¿Hay una lógica o dos lógicas clásicas?

Antonio Benítez

SEMINARIO MÁS LÓGICA
UCM
Ponencia. Madrid, 11 noviembre 2021

Índice general

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

¿Hay una lógica o dos lógicas clásicas?

Planteamiento de la ponencia

A veces se escucha que el nombre «Lógica clásica» corresponde a la lógica de raigambre aristotélica, mientras que la lógica que se enseña mayoritariamente en las asignaturas de Lógica son «Lógica matemática» o «Lógica simbólica». Marquemos esta afirmación como [A1].

A esta afirmación se añade, no siempre, que ambas lógicas son igualmente válidas. Incluso que la llamada «Lógica clásica» es más idónea para hacer filosofía, ya sea Epistemología ya sea Ontología. Marquemos esta nueva afirmación como [A2].

Voy a intentar haceros comprender que A1 no es sostenible. Consecuencia de que no lo sea es que tampoco lo es A2.

Ambas lógicas se mueven y son en el ámbito de un lenguaje de símbolos, artificial. Por ello, ambas son formales. Os recordaré el lenguaje propio de la *Lógica de conectivas*, que probablemente estéis estudiando, y a continuación os presentaré Λ, el lenguaje de la Silogística de Aristóteles.

A continuación analizaré la demostración de Euclides de la proposición I, 32. Intentaré mostrar que la silogística de Aristóteles no sirve para analizar y formalizar los enunciados presentes en esa demostración. Pero que sí se puede hacer con la Lógica de primer orden (bivalente) con identidad. Sacaré consecuencias respecto a si hay una o dos Lógicas clásicas.

Hasta aquí lo correspondiente al capítulo primero de este escrito.

* * * * *

El segundo capítulo es un ensayo de hacer ver cómo se puede desarrollar una Epistemología[1] haciendo uso exclusivamente de LPO.

Haré un análisis de los juicios analíticos, sintéticos y sintéticos *a priori*. Es un ensayo de probar por qué no se puede sostener A2. Según Kant, los *juicios sintéticos a priori* es la forma de todos los enunciados demostrados de la Matemática, y también de las leyes de la Física. La conclusión fundamental que os presentaré es: Kant supone que la única lógica válida es la Silogística de Aristóteles. Pero ya hemos visto que «Lógica clásica» significa, solo y exclusivamente, lógica de primer orden (bivalente) con identidad.

Concluiré preguntando si las distinciones kantianas se pueden sostener; y no habrá que olvidar que son uno de los fundamentos de la *Crítica de la razón pura*.

No podré explicarlo oralmente. Quede, pues, para otra ocasión.

1.1. Alfabeto de L

Un conjunto finito de signos[2]. Estableceremos subconjuntos de signos:

1. Signos lógicos [S]: formado por conectivas

$\{\neg$	negación	conectiva monaria
$\wedge$	conjunción	conectiva binaria
$\vee$	disyunción	conectiva binaria
$\rightarrow\}$	condicional	conectiva binaria

2. Constantes lógicas [K]:

$\{\top$	verdadero	constante lógica
$\bot\}$	falso	constante lógica

3. Signos no-lógicos [P]: $\{p\}$

4. Cifras [C]: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

5. Delimitadores [D]: {),], } ; (, [, {}

En total, 23 signos distintos[3].

Cada uno de los signos lógicos pertenecientes a S son *primitivos*, no definidos. Como es sabido, es posible *definir* nuevos signos lógicos.

---

[1] O Teoría del conocimiento.

[2] John C. Martin: *Introduction to Languages and the Theory of Computation*. Boston (MA), McGraw-Hill, 1997, pág. 27. Melvin Fitting: *Computability Theory, Semantics, and Logic Programming*. N. York, Oxford University Press, 1987, pp. 6–7. Raymond M. Smullyan: *Theory of Formal Systems*. Princeton (NJ), Princeton University Press, 1961, pp. 1–4.

[3] O 19 si entendemos que los únicos delimitadores son los dos paréntesis.

Alfabeto de L

1.1.1. Concatenación

Concatenar es una operación básica que produce *ristras* o *expresiones* de L. Intuitivamente, la idea es que si se cogen dos ristras cualesquiera de L y se concatenan, se obtiene una ristra de signos formada del siguiente modo: se escribe la primera ristra e inmediatamente a continuación la segunda.

La vamos a definir como una operación de n argumentos (donde n es un número finito mayor o igual que 0[4]) cuyo resultado es una ristra de signos:

Concatenación de signos:

$$\textit{si } x_1 \textit{ es un signo, } Con(x_1) = \text{“}x_1\text{”} \tag{1.1}$$

$$\textit{si } x_1 \text{ y } x_2 \textit{ son signos, } Con(x_1, x_2) = \text{“}x_1 x_2\text{”} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\textit{si } x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \textit{ son signos (para } n > 0 \textit{ y finito),} \\ &Con(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \\ &Con(x_1,\ Con(x_2,\ \ldots,\ Con(x_{n-1},\ x_n))) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Concatenación de ristras:

$$\textit{si } x_1 \textit{ es una ristra, } Con(x_1) = \text{“}x_1\text{”} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &\textit{si } x_1 \text{ y } x_2 \textit{ son ristras o} \\ &\text{si } x_1 \textit{ es un signo } \text{y } x_2 \textit{ es una ristra o} \\ &\text{si } x_1 \textit{ es una ristra } \text{y } x_2 \textit{ es un signo,} \\ &Con(x_1,\ x_2) = Con(Con(x_1), Con(x_2)) = \text{“}x_1 x_2\text{”} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} &\textit{si } x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \textit{ son signos o ristras} \\ &\textit{(para } n > 0 \textit{ y finito)},\ Con(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \\ &Con(x_1,\ Con(x_2,\ \ldots,\ Con(x_{n-1},\ x_n))) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Si el resultado de una operación de concatenación es una ristra que sólo contiene signos de L, dicha ristra es una ristra de L. Se pueden formar infinitas expresiones de L por aplicación de la operación de concatenación. Ejemplos:

- $Con(p_5) = \text{“}p_5\text{”}$
- $Con(\text{“}p_5\text{” “}\neg\wedge\text{”}) = \text{“}p_5\neg\wedge\text{”}$
- $Con(\text{“}p_5\text{” “}\wedge\text{” “}p\text{”}) = \text{“}p_5 \wedge p\text{”}$
- $Con(\text{“}(p_5 \wedge p_{10})\text{” “}\rightarrow\text{” “}(p_{10} \wedge p_5)\text{”}) = \text{“}(p_5 \wedge p_{10}) \rightarrow (p_{10} \wedge p_5)\text{”}$

[4] Si se admite la ristra vacía.

1.1.2. Expresiones bien formadas

Toda concatenación producirá una nueva ristra de signos. Pero sólo llamaremos ristra bien formada (ebf) a aquella que satisface alguno de los siguientes criterios:[5]

$$\begin{aligned}
\text{si } x_1 \text{ es de la forma } p_z\ (z = \text{una ristra de cifras}) \text{ o} \top \text{o } \bot \\
\text{entonces } x_1 \textit{ es una ristra bien formada } (ebf) && (1.7)\\
(\text{Llamaremos a } x_1 \textit{ ristra elemental}) \\
\text{si } y_1 \textit{ es una ebf} \text{ entonces } \neg y_1 \textit{ es también una ebf} && (1.8)\\
\text{si } y_1 \textit{ y } z_1 \textit{ son ebf} \text{ entonces:} \\
(y_1 \wedge z_1) \textit{ es también una ebf} && (1.9)\\
(y_1 \vee z_1) \textit{ es también una ebf} && (1.10)\\
(y_1 \rightarrow z_1) \textit{ es también una ebf} && (1.11)
\end{aligned}$$

- La expresión $(X \leftrightarrow Y)$ también es una *ebf*. El bicondicional $\leftrightarrow$ es una conectiva binaria *definida* cuya definición es: $(X \leftrightarrow Y) =_{def} [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)]$.
- El esquema p_z permite disponer de un conjunto numerable —y por ello infinito— de símbolos de proposición.[6]
- El conjunto de todas las posibles ristras elementales es infinito.
- Así que el conjunto de las posibles ristras bien formadas de L es infinito.

