxx 50
<i>Fijaciones totales</i>	2
<i>Fechas de fijación</i>	18/11/2011 y 16/12/2011
<i>Cap local</i>	5%
<i>Floor local</i>	-5%
<i>Floor global</i>	0%
<i>Precio de contado del subyacente</i>	2269,19

Tabla 24. Características de la opción *Cliquet*

La información de mercado de tipos y dividendos, a través del precio forward del subyacente y de los factores de capitalización, se adjuntan a continuación

Forward y Factores de Capitalización

<i>Fecha</i>	<i>Precio Forward</i>	<i>Factor de capitalización</i>
18/11/2011	2262,9627	1,0016
16/12/2011	2262,8696	1,0028

Tabla 25. Tipos y dividendos implícitos en los forward y factores de capitalización

Para finalizar con los datos reales de mercado utilizados para esta *Cliquet*, se detallan en la Tabla 26, las cotizaciones de mercado de las opciones *vanilla*, i. e., las estándar de ejercicio europeo a través de sus volatilidades implícitas.

Superficie de Volatilidades Implícitas

<i>Vencimiento 18/11/2011</i>			
<i>Precio de Ejercicio</i>	<i>Volatilidad</i>	<i>Precio de Ejercicio</i>	<i>Volatilidad</i>
1700	0,5255	2200	0,3931
1750	0,5095	2225	0,3873
1775	0,5010	2250	0,3840
1800	0,4946	2275	0,3770
1825	0,4901	2300	0,3696
1850	0,4840	2325	0,3652
1875	0,4747	2350	0,3619
1900	0,4668	2375	0,3534
1925	0,4610	2400	0,3485
1950	0,4578	2425	0,3464
1975	0,4495	2450	0,3386
2000	0,4414	2475	0,3335
2025	0,4353	2500	0,3317
2050	0,4315	2550	0,3211
2075	0,4256	2600	0,3147
2100	0,4168	2650	0,3107
2125	0,4108	2700	0,3052
2150	0,4071	2750	0,3034
2175	0,4016	2800	0,3032

<i>Vencimiento 16/12/2011</i>			
<i>Precio de Ejercicio</i>	<i>Volatilidad</i>	<i>Precio de Ejercicio</i>	<i>Volatilidad</i>
1700	0,5037	2300	0,3630
1750	0,4939	2350	0,3554
1800	0,4796	2400	0,3427
1850	0,4660	2450	0,3364
1900	0,4578	2500	0,3246
1950	0,4415	2550	0,3183
2000	0,4306	2600	0,3100
2050	0,4194	2650	0,3036
2100	0,4066	2700	0,2988
2150	0,3986	2750	0,2931
2200	0,3843	2800	0,2924
2250	0,3768		

Tabla 26. Volatilidades implícitas

Caso 1: cobertura sólo con instrumentos de mercado

En este primer ejemplo se van a utilizar sólo instrumentos de cobertura estándar, esto es, cotizados en el mercado organizado a los vencimientos que haya disponibles.

Por como se ha diseñado la opción *Cliquet* las fijaciones coinciden con los vencimientos de mercado organizado. Una vez calibrado el modelo, la cartera de cobertura tiene la siguiente composición:

Ponderación (β_i)	Precio de Ejercicio	Call / Put	Vencimiento
-15,29%	2150	Call	18/11/2011
33,64%	2175	Call	18/11/2011
-9,54%	2250	Call	18/11/2011
0,57%	2250	Put	18/11/2011
29,80%	2275	Call	18/11/2011
-36,22%	2375	Call	18/11/2011
-60,19%	2400	Call	18/11/2011
-10,23%	2150	Call	16/12/2011
21,87%	2200	Call	16/12/2011
4,74%	2250	Call	16/12/2011
0,26%	2250	Put	16/12/2011
50,84%	2300	Call	16/12/2011
-3,44%	2350	Call	16/12/2011
-10,63%	2400	Call	16/12/2011

Tabla 27. Parámetros WMC y Cartera de Cobertura

Con $\beta_0 = -0,2481\%$.

Bajo la medida de probabilidad riesgo neutro, i. e., la de valoración a mercado, se han calculado los principales estadísticos sobre el *Cliquet*, su cartera de cobertura y el Error. Dichos estadísticos, están contenidos en la tabla siguiente.

Principales Estadísticos del *Cliquet* y la Cartera y Error de Cobertura

	<i>Cliquet</i>	<i>Portfolio</i>	<i>Error</i>
<i>Media</i>	3,062%	3,062%	8,93E-18
<i>Varianza</i>	0,0014	0,0013	0,0001
<i>Mínimo</i>	0,00%	-6,78%	-6,78%
<i>Máximo</i>	9,97%	15,55%	9,58%
R^2	91,34%		

Tabla 28. Estadísticos *Cliquet* y la Cartera y Error de Cobertura

La media del *payoff* del *Cliquet* nos da el precio teórico que es de 3,062 % que es lo que cuesta la cartera de cobertura. Pero por cómo se ha definido la metodología de valoración, ésta nos permite un análisis mucho más amplio que únicamente hallar el precio teórico del *Cliquet* a mercado. La variable error recoge el resultado de la cartera de cobertura menos el *payoff* del *Cliquet* por lo que su análisis detallado aporta mucha información relevante acerca del riesgo asumido en la gestión de este derivado.

De hecho si el R^2 fuera uno, entonces sí que podríamos dar prácticamente⁴⁵ por finalizado el problema de valoración y cobertura, puesto que la cartera replicaría perfectamente el *Cliquet* y por ausencia de oportunidad de arbitraje sus precios deben ser idénticos. Pero como vemos esto no es así, por lo que se ha de analizar el comportamiento del error bajo la medida de probabilidad real, y esta es una gran ventaja de la metodología de cara al análisis de riesgo. La mejor forma de analizar el error de cobertura es mediante el análisis de su distribución empírica, la Figura 23 recoge dicha distribución.

Histograma del Error

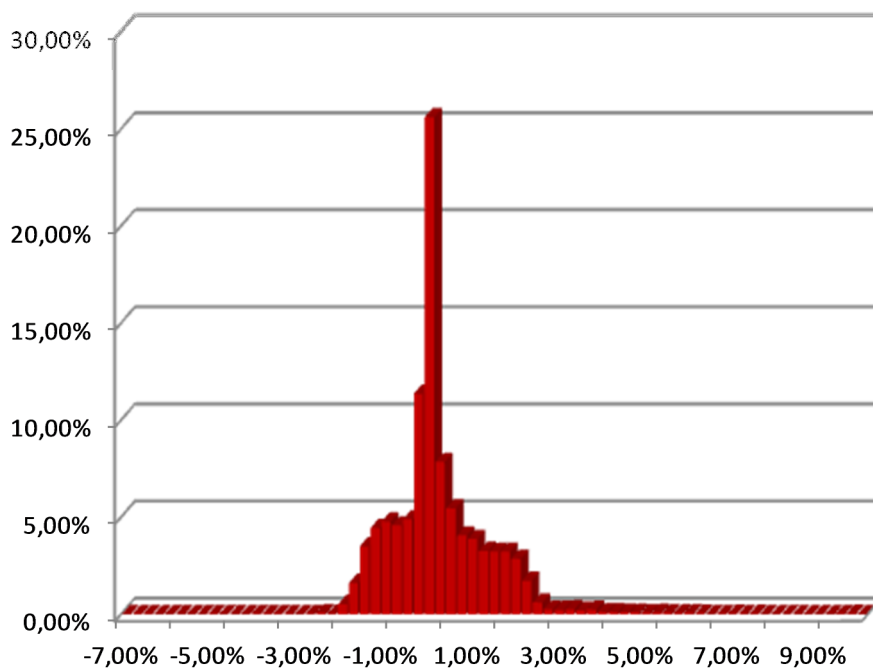


Figura 23. Distribución empírica del Error de Cobertura

⁴⁵ El análisis se podría ampliar al incluir los riesgos de contrapartida y/u otros escenarios-modelos para la evolución del subyacente.

Para finalizar con el análisis del error, se obtienen los estadísticos más relevantes, destacando entre ellos los percentiles. Todos estos estadísticos están contenidos en la tabla siguiente.

Principales Estadísticos del Error de Cobertura

	<i>Cliquet</i>	<i>Portfolio</i>	<i>Error</i>
<i>Media</i>	2,935%	2,978%	0,000431
<i>Varianza</i>	0,001253	0,001086	0,000123
<i>R²</i>	90,26%		

<i>Error</i>	<i>Percentil</i>
-1,949%	1,00%
-1,736%	2,50%
-1,544%	5,00%

Tabla 29. Estadísticos Error de Cobertura

De esta última tabla se puede deducir que para garantizar que en un 99% de los casos no se pierda en la cobertura del *Cliquet* es necesario un colchón extra de un 1,95 %. La obtención de este tipo de conclusiones es una gran ventaja respecto del resto de métodos de valoración propuestos anteriormente en la literatura de valoración de derivados de renta variable, que sólo proporcionan un precio y nada de información sobre cobertura y riesgos del derivado considerado.

Caso 2: cobertura con instrumentos de mercado y OTC

En este segundo caso es posible utilizar tanto instrumentos de cobertura estándar de mercado organizado a los vencimientos que haya disponibles en el mismo, como opciones del mercado OTC y por tanto configurables por el comprador tanto en vencimiento como en precio de ejercicio.

Para este segundo ejemplo vamos a utilizar:

- i. Para la primera fijación opciones con precios de ejercicio que sean exactamente los niveles determinado por los *cap* y *floor* para este primer periodo.
- ii. Para la segunda fijación opciones *forward start* cuyos precios de ejercicio van cuadrar exactamente con los niveles *cap* y *floor* futuros del *cliquet*.

Una vez calibrado el modelo, la cartera de cobertura tiene la siguiente composición:

Ponderación (β_i)	Precio de Ejercicio	Call / Put	Inicio	Vencimiento
22,08%	2155,73	Call	07/10/2011	18/11/2011
20,58%	2262,96	Call	07/10/2011	18/11/2011
-8,86%	2262,96	Put	07/10/2011	18/11/2011
-76,28%	2382,65	Call	07/10/2011	18/11/2011
36,19%	2262,87	Call	07/10/2011	16/12/2011
12,33%	2262,87	Put	07/10/2011	16/12/2011
36,28%	95%	Call	18/11/2011	16/12/2011
-32,78%	100%	Call	18/11/2011	16/12/2011
-9,08%	105%	Call	18/11/2011	16/12/2011

Tabla 30. Parámetros WMC y Cartera de Cobertura

Con $\beta_0 = -2,535\%$.

Bajo la medida de probabilidad riesgo neutro, i. e., la de valoración a mercado, obtenemos los resultados recogidos en la Tabla 30

Principales Estadísticos del *Cliquet* y la Cartera y Error de Cobertura

	<i>Cliquet</i>	<i>Portfolio</i>	<i>Error</i>
<i>Media</i>	2,198%	2,198%	7,72E-17
<i>Varianza</i>	0,001117	0,001023	9,4E-05
<i>Mínimo</i>	0,00%	-3,82%	-3,82%
<i>Máximo</i>	9,97%	13,53%	6,70%
R^2	91,58%		

Tabla 31. Estadísticos *Cliquet* y la Cartera y Error de Cobertura

La media del *payoff* del *cliquet* nos da el precio teórico que este caso es de 2,198% que es lo que cuesta la cartera de cobertura.

Vuelve a ocurrir que, aún siendo ligeramente superior al caso anterior, el coeficiente R^2 es inferior a uno. De nuevo se ha de analizar el comportamiento del error bajo la medida de probabilidad real. La mejor forma de analizar el error de cobertura es mediante el análisis de su distribución empírica, la Figura 24, adjunta a continuación, muestra dicha distribución mediante su correspondiente histograma de frecuencias.

Histograma del Error

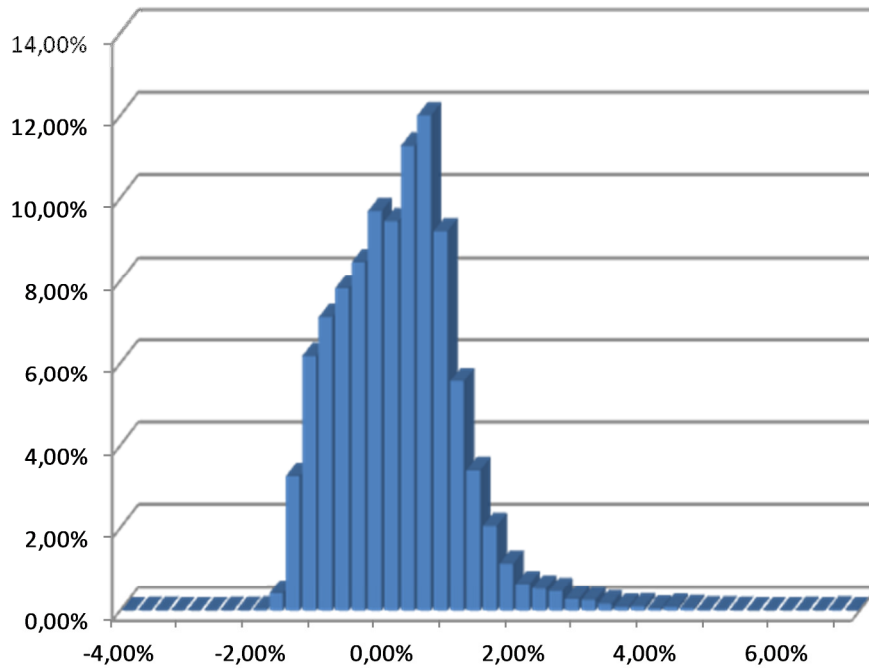


Figura 24. Distribución empírica del Error de Cobertura

Para finalizar con el análisis del error, se obtienen los estadísticos más relevantes, destacando entre ellos los percentiles. Todos estos estadísticos están contenidos en la tabla siguiente.

