Nuevas aportaciones al análisis de observaciones de mareas terrestres

A.P. VENEDIKOV*/**

R. VIEIRA**

C. DE TORO**

Presentada en la Sesión Científica
del día 3 de febrero de 1.993

Abstract

A new method recently developed in Spain is briefly discussed. The method suggests to use a sophisticated scheme for the appproximation of the drift of the tidal records. The drift is represented separately in subintervals of the record through polynomials of a variable power. An optimum power is estimated for every subinterval by testing statistical hypotheses through the criteria of Fisher and Akaike (AIC) and multiple analysis of all data for every value of the polynomial's power.

I. Introducción

Como es sabido, la marea terrestre es uno de los fenómenos que mayor interés presenta en las investigaciones geodésicas y geofísicas, teniendo como peculiaridades más relevantes su periodicidad y su acción global sobre el planeta. Básicamene consiste en la acción sobre la Tierra de las fuerzas derivadas del potencial astronómico, que dan lugar a deformaciones y a cambios en magnitud y dirección de la aceleración de la gravedad. Teniendo en cuenta las precisiones que hoy en dia pueden llegar a obtenerse en las observaciones de los diferentes fenómenos que son consecuencia de dichas fuerzas, únicamente la influencia del Sol y de la Luna deberá tomarse en consideración.

En España, desde hace 20 años, el I.A.G. viene desarrollando un amplio y extenso programa de investigación en Mareas Terrestres y, como consecuencia de ello, en mareas oceánicas y atmosféricas, que, en los últimos

* Institute of Geophysics, Bulgarian Academy of Sciences.

** Instituto de Astronomía y Geodesia (C.S.I.C.- U.C.M.). Facultad de Ciencias Matemáticas. Ciudad Universitaria. Madrid.

años, se ha extendido a otros problemas relacionados con las mareas y con otros fenómenos naturales, como son el volcanismo y la sismicidad. Una prueba de este trabajo es el complejo geodinámico que el I.A.G. ha instalado en la Isla de Lanzarote, donde en la actualidad más de 30 sensores, fruto de desarrollo propio y de colaboraciones internacionales, auscultan permanentemente la actividad de la Tierra en dicha zona.

En un registro de mareas podemos distinguir dos componentes principales: la señal de marea y la deriva, que se manifiesta por un desplazamiento aperiódico de la referencia de cero del sistema de registro. Una tercera componente sería el error o lo que frecuentemente llamamos ruido. Así, para un instante t, podemos expresar la ordenada correspondiente en la forma

$$Y_t = G_t + D_t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

El análisis de los registros de marea es un caso típico del estudio de series temporales, si bien con ciertas peculiaridades que han hecho conveniente, desde el inicio de estas investigaciones, el desarrollo de técnicas de análisis específicas para la mejor interpretación de dichas observaciones. Entre estas peculiaridades diferenciadoras podemos destacar la necesidad de la más alta precisión posible, a fin de poder distinguir componentes de muy pequeña amplitud que, además, en las distintas bandas de frecuencia tienen velocidades angulares muy próximas unas de otras. Es también conveniente mencionar la existencia de múltiples perturbaciones periódicas y no periódicas, como son los efectos meteorológicos, oceánicos, geodinámicos, instrumentales, etc. Todo ello hace necesario el uso de técnicas matemáticas muy especializadas.

Un primer paso en el análisis de mareas fue resolver el sitema de ecuaciones (1) mediante la utilización del método de mínimos cuadrados, reemplazando previamente en dicho sistema G_t y D_t por modelos analíticos a los que denominaremos modelo de marea y modelo de deriva, respectivamente.