El conjunto de todas las ristras bien formadas será un subconjunto del conjunto de todas las ristras posibles de L. Llamaremos a dicho subconjunto L^*.

En adelante hablaremos indistintamente de *ristra*, *expresión* o *fórmula*.

1.2. El lenguaje Λ

1.2.1. Vocabulario

Del lenguaje objeto

1. Variables de término universal: $V = \{A, B, \Gamma, \ldots\}$

[5] Repárese que toda ebf, por ser una ristra formada por concatenación, es una ristra finita.

[6] En ejemplos y ejercicios volveremos al uso habitual de escribir las letras $p, q, r, p_1, q_{21}, r_{11}, \ldots$ como símbolos de proposición.

Cada uno de los elementos de este conjunto infinito ha de ser un signo *equiforme* con todos los demás, intercambiable, por tanto, con cualquier otro. Son, pues, signos que están por cada uno de los términos (ὅροι) en que se divide una proposición <categórica>, según este pasaje de Aristóteles: ῞Ορον δὲ καλῶ εἲς ῾ὸν διαλύεται ἡ πρότασις, οἷον τό τε κατηγορούμενον καὶ τὸ καθ' οὗ κατηγορεῖται, (*Analíticos primeros*, I, 1, Ross, 24b16–17) «Llamo término a aquello en que se descompone la proposición, v.g.: el predicado y aquello sobre lo que se predica,» (Trad. M. Candel)

2. Signos lógicos: $L = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{i}, \mathfrak{e}, \mathfrak{o}\}$
   - 2.1 Signos lógicos primitivos: $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{i}\}$
   - 2.2 Signos lógicos definidos: $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{o}\}$
     - $\mathfrak{e} =_{def}$ no $\mathfrak{i}$
     - $\mathfrak{o} =_{def}$ no $\mathfrak{a}$
3. Conectivas: C = {y, si. . . entonces. . . , no}
4. Delimitadores:) , (

Del meta-lenguaje

1. Todos los signos del lenguaje objeto. Y además:
2. Variables cuya referencia es una variable de término universal: $\{X, Y, \ldots\}$
3. Variables cuya referencia ha de ser una expresión bien formada: $\{\alpha, \beta, \gamma \ldots\}$

1.2.2. Expresiones bien formadas

1. Toda expresión formada según el esquema siguiente: $X\mathfrak{x}Y$, donde X e $Y \in V$ y $\mathfrak{x} \in L$, es una *expresión elemental* bien formada.
2. Si γ es una expresión bien formada, entonces *no* γ es una expresión bien formada.
3. Si α y β son expresiones bien formadas, entonces:
   - 3.1 el esquema α y β, es una expresión bien formada.
   - 3.2 el esquema si α entonces γ, es también una expresión bien formada.
4. No hay más expresiones bien formadas.

Creo que estaréis conmigo en que no hay diferencia en cuanto a «formalidad» se refiere: L es formal y Λ también lo es.

1.3. El Lógos apophantikós

Seguro que en alguna clase os han hablado del λόγος ἀποφαντικός (leído: logos apofanticós). Estoy seguro porque yo lo hacía y porque a los profesores nos gusta sacar músculo. No pasa nada. Lo que significa puede decirse fácilmente: enunciado, oración declarativa. Aquí la palabra «λόγος» significa *habla*. El adjetivo ἀποφαντικός califica o indica el modo característico de ese *lógos*. Es, pues, λόγος ἀποφαντικός un tipo de habla caracterizada por lo siguiente:

- ha de ser informativa,
- ha de referirse a algo, a un estado de cosas
- ha de formarse por la composición, συμπλοκή, de dos «cosas»: aquello de que se habla y lo que se dice de ello.

Esto lo he sacado de un diálogo de Platón: *El Sofista*, 262c5–263b10. Platón da un ejemplo: *Teeteto está-sentado*, que él mismo analiza: aquello de que se habla o posición 1 = Teeteto; lo que se dice de [1] o posición 2 = está-sentado. Lo que está en la posición 1 más lo que hay en la posición 2 forman una *composición*, una *symploké*.

Claro que si probamos a cambiar el orden de las palabras puede resultar una oración sin sentido: de [1] está-sentado [se dice] Teeteto [2]. En efecto, Teeteto no puede predicarse o decirse de nada. Quizá para poner de relieve aún más si cabe este juego de posiciones y qué palabra puede ocupar un lugar y otro no, Aristóteles usa en los *Analíticos primeros* una forma de expresión extraña: [2] se dice de [1], τὸ B κατηγορεῖσθαι κατὰ παντὸς τοῦ Γ (I, 4, Ross 25b37–39), «lo B es dicho de todo lo C».

Resumiendo. Tenemos enunciados. Los enunciados son composiciones de dos posiciones. No siempre lo que da juego en una posición de las dos, da juego también al ponerlo en la otra posición. Platón ni llevó ni precisó más allá su análisis. Con lo cual podríamos preguntarnos si son enunciados correctos los siguientes:

Posición 1	Posición 2
Teeteto	está-sentado
Los griegos	son-hombres
Sócrates, Platón	maestro-de

La respuesta de Aristóteles la encontramos en *De interpretatione*, 7, Minio–Paluello, 17a38–17b3: la posición 1 puede ser ocupada tanto por un individuo como por una especie. Y en *Categorías*, 5, Minio-Paluello, 2a19–27, añade que los términos individuales no pueden ocupar la posición 2. Es decir, que: 1.º, un termino singular solo puede ocupar la posición 1; 2.º, un término universal puede ocupar tanto la posición 1 como la posición 2. Finalmente, en *Categorías*, 5. Minio- Paluello, 2b19–22, afirma que en las relaciones género-especie, la especie ha de ocupar la posición 1 mientras que el género ha de ocupar la posición 2, y nunca a la inversa.

Posición 1	Posición 2
seres individuales	especie/género
especie	género

Ejemplos para entendernos:

Posición 1	Posición 2
Babieca	es-caballo/es-mamífero
caballo	es-ungulado/es-mamífero

Ha desaparecido la combinación que hacía posible expresar relaciones. Por ejemplo, «si A y B son ángulos de un triángulo equilátero, entonces A = B». La igualdad es una relación, y es fundamental en la Geometría de Euclides (hoy también, claro).

A diferencia de Aristóteles la llamada «Lógica matemática» sí acepta como enunciados de pleno derecho aquellos que dan expresión a una relación. La forma de la composición (*symploké*) ha de ser: posición 1 ocupada por dos objetos; posición 2 ocupada por una relación (término *poliádico*) —en el caso de la igualdad, *diádico*—.

No voy a entrar en un tema, si no difícil sí al menos largo de hablar: la predicación universal. Solo mencionaré lo siguiente:

- Para Aristóteles, cada término universal (una palabra puede ser un término universal si puede ser dicha de muchos: «hombre» es un ejemplo porque puede ser dicho de Carmen, Juan, etc.) tiene una extensión cuantitativa: el conjunto formado por los individuos que satisfacen dicho termino. Y tiene, además otra extensión que llamaré «genérica».
  - La extensión genérica es siempre un conjunto de especies, de otros términos universales.
  - Cuando se llega a la especie ínfima, la tradición suele entender que ahí ya solo vale la extensión cuantitativa.[7]
- Frege, y con él Whitehead y Russell en los *Principia Mathematica* y el resto de autores que los siguieron, consideró que de cada término universal solo interesa a la lógica su extensión cuantitativa. Con ello unificó el significado de la predicación universal.[8]

[7] Ver el anexo. Árbol de discriminación y, en el sentir de Platón, un árbol en que se desenvuelve y desarrolla el género *arte*. Son especies ínfimas: con tridente, con caña.