Principales Estadísticos del Error de Cobertura

	<i>Cliquet</i>	<i>Portfolio</i>	<i>Error</i>
<i>Media</i>	2.935%	2.862%	-0.00073
<i>Varianza</i>	0.001253	0.001098	8.37E-05
<i>R²</i>	90,26%		

<i>Error</i>	<i>Percentil</i>
-1,699%	1,00%
-1,581%	2,50%
-1,446%	5,00%

Tabla 32. Estadísticos Error de Cobertura

Comparativa de los casos y análisis de escenarios

En este tercer ejemplo suponemos que se ha realizado todo el análisis asociado a los casos 1 y 2, por lo que disponemos de toda la información de valoración y cobertura para cada una de las carteras. De esta información podemos hacer dos análisis muy interesantes:

1. Comparativa entre los riesgos de la distribución del error para cada una de las carteras de modo que se escoja la mejor.
2. Detección y examen de los escenarios tipo, esto es, los peores los mejores, los intermedios, etc. Esto permitirá, además de localizar los escenarios de riesgo máximo, diseñar nuevas estrategias de cobertura ad hoc añadiendo más instrumentos de cobertura OTC no incluidos en el caso 2.

Obviamente todo esto se calcula bajo la medida de probabilidad real.

1. Análisis comparativo del error.

Como primera herramienta, se elabora una comparativa de los estadísticos más relevantes en ambos casos. Dicha comparativa se muestra en la Tabla 33, que para una mejor visualización, tiene la mejor posibilidad resaltada en verde.

Principales Estadísticos Caso 1 y Caso 2

	<i>Mercado</i>	<i>OTC</i>
<i>Media</i>	0.04%	-0.07%
<i>Desviación Estándar</i>	1.11%	0.91%
<i>R²</i>	90.26%	93.41%
<i>Mínimo</i>	-6.78%	-3.82%
<i>Percentil 1</i>	-1.95%	-1.70%
<i>Percentil 5</i>	-1.54%	-1.45%
<i>Percentil 10</i>	-1.27%	-1.25%

Tabla 33. Comparativa Estadísticos Error de Cobertura

Como siguiente herramienta, se va a realizar la comparativa de las funciones de probabilidad acumulada, i. e., las funciones de distribución del error de cobertura. Esto nos permite utilizar el criterio de dominancia estocástica en la comparativa de los casos. El gráfico de ambas se adjunta en la figura siguiente.

Funciones de Distribución del Error

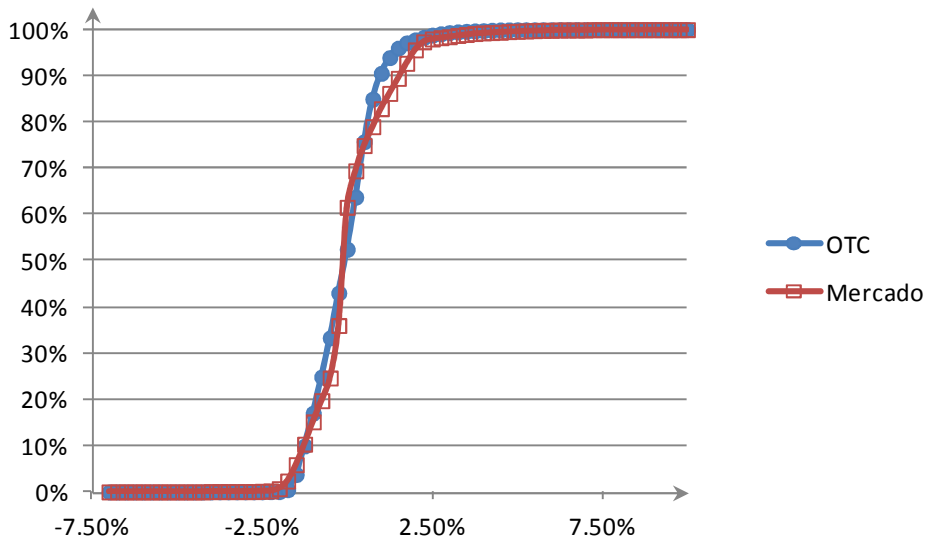
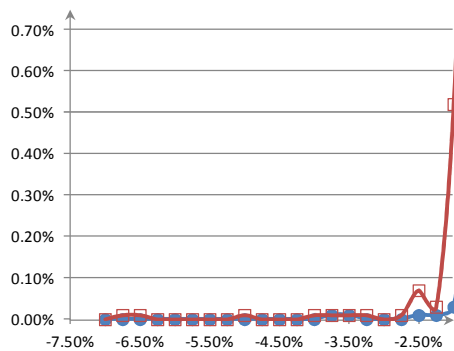


Figura 25. Funciones de distribución del Error de Cobertura

Lamentablemente no hay una que domine estocásticamente a la otra, pero es posible un análisis detallado de las colas izquierdas, que son las de las pérdidas, y por tanto las más importantes desde el punto de vista de la gestión del riesgo.

Comparativa colas izquierdas Funciones de Distribución

Rango -7,50% a -2,00 %



Rango -2,00% a 0,00 %

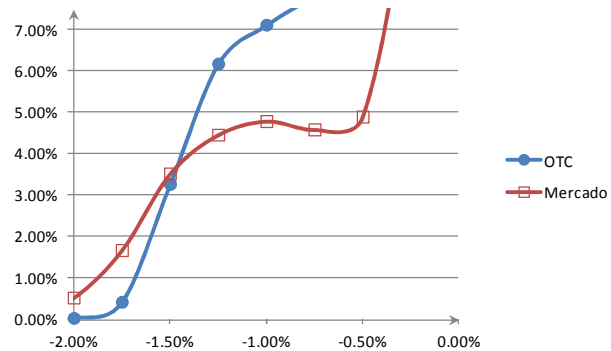


Figura 26: Comparativa colas izquierdas

Del análisis de las funciones de distribución, se puede concluir que hay dominancia estocástica de la cartera OTC sobre la de Mercado para pérdidas de hasta -1.50%, esto es, para los escenarios de mayor pérdida. Esta es una información muy relevante para el *trader* de derivados puesto que le permite de forma objetiva determinar si le merece la pena o no cubrir la opción con una u otra cartera.

2. Análisis de escenarios.

Otra tipo de información que se puede extraer, y que es tremendamente útil, es determinar cuáles han sido las evoluciones del subyacente que implican resultados extremos en el resultado final de la posición, i. e., de la variable que hemos denominado Error, y que recoge el resultado total de la cartera. Esto puede ser útil por varios motivos, los dos quizá más importantes son:

- i. Diseñar coberturas más eficientes pidiendo derivados OTC para cubrir esos riesgos tan específicos.
- ii. Enriquecen el análisis de riesgo complementado los obsoletos indicadores VaR.

En todos los gráficos que siguen, la leyenda muestra un paréntesis que recoge el valor del Error. En dicho paréntesis la primera componente es para la cartera determinada en el caso 1 y que denominamos Mercado, y la segunda para la del caso 2 que hemos denominado OTC.

Muestra aleatoria de escenarios

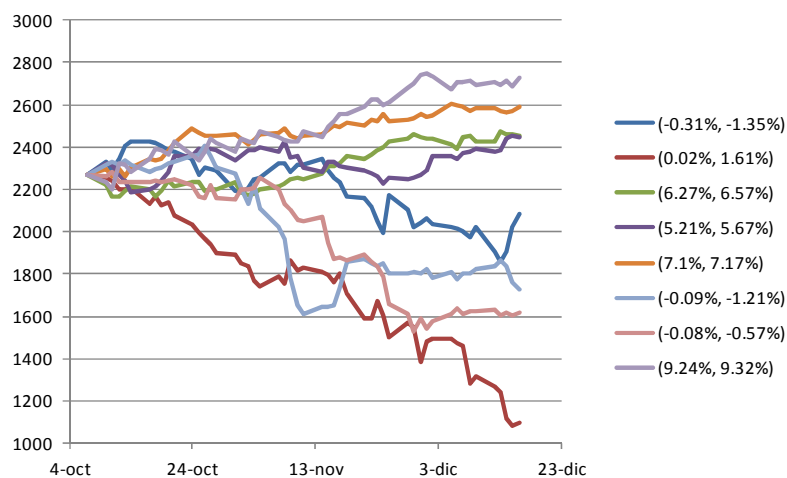


Figura 27. Escenarios al azar

En la Figura 27 se han mostrado ocho escenarios seleccionados aleatoriamente. Vemos que para estos escenarios el error para siete de ellos ha sido superior en el caso de cobertura con Mercado. Esto no nos debe sorprender puesto que ya analizamos las funciones de distribución para ambos casos en la Figura 25, y vimos que aunque en general la función de distribución del caso OTC era mejor que la de Mercado, no había una dominancia estocástica estricta. De ahí que algunos casos el error para el caso de Mercado sea menor que el error del caso OTC.

Los siguientes escenarios que vamos a analizar son dos. Uno el que realmente sucedió, y que denominaremos real, y el segundo el escenario con peores resultados y que denominaremos peor. Estos dos escenarios se muestran en la figura siguiente.

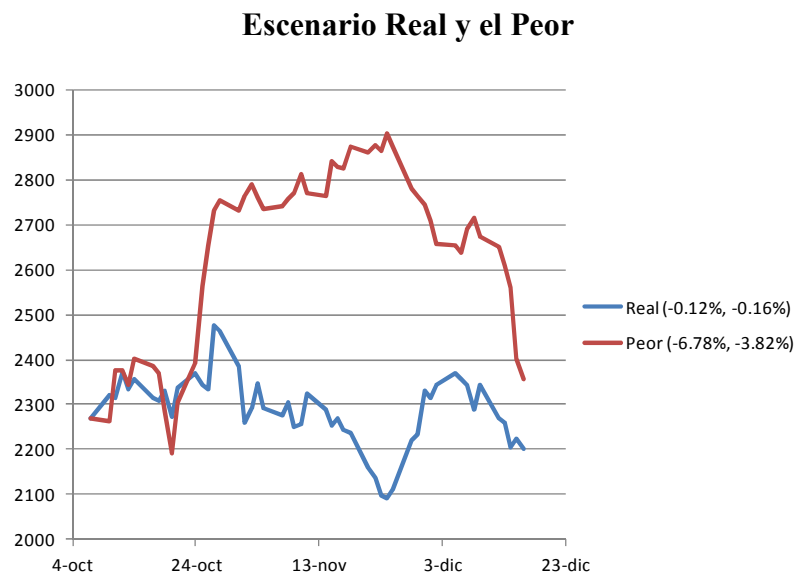


Figura 28. Escenario real y peor escenario

Como vemos en la Figura 28, en el escenario real se han obtenido resultados similares para los errores en caso de cobertura a Mercado y OTC, dichos errores ha sido -0.12% y -0.16% respectivamente. Es interesante recordar en este punto, algunos de los estadísticos recogidos en la Tabla 33, como por ejemplo que el resultado esperado del error es cercano a cero en ambos casos y también que el coeficiente R^2 , que refleja la dispersión entorno a ese resultado esperado, es del 90.26% para Mercado y del 93.41% para OTC. Estas dos características se ven reflejadas claramente en los resultados de estos dos escenarios, ya que en el peor escenario Mercado tiene un error del -6.78% y OTC sólo del -3.82%.

Para finalizar con el análisis de escenarios, se van a analizar diez escenarios, los cinco con mejores resultados y los cinco con peores resultados. De ambos grupos se puede extraer información muy valiosa para complementar la gestión del riesgo de la cobertura.

Veamos los cinco escenarios con mejores resultados, éstos han sido recogidos en la Figura 29.