2. Modelo de marea

A partir de la teoría sabemos que G_t puede expresarse en la forma

$$G_t = \sum_{k=1}^{m} h_k \cos(\phi_k + \omega_k t) \qquad (2)$$

Cada término del desarrollo representa una de las componentes de marea, siendo ω_k su velocidad angular, conocida, y h_k y ϕ_k las incógnitas amplitud y fase de dicha componente. Los problemas sobrevienen cuando tenemos en cuenta el número de componentes *m* que, si consideramos el potencial de Tamura, es superior a 1200 (Tamura, 1987, Xi Quinwen, 1985) y con la dificultad añadida de la proximidad en los valores de sus velocidades angulares. No obstante, este problema, que ya fue estudiado y resuelto (Venedikov, 1966) mediante un proceso que permite la reducción del número de incógnitas agrupándolas por grupos de armónicos de velocidad angular próxima, dependiendo la mayor o menor separación de armónicos, dentro de cada grupo, del número de ecuaciones (intervalo de observación) y de la calidad de las observaciones. Para ello se introducen unas nuevas incógnitas definidas por

$$\begin{aligned} \xi &= \delta \cos \kappa \\ \eta &= \delta \cos \kappa \end{aligned} \qquad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(w_k) = h_k / H_k \\ \kappa &= \kappa(\omega_k) = \Phi_k - \phi_k \end{aligned}$$

siendo H_k y Φ_k las amplitudes y fases teóricas, que pueden calcularse a partir del potencial astronómico. Las nuevas incógnitas pueden ser agrupadas en función de la proximidad de la velocidad angular, llegando a un nuevo sistema de ecuaciones:

$$G_t = \sum_{j=1}^{g} \left(\xi_j \, c_j(t) + \eta_j \, s_j(t) \right) \qquad (4)$$

en el que g toma un valor considerablemente menor que m en (2), pudiéndose calcular $c_j(t)$ y $s_j(t)$ para cualquier instante.

3. Modelo de deriva

En este trabajo proponemos un nuevo método, M92 para la modelización de la deriva mediante un ajuste polinomial de grado variable para los distintos intervalos de observación, normalmente separados por las interrupciones que, por diversas causas, son habituales en las observaciones. El método está pensado y desarrollado teniendo en cuenta la utilización de ordenadores potentes, que hoy en dia son habituales en los centros de investigación. Dado su reciente desarrollo, el método solo ha sido ensayado por los autores, aunque sus resultados mejoran sensiblemente anteriores cálculos; es de esperar que de su uso en los diferentes supuestos que las distintas observaciones nos puedan plantear podamos ratificar sus ventajas.

Para la aplicación del método, consideramos el conjunto de observaciones dividido en intervalos de longitud variable separados, normalmente, por interrupciones. Supongamos N intervalos, que llamaremos Δ_i, con una época central T_i y una longitud variable n_i expresada en número de horas que, en el formato de mareas, coincidirá con el número de ordenadas Y_t de dicho intervalo, ya que partimos de la hipótesis de que no existen interrupciones dentro de los intervalos. Un caso particular del estudio sería cuando, por la calidad del registro, pudiéramos hacer $n_i = n = cte$.

En cada intervalo Δ_i podemos hacer una aproximación polinómica de la deriva en función del tiempo

$$D_t = \sum_{k=0}^{v_i} z_{ki} p_{tk} \qquad i = 1, 2, \ldots N \qquad (5)$$

$$p_{tk} = (t - T_i)^k$$

siendo v_i el grado del polinómio y z_{ki} sus coeficientes. Tanto v_i como las incógnitas z_{ki} serán específicas para cada Δ_i y, en ambos casos, su determinación será consecuencia del propio proceso de cálculo.Básicamente, por tanto, el método incorpora al programa de análisis la posibilidad de ajustar la deriva por intervalos a través de polinomios de grado variable.