- Nada cambia semánticamente cuando decimos «si X es-griego entonces X es-hombre, para todo X» o decimos «si X es-griego entonces X es-mamífero, para todo X».
- Semánticamente «si X es-griego entonces X es-hombre, para todo X» será falsa si, y solo si, si hubiera un griego que no sea hombre. Igual vale para «si X es-griego entonces X es-mamífero, para todo X».

1.3.1. Expresiones elementales. Composicionalidad

Al definir el lenguaje L hemos tenido que definir las expresiones bien formadas (ebf). Y lo primero que hemos tenido que definir es qué es un enunciado elemental o atómico. En lógica de conectivas la cosa es muy sencilla basta decir que p, q, o r representan un enunciado elemental. Bien. Pero ¿qué hemos de entender por enunciado elemental en concreto? Pues enunciados formados por un término universal y uno o más términos individuales. Por ejemplo, «Hombre(Pedro)». Otro ejemplo, «Iguales(A, B)», donde A y B son nombres de ángulos dados.

Componiendo con conectivas enunciados elementales obtenemos *enunciados compuestos*. Por ejemplo, Hombre(Carmen) y Hombre(Juan). Cuyo árbol de descomposición es muy útil:

$$\begin{tikzcd} & \text{Hombre(Carmen) y Hombre(Juan)} & \\ \text{Hombre(Carmen)} \arrow[ur] & & \text{Hombre(Juan)} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Otro ejemplo: si Griego(x) entonces Hombre(x), para todo x. Cuyo árbol de descomposición sería:

[8] En Aristóteles, «mamífero se dice de todo omnívoro» es una predicación universal. «Omnívoro» se dice de otros universales, de otras especies: p.ej. del hombre y del cerdo. La extensión de omnívoro está formada por especies, universales. Cuando se forma una predicación universal como «Hombre se dice de todo ateniense», «ateniense» es un término universal que solo se predica, según parece, de individuos humanos, objetos individuales o sustancias primeras. La extensión de ateniense es un conjunto de individuos. Esta dualidad de usos, de significados del término extensión de un concepto, perjudica a la idea de predicación universal, que claramente tiene un doble significado. Pero aquellos conceptos, universales que tienen extensión genérica tienen, a la vez, extensión cuantitativa. Así omnívoro se dice de especies, pero también se dice de los individuos que lo satisfacen, como en el caso de las especies ínfimas o últimas. Frege se atuvo a esto, prescindió de la extensión genérica, y con ello unificó el significado de la predicación universal.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \text{si Griego(x) entonces Hombre(x), para todo x} & \\
\text{Griego(x)} \arrow[ur] & & \text{Hombre(x)} \arrow[ul] \\
\text{Griego(a)} \arrow[u] & & \text{Hombre(a)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Si bien este otro árbol también es legítimo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \text{si Griego(x) entonces Hombre(x), para todo x} & \\
\text{Griego(x)} \arrow[ur] & & \text{Hombre(x)} \arrow[ul] \\
\text{Griego(b)} \arrow[u] & & \text{Hombre(b)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Tanto «a» como «b» son constantes individuales, términos que designan objetos individuales. Es fácil advertir que son posibles infinitos árboles alternativos obtenidos al cambiar a o b por $c, d, \ldots$.[9]

La idea de composicionalidad, el carácter recursivo de la misma, está claro. Los enunciados compuestos se han formado a partir de otros más simples, y llegado el análisis a los enunciados elementales no hay forma de ir más allá.

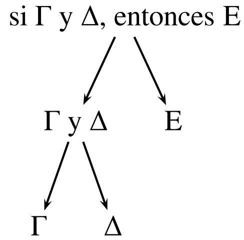
Los enunciados categóricos de la Silogística

El modo Barbara, el modo perfecto por antonomasia de la Silogística de Aristóteles, dice así:

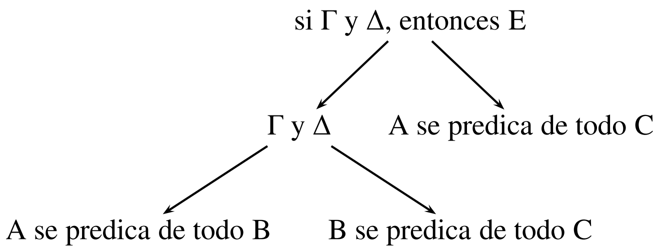
«Si A se predica de todo B y B se predica de todo C, necesariamente A se predica de todo C.» (*Analíticos primeros*: I, 4, 25b39–41). Se trata de un único enunciado *compuesto*. Hagamos el análisis de su descomposición:

- sea Γ = A se predica de todo B
- sea Δ = B se predica de todo C
- sea E = A se predica de todo C
- sustituyendo: si Γ y Δ, entonces E

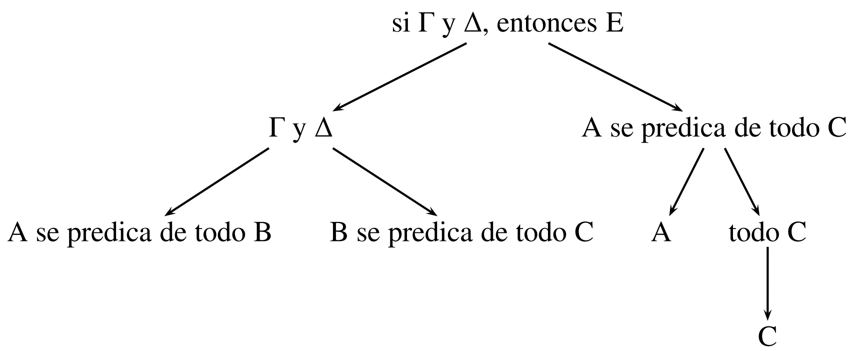
[9] El lema de descomposición única no rige en cuantificación.



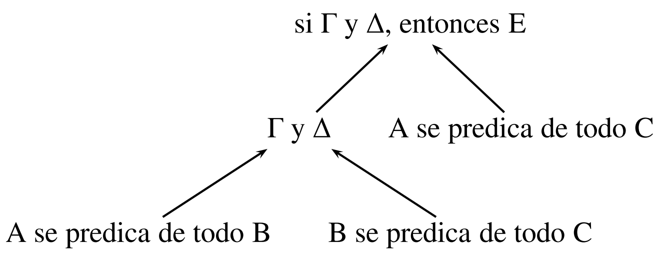
Si sustituimos Γ, Δ y E por sus valores, tenemos:



Si ensayamos una descomposición de los nudos terminales tendremos «cosas» que ya no son enunciados:



«A» y «C» no son enunciados, son símbolos de *términos universales*. Por tanto, la composición a partir de enunciados elementales no se cumple en nuestro último análisis y nos vemos obligados a dejar como nudos terminales los del árbol anterior:



Conclusión: *los enunciados categóricos de la Silogística de Aristóteles son enunciados elementales*

1.4. Análisis de la proposición 32 del libro I de los *Elementos*

Copio el enunciado de la proposición 32:

> En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.
>
> Sea $\alpha\beta\gamma$ el triángulo, y prolónguese uno de sus lados, $\beta\gamma$, hasta δ.