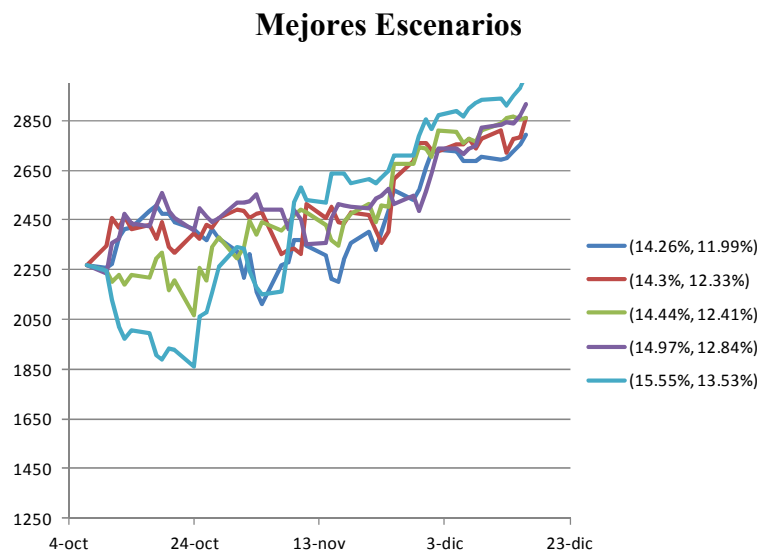


Figura 29. Mejores escenarios

De los resultados de los mejores escenarios, se pueden extraer diversas conclusiones, la primera es, que los resultados del error para el caso de Mercado son mayores y por tanto mejores que los errores en el caso de OTC. Este hecho viene de nuevo a corroborar lo apuntado para la Figura 28, y es que el coeficiente R^2 es menor para Mercado y por tanto este caso tendrá una mayor dispersión. Esto implicará errores más grandes en valor absoluto para el caso de Mercado, o lo que es igual, pérdidas y ganancias mayores, tal y como corroboran los resultados de estos escenarios. Además de la verificación de la interpretación del coeficiente R^2 , otra información importante puede obtenerse del análisis de los mejores escenarios, y es la que se deriva de la forma de los escenarios. De la Figura 29 se puede intuir que siempre que se den escenarios alcistas el resultado de la cobertura, ya sea para el caso de Mercado o para el de OTC, son muy elevados, de 14.26% a 15.55% para Mercado y de 12% a 13.5% para OTC. En base a esta información el *trader* puede decidir utilizar estos resultados positivos para compensar

aquellos escenarios que no le sean tan favorables, para ello puede por ejemplo añadir instrumentos a la cartera de cobertura con resultados negativos en este tipo de escenarios pero positivos en los escenarios más desfavorables. Para ello debe complementar el análisis de los mejores escenarios con los peores, con este fin se adjunta la siguiente figura, que recoge estos escenarios con los peores resultados.

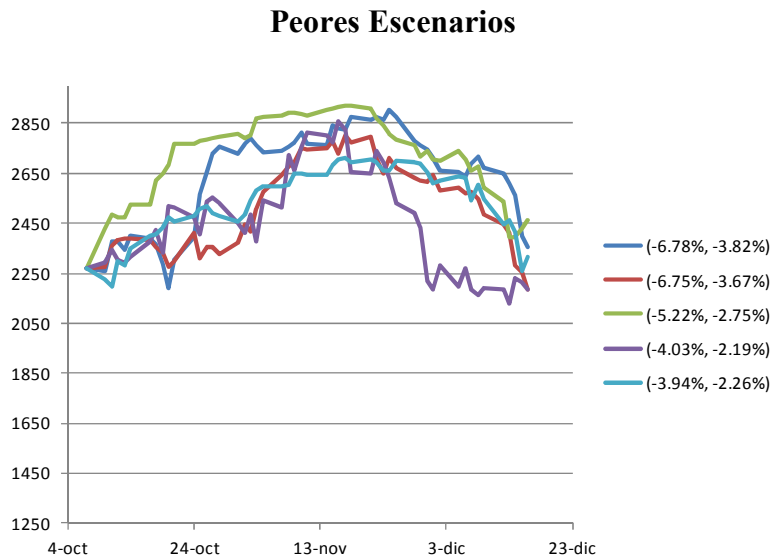


Figura 30. Peores escenarios

Un primer vistazo a los resultados del error de los escenarios recogidos en la Figura 30, vuelve a confirmar lo ya mencionado sobre el coeficiente R^2 , por lo que no nos detendremos más sobre este asunto y pasamos a la interpretación de la información contenida en la forma que tienen los escenarios peores. La primera impresión que nos producen las formas de estos escenarios es que, a diferencia de los mejores, no tienen una tendencia definida, pero sí son bastante simétricos. Esto quiere decir que las mayores pérdidas suceden cuando la mitad de la vida del *Cliquet* el subyacente tiene primero una etapa alcista y después una etapa bajista, ambas de aproximadamente la misma duración temporal. Este hecho unido con lo que ya se vio para los escenarios alcista le puede dar la información al *trader* de que, por ejemplo vendiendo futuros que comiencen a mitad de la vida del producto, reduce riesgos en los escenarios de mayor pérdida a cambio de reducir ganancias en los escenarios de mayor beneficio.

De hecho, en este punto, se abre un abanico inmenso de posibilidades de complementar la cobertura, tan amplio como la variedad de instrumentos de los que el *trader* disponga para complementar su cartera. Por ejemplo, puede analizar la posibilidad de añadir

opciones barrera u otro tipo de opción exótica sobre el subyacente. Incluso puede analizar la volatilidad realizada en estos escenarios e intentar cubrirse del riesgo de volatilidad mediante *Variance Swaps* o *Volatility Swaps*, por poner algunos ejemplos de instrumentos de última generación.

Para finalizar esta sección, podemos concluir que la metodología propuesta e implementada para solucionar el problema de valoración y cobertura de *Cliquets* es de una riqueza sin parangón en la literatura financiera reciente. Ningún otro método de valoración ofrece además de implicaciones de cobertura la posibilidad de un post-análisis de la misma. Este desde el punto de vista práctico es muy valorado por los usuarios de la metodología.

6 Conclusiones y futuras líneas de investigación

6.1 Resumen, objetivo y propuesta de la tesis

El objeto de esta tesis era analizar y aplicar el concepto de entropía a la valoración y cobertura de instrumentos financieros derivados emitidos sobre activos de renta variable. En concreto, el problema planteado y resuelto en la tesis, es la valoración y cobertura de un tipo de derivados exóticos de renta variable denominados *Cliquets*.

Recordemos que, como se expuso en el capítulo quinto, desde el punto de vista de quién tiene que cubrir el *Cliquet*, y minimizar el riesgo mediante la cobertura delta, el máximo peligro al que se enfrenta es la exposición al riesgo de volatilidad. Sin embargo, este tipo de derivado tiene una dependencia muy sutil de la modelización que se haga sobre la volatilidad. La técnica habitual de cobertura del riesgo de volatilidad es mediante el cálculo de la vega, i. e., la derivada del precio de la opción respecto de la volatilidad. La vega puede ser utilizada para determinar una cobertura del citado riesgo, pero esto sólo funciona en el caso de las opciones estándar listadas, cuya hipótesis es de volatilidad constante. Pero, tal y como vimos, un único parámetro de volatilidad no explica el riesgo de volatilidad de las opciones *Cliquet*. Esto se debe a que los derivados cuya Gamma cambia de signo, la Vega suele ser muy pequeña en esos niveles donde la sensibilidad a la verdadera volatilidad es muy grande. Este hecho que es anti intuitivo a primera vista, es debido a que, bajo el supuesto de volatilidad única, la Vega, no es una buena medida de dicho riesgo de volatilidad, ya que no refleja la verdadera exposición a Superficie de Volatilidad y sus diversos niveles. La Superficie de Volatilidad, su definición, causas y problemática asociada está recogida en el segundo capítulo.

Un primer aspecto a tener en cuenta es que las opciones *Cliquet* están expuestas al riesgo del *smile* de la volatilidad *forward* y por tanto cualquier modelo determinista de la Superficie de Volatilidad calibrado a los precios de mercado de opciones *vanilla* no va ser capaz de modelizar todo este riesgo de volatilidad. Esto ha provocado que en la valoración de las opciones *Cliquet* no haya un consenso de mercado, como ya se expuso en el quinto capítulo y tal como se recoge en Patel (2002).

Un segundo punto importante es el referente a la gestión dinámica del riesgo de volatilidad. Recapitulemos en este punto lo apuntado también en el quinto capítulo referente a este segundo punto. Jeffery (2004) analiza como modelos erróneos de valoración llevaron a la infraestimación del coste de gestión dinámica de este riesgo de volatilidad provocando pérdidas millonarias en la gestión de opciones *Cliquet Reverse* y *Cliquet Napoleon*. Los más afectados fueron Goldman Sachs, Natexis Banques Populaires y NIBC Petercam Derivatives. De hecho, Goldman Sachs, que dio precios muy agresivos durante 2002, tuvo que acudir al mercado a cubrir gran parte de estos riesgos de volatilidad durante comienzos de 2003. Por otra parte, Natexis dio una pérdida de 118 millones de euros en productos estructurados de renta variable en 2002, y NIBC Petercam Derivatives se vio abocado al cierre a mediados de 2005 por sus pérdidas de más de 60 millones de euros en su libro de derivados exóticos de renta variable.

También es importante mencionar una de las claves de la gestión dinámica del riesgo de volatilidad es la *Volga*, ésta mide la sensibilidad de la Vega a cambios en la volatilidad, y se definió como

$$Volga \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \sigma}$$

dónde V denotaba la función valor teórico de un derivado emitido sobre el subyacente S . Las opciones *Cliquet*, y sobre todo los casos *Reverse* y *Napoleon* tienen *Volga* negativa, esto implica que los vendedores de estos productos necesitan comprar volatilidad cuando ésta aumenta y venderla cuando está baja. o lo que es igual, quienes estén vendidos de estos productos estarán largos de Vega cuando la volatilidad sea baja, y cortos cuando sea alta, por lo que si se pretende reducir el riesgo de volatilidad se está abocado a comprar volatilidad cara y venderla barata, además que la volatilidad al ser menos líquida que el propio subyacente tiene horquillas más amplias, lo que incrementa aún más el coste de cobertura.

Tal y como se acaba de exponer, la valoración y sobre todo de cobertura de las opciones *Cliquet* ha sido un problema no resuelto satisfactoriamente en la industria financiera durante las últimas décadas. Para resolverlo se ha propuesto en la tesis una metodología basada en la entropía.

El concepto de entropía que se ha utilizado, ha sido el de Inferencia Estadística, dónde la entropía cuantifica la incertidumbre de una variable aleatoria. En concreto, y como se detalla en el tercer capítulo, se ha utilizado la metodología de entropía relativa mínima o ERM. Dicha metodología se basa en minimizar la entropía relativa entre una distribución de probabilidad a priori y otra a posteriori, de modo que se satisfacen un número finito de restricciones sobre los momentos de la distribución a posteriori. Recordemos asimismo la Figura 2, dónde se refleja cómo se estructura la resolución del problema en una serie de etapas o módulos que son independientes aunque estén relacionados.

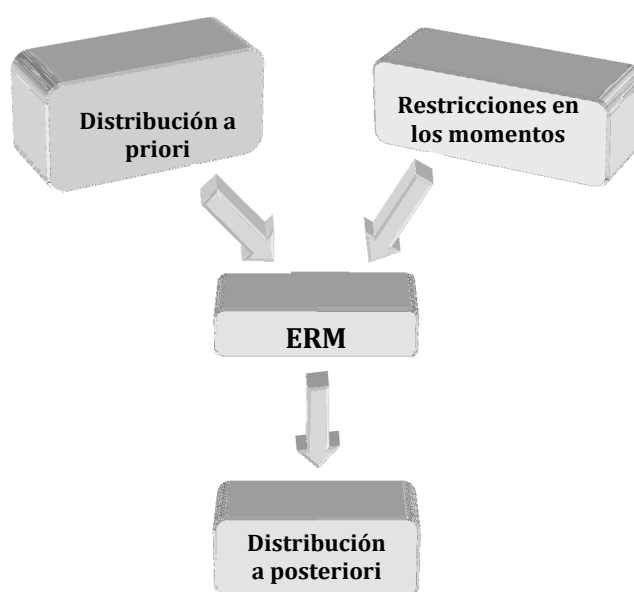


Figura 2. Elementos de la Metodología ERM

Otra característica de la ERM es la facilidad para interpretar cada uno de sus elementos. Es posible relacionar los módulos de la ERM de la Figura 2 con su correspondiente significado financiero, esta relación se plasma en la siguiente tabla.

<i>Concepto Metodología ERM</i>	<i>Interpretación Financiera</i>
Distribución de probabilidad a priori	Modelo real de evolución del subyacente
Restricciones en los momentos de la distribución a posteriori	Precios de mercado de futuros y opciones sobre el subyacente
Distribución a posteriori	Valorador <i>Risk-Neutral</i>

Tabla 33. Relación Conceptual ERM - Finanzas

Además, la solución así obtenida al problema de valoración de derivados, tiene unas propiedades muy útiles desde el punto de vista práctico. La solución por ERM tiene unas implicaciones para la cobertura que son muy eficientes para la resolución práctica de la cobertura de opciones. Éste último aspecto es clave y no había sido destacado en la literatura financiera hasta Arrieta (2012). Dichas propiedades ha sido comentadas con profusión y detalle en las secciones 3.5.3 y 5.3.2.