4. Análisis por el método de mínimos cuadrados

En un intervalo dado Δ_i tenemos n_i coordenadas horarias Y_t que podemos expresar en forma vectorial

$$Y_i = \| Y_t \| \qquad (6)$$

con

$$t = T_i - v_i, \quad T_i - v_i + 1, \ldots T_i + v_i,$$
$$v_i = (n_i - 1)/2, \qquad i = 1, 2, \ldots N$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4) y (5), ambas con respecto a las incógnitas, y después de hacer las sustituciones necesarias, podemos escribir, para cada intervalo Δ_i , el modelo para los datos Y_t , es decir para el vector Y_i , en forma matricial

$$Y_i = \underbrace{A_i X + P_i z_i}_{\text{marea + deriva}} \qquad (7)$$

donde X son las incógnitas de marea, únicas e idénticas para todos los Δ_i , y z_i las incógnitas de la deriva, específicas para cada Δ_i .

El sistema puede resolverse aplicando el Método de Mínimos Cuadrados; no obstante, el tener que reiterar el proceso numerosas veces variando en cada caso la potencia del polinomio del modelo de deriva, da lugar a un proceso lento y largo aun para los ordenadores más potentes, por lo que es necesario simplificar la metodología. Por esta razón, sustituimos la expresión (7) por:

$$Y_i = B_i X + Q_i Z_i \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}
&Q_i = P_i S_i \quad \text{con} \quad S_i S_i^* = (P_i^* P_i)^{-1} \\
&B_i = A_i - Q_i (Q_i^* A_i) \\
&Z_i = S_i^{-1} (z_i + (Q_i A_i^*) X) \\
&B_i^* Q_i = 0 \qquad (9) \\
&Q_i^* Q_i = I
\end{aligned}$$

donde con * designamos la matriz traspuesta, S_i es una matriz triangular superior e I es la matriz de identidad.

Si resolvemos (8) por MMC, obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones normales para los valores estimados $\tilde{z}_i$ de z_i y $\tilde{X}_i$ de X_i : N ecuaciones matriciales para las incógnitas de la deriva

$$(Q_i^* Q_i) \tilde{Z}_i = Q_i^* Y_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \qquad (10)$$

y una ecuación matricial para las incógnitas de marea

$$(B^* B) \tilde{X} = B^* Y, \quad B = \|B_i\|, \; Y = \|Y_i\|, \quad i = 1,2,\ldots,N \qquad (11)$$

Resolviendo (10) y (11), obtenemos

$$\tilde{Z}_i = (Q_i^* Q_i)^{-1} (Q_i^* Y) = Q_i^* Y, \quad i = 1,2,\dots,N \qquad (12)$$

$$\tilde{X} = (B^* B)^{-1} (B^* Y).$$

5. Selección del grado óptimo del polinomio de deriva

Para un intervalo de registro fijo Δ_i , en el que consideramos todas las posibilidades de variación del grado v_i del polinomio de deriva, vamos a formar y resolver las ecuaciones (10) y (11).

Llamamos V_0 al variante correspondiente a $v_i = v$ y V_1 a la de $v_i = v+1$ en el intervalo Δ_i . Las diferencias entre ambas variantes se encuentran en los modelos de deriva para los Δ_i , que son:

$$V_0 : D_t = z_0\, p_{t0} + z_1 p_{t1} + \dots z_v\, p_{tv} \qquad (13)$$

$$V_1 : D_t = z_0\, p_{t0} + z_1\, p_{t1} + \dots + z_v\, p_{tv} + z_{v+1}\, p_{tv+1}$$

expresiones en las que por simplificación hemos eliminado el subíndice i en z_{ki}.

De la expresión (13) deducimos que V_0 puede obtenerse a partir de V_1 considerando la "hipótesis de cero", es decir:

$$H_0 : z_{v+1} = 0 \qquad (14)$$

El problema de seleccionar la mejor variante entre V_0 y V_1 es equivalente a la comprobación de H_0. Si H_0 no es rechazada, sería V_0 la elegida.

Para resolver el problema se recurre al método de análisis de varianzas. Para ello, en primer lugar calculamos la razón de Fisher F.

$$F = (s_0^2 - s_1^2) / \sigma_0^2 \qquad (15)$$

en la que s_0^2 y s_1^2 son las sumas de los cuadrados correspondientes a V_0 y V_1, respectivamente.