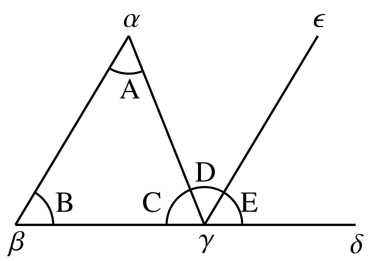


Figura 1.1: Teorema I, 32

> Digo que el ángulo externo $\alpha\gamma\delta$ es igual a los dos internos y opuestos, $\gamma\alpha\beta$ y $\alpha\beta\gamma$, y los tres ángulos internos del triángulo, $\alpha\beta\gamma$ y $\beta\gamma\alpha$ y $\gamma\alpha\beta$ son iguales a dos rectos.
>
> Pues trácese por el punto γ (la recta) $\gamma\epsilon$ paralela a la recta $\alpha\beta$.
>
> Y puesto que $\alpha\beta$ es paralela a $\gamma\epsilon$ y $\alpha\gamma$ ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos $\beta\alpha\gamma$ [A] y $\alpha\gamma\epsilon$ [D] son iguales entre sí [por I, 29]. Puesto que, a su vez, $\alpha\beta$ es paralela a $\gamma\epsilon$ y la recta $\beta\delta$ ha incidido sobre ellas, el (ángulo) externo $\epsilon\gamma\delta$ [E] es igual al interno y opuesto $\alpha\beta\gamma$ [B] [por I, 29]. Pero se ha demostrado que el (ángulo) $\alpha\gamma\epsilon$ [D] es también igual al (ángulo) $\beta\alpha\gamma$ [A]; por tanto, el ángulo entero $\alpha\gamma\delta$ [D+E] es igual a los dos internos y opuestos $\beta\alpha\gamma$ [A] y $\alpha\beta\gamma$ [B].
>
> Añádase al uno y a los otros el ángulo $\alpha\gamma\beta$ [C]; entonces los (ángulos) $\alpha\gamma\delta$ [D+E] y $\alpha\gamma\beta$ [C] son iguales a los tres (ángulos) $\alpha\beta\gamma$ [B], $\beta\gamma\alpha$ [C] y $\gamma\alpha\beta$ [A]. Pero los (ángulos) $\alpha\gamma\delta$ [D+E] y $\alpha\gamma\beta$ [C] son iguales a dos rectos [por I, 13]; por tanto, los (ángulos) $\alpha\gamma\beta$ [C], $\gamma\beta\alpha$ [B] y $\gamma\alpha\beta$ [A] son también iguales a dos rectos.

> Por consiguiente, en todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos. Q.E.D.[10]

Es conveniente analizar y formalizar esta Proposición 32.

1	$\alpha\beta\gamma$ es un triángulo	Dato
2	$\beta\delta$ es una recta	por construcción
3	$\gamma\epsilon$ es una recta	por construcción
4	$\alpha\beta$ y $\gamma\epsilon$ son paralelas	por construcción
5	$\alpha\gamma$ corta las paralelas $\alpha\beta$ y $\gamma\epsilon$	por construcción
6	$\beta\delta$ corta las paralelas $\alpha\beta$ y $\gamma\epsilon$	por construcción
7	A = D	por Proposición I, 29
8	B = E	por Proposición I, 29
9	D + E + C = 2R	por Proposición I, 13
10	A + B + C = 2R	sustituyendo en 10 A/D; B/E

Las proposiciones 7 a 10 expresan igualdades. La igualdad es una relación. Mas las relaciones no tienen cabida en el sistema lógico de Aristóteles: no se pueden expresar en enunciados *in forma*. Por tanto, no es posible simbolizarlas recurriendo a enunciados categóricos.

Sería como hacerse trampas al solitario ensayar una formalización como la siguiente: *A*-es-igual-a se dice de D. Por dos razones: 1.ª, porque «A-es-igual-a» ocupa el lugar 2, es decir, el lugar del Predicado, mas éste ha de ser un término universal. Y es muy dudoso que *A*-es-igual-a sea un término universal (equiforme, por ejemplo, con caballo); 2.ª, porque el lugar 1, el del sujeto, no está ocupado por otro término universal sino por un nombre de objeto: D.

No. La única expresión correcta habría de ser: Igual(A, D), donde «Igual» es un término predicativo diádico, una relación binaria, y tanto «A» como «D» son términos individuales, nombres de objetos.

Así que las líneas 7 a 9 pueden ser escritas de esta otra manera:

7b	Igual(A,D)	por Proposición I, 29
8b	Igual(B,E)	por Proposición I, 29
9b	Igual([D + E + C], [2R])	por Proposición I, 13
10b	Igual([A + B + C], [2R]	sustituyendo en 10 A/D; B/E

Primera conclusión: el lenguaje de enunciados categóricos de la Silogística no sirve para analizar y formalizar las demostraciones del primer libro de los *Elementos* de la

[10] Euclides: *Elementos, libros I-IV*. Trad. de M.ª Luisa Puertas Castaños. Madrid : Gredos, 2000. Páginas 241–242.

Geometría de Euclides. Las expresiones que hay en las líneas 7b a 9b corresponden al lenguaje de la *Lógica de primer orden con identidad*. A nuestro *L*.

Segunda conclusión: la lógica, cualquier lógica que aspire a serlo de pleno derecho, ha de ser capaz de analizar, formalizar y dar cuenta y razón de lo que hacen las disciplinas matemáticas *cuando llevan a cabo demostraciones*. Aristóteles era plenamente consciente de esta idea, como se puede ver en los dos siguientes textos:

> [T1] Πρῶτον εἰπεῖν περὶ τί καὶ τίνος ἐστὶν ἡ σκέψις, ὅτι περὶ ἀπόδειξιν καὶ ἐπιστήμης ἀποδεικτικῆς· (*Analíticos primeros* I, 1, Ross 24a10–11)
>
> Digamos primero sobre qué es esta investigación[11] y a qué <corresponde>, <aclarando>que es sobre la demostración y <corresponde>a la ciencia demostrativa; (Trad. M. Candel)

> [T2] Διωρισμένων δὲ τούτων λέγωμεν ἤδη διὰ τίνων καὶ πότε καὶ πῶς γίνεται πᾶς συλλογισμός· ὕστερον δὲ λεκτέον περὶ ἀποδείξεως. πρότερον δὲ περὶ συλλογισμοῦ λεκτέον ἢ περὶ ἀποδείξεως διὰ τὸ καθόλου μᾶλλον εἶναι τὸν συλλογισμόν· ἡ μὲν γὰρ ἀπόδειξις συλλογισμός τις, ὁ συλλογισμὸς δὲ οὐ πᾶς ἀπόδειξις. (*Analíticos primeros* I, 4, Ross 25b26–31)
>
> Hechas estas distinciones, digamos ya en virtud de qué, cuándo y cómo surge toda deducción [syllogismós]; después habrá que hablar sobre la demostración [apódeixis]. Ahora bien, hay que hablar de la deducción antes que de la demostración porque la deducción es más general [kathólou] que la demostración. En efecto, la demostración es una clase de deducción pero toda deducción no es una demostración.

Aristóteles afirma que la lógica tiene que ver con las ciencias demostrativas, es decir, aquellas ciencias en que parte de sus conocimientos, al menos, queden establecidos por demostración, como sucede con las disciplinas matemáticas. Y que lo que lógica ha de tratar, investigar, explicar, es la demostración [T1]. Mas la lógica, esa disciplina que investiga las demostraciones, es más básica y general y fundamental que cualquier ciencia que albergue demostraciones [T2].