Recordemos igualmente, que además de la metodología ERM, la solución propuesta basa en una algunos resultados teóricos de cobertura media-varianza, Schäl (1994), implementados vía *Optimal Hedge Monte Carlo* u OHMC. Dicha solución se basa en tres pilares que están interrelacionados entre ellos:

- iv. Implicaciones de cobertura de la ERM, propiedades comentadas con profusión y detalle en las secciones 3.5.3 y 5.3.2.
- v. Modelo de evolución del subyacente, que refleje la filosofía OHMC y además sea la distribución a priori para la aplicación de la ERM. A esta modelización se ha dedicado enteramente el cuarto capítulo
- vi. Cobertura media-varianza, teniendo en cuenta los instrumentos de mercado, la equivalencia de funciones de pérdida, Schäl (1994), y el ajuste de la distribución de probabilidad mediante ERM

Implicaciones de cobertura de la ERM

Recordemos que como ya vimos con profusión y detalle en las secciones 3.5.3 y 5.3.2., la metodología ERM se aplica para a partir de una densidad de probabilidad a priori, denotada por f_0 , y unas restricciones sobre los momentos que se deseaba imponer

$$\int g_j(x)f(x)dx = C_j \quad j = 1, \dots, n$$

Donde g_j y C_j son funciones y números dados respectivamente, y n denota el número de restricciones. El objetivo es obtener una nueva densidad de probabilidad a posteriori f que verificando las restricciones impuestas sea lo más cercana a la densidad a priori f_0 . Si la función de pérdida utilizada es la ERM, entonces implicaba que

$$E_f[h(x)] = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)] \quad (\text{A.6})$$

Dónde h denota una nueva función para la que se desea calcular su esperanza sobre la nueva medida de probabilidad.

Y dónde el término independiente se obtiene de

$$\beta_0 = E_f[h(x)] - \sum_{j=1}^n \beta_j E_f[g_j(x)] \quad (\text{A.7})$$

Y el vector de coeficientes

$$\boldsymbol{\beta} = \text{cov}_f(h(x), \mathbf{G}(x)) [\text{cov}_f(\mathbf{G}(x), \mathbf{G}(x))]^{-1} \quad (\text{A.8})$$

Donde \mathbf{G} denota la matriz cuyas columnas son las g_j , y cov_f es el operador covarianza tomado sobre la nueva medida de probabilidad⁴⁶.

Pasemos a la interpretación financiera, siguiendo a Arrieta (2012), las funciones g_j son los *payoffs* de los instrumentos de mercado, futuros y opciones que se desea que el método valore bien, esto es acorde a los precios dados en el mercado, los C_j . Por su parte la función h denota el *payoff* de la opción que no es de mercado y se desea valorar. La propiedad más importante de (6.1) es que implícitamente se está descomponiendo h en las funciones base g_j , siendo lineal la relación entre h y las funciones base, lo que permite la interpretación

$$h(x) = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x) + \varepsilon \quad (\text{A.9})$$

Donde ε denota el error o diferencia entre la combinación lineal de las funciones base g_j y la función h . Además financieramente para nuestro problema de valoración estamos dando una cobertura estática a vencimiento del *payoff* objetivo h mediante los distintos instrumentos de mercado g_j . Este último hecho se deriva de la forma en que se obtienen β_0 y $\boldsymbol{\beta}$ a través de (6.2) y (6.3). Y, por último, (6.4) nos da la interpretación financiera de ε , que será la variable aleatoria que recogerá el resultado de la cartera de cobertura más el derivado.

Modelo de evolución del subyacente

El siguiente paso es la distribución de probabilidad a priori, que al ser utilizada mediante simulaciones de Monte Carlo permite adoptar los enfoques OHMC y *Weighed Monte Carlo*. Esta última denominación, como ya sabemos, es el nombre que

⁴⁶ Todos los detalles técnicos se encuentran en el tercer capítulo, asimismo en el Anexo A se adjunta un algoritmo de cálculo para el caso Monte Carlo

le dieron Avellaneda et al. (2001) a la metodología ERM aplicada a una densidad a priori que sea una simulación de Monte Carlo.

La familia de modelos que fueron propuestos en el cuarto capítulo son los modelos econométricos dados por los procesos de media condicional $ARMAX(R, M, Nx)$ y varianza condicional de la familia $GARCH(P, Q)$. En dicho capítulo además se presenta una metodología para la selección del mejor modelo dentro la familia de modelos propuestos.

Para el subyacente que se ha utilizado en los casos prácticos, el DJ Euro Stoxx 50, recordemos que se seleccionó el modelo para la media condicional $ARMAX(0,0,0)$, y para la varianza condicional un modelo $EGARCH(1,1)$, con distribución de probabilidad t de *Student* con ν grados de libertad, $\nu > 2$.

Cobertura media-varianza

Como última pieza de la metodología propuesta, se añadieron los resultados teóricos de la cobertura media-varianza. En concreto se han utilizado los trabajos de Schäl (1994), cuyas conclusiones más relevantes, desde el punto de vista de la tesis, eran principalmente dos y que se resumen a continuación.

La primera es la equivalencia entre las medidas de riesgo, y que venía dada por las expresiones

$$\begin{aligned}
 \text{iv.} \quad & E[(C_{t+1} - C_t)^2 / \mathcal{F}_t] \\
 \text{v.} \quad & E[(C_T - C_t)^2 / \mathcal{F}_t] \\
 \text{vi.} \quad & E[(C_T - C_0)^2 / \mathcal{F}_t]
 \end{aligned}
 \tag{A.10}$$

Dónde C_t denota el coste acumulado de la estrategia hasta tiempo t . C_t lo podemos interpretar en la metodología ERM como la suma acumulada de los ε de (6.4). \mathcal{F}_k denota la σ -álgebra de los sucesos hasta tiempo k , con él incluido, intuitivamente la información disponible hasta tiempo k . Por la forma de (6.2) y (6.3), que son las expresiones de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios de un modelo de regresión lineal múltiple, se deduce que, al utilizar ERM, lo que está minimizando es la expresión iii. Schäl (1994) demuestra que estas tres expresiones, i. a iii., son equivalentes bajo determinadas condiciones en el proceso estocástico del subyacente S_t . La equivalencia entre las expresiones dadas por (6.5) es de gran importancia práctica desde el punto de vista de la gestión del riesgo de la cobertura. Que i., ii. e iii. sean

equivalentes implica que minimizar el riesgo al vencimiento (.iii) de la opción es equivalente a irlo minimizando unidad de tiempo a unidad de tiempo (i.), lo que desde el punto de vista del gestor de la cartera es muy útil puesto que éste no espera al vencimiento de la misma para irlo ajustando, sino que lo hace en varias escalas temporales. Al ser equivalentes las expresiones de (6.5), el gestor de la cartera tiene el fundamento de que siempre está minimizando el riesgo al utilizar la metodología propuesta.

Para acabar con este punto, destacar que las condiciones de equivalencia entre las tres expresiones i. a iii., las tenemos garantizadas siempre que el subyacente siga un proceso estocástico con determinados requisitos, que se pueden resumir en que S_t sea martingala. Un análisis más detallado de la metodología de cobertura media-varianza y de los trabajos Schäl (1994) se adjunta en el Anexo B.

Por último, recordar que, respecto del DJ Euro Stoxx 50, que es el subyacente que se ha utilizado en los casos prácticos, el de al ser el modelo para la media condicional un ARMAX(0,0,0) se verifican estos requisitos teóricos. Pero para que esto fuera así se han estimado varios modelos y se ha testado que la constante en la ecuación de la media condicional sea estadísticamente nula.

Funcionamiento conjunto de las tres metodologías de la solución propuesta

Una vez resumidas las principales características de las tres componentes metodológicas en las que se basa la solución que se ha desarrollado y propuesto en la tesis, pasamos a enumerar los pasos en los que se estructura su aplicación práctica. La utilización y funcionamiento de la metodología híbrida propuesta sigue el flujo de trabajo siguiente:

8. Selección y estimación del mejor modelo posible para la evolución real del subyacente, en el capítulo cuarto se detalla tanto una familia de modelos a utilizar como una metodología de selección entre ellos. En la estimación se ha de intentar, en la medida de lo posible, que se verifiquen las condiciones que permiten que las expresiones de (6.5) sean equivalentes.
9. Simulación de Monte Carlo del modelo para todas las fechas relevantes para la cobertura. Estas fechas son tanto las necesarias para determinar el valor del derivado objetivo de la valoración, como las fechas necesarias para la evaluación de los derivados de mercado que se desee utilizar para la cobertura de dicho derivado objetivo.

10. Ajuste de las ponderaciones de cada trayectoria mediante ERM para incorporar la información de mercado, esto es, los *payoffs* g_j y los precios C_j de mercado de los instrumentos que se van utilizar para la cobertura del derivado objetivo.
11. Valoración del *payoff* de la opción objetivo h mediante la relación (6.1), obteniendo así el precio de mercado del mismo que se ajusta a la información de mercado suministrada en el paso anterior.
12. Análisis de la descomposición, de la bondad de la cobertura y, sobre todo, del error, del *payoff* de la opción objetivo h mediante la relación (6.4). En este paso es dónde se deben hallar todos los estadísticos relevantes sobre el error de cobertura, ε en (6.4), tales como el coeficiente de determinación, percentiles, etc. El fin de estos estadísticos será su uso en el paso siguiente, un ejemplo práctico de los estadísticos a calcular y cómo utilizarlos se detalló en la sección 5.3.3 del capítulo anterior.
13. En caso de que el riesgo residual sea elevado, o no se ajuste a lo esperado, se vuelve al tercer paso con nuevos instrumentos de cobertura que parezcan más adecuados. Es importante recordar que en caso de que las fechas de evaluación de estos nuevos instrumentos de cobertura no estén contenidas en las trayectorias de la simulación de Monte Carlo, hay que volver a generar las trayectorias conteniendo todas estas nuevas fechas, tal y como se expone en el segundo paso.
14. Si se ha conseguido descomponer exactamente la opción objetivo mediante los instrumentos de cobertura, esto es, no hay error y por tanto el término ε de la ecuación (6.4) es nulo para todos los estados, ya se ha obtenido el precio exacto de mercado del derivado objetivo. Si no se ha conseguido, y por tanto el término ε que recoge el error en la cobertura del derivado no es nulo para todos los estados, se ha de analizar el riesgo de los estados para los que el término ε no se anula bajo la medida de probabilidad real. Para ello se calculan de nuevo los estadísticos considerados anteriormente pero ahora bajo la medida de probabilidad real, y también se pueden realizar diversos análisis extra del riesgo que implica el derivado objetivo, como por ejemplo, mediante análisis de escenarios tal y como se hizo en el tercer apartado de la sección 5.3.3.

6.2 Conclusiones

El objetivo de la presente tesis era la de presentar una nueva metodología de valoración, de cobertura y de medición de la bondad de ésta, aplicada a los derivados exóticos de renta variable emitidos sobre un único subyacente. En concreto se pretendía resolver un tipo concreto de opciones exóticas denominadas *Cliquet*.

El problema fundamental en la valoración de derivados exóticos reside en que ésta ha de ser coherente con el resto de instrumentos financieros ya cotizados, como futuros opciones a diferentes vencimientos. De hecho el modelo seminal de la valoración de derivados, desarrollado por Black y Scholes (1973) y por Merton (1973), dejó de ser coherente con todos los instrumentos cotizados a partir de 1987 dando lugar al fenómeno conocido como Superficie de Volatilidad. Las diversas soluciones propuestas a la problemática que implica la Superficie de Volatilidad se han basado sobre todo en una modelización del subyacente más compleja y real. Tanto el fenómeno de la Superficie de Volatilidad como diversas soluciones propuestas en la literatura financiera se expone en detalle en el capítulo segundo.

Este problema de valoración se puede entender como un problema que es posible resolver mediante un método interpolación o bien mediante uno de ajuste. Para comprender mejor esta última afirmación, nos apoyamos en la siguiente figura.

Comparativa modelos de interpolación y de ajuste

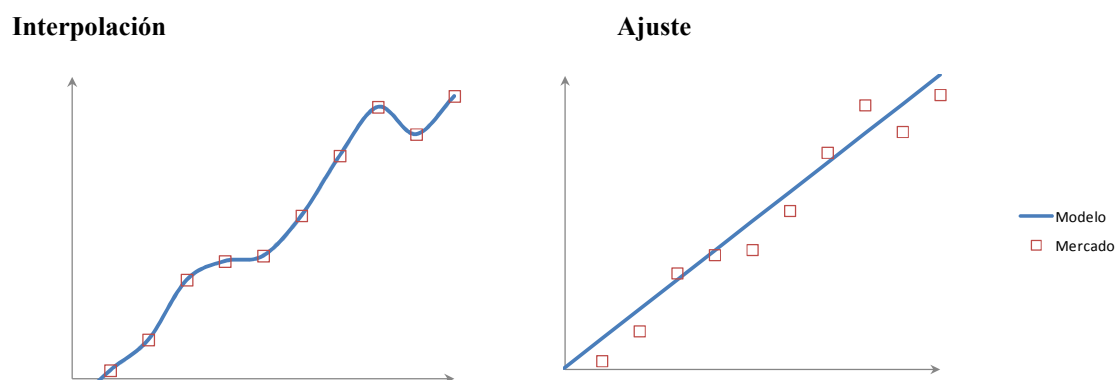


Figura 31: Diferencia entre Interpolación y Ajuste a una serie de datos

La nueva metodología propuesta en la tesis se basa en tres pilares:

- i. Entropía Relativa Mínima sobre simulaciones de Monte Carlo de la distribución a priori, Avellaneda et Al. (2001), y sus implicaciones de cobertura, Arrieta (2012)
- ii. Cobertura media-varianza Schäl (1994)
- iii. *Optimal Hedge Monte Carlo* desarrollado por Bouchaud, Potters y Sestovic (2001)

Lo primero a destacar es que el uso de la ERM a partir de simulaciones de Monte Carlo como distribución a priori, se puede utilizar tanto como método de interpolación como de ajuste para solucionar el problema de valoración asociado a la Superficie de Volatilidad. Ambas formas son detalladas en Avellaneda et Al. (2001) dónde se llama *exact fitting* a la de interpolación y *weighted least-squares* a la de ajuste. Pero este segundo método de ajuste carece de las implicaciones de cobertura apuntadas en Arrieta (2012), y por ello no es utilizado en la presente tesis. Lo segundo a destacar del uso de la ERM son sus implicaciones de cobertura. Las más importantes, además de proporcionar un valorador *Risk-Neutral*, son en primer lugar proporcionar una cobertura estática al vencimiento del *payoff* del nuevo derivado a valorar mediante los distintos instrumentos de mercado. Y en segundo lugar, que dicha cobertura estática viene determinada objetivamente mediante los coeficientes β_0 y β dados por (6.2) y (6.3) respectivamente. Por último, que la forma en la que se obtienen los coeficientes β_0 y β Implica que se está minimizando la varianza de la cartera de cobertura del *payoff* del nuevo derivado a valorar, esto a un horizonte temporal igual al vencimiento de dicho derivado objetivo de la valoración.

