

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Sección Departamental de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I



TESIS DOCTORAL

Análisis espectroscópico de estrellas variables delta Scuti

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Enrique Solano Márquez

DIRECTOR:

John Fernley

Madrid, 2015



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5329621950

IT
UCM
1994

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CC. MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

**Análisis espectroscópico de
estrellas variables δ Scuti**

MEMORIA presentada por
Enrique Solano Márquez
para aspirar al grado de
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

MADRID, Junio 1994

6 16.14 3309
I 53262584

A mis padres

A Charo

Agradecimientos

Quiero agradecer a John Fernley, director de esta Tesis, el haberme dado la oportunidad de trabajar con él y haber hecho posible la realización de la misma. Quisiera agradecer su disponibilidad (en cualquier momento, incluso tras nuestros "emocionantes" partidos de tenis) para responder a cualquiera de las múltiples dudas que mis numerosas lagunas en Física suscitaban y su facilidad de trato que hizo muy llevaderos los primeros momentos en los que el idioma era una traba importante. Quisiera también agradecerle el haberme enseñado cómo hacer ciencia y el haber sido más un amigo que un director.

A Willem Wamsteker, director del Observatorio IUE, por haberme aceptado como doctorando en Villafranca. A Valeriano Claros, director de la Estación, por permitir que los doctorandos disfrutemos de unos medios muy difíciles de encontrar en otros centros de investigación.

A la Comunidad de Madrid por haberme concedido una beca de investigación que facilitó enormemente la realización de este trabajo en los primeros momentos, sin duda los más difíciles.

Un lugar de honor dentro de los agradecimientos lo ocupa mi ex-tutora en el Departamento de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Matemáticas, Gracia Rodríguez. Ella me introdujo en la Astrofísica en la Facultad, me trajo a Villafranca (cierto día lluvioso con rotura de coche incluida,) y se ha preocupado por mí en todo momento solucionando los numerosos problemas burocráticos que una tesis conlleva. A Miguel Sevilla, director del Departamento, por haberme permitido defender en dicho Departamento una tesis que no coincide con las líneas fundamentales de investigación del mismo. A Ana Inés Gómez por haber accedido a ser mi tutora en la última fase de este trabajo.

Sería difícil, por no decir imposible, dejar de citar a algún miembro de la Estación en este apartado de agradecimientos. Es de justicia empezar a citar al grupo de estudiantes: agradecer a los que ya no lo son y se han convertido en "señores/as doctores/as". A Carmen Recondo por el primer año que pasamos compartiendo despacho y formularios de solicitudes de beca, por sus ánimos y por ayudarme en los últimos momentos con la traducción de esta Tesis. A Pedro y María, los estudiantes "seniors" en el momento de mi llegada, por estar siempre dispuestos a ayudar. A María también por haberme traído a Villafranca en coche durante el

primer año. También quiero agradecer enormemente su ayuda al grupo de "los todavía" estudiantes pero que dentro de no mucho dejarán de serlo: a Antonio de la Fuente por estar siempre dispuesto a contestar cualquiera de mis preguntas sobre cualquier tema, desde transformadas de Fourier hasta el funcionamiento del banco de datos. Suyo es mi primer procedimiento MIDAS. Agradecerle también el haber sido un buen compañero de piso durante estos últimos 4 años. A Eva Verdugo y María Rosa por haber leído y corregido las primeras versiones de esta Tesis. Sus sugerencias fueron de gran ayuda para la elaboración final de este trabajo. Igualmente, a Pedro García Lario y Jose Luis Sanz por sus ánimos.

A todos los astrónomos del Observatorio IUE. No quiero dejarme a ninguno: Willem, Pedro, Antonio, Charo González, Domitilla, Michael, Constance, Richard, Angelo, Jean. A todos por su ayuda y ánimos, especialmente a Charo por haberme esperado para traerme a Villafranca muchas mañanas durante el primer año y a Antonio Talavera por sus comentarios que sirvieron para clarificar conceptos y aclarar dudas de última hora. A Carmen Ramírez por su eficiencia y habilidad en conseguir billetes de avión "buenos, bonitos y baratos". A mis "sufridos" compañeros IPSs Eva y Carlos, por haberme permitido modificar el "schedule" a mi capricho siempre que un Congreso o una campaña de observación así lo exigía. A T. Martín por haberme facilitado el poder compaginar el trabajo con la investigación y por su apoyo constante en la solicitud de un dinero que nunca llegó. A Eduardo Ojero por su ayuda sobre mis dudas en el mundo de los ordenadores y en las transparencias finales. A Ana Ulla por sus correcciones a mi Tesis y, sobre todo, por ser una verdadera amiga. A Benjamín por su apoyo y su permanente ofrecimiento a ayudar.

Quisiera agradecer también al grupo de δ Scuti del Instituto de Astrofísica de Andalucía su colaboración en este trabajo. Sus sugerencias en el capítulo de temperaturas fueron de inestimable ayuda. A Eloy Rodríguez por enviarme su catálogo antes de estar publicado. A Rafa Garrido por las interesantes conversaciones que hemos mantenido sobre δ Scuti cuando hemos coincidido en Congresos y campañas de observación y por sus comentarios a esta Tesis. Igualmente por haberme facilitado una muy agradable estancia en Granada.

Este último párrafo de agradecimientos está reservado para las personas más importantes de mi vida. A mis padres por haberme encauzado para poder ser la persona que soy, por enseñarme lo que debe ser una familia y por haberme facilitado

en todo momento el poder estudiar lo que realmente me gustaba aunque eso conllevara el siempre duro trago de la distancia y la separación. A mis hermanos por haberme hecho sentir tan feliz cada vez que volvía a mi querida Cartagena y por haber ayudado a que realmente existiera en mi casa "calor de hogar". A mis abuelas y a mi abuelo por su interés sobre este trabajo, en especial a mi abuela y mi abuelo que dejaron este mundo a lo largo de esta Tesis, pero que sé que desde el Cielo están contentos porque ésta ha llegado a su fin. El me enseñó que las Matemáticas son bonitas y ese pensamiento ha estado presente en mi mente a lo largo de toda mi carrera académica. Pero lo cierto es que con un profesor como él cualquier cosa era bonita. Y, por supuesto, a Charo. Citar todo lo que le tendría que agradecer llenaría varias páginas. Por su enorme esfuerzo en traducir esta Tesis y en preparar transparencias para que todo estuviera listo antes de sus correspondientes plazos. Pero mucho más importante que eso, por saberla siempre a mi lado, incluso en los momentos más duros y por saber darme una palabra de consuelo y de cariño siempre que la he necesitado.

INDICE

1	Introducción	1
1.1	Estrellas de tipo espectral A	6
1.1.1	Estrellas metálicas A_m	7
1.1.2	Estrellas δ <i>Delphini</i>	9
1.2	Localización de las estrellas δ <i>Scuti</i> en el diagrama H-R	10
1.3	Teoría de oscilaciones estelares	17
1.3.1	Introducción	17
1.3.2	Modos de oscilación	17
1.3.3	Determinación de la relación período-luminosidad-color	21
1.4	Determinación de los modos de pulsación	22
1.4.1	Modos de pulsación radial	22
1.4.2	Modos de pulsación no radial	23
1.5	Estabilidad de los modos de pulsación	24
1.6	Variabilidad de los períodos y estado evolutivo	30
1.7	<i>Blue stragglers</i> y estrellas <i>SX Phe</i>	31
1.7.1	<i>Blue stragglers</i>	31
1.7.2	Estrellas <i>SX Phe</i>	35
1.8	Objetivo del trabajo	40
2	Observaciones y reducción de datos	43
2.1	Observaciones	43
2.2	Instrumentación	49
2.2.1	Espectrógrafos	49
2.2.2	Observatorio de La Palma	50
2.2.3	Observatorio de McDonald	54

2.3	Reducción de los datos	55
2.3.1	Reducción de los datos del Observatorio de La Palma	55
2.3.2	Reducción de los datos del Observatorio McDonald	57
2.4	Determinación de la luz difusa y del nivel del continuo	60
2.5	Perfil instrumental	65
2.5.1	Métodos utilizados en el cálculo del perfil instrumental	65
2.6	Ruido espectral. Definición y medida	72
3	Deconvolución	75
3.1	Ecuaciones integrales lineales. Definición y notación.	75
3.2	El problema de la deconvolución	77
3.3	Métodos de deconvolución lineales	79
3.3.1	Método iterativo	79
3.3.2	Método de Van Citter	80
3.3.3	Formulación matricial	82
3.3.4	Método del punto simultáneo	83
3.3.5	Método del punto sucesivo	83
3.4	Métodos no lineales con constreñimientos	84
3.4.1	Método de Jansson	84
3.4.2	Aplicación de los métodos no lineales con constreñimientos	86
3.5	Eficiencia y limitaciones del proceso de deconvolución	98
3.6	Conclusiones	99
4	Rotación	105
4.1	Introducción	105
4.2	Cálculo de Velocidades de Rotación.	108
4.2.1	Cálculo del perfil de rotación	108
4.2.2	Descripción de los métodos	110
4.2.3	Resultados obtenidos	115
4.2.4	Comparación entre métodos	123
4.3	Conclusiones	129
5	Determinación de temperaturas efectivas	131
5.1	Medida de temperaturas efectivas. Visión general	132

5.1.1	Métodos de flujo integrado	132
5.1.2	Métodos espectrofotométricos	134
5.1.3	Métodos fotométricos	137
5.1.4	Métodos basados en perfiles de líneas espectrales	138
5.2	Cálculo de la temperatura efectiva utilizando $H\beta$ y $H\alpha$	139
5.3	Cálculo de temperaturas efectivas utilizando fotometría $uvby\beta$	148
5.3.1	Calibración de Petersen y Jorgensen.	148
5.3.2	Calibración de Relyea y Kurucz.	149
5.3.3	Calibración de Philip y Relyea.	149
5.3.4	Calibración de Moon y Dworetzky	150
5.3.5	Calibración de Lester, Gray y Kurucz.	151
5.4	Comparación de los resultados	151
5.5	Conclusiones	158
6	Análisis químico	173
6.1	Introducción	173
6.2	Determinación de abundancias. Métodos fotométricos	174
6.3	Determinación de abundancias. Métodos espectroscópicos. Curvas de crecimiento	176
6.3.1	Cálculo del parámetro fuerza del oscilador	176
6.4	Cálculo de abundancias	189
6.4.1	Estimación de errores en el cálculo de abundancias	195
6.5	Análisis de los resultados	199
6.5.1	Abundancias de oxígeno	201
7	Conclusiones	213
8	Apéndice	225
8.1	Transformadas de Fourier	225
8.2	Ajuste de funciones	228
	Bibliografía	231

Capítulo 1

Introducción

Las estrellas que cambian de magnitud se denominan *variables*. Las primeras variaciones en el brillo de las estrellas fueron detectadas en Europa a finales del siglo XVI, cuando explotó la supernova de Tycho Brahe (1572) y se observó en 1956 la variación regular de la luz de la estrella *o Ceti* (Mira). Estrictamente hablando, todas las estrellas son *variables*: las variaciones en luminosidad están conectadas con cambios evolutivos normales que ocurren en un período del orden de 10^6 – 10^9 años. También, las estrellas que se pueden considerar constantes, como el Sol, son *variables* cuando se observan a longitudes de onda extremas (rayos X por ejemplo) o con una gran precisión (por ejemplo oscilaciones solares). En consecuencia, la definición de *variable* deberá ser restringida atendiendo a dos criterios: primero, la variabilidad debe ocurrir en un período de décadas como mucho y, segundo, una estrella se considerará *variable* dependiendo de la precisión con la que podamos medir sus cambios de brillo. Así, por ejemplo, una estrella análoga a la solar que en principio se supone imita su comportamiento podría ser considerada *no variable*, mientras que el Sol se podrá considerar *variable* al ser posible detectar sus variaciones de brillo.

Dentro del grupo de las *variables*, el subgrupo llamado *variables pulsantes* se define como el formado por aquellas estrellas con movimientos dinámicos, periódicos y de gran escala que pueden hacer que la estrella se mueva en fase como un todo (pulsación radial) o que diferentes partes de la estrella se muevan en distintas fases (pulsación no radial). Las primeras estrellas pulsantes que se descubrieron fueron η Aql por Pigott en 1784 y δ Cep por Goodricke algunos años más tarde, ambas

clasificadas posteriormente como *Cefeidas*. Sin embargo, fue necesario esperar hasta el comienzo de este siglo para tener una explicación física del comportamiento de estas estrellas (Eddington, 1918a, b).

Desde 1930 se han identificado en la vecindad solar aproximadamente doscientas *variables* con períodos de pulsación más cortos que $\sim 0^d.25$. Históricamente, la estrella δ *Scuti* fue la primera citada por Smith en 1955 en su lista de *variables Cefeidas enanas* de períodos cortos. Sin embargo, Eggen (1956) fue el primero en sugerir que existía una clase de *variables*, distinta de *RR Lyrae* cerca de la *Secuencia Principal* con tipos espectrales A y F, constituyendo la extensión natural de la *franja de inestabilidad*, la cual se define como aquella región del diagrama H-R en donde se localizan las *variables pulsantes*. La *franja de inestabilidad* fue primeramente descubierta para las *Cefeidas* extendiéndose consecutivamente hacia luminosidades más bajas con el descubrimiento de nuevos tipos de *variables* como *RR Lyr*, δ *Scuti* o *ZZ Ceti*. Los estudios de Eggen (1956) sobre las curvas de luz de δ *Del* y ρ *Pup* mostraron importantes características de este grupo de *variables*:

- Las amplitudes son típicamente del orden de unas centésimas de magnitud, aunque también existen δ *Scuti* de amplitud mayor.
- Mientras algunas estrellas, como ρ *Pup*, tienen curvas de luz estables, otras, como δ *Del*, muestran cambios notables en su curva de luz de un ciclo a otro.
- Los períodos son siempre más cortos que 0.3 días.

La mayoría de las estrellas δ *Scuti* son de Población I con altas abundancias metálicas (es decir, $[\text{Fe}/\text{H}] \geq -0.3$) y pequeñas velocidades espaciales (es decir, $U \sim V \sim W \sim 0 \text{ km s}^{-1}$, donde U está dirigida hacia fuera del centro galáctico, V está en la dirección de la rotación galáctica, y W está hacia el Polo Norte Galáctico, después de corregir del movimiento del Sol con respecto al Sistema Local de Reposo (en inglés, *Local Standard of Rest*)).

En la Figura 1.1 se muestra un histograma de la distribución de las estrellas δ *Scuti* de acuerdo con su amplitud ΔV (Rodríguez *et al.*, 1994). La mayoría presentan una amplitud muy pequeña con un valor típico de $0^m.02$. El número de *variables de baja amplitud* aumenta casi exponencialmente cuando la amplitud disminuye, sugiriendo que muchas de las estrellas aparentemente *no variables* en la *franja de*

inestabilidad varían pero con amplitudes indetectables. Algunas otras relaciones interesantes entre los diferentes parámetros de las δ Sct se pueden encontrar en Rodríguez *et al.* (1994).

En el pasado, aquellas estrellas con variaciones de amplitud en su curva de luz mayores que ~ 0.30 se han denominado *Cefeidas enanas* (Smith, 1955), *estrellas Al Vel* (Bessel, 1969) y *estrellas RRs* (Kukarkin *et al.*, 1969). La distinción entre las δ Sct de baja amplitud y las *Cefeidas enanas* ha sido el tema de varias investigaciones (p.ej., McNamara y Feltz, 1978; Breger, 1980; Wolff, 1983; McNamara, 1985; Fernley *et al.*, 1987). La mayoría de estas estrellas son similares a las estrellas δ Sct de baja amplitud en casi todos los aspectos. Sin embargo, el hecho de que la mayoría de las estrellas de tipo A en el estado temprano *post-Secuencia Principal* de evolución sean o no *variables* o *variables* de muy pequeña amplitud ($\Delta V \sim 0.01$ mag), hizo pensar a algunos autores que las *Cefeidas enanas*, con sus grandes amplitudes, deberían presentar ciertas peculiaridades. Fernley *et al.* (1987) encontraron dificultades al ajustar las observaciones con modelos de evolución estelar. Estos autores propusieron un modelo en el que las *Cefeidas enanas* son objetos evolucionados representando quizás una rama sub-horizontal, lo que explicaría las grandes amplitudes y los cambios en los cocientes entre períodos encontrados para estas estrellas. No obstante, el modelo falló al utilizar trazas evolutivas de las estrellas post-flash de helio ya que las *Cefeidas enanas* estarían situadas fuera de la *franja de inestabilidad*. Actualmente, es ampliamente aceptada por la mayoría de los autores la explicación estándar de que son simplemente estrellas δ Sct de Población I con grandes amplitudes. En este trabajo, nos referiremos a ellas simplemente como *δ Scuti de gran amplitud*.

Aunque la mayoría de las estrellas δ Scuti muestran características similares a las de la Población I, hay un número de *δ Scuti de gran amplitud*, junto con un pequeño número de *variables de baja amplitud*, que son astrofísicamente diferentes de las *variables* normales δ Sct de Población I. Se denominan estrellas *SX Phe* y muestran características de Población II (es decir, abundancias metálicas bajas y velocidades espaciales altas), pero masas anormalmente grandes y edades jóvenes. Diferentes estudios (p. ej., Jorgensen y Hansen, 1984; Nemec, 1988; Eggen e Iben, 1989; Nemec y Mateo, 1990) han llevado a incluir a las *variables SX Phe* dentro de la categoría de *blue stragglers*. Las características principales de este grupo serán

estudiadas en la Sección 1.7.

Una vez que se descubre un nuevo tipo de estrellas, se conoce su posición en el diagrama H-R y se establecen sus propiedades físicas con un número de parámetros comunes, el siguiente paso es descubrir tantas estrellas como sea posible. Las primeras campañas dedicadas a descubrir nuevas δ Scuti fueron realizadas por Danziger y Dickens (1967) y Breger (1969). En ellas se descubrió la existencia de estrellas δ Scuti en cúmulos (como, por ejemplo, las Hyades) lo que sugirió que este tipo de pulsación era un fenómeno bastante común. En los últimos años se ha logrado un enorme progreso desde el punto de vista observacional. La mejora en las técnicas de observación y en el análisis de las mismas ha permitido descubrir estrellas δ Scuti con amplitudes muy pequeñas y que habían sido consideradas como *no variables* con anterioridad (Rodríguez *et al.*, 1994). La incidencia de *variables* δ Scuti en cúmulos galácticos ha sido estudiada por Breger (1975) y Slovak (1978). En general, la incidencia de variabilidad en cúmulos es similar a la encontrada en estrellas de campo, esto es, aproximadamente un 36% de las estrellas observadas son *variables* δ Scuti detectables (Horan, 1979). Igualmente, la frecuencia de variabilidad parece ser independiente de la edad del cúmulo con tal de que sea lo bastante joven como para que la *franja de inestabilidad* se encuentre suficientemente poblada.

En los últimos años se han publicado diferentes estudios monográficos sobre las estrellas δ Scuti (p. ej., Breger, 1979; Eggen, 1979; Wolff, 1983) así como una gran cantidad de artículos entre los que, como los más generales, podemos citar Shibahashi (1987), Kurtz (1987), Breger (1989; 1990), Kurtz (1991) y Rodríguez *et al.* (1994). También cabe destacar la serie de artículos escritos en la pasada década por Tsvetkov (1985a, b; 1986a, b; 1988; 1989; 1990; 1993a, b) y Tsvetkov y Petrova (1993).

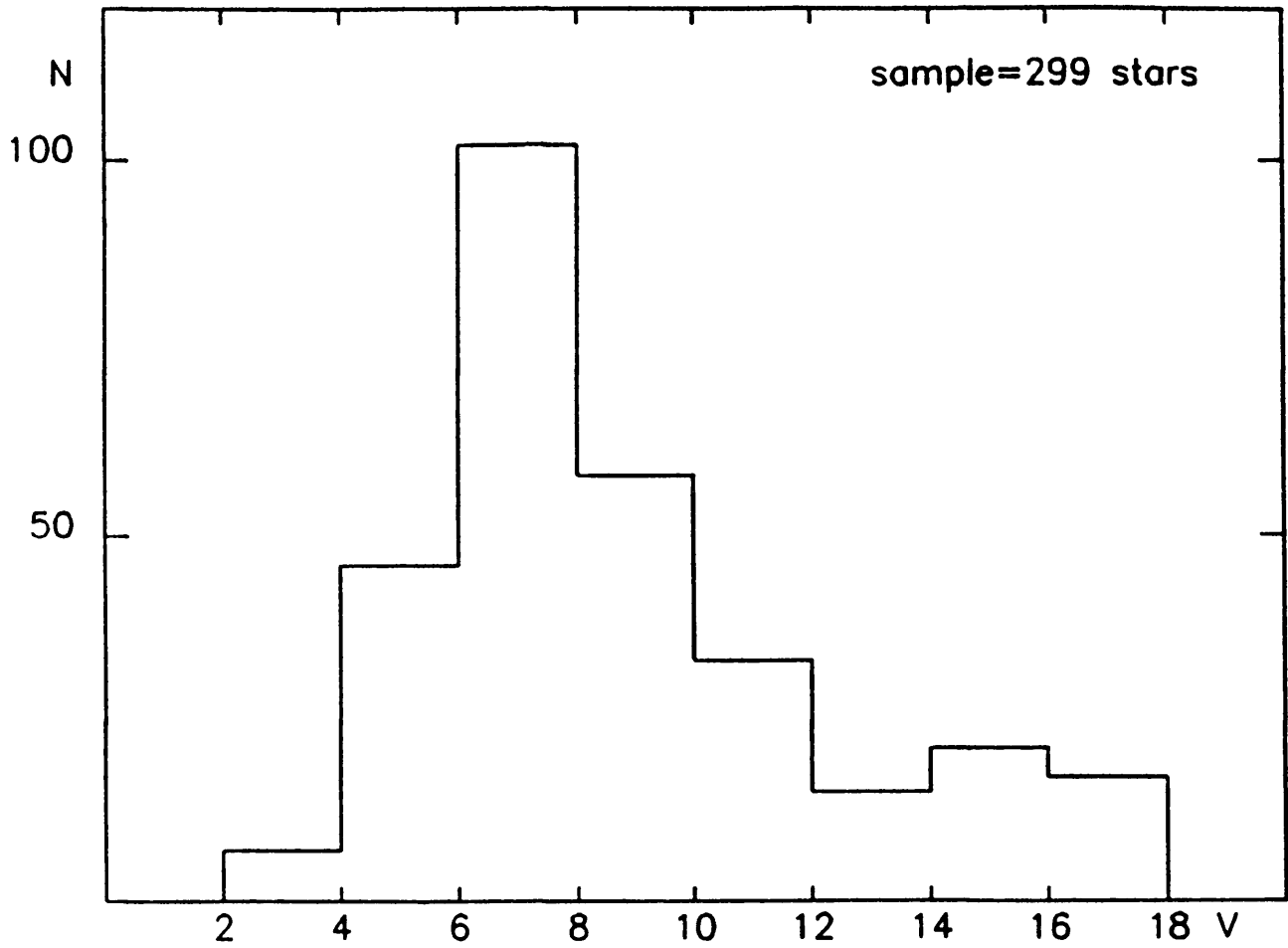


Figura 1.1

Distribución de estrellas δ Scuti según su variación en amplitud ΔV
(Rodríguez *et al.*, 1994).

1.1 Estrellas de tipo espectral A

Antes de estudiar aquellos parámetros que caracterizan la pulsación de las estrellas δ *Scuti* y puesto que un gran número de ellas son de tipo espectral A, citemos algunas características de este grupo, que aparecen resumidas en Wolff (1983). Según este autor, la masa típica de una estrella A0 es de $\sim 2.5M_{\odot}$ y de $\sim 1.5M_{\odot}$ para una A9, con unos radios entre 2.1 y 1.5 R_{\odot} . La velocidad de rotación promedio es $[v \sin i] \approx 120 \text{ km s}^{-1}$. Se han realizado, sin éxito, diferentes estudios encaminados a encontrar evidencias de rotación diferencial en estrellas de tipo espectral A. Igualmente, no se han encontrado evidencias de la existencia de campos magnéticos intensos en estrellas normales de tipo espectral A, estando por el contrario presentes en estrellas pertenecientes al llamado subgrupo de estrellas magnéticas A_p .

Tal y como Wolff (1983) señala, se podría pensar que las estrellas de tipo espectral A constituyen la categoría más simple en la clasificación estelar: no tienen anchas capas de convección, esto es, el transporte de energía se lleva a cabo, prácticamente en su totalidad, por radiación, el hidrógeno es la principal fuente de opacidad, la rotación es moderada y aquellos factores que podrían haber impedido la utilización de modelos de equilibrio termodinámico, como la presencia de líneas de emisión, ensanchamiento debido a turbulencia, variabilidad irregular y de período corto, son indetectables o mucho menos evidentes que en el resto de las categorías estelares. Sin embargo, las observaciones muestran lo contrario. De hecho, dos de cada diez estrellas A observadas presentan anomalías que pueden ser identificadas en espectros de baja resolución, aumentando esta proporción cuando se trabaja con espectros de alta resolución (Cowley *et al.*, 1969). Las estrellas de tipo espectral A con peculiaridades en sus espectros se clasifican en distintos subgrupos atendiendo a sus características: A_p , A_m , λ *Boo*, δ *Del*... Dos de estos subgrupos (A_m y δ *Delphini*) serán estudiados con más detalle en el siguiente apartado.

Por otro lado, incluso las estrellas de tipo espectral A catalogadas como normales distan mucho de formar un grupo homogéneo. Así por ejemplo, diferentes investigaciones han demostrado que estas estrellas presentan un considerable rango de abundancias. Sadakane (1981) estudió seis estrellas normales A calculando un factor 2 en la dispersión en abundancias de algunos elementos. Hill *et al.* (1993) determinaron las abundancias de 18 elementos de seis estrellas de tipo espectral A

con líneas estrechas encontrando una variación en la abundancia de hierro en un rango de aproximadamente 0.7 dex con correlación entre las variaciones en abundancias de hierro y las variaciones en abundancia para la mayoría de los elementos excepto el helio, que presenta una subabundancia aproximadamente constante con respecto al Sol, y el carbono, que muestra una anticorrelación con el hierro. Resultados similares pueden encontrarse en Adelman y Philip (1992) y Lemke (1989; 1990).

Citemos a continuación las características más importantes de dos de los subgrupos de estrellas A peculiares citados con anterioridad.

1.1.1 Estrellas metálicas A_m

Forman el grupo más numeroso de estrellas peculiares de tipo espectral A. Las estrellas metálicas A (las A_m y sus complementarias marginales, las $A_{m:}$) constituyen al menos el 15% de todas las estrellas A cerca de la *Secuencia Principal* (Smith, 1971) con un máximo de $\approx 50\%$ alrededor del tipo espectral A8 (Smith, 1973). Esta clase fue definida en un principio como la formada por aquellas estrellas en las que la línea K de Ca II es considerablemente más débil de lo que se esperaría al compararla con las restantes líneas espectrales (Titus y Morgan, 1940; Roman *et al.*, 1948). Conti (1970a, b) propuso una definición alternativa: "... El fenómeno A_m está presente en estrellas que tienen una subabundancia aparente de Ca (y/o Sc) y/o sobreabundancia aparente de los elementos del grupo del hierro y de los elementos pesados". Esta última formulación extiende esta clase desde estrellas A tardías y F hasta incluir también estrellas A tempranas. Otra característica importante de las estrellas A_m es que todas parecen pertenecer a sistemas binarios cercanos lo que origina fuertes interacciones debido a las fuerzas de marea. Estas fuerzas de marea producen un efecto de frenado en la velocidad de rotación hasta que el período de rotación y el período orbital coincidan, lo que explicaría el hecho de que todas las estrellas A_m presenten velocidades rotacionales bajas. Un trabajo fundamental sobre este aspecto de las estrellas A_m fue llevado a cabo por Abt (1961; 1965). En distintas campañas de observación tanto de estrellas A "normales" como de A_m , encontró que 22 de 25 estrellas A_m en su muestra eran binarias espectroscópicas con períodos menores que 100 días, y que sólo 17 de 55 estrellas normales en el mismo rango de tipos espectrales eran miembros de sistemas binarios espectroscópicos y, además,

ninguna de ellas con un período menor de 100 días. No obstante, otros autores han propuesto argumentos en contra de la hipótesis de que todas las estrellas A_m y ninguna de las normales de tipo espectral A sean miembros de sistemas binarios cercanos. Batten (1967) criticó el trabajo de Abt argumentando que de la muestra de 25 estrellas A_m , sólo se habían establecido claramente variaciones de la velocidad radial para 17 de ellas. Conti y Barker (1973) examinaron cinco estrellas en el cúmulo de Coma encontrando que sólo 2 de 5 estrellas A_m presentan variaciones en la velocidad radial. No obstante, la muestra es demasiado pequeña para cualquier análisis estadístico puesto que cualquier ángulo de inclinación desfavorable puede impedir la observación de variaciones en la velocidad radial.

Puesto que las estrellas A_m son estrellas pertenecientes a la *Secuencia Principal* que se encuentran quemando hidrógeno en sus núcleos, la composición peculiar que muestran no puede ser debida a ningún proceso nuclear. Watson (1970), Michaud (1970) y Smith (1971) fueron los primeros en intentar explicar la composición química anormal de estas estrellas recurriendo a procesos de difusión radiativa. Posteriormente, distintos investigadores han extendido estas ideas (e.g., Vauclair y Vauclair, 1982; van't Veer-Menneret, Coupry y Burkhart, 1985). Según esta teoría, las deficiencias de C, Ca, Sc y otros elementos resultan del ajuste gravitacional, mientras que las sobreabundancias de los elementos pesados son causadas por presión radiativa selectiva. Esta presión en exceso transporta determinadas especies hacia la parte superior de la atmósfera concentrándolas en la fotosfera. La razón de que los procesos de difusión existan en estrellas A_m y no en estrellas A normales se debe a que la difusión solamente aparece si no hay procesos de mezcla que lo impidan. Se sabe que las estrellas que rotan rápidamente no se encuentran en equilibrio estático, sino que en ellas se desarrollan corrientes lentas, las llamadas *corrientes de Eddington*, las cuales transportan material hacia el exterior de la fotosfera en las regiones polares y hacia el interior en la región ecuatorial, mezclando el material estelar e impidiendo, por tanto, el desarrollo de los procesos de difusión.

Igualmente, la teoría de la difusión permite explicar la ausencia de pulsación en estrellas A_m clásicas (Baglin, 1972; Breger, 1972): en una atmósfera estable, el helio tiende a hundirse debido a la gravedad, la cual no se equilibra con la presión de radiación. El contenido del helio en la zona de ionización del He II, que es el mecanismo fundamental para la pulsación (Sección 1.2), puede reducirse hasta el

punto que la estrella llegue a ser estable. Posteriormente, otros autores (Cox *et al.*, 1979; Saez *et al.*, 1981) han defendido la idea de que la coexistencia de pulsación y metalicidad, sugerida por el análisis de algunas observaciones de estrellas A_m marginales, puede explicarse dentro del marco del modelo de difusión. Según estos autores, si el ajuste gravitacional reduce el contenido de helio en la atmósfera estelar a $Y < 0.18$, entonces la capa de convección del He II desaparece permitiendo la aparición de las características metálicas propias de las estrellas A_m . El helio residual, no obstante, es suficiente para dar lugar a la pulsación. En un trabajo reciente, Wonnacott *et al.* (1994) estudiaron un conjunto de nueve estrellas en las que, según investigaciones preliminares, coexistían metalicidad y pulsación. Sin embargo, tras un análisis detallado, se observó que tres de ellas mostraban características de estrellas A_p siendo los campos magnéticos propios de este tipo de estrellas responsables de metalicidades anómalas; dos presentaban abundancias normales, en una de ellas no se observó la existencia de pulsación mientras que las tres restantes no muestran unos resultados concluyentes.

1.1.2 Estrellas δ Delphini

Distintos análisis de abundancia (Faraggiana *et al.*, 1971; Stickland, 1972; Burkhart *et al.*, 1980; van't Veer-Menneret *et al.*, 1985) han demostrado que existen estrellas en la *Secuencia Principal* con características de estrellas A_m . Estas estrellas se denominan δ Delphini y se definen como estrellas subgigantes y gigantes cuyas anomalías en abundancia son comparables a las de las estrellas A_m clásicas excepto en las abundancias de Ca y Sc, donde la deficiencia es menor o incluso nula (Jaschek *et al.*, 1987). Diversos estudios fotométricos han mostrado que las estrellas δ Delphini pueden ser también *variables* fotométricas, aunque la variabilidad no es un requisito para pertenecer a esta clase (Garrido *et al.*, 1980). Algunos autores han propuesto la hipótesis de que estas estrellas pueden ser consideradas como descendientes de las estrellas A_m (Kurtz, 1978). Sin embargo, este planteamiento presenta el problema de cómo explicar el cambio en la composición química para Ca y Sc. La teoría de la difusión también proporciona una explicación a este fenómeno: Michaud *et al.* (1976) afirmaron que la abundancia de calcio en la superficie es muy sensible a la posición de la zona convectiva, la cual depende en gran medida de la temperatura y del estado evolutivo de la estrella. Puesto que la zona convectiva sufre alteraciones durante la

evolución estelar, la abundancia de calcio sufrirá igualmente modificaciones.

Hauck (1986) realizó un estudio de 132 estrellas gigantes de tipos espectrales A–F a partir de sus propiedades en el sistema fotométrico de Ginebra, encontrando que el 36% de las estrellas en la muestra presenta un valor elevado del índice Δm_2 , lo que se traduce en una alta metalicidad. Este autor demostró también que no existen en la muestra observada gigantes con temperaturas inferiores a 6500 K y que presenten una metalicidad elevada. Este límite observacional concuerda con el límite teórico propuesto por Vauclair y Vauclair (1982): según estos autores, los procesos de difusión no tienen lugar en gigantes por debajo de esta temperatura puesto que para ellas el tiempo de difusión sería mayor que el tiempo de vida estelar.

Berthet (1992) examinó la relación entre la abundancia de calcio y el estado evolutivo de las estrellas A_m en tres cúmulos estelares. Tomando la magnitud V como un parámetro evolutivo asumiendo que en un cúmulo todas las estrellas tienen la misma edad, el autor encontró una correlación entre la abundancia de calcio y la magnitud V, demostrando que la deficiencia es menor para las estrellas más evolucionadas. Este resultado está de acuerdo con Berthet (1990a) quien demostró que las estrellas δ *Delphini* no muestran deficiencia de calcio. Si esta hipótesis es cierta, supondría que el número de sistemas binarios entre las estrellas δ *Delphini* debería ser el mismo que entre las estrellas A_m clásicas (el 95% según Berthet, 1992). Sin embargo, según este mismo autor, esta cuestión permanece todavía abierta debido al reducido número de estrellas δ *Delphini* conocidas.

1.2 Localización de las estrellas δ *Scuti* en el diagrama H–R

La Figura 1.2 muestra la posición en el diagrama H–R de todas las estrellas δ *Scuti* con fotometría $uvby\beta$ conocida (Rodríguez *et al.*, 1994). Los valores de M_v y $(b-y)_0$ se calcularon para cada estrella siguiendo el método descrito en López de Coca *et al.* (1990). En esta Figura se representa igualmente la *Secuencia Principal de Edad Cero* (que llamaremos ZAMS a continuación) (Philip y Egret, 1980) así como los límites observacionales de la *franja de inestabilidad*. El borde rojo (también denominado borde frío, que aparece a valores de $(b-y)_0$ menores) es el mismo que el descrito en Breger (1979) mientras que el borde azul (o borde caliente, que aparece

a valores de $(b - y)_0$ mayores) se encuentra desplazado hacia temperaturas mayores (aproximadamente 100 K) con respecto al adoptado en Breger (1979). Son cuatro las estrellas que han sugerido este desplazamiento: HD 16439, HD 19729, HD 90386 y HD 153747, las cuales aparecen representadas por cuadrados. Igualmente, tres variables *SX Phe* (*SX Phe*, *BL Cam* y *KZ Hya*) se representan con círculos. Hay que señalar que la calibración de M_v en el sistema $uvby\beta$ no puede aplicarse a estas estrellas, obteniéndose sus valores M_v de Nemec y Mateo (1990). Por otro lado, se puede observar que cinco estrellas aparecen más allá del límite rojo de la *franja de inestabilidad*. Se ha demostrado que una de ellas, HD 1097, es una estrella A_m y, por tanto, no pulsa, mientras que las restantes, HD 37819, HD 129494, HD 188136 y HD 195961 son estrellas δDel (Rodríguez *et al.*, 1994). Kurtz (1979b) demostró que el índice δc_1 es inadecuado para las estrellas δDel , proponiendo que estas estrellas poseen temperaturas y luminosidades más altas que las calculadas a partir de los índices fotométricos lo que situaría a estas cuatro estrellas dentro de la *franja de inestabilidad* (Kurtz 1979a; 1980; 1981).

Otros autores han señalado igualmente la existencia de *variables $\delta Scuti$* en el límite rojo de la *franja de inestabilidad* que parecen constituir una clase homogénea y cuyo comportamiento no se ha explicado satisfactoriamente por el momento. Krisciunas (1993) resumió las investigaciones realizadas sobre tres estrellas de este grupo: 9 Aur, HD 96008 y HD 164615. Todas ellas se caracterizan por mostrar largos períodos (p.e., 0.31 días para HD 96008), por lo que no es posible atribuir su comportamiento a pulsación en el modo fundamental o en sus armónicos, los cuales darían lugar a períodos de pulsación más cortos. Lo mismo sucede con los modos p no radiales, que producen períodos incluso más cortos que los del modo radial fundamental. No obstante, los modos g no radiales originan períodos más largos, por lo que podrían constituir una posible explicación (ver Sección 1.3 para la definición de los modos p y g). Mantegazza *et al.* (1994) añadieron dos nuevas estrellas a este grupo (HD 224638 y HD 224945) y señalaron una posible modulación debido a manchas fotosféricas como hipótesis a tener en cuenta junto con la anteriormente citada de los modos g no radiales. Handler (1994) descubrió un nuevo miembro de este grupo, GM Com, con la peculiaridad de estar situado sorprendentemente lejos de la *franja de inestabilidad* ($(b - y)_0 = 0.265$ y $M_v = 3.40$). El hecho de pertenecer al cúmulo de Coma, junto con no poseer una abundancia

metálica extremadamente alta ($\delta m_1 = -0.008$), hace que los valores calculados de M_v y $(b - y)_0$ se encuentren fuera de toda duda. Este autor cuestionó la hipótesis de los modos g no radiales para explicar el comportamiento de GM Com, señalando que, por su peculiar posición en el diagrama H-R, el mecanismo κ (que explicaremos a continuación) no es lo suficientemente importante como para producir pulsación, apuntando la segunda hipótesis (modulación debido a manchas) como más adecuada para esta estrella.

Por otro lado, cuatro estrellas aparecen más allá del borde azul de la *franja de inestabilidad*. Todas ellas se caracterizan por ser *variables de muy pequeña amplitud* (Rodríguez *et al.*, 1994). La extensión del límite azul de la *franja de inestabilidad* hacia valores cada vez más calientes ha sido estudiada por diversos autores: Schutt (1991; 1993) sugirió la existencia de variabilidad en HD 12389, una estrella de tipo espectral A0. Kuschnig *et al.* (1990) postularon igualmente la existencia de variabilidad en la estrella *ET And* de tipo espectral B9.

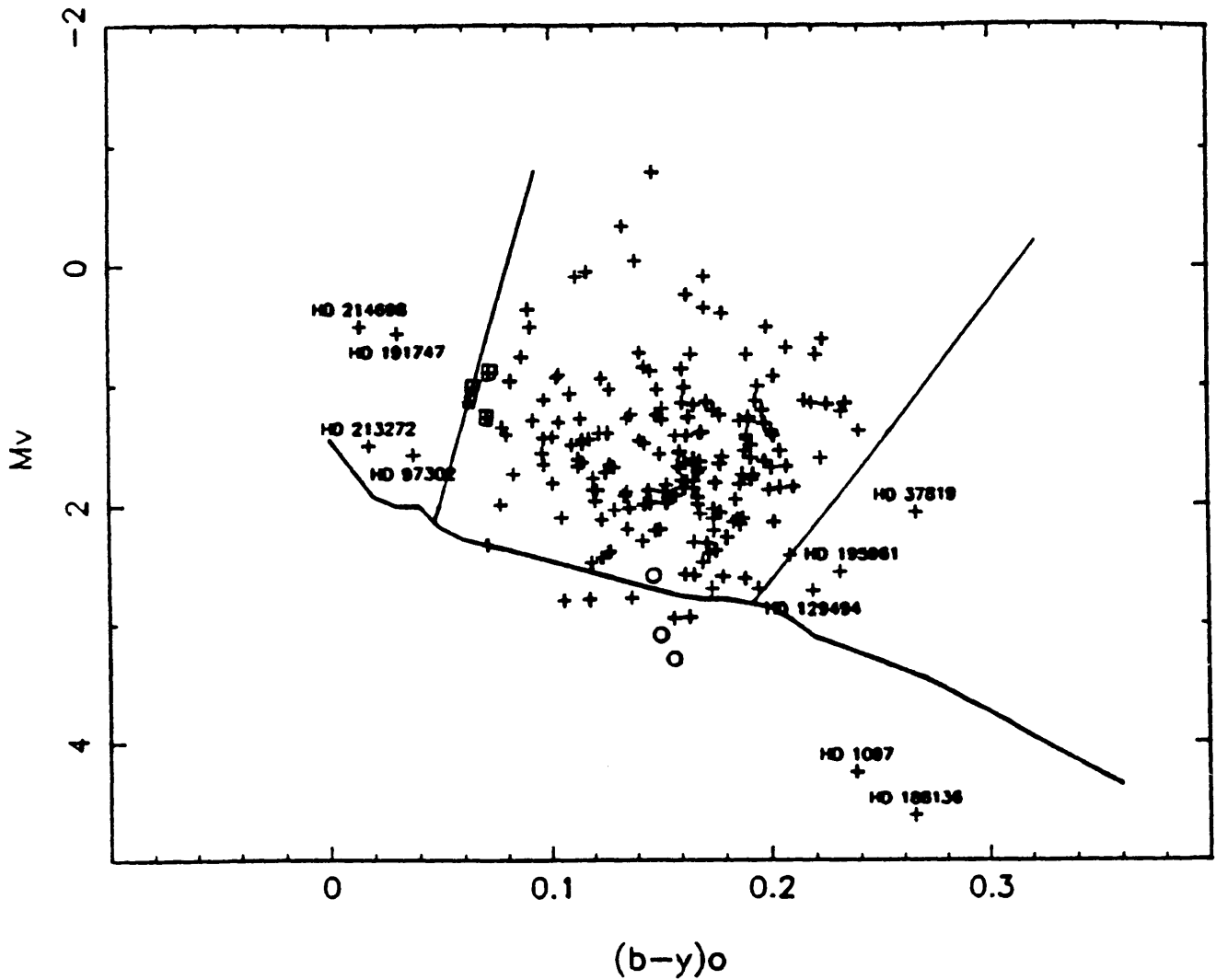
El hecho de que las estrellas δ Sct presenten tipos espectrales A-F (que se corresponde con un rango de temperaturas efectivas $8500 \text{ K} \geq T_{eff} \geq 6500 \text{ K}$) y magnitudes bolométricas absolutas $0.0^m \leq M_v \leq 3^m.0$ (correspondiendo al rango de luminosidades $5 \leq L/L_\odot \leq 80$) sugiere que son estrellas de $1.5\text{--}2.5 M_\odot$ en la ZAMS en una fase evolutiva *post-Secuencia Principal* en la que están quemando la capa de hidrógeno. Puesto que los parámetros que definen una estrella δ Scuti no dependen de características espectroscópicas, cualquier estrella perteneciente a los subgrupos citados en la Sección 1.1 puede ser una estrella δ Scuti. La Figura 1.3 ilustra la incidencia de variabilidad entre las estrellas de tipo espectral A normales. La incidencia de variabilidad en estrellas de tipo espectral A con espectros anómalos se resume en la Figura 1.4. Cerca de la *Secuencia Principal* hay una exclusión completa entre pulsación y metalicidad. No obstante, en esta Figura se puede observar la existencia de dos estrellas A_m marginales cerca de la *Secuencia Principal* que presentan variabilidad de baja amplitud. En las gigantes y subgigantes, la coexistencia de pulsación y metalicidad es bastante común (Sección 1.1.2).

La existencia de la *franja de inestabilidad* está relacionada con una característica estructural propia de las estrellas con una cierta temperatura superficial y luminosidad que permiten la aparición del llamado *mecanismo k* en la zona de ionización de helio. El tratamiento teórico de la pulsación en la región de la *franja*

de inestabilidad donde se localizan las estrellas δ Scuti fue estudiado por Petersen (1975) y, posteriormente, por Stellingwerf (1979). Una explicación esquemática y altamente simplificada de los complejos procesos físicos que tienen lugar es la que sigue (Wolff, 1983; Belmonte, 1989):

Durante la fase de máxima compresión, la atmósfera estelar se calienta. Sin embargo, en la zona de ionización de He II, la energía producida en dicha compresión no produce un aumento de la temperatura, sino que es absorbida en el proceso de ionización de He II a He III. Por otro lado, dos mecanismos impiden el flujo de radiación hacia la superficie estelar. Por un lado, la luminosidad no aumenta al permanecer la temperatura prácticamente constante. Por otro lado, la opacidad es mayor debido al gran número de electrones extra originados en el proceso de ionización. Este proceso se invierte una vez que el He II se encuentra ionizado en su mayor parte puesto que, mientras que el He II es altamente opaco a la radiación ultravioleta ($\lambda < 229 \text{ \AA}$) característica de temperaturas de $\sim 50000 \text{ K}$ propias de la región de ionización, el He III es transparente a la misma. Una vez que la radiación ultravioleta puede fluir libremente a través de la zona de ionización, la estrella se expande, la temperatura y la presión disminuyen y el He III se recombina con un electrón para formar He II. El proceso de expansión se ralentiza hasta el punto de que se invierte, empezando una nueva compresión de la estrella y con ella un nuevo ciclo de pulsación.

Puesto que todas las estrellas poseen zonas de ionización, deberán existir ciertas condiciones específicas para que unas estrellas pulsen y otras no. Dichas condiciones vienen dadas por los límites de la *franja de inestabilidad*: el borde rojo de la *franja de inestabilidad* marca el límite a partir del cual las estrellas poseen la zona de ionización del He II a tal profundidad que la presión de radiación no es suficiente para elevar las capas situadas sobre dicha zona de ionización. Igualmente, en este borde rojo, la convección juega un papel fundamental en la inhibición de la pulsación. Por su parte, el borde azul limita la región del diagrama H-R a partir de la cual el peso de las capas situadas sobre la zona de ionización es insuficiente para forzar la compresión.

**Figura 1.2**

Localización de las estrellas δ Scuti en el diagrama H-R. Las líneas discontinuas indican los bordes de la *franja de inestabilidad*. El borde rojo (frío) aparece para valores de $(b-y)_0$ menores mientras que el borde azul (caliente) se muestra para valores de $(b-y)_0$ mayores (Rodríguez *et al.*, 1994).

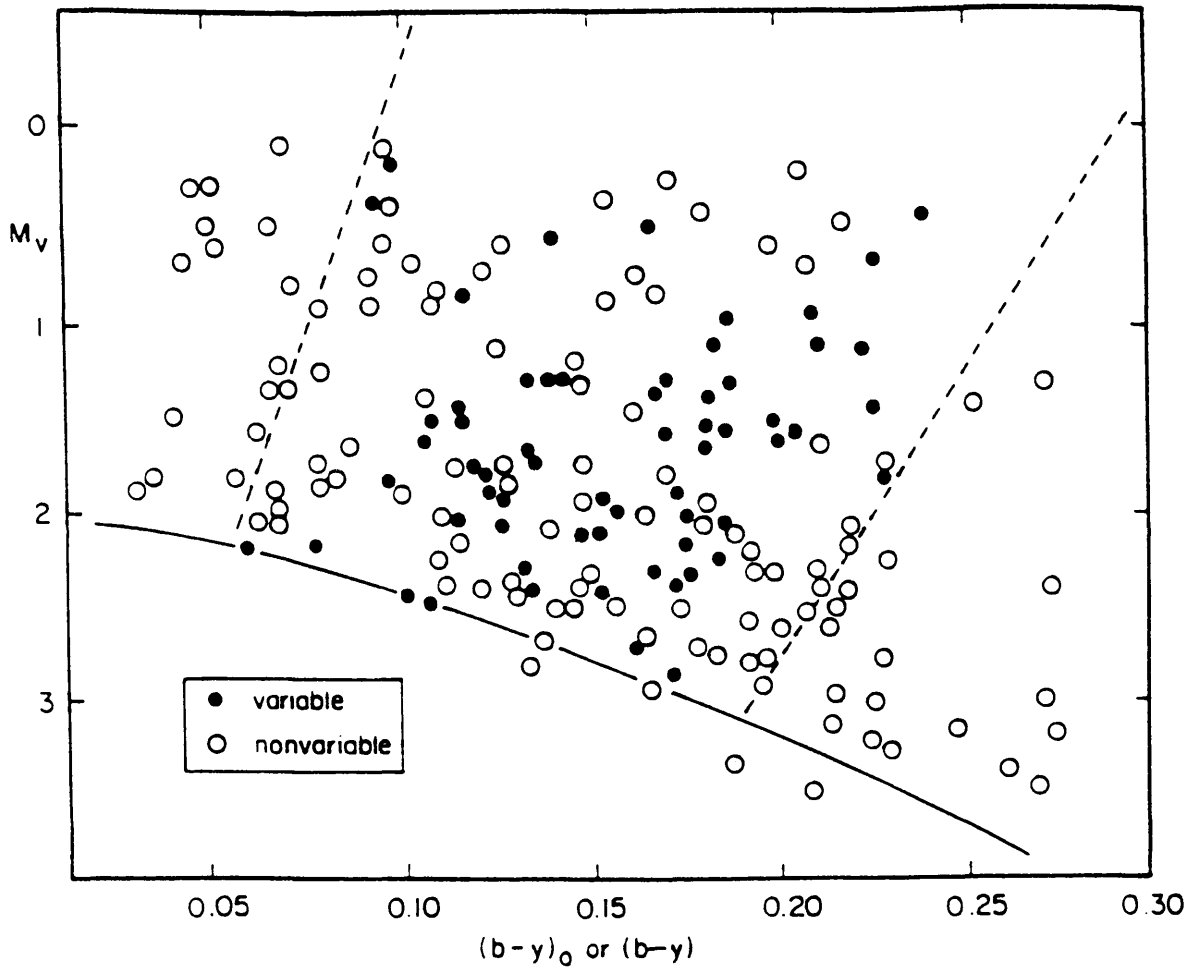


Figura 1.3

Incidenca de variabilidad en estrellas de tipos A-F "normales". Se observa que en la *franja de inestabilidad* se encuentran tanto estrellas *no variables* como *variables*. Se supone que las estrellas catalogadas como *no variables* presentan variabilidad por debajo de los límites detectables (Wolff, 1983).

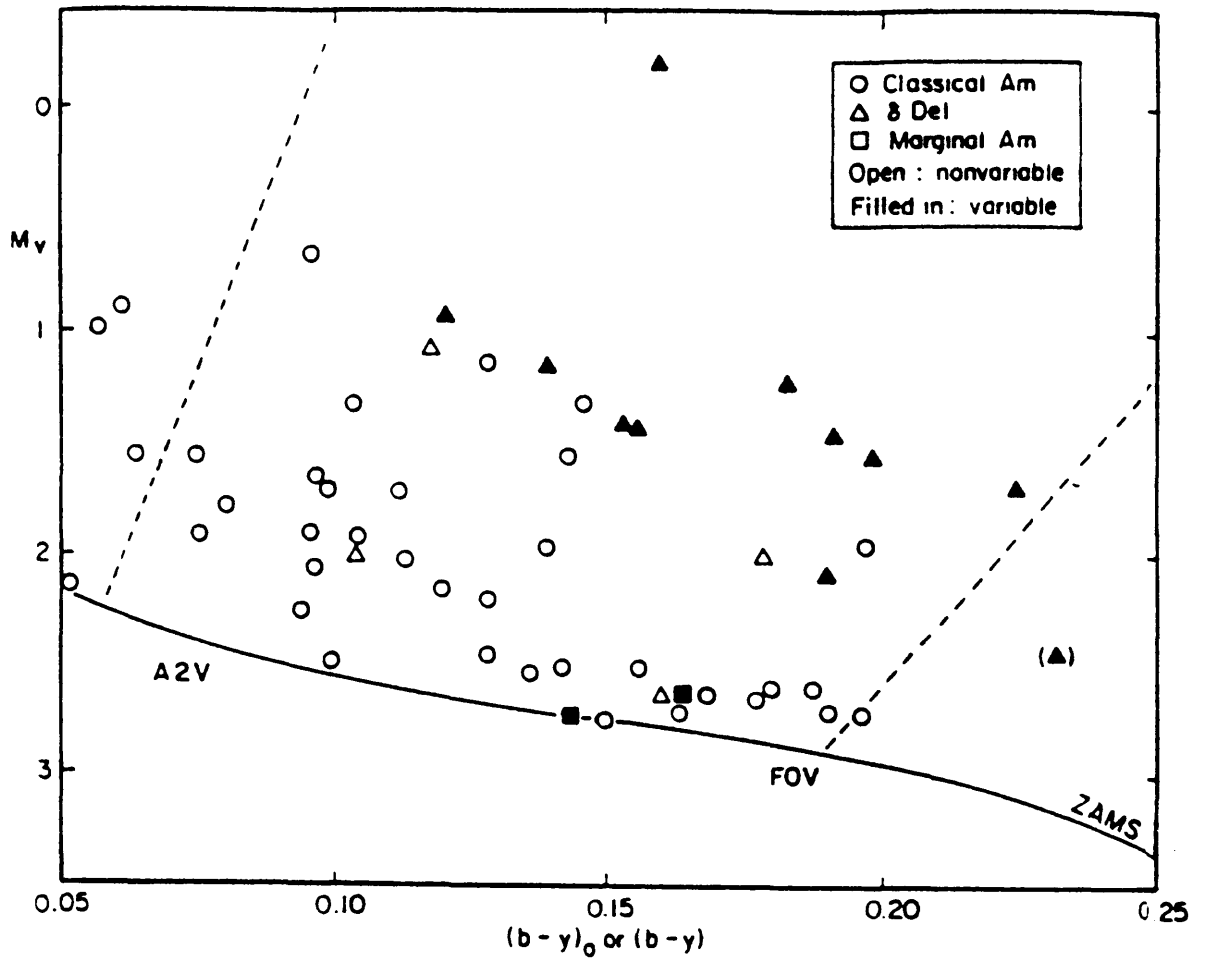


Figura 1.4

Incidencia de variabilidad entre las estrellas de tipos A–F con peculiaridades en sus espectros. Se observa que las estrellas A_m no pulsan mientras que, por el contrario, la pulsación es un fenómeno común entre las estrellas A_m marginales y las δ Del (Wolff, 1983).

1.3 Teoría de oscilaciones estelares

1.3.1 Introducción

En la descripción del estado físico de una estrella es necesario conocer algunos parámetros tales como la luminosidad, masa y radio. Con estos parámetros se pueden construir modelos teóricos para obtener la densidad, temperatura y presión, entre otras magnitudes, en función del radio estelar. La eficiencia de estos modelos solamente se puede comprobar mediante los valores de estas magnitudes en la fotosfera estelar cuyo espesor viene a ser 1/1000 del radio total. La cuestión que se plantea, por tanto, es saber si existen otras magnitudes observables que proporcionen información de la estructura interna de la estrella.

Se sabe que cuando una estructura en equilibrio es excitada al suministrarle una cierta cantidad de energía, tal estructura empieza a oscilar. En el caso de las estrellas, las oscilaciones se entienden como movimientos de expansión y contracción que pueden afectar o a la estrella entera o a una parte de la estructura estelar. Estas oscilaciones producen variaciones en el flujo de energía emitido por la estrella, en la temperatura superficial y en la velocidad de expansión y contracción de las capas externas de la estrella. Son tres los parámetros que definen una oscilación: la frecuencia (número de oscilaciones por unidad de tiempo y que depende de la naturaleza del objeto excitado), la amplitud (separación máxima de la posición de equilibrio) y la fase (que proporciona información sobre el estado de la onda en un momento dado).

1.3.2 Modos de oscilación

Una onda puede, bajo ciertas condiciones, sufrir reflexiones en dos capas de la estrella, interfiriendo consigo misma y dando lugar a ondas estacionarias confinadas en la cavidad resonante. En general, la onda después de la segunda reflexión no se encontrará en fase con la onda inicial puesto que la distancia entre las dos reflexiones no se corresponderá con un número entero de longitudes de onda y la onda interferirá destructivamente consigo misma. Sin embargo, del mismo modo existirán ondas con longitudes de onda tales que interferirán constructivamente. Estas ondas se llaman **modos de oscilación** o simplemente **modos**. Para una cierta cavidad existen, en

principio, infinitas longitudes de onda que satisfacen la condición de modo las cuales vienen dadas por la ecuación:

$$\lambda = 2 \times W/n \quad (1.1)$$

siendo W el espesor de la cavidad y n un entero. Las resonancias producidas por los modos de oscilación se detectan en la superficie como desplazamientos cíclicos de las regiones. Estos desplazamientos se pueden escribir, para un modo dado y en un sistema de coordenadas esféricas, como (Unno *et al.*, 1989):

$$\Delta \mathbf{r}(r, \theta, \varphi, t) = R_e \{ [\xi_r(r) Y_l^m a_r + \xi_h(r) \{ \partial Y_l^m a_\theta / \partial \theta + \partial Y_l^m a_\varphi / \sin \theta \partial \varphi \}] e^{i\omega t} \} \quad (1.2)$$

donde a_r , a_θ , a_φ son los vectores directores unitarios en cada dirección, ξ_r , ξ_h son las funciones propias de los desplazamientos en la dirección radial y horizontal, respectivamente, θ es la colatitud, φ es el ángulo de azimut, ω es la frecuencia angular y t es el tiempo. Debido a la falta de resolución espacial cuando se observa una estrella, el único modo claramente detectable es el modo radial, el cual produce variaciones en la componente radial de la velocidad de la siguiente forma (Unno *et al.*, 1989):

$$R(r, \theta, \varphi, t) = V_{n,l}(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi, t) \quad (1.3)$$

donde

$$Y_l^m(\theta, \varphi, t) = P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi - 2\pi\nu t) \quad (1.4)$$

son los armónicos esféricos de grado l y ν es la frecuencia asociada al modo de oscilación. De las ecuaciones (1.2), (1.3) y (1.4) se deduce que un modo se caracteriza por tres números enteros: n , l , m ; n indica el número de nodos (ceros o regiones que no se apartan de su posición de equilibrio) en el desplazamiento radial desde el centro de la estrella a la superficie. Cuando $n=0$, el modo se denomina *modo fundamental*, si $n=1$ *primer armónico*, si $n=2$ *segundo armónico*... El número l , que toma valores $0, 1, 2, \dots, n$ informa sobre el número de regiones que no sufren ninguna modificación en la superficie estelar (líneas nodales). El número m , con valores entre $-l$ y $+l$, indica el número de nodos en el ecuador. El modo $n=0$, $l=0$ se llama *modo fundamental radial* y se encuentra relacionado con el período fundamental Π con el que las estrellas se expanden y contraen alternativamente como un todo y que viene dado por la siguiente ecuación:

$$\Pi(\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot)^{1/2} = Q \quad (1.5)$$

donde $\bar{\rho}$ y $\bar{\rho}_{\odot}$ son las densidades promedio de la estrella y del Sol respectivamente y Q es la constante de pulsación (Cox, 1980).

En el interior estelar, se pueden distinguir tres tipos de fuerzas: el gradiente de presión, la gravedad y la fuerza magnética. Dependiendo de si estas fuerzas actúan de forma individual o simultáneamente, se producirán diferentes tipos de respuesta oscilatoria. En general, los modos se denominan **modos acústicos (modos p)** cuando la fuerza restauradora es la presión, **modos gravitatorios (modos g)** si es la gravedad la que actúa y **ondas de Alfvén** si es la fuerza magnética.

Los **modos p** se caracterizan porque sus frecuencias se encuentran entre la frecuencia de corte acústica (más allá de la cual la onda no se reflejaría en la superficie) y la frecuencia de Brunt-Vaisala que corresponde a la frecuencia máxima con que una burbuja de gas oscila adiabáticamente en el interior estelar. Los modos p aumentan su frecuencia con n y l y se propagan casi verticalmente en la dirección radial de la estrella. Para un mismo número radial n , los modos oscilan en capas cada vez más externas de la estrella a medida que l aumenta (Belmonte *et al.*, 1990) (Figura 1.5).

Por el contrario, los modos g vibran casi horizontalmente, esto es, perpendicular a la dirección radial con frecuencias que decrecen a medida que n aumenta. En las estrellas en equilibrio hidrodinámico, estos modos están confinados en el núcleo, desapareciendo prácticamente en la zona de convección, lo que dificulta enormemente su detección al llegar a la superficie con amplitudes muy bajas (Belmonte *et al.*, 1990).

Una característica básica que identifica el espectro de frecuencias de una estrella es que los modos p se encuentran equiespaciados en frecuencia. Para éstos, la diferencia entre las frecuencias de dos modos con igual l y valores consecutivos de n (n , $n+1$) es constante. Por otra parte, dos modos con valores de n consecutivos y que difieran en 2 en el valor de l (n , $l+2$ y $n+1$, l) tendrán frecuencias muy próximas en su espectro, con un comportamiento similar desde la superficie hasta los puntos donde son reflejados. Por lo tanto, la diferencia, muy pequeña aunque medible en algunos casos, ofrece información sobre los puntos de reflexión más internos que, para valores pequeños de l , están localizados en el núcleo estelar. Los modos g están también igualmente espaciados no en frecuencia, sino en período variando la separación promedio según el grado del modo.

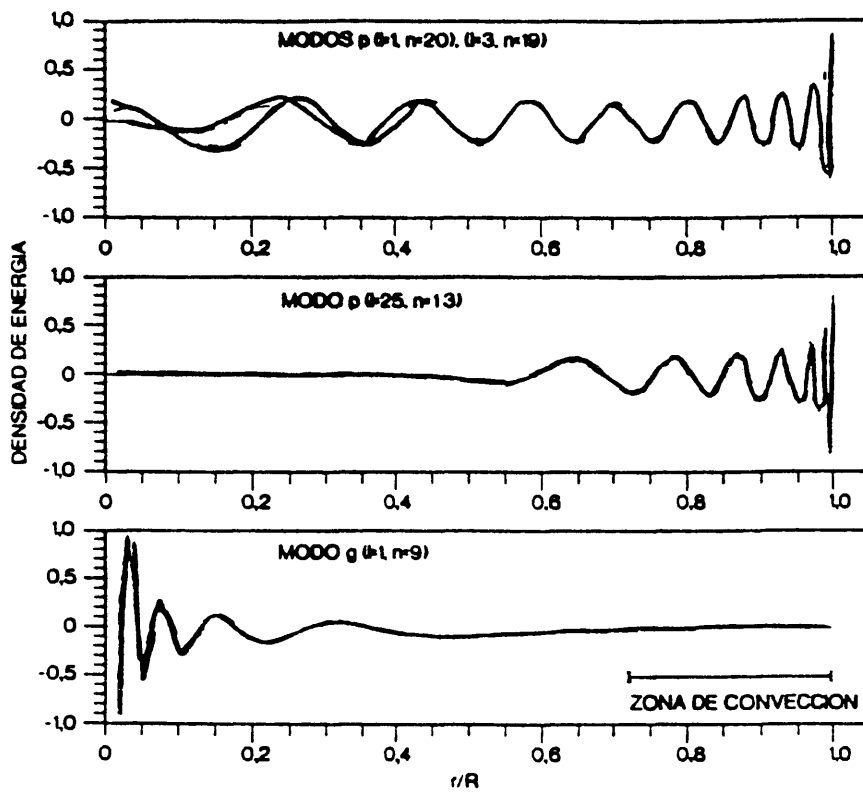


Figura 1.5

Propagación de los modos de oscilación según su naturaleza. (Belmonte 1990)

1.3.3 Determinación de la relación período-luminosidad-color

Tal y como se ha comentado, los modos de pulsación se producen por un fenómeno de resonancia, en donde el período fundamental Π viene determinado por el tiempo que invierte la onda en ir desde el centro de la estrella hasta la superficie y vuelta hasta el centro (Böhm-Vitense, 1989):

$$P \sim 2R/C_s \quad (1.6)$$

donde C_s es la velocidad del sonido cuyo valor viene dado por

$$C_s = \sqrt{\gamma P_g / \rho} \quad (1.7)$$

donde

$$\gamma = C_p / C_v \sim 5/3 \quad (1.8)$$

para un gas monoatómico, siendo C_p y C_v los calores específicos a presión constante y a volumen constante respectivamente.

