

LOS GRUPOS DE GÉNERO IMAGINARIO MENOR QUE 10



TRABAJO FIN DE MASTER
MÁSTER MATEMÁTICAS AVANZADAS 2013

Adrián Bacelo Polo

Director: José Javier Etayo Gordejuela

Proyecto: MTM2011-22435

PRELIMINARES

Superficies de Klein y grupos NEC

Una superficie de Klein S es una superficie compacta dotada de una estructura dianalítica [1]. Las superficies de Klein pueden ser vistas como una generalización de superficies de Riemann incluyendo las superficies con borde y no orientadas. Una superficie de Klein orientada sin borde es una superficie de Riemann. Dada una superficie de Klein X de género topológico g con k componentes en el borde, el número $p = \eta g + k - 1$ se llama género algebraico de X , donde $\eta = 2$ si X es una superficie orientable y $\eta = 1$ si no.

En el estudio de superficies de Klein y sus grupos de automorfismos los grupos cristalográficos no euclídeos (Grupos NEC, en inglés) juegan un papel esencial. Un grupo NEC Γ es un subgrupo discreto de \mathcal{G} (el grupo completo de isometrías del plano hiperbólico \mathcal{H}) con cociente compacto \mathcal{H}/Γ . Para cada superficie de Klein X con $p \geq 2$ existe un grupo NEC Γ , tal que $X = \mathcal{H}/\Gamma$.

Un grupo finito G de orden N es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein $X = \mathcal{H}/\Gamma$ si y solo si existe un grupo NEC Λ tal que Γ es un subgrupo normal de Λ con índice N y $G = \Lambda/\Gamma$. Cada grupo finito G actúa como grupo de automorfismos de una superficie de Klein no orientable sin borde. Al mínimo género de estas superficies lo llamaremos género imaginario de G y se denota por $\tilde{\sigma}(G)$. Una superficie de género topológico $g \geq 3$ tiene a lo más $84(g - 2)$ automorfismos. Así que para cada g hay un número finito de grupos actuando en una superficie de género g .

Un grupo NEC Γ es un subgrupo discreto de isometrías del plano hiperbólico \mathcal{H} , incluyendo elementos que inviertan la orientación, con cociente compacto $X = \mathcal{H}/\Gamma$. Cada grupo NEC Γ tiene asociada una signatura [14]:

$$\sigma(\Gamma) = (g, \pm, [m_1, \dots, m_r], \{(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i}), i = 1, \dots, k\}), \quad (1)$$

donde $g, k, r, m_i, n_{i,j}$ son enteros que satisfacen $g, k, r \geq 0, m_i \geq 2, n_{i,j} \geq 2$. Los números m_i son los períodos propios. Los paréntesis $(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i})$ son los ciclo-períodos. Los números $n_{i,j}$ son los períodos del ciclo-período $(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i})$. Denotaremos por $[-]$, $(-)$ y $\{-\}$ los casos en los que $r = 0$, $s_i = 0$ y $k = 0$, respectivamente.

La signatura determina una presentación [21] de Γ por los generadores x_i ($i = 1, \dots, r$); e_i ($i = 1, \dots, k$); $c_{i,j}$ ($i = 1, \dots, k; j = 0, \dots, s_i$); a_i, b_i ($i = 1, \dots, g$) si σ tiene signo '+'; y d_i ($i = 1, \dots, g$) si σ tiene signo '-'.

Estos generadores satisfacen las siguientes relaciones:

$$x_i^{m_i} = 1; c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1; e_i^{-1}c_{i,0}e_ic_{i,s_i} = 1$$

y

$$\prod_{i=1}^r x_i \prod_{i=1}^k e_i \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 1 \text{ si } \sigma \text{ tiene signo '+'}$$

$$\prod_{i=1}^r x_i \prod_{i=1}^k e_i \prod_{i=1}^g d_i^2 = 1 \text{ si } \sigma \text{ tiene signo '-'}$$

Las isometrías x_i son elípticas, e_i, a_i, b_i son hiperbólicas, $c_{i,j}$ son reflexiones y d_i son reflexiones sesgadas.

Cada grupo NEC Γ con signatura (1) tiene asociada una región fundamental cuya área $\mu(\Gamma)$, llamada el área del grupo, es:

$$\mu(\Gamma) = 2\pi \left(\eta g + k - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}} \right) \right), \quad (2)$$

con $\eta = 2$ o 1 dependiendo del signo '+' o '-' en la signatura. Un grupo NEC con signatura (1) existe si y solo si el lado derecho de (2) es mayor que 0. Denotamos por $|\Gamma|$ la expresión $\mu(\Gamma)/2\pi$ y se llama el área reducida de Γ .

Si Γ es un subgrupo de un grupo NEC Λ de índice finito N , entonces Γ también es un grupo NEC y por la fórmula de Riemann-Hurwitz, $|\Gamma| = N|\Lambda|$.

Sea X una superficie de Klein no orientable de género topológico $g \geq 3$ sin borde. Entonces por [17] existe un grupo NEC Γ con signatura:

$$\sigma(\Gamma) = (g, -, [-], \{-\}), \quad (3)$$

tal que $X = \mathcal{H}/\Gamma$

Grupos de automorfismos de las superficies

Cada grupo finito G actúa como un grupo de automorfismos de alguna superficie de Klein no orientable y sin borde [2]. El mínimo género de estas superficies le llamaremos género imaginario de G , y se denota por $\tilde{\sigma}(G)$. Sea $X = \mathcal{H}/\Gamma$ una superficie no orientable y sin borde en la cual G actúa como un grupo de automorfismos. Entonces existe otro grupo NEC Λ tal que $G = \Lambda/\Gamma$. De la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos que $g - 2 = o(G)|\Lambda|$, donde $o(G)$ denota el orden de G . Entonces

$$\tilde{\sigma}(G) \leq g = 2 + o(G)|\Lambda|,$$

y así obtener el género imaginario es equivalente a encontrar un grupo Λ y un epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ tal que $\Gamma = \ker \theta$ es un grupo NEC (esto es, sin elementos de orden finito)

y $G = \theta(\Lambda^+)$, donde Λ^+ es el subgrupo formado por los elementos de Λ que preservan la orientación, ver [18], y con mínima $|\Lambda|$.