De los resultados teóricos de Schäl (1994) sobre la cobertura media-varianza se utiliza sobre todo la equivalencia entre las medidas de riesgo dadas en (6.5). La equivalencia entre estas medidas de riesgo recordemos que es un resultado de gran importancia práctica desde el punto de vista de la gestión del riesgo de la cobertura. Tal y como se recoge en el apartado anterior, este resultado teórico implica que minimizar el riesgo al vencimiento de la opción, que es lo que se está haciendo mediante ERM, es equivalente a irlo minimizando unidad de tiempo a unidad de tiempo. Es decir, el minimizar el riesgo al vencimiento implica la minimización del riesgo día a día, semana a semana, etc. Es decir, se obtienen carteras autofinanciadas en media para cualquier horizonte

temporal, lo que desde el punto de vista de la aplicación práctica de la metodología es muy útil. Puesto que, como norma general, los gestores de carteras de derivados no esperan a los vencimientos de los mismos para ir recomponiendo la composición de dichas carteras, si no que lo hacen en varias veces antes de los distintos vencimientos. Al ser equivalentes las expresiones de (6.5), el gestor de un cartera derivados que utiliza la metodología propuesta tiene el fundamento de que siempre está minimizando el riesgo independientemente de cuándo reajuste la composición de su cartera de derivados.

La técnica *Optimal Hedge Monte Carlo*, u OHMC, se basa en optimizar la cobertura de una cartera de instrumentos financieros derivados emitidos sobre un subyacente. Este enfoque ha sido desarrollado por Bouchaud, Potters y Sestovic (2001) y se basa en el análisis explícito de la estrategia de cobertura dinámica para obtener el coste de replicación de la cartera objetivo. En la valoración mediante OHMC el activo subyacente es simulado basándose en un modelo que trata de capturar las características del proceso real, al igual que hemos hecho en el primer paso de la metodología propuesta en la tesis, tal y como se refleja en el primer paso de la Figura 2 y se recoge en el cuarto capítulo.

En OHMC los ratios de cobertura y las funciones de valoración son soluciones a un problema de minimización de una medida del error estadístico de cobertura entre dos pasos temporales, todo esto con la restricción de mantener la posición con la menor variabilidad posible en media.

Por ello la metodología OHMC es muy interesante desde el punto de vista práctico puesto que se pone en el lugar de un *trader* de derivados que intenta replicar el *payoff* de la opción que tenga en cartera. Al igual que el *trader* la metodología OHMC también analiza el riesgo residual que viene asociado a todo este proceso de cobertura, al mismo tiempo que ofrece información sobre los costes en media de implementar dicha cobertura. Todo esto es posible al basarse en la distribución real del subyacente y no en una distribución de probabilidad *riesgo neutro* calibrada a mercado de modo que sirva sólo para valorar. De hecho, el enfoque riesgo neutro, basado en la replicación continua y perfecta, está limitada a casos muy concretos y situaciones ideales de mercado que muy rara vez se dan en la práctica⁴⁷. Por otra parte, el análisis y conocimiento explícito

⁴⁷ Limitaciones ya analizadas en capítulos previos de la tesis y que son algunas de las causas de la Superficie de Volatilidad

del riesgo residual asociado con las estrategias de cobertura de que se estén llevando a cabo para la cartera de derivados es de suma importancia para el gestor carteras de derivados puesto que le ayuda a tener una exposición rentabilidad-riesgo deseada por él, y le ayudará en la toma de decisiones de añadir o no nuevos instrumentos a su cartera.

En resumen, toda la filosofía OHMC, que se centra en las estrategias de cobertura, sus costes esperados y su riesgo residual, es posible adoptarla dentro de la metodología propuesta en la tesis por como se ha estructurado y definido ésta en las etapas reflejadas en la Figura 2, recordada de nuevo al comienzo del presente capítulo.

En conclusión, estas tres piezas componen una metodología híbrida muy potente y flexible, y que hemos visto a lo largo de la tesis que proporcionan una solución completa a la problemática de las opciones *Cliquet*. En concreto permite:

- i. Valoración coherente con los instrumentos de mercado tal y como refleja (6.1) y como consecuencia de ser un método de valoración riesgo neutro. Más concretamente, es un valorador por interpolación sobre los instrumentos de mercado.
- ii. Determinación de carteras de cobertura. Al ser un valorador por interpolación sobre los instrumentos de mercado y debido a la forma de los coeficientes β_0 y β dados por (6.2) y (6.3), se está obteniendo la composición de la cartera de cobertura estática del derivado objetivo de la valoración.
- iii. Bondad de las carteras de cobertura. La relación (6.4) permite que se pueda analizar si se ha conseguido descomponer exactamente la opción objetivo mediante los instrumentos de cobertura. El término ε de la ecuación (6.4) mide el error de cobertura y permite determinar por tanto la bondad de la misma.
- iv. Cuantificación del riesgo. De nuevo, el análisis del término ε de la ecuación (6.4), al recoger el error de cobertura, permite la cuantificación del mismo a través del cálculo del coeficiente R^2 entre los flujos de la cartera de cobertura y el derivado objetivo. Esto es equivalente al análisis de la varianza de ε .
- v. Posibilidad de análisis de escenarios. Tal y como se expuso en la sección 5.3.3., y en el caso de que la varianza de ε sea no nula, el haber generado por Monte Carlo la distribución a priori, permite la detección

y examen de escenarios tipo. Permitirá por ejemplo localizar los escenarios de riesgo máximo o diseñar nuevas estrategias de cobertura ad hoc añadiendo más instrumentos de cobertura OTC no incluidos en la cartera de cobertura.

- vi. Posibilidad de determinar los márgenes en la valoración de forma objetiva. De nuevo, si la varianza de ε no es nula, entonces la gestión de la cartera de cobertura conlleva riesgos y por tanto el gestor querrá añadir un margen al precio teórico que se obtenga de aplicar (6.1). Al tener la distribución de ε por ejemplo analizando los percentiles puede hallar dicho margen de forma objetiva.

Es posible por tanto concluir que la metodología diseñada y propuesta en la tesis para resolver el problema de la valoración y cobertura de *Cliquets*, cumple ambos objetivos y además permite un análisis del riesgo pormenorizado y detallado, tal y como recogen los puntos iv a vi.

6.3 Futuras líneas de investigación

Para finalizar se exponen a continuación muchas e interesantes cuestiones que surgen al hilo de toda la exposición que se ha realizado a lo largo de la tesis. Las más relevantes en mi opinión, son las siguientes:

- vii. Definición de una metodología más sistemática y objetiva para la determinación de los componentes de la cartera de cobertura
- viii. Continuar con la búsqueda de nuevos modelos de evolución del subyacente e incorporarlos a la metodología
- ix. Extender la metodología al caso multivariante
- x. Analizar más en profundidad la relación entre la metodología propuesta y la de cobertura media-varianza
- xi. Incorporación de la teoría de la decisión con riesgo para los casos de cobertura no perfecta
- xii. Analizar las implicaciones para la contabilidad de derivados exóticos con vencimientos superiores al ejercicio contable en el que se inicia la posición

De todas las futuras líneas de investigación propuestas, la más interesante es la primera. Esto es así puesto que si es posible objetivar, esto es, definir y utilizar un algoritmo que, dado un *payoff* a replicar y dado un conjunto de instrumentos de cobertura, seleccione automáticamente el conjunto óptimo y más eficiente de instrumentos de cobertura.

En el caso analizado en la tesis, el de los *Cliquets*, esta búsqueda ya está simplificada por el hecho de que los *Call Spreads forward start* son los instrumentos claves en la descomposición, ya que tienen exposición al *Skew forward* de volatilidad y al incluirlos como restricciones en los momentos en la metodología ERM la bondad del ajuste era prácticamente perfecta.

En el caso de que el *payoff* objetivo no sea del tipo analizado en la tesis, la búsqueda de los instrumentos de cobertura parte prácticamente desde cero, es decir, con todos los instrumentos disponibles en mercado. En el mejor de los casos, se puede partir un conjunto más reducido que se base en la intuición o en la experiencia del *trader* que desee cubrir dicho *payoff*.

Por ello, si se dispone del algoritmo de búsqueda y selección para todo tipo de *payoff* exótico entonces la metodología propuesta en la tesis es totalmente general para la valoración y la cobertura de cualquier derivado de renta variable.

Anexo A: Algoritmo de estimación

Una forma elegante de deducir el algoritmo Newton - Rapshon consiste en minimizar la aproximación de Taylor de grado dos de la función $W(\Lambda)$ dada por (3.13), esto es

$$W(\Lambda) \cong W(\Lambda_0) + \nabla_W(\Lambda_0)^T(\Lambda - \Lambda_0) + \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda_0)H_W(\Lambda_0)(\Lambda - \Lambda_0)^T$$

Donde ∇_W y H_W denotan respectivamente el gradiente y el hessiano de $W(\Lambda)$. Derivando e igualando a cero el segundo miembro, y despejando el valor de Λ

$$\Lambda = \Lambda_0 - H_W(\Lambda_0)^{-1}\nabla_W(\Lambda_0)$$

Esto es equivalente a aplicar el algoritmo Newton - Rapshon en el gradiente.

El algoritmo se basaría en iterar, mientras el valor del gradiente sea distinto de cero⁴⁸, la relación

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} - \alpha H_W(\Lambda_{i-1})^{-1}\nabla_W(\Lambda_{i-1}) \quad (\text{A.1})$$

Donde α es una tasa de ponderación del hessiano que decrecerá según el gradiente se aproxime a cero. Una forma muy interesante de estimar α viene propuesta por Elices y Jiménez (2006).

Es interesante notar que la relación (A.1) se puede escribir

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} - \alpha \Sigma_{\mathbf{p}}(\Lambda_{i-1})^{-1} E_{\mathbf{p}}[\mathbf{g} - \mathbf{C}]$$

Lo que recuerda a la estimación por M.C.O., bajo \mathbf{p} , de los coeficientes de regresión. Esto será importante por sus implicaciones en la cobertura, y como técnica de reducción de varianza con variables de control.

Por último, reseñar que una versión del código MATLAB utilizado para implementar este algoritmo es la función WMCFitting que se incluye en el Anexo D.

⁴⁸ Respecto de una tolerancia prefijada.

Anexo B: Cobertura de Mínima Varianza

Las estrategias de cobertura basadas en minimizar la varianza son un tema clásico en la literatura de cobertura de derivados cuando el mercado es incompleto. Se plantea como un problema de optimización estocástica cuya función objetivo es cuadrática. En este anexo se resumen brevemente los resultados principales obtenidos en esta área por Föllmer y Sonderman (1986), Föllmer y Schweizer (1990) y Schäl (1994).

i. Cobertura media-varianza en tiempo discreto

El punto de partida es un modelo general en tiempo discreto. El activo subyacente se modeliza mediante un proceso estocástico X_k definido en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , \mathcal{F}_k denota la σ -álgebra de los sucesos hasta tiempo k , con él incluido, esto es $k = 1, 2, \dots, T$. Sea H la función *payoff* en el vencimiento T sobre X_T . Para la cobertura o replicación de H se crea una cartera, V , tal que

$$V_t = \xi_t X_t + \eta_t$$

Dónde V_t denota el valor de la cartera en tiempo t , ξ_t denota el número de acciones de X compradas en tiempo $t - 1$, \mathcal{F}_{t-1} medible, i.e., predecible, y por último η_t denota el dinero en efectivo que se pone en la cuenta bancaria en t , \mathcal{F}_t medible, i.e., adaptado). Se asume para simplificar la notación que los tipos de interés son cero⁴⁹.

También se impone una condición final sobre V

$$V_T = H$$

Esto siempre se consigue mediante la flexibilidad obtenida de η_t , y por tanto la autofinanciación no está garantizada.

El coste acumulado de la estrategia, denotado por C_t , viene dado por

$$C_t = V_t - \sum_{j=1}^t \xi_j \Delta X_j$$

⁴⁹Tipos de interés no nulos se pueden incluir trabajando con todas las cantidades expresadas en valor actual.