La condición de equilibrio exige que en todo punto de la estrella la presión de radiación debe estar compensada con el peso del material estelar que se encuentra por encima de él. Para el centro de la estrella, esta condición viene dada por

$$P_g \approx \bar{\rho} \cdot R \cdot \bar{g} \approx \bar{\rho} \cdot R \cdot GM/R^2 = \bar{\rho} GM/R^2 \quad (1.9)$$

donde G es la constante de gravitación, M la masa de la estrella, $\bar{\rho}$ es la densidad promedio y $\bar{\rho} \cdot R$ es la masa de una columna de 1 cm^2 de sección. Por tanto:

$$\bar{P}_g / \bar{\rho} \approx GM/R \quad (1.10)$$

encontrando un período de

$$P \sim 2R / \sqrt{\gamma GM/R} \sim (2/\sqrt{\gamma G}) \cdot \sqrt{R^3/M} \quad (1.11)$$

ó

$$P \sim (2/\sqrt{\gamma G}) \cdot (1/\sqrt{\rho}) \cdot \sqrt{3/4\pi} \quad (1.12)$$

ó

$$P \sim (2/\sqrt{\gamma \cdot 6}) \cdot (\sqrt{3/4\pi}) \cdot \rho^{-1/2} \quad (1.13)$$

ó

$$P = \text{const} \rho^{-1/2} \quad (1.14)$$

donde la constante se denomina *constante de pulsación* y se representa por Q . Esta última ecuación explica la *relación período– luminosidad* encontrada primeramente para las *Cefeidas*: cuanto mayor es la luminosidad, mayor es el radio, menor es la densidad y, por tanto, mayor el período.

1.4 Determinación de los modos de pulsación

1.4.1 Modos de pulsación radial

Existen diferentes métodos para el cálculo de los modos de pulsación radial de las estrellas δ *Scuti*. Tsvetkov (1985a) utilizó dos de ellos basados en la magnitud bolométrica absoluta de las estrellas y en la constante de pulsación Q : a partir de la ecuación (1.5), este autor obtuvo la siguiente expresión:

$$M_{bol,n} = A_n \log P + B_n \log T_{eff} + C_n \quad (1.15)$$

donde n indica el modo de pulsación ($n = 0$, modo fundamental; $n=1$, primer armónico...) y los coeficientes A,B,C dependen del modo de pulsación. Stellingwerf (1979) obtuvo teóricamente

$$\log P = -0.29 M_{bol} - 3.23 \log T_{eff} + C \quad (1.16)$$

donde C toma los valores 11.96, 11.85 y 11.76 para los tres primeros modos radiales. En la práctica, el período y la temperatura efectiva se pueden calcular a partir de las observaciones, mientras que la magnitud bolométrica absoluta se puede estimar utilizando la magnitud bolométrica visual (Breger, 1979) junto con la corrección bolométrica dada por Morton y Adams (1968) ($-0^m.04 \leq B.C. \leq 0^m.00$). Por tanto, comparando las cuatro magnitudes bolométricas "teóricas" ($n=0,1,2,3$) con el valor observado, se puede estimar el modo de pulsación de la estrella.

El segundo método ha sido también utilizado por otros autores (e.g. Breger y Bregman, 1975; Antonello y Pastori, 1981). Consiste en determinar la constante de pulsación "observada" para una determinada estrella a partir de la expresión que

relaciona dicha constante con el período, la gravedad, la magnitud bolométrica y la temperatura.

$$\log Q = A + B \log P + C \log g + D M_{bol} + E \log T_{eff} \quad (1.17)$$

La expresión anterior aparece calibrada en López de Coca *et al.*(1990):

$$\log Q = -6.454 + \log P + 0.5 \log g + 0.1 M_{bol} + \log T_{eff} \quad (1.18)$$

Comparando el valor "observado" de Q con los valores teóricos correspondientes a cada modo, Breger y Bregman (1975) encontraron que, para estrellas más frías que 7800 K, la pulsación ocurre en el modo fundamental mientras que las estrellas más calientes pulsán en el primer y segundo sobretonos.

Breger (1990) calculó el error asociado a la constante de pulsación Q a partir de los errores observacionales, obteniendo un valor del 18%, lo que implica que en algunas ocasiones sea difícil distinguir entre el período fundamental radial y el primer armónico.

Un método más preciso se puede utilizar cuando se han determinado al menos dos períodos basado en comparaciones entre los cocientes de los períodos observados y los períodos teóricos (López de Coca *et al.*, 1990).

1.4.2 Modos de pulsación no radial

En general, la determinación de los modos de pulsación no radiales de una estrella solamente es posible si se cuenta con un número suficiente de observaciones. Así, por ejemplo, Kurtz (1980) encontró en HD 31908 tres frecuencias equiespaciadas que fueron atribuidas a una pulsación no radial. Sin embargo, el cociente P_2/P_1 entre las dos frecuencias más importantes se encuentra tan próximo al cociente predicho para el modo fundamental y el primer armónico en pulsación radial que, si la tercera frecuencia no hubiera sido medida, lo que hubiera ocurrido si su amplitud hubiese sido un factor dos menor o el nivel de ruido un factor dos mayor, HD 31908 hubiera sido identificada como una estrella pulsante de modo radial. Llegados a este punto, la cuestión que se plantea es: ¿Cómo saber cuántas observaciones son necesarias para detectar modos no radiales? En principio, sería conveniente utilizar métodos alternativos que permitiesen diferenciar entre pulsación radial y no radial.

Balona y Stobie (1979) desarrollaron uno de estos métodos basado en la dependencia de la diferencia de fase entre la curva de color B-V y la curva de luminosidad V con el modo de oscilación. De acuerdo con esto, no sólo es posible saber si la pulsación es radial ($l=0$) o no radial ($l \neq 0$) sino también distinguir entre los modos no radiales $l=2$, $l>4$ y l impar.

Garrido *et al.* (1990) describieron un método de discriminación modal basado en la utilización de fotometría Strömgren. Dziembowski (1977) y Watson (1988) habían demostrado que las fases relativas entre las variaciones de la temperatura y la gravedad producían distintos desfases en las bandas fotométricas. Garrido *et al.* (1990) demostraron que son las bandas (v-y) y (b-y) las mejores indicadores de dicho desfase, permitiendo la distinción entre pulsación radial y no radial de bajo orden.

Por otro lado, las variaciones en los perfiles de las líneas se pueden utilizar para determinar el modo de oscilación, basándose en la idea de que las pulsaciones no radiales se caracterizan por producir cambios pequeños en la velocidad radial pero cambios importantes en la anchura de la línea y en su simetría. Smith *et al.* (1978) fueron los primeros en usar esta técnica, posteriormente mejorada por Balona (1986), el cual realizó la identificación de los modos y la de otros parámetros, como la velocidad de rotación y la inclinación del eje de rotación, sin necesidad de modelar el perfil de la línea, sino basándose en los momentos estadísticos de las funciones que caracterizan al mismo (Figura 1.6).

1.5 Estabilidad de los modos de pulsación

Las variaciones de las estrellas δ Scuti se encuentran en el rango de 30 minutos a 6 horas (Breger, 1979). Cuando se estudia la curva de luz de una δ Scuti se observa a menudo que tanto las amplitudes como los períodos varían. En principio, estas variaciones fueron atribuidas a causas externas y no a procesos intrínsecos a la pulsación. Así, por ejemplo, LeContel *et al.* (1974) atribuyeron la complejidad de las curvas de luz a efectos no lineales en la atmósfera, en particular a interacciones entre pulsación y convección. Del mismo modo, Smyth *et al.* (1975) y Morguleff *et al.* (1976) plantearon hipótesis similares.

No obstante, Shobbrook y Stobie (1974) y Balona y Stobie (1980) consiguieron

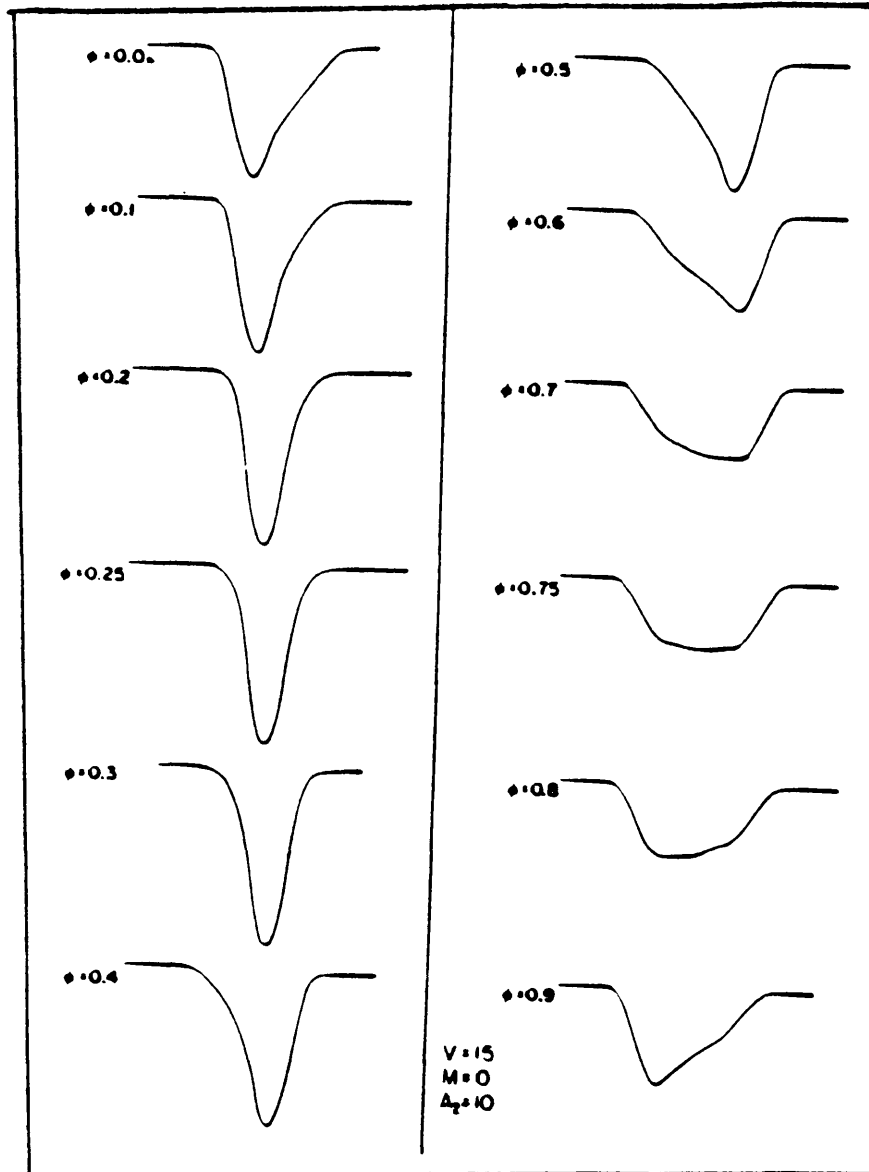


Figura 1.6

Variación del perfil de línea en presencia de un modo sectorial cuadrupolar ($l=2, m=2$) (Smith *et al.*, 1978).

identificar tres frecuencias estables en el análisis frecuencial de la curva de luz de 1 Mon. La existencia de frecuencias estables para 1 Mon, ya propuesta por Fitch (1976), fue confirmada en observaciones subsiguientes (Warman y Pena, 1978; Kurtz, 1980). Sin embargo, en general, el problema de la estabilidad de los modos de pulsación excitados todavía permanece abierto con dos posibles hipótesis:

Paparó y Kóvacs (1984) analizaron 43 horas de fotometría de HR 4684, sugiriendo que los periodogramas de sus datos corroboraban el argumento de que las amplitudes de las frecuencias de pulsación pueden cambiar significativamente en una escala de tiempo incluso de días, sugiriendo que el acoplamiento no lineal entre modos resonantes podría ser la causa de dichos cambios. Sin embargo, Antonello *et al.* (1985), analizando otro conjunto de datos de HR 4684, encontraron tres frecuencias estables en la curva de luz de dicha estrella.

Existe un argumento que concuerda con la idea de que algunas estrellas δ Scuti pueden pulsar en modos con tiempos de vida cortos: existe consenso en aceptar que los modos de oscilación solar de 5 min. tienen tiempos de vida de unas pocas semanas, por lo que se podría pensar que lo mismo podría ocurrir en las estrellas δ Scuti (Kurtz, 198). No obstante, las amplitudes de los modos de pulsación observadas en las estrellas δ Scuti son órdenes de magnitud mayores que las amplitudes de la oscilación solar, por lo que es muy posible que el mecanismo involucrado sea diferente. Matthews, Kurtz y Wehlau (1987) analizaron la curva de luz de la estrella HD 60435 (A_p , oscilador rápido), sugiriendo que ciertos modos podrían tener tiempos de vida aproximadamente de una semana, lo que llevaría a pensar que el mismo comportamiento es posible en las δ Scuti. Sin embargo, se han descubierto otras estrellas A_p osciladores rápidos que presentan frecuencias estables a lo largo de varios años.

Kurtz (1987) sugirió que con suficientes datos es posible encontrar períodos estables en todas las δ Scuti, que solamente cambiarían en escalas de tiempo evolutivas. Para contar con un número suficiente de datos es preciso realizar campañas coordinadas en varios continentes para evitar las periodicidades día-noche, durante un tiempo que normalmente puede oscilar entre dos y cuatro semanas.

Una de las estrellas δ Scuti cuya curva de luz ha sido mejor estudiada es 4 CVn. Campañas de observación en distintos continentes, junto con un detallado análisis de las observaciones publicadas con anterioridad, proporcionaron 114 noches

de datos fotométricos entre 1966 y 1984 (Breger, 1990). Se identificaron un total de siete frecuencias, cuya presencia fue confirmada al analizar independientemente conjuntos de datos de distinta longitud.

Más sorprendente, incluso, que el elevado número de frecuencias identificadas fue el descubrimiento de variaciones seculares en las amplitudes de las mismas (Figura 1.7). En esta Figura se observa como las variaciones en amplitud son apreciables en intervalos de tiempo tan cortos como una década. La Figura 1.8 muestra la estabilidad de los períodos principales de 4 CVn desde 1966 a 1984. Se puede observar cómo estos períodos permanecen estables con una variación secular de $(1/P)dP/dt = -11 \times 10^{-7}$ y $-30 \times 10^{-7} \text{ años}^{-1}$, respectivamente.

Breger (1990) intentó conciliar las hipótesis anteriormente expuestas sobre las variaciones en las frecuencias de los modos de pulsación mediante las siguientes proposiciones.

- Un elevado número de períodos correspondientes a diferentes modos p son excitados simultáneamente. Las amplitudes de la pulsación para los distintos modos pueden diferir de manera importante de unos a otros, por lo que puede darse el caso de que no todos puedan ser observados al mismo tiempo.
- Las amplitudes de estos modos p pueden variar en escalas de tiempo de un año o más. En algunos casos, a lo largo de cinco años no se pueden observar variaciones en amplitud, mientras en otros casos se pueden apreciar cambios significativos en dos años.

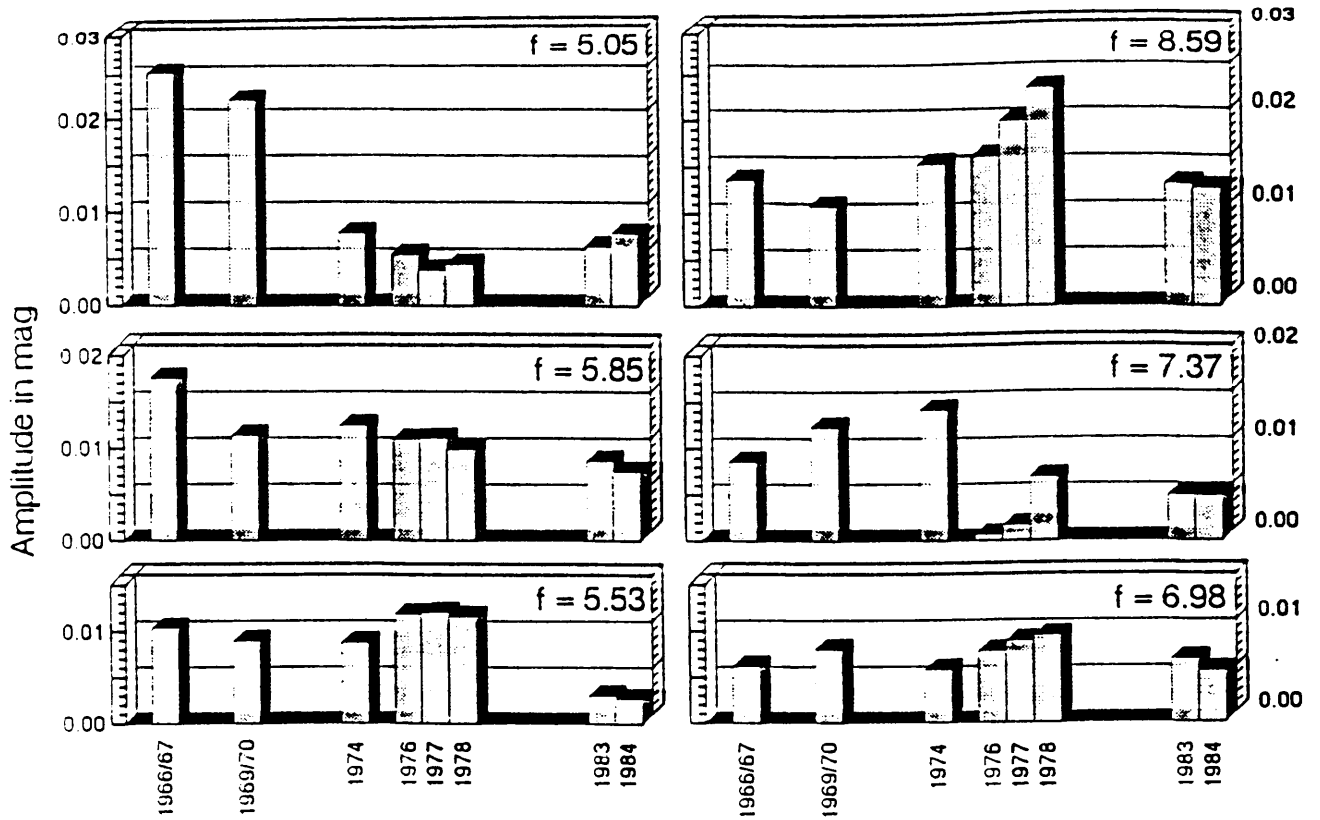


Figura 1.7

Variaciones anuales en la amplitudes de las frecuencias de $4 CVn$ (Breger, 1990).

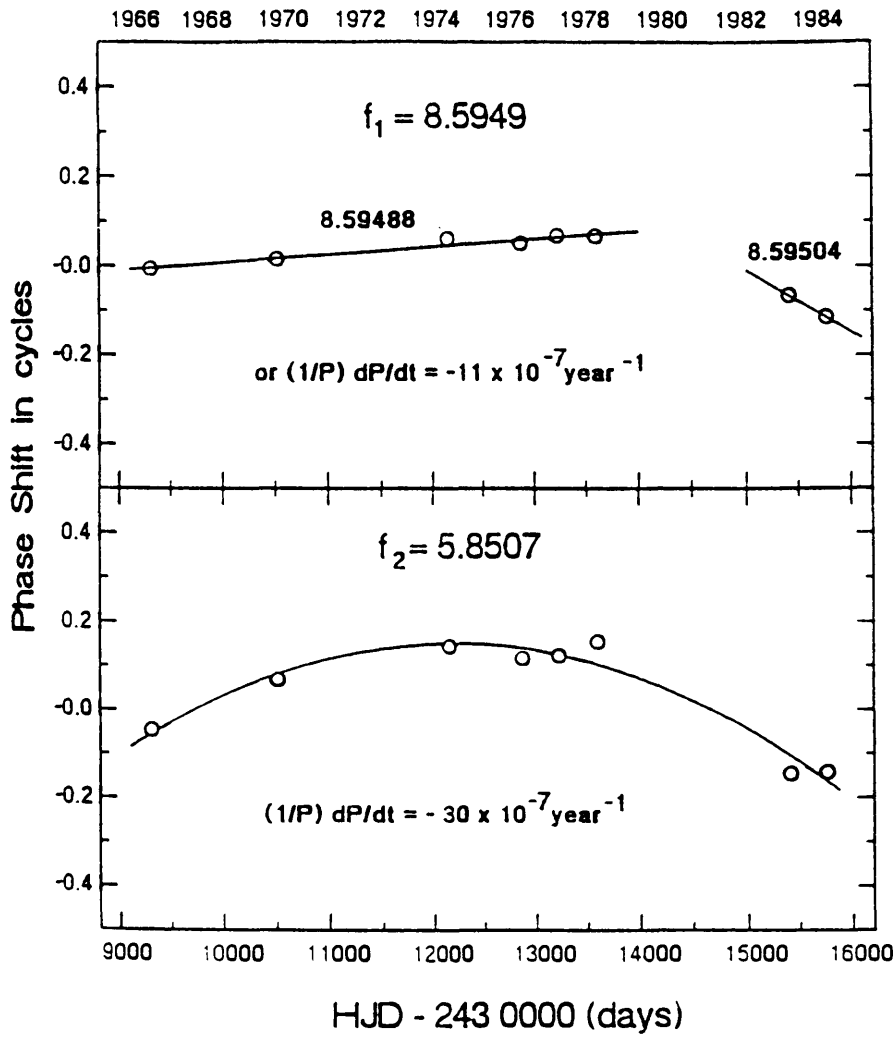


Figura 1.8

Estabilidad de los períodos de oscilación de $4 CVn$ (Breger, 1990).

1.6 Variabilidad de los períodos y estado evolutivo

Los cortos períodos de las estrellas δ Scuti permiten la determinación observacional de cambios evolutivos de los mismos en intervalos de tiempo tan cortos como una o dos décadas, lo que constituye un poderoso método de estudio de la eficiencia de las trazas evolutivas teóricas, al menos en la región del diagrama H-R abarcada por la *franja de inestabilidad*. Puesto que la *relación período-luminosidad-color* (1.15) es válida para las estrellas en distintos estados evolutivos, también deberá serlo para una estrella a lo largo de su etapa evolutiva. Una variación en T_{eff} y M_{bol} da lugar a un cambio en el período dado por (Breger, 1990):

$$1/P dP/dt = (-0.3/M_{bol})dM_{bol}/dt - (3/T_{eff})(dT_{eff}/dt) - (0.5/M)dM/dT + dQ/Q dt \quad (1.19)$$

Pasinetti *et al.* (1990) estudiaron la pérdida de masa postulada por Willson *et al.* (1987) a partir de observaciones en el ultravioleta de un conjunto de estrellas δ Scuti sin encontrar ningún indicio de tal fenómeno. Igualmente, King (1991) estudió la posible pérdida de masa y su relación con las estrellas deficientes en litio deduciendo un valor de pérdida de masa de $M \leq 10^{-10} M_{\odot} \text{ años}^{-1}$. Por tanto, la influencia del término debido a pérdida de masa en (1.19) es prácticamente nula y puede eliminarse.

Para estrellas δ Scuti con pulsación radial, el cambio en el valor de la constante de pulsación es mucho menor que las variaciones en M_{bol} y T_{eff} por lo que el término $(dQ/Q)dt$ puede despreciarse (Garrido, 1994). Aunque Fitch (1981) supuso que dicha simplificación es también válida para estrellas con modos de pulsación no radial, Dziembowski *et al.* (1990) sugirieron lo contrario, argumentando que el estudio de Fitch (1981) se basa en condiciones de contorno erróneas. En el caso de la pulsación no radial es necesario tener en cuenta el fenómeno de "*avoided crossing*" (Unno *et al.*, 1989), causado por la interacción de dos oscilaciones: Aizenman *et al.* (1977) mostraron la secuencia evolutiva de los modos de pulsación para una estrella de $16 M_{\odot}$ y la influencia del *avoided crossing* en la misma.

Breger (1990) compendió toda la información existente sobre variaciones evolutivas en los períodos de estrellas δ Scuti, dividiendo a éstas en tres grupos:

- **Estrellas de Población I próximas a la Secuencia Principal:** Una propiedad común a la mayoría de las estrellas en la *Secuencia Principal* es el aumento del radio predicho por la teoría de evolución estelar, causado por un aumento de la luminosidad y una disminución de la temperatura lo que implica un aumento del período. Esta hipótesis, ya postulada por Andreasen, Hejlesen y Petersen (1983), ha sido comprobada observacionalmente obteniéndose unos valores de $(1/P)dP/dt$ que oscilan desde 10^{-10} años⁻¹ para estrellas cercanas a la *Secuencia Principal*. No obstante, aunque teoría y observaciones coinciden en la dirección de la variación, las previsiones teóricas son dos órdenes de magnitud inferiores a los valores observados (Garrido, 1994).
- **Estrellas de Población I luminosas y evolucionadas:** Este grupo de estrellas presenta contradicciones entre los cálculos teóricos y las observaciones. Mientras que las tres estrellas estudiadas pertenecientes a este grupo muestran una disminución del período con el tiempo, las trazas evolutivas teóricas son prácticamente horizontales, evolucionando la estrella a través de la *franja de inestabilidad* hacia el borde frío de la misma, lo que implica una disminución de la temperatura y, por tanto, un aumento del período. Solamente al final de la secuencia evolutiva es posible encontrar una disminución de la luminosidad que tendería a compensar ese aumento del período. Sin embargo, esto no ocurre en todas las trazas y en cualquier caso, la disminución de la luminosidad no es lo suficientemente importante para compensar la disminución de temperatura.
- **Estrellas δ Scuti de Población II:** Las observaciones realizadas en este tipo de estrellas indican una disminución del período, lo que sugiere una evolución hacia radios menores. A diferencia de los dos grupos anteriores, si nos basamos en la hipótesis más generalmente aceptada de que estas estrellas son *blue stragglers*, no existe una explicación definitiva de esta disminución en el período.

1.7 *Blue stragglers* y estrellas *SX Phe*

1.7.1 *Blue stragglers*

Las estrellas *blue stragglers* (*BSs*) fueron descubiertas por Sandage (1953) en el cúmulo globular M3. Actualmente se conocen alrededor de 300 *BSs* en al menos

17 cúmulos globulares. Igualmente se han identificado varias *BSs* en el halo de la Galaxia así como en galaxias enanas cercanas. La Figura 1.9 muestra un diagrama color-magnitud de NGC 5466 (Mateo *et al.*, 1988): las *BSs* se encuentran por encima y a la izquierda del punto de giro de la *Secuencia Principal* de dicho cúmulo. Ajustando las isocronas de las *blue stragglers* se obtiene una edad de 2 a 4 Gaños, que contrasta fuertemente con la edad media de la mayoría del resto de las estrellas del cúmulo, que es aproximadamente de 18 Gaños. Los modelos teóricos también indican que las *blue stragglers* muestran masas de, aproximadamente, $1.5 M_{\odot}$ en comparación con los valores de $0.8 M_{\odot}$ de las estrellas normales en el punto de giro de NGC 5466. Esta diferencia de masas ha sido observada igualmente en otros cúmulos (p. ej., McClure *et al.*, 1977; Carney *et al.*, 1986).

En las últimas décadas se han propuesto distintas teorías para explicar la naturaleza de las *blue stragglers*. Leonard (1989) da una lista cronológica de estas hipótesis así como una breve discusión sobre la viabilidad de cada una de ellas:

- (1): Las *blue stragglers* son estrellas que se formaron con posterioridad a la mayoría de las estrellas que forman un sistema estelar (Roberts, 1960). En cúmulos estelares, el gas que forma estas estrellas podría haber venido del medio interestelar. Este proceso podría ocurrir en cúmulos jóvenes, pero parece improbable que ocurra en cúmulos viejos que contienen muy poco gas y que a menudo se encuentran lejos del plano galáctico.
- (2): Las *blue stragglers* son estrellas que han aumentado su masa mediante la acreción de gas del medio circundante (Williams, 1964). De nuevo, esta hipótesis parece bastante improbable puesto que la acreción de una gran cantidad de masa sobre una estrella aislada es difícil.
- (3): Las *blue stragglers* son estrellas en sistemas binarios próximos que han aumentado sus masas como resultado de transferencia de masa desde la otra componente binaria (McCrea, 1964). Esta hipótesis ha sido posteriormente defendida por Iben (1986).
- (4): Las *blue stragglers* son estrellas evolucionadas que han retornado a la *Secuencia Principal* (Sargent, 1968). Diferentes estudios dinámicos (Nemec y Harris, 1987; Nemec y Cohen, 1989) demostraron la escasa viabilidad de esta hipótesis.

- (5): Las *blue stragglers* son estrellas que han surgido como resultado de colisiones estelares en cúmulos (Hills y Day, 1976). La alta densidad en los núcleos de la mayoría de los cúmulos globulares favorece la existencia de colisiones estelares. Benz y Hillis (1987) defendieron esta hipótesis demostrando que la colisión de dos estrellas de la *Secuencia Principal* produciría una estrella cuya masa se encontraría en el rango de las calculadas para las *blue stragglers*.
- (6): Las *blue stragglers* son estrellas aisladas cuyos tiempos de vida se han alargado debido a procesos internos de mezcla (Wheeler, 1979). Estos procesos serían el resultado de una rotación rápida o de un fuerte campo magnético (Abt, 1985; Schild y Berthet, 1986; Maeder, 1987; Mathys, 1987).
- (7): Las *blue stragglers* son estrellas de campo de tipos espectrales tempranos que han sido capturadas por cúmulos estelares (Leonard, 1985). Esta hipótesis serviría para explicar algunas de las *blue stragglers* observadas en cúmulos abiertos pero no sería válida para dar una explicación a las *blue stragglers* observadas en cúmulos globulares.
- (8): Las *blue stragglers* son estrellas de la *Secuencia Principal* con velocidades de rotación bajas que no han sufrido pérdida de masa (Willson *et al.*, 1987).

Leonard (1989) sugirió que sólo (3), (5), (6) y quizá (8) parecen ser capaces de explicar la mayoría de las *BSs*. Una de las razones de la diversidad de hipótesis existente la constituye las dificultades observacionales: generalmente las *blue stragglers* son estrellas débiles ($m_v \geq 8.0$), por lo que se requiere mucho tiempo en telescopios grandes para conseguir determinar su velocidad radial y fotometría de alta calidad.

La hipótesis colisional (5) ha sido defendida por Leonard (1989). Son dos los principales argumentos en contra de esta hipótesis. Primero, las *BSs* en cúmulos globulares de baja densidad (p. ej., NGC 5466) son difíciles de explicar ya que el tiempo medio entre colisiones excede la edad del Universo. Segundo, la existencia de *BSs* entre la población del halo en los campos donde las colisiones estelares son altamente improbables. Una posible explicación a estas dos cuestiones se podría esgrimir si una pequeña fracción ($\approx 10\%$) de las estrellas de la *Secuencia Principal* en estos cúmulos globulares de baja densidad fueran binarias. Carney (1983) sugirió que el 20–25% de las estrellas del halo son binarias indicando que es razonable pensar

que una fracción similar debería aparecer en los cúmulos globulares al pertenecer éstos también a la población del halo. No obstante, Hesser *et al.* (1987) muestra que existen cúmulos como 47 *Tucanae* donde no hay evidencia de la existencia de binarias en la *Secuencia Principal*. Sin embargo, asumiendo que un 10% del número inicial de estrellas en un cúmulo globular son binarias, Spitzer y Mathieu (1980) encontraron que éstas se concentran rápidamente en el centro del cúmulo, elevando el número de binarias en el núcleo entre un 50 y un 100%. Por otro lado, las simulaciones hidrodinámicas de Benz y Hills (1987) sugieren que si dos estrellas de la *Secuencia Principal* colisionan, sufrirían poca pérdida de masa, por lo que sería teóricamente posible la formación de *blue stragglers*.

Por otra parte, la existencia de binarias primordiales en cúmulos globulares de baja densidad favorecería igualmente la hipótesis de transferencia de masa. Esta ha sido una hipótesis controvertida desde que McCrea (1964) la postulara. Renzini *et al.* (1977) elaboraron posteriormente una teoría en favor de esta hipótesis. Estos autores sugieren que para hacer posible la transferencia de masa desde la primaria a la secundaria es necesario un escenario en el que se impida una transferencia desde la secundaria a la primaria una vez que aquélla se convierta en gigante roja. Para que esta condición se cumpla, el tamaño del lóbulo de Roche de la secundaria debe ser mayor que el radio máximo de ésta durante su fase de gigante roja. Según esta teoría, las *BSs* deberían encontrarse preferentemente en zonas de baja densidad donde la frecuencia esperada de interacciones estelares es baja. En sistemas estelares, los encuentros serían más frecuentes alterando las órbitas, haciéndolas más anchas (quizá disociadas) o más estrechas, modificando, en cualquier caso, la configuración teórica ideal para la presencia de *BSs*. Este razonamiento está basado, en parte, en los cálculos de Hills y Day (1976) que predicen menos de una colisión en el tiempo de vida total de un cúmulo globular con una concentración central muy baja, mientras que se calculan más de 2000 colisiones en los núcleos de los cúmulos globulares más densos (tales como M80 y M15).

Un método de comprobación de esta hipótesis consistiría en investigar, en un gran número de cúmulos globulares, la presencia de *BSs* a distintas distancias del centro del cúmulo. Diferentes estudios (Nemec y Harris, 1987; Nemec, 1988) apoyan esta teoría. Considerando la concentración central media de un cúmulo globular como el parámetro para discriminar la existencia o no de *BSs*, estos autores encon-

traron una concentración central media en los cúmulos globulares que contienen *BSs* de $\langle c \rangle = 1.04$ con $\sigma = 0.09$ mientras que un valor de $\langle c \rangle = 1.91$ con $\sigma = 0.18$ es típico de cúmulos globulares sin presencia de *BSs*. El descubrimiento de tres binarias eclipsantes, dos de las cuales son sistemas en contacto, entre la población *BSs* de NGC 5466 (Mateo *et al.*, 1990) y la presencia de una binaria eclipsante en w Cen favorece igualmente la hipótesis de transferencia de masa.

Eggen e Iben (1989), proponen un método alternativo para comprobar esta teoría. Si la hipótesis de transferencia de masa es cierta, los cocientes entre las abundancias de nitrógeno-carbono y de helio-hidrógeno deberían ser mayores en las *BSs* que en estrellas "normales". Igualmente, si esta teoría es correcta, debe existir una ausencia de litio en las *BSs*. Boesgaard (1990) propone el estudio de la línea de litio neutro a $\lambda = 6708 \text{ \AA}$ como método de verificación de esta teoría.

1.7.2 Estrellas *SX Phe*

Tal y como se comentó al comienzo del capítulo, existe un número de estrellas δ *Scuti* con variaciones en luminosidad de gran amplitud que presentan características de Población II pero masas anormalmente grandes ($\sim 1.2 M_{\odot}$) y edades jóvenes ($\sim 2-5$ Gaños). Estas estrellas reciben el nombre de *estrellas SX Phe*. Las principales propiedades de las estrellas *SX Phe* aparecen compendiadas en Nemec y Mateo (1990): los períodos de las *SX Phe* oscilan desde $\sim 0^d.035$ en las estrellas con metalicidades menores hasta $\sim 0^d.075$. Sus variaciones en luminosidad oscilan desde ≤ 0.05 a 0.80 mag. A diferencia de las δ *Scuti de gran amplitud* de Población I, las amplitudes de las estrellas *SX Phe* aumentan cuando lo hacen los períodos.

El estado evolutivo de las *variables SX Phe* ha sido objeto de controversia a lo largo del tiempo. Actualmente, la teoría aceptada mayoritariamente es la de que son *blue stragglers variables* (VBSs) (Eggen, 1979; Nemec y Mateo, 1990)

Desde que el prototipo de esta clase, *SX Phe*, fue descubierto (Eggen, 1956), se han encontrado un importante número de *variables SX Phe* tanto en cúmulos (ω Cen, (Niss *et al.*, 1978); NGC 5466, (Nemec *et al.*, 1987); NGC 5053, (Nemec, 1988); M3), como en galaxias enanas cercanas (Olszewsky *et al.*, 1985; Carney *et al.*, 1986; Da Costa, 1984) y en campos estelares (Nemec, 1988).

Puesto que la corrección bolométrica de las estrellas *SX Phe* es pequeña (~ 0.05), la luminosidad visual no se diferencia significativamente de la bolométrica, pudiendo

aplicarse la ley $L_v \sim R^2 T_{eff}^4$. Según esta expresión, los cambios en la magnitud visual son debidos a variaciones en T_{eff} y $\log g$ a lo largo del ciclo de pulsación, variaciones que pueden ser hasta de ~ 1000 K en T_{eff} y ~ 0.6 dex en $\log g$. Representando en un diagrama color–magnitud las posiciones de las estrellas *SX Phe*, se observa que aparecen en una región probablemente más estrecha que la *franja de inestabilidad* de las δ *Scuti* (Figura 1.10). Sin embargo, actualmente no se posee la suficiente información para determinar si los bordes de la *franja de inestabilidad* son los mismos para las estrellas *SX Phe* del halo y del disco. Al igual que existen estrellas catalogadas como *no variables* en la *franja de inestabilidad* de las estrellas δ *Scuti*, es posible encontrar *blue stragglers no variables* dentro de la *franja de inestabilidad* de las estrellas *SX Phe*. Tal y como se comentó para el caso de las δ *Scuti*, una posible explicación es que las *blue stragglers* catalogadas como *no variables*, se encuentren realmente variando pero a un nivel por debajo del detectable (Nemec *et al.*, 1990).

Las estrellas *SX Phe* presentan un amplio rango de metalicidades, desde $[Fe/H] \sim -2.4$ (*BL Cam*) a $[Fe/H] \sim -0.2$ (*SU Crt*). Esta diversidad de metalicidades se debe bien a incertidumbres en la determinación de abundancias, o bien a causas físicas reales tal y como ocurre para las *SX Phe* en cúmulos con un amplio rango de edades como, por ejemplo, ω *Cen* (Gratton *et al.*, 1986).

Por lo que respecta a las velocidades de rotación, las estrellas *SX Phe* tienden a imitar la distribución encontrada para estrellas δ *Scuti* normales, esto es, bajas velocidades de rotación en estrellas con variaciones en luminosidad de gran amplitud y altas velocidades en estrellas con pequeñas amplitudes (Nemec y Mateo, 1990).

Se pueden encontrar en la bibliografía distintos métodos para el cálculo de las masas de las estrellas *SX Phe*: si se conocen la T_{eff} media, la M_{bol} , el período y el modo de pulsación, se puede usar la ecuación fundamental de la pulsación estelar (1.24) con el valor de Q dependiente del modo de pulsación. A partir de fotometría *uvby* se pueden determinar los valores $\log g$ y, por lo tanto, calcular las masas gravitatorias (Fernley *et al.*, 1987). Para las estrellas *SX Phe* que pulsen simultáneamente en el modo fundamental y en el primer armónico, es posible igualmente calcular su masa comparando los períodos observados con las curvas teóricas en el diagrama P_1/P_0 frente a P_0 (Cox *et al.*, 1979). Del mismo modo, se pueden obtener estimaciones de las masas aproximadas mediante trazas evolutivas teóricas (Andreason, 1983a; 1983b). Jorgensen y Hansen (1984) desarrollaron un método

para calcular la masa de E39 en ω Cen a partir del análisis de estrellas *RR Lyrae* y con independencia del módulo de distancias y del exceso de color. Jorgensen y Hansen (1984) realizaron igualmente una detallada discusión de los principales métodos de estimación de masas.

Aunque los valores proporcionados por cada uno de los métodos se encuentran sujetos a incertidumbres, el hecho de que todos ellos proporcionen valores entre $\sim 1.0-1.2M_{\odot}$ conduce a la conclusión de que sus masas son mayores que las masas de estrellas normales en el punto de giro de la *Secuencia Principal*, con valores de $\sim 0.8 M_{\odot}$, lo que favorecería la hipótesis de que las estrellas *SX Phe* son *blue stragglers*.

Puesto que las oscilaciones de las estrellas δ Scuti pueden ser radiales en el modo fundamental (F), primer armónico (1H), segundo armónico (2H), no radiales, o una mezcla de modos radiales y no radiales (Breger y Bregman, 1975), parece razonable pensar que lo mismo podría ocurrir en las estrellas *SX Phe*. Sin embargo, solamente se ha descubierto pulsación radial en el modo fundamental y en el primer armónico. Las relaciones P-C-L (*período-luminosidad-color*) para estos dos modos fueron calculadas por Nemec *et al.* (1990). No obstante y debido al reducido número de *SX Phe* conocidas, así como a incertidumbres en los valores de la luminosidad, los errores asociados a los coeficientes de estas relaciones son importantes.

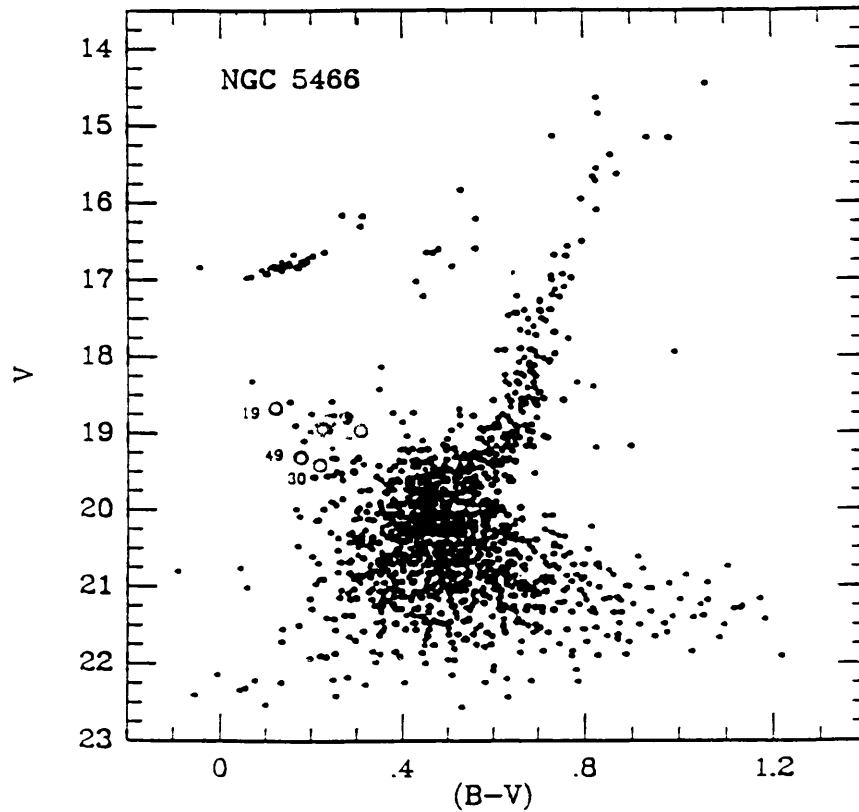


Figura 1.9

Diagrama color-magnitud para NGC 5466 (Mateo et al., 1988). La secuencia de *blue stragglers* aparece claramente en la parte superior derecha del punto de giro de la *Secuencia Principal*. Los círculos representan la magnitud media V y el color (B-V) de las siete estrellas *SX Phe* encontradas en NGC 5466.

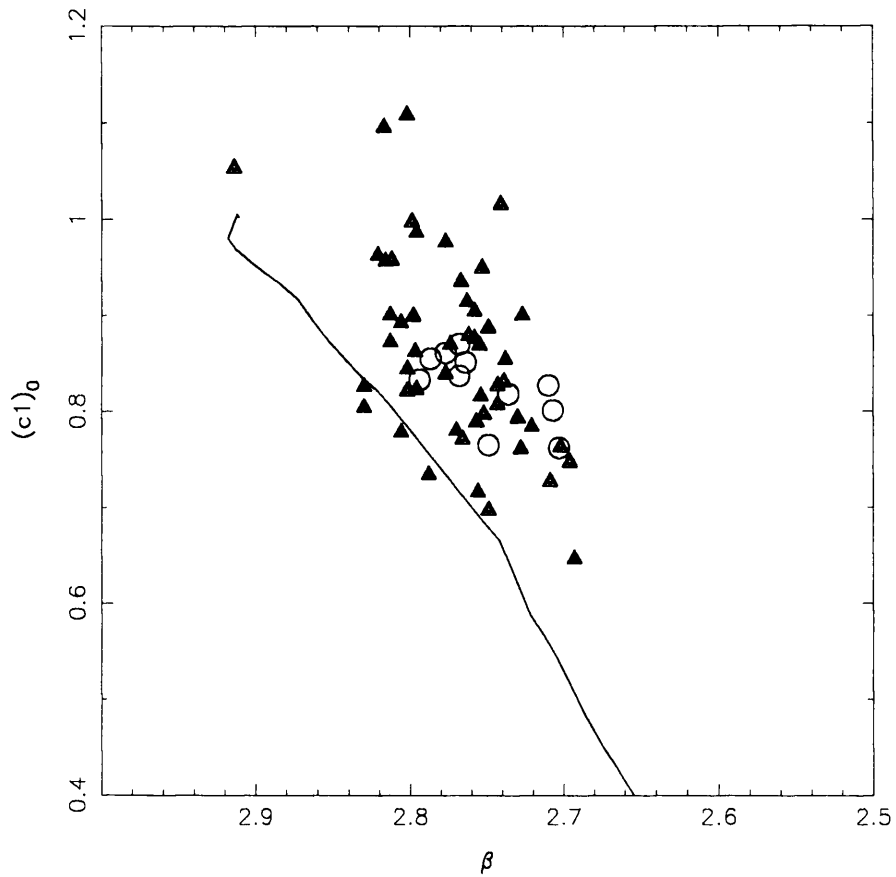


Figura 1.10

Localización de las estrellas *SX Phe* en la *franja de inestabilidad*. Se han considerado todas las estrellas *SX Phe* que se citan en Rodríguez *et al.* (1994). Los triángulos representan las estrellas δ *Scuti* de Población I observadas en nuestras distintas campañas de observación. La definición de la ZAMS es de Philip y Egret (1980).

1.8 Objetivo del trabajo

Como se ha mencionado a lo largo de este capítulo, el fenómeno de la pulsación depende, de una manera fundamental, de los parámetros físicos de las estrellas. En nuestra opinión, una importante desventaja en muchos de los artículos sobre δ Scuti es el reducido número de observaciones con las que se trabaja. En ocasiones, este número puede aumentar mediante la recopilación de datos procedentes de la bibliografía, lo que se traduce en una falta de homogeneidad.

Varias campañas de observación llevadas a cabo entre los años 1990 y 1994 han proporcionado un conjunto numeroso y homogéneo de estrellas δ Scuti de baja y alta amplitud así como de estrellas SX Phe y estrellas no variables. El principal objetivo de este trabajo consiste en calcular sus parámetros físicos (temperatura efectiva, velocidades de rotación y metalicidades) y establecer relaciones entre ellas y los parámetros de pulsación (esto es, amplitud y período).

En el Capítulo I hemos intentado definir lo que se entiende por estrellas δ Scuti así como cuales son sus propiedades, peculiaridades y problemas asociados.

Para obtener resultados óptimos es esencial tener un buen conjunto de datos y potentes herramientas de análisis. En el Capítulo II se citan las observaciones realizadas en las distintas campañas de observación y se describen los métodos utilizados para la reducción y el análisis de los datos.

Uno de los factores que limitan en mayor medida el análisis de líneas espectrales es el solapamiento de líneas: bien debido a una insuficiente resolución espectral o bien debido a factores de ensanchamiento externo como rotación, las líneas pueden aparecer solapadas haciendo difícil y en ocasiones imposible el ajuste de los perfiles de las líneas y, por tanto, el cálculo de los parámetros que de ellos dependen: anchura equivalente, anchura total a media altura... En el Capítulo III se trata este problema y se proponen algunas soluciones mediante la utilización de técnicas de deconvolución.

La rotación es uno de los parámetros físicos cuya influencia sobre la pulsación es más evidente (p.e., McNamara, 1985). Sin embargo, los catálogos de velocidades de rotación disponibles son antiguos (el más reciente es Uesugi y Fukuda, 1982) y distan de ser homogéneos. Se han utilizado técnicas de Fourier en los perfiles de las líneas para calcular velocidades de rotación con una alta fiabilidad. Este estudio

aparece desarrollado en el Capítulo IV.

Uno de los parámetros que ha de ser conocido con mayor precisión cuando se realizan estudios de atmósferas estelares es la temperatura efectiva. En el Capítulo V se efectúan comparaciones entre diferentes calibraciones fotométricas y espectroscópicas para conseguir valores tan precisos como sea posible.

Como se ha comentado en este capítulo una de las características más importantes de las estrellas de tipo espectral A es su amplio rango de abundancias metálicas que a menudo se toma como criterio para la división en subgrupos. En el Capítulo VI se realiza un detallado análisis de abundancias tanto para las estrellas δ Scuti y como para las estrellas *no variables* observadas.

En el Capítulo VII se resumen las conclusiones resultantes de este trabajo.

Capítulo 2

Observaciones y reducción de datos

2.1 Observaciones

El conjunto de estrellas estudiado es el resultado de varias campañas llevadas a cabo desde 1990 a 1994 en el Observatorio del Roque de los Muchachos (La Palma, España) y el Observatorio McDonald (Texas, EE.UU). Tanto el número de estrellas observadas como los telescopios y espectrógrafos utilizados en estas campañas se resumen en la Tabla 2.1. La lista de los objetos observados se muestra en las Tablas 2.2 a 2.4.

Tabla 2.1: Campañas de observación

Campaña	Fecha		Observaciones		Observatorio	Telescopio	Espectrógrafo
	Comienzo	Duración (días)	Variab.	No variab.			
1	1990/09/29	4	56	43	La Palma	JKT	RBS
2	1991/09/17	1	2	0	La Palma	INT	IDS
3	1991/08/28	1	2	0	La Palma	INT	IDS
4	1991/12/16	1	3	0	La Palma	INT	IDS
5	1992/12/05	1	2	0	La Palma	INT	IDS
6	1993/05/29	1	3	0	La Palma	INT	IDS
7	1993/12/18	6	15	14	Texas	2.1m	Sandiford
8	1994/03/14	7	3	0	Texas	2.1m	Sandiford

Tabla 2.2: Relación de estrellas δ Scuti y SX Phe observadas

HD	Identificación		Coordenadas (1950.0)		Mag. Visible	Período (días)	Amplitud (ΔV)	Tipo Espectral	S/R	Campaña
	HR	GCVS	α	δ						
432	21	β Cas	0 06 30	58 52.4	2.27	0.1009	0.033	F2 III-IV	136	1
		V377 Cas(*)	0 16 31	59 25.6	7.83	0.030	0.05	F0	200	1
2628	114	GN And	0 27 29	29 28.6	5.23	0.0693	0.05	A7 III	230-139	1-7
4818	238	V526 Cas	0 48 05	51 14.2	6.39	0.03960	0.01	F2 IV	188-102	1-7
8511	401	AV Cet	1 21 32	-08 16.0	6.21	0.0685	0.01	F0 V	128	1
9100	432	VX Psc	1 27 11	18 05.9	6.02	0.1360	0.02	A4 IV	226	1(2)
10845	515	VY Psc	1 43 52	17 09.8	6.55	0.2190	0.02	A9 III	169	1
11285		VV Ari	1 48 24	20 16.1	6.69	0.0764	0.02	F0	182	1(2)
15165		VW Ari	2 24 04	10 20.5	6.71	0.1071	0.06	F0 IV	227	1(2)
15550	729	UU Ari	2 27 50	19 38.1	6.15	0.0676	0.01	A9 V	125	1
17093	812	UV Ari	2 42 14	12 14.2	5.22	0.0355	0.04	A7 IV	147	1
23156		V624 Tau	3 40 45	24 13.1	8.23	0.021	0.01	A7 V	120	1
23567		V534 Tau	3 44 04	24 40.0	8.40	0.0320	0.015	A9 V	130	1
23728	1170	V376 Per	3 45 41	43 48.6	6.02	0.0994	0.07	A9 IV	188	1(2)
24550		V479 Tau	3 51 48	05 01.7	7.44	0.0758	0.03	F3 II-III	214	1
24809	1223	V386 Per	3 54 50	34 40.3	6.53	0.0550	0.01	A8 V	142	1
24832	1225	Dl Eri	3 54 14	-09 53.7	6.19	0.1559	0.05	F1 V	143	1
26322	1287	IM Tau	4 07 47	26 21.1	5.41	0.145	0.07	F2 IV	159-163	1-7(2)
26574	1298	OMICR1 Eri	4 09 25	-06 58.0	4.04	0.0747	0.03	F2 II-III	151	1
27397	1351	V483 Tau	4 17 09	13 55.0	5.59	0.0540	0.02	F0 IV	135	1
27459	1356	V696 Tau	4 17 46	14 58.6	5.26	0.036	0.01	A9 IV	136	1
27628	1368	V775 Tau	4 19 14	13 57.6	5.72	0.063	0.01	F2III _{lm}	148-100	1-7
28024	1392	UPSIL0 Tau	4 23 19	22 42.1	4.28	0.1484	0.016	A8 V	150	1
28052	1394	V777 Tau	4 23 30	15 30.4	4.48	0.163	0.02	A8 V	173	1(2)
28319	1412	TH2 Tau	4 25 48	15 45.7	3.42	0.0756	0.02	A7 III	150	1
28910	1444	ρ Tau	4 31 00	14 44.5	4.66	0.0670	0.01	A8 V	175	1
30780	1547	V480 Tau	4 48 27	18 45.4	5.10	0.0420	0.012	A7 IV-V	174	1
33959	1706	KW Aur	5 12 09	32 37.9	5.02	0.0881	0.08	A9 IV	185-135	1-7(2)
37819		V356 Aur	5 39 17	28 58.6	8.06	0.1893	0.08	F8 III _p	115-67	1(2)-7
40372	2100	V1004 Ori	5 55 49	01 50.0	5.90	0.054	0.01	A5 _m	152	1

Tabla 2.2: Relación de estrellas δ Scuti y SX Phe observadas (Continuación)

Identificación			Coordenadas (1950.0)		Mag.	Período	Amplitud	Tipo	S/R	Campaña
HD	HR	GCVS	α	δ	Visible	(días)	(ΔV)	Espectral		
40535	2107	V474 Mon	5 56 38	-09 23.1	6.12	0.1361	0.15	F2 IV	233-83	1(3)-7(2)
		UZ Lyn (*)	6 15 13	59 01.9	4.58			A2 V	130-126	1(2)-7(2)
50018	2539	OX Aur	6 49 35	38 55.9	6.12	0.1547	0.03	F2 V	105	1(2)
50420	2557	V352 Aur	6 51 38	43 58.5	6.13	0.17	0.01	A9 III	140-120	1-7
55057	2707	V571 Mon	7 08 50	-00 13.1	5.45	0.10	0.05	F0 V	110	1
64191		AD CMi	07 50 12	1 43.7	9.38	0.1230	0.300	F3 III	146-112	5(2)-7(2)
73857		VZ Cnc	8 38 10	10 00.2	7.65	0.1784	0.50	F2 III	153-105	1(2)-7(2)
110377	4824	GG Vir	12 39 03	10 42.0	6.19	0.050	0.02	A7 V	157	6
152830	6290	V644 Her	16 52 58	13 42.0	6.34	0.1151	0.04	F3 V	221-115	1-8
152896		V645 Her (*)	16 53 03	29 07.1	7.37			A5	249	1(2)
155514	6391	V620 Her	17 08 59	24 17.9	6.19	0.0884	0.02	A8 V	122	1
156697	6434	V2112 Oph	17 16 26	06 08.2	6.51	0.1874	0.02	F1 V	244	1
159223		V648 Her	17 30 24	26 28.4	6.88	0.29		A7 V	117	1
172748	7020	δ Scut	18 39 32	-09 06.1	4.72	0.1938	0.29	F2 III	110	1(2)
177392	7222	LT Vul	19 01 34	21 11.6	6.52	0.1096	0.03	F2 III	110	1
181333	7331	V1208 Aql	19 17 19	12 16.9	5.50	0.1497	0.04	F0 III	173	1
181577	7340	Rho1 Sgr	19 18 46	-17 56.6	3.94	0.0500	0.02	F0 III-IV	117	1
186357	7501	V1276 Cyg	19 40 49	29 12.7	6.52	0.0880	0.02	F1 III	157	1
192518	7731	NU Vul	20 12 11	28 32.5	5.20	0.1881	0.016	A7 IV	130	1
197461	7928	δ Del	20 41 07	14 53.6	4.43	0.1568	0.070	F0 IV	158	1(2)
199124	8006	EM Aqr	20 52 33	-01 33.9	6.55	0.099	0.02	A9 V	126	1
199908		DQ Cep	20 56 24	55 17.6	7.22	0.0789	0.05	F1 IV	205	1
200356		FN Aqr (*)	21 00 33	-01 30.4	7.30		0.01		128	1

Tabla 2.2: Relación de estrellas δ Scuti y SX Phe observadas (Continuación)

Identificación			Coordenadas (1950.0)		Mag.	Período	Amplitud	Tipo	S/R	Camp
HD	HR	GCVS	α	δ	Visible	(días)	(ΔV)	Espectral		
200925		V1719 Cyg	21 02 56	50 35.1	8.01	0.2673	0.31	F2III	130	1(2)
201707	8102	EW Aqr	21 08 56	-14 40.7	6.49	0.0970	0.07	F0 III-I	182	1
204188	8210	IK Peg	21 24 07	19 09.5	6.07	0.0440	0.01	A8m	250	1
211336	8494	ϵ Cep	22 13 11	56 47.6	4.19	0.0412	0.014	F0 IV	182	1
213534	8584	GX Peg	22 29 15	29 17.2	6.35	0.0560	0.015	A5m	110	1
215874	8676	FM Aqr	22 45 52	-10 49.2	6.19	0.0870	0.02	A9 III-IV	117	1
218549		DY Peg(**)	23 06 22	16 56.6	10.36	0.0729	0.54	A9	100-80	2(2)-7(
		CC And	00 41 03	42 00.5	9.39	0.1249	0.24	F3 IV-V	146-130-105	2(2)-7(
		GP And	00 52 38	22 53.6	10.80	0.0787	0.52	A3	100-60	3(2)-7(
		AI Hya	08 16 12	0 26.3	9.90	0.1380	0.020	F5	90	5(2)
		CY Aqr (**)	22 35 14	01 16.5	10.93	0.0610	0.71	A2-F8	20	4(2)
		DE Lac	22 08 01	40 40.4	10.28	0.2537	0.35	F5-F8	134	4
		V1162 Ori	05 29 37	-07 17.5	9.88	0.0787	0.18	A6	88-90	4(6)-7(
		EH Lib	14 56 22	-0 45.0	9.85	0.088	0.50	F0	60-60	6-8(2
		YZ Boo	15 22 12	37 2.6	10.57	0.104	0.42	A6-F1	56-15	6(2)-8(

La identificación, coordenadas y parámetros físicos han sido seleccionados de Rodríguez *et al.* (1994) excepto en aquellos casos en los que el objeto aparezca marcado con *. En estos casos se obtuvieron de García *et al.*(1993). En la columna *campana* se indica en qué campaña/s se observó dicho objeto. El número entre paréntesis indica el número de veces que fue observado en dicha campaña. En los casos en que haya más de una observación por campaña, el valor de la *relación señal-ruido*, (S/R), es el máximo. Las estrellas catalogadas como SX Phe aparecen marcadas con **.

Tabla 2.3: Relación de estrellas no variables observadas

Identificación		Coordenadas (1950.0)		Mag. Visible	Tipo Espectral	S/R	Campaña
HD	HR	α	δ				
571	27	00 07 43	45 47.6	5.03	F2 II	173	1
905	41	00 10 55	40 45.6	5.72	F0 IV	254-105	1-7
1671	82	00 18 29	37 41.5	5.18	F5 III	100-63	1-7
4568	217	00 45 15	20 39.1	6.60	F8 V	149-117	1-7
4757	230	00 47 11	27 26.3	7.00	F4 III	211	1
4758	231	00 47 11	27 26.3	7.10	F5 III	215	1
6397	308	01 02 27	14 40.7	5.68	F4 II-III	100-140	1-7
7034	349	01 08 21	31 09.6	5.16	F0 V	189	1
8723	413	01 23 33	18 54.8	5.38	F2 V	212-113	1-7
11257	534	01 48 12	10 47.8	5.90	F2 V	216-116	1-7
11636	553	01 51 52	20 33.9	2.64	A5 V	153	1
11973	569	01 55 08	23 21.2	4.79	F0 V	176	1
13041	620	02 05 28	37 37.4	4.80	A5 IV-V	167	1
13161	622	02 06 34	34 45.1	3.00	A5 III	132	1
13174	623	02 06 34	25 42.3	4.98	F2 III	100	1
15385	723	02 26 22	23 14.8	6.19	A5m	127-68	1-7
16647	783	02 37 37	05 53.9	6.25	F3 V	167-112	1-7
23230	1135	03 41 47	42 25.3	3.80	F5 IV	124-167	1-7
24357	1201	03 50 18	17 10.8	6.00	F4 V	105	1
201507	8095	21 07 27	02 44.3	6.45	F5 IV	255	1
202240	8120	21 11 26	36 25.6	6.00	F0 III	160	1
202444	8130	21 12 48	37 49.9	3.72	F0 IV	115	1
203096	8155	21 16 59	40 49.7	6.20	A5 IV	166	1
203803	8190	21 21 44	24 03.5	5.70	F1 IV	110	1
203842	8191	21 21 58	09 57.5	6.30	F5 III	108	1
203925	8198	21 22 21	25 57.5	5.70	A8 III	169	1
204153	8208	21 23 29	46 29.8	5.60	F0 V	143	1
205852	8267	21 35 25	19 05.6	5.40	F1 IV	150	1
205924	8270	21 36 02	05 32.7	5.70	A9 IV-V	135	1

Tabla 2.3: Relación de estrellas *no variables* observadas (Continuación)

Identificación		Coordenadas (1950.0)		Mag. Visible	Tipo Espectral	S/R	Campaña
HD	HR	α	δ				
207652	8344	21 47 46	17 03.1	5.29	F2 III-IV	129	1
210459	8454	22 07 46	32 55.9	4.29	F5 III	160	1
210594	8460	22 08 36	30 18.4	6.30	A8 IV	230	1
210855	8472	22 10 00	56 35.4	5.20	F8 V	173	1
214454	8613	22 35 19	51 17.2	4.63	A8 IV	193	1
216048	8681	22 47 02	10 12.9	6.54	F0 IV-V	105	1
217754	8765	23 00 10	31 30.7	6.57	F2 IV	157-105	1-7
217926	8776	23 01 29	06 20.8	6.41	F2 V	180	1
218396	8799	23 05 01	20 51.8	5.99	A5 V	155-125	1-7
218470	8805	23 05 29	49 01.4	5.70	F5 V	198-97	1-7
219080	8830	23 10 15	49 08.0	4.52	F0 V	156	1
219291	8838	23 11 56	29 30.0	6.41	F6 IV	198	1
219487	8845	23 13 30	24 29.9	6.60	F5 V	135-103	1-7
220242	8888	23 19 30	26 20.1	6.60	F5 V	173-114	1-7

La identificación, coordenadas, magnitudes visuales y tipos espectrales fueron obtenidos del *Centre de Données Stellaires (CDS)* utilizando SIMBAD.

Tabla 2.4: Relación de estrellas *estándar* observadas

Identificación		Coordenadas (1950.0)		Mag. Visible	Tipo Espectral	S/R	Campaña
HD	HR	α	δ				
61421	2943	7 36 41	05 21.3		F5IV	205-147-130	1(2)-7(4)-8
159651	6556	17 32 36	12 35.7	2.10	A5III	179	1(2)
187642	7557	19 48 21	08 44.1	0.77	A7V	163	1(2)

2.2 Instrumentación

2.2.1 Espectrógrafos

Tal y como se indica en la Tabla 2.1, han sido tres los espectrógrafos utilizados en las distintas campañas de observación: dos de ellos (RBS, IDS) son espectrógrafos con una red de dispersión plana, mientras que el espectrógrafo *Sandiford* es de tipo *echelle*. Veamos brevemente a continuación cuales son las características propias de cada uno de estos instrumentos.

Un espectrógrafo típico consta de una rendija de entrada situada en el foco del telescopio, un colimador que recoge los rayos divergentes procedentes del telescopio, un elemento dispersor (prisma o red de difracción) y una cámara que focaliza la luz dispersada en el detector. La distancia entre la rendija y el colimador se denomina *longitud focal del colimador*. Igualmente, la distancia entre la cámara y el espectro focalizado recibe el nombre de *longitud focal de la cámara*. Normalmente, se suele utilizar como elemento dispersor una red de difracción plana ya que su eficiencia luminosa es mayor que la de otros elementos dispersores como prismas o redes de difracción cóncavas.

Se puede demostrar (Gray, 1992e) que, para una determinada longitud de onda, la posición del máximo de intensidad del rayo difractado viene dada por la siguiente ecuación

$$n\lambda/d = \theta \quad (2.1)$$

donde $\theta = \sin \alpha + \sin \beta$, siendo α y β el ángulo de los rayos incidente y difractado respectivamente con la normal a la red de difracción y d la distancia entre rendijas.

La dispersión angular de una red de difracción viene dada por (Gray, 1992e)

$$d\beta/d\alpha = n/(d \cos \beta) \quad (2.2)$$

De la anterior ecuación se deduce que la dispersión angular puede aumentar bien disminuyendo el espacio entre rendijas d (esto es, aumentando el número de líneas por unidad de longitud) o bien observando a altos órdenes, tal y como ocurre en los *espectrógrafos echelle* de los que hablaremos posteriormente.