Datos conocidos sobre el género imaginario

Los grupos que tienen género imaginario 1 y 2 han sido clasificados por T.W. Tucker [20]. Los grupos de género 1 son C_n, D_n, A_4, S_4 y A_5 . Tenemos dos familias de grupos de género 2, $C_2 \times C_n$, $n > 2$ par, y $C_2 \times D_n$, n par. Se sabe que no existe grupo con género imaginario 3, [15].

El género imaginario de los grupos que pertenecen a varias familias infinitas también se ha obtenido. Para los grupos Abelianos de orden impar ha sido calculado en [6] y este resultado fue extendido a todos los grupos Abelianos en [11]. May obtuvo en [15] el género imaginario de los grupos dicíclicos y grupos Hamiltonianos sin parte de orden impar.

Además se sabe el género imaginario de los grupos $C_m \times D_n$ [7], de los grupos $D_m \times D_n$ [8] y de los grupos $DC_3 \times C_n$ y $A_4 \times C_n$ [9].

A continuación exponemos el género imaginario de los grupos de orden menor que 32 cuando no es 1 ni 2, para éstos, véase arriba:

G	$o(G)$	$\tilde{\sigma}(G)$	Referencia
$Q \simeq DC_2$	8	6	May [15]
$C_3 \times C_3$	9	5	Etayo [6]
DC_3	12	7	May[15]
$C_4 \times C_4$	16	10	Gromadzki [11]
$C_2 \times C_2 \times C_4$	16	10	Gromadzki [11]
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	16	6	Gromadzki [11]
$C_2 \times Q$	16	14	May [15]
DC_4	16	10	May [15]
L_4	16	6	Etayo y Martínez [10]
$(4,4 \mid 2,2)$	16	6	Etayo y Martínez [10]
QA_4	16	6	Etayo y Martínez [10]
$\langle 2,2,2 \rangle_2$	16	6	Etayo y Martínez [10]
$\langle 2,2 \mid 4; 2 \rangle$	16	10	Etayo y Martínez [10]
$C_3 \times C_6$	18	11	Gromadzki [11]
$C_3 \times D_3$	18	5	Etayo y Martínez [7]
$(3,3 \mid 3;2)$	18	5	Etayo y Martínez [10]
DC_5	20	12	May [15]
$\langle 5,4,2 \rangle$	20	5	Etayo y Martínez [10]
G_{21}	21	9	Etayo y Martínez [10]
$C_2 \times C_2 \times C_6$	24	14	Gromadzki [11]
$C_4 \times D_3$	24	8	Etayo y Martínez [7]
$DC_3 \times C_2$	24	14	Etayo y Martínez [9]
$A_4 \times C_2$	24	4	Etayo y Martínez [9]
$C_3 \times D_4$	24	8	Etayo y Martínez [7]
$C_3 \times Q$	24	18	Etayo y Martínez [10]
$(4,6 \mid 2,2)$	24	7	Etayo y Martínez [10]
$\langle 2,3,3 \rangle$	24	10	Etayo y Martínez [10]
$\langle -2,2,3 \rangle$	24	15	Etayo y Martínez [10]
DC_6	24	14	May [15]
$C_5 \times C_5$	25	17	Etayo [6]
$C_3 \times C_9$	27	17	Etayo [6]
$C_3 \times C_3 \times C_3$	27	29	Etayo [6]
$(3,3 \mid 3,3)$	27	11	Etayo y Martínez [10]
$C_9 \rtimes C_3$	27	17	Etayo y Martínez [10]
DC_7	28	16	May [15]
$C_3 \times D_5$	30	9	Etayo y Martínez [7]
$C_5 \times D_3$	30	9	Etayo y Martínez [7]

Tabla 1. Grupos de orden menor que 32 con género imaginario conocido

Además, se conocen todos los grupos que hay con género imaginario menor o igual que 5, [2]:

Género imaginario 1: Tucker [20]

G	$o(G)$
C_n	n
D_n	$2n$
A_4	12
S_4	24
A_5	120

Género imaginario 2: Tucker [20]

G	$o(G)$
$C_2 \times C_n, n > 2$ par	$2n$
$C_2 \times D_n, n$ par	$4n$

Género imaginario 3: No hay. [15]

Género imaginario 4:

G	$o(G)$	Referencia
$C_2 \times A_4$	24	Etayo y Martínez [9]
$C_2 \times S_4$	48	Etayo y Martínez [7]

Género imaginario 5: Bujalance, Etayo y Martínez [2]

G	$o(G)$
$C_3 \times C_3$	9
$((3,3,3;2))$	18
$C_3 \times D_3$	18
$\langle 5,4,2 \rangle$	20
$D_3 \times D_3$	36
$(4,4 \mid 2,3)$	36
$(2,4,6;2)$	72
S_5	120

M.D.E. Conder en una conferencia en Castro-Urdiales en 2010 anunció que usando software informático, había obtenido los grupos de género imaginario hasta 65, en términos de su descripción en la "SmallGroupLibrary" de MAGMA. Tras hablar con él, nos

envió sin problemas esta lista no publicada. Sin embargo, esta lista no da información ni sobre la estructura algebraica de los grupos ni sobre los epimorfismos θ que determinan la acción del grupo NEC Λ sobre el grupo G .

Por ello, partiremos de su lista pero estableceremos en cada caso cuál es la estructura algebraica del grupo G , cuáles son los posibles grupos NEC Λ en cada caso y cuál es el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$.

Grupos de género imaginario 6

Según la lista de Conder, tendríamos 11 grupos de género imaginario 6, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[8,4]	8	(0; +; [4,4]; {(-)})
[16,3]	16	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)}) ó (0; +; [-]; {(-),(2)})
[16,6]	16	(0; +; [-]; {(-), (2)})
[16,8]	16	(0; +; [4]; {(2,2)}) ó (0; +; [2,4]; {(-)})
[16,13]	16	(0; +; [-]; {(2,2,4,4)})
[16,14]	16	(0; +; [-]; {(2,2,2,2,2)})
[32,27]	32	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[32,43]	32	(0; +; [-]; {(2,2,2,4)})
[80,49]	80	(0; +; [5]; {(2)})
[120,35]	120	(0; +; [-]; {(2,3,10)})
[160,234]	160	(0; +; [-]; {(2,4,5)})

En la notación indicada en la tabla, [X,Y] indica el grupo Y entre los de orden X, en la "SmallGroupLibrary", es decir, es la identificación GAP del grupo.