El riesgo local se define como

$$E[(C_{t+1} - C_t)^2 / \mathcal{F}_t] = E[(V_{t+1} - V_t - \xi_{t+1} \Delta X_{t+1})^2 / \mathcal{F}_t] \quad (\text{B.1})$$

La solución de minimizar esta última expresión se determina mediante recursión hacia atrás. En el óptimo el proceso C es una martingala

$$E[C_{t+1} / \mathcal{F}_t] = C_t$$

Y por tanto auto-financiado en media, además

$$V_t = E[V_{t+1} / \mathcal{F}_t] - \xi_{t+1} = E[\Delta X_{t+1} / \mathcal{F}_t]$$

Para $t = 1, 2, \dots, T - 1$. Y como $V_T = H$, por tanto

$$V_t = E \left[H - \sum_{j=t+1}^T \Delta X_j / \mathcal{F}_t \right] \quad (\text{B.2})$$

Por último, la estrategia óptima viene dada por

$$\xi_t = \frac{\text{Cov}[V_t, \Delta X_t / \mathcal{F}_t]}{\text{Var}[\Delta X_t]} = \frac{\text{Cov}[H - \sum_{j=t+1}^T \Delta X_j, \Delta X_t / \mathcal{F}_t]}{\text{Var}[\Delta X_t]} \eta_t$$

Que también es igual a

$$\xi_t = E \left[H - \sum_{j=t+1}^T \Delta X_j / \mathcal{F}_t \right] - \xi_t X_t$$

Siguiendo Föllmer y Sondermann (1986), si X_t y C_t son martingala, y se cumple además (B.2) entonces V_t también es una martingala, y por tanto

$$V_t = E[V_t / \mathcal{F}_t] = E[H / \mathcal{F}_t]$$

Siendo posible ahora aplicar la descomposición de Kunita-Watanabe, i. e.

$$H = V_0 + \sum_{j=1}^T \xi_j^H \Delta X_j + L_T^H \quad (\text{B.3})$$

Donde L^H es una martingala ortogonal a X . Partiendo de (B.3) y de la propiedad de martingala de V_t se llega a

$$V_t = E[H / \mathcal{F}_t] = V_0 + \sum_{j=1}^t \xi_j^H \Delta X_j + L_t^H$$

Calculando ahora el riesgo local partiendo de (B.2) y (B.3) para el valor de V_t , entonces el riesgo local viene dado por

$$E[(V_{t+1} - V_t - \xi_{t+1}\Delta X_{t+1})^2/\mathcal{F}_t] = E[(\xi_{t+1}^H\Delta X_{t+1} - \xi_{t+1}\Delta X_{t+1} + \Delta L_{t+1}^H)^2/\mathcal{F}_t]$$

Esta última expresión es mínima cuando $\xi_{t+1}^H = \xi_{t+1}$, por lo que la estrategia óptima es la misma que en el caso anterior.

ii. Equivalencias entre Funciones de Pérdida Cuadráticas

Es también interesante analizar la relación entre las medidas de riesgo locales y las globales. En el problema analizado en la sección anterior la función de pérdida a minimizar era el riesgo local definido en (B.1). Schäl (1994) demostró que las siguientes funciones de pérdida cuadráticas

$$i. \quad E[(C_{t+1} - C_t)^2/\mathcal{F}_t]$$

$$ii. \quad E[(C_T - C_t)^2/\mathcal{F}_t]$$

$$iii. \quad E[(C_T - C_0)^2/\mathcal{F}_t]$$

son equivalentes bajo determinadas condiciones en el proceso estocástico del subyacente X en tiempo discreto. En concreto, la condición, que es suficiente, viene dada por que la expresión

$$\frac{|E[\Delta X_t/\mathcal{F}_t]|}{\sqrt{\text{Var}[\Delta X_t/\mathcal{F}_t]}} \quad (B.4)$$

Basta con que (B.4) sea una función determinista de t para que las tres funciones de pérdida cuadráticas consideradas sean equivalentes.

Obviamente el cumplimiento de

$$E[X_{t+1}/\mathcal{F}_t] = X_t$$

i. e., que X sea una martingala implica el cumplimiento de (B.4) y por tanto podemos concluir que la condición de martingala es una condición más que suficiente para que se dé la equivalencia entre las funciones de pérdida dadas por i., ii., e iii.

Hasta ahora hemos considerado estrategias, que no siendo auto-financiadas, tienen un valor final igual a H . Otra posibilidad es considerar estrategias auto-financiadas y

minimizar la pérdida final esperada. Esto se convierte en un problema de proyección en un espacio lineal, Schäl (1994) también consideró esto, y demostró que los dos problemas son equivalentes cuando la expresión

$$\frac{E[(\Delta X_t)^2/\mathcal{F}_t]}{\sqrt{\text{Var}[\Delta X_t/\mathcal{F}_t]}}$$

denominada como *mean-variance tradeoff* sea determinista.

Anexo C: Modelos estimados

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			GARCH(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			Gaussiana
Número de parámetros estimados			4
LLF			2798,7040
Akaike			-5589,4079
Bayes			-5569,6664
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
C	0,000149581	0,000434721	0,344084664
K	7,6033E-06	2,10996E-06	3,603533736
GARCH(1)	0,846707521	0,019555802	43,29699859
ARCH(1)	0,13708215	0,018582315	7,377022025

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			EGARCH(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			Gaussiana
Número de parámetros estimados			5
LLF			2843,3192
Akaike			-5676,6384
Bayes			-5651,9615
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
C	-0,000875522	0,000414049	-2,11453675
K	-0,240756231	0,045103634	-5,337845533
GARCH(1)	0,970631743	0,005588407	173,6866548
ARCH(1)	0,141680464	0,028676265	4,940687568
Leverage(1)	-0,187714812	0,016066085	-11,68391786

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			GJR(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			Gaussiana
Número de parámetros estimados			5
LLF			2836,2777
Akaike			-5662,5554
Bayes			-5637,8785
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
C	-0,000684612	0,000420761	-1,62708057
K	6,56767E-06	1,67418E-06	3,922913897
GARCH(1)	0,8679527	0,021395216	40,56760582
ARCH(1)	0	0,022222373	0
Leverage(1)	0,236545335	0,029630019	7,983300132

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			GARCH(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			T
Número de parámetros estimados			5
LLF			2813,107642
Akaike			-5616,215283
Bayes			-5591,538431
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
C	-4,9069E-05	0,000429998	-0,114114282
K	6,48283E-06	2,73272E-06	2,372300564
GARCH(1)	0,877338568	0,025280217	34,70455071
ARCH(1)	0,106430313	0,022202079	4,793709196
Grados de Libertad	7,901066087	1,786295663	4,423156957

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			EGARCH(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			T
Número de parámetros estimados			6
LLF			2847,708894
Akaike			-5683,417789
Bayes			-5653,805566
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
C	-0,000693161	0,000409426	-1,693007255
K	-0,234620577	0,054154675	-4,332415944
GARCH(1)	0,971929001	0,006636934	146,4424621
ARCH(1)	0,135052118	0,03291173	4,103464541
Leverage(1)	-0,187731828	0,022032298	-8,520755656
	12,24571234	4,989156293	2,454465569

Media condicional			ARMAX(0,0,0)
Varianza condicional			GJR(1,1)
Distribución de Probabilidad condicional			T
Número de parámetros estimados			6
LLF			2841,621709
Akaike			-5671,243417
Bayes			-5641,631194
Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico T
C	-0,000568581	0,000412052	-1,37987737
K	6,32381E-06	1,95563E-06	3,233638816
GARCH(1)	0,875176974	0,024270917	36,05866919
ARCH(1)	0	0,025604508	0
Leverage(1)	0,218315097	0,039435915	5,535946053

Anexo D: Código Matlab

En este anexo se encuentra todo el código en lenguaje MATLAB® programado ex profeso para la tesis.

```
function [Lambda, Wval] = WMCfitting(MarketPrices, DiscountedPayoffs)
% Weighted Monte Carlo fitting algorithm
% Inputs:
%   MarketPrices      := m by 1 Vector
%   DiscountedPayoffs := n by m Matrix

% Stopping parameter
max_it = 1000;
min_grad = 1.e-6;

% Input in Column vector form
MarketPrices = MarketPrices(:);

% Integer variables
n_paths = size(DiscountedPayoffs,1);
n_inst = length(MarketPrices);

% Lambda column vector initialization
Lambda = zeros(size(MarketPrices));

WMCProbs = exp(DiscountedPayoffs * Lambda) ./...
    sum(exp(DiscountedPayoffs * Lambda));

WMCPrices = DiscountedPayoffs'*WMCProbs;
Gradient = WMCPrices - MarketPrices;

CDP = DiscountedPayoffs - repmat(WMCPrices(:)', n_paths, 1);
Hessian=CDP' * (CDP .* repmat(WMCProbs, 1, n_inst));

% Auxiliar variables:
%   it = iteration counter
%   alpha = Hessian adjust factor
it = 0;
alpha = 0.01;

% Gradient distance evaluation
grad = sqrt(sum(Gradient.^2));

% Algorithm core
while it < max_it && grad > min_grad

    it = it + 1;

    Lambda = Lambda - alpha * ((Hessian^(-1) * Gradient));

    WMCProbs = exp(DiscountedPayoffs * Lambda) ./...
        sum(exp(DiscountedPayoffs * Lambda));
```

```
WMCPrices = DiscountedPayoffs' * WMCProbs;

Gradient = WMCPrices - MarketPrices;

CDP = DiscountedPayoffs - repmat(WMCPrices(:)', n_paths, 1);

Hessian = CDP' * (CDP .* repmat(WMCProbs, 1, n_inst));

grad = sqrt(sum(Gradient.^2));

alpha = min(1, 2 * alpha);

end

% Objective function value
Wval = log(sum(exp(DiscountedPayoffs * Lambda))) - MarketPrices' *
Lambda;

function [price, Probs, Beta] = WMCBetas(Lambda, DiscountedPayoffs,
Payoff)

Lambda = Lambda(:);

% WMC Probabilities
Probs = exp(DiscountedPayoffs * Lambda) ./ ...
        sum(exp(DiscountedPayoffs * Lambda));

% price computation: expectation under risk-neutral measure of Payoff
price = Payoff' * Probs;

% Beta vector for WMC Greeks
% Weighted Monte Carlo
n_paths = size(DiscountedPayoffs, 1);
Prices = DiscountedPayoffs' * Probs;

% Only In_portfolio instruments
PricesIn = Prices;
n_inst = length(PricesIn);

DiscountedPayoffs = DiscountedPayoffs - repmat(PricesIn(:)', n_paths,
1);

% Covariance between benchmarks payoffs (WMC measure)
Cov_gg = DiscountedPayoffs' * ...
        (DiscountedPayoffs .* repmat(Probs, 1, n_inst));

% Covariance between Payoff and benchmarks payoffs (WMC measure)
Payoff = Payoff - price;
Cov_fg = Payoff' * (DiscountedPayoffs .* repmat(Probs, 1, n_inst));

Beta = Cov_gg \ Cov_fg'; % non-centered Beta
% Beta(0) = price - Prices' * Beta;
Beta = [price - Prices' * Beta; Beta(:)];
```

```

function [price, Probs, Beta] = WMCBetas(Lambda, DiscountedPayoffs,
Payoff)

Lambda = Lambda(:);

% WMC Probabilities
Probs = exp(DiscountedPayoffs * Lambda) ./...
        sum(exp(DiscountedPayoffs * Lambda));

% price computation: expectation under risk-neutral measure of Payoff
price = Payoff' * Probs;

% Beta vector for WMC Greeks
% Weighted Monte Carlo
n_paths = size(DiscountedPayoffs, 1);
Prices = DiscountedPayoffs' * Probs;

% Only In_portfolio instruments
PricesIn = Prices;
n_inst = length(PricesIn);

DiscountedPayoffs = DiscountedPayoffs - repmat(PricesIn(:)', n_paths,
1);

% Covariance between benchmarks payoffs (WMC measure)
Cov_gg = DiscountedPayoffs' * ...
        (DiscountedPayoffs .* repmat(Probs, 1, n_inst));

% Covariance between Payoff and benchmarks payoffs (WMC measure)
Payoff = Payoff - price;
Cov_fg = Payoff' * (DiscountedPayoffs .* repmat(Probs, 1, n_inst));

Beta = Cov_gg \ Cov_fg'; % non-centered Beta
% Beta(0) = price - Prices' * Beta;
Beta = [price - Prices' * Beta; Beta(:)];

function Data4Greeks = WMCData4Greeks(computation_date, spot, Rate,...
    Dividend, DivYieldDF, Volatility, MarketData)
% Data for computing greeks of standard option of WMC calibration
% Inputs:
%   computation_date    := (required) date serial #
%   spot                := (required) underlying spot price
%   Rate                := (required) n_rates by 2 matrix
%   Dividend            := (required) n_dividends by 2 matrix
%   DivYieldDF          := (required) n_dividends by 1 matrix
%   Volatility          := (required) n_dates+1 by n_strikes+1 matrix
%   FDates              := (required) n_fixing_dates by 1 matrix
%   MarketData          := (required) 4 by # of fitting instruments
matrix,
%                               1st row CallOrPut flag CoP = +1 for Call
and
%                               CoP = -1 for Put, 2nd row strike % over
spot,
%                               3rd row fitting instrument beginning date
and
%                               4th row is fitting instrument maturity
date,