Pues bien, la lógica que consiga explicar, dar cuenta y razón de por qué una *demostración bien hecha* es una verdad, un conocimiento que podemos incorporar al acervo de conocimientos matemáticos de que se trate, esa lógica será la lógica que la disciplina matemática de que se trate *supone*, en la que se basa y *funda la legitimidad de su modo de proceder* (demostraciones).

[11] «la investigación» dice Candel. Robin Smith traduce por «our inquiry». «Esta investigación» es la propia de la lógica.

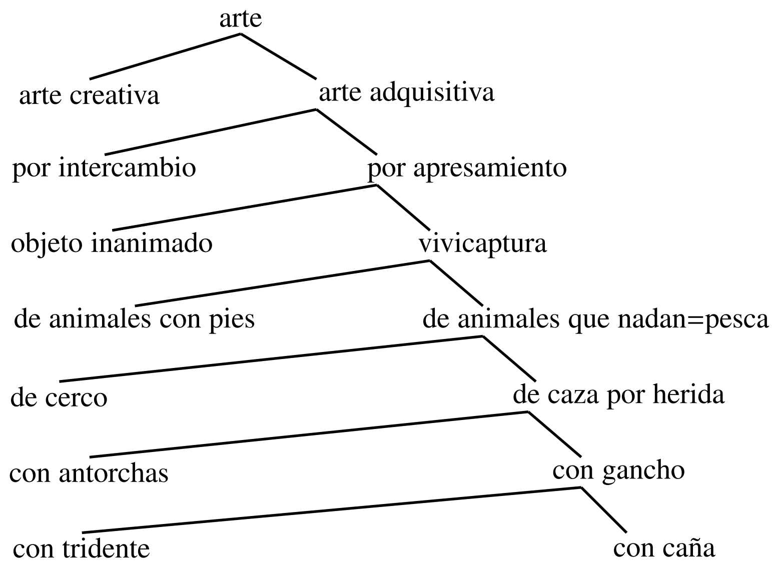
Tercera conclusión: llamaré «Lógica clásica» a la lógica descrita en la segunda conclusión. Y añado que la única Lógica clásica es la Lógica de primer orden (bivalente) con identidad, de raíz en Frege: *Begriffsschrift*[12] (1879).[13]

Creo que las afirmaciones [A1] y [A2] del comienzo mismo de este escrito quedan claras y respondidas: no hay dos Lógicas clásicas sino una porque solo una es capaz de dar cuenta y razón de las demostraciones existentes en las ciencias demostrativas.

1.5. Anexo: Platón, la pesca con caña

Platón: *El Sofista*, 218b6–221c3. Traducción de Antonio Tovar. Madrid : Instituto de estudios políticos, 1970.

El resumen de 221a8–221c3 en forma de árbol de discriminación:



[12] Compárese el § 2 con el § 4 del capítulo 7 del libro II de la *Psychologie vom empirischen Standpunkt*, Leipzig : Verlag von Duncker & Humblot, 1874, pp. 271–276, de Brentano. En la edición de Felix Meiner está en el segundo tomo —Zweiter Band— pp. 44–48. En la traducción de Sergio Sánchez-Migallón en Ediciones Sígueme, Salamanca, 2020, corresponde a las páginas 245–248.

[13] La Silogística es un ensayo fallido de construir una Lógica clásica, un episodio histórico y el trabajo de un genio asombroso, Aristóteles.

Capítulo 2

Estudio de Kant, juicios analíticos y sintéticos

En la Introducción a la *Crítica de la razón pura*, Kant establece dos distinciones con carácter disjunto, a saber:

- *a priori* — *a posteriori*
- analítico — sintético

Son predicados que se dicen de juicios/proposiciones. Es decir que si simbolizamos una proposición cualquiera como X, entonces son posibles las 4 proposiciones siguientes de X:

- «X» es-a priori
- «X» es-*a posteriori*
- «X» es-analítica
- «X» es-sintética

Son contradictorias las proposiciones:

- «X» es-*a priori* y «X» es-*a posteriori*
- «X» es-analítica y «X» es-sintética.

2.1. De la distinción *a priori – a posteriori*

Hay conocimientos obtenidos por medio de la experiencia: son *a posteriori* . Y conocimientos que no han podido ser obtenidos por medio de la experiencia: son *a priori*.

> En lo que sigue, pues, entenderemos por conocimientos *a priori* no los que tienen lugar independientemente de esta o aquella experiencia, sino absolutamente de toda experiencia. A estos opónense los conocimientos empíricos o sea los que no son posibles más que *a posteriori*, es decir por experiencia. De entre los conocimientos *a priori* llámanse puros aquellos en los cuales no se mezcla nada empírico. Así por ejemplo, la proposición: todo cambio tiene su causa, es una proposición *a priori*, mas no es pura, porque el cambio es un concepto que no puede ser sacado más que de la experiencia. (B2–B3, Trad. García Morente)

Hay dos criterios para establecer que un conocimiento es *a priori*: 1.º, si puede formularse mediante una proposición universal, es *a priori*; 2.º, si puede formularse mediante una proposición necesaria, es *a priori*:

> Así pues, primero: si se encuentra una proposición que sea pensada al mismo tiempo con su necesidad, es entonces un juicio *a priori*; si además no está derivada de ninguna otra que no sea a su vez valedera como proposición necesaria, es entonces absolutamente *a priori*. Segundo: la experiencia no da jamás a sus juicios universalidad verdadera o estricta, sino sólo admitida y comparativa (por inducción), de tal modo que se debe propiamente decir: en lo que hasta ahora hemos percibido no se encuentra excepción alguna a esta o aquella regla. Así pues si un juicio es pensado con estricta universalidad, de suerte que no se permita como posible ninguna excepción, entonces no es derivado de la experiencia, sino absolutamente *a priori*. La universalidad empírica es pues solo un arbitrario aumento de la validez: que, de valer para la mayoría de los casos, pasa a valer para todos ellos, por ejemplo en la proposición: todos los cuerpos son pesados. Pero en cambio cuando un juicio tiene universalidad estricta, ésta señala una fuente particular de conocimiento para aquel juicio, una facultad del conocimiento *a priori*. Necesidad y universalidad estrictas son pues, señales seguras de un conocimiento *a priori* y están inseparablemente unidas. (B3–B4, Trad. García Morente)

1. Distinción *a priori* — *a posteriori* (B1–B6)
   - *a priori* : conocimiento cuya fuente no es la experiencia
     - o innato

- o introducido en la mente por un «Dios»
- o generado por la mente misma (común a cada hombre, en principio —no todos lo han de generar—)

- *a posteriori* : conocimiento cuyo origen está en la afección de los sentidos por estímulos externos a los mismos.

2. Rasgos de las proposiciones *a priori* (B3–B4):

 2.1 *universalidad estricta*: «Todos los hombres son mortales» puede entenderse como la enunciación de la enumeración relativa a todos los hombres ya fallecidos. «Todo triángulo cumple que la suma de sus ángulos internos es igual a 2R» es una generalización estricta.
 es-*a priori* (X) si, y solo si, X es de la forma $\forall y$ A [A = expresión bien formada][1]

 2.2 Kant también afirma que las proposiciones *a priori* son *necesarias*. Kant no quiere decir que si X es de la forma $\Box$ A[2] [A = expresión bien formada] entonces es-*a priori* (X). No.

2.1.1. Necesidad: la proposición 32 de los *Elementos* I

Hemos visto que la proposición 32: «los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos», es la conclusión legítima de una *deducción correcta*, bien hecha. Esto nos permite afirmar que se trata de un *conocimiento necesariamente verdadero* y, por tanto, *a priori* .