Atendiendo a la Tabla 1, tenemos que los grupos de género imaginario 6 que aparecen ahí son:

G	$o(G)$
$Q \simeq DC_2$	8
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	16
L_4	16
$(4,4 \mid 2,2)$	16
QA_4	16
$\langle 2,2,2 \rangle_2$	16

Así empecemos a analizar los grupos:

\Rightarrow El primero de ellos de la lista de Conder es el [8,4] que tiene orden 8 y que por tanto se corresponde con el grupo de orden 8 que tenemos de nuestra tabla. Así [8,4] $\simeq DC_2$. El género imaginario de este grupo fue calculado por May en [10], aunque no se da explícitamente el epimorfismo. Así, tenemos que este grupo está generado por X

e Y tales que cumplen $X^4 = 1, X^2 = Y^2, Y^3XY = X^3$. Su grupo NEC Λ asociado es $(0; +; [4, 4]; \{(-)\})$ y el epimorfismo correspondiente es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ definido por

$$\theta(x_1) = X, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(e_1) = Y^3X^3, \quad \theta(c_{1,0}) = X^2$$

Claramente es un epimorfismo ya que los generadores están en la imagen. Además DC_2 está generado por la imagen de los elementos x_1 y x_2 que preservan la orientación, luego el epimorfismo actúa en una superficie no orientable. El área reducida del grupo Λ es $\frac{1}{2}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que nos encontramos es el [16,3], el cual tiene orden 16 y se corresponde con $(4,4 | 2,2)$. Este grupo está generado por R y S que cumplen $R^4 = S^4 = (RS)^2 = (R^{-1}S)^2 = 1$. En este caso tenemos 3 grupos NEC, luego:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ no está calculado el epimorfismo asociado. Así tenemos que el epimorfismo correspondiente es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = R, \quad \theta(e_1) = R^3, \quad \theta(c_{1,0}) = RS, \quad \theta(c_{1,1}) = S^2, \quad \theta(c_{1,2}) = R^2SR^3$$

Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que la imagen del elemento x_1 y la imagen del elemento $e_1c_{1,0}c_{1,1}$ generan el grupo y ambos son elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$ el epimorfismo está calculado en [10], así el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = RS, \quad \theta(x_2) = S^3, \quad \theta(e_1) = R^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = R^2$$

Claramente es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable, ya que el grupo está generado por imágenes de elementos que preservan la orientación (x_1x_2 y e_1x_1). El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

- iii) Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(-),(2)\})$ tampoco está calculado el epimorfismo. Luego el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(e_1) = R^3, \quad \theta(e_2) = R, \quad \theta(c_{1,0}) = R^2, \quad \theta(c_{2,0}) = RS, \quad \theta(c_{2,1}) = SR$$

Es un epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que tenemos que las imágenes de los elementos e_2 y $c_{2,1}c_{1,0}e_2$ que preservan la orientación generan el grupo. El área reducida de este grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El tercer grupo que tenemos es el [16,6], que también tiene orden 16 y se corresponde con QA_4 . Este grupo es estudiado en [10]. Una presentación de este grupo viene dada por los generadores X y Y que cumplen $X^8 = Y^2 = 1, YXY = X^5$. Atendiendo al grupo NEC dado $(0; +; [-]; \{(-),(2)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ definido por

$$\theta(e_1) = X^{-1}, \quad \theta(e_2) = X, \quad \theta(c_{1,0}) = X^4, \quad \theta(c_{2,0}) = Y, \quad \theta(c_{2,1}) = YX^4$$

Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que el grupo está generado por la imagen de e_2 y de $c_{2,1}c_{1,0}$, elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [16,8], que tiene orden 16 y corresponde al grupo semidiedral L_4 . Este grupo tiene una presentación dada por dos generadores X e Y tales que cumplen las relaciones $X^8 = Y^2 = 1, YXY = X^3$. En este caso tenemos dos grupos NEC posibles, así:

- i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ no se ha dado el epimorfismo de forma explícita. Así tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(e_1) = YX^7, \quad \theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = YX^4Y, \quad \theta(c_{1,2}) = XYX^7$$

Las imágenes de los elementos $c_{1,0}c_{1,1}e_1$ y $e_1c_{1,0}c_{1,1}e_1$ generan el grupo G y ambos son elementos que preservan la orientación, luego es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

- ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2, 4]; \{(-)\})$, ha sido estudiado en [10], y tenemos que el epimorfismo asociado a él es $\theta : \Lambda \rightarrow G$ dado por

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = YX, \quad \theta(e_1) = X^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = (XY)^2$$

Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable claramente (x_1 y x_1x_2 son elementos que preservan la orientación y su imagen genera el grupo) y el área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El grupo [16,13] tiene orden 16 y corresponde al grupo $\langle 2,2,2 \rangle_2$. Este grupo es estudiado en [10]. Este grupo puede ser generado por 3 elementos R, S y T que satisfacen las relaciones $R^2 = S^2 = T^2 = 1, RST = STR = TRS$. Dado el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 2, 4, 4)\})$, el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es

$$\theta(c_{1,0}) = R, \quad \theta(c_{1,1}) = (RS)^2, \quad \theta(c_{1,2}) = S, \quad \theta(c_{1,3}) = T, \quad \theta(c_{1,4}) = R$$

Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que la imagen de los elementos $c_{1,0}c_{1,1}, c_{1,1}c_{1,2}$ y $(c_{1,0}c_{1,2})^2c_{1,1}c_{1,3}$ preservan la orientación y generan todo el grupo. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El grupo [16,14] tiene también orden 16 y corresponde a $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$. Este grupo ha sido estudiado explícitamente en [11]. Cada uno de los C_2 está generado por un a, b, c, d de orden 2. Teniendo el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$, el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ a este grupo es:

$$\theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(c_{1,1}) = b, \quad \theta(c_{1,2}) = c, \quad \theta(c_{1,3}) = d, \quad \theta(c_{1,4}) = ad, \quad \theta(c_{1,5}) = a$$

Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable pues tenemos que los generadores están en la imagen y además que el elemento $c_{1,0}c_{1,3}c_{1,4}$ es no orientable y

su imagen es el neutro. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo es [32,27], que tiene orden 32. Para los grupos de orden 32 usaremos la notación de [13]. Tomamos en primer lugar el grupo $\Gamma_4 a_1$, que tiene estructura algebraica $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$. Este grupo, según [19], tiene una presentación con generadores A, B, C, D y X tales que cumplen $A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = X^2 = 1, XA = AX, BX = XB, CX = XAC, DX = XBD$ y además A, B, C, D conmutan entre ellos. Así, dado el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 4)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(c_{1,0}) = A, \quad \theta(c_{1,1}) = C, \quad \theta(c_{1,2}) = ABCD, \quad \theta(c_{1,3}) = CDX, \quad \theta(c_{1,4}) = A$$