Igualmente, el poder de resolución viene dado por (Gray, 1992e)

$$\lambda/\Delta\lambda = Wn/d \quad (2.3)$$

donde W indica la anchura de la red. Se observa que el poder de resolución es mayor al aumentar el tamaño de la red y el número de líneas por unidad de longitud.

Uno de los principales inconvenientes de una red como la expuesta anteriormente radica en el hecho de que el máximo de intensidad del rayo difractado se alcanza para $n = 0$, que se corresponde con una dispersión angular nula. Esto hace que la utilización de órdenes altos para obtener una mayor resolución se vea dificultada por las bajas intensidades del rayo difractado. Una posible solución a este problema se basa en colocar un prisma o un espejo en las rendijas de la red de difracción. Normalmente se suelen utilizar espejos debido a que las propiedades dispersivas de los prismas constituyen una desventaja para luz policromática. El ángulo entre la normal al espejo y la normal a la red se denomina *ángulo "blaze"* y toma valores de $\phi = 20^\circ$ para redes que utilizan órdenes bajos o de $\phi = 60-75^\circ$ para espectrógrafos *echelle*.

Como se citó anteriormente, la principal ventaja de un espectrógrafo *echelle* es su alta dispersión angular $d\beta/d\alpha$ como resultado de utilizar órdenes altos. No obstante, a medida que n aumenta, el rango espectral cubierto por cada orden y la distancia entre órdenes disminuye, lo que ocasiona un solapamiento de los mismos (Gray, 1992e). Para evitar este solapamiento es necesario introducir lo que se denomina un *elemento de dispersión cruzada* que puede ser bien una nueva red de difracción o bien un prisma.

2.2.2 Observatorio de La Palma

Se utilizaron dos telescopios en las campañas realizadas en La Palma: el Jacobus Kapteyn y el Isaac Newton. El telescopio Jacobus Kapteyn (en adelante JKT) tiene montura ecuatorial con un espejo primario parabólico de 1.0 m de diámetro y dos espejos secundarios. El secundario utilizado en las observaciones es un espejo hiperboloide que proporciona una focal $f/15$. El telescopio Isaac Newton (en adelante INT), también está montado ecuatorialmente con un espejo primario de 2.54 m de diámetro y una focal $f/15$.

En cada telescopio se utilizó un espectrógrafo diferente: por un lado, el espectrógrafo Richardson-Brealey (Richardson y Brealey, 1973; en adelante RBS), disponible en el JKT (Richardson y Brealey, 1973) proporciona un rango de longitud de onda de $\approx 200 \text{ \AA}$ ($[4790 \text{ \AA}-5000 \text{ \AA}]$) prácticamente centrado en H_β . El

tamaño de la rendija de entrada es de 1.0 segundos de arco. El colimador es un paraboloide con una longitud focal de 750 mm. Las características del detector se muestran en la Tabla 2.6 y en la Figura 2.1. La red de difracción utilizada y la dispersión alcanzada se muestran en la Tabla 2.5. Existe una lámpara de tungsteno asociada al espectrógrafo, que se utilizó como fuente homogénea en las imágenes de *flatfield*. Igualmente, existen lámparas de cátodo hueco de Cu-Ar y Cu-Ne para la calibración en longitud de onda. No obstante, no se observaron imágenes de este tipo, realizándose la calibración en longitud de onda según el método descrito en 2.3.1.

Por otro lado, el espectrógrafo IDS disponible en el INT posee distintas redes de difracción asociadas a la cámara de 500 mm. utilizada, que cubren distintos rangos y dispersiones. La red utilizada en nuestras observaciones se muestra en la Tabla 2.5 y proporciona un intervalo en longitud de onda y una resolución similar a la que se obtenía con el RBS. El colimador posee una longitud focal de 1275 mm., pudiéndose elegir entre tres tipos de recubrimientos diferentes para conseguir la máxima reflectividad en la región de interés. Dos de ellos *AG Red* y *AL Wide* se utilizaron en las diferentes campañas. Las características del detector (EEV5) se muestran en la Tabla 2.6 y en la Figura 2.1. Asociadas al espectrógrafo, existen, una lámpara de tungsteno como fuente de iluminación homogénea y lámparas de calibración de Cu-Ar y Cu-Ne. Una descripción más detallada de la instrumentación disponible en ambos telescopios se puede encontrar en Unger *et al.* (1988).

Tabla 2.5: Características de las redes de difracción pertenecientes a los espectrógrafos RBS e IDS

Nombre	Espectrógrafo	Líneas · mm ⁻¹	Longitud de onda central Å	Dispersión	
				(Å · mm ⁻¹)	(Å · pixel ⁻¹)
R2400	RBS	2400	4400	19.0	0.41
R1200B	IDS	1200	3500	16.7	0.37

Tabla 2.6: Parámetros de los CCD's GEC P8603 y EEV5

Parámetro	chip	
	GEC3-GEC6 (P8603)	EEV5
Tamaño del píxel (μm)	22 × 22	22.5 × 22.5
Formato (pixels)	385 × 578	1280 × 1180
Formato (mm)	8.5 × 12.7	28.8 × 26.55
Tiempo de lectura (segundos)	~ 25	~ 120
Electrones por cuenta (e ⁻ /ADU)	~ 1	~ 0.7
Ruido de lectura (e ⁻¹)	5-10	4.6
Saturación (cuentas)	> 60000	> 60000
<u>Eficiencia cuántica (%)</u>	<u>Intensidad</u>	<u>Intensidad</u>
· Máximo	55	45
· 4000 Å	15	14
· 8000 Å	40	35

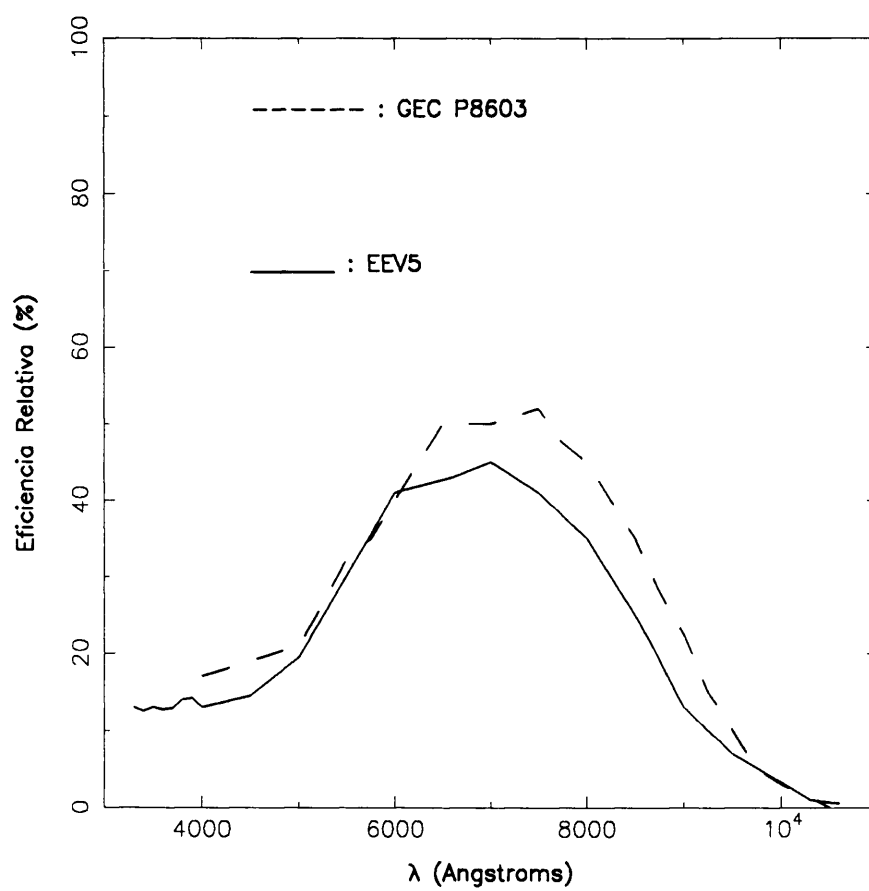


Figura 2.1

Curvas de eficiencia de los CCD utilizados (Unger *et al.*, 1988)

2.2.3 Observatorio de McDonald

El espectrógrafo *echelle Sandiford* en funcionamiento en el telescopio de 2.1 metros del Observatorio McDonald cubre un rango continuo en longitud de onda (con solapamiento en longitud de onda entre los distintos órdenes, sin discontinuidades entre ellos) que puede variar desde 500 Å a $\lambda = 4400$ Å (rango 4200 Å–4700 Å) hasta 2500 Å (rango 6500 Å–9000 Å). En nuestras observaciones el rango espectral fue 6190 Å–8500 Å, con una resolución espectral de 0.06 Å/píxel a $\lambda = 6562.81$ Å (H_α). El espectrógrafo cuenta con un conjunto de rendijas con diámetros comprendidos entre 1 y 20 segundos de arco. Como elemento de dispersión cruzada se utiliza un prisma ya que éste proporciona una separación entre órdenes más uniforme que la obtenida mediante redes de difracción. Esto se debe a que la reducción del rango espectral cubierto por cada orden al disminuir la longitud de onda se compensa con un aumento proporcional en la dispersión del prisma. La distancia entre órdenes depende de la longitud de onda y su valor teórico va desde 10 píxeles a $\lambda = 10000$ Å, hasta 23 píxeles a $\lambda = 4305$ Å.

Debido a las dificultades para obtener una fuente de iluminación suficientemente uniforme como *flatfield* a causa del extenso rango de longitud de onda cubierto, el espectrógrafo está equipado con un par de lámparas halógenas de cuarzo, las cuales abarcan dos rangos distintos de longitudes de onda (3500 Å–5000 Å y 5000 Å–8000 Å). También existe una lámpara de cátodo hueco de Th-Ar para la calibración en longitud de onda.

El valor de la luz difusa en el espacio entre órdenes se ha estimado en un 1 % mediante comparaciones entre las anchuras equivalentes calculadas con este instrumento y las obtenidas a partir del Atlas de Arturo (Griffin, 1968). En la Figura 2.3 se comparan igualmente las anchuras equivalentes de los espectros observados de Procyon con las obtenidas a partir del Atlas de Procyon (Griffin y Griffin, 1979), obteniendo un valor similar.

Los espectros CCD obtenidos con este espectrógrafo están contaminados por la presencia de una zona brillante centrada en el CCD en la dirección de dispersión. El origen de esta peculiaridad es la reflexión de la luz en el detector CCD que vuelve a la red a través de la cámara y el prisma. Allí es dispersada —la luz reflejada incide en la red con un ángulo α' aproximadamente igual al ángulo original de la red β , aunque el número de orden m' puede diferir del orden original m — y es conducida

de nuevo al CCD a través de la cámara. La consecuencia de este fenómeno es que un tercio del rango de longitudes de onda cubierto por uno o dos órdenes *echelle* situados en el centro del CCD es oscurecido por estas imágenes brillantes. Una solución actualmente en estudio consiste en cubrir el CCD, lo que disminuiría la intensidad del fenómeno en un 80 %, reduciendo la fracción de luz reflejada por el CCD del 50 % al 10 % (Tull *et al.*, 1993). Un estudio detallado del diseño de la cámara y el espectrógrafo se puede encontrar en McCarthy *et al.* (1993). En la Tabla 2.7 se citan las principales características del instrumento.

Tabla 2.7: Instrumentación del telescopio de 2.1 m. del Observatorio de McDonald

• CCD	
-Tamaño del píxel (μm)	27 × 27
-Formato (píxeles)	1200 × 400
-Electrones por cuenta (e^-/ADU)	1.61
-Ruido de lectura (e^-)	≈ 8
-Linealidad (ADU)	49200
• CAMARA	
-Longitud focal efectiva (mm)	777
• COLIMADOR	
-Longitud focal efectiva (mm)	2000
• ESPECTROGRAFO	
-Líneas por mm^{-1} .	23
-Poder de resolución ($R = \lambda/\Delta\lambda$)	60000

2.3 Reducción de los datos

2.3.1 Reducción de los datos del Observatorio de La Palma

El proceso de reducción de los espectros de La Palma ha sido el estándar para

una red de difracción plana. A lo largo de este capítulo entenderemos por *bias*, el resultado de sumar el valor de la corriente de oscuridad (definido como el error cuadrático medio del voltaje (sección 2.6)) y la constante aditiva introducida para evitar tener que realizar operaciones con valores de intensidad próximos a cero. Para determinar una posible deriva temporal del *bias*, se ha comparado el valor obtenido a partir de la imagen de *bias* con el resultado de promediar el valor de la intensidad de las columnas no iluminadas de los espectros observados a lo largo de la noche. En ninguna de las campañas de observación se observó variación temporal, por lo que se decidió definir el valor de *bias* para cada día como el valor medio de las imágenes *bias* observadas dicho día.

La imagen de *flatfield* se utiliza para eliminar las variaciones píxel a píxel en la sensibilidad del detector. Se puede obtener iluminando con una lámpara incandescente una fuente continua y uniforme espacialmente, como la cúpula del telescopio. La imagen corregida se obtiene dividiendo la imagen observada por el *flatfield*, previa substracción del *bias* y normalización de éste.

La posición del espectro en el CCD se puede calcular realizando un perfil espacial de la imagen. La posición espacial, perpendicular a la dirección de dispersión, donde se alcanza el valor máximo en cuentas corresponderá a la posición central del espectro y servirá de referencia para sustraer el cielo. Previo a la estimación de la contribución del cielo es necesario eliminar los rayos cósmicos mediante la utilización de algún tipo de filtro. En este trabajo se ha utilizado un filtro de mediana de 5 puntos. Una vez hecho esto, la contribución de cielo se puede ajustar mediante un polinomio cuadrático o cúbico. En todas las imágenes observadas, la contribución del cielo fue pequeña. Así, por ejemplo, una imagen de 10 minutos de tiempo de exposición con aproximadamente 8600 cuentas en el espectro tiene 40–50 cuentas provenientes del cielo (ya corregido de *bias*). Igualmente, una de las imágenes más débiles (15 minutos de exposición) presenta 2200 cuentas en el espectro y 90 cuentas de cielo (también corregido de *bias*).

Una vez calculada la contribución del fondo de cielo, la extracción del espectro se puede llevar a cabo, bien sumando directamente, para cada longitud de onda, la contribución de los píxeles de un intervalo perpendicular a la dirección de dispersión, centrado en el espectro y de longitud la calculada mediante el perfil espacial o bien asignando un determinado peso estadístico a cada píxel de acuerdo con la *relación*

señal-ruido. Este ha sido el criterio utilizado en nuestras observaciones, basándonos en el algoritmo de extracción óptima desarrollado por Horne (1986).

Tal y como se indicó en la Sección 2.2.2, no se observaron espectros de calibración en la campaña 1. En este caso y puesto que para nuestros propósitos es suficiente una relación lineal píxel-longitud de onda, la calibración se ha llevado a cabo mediante identificación de líneas en el Atlas Solar (Moore *et al.*, 1966). En el resto de las campañas de La Palma (realizadas en el INT) se utilizaron las lámparas de calibración disponibles. La región espectral observada en los espectros de La Palma ocupa desde 4790 Å a 5000 Å, centrada en H β 4861 Å. La línea H β es interesante para determinar temperaturas efectivas ajustando el perfil de la línea a modelos sintéticos (Capítulo V). Además, la presencia de un importante número de líneas metálicas (Fe I principalmente) hace posible, en principio, la determinación de abundancias a pesar del solapamiento de las líneas y de la resolución moderada de nuestros espectros.

2.3.2 Reducción de los datos del Observatorio McDonald

La reducción de datos se ha llevado a cabo dentro del contexto *echelle* del paquete de reducción de imágenes MIDAS (versión Mayo 1991). Una sesión típica de reducción *echelle* consta de los siguientes puntos:

- *Pre-procesado*: consiste en la eliminación de columnas defectuosas y píxeles saturados y en la sustracción del *bias*. Las columnas o los píxeles defectuosos pueden suprimirse utilizando filtros que sustituyan los valores erróneos por el valor de la mediana de los píxeles contiguos. Al igual que se hizo para los espectros de La Palma, el valor del *bias* considerado ha sido el valor promedio de todas las imágenes *bias* observadas cada noche.
- *Definición de los órdenes*: El primer problema en la reducción de los espectros *echelle* es la solución de la relación de dispersión, definida por las siguientes ecuaciones:

$$y = f_1(x, m) \quad (2.4)$$

$$x = f_2(\lambda, m) \quad (2.5)$$

la primera de las cuales define la posición del orden espectral, m , y la segunda da, para cada orden, la relación de dispersión en una dimensión. La función f_1 se puede aproximar por un polinomio de la forma:

$$y = f_1(x, m) \approx \sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^I a_{ij} x^i m^j \quad (2.6)$$

donde los coeficientes a_{ij} se calculan por medio de ajustes por mínimos cuadrados sobre una red de puntos (x_k, y_k) .

- *Sustracción del fondo de cielo*: El nivel de *background* en el espectro observado se puede definir como:

$$Back = A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot \text{cuentas} + A_3 \quad (2.7)$$

donde A_0 corresponde al valor del *bias*, $A_1 \cdot t$ se debe a la contribución del cielo, la cual aumenta con el tiempo de exposición, $A_2 \cdot \text{cuentas}$ es la luz difusa procedente de los órdenes adyacentes y A_3 engloba otros parámetros difíciles de cuantificar como *seeing*, situación del objeto en la apertura a lo largo del seguimiento ...

Una manera fácil de obtener una estimación aproximada del nivel de *background* es hacer un perfil espacial del espectro. En él se puede apreciar que no es fácil distinguir entre luz difusa procedente de los órdenes adyacentes (dada por los extremos de la gaussiana) y la luz debida al cielo. Se llevaron a cabo algunas comprobaciones para clarificar las diferentes contribuciones al fondo de cielo. En las estrellas débiles, con menor número de cuentas y donde el término debido a luz difusa puede despreciarse, se encontró que el nivel del *background* era similar al valor del *bias* calculado en las imágenes *bias* siendo, por tanto, también despreciable la contribución del cielo ($A_1 \cdot t$). Por otra parte, en las estrellas brillantes con tiempos de exposición cortos en los que el término $A_1 \cdot t$ es despreciable, se encontró que el valor del fondo era ligeramente mayor que el *bias* debido a la contribución de la luz difusa de los órdenes. Se puede observar, pues, que en ambos casos, la contribución del cielo no es significativa, por lo que se decidió no realizar ninguna sustracción del mismo.

Este argumento es defendido también por otros autores (Lambert *et al.*, 1993; Smith, 1993) quienes no corrigen de fondo de cielo sus observaciones *echelle*.

- *Corrección de flatfield :*

La corrección por *flatfield* es análoga a la descrita para las observaciones de La Palma. Al igual que se hizo para las imágenes *bias*, en aquellos casos en los que se haya observado más de un *flatfield* por noche, se ha tomado el *flatfield* promedio de todos ellos.

- *Extracción de los órdenes:*

El espectro unidimensional se ha extraído, para cada orden, sumando la contribución de los píxeles en un intervalo cuya posición central viene definida por las ecuaciones (2.1) y (2.2). La anchura óptima del intervalo vendrá dada por el tipo de observación, teniendo en cuenta que si es demasiado pequeña los órdenes sólo se extraerán parcialmente y presentarán una variación periódica debida a su inclinación respecto a las líneas en la imagen y si, por otra parte, es demasiado grande, se estarán incluyendo píxeles con una baja *relación señal-ruido* en los extremos del orden.

- *Calibración en longitud de onda:*

La manera usual de calibrar un espectro en longitud de onda consiste en tomar el espectro del arco asociado al objeto y encontrar las relaciones de dispersión identificando líneas en dicho arco. Aunque la lámpara de torio-argon es una fuente común en espectroscopía de alta dispersión ya que el torio presenta un espectro con numerosas líneas de emisión, el espectro de argon presenta varias líneas intensas en el infrarrojo cercano, que saturan el CCD en cualquier exposición lo suficientemente larga para obtener las líneas de torio, contaminando diferentes ordenes. Debido a esto, el algoritmo que realiza la calibración dentro del paquete *echelle* de MIDAS encontrará líneas "artificiales" en la misma posición x pero en diferentes órdenes calculando unos coeficientes de dispersión erróneos. Una posible solución a este problema consiste en eliminar estas líneas saturadas del espectro del arco observado.

Otra posibilidad en aquellos casos en que sea suficiente el término lineal en la calibración píxel-longitud de onda, consiste en identificar líneas espectrales

con la ayuda de un atlas (p.e., Moore *et al.*, 1966), encontrando una relación lineal píxel-longitud de onda para cada orden. Puesto que en nuestro caso una relación lineal es suficiente, este segundo método ha sido el utilizado finalmente.

- *Corrección del efecto ripple:*

En general, un espectro *echelle* estará afectado del llamado *efecto ripple* debido a la curvatura que presentan los órdenes en sus extremos. Diferentes algoritmos de corrección pueden encontrarse en la bibliografía (p.e., Ahmad, 1981; Barker, 1984). No obstante, los espectros *echelle* del Observatorio de McDonald no necesitan ser corregidos de efecto *ripple* debido a la particular configuración del espectrógrafo: las lámparas de calibración están situadas por delante de la red de difracción de forma que las imágenes de *flatfield* también estarán afectadas de *ripple*, por lo que la simple división por el *flatfield* eliminará tal efecto.

Tal y como se citó anteriormente, un espectro típico de la campañas del Observatorio McDonald cubre una amplia región espectral (6190 Å–8500 Å). La excelente resolución y la buena *relación señal–ruido* de los mismos permite la realización de un detallado análisis de abundancias. En este trabajo, hemos centrado nuestra atención en las líneas de Fe I, Fe II, Ca I y O I.

2.4 Determinación de la luz difusa y del nivel del continuo

Parte de la luz que entra en el espectrógrafo puede aparecer en el espectro en una posición bastante alejada de la que le correspondería por su longitud de onda. Estos fotones dispersados son desviados por diversas causas (imperfecciones en las redes y en los espejos, polvo suspendido en el aire...). La presencia de luz difusa en un espectrógrafo provoca un error sistemático en las medidas de intensidad y forma de las líneas, y en general causa una pérdida de contraste ya que la luz difusa tiende a rellenar las líneas de absorción (Gray, 1992a).

No existen métodos sencillos para calcular la luz difusa en los espectrógrafos y todos ellos necesitan medidas de laboratorio (Waddell, 1956; Teske, 1967) o medidas

sobre el Atlas del espectro Solar (Kurucz *et al.*, 1984). En nuestro caso, la estimación de la luz difusa se ha calculado comparando las anchuras equivalentes de los espectros observados de Procyon en las distintas campañas y las del Atlas fotométrico de Procyon (Griffin y Griffin, 1979). Para tener una buena determinación de la luz difusa es conveniente seleccionar líneas a lo largo de todo el rango de longitudes de onda (eligiendo líneas de diferentes órdenes en el caso de espectros *echelle*) y con diferentes anchuras equivalentes. Pero antes de calcular las anchuras equivalentes es necesario haber definido previamente lo que se entiende por *nivel del continuo*.

La determinación del nivel del continuo en un espectro es uno de los puntos más críticos para poder realizar medidas óptimas sobre líneas ya que todos los resultados posteriores dependerán de dicha determinación. A pesar de que no existe un método universalmente aceptado para ello, la idea básica consiste en seleccionar diferentes ventanas espectrales donde no haya líneas o donde sean lo suficientemente débiles para ser despreciables y ajustar un polinomio que definirá el nivel del continuo. El espectro normalizado se obtendrá dividiendo el original por el valor del polinomio en cada punto.

La determinación del continuo se ha realizado utilizando los espectros observados de Procyon en las distintas campañas. Esta elección se basa en dos motivos. En primer lugar, es la estrella observada con menor velocidad de rotación ($v \sin i = 4 \text{ km s}^{-1}$). Se sabe que uno de los efectos del ensanchamiento rotacional es producir una subestimación ("bajar") el nivel del continuo en aquellas regiones con gran cantidad de líneas espectrales. En Procyon este efecto se puede ignorar. En segundo lugar, es posible comprobar el nivel del continuo calculado comparando las anchuras equivalentes con las del Atlas fotométrico de Procyon (Griffin y Griffin, 1979). Para la determinación del continuo, se ha utilizado un espectro de Procyon "promedio" de los dos espectros observados en la campaña 1. En ambos espectros (espectro "promedio" de la campaña 1 y espectro del Atlas) se han seleccionado diferentes regiones con ausencia de líneas. Debido a la baja resolución de los espectros de las campañas de La Palma, se decidió no comparar directamente anchuras equivalentes de líneas sino directamente el área encerrada por regiones comprendidas entre dos ventanas de continuo. Si la determinación del continuo fuese perfecta y no existiera luz difusa, los valores de las áreas calculadas deberían coincidir en ambos espectros. En el Panel A de la Figura 2.2 se observa el cociente entre las áreas en el espectro de

La Palma y el espectro del Atlas en función de la longitud de onda para un ajuste lineal del nivel de continuo. En dicho panel se puede ver que las diferencias en las áreas llegan a ser del 40 %, valores que resultan totalmente inaceptables. En los Paneles *B, C* se observan los cocientes para ajustes cuadráticos y cúbicos respectivamente. Se deduce que los mejores resultados se obtienen con el polinomio de tercer orden con un valor medio del cociente entre áreas de ≈ 5 %.

En las campañas de observación 2 a 6 en las que no se observó Procyon, la determinación del continuo se realizó con el mismo método, es decir, seleccionando las mismas ventanas espectrales y ajustando un polinomio de tercer orden. En cuanto a las observaciones en McDonald (campañas 7 y 8), en ambas se tomaron espectros de Procyon. El hecho de que las estrellas observadas en estas campañas tengan velocidades de rotación pequeñas, unido a la mayor resolución de estos espectros, hace que la determinación del continuo sea mucho más precisa para la mayoría de los órdenes de interés. No obstante, la presencia de líneas atmosféricas en el infrarrojo cercano dificulta tal determinación en algunas regiones (p.e., [6290 Å–6340 Å], [7750 Å–7790 Å]).

Una vez definido el continuo se puede retomar el problema de la luz difusa. En principio, centraremos nuestra atención en los espectros de las campañas de McDonald puesto que éstos serán los utilizados en el cálculo de abundancias. Son dos los parámetros que han de conocerse: la luz difusa del espectro observado relativo al espectro del Atlas y la luz difusa absoluta de este espectro. Este último parámetro fue medido por Steffen (1985) y se supone del 4 %. Respecto a la luz difusa del espectro observado relativo al espectro del Atlas, se observa en la Figura 2.3 que, en los espectros de McDonald, no hay diferencias sistemáticas en las anchuras equivalentes entre los espectros observados y los del Atlas. Por tanto no se ha considerado ninguna corrección relativa a la luz difusa y se ha tomado como EW real la medida en el espectro observado multiplicada por el factor 1.04.

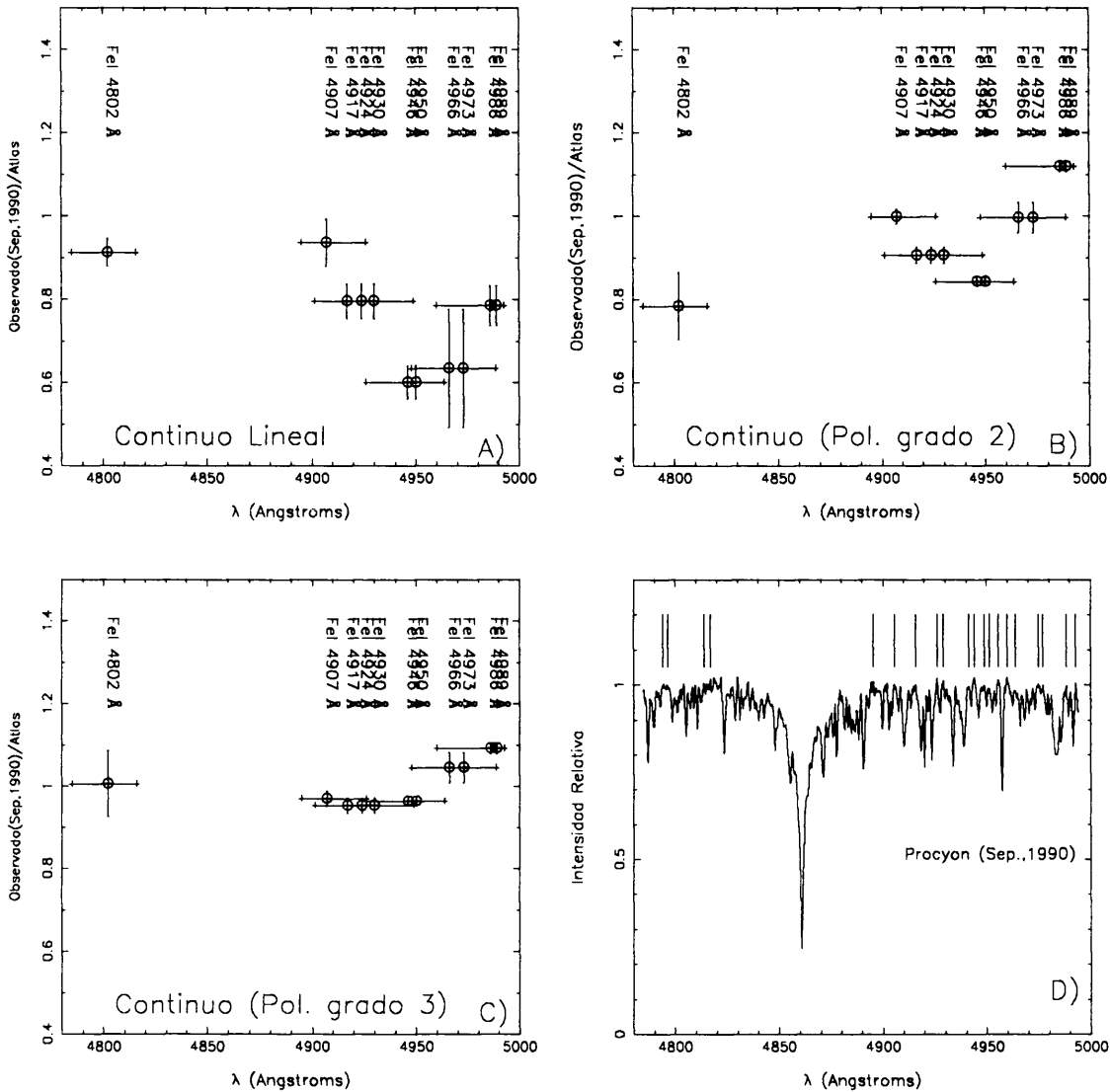
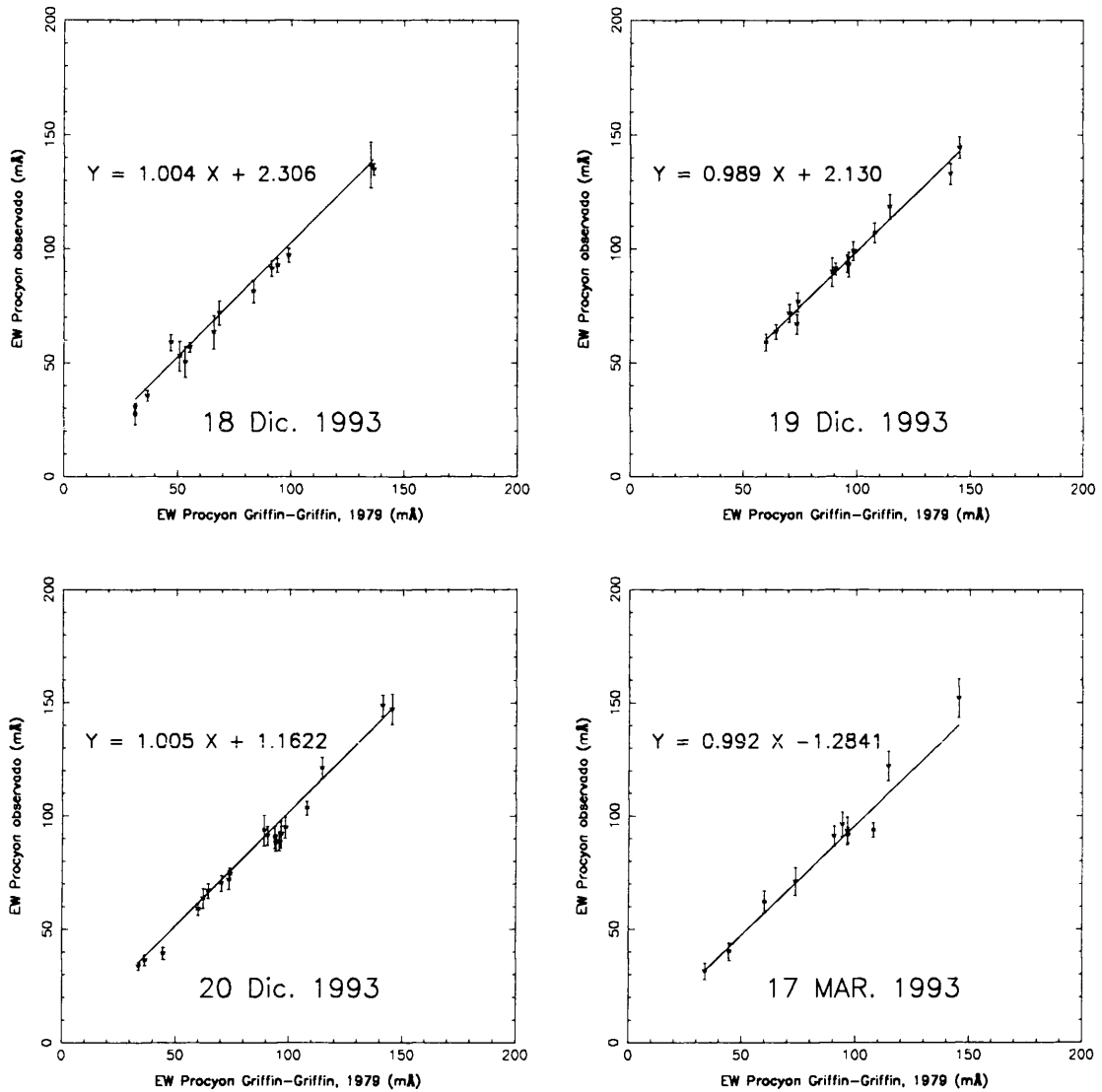


Figura 2.2

Cocientes entre las áreas de diferentes regiones espectrales en el espectro normalizado de Procyon (campaña 1) y en el espectro del Atlas con diferentes definiciones del nivel del continuo (Paneles A, B, C). Los mejores resultados se consiguen en C, donde se ha elegido un polinomio de tercer orden para el ajuste. Las longitudes de onda seleccionadas están marcadas con una línea vertical en D, donde también se representa el espectro de Procyon promedio de la campaña 1 ya normalizado mediante una determinación cúbica del nivel de continuo. En A, B, C las barras horizontales no indican errores sino que delimitan las regiones espectrales consideradas mientras que las barras verticales indican la desviación estándar en el cociente calculado.

**Figura 2.3**

Comparación entre el espectro observado y el espectro del Atlas de Procyon (campanías 7 y 8). Se puede observar que no es necesario aplicar ninguna corrección debido a luz difusa.

2.5 Perfil instrumental

El espectro de una estrella puede aparecer distorsionado por diferentes causas (difracción, aberraciones, ...). En cualquiera de estos casos, la estructura de las líneas espectrales pierde contraste. Las medidas del perfil instrumental constituyen un indicador de la importancia de dicha degradación.

Consideremos una fuente de luz que emite una línea espectral infinitamente estrecha a una longitud de onda λ_0 . Esta línea se puede representar como $\delta(\lambda - \lambda_0)$. Se define el perfil instrumental, $I(\lambda)$, como el espectro medido para dicha función δ . En general, un espectro $F(\lambda)$ se puede entender como una serie de funciones δ con la altura modulada por $F(\lambda)$. Cada una de esas funciones δ se transforma en $I(\lambda)$ en el espectro observado, estando cada $I(\lambda)$ desplazada a la longitud de onda de la función δ . El espectro observado es, por tanto, la suma de esas $I(\lambda)$ desplazadas (Gray, 1992a).

$$D(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\lambda - \lambda_0)F(\lambda_0)d\lambda = I(\lambda) * F(\lambda) \quad (2.8)$$

con el cero en longitud de onda en el centro de la región espectral de interés. En otras palabras, el espectro observado vendría dado por la convolución del perfil instrumental con el espectro real.

2.5.1 Métodos utilizados en el cálculo del perfil instrumental

Se han estudiado distintos métodos para la determinación del perfil instrumental. En aquellas campañas en las que se observaron espectros de arcos de calibración, se han utilizado las líneas de tales espectros. La calibración de los arcos, esto es, la transformación de píxel a longitud de onda en la dirección de dispersión, se realizó con tablas de torio-argón. Una vez que el espectro ha sido calibrado, las líneas del arco se ajustan a perfiles gaussianos y se calcula la anchura a media altura (que abreviaremos como FWHM a lo largo de este trabajo) correspondiente. Se sabe que una distribución gaussiana puede expresarse de la siguiente forma:

$$G(x; a, b, c) = a \cdot \exp[-\ln 2(2(x - b)/c)^2] \quad (2.9)$$

donde a es la altura de la gaussiana, b el valor central y c la FWHM. La relación

entre la anchura equivalente EW , la altura (a) y la FWHM (c) de una gaussiana viene dada por (Barlow, 1988)

$$EW = 1.064467 \cdot a \cdot c \quad (2.10)$$

Puesto que el ensanchamiento instrumental afecta a la forma de la línea pero mantiene constante su anchura equivalente, la EW correspondiente al perfil instrumental debe ser igual a la unidad. Con este supuesto, el cálculo de a es inmediato.

Las FWHM y la altura de los perfiles instrumentales de cada campaña de observación se resumen en la Tabla 2.8. Es de destacar la estabilidad del perfil instrumental a lo largo de la noche en las campañas 2, 4 y 6. En la campaña 3 solamente se tomó un arco por lo que no se pueden realizar pruebas de estabilidad.

En las campañas del Observatorio McDonald (campañas 7, 8) se observaron numerosos arcos cada noche. Para cada una de las noches de observación y a lo largo de la duración de cada campaña, se comprobaron las variaciones del perfil instrumental para aquellos órdenes de interés. En la Figura 2.4 se puede ver que los valores de FWHM permanecen constantes cada noche de la campaña 7 (dentro de las barras de error) excepto en la última noche. En la noche del 23 de Diciembre hay un incremento de la FWHM del perfil instrumental con el tiempo debido probablemente a condiciones atmosféricas: una variación en la temperatura del foco pudo ser la causa de esa falta de contraste. Un comportamiento análogo se puede encontrar en la campaña 8 en la que los valores de FWHM son semejantes al principio y al final de la noche sufriendo un incremento hacia la mitad de la misma.

En las campañas 1 y 5 no se realizaron observaciones de arcos de calibración. En la campaña 1 el cálculo del perfil instrumental se realizó comparando líneas aisladas en el espectro observado de Procyon y en el Atlas fotométrico de Procyon (Griffin y Griffin, 1979). En este método es necesario suponer que el ensanchamiento debido al perfil instrumental en el espectro del Atlas es despreciable. En la práctica, esta hipótesis no supone ninguna limitación ya que la resolución del espectro del Atlas es $0.005 \text{ \AA}/\text{píxel}$ a $\lambda = 4861.342 \text{ \AA}$. El ensanchamiento debido a rotación, macroturbulencia y microturbulencia será el mismo en ambos espectros, siendo el perfil instrumental que afecta al espectro de la campaña 1 la única fuente de ensanchamiento que los diferencie.

Puesto que la convolución de dos gaussianas es otra gaussiana, si G_a y G_b son

las gaussianas a convolucionar y G_c es el resultado, la FWHM de las tres funciones están relacionadas de la siguiente manera (Gray, 1992b):

$$C_c = \sqrt{(C_a)^2 + (C_b^2)} \quad (2.11)$$

Suponiendo que el perfil observado de la línea es la convolución del perfil instrumental con el perfil de la línea del Atlas y ajustando por gaussianas tanto el perfil instrumental como el perfil de línea del Atlas, se puede calcular la FWHM del perfil instrumental. Una vez calculada la FWHM del perfil instrumental, la altura del mismo vendrá dada por (2.7).

Si bien la selección de líneas aisladas no es un problema en el espectro del Atlas, ésta es más complicada en el espectro observado en la campaña 1 debido a su baja resolución, que implica que algunas líneas aparezcan solapadas. Por otra parte, las líneas elegidas no deben ser intensas (en general con una anchura equivalente menor que 100 mÅ), para obtener un óptimo ajuste gaussiano. En total se seleccionaron cinco líneas (Figura 2.5). En la Tabla 2.9 se muestran los parámetros del perfil instrumental final así como los perfiles instrumentales calculados individualmente con cada línea.

En la campaña 5 no se observaron ni espectros de Procyon ni arcos de comparación por lo que no fue posible calcular el perfil instrumental correspondiente.

Tabla 2.8: Perfiles instrumentales de las diferentes campañas de observación

Campaña	Tipo de arco	FWHM (Å)	Altura
1	No arcos observados		
2	Cu-Ar	1.041 ± 0.041	
	Cu-Ar	1.046 ± 0.045	
	Cu-Ar	1.040 ± 0.050	
	Cu-Ar	1.036 ± 0.049	
	Valor medio	1.041 ± 0.023	0.902 ± 0.019
3	Th-Ar	1.0724 ± 0.116	0.8760 ± 0.085
4	Th-Ar-Cu-Ne	0.721 ± 0.011	
	Th-Ar-Cu-Ne	0.733 ± 0.026	
	Th-Ar-Cu-Ne	0.699 ± 0.039	
	Th-Ar-Cu-Ne	0.737 ± 0.041	
	Th-Ar-Cu-Ne	0.722 ± 0.024	
	Th-Ar-Cu-Ne	0.744 ± 0.041	
	Th-Ar-Cu-Ne	0.722 ± 0.030	
	Th-Ar-Cu-Ne	0.715 ± 0.045	
	Valor medio	0.724 ± 0.011	1.297 ± 0.019
5	No arcos observados		
6	Cu-Ne-Ar	0.774 ± 0.016	
	Cu-Ne-Ar	0.786 ± 0.023	
	Valor medio	0.778 ± 0.013	1.207 ± 1.187
7 (18Dic-21Dic)	Th-Ar	Orden 2 : 0.131 ± 0.046	
	Th-Ar	Orden 4 : 0.137 ± 0.017	
	Th-Ar	Orden 5 : 0.133 ± 0.034	
	Th-Ar	Orden 8 : 0.137 ± 0.041	
	Th-Ar	Orden 17 : 0.143 ± 0.027	
	Th-Ar	Orden 26 : 0.157 ± 0.049	
	Valor medio	0.139 ± 0.0122	6.758 ± 0.545
7 (23Dic)	Th-Ar	Dependencia con el tiempo	
8 (17Mar)	Th-Ar	Dependencia con el tiempo	

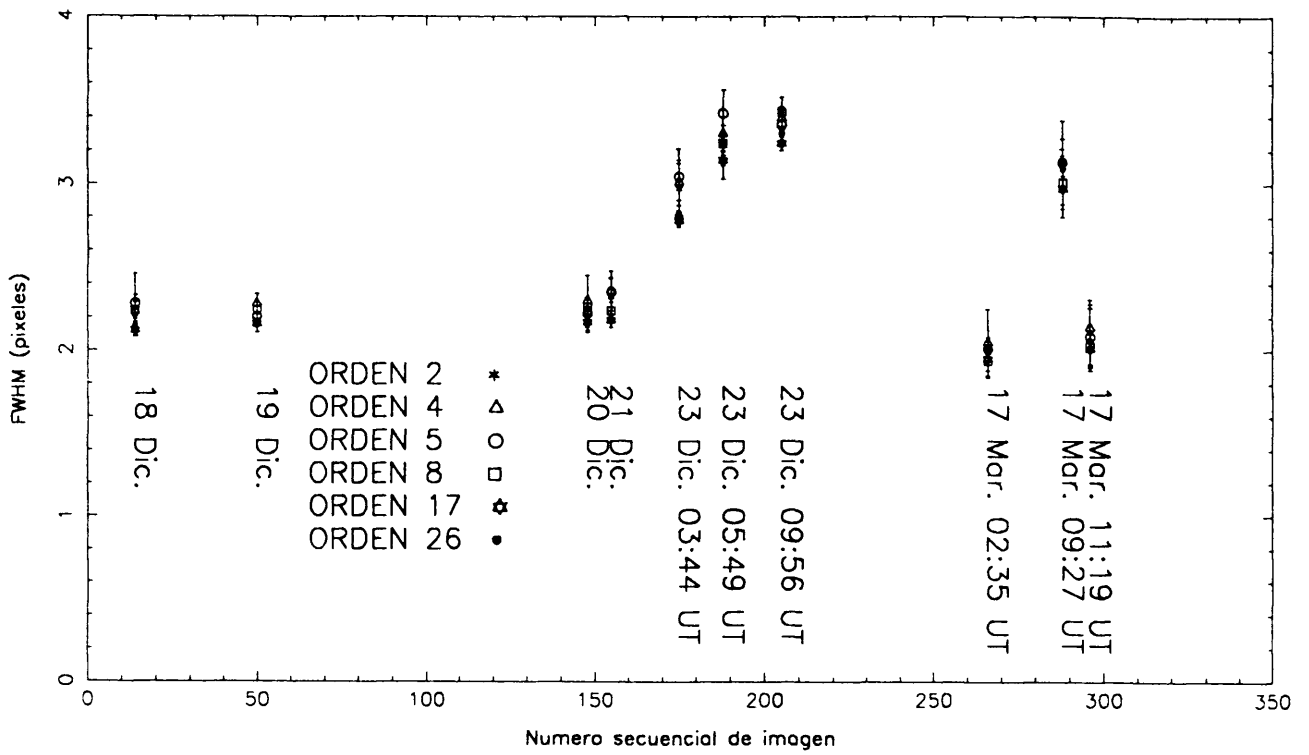


Figura 2.4

FWHM de los espectros de los arcos de las campañas Diciembre 1993 – Marzo 1994 en McDonald.

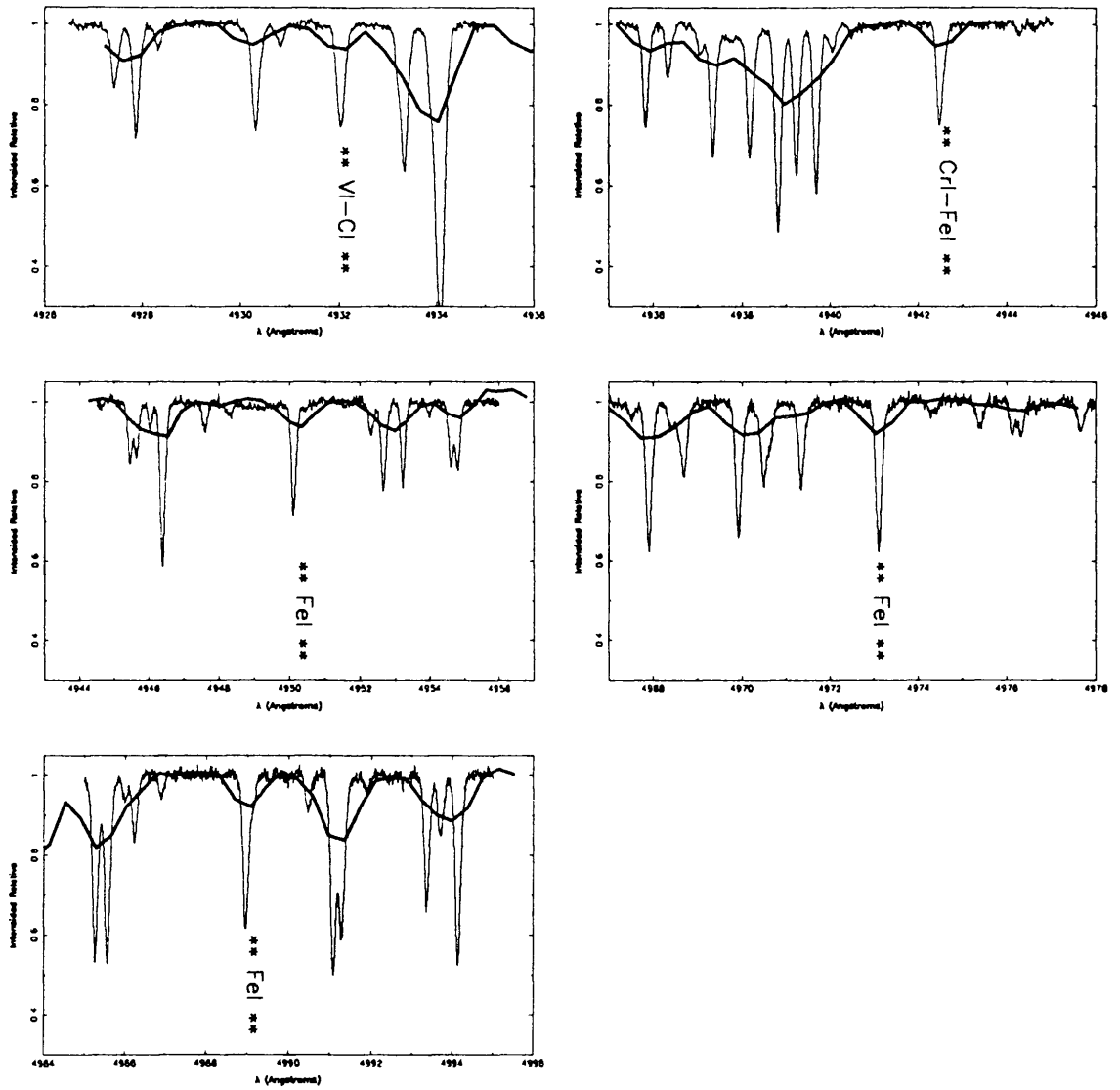


Figura 2.5

Líneas espectrales seleccionadas para el cálculo del perfil instrumental de la campaña 1. La línea de trazo grueso corresponde al espectro de Procyon de la campaña 1, mientras que la línea de trazo fino representa el espectro del Atlas.

Tabla 2.9: Parámetros gaussianos de los perfiles instrumentales calculados mediante diferentes líneas espectrales y del perfil instrumental medio para la campaña de observación 1.

Longitud de onda central (Angstroms)	Altura	FWHM (Angstroms)
4932.0 ± 0.013	1.218 ± 0.073	0.771 ± 0.042
4942.5 ± 0.024	1.501 ± 0.134	0.626 ± 0.106
4950.2 ± 0.041	1.102 ± 0.342	0.852 ± 0.068
4973.5 ± 0.044	1.441 ± 0.159	0.652 ± 0.106
4989.6 ± 0.039	1.337 ± 0.184	0.703 ± 0.107

Perfil Instrumental Promedio

Altura (Angstroms)	FWHM (píxeles)
1.2359 ± 0.056	0.7601 ± 0.031

2.6 Ruido espectral. Definición y medida

La idoneidad de un sistema de medida se expresa normalmente en términos de un parámetro denominado **relación señal-ruido**. En nuestro caso, la señal es el número total de fotones detectados en un píxel dado, n_s . Si la señal se registra repetidas veces bajo idénticas condiciones, se obtendrá una señal media $\langle n_s \rangle$ con una desviación estadística alrededor del valor medio del número de fotones detectados. La desviación estándar, dada por $\sqrt{n_s}$, es lo que se denomina **ruido**.

En ausencia de ruido sería posible detectar cualquier fuente de fotones. Sin embargo el ruido siempre está presente y generalmente constituye la principal limitación en el proceso de medida. Los orígenes del ruido son diversos y normalmente se encuadran dentro de una de las tres categorías siguientes (Gray, 1992c): (1) ruido debido a los fotones procedentes de la estrella, (2) ruido debido a los fotones del fondo de cielo y (3) ruido instrumental. Las categorías (1) y (2) constituyen fuentes inevitables de ruido que representan un mínimo teórico.

El ruido instrumental proviene de *corrientes de oscuridad* ("dark current" en inglés) y *ruido de lectura* ("readout noise" en inglés) en los detectores CCD (Schroeder, 1987). La *corriente de oscuridad* se define como la respuesta del detector cuando no está iluminado y se mide generalmente como el error cuadrático medio del voltaje de la corriente. Por otro lado, cada transferencia de carga tiene una fluctuación asociada cuya desviación estándar se mide en número de electrones por lectura. Este número es el llamado *ruido de lectura*.

El ruido fotónico proviene de la irregularidad en el tiempo de llegada de los fotones. Estas fluctuaciones vienen descritas por la estadística de Bose-Einstein: la fluctuación cuadrática media, Δn (fot./s.) de una fuente térmica con temperatura característica T , viene dada por (Gray, 1992c)

$$\Delta n = n^{1/2} (1 + 1/(e^{h\nu/kT} - 1))^{1/2} \quad (2.12)$$

Esta relación es ligeramente diferente en el caso de fuentes no térmicas (Fellgett, 1955; Smith *et al.*, 1957). Puesto que $h\nu$ es considerablemente mayor que kT en la mayoría de los casos, la distribución se puede aproximar por una distribución de Poisson, quedando

$$\Delta n = n^{1/2} \quad (2.13)$$

Se puede demostrar (Kitchin, 1992; Schroeder, 1987; Gray, 1992c) que la *relación señal-ruido* en los casos en que el ruido de fondo y el instrumental son mucho más pequeños que la señal ($B \ll L$) viene dada por

$$S/R \approx L^{1/2} \quad (2.14)$$

Se puede ver que, suponiendo un flujo constante de fotones en el tiempo, el resultado mejora con la raíz cuadrada del tiempo de integración. En el caso contrario, donde $L \ll B$, que implica una señal pequeña superpuesta a un fondo intenso, se obtiene (Gray, 1992c):

$$S/R \approx L/(2B)^{1/2} \quad (2.15)$$

En este caso L se debería aumentar con un telescopio mayor, una mejor instrumentación..., y B se debería disminuir por medio de mejores detectores, cielo más oscuro, etc...

Una forma diferente de determinar la *relación señal-ruido* es trabajar directamente sobre el espectro unidimensional y normalizado. En él, el valor de la intensidad en las regiones carentes de líneas deberá ser 1. Debido a la existencia de ruido, en estas regiones se obtendrá un valor medio cercano a 1 y una desviación estándar que representará la *relación señal-ruido*. En las Tablas 2.2, 2.3 y 2.4 se da una estimación de la *relación señal-ruido* para los espectros de La Palma y de McDonald. Una $S/R \approx 140-160$ es característica de los espectros de La Palma mientras que $S/R \approx 80-100$ representa correctamente la mayoría de las observaciones de McDonald.

Capítulo 3

Deconvolución

3.1 Ecuaciones integrales lineales. Definición y notación.

La forma más general de una ecuación integral lineal viene dada por la expresión

$$\alpha(x)f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,y)f(y)dy = g(x) \quad (3.1)$$

donde λ y $\alpha(x)$ son conocidas. La función $f(y)$ se denomina *función fuente* y tiene que determinarse, mientras que $g(x)$ es la *función de datos* y $k(x,y)$ es el *núcleo de la ecuación*, ambas conocidas.

Cuando $\alpha(x)$ es nula, la ecuación integral se denomina de *primera clase*, mientras que si $\alpha(x) = 1$ se denomina de *segunda clase*. Igualmente, las ecuaciones integrales se pueden clasificar atendiendo a si los límites de integración a y b dependen o no de x . Así, cuando a y b son constantes y $\alpha(x) = 0$, la ecuación

$$\int_a^b k(x,y)f(y)dy = g(x) \quad (3.2)$$

se denomina *ecuación de Fredholm*. Estudios como, por ejemplo, el cálculo de la función de respuesta instrumental o la distribución de estrellas en una galaxia requieren la resolución de *ecuaciones de Fredholm*. Si a es constante y $b(x) = x$ la ecuación resultante

$$\int_a^x k(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (3.3)$$

se conoce con el nombre de *ecuación de Volterra*. En Astronomía se utilizan *ecuaciones de Volterra*, por ejemplo, en el cálculo de la densidad estelar de un cúmulo globular o en la distribución de velocidades de rotación de una muestra de estrellas en un intervalo $v, v + dv$ (Craig *et al.*, 1986)

Un tipo especial de *ecuaciones de Fredholm* de primera clase lo constituyen aquellas ecuaciones en las que el núcleo es una función de $x-y$ solamente, esto es

$$k(x, y) = k(x - y) \quad (3.4)$$

y donde los límites de integración son $a = -\infty, b = \infty$. La ecuación resultante queda como

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x - y)f(y)dy = g(x) \quad (3.5)$$

que se conoce con el nombre de *convolución de las funciones f y k* . Se define la función h , convolución de las funciones f y g como

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy \quad (3.6)$$

siendo f y g dos funciones definidas en todo el intervalo real $[-\infty, +\infty]$.

La convolución, representada generalmente por el símbolo $f * g$, cumple las propiedades básicas de la multiplicación de funciones, esto es:

- $f * g = g * f$
- $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1(f_1 * g) + \alpha_2(f_2 * g) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$

siendo f, g, h cualquier terna de funciones. Por tanto, el conjunto de funciones definidas en todo el intervalo real con las operaciones usuales de adición y multiplicación por escalar y con la operación de convolución para la multiplicación de elementos, junto con la norma

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \quad (3.7)$$

es un *álgebra de Banach* (para esta norma $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$).

3.2 El problema de la deconvolución

Sea la siguiente ecuación integral

$$g(x) = \int_0^x f(y)dy \quad (3.8)$$

En principio se podría pensar que la ecuación integral anterior tiene la siguiente solución analítica

$$f(y) = (dg/dy)_{x=y} \quad (3.9)$$

En general, este problema, que desde un punto de vista matemático parecería resuelto, presenta un inconveniente en la práctica: pequeños cambios en la función $g(x)$ dan lugar a variaciones importantes en la función $f(y)$. Esto es debido al hecho de que dos funciones arbitrariamente cercanas (respecto de una cierta norma) en el espacio de funciones, pueden aparecer arbitrariamente separadas en el espacio de las derivadas (Figura 3.1). En el Panel derecho de esta figura se representan dos funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - e^{-0.8 \cdot x} \\ g(x) &= 1 - e^{-0.8 \cdot x} + 0.05 \cdot \sin 10 \cdot x \end{aligned}$$

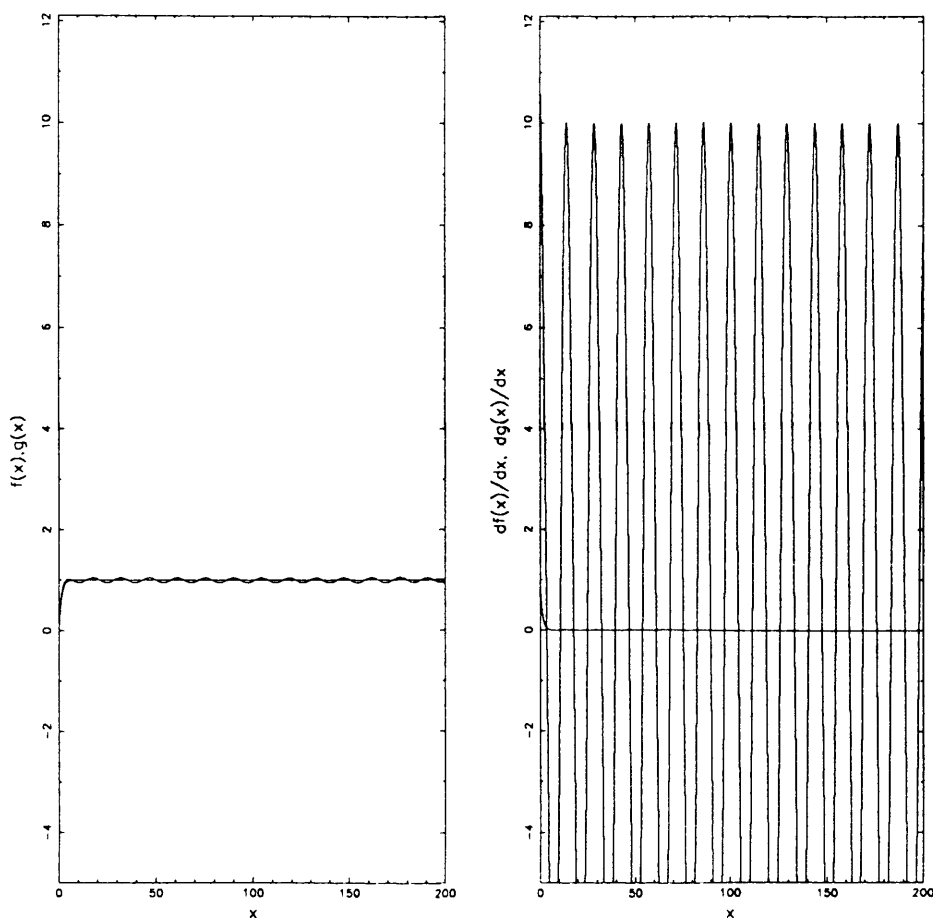
En el Panel izquierdo aparecen representadas sus derivadas. Se observa que, aunque las funciones $f(x)$, $g(x)$ se encuentran próximas respecto a una cierta norma, éstas difieren considerablemente en el espacio de las derivadas. Por tanto, la solución de (3.9) es inestable frente a cambios de altas frecuencias en $g(x)$.

En este trabajo, entenderemos por deconvolución aquél o aquellos métodos de resolución de la siguiente ecuación integral

$$i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x-x')o(x')dx' \quad (3.10)$$

donde $i(x)$ es el espectro observado, $s(x-x')$ es la *función de respuesta* (un perfil instrumental o un perfil de rotación, por ejemplo) y $o(x)$ es el espectro corregido de toda distorsión o ensanchamiento.

Tal y como se argumentó anteriormente, diversos factores como, por ejemplo, la existencia de un cierto nivel de ruido en las observaciones imposibilitan la obtención

**Figura 3.1**

Efecto de las inestabilidades sobre la solución de la ecuación integral (3.9).

del espectro real. No obstante, una estimación de dicho espectro puede venir dada por

$$o'(x) = o(x) + \theta(x) \quad (3.11)$$

donde $\theta(x)$ es el error residual debido a ruido, distorsiones, etc. Según esto es fácil deducir que un algoritmo de deconvolución será tanto más efectivo cuanto más pequeño haga el residuo, $\theta(x)$. Por tanto, una segunda definición de deconvolución podría ser aquella que la describe como el proceso de búsqueda de la mejor estimación de $o(x)$ para un espectro observado, $i(x)$, y con una cierta *función de respuesta*, $s(x)$.

3.3 Métodos de deconvolución lineales

Desde un punto de vista histórico, los métodos de deconvolución se pueden clasificar en *lineales* y *no lineales*. Los primeros, caracterizados por el hecho de que el espectro deconvolucionado es una combinación lineal de las funciones iniciales (el espectro observado y la *función de respuesta*, en nuestro caso), tienen como ventaja su rapidez y su relativa simplicidad. Sin embargo, y en cierto sentido debido a esta simplicidad, presentan varias desventajas, resueltas únicamente con los llamados *métodos no lineales con constreñimientos*. Citemos a continuación algunos métodos de ambos grupos.

3.3.1 Método iterativo

La ecuación (3.10) se puede escribir en forma discreta como

$$i_m = \sum_k s_{m-k} o_k \quad (3.12)$$

Suponiendo que la *función de respuesta* tiene un número de puntos impar y finito, y considerando la conmutatividad de la convolución, la ecuación (3.12) se puede escribir como

$$i_m = \sum_{l=-L}^{l=L} s_l o_{m-l} \quad (3.13)$$

Por motivos de simplicidad, supondremos que la *función de respuesta* alcanza el máximo en $l = 0$. Por otra parte, supongamos que el espectro real, $o(x)$ se anula para subíndices menores o iguales que $1 - L$. En el caso particular en que $L = 1$ y $m = 0$, el primer valor, i_0 , es

$$i_0 = o_1 s_{-1} \quad (3.14)$$

y la primera estimación del espectro real será:

$$o_1 = i_0 / s_{-1} \quad (3.15)$$

De la misma manera, el siguiente valor, i_1 , y la siguiente estimación vendrán dadas por:

$$i_1 = o_1 s_0 + o_2 s_{-1} \quad (3.16)$$

$$o_2 = (i_1 - o_1 s_0)/s_{-1} = (i_1 - i_0 s_0/s_{-1})/s_{-1} \quad (3.17)$$

Procediendo de forma iterativa, se puede demostrar que la $(k + 1)$ -ésima estimación viene dada por la siguiente expresión:

$$o_{k+1} = (i_{k-L+1} - \sum_{l=-L+1}^L s_l o_{k-L+1-l})/s_{-L} \quad (3.18)$$

No obstante, en la práctica el espectro observado presentará un cierto nivel de ruido, por lo que una expresión más precisa de (3.15) vendrá dada por:

$$o_1 = (i_0 + n_0)/s_{-1} = i_0/s_{-1} + n_0/s_{-1} \quad (3.19)$$

En general, los valores en los extremos de la *función de respuesta* son pequeños comparados con los valores centrales (p.e., perfil gaussiano). Esta forma particular de los perfiles tiene una influencia crítica en el proceso iterativo, puesto que ya en la primera iteración el error asociado, n_0/s_{-1} , será importante debido a que el divisor es pequeño. Además este error se propagará y crecerá en cada iteración.