Lo que en palabras de Leibniz significa «Por otro lado, son criterios no desdeñables de verdad de los enunciados las reglas de la lógica corriente, de las que se sirven también los geómetras, a saber, no admitir como cierto nada que no haya sido probado mediante una escrupulosa experiencia o una sólida demostración; ahora bien, una demostración sólida es la que guarda la forma prescrita por la lógica, no en el sentido de que haya que utilizar siempre silogismos construidos al estilo escolástico (como los que Christian Herlin y Conrad Dasypodius han aplicado a los seis primeros libros de Euclides), sino de manera, simplemente, que la argumentación sea concluyente en virtud de la forma, y podríamos decir que un ejemplo de semejante argumentación concebida en su debida forma sería cualquier cálculo válido; así, pues, no hay que descuidar ninguna premisa necesaria, y todas las premisas deben, o haber sido ya demostradas antes, o por lo menos haber sido presupuestas a modo de hipótesis, en cuyo caso la conclusión es también

[1] $\forall$ es un signo lógico, un cuantificador, el llamado «generalizador». Se lee «para todo. . . »; en $\forall y$ A leeríamos «para todo y, A».

[2] $\Box$ es el operador modal de necesidad de la lógica modal.

hipotética. Los que observen cuidadosamente estas normas se guardarán fácilmente de ideas engañosas»[3].

Leibniz opina que una deducción bien hecha, válida, correcta lo es porque sigue “la forma prescrita por la Lógica” o es “concluyente en virtud de la forma”.

Si señalamos las líneas que son inferencias, tenemos:

7. expresa el hecho de que A y D son ángulos alternos-internos y según el teorema I, 29 son iguales. Al mencionar un teorema anterior o ya demostrado como justificación Euclides nos quiere decir que se podría obtener A = D como conclusión de una deducción que repitiera lo ya hecho en I, 29 adaptada a los nombres de líneas rectas y ángulos que aparecen en este teorema 32

8. igual comentario que en el el caso de la línea 7

9. hay que hacer el mismo comentario que en el caso de la 7 y 8, a saber que se podría obtener como conclusión de una deducción que repitiera lo hecho en el teorema I, 13

10. resulta de una *regla de transformación de expresiones*. Se trata de la regla de sustitución que viene a decir que si se sustituye en una expresión bien formada un símbolo X por otro Y, en toda aparición de X, la nueva expresión es válida y conserva la verdad de la expresión de partida. En 10 se parte de la expresión en 9. El símbolo D es sustituido por A porque ambos designan ángulos iguales. Igual hay que decir de la sustitución de E por B. Es una regla de deducción que Euclides ni justifica ni explica: la da por buena, la usa, dejando para otra disciplina su justificación y legitimación en un contexto deductivo.

Ahora bien si una proposición es conclusión de una deducción bien hecha, válida, correcta, entonces es una proposición que no puede no ser verdadera y, por esto mismo, es necesariamente verdadera.[4]

Los dos criterios para distinguir entre proposiciones *a priori* y *a posteriori* pueden formularse así:

- *Universalidad*: es-*a priori* (X) si, y solo si, X es de la forma $\forall y A$ [A = expresión bien formada]

[3] Leibniz: *Meditationes de cognitione, vertitate et ideis*. Trad. M. Candel, Revista Disputatio, vol. 1 n.º 2, Dec. 2012, pp. 113–123. Gerhard PS IV, 425–426.

[4] Ver Ortega: *La idea de principio en Leibniz*, O.C. (Taurus) IX, § 12, p. 979.

- Necesidad: todas las proposiciones deducidas son *necesariamente verdaderas* si son la conclusión de una deducción correcta.
  Necesidad: es-*a priori* (X) si, y solo si, $\Gamma \vdash X$ [donde Γ es un conjunto de proposiciones que puede estar vacío]

2.2. De la distinción analítico – sintético

> En todos los juicios en los que la relación de un sujeto y de un predicado es pensada, (me refiero a los afirmativos pues la aplicación a los negativos es fácil después), esta relación es posible de dos formas. O bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo que en ese concepto A está contenido (ocultamente), o bien B está completamente fuera de concepto A, aunque empero esté unido a él. En el primer caso, llamo al juicio *analítico*; en el otro, *sintético*. (B10)

De lo anterior puede salir un criterio bastante claro de lo sintético frente a lo analítico:

- Proposición analítica: si el predicado B es una nota del *definiens* del sujeto A.
- Proposición sintética: si el predicado B no es una nota del *definiens* del sujeto A.

> Juicios analíticos (afirmativos) son, por tanto, los únicos en que la unión entre Predicado y Sujeto por medio de identidad es pensada; aquellos en que esta unión sin identidad es pensada, han de ser llamados sintéticos. (B10)

Kant da dos ejemplos (B11). De analíticos «todos los cuerpos son extensos». De sintético «todos los cuerpos son pesados», porque según él «extenso» es una nota del *definiens* de cuerpo, mientras que «pesado» no lo es. Se me ocurren otros dos ejemplos: «todo triángulo equilátero tiene tres lados iguales», proposición analítica porque el predicado «tres lados iguales» es nota en la definición de triángulo equilátero; «todo triángulo cumple que la suma de sus ángulos es igual a 2R», proposición sintética porque el predicado «la suma de sus ángulos es igual a 2R» no es nota en la definición de triángulo.

> Juicios de experiencia, como tales, son en su totalidad sintéticos. Pues sería absurdo fundar en la experiencia un juicio analítico, porque en absoluto tengo que salir del campo de mis conceptos para formular el juicio, y no tengo necesidad, por tanto, de ningún testimonio de la experiencia. Que un cuerpo sea extenso es una proposición que se establece *a priori*, y en absoluto es un juicio de experiencia. Pues antes de ir a la experiencia, tengo todo

> lo requerido para el juicio en el campo de mis conceptos, y en este campo obtengo el predicado mediante el principio de contradicción, y a la vez puedo hacerme consciente de la necesidad de este juicio, lo cual no podría enseñarme la experiencia ni una sola vez. (B11–B12)

He traducido «aus meinem Begriffe/in dem Begriffe» por «campo de mis conceptos» para peraltar la idea de algo que acontece en la mente a solas. Al *pensar* en la idea de cuerpo puedo extraer la idea de extensión. Y también puedo plantearme si podría prescindir de esa nota de igual modo que puedo prescindir del color, de la dureza o del peso. Si lo intento tendría que terminar por reconocer que no, porque extensión es una nota de la definición esencial de cuerpo. Y además advertiría que si lo hiciera, y restara la extensión de la idea de cuerpo, me contradiría. Bien. Lo importante es que Kant piensa que todo esto acontece en la esfera del pensar.

> Si ahora amplío mi conocimiento, volviéndome hacia la experiencia de donde yo había obtenido ese concepto de cuerpo, entonces encuentro unidos siempre las anteriores notas y el peso, y, por ello, añado sintéticamente el predicado del peso a aquel concepto. Es, pues, la experiencia en lo que se funda la posibilidad de la síntesis del predicado peso con el concepto de cuerpo, porque ambos conceptos, si bien el primero no está incluido en el segundo, como partes de un todo —a saber: la experiencia, que es ella misma una unión sintética de intuiciones— pertenecen uno a otro si bien de modo contingente. (B12)

Ahora bien, los conocimientos interesantes, según Kant, ni son los analíticos, por más que sea inevitable desarrollarlos, ni son meramente sintéticos porque, por más cosas nuevas que nos den a conocer, lo que estos nos dan a conocer son cosas, hechos contingentes, los interesantes de verdad son los que se pueden expresarse en *proposiciones sintéticas* a priori.