Veamos pues que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Tenemos que el elemento $(c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3})^2$ tiene como imagen el generador A , el elemento $(c_{1,0}c_{1,1}c_{1,3}c_{1,4})^2$ tiene como imagen el generador B , el elemento $c_{1,2}c_{1,3}c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador C , el elemento $c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}$ tiene como imagen el generador D y por último el elemento $c_{1,2}c_{1,3}c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,4}c_{1,3}c_{1,1}c_{1,2}$ tiene como imagen el generador X . Así tenemos que el grupo G está generado por imágenes de elementos que conservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es [32,43], que tiene orden 32. Tomamos $\Gamma_6 a_1$ con estructura algebraica $(C_2 \times D_4) \rtimes C_2$. Este grupo, atendiendo a [19], tiene una presentación dada por los generadores A, B y C tales que cumplen $A^8 = B^2 = C^2 = 1, AB = BA^7, AC = CA^5, BC = CB$. Atendiendo pues al grupo NEC dado $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 4)\})$, el epimorfismo asociado que tenemos es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(c_{1,0}) = C, \quad \theta(c_{1,1}) = B, \quad \theta(c_{1,2}) = A^4, \quad \theta(c_{1,3}) = AB, \quad \theta(c_{1,4}) = C$$

Es claro que la imagen del elemento $c_{1,3}c_{1,1}$ es el generador A , la imagen del elemento $c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,3}c_{1,1})^4$ es el generador B y la imagen del elemento $c_{1,0}c_{1,1}c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,3}c_{1,1})^4$ es el generador C . Así tenemos los generadores del grupo G como imagen de elementos que conservan la orientación, luego es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo a analizar es [80,49], de orden 80. Coxeter describe en [4] el grupo $(2, 5, 5; 2)$ con presentación dada por los generadores S y R tales que cumplen $R^2 = S^5 = (RS)^5 = (R^{-1}S^{-1}RS)^2 = 1$; y estructura algebraica $(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5$. Así dado el grupo NEC $(0; +; [5]; \{(2)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = S, \quad \theta(e_1) = S^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = R, \quad \theta(c_{1,1}) = SR^{-1}S^{-1}$$

Claramente es epimorfismo ya que los generadores están en la imagen. Para ver que actúa sobre una superficie no orientable, notemos que el elemento $c_{1,0}x_1$ es no orientable y tiene como imagen el RS . Así el elemento $(c_{1,0}x_1)^5$ tiene como imagen el elemento neutro y es no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{20}$.

\Rightarrow Ahora nos toca estudiar el grupo $[120,35]$, de orden 120 y que se corresponde con $C_2 \times A_5$. Tomemos como generador de C_2 el elemento X , de orden 2, y tenemos claro que A_5 son las permutaciones pares de 5 elementos. El grupo NEC asociado que tenemos es $(0; +; [-]; \{(2, 3, 10)\})$, y el epimorfismo asociado que tenemos es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(c_{1,0}) = (23)(45)X, \quad \theta(c_{1,1}) = (24)(35), \quad \theta(c_{1,2}) = (14)(35), \quad \theta(c_{1,3}) = (23)(45)X$$

Tenemos que $\theta((c_{1,2}c_{1,3})^5) = X$ y que $\theta((c_{1,2}c_{1,3})^6) = (15234)$. Además tenemos que $\theta(c_{1,1}c_{1,2}) = (135)$, lo que significa que $\theta((c_{1,2}c_{1,3})^6)$ y $\theta(c_{1,1}c_{1,2})$ generan un subgrupo de orden múltiplo de 15 en A_5 , pero A_5 es simple, luego estos dos elementos generan todo A_5 . Así, junto al generador de C_2 , tenemos que podemos generar G con imágenes de elementos orientables, luego θ es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{30}$.

\Rightarrow El último grupo que tenemos que analizar es $[160,234]$, de orden 160. Este grupo contiene al anterior de orden 80 (véase [4]) y por lo tanto tiene estructura algebraica $((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_2$. Una presentación de este grupo viene en [3], que viene dada por los generadores T, R y S tales que cumplen $T^2 = R^4 = S^5 = (RT)^2 = (TS)^2 = (RS)^2 = (RS^{-1})^4 = S^2R^2SR^3S^3R^2T = 1$. Así dado el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 4, 5)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Tenemos que la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el elemento R , la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S y por las propiedades de los generadores tenemos que T es imagen del elemento $(c_{1,1}c_{1,2})^2(c_{1,2}c_{1,3})^2c_{1,1}c_{1,2}(c_{1,2}c_{1,3})^4(c_{1,1}c_{1,2})^2(c_{1,2}c_{1,3})^3$. Así tenemos que los generadores son imágenes de elementos orientables, y por tanto es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{40}$.

Grupos de género imaginario 7

Según la lista de Conder, tendríamos 4 grupos de género imaginario 7, que serían:

<i>Grupo</i>	$o(G)$	Λ
[12,1]	12	$(0; +; [3,4]; \{(-)\})$
[24,8]	24	$(0; +; [-]; \{(2,2,3,4)\})$
[36,3]	36	$(0; +; [9]; \{(2)\})$
[72,15]	72	$(0; +; [-]; \{(2,4,9)\})$

Atendiendo a la Tabla 1, tenemos que los grupos de género imaginario 7 que aparecen ahí son:

G	$o(G)$
DC_3	12
$(4,6 \mid 2,2)$	24

Luego:

\Rightarrow El primero de la lista que tenemos es [12,1] que se corresponde a DC_3 ya que ambos tienen orden 12. May en [15] calcula su género imaginario, pero no el epimorfismo. Este grupo está generado por X e Y tales que cumplen las relaciones $X^6 = 1, X^3 = Y^2, Y^3XY = X^5$. El grupo NEC asociado es $(0; +; [3, 4]; \{(-)\})$, así el epimorfismo correspondiente $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = X^2, \quad \theta(x_2) = Y, \quad \theta(e_1) = YX, \quad \theta(c_{1,0}) = X^3$$