3.3.2 Método de Van Citter

Más sofisticado que el previamente descrito, este método fue desarrollado por Van Citter (1931) y se basa en el siguiente argumento. Así como el espectro observado, $i(x)$, es considerado como una primera aproximación del espectro real, $o(x)$, (de hecho, si no se aplica deconvolución, el espectro observado se considera como real), también se puede suponer que la primera estimación $o_0(x)$ constituye una primera aproximación del espectro observado, $i_0(x)$. De esta manera, se puede establecer una relación entre las diferencias del espectro observado y su aproximación ($i(x) - i_0(x)$) y del espectro real y su aproximación ($o(x) - o_0(x)$) mediante la siguiente expresión:

$$o_1(x) = o_0(x) + [i(x) - s(x) * o_0(x)] \quad (3.20)$$

donde $*$ significa convolución. En general, se tiene

$$o^{(k+1)}(x) = o^{(k)}(x) + [i(x) - s(x) * o^{(k)}(x)] \quad (3.21)$$

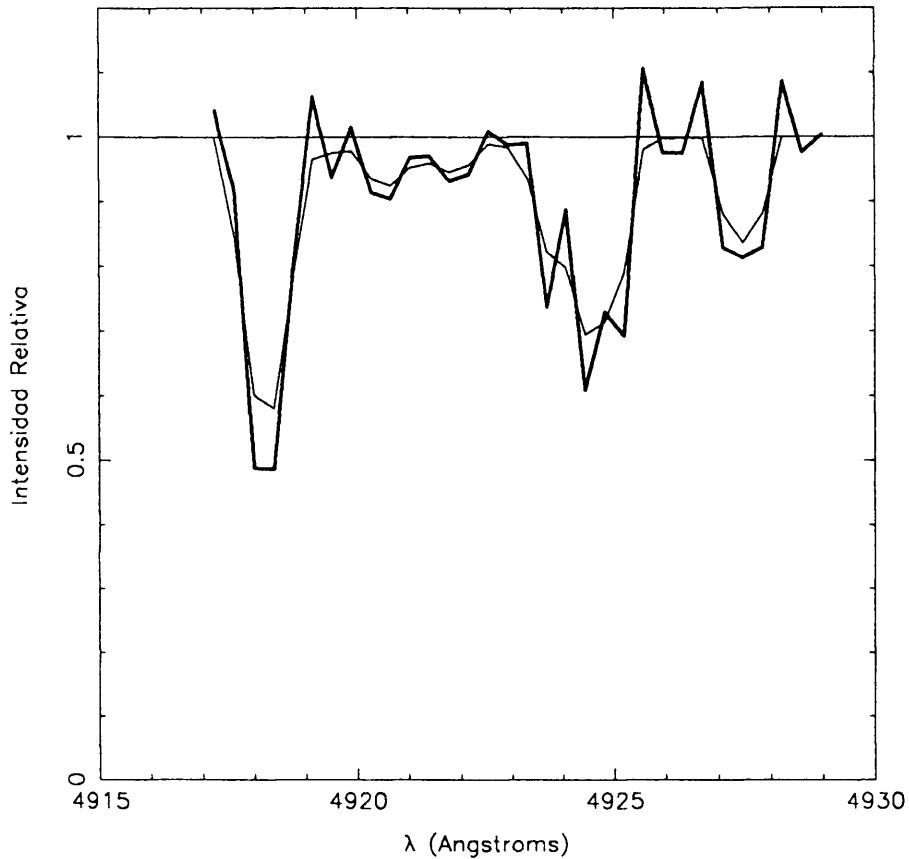


Figura 3.2

Perfil espectral obtenido mediante el algoritmo de Van Citter. La línea de trazo fino representa la convolución de un espectro sintético generado con ATLAS8 (Kurucz, 1979a) con un perfil instrumental. La línea de trazo grueso representa el espectro deconvolucionado obtenido tras tres iteraciones. Se observa que el espectro deconvolucionado presenta, a algunas longitudes de onda, una intensidad mayor que el nivel del continuo.

Al representar los sucesivos espectros obtenidos en las distintas iteraciones, si bien cualitativamente se obtienen unos perfiles más nítidos y estrechos en cada iteración, las líneas de absorción toman valores por encima del nivel del continuo y por ello cualquier medida realizada sobre las líneas (anchuras equivalentes, anchura a media altura...) carecerá de sentido físico, desaconsejando, por tanto, la utilización de este método (Figura 3.2).

3.3.3 Formulación matricial

Una visión diferente del problema de la deconvolución se obtiene utilizando la expresión matricial asociada a (3.13):

$$\mathbf{i} = \mathbf{s} \times \mathbf{o} \quad (3.22)$$

donde \mathbf{i} y \mathbf{o} son vectores columna donde $[\mathbf{i}]_n = i_n$ y $[\mathbf{o}]_m = o_m$. Los elementos de \mathbf{s} vienen dados por $[\mathbf{s}]_{mn} = s_{n-m}$. Es fácil demostrar que la matriz \mathbf{s} presenta una cierta simetría: cada línea es similar a la anterior pero desplazada un elemento hacia la derecha. Esta propiedad se puede expresar como:

$$[\mathbf{s}]_{jk} = [\mathbf{s}]_{mn} \quad (3.23)$$

con $j-k = n-m$. Este tipo de matriz recibe el nombre de *Matriz de Toeplitz*.

La estimación del espectro real puede obtenerse de (3.22) invirtiendo la matriz \mathbf{s} , esto es

$$\mathbf{o} = [\mathbf{s}]^{-1} \mathbf{i} \quad (3.24)$$

Al utilizar este método puede surgir el problema del tamaño de la matriz \mathbf{s} , que puede llegar a ralentizar el proceso de computación. Sin embargo, el mayor problema es la simetría anteriormente mencionada: cada fila es similar a la anterior, por ello la "información adicional" proporcionada por cada fila nueva es mínima. Si todas las filas fueran idénticas, la matriz \mathbf{s} sería *singular*, su determinante sería nulo y la ecuación (3.24) no tendría solución. En nuestro caso, la matriz recibe el nombre de *mal condicionada*, que significa que pequeñas perturbaciones en \mathbf{i} (debidas a ruido, por ejemplo) producirán grandes fluctuaciones en la estimación de \mathbf{o} . La solución a este problema se basa en la utilización de métodos iterativos que, ya sea automáticamente, con un algoritmo, o subjetivamente con la interpretación del investigador, controlen las fluctuaciones que puedan ocurrir en las diferentes iteraciones. Veamos dos métodos basados en esta idea y que constituyen la base de los *métodos no lineales con constreñimientos* que serán estudiados en la siguiente sección.

3.3.4 Método del punto simultáneo

La ecuación (3.12) puede escribirse en función de los elementos de la diagonal como:

$$i_n = [s]_{nn} + \sum_{n \neq m} [s]_{nm} o_{nm} \quad (3.25)$$

ó

$$o_n = (1/[s]_{nn}) \cdot (i_n - \sum_{n \neq m} [s]_{nm} o_m) \quad (3.26)$$

Escribiendo cada iteración en función de la anterior, se puede obtener la siguiente fórmula general:

$$o_n^{k+1} = \overbrace{o_n^k}^1 + \overbrace{(i_n - \sum_m [s]_{nm} o_m^k) / [s]_{nn}}^2 \quad (3.27)$$

Este algoritmo es conocido como *Método del punto simultáneo, del punto de Jacobi ó método de los desplazamientos simultáneos*. No hay garantía de que el segundo término de (3.27) sea del mismo orden de magnitud que el primer término. Si la diferencia en magnitud es demasiado grande, no se alcanzará convergencia. A causa de ello se utiliza un factor corrector, k , quedando la ecuación como

$$o_n^{(k+1)} = o_n^k + (k/[s]_{nn}) \cdot (i_n - \sum_m [s]_{nm} o_m^k) \quad (3.28)$$

Este algoritmo recibe el nombre de *Método de sobrerrelajación del punto simultáneo*. Es fácil constatar que el *método de Van Citter* previamente citado es un caso particular de éste, tomando $k = [s]_{nn}$ (Jansson, 1968; 1970).

3.3.5 Método del punto sucesivo

Para calcular el valor de un determinado punto en la k -ésima iteración, $o_n^{(k+1)}$, se necesita el valor de la estimación previa en ese punto, o_n^k , y un cierto número de puntos alrededor de él. Como normalmente o_n^k se calcula para n creciente, no hay necesidad de utilizar valores antiguos cuando, para $m < n$, existen valores de una iteración posterior disponibles. Según esto, (3.28) se puede escribir como:

$$o_n^{(k+1)} = o_n^k + (k/[s]_{nn}) \cdot (i_n - \sum_{m < n} [s]_{nm} o_m^{(k+1)} - \sum_{m \geq n} [s]_{nm} o_m^k) \quad (3.29)$$

y recibe el nombre de *Método de relajación del punto sucesivo*, *Método de los desplazamientos sucesivos* ó *Método de Gauss-Seidel*. Una de las diferencias con el algoritmo del *punto simultáneo* es que, si bien (3.28) puede usarse en orden creciente o decreciente indistintamente, (3.29) debe usarse sólo en orden creciente.

Puesto que este algoritmo utiliza información más reciente que el *método del punto simultáneo*, la convergencia es más rápida. Sin embargo, debido a su modo de operar, pueden aparecer leves asimetrías en las líneas espectrales obtenidas. Algunos autores (p.e., Allebach, 1981) han propuesto métodos alternativos para preservar la simetría utilizando la información más reciente. Algunas de estas alternativas están basadas en calcular nuevos valores en orden ascendente para n par y en orden decreciente para n impar, o utilizar métodos de Monte Carlo para la elección de n .

3.4 Métodos no lineales con constreñimientos

Una mejora sustancial en los resultados obtenidos en el proceso de deconvolución se puede conseguir utilizando los llamados *métodos no lineales con constreñimientos*. Se denominan *no lineales* debido a que el espectro calculado no es una combinación lineal del espectro observado y de la *función de respuesta*, mientras que el término *con constreñimientos* significa que la estimación obtenida tras la aplicación del algoritmo está obligada a satisfacer alguna condición impuesta *a priori*. Normalmente se utilizan condiciones espaciales, que obligan a las soluciones a anularse fuera de la región con límites conocidos como, por ejemplo, el forzar a la estimación de un espectro de absorción a mantenerse entre los valores 0 y 1 (suponiendo un espectro normalizado con el valor del continuo igual a 1).

3.4.1 Método de Jansson

Es el método utilizado en nuestro análisis. Fue utilizado por primera vez en espectros de absorción en el rango infrarrojo (Jansson, 1984). El algoritmo se basa en los métodos matriciales y de Van Cittert anteriormente citados, pero con un factor de relajación que depende de la estimación o^k , esto es:

$$o^{(k+1)} = o^k + r[o^k][i - s * o^k] \quad (3.30)$$

donde * significa convolución.

Con el fin de satisfacer la condición de que el espectro de absorción tome valores entre 0 y 1, se han utilizado funciones de relajación del tipo

$$r[o^k] = r_0 \tag{3.31}$$

si o^k toma valores entre 0 y 1, siendo $r[o^k] = 0$ para el resto. En principio sería conveniente escoger un valor suficientemente grande de r_0 que proporcionase sobre-correcciones típicas de los métodos de relajación, las cuales acelerarían la convergencia. Sin embargo, si r_0 es demasiado grande, el proceso podría diverger por lo que en la práctica su valor se calcula mediante *prueba y error*.

Una de las principales desventajas en la elección de funciones de relajación similares a (3.30) radica en su rigidez: aquellos valores que no tienen significado físico en el espectro se igualan a cero a lo largo de todas las iteraciones del proceso. Por ello, aunque el espectro final tenga significado físico, es decir, que la intensidad de las líneas de absorción varíe entre 0 y 1, no será la mejor estimación del espectro real. Una definición más adecuada de la función de relajación podría ser aquella que sustituyera los valores sin significado físico por otros valores realistas. Esto se consigue con funciones de relajación del tipo:

$$r[o^k] = r_0[1 - 2 | o^k(x) - 0.5 |] \tag{3.32}$$

La función definida en (3.32) alcanza el máximo en el centro de la región permitida, decreciendo simétricamente hacia cero en los extremos y tomando valores negativos fuera del intervalo físico, esto es, a cada punto se le asigna un determinado peso estadístico dependiendo de su significado físico.

Además de la función anteriormente citada, otras dos funciones de relajación comúnmente utilizadas son

$$r^k[o^{k-1}(x)] = r_{max}^k[o^{(k-1)}(x)(1 - o^{(k-1)})]^p \tag{3.33}$$

(Wilsson, 1973), donde p normalmente toma el valor 1 y que se puede escribir de forma generalizada para un intervalo $[A,B]$ como (Frieden, 1975)

$$r^k[o^{k-1}(x)] = C[1 - 2(B - A)^{-1} | o^{k-1}(x) - (A + B)/2 |] \tag{3.34}$$

y

$$r^k[o^{k-1}(x)] = r_{max}^k \exp[-(y - 0.5)^2/0.11] \quad (3.35)$$

que se denomina *función de relajación gaussiana*. En el próximo apartado se estudiará la eficiencia de cada una de estas funciones de relajación.

3.4.2 Aplicación de los métodos no lineales con constreñimientos

Consideraciones previas

Con el fin de entender cómo afectan los distintos algoritmos a un espectro, se ha utilizado el espectro sintético de Procyon (α CMi) generado mediante los modelos de atmósferas de Kurucz (1979a). Como parámetros físicos de Procyon se han tomado $T_{eff} = 6500$ K, $\log g = 4.0$, $[M/H] = 0.0$ (Steffen, 1985). El parámetro *fuerza del oscilador* se ha determinado, para cada línea, haciendo coincidir la anchura equivalente de la línea sintética con la anchura equivalente que posee dicha línea en el espectro fotométrico del Atlas de Procyon (Griffin y Griffin, 1979) según el método descrito en el Capítulo VI. Para la microturbulencia se eligió un valor de 2.0. El estudio se ha realizado en el rango espectral comprendido entre 4917 Å y 4929 Å.

Se han considerado dos fuentes de ensanchamiento. Por una parte el perfil instrumental, que se considera gaussiano y que se calculó previamente en la Sección 2.5 y por otra, el ensanchamiento rotacional, que será estudiado en el Capítulo IV.

Elección de la función de relajación

En este apartado consideraremos solamente el ensanchamiento del perfil de línea debido a la respuesta instrumental calculada en el Capítulo II. Se ha seleccionado el perfil instrumental de La Palma ya que su influencia es mucho mayor que la del perfil instrumental de McDonald. El procedimiento seguido ha consistido en convolucionar un espectro sintético, generado con ATLAS8 (Kurucz, 1979a), con el perfil instrumental y aplicar el algoritmo de deconvolución con las funciones de relajación (3.32), (3.33) y (3.35).

Tal y como se comentó en el Capítulo II, el perfil instrumental de la mayoría de los espectrógrafos es de tipo gaussiano por lo que su convolución con el espectro se traduce en una atenuación de la intensidad en las frecuencias espectrales más altas

del mismo. Durante la deconvolución, este proceso se invierte y las altas frecuencias se intensifican.

Los resultados obtenidos con las diferentes funciones de relajación (*Jansson*, *Wilsson*, *gaussiana*) y distintos factores de relajación (2.0, 4.0, 8.0 y variable con el número de iteraciones) se muestran en las Figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6. Se decidió calcular áreas de regiones cuyos extremos se encuentren en ventanas del continuo, mejor que anchuras equivalentes de líneas individuales para reducir los errores aleatorios para cada línea tal y como se comentó en el Capítulo II (Sección 2.4). Con vistas a estudiar la convergencia de los distintos algoritmos se ha estudiado la variación del área encerrada por el espectro en las 60 primeras iteraciones, comparándolas con la EW inicial. En rigor, las anchuras equivalentes inicial y final deben ser iguales.

Se pueden extraer varias conclusiones de las Figuras 3.3 a 3.6. Primeramente, se puede observar que la *función de relajación gaussiana* no conserva las líneas de absorción en el rango real [0-1] (Figura 3.6). Aunque no se generan líneas ficticias, las anchuras equivalentes no son reales, por lo que no se utilizará en nuestro estudio.

Por lo que respecta a las otras dos funciones de relajación, se puede apreciar que ambas parecen mostrar el mismo tipo de comportamiento, aunque la *función de Wilsson* necesita un mayor número de iteraciones para converger y, por tanto, para una iteración dada la *función de Jansson* proporcionará una estimación más real de la anchura equivalente (EW). Por tanto, seleccionamos la *función de Jansson* como la más adecuada. Con relación al factor de relajación que debe utilizarse, se constató que para valores mayores que $r = 4.0$ el algoritmo diverge a partir de cierta iteración. Así, por ejemplo, para $r = 8.0$, el algoritmo diverge a partir de la tercera iteración. Una alternativa consiste en definir el factor de relajación de tal forma que dependa del número de iteraciones, de tal manera que sea pequeño en las primeras y vaya aumentando con ellas. La dependencia del factor de relajación con el número de iteraciones se ha tomado como

- $r = 0.5$ $0 < \text{num. it.} < 10$
- $r = 1.0$ $10 < \text{num. it.} < 20$
- $r = 2.0$ $20 < \text{num. it.} < 30$
- $r = 3.5$ $30 < \text{num. it.} < 40$
- $r = 5.0$ $40 < \text{num. it.} < 60$

En la Figura 3.7 se muestran los resultados de aplicar a un espectro real (*V644 Her*) la función de Jansson con diferentes factores. *V644 Her* tiene una velocidad de rotación muy pequeña ($v \cdot \sin i \leq 20 \text{ km s}^{-1}$) de forma que el ensanchamiento rotacional puede despreciarse. Los resultados para $r = 2$ y $r = r(\text{it.})$ son bastante similares, mientras que para $r = 4$ el algoritmo diverge. Los cocientes entre la anchura equivalente inicial y la obtenida tras 60 iteraciones son, en todos los casos, mayores que las obtenidas en las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5.

Otro estudio realizado con vistas a decidir qué factor de relajación utilizar consistió en tomar una función δ (cuya anchura a media altura (FWHM) sería cero por definición), hacer su convolución con diferentes perfiles de ensanchamiento para producir líneas espectrales con diferentes FWHMs y aplicar el algoritmo de deconvolución utilizando distintos factores de relajación. En la Figura 3.8 se muestran los resultados obtenidos al utilizar un factor constante ($r = 2.0$) y un factor variable ($r = r(\text{it.})$).

Se puede observar que, aunque la función δ no se vuelve a reproducir (de hecho, cuanto mayor sea la FWHM del perfil de ensanchamiento, mayor es la diferencia entre la FWHM de la línea resultante de la deconvolución y la FWHM de la función δ), las diferencias son menores si se utiliza un factor de relajación variable.

Por consiguiente se puede concluir que, entre todas las funciones y los factores estudiados, es la función de relajación de Jansson junto con el factor de relajación dependiente del número de iteraciones la que proporciona los mejores resultados y, consecuentemente, la que será utilizada en este trabajo.

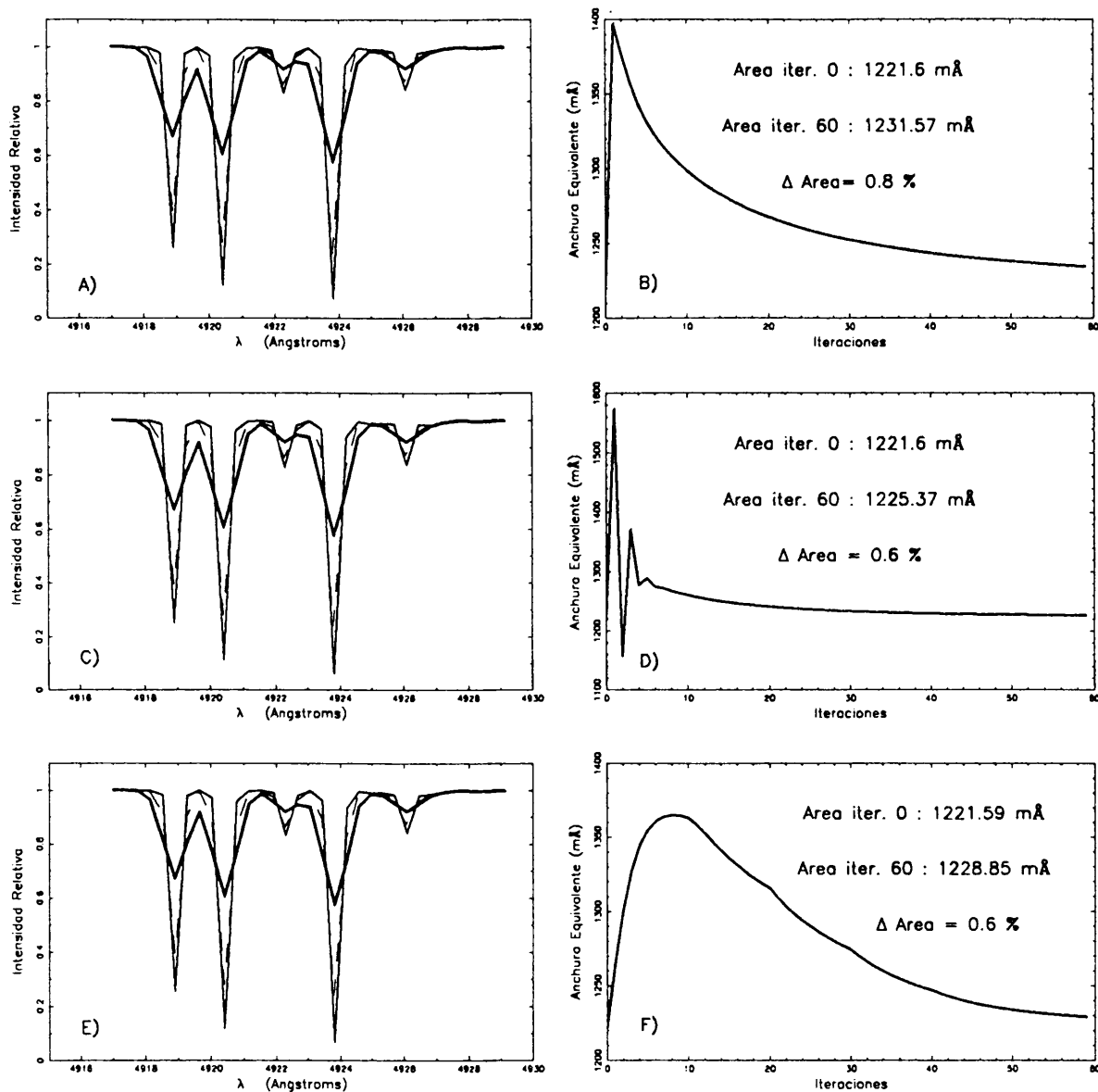


Figura 3.3

Resultados obtenidos con la *función de relación de Jansson* utilizando diferentes factores ($r=2.0$ en Paneles A, B, $r=4.0$ en Paneles C, D y r variable con el número de iteraciones, $r = r(it.)$, en Paneles E, F). La línea de trazo fino representa el espectro obtenido tras la deconvolución. La línea discontinua se refiere al espectro sintético mientras que la línea de trazo grueso representa el espectro sintético tras su convolución con el perfil instrumental. Las diferencias entre el espectro original (línea discontinua) y el deconvolucionado (línea continua de trazo fino) son inapreciables. El factor $r = 8.0$ no se utilizó ya que el algoritmo diverge a partir de la tercera iteración.

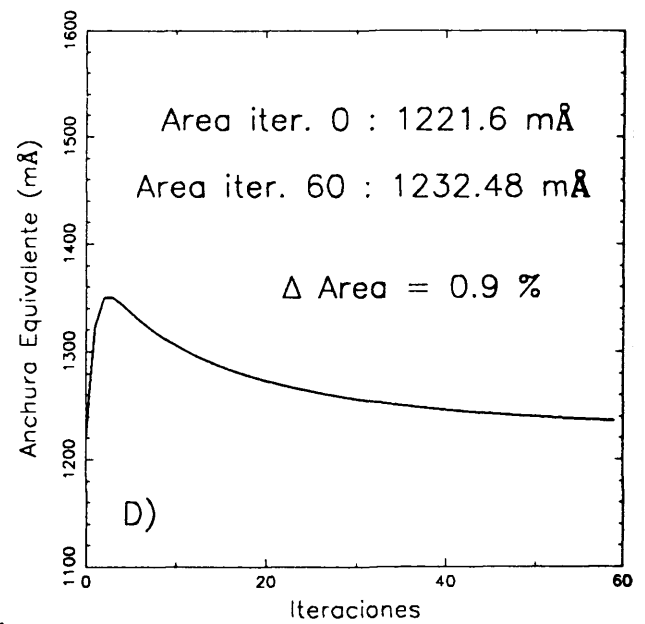
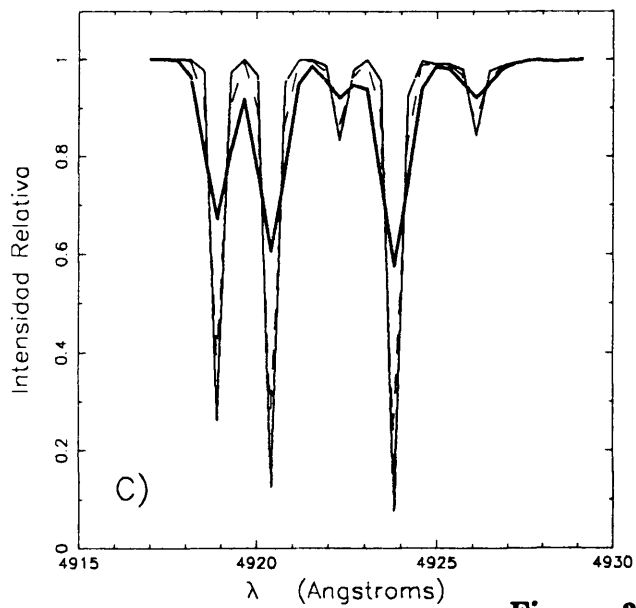
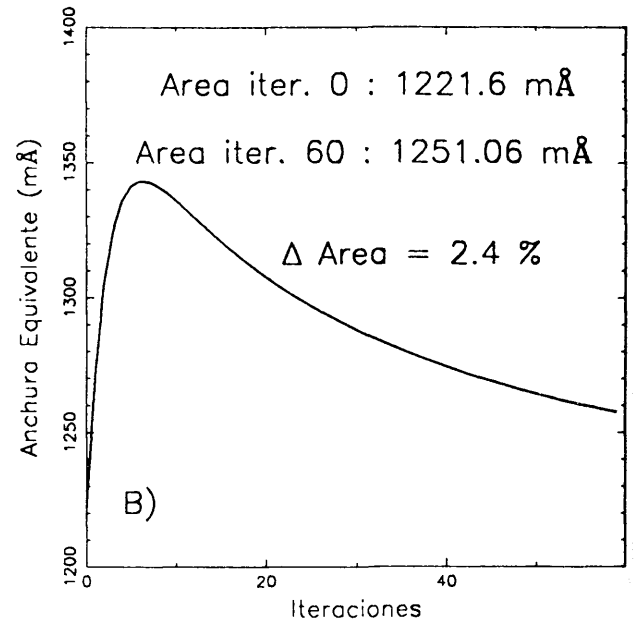
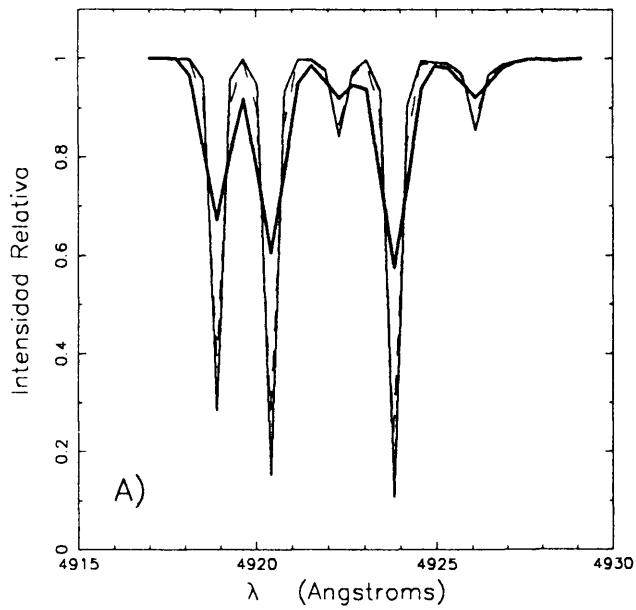


Figura 3.4

Semejante a la Figura 3.2 pero utilizando la función de relajación de Wilsson y $r = 2.0$,
 $r = 4.0$.

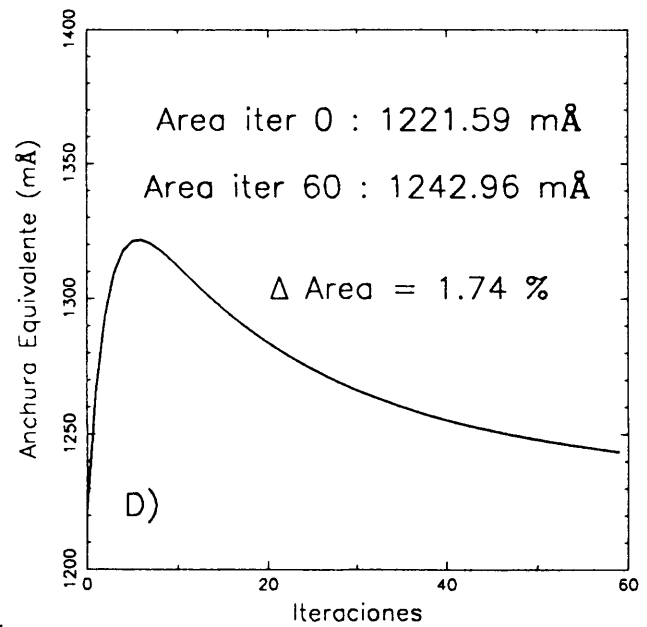
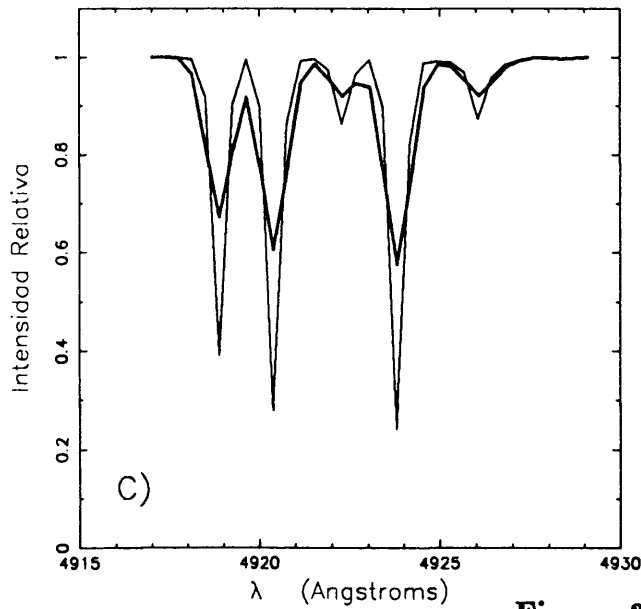
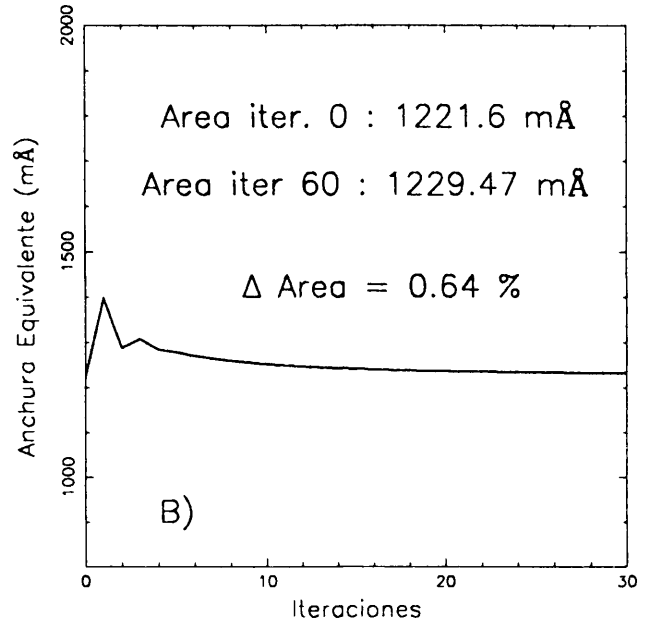
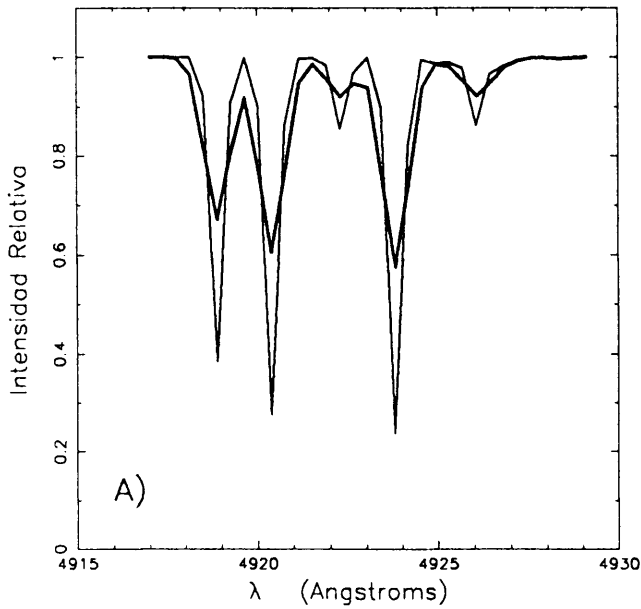
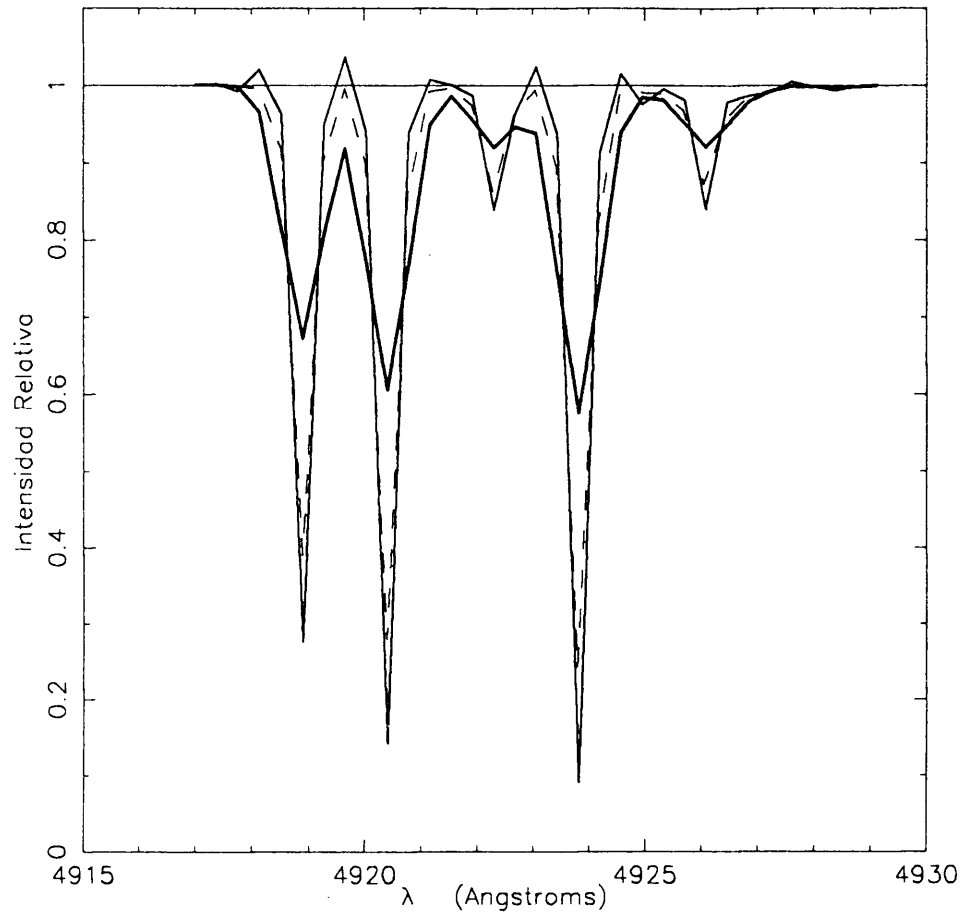


Figura 3.5

Semejante a la Figura 3.2 pero utilizando la *función de Wilsson* con $r = 8.0$ (Paneles A, B) y $r = r(it.)$ (Paneles C, D). En esta figura no se ha representado el espectro sintético original.

**Figura 3.6**

Resultado del algoritmo de deconvolución utilizando una *función de relajación gaussiana*. Se puede observar que el espectro deconvolucionado (línea continua de trazo fino) supera el nivel del continuo a ciertas longitudes de onda. La línea continua de trazo grueso es el resultado de convolucionar el espectro sintético (línea discontinua) con el perfil instrumental.

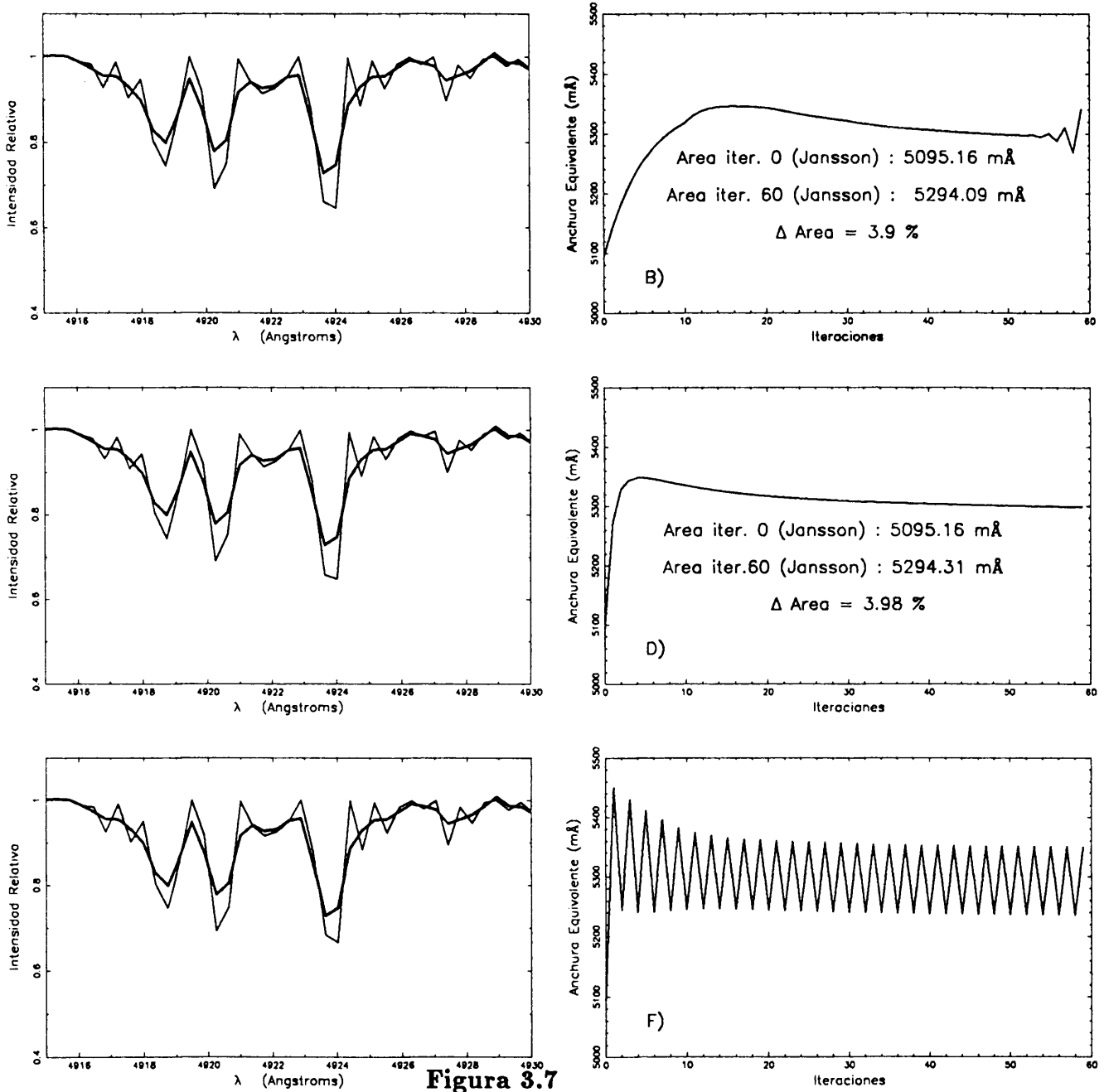


Figura 3.7

Deconvolución de un espectro real (V644 Her) utilizando la función de Jansson con diferentes valores de r . Sólo se ha tenido en cuenta el ensanchamiento instrumental. Se puede apreciar que el algoritmo diverge para $r = 4.0$. La línea de trazo grueso corresponde al espectro observado mientras que la línea de trazo fino indica el espectro deconvolucionado.

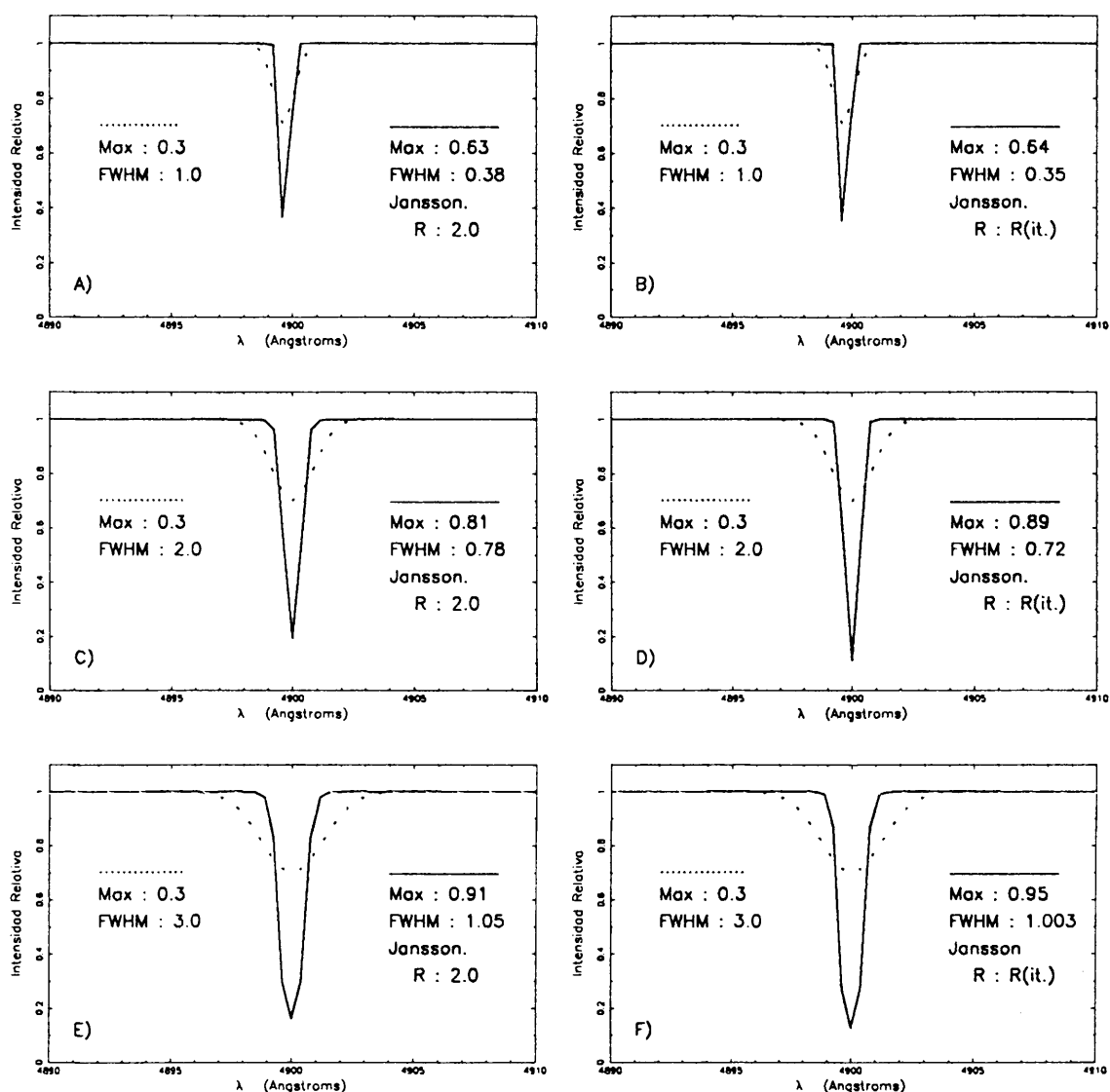


Figura 3.8

Cálculo del poder de resolución utilizando la *función de Jansson* con $r = 2$ y $r = r(it.)$. En cada panel se muestran la altura máxima y la FWHM de los espectros resultantes de convolucionar una función δ con diferentes perfiles de ensanchamiento gaussianos (línea punteada) y los espectros obtenidos tras aplicar deconvolución (línea continua).

Influencia de los errores en el cálculo del perfil instrumental en el proceso de deconvolución

El método para calcular el perfil instrumental correspondiente a la campaña de observación 1 ha sido descrito previamente en el Capítulo II. Como allí se dijo, el perfil instrumental puede variar ligeramente dependiendo de la línea espectral escogida para su cálculo, definiéndose como perfil instrumental definitivo un valor promediado de los diferentes perfiles calculados. Estudiemos a continuación qué influencia tienen las variaciones en los parámetros del perfil instrumental sobre el proceso de deconvolución.

Para ello se aplicó el algoritmo de deconvolución al espectro observado de *V644 Her* utilizando dos perfiles instrumentales: el perfil instrumental promediado de la campaña de observación 1 y otro perfil instrumental con diferencias en FWHM del 20 %. Puesto que la resolución espectral es 6 veces mayor en las campañas de McDonald que en las campañas de La Palma, la influencia del perfil instrumental para los primeros será mucho menor.

Aun cuando la estimación de diferencias del 20 % es exagerada ya que el error asociado al perfil instrumental calculado es menor del 10 % (Capítulo II, Sección 2.5), se observa que, incluso en este caso, la diferencia en las anchuras equivalentes obtenidas tras deconvolución es sólo del 1.5 %. Dividiendo ambos espectros deconvolucionados, se obtuvo un cociente promedio de 0.997 con una desviación estándar de 0.026. Se deduce, pues, que la influencia del error asociado al perfil instrumental es prácticamente nula en el proceso de deconvolución.

Influencia del ruido en el proceso de deconvolución

En el Capítulo II se definió el ruido espectral y se señalaron sus principales características. Como ya se discutió en dicho capítulo, el hecho de que tanto el ruido fotónico como el instrumental se supongan aleatorios permite representarlos mediante funciones gaussianas según el *teorema central del límite* (Barlow, 1988). Igualmente, se vió que una *relación señal-ruido* de $\sim 140-160$ es apropiada para los espectros de La Palma mientras que un valor de $\sim 80-100$ se puede considerar el adecuado para la mayoría de los espectros de McDonald. Sin embargo, en esta campaña también se observaron algunas estrellas débiles con una *relación señal-ruido* ~ 30 .

Para comprobar la influencia del ruido, se "añadió" al espectro sintético de

Procyon ruido "artificial" hasta conseguir $S/R = 100$ y $S/R = 30$. En los Paneles *A*, *B* de la Figura 3.9 se puede observar que los cocientes entre el área inicial y la obtenida tras 60 iteraciones es mayor que en ausencia de ruido (Paneles *E*, *F* de la Figura 3.3). El mismo efecto se aprecia en la Figura 3.7 donde se ha llevado a cabo la deconvolución de un espectro real (*V644 Her*). Este efecto es mayor cuando la relación S/R disminuye: en los paneles *C*, *D* de la Figura 3.9, donde se supone una $S/R = 30$, se obtiene un cociente entre áreas del 19%, apareciendo además algunas líneas ficticias.

Por tanto podemos ver que el ruido espectral es un factor que limita en gran medida el proceso de deconvolución. Esto no es de extrañar ya que, como se vio en las Secciones 3.1, 3.2, el ruido afecta de manera muy importante a todos los métodos citados. En la práctica, se puede predecir un incremento en EW de $\sim 4\%$ para una relación S/R típica de los espectros de La Palma, mientras que este incremento es $\sim 5-6\%$ para la mayoría de los espectros de McDonald. Aunque el análisis de abundancias se llevó a cabo con los espectros de McDonald, el incremento en EW debido a ruido no tiene influencia en dicho análisis ya que las pequeñas velocidades de rotación de las estrellas observadas en esta campaña junto con la alta resolución de los espectros hacen que la deconvolución no se haya aplicado a estos espectros.

Una posible alternativa para poder utilizar el algoritmo de deconvolución en espectros de baja *relación señal-ruido* se basa en la aplicación de filtros. Según Jansson (1984), un filtro óptimo debe cumplir los siguientes dos criterios. Por un lado, debe reducir la magnitud del ruido y su impacto en el espectro deconvolucionado. Por otro lado, no debe afectar de forma importante al proceso de deconvolución o al espectro deconvolucionado, en el sentido de que si el filtrado es muy intenso, éste atenuará las frecuencias espectrales que la deconvolución debe realzar, ralentizando la convergencia y obteniéndose una resolución peor de la que se podría conseguir. El perfil de un filtro ideal deberá ser, pues, aquél que valga la unidad para frecuencias importantes del espectro y que gradualmente se aproxime a cero para frecuencias más altas. Jansson (1984) estudió diferentes tipos de filtros, sugiriendo que una combinación de diferentes filtros podría ser de gran utilidad para minimizar la influencia del ruido.

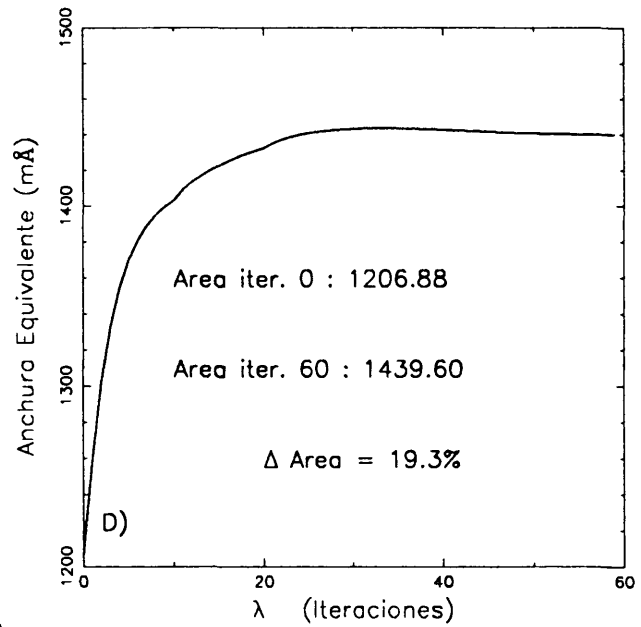
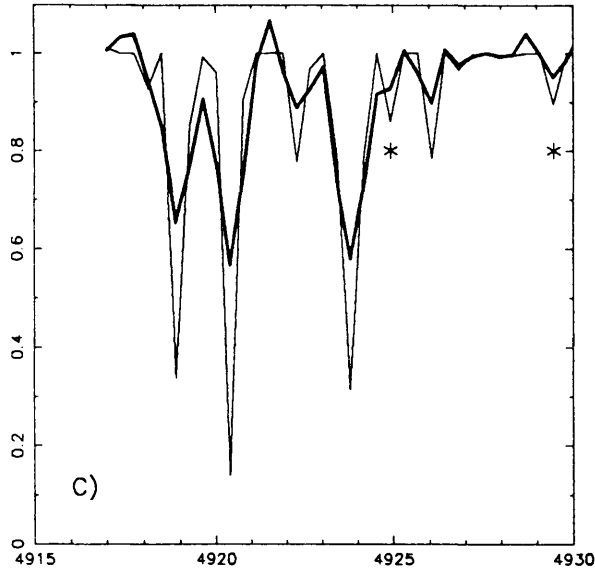
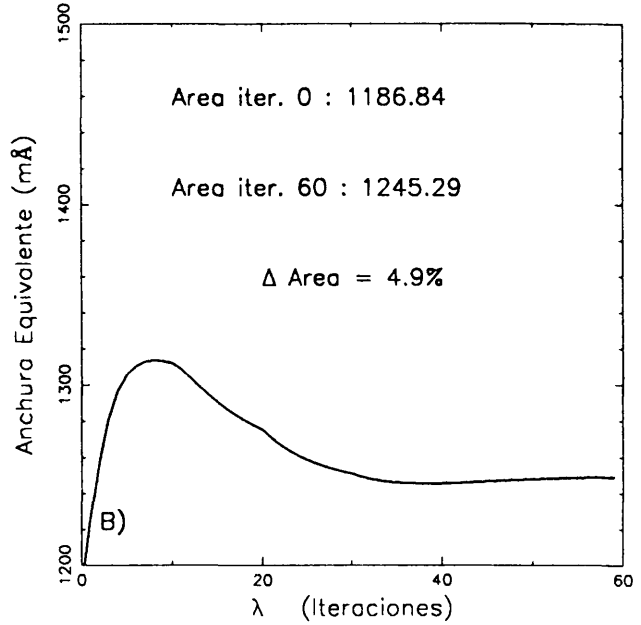
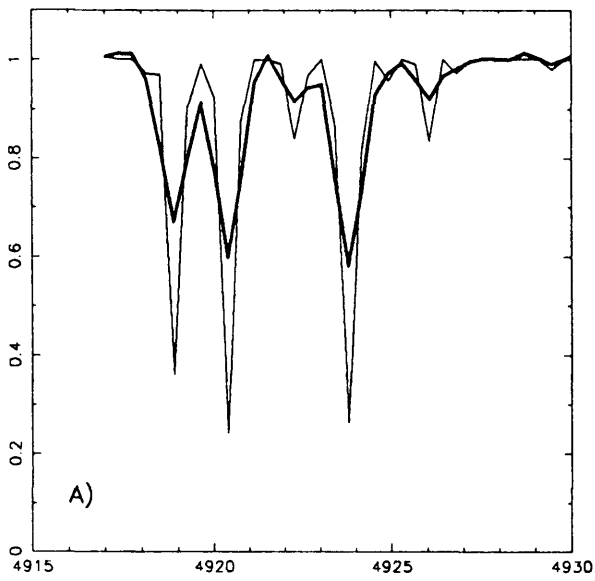


Figura 3.9

Influencia del ruido en el proceso de deconvolución. En A y C se muestra en trazo grueso un espectro sintético convolucionado con el perfil instrumental de la campaña de observación 1 suponiendo una cierta relación señal-ruido ($S/R = 100$ en A y $S/R = 30$ en B). En cada caso, las correspondientes áreas para cada iteración se muestran en los Paneles B, D. Las líneas artificiales generadas en el proceso de deconvolución en C se han marcado con *.

3.5 Eficiencia y limitaciones del proceso de deconvolución

Las principales limitaciones del algoritmo de deconvolución vienen dadas por la FWHM del perfil de ensanchamiento y por su forma: a partir de una cierta FWHM el algoritmo converge. Con el fin de cuantificar este límite, se ha aplicado el algoritmo de deconvolución a espectros sintéticos ensanchados con diferentes perfiles de rotación. Se han estudiado los resultados obtenidos, teniendo en cuenta que dichos resultados serán peores sobre un espectro real. En la Figura 3.10 se ha considerado un perfil de rotación correspondiente a $v \cdot \sin i = 30 \text{ km s}^{-1}$ y el perfil instrumental de la campaña 1. Las Figuras 3.10.a y 3.10.b corresponden a la deconvolución de un perfil de ensanchamiento obtenido de la previa convolución del perfil de rotación y el perfil instrumental. En las Figuras 3.10.c y 3.10.d se ha realizado primeramente la deconvolución del perfil instrumental y seguidamente del de rotación. El orden de las deconvoluciones se ha invertido en las Figuras 3.10.e y 3.10.f. Se puede apreciar que el método se comporta mejor si sólo se realiza una deconvolución, evitando las variaciones abruptas en EW que aparecen al final de la primera deconvolución en los otros dos casos.

En la Figura 3.11 se puede ver que, aunque el algoritmo diverge para un perfil de rotación con $v \cdot \sin i = 40 \text{ km s}^{-1}$ (Figuras 3.11.a y 3.11.b), éste converge si se utiliza un ajuste gaussiano del perfil rotacional (Figuras 3.11.c y 3.11.d). De nuevo, los mejores resultados (líneas espectrales más nítidas y estrechas) se obtienen cuando se emplea un solo perfil (convolución de los perfiles instrumental y rotacional) (Figuras 3.11.e y 3.11.f). La influencia de la forma del perfil de ensanchamiento en la deconvolución es clara: el algoritmo funcionará mejor con perfiles gaussianos que con perfiles no-gaussianos como es, por ejemplo, el perfil de rotación.

Para $v \sin i = 50 \text{ km s}^{-1}$ la deconvolución de un perfil global de ensanchamiento proporciona resultados óptimos, pero falla cuando la velocidad de rotación aumenta hasta 60 km s^{-1} (Figura 3.12). En este punto, la FWHM del perfil de ensanchamiento es lo suficientemente grande para que hacer que el algoritmo diverja.

Por consiguiente se puede concluir que existen dos factores que limitan la eficiencia del algoritmo de deconvolución: la forma del perfil de ensanchamiento y su FWHM. En principio, el algoritmo funciona bien hasta velocidades de rotación

de $v \sin i = 50 \text{ km s}^{-1}$. Sin embargo, en la práctica, estos límites serán incluso más pequeños debido a la influencia del ruido.

3.6 Conclusiones

Se han comentado diferentes técnicas de deconvolución, desde los *métodos lineales* tradicionales a *métodos modernos no lineales con restricciones*. Tras diferentes análisis se ha elegido la *función de relajación de Jansson* con un factor de relajación dependiente del número de iteraciones. Se ha estudiado la aplicabilidad del método a nuestras observaciones y sus limitaciones prácticas, llegando a la conclusión de que es perfectamente adecuado para velocidades de rotación $\leq 50 \text{ km s}^{-1}$ y para espectros con la S/R típica de los espectros de La Palma. A lo largo de este análisis, se han impuesto dos condiciones a los resultados: por una parte, el significado físico del espectro deconvolucionado, entendiéndose por tal el hecho de que no se generen líneas ficticias; por otra parte, las anchuras equivalentes de las líneas tienen que mantenerse invariables a lo largo del proceso de deconvolución.

En este trabajo, se han utilizado estas técnicas en aquellos casos en los que ha sido necesario realizar medidas precisas en los perfiles de las líneas espectrales, tal y como es necesario, por ejemplo, en el análisis de abundancias (Figura 3.13).

Si bien los óptimos resultados obtenidos en las campañas de observación realizadas en el observatorio McDonald han permitido realizar un exhaustivo análisis de abundancias sin necesidad de aplicar las técnicas de deconvolución expuestas en este Capítulo, no hubiera sido posible realizarlo en los espectros de La Palma sin aplicar estas técnicas. En la Figura 3.13, la eficiencia del algoritmo aparece claramente demostrada.

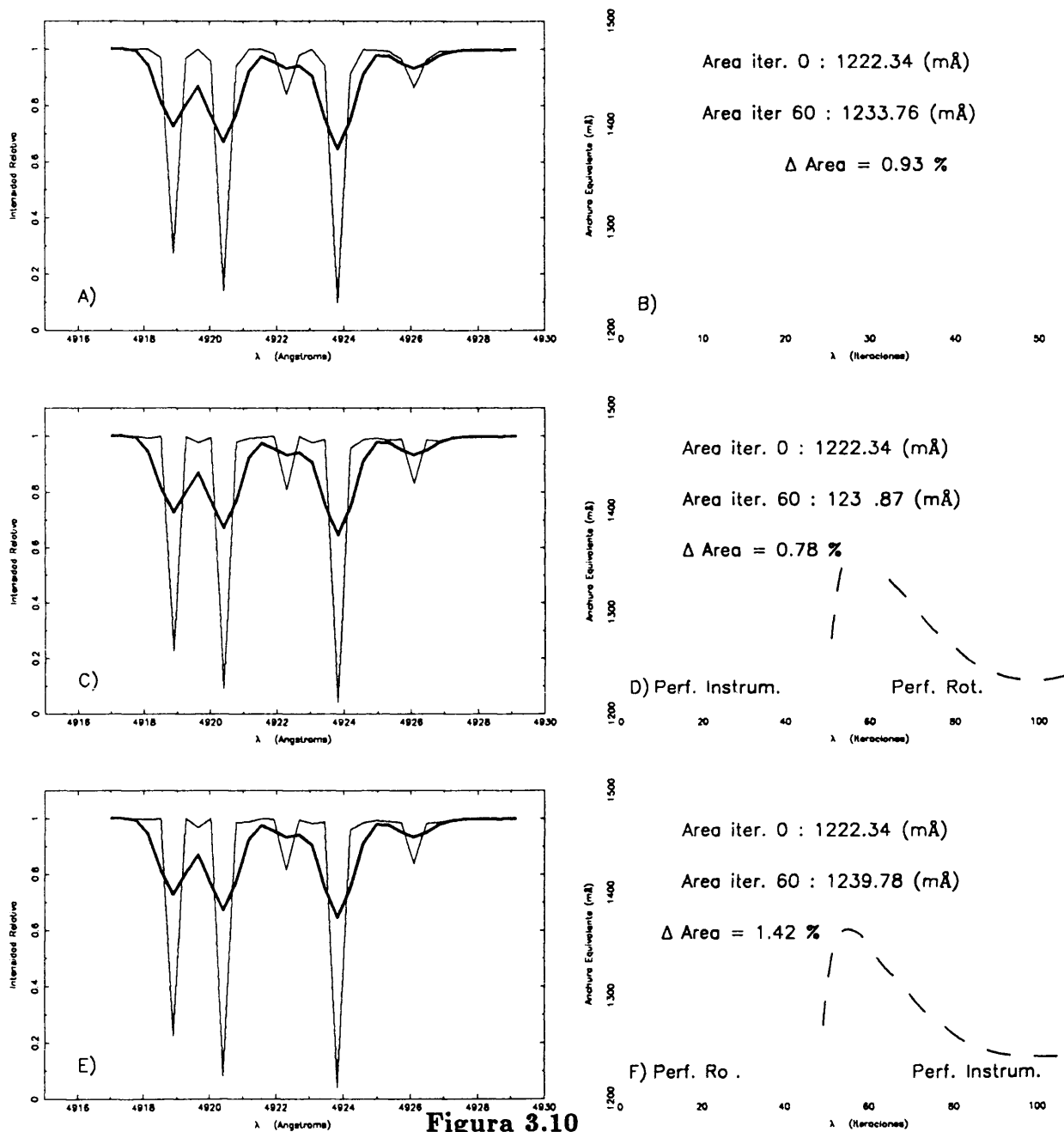


Figura 3.10

Deconvolución de un espectro sintético convolucionado con un perfil de rotación correspondiente a $v \sin i = 30 \text{ km s}^{-1}$ y el perfil instrumental correspondiente a la campaña de observación 1 (trazo grueso). El resultado de la deconvolución se muestra en trazo fino.