> Pero en los juicios sintéticos *a priori* falta enteramente esa ayuda. Si he de salir del concepto A para conocer otro B, como enlazado con él, ¿en qué me apoyo? ¿Mediante qué es posible la síntesis? ya que aquí no tengo la ventaja de volverme hacia el campo de la experiencia para buscarlo. (B12–B13, Trad. García Morente)

Kant da, como ejemplo, la proposición «Alles, was geschieht, hat seine Ursache» («Todo lo que pasa tiene su causa»). Prefiero, aunque solo sea porque el ejemplo sirvió a Brentano para hablar de *pre*juicios sintéticos *a priori*, dejarlo de lado. Si nos atenemos a los *Elementos* de Euclides, por ejemplo al primer libro, encontramos 48 proposiciones que son demostradas. Algunas demostraciones lo son de problemas casi de delineante (dibujo técnico), pero otros son demostraciones de propiedades de figuras planas. Ejemplo de problema: la proposición 1. Ejemplo de propiedad de una figura: la proposición 32. En la proposición 32 se demuestra que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 2R. Formalicemos así esta proposición

$$\forall x(\text{si } \mathit{Triángulo}(x) \text{ entonces: } \mathit{la\ suma\ de\ los\ ángulos\ internos(x) = 2R}) \tag{2.1}$$

Esta proposición es conclusión de una deducción bien hecha. Por tanto, la relación entre triángulo y suma de ángulos que expresa es necesaria según el criterio kantiano de necesidad visto en la página 23. Mas, por otra parte, es claro que por más vueltas que demos a la definición de triángulo nada hay en ella que nos haga sospechar siquiera que los triángulos tienen esa propiedad. Por tanto, saber que la suma de los ángulos de un triángulo = 2R amplía nuestros conocimientos sobre el triángulo y, por esto mismo, ha de tratarse de un ampliación *sintética*.

Lo que hace Kant es juntar ambas perspectivas: desde el análisis de la relación Triángulo – Suma de ángulos internos, es conocimiento *a priori*; desde el análisis del tipo de conocimiento, es conocimiento sintético. Pues bien, la proposición en que se exprese enunciará un *conocimiento sintético y* a priori. De ahí el nombre kantiano «juicios sintéticos *a priori*».

Aristóteles ya había reconocido que la tarea del geómetra es descubrir y demostrar propiedades de los objetos geométricos, así en Metafísica IV, 1, 1023a23–26: οὐδεμία γὰρ τῶν ἄλλων ἐπισκοπεῖ καθόλου περὶ τοῦ ὄντος ᾗ ὄν, ἀλλὰ μέρος αὐτοῦ τι ἀποτεμόμεναι περὶ τούτου θεωροῦσι τὸ συμβεβηκός, οἷον αἱ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν. (Ross)

pues ninguna de las otras [ciencias] especula en general acerca del Ente en cuanto ente, sino que, habiendo separado alguna parte de él, consideran los accidentes de esta; por ejemplo las ciencias matemáticas. (Trad. V. G.ª Yebra)

Pero si entendemos más en concreto este τὸ συμβεβηκός como *las propiedades (τὰ ἴδια) de los entes matemáticos*, hemos de tener en cuenta, en primer lugar, que Aristóteles entiende que *proprium* y objeto son convertibles:

En los *Analíticos segundos* I,3, 73a6–7:

Οὐ μὴν ἀλλ' οὐδὲ τοῦτο δυνατόν, πλὴν ἐπὶ τούτων ὅσα ἀλλήλοις ἕπεται, ὥσπερ τὰ ἴδια. (Ross)

Moreover, even this is only possible for items which follow one another, as properties do. (Trad. J. Barnes)

En los *Tópicos* V, 102a18–22 se precisa esa idea así:

Ἴδιον δ' ἐστὶν ὃ μὴ δηλοῖ μὲν τὸ τί ἦν εἶναι, μόνῳ δ' ὑπάρχει καὶ ἀντικατηγορεῖται τοῦ πράγματος. οἷον ἴδιον ἀνθρώπου τὸ γραμματικῆς εἶναι δεκτικόν· εἰ γὰρ ἄνθρωπός ἐστι, γραμματικῆς δεκτικός ἐστι, καὶ εἰ γραμματικῆς δεκτικός ἐστιν, ἄνθρωπός ἐστιν. (Ross)

A property is something which does not show the essence of a thing but belongs to it alone and is predicated convertibly of it. For example, it is a property of man to be capable of learning grammar; for if a certain being is a man, he is capable of learning grammar, and if he is capable of learning grammar, he is a man. (Forster)

En los *Analíticos segundos* I, 4, 73a37–73b3, añade la idea de que la propiedad, τὸ ἴδιον, en la expresión que enuncia su esencia ha de incluir el ente del cual es propiedad:

καὶ ὅσοις τῶν ὑπαρχόντων αὐτοῖς αὐτὰ ἐν τῷ λόγῳ ἐνυπάρχουσι τῷ τί ἐστι δηλοῦντι, οἷον τὸ εὐθὺ ὑπάρχει γραμμῇ καὶ τὸ περιφερές, καὶ τὸ περιττὸν καὶ ἄρτιον ἀριθμῷ, καὶ τὸ πρῶτον καὶ σύνθετον, καὶ ἰσόπλευρον καὶ ἑτερόμηκες· καὶ πᾶσι τούτοις ἐνυπάρχουσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ τί ἐστι λέγοντι ἔνθα μὲν γραμμὴ ἔνθα δ’ ἀριθμός. (Ross)

if it is an attribute the formula of whose essence includes the subject to which the attribute itself belongs.[5] E.g., “straight” and “curved” belong to “line”, “odd” and “even”, “prime” and “compound”, “square” and “oblong” belong to number; and the formula of the essence of each one of these includes line or number respectively [6]. (Trad. Tredennick)

Parece que Aristóteles lo vio claro: la propiedad «la suma de los ángulos internos *de un triángulo* es igual a 2R» carecería de sentido y concreción si se quitan las palabras en cursiva: «la suma de los ángulos internos … es igual a 2R». Pero cabe plantear el problema de quién es la propiedad que dice «la suma de los ángulos internos … es igual a 2R», cuya respuesta —el triángulo— nos enseña lo que Aristóteles quería decir con *convertibles*.

Porfirio concibió la propiedad, *proprium*, τὸ ἴδιον, así:

> Del propio se distinguen cuatro sentidos. Es, en efecto, lo que conviene a una sola especie, aunque no a toda; como al hombre ser médico o ser geómetra [1]. Es también lo que conviene a toda la especie, aunque no a una sola; como al hombre, ser bípedo [2]. Es además lo que conviene a una sola, a toda y alguna vez; como a todo hombre, encanecer en la vejez [3]. En cuarto sentido es aquello en lo que se reúnen el convenir a una sola, a toda y siempre; como al hombre, ser capaz de reír [4]; (…). A esto es a lo

[5] En second lieu, ce sont eux-mêmes compris dans la définition exprimant la nature de ces attributs. Trad. Tricot. La trad. de Candel es ininteligible.

[6] et pour tous ces attributs, la définition qui exprime leur nature contient le sujet (Trad. Tricot)

> que se llama propio en sentido riguroso, porque es convertible: pues, si es caballo, es capaz de relinchar; y si es capaz de relinchar, es caballo.[7]

El punto [4] es claro, si bien entraña una dificultad, a mi juicio. Si la propiedad lo es de un conjunto infinito de objetos, como en el caso de la suma de los ángulos internos de un triángulo, ¿cómo es posible determinar que corresponde a *todos* o a *cada uno* de los objetos de una especie cuando se trate de una propiedad no demostrable? y ¿que corresponde *solo* a la especie de que se trate? Pero si la dificultad vale para Porfirio, valdría igual para Aristóteles.