Es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable porque la imagen de los elementos x_2 y $(x_2)^3e_1$ generan el grupo G y son elementos que preservan la orientación. El área reducida del grupo es $\frac{5}{12}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que nos encontramos es [24,8], de orden 24 y que se corresponde con el grupo $(4,6 \mid 2,2)$. Este grupo es estudiado en profundidad en [10]. Este grupo está generado por X e Y tales que cumplen las relaciones $X^4 = Y^6 = (XY)^2 = (X^{-1}Y)^2 = 1$. Entonces, dado el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 2, 3, 4)\})$ el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado es:

$$\theta(c_{1,0}) = Y^3, \quad \theta(c_{1,1}) = X^2, \quad \theta(c_{1,2}) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,3}) = YX, \quad \theta(c_{1,4}) = Y^3$$

Observamos que $\theta(c_{1,3}c_{1,2}c_{1,0}) = Y^5 = Y^{-1}$. Así que Y está en la imagen de θ y también X . Ahora tenemos que $\theta(c_{1,0}c_{1,2}c_{1,0}c_{1,1}c_{1,2}) = 1$, así que tenemos un elemento que invierte la orientación en el $\ker(\theta)$ y así tenemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{24}$.

\Rightarrow El tercer grupo que nos encontramos es el [36,3], de orden 36. Encontramos una presentación de este grupo en [2], bajo la denominación $Gp(2)$ que viene dada por elementos a, b y c tales que cumplen $a^2 = b^2 = c^9 = [a, b] = 1, c^{-1}ac = b$ y $c^{-1}bc = ab$ y por lo tanto el grupo tiene estructura $(C_2 \times C_2) \times C_9$. El grupo NEC asociado es $(0; +; [9]; \{(2)\})$ y el epimorfismo correspondiente $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es

$$\theta(x_1) = c^{-1}, \quad \theta(e_1) = c, \quad \theta(c_{1,0}) = a, \quad \theta(c_{1,1}) = b$$

Observamos que c es imagen de e_1 , que b es imagen de $e_1c_{1,0}c_{1,1}x_1$ y por último a es imagen de $(c_{1,0}c_{1,1})(e_1c_{1,0}c_{1,1}x_1)$. Así tenemos los generadores del grupo G como imagen de elementos orientables y tenemos que θ es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{36}$.

\Rightarrow El último grupo que tenemos que analizar es [72,15], de orden 72, que contiene al anterior (véase [16]) y por lo tanto tiene estructura algebraica $((C_2 \times C_2) \times C_9) \times C_2$. Una presentación de este grupo viene en [3], que viene dada por los generadores T, R y S tales que cumplen $T^2 = R^4 = S^9 = (RT)^2 = (TS)^2 = (RS)^2 = TS^{-1}RS^{-1}R^{-2} = 1$. Así dado el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 4, 9)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Tenemos que la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el elemento R , la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S y por las propiedades de los generadores tenemos que T es imagen del elemento $(c_{1,1}c_{1,2})^2c_{1,2}c_{1,3}(c_{1,1}c_{1,2})^3c_{1,2}c_{1,3}$. Así tenemos que los generadores son imágenes de elementos orientables, y por tanto es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{5}{72}$.

Grupos de género imaginario 8

Según la lista de Conder, tendríamos 5 grupos de género imaginario 8, que serían:

Grupo	$o(G)$	Λ
[24,5]	24	$(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ ó $(0; +; [2,4]; \{(-)\})$
[24,10]	24	$(0; +; [-]; \{(-),(2)\})$
[48,38]	48	$(0; +; [-]; \{(2,2,2,4)\})$
[56,11]	56	$(0; +; [7]; \{(2)\})$
[504,156]	504	$(0; +; [-]; \{(2,3,7)\})$

Atendiendo a la Tabla 1, tenemos que los grupos de género imaginario 8 que aparecen ahí son:

G	$o(G)$
$C_4 \times D_3$	24
$C_3 \times D_4$	24

Notemos que los grupos cíclicos C_n están generados por un X tal que $X^n = 1$ y que los grupos diedrales D_n están generados por un Y y un Z tal que $Y^2 = Z^2 = (YZ)^n = 1$. Así, observando los datos que tenemos:

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es el [24,5], que tiene orden 24 y se corresponde con $C_4 \times D_3$. Aquí tenemos dos grupos NEC, luego:

i) Para el grupo NEC $(0; +; [4]; \{(2,2)\})$ tenemos que el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado es:

$$\theta(x_1) = XY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}Y, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = X^2, \quad \theta(c_{1,2}) = YZY$$

Tenemos que la imagen del elemento $c_{1,0}$ es el generador Z . Por otra parte tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,2}$ es YZ , luego tenemos que la imagen de $c_{1,0}c_{1,2}c_{1,0}$ es el generador Y . Por último, la imagen de $x_1c_{1,0}c_{1,2}c_{1,0}$ es el generador X . Luego tenemos que θ es epimorfismo. Veamos que actúa sobre una superficie no orientable. Tenemos que la imagen del elemento orientable $(x_1c_{1,0}c_{1,2}c_{1,0})^2$ es X^2 , luego tenemos que la imagen de $(x_1c_{1,0}c_{1,2}c_{1,0})^2c_{1,1}$ es el neutro y es un elemento no orientable. Así tenemos lo que buscábamos. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

ii) Para el grupo NEC $(0; +; [2, 4]; \{(-)\})$, es estudiado en profundidad en [7], y tenemos que el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado es:

$$\theta(x_1) = Y, \quad \theta(x_2) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}YZ, \quad \theta(c_{1,0}) = X^2$$

La imagen de $x_2(e_1x_2x_1)^2x_1$ es X , la imagen de $x_1(x_2(e_1x_2x_1)^2x_1)^3x_2x_1$ es Z y la imagen de x_1 es Y . Luego tenemos que elementos que conservan la orientación generarán el grupo G . Además tenemos que $(x_2(e_1x_2x_1)^2x_1)^2c_{1,0}$ es un elemento que invierte la orientación y está en el núcleo. Así es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que nos encontramos es el [24,10], que tiene orden 24 y que se corresponde con $C_3 \times D_4$. Este grupo es estudiado en profundidad en [7]. Para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2), (-)\})$ tenemos que el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado es:

$$\theta(e_1) = XYZY, \quad \theta(e_2) = X^{-1}YZY, \quad \theta(c_{1,0}) = Y, \quad \theta(c_{1,1}) = (YZ)^2Y, \quad \theta(c_{2,0}) = YZY$$