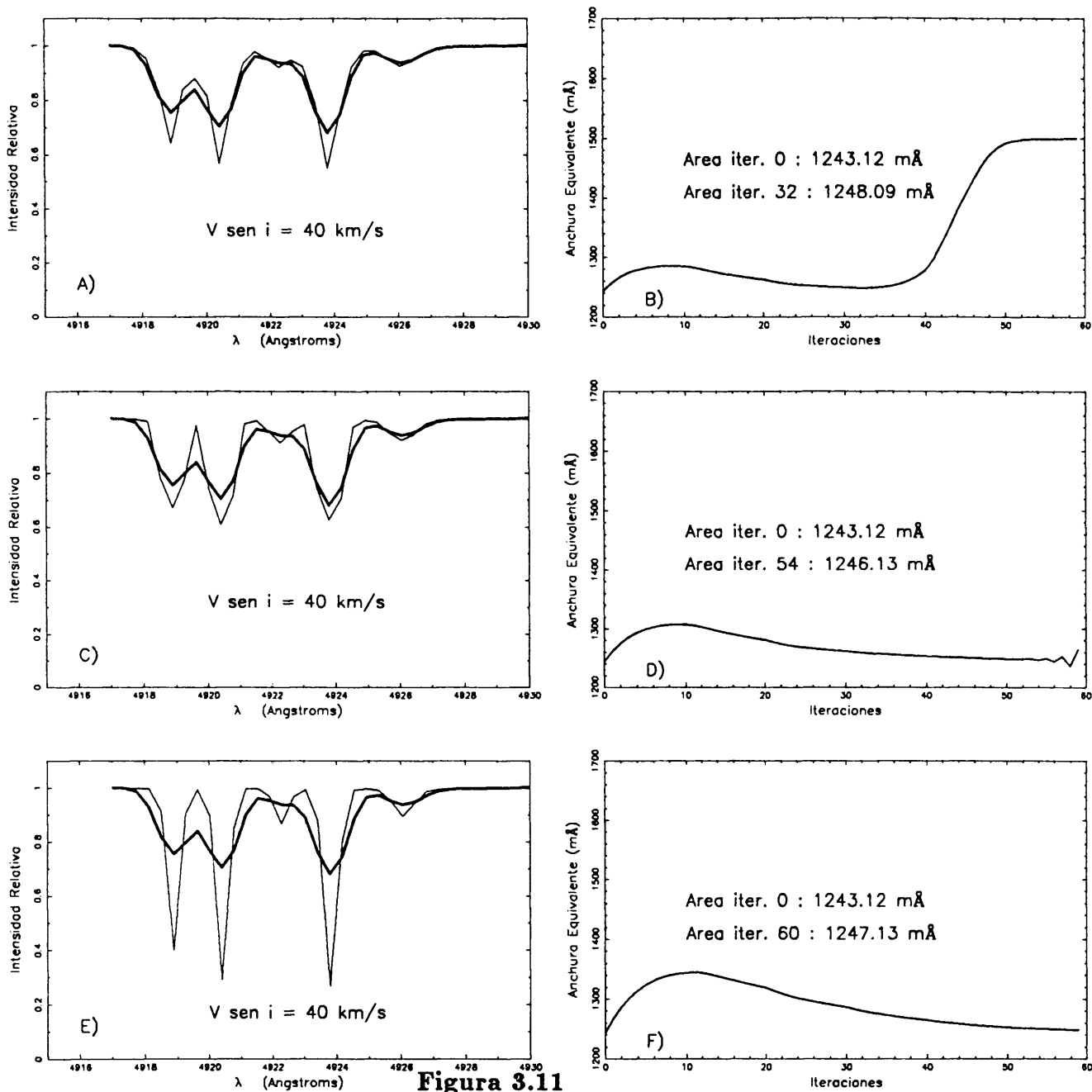


Figura 3.11

Deconvolución de un espectro sintético convolucionado con un perfil de rotación correspondiente a $v \sin i = 40 \text{ km s}^{-1}$ y el perfil instrumental correspondiente a la campaña de observación 1 (trazo grueso). El resultado de la deconvolución se muestra en trazo fino. En los Paneles A, B sólo se ha llevado a cabo la deconvolución del perfil de rotación. En los Paneles C y D se representa la deconvolución de un ajuste gaussiano de dicho perfil y en los Paneles E y F la deconvolución del perfil global de ensanchamiento (instrumental y rotacional).

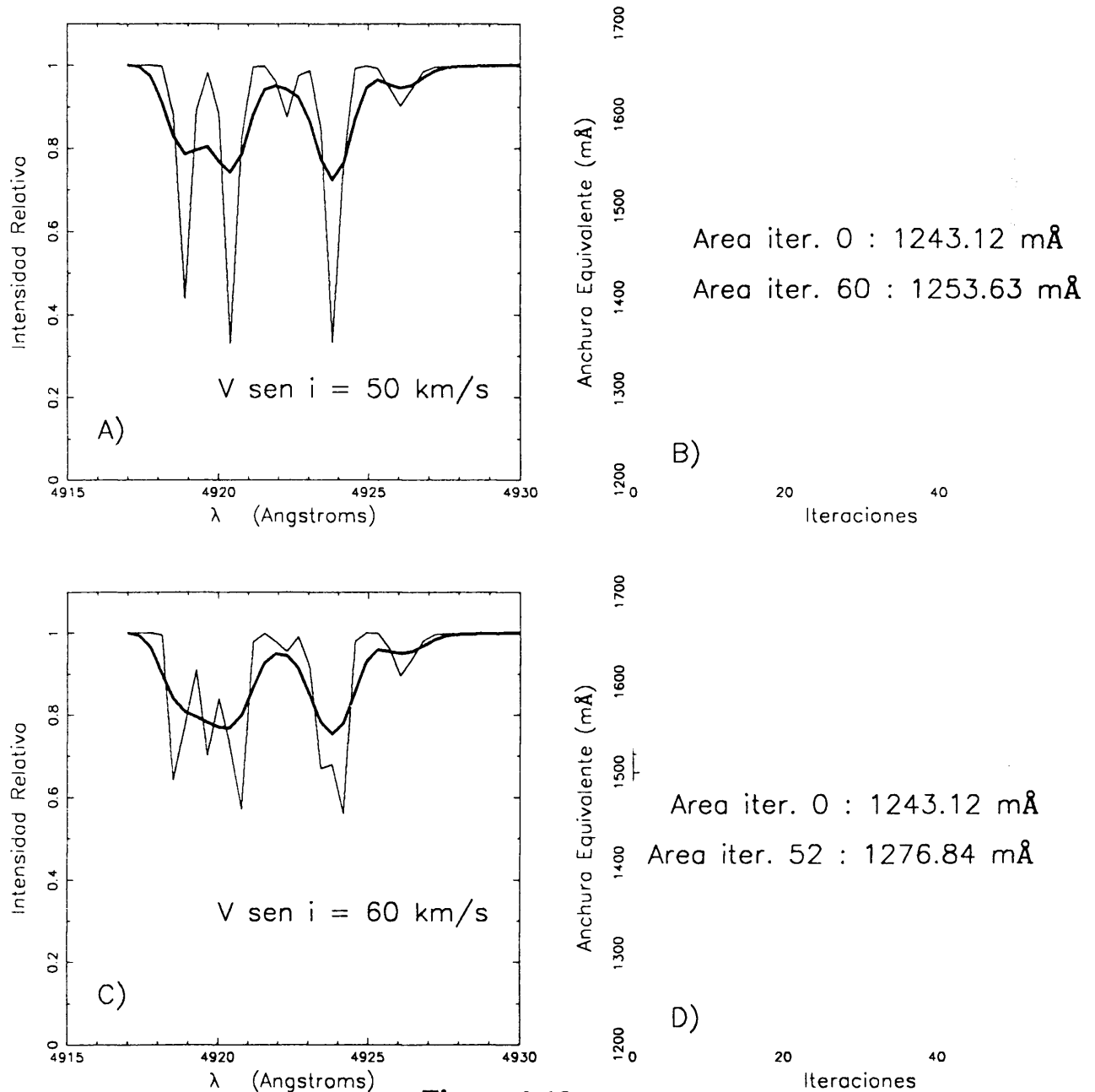


Figura 3.12

Deconvolución de un espectro sintético convolucionado con perfiles de rotación correspondientes a $v \sin i = 50 \text{ km s}^{-1}$ (Panel A) y $v \sin i = 60 \text{ km s}^{-1}$ (Panel B) y el perfil instrumental correspondiente a la campaña de observación 1 (trazo grueso). El resultado de la deconvolución se muestra en trazo fino. La deconvolución del perfil de ensanchamiento total es óptima para $v \sin i = 50 \text{ km s}^{-1}$ pero el algoritmo falla para $v \sin i = 60 \text{ km s}^{-1}$.

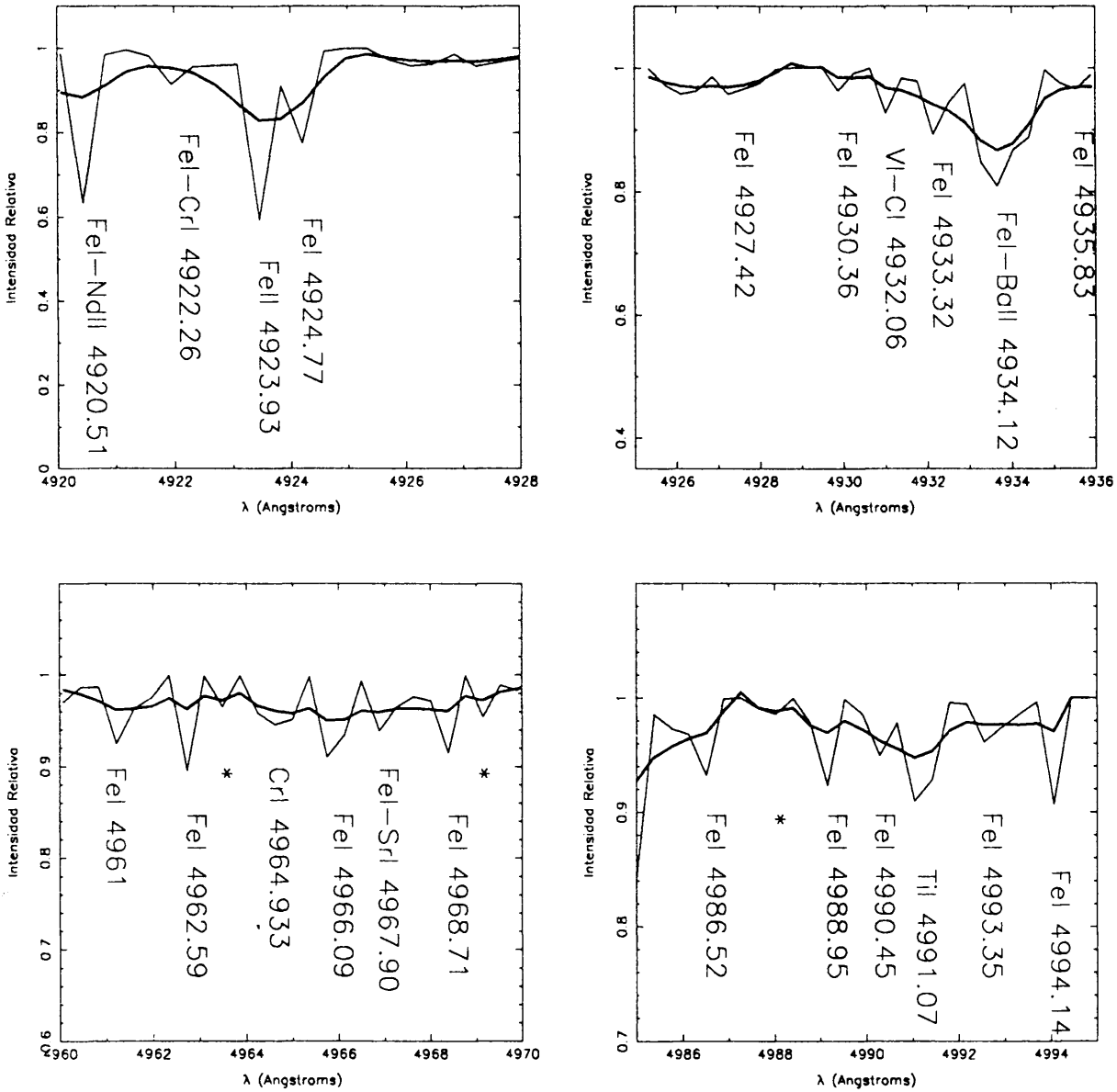


Figura 3.13

Deconvolución de un espectro (GX Peg, $v \cdot \sin i = 50 \text{ km s}^{-1}$) en diferentes rangos espectrales. El espectro observado se representa con trazo grueso mientras que el resultado de la deconvolución se muestra en trazo fino. Se puede apreciar que la identificación y el análisis de las líneas (imposible sobre los espectros observados) es ahora posible. Se han señalado con * aquellas líneas que no son reales y que representan simplemente ruido amplificado. La identificación de las líneas se ha realizado utilizando el Atlas Solar (Moore *et al.*, 1966).

Capítulo 4

Rotación

4.1 Introducción

Tal y como se puede deducir del estudio de atmósferas estelares, un espectro estelar típico se puede caracterizar por dos parámetros: la temperatura efectiva y la gravedad en la superficie. No obstante, los modelos atmosféricos descritos por estos parámetros son solamente una primera aproximación del espectro real, puesto que no se consideran posibles movimientos a gran escala producidos por la rotación o por desplazamientos de masas gaseosas de dimensiones semejantes al grosor de la atmósfera, movimientos que reciben el nombre de macroturbulencias.

En ambos casos, los efectos sobre el continuo son pequeños excepto cuando la velocidad de rotación se aproxime a la llamada velocidad *"break-up"* que se define como aquella para la que la aceleración gravitacional es comparable con la fuerza centrípeta en el ecuador. Por el contrario, las líneas sufren importantes modificaciones debido a los desplazamientos Doppler de la luz procedente de diferentes partes del disco estelar. Así, la radiación que se origina en la región del disco que se aproxima al observador se encontrará trasladada a longitudes de onda mas cortas, ocurriendo el fenómeno contrario para aquellas regiones del disco que se alejan del observador.

El espectro de una estrella que posea una velocidad de rotación baja se caracterizará por líneas estrechas y profundas, mientras que una estrella del mismo tipo espectral pero con velocidades de rotación altas presentará un espectro con líneas

más anchas pero de menor profundidad, siendo este ensanchamiento mayor al aumentar la velocidad de rotación. En cualquier caso, la anchura equivalente no se encuentra afectada. Por otro lado y debido al efecto Doppler, este ensanchamiento no será idéntico para todas las líneas sino que dependerá de la longitud de onda.

Uno de los primeros hechos empíricos que confirmaron la existencia de rotación fue la medida de velocidades radiales de binarias eclipsantes (Rossiter, 1924): cuando se esperaba que la velocidad radial fuera cero durante el eclipse, la curva mostraba una abrupta subida entre el primer y el segundo contacto presentando un comportamiento inverso en el tercer y cuarto contacto. Esto es debido a que en el momento del contacto la velocidad de rotación de la parte observable de la estrella eclipsada producía una componente radial que ocasionaba un enrojecimiento o un corrimiento al azul de las líneas según el caso.

Es fácil deducir que el ensanchamiento Doppler de las líneas debido a la rotación depende de la orientación relativa de los ejes de rotación y de la línea de visión. Debido a esto es lógico esperar un amplio rango de ensanchamientos, que será máximo para aquellas estrellas cuyo ecuador se encuentre alineado con la línea de visión y, mínimo para aquellas estrellas en que la línea de visión y la línea de los polos coincidan. Las observaciones están de acuerdo con esta hipótesis salvo en el caso de las supergigantes en las que el ensanchamiento mínimo parece ser mucho mayor que cero, lo cual puede interpretarse como un ensanchamiento residual debido a macroturbulencias.

Una de las grandes cuestiones de la física estelar es conocer el papel que juega el momento angular en la formación de una estrella. Dos problemas de gran interés son el transporte del momento angular en la nube interestelar que colapsa y el posterior frenado durante la contracción hasta que la estrella llega a la Secuencia Principal. Son varios los argumentos propuestos en la bibliografía para explicar el mecanismo de cómo una estrella puede adquirir su momento angular. Citemos dos a continuación:

a) Evolución del momento angular de la nube de gas al pasar a la fase de protoestrella. Según esta hipótesis, el momento angular de la nube interestelar deberá reducirse en varios órdenes de magnitud para que la formación de la estrella tenga lugar. Bodenheimer (1978) apuntó que una nube con una masa de $10^4 M_{\odot}$ y una densidad uniforme de $n = 10$ partículas cm^{-3} con una velocidad angular

galáctica $\Omega = 10^{-15} s^{-1}$ tendrá un momento angular de $J/M = 10^{24} cm^2 s^{-1}$. Por su parte, una estrella de la Secuencia Principal de los primeros tipos espectrales presenta un valor de $J/M \approx 10^{17} cm^2 s^{-1}$.

Son dos las principales hipótesis para dar una explicación a este fenómeno de frenado. Por un lado se encuentra la hipótesis del campo magnético: si la nube en el proceso de colapso presenta un campo magnético que la conecta con el medio interestelar, puede existir una transferencia de momento angular a través de las ondas de Alfvén (Mouschovias, 1977). La escala de tiempo para la pérdida de momento angular depende de la orientación relativa de los vectores campo magnético y momento angular. Si ambos son perpendiculares, el momento angular puede reducirse en varios órdenes de magnitud en menos de 10^6 años (Mouschovias y Paleologou, 1979). Si ambos vectores son paralelos, el tiempo necesario para la reducción del momento angular en un 1 % se estima en $\sim 10^7$ años (Mouschovias y Paleologou, 1980).

La segunda hipótesis está basada en la fragmentación de la nube primigenia en nubes más pequeñas. Boss (1980) demostró que existe una clara tendencia a que una nube protoestelar se fragmente en nubes individuales o sistemas binarios dependiendo del tipo de perturbaciones. Según este autor, cada uno de los fragmentos tendría una masa y un momento angular 10 veces menores que la nube original. Sucesivas fragmentaciones darían lugar a objetos con masas y momentos angulares característicos de estrellas de la Secuencia Principal.

b) Arny y Weissman (1973) apuntaron la idea de que los distintos fragmentos de la nube pueden sufrir colisiones en el colapso inicial de la misma. Woolfson (1976) sugirió que la formación estelar puede depender en buena parte de estas colisiones dentro de la nube interestelar. Según este autor, aquellas regiones donde se producen las colisiones presentarán un momento angular cero respecto del centro de masas, por lo que, de acuerdo con esta hipótesis, la rotación lenta sería la consecuencia natural del proceso de formación estelar. Por otro lado, una protoestrella podría aumentar su masa y su momento angular mediante choques inelásticos con otras protoestrellas (Silk y Takahashi, 1979) o con otros fragmentos dentro de la misma (Woolfson, 1976).

Según esta teoría de colisiones, una protoestrella formada en una región aislada donde las probabilidades de interacción gravitacional con otros fragmentos son bajas, alcanzará la Secuencia Principal con una velocidad de rotación pequeña y, por

el contrario, una protoestrella formada en una región de alta densidad, alcanzará la Secuencia Principal con un momento angular alto. Esta teoría, que daría una explicación a la orientación aleatoria que presentan los vectores momento angular, se encuentra favorecida por distintos hechos observacionales:

- En distintos cúmulos (p.e., *Orión* o *Sco-Cen*) existe una tendencia a que las estrellas con velocidades de rotación más altas aparezcan en las regiones centrales, donde la densidad es más alta y, por tanto, la probabilidad de choque es mayor (Tassoul, 1978).
- Bernacca y Perinotto (1974) argumentaron que las estrellas de campo de tipos espectrales B0–B5 rotan más lentamente que las estrellas del mismo tipo espectral pertenecientes a cúmulos en donde las probabilidades de choque son mayores.

4.2 Cálculo de Velocidades de Rotación.

4.2.1 Cálculo del perfil de rotación

Para calcular el perfil de una línea ensanchada por rotación supondremos que la estrella es un cuerpo rígido y esférico. Definimos un sistema de referencia ortogonal en el que el eje de rotación pertenece al plano YZ estando el eje z en la dirección del observador. Con este esquema, la velocidad lineal de cualquier punto de la estrella viene dada por:

$$v = \Omega \times r \quad (4.1)$$

donde \times significa producto vectorial y r es el radiovector de un punto cualquiera de la superficie. Este vector velocidad tendrá una componente en la línea de visión, $v_z = x \cdot \Omega \cdot \sin i$. El efecto Doppler ocasionado por esta componente se traducirá en un ensanchamiento de la línea de la forma (Gray, 1992f):

$$\Delta\lambda = \frac{v_z \lambda}{c} = \frac{\lambda \Omega \sin i \cdot x}{c} \quad (4.2)$$

Esta es una relación importante porque demuestra que todos los elementos de la superficie estelar que tengan la misma coordenada x en el sistema de referencia

anteriormente elegido, presentarán el mismo desplazamiento en longitud de onda debido a rotación. El desplazamiento máximo ocurre en el limbo de la estrella y vale:

$$\Delta\lambda_l = \frac{\lambda \cdot \Omega \cdot \sin i \cdot r}{c} = \frac{\lambda \cdot v \sin i}{c} \quad (4.3)$$

Se puede demostrar (Gray,1992f) que el perfil de línea ensanchado por rotación viene dado por la siguiente convolución:

$$\frac{F_v}{F_c} = H(\lambda) * G(\lambda) \quad (4.4)$$

donde $\frac{F_v}{F_c}$ es el cociente entre el flujo en el punto de longitud de onda, λ , y el flujo del continuo; $H(\lambda)$ se define como el perfil de línea en ausencia de rotación y $G(\lambda)$ es el perfil de rotación del disco estelar. Este es un resultado altamente interesante y práctico, puesto que permite expresar el perfil de línea ensanchado como una convolución del perfil "teórico" que tendría la línea en caso de presentar una rotación nula, con un perfil de rotación que viene dado por la siguiente fórmula (Gray,1992f):

$$G(\Delta\lambda) = 2(1 - \epsilon)[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_l)^2]^{1/2} + 1/2\pi\epsilon[1 - (\Delta\lambda/\Delta\lambda_l)^2]/\pi\Delta\lambda_l(1 - \epsilon/3) \quad (4.5)$$

donde $\Delta\lambda_l = \lambda \cdot v \cdot \sin i / c$, es el ensanchamiento máximo, ϵ es el factor de oscurecimiento del limbo que toma un valor de 0.6 para el rango de temperatura efectiva y de longitud de onda de interés (Gray, 1992f) ($\epsilon = 0.0$ representaría un disco uniformemente iluminado en toda su superficie). El perfil de rotación debe tener área unidad para que se conserve la anchura equivalente de la línea.

Aunque los dos métodos de cálculo de velocidades de rotación que se describen en la siguiente sección se basan en líneas espectrales, no todas las que aparecen en un espectro son válidas para calcular la rotación estelar. Damos tres criterios generales de selección:

- El principal mecanismo de ensanchamiento debe ser la rotación, siendo despreciable la influencia de otros factores de ensanchamiento, como por ejemplo la presión. Esta hipótesis excluye las líneas de la serie de Balmer y líneas intensas en las que la componente lorentziana sea apreciable.
- Tampoco podrán tenerse en cuenta aquellas otras líneas débiles que, si bien no presentan solapamiento, pueden llegar a desaparecer a medida que aumente

la velocidad de rotación haciendo prácticamente imposible ninguna medición sobre ella.

- El nivel de continuo deberá estar perfectamente determinado en la región de la línea en cuestión para evitar errores sistemáticos en las medidas de las velocidades de rotación.

Se pueden encontrar en la bibliografía una serie de líneas generalmente utilizadas en el cálculo de la rotación. Así, por ejemplo, podemos citar la línea de He I $\lambda 4471 \text{ \AA}$ que aparece normalmente en los cálculos de rotación de estrellas calientes, incluso si está solapada con una componente prohibida a $\lambda 4470 \text{ \AA}$. También se utiliza en este tipo de estrellas He I $\lambda 4438 \text{ \AA}$. La línea de Mg II $\lambda 4481 \text{ \AA}$ es la línea utilizada para estrellas de tipo espectrales B–A siempre y cuando el ensanchamiento debido a rotación sea mucho mayor que 0.2 \AA que corresponde al solapamiento con su doblete. En estrellas más frías hay varios candidatos: Fe I $\lambda 4405 \text{ \AA}$, $\lambda 4473 \text{ \AA}$, $\lambda 4476 \text{ \AA}$, $\lambda 4549 \text{ \AA}$ y Fe II $\lambda 4508 \text{ \AA}$, aunque todas ellas presentan problemas de solapamiento. Este problema se reduce en la región del infrarrojo donde el número de líneas aisladas es mayor, especialmente en el rango $[6000 \text{ \AA} - 6500 \text{ \AA}]$.

Puesto que el rango espectral de nuestras observaciones se extiende desde 4790 \AA a 5000 \AA , no podemos utilizar ninguna de las líneas propuestas anteriormente. Tras una minuciosa selección, se escogieron dos líneas: Fe I $\lambda 4957 \text{ \AA}$ y Fe I $\lambda 4989 \text{ \AA}$. Aunque la primera es más intensa, presenta problemas de solapamiento, por lo que no es conveniente utilizarla para velocidades de rotación menores de $\approx 40 \text{ km s}^{-1}$.

Pasemos a continuación a describir los métodos utilizados, así como los resultados obtenidos:

4.2.2 Descripción de los métodos

Método de Sletteback

Este método se encuentra descrito en Sletteback *et al.* (1975) y se basa en crear, para cada tipo espectral, un conjunto de perfiles de línea sintéticos con distintos valores de la velocidad lineal de rotación (v) y del ángulo de inclinación del eje de rotación respecto a la línea de visión ($\sin i$). Una vez establecido el conjunto de perfiles, el

cálculo de la velocidad de rotación de una estrella dada, proyectada sobre la línea de visión, ($v \cdot \sin i$), se realiza comparando el espectro observado con los distintos modelos de su mismo tipo espectral.

Si bien el método proporciona resultados óptimos, el tiempo empleado en la determinación de la velocidad de rotación es largo. Por otro lado, una diferencia en metalicidad entre el conjunto de modelos y la estrella cuya velocidad de rotación se quiere determinar puede dar lugar a valores erróneos. Un método ligeramente modificado se puede utilizar cuando se tenga una muestra de estrellas con velocidades de rotación conocidas, del mismo tipo espectral y con metalicidad semejante a la de las estrellas cuya velocidad de rotación se desea determinar. Este método hace uso de la relación lineal existente entre el perfil de rotación, $G(\lambda)$, y la velocidad proyectada ($v \cdot \sin i$): una vez establecida esta relación lineal, dada por la recta de regresión que se obtiene al representar velocidades de rotación frente a la FWHM, la determinación de la velocidad de rotación de la estrella "problema" es inmediata, sin más que sustituir en la recta de regresión el valor de la FWHM medida.

Método de Gray

Consiste en expresar la ecuación (4.4) en el espacio de Fourier la cual, según el teorema de la convolución, quedará como:

$$\frac{F_v}{F_c} = g(\sigma) \cdot h(\sigma) \quad (4.6)$$

donde \cdot indica una multiplicación normal. Carroll (1933) obtuvo la siguiente expresión para $g(\sigma)$ suponiendo un valor de $\epsilon = 0.6$:

$$g(\sigma) = \frac{J_1(\Delta\lambda_1\sigma)}{\Delta\lambda_1\sigma} - \frac{3 \cos \Delta\lambda_1\sigma}{2(\Delta\lambda_1\sigma)^2} + \frac{3 \sin \Delta\lambda_1\sigma}{2(\Delta\lambda_1\sigma)^3} \quad (4.7)$$

donde J_1 es la función de Bessel de primer orden. La propiedad fundamental de $g(\sigma)$ que constituye la base del método, radica en el hecho de que esta función se anula (tiene amplitud cero) a ciertas frecuencias dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_1\sigma_1 &= 0.660 \\ \Delta\lambda_1\sigma_2 &= 1.162 \\ \Delta\lambda_1\sigma_3 &= 1.661 \\ \dots &= \dots \\ \dots &= \dots\end{aligned}\tag{4.8}$$

La multiplicación de $g(\sigma)$ por $h(\sigma)$ en la ecuación (4.6) puede añadir ceros, pero no modificará la posición de las frecuencias dadas anteriormente. Es más, si la rotación no es excesivamente baja, los primeros dos o tres ceros del producto lo serán también de $g(\sigma)$. Así pues, calculando a qué frecuencias se anula la transformada de Fourier de la línea ensanchada por rotación, esto es, la línea espectral tal y como es observada, haciendo uso de (4.8), se puede calcular $\Delta\lambda_l$ y, por consiguiente, $v \cdot \sin i$ sin más que utilizar (4.3). En la Figura 4.1 se representa la transformada de Fourier del perfil de la línea Fe I $\lambda 4989 \text{ \AA}$ suponiendo rotación nula y las transformadas de dos perfiles de rotación. Se observa que, en la práctica, $g(\sigma)$ no se anula a las frecuencias que verifican la ecuación (4.8), sino que en ellas se obtiene un mínimo relativo fácilmente identificable. En cualquier caso y como simplificación, a lo largo del capítulo seguiremos denominando *ceros* a estas frecuencias.

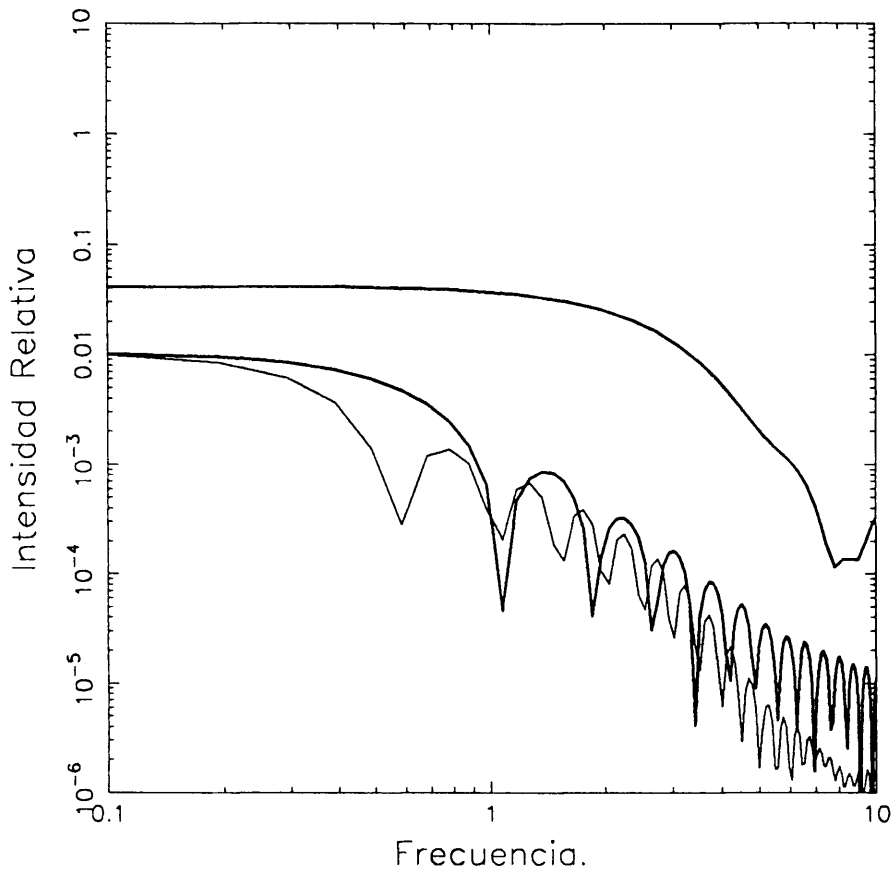


Figura 4.1

Transformada de Fourier del perfil de la línea sintética Fe I $\lambda 4989 \text{ \AA}$ ($h(\sigma)$) y de la misma línea pero ensanchada con perfiles de rotación ($g(\sigma)$) correspondientes a $v \sin i = 40 \text{ km s}^{-1}$ (línea de trazo grueso) y $v \sin i = 80 \text{ km s}^{-1}$ (línea de trazo fino). Se observa que, tal y como se comenta en el texto, los primeros ceros de la transformada del perfil observado (dada por la multiplicación de $h(\sigma)$ por $g(\sigma)$) corresponden al perfil de rotación. El límite inferior para cálculo de velocidades de rotación mediante este método viene dado por el primer cero de $h(\sigma)$. No existe límite superior, puesto que el primer cero de $g(\sigma)$ puede ocurrir a valores tan pequeños de σ como sea.

Método de análisis de correlación cruzada

Este no es un método específico de cálculo de velocidades de rotación. De hecho, fue utilizado primeramente para el cálculo del corrimiento al rojo de galaxias (Tonry y Davis, 1979). Brevemente, el método se basa en calcular la correlación entre el espectro de la galaxia cuyo corrimiento al rojo se quiere determinar y un espectro sintético de corrimiento al rojo nulo y cuyas líneas se encuentran ensanchadas con el perfil instrumental propio del espectro observado. La función de correlación cruzada mostrará un valor máximo, el cual se ajusta mediante una función simétrica suave (una parábola o un polinomio cuadrático, por ejemplo). Hartmann *et al.* (1986) lo utilizaron para el cálculo de velocidades radiales y de rotación de 50 estrellas *T Tauri*. Los autores utilizaron una parábola para el ajuste del máximo de la función de correlación cruzada, indicando la posición central de la misma la velocidad radial del objeto. La anchura de la parábola indicará la velocidad de rotación comparando su valor con las anchuras dadas por un conjunto de estrellas de velocidades de rotación conocidas.

Este método no fue finalmente utilizado en el cálculo de las velocidades de rotación del conjunto de estrellas observado. El motivo se basa en que presupone el conocimiento de los valores precisos de las velocidades de rotación para un conjunto determinado de estrellas. Tal y como se concluye en la siguiente sección, se ha preferido utilizar un método como el descrito en Gray (1992f) donde las velocidades de rotación se calculan de forma independiente sin necesidad de considerar un conjunto de velocidades conocidos previamente.

4.2.3 Resultados obtenidos

Método de Sletteback

Para calcular la recta de regresión entre la anchura a media altura de las líneas (FWHM) y la velocidad de rotación, necesaria en la aplicación del *método de Sletteback*, se ha tomado el conjunto de estrellas *no variables* con velocidades de rotación conocidas (Uesugi y Fukuda, 1976; 1982). El hecho de seleccionar las estrellas *no variables* se debe a que todas ellas pertenecen al *Bright Star Catalogue* (Hoffleit *et al.*, 1982) y que, por tanto, con $m_v \geq 7$, por lo que gran parte de ellas (38 de 43) aparecen también en los Catálogos de Uesugi y Fukuda. El resultado de representar las anchuras a media altura (FWHM) de la línea de Fe I ($\lambda 4957 \text{ \AA}$) de estas estrellas frente a sus velocidades de rotación aparece en la Figura 4.2.

Se puede observar fácilmente que la relación es bastante lineal en el rango de velocidades comprendido entre 50 y 150 km s^{-1} . Por encima de este rango la dispersión es mayor debido principalmente al hecho de que las líneas se encuentran mucho más ensanchadas, por lo que la identificación de los extremos es más difícil al poder existir solapamientos con las líneas adyacentes: un pequeño error en su determinación y, por lo tanto, en la determinación del continuo local que suponemos, producirá un error considerable en la altura media a longitud de onda central y, por consiguiente, en FWHM. En cuanto al rango de 0–50 km s^{-1} , el principal factor de ensanchamiento es el perfil instrumental, siendo el perfil de línea (y, por tanto, la FWHM) prácticamente insensible a estas bajas velocidades de rotación. Puesto que el perfil instrumental es conocido (Capítulo II), se pueden aplicar las técnicas de deconvolución estudiadas en el Capítulo III con el fin de obtener un nuevo perfil de línea ya sin la influencia de la respuesta instrumental, realizando entonces medidas de FWHM sobre este nuevo perfil. La línea escogida ha sido Fe I $\lambda 4989 \text{ \AA}$, fácilmente identificable a estas bajas velocidades. No obstante, incluso tras la aplicación del método de deconvolución, la dispersión en los valores de FWHM es demasiado grande como para poder calcular una recta de regresión. Se deduce, por tanto, que otras fuentes de error, como puede ser el error asociado a la determinación del nivel de continuo, tienen una mayor importancia que el ensanchamiento por rotación en este rango de velocidades. Igualmente, debe tenerse en cuenta la influencia de otros campos de velocidades como puede ser la macroturbulencia.

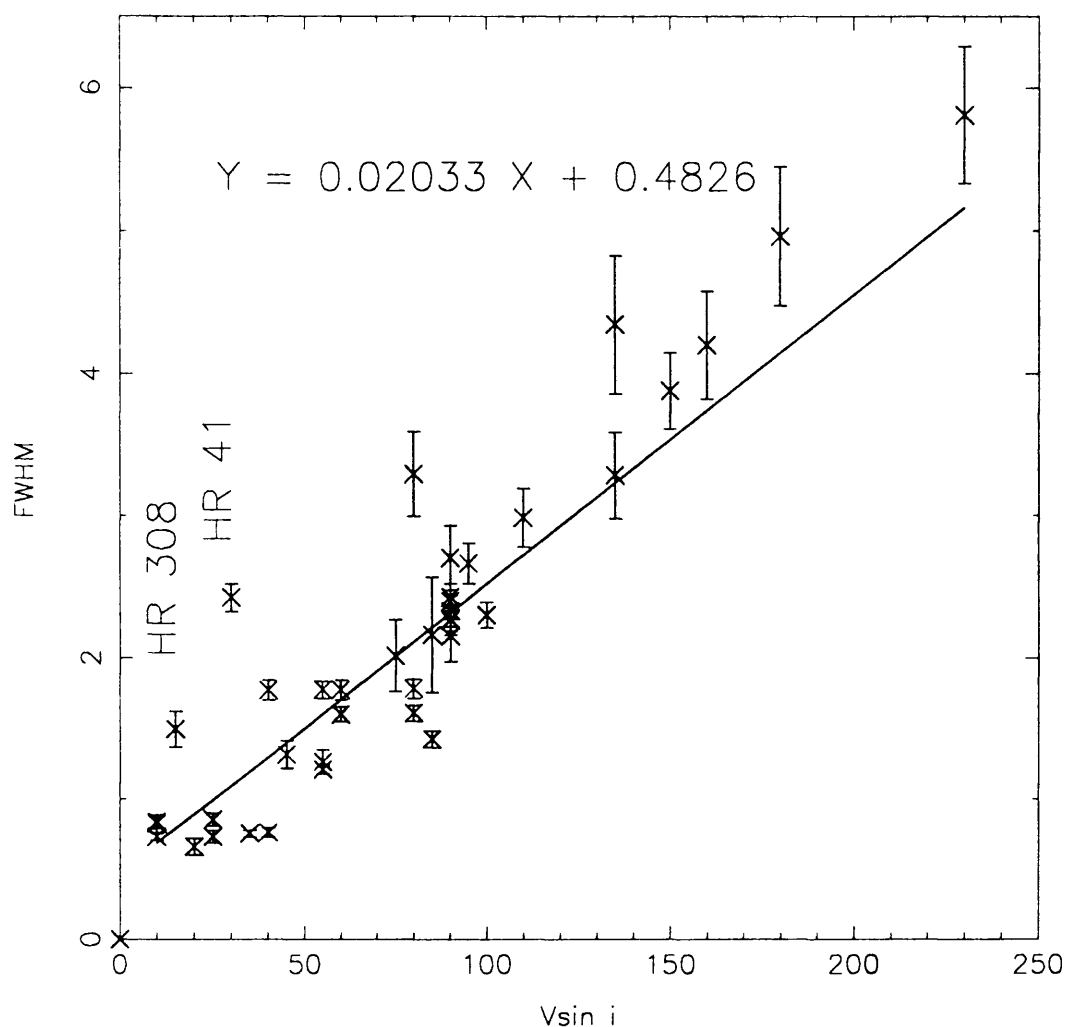


Figura 4.2

Relación entre la FWHM de la línea de Fe I $\lambda 4957 \text{ \AA}$ y las velocidades de rotación del conjunto de estrellas no variables. Esta relación es lineal en el intervalo $50\text{--}100 \text{ km s}^{-1}$. Para velocidades menores que 50 km s^{-1} o mayores que 100 km s^{-1} existe una dispersión considerable en FWHM. Las barras de error indican el error cometido en FWHM en el ajuste gaussiano de la línea. La regresión lineal se ha calculado otorgando a cada punto un peso dado por $\omega = 1/\sigma^2$, donde σ es el error en FWHM. A la hora de calcular dicha regresión no se han considerado los espectros correspondientes a HR 308 y HR 41, los cuales presentan velocidades de rotación notablemente más bajas de las que les corresponderían según el ajuste.

Fe I $\lambda 4989$ de estrellas con bajas

Método de Gray. Consideraciones previas

Según la ecuación (4.7), uno de los parámetros de los que depende el perfil de rotación es la longitud de onda de la línea medida. En un principio, se podría pensar que, de la misma forma, la transformada de Fourier y por tanto la velocidad de rotación calculada, podrían depender también de la línea escogida. Para estimar este grado de dependencia, hemos generado los perfiles de ensanchamiento para una misma velocidad de rotación, 70 km s^{-1} , correspondientes a las líneas en las que mediremos la rotación (Fe I $\lambda 4957 \text{ \AA}$ y Fe I $\lambda 4989 \text{ \AA}$) (Figura 4.3). Se observa que las ligeras diferencias en los perfiles de rotación se traducen en diferencias en intensidad de las respectivas transformadas de Fourier. No obstante, la posición de las frecuencias que hacen cero a la transformada permanece inalterable, por lo que la influencia de la línea elegida es nula. De hecho, el cálculo de la velocidad de rotación de los espectros de McDonald se ha llevado a cabo mediante líneas en los diferentes órdenes, obteniéndose valores similares.

El oscurecimiento del limbo es otro de los factores que influyen en la función perfil de rotación $g(\sigma)$, según (4.7). Este oscurecimiento se debe a la variación en profundidad real de la unidad de *profundidad óptica* dependiendo de la latitud del punto sobre la superficie de la fotosfera considerado. Cuanto mayor sea la latitud, la radiación provendrá de capas fotosféricas cada vez más altas y, por tanto, más frías. La variación en intensidad viene dada por la siguiente fórmula:

$$I_c = I_c^0[(1 - \epsilon) + \epsilon\theta], \quad (4.9)$$

donde I_c^0 es constante.

Veamos a continuación de qué manera influye este factor sobre la velocidad de rotación calculada. Para ello, generamos las transformadas de Fourier de los perfiles de rotación correspondientes a una misma velocidad, ($v \cdot \sin i = 70 \text{ km s}^{-1}$), y una misma línea, (Fe I $\lambda 4957 \text{ \AA}$), para $\epsilon = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. (Figura 4.4).

Se comprueba que, si bien existen marcadas diferencias en amplitud, no existe variación en las posición de los ceros, no teniendo por tanto influencia en el cálculo de la velocidad de rotación.

La determinación del nivel de continuo es otra fuente de error inevitable debido a la subjetividad de su elección. Un error en el continuo produce un error en la anchura equivalente, lo que se va a traducir en un error en la amplitud de la transformada en $\sigma = 0$. Por otro lado, el perfil de la línea, particularmente la contribución de las alas, será distinto, lo que modificará también el perfil de la transformada. Para cuantificar este error, se han seleccionado dos niveles de continuo que se diferencian en un 3 %. En la Figura 4.5 se representan las transformadas de Fourier de la línea de Fe I $\lambda 4989 \text{ \AA}$ para una misma velocidad de rotación. Se observa que un error en la determinación del continuo del 3–4% produce un error de 8–10 km s^{-1} en el valor de $v \sin i$.

Por otro lado, aunque el espectro procedente de la estrella es una función continua, el espectro observado está formado por un conjunto discreto de datos que indican el valor del flujo a distintas longitudes de onda. Igualmente, las observaciones se realizan en un determinado rango de longitudes de onda y además éstas se encuentran afectadas por el perfil instrumental. Se deduce, por tanto, que el espectro observado viene dado por

$$D(\lambda) = W_1(\lambda) \cdot W_2(\lambda) \cdot I(\lambda) * F(\lambda) \quad (4.10)$$

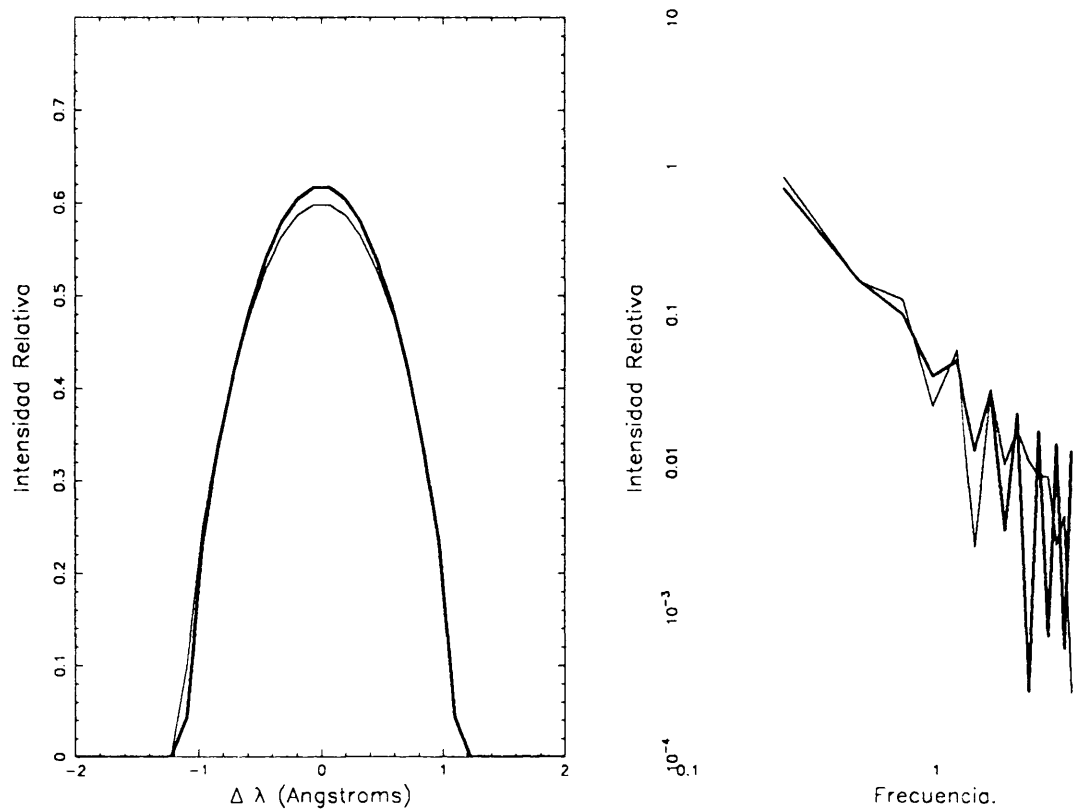
que en el espacio de Fourier queda como

$$d(\sigma) = w_1(\sigma) * w_2(\sigma) * i(\sigma)f(\sigma) \quad (4.11)$$

donde $W_1(\lambda)$ es una *función caja* que representa el rango de longitudes de onda observado y $W_2(\lambda) = \text{III}(\lambda)$ indica aquellas longitudes de onda discretas donde se ha observado. Según las propiedades de las transformadas de Fourier (Gray, 1992b), si la resolución de las observaciones es $\Delta\lambda \text{ \AA/píxel}$, las repeticiones de $w_1(\sigma) * i(\sigma)f(\sigma)$ aparecen cada $\Delta\sigma = 1/\Delta\lambda$ ciclos/ \AA . El fenómeno de *aliasing*, esto es, el solapamiento entre los distintos perfiles en el espacio de Fourier, no sucede si la frecuencia más alta de $w_1(\sigma) * i(\sigma)f(\sigma)$ es menor que $\sigma_N = 0.5/\Delta\lambda$ (*frecuencia de Nyquist*). Por tanto, la *frecuencia de Nyquist* indicará el límite inferior de los valores de las velocidades de rotación. En el caso de los espectros de La Palma, $\Delta\lambda = 0.37 \text{ \AA/píxel} \Rightarrow \sigma_N = 1.35 \Rightarrow v \sin i = 29.58 \text{ km s}^{-1}$. Por tanto, se ve que el método no se puede aplicar a estrellas con velocidades de rotación menores

de $\approx 30 \text{ km s}^{-1}$. Una situación más favorable ocurre con los espectros de McDonald para los que $\Delta\lambda = 0.06 \text{ \AA/pixel} \Rightarrow \sigma_N = 8.33 \Rightarrow v \sin i = 4.79 \text{ km s}^{-1}$.

La transformada de la función $W_1(\lambda)$ es una función sinc σ . Si la ventana espectral no es suficientemente ancha, la estructura de lóbulos (*sidelobes* en inglés) puede afectar al producto $w_1(\sigma) * i(\sigma)f(\sigma)$, produciendo un fenómeno de *aliasing*. Una solución trivial consiste en ensanchar artificialmente el tamaño de la ventana espectral considerada. Nuestro criterio ha consistido en, una vez seleccionada la línea espectral y determinados sus extremos, añadir un continuo "artificial" hasta abarcar una ventana de 60 \AA de anchura. La diferencia en anchura entre la ventana espectral y la línea considerada es suficiente para evitar el *aliasing* en cualquiera de los dos tipos de espectros observados (La Palma y McDonald).

**Figura 4.3**

Perfiles de ensanchamiento para una velocidad de rotación $v \cdot \sin i = 70 \text{ km s}^{-1}$. La línea de trazo grueso representa el perfil de rotación y la correspondiente transformada de Fourier de la línea $\lambda = 4805 \text{ \AA}$, mientras que la línea de trazo fino representa el perfil y la transformada de la línea $\lambda = 4957 \text{ \AA}$. Las ligeras diferencias entre los perfiles de rotación producen, en el espacio de Fourier, diferencias en la amplitud de las frecuencias, aunque la posición de las mismas permanece invariable en cada uno de los casos.

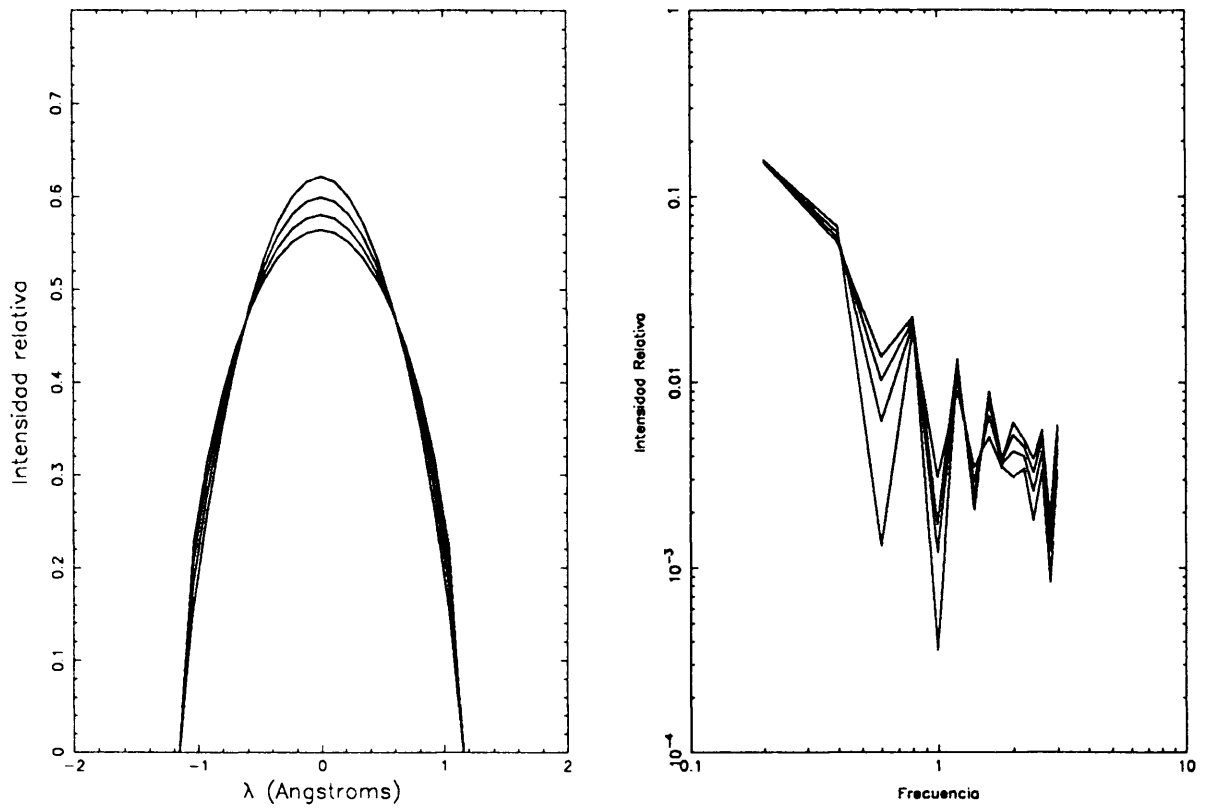


Figura 4.4

Perfiles de rotación para diferentes valores de $\epsilon = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y sus correspondientes transformadas de Fourier. La altura del perfil de rotación es mayor al aumentar ϵ , mientras que la FWHM permanece prácticamente invariable. En el espacio de Fourier, la posición de las frecuencias útiles para el cálculo de la velocidad de rotación permanece invariable aunque su intensidad relativa varía (disminuye al aumentar ϵ).

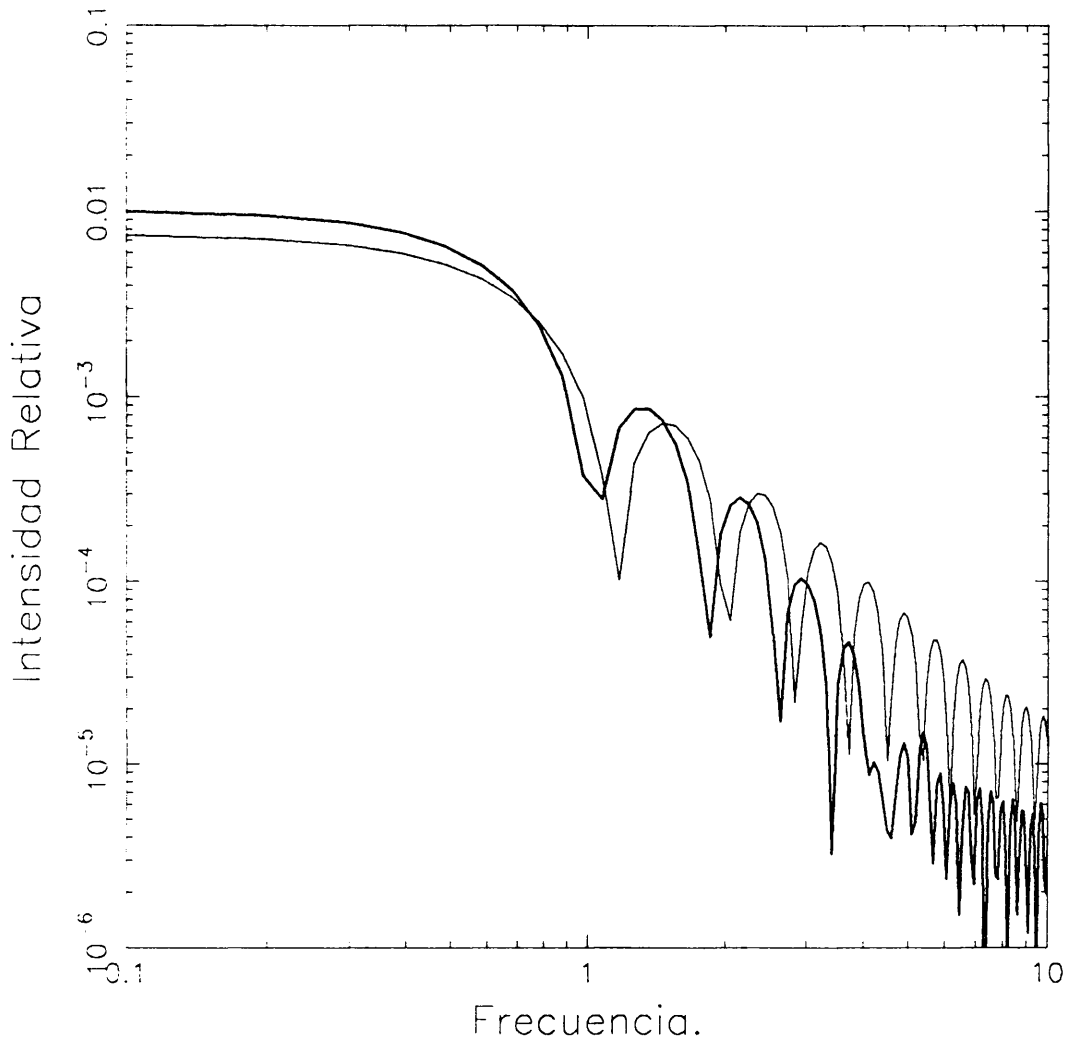


Figura 4.5

Transformadas de Fourier del perfil de la línea de Fe I $\lambda 4989$ Å suponiendo $v \sin i = 40 \text{ km s}^{-1}$ para diferentes niveles de continuo. Se ha supuesto un error en la determinación del mismo del 4-5 %, que es el calculado para los espectros de La Palma. Este error se traduce en un error en $v \sin i$ de $\pm 8-10 \text{ km s}^{-1}$. En los espectros de McDonald, la determinación del continuo es más precisa y, por tanto, el error asociado será menor.

4.2.4 Comparación entre métodos

En la Figura 4.2 se han comparado la FWHM de las líneas con las velocidades de rotación obtenidas del Catálogo de Uesugi y Fukuda (1982) . Se puede deducir que, puesto que los valores de $v \sin i \leq 100 \text{ km s}^{-1}$ se pueden determinar con mucha más precisión que los valores de $v \sin i \geq 100 \text{ km s}^{-1}$, sería conveniente, en aquellos casos en que se dispusiera de suficientes valores de velocidades para ambos grupos, calcular dos rectas de regresión independientes para evitar que los errores en la determinación de las velocidades altas afecten a los valores de las velocidades moderadas y bajas.

De la Figura 4.2 y de lo estudiado en el apartado anterior se deduce que la resolución espectral es el principal factor que limita la determinación de velocidades de rotación bajas. En la Figura 4.1 esta limitación aparece representada por el perfil instrumental y en la aplicación del *método de Gray* por la *frecuencia de Nyquist*. No obstante, se ha decidido elegir el *método de Gray* para el cálculo de velocidades de rotación puesto que es un método eficaz (los valores de $v \sin i$ calculados en la Tabla 4.1 son similares a los obtenidos del Catálogo de Uesugi y Fukuda) y, sobre todo, independiente, ya que a diferencia del *método de Sletteback* o el de *correlaciones cruzadas*, no necesita el conocimiento previo de unos valores de velocidades de rotación con las que calibrar los valores calculados. Por otro lado, es el único método de los tres que permite distinguir entre rotación y macroturbulencia pudiendo calcularse valores precisos de ambas fuentes de ensanchamiento de forma independiente.

En la Tabla 4.2 se dan los valores de $v \sin i$ calculados para el conjunto de estrellas *variables* observadas.

Tabla 4.1: Cálculo de velocidades de rotación de estrellas *no variables*

Identif.	G92a (km s ⁻¹)	UF76 (km s ⁻¹)	UF82 (km s ⁻¹)	Línea (Å)	G92b (km s ⁻¹)
HR 27	51.82	47	45	4957	
HR 41	102.12	25	30	4957	
HR 82	45.70	41	55	4957	
HR 217	26.35	-	-	4989	10.48 ± 2.30 (14)
HR 230	82.54	82	90	4957	
HR 231	100.92	82	90	4957	
HR 308	68.31	10	15	4957	6.62 ± 0.96 (9)
HR 349	102.12	84	80	4957	
HR 413	58.58	81	80	4957	
HR 534	29.03	-	-	4957	14.14 ± 2.98 (11)
HR 553	68.31	79	80	4957	
HR 569	103.34	99	95	4957	
HR 620	104.57	133	135	4957	
HR 622	60.43	76	75	4957	
HR 623	135.64	154	160	4957	
HR 723	29.03	21	25	4957	22.27 ± 1.82 (8)
HR 783	23.14	18	25	4989	29.42 ± 1.77 (9)
HR1135	47.14	44	40	4957	47.57 ± 2.73 (7)
HR1201	67.51	59	60	4957	
HR8095	81.57	-	90	4957	
HR8120	26.67	23	20	4989	
HR8130	99.73	89	90	4957	
HR8155	31.10	25	40	4989	
HR8190	134.04	97	110	4957	
HR8191	80.63	84	90	4957	
HR8198	67.51	53	55	4957	
HR8208	137.25	-	-	4957	
HR8267	195.69	184	180	4957	
HR8270	102.80	195	230	4957	

Tabla 4.1: Cálculo de velocidades de rotación de estrellas *no variables*.
(Continuación)

Identif.	G92a (km s ⁻¹)	UF76 (km s ⁻¹)	UF82 (km s ⁻¹)	Línea (Å)	G92b (km s ⁻¹)
HR8344	69.13	71	85	4957	
HR8454	135.64	139	135	4957	
HR8460	100.92	86	90	4957	
HR8472	24.60	0	10	4957	
HR8613	102.12	87	90	4957	
HR8681	81.57	129	150	4957	
HR8765	25.43	7	10	4989	8.99 ± 1.55 (8)
HR8776	70.47	68	85	4957	
HR8799	45.70	45	55	4957	
HR8805	29.72	9	10	4957	11.28 ± 1.98 (10)
HR8830	57.90	59	60	4957	
HR8838	81.57	86	100	4957	
HR8845	40.82	20	35	4989	28.3 ± 2.1 (11)
HR8888	40.34	-	-	4989	7.64 ± 1.68 (9)

- G92a: Velocidades de rotación calculadas aplicando el *método de Gray* a los espectros de La Palma. La línea elegida para el cálculo de la rotación se muestra en la columna *línea*.
- UF76: Velocidades de rotación tomadas del Catálogo de Uesugi y Fukuda (1976).
- UF82: Velocidades de rotación tomadas del Catálogo de Uesugi y Fukuda (1982).
- G92b: Velocidades de rotación calculadas aplicando el *método de Gray* a los espectros de McDonald. El número entre paréntesis indica el número de líneas elegidas para el cálculo.

Tabla 4.2: Velocidades de rotación de el conjunto de estrellas *variables*

Identificación			G92a	UF82	Amplitud	Coment.	G92b
HD	HR	GCVS	(km s ⁻¹)	(km s ⁻¹)	(mag.)		(km s ⁻¹)
432	21	β Cas	69.1	70	0.042		
		V377 Cas(*)	135.6		0.05		
2628	114	GN And	31.5	30	0.035		16.1 \pm 1.5 (10)
4818	238	V526 Cas	28.7		0.011		16.1 \pm 2.7 (10)
8511	401	AV Cet	140.5	185	0.02	*	
9100	432	VX Psc	135.6	125	0.02		
			132.5				
10845	515	VY Psc	100.9	75	0.02	*	
11285		VV Ari	51.8		0.02		
15165		VW Ari			0.06	*	
15550	729	UU Ari	173.9	175	0.052		
17093	812	UV Ari	68.3	83	0.04		
23156		V624 Tau	41.6	65	0.01		
23567		V534 Tau	98.6	90	0.015		
23728	1170	V376 Per	102.1	110	0.07		
			99.7				
24550		V479 Tau	132.4		0.03		
24809	1223	V386 Per	129.4	85	0.01	*	
24832	1225	DI Eri	126.4	120	0.09		
26322	1287	IM Tau	31.2	15	0.07		6.8 \pm 1.6 (10)
			29.0			*	
26574	1298	OM Eri	99.7		0.05		
27397	1351	V483 Tau	102.1	100	0.03		
27459	1356	V696 Tau	81.6	70	0.01		
27628	1368	V775 Tau	32.3	30	0.01		32.0 \pm 4.0 (7)
28024	1392	UPS Tau	205.1	196	0.016		
28052	1394	V777 Tau	195.7	195	0.015		
			195.7				
28319	1412	TH2 Tau	66.7	80	0.02		

Tabla 4.2: Velocidades de rotación del conjunto de estrellas *variables* (Continuación)

Identificación			G92a	UF82	Amplitud	Coment.	G92b
HD	HR	GCVS	(km s ⁻¹)	(km s ⁻¹)	(mag.)		(km s ⁻¹)
28910	1444	ρ Tau	126.4	125	0.01		
30780	1547	V480 Tau	98.6	145	0.01	*	
33959	1706	KW Aur	28.7	20	0.08		28.1 \pm 1.5 (9)
37819		V356 Aur	31.2		0.08		22.5 \pm 2.2 (9)
			31.2				
40372	2100	V1004 Ori	70.8	80.0	0.01		
40535	2107	V474 Mon	25.0	25	0.15		18.8 \pm 1.5 (10)
			30.7	25			
		UZ Lyn	60.4	20	0.30	*	
50018	2539	OX Aur	134.0	130	0.01		
			135.6				
50420	2557	V352 Aur	25.4	25	0.01		26.3 \pm 2.8 (10)
55057	2707	V571 Mon	135.6	150	0.03		
64191		AD CMi	29.7		0.30		12.0 \pm 2.4 (10)
73857		VZ Cnc	26.7		0.41		13.3 \pm 2.8 (8)
			26.7				
110377	4824	GG Vir	180.0		0.02		
152830	6290	V644 Her	26.4	20	0.04		15.6 \pm 1.8 (6)
		V645 Her	50.2		0.14		
155514	6391	V620 Her	191.1	175	0.04		
156697	6434	V2112 Oph	188.9	160	0.03		
159223		V648 Her	130.9		0.04		
172748	7020	δ Scu	30.1	25	0.29		
177392	7222	LT Vul	135.6	140	0.03		
181333	7331	V1208 Aql	50.8	55	0.06		
181577	7340	ρ Sgr	81.6	75	0.02		
186357	7501	V1276 Cyg	103.3	95	0.02		
192518	7731	NU Vul	205.1	190	0.02		
197461	7928	δ Del	29.4	30	0.07		
			38.6				

Tabla 4.2: Velocidades de rotación del conjunto de estrellas variables (Continuación)

Identificación			G92a	UF82	Amplitud	Coment.	G92b
HD	HR	GCVS	(km s ⁻¹)	(km s ⁻¹)	(mag.)		(km s ⁻¹)
199124	8006	EM Aqr	132.4	200	0.01	*	
199908		DQ Cep	57.9	60	0.05		
			59.7				
200356		FN Aqr(*)	41.9		0.01		
200925		V1719 Cyg	31.19		0.31		
201707	8102	EW Aqr	134.0	140	0.07		
204188	8210	IK Peg	36.9	70	0.01	*	
211336	8494	ε Cep	97.4	86	0.01		
213534	8584	GX Peg	46.2	50	0.01		
215874	8676	FM Aqr	99.7		0.03		
218549		DY Peg	44.1		0.54		
		CC And	37.7		0.24		
		GP And	39.7		0.52		
		AI Hya	132.5		0.02		
		CY Aqr			0.71		
		De Lac	31.5		0.35		
		V1162 Ori	34.3		0.18		
		EH Lib	62.8		0.50		13.3 ± 1.9 (9)
		YZ Boo	26.7		0.42		18.8 ± 4.1 (5)

- G92a: Velocidad de rotación calculada aplicando el *método de Gray* a espectros de La Palma. En aquellos casos en los que existe más de una observación por estrella, se muestran las velocidades calculadas de forma independiente para cada una de ellas.
- UF82: Velocidad de rotación obtenida del catálogo de Uesugi y Fukuda (1982).
- '*' indica que no es posible calcular velocidades de rotación debido a la ausencia o a la mala definición de las líneas o a que existen grandes discrepancias en el valor de la velocidad calculada y la obtenida del catálogo Uesugi y Fukuda (1982).
- G92b: Velocidad de rotación calculada aplicando el *método de Gray* a espectros de McDonald. El número entre paréntesis indica el número de líneas utilizadas.