```

```

%                               both in serial # date format
% Output:
%   Data4Fitting                := 4 by # of fitting instruments matrix,
%                               1st row CallOrPut flag CoP = +1 for Call
and
%                               CoP = -1 for Put, 2nd row strike % over
spot,
%                               3rd row beginning path index and 4th
maturity
%                               path index
%
% see also: SCPprice.m, SCPdelta.m, SCPgamma.m ...

% Output initializing
    Data4Greeks = zeros(7,size(MarketData,2));

% Fitting instruments B-S price and path indexes computation
% inputs for SCPprice.m
    CoP = MarketData(1,:);
    K = MarketData(2,:);
    Beg_date = MarketData(3,:);
    End_date = MarketData(4,:);
    R = ZCCurveInterpolation(computation_date,End_date,Rate)';
    Q = ContDivYield(Dividend, DivYieldDF, computation_date,
End_date, spot);
    T = (End_date-computation_date)/365;
    Fw = spot*exp((R(:)'+Q(:)')'*T(:)');

% Strike computation
    Indxs4FwStrike=(MarketData(5,:)==0);
    K(Indxs4FwStrike)=K(Indxs4FwStrike).*Fw(Indxs4FwStrike);
    S=spot*ones(size(K));

% Vol. computation
    Vol=zeros(1,size(MarketData,2));
    for i=1:size(MarketData,2)

        Vol(i) = VolSurfaceInterpolation(End_date(i),...
            K(i)/Fw(i),Volatility);

    End

% Adjusting for forward start options
    PricesDF = ones(size(K)); % discount factor
    for i = 1:size(MarketData,2)

        if Beg_date(i)>computation_date % it is forward start

            T0 = (Beg_date(i)-computation_date)/365;
            R0 = ZCCurveInterpolation(computation_date,
Beg_date(i), Rate);
            Vol0=VolSurfaceInterpolation(Beg_date(i),K(i)/spot,...
                Volatility);
            R(i)=(R(i)*T(i)-R0*T0)/(T(i)-T0);
            Q(i) = ContDivYield(Dividend, DivYieldDF,
Beg_date(i),End_date(i),spot);
            Vol(i) = sqrt((Vol(i)^2*T(i)-Vol0^2*T0)/(T(i)-T0));

            % Ensuring forward vol real and positive
            if isreal(Vol(i))==0

```

```

        Vol(i)=max(real(Vol(i)),0.001);

    end

    T(i)=T(i)-T0;
    PricesDF(i)=exp(-R0*T0);

end

end

% inputs in row format
    CoP = CoP(:)'; K=K(:)'; S=S(:)'; R=R(:)';
    Q = Q(:)'; Vol=Vol(:)'; T=T(:)';

% i) Delta computation by means of SCPdelta.m
    Data4Greeks(1,:) = SCPdelta(CoP,K,S,R,Q,Vol,T).*PricesDF.*...
        (PricesDF==1);

% ii) Gamma computation by means of SCPdelta.m
    Data4Greeks(2,:) = SCPgamma(CoP,K,S,R,Q,Vol,T).*PricesDF.*...
        (PricesDF==1);

% iii) Vega computation by means of SCPvega.m
    Data4Greeks(3,:) = SCPvega(CoP,K,S,R,Q,Vol,T).*PricesDF;

% iv) Volga computation by means of SCPvolga.m
    Data4Greeks(4,:) = SCPvolga(CoP,K,S,R,Q,Vol,T).*PricesDF;

% v) Epsilon computation by means of SCPepsilon.m
    Data4Greeks(5,:) = SCPepsilon(CoP,K,S,R,Q,Vol,T).*PricesDF;

% vi) Rho computation by means of SCPrho.m
    Data4Greeks(6,:) = SCPrho(CoP,K,S,R,Q,Vol,T).*PricesDF;

% vii) Theta computation by means of SCPtheta.m
    Data4Greeks(7,:) = SCPtheta(CoP,K,S,R,Q,Vol,T).*PricesDF.*...
        (PricesDF==1);

function DiscountedPayoffs = WMCDiscountedPayoffs(MarketData,...
DiscountFactors, Paths)
% Discounted Payoffs computation for WMCFitting.m
% Inputs:
%   MarketData      := (required) 6 by # of fitting instruments
matrix,
%
%                   1st row CallOrPut flag CoP = +1 for Call and
%                   CoP = -1 for Put, 2nd row strike in % over
spot or
%                   in price , 3rd row beginning path index, 4th
row is
%                   maturity path index, 5th instrument marke
price and
%                   6th boolean denoting strike in % (0) in price
(1)
%   DiscountFactors := (required) vector of discount factor of each
%   Paths           := (required) n_paths by # of fitting instruments
+1
%                   matrix, 1st column is spot

```

```
% Output:
% DiscountedPayoffs

% # of fitting instruments
n_insts = size(MarketData,2);
n_paths = size(Paths,1);

% beg_index and end_index vectors
beg_index = MarketData(3,:);
end_index = MarketData(4,:);

% Discounted Payoffs computation
DiscountedPayoffs = zeros(n_paths,n_insts);

for i=1:n_insts

    CoP=MarketData(1,i);
    strike=MarketData(2,i);

    if MarketData(5,i)==0; % percent. strike over spot at beg_index(i)
        strike=strike*Paths(:,beg_index(i));
    end

    DiscountedPayoffs(:,i)=max(CoP*(Paths(:,end_index(i))-
    strike),0)*...
        DiscountFactors(end_index(i)-1);

end

function [MarketPrices,DiscountedPayoffs]=WMCMarketData(MarketData,...
    DiscountFactors,Paths)
% Auxiliar function for WMCFitting.m
% Inputs:
%   MarketData      := (1,:) strike(%), (2,:) market prices,
%                     (3,:) CoP (+1 or -1), (4,:) beginning index,
%                     (5,:) maturity index
%   DiscountFactors :=
%   Paths           :=

MarketPrices=MarketData(2,:);

% # of fitting instruments
n_insts=size(MarketData,2);

% beg_index and end_index vectors
beg_index=MarketData(4,:)+1;
end_index=MarketData(5,:)+1;
DiscountedPayoffs=zeros(n_paths,n_insts);

for i=1:n_insts

    Strike=Paths(:,beg_index(i))*MarketData(1,i);
    DiscountedPayoffs(:,i)=max(MarketData(3,i)*...
        (Paths(:,end_index(i))-
    Strike),0)*DiscountFactors(end_index(i)-1);

end
```

```

function Curve=ZCCurveInterpolation(computation_date,Date,RateCurve)
% Zero Coupon Curve Interpolation
% Inputs:
%   computation_date   := (required integer) date serial #
%   Date               := (required vector) desired interpolation or
%                       extrapolation serial # dates
%   RateCurve          := (required matrix) original curve
%                       (date,rate)
% Output
%   Curve              := (matrix) of (desired dates, interpolation
or
%                       extrapolation rates)

% All dates respect to computation_date
Date=Date-computation_date;
RateCurve(:,1)=RateCurve(:,1)-computation_date;

% Curve computation:
Curve=zeros(size(Date));

for i=1:length(Date)

    % i) Extrapolation by nearest neighbours
    if Date(i)<RateCurve(1,1)

        Curve(i)=RateCurve(1,2);

    elseif Date(i)>RateCurve(end,1)

        Curve(i)=RateCurve(end,2);

    % ii) Interpolation linear in logarithm
    else

        li=max(find(Date(i)>=RateCurve(:,1)));
        ui=min(find(Date(i)<=RateCurve(:,1)));

        % if the secuencia is ordered, as it is assumed,
        % then upper_index = lower_index + 1;
        if li==ui % it is in the curve no needs interpolation

            Curve(i)=RateCurve(li,2);

        else

            a=log(RateCurve(li,2));
            b=log(RateCurve(ui,2)/RateCurve(li,2))/...
              (RateCurve(ui,1)-RateCurve(li,1));
            Curve(i)=exp(a+b*(Date(i)-RateCurve(li,1)));

        end

    end

end

% Output in column vector form
Curve = Curve(:);

```

```
function Walks = LogNormalWalks(InitialValue, Mu, Sigma,
TimeIncrements, paths, seed)
% LogNormalWalks simulates n-dimensional Log-Normal paths, i.e., its
log
% increments are i.i.d. n-dimensional Normal with mean vector Mu, and
% covariance matrix Sigma.
%
% Walks =
LogNormalWalks(InitialValue,Mu,Sigma,TimeIncrements,paths,seed)
%
% Inputs:
% InitialValue      := (Required) initial value row Vector of Log-
Normal
%
%           paths
% Mu                := (Required) Mean Matrix of n-dimensional
%           Normal distribution, time dependency is 1st
%           dimension and random variate is 2nd dimension
% Sigma             := (Required) Covariance Matrix of n-dimensional
Normal
%
%           distribution, if only one variate is being
%           sampling Sigma is a Vector or scalar, if Sigma
is
%           time dependent 3rd dimension is time index
% TimeIncrements   := (Required) Vector of time increments (annual
basis)
%
%           only for positive TimeIncrements
% paths            := (Optional) integer number of paths per
dimension
% seed             := (Optional) scalar for random number algorithm
%
% Output:
% Walks            := n-dimensional matrix which element Walks(i,j,k)
is
%           i-th Log-Normal path at time j-th of underling
variable
%           k-th;

% Checking input arguments

% i) number of arguments
if nargin<4
    error('Not enough input arguments')
elseif nargin==4
    paths=1000;
    seed=sqrt(sum(clock/1000));
elseif nargin==5
    seed=sqrt(sum(clock/1000));
elseif nargin>6
    error('Too many input arguments')
end

% ii) Inputs order
dt=TimeIncrements(:)';% in row
```

```
% function's core
% initializing of random number generator algorithm
randn('seed',seed);
if (length(InitialValue)==1) % one variable for sampling

    % Adjusted Mu if initial Mu is constant
    if (length(Mu)==1)

        Mu = Mu*ones(size(dt));

    end

    % Adjusted Sigma if initial Sigma is constant
    if (length(Sigma)==1)

        Sigma = Sigma*ones(size(dt));

    end

    % Consistency between Mu, Sigma and TimeIncrements
    Mu = Mu(:)'; %in row
    Sigma = Sigma(:)'; %in row

    if (length(Mu)~=length(Sigma))

        error('Mu and Sigma have different sizes')

    end

    if (length(dt)~=length(Sigma))

        error('Mu, Sigma and dt are incompatible')

    end

    X = MultiVariateNormalSample(zeros(size(dt)), eye(length(dt)), ...
        length(dt), paths);
    M = repmat(Mu.*dt, paths, 1);
    S = repmat(sqrt(Sigma).*sqrt(dt), paths, 1);

    % Output:
    Walks = InitialValue*exp(cumsum(M+S.*X, 2));

elseif (length(InitialValue)>1) % several variables sampling

    % argument Sigma consistency
    for k = 1:size(Sigma,3)

        if (size(Sigma(:, :, k), 1)~= (size(Sigma(:, :, k), 2)))

            error('Sigma is not a squared matrix')

        end

        if (Sigma(:, :, k)~=Sigma(:, :, k)')

            error('Sigma is not a simetric matrix')

        end

    end

end
```

```
if any(diag(Sigma(:,:,k))<0)
    error('Any diagonal element in Sigma is not positive')
end

if (length(InitialValue)~=length(Mu(:,:,k))) || ...
    (length(Sigma(:,:,k))~=length(Mu(:,:,k)))
    error('Inconsistency between inputs: InitialValue, Mu and
Sigma')
end

EigenValues=eig(Sigma(:,:,k));

if any(EigenValues<0)
    error('Any Sigma is non positive definite')
end

end

% ordering inputs
InitialValue=InitialValue(:)';
dt=dt(:)';

% initializing auxiliar variables
S0=zeros(paths,length(dt),length(InitialValue));
X=zeros(paths,length(dt),length(InitialValue));

% constant Covariance and Mean

if size(Sigma,3)==1 && (size(Mu,3)==1)

    % ordering inputs
    Mu=Mu(:)';

    for i=1:length(dt);

        S0(:,i,:)=repmat(InitialValue,paths,1);

        X(:,i,:)=MultiVariateNormalSample(Mu*dt(i),Sigma*dt(i),paths);

    end

elseif (size(Sigma,3)>1) && (size(Mu,3)==1)

    % time dependent deterministic Covariance and constant Mean
    % ordering inputs
    Mu=Mu(:)';

    for i=1:length(dt);

        S0(:,i,:)=repmat(InitialValue,paths,1);
        S(:,i,:)=Sigma(:,:,i);
        X(:,i,:)=MultiVariateNormalSample(Mu*dt(i),S*dt(i),paths);

    end

end
```

```
elseif (size(Sigma,3)>1) && (size(Mu,3)==1)

% time dependent deterministic Mean and constant Covariance
% ordering inputs
Sigma=Sigma(:)';

for I = 1:length(dt);

    S0(:,i,:) = repmat(InitialValue,paths,1);
    M(:,i) = Mu(:,i);
    X(:,i,:) = MultiVariateNormalSample(M*dt(i), Sigma*dt(i),
paths);

end

elseif (size(Sigma,3)>1) && (size(Mu,3)>1)
% time dependent deterministic Mean and Covariance

for i = 1:length(dt);

    S0(:,i,:) = repmat(InitialValue,paths,1);
    M(:,i) = Mu(:,i);
    S(:,i) = Sigma(:,i);
    X(:,i,:) = MultiVariateNormalSample(M*dt(i), S*dt(i),
paths);

end

end

% Output:
Walks=S0.*exp(cumsum(X,2));

end

function Sample = MultiVariateNormalSample(Mu, Sigma, SampleSize)
% Rand sampling from n-dimensional Normal distribution with mean
vector Mu
% and covariance matrix Sigma
%
% Sample = MultiVariateNormalSample(Mu,Sigma,size)
%
% Inputs:
% Mu := (Required) Mean Vector of n-dimensional Normal
% Sigma := (Optional) Covariance Matrix of n-dimensional
Normal
% distribution;
% SampleSize := (Optional) integer sample's size;
% See also: randn.m, chol.m

% Checking input arguments
% i) number of arguments
if nargin == 0

    error('Not enough input arguments')

elseif nargin == 1
```

```
    Sigma =eye(length(Mu),length(Mu));
    SampleSize = 1000;

elseif nargin==2

    SampleSize = 1000;

elseif nargin>3

    error('Too many input arguments')

end

% ii) argument consistency
if (size(Sigma,1)~=size(Sigma,2))

    error('Sigma is not a squared matrix')

end

if (Sigma~=Sigma')

    error('Sigma is not a simetric matrix')

end

if any(diag(Sigma)<0)

    error('Any diagonal element in Sigma is not positive')

end

if length(Sigma)~=length(Mu)

    error('Inconsistency between inputs: Mu and Sigma')

end

EigenValues = eig(Sigma);

if any(EigenValues<0)

    error('Sigma is non positive definite')

end

% Function's core

% ordering inputs
Mu(:) = Mu';

% Standard Gaussian i.i.d.sample
Sample = randn(SampleSize, length(Sigma));

% Avoiding sampling error
% i) minus sample's mean
Sample = Sample - repmat(mean(Sample,1), SampleSize, 1);

% ii) divided by pseudo-squared root of SampleCovariance
SampleCovariance = (Sample' * Sample) / SampleSize;
Sample = Sample / (chol(SampleCovariance));
```

```
% Output:  
Mu = repmat(Mu, SampleSize, 1); % Mu matrix  
Sample = Mu + Sample * chol(Sigma);
```