Es claro que la imagen de e_1^4 es X , la imagen de $(e_1c_{2,0}c_{1,0})^3$ es Y y la imagen de $(e_1c_{2,0}c_{1,0})^3e_1^3(e_1c_{2,0}c_{1,0})^3$ es Z . Así tenemos que elementos que conservan la orientación generan el grupo G . Así es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{4}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [48,38], el cual tiene orden 48 y se corresponde con $D_3 \times D_4$. Este grupo es estudiado en profundidad en [8]. Sean A y B los generadores de D_3 y C y D los generadores de D_4 . Así, para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 2, 2, 4)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(c_{1,0}) = BD, \quad \theta(c_{1,1}) = D, \quad \theta(c_{1,2}) = A, \quad \theta(c_{1,3}) = C, \quad \theta(c_{1,4}) = BD$$

Tenemos que la imagen del elemento $c_{1,0}c_{1,1}$ es el generador B , que la imagen del elemento $(c_{1,0}c_{1,2})^3$ es el generador D , que la imagen del elemento $c_{1,3}c_{1,1}(c_{1,0}c_{1,2})^3$ es el generador C y que la imagen del elemento $c_{1,3}c_{1,2}c_{1,3}c_{1,1}(c_{1,0}c_{1,2})^3$ es el generador A . Así tenemos que el grupo G es generado por imágenes de elementos que conservan la orientación, y por tanto es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{8}$.

\Rightarrow El siguiente grupo a estudiar es el [56,11], de orden 56 y que se corresponde con $(C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_7$. Este grupo tiene una presentación dado por generadores a, b, c y d tales que cumplen $a^7 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, ba = acd, ca = ab, da = ac$ y con b, c y d conmutando entre ellos. Así dado el grupo NEC $(0; +; [7]; \{(2)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = a, \quad \theta(e_1) = a^{-1}, \quad \theta(c_{1,0}) = c, \quad \theta(c_{1,1}) = aca^{-1}$$

Es epimorfismo ya que la imagen de x_1 es a , la imagen de $c_{1,0}$ es c , la imagen de $e_1c_{1,0}x_1$ es b y la imagen de $x_1c_{1,0}e_1$ es d . Para ver que actúa sobre una superficie no orientable tomemos $c_{1,0}x_1$ que tiene por imagen a ab , y es no orientable. Tomemos por otra

parte x_1 orientable y tenemos que $c_{1,0}x_1x_1$ tiene por imagen a a^2cd y es no orientable. Multiplicando por la derecha por $x_1c_{1,0}e_1$ y por $c_{1,0}$, ambos no orientables, obtenemos a^2 como imagen de un elemento no orientable. Así, si elevamos a 7 este elemento no orientable, vemos que pertenece al núcleo y que es no orientable. Así tenemos lo que buscábamos. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{3}{28}$.

\Rightarrow El último grupo a estudiar es el [504,156], de orden 504 que se corresponde con $PSL(2,8)$. Este grupo es estudiado con profundidad por Wendy Hall en [12]. Como podemos ver ahí, tenemos que una presentación del grupo viene dada por dos generadores X e Y tales que cumplen $X^2 = Y^3 = (XY)^7 = 1$. Además, existe un elemento Z en $PSL(2,8)$ tal que $Z^2 = (ZX)^2 = (ZY)^2 = 1$, con X e Y como antes. Así, dado el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2,3,7)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado es $\theta : \Lambda \rightarrow G$:

$$\theta(c_{1,0}) = ZX, \quad \theta(c_{1,1}) = Z, \quad \theta(c_{1,2}) = ZY, \quad \theta(c_{1,3}) = ZX$$

Comprobemos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Tenemos que la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el generador Y , y que la imagen de $c_{1,1}c_{1,0}$ es el generador X , luego tenemos que el grupo G se puede generar mediante imágenes de elementos que conservan la orientación. El área reducida del grupo NEC asociado es $\frac{1}{84}$.

Grupos de género imaginario 9

Según la lista de Conder, tendríamos 7 grupos de género imaginario 9, que serían:

Grupo	$o(G)$	$ \Lambda $
[21,1]	21	$(1; -, [3,3]; \{-\})$
[30,1]	30	$(0; +; [10]; \{(3)\})$
[30,2]	30	$(0; +; [6]; \{(5)\})$
[42,1]	42	$(0; +; [2,3]; \{(-)\})$
[60,8]	60	$(0; +; [-]; \{(2,6,10)\})$
[168,42]	168	$(0; +; [-]; \{(3,3,4)\})$ ó $(0; +; [3]; \{(4)\})$
[336,208]	336	$(0; +; [-]; \{(2,3,8)\})$

Atendiendo a la Tabla 1, tenemos que los grupos de género imaginario 9 que aparecen ahí son:

G	$o(G)$
G_{21}	21
$C_3 \times D_5$	30
$C_5 \times D_3$	30

Luego tenemos que atendiendo a los datos:

\Rightarrow El primer grupo que tenemos es [21,1], que tiene orden 21 y se corresponde con G_{21} , el grupo no abeliano de orden 21 de estructura algebraica $C_7 \rtimes C_3$. Este grupo

está estudiado en profundidad en [10]. Está generado por dos elementos X e Y tales que $X^7 = Y^3 = 1, XY = YX^4$. Dado el grupo NEC $(1; -; [3, 3]; \{-\})$, tenemos que el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado es:

$$\theta(d_1) = XY^2, \quad \theta(x_1) = XY, \quad \theta(x_2) = Y$$

Es claro que la imagen de x_2 es Y y la imagen de $x_1(x_2)^2$ es X . Así tenemos el grupo G generado por elementos que conservan la orientación y θ es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{3}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que nos encontramos es [30,1], el cual tiene orden 30 y se corresponde con $C_5 \times D_3$ (descrito anteriormente). Este grupo se estudia en [7]. El grupo NEC dado es $(0; +; [10]; \{(3)\})$ y el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado es:

$$\theta(x_1) = XYZY, \quad \theta(e_1) = X^{-1}YZY, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = Y$$

Como 5 es impar, $\theta(x_1)^6 = X$. Además $\theta((x_1^5 c_{1,1})(c_{1,1} c_{1,0}) c_{1,1}) = Z$ y tenemos que $\theta(c_{1,0}(x_1^5 c_{1,1})(c_{1,1} c_{1,0})) = Y$. Así es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que tenemos los generadores de G como imagen de elementos que conservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{7}{30}$.