Por último, la convertibilidad. La entiendo así:[8]

$$\forall x(Tr(x) \to [(a + b + c = 2R) \land (Ai(a, x) \land Ai(b, x) \land Ai(c, x))]) \tag{2.2}$$

$$\forall x([(a + b + c = 2R) \land (Ai(a, x) \land Ai(b, x) \land Ai(c, x))] \to Tr(x)) \tag{2.3}$$

$$\forall x(Tr(x) \leftrightarrow [(a + b + c = 2R) \land (Ai(a, x) \land Ai(b, x) \land Ai(c, x))]) \tag{2.4}$$

La expresión 2.4 lo es de la convertibilidad.

2.3. ¿Dónde hay conocimientos sintéticos y *a priori* ?

1. En Matemáticas:

> Hay que notar, ante todo, que las proposiciones propiamente matemáticas son siempre juicios *a priori* y no empíricos, pues llevan consigo necesidad, la cual no puede ser derivada de la experiencia. Mas si no se quiere admitir esto, ¡muy bien!, entonces limito mi proposición a la matemática pura, cuyo concepto lleva ya consigo el contener no un conocimiento empírico, sino tan sólo un conocimiento puro *a priori* . (B14–B15, Trad. García Morente)

Vamos a dar por probada esta idea, porque el análisis de Kant de la proposición «7+5=12» y del primer postulado del libro I de los *Elementa* de Euclides («la línea recta es la más corta entre dos puntos») deja bastante que desear. La suma se define recursivamente:

[7] Porfirio: *Isagoge*. Texto griego, translatio Boethii, e introducción, notas, apéndices, bibliografía y trad. esp. de J. José García Norro y Rogelio Rovira. Madrid, Anthopos, 2003. Pp. 36–37.

[8] Leyendas: Tr = Triángulo; Ai = Ángulo-interno.

$$a + 0 = a \tag{2.5}$$

$$a + b' = (a + b)' \tag{2.6}$$

Expresiones que definen la suma $a+b$ por inducción sobre b, con a como constante, y tomando ' [la función sucesor] como una función previamente conocida.[9] Es claro que Kant no tenía por qué saber de funciones recursivas, mas en la Aritmética de las escuelas se enseñaba que sumar el número b al número a significa contar en sentido creciente b unidades a partir del número a y hallar, de este modo, un nuevo número $(a + b)$ determinado unívocamente por este proceso de formación[10]. Es menos disculpable lo del principio[11] aducido de la Geometría. En efecto, la idea tradicional, y que Kant representa aquí perfectamente, es que del contenido de los principios hay una intuición. El conocimiento adquirido al pensar una de esas proposiciones es intuitivo, y por ello, piensa Kant, sintético. Yo no sé para qué vino Hilbert al mundo pero, al menos, nos hizo la gracia de enseñarnos el uso no intuitivo de proposiciones tomadas como principios.

2. También en Física:

> Quiero adelantar tan sólo un par de proposiciones como ejemplos: que en todas las transformaciones del mundo corporal la cantidad de materia permanece inalterada, o que en toda comunicación del movimiento tienen que ser siempre iguales la acción y la reacción. En ambas, no sólo la necesidad y por ende el origen *a priori* está claro, sino que se ve claramente también que son proposiciones sintéticas. Pues en el concepto de materia no pienso la permanencia, sino sólo la presencia de la materia en el espacio, llenándolo. Así, pues, salgo realmente del concepto de materia, para pensar *a priori* unido a él, algo que no pensaba en él. La proposición no es, por tanto, analítica, sino sintética y, sin embargo, pensada *a priori* . Así también en las demás proposiciones, que constituyen la parte pura de la física. (B17–18, Trad. García Morente)

[9] Stephen C. Kleene: *Introducción a la metamatemática*. Trad. Manuel Garrido. Madrid, Tecnos, 1974. Pág. 202. Alguno habrá que quiera defender el carácter sintético de las funciones recursivas puesto que su definición es inductiva, yo no porque esta inducción nada tiene que ver con la mencionada por Kant en B3.

[10] Véase Paul Crantz: *Aritmética y Algebra*. Trad. David Soler. Barcelona, Labor, 1949. Pp. 14-15.

[11] Ya Aristóteles recoge como principio cualquier proposición indemostrada, es decir, definiciones, postulados y *koinaí énnoiai*.

2.4. La Lógica subyacente a las distinciones estudiadas

Es claro que la Lógica que subyace a las ideas de Kant es la misma de la que él habla en el Prólogo a la segunda edición de la *Crítica*: «Que la lógica ha llevado ya esa marcha segura desde los tiempos más remotos, puede colegirse, por el hecho de que, desde Aristóteles, no ha tenido que dar un paso atrás, a no ser que se cuenten como correcciones la supresión de algunas sutilezas inútiles o la determinación más clara de lo expuesto, cosa empero que pertenece más a la elegancia que a la certeza de la ciencia. Notable es también en ella el que tampoco hasta hoy ha podido dar un paso adelante. Así pues, según toda apariencia, hállase conclusa y perfecta.» (BVIII, Trad. García Morente)

Ahora puedo ir deprisa y sintéticamente concluir.

1. Las distinciones entre juicios analíticos y sintéticos, *a priori* y *a posteriori* dependen al cien por cien de la Lógica que Kant hace suya, en origen la Silogística de Aristóteles.
2. La Silogística de Aristóteles no sirve para analizar y formalizar las demostraciones del libro I de los *Elementos* de Euclides.
3. La Lógica de primer orden con identidad es capaz de analizar, formalizar y dar cuenta y razón de la validez y corrección de las demostraciones del libro de Euclides. Es la lógica subyacente, o bien, desde otra perspectiva, la lógica exigida por las demostraciones del libro de Euclides.
4. Por esto la lógica de primer orden con identidad es la Lógica clásica.

Y ya para acabar, ¿son sostenibles las distinciones kantianas, uno —al menos uno— de los fundamentos de la *Crítica de la razón pura*?

Antes de contestar esta pregunta hay que ver cómo entiende la la lógica de primer orden (bivalente) los enunciados categóricos. Los términos universales que en ellos aparecen son entendidos como *predicados* monádicos, como términos predicativos.

Así el modo Barbara: si (A se dice de todo B y B se dice de todo C) entonces A se dice de todo C, lo expresaríamos en LPO de la manera siguiente:

- A se dice de todo B : $\forall x(si\ B(x)\ entonces\ A(x))$
- B se dice de todo C : $\forall x(si\ C(x)\ entonces\ B(x))$
- A se dice de todo C : $\forall x(si\ C(x)\ entonces\ A(x))$[12]

[12] Hágase con un ejemplo, si resulta más fácil: si (todo hombre es mamífero y todo griego es hombre) entonces (todo griego es mamífero)

Estudio de Kant, juicios analíticos y sintéticos

¿Es posible afirmar que alguno de ellos es un enunciado sintético y *a priori*? El enunciado de la proposición I, 32, que hemos estudiado, «los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos» ¿puede entenderse como *enunciado sintético a priori*?

No quiero ser injusto con Kant. Esa proposición expresa una *propiedad específica* de cualquier triángulo. En ese sentido, es una propiedad no incluida en el *definiens* de la definición de triángulo.

Pero su carácter *a priori* no deriva de ahí, sino del hecho de que es una *proposición demostrada*. Digamos que el orden es: puesto que la proposición «los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos» está demostrada, es una *verdad por demostración* y como tal hay que incluirla en el acervo de nuestros conocimientos de Geometría.

Y, una vez añadida a nuestro acervo de conocimientos matemáticos, podemos también añadirle el marbete «expresa una propiedad sintética» en tanto que la suma de los ángulos internos expresa una propiedad del triángulo que no tiene por qué aparecer en la definición de triángulo.