Bibliografía

- [1] Akaike H. (1974). *A new look at the statistical model identification*. IEEE Transactions on Automatic Control 19 (6), pp. 716–723.
- [2] Avellaneda M., Levy A., Paras A. (1995). *Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities*. Applied Mathematical Finance, 2, pp. 73-88.
- [3] Avellaneda M., Paras A. (1996). *Managing the Volatility Risk of Portfolios of Derivative Securities: the Lagrangian Uncertain Volatility Model*. Applied Mathematical Finance, 3, pp. 21-52.
- [4] Avellaneda M., Buff R., Friedman C., Grandchamp N., Kruk L., Newman J. (2001). *Weighed Monte Carlo: a new technique for calibrating asset-pricing models*. International Journal of Theoretical and Applied Finance Vol. 4, No. 1.
- [5] Arrieta D. (2012). *Entropía Relativa Mínima, Weighed Monte Carlo y cobertura de derivados*. Análisis Afi, N° 2, II semestre 2012.
<http://www.analisisafi.es/revistaAfi/descargas/1240474/1150092/Entropia-Relativa-Minima-Weighed-Monte-Carlo-y-cobertura-de-derivados.pdf>
- [6] Bates D. (1996). *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutschemark Options*. Review of Financial Studies, 9, pp. 69-108 (1996).
- [7] Behvand F. (2010). *Forward Implied Volatility*. Ph. D. Thesis, Christ Church Oxford University.
- [8] Black F., Scholes M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy 81, pp. 637-659.
- [9] Bollerslev, T. (1986). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics. Vol. 31, pp. 307–327.

- [10] Bouchaud J. P., Potters M., Sestovic D. (2001) *Hedged Monte-Carlo: low variance derivative pricing with objective probabilities*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications Volume 289, Issues 3–4, 15 January 2001, pp. 517–525.
- [11] Box G. E. P., Pierce D. A. (1970). *Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models*. Journal of the American Statistical Association, 65, pp. 1509–1526.
- [12] Box G. E. P., Ljung M. (1978). *On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models*. Biometrika 65 (2), pp. 297–303.
- [13] Box G. E. P., Jenkins G. M., Reinsel G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- [14] Breeden D., Litzenberger R. (1978). *Prices of State Contingent Claims Implicit in Options Prices*. Journal of Business 51, pp. 621-651.
- [15] Buchen P. W., Kelly M. (1996), *The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices*. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 31 N°.1.
- [16] Buetow G. W. (1999). *Ratchet Options*. Journal of Financial and Strategic Decisions. Volume 12, Number 2.
- [17] Carr P., Geman H., Madan P. D. (2001). *Pricing and hedging in incomplete markets*. Journal of Financial Economics 62, pp. 131–167
- [18] Cover T., Thomas J. (1991). *Elements of information theory*. John Wiley & Sons.
- [19] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985). *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. Econometrica 53, pp. 385–407.
- [20] Den Iseger P., Oldenkamp E. (2005). *Cliquet Options: Pricing and Greeks in Deterministic and Stochastic Volatility Models*. Working paper.

- [21] Derman E., Kani I (1994). *Riding on the smile*, Risk (July), pp. 32–29.
- [22] Derman E., Kamal M., Kani I., Zou J (1997). *Is the Volatility Skew Fair?*, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
- [23] Derman E., Zou J. (1999). *Strike-Adjusted Spread: A New Metric For Estimating The Value Of Equity Option*, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
http://www.ederman.com/new/docs/strike_adjusted_spread.pdf
- [24] De Vylder F. E. (1996). *Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction*. Editions de L'Université de Bruxelles.
- [25] Duffie D., Richardson H. R. (1991). Mean-Variance Hedging in Continuous Time. *Annals of Applied Probability*. Volume 1, Number 1, pp. 1-15.
- [26] Dupire B. (1994). *Pricing with a smile*. Risk (July), pp. 18–20.
- [27] Econometrics Toolbox™ 1 User's Guide. March 2010 Online only Revised for Version 1.3 (Release 2010a), MATLAB®.
- [28] Eales B., Tunaru R. (2004). *Pricing Options on Interest Rate Instruments*. The Handbook of European Fixed Income Securities. John Wiley & Sons, pp. 569-600.
- [29] Elices A., Jiménez E. (2006). *Weighted Monte Carlo*. Risk (May), pp. 78-83.
- [30] Engle R. F. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. *Econometrica*. Vol. 50, pp. 987–1007.
- [31] Föllmer H., Schweizer M. (1990). *Hedging of contingent claims under incomplete information*. *Applied Stochastic Analysis* pp. 389-414.
- [32] Föllmer H., Sondermann D. (1986). *Hedging of non-redundant contingent claims*. In W. Hildebrand and A. Mas-Colell, editors, *Contribution to Mathematical Economics*, pp. 205-223.

- [33] Forsyth P. A., Windcliff, H. A., Vetzal K. R. (2006). *Numerical methods and volatility models for valuing cliquet options*. Applied Mathematical Finance 13, pp. 353-386.
- [34] Gaudenzi M., Zanette A. (2008). *Pricing cliquet options by tree methods*. Working Paper Dipartimento di Finanza dell'Impresa e dei Mercati Finanziari, Università di Udine.
- [35] Glosten L. R., Jagannathan R., Runkle D. E. (1993). *On the Relation between Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*. The Journal of Finance. Vol. 48, No. 5, pp. 1779–1801.
- [36] Godfrey L. G. (1997). *Misspecification Tests in Econometrics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [37] Gouriéroux C., Laurent J. P., Pham H (1998). *Mean-Variance Hedging and Numéraire*. Mathematical Finance, Volume 8, Issue 3, pp. 179–200, July.
- [38] Gulko L. (1995). *The Entropy Theory of Option Pricing*, Yale University Working Paper.
- [39] Gulko L. (1996). *The Entropy Theory of Bond Pricing*, Yale University Working Paper.
- [40] Gulko L. (2002). *The Entropy Theory of Bond Option Pricing*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Volume 5, Issue 4, pp. 331-355.
- [41] Hakansson N. (1979). *The Fantastic world of Finance: Progress and the free lunch*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 14, pp. 714-734.
- [42] Hamilton J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[43] Harrison M., Kreps D. (1979). *Martingales and arbitrage in multiperiod security markets*, J. Economic Theory 20, pp. 381 - 408.

[44] Harrison M., Pliska S. R. (1981). *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*. Stochastic Processes and their Applications Volume 11, Issue 3, August 1981, pp. 215–260.

[45] Harrison M., Pliska S. R. (1983). *A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets*. Stochastic Processes and their Applications Volume 15, Issue 3, August 1983, pp. 313–316.

[46] Heston S. (1993). *A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*. Review of Financial Studies 6, pp. 327–343.

[47] Hull J. C. (2003). *Options, Futures and Other Derivatives*. Fifth Edition, Prentice Hall.

[48] Hull J., White A. (1987). *The pricing of options on assets with stochastic volatility*. Journal of Finance 42, pp. 281–300.

[49] Jeffery C. (2004). *Reverse cliquets: end of the road?* Risk magazine, February.

[50] Kilin F. (2009). *Numerical advances in pricing forward volatility sensitive equity derivatives*. PH. D. Thesis, Centre for Practical Quantitative Finance Frankfurt School of Finance and Management.

[51] Kullback, S. (1967). *Information Theory and Statistics*, New York, Dover Publications, Inc.

[52] Kullback S., Leibler R. A. (1951). *On Information and Sufficiency*. Annals of Mathematical Statistics 22 (1), pp. 79–86.

- [53] Lagnado, R., Osher S. (1997). *A technique for calibrating derivative security pricing models: numerical solution of an inverse problem*. The Journal Computational Finance, Volume 1, Number 1.
- [54] Laurent J. P., Pham H. (1999). *Dynamic programming and mean-variance hedging*. Finance and Stochastics 3, pp. 83-110.
- [55] Lidebrandt T. (2007). *Variance Reduction Three Approaches to Control Variates*.
- [56] Lyons T. J. (1995). *Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives*. Applied Mathematical Finance. Volume 2, Issue 2 pp. 117-133.
- [57] Madan D. B., Schoutens W. (2010). *Simple Processes and the Pricing and Hedging of Cliquets*. Robert H. Smith School Research Paper No. RHS 06-111. <http://ssrn.com/abstract=1546363>, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1546363>
- [58] Matosek Z. (2008). *Hedging cliquet options*. Working paper Vrije Universiteit Amsterdam.
- [59] Merton R. (1973). *Theory of Rational Option Pricing*. The Bell Journal of Economics and Management Science Vol. 4, No. 1 Spring, pp. 141-183.
- [60] Merton R. (1976). *Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous*. Journal of Financial Economics 3, pp. 125–144.
- [61] Nelson, D. B. (1991). *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*. Econometrica. Vol. 59, pp. 347–370.
- [62] Novales A. (1993). *Econometría*. McGraw-Hill Interamericana de España S.L., segunda edición.
- [63] Nykvist J. (2009). *Time Consistency in Option Pricing Models*. Working paper, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

- [64] Patel N. (2002). *The evolving art of pricing cliquets*. Risk magazine July.
- [65] Panjer H. H., Willmot, G. E. (1992). *Insurance Risk Models*, Society of Actuaries, Schaumburg.
- [66] Petrelli A., Zhang J., Siu O., Chatterjee R., Kapoor V. (2008). *Optimal Dynamic Hedging of Cliquets*. Working paper.
- [67] Pham H., Rheinländer T., Schweizer M. (1998). *Mean-variance hedging for continuous processes: new proofs and examples*. Finance and Stochastics 2, pp. 173-198.
- [68] Primbs J. A. (2010). *The Factor Approach to Derivative Pricing*. Stanford University.
- [69] Rubinstein M. (1991). *Pay now, choose later*. Risk, 4(2), 13.
- [70] Rubinstein M. (1994). *Implied binomial trees*. Journal of Finance, 49 (3), pp. 771–818.
- [71] Schäl M. (1994). *On quadratic cost criteria for option hedging*. Mathematics of Operations Research 19, pp. 121-131.
- [72] Schoutens W., Simons E., Tistaert J. (2004). *A Perfect Calibration! Now What?* Wilmott Magazine, March.
- [73] Schwarz G. (1978). *Estimating the Dimension of a Model*. Annals of Statistics Volume 6, Number 2, pp. 461-464.
- [74] Schweizer M. (1992). *Mean-variance hedging for general claims*. Annals of Applied Probability 2, pp. 171-179.
- [75] Schweizer M. (1996). *Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure*. Annals of Probability 64, pp. 206-236.

[76] Shannon C. E. (1948). *A Mathematical Theory of Communication*. The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379–423 (July), 623–656 (October).

[77] Taleb N. N. (1997). *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. Wiley Finance.

[78] Tor N. (2004). *A Remark on the Pricing of Certain Cliquet Options*. Christer Borell, Chalmers university of Technology, Göteborg, Sweden.

[79] Vilar J. L. (2000). *Arithmetization of distributions and linear goal programming*. Insurance: Mathematics and Economics 27, pp. 113-122.

[80] Wilmott P. (2003). *Cliquet Options and Volatility Models*. Wilmott Magazine, Agosto, pp. 78-83.