\Rightarrow El tercer grupo a analizar es el [30,2], de orden 30 y que se corresponde con $C_3 \times D_5$. Este grupo también se estudia en [7]. El grupo NEC correspondiente es $(0; +; [6]; \{(5)\})$ y por tanto el epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado es:

$$\theta(x_1) = X(YZ)^2Y, \quad \theta(e_1) = X^{-1}(YZ)^2Y, \quad \theta(c_{1,0}) = Z, \quad \theta(c_{1,1}) = Y$$

Como 3 es impar, tenemos que $\theta(x_1)^4 = X$. Además $\theta((x_1^3 c_{1,1})(c_{1,1} c_{1,0})^2 c_{1,1}) = Z$ y $\theta(c_{1,0}(x_1^3 c_{1,1})(c_{1,1} c_{1,0})^2) = Y$. Así es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable ya que tenemos los generadores de G como imagen de elementos que conservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{7}{30}$.

\Rightarrow El siguiente grupo que tenemos es el [42,1], de orden 42. A este grupo lo denominaremos $\langle 7,6,5 \rangle$, según la denominación de Coxeter-Moser en [5]. Contiene a G_{21} , y por lo tanto es de la forma $G_{21} \rtimes C_2$. Este grupo tiene una presentación con los generadores S y T tales que $S^7 = T^6 = 1, T^{-1}ST = S^5$. Para poder dar un epimorfismo de forma más clara, vamos a describirlo en forma de subgrupo de S_7 . Sea $S = (1234567)$ y $T = (154623)$ y efectivamente cumplen la tercera relación. Luego lo que estos elementos generan es un cociente del grupo que estamos estudiando; pero tiene orden múltiplo de 42, porque hay un elemento de orden 7 y otro de orden 6. Luego es nuestro grupo. Tomemos dos elementos del grupo $A = T^5 = (132645)$ y $B = ST^2S^4 = (173)(245)$. Tenemos que $A^5 = T$ y que $ABA = S^2$, luego A^5 y $(ABA)^4$ son T y S respectivamente, así A y B generan el mismo grupo que T y S . Dado el grupo NEC $(0; +; [2, 3]; \{(-)\})$ el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es

$$\theta(x_1) = AB^{-1} = (17)(26)(35), \quad \theta(x_2) = B, \quad \theta(e_1) = A^5, \quad \theta(c_{1,0}) = A^3$$

Es trivial ver que la imagen de x_2 y la imagen de x_1x_2 generan todo el grupo G y ambos son orientables. Así es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{6}$.

\Rightarrow El siguiente grupo a estudiar es el [60,8], grupo de orden 60 y que se corresponde con $D_3 \times D_5$. Este grupo es estudiado en profundidad en [8]. Sean A y B los generadores de D_3 y C y D los generadores de D_5 . Así, para el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 6, 10)\})$ tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(c_{1,0}) = B, \quad \theta(c_{1,1}) = D, \quad \theta(c_{1,2}) = AC, \quad \theta(c_{1,3}) = B$$

Tenemos que $\theta((c_{1,2}c_{1,3})^5) = C$ y que $\theta((c_{1,2}c_{1,3})^6) = AB$. Por otra parte tenemos que $\theta((c_{1,1}c_{1,2})^3) = A$ y $\theta((c_{1,1}c_{1,2})^4) = DC$. Así tenemos que el grupo G está generado por imágenes de elementos que conservan la orientación, y θ es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{7}{60}$.

\Rightarrow El siguiente grupo a analizar es el [168,42], grupo de orden 168 y que se corresponde con $PSL(2, 7)$. Varias presentaciones de este grupo vienen en [4]:

- i) $\langle R, S \mid R^3 = S^3 = (RS)^4 = (R^{-1}S)^4 \rangle$
- ii) $\langle R, S \mid R^4 = S^4 = (RS)^2 = (R^{-1}S)^3 \rangle$
- iii) $\langle R, S \mid R^2 = S^3 = (RS)^7 = (R^{-1}S^{-1}RS)^4 \rangle$

En este caso tenemos dos posibles grupos NEC:

- a) Para el caso en el que tenemos el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(3, 3, 4)\})$, tomamos la representación i), y atendiendo a [4], tenemos que podemos tomar $S = (234)(576)$ y $R = (123)(456)$. Tomamos los elementos $A = R^2S = (1452)(67)$, $B = SR^2 = (1364)(57)$ y $C = SRSR^2 = (1237)(46)$ que tienen orden 4, luego sus cuadrados tiene orden 2. Así podemos hacer el siguiente epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$ asociado:

$$\theta(c_{1,0}) = C^2, \quad \theta(c_{1,1}) = A^2, \quad \theta(c_{1,2}) = B^2, \quad \theta(c_{1,3}) = C^2$$

Así $\theta(c_{1,0}c_{1,1}) = (135)(274)$, $\theta(c_{1,1}c_{1,2}) = (156)(234)$ y $\theta(c_{1,2}c_{1,3}) = (1634)(27)$. Veamos que es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. Tomemos la imagen de $c_{1,0}c_{1,1}$ y la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$. Entonces tenemos que la imagen de $(c_{1,0}c_{1,1})^2c_{1,1}c_{1,2}c_{1,0}c_{1,1}(c_{1,1}c_{1,2})^2$ es (1543627) , una permutación de orden 7. Luego este elemento, junto al elemento de orden 3 y el de orden 4 generan un grupo de al menos orden 84, pero $PSL(2, 7)$ es simple, no tiene subgrupos de índice 2, y por tanto sería el total. Luego tenemos generado el grupo G por imágenes de elementos que conservan la orientación. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{24}$.

b) Para el caso en el que tenemos el grupo NEC $(0; +; [3]; \{(4)\})$, tomamos la presentación iii). El epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es:

$$\theta(x_1) = S, \quad \theta(e_1) = S^2, \quad \theta(c_{1,0}) = R, \quad \theta(c_{1,1}) = SRS^{-1}$$

Es epimorfismo ya que los generadores están en la imagen. Para ver que actúa sobre una superficie no orientable veamos que existe un elemento no orientable en el núcleo. Para ello tomemos el elemento $c_{1,0}x_1$ que es no orientable, y tenemos que $(c_{1,0}x_1)^7$ es el neutro y es no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{24}$.