Cuando H_0 es cierta y, por tanto, deberíamos elegir V_0, F nos daría un número pequeño. Cuando H_0 no es cierta, V_1 sería la variante elegida y la razón de Fisher nos daría un número grande, todo ello en el supuesto de que interpretáramos un "número grande" o "pequeño" de acuerdo con las reglas estadísticas (método de análisis de varianzas).

Además del criterio de Fisher aplicamos el criterio de Akaike (Sakamoto, Y., Ishiguro, M., Kitagawa, G., 1986) definido por:

$$AIC = \tilde{n} \log 2\pi + \tilde{n} \log \sigma^2 + \tilde{n} + 2(\tilde{m} + 2) \qquad (16)$$

donde

$\tilde{n}$ es el número total de datos

$\tilde{m}$ es el número total de incógnitas, incluyendo la deriva,

σ^2 es la varianza estimada

De acuerdo con este criterio un variante puede aceptarse como óptimo cuando el valor obtenido sea el más bajo de los calculados u observados.

6. Ejemplo de aplicación

En la tabla 1, se presentan resultados comparativos entre el antiguo método de análisis, designado M67 (Venedikov, 1966), y el nuevo método, denominado M92. La principal conclusión que podemos extraer es que los errores cuadráticos medios correspondientes a M92 son considerablemente inferiores que los del método M67.

Referencias

SAKAMOTO, Y., ISHIGURO, M., KITAGAWA, G., 1986. Akaike Information Criterion statistics, D. Reidel Publ. Company, KTK Scientific Publishers/Tokio, Chapter 8, p. 172.

TAMURA, Y., 1987. A harmonic development of the tide-generating potential, *Bull. d'Inform. Marées Terrestres,* Nr 99, pp. 6813-6855.

VENEDIKOV, A.P., 1966. Une méthode pour l'analyse des marées terrestres à partir d'enregistrements de longueurs arbitraires, *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci., LII, pp. 437-459.*

XI QUINWEN, 1985. The algebraic deduction of harmonic development for the tide-generating potential with the IBM-PC, *Proc. 10th Int. Symp. Earth Tides, pp. 481-490.*

marea D	*fact. amplitud δ*		*desfasaje κ*	
	M92	*M67*	*M92*	*M67*
Q_1	1.1823 ± 18	1.1831 ± 30	-2°136 ± 84	-2°202 ±146
O_1	1.1500 3	1.1500 6	-1.684 16	-1.661 38
π_1	1.1519 143	1.0995 231	2.809 709	0.834 1.205
P_1	1.1321 8	1.1320 14	0.215 42	0.191 69
S_1	0.7495 509	0.9180 843	24.29 4.087	11.00 5.259
K_1	1.1172 3	1.1166 4	0.205 12	0.201 21
ψ_1	0.9763 340	1.0261 552	-18.11 1.998	-9.869 3.081
φ_1	1.1162 200	1.0877 325	5.329 1.023	5.413 1.711

marea SD	*fact. amplitud δ*		*desfasaje κ*	
	M92	*M67*	*M92*	*M67*
$2N_2$	0.9630 ± 67	0.9888 ±118	-2°000 ±397	-2°022 ±684
μ_2	0.9958 57	0.9836 100	-4.360 327	-3.782 582
N_2	0.9960 9	0.9970 15	0.780 51	0.855 88
M_2	1.0179 18	1.0173 3	2.167 9	2.160 16
L_2	1.0666 61	1.0677 96	3.368 325	4.114 518
T_2	1.0368 63	1.0424 98	5.838 346	4.863 541
S_2	1.0689 4	1.0677 6	4.001 19	3.991 31
K_2	1.0594 11	1.0583 17	3.795 58	3.862 91

Tabla 1. COMPARACION ENTRE LOS METODOS DE ANALISIS *M67* Y *M92*.

Lanzarote. Estación Geodinámica Cueva de los Verdes, Gravimetro LCR 434
Epoca de observación: 87.05.14./91.06.12., intervalos de longitud n = 48^h.