4.3 Conclusiones

En este capítulo se han calculado las velocidades de rotación del conjunto de estrellas observado. Tras una introducción donde se define la rotación y se plantean distintas teorías de cómo una estrella adquiere su momento angular, se han estudiado tres métodos para la determinación de las velocidades de rotación (*Sletteback, Gray, correlaciones*). Se eligió finalmente el método expuesto en Gray (1992f), analizando las propiedades y posibles fuentes de error asociadas al mismo. Finalmente, se estudió la relación existente entre la velocidad de rotación y la amplitud de la pulsación.

Como se citó en 4.2.4, el método de Gray es el único de los tres descritos capaz de distinguir entre rotación y macroturbulencia. Gray (1975) lo aplicó con éxito a una muestra de estrellas gigantes y supergigantes. Brevemente, el método consiste en generalizar la ecuación (4.4) para el caso de macroturbulencia, quedando como

$$D(\lambda) = I(\lambda) * M(\lambda) * G(\lambda) * F_{\nu}^0 \quad (4.12)$$

donde $G(\lambda)$ es el espectro observado, $I(\lambda)$ es el perfil instrumental, $M(\lambda)$ es el perfil de macroturbulencia, $G(\lambda)$ es el perfil de rotación y F_{ν}^0 es el perfil de flujo intrínseco. Las funciones $I(\lambda)$, $M(\lambda)$, $G(\lambda)$ se encuentran normalizadas a área unidad por lo que la anchura equivalente de $D(\lambda)$ es la misma que la de F_{ν}^0 . Aplicando el teorema de la convolución, éstas se convierten en productos en el espacio de Fourier; por tanto (4.12) queda como

$$d(\sigma) = i(\sigma) \cdot m(\sigma) \cdot g(\sigma) \cdot f(\sigma) \quad (4.13)$$

El procedimiento consiste en calcular $d(\sigma)$ a partir del espectro observado, eliminar el perfil instrumental mediante la división por $i(\sigma)$, eliminar el perfil térmico mediante la división por $f(\sigma)$, eliminar el perfil de rotación mediante la división por $g(\sigma)$ e interpretar el residuo resultante, el cual, tras la eliminación de todos los factores de ensanchamiento anteriormente citados podrá presentar un perfil horizontal, más o menos alterado en altas frecuencias según el nivel de ruido, que representaría la Transformada de Fourier de una función δ , lo cual implicaría la no existencia de ningún otro mecanismo de ensanchamiento, o bien un perfil con una cierta pendiente susceptible de ser ajustado por la transformada Fourier de una gaussiana de la que se deduciría la velocidad de macroturbulencia.

Aunque Gray (1975) lo aplicó a estrellas gigantes y supergigantes donde se supone que el valor de la macroturbulencia es mayor, sería interesante calcular los valores de macroturbulencia de nuestro conjunto de estrellas y estudiar su posible relación con indicadores del estado evolutivo tales como el índice fotométrico del sistema de Strömgen δ_{c_1} o el valor de la gravedad $\log g$.

Capítulo 5

Determinación de temperaturas efectivas

La temperatura es un parámetro estelar básico. Se necesitan valores precisos de la temperatura para, por ejemplo, situar una estrella en el *diagrama H-R*, determinar sus abundancias, calcular su gravedad y su masa, etc. El problema de cómo definir la temperatura de la fotosfera estelar está en estrecha relación con la hipótesis de *equilibrio termodinámico* (TE): si esta hipótesis fuera rigurosamente cierta, habría solamente un valor numérico de la temperatura, independiente del criterio elegido para su obtención. Sin embargo, como estrictamente hablando las estrellas no se encuentran en equilibrio termodinámico, los valores numéricos serán ligeramente diferentes dependiendo del método elegido y es por esto que se puede hablar de *temperatura de excitación*, si se utiliza la ecuación de Boltzman para su cálculo, de *temperatura de ionización*, si se utiliza la ecuación de Saha, de *temperatura fotosférica*, si se utilizan redes basadas en la calibración de índices fotométricos (p.e., $(b-y)$ ó β en el sistema de Strömngren), *temperatura efectiva* que se define como la que tiene un cuerpo negro que emita el mismo flujo integrado que la estrella... En la siguiente sección se discuten distintos métodos para el cálculo de temperaturas efectivas.

5.1 Medida de temperaturas efectivas. Visión general

5.1.1 Métodos de flujo integrado

Se basan en el ajuste entre el flujo integrado de la estrella y el flujo integrado emitido por un cuerpo negro: la temperatura efectiva de la estrella se define como la temperatura que posee un cuerpo negro que emite el mismo flujo integrado que ella.

El flujo emergente integrado en la superficie de la estrella, F , está relacionado con el flujo estelar recibido fuera de la atmósfera terrestre, f , por:

$$F = 4f/\theta^2 \cdot \pi \quad (5.1)$$

donde f está corregido de extinción interestelar y θ es el diámetro angular. Conociendo el flujo emergente, la temperatura efectiva de la estrella (T_{eff}) se define como

$$T_{eff} = (F/\sigma)^{1/4} \quad (5.2)$$

Además, si se conoce la paralaje trigonométrica, se puede estimar el radio, y con ello, la luminosidad de la estrella, haciendo uso de

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (5.3)$$

Este método no se pudo desarrollar completamente hasta el lanzamiento de satélites astronómicos que permitieron realizar observaciones en el ultravioleta (p.e., el *Orbiting Astronomical Observatory*, (OAO-2) (Bless *et al.*, 1976) y el *International Ultraviolet Explorer* (IUE) (Boguess, 1978)) ya que el flujo emergente en el ultravioleta de estrellas calientes representa una fracción importante del flujo total. Con anterioridad había sido necesario recurrir a extrapolaciones teóricas (Morton y Adams, 1968).

Code *et al.* (1976) realizaron un trabajo fundamental en el cálculo de temperaturas efectivas que ha servido como referencia para la calibración de otros métodos posteriores. Estos autores calcularon temperaturas efectivas y correcciones bolométricas de 32 estrellas brillantes en el rango O5-F8 con diámetros angulares

conocidos (Hanbury Brown, 1974). Los flujos ultravioletas se observaron con el satélite OAO-2, los flujos en el rango visible correspondían a espectrofotometría realizada con un ancho de banda de 50Å en el rango [3300 Å–8080Å] llevada a cabo por Davies y Webb (1974), mientras que los flujos infrarrojos se obtuvieron de observaciones en diferentes bandas (Mitchell y Johnson, 1969; Johnson *et al.*, 1966; Johnson, 1965). La integración de los flujos se realizó de forma independiente en cinco bandas, con un error asociado a cada una de ellas. Los flujos para $\lambda \leq 1100\text{Å}$ se calcularon mediante extrapolaciones utilizando modelos de atmósferas de Kurucz *et al.* (1972). Las estrellas binarias se corrigieron del flujo de la compañera comparando las magnitudes de la primaria y de la secundaria.

El trabajo de Code *et al.* (1976) fue retomado posteriormente por Beekmans (1977) quien comparó diferentes calibraciones en el ultravioleta (TD1, OAO-2, Apolo 17), reduciendo los errores asociados en cada rango.

Método del Flujo Infrarrojo (IRFM)

Este método, desarrollado por Blackwell y Shallis (1977), se basa en la propiedad de que el flujo infrarrojo no es muy sensible ni a la temperatura ni a $\log g$. Remie y Lamers (1982) dieron una descripción detallada del mismo. Brevemente, el método se basa en el siguiente proceso de iteración:

- Se supone un valor de T_{eff} .
- Se obtiene el valor del flujo infrarrojo en la superficie estelar (F_{λ}^m) para un modelo de atmósfera con el valor adoptado de T_{eff} .
- Se calcula el diámetro angular comparando el flujo infrarrojo observado (F_{λ}) con el flujo obtenido con el modelo:

$$\theta_{IR}^2 = 4f_{IR}/(F_{IR}^m(T_{eff})\pi) \tag{5.4}$$

- Se utiliza este diámetro angular para convertir el flujo observado en todo el rango al valor de éste en la superficie de la estrella:

$$F_{\lambda} = 4f_{\lambda}/(\theta_{IR}^2\pi) \tag{5.5}$$

- Se integra este flujo en todo el rango espectral observado, (que en el caso de Remie y Lamers (1982) corresponde a $1380 \text{ \AA} \leq \lambda \leq 11084 \text{ \AA}$)

$$F(1380 \text{ \AA}, 11084 \text{ \AA}) = \int_{1380}^{11084} F_{\lambda} d\lambda = F_{obs} \quad (5.6)$$

- Se calcula el flujo en la región espectral no observada mediante el modelo de atmósfera con el valor de T_{eff} adoptado para encontrar las correcciones bolométricas infrarroja y ultravioleta:

$$UBC = \int_0^{1380} F_{\lambda}^m(T_{eff}) d\lambda \quad (5.7)$$

$$IBC = \int_{11084}^{\infty} F_{\lambda}^m(T_{eff}) d\lambda \quad (5.8)$$

- La suma del flujo observado y de las correcciones bolométricas proporciona el flujo total integrado en la superficie de la estrella, con el que se puede deducir una nueva estimación de la temperatura:

$$\sigma T_{eff}^4 / \pi = F(1380, 11084) + IBC + UBC \quad (5.9)$$

- Se repite el proceso.

Las iteraciones continúan hasta que los valores de T_{eff} y θ convergen ($\Delta T_{eff} \leq 1 \text{ K}$). Aunque este método se ha usado frecuentemente (p.e., Glusneva 1985; 1987; Leggett *et al.*, 1986), algunos autores han sugerido que se encuentra afectado de errores sistemáticos: Megessier (1988) lo aplicó a 7 estrellas tomadas de Code *et al.* (1976) obteniendo valores de T_{eff} aproximadamente un 2.0% menores, con diámetros angulares un 4.0% mayores. Napiwotzki *et al.* (1993) observaron la misma tendencia sugiriendo dos posibles fuentes de error: los modelos teóricos empleados o las calibraciones infrarrojas utilizadas (Hayes, 1979; Wamsteker, 1981).

5.1.2 Métodos espectrofotométricos

Otra forma de medir temperaturas efectivas consiste en la comparación de las distribuciones del flujo observado de la estrella con las predichas por modelos de atmósfera: la temperatura efectiva vendría dada por el modelo que se ajuste mejor al espectro observado.

Malagnini *et al.* (1982) desarrollaron un procedimiento para comparar distribuciones espectrales en el ultravioleta y en el óptico. Se trata de un método de ajuste por mínimos cuadrados consistente en minimizar las diferencias entre las observaciones en distintas longitudes de onda (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) y una función F que representa el flujo teórico que depende de tres parámetros ($T_{eff}, \log g, [M/H]$). Como F se conoce solamente en puntos discretos, estos autores consideraron un desarrollo de Taylor lineal para calcular su valor en puntos intermedios. La condición de mínimo da lugar a un sistema de ecuaciones cuya solución representa el mejor ajuste:

$$\partial S / \partial p_j = 0 (j = 1, \dots, 3) \tag{5.10}$$

donde S es la suma de los residuos (diferencias entre las observaciones y la función F) al cuadrado y p_j ($j=1,2,3$) son los distintos parámetros. Estos autores aplicaron el método para calcular temperaturas efectivas de 48 estrellas de tipos espectrales B5-A0 en los rangos ultravioleta y óptico.

Malagnini *et al.* (1985) utilizaron este método para determinar las temperaturas efectivas de cuatro estrellas de diámetros angulares conocidos ajustando datos ópticos y ultravioletas a modelos de Kurucz (1979a). Estos autores compararon el valor de T_{eff} ajustado con el calculado integrando el flujo observado en todo el rango de longitudes de onda (haciendo uso del flujo predicho por los modelos en aquellas regiones del espectro sin observaciones de flujo disponible) obteniendo resultados similares.

Igualmente, Malagnini y Morossi (1990) compararon datos espectrofotométricos en el rango [3200 Å–10000 Å] con la distribución espectral de energía predicha por los modelos de Kurucz (1979a) para 74 estrellas de la vecindad solar utilizando el método de ajuste citado previamente, alcanzando un grado de precisión del 2% en T_{eff} .

Métodos basados en el continuo espectral

- **Método del continuo de Paschen**

Este método utiliza como indicador de temperatura la pendiente del continuo de Paschen entre las longitudes de onda $\lambda_1 = 4000 \text{ \AA}$ y $\lambda_2 = 7000 \text{ \AA}$. Esta

pendiente no se encuentra prácticamente afectada por la gravedad, es relativamente independiente de las líneas espectrales y es poco sensible a efectos de NLTE (*no equilibrio termodinámico local*). El cambio de la pendiente con la temperatura viene dado por (Gray, 1992d):

$$\partial \log(F_{4000}/F_{7000})/\partial \log T_{eff} \simeq 2.3 \quad (5.11)$$

para $T_{eff} \leq 10000$ K. Para $T_{eff} \geq 10000$ K la pendiente del continuo de Paschen es bastante insensible a cambios en temperatura efectiva. Para estas temperaturas, el máximo de la distribución de energía aparece hacia longitudes de onda más cortas por lo que es más adecuado realizar medidas en el continuo de Balmer situado en la región del ultravioleta. En estrellas más frías la absorción de las líneas constituye un grave inconveniente y el método deja de ser efectivo (Gray, 1992d). Pueden encontrarse aplicaciones de este método en Bell y Dreiling (1981), y Bell y Oke (1986).

- **Método de la discontinuidad de Balmer**

La discontinuidad de Balmer constituye un buen indicador de temperatura en estrellas calientes. Para estrellas más frías (tipo A en adelante) dicha discontinuidad es también sensible a la presión. Definiendo F_+/F_- como la relación de flujos a ambos lados de $\lambda = 3647$ Å (donde + y - se refieren a longitudes de onda mayores y menores que 3647 Å respectivamente), se obtiene una variación de (Gray, 1992d):

$$\partial \log(F_+/F_-)/\partial \log(T_{eff}) \sim 1.3 \quad (5.12)$$

Schild y Chaffee (1979) compararon temperaturas efectivas calculadas utilizando la discontinuidad de Balmer y el continuo de Paschen, deduciendo valores similares.

5.1.3 Métodos fotométricos

El brillo de una estrella viene expresado generalmente por la relación

$$m = -2.5 \log \int_0^{\infty} F_{\nu} W(\nu) d\nu + \text{constante} \quad (5.13)$$

en la que el flujo de la estrella, F_{ν} , se calcula en el intervalo espectral especificado por $W(\nu)$. El sistema fotométrico más simple es el ojo humano, el cual presenta una respuesta máxima alrededor de 5100 Å con un ancho de banda de 2000 Å. Con el desarrollo de los sistemas fotoeléctricos se hicieron accesibles otras regiones espectrales y se desarrollaron nuevos sistemas de filtros. Estos filtros se pueden clasificar en *filtros de banda ancha* (1000 Å), *de banda intermedia* (100 Å–500 Å) y de *banda estrecha* (0.5 Å–100 Å). El más conocido dentro de los primeros es el sistema *UBV* (Johnson y Morgan, 1953), siendo el más utilizado dentro de los sistemas de banda intermedia el *uvby* (Strömgren, 1966; Hauck y Mermilliod, 1980; Perry *et al.*, 1987) junto con el sistema $H\beta$ de banda estrecha (Schmidt, 1979). Este sistema y su calibración de temperaturas efectivas se discutirán en las Secciones 5.3 y 5.4.

Comparando los flujos en diferentes bandas es posible calcular parámetros físicos como temperatura o gravedad. Dentro del sistema *UBV* podemos citar las calibraciones de Johnson (1966) y Fernley (1989) del índice *V-K* en términos de la temperatura efectiva: el índice de color *V-K* tiene la ventaja de ser muy sensible a la temperatura debido al amplio rango de longitudes de onda que abarca y relativamente insensible a la metalicidad. Fernley (1989) calculó temperaturas efectivas con errores menores que 150 K.

Otra calibración interesante puede construirse por medio de la escala de temperaturas $T_{eff}-(B-V)$ de Popper *et al.* (1970), junto con con la relación $(B-V)-\beta$ dada por Crawford y Perry (1966) para las Hyades. Petersen y Jorgensen (1972) utilizaron la relación obtenida ($T_{eff} = 6850. + 1250(\beta - 2.684)/0.144$) para calcular temperaturas de 53 δ *Scuti*, algunas de ellas comunes a nuestra muestra, cuyos valores aparecen en la Tabla 5.6. Esta calibración se examinará en las Secciones 5.3 y 5.4.

5.1.4 Métodos basados en perfiles de líneas espectrales

Líneas metálicas como indicadores de temperatura

Este método está basado en el uso de diferentes líneas del mismo elemento con distintos potenciales de excitación, haciendo uso de la ecuación de Boltzmann para estimar la temperatura. Es conveniente que estas líneas pertenezcan al mismo elemento para evitar dependencias con la abundancia y que tengan un rango de potenciales de excitación tan amplio como sea posible, aunque en la práctica sea difícil, en ocasiones, encontrar líneas con anchuras equivalentes fácilmente medibles y que cubran un amplio intervalo de potenciales de excitación.

Igualmente es posible calcular temperaturas efectivas utilizando la ecuación de Saha, mediante líneas de un mismo elemento en distintos estados de ionización. Sin embargo, la presión juega un papel muy importante en este caso y es necesario conocer su valor *a priori*.

Smith y Drake (1987) determinaron temperaturas efectivas de estrellas tipo solar basándose en diagramas de abundancias (en logaritmo) frente a T_{eff} para diferentes líneas espectrales y para valores determinados de microturbulencia y gravedad superficial. El punto de corte (o, en la práctica, la región de corte, debido a los errores en los parámetros) de las gráficas correspondientes a las líneas de Fe I y Fe II indica los valores adecuados de T_{eff} y $[Fe/H]$.

Gray *et al.* (1991) determinaron la temperatura de 49 estrellas enanas estudiando el cociente de las profundidades de dos líneas con diferentes potenciales de ionización, y, por tanto, con diferente sensibilidad a la temperatura (VI $\lambda 6251.83 \text{ \AA}$ y Fe I $\lambda 6252.57 \text{ \AA}$) y calculando una relación entre el índice de color (B-V) y este cociente de profundidades. El cociente de profundidades es un parámetro adecuado puesto que es independiente de ensanchamientos por rotación o macroturbulencia, ya que ambas líneas se ven afectadas de la misma manera. Si bien las temperaturas absolutas se basan en la calibración del índice (B-V) presentando un error asociado de $\pm 100 \text{ K}$, las medidas relativas pueden determinarse con una precisión de hasta $\approx 10 \text{ K}$, dependiendo de la *relación señal-ruido* de los datos. Este método es muy adecuado, por ejemplo, para estudiar variaciones de temperatura de estrellas pulsantes en diferentes fases de su ciclo de pulsación.

Líneas de hidrógeno como indicadores de temperatura

Para temperaturas inferiores a 8000 K, la rápida variación de la intensidad de las líneas de la serie de Balmer con la temperatura junto con la escasa influencia de la gravedad sobre dichas líneas las convierten en indicadores óptimos. La variación de la anchura equivalente de las líneas en función de la temperatura viene dada por (Gray, 1992d):

$$\partial \log W / \partial \log T_{eff} \sim 6 \quad (5.14)$$

Todas las campañas observacionales en las que se basa el presente trabajo han sido diseñadas de tal forma que el rango en longitud de onda de los espectros incluya una línea de Balmer: $H\beta$ en las observaciones de La Palma y $H\alpha$ en las de McDonald. En la siguiente sección se describe el método utilizado para calcular temperaturas efectivas usando $H\alpha$ y $H\beta$ como indicadores.

5.2 Cálculo de la temperatura efectiva utilizando $H\beta$ y $H\alpha$

Tal y como se dijo en el apartado anterior, las líneas de la serie de Balmer constituyen un indicador óptimo de temperatura cuando ésta es menor que 8000 K, lo cual no supone una restricción para nuestro estudio ya que la temperatura típica de las estrellas δ *Scuti* se encuentra en el rango entre 6500 K y 8000 K.

Un problema importante al ajustar las líneas de Balmer sintéticas a las observadas es el solapamiento de líneas metálicas en las alas. Para resolver esto, se propuso primeramente un método consistente en calcular la transformada de Fourier del perfil de la línea de Balmer observada sin eliminar ninguna línea metálica. El método se basa en comparar las transformadas de Fourier de la línea de Balmer observada y sintética, suponiendo que la contaminación por líneas metálicas apareciera en el espacio de Fourier solamente a altas frecuencias, pudiéndose comparar, por tanto, perfiles de Balmer puros. Sin embargo, en la Figura 5.1 se puede ver que la contribución de las líneas metálicas no está confinada exclusivamente en las frecuencias altas, sino que aparecen a lo largo de toda la transformada. Además, las diferencias

entre todas las transformadas de los perfiles sintéticos son demasiado pequeñas para poder elegir una de ellas.

Posteriormente se propusieron otros dos métodos. El primero se basa en la comparación de la anchura equivalente de las líneas de Balmer observada y sintética, y el segundo en un ajuste por mínimos cuadrados de los perfiles de las líneas. En ambos casos las líneas metálicas se eliminan de los perfiles de Balmer observados mediante una interpolación cúbica de tipo *spline*. La experiencia de este trabajo ha demostrado que el método basado en la comparación de los perfiles (ajuste por mínimos cuadrados) es más preciso que el método basado en la comparación de anchuras equivalentes, el cual es más sensible a los errores asociados a la eliminación de las líneas metálicas.

Sin embargo, previamente y de manera independiente del criterio elegido, se debe determinar el grado de insensibilidad de $H\alpha$ y $H\beta$ respecto de la gravedad. Para ello se ha construido una red de modelos sintéticos usando ATLAS8 (Kurucz, 1979a) con $T_{eff} = 6500, 7000, 7500, 8000$ K y $\log g = 3.5, 4.0$ y 4.5 . En las Figuras 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5 se muestran los perfiles sintéticos de $H\alpha$ y $H\beta$. Se puede observar que, para $T_{eff} \leq 8000$ K, la variación del perfil con la gravedad es prácticamente nula. Desde Septiembre de 1992 se dispone de una nueva versión de los modelos de Kurucz, ATLAS9. Para estos nuevos modelos se verificó igualmente la independencia de $H\alpha$ y $H\beta$ respecto a $\log g$. Sorprendentemente, el comportamiento de las líneas sintéticas $H\alpha$ y $H\beta$ generadas con ATLAS9 en el rango $7250 \text{ K} \leq T_{eff} \leq 7750 \text{ K}$ es anómalo, produciéndose cambios drásticos en la dependencia con $\log g$ en dicho rango (Figuras 5.2 a 5.6 y Tabla 5.1). Por el contrario, para temperaturas menores de 7000 K o mayores de 8000 K, el comportamiento es similar al de las líneas de Balmer generadas con ATLAS8, si bien las anchuras equivalentes varían de ATLAS8 a ATLAS9 (Tabla 5.1). Este comportamiento anómalo nos decidió a no usar la versión ATLAS9, y continuar utilizando ATLAS8.

Por otro lado, si bien los espectros de La Palma se encuentran prácticamente centrados en $H\beta$, lo que permite una determinación precisa del nivel de continuo, el rango espectral cubierto por cada orden en las observaciones de McDonald no es suficiente para abarcar el perfil completo de la línea $H\alpha$, que da lugar a una indeterminación del continuo. Debido a esto, se propuso un método alternativo consistente en comparar, no el perfil completo de la línea de $H\alpha$, sino las variaciones

en intensidad entre dos longitudes de onda ($\lambda 6567.19 \text{ \AA}$ y $\lambda 6578.46 \text{ \AA}$) en el perfil observado con las variaciones en el conjunto de espectros sintéticos. La selección de las longitudes de onda se ha realizado de tal forma que éstas se encuentren en la región del perfil espectral con mayor dependencia con la temperatura. Utilizando el conjunto de estrellas *no variables* y estrellas *variables* con una variación en la amplitud menor de 0.06 (que se correspondería con una variación en T_{eff} de 100 K) cuyas temperaturas fueron determinadas mediante $H\beta$, se obtuvo una relación lineal entre el cociente de intensidades y la temperatura, que permitió calcular el valor de la misma para las estrellas *variables* de amplitud mayor de 0.06. El error asociado a las temperaturas calculadas mediante $H\alpha$ es de $\pm 200 \text{ K}$.

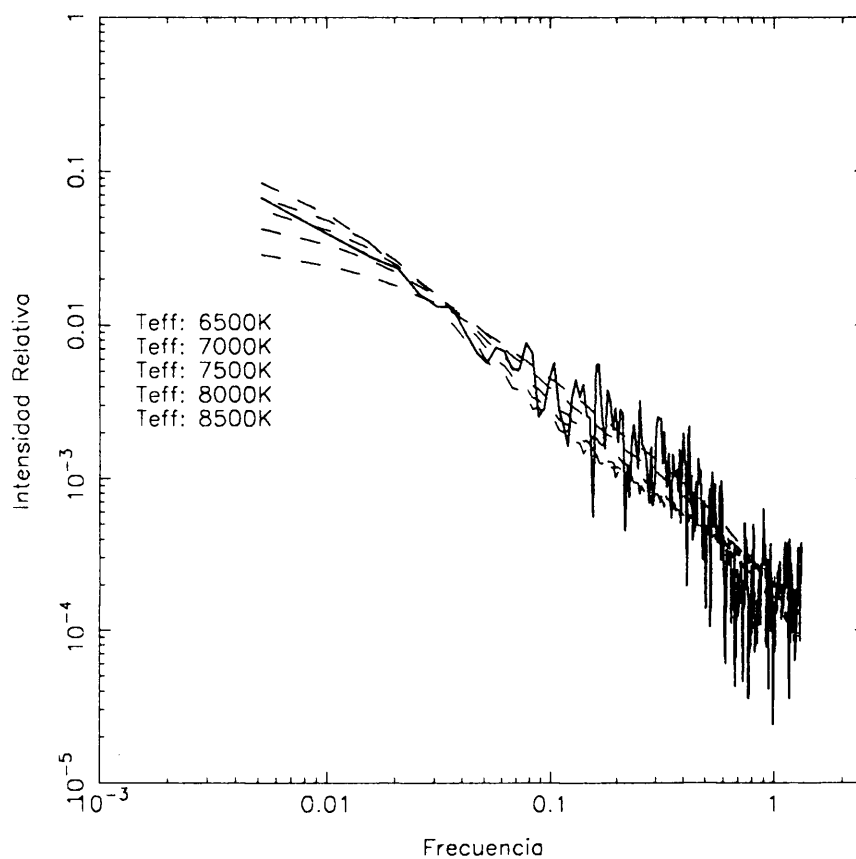


Figura 5.1

Transformadas de Fourier de los perfiles sintéticos de $H\beta$ para $\log g = 4.0$ y para *diferentes* temperaturas efectivas dadas a la izquierda (línea discontinua). Se ha superpuesto la transformada de Fourier de la estrella δ Sct, V1208 Aql (línea continua). Se observa que no es posible realizar ninguna determinación de la temperatura.

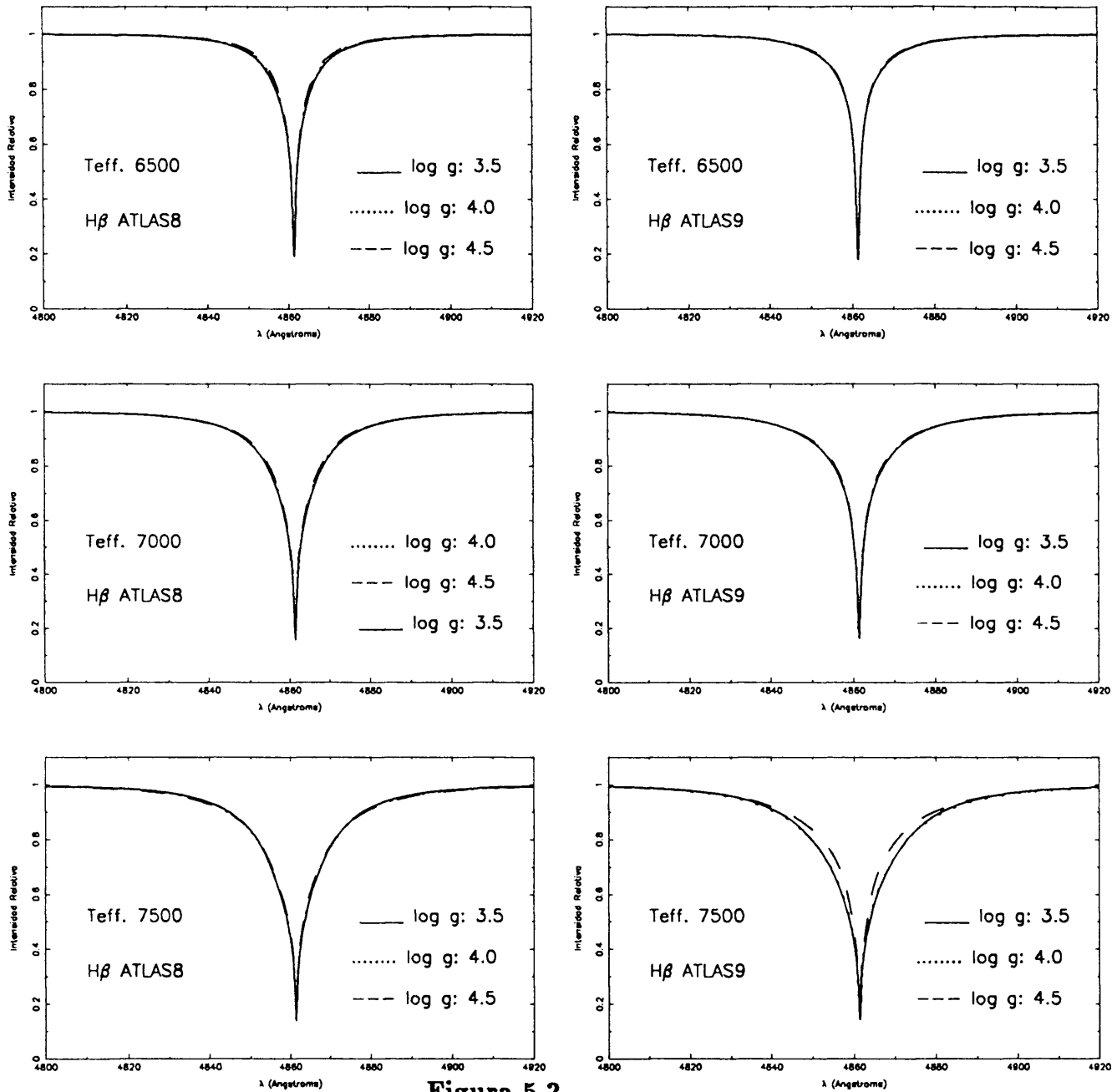


Figura 5.2

Perfiles sintéticos generados con ATLAS8 (izquierda) y ATLAS9 (derecha) de la línea $H\beta$ en el rango $6500 \text{ K} \leq T_{eff} \leq 7500 \text{ K}$ y $3.5 \leq \log g \leq 4.5$. Abajo a la derecha, $H\beta$ de ATLAS9 para $T_{eff}=7500 \text{ K}$ depende de $\log g$ (el perfil para $\log g = 4.5$ es diferente del correspondiente a $\log g = 3.5$ y $\log g = 4.0$).

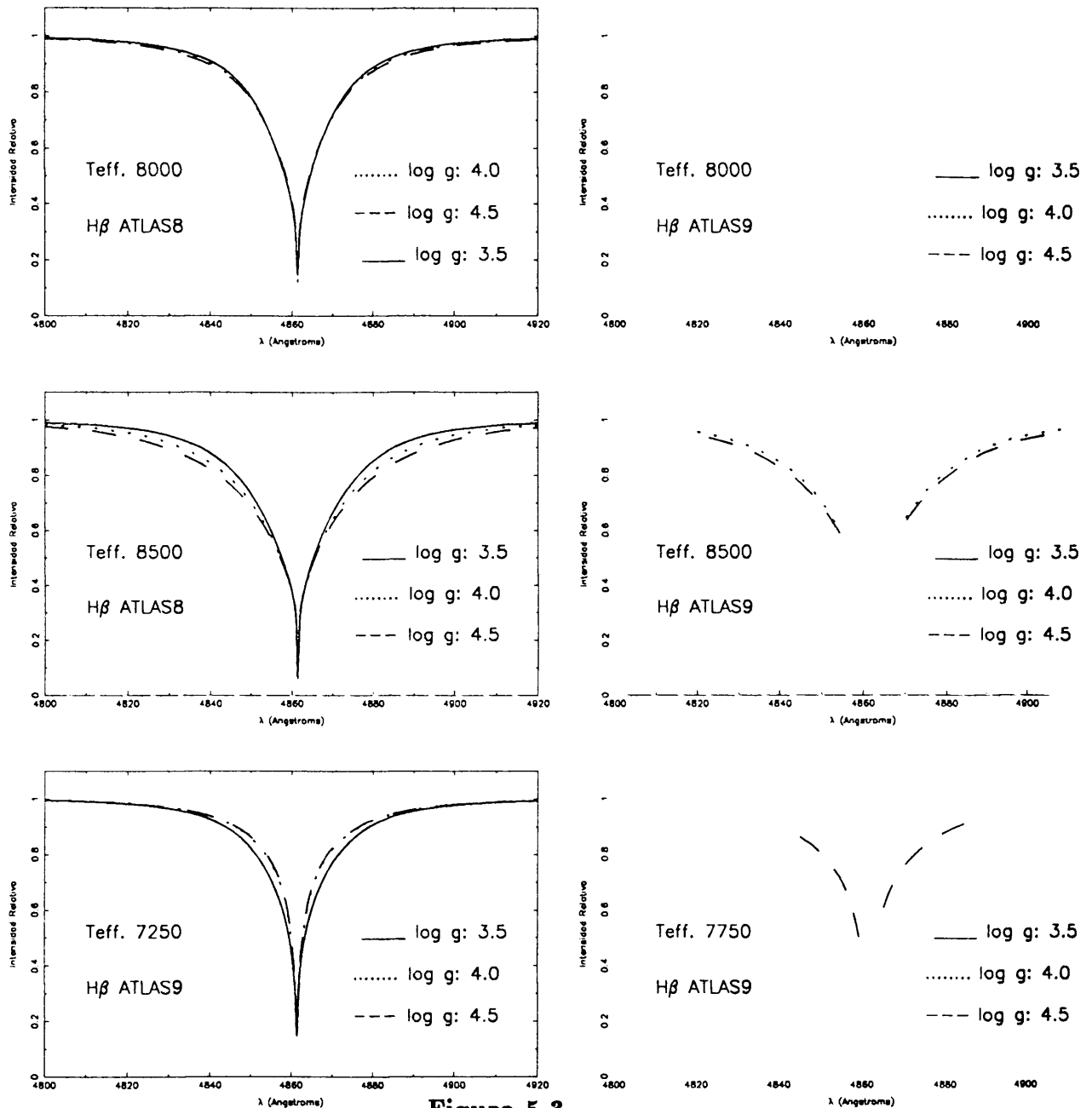


Figura 5.3

Perfiles sintéticos de la línea $H\beta$ (continuación). El comportamiento observado para $T_{eff}=7500$ K de ATLAS9 se reproduce para $T_{eff}=7250$ K y $T_{eff}=7750$ K. En el primer caso el perfil de $H\beta$ para $\log g = 3.5$ es diferente de los correspondientes para $\log g = 4.0, 4.5$. En el segundo caso es el perfil con $\log g = 4.5$ el que es diferente de los otros dos.

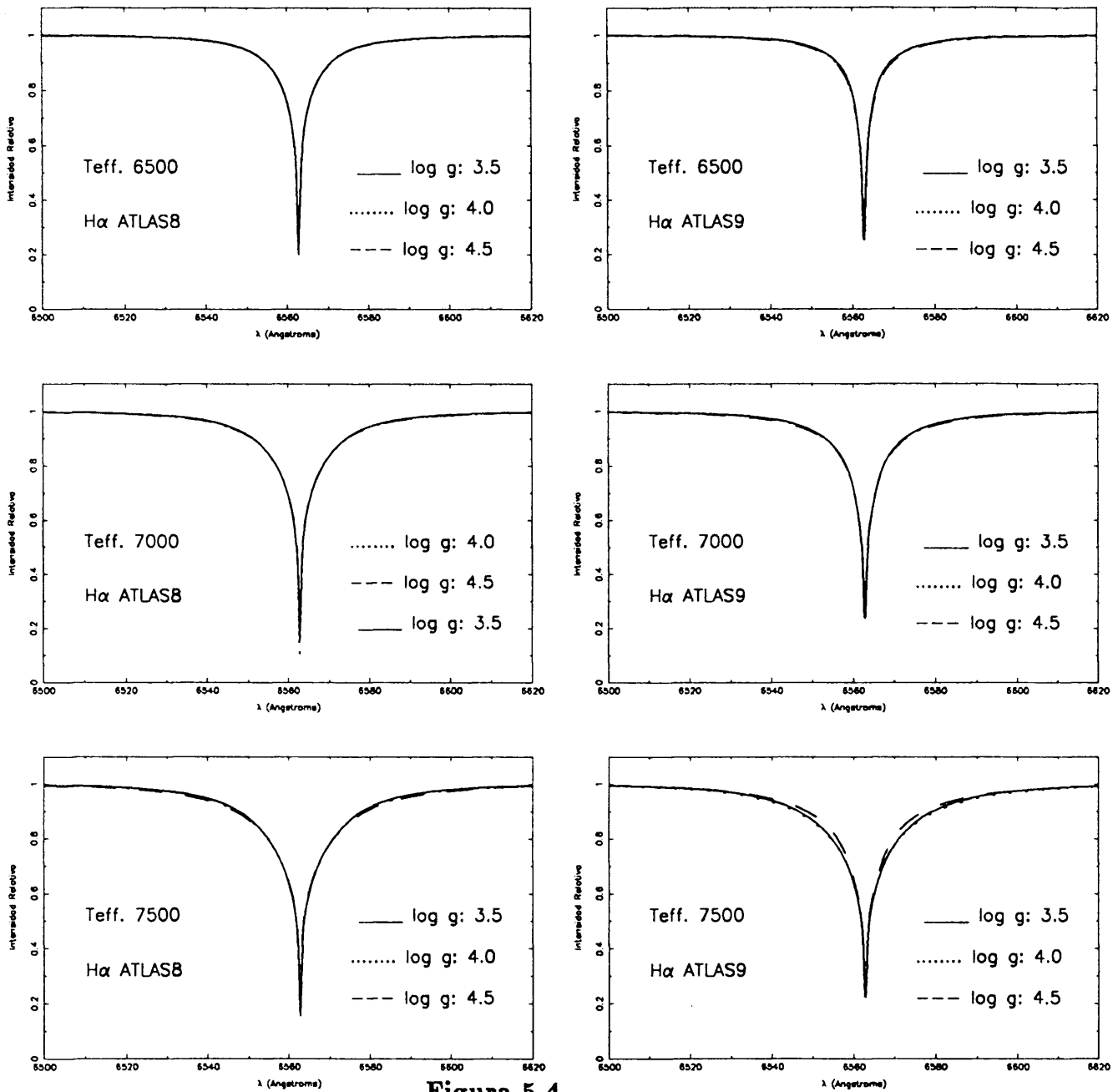


Figura 5.4

Perfiles de $H\alpha$ en el rango $6500 \text{ K} \leq T_{eff} \leq 7500 \text{ K}$ y $3.5 \leq \log g \leq 4.5$. Las diferencias entre ATLAS8 y ATLAS9 para $T_{eff} = 7500 \text{ K}$ son similares a las comentadas en el caso de $H\beta$.

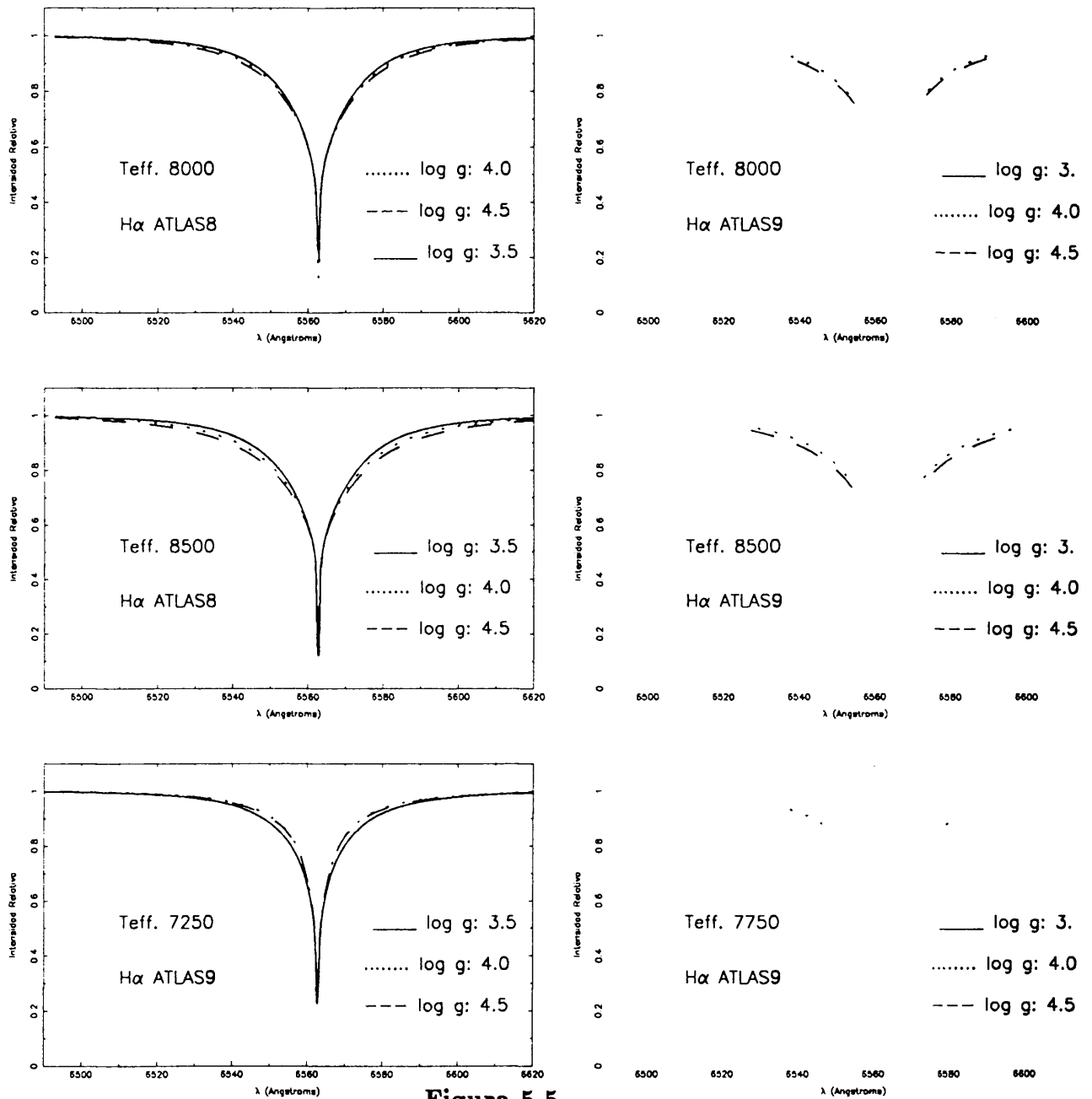


Figura 5.5

Perfiles de $H\alpha$ (continuación). Al igual que ocurría con $H\beta$, los perfiles de $H\alpha$ para $T_{eff}=7250$ K y $T_{eff}=7750$ K también muestran peculiaridades. Para $T_{eff}=7250$ K, el perfil para $\log g=4.5$ es diferente que los perfiles para $\log g=3.5, 4.5$, mientras que todos los perfiles son diferentes para $T_{eff}=7750$ K.

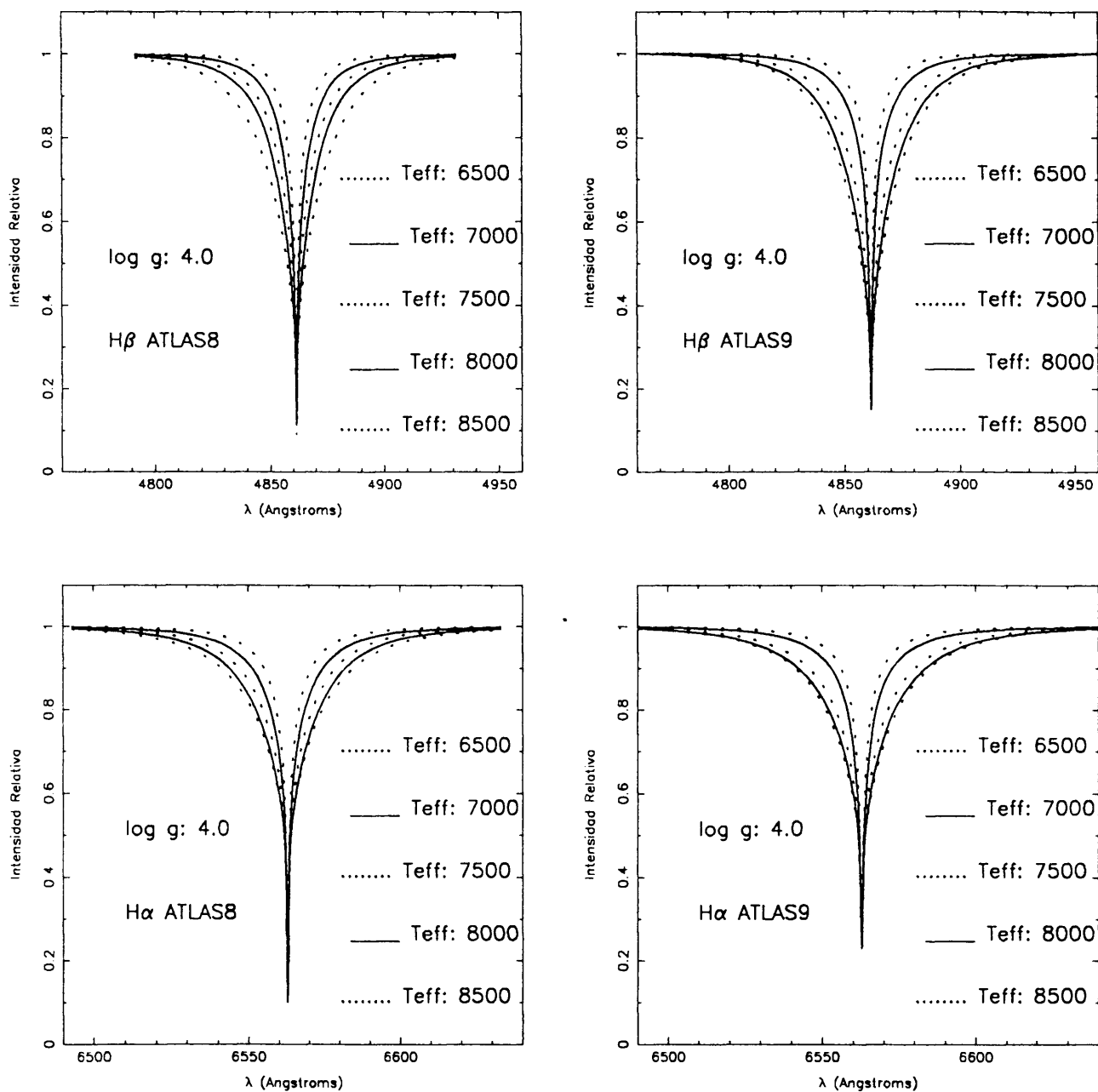


Figura 5.6

Comparación entre los perfiles sintéticos de $H\alpha$ y $H\beta$ generados con ATLAS8 y ATLAS9.

Se observa que existen diferencias en los perfiles de las líneas entre ambas versiones.

Tabla 5.1: Anchuras equivalentes (EW) de las líneas $H\alpha$, $H\beta$ para $\log g=4.0$ y diferentes valores de temperatura efectiva utilizando ATLAS8 (Kurucz, 1979a) y ATLAS9 (Kurucz, 1991)

T_{eff}	$H\beta$			$H\alpha$		
	EW(AT8) (mÅ)	EW(AT9) (mÅ)	Cociente(A8/A9)	EW(AT8) (mÅ)	EW(AT9) (mÅ)	Cociente (A8/A9)
6500	6063.79	5682.42	1.067	5780.33	5271.53	1.096
7000	9013.49	8771.52	1.027	8148.66	7349.02	1.109
7250		10653.95			8578.20	
7500	12431.25	14506.41	0.857	10618.36	11493.63	0.924
7750		16351.36			12698.53	
8000	15320.1	18077.91	0.847	12802.55	13638.51	0.939
8500	19967.83	20214.82	0.987	14036.95	14357.86	0.977

5.3 Cálculo de temperaturas efectivas utilizando fotometría $uvby\beta$.

Se han publicado en la bibliografía diferentes calibraciones de temperatura efectiva y gravedad superficial utilizando fotometría $uvby\beta$ (p.e., Relyea y Kurucz, 1978; Schmidt, 1979; Philip y Relyea, 1979; Balona, 1984...). No obstante, Gollay (1974) y Crawford (1978) demostraron que para estrellas de tipos B, A y F las mejores calibraciones de luminosidad y temperatura se obtienen combinando el índice β con la diferencia de color c_0 . En el caso de estrellas más calientes que A0, Fernie (1965), Crawford (1978), y Balona y Shobbrook (1984) mostraron que β es un buen indicador de la luminosidad y por tanto de la gravedad superficial, mientras que c_0 es un parámetro apropiado para predecir temperaturas. Para tipos espectrales más fríos que A0, como es nuestro caso, el comportamiento es el inverso.

5.3.1 Calibración de Petersen y Jorgensen.

Petersen y Jorgensen (1972) ,(PJ72), analizaron teóricamente las características

de la pulsación de estrellas situadas en la zona inferior de la *franja de inestabilidad* del *diagrama H-R* comparando los resultados con datos observacionales. Estos autores dedujeron la siguiente fórmula para el cálculo de temperaturas efectivas:

$$T_{eff} = 6850 + 1250(\beta - 2.684)/0.144 \quad (5.15)$$

calculada combinando la escala de temperaturas T_{eff} -(B-V) de Popper *et al.* (1970) con la relación (B-V)- β dada para las Hyades por Crawford y Perry (1966). Estas expresiones se utilizan en López de Coca *et al.* (1990) para deducir *relaciones empíricas Período-Luminosidad-Color (P-C-L)* de estrellas δ Scuti.

5.3.2 Calibración de Relyea y Kurucz.

Reylea y Kurucz (1978) calcularon índices Strömngren teóricos utilizando los modelos de atmósferas de Kurucz (1979a) para estrellas de tipos espectrales O, B, A, F, G, que son posteriormente calibrados utilizando Vega como estrella de referencia. El hecho de utilizar solamente una estrella se debe a que, según estos autores, es la única con una calibración en flujo suficientemente precisa (Hayes y Latham, 1975). Una vez realizada la calibración, se construyó una red $(b - y)_0 - (c_1)_0$ para diferentes valores de T_{eff} , $\log g$ y $[M/H]$, comparando los resultados obtenidos con valores empíricos tomados de Code *et al.* (1975; 1976), encontrándose diferencias en los valores de $\log g$ para $T_{eff} \leq 8500$ K: según Paczyinsky (1970), el valor de $\log g = 4.3$ es el que mejor representa a la ZAMS en el rango de temperaturas $6300 \text{ K} \leq T_{eff} \leq 10000 \text{ K}$. Sin embargo, superponiendo el diagrama teórico $(b-y)-c_1$, se puede observar que, para $T_{eff} \leq 8500 \text{ K}$, los valores teóricos de c_1 son sistemáticamente menores que los observados para una temperatura dada. Como las estrellas δ Scuti pertenecen a este rango de temperaturas problemático, esta calibración no se utilizará en nuestro trabajo.

5.3.3 Calibración de Philip y Relyea.

Philip y Relyea (1979), (PR79), contruyeron una red $(c_1)_0 - (b - y)_0$ para el cálculo de $\log g$ y T_{eff} a partir de los índices de color Strömngren corregidos de enrojecimiento para las Poblaciones I y II en el rango $5500 \text{ K} \leq T_{eff} \leq 10000 \text{ K}$; $2.0 \leq \log g \leq 4.5$ y $-2.0 \leq [Fe/H] \leq 0.0$. Utilizando modelos de Kurucz (1979a)

y las funciones de transmisión de los filtros *uvby* (Matsushima, 1969), se obtienen colores teóricos que se normalizan a los colores observados de Vega para el modelo con $T_{eff} = 9400K$, $\log g = 3.95$ y $[Fe/H]=0.0$. Estos autores resolvieron el problema encontrado en los modelos de Relyea y Kurucz desplazando la red a lo largo de las líneas de temperatura constante hasta que la ZAMS observada coincida con la línea de $\log g = 4.3$. Philip y Relyea estudiaron la precisión de esta red mediante siete estrellas con temperaturas efectivas calculadas en Code *et al.* (1976) estimándose unos errores de $\Delta T_{eff} = \pm 200$ K y $\Delta \log g = \pm 0.1$. No obstante, la metalicidad debe ser conocida *a priori*. Si no es así, la incertidumbre en metalicidad dará lugar a un error adicional en la temperatura efectiva.

5.3.4 Calibración de Moon y Dworetsky

Moon y Dworetsky (1985), (MD85), compararon los índices sintéticos *uvby β* calculados por Relyea y Kurucz (1978) y Schmidt (1979), con los colores e índices observados de 19 estrellas de tipos espectrales B, A y F con valores de T_{eff} y $\log g$ conocidos (Code *et al.*, 1976; Hayes, 1978) obteniendo una diferencia media de -10 K. De esta comparación, estos autores dedujeron que debe aplicarse una corrección del punto cero al índice $(c_1)_0$ de Relyea y Kurucz (1978) ya que los valores calculados eran, en media, 0.008 magnitudes menores que los valores observados, sugiriendo que dicha corrección se debe a que sólo una estrella, Vega, fue utilizada para transformar los colores sintéticos en observados. Por otra parte, el índice β tabulado por Schmidt (1979) presenta un error de escala cuando se compara con los índices observados. Moon y Dworetsky sugirieron algunas explicaciones: la baja resolución de los perfiles observados de Schmidt (1979) podría dar lugar a un error en el continuo, de forma que el observado fuese menos intenso que el continuo real, dando lugar a un error sistemático en el índice β . Sin embargo este efecto reduciría el índice β calculado en 0.01 magnitudes como máximo que no es suficiente para explicar las diferencias observadas. La exclusión de líneas metálicas y el truncamiento de la curva de sensibilidad del filtro se propusieron también como fuentes de error pero fueron rechazadas. Finalmente, Moon y Dworetsky propusieron como hipótesis más probable que este error se encuentre relacionado con la teoría utilizada de ensanchamiento de líneas y, en particular, con el tratamiento de las alas de la línea $H\beta$.

5.3.5 Calibración de Lester, Gray y Kurucz.

Lester, Gray y Kurucz (1986), (LGK86), calcularon índices teóricos $uvby\beta$ basándose en los modelos de Kurucz publicados (1979a), (LGK86a), y no publicados (Kurucz, 1979b), (LGK86b). Las principales diferencias entre ellos son que los modelos no publicados cubren un rango más amplio de abundancias metálicas con intervalos más pequeños entre ellas y que consideran una pequeña modificación de la teoría estándar de la convección de la longitud de mezcla (Lester, Lane y Kurucz, 1982). A diferencia de Relyea y Kurucz (1978) que tomaron una única estrella estándar (α Lyr), LGK86 escogieron de Taylor (1984) aquellas estrellas espectralométricas estándar secundarias con observaciones en el ultravioleta y con gravedades superficiales dadas por Code *et al.* (1976): γ Gem, α CMi, β Leo, η UMa, α Lyr).

LGK86 compararon la red $(c_1)_0-\beta$ con la red empírica dada por Philip y Egret (1980), obteniendo resultados similares dentro de los errores considerados.

5.4 Comparación de los resultados

Para poder comparar las calibraciones citadas es necesario conocer los índices Strömgren de las estrellas observadas. Por lo que respecta a las estrellas δ Scuti y SX Phe, se utilizaron dos catálogos: Rodríguez *et al.* (1994) y García *et al.* (1993). Los primeros tomaron los valores de los índices Strömgren de Hauck y Mermilliod (1990) mientras que García *et al.* utilizaron el catálogo de Kholopov (1987). Para algunas estrellas, existen diferencias entre los índices de ambas fuentes; en estos casos se muestran los dos valores (Tabla 5.2). Los índices de las estrellas *no variables* se han tomado de Hauck y Mermilliod (1990) (Tabla 5.3). En las Tablas 5.6 y 5.7 se muestran los valores de T_{eff} calculados para el conjunto de estrellas observado.

La manera lógica de comparar las diferentes calibraciones sería comparar los resultados obtenidos con cada una de ellas para una muestra de estrellas con valores precisos de T_{eff} . Code *et al.* (1976) y Hayes (1978) calcularon valores empíricos de temperaturas para un conjunto de estrellas con el método de flujo integrado. Estos valores se aceptan como fundamentales en el estudio de temperaturas efectivas. Desafortunadamente sólo tres estrellas son comunes con nuestras campañas de observación por lo que no es posible extraer ninguna información estadísticamente

representativa de esta muestra tan pequeña. Únicamente se podría deducir que los valores calculados de T_{eff} según LGK86b son los que parecen presentar mayores diferencias con los valores fundamentales (Tabla 5.5).

Otra manera de comparar las distintas calibraciones consiste en estudiar la representación que cada una de ellas hace de la ZAMS. Puesto que existen líneas de referencia observacionales para la ZAMS (Philip y Egret, 1980), la red más adecuada podría ser aquella que la reproduzca mejor. Para ello hemos representado la ZAMS "observacional" (Paczynski, 1970) frente a las líneas de referencia de cada una de las redes estudiadas (PR79, LGK86a, LGK86b, MD85), para valores diferentes de $\log g$ (desde $\log g=4.1$ a $\log g = 4.4$), indicando sus diferencias con la ZAMS "observacional" por medio de un ajuste por mínimos cuadrados (Figura 5.7).

Según la Figura 5.7 el mejor ajuste se consigue con la red PR79. MD85 también proporciona buenos resultados pero tanto LGK86a como LGK86b reproducen pobremente la ZAMS en el caso de $\log g=4.3$. Sin embargo, López de Coca *et al.* (1991) señalaron que existen discrepancias entre los indicadores de temperatura (b-y) y β demostrando que, en el rango en que se encuentran las estrellas δ Scuti, los valores del índice β para la ZAMS dados por LGK86a son sistemáticamente mayores que los valores de Philip y Egret (1980) para el mismo (b-y), lo cual significa que en este rango, las temperaturas obtenidas con una red c_1 -(b-y) son mayores que las derivadas de una red c_1 - β , cuando, en principio deberían ser idénticas. Una posible explicación de estas discrepancias podría radicar en la rotación: los flujos estelares utilizados en los modelos teóricos están calculados para estrellas con velocidades de rotación nulas, mientras que las líneas de referencia de Philip y Egret (1980) están basadas en estrellas reales que pueden rotar, en media, con $v \sin i = 100 \text{ km s}^{-1}$. Si bien se sabe que la rotación no influye prácticamente en la fotometría de banda ancha e intermedia, sí podría tener influencia en los filtros de banda estrecha como el filtro $H\beta$. Este efecto equilibraría las discrepancias encontradas. Sin embargo, LGK86 discutieron el efecto de la rotación y no encontraron diferencias significativas. Aunque el estudio de LGK86 está basado en estrellas de tipo B, las estrellas δ Scuti pertenecen a tipos espectrales A-F y, por tanto, sus velocidades de rotación serán menores que las de estrellas B por lo que el efecto rotacional sería incluso menor.

Un tercer método se basa en la comparación entre las temperaturas efectivas

calculadas con las calibraciones fotométricas y las calculadas ajustando los perfiles observados de $H\beta$ y $H\alpha$ lo que, si bien no proporciona una determinación absoluta de temperaturas, sí podría indicar la presencia de posibles errores sistemáticos en alguna de las calibraciones (Figura 5.8).

En esta figura se observa que ciertas calibraciones proporcionan temperaturas superiores (PJ72), otras dan temperaturas inferiores (LGK86b) y otras similares (MD85, LGK86a) que las calculadas por medio de $H\beta$.

Petersen y Jorgensen (1972) calcularon temperaturas efectivas que son, en media, 196 K superiores a las determinadas mediante los perfiles de $H\beta$. Aunque la calibración de PJ72 proporciona coeficientes para la relación P-C-L similares a los teóricos de Stellingwerf (1979), las discrepancias en T_{eff} se deben probablemente a la calibraciones obsoletas en las que se basa (Popper *et al.*, 1970; Crawford *et al.*, 1966). Por otra parte, PJ72 supusieron que existe linealidad entre T_{eff} y β , lo cual no es siempre cierto (López de Coca *et al.*, 1991).

Con la calibración de Philip y Relyea (1979) se obtienen temperaturas efectivas, en media, 155 K superiores a las obtenidas con los perfiles $H\beta$. En la Figura 5.8 se puede apreciar que las diferencias son mayores al aumentar la temperatura. Puesto que el índice (b-y) es sensible al enrojecimiento, hemos comparado nuestras correcciones de enrojecimiento con las publicadas por López de Coca *et al.* (1990) para las estrellas δ *Scuti* sin encontrar diferencias significativas.

La calibración de Moon y Dworetzky (MD85) es la que proporciona temperaturas más parecidas a las calculadas mediante $H\beta$ con un valor medio de la diferencia de 22 K y una desviación típica de 116 K que coincide bastante bien con el error aleatorio de 100 K supuesto a lo largo de todo el capítulo.

Lester, Gray y Kurucz (1986), (LGK86), calcularon dos redes $(c_1)_{0-\beta}$ distintas. La primera, (LGK86a), proporciona temperaturas efectivas ligeramente inferiores a las obtenidas con la línea $H\beta$. La segunda, (LGK86b), da temperaturas aún menores. La diferencia entre las dos redes es el tratamiento de la convección: LGK86a consideraron la teoría estándar de la longitud de mezcla (Cox y Giuli, 1968). Según esta teoría la representación de cada nivel convectivo inestable en la estrella viene dada por elementos calientes emergentes y elementos fríos descendentes, con los que se define una temperatura media para ese nivel. Las propiedades físicas del gas necesarias para calcular el flujo convectivo se basan en dicha temperatura me-

dia. No obstante, Deupree (1979) sugirió que esta teoría estándar no es correcta en cuanto a la opacidad, la cual debe cambiar rápidamente y de forma no lineal con la temperatura. Para corregir esto, es necesario calcular una opacidad media en cada capa, teniendo en cuenta las diferentes temperaturas presentes en los elementos que ascienden y descienden. Lester, Lane y Kurucz (1982) explicaron extensamente esta nueva teoría. Uno de sus resultados es que las T_{eff} obtenidas con estos nuevos modelos son, en media, ≈ 300 K más frías que las calculadas con el modelo antiguo, lo cual está de acuerdo con nuestra comparación entre LGK86b y el método de $H\beta$.

Comparando las temperaturas de LGK86a con las calculadas con $H\beta$ se observa que las primeras son, en media, 46 K más frías que las segundas. Aunque esta diferencia no es significativa puesto que estamos suponiendo un error aleatorio de ± 100 K, se puede ver en la Figura 5.8 que las mayores diferencias aparecen a temperaturas más bajas. Dos argumentos pueden explicar este comportamiento: por un lado, la utilización de cinco estrellas solamente para la calibración de los índices puede dar lugar a errores, especialmente en la zona de temperaturas inferiores donde la calibración se basa exclusivamente en la T_{eff} adoptada para α CMi. Los argumentos de LGK86 para no considerar el Sol como estrella de calibración para temperaturas bajas se basan en que los índices fotométricos solares no se encuentran bien establecidos y en que los modelos de Kurucz no incluyen opacidades moleculares, que deberían tenerse en cuenta en estrellas con temperatura solar. Por otro lado, pueden existir errores intrínsecos en los modelos de Kurucz en el ultravioleta: LGK86 seleccionaron la temperatura efectiva que mejor se ajusta a los modelos en el óptico y en el ultravioleta. Sin embargo las opacidades de los modelos de Kurucz (1979a) en el ultravioleta distan de ser realistas. Se consigue un notable avance cuando se utilizan los nuevos modelos de Kurucz (1991). Smalley y Dworetzky (1993), (SD93), demostraron que las diferencias se reducen drásticamente en las estrellas A_m . Napiwotzki *et al.* (1993) compararon los resultados de LGK86a y de MD85 utilizando un conjunto de estrellas con T_{eff} bien determinadas mediante el *Método del Flujo Infrarrojo* (IRFM). Al igual que nosotros, también encontraron que LGK86a obtuvieron T_{eff} más frías, mientras que las calculadas por MD85 concuerdan bien con las determinadas con IRFM.

Se puede encontrar en la bibliografía una extensa discusión, principalmente referida a las estrellas A_m , respecto a qué red es la más adecuada para calcular

temperaturas efectivas: Moon y Dworetzky (1985) ó Lester *et al.* (1986). Lane y Lester (1984), (LL84), dedujeron temperaturas efectivas de un grupo de estrellas A_m clásicas considerando distribuciones de flujo sintéticas a partir de modelos (Lester, Lane y Kurucz, 1982). El ajuste se realiza minimizando el error cuadrático medio entre la distribución de energía observada y los modelos, dando a los datos en el óptico un peso estadístico tres veces mayor que a las medidas de satélites. Estos autores solamente consideraron modelos de metalicidad solar. El método se aplicó también a Vega, Procyon y Sirio, encontrándose temperaturas efectivas que concuerdan con las temperaturas empíricas calculadas por Code *et al.* (1976). El principal resultado de este estudio es el desplazamiento del límite inferior de las temperaturas efectivas de las estrellas A_m hacia valores más fríos comparados con análisis previos (p.e., Smith, 1973). LL84 sugirieron que las temperaturas de las estrellas A_m calculadas con anterioridad son sistemáticamente más calientes debido a la elección de modelos de atmósferas que no consideran la contribución de las opacidades de las líneas metálicas. Esto podría explicar las diferencias en T_{eff} para algunas estrellas A_m estudiadas en LL84 y en Böhm-Vitense (1981), quien obtuvo valores más elevados. Böhm-Vitense (1981) utilizó un método similar a LL84, esto es, la comparación entre las distribuciones de energía observadas y los modelos, pero sólo en la región ultravioleta, donde la opacidad debida a las líneas metálicas es mucho mayor.

El hecho de modificar el límite inferior de temperatura para las estrellas A_m tiene una influencia directa sobre la teoría de difusión: el crecimiento de la zona convectiva parece ser el factor que limita la aparición, en estrellas de tipos espectrales posteriores a A, de características similares a las existentes en estrellas A_m puesto que dicho crecimiento fuerza a que la difusión tenga lugar en capas tan internas que la temperatura y la densidad ya no favorecen este fenómeno. Michaud *et al.* (1983) calcularon que el fenómeno A_m debería desaparecer a $T_{eff} \approx 6700$ K. Según LL84, τ UMa, una estrella A_m , estaría por debajo de este límite.

Moon y Dworetzky (1985) afirmaron que su red es aplicable a estrellas A_m para $T_{eff} \leq 8500$ K, basándose en comparaciones de los valores de $\log g$ calculados mediante la red y los determinados a partir de valores de la masa y el radio de tres estrellas A_m (Popper, 1980). El hecho de que el índice β parezca ser insensible a la metalicidad (Schmidt, 1979) favorece esta hipótesis. Estos autores calcularon valores de temperaturas efectivas sistemáticamente mayores que los calculados por

LL84.

Dworetzky y Moon (1986), (DM86), estudiaron las discrepancias entre los resultados de LL84 y de MD85, sugiriendo que las estrellas de calibración seleccionadas por LL84 no son adecuadas: Vega y Sirio son considerablemente más calientes que cualquiera de las estrellas A_m estudiadas y Procyon muestra una metalicidad normal. También encontraron una fuerte correlación entre las diferencias de LL84 y MD85 para T_{eff} y $\log g$ con la metalicidad representada por el índice δm_0 : cuanto mayor es la metalicidad, mayor es esa diferencia. Estudiando estrellas A_m en cúmulos, DM86 encontraron que las redes de MD85 tienen que corregirse de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\log g = \log g(\text{grid}) + 3.442 \delta m_0 \quad (5.16)$$

Lester (1987), (L87), sugirió que las temperaturas dadas por MD85, sistemáticamente mayores que las de LL84, se deben al hecho de estar afectadas por anomalías en el flujo medido por el filtro b . L87 encontró un exceso de flujo en $\lambda = 4785 \text{ \AA}$ explicado como un cambio en el equilibrio de ionización de los elementos del grupo del hierro. Este exceso de flujo reduce la magnitud b , de forma que $(b - y)$ es más azul y, por tanto, las temperaturas son más altas. El exceso de flujo también afecta al índice β ya que $\lambda = 4785 \text{ \AA}$ se encuentra dentro del rango del filtro. La relación encontrada por DM86 entre ΔT_{eff} y m_1 se explica en los mismos términos ya que b aparece en la definición del índice m_1 . L87 también observó similitud entre los valores de las temperaturas efectivas dadas en LL84 y las temperaturas obtenidas a partir de la calibración de (B-V) (Buser y Kurucz, 1978), argumentando que como el filtro B tiene su pico de transmisión a $\approx 4300 \text{ \AA}$, el exceso de flujo no debería afectar al índice (B-V).

Burkhart y Coupry (1989), (BC89), defendieron la calibración de MD85 comparando las temperaturas efectivas obtenidas con esta red y las obtenidas con diferentes filtros en el sistema de Johnson. Boesgaard y Tripicco (1986) calcularon T_{eff} para estrellas F de las Hyades considerando la calibración del índice (R-I) y Cayrel *et al.* (1985) lo hicieron para las estrellas G del mismo cúmulo con el color (V-K), obteniendo ambas temperaturas similares a las publicadas en MD85. Boesgaard (1987), utilizando el color (B-V) calibrado por Böhm-Vitense (1981), proporcionó temperaturas para cinco estrellas A_m con valores similares a los calculados

($\Delta T_{eff} = \pm 100$ K). Se supone que todos estos índices se encuentran lo suficientemente lejos de la región donde ocurre el exceso de flujo como para estar afectados por él. Es más, BC89 dudó incluso de la influencia de este exceso en (b-y), basándose en las excelentes correlaciones encontradas entre $(b - y)_0$ y el índice del sistema de Ginebra (B2-V1). BC89 obtuvieron igualmente valores similares (± 250 K) utilizando fotometría $uvby\beta$ y la línea de Balmer $H\gamma$ observada y ajustada mediante los modelos de composición solar utilizados en LL84, sugiriendo que el problema de LL84 podría residir en las calibraciones del flujo absoluto en el ultravioleta, las cuales presentan errores de hasta un 20% (Praderie, 1981).

Cayrel *et al.* (1991) calcularon la temperatura efectiva de 63 *Tau*, una estrella A_m clásica, obteniendo un valor de 7300 K muy próximo al de MD85, concluyendo que las temperaturas obtenidas por LL84 son demasiado bajas. Megessier y van't Veer (1991) dedujeron para la misma estrella un valor de 7160 ± 70 K mediante el *Método del Flujo Infrarrojo* (Blackwell y Shallis, 1977). La diferencia entre ambas determinaciones se atribuye a la presencia de una compañera roja, que puede disminuir la temperatura aparente en 100 K aproximadamente (Cayrel *et al.*, 1991).

Hauck y North (1993), (HN93), calcularon T_{eff} de estrellas *químicamente peculiares*, (*CP en inglés*) en el sistema de Ginebra. Al igual que BC89, HN93 no encontraron evidencias de que el índice (b-y) esté afectado por el exceso de flujo a $\lambda = 4785\text{\AA}$, basándose en el hecho de que no hay diferencias entre las relaciones (B2-V1) *vs.* (b-y) para estrellas normales de la Secuencia Principal y para estrellas A_m . Demostraron también que la calibración de (B2-V1) en términos de T_{eff} de Hauck (1985) proporciona valores superiores a los deducidos por LL84. Estos autores estudiaron igualmente el índice del sistema Ginebra (B2-G) y su calibración en T_{eff} (Hauck y North, 1982) demostrando que esta calibración proporciona valores de temperaturas efectivas sistemáticamente más bajos que los deducidos con (B2-V1), pero en todo caso más altos que los de LL84. Estas discrepancias entre índices pueden deberse bien a errores en las calibraciones o bien a la influencia de una compañera fría que puede hacer disminuir la magnitud G y enrojecer el índice (B2-G) en una cantidad mayor que en el caso de la magnitud V1 y del índice (B2-V1), respectivamente.

Smalley y Dworetzky (SD93) trataron de poner fin a esta controversia existente entre MD85 y LGK86. Cuestionaron el hecho de que las estrellas A_m en LL84 se

ajusten a modelos de composición solar, cuando se ha demostrado que los modelos de metalicidad solar no son capaces de reproducir las abundancias observadas de las estrellas A_m (Wolff, 1983). La utilización de modelos con $[M/H]=0.5$ tiende a reducir las discrepancias con las temperaturas efectivas de MD85, aunque el ajuste formal es peor. SD93 afirmaron que esto es debido a un ajuste de menor calidad en los flujos ultravioletas, debido a la falta de precisión de las opacidades ultravioletas de los modelos. En cualquier caso y aunque el ajuste formal sea peor, SD93 establecieron que deben utilizarse modelos con $[M/H]=0.5$.

Igualmente, SD93 mostraron las ventajas de las líneas de Balmer como indicadores de temperatura en el rango en que estamos trabajando. Por debajo de 8000 K la influencia de la gravedad es despreciable y la contribución de líneas metálicas sobre los modelos es muy pequeña: los modelos con $[M/H]=0.5$ producen solamente una disminución típica de 100 K en la temperatura efectiva obtenida con las líneas de Balmer y modelos solares. Las temperaturas efectivas obtenidas con este método concuerdan con las deducidas por MD85. Además, la correlación entre las diferencias en los valores de T_{eff} calculados por LL84 y DM86, y δm_0 , es válida también para las diferencias entre las temperaturas calculadas con las líneas de Balmer y las obtenidas por LL84. De nuevo, los modelos con $[M/H]=0.5$ reducen significativamente estas discrepancias.

SD93 también dieron una explicación al exceso de flujo en $\lambda 4785 \text{ \AA}$ sugerido por L87 como causa del error en las calibración de MD85. L87 apuntó que este exceso es real en estrellas A_m , pero SD93 demostraron que la causa del exceso es una sobreestimación de los valores de $\log gf$ para los multipletes de C I en esta región: los valores calculados por Kurucz y Petryemann (1975) son mucho más altos que los recalculados por el *Opacity Project* (Seaton, 1987; Berrington *et al.*, 1987). Estos valores sobreestimados dan lugar a una depresión significativa del flujo modelado a $\lambda = 4785 \text{ \AA}$. Considerando los nuevos valores de $\log gf$, las discrepancias a esta longitud de onda entre los espectros observados y los sintéticos desaparecen.

5.5 Conclusiones

En este capítulo se han calculado temperaturas efectivas de nuestra muestra de estrellas, tanto *variables* como *no variables*. Tras una introducción donde se

describen brevemente distintos métodos generales, se ha demostrado la idoneidad del método basado en las líneas de Balmer para calcular temperaturas efectivas en el rango entre 6500 K y 8000 K y su fiabilidad como método de comparación entre las distintas calibraciones fotométricas. Se ha demostrado que la calibración de Moon y Dworetzky (1985) es la que proporciona valores más próximos a los calculados con $H\beta$ lo que constituye un argumento a su favor en la controversia existente entre esta calibración y la de Lester, Gray y Kurucz (1986).

Recientemente Balona (1994) ha publicado una nueva calibración fotométrica para el cálculo, entre otros parámetros físicos, de temperaturas efectivas que sustituiría la calibración de Balona (1984). La comparación de esta nueva calibración con las estudiadas en este capítulo forma parte de un futuro estudio.

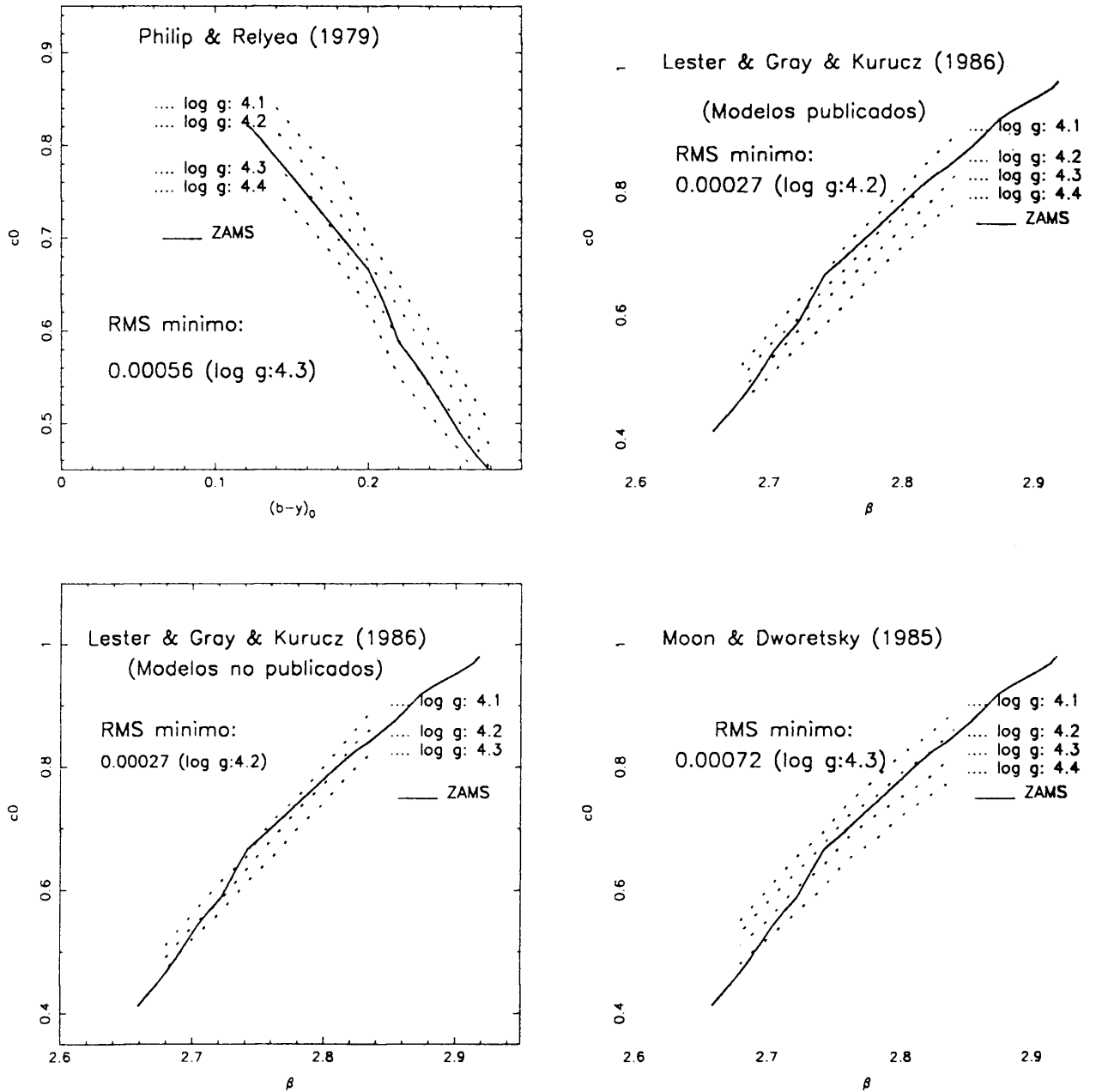


Figura 5.7

Ajustes de las diferentes redes a la ZAMS definida según Hauck y Mermilliod (1980) y Paczynski (1970).

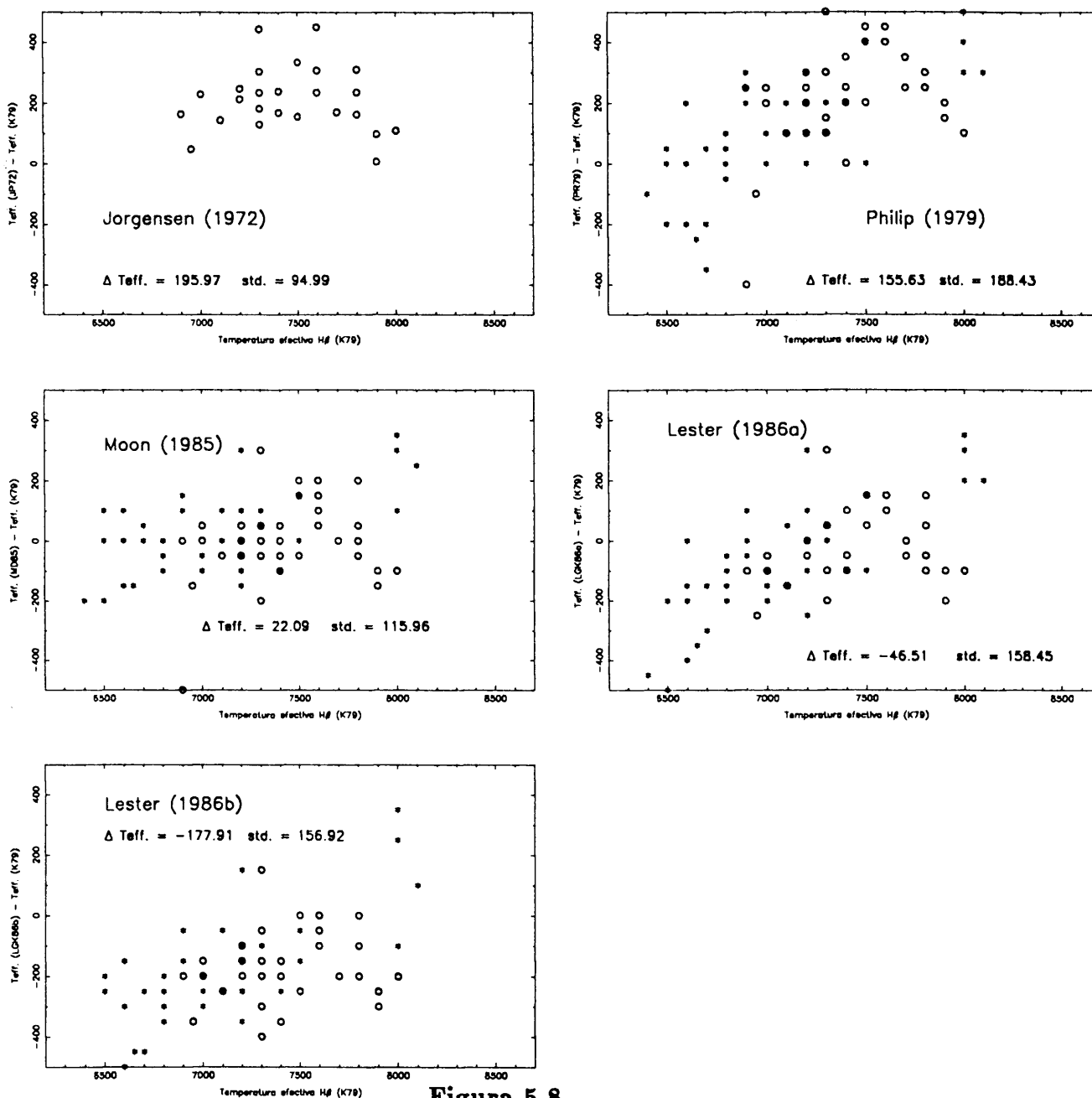


Figura 5.8

Comparación entre las temperaturas efectivas calculadas considerando el perfil de $H\beta$ y las distintas calibraciones fotométricas descritas en el texto. Los asteriscos corresponden a estrellas *variables* mientras que los círculos representan estrellas δ Scuti (los círculos rellenos no indican ningún tipo de estrella sino que son solamente la superposición de un asterisco y un círculo). La calibración PJ72 sólo se ha utilizado para estrellas δ Scuti.

Tabla 5.2: Índices Strömrgren de las estrellas δ Scuti y SX Phe observadas

Identificación			Índices uvby β						
HD	HR	GCVS	β	m_1	c_1	(b-y)	$(m_1)_0$	$(c_1)_0$	$(b-y)_0$
432	21	β Cas	2.721	0.177	0.785	0.216	0.178	0.784	0.211
		V377 Cas	2.749	0.190	0.701	0.212	0.197	0.697	0.191
2628	114	GN And	2.755	0.165	0.869	0.169	0.164	0.869	0.172
4818	238	V526 Cas	2.770	0.216	0.780	0.166	0.215	0.780	0.168
8511	401	AV Cet	2.797	0.184	0.859	0.137	0.179	0.862	0.152
9100	432	VX Psc	2.817	0.166	1.093	0.090	0.163	1.095	0.101
10845	515	VY Psc	2.777	0.173	0.979	0.158	0.177	0.976	0.144
11285		VV Ari	2.774	0.200	0.874	0.182	0.206	0.870	0.161
15165		VW Ari							
15550	729	UU Ari	2.777	0.185	0.839	0.155	0.184	0.839	0.156
17093	812	UV Ari	2.802	0.184	0.844	0.137	0.184	0.844	0.136
23156		V624 Tau	2.830	0.209	0.810	0.150	0.219	0.804	0.118
23567		V534 Tau	2.788	0.173	0.748	0.229	0.196	0.734	0.157
23728	1170	V376 Per	2.743	0.154	0.826	0.179	0.152	0.827	0.186
24550		V479 Tau	2.752	0.186	0.809	0.243	0.205	0.797	0.183
24809	1223	V386 Per	2.802	0.184	0.819	0.128	0.181	0.821	0.138
24832	1225	Dl Eri	2.762	0.183	0.877	0.163	0.180	0.879	0.172
26322	1287	IM Tau	2.696	0.167	0.745	0.226	0.163	0.747	0.237
26574	1298	OMICR1 Eri	2.730	0.194	0.792	0.198	0.192	0.793	0.203
26574	1298	OMICR1 Eri		0.192(*)		0.197(*)	0.190	0.793	0.203
27397	1351	V483 Tau	2.766	0.193	0.771	0.172	0.192	0.771	0.173
27397	1351	V483 Tau	2.767(*)	0.198(*)		0.170(*)	0.197	0.771	0.172
27459	1356	V696 Tau	2.813	0.204	0.870	0.129	0.200	0.872	0.140
27459	1356	V696 Tau	2.812(*)	0.208(*)		0.126(*)	0.203	0.873	0.139
27628	1368	V775 Tau	2.756	0.204	0.719	0.196	0.208	0.716	0.184
27628	1368	V775 Tau	2.757(*)				0.208	0.716	0.183
28024	1392	UPSIL0 Tau	2.753	0.175	0.947	0.165	0.172	0.949	0.175
28052	1394	V777 Tau	2.767	0.188	0.934	0.150	0.186	0.935	0.156
28319	1412	TH2 Tau	2.830	0.202	1.013	0.099	0.200	0.826	0.114
28910	1444	ρ Tau	2.796	0.205	0.823	0.144	0.205	0.823	0.143
28910	1444	ρ Tau	2.797(*)				0.206	0.823	0.142

Tabla 5.2: Índices Strömrgren de las estrellas δ Scuti y SX Phe observadas (continuación)

Identificación			Índices uvby β						
HD	HR	GCVS	β	m_1	c_1	(b-y)	$(m_1)_0$	$(c_1)_0$	$(b-y)_0$
30780	1547	V480 Tau	2.813	0.207	0.900	0.122	0.207	0.900	0.122
33959	1706	KW Aur	2.799	0.180	0.998	0.130	0.182	0.997	0.124
37819		V356 Aur	2.693	0.232	0.668	0.374	0.267	0.646	0.266
40372	2100	V1004 Ori	2.816	0.210	0.958	0.123	0.212	0.956	0.115
40372	2100	V1004 Ori		0.213(*)			0.215	0.957	0.116
40535	2107	V474 Mon	2.736	0.187	0.817	0.189	0.184	0.818	0.196
		UZ Lyn	2.914	0.177(*)	1.061(*)	0.008	0.188	1.053	-0.0281
50018	2539	OX Aur	2.702	0.186	0.764	0.240	0.188	0.763	0.234
50420	2557	V352 Aur	2.741	0.142	1.023	0.221	0.155	1.015	0.181
55057	2707	V571 Mon	2.758	0.187	0.878	0.184	0.190	0.876	0.175
55057	2707	V571 Mon	2.743(*)				0.186	0.879	0.187
64191		AD CMi	2.764	0.179	0.853	0.182	0.182	0.851	0.172
73857		VZ Cnc	2.707	0.181	0.799	0.202	0.177	0.801	0.214
73857		VZ Cnc	2.664(*)				0.159	0.812	0.269
110377	4824	GG Vir	2.806	0.182	0.890	0.120	0.179	0.892	0.128
152830	6290	V644 Her	2.709	0.190	0.723	0.208	0.184	0.727	0.227
152896		V645 Her							
155514	6391	V620 Her	2.798	0.198	0.898	0.126	0.195	0.899	0.134
155514	6391	V620 Her		0.200(*)		0.125	0.197	0.900	0.134
156697	6434	V2112 Oph	2.727	0.148	0.912	0.254	0.166	0.900	0.199
156697	6434	V2112 Oph	2.724(*)						
159223		V648 Her							
172748	7020	δ Sct	2.743	0.202	0.812	0.213	0.209	0.807	0.191
177392	7222	LT Vul	2.749	0.168	0.892	0.206	0.176	0.887	0.182
181333	7331	V1208 Aql	2.796	0.184	0.990	0.164	0.190	0.986	0.144
181577	7340	Rho1 Sgr	2.812	0.188	0.955	0.129	0.184	0.957	0.140
186357	7501	V1276 Cyg	2.728	0.188	0.764	0.222	0.193	0.761	0.207
192518	7731	NU Vul	2.802	0.157	1.109	0.118	0.159	1.108	0.112
197461	7928	δ Del	2.738	0.163	0.854	0.190	0.162	0.854	0.192
199124	8006	EM Aqr	2.754	0.174	0.815	0.176	0.172	0.816	0.181
199908		DQ Cep	2.739	0.196	0.833	0.204	0.199	0.831	0.194
199908		DQ Cep		0.228(*)		0.179(*)	0.223	0.836	0.194

Tabla 5.2: Índices Strömrgren de las estrellas δ Scuti y SX Phe observadas (continuación)

Identificación			uvby β índices						
HD	HR	GCVS	β	m_1	c_1	(b-y)	$(m_1)_0$	$(c_1)_0$	$(b-y)_0$
200356		FN Aqr							
200925		V1719Cyg	2.710	0.174	0.833	0.249	0.183	0.827	0.221
201707	8102	EW Aqr	2.758	0.180	0.905	0.179	0.182	0.904	0.173
201707	8102	EW Aqr	2.754(*)				0.181	0.904	0.177
204188	8210	IK Peg	2.806	0.199	0.777	0.142	0.197	0.778	0.149
211336	8494	ϵ Cep	2.757	0.192	0.787	0.169	0.188	0.789	0.180
213534	8584	GX Peg	2.821	0.193	0.959	0.118	0.187	0.962	0.135
215874	8676	FM Aqr	2.763	0.184	0.914	0.166	0.183	0.914	0.170
215874	8676	FM Aqr	2.773(*)				0.188	0.911	0.153
218549		DY Peg	2.777	0.129	0.872	0.210	0.147	0.861	0.155
		CC And							
		GP And	2.794	0.146	0.842	0.187	0.160	0.833	0.143
		GP And		0.155(*)	0.890(*)	0.157(*)	0.160	0.886	0.138
		AI Hya		0.211	0.752	0.240			
		CY Aqr	2.768	0.127	0.844	0.200	0.138	0.837	0.164
		CY Aqr	2.795(*)	0.135(*)	0.890(*)	0.183(*)	0.138	0.881	0.138
		DE Lac	2.703	0.154	0.779	0.317	0.181	0.762	0.231
		V1162 Ori	2.749	0.180	0.770	0.210	0.187	0.765	0.187
		EH Lib	2.787	0.156	0.859	0.179	0.162	0.855	0.160
		YZ Boo	2.768	0.178	0.868	0.151	0.175	0.870	0.161

Índices uvby β del conjunto de estrellas δ Scuti y SX Phe observadas. Los índices se han obtenido de dos catálogos: Rodríguez *et al.* (1994) y García *et al.* (1993). Los índices m_1 , c_1 y (b-y) indican valores observados mientras que $(m_1)_0$, $(c_1)_0$ y $(b-y)_0$ corresponden a los índices corregidos de enrojecimiento según las fórmulas dadas por Philip y Relyea (1979). En aquellos casos en que los catálogos proporcionen índices distintos, ambos se muestran en la tabla (el valor marcado con * es de García *et al.* (1993)). UZ Lyn no aparece en la relación de Rodríguez *et al.* (1994).

Tabla 5.3: Índices Strömgen del conjunto de estrellas *no variables*

Identificación		Índices uvby β						
HD	HR	β	m_1	c_1	(b-y)	$(m_1)_0$	$(c_1)_0$	$(b-y)_0$
571	27	2.629	0.123	1.082	0.273	0.121	1.083	0.279
905	41	2.717	0.156	0.613	0.222	0.156	0.613	0.221
1671	82	2.656	0.162	0.566	0.288	0.161	0.567	0.291
4568	217		0.174	0.488	0.329			
4757	230	2.700	0.168	0.719	0.240	0.169	0.718	0.235
4758	231	2.700						
6397	308	2.665	0.149	0.508	0.276	0.148	0.509	0.280
7034	349	2.783	0.166	1.163	0.152	0.168	1.161	0.146
8723	413	2.681	0.148	0.485	0.256	0.146	0.486	0.263
11257	534	2.718	0.148	0.642	0.203	0.143	0.645	0.217
11636	553	2.879	0.211	0.983	0.064	0.212	0.982	0.060
11973	569	2.762	0.185	0.814	0.173	0.184	0.814	0.175
13041	620	2.869	0.195	1.063	0.055	0.193	1.064	0.060
13161	622	2.850	0.191	1.065	0.071	0.190	1.066	0.075
13174	623	2.723	0.185	0.874	0.210	0.186	0.873	0.205
15385	723	2.880	0.236	0.935	0.076	0.238	0.934	0.0687
16647	783	2.663	0.157	0.475	0.265	0.151	0.479	0.284
23230	1135	2.693	0.183	0.977	0.267	0.193	0.970	0.235
24357	1201	2.712	0.166	0.610	0.221	0.164	0.611	0.227
201507	8095	2.698	0.168	0.667	0.242	0.169	0.666	0.240
202240	8120	2.774	0.122	1.409	0.154	0.126	1.401	0.142
202444	8130	2.685	0.165	0.607	0.256	0.164	0.607	0.256
203096	8155	2.752	0.108	1.309	0.184	0.123	1.299	0.136
203803	8190	2.753	0.178	0.738	0.206	0.184	0.734	0.186
203842	8191	2.661	0.178	0.619	0.304	0.182	0.616	0.290
203925	8198	2.716	0.158	0.795	0.208	0.158	0.795	0.207
204153	8208	2.723	0.162	0.622	0.220	0.163	0.621	0.216
205852	8267	2.732	0.170	0.892	0.203	0.172	0.890	0.195
205924	8270	2.768	0.180	0.848	0.155	0.177	0.850	0.163

Tabla 5.3: Índices Strömrgren del conjunto de estrellas *no variables* (continuación)

Identificación		uvby β índices						
HD	HR	β	m_1	c_1	(b-y)	$(m_1)_o$	$(c_1)_o$	$(b-y)_o$
207652	8344	2.688	0.156	0.545	0.263	0.160	0.542	0.250
210459	8454	2.669	0.177	0.778	0.304	0.187	0.772	0.273
210594	8460	2.801	0.180	1.025	0.124	0.181	1.024	0.120
210855	8472	2.635	0.174	0.488	0.338	0.178	0.485	0.326
214454	8613	2.766	0.174	0.948	0.142	0.170	0.951	0.155
216048	8681	2.739	0.173	0.759	0.180	0.168	0.762	0.196
217754	8765	2.731	0.190	0.789	0.206	0.191	0.788	0.203
217926	8776	2.668	0.146	0.623	0.271	0.146	0.623	0.270
218396	8799	2.745	0.142	0.678	0.181	0.137	0.681	0.197
218470	8805	2.672	0.152	0.495	0.286	0.155	0.493	0.275
219080	8830	2.744	0.172	0.723	0.181	0.168	0.725	0.194
219291	8838	2.634	0.137	0.543	0.310	0.138	0.543	0.308
219487	8845	2.678	0.146	0.468	0.276	0.149	0.466	0.268
220242	8888		0.162	0.595	0.252			

Los índices uvby β observados son de Hauck y Mermilliod (1990), los cuales se han corregido de enrojecimiento utilizando Philip y Relyea (1979).

Tabla 5.4: Índices Strömgen del conjunto de estrellas estándar

Identificación		Índices $uvby\beta$						
HD	HR	β	m_1	c_1	$(b-y)$	$(m_1)_0$	$(c_1)_0$	$(b-y)_0$
61421	2943		0.167	0.532	0.272			
159561	6556	2.832	0.168	1.039	0.093	0.168	1.039	0.093
187642	7557	2.828	0.178	0.880	0.137	0.186	0.875	0.111

$uvby\beta$ del conjunto de estrellas estándar. Los índices observados son de Hauck y Mermilliod (1990). La corrección de enrojecimiento se ha realizado utilizando Philip y Relyea (1979).

Tabla 5.5: Temperaturas efectivas del conjunto de estrellas estándar

Identificación		Calibraciones $uvby\beta$				Otras calibraciones	
HD	HR	PR(79) (K)	MD(85) (K)	LGK(86)(1) (K)	LGK(86)(2) (K)	H β (K)	C76 Error
61421	2943					6600	6510 ± 130 K
159651	6556	8100	7900	7950	7800	7900	8020 ± 330 K
187642	7557	8150	7950	7950	7800	7800	8010 ± 210 K

Comparación entre los valores fundamentales de temperaturas efectivas calculados por Code *et al.* (1976) y las temperaturas calculadas utilizando las diferentes calibraciones fotométricas y la línea H β del conjunto de estrellas estándar observadas.

Tabla 5.6: Temperaturas efectivas de las estrellas δ Scuti y SX Phe

HD	Identificación		T_{eff} (calibraciones $uvby\beta$) (K)					$T_{eff}(H\beta)$ (K)	$T_{eff}(H\alpha)$ (K)
	HR	GCVS	JP(72)	PR(79)	MD(85)	LGK(86)(a)	LGK(86)(b)	K(79)	K(79)
432	21	β Cas	7177	7000	6900	6900	6800	7000	
		V377 Cas		7400	7250	7200	7100	7300	
2628	114	GN And	7464	7400	7300	7300	7050	7400	
4818	238	V526 Cas	7603	7400	7350	7350	7250	7300	
8511	401	AV Cet	7834	7950	7650	7550	7500	7500	
9100	432	VX Psc	7998	8100	7800	7800	7650	7900-7900	
10845	515	VY Psc		7650	7400	7500	7200	7400	
11285		VV Ari	7638	7600	7450	7350	7250	7400	
15165		VW Ari						8300	
15550	729	UU Ari	7655	7700	7450	7550	7250	7500	
17093	812	UV Ari	7870	7950	7700	7650	7500	7700	
23156		V624 Tau	8110	8100	8000	7950	7800	7800	
23567		V534 Tau	7744	7800	7600	7600	7450	7300	
23728	1170	V376 Per		7450	7200	7150	7000	7200-7100	
24550		V479 Tau		7400	7250	7200	7050	7200	
24809	1223	V386 Per	7870	8050	7700	7700	7500	7700	
24832	1225	DI Eri		7450	7300	7300	7150	7200	
26322	1287	IM Tau (**)	6950	6950	6800	6700	6550	6900-6900	
26574	1298	OMICR1 Eri	7244	7200	7050	6950	6850	7100	
27397	1351	V483 Tau	7568	7600	7400	7350	7200	7400	
27459	1356	V696 Tau	7962	8050	7800	7750	7600	7800	
27628	1368	V775 Tau		7400	7300	7200	7100	7300	
28024	1392	UPSILON Tau	7447	7500	7250	7150	7000	7200	
28052	1394	V777 Tau	7568	7750	7350	7350	7200	7400-7400	
28319	1412	TH2 Tau	8110	8100	7900	7900	7800	8000	
28910	1444	ρ Tau	7834	7900	7650	7550	7500	7500	
30780	1547	V480 Tau	7962	8050	7750	7700	7600	7800	
33959	1706	KW Aur (**)		7900	7650	7650	7450	7600-7600	
37819		V356 Aur (**)		6650	6800	6700	6550	6900-6800	
40372	2100	V1004 Ori		8050	7800	7750	7600	7600	

Tabla 5.6: Temperaturas efectivas de las estrellas δ Scuti y SX Phe (continuación)

HD	Identificación		T_{eff} (calibraciones $uvby\beta$) (K)					$T_{eff}(H\beta)$ (K)	$T_{eff}(H\alpha)$ (K)
	HR	GCVS	JP(72)	PR(79)	MD(85)	LGK(86)(a)	LGK(86)(b)	K(79)	K(79)
40535	2107	V474 Mon(**)	7295	7300	7100	7000	6900	7200-7000	6880
		UZ Lyn (**)		8900	8900	8700	8700	(1)	
50018	2539	OX Aur	6998	6850	6800	6700	6600	7000-6900	
50420	2557	V352 Aur		7400	7100	7100	6900	7300	
55057	2707	V571 Mon		7300	7150	7200	7100	7200	
64191		AD CMi (**)		7500	7350	7300	7200	7350-7000	7229
73857		VZ Cnc (**)		7050	6800	6700	6600	7200	6725-7122
110377	4824	GG Vir	7907	8000	7700	7700	7550	7600	
152830	6290	V644 Her	7063	7150	6900	6800	6700	6900	
152896		V645 Her						7000	
155514	6391	V620 Her	7834	8000	7650	7700	7500	7600	
156697	6434	V2112 Oph		7250	7000	6900	6800	7000	
159223		V648 Her						7600	
172748	7020	δ Sct (**)		7300	7200	7100	7000	7000-6900	
177392	7222	LT Vul	7413	7450	7200	7150	7000	7200	
181333	7331	V1208 Aql (**)	7816	7900	7600	7600	7500	7600	
181577	7340	Rho1 Sgr		8000	7750	7750	7600	7600	
186357	7501	V1276 Cyg	7228	7200	7050	6950	6850	7000	
192518	7731	NU Vul		7900	7700	7650	7500	7500	
197461	7928	δ Del (**)	7311	7350	7100	7000	6850	7100-7000	
199124	8006	EM Aqr	7430	7450	7250	7200	7000	7300	
199908		DQ Cep		7400	7100	7000	6950	7000-7000	
200356		FN Aqr						6900	
200925		V1719Cyg (**)		7050	6850	6750	6650	6700-7000	
201707	8102	EW Aqr	7464	7450	7250	7200	7050	7200	
204188	8210	IK Peg	7907	8050	7750	7700	7600	7900	
211336	8494	eCep	7482	7600	7300	7200	7100	7300	
213534	8584	GX Peg	8035	8100	7850	7850	7700	7800	
215874	8676	FM Aqr(**)	7534	7650	7400	7350	7250	7500	
218549		DY Peg (**)		7600	7400	7400	7250	7200-7700	

Tabla 5.6: Temperaturas efectivas de las estrellas δ Scuti y SX Phe (continuación)

HD	Identificación		T_{eff} (calibraciones $uvby\beta$) (K)					$T_{eff}(H\beta)$ (K)	$T_{eff}(H\alpha)$ (K)
	HR	GCVS	JP(72)	PR(79)	MD(85)	LGK(86)(a)	LGK(86)(b)	K(79)	K(7)
		CC And(**)						7000-6800-7000-7100	
		GP And(**)		7800	7650	7600	7450	7700	
		AI Hya						7350	
		CY Aqr(**)		7600	7350	7350	7250	(2)	
		DE Lac (**)		6900	6800	6750	6600	6900	
		V1162 Ori(**)		7350	7250	7200	7050	7000	71
		EH Lib(**)		7600	7550	7550	7400	7400	7101-
		YZ Boo(**)		7600	7350	7350	7200	7700-7200	6959-

Temperaturas efectivas del conjunto de δ Scuti observadas. Las estrellas marcadas con ** muestran amplitudes mayores que 0.06, que se corresponderían con variaciones en $T_{eff} \geq 100$ K a lo largo de un ciclo. Por tanto, las diferencias entre las distintas calibraciones pueden ser reales y no debidas a diferencias intrínsecas. En las dos últimas columnas se muestran las temperaturas efectivas calculadas utilizando $H\alpha$ y $H\beta$ junto con los modelos de Kurucz (K79).

- La temperatura de UZ Lyn no ha sido calculada ni con $H\alpha$ ni con $H\beta$ debido a que los valores de T_{eff} obtenidos fotométricamente indican una $T_{eff} \geq 8500$ K, temperatura en la que las líneas de Balmer dependen también de la presión y dejan de ser un indicador de temperaturas óptimo.
- No se ha calculado la T_{eff} de CY Aqr utilizando el método de las líneas de Balmer debido a la baja relación señal-ruido del espectro. En dicho espectro no es posible identificar líneas para poder calcular la velocidad de rotación, la cual es necesaria para hacer la convolución del perfil de rotación con las líneas sintéticas de $H\beta$ con vistas a efectuar la comparación con el espectro observado.

Tabla 5.7: Temperaturas efectivas del conjunto de estrellas *no variables*

Identificación		T_{eff} (calibraciones $uvby\beta$) (K)				$T_{eff}(H\beta)$ (K)
HD	HR	PR(79)	MD(85)	LGK(86)(a)	LGK(86)(b)	K(79)
571	27	6350	6100	6100	6000	6400
905	41	7100	7000	6900	6750	6900
1671	82	6400	6450	6200	6100	6600
4568	217					6450
4757	230	6900	6800	6700	6600	6800
4758	231					6950
6397	308	6550	6600	6300	6250	6500
7034	349	7500	7500	7400	7350	7500
8723	413	6750	6750	6600	6500	6800
11257	534	7150	7000	6850	6750	6900
11636	553	8500	8300	8300	8250	8000
11973	569	7400	7350	7300	7200	7300
13041	620	8400	8350	8300	8200	8100
13161	622	8300	8100	8200	7900	8000
13174	623	7100	6950	6900	6800	7000
15385	723	8400	8350	8350	8350	8000
16647	783	6500	6750	6400	6250	6700
23230	1135	6750	6700	6550	6450	6700
24357	1201	7000	6950	6850	6750	7000
201507	8095	6850	6800	6750	6600	6800
202240	8120	7300	7500	7500	7350	7200
202444	8130	6750	6700	6600	6450	6800
203096	8155	7400	7100	7300	7100	7200
203803	8190	7500	7300	7200	7100	7200
203842	8191	6400	6500	6300	6200	6650
203925	8198	7100	6900	6800	6700	7000
204153	8208	7200	7050	7000	6850	6900
205852	8267	7200	7050	6950	6850	7200
205924	8270	7500	7400	7350	7200	7300

Tabla 5.7: Temperaturas efectivas del conjunto de estrellas *no variables*

Identificación		T_{eff} (calibraciones $uvby\beta$) (K)				$T_{eff}(H\beta)$ (K)
HD	HR	PR(79)	MD(85)	LGK(86)(a)	LGK(86)(b)	K(79)
207652	8344	6800	6750	6650	6550	6800
210459	8454	6500	6500	6300	6300	6500
210594	8460	7900	7650	7650	7450	7500
210855	8472	6300	6300	6000	5850	6500
214454	8613	7600	7300	7300	7150	7400
216048	8681	7200	7150	7100	6950	7200
217754	8765	7200	7100	6950	6850	7100
217926	8776	6600	6600	6400	6300	6600
218396	8799	7300	7200	7200	7050	7200
218470	8805	6600	6700	6450	6300	6600
219080	8830	7300	7200	7150	7050	7100
219291	8838	6300	6200	5950	5850	6400
219487	8845	6800	6700	6600	6450	6600
220242	8888					6700

La calibración de Petersen y Jorgensen (1972) no se muestra en esta tabla puesto que se ha utilizado solamente para el conjunto de estrellas δ Scuti. Tampoco se han calculado temperaturas efectivas utilizando $H\alpha$ para este conjunto de estrellas tal y como se indicó en el texto.

Capítulo 6

Análisis químico

6.1 Introducción

Un análisis químico simplificado de una fotosfera estelar muestra que una estrella "normal" está compuesta por un $\approx 90\%$ de átomos de hidrógeno, un $\approx 10\%$ de helio, y un factor restante debido a otros elementos llamados "metales". A pesar de este pequeñísimo porcentaje, la mayoría de las líneas que presentan los espectros estelares, especialmente en estrellas frías, provienen de estos elementos.

Obviando la natural curiosidad de saber de qué están hechas las estrellas, el conocimiento de la composición química es necesario en cualquier estudio de atmósferas estelares puesto que proporciona información sobre fenómenos tales como el tipo de reacciones nucleares que suceden, el tamaño de la capa convectiva, difusión, acreción,... Igualmente, las abundancias de litio y berilio son indicadores del estado evolutivo de una estrella; las diferencias en composición química entre distintos tipos de estrellas se utilizan en el estudio sobre la evolución de la galaxia, etc.

Es fácil deducir que para poder realizar un análisis sofisticado de los diferentes elementos metálicos de una estrella y estudiar su variación con los parámetros fotosféricos de la misma (temperatura efectiva, gravedad superficial...) es necesario contar con indicadores de metalicidad que diferencien los efectos de ésta de los efectos producidos por la temperatura, presión, rotación, turbulencias... Un análisis de composición química basado en observaciones fotométricas normalmente utiliza ciertos índices, que dependerán del sistema fotométrico escogido, mientras que se suele utilizar una técnica de *curva de crecimiento* en aquellos casos en que se trabaje

con observaciones espectroscópicas. Estudiemos a continuación más detalladamente ambos procedimientos.

6.2 Determinación de abundancias. Métodos fotométricos

Al igual que se vio en el caso de las temperaturas efectivas (Capítulo V), existen diferentes índices fotométricos que muestran una clara dependencia con la metalicidad, constituyendo una herramienta muy útil para la determinación de ésta. Estos índices pueden calibrarse utilizando estrellas estándar de metalicidad conocida.

En el sistema fotométrico de Ginebra, el parámetro de *blanketing* para estrellas de la Secuencia Principal se define como

$$m_2 = (B1 - B2) - 0.457 \cdot (B2 - V1) \quad (6.1)$$

donde $\Delta m_2 = m_2(obs) - m_2(Hyades)$ permite clasificar las estrellas según su metalicidad una vez que este índice se ha corregido de enrojecimiento. Hauck (1986) estudió 132 estrellas gigantes de tipos espectrales A-F en función de sus propiedades en este sistema fotométrico demostrando que Δm_2 es también un indicador de metalicidad adecuado para estrellas gigantes. Berthet (1990a) confirmó esta hipótesis en su análisis espectroscópico de 5 gigantes de tipos A-F. Berthet (1990b), basándose en una muestra de 164 estrellas de tipos A-F gigantes y de Secuencia Principal, derivó la siguiente relación cuadrática entre $[Fe/H]$ y Δm_2

$$[Fe/H] = -16.079(\Delta m_2)^2 + 5.935\Delta m_2 + 0.081 \quad (6.2)$$

válida para $-2.13 \leq [Fe/H] \leq 0.5$ con un error cuadrático medio de ± 0.137 .

En el sistema fotométrico de Strömgren se utiliza el índice m_1 , definido como $m_1 = (v - b) - (b - y)$ (Jaschek *et al.*, 1990) como indicador de la metalicidad, estimándose las diferencias en metalicidad entre los diferentes tipos de estrellas mediante δm_1 , el cual se define como

$$\delta m_1 = m_1(std)(\beta) - m_1(obs) \quad (6.3)$$

(Crawford, 1975). El índice δm_1 puede definirse también con (b-y) como parámetro independiente, pero, como Crawford (1975) señaló, $\delta m_1(b - y)$ es menos sensible

a $[Me/H]$ que $\delta m_1(\beta)$ ya que el índice (b-y) se encuentra afectado por *blanketing*. Conti y Deutsch (1966) señalaron que la principal contribución al *blanketing* en las bandas espectrales *uvby* proviene de líneas en la parte horizontal de la *curva de crecimiento*, lo que significa que la intensidad de dichas líneas es bastante sensible al ensanchamiento por velocidad. Por tanto, se podría pensar que dos estrellas con idénticos valores de T_{eff} , $\log g$ y $[Fe/H]$ pero con distintos valores de *microturbulencia* podrían tener valores de m_1 distintos, lo que inutilizaría a tal índice como indicador de metalicidad. No obstante, Nissen (1981) demostró que la *microturbulencia* es independiente de la metalicidad y que solamente depende ligeramente de la temperatura y la gravedad por lo que, conociendo T_{eff} y $\log g$, es posible obtener una calibración de δm_1 en términos de la metalicidad.

Crawford y Perry (1976) estudiaron por primera vez la calibración del índice δm_1 en función de la abundancia metálica encontrando una moderada correlación entre δm_1 y $[Fe/H]$ con una dispersión de ± 0.20 en $[Fe/H]$ debida, principalmente, al conjunto inhomogéneo de datos que poseían. Nissen (1981) calculó valores de la metalicidad de estrellas F0-G2 en términos de δm_1 con una precisión intrínseca de $[Fe/H] = \pm 0.08$ dex.. Este autor demostró igualmente que la calibración obtenida no depende del valor de la gravedad en, al menos, un rango de 2 magnitudes por encima de la ZAMS, lo que se traduce en un intervalo de 0.7 dex. en $\log g$. Igualmente, se demostró que la influencia de la binariedad y del enrojecimiento (para estrellas distantes menos de 100 pc) sobre δm_1 es despreciable.

Berthet (1990b) obtuvo una calibración de δm_1 basada en una muestra de 163 estrellas tomando la fotometría *uvby β* de Hauck y Mermilliod (1990) y los valores de $[Fe/H]$ de Koeppen (1988). Dicha relación viene dada por

$$[Fe/H] = -35.139(\delta m_1)^2 - 6.5215\delta m_1 + 0.081 \quad (6.4)$$

con un error estándar de ± 0.138 dex. y válida para estrellas con $[Fe/H] < 0.383$.

Smalley (1993) analizó espectroscópicamente 28 estrellas de tipo espectral A con fotometría *uvby β* tomada de Hauck y Mermilliod (1990), obteniendo la siguiente relación lineal entre δm_1 y $[Fe/H]$

$$[Fe/H] = -10.56\delta m_1 + 0.081 \quad (6.5)$$

6.3 Determinación de abundancias. Métodos espectroscópicos. Curvas de crecimiento

Esquemáticamente se puede decir que la *curva de crecimiento* es una representación de la dependencia de la anchura equivalente de una línea respecto a diferentes parámetros, siendo la abundancia uno de ellos. Fijando todos estos parámetros excepto la abundancia, la intensidad de la línea aumentará al ser mayor la abundancia química del elemento absorbente. El cambio en el perfil de la línea y en la anchura equivalente no son proporcionales, sino que depende de la profundidad óptica en la línea.

Hay tres fases en el crecimiento de la línea: en líneas débiles la anchura equivalente crece proporcional a la abundancia. La segunda fase comienza cuando la profundidad central alcanza el valor máximo y la línea se satura. En este caso la saturación crece asintóticamente hacia un valor constante. El tercer estadio empieza en el momento en que la profundidad óptica en las alas de la línea empieza a ser significativa comparada con k_ν (coeficiente de absorción). En este caso, la abundancia depende fuertemente del valor de la constante de *damping*, γ . Aunque γ es función de la profundidad ya que depende de la temperatura y de la presión, y por tanto su valor cambiará al variar la intensidad de la línea, se puede establecer un crecimiento de la anchura equivalente proporcional a $A^{1/2}$ (Gray, 1992g).

La expresión analítica de la *curva de crecimiento* puede escribirse como:

$$\log(W/\lambda) = \log((\pi e^2 N_r / N_E H_H) / (mc^2 u(T)) + \log A + \log gf\lambda - \theta_x \psi - \log k_\nu \quad (6.6)$$

(Gray, 1992g), donde N_r/N_E es la fracción de átomos en el estado de ionización r , ψ es el potencial de excitación del nivel, $u(T)$ es la función de partición, $\theta_x = 5040/T$, g es el peso estadístico y k_ν es el coeficiente de absorción.

6.3.1 Cálculo del parámetro fuerza del oscilador

El parámetro fuerza del oscilador aparece al dar un tratamiento cuántico al coeficiente de absorción de la línea para poder explicar la diferente intensidad de líneas del mismo elemento formadas en los mismos niveles espectrales.

La expresión de la fuerza del oscilador, f , viene dada por (Gray, 1992g):

$$f = 1.884 * 10^{-15} \lambda^2 g_u A_{ul} / g_l \quad (6.7)$$

donde λ se da en Å, g_u y g_l son los pesos estadísticos de los niveles superior e inferior respectivamente y A_{ul} es el coeficiente de Einstein de emisión espontánea. El valor de f en una línea de emisión puede definirse en relación con el correspondiente a la línea de absorción con la siguiente fórmula:

$$g_u f_{em} = g_l f_{abs} \quad (6.8)$$

donde los subíndices u, l se refieren al nivel superior e inferior, respectivamente.

Aunque en el caso especial del átomo de hidrógeno los valores de f se calculan mediante una fórmula explícita, dichos valores están determinados normalmente por medidas empíricas de laboratorio generalmente complicadas. No obstante, en la práctica no se calcula el valor de f sino de $\log gf$.

En la ecuación (6.6) se observa que el término $\log gf$ contribuye de forma importante al valor de la anchura equivalente de la línea. Puesto que las líneas de absorción de elementos pesados (Fe, Ti, Cr,...) juegan un papel importante en la formación del espectro óptico en estrellas con temperatura en el rango de las estrellas δ Scuti (6500 K–8000 K), serán necesarios valores precisos de $\log gf$ para calcular flujos estelares y realizar estudios fotosféricos.

Se han publicado en la bibliografía diferentes tablas de valores de $\log gf$. Kurucz y Petryemann (1975), (KP), utilizaron un método semi-empírico para predecir valores de gf de todos los elementos desde el boro ($Z=5$) hasta el níquel ($Z=28$) para todas las transiciones permitidas de los niveles del átomo neutro y, al menos, los cuatro primeros estados de ionización. Igualmente, las tablas de NBS (Fuhr *et al.*, 1981) reúnen valores de gf de líneas desde el estado neutro hasta el más ionizado para todos los elementos desde el hidrógeno ($Z=1$) al níquel ($Z=28$). Sin embargo las tablas NBS contienen muchas menos líneas que las tablas de KP. Por ejemplo, para Fe I, hay 1600 líneas comunes a ambas listas, 50 líneas que aparecen en NBS y no en KP, y 10700 de KP que no aparecen en la lista de NBS (Irwin, 1983). Las diferencias entre los valores de $\log gf$ comunes a ambas listas presentan una enorme dispersión: el valor medio y la desviación típica de $[\log gf (\text{NBS}) - \log gf (\text{KP})]$ es 0.33 ± 0.74 dex., siendo esta diferencia mayor que 0.3 dex. en un 54% de las ocasiones. Esta dispersión se debe, en su mayor parte, a los errores en los valores de

KP puesto que el valor típico de los errores en los datos NBS es ± 0.1 dex. (Fuhr *et al.*, 1981). Por su parte, Sigut *et al.* (1990) estimaron un error de ± 0.5 dex. en los valores $\log gf$ de KP para las líneas permitidas más intensas, siendo mayor el error para transiciones muy débiles o prohibidas. Blackwell *et al.* (1983) propusieron una explicación de los errores existentes en KP basada en la teoría atómica: normalmente es necesario conocer los factores radiales y angulares para el cálculo de $\log gf$. Bajo la hipótesis de acoplo Russell-Saunders, los factores angulares pueden calcularse de forma precisa. Sin embargo, en átomos multielectrónicos el factor radial se calcula solamente utilizando métodos aproximados que necesitan de ordinario la hipótesis de configuraciones puras. En elementos complejos, como los pertenecientes al grupo del hierro, esta aproximación es poco exacta empeorando a medida que el potencial de excitación aumenta. Irwin (1983) sugirió un método para disminuir el error asociado a los valores de $\log gf$ de KP, utilizando valores relativos de gf dentro de un mismo multiplete.

Diferentes técnicas de laboratorio se han utilizado a lo largo de los años para determinar los valores de $\log gf$. En un principio, se utilizaron métodos basados en análisis de *curvas de crecimiento* sobre intervalos de longitud de onda y potenciales de excitación conocidos. No obstante, la precisión alcanzada por estos métodos era muy baja. Blackwell *et al.* (1972) sugirió tres nuevos métodos mucho más precisos: *método de vida media, absorción y emisión*. En síntesis, un *método de vida media* proporciona el valor de $\log gf$ de una línea individual utilizando la vida media de un estado excitado τ_k :

$$\tau_k = \left(\sum_n A_{kn} \right)^{-1} \quad (6.9)$$

donde

$$A_{kn} = (8\pi^2 e^2 \nu^2) \cdot (g_n f_{nk}) / (mc^3) \cdot (g_k) \quad (6.10)$$

siendo k , n los niveles superior e inferior respectivamente. Si domina una transición, es posible establecer una relación entre el valor de la vida media y el valor de la fuerza del oscilador de la transición dominante sin más que realizar una pequeña corrección para las restantes transiciones. Este método presenta la ventaja de ser independiente del valor de la temperatura y de no necesitar de la hipótesis de *equilibrio termodinámico*. No obstante, generalmente no existe una transición dominante por lo que es necesario hacer uso de otros métodos.

Tanto el *método de absorción* como el de *emisión* dependen de la temperatura y se basan en la hipótesis de *equilibrio termodinámico*. Con estos métodos, el valor de *la fuerza del oscilador* relativo de dos transiciones atómicas se determina comparando las intensidades de las correspondientes líneas espectrales haciendo uso de la fórmula

$$\alpha = \underbrace{(\pi e^2 / mc)}_1 \cdot \overbrace{f \cdot N_o \cdot (g_l / U) \cdot e^{-\psi_l / kT}}^2 \quad (6.11)$$

donde (1) es el coeficiente de absorción atómico y (2) es la ley de Boltzmann. Cuando se comparan dos líneas con potenciales de excitación parecidos, (2) será similar en ambas y habrá una proporcionalidad directa entre α y f . El método desarrollado en Blackwell *et al.* (1975) se basa en, conocido el valor absoluto de $\log gf$ para una determinada línea, calcular los valores de $\log gf$ de diferentes líneas con potenciales de excitación similar mediante comparaciones entre sus intensidades relativas. Por otro lado, sabiendo que

$$\sum_{n=n_1}^{n=n_2} \Delta \log(gf)_n \quad (6.12)$$

es independiente del camino $n_1 \rightarrow n_2$, se pueden reducir de forma importante los errores asociados a los valores intermedios de $\log gf$ mediante diferentes trayectorias que comiencen y terminen en una línea con $\log gf$ conocido. Las medidas de laboratorio de valores $\log gf$ calculadas por Blackwell *et al.* en su serie de artículos (Blackwell *et al.*, 1972; 1975; 1976; 1982; 1984; 1986) se consideran como las más precisas hasta el momento ($\Delta \log gf = \pm 0.01$ dex), (Gigas, 1986)).

Un método totalmente distinto de cálculo de valores de $\log gf$ se basa en la utilización de espectros de alta resolución y alta *relación señal-ruido* junto con espectros sintéticos. Para cada línea, el método consiste en variar $\log gf$ hasta que las anchuras equivalentes de las líneas sintética y observada coincidan. Thevenin (1989) utilizó el espectro solar de Delbouille (1973) y el modelo de atmósferas de Gustafsson *et al.* (1975) para calcular valores de $\log gf$ similares a los de la serie de artículos de Blackwell *et al.* (la desviación típica de las diferencias entre ambos es de $\sigma \simeq 0.05$ dex.). Gurtovenko *et al.* (1981) consideraron la profundidad central de las líneas en lugar de su anchura equivalente como parámetro de comparación. Utilizando igualmente el espectro solar (Delbouille, 1973) obtuvieron valores de

$\log gf$ comparables a los de Blackwell *et al.* Ward (1985) utilizó la relación

$$\log(gf) = A + B \cdot E_{upper} + C \cdot \log(\lambda) + D \cdot \log(I) \quad (6.13)$$

siendo I la intensidad de la línea y asumiendo una temperatura fija para calcular con precisión moderada el valor de $\log gf$ para líneas de Nd II. Conociendo cierto número de valores precisos de $\log gf$, se puede hacer un ajuste por mínimos cuadrados para obtener los coeficientes A , B , C y D . Una vez fijados los coeficientes se pueden calcular los valores de $\log gf$ para otras líneas conociendo su intensidad y su longitud de onda.

En algunos casos, este método de cálculo de valores de $\log gf$ basado en espectros de alta resolución, es útil como alternativa a aquellas medidas de laboratorio con importantes errores asociados: Sigut *et al.* (1990) utilizaron espectros de α Lyr y ι CrB para obtener fuerzas del oscilador para un cierto número de líneas de Fe II y Cr II resolviendo el problema de las grandes discrepancias entre los valores publicados para las líneas de Cr II en el rango espectral [4000 Å–5000 Å].

En este trabajo hemos desarrollado un método de optimización de los valores de $\log gf$ utilizando como valores iniciales los dados por KP y el Atlas fotométrico del espectro de Procyon (Griffin y Griffin, 1979).

Determinación de valores de $\log gf$.

- **Procyon. Parámetros físicos**

Procyon (α CMi, F5 IV-V) además de ser una de las estrellas más brillantes, es uno de los objetos mejor conocidos. Procyon forma parte de un sistema binario cuya compañera, Procyon B, 10 magnitudes menos brillante, es una enana blanca que, además de no contaminar el espectro de Procyon A, proporciona un valor preciso de la masa de ésta por observación de su órbita relativa alrededor del centro de gravedad. El valor de la masa junto con el del radio, obtenido por técnicas interferométricas, permite deducir la gravedad superficial con precisión inusual. Los valores adoptados para la masa, radio y gravedad superficial de Procyon A son (Steffen, 1985): $M_A = 1.76 \pm 0.10 M_\odot$, $R_A/R_\odot = 2.11 \pm 0.1$, $\log g = 4.0 \pm 0.1$.

Steffen (1985) proporcionó diferentes valores de la temperatura efectiva de Procyon calculados utilizando métodos fotométricos, ajuste de líneas de Balmer y

métodos de flujo integrado. Mediante una media ponderada, este autor obtuvo un valor de $T_{eff} = 6500 \pm 80$ K. Griffin (1971) determinó una metalicidad de tipo solar para Procyon. Por otro lado, en un diagrama *color-magnitud*, Procyon se sitúa una magnitud por encima de la Secuencia Principal lo que indica que el objeto se encuentra ligeramente evolucionado.

Igualmente, Steffen (1985) calculó un valor de *microturbulencia* para Procyon de $\xi_{mic} = 2.0$ mediante un conjunto de líneas de Fe I con diferentes intensidades, variando el valor de ξ_{mic} hasta que las abundancias calculadas para las líneas débiles y las intensas coincidan. Se ha supuesto que la *microturbulencia* presenta una distribución de velocidades gaussiana, isótropa e independiente de la profundidad ($w(v) \sim \exp(-(v/\xi_{mic})^2)$), que, combinada con la distribución de velocidades térmica, da lugar a un ensanchamiento adicional del coeficiente de absorción de la línea, aumentando su anchura equivalente. El valor $\xi_{mic} = 2.0$ calculado es similar al obtenido por otros autores con diferentes líneas. Así, por ejemplo, Smith (1981) obtuvo un valor de $\xi_{mic} = 2.05 \pm 0.1$ km s⁻¹ utilizando un conjunto de 7 líneas de Ca I, Kato y Sadakane (1982) dedujeron $\xi_{mic} = 2.0$ km s⁻¹ con un conjunto de líneas de Fe I diferente al utilizado por Steffen (1985). Utilizando también una muestra de líneas de Fe I, Coupry y Burkhart (1992) encontraron un valor $\xi_{mic} = 1.9$ km s⁻¹.

Una vez que se ha determinado la *microturbulencia*, el ensanchamiento residual necesario para ajustar los perfiles de las líneas sintéticos con los observados se atribuye a la *macroturbulencia*. Debido a la dificultad práctica en separar rotación, movimientos hidrodinámicos a gran escala y perfil instrumental en el espectro de Procyon, Steffen (1985) sugirió que todos estos efectos se pueden englobar bajo el nombre común de "macroturbulencia". Igual que en el caso de la *microturbulencia*, se supone una distribución de velocidades gaussiana isótropa: $w(v) \sim \exp(-(v/\xi_{mac})^2)$. Mientras que Steffen (1985) y Kato *et al.* (1982) obtuvieron $\xi_{mac} = 4.2$ y $\xi_{mac} = 5.0$, respectivamente, considerando despreciable el ensanchamiento rotacional, en este trabajo hemos obtenido un valor de $\xi_{mac} = 7.0$ teniendo en cuenta el ensanchamiento rotacional y el perfil instrumental.

- **Valores calculados**

El método utilizado está basado en la comparación de anchuras equivalentes entre líneas del *Atlas fotométrico del espectro de Procyon* (Griffin y Griffin, 1979) y líneas de espectros sintéticos de los modelos de atmósferas de Kurucz generados con ATLAS8 (Kurucz, 1979a). Los valores de $\log gf$ se modifican hasta que se alcanza un ajuste satisfactorio entre las anchuras equivalentes para la línea considerada.

El *Atlas fotométrico del espectro de Procyon* está basado en el espectrograma fotográfico obtenido con el espectrógrafo coudé del telescopio reflector de Mount Wilson de 100 pulgadas. El rango de longitud de onda cubierto va desde 3140 Å a 7470 Å. La dispersión original varía entre 1 y 2 Å/mm, dependiendo de la región espectral, y el poder de resolución es de 150000.

Los valores de las anchuras equivalentes de las líneas del Atlas de Procyon están afectados por dos factores. Por un lado, la luz difusa procedente del espectrógrafo, que reduce la anchura equivalente de una línea "rellenando" su centro y "bajando" el nivel del continuo. Como ya se mencionó en el Capítulo II, Steffen (1985) calculó el factor debido a luz difusa del espectro del Atlas. Este autor comparó las anchuras equivalentes de un conjunto de líneas aisladas de Fe I con valores de $\log gf$ conocidos, encontrando la relación:

$$W_t = 1.04W_m + 0.68 \quad (6.14)$$

para $W_m \geq 3 \text{ mÅ}$, donde W_m es la anchura equivalente medida y W_t es la anchura equivalente real.

El segundo factor es el ajuste gaussiano al perfil de las líneas del Atlas: a medida que la línea se va haciendo más intensa, el ajuste gaussiano es cada vez peor debido a que la componente lorentziana de la línea se va haciendo cada vez más importante. Para determinar la anchura equivalente "límite" a partir de la cual un ajuste gaussiano no es apropiado, se han seleccionado líneas sintéticas con diferentes anchuras equivalentes y se han calculado sus ajustes gaussianos. Los resultados se muestran en la Figura 6.1. Se puede observar que, aunque hasta 90-100 mÅ la diferencia de anchuras equivalentes entre la

línea y su ajuste gaussiano es prácticamente nulo, ésta crece enormemente a partir de 100 mÅ.

En la Tabla 6.1 aparecen los valores calculados de $\log gf$ para el conjunto de líneas seleccionado. Todas estas líneas se caracterizan por encontrarse en el rango espectral propio de los espectros de McDonald, por ser lo suficientemente aisladas para poder determinar su anchura equivalente de un modo preciso, por tener una $EW \leq 100$ mÅ y por pertenecer a una de las siguientes especies químicas: Fe I, Fe II, Ca I y O I. En un principio, se seleccionaron igualmente líneas de C I (C I, $\lambda 7111.45$ Å, $\lambda 7113.17$ Å, $\lambda 7115.17$ Å, $\lambda 7116.26$ Å). No obstante, estas líneas se encuentran afectadas por la presencia de la zona brillante existente en los espectros McDonald descrita en el Capítulo II, siendo las anchuras equivalentes medidas muy diferentes de los valores reales, por lo que se decidió finalmente no considerarlas.

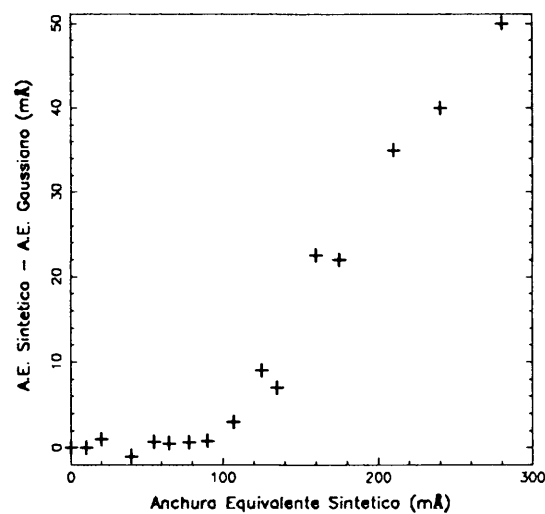


Figura 6.1

Diferencias entre las anchuras equivalentes de una línea sintética y su ajuste gaussiano.

Tabla 6.1: Valores $\log gf$. En la segunda columna se muestran los valores de $\log gf$ calculados mediante el método descrito en el texto mientras que en la tercera columna se muestran los valores procedentes de la bibliografía.

Long. de onda (Å)	Log gf (Cal.)	Log gf (Referencias)
Fe I λ 6230.730	-1.56	-1.28(11)
Fe I λ 6252.56	-1.00	-1.67 (2)
Fe I λ 6265.140	-2.85	-2.550(12)
Fe I λ 6297.800	-2.93	-2.740(12), -2.75(2)
Fe I λ 6322.690	-2.63	-2.426(12), -2.44(2)
Fe I λ 6335.330	-2.63	-2.230(2)
Fe I λ 6336.830	-1.28	-0.740(2)
Fe I λ 6355.034	-2.48	-2.365(6)
Fe I λ 6358.690	-4.32	-4.468(10)
Fe I λ 6393.604	-1.932	-1.432(6), -1.59(2)
Fe I λ 6411.649	-0.958	-0.595(6), -0.49(2)
Fe I λ 6421.348	-2.22	-1.945(6), -1.95(2)
Fe I λ 6430.850	-2.286	-1.990(2), -2.006(21)
Fe I λ 6677.990	-1.82	-1.210(2), -1.75(13), -1.47(15)
Fe II λ 6247.560	-2.47	-2.510(14)
Fe II λ 6238.390	-2.75	
Fe II λ 6247.560	-2.47	-2.51(20)
Fe II λ 6369.460	-4.24	-3.50(9), -4.36(20)
Fe II λ 6432.670	-3.74	-3.550(9), -3.74(20)
O I λ 7771.944	0.65	0.375(8), 0.33(15), 0.33(16), 0.334(17)
O I λ 7774.167	0.39	0.230(8), 0.19(15), 0.19(16), 0.188(17)
O I λ 7775.388	0.40	0.010(8), -0.03(15), -0.03(16), -0.034(17)
Ca I λ 6439.083	0.150	0.470(19)
Ca I λ 6449.820	-0.84	-0.550(19)
Ca I λ 6471.670	-0.89	-0.590(19)
Ca I λ 6493.790	-0.30	0.140(19)
Ca I λ 6499.650	-0.89	-0.59(19)
Ca I λ 6717.690	-0.40	-0.524(13), -0.524(15)
Ca I λ 7148.150	0.18	0.137(15)

(2): Gurtoenko <i>et al.</i> , 1981	(6): Bard <i>et al.</i> , 1991
(8): Biemont <i>et al.</i> , 1991	(9): Heise <i>et al.</i> , 1990
(10): Blackwell <i>et al.</i> , 1979	(11): Blackwell <i>et al.</i> , 1982
(12): Blackwell <i>et al.</i> , 1984	(13): Coupry <i>et al.</i> , 1992
(14): Gigas, 1986	(15): North <i>et al.</i> , 1994
(16): Roby <i>et al.</i> , 1990	(17): Kiselman <i>et al.</i> , 1991
(18): Clegg <i>et al.</i> , 1981	(19): Wiese <i>et al.</i> , 1969
(20): Blackwell <i>et al.</i> , 1980	(21): Blackwell <i>et al.</i> , 1982

Steffen (1985) apuntó un problema existente a la hora de considerar Procyon como estrella de referencia: en su determinación de abundancias observó que las deducidas de líneas iónicas eran sistemáticamente mayores que las obtenidas con líneas neutras. Además, las líneas más intensas proporcionaban abundancias mayores que las líneas débiles. Estas anomalías no pueden considerarse un resultado de la calidad de los datos ya que provienen del Atlas de Griffin cuya calidad es realmente excelente. Se señalaron diferentes hipótesis: la opción de reducir la gravedad superficial para restaurar el equilibrio de ionización se descartó puesto que el valor obtenido para obtener el equilibrio difiere grandemente del calculado mediante observaciones de la órbita del sistema binario. Por otro lado, son improbables grandes errores sistemáticos en las anchuras equivalentes puesto que los valores calculados concuerdan bien con medidas realizadas por Kato y Sadakane (1982). La *microturbulencia* podría jugar un papel importante en la explicación de la discrepancia en las abundancias ya que afecta al equilibrio de ionización en la dirección deseada. No obstante, se necesita un valor exageradamente alto para restaurar dicho equilibrio, no existiendo ninguna motivo físico para la existencia de tal valor.

Igualmente, se estudió la influencia de la hipótesis LTE en el valor de las abundancias. Magain (1988) hizo referencia a desviaciones significativas del LTE en estrellas de tipo espectral G, encontrando que las abundancias deducidas de líneas de baja excitación son sistemáticamente más pequeñas que las obtenidas con líneas de alta excitación. Este efecto se interpreta como el resultado de

una super-ionización, esto es, que la fracción de hierro neutro es menor que la predicha por un estudio en LTE. En consecuencia se necesita una mayor abundancia del elemento para reproducir las líneas observadas (Holweger, 1990). En el Sol esta corrección es de 0.06 dex en las líneas de baja excitación de Fe I (Steenbock 1985; 1987; Holweger 1988). Sin embargo este efecto no es tan importante en estrellas de tipo F. Aunque Saxner (1984) encontró diferencias de 0.3 dex debido a super-ionización, Gratton et al. (1992) encontraron efectos despreciables en las abundancias trabajando con un modelo de Fe I más complejo. En otro estudio Lemke (1992) obtuvo efectos de NLTE de la misma magnitud que los obtenidos por Gratton et al. (1992).

Una de las explicaciones más plausibles radica en que los modelos homogéneos de atmósferas puedan no ser adecuados para un análisis detallado de la convección en estrellas F. Los movimientos convectivos dan lugar a inhomogeneidades horizontales en una determinada capa que se traducen en variaciones de la temperatura (granulación solar, por ejemplo). Por el contrario, los modelos fotosféricos asumen una temperatura promedio a una profundidad óptica determinada (Holweger, 1990). Mientras que las líneas de Fe I son muy sensibles a los cambios en temperatura efectiva, las líneas de Fe II muestran muy pequeñas variaciones.

Así pues, las inhomogeneidades en temperatura podrían ser la causa de las discrepancias observadas en las abundancias de Fe I y Fe II. Aunque Nissen y Gustafsson (1978) defendieron la idea de que una atmósfera inhomogénea produce sólo diferencias despreciables en las líneas espectrales, otros autores como Nelson (1980) sugirieron que la estructura de la temperatura media en un modelo inhomogéneo corresponde a la estructura de la temperatura de un modelo homogéneo con una temperatura efectiva 100-150 K más alta. Edvardsson et al. (1990) señalaron que las diferencias en abundancias debidas a inhomogeneidades pueden ser hasta del 30 %.

Por lo tanto podemos adoptar la hipótesis de que, si bien se deduce una temperatura efectiva de 6500 K de los colores publicados, de los flujos absolutos y relativos y de las medidas integradas, este valor no satisface una condición de equilibrio de ionización consistente, siendo necesaria una temperatura efectiva formal de 6750 K.

Ya que en este trabajo se ha adoptado una temperatura efectiva de Procyon de 6500 K, las anchuras equivalentes de las líneas sintéticas serán diferentes de las medidas en el Atlas de Griffin y Griffin (1979). Como el método para deducir los valores de $\log gf$ está basado en el hecho de que ambas anchuras equivalentes (del espectro observado y del espectro del Atlas) tienen que coincidir, dichos valores serán sistemáticamente diferentes que los de la bibliografía. Así, por ejemplo, los valores de $\log gf$ deducidos de las líneas de Fe I serán sistemáticamente menores ya que en nuestro rango de temperaturas (6500 K-8500 K) la EW de las líneas de Fe I disminuye con la temperatura. Lo mismo ocurre para las líneas de Ca I. Además, las líneas de Fe II parecen bastante independientes de la temperatura y las diferencias parecen ser aleatorias y pequeñas.

En la Figura 6.2 se representan los valores de $\log gf$ calculados para Fe I, Fe II y Ca I frente a valores anteriormente publicados. Se observa que los valores de $\log gf$ calculados para Fe I con $T_{eff} = 6500$ K son sistemáticamente mayores que los de la bibliografía. No obstante, dichas diferencias desaparecen si se considera $T_{eff} = 6750$ K. Un razonamiento similar es válido para los valores de las líneas de Ca I aunque en este caso existe una dispersión mayor ya que la fuente de referencia son las tablas NBS sensiblemente menos precisas que la serie de artículos de Blackwell *et al.*, o Gurtovenko *et al.* (1981), por ejemplo. Tal y como se apuntó anteriormente, las líneas de Fe II son bastante insensibles a variaciones de la temperatura, por lo que los valores de $\log gf$ apenas muestran diferencias entre los calculados asumiendo $T_{eff} = 6500$ K ó $T_{eff} = 6750$ K. Un caso peculiar lo constituyen los valores de $\log gf$ del oxígeno. El triplete $\lambda 7773$ Å utilizado en el cálculo de abundancias se encuentra afectado por diferentes fenómenos (NLTE, dependencia con la luminosidad, \dots , (Sección 6.5.1)), lo que impide aplicar nuestro método. Para estas líneas, se decidió adoptar los valores de $\log gf$ encontrados en la bibliografía.

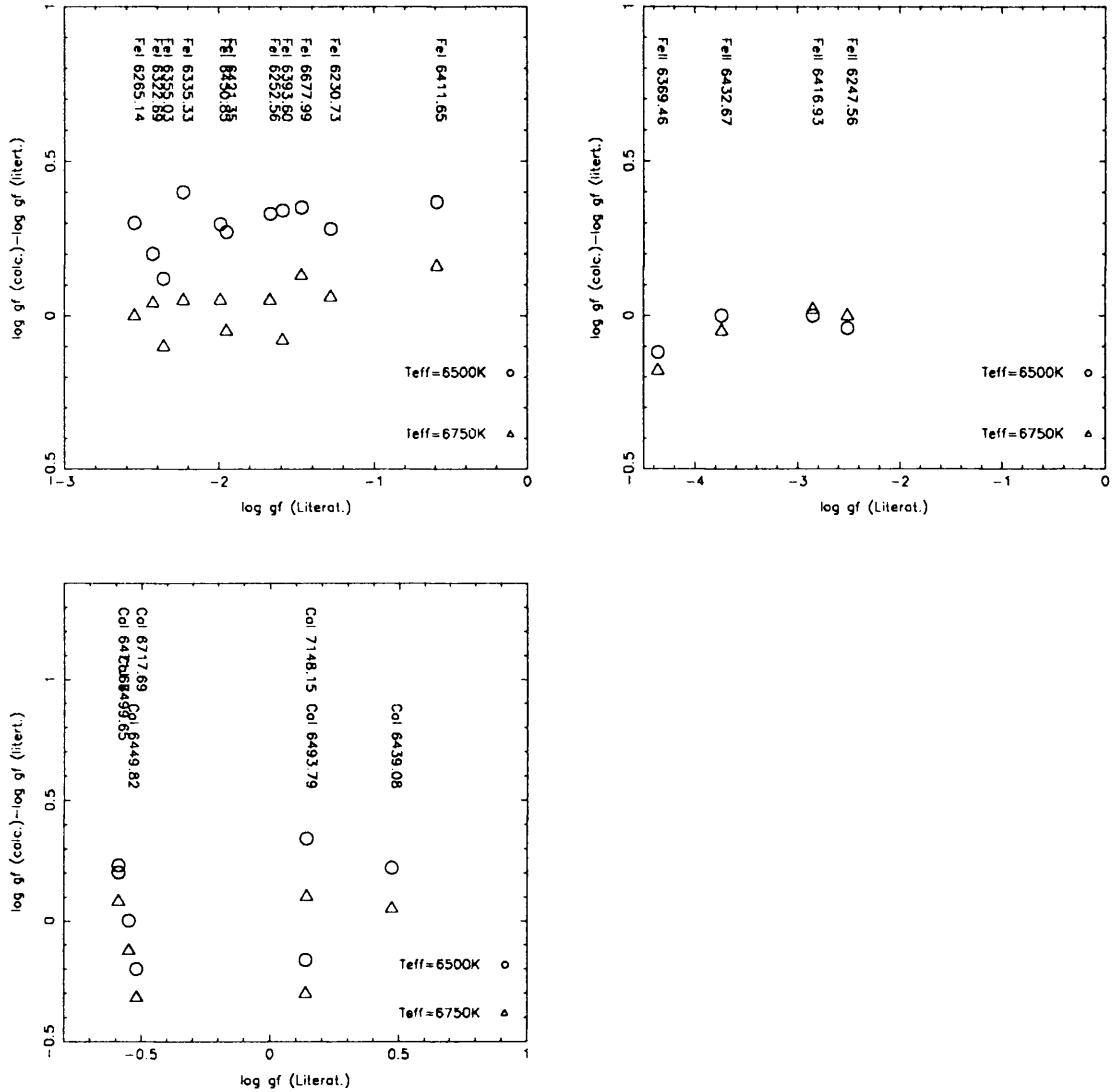


Figura 6.2

Comparación entre los valores $\log gf$ calculados y los obtenidos en la bibliografía para líneas de Fe I, Fe II y Ca I.

6.4 Cálculo de abundancias

De acuerdo con la definición de *curva de crecimiento* (ecuación (6.6)) el valor de la abundancia se basa en las anchuras equivalentes de las líneas del elemento. En este estudio, se utilizaron tres métodos en el cálculo de las anchuras equivalentes.

Por un lado se realizó una integración numérica directa sobre el perfil de línea utilizando el método de Gill y Miller (1972). Para la aplicación de este método es necesario conocer el valor del perfil de línea en, al menos, cuatro puntos. La integral entre dos puntos sucesivos se calcula mediante una fórmula de diferencias finitas de cuatro puntos centrada en el intervalo formado por los dos puntos. En el caso del primer y último punto, la fórmula en diferencias finitas no aparece centrada sino que abarca los primeros o los últimos cuatro puntos respectivamente. Se ha calculado igualmente una aproximación del error de truncamiento para dar una estimación de la incertidumbre en el cálculo del área. En todos los casos, el error de truncamiento es varios órdenes de magnitud menor que otros errores asociados al cálculo de anchuras equivalentes (como, por ejemplo, la determinación del continuo) y no se tendrá en cuenta.

Por otro lado, se realizaron ajustes gaussianos a las líneas mediante dos programas de ajuste de funciones diferentes: *MINUIT* y *MIDAS*. *MINUIT* (James *et al.*, 1991) es un programa de minimización y análisis de error concebido como herramienta para minimizar una función multiparamétrica. *MIDAS* (versión 1991 Mayo) es un paquete general de reducción y análisis de imágenes astronómicas entre los cuales se incluyen comandos de ajuste de funciones. En el Apéndice se describen con detalle los fundamentos matemáticos del tipo de ajuste realizado.

Para el cálculo de abundancias se ha utilizado *ATLAS8* (Kurucz, 1979a). Estos modelos suponen *equilibrio termodinámico local*, equilibrio hidrostático y geometría plano-paralela. Para cada una de las líneas estudiadas se ha construido una red de modelos abarcando un intervalo de temperatura desde 6500 K hasta 8500 K con un incremento de 250 K entre modelos y un rango de metalicidades desde -0.3 dex. hasta +0.3 dex. con un incremento de 0.3 dex. La gravedad se supone constante con un valor de $\log g = 4.0$ dex. Esta red de modelos proporcionan una anchura equivalente teórica de la línea en cuestión. El valor de la abundancia de una línea se calcula de la siguiente manera: puesto que la temperatura se conoce (Capítulo V), se calcula

la anchura equivalente sintética de la línea para esta temperatura, realizando una interpolación lineal en temperaturas sobre la red de modelos si fuera necesario. Una vez conocida la anchura equivalente sintética de la línea para dicha temperatura, se realiza una interpolación lineal en metalicidad hasta que las anchuras equivalentes teórica y observada coincidan.

Para cada una de las especies químicas estudiadas (Fe I, Fe II, Ca I y O I) la abundancia vendrá dada por el valor promedio de las abundancias individuales calculadas para cada una de las líneas.

Un parámetro que juega un papel importante en el análisis de abundancias es la *microturbulencia* (ξ_{mic}), que se introduce como explicación del retraso sistemático de la saturación de las líneas respecto a los valores predichos por la *curva de crecimiento* teórica. La *microturbulencia* puede definirse como aquellos movimientos de gas fotosférico en los que el elemento de turbulencia es menor que la unidad de profundidad óptica, esto es, a lo largo de la línea de visión hasta $\tau_\lambda = 2/3$ los fotones se encontrarán átomos con diferentes velocidades. El significado práctico es que la *microturbulencia* contribuye al transporte de radiación aumentando la velocidad térmica en el coeficiente de absorción atómico. En una línea débil la *microturbulencia* produce una línea de absorción más ancha pero manteniendo su perfil gaussiano con la misma anchura equivalente. Sin embargo, cuando la línea se satura, un incremento de la turbulencia producirá un ensanchamiento del rango en longitud de onda cubierto por la absorción, reduciendo la saturación y, por tanto, aumentando la EW total (Gray, 1992g).

Existen diferentes hipótesis sobre el mecanismo físico que origina la *microturbulencia*. Gehren (1980) propuso que, en estrellas F-G, su origen es convectivo. Nordlund (1980) interpretó el ensanchamiento por *microturbulencia* como consecuencia de gradientes de velocidad en un campo de velocidades granular resultado de una penetración de la convección más allá del límite establecido por modelos tradicionales (*overshooting*). Sin embargo, como las zonas convectivas de las estrellas de la Secuencia Principal empiezan a desaparecer a temperaturas efectivas por encima de ≈ 8500 K (de Loore, 1970), la *microturbulencia* en estrellas de tipo A no se puede atribuir fácilmente a campos de velocidad de pequeña escala asociados a la convección. Por ejemplo, la teoría estándar de longitud de mezcla predice velocidades máximas de convección de sólo $\approx 250 \text{ m s}^{-1}$ en una estrella tipo A normal, como Vega. Una

solución a este problema se basa en el hecho de que estos movimientos pueden generar ondas acústicas que se hacen más intensas en las capas más exteriores de la atmósfera, actuando como *microturbulencia* (Edmunds, 1978). Baschek y Reimers (1969) sugirieron otra posible explicación, basada en la interacción entre la turbulencia observada y las inestabilidades pulsacionales. Coupry y Burkhart (1992) defendieron esta idea mostrando que ξ_{mic} alcanza su máximo a una temperatura que corresponde con la intersección de la banda de inestabilidad y la Secuencia Principal. McNally (1965) sugirió que las inestabilidades rotacionales podrían inducir movimientos de turbulencia basándose en que el máximo de velocidades de rotación se alcanza cerca de las estrellas A5. Sin embargo las estrellas A_m , que presentan valores mayores de ξ_{mic} que las estrellas A normales, tienen velocidades de rotación menores que éstas.

Los valores de la *microturbulencia* dependen principalmente de la luminosidad de la estrella. Así por ejemplo, su valor es $\xi \approx 0 - 1 \text{ km s}^{-1}$ en enanas, con valores crecientes hacia luminosidades más altas, llegando a tomar valores de 5 km s^{-1} (Gray, 1992g). Nissen (1981) relacionó la *microturbulencia* con $\log g$ y T_{eff} para estrellas de tipos F0-G2 según la fórmula:

$$\xi_t = 3.210^{-4}(T_{eff} - 6390) - 1.3(\log g - 4.16) + 1.7 \quad (6.15)$$

Las estrellas más calientes tienden a presentar valores sistemáticamente mayores de *microturbulencia*. Además ξ aumenta al disminuir $\log g$, no encontrándose ninguna dependencia significativa con $[\text{Me}/\text{H}]$.

Algunos autores han afirmado que, para estrellas en o cerca de la Secuencia Principal, la *microturbulencia* se puede definir como una única función de T_{eff} , con un máximo para las estrellas A de últimos tipos y las estrellas $A_m - F_m$ (Smith, 1971). Coupry y Burkhart (1992) defendieron esta hipótesis pero calculando valores de ξ_t mucho menores que los calculados por Smith. Esta reducción en ξ_t debe atribuirse a la eliminación de los errores sistemáticos en las anchuras equivalentes y en los valores de gf . Coupry y Burkhart (1992) encontraron en las estrellas A_m valores de la *microturbulencia* sistemática y aproximadamente 1 km s^{-1} mayores respecto a las estrellas A. Esto se puede explicar parcialmente por el modelo de atmósferas utilizado: opacidades incorrectas en los modelos dan lugar a errores en la *microturbulencia* de forma que ésta aumenta al disminuir la opacidad (Kurucz

1979a). Este efecto se intensifica en estrellas A_m .

Otros autores (Gigas, 1986) propusieron utilizar una velocidad de *microturbulencia* que disminuya con la profundidad óptica. Esto es útil en aquellos casos en que se estudie un amplio rango en longitudes de onda en el que pueden aparecer líneas formadas en diferentes capas. Sin embargo, Gehlsen *et al.* (1978) señaló que la dependencia con la profundidad de los movimientos a pequeña escala tienen un efecto despreciable en las abundancias calculadas.

Existen dos métodos para determinar el valor numérico de la *microturbulencia*. Uno de ellos se basa en la influencia de la *microturbulencia* sobre las transformadas de Fourier de los perfiles de las líneas (Gray, 1992g): al aumentar la *microturbulencia* se produce una desaturación en el centro de la línea y el perfil tiende a ser más rectangular (Gray, 1973). En el espacio de Fourier esto corresponde a una estructura de lóbulos (en inglés, *sidelobes*). Estudiando la posición y la intensidad de los *sidelobes* en las líneas saturadas es posible determinar el valor de la *microturbulencia*. No es posible la confusión con *sidelobes* procedentes del ensanchamiento rotacional ya que los debidos a *microturbulencia* aparecen a frecuencias más altas. Sin embargo, y debido a esto, es necesaria una *relación señal-ruido* alta, especialmente teniendo en cuenta que el nivel de ruido se amplifica en las diferentes divisiones por el perfil instrumental y el perfil intrínseco de la línea tal y como se vio en el Capítulo IV. Con este método se puede obtener una precisión de $\Delta\xi = 0.1 \text{ km s}^{-1}$ (Gray, 1992g). Desafortunadamente, la *relación señal-ruido* calculada en los espectros de McDonald no es suficiente para poder utilizar este método.

Un segundo método se basa en el análisis de la *curva de crecimiento*. El valor de la *microturbulencia* es aquél que minimiza la dispersión entre los valores de las abundancias calculadas a partir de líneas débiles e intensas, eliminando cualquier dependencia entre abundancia y anchura equivalente. En nuestro trabajo, el cálculo de la *microturbulencia* se ha realizado mediante el conjunto de líneas de Fe I al ser el más numeroso y abarcar un mayor rango de anchuras equivalentes. Los resultados obtenidos se muestran en la Tablas 6.2 y 6.3. Estos resultados se han comparado con otros procedentes de la bibliografía para muestras de estrellas con temperaturas efectivas y valores de $\log g$ semejantes, obteniéndose valores similares. Así, por ejemplo, Berthet (1990a) obtuvo valores de *microturbulencia* para una muestra de 5 estrellas de tipo espectral F y clases de luminosidad III, IV y V que varían entre

$\xi = 2.4$ y $\xi = 5.5$. Berthet (1991) obtuvo igualmente valores en el rango entre $\xi = 1.5$ y $\xi = 4.0$ para otra muestra de estrellas F. Guthrie (1987) supuso un valor de $\xi = 5 \text{ km s}^{-1}$ en el estudio de estrellas A_m . Boesgaard *et al.* (1986) tomó un valor medio de $\xi = 1.8 \text{ km s}^{-1}$ para una muestra de estrellas con valor medio de $T_{eff} = 6460 \text{ K}$ y $\log g = 4.1 \text{ dex}$.

Por otro lado, se podría pensar en una posible relación entre la *microturbulencia* y el tipo de estrella, esto es, *no variables* y estrellas δ Scuti de baja y gran *amplitud*, especialmente en este último caso donde las grandes variaciones en amplitud se podrían traducir en elevados valores de ξ_{mic} . No obstante, en la Figura 6.3 se demuestra que no existe ninguna relación entre la *microturbulencia* y la amplitud de la pulsación, así como tampoco con el valor de la abundancia de las distintas especies químicas consideradas.

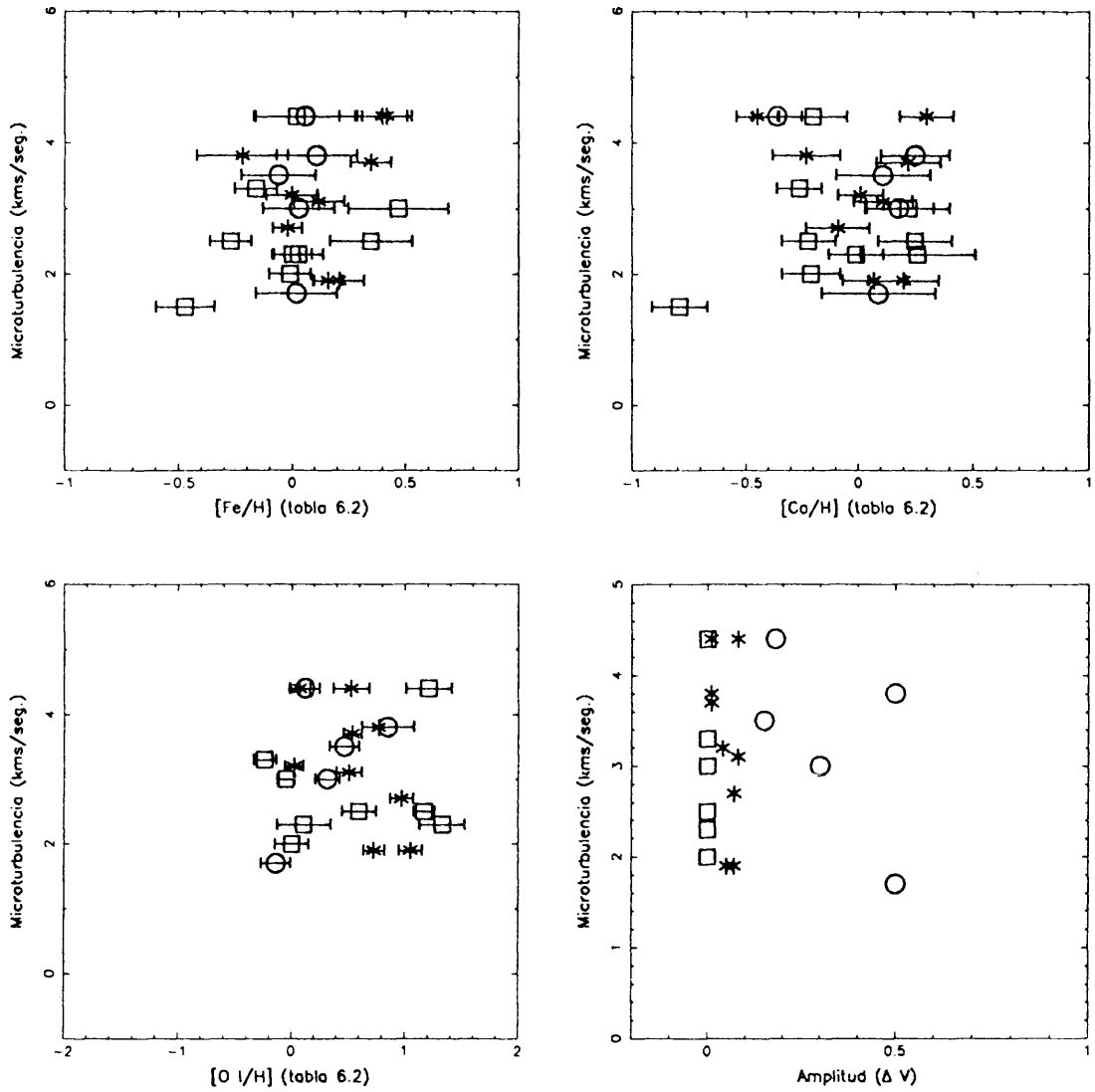


Figura 6.3

Relación entre la *microturbulencia* y las abundancias de las distintas especies químicas. Los cuadrados representan las estrellas *no variables*, los asteriscos las estrellas *δ Scuti de baja amplitud*, y los círculos las estrellas *δ Scuti de gran amplitud*.

6.4.1 Estimación de errores en el cálculo de abundancias

El valor de la metalicidad calculado según el método descrito anteriormente lleva asociado unos errores debido a diferentes fuentes que, en principio, podemos dividir en dos categorías. La primera categoría incluye aquellos errores que afectan a las líneas de manera individual, como errores aleatorios en las anchuras equivalentes, *fuerza del oscilador*..., estos es, incertidumbres en los parámetros de las líneas. Por otro lado, la segunda categoría se encuentra formada por aquellos errores que afectan a todas las líneas en su conjunto como, por ejemplo, errores en el modelo (temperaturas efectivas, gravedades, velocidad de *microturbulencia*, metalicidad...). Discutamos a continuación algunos de ellos.

Por un lado y tal como se señaló en la Sección 6.3.1, existen errores asociados a los valores del parámetro fuerza del oscilador. Los errores en $\log gf$ afectan al valor de la abundancia según la ecuación (6.6). No obstante, puesto que nuestro principal objetivo es estudiar variaciones relativas de metalicidad, los errores sistemáticos en los valores de $\log gf$ no serán críticos ya que afectarán a todas las observaciones por igual y, por tanto, se anularán en el análisis diferencial.

Otra fuente de error radica en la determinación de los parámetros físicos de la atmósfera. La temperatura es la variable que más fuertemente controla la intensidad de la línea debido a la dependencia exponencial con ésta de los procesos de excitación e ionización (representados por las fórmulas de Boltzmann y Saha, respectivamente). La variación en la intensidad de la línea (aumento o disminución) depende de la temperatura de gas en la región de formación de líneas, del potencial de excitación, del potencial de ionización, de la presión electrónica y, para líneas intensas, de la constante de *damping* (Gray, 1992g). El comportamiento típico de la anchura equivalente de una línea débil es ir aumentando hasta alcanzar un máximo a una cierta temperatura y disminuir a partir de ella. Esta disminución es el resultado del aumento en la opacidad del continuo del ión hidrógeno negativo y de la ionización (ley de Saha).

Algunos autores sugirieron que el error asociado a las temperaturas efectivas calculadas a partir de calibraciones de fotometría $uvby\beta$ es de unos ± 200 K (Lemke, 1990). No obstante, las comparaciones en T_{eff} realizadas en el Capítulo V permiten rebajar dicho error hasta un valor de ± 100 K.

Los errores asociados al cálculo de gravedades constituyen la tercera fuente de

error considerada. La influencia de la presión sobre las líneas espectrales se muestra de tres formas diferentes: primero, la dependencia de la constante de *damping* con la presión, la cual afecta a las líneas intensas; segundo, la dependencia con la presión del ensanchamiento Stark lineal que afecta a las líneas de hidrógeno y tercero, la influencia en la fórmula de Saha para líneas débiles (Gray, 1992g). No obstante, los efectos de la presión son, en cualquier caso, mucho más débiles que los efectos de la temperatura. Gray (1992g) los estimó teóricamente un factor 10 más débiles. Con vistas a cuantificar esta influencia sobre las líneas de Fe I, se ha generado un conjunto de modelos de atmósfera semejantes a los utilizados en el cálculo de abundancias pero utilizando valores de $\log g = 3.5, 4.5$, que se corresponden aproximadamente con los límites de los valores de gravedad para el conjunto de observaciones de McDonald. Se observó que una variación de $\Delta \log g = 0.5$ dex. produce una variación en la abundancia de solamente 0.005 dex.

Asumir una composición solar en los modelos de Kurucz constituye, *a priori*, otra fuente de error en especial para las estrellas químicamente peculiares, como las estrellas A_m , cuya composición química puede diferir en cierta medida de la solar. No obstante, van't Veer-Menneret *et al.* (1985) demostraron que la variación de las abundancias solares en los modelos de Kurucz en un factor 3, produce una variación de solamente 0.05 dex. en los valores de las abundancias derivadas.

Otra fuente de error la constituye la definición del nivel del continuo. Esta es una fuente de error que no puede ser cuantificada *a priori*, sino que depende de diversos factores tales como la resolución de los espectros, la *relación señal- ruido*, las diversas fuentes de ensanchamiento (por ejemplo, la velocidad de rotación) o el rango espectral. En cualquier caso, el hecho de que no existan diferencias sistemáticas apreciables en las anchuras equivalentes de los espectros de Procyon observados en ambas campañas de observación y el espectro del Atlas de Griffin y Griffin (1979) (Capítulo II) induce a pensar que este error es despreciable, puesto que las ventanas de definición de continuo fueron las mismas para todas las observaciones.

Igualmente, errores debidos a simplificaciones en los modelos de atmósferas tales como LTE o estratificación de capas plano-paralelas no se consideraron al ser su influencia prácticamente nula para el rango de tipos espectrales que abarcan las estrellas δ Scuti.

En las Tablas 6.2 y 6.3 se muestran los resultados del análisis de abundan-

cias para 22 estrellas, 9 *no variables* y 13 *variables δ Scuti de baja y alta amplitud*. Desafortunadamente, las observaciones correspondientes a la noche del 23 de Diciembre de 1993, entre las que se encontraban dos nuevas *δ Scuti de gran amplitud* (CC *And* y GP *And*) y una estrella *SX Phe* (DY *Peg*), no se han podido finalmente utilizar debido a problemas durante el proceso de reducción como consecuencia del mal tiempo reinante durante la noche y de la ausencia de observaciones de *flatfield* para esta noche.

Tabla 6.2: Valores de abundancia calculados para estrellas δ Scuti y SX Phe

Identificación			[M/H]	[M/H]	[Fe/H]	[Fe II/H]	[Ca/H]	[O I/H]	Microt.
HD	HR	GCVS	(B90)	(S93)					km s ⁻¹
2628	114	GN And	-0.02	-0.06	0.21 ± 0.11	0.26 ± 0.06	0.20 ± 0.15	0.73 ± 0.09	1.90
4818	238	V526 Cas	0.22	0.33	0.35 ± 0.09	0.43 ± 0.03	0.22 ± 0.14	0.54 ± 0.08	3.70
26322	1287	IM Tau	0.05		-0.02 ± 0.06	0.09 ± 0.05	-0.09 ± 0.14	0.97 ± 0.10	2.70
27628	1368	V775 Tau	0.19	0.35 ± 0.10	0.40 ± 0.11	0.46 ± 0.10	-0.45 ± 0.09	0.07 ± 0.09	4.40
33959	1706	KW Aur	-0.07	-0.14	0.12 ± 0.11	0.20 ± 0.09	0.11 ± 0.13	0.51 ± 0.11	3.10
37819		V356 Aur	0.38		0.42 ± 0.11	0.71 ± 0.07	0.30 ± 0.12	0.53 ± 0.16	4.40
40535	2107	V474 Mon	0.12	0.14	-0.06 ± 0.16	0.19 ± 0.05	0.11 ± 0.21	0.47 ± 0.13	3.50
50420	2557	V352 Aur	-0.10	-0.17	-0.22 ± 0.20	0.28 ± 0.05	-0.23 ± 0.15	0.77 ± 0.15	3.80
64191		AD CMi	0.03	0.01	0.03 ± 0.16	0.03 ± 0.05	0.18 ± 0.15	0.32 ± 0.14	3.00
73857		VZ Cnc	0.12	0.15	0.11 ± 0.18	0.14 ± 0.06	0.25 ± 0.15	0.85 ± 0.23	3.80
152830	6290	V644 Her	0.18		0.00 ± 0.11	-0.02 ± 0.06	0.01 ± 0.10	0.02 ± 0.08	3.20
		V1162 Ori	0.10	0.11	0.06 ± 0.22	0.30 ± 0.20	-0.36 ± 0.11	0.12 ± 0.13	4.40
		EH Lib	-0.20	-0.30	0.02 ± 0.18	0.04 ± 0.13	0.09 ± 0.25	-0.14 ± 0.13	1.70

Tabla 6.3: Valores de abundancia para el conjunto de estrellas *no variables*

Identificación		[M/H]	[M/H]	[Fe/H]	[Fe II/H]	[Ca/H]	[O I/H]	Microt.
HD	HR	(B90)	(S93)					km s ⁻¹
6397	308	-0.10		-0.47 ± 0.13	-0.48 ± 0.07	-0.79 ± 0.12		1.50
11257	534	-0.17	-0.27	-0.27 ± 0.09	-0.32 ± 0.04	-0.22 ± 0.12	1.17 ± 0.09	2.50
15385	723	0.25	0.41	0.47 ± 0.22	0.63 ± 0.10	0.22 ± 0.18	-0.05 ± 0.08	3.0
16647	783	-0.08		-0.16 ± 0.09	-0.30 ± 0.11	-0.26 ± 0.11	-0.24 ± 0.10	3.30
23230	1135	0.21		0.02 ± 0.19	0.68 ± 0.13	-0.20 ± 0.15	1.21 ± 0.20	4.40
217754	8765	0.15	0.21	0.35 ± 0.18	0.50 ± 0.05	0.25 ± 0.16	0.60 ± 0.15	2.50
218470	8805	-0.03		-0.01 ± 0.09	-0.01 ± 0.08	-0.21 ± 0.13	0.00 ± 0.15	2.00
219487	8845	-0.08		0.03 ± 0.11	0.06 ± 0.07	0.26 ± 0.25	0.11 ± 0.24	2.30
220242	8888			0.00 ± 0.09	0.08 ± 0.06	-0.01 ± 0.12	1.33 ± 0.20	2.30

Para las calibraciones fotométricas de Berthet (1990b) (B90) y Smalley (1993) (S93) los autores calculan unos errores de ± 0.138 dex. y ± 0.09 dex. respectivamente.

6.5 Análisis de los resultados

En primer lugar, se compararon los valores de $[Fe/H]$ con los valores de $[Me/H]$ obtenidos mediante las dos calibraciones fotométricas citadas con anterioridad: Berthet (1990b) y Smalley (1993). El resultado de la comparación se muestra en la Figura 6.4. En la comparación con Smalley (1993) se ha utilizado un número menor de puntos debido a que esta calibración es válida en un intervalo de temperaturas más reducido que Berthet (1990b), si bien ésta no es válida para $[Me/H] \geq 0.383$. Se observa que la calibración de Smalley (1993) proporciona resultados más fiables que los de Berthet (1990b) donde la relación lineal no está clara. El motivo puede radicar en que, mientras Smalley (1993) calculó la calibración del índice δm_1 basándose en un análisis espectroscópico de abundancias realizado por él mismo, Berthet (1990b) relacionó el índice δm_1 con valores de $[Fe/H]$ obtenidos a partir de distintas fuentes de la bibliografía, lo que se traduce en un conjunto inhomogéneo de valores de $[Fe/H]$ con la correspondiente dispersión en los resultados.

Igualmente, en la Tabla 6.4 se comparan las abundancias de $[Fe\ I/H]$ y $[Ca\ I/H]$ con valores obtenidos de la bibliografía encontrando similitud excepto para *GN And* para la que los valores son sistemáticamente menores. En la Tabla 6.5 se muestra la media de las diferencias entre los valores de metalicidad de este trabajo y los obtenidos a partir de Smalley (1993) y de valores de la bibliografía calculados utilizando espectroscopía. Se observa que los valores de $[Fe/H]$ y $[Ca/H]$ calculados son ligeramente mayores que los obtenidos de otras fuentes. En principio, se pensó en la posible existencia de inhomogeneidades en los modelos de Kurucz (1979a) utilizados. Para comprobar esto, se han representado en la Figura 6.5 los valores de las diferencias en función de la temperatura, sin encontrar ninguna tendencia significativa sino solamente la componente aleatoria de los errores. El motivo de la diferencia sistemática encontrada en los valores de $[Fe/H]$ y $[Ca/H]$ parece residir en el hecho de que si bien se ha fijado $T_{eff} = 6500$ K para el cálculo de valores $\log gf$, el valor de T_{eff} calculado para el espectro de Procyon promedio utilizando $H\beta$ es $T_{eff} = 6600$ K. Esto implica que toda nuestra red de modelos se encuentra desplazada 100 K. Al considerar una temperatura mayor, la anchura equivalente será menor, el valor de $\log gf$ también será menor y, por tanto, las abundancias calculadas mayores. Analizando el comportamiento de líneas sintéticas generadas

mediante los modelos de Kurucz (1979a) se dedujo que, en el rango de temperaturas entre 6500 K y 8500 K, las líneas de Fe I son sensibles a la temperatura (una variación de 100 K produce una variación en el valor de la abundancia de ≈ 0.06 dex.) y prácticamente insensibles a cambios de la gravedad. Por otro lado, el factor utilizado por Steffen (1985) para corregir de luz difusa el espectro del Atlas de Procyon (Griffin y Griffin, 1979) se ha puesto en tela de juicio por otros autores. Así, por ejemplo, Kato y Sadakane (1982), en su estudio de abundancias de tierras raras en Procyon, llegaron a la conclusión de que no es necesario realizar ninguna corrección de luz difusa. Puesto que la mayoría de las líneas de Fe I son débiles, la variación en abundancia es proporcional a la variación en EW , por lo que, si este factor no es necesario, estamos sobreestimando el valor de la abundancia ≈ 0.4 dex. Así pues, para obtener valores absolutos, se deberá efectuar una corrección de punto cero en el valor de las abundancias calculadas, corrección que se estima en 0.1 dex.

Al contrario de lo que ocurre con las líneas de Fe I, las líneas de Fe II se muestran insensibles a variaciones de la temperatura (una variación de 100 K produce una variación en la abundancia de ≤ 0.01 dex.) pero sensibles a cambios en $\log g$. Así pues, habiendo determinado previamente el valor de la temperatura, el cociente $[Fe\ I/Fe\ II]$ definido como $[Fe\ I/Fe\ II] = [Fe\ I/H] - [Fe\ II/H]$ se puede considerar como un indicador de la gravedad. Para comprobar esto, se han representado los valores de $[Fe\ I/Fe\ II]$ para el conjunto de estrellas dado en las Tablas 6.2 y 6.3 frente al valor de $\log g$ calculado mediante la calibración de Moon y Dworetzky (1985) (MD85) (Figura 6.6). Se observa que, a pesar de los errores asociados a $[Fe\ I/Fe\ II]$ se puede establecer una relación lineal. El motivo de elegir la calibración MD85 se debe a que es la que proporciona valores más precisos cuando se comparan con Andersen (1991)

Andersen (1991) calculó valores de la masa y el radio para estrellas binarias en la Secuencia Principal de tipos espectrales O8–M1. El error medio en los valores de $\log g$ determinados es de 0.015 dex., esto es, un orden de magnitud mayor que las mejores determinaciones espectroscópicas o fotométricas. Por tanto, este conjunto de estrellas constituye una excelente referencia con la que comparar los valores de la gravedad obtenidos a partir de las calibraciones fotométricas utilizadas en el Capítulo V. Aunque solamente se conocen los valores fotométricos en el sistema de Strömgen para 8 de las estrellas de tipos espectrales A–F de Andersen (1991), esta

pequeña muestra parece indicar que es la calibración de Moon y Dworetzky (1985) la que mejores resultados proporciona. Aunque la disposición de las bandas *uvby* hace que el índice c_1 sea prácticamente independiente de la metalicidad (Golay, 1974), Dworetzky y Moon (1986) sugirieron que es necesario añadir un término corrector debido a metalicidad. Posteriormente, Guthrie (1987) introdujo un nuevo término debido a rotación, quedando finalmente la expresión de δc_1 como

$$\delta c_1' = \delta c_1 - 1.2\delta m_0 - 1.1 \times 10^{-6}(V \sin i)^2 \quad (6.16)$$

donde $\delta c_1'$ será el índice a utilizar en la red de MD85 para el cálculo de $\log g$.

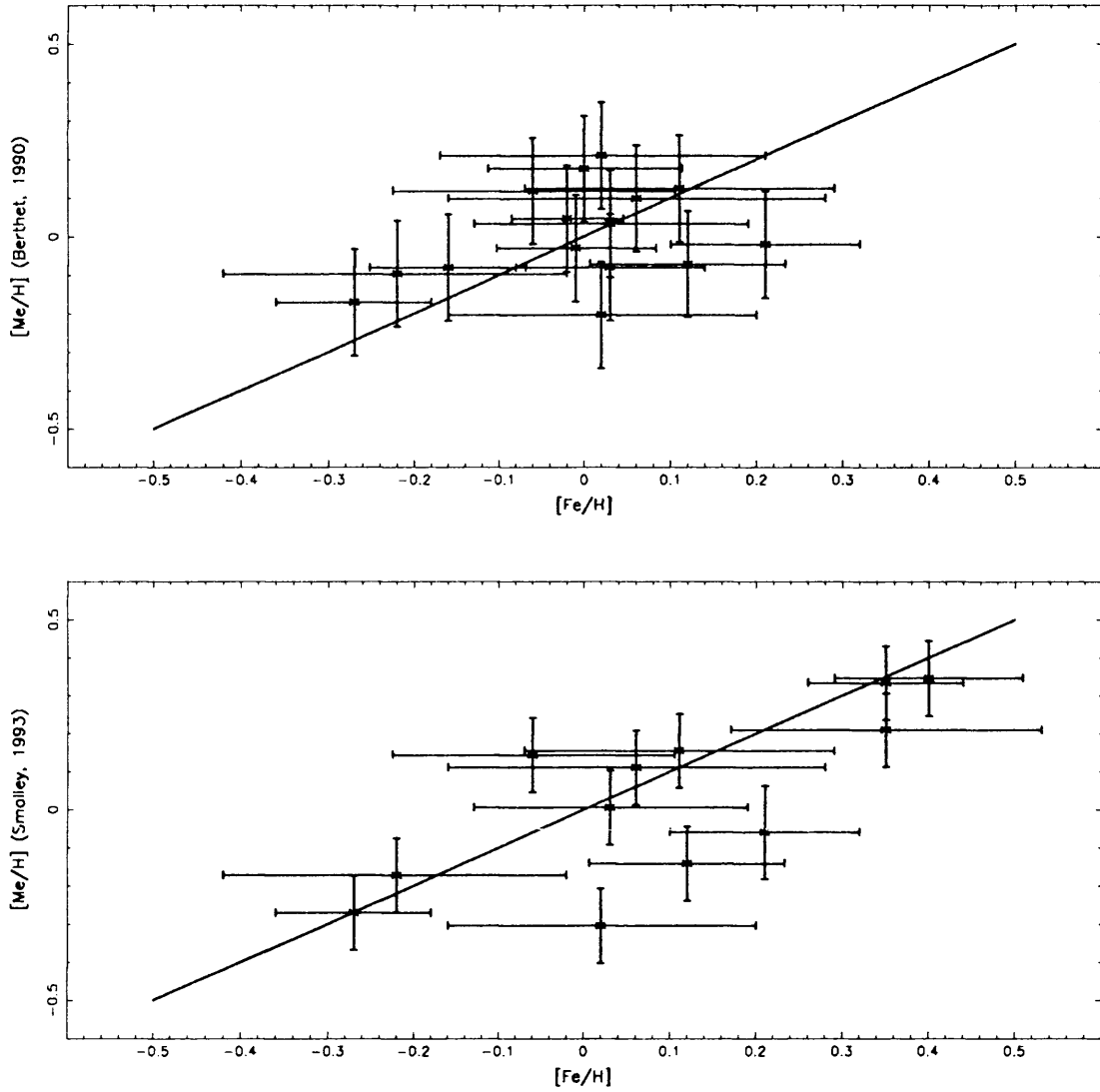
Tabla 6.4: Comparación de los valores de [Fe I/H], [Ca I/H] calculados con valores de la bibliografía determinados espectroscópicamente

Identificación			[Fe/H] (calc.)	[Fe/H] (bib.)	[Ca/H] (calc.)	[Ca/H] (bib.)
HD	HR	GCVS				
2628	114	GN And	0.21 ± 0.11	-0.25(1); -0.2(2)	0.20 ± 0.15	0.0 (2)
27628	1368	V775 Tau	0.35 ± 0.10	0.2 ± 0.06 (2)	-0.45 ± 0.09	-0.45 ± 0.06 (2)
33959	1706	KW Aur	0.12 ± 0.11	0.0 (2)	0.11 ± 0.13	0. (2)
11257	534		-0.27 ± 0.09	-0.29 ± 0.13 (3); -0.32 ± 0.11 (4); -0.40 ± 0.10 (5)		
23230	1135		0.02 ± 0.19	-0.05 ± 0.25 (6)		
217754	8765		0.35 ± 0.18	0.06 ± 0.09 (7)		
218470	8805		-0.01 ± 0.09	-0.13 (8); -0.17 ± 0.08 (4)		

(1) Hauck, 1986	(2) Burkhardt <i>et al.</i> (1991)
(3) Boesgaard <i>et al.</i> (1988)	(4) Boesgaard <i>et al.</i> (1990)
(5) Nissen (1981)	(6) Eggen <i>et al.</i> (1991)
(7) North <i>et al.</i> (1994)	(8) Lambert <i>et al.</i> (1991)

6.5.1 Abundancias de oxígeno

El oxígeno es, después del hidrógeno y el helio, el elemento más abundante en las estrellas y como tal juega un papel fundamental en la generación de energía y en las opacidades del interior estelar. Así, por ejemplo, la determinación de la edad de una estrella comparando modelos evolutivos con los colores y luminosidades

**Figura 6.4**

Comparación entre los valores $[Fe/H]$ calculados espectroscópicamente y los valores de metalicidad ($[Me/H]$) obtenidos mediante las calibraciones fotométricas de Berthet (1990b) (Panel superior) y Smalley (1993) (Panel inferior). En ambos casos, se ha representado igualmente la recta $[Fe/H] = [Me/H]$.

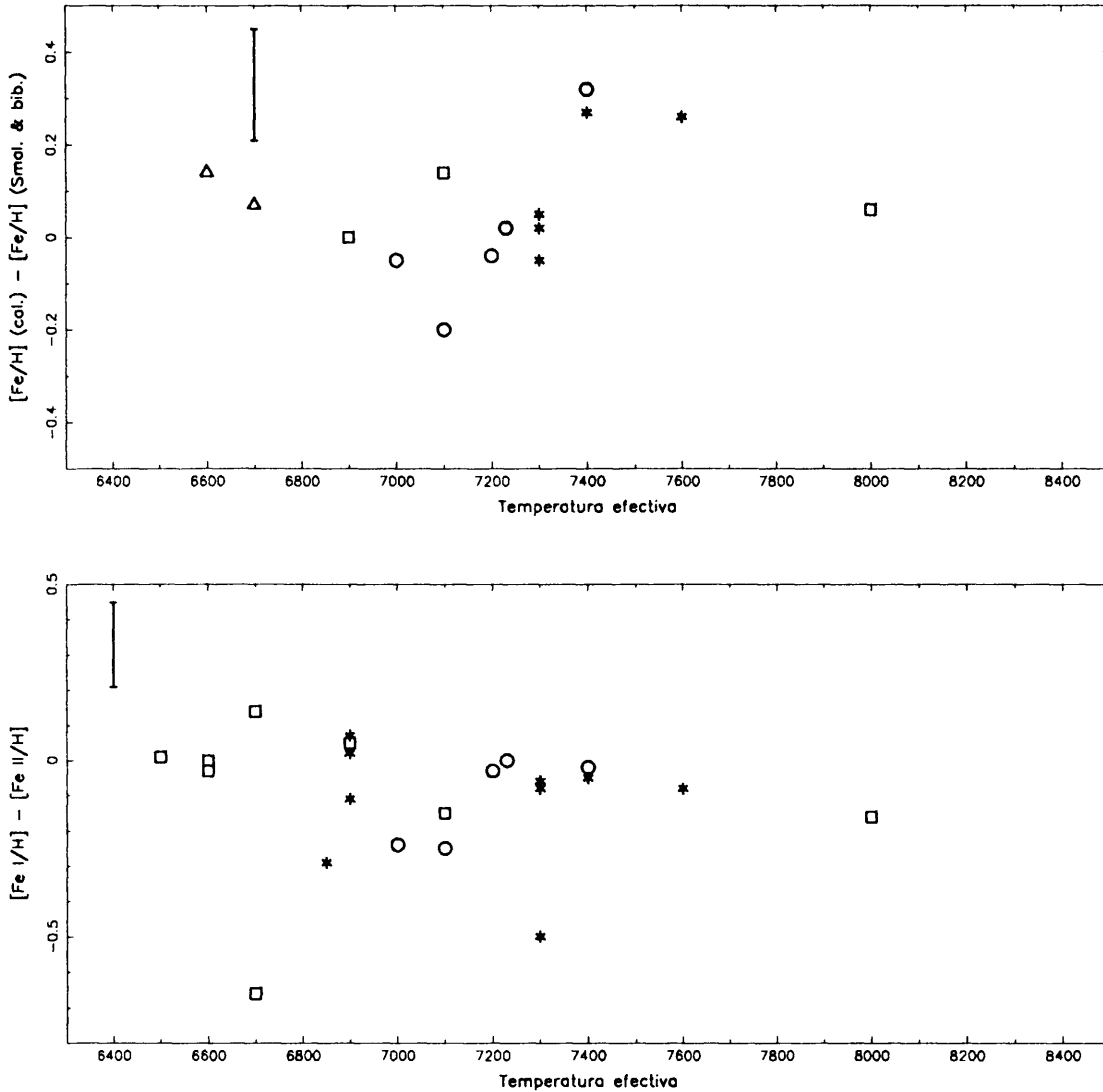
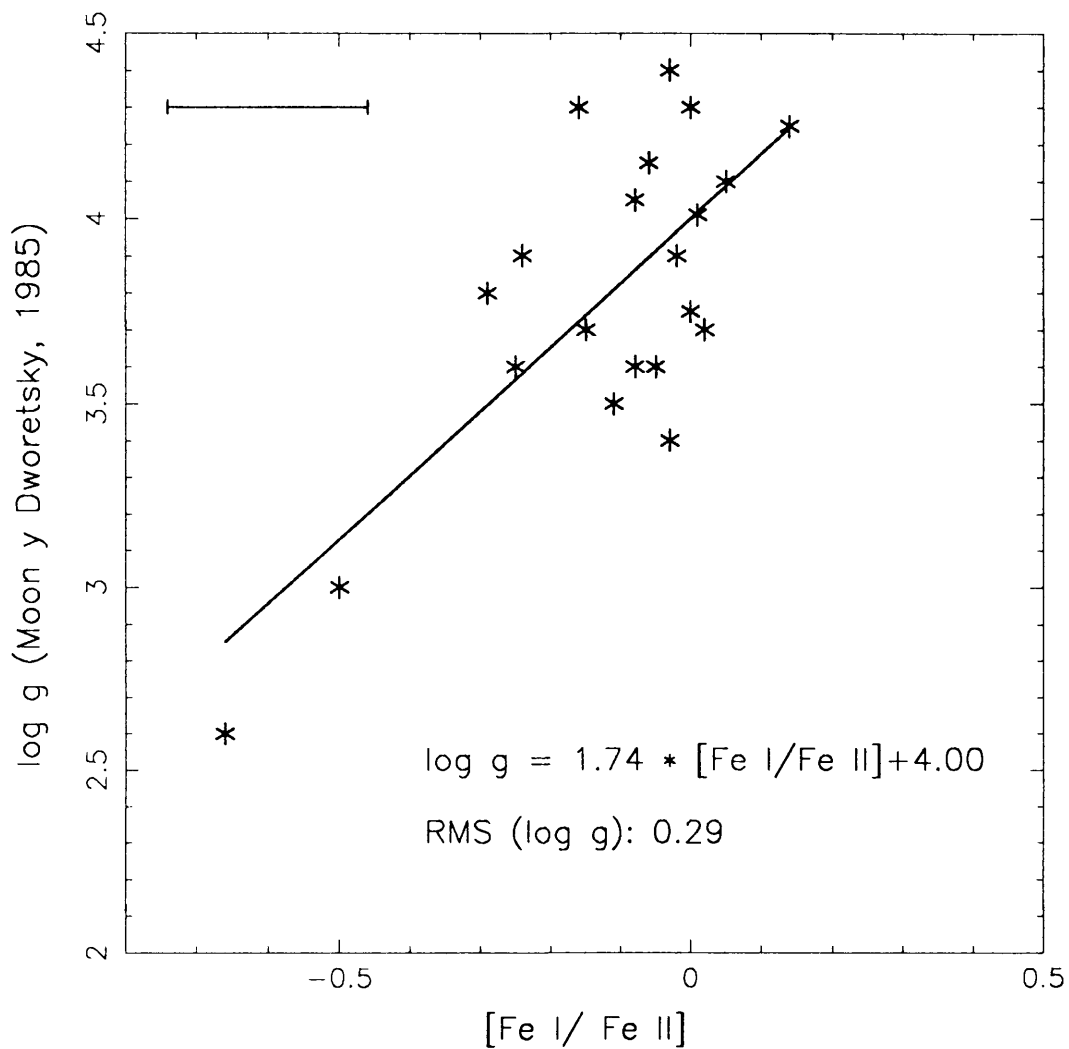


Figura 6.5

Relación entre la temperatura efectiva y la diferencia en $[Fe/H]$ entre los valores calculados a partir de los espectros de McDonald y los obtenidos a partir de la calibración fotométrica de Smalley (1993) y de valores de la bibliografía. Los cuadrados representan estrellas *no variables*, los asteriscos estrellas *δ Scuti de baja amplitud* y los círculos estrellas *δ Scuti de gran amplitud*. Los triángulos representan valores de $[Fe/H]$ obtenidos en la bibliografía. En parte superior izquierda se representa una barra de error promedio.

**Figura 6.6**

Relación entre las abundancias de $[\text{Fe I}/\text{Fe II}]$ calculadas y el valor de $\log g$ determinado a partir de la calibración de Moon y Dworetsky (1985). Se ha determinado, igualmente, la recta de regresión lineal correspondiente a los datos sin tener en cuenta los errores asociados. Una barra de error promedio de los valores $[\text{Fe I}/\text{Fe II}]$ se muestra en la parte superior izquierda.

Tabla 6.5: Valores de abundancia calculados para estrellas δ Scuti y SX Phe

Ident.	Valor medio	Desv. estand.
Fe/H -S(93)	0.06	0.15
Fe/H -biblio.	0.16	0.14
Ca/H -biblio.	0.10	0.10
Fe/H- Fe II/H	-0.07	0.10

observados depende de la abundancia inicial de oxígeno (VandenBerg, 1992). Igualmente, el oxígeno es un elemento clave para el estudio de la nucleosíntesis estelar y de la evolución galáctica: la presencia de oxígeno en el medio interestelar es debida a estrellas masivas ($M \geq 10M_{\odot}$) que evolucionan y explotan como supernovas de tipo II en una relativamente corta escala de tiempo ($\tau \leq 2 \cdot 10^7$ años). Por el contrario, la abundancia de hierro interestelar es el resultado de la evolución de estrellas de masas intermedias que explotan como supernovas de tipo Ia en escalas de tiempo $\tau \geq 10^8 - 10^9$ años. Por tanto, la relación entre las abundancias de oxígeno y hierro proporcionan información acerca de las tasas de formación estelar y las escalas de tiempo de la evolución galáctica (Gilmore *et al.*, 1989; Wheeler *et al.*, 1989).

Las abundancias de oxígeno se han estudiado poco debido a que sus líneas más intensas se encuentran fuera de la parte azul del espectro, que ha sido la utilizada tradicionalmente en espectroscopía fotográfica de alta dispersión. Así, por ejemplo, las líneas más intensas de O I se encuentran situadas en el ultravioleta (tripleto a $\lambda 1304 \text{ \AA}$) y en el infrarrojo (tripleto a $\lambda 7773 \text{ \AA}$). En este trabajo se ha utilizado éste último (tripleto de O I a $\lambda 7771.9436 \text{ \AA}$, $\lambda 7774.1665 \text{ \AA}$ y $\lambda 7775.3884 \text{ \AA}$) para determinar la abundancias de oxígeno. No obstante, se observa en las Tablas 6.2 y 6.3 que los valores de [O I/H] calculados presentan una gran dispersión, por lo que es necesario realizar un análisis más detallado de la naturaleza del tripleto de O I considerado.

Merril (1925), estudiando el espectro de α Cyg, fue el primero en destacar la gran intensidad del tripleto a $\lambda 7773 \text{ \AA}$. Posteriormente, Keenan y Hynek (1950)

encontraron una relación entre la anchura equivalente de este triplete y la luminosidad, convirtiéndose desde entonces en un indicador de luminosidad muy utilizado, especialmente para tipos espectrales posteriores a A0 donde otros indicadores, como $H\gamma$, no son útiles. La sensibilidad de este triplete a la luminosidad es la consecuencia de su formación en un nivel metaestable (de hecho, las líneas de este triplete se producen en la transición del nivel metaestable $3s^5S_2^0$ al nivel $3p^5P_{3,2,1}$) con un relativamente largo tiempo de vida en ausencia de de