\Rightarrow El último grupo que tenemos que analizar es [336,208], de orden 336, y que se corresponde con $PSL(2, 7) \times C_2$. Una presentación de este grupo viene en [3], que viene dada por los generadores T, R y S tales que cumplen $T^2 = R^3 = S^8 = (RT)^2 = (TS)^2 = (RS)^2 = TS^{-1}(RS^{-2})^3R^{-1} = 1$. Así dado el grupo NEC $(0; +; [-]; \{(2, 3, 8)\})$, tenemos que el epimorfismo asociado $\theta : \Lambda \rightarrow G$ es

$$\theta(c_{1,0}) = TS, \quad \theta(c_{1,1}) = RT, \quad \theta(c_{1,2}) = T, \quad \theta(c_{1,3}) = TS$$

Tenemos que la imagen de $c_{1,1}c_{1,2}$ es el elemento R , la imagen de $c_{1,2}c_{1,3}$ es el generador S y por las propiedades de los generadores tenemos que T es imagen del elemento $c_{1,1}c_{1,2}((c_{1,2}c_{1,3})^2(c_{1,1}c_{1,2})^2)^3c_{1,2}c_{1,3}$. Así tenemos que los generadores son imágenes de elementos orientables, y por tanto es epimorfismo que actúa sobre una superficie no orientable. El área reducida del grupo NEC es $\frac{1}{48}$.

Conclusiones

Hemos terminado el estudio, y como consecuencia se ha obtenido que los grupos de género imaginario 6 a 9 son los siguientes:

Género imaginario 6:

G	$o(G)$	Referencia
$Q \simeq DC_2$	8	May [15] y Este trabajo
$(4,4 \mid 2,2)$	16	Este trabajo y Etayo, Martínez [10]
QA_4	16	Etayo, Martínez [10]
L_4	16	Este trabajo y Etayo, Martínez [10]
$\langle 2,2,2 \rangle_2$	16	Etayo, Martínez [10]
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	16	Gromadzki [11]
Γ_4a_1	32	Este trabajo
Γ_6a_1	32	Este trabajo
$(2,5,5;2)$	80	Este trabajo
$C_2 \times A_5$	120	Este trabajo
$((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_5) \rtimes C_2$	160	Este trabajo

Género imaginario 7:

G	$o(G)$	Referencia
DC_3	12	May [15] y Este trabajo
$(4,6 \mid 2,2)$	24	Etayo, Martínez [10]
$(C_2 \times C_2) \rtimes C_9$	36	Este trabajo
$((C_2 \times C_2) \rtimes C_9) \rtimes C_2$	72	Este trabajo

Género imaginario 8:

G	$o(G)$	Referencia
$C_4 \times D_3$	24	Este trabajo y Etayo, Martínez [7]
$C_3 \times D_4$	24	Etayo, Martínez [7]
$D_3 \times D_4$	24	Etayo, Martínez [8]
$(C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_7$	56	Este trabajo
$PSL(2, 8)$	504	Este trabajo y Hall [12]

Género imaginario 9:

G	$o(G)$	Referencia
G_{21}	21	Etayo, Martínez [10]
$C_5 \times D_3$	30	Etayo, Martínez [7]
$C_3 \times D_5$	30	Etayo, Martínez [7]
$\langle 7,6,5 \rangle$	42	Este trabajo
$D_3 \times D_5$	60	Etayo, Martínez [8]
$PSL(2, 7)$	168	Este trabajo
$PSL(2, 7) \rtimes C_2$	336	Este trabajo

Referencias

- [1] N.L. Alling, N. Greenleaf; *Foundations of the theory of Klein Surfaces*. Lect. Notes in Math. **219**, Springer-Verlag, 1971
- [2] E. Bujalance, J. J. Etayo, E. Martínez, *The full group of automorphisms of non-orientable unbordered Klein surfaces of topological genus 3, 4 and 5* Rev. Mat. Compl. (2014)
- [3] M. Conder, P. Dobcsányi; *Determination of all regular maps of small genus* J. Combin. Theory Ser. B 81 (2001), no. 2, 224–242.
- [4] Coxeter, H. S. M.; *The abstract groups $G^{m,n,p}$* Trans. Amer. Math. Soc. 45 (1939), no. 1, 73–150
- [5] Coxeter, H. S. M., Moser, W. O. J.; *Generators and relations for discrete groups* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 14. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

- [6] J. J. Etayo; *Sobre grupos de automorfismos de superficies de Klein*, Ph.D. thesis, Universidad Complutense, Madrid (1983)
- [7] J.J. Etayo, E. Martínez; *The symmetric crosscap number of the groups $C_m \times D_n$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 138 (2008) 1197-1213.
- [8] J.J. Etayo, E. Martínez; *The action of the groups $D_m \times D_n$ on unbordered Klein surfaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 102 (2011) 97-108
- [9] J.J. Etayo, E. Martínez; *The symmetric crosscap number of the groups $DC_3 \times C_n$ and $A_4 \times C_n$* , Houston J. Math. 38 (2012) 345-358
- [10] J.J. Etayo, E. Martínez; *The symmetric Crosscap number of the groups of small-order* J. Algebra and Appl. 12 (2013), 1250164 (16 pp.)
- [11] G. Gromadzki; *Abelian groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary*, Comment. Math. Prace mat. 28 (1989) 197-217
- [12] W. Hall; *Automorphisms and coverings of Klein surfaces*, Ph.D. thesis, University of Southampton, Southampton (1977)
- [13] M. Hall Jr., J.K. Senior; *The groups of order 2^n ($n \leq 6$)*, Mc Millan Co., N. York (1964).
- [14] A. M. Macbeath; *The classification of non-Euclidean crystallographic groups*, Canad. J. Math. 19 (1967) 1192-1205.
- [15] C.L. May; *The symmetric crosscap number of a group*, Glasgow Math. J. 41 (2001) 399-410.
- [16] C. L. May, J. Zimmerman; *The groups of symmetric genus $\sigma \leq 8$* . Comm. Algebra 36 (2008), no. 11, 4078–4095.
- [17] R. Preston; *Projective Structures and fundamental domains on compact Klein surfaces*. Thesis Univ. of Texas, 1975
- [18] D. Singerman; *Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces*. Glasgow Math. J. 12 (1971) 50-59
- [19] A.D. Thomas, G.V. Wood; *Group Tables*. Shiva Publishing Limited, Orpington (1980)
- [20] T.W. Tucker; *Symmetric embeddings of Cayley graphs in non-orientable surfaces*, in Graph Theory, Combinatorics and Applications, ed. I. Alavy et al. (Wiley, 1991), pp. 1105-1120.
- [21] H. C. Wilkie; *On non-Euclidean crystallographic groups*, Math. Z. 91 (1966) 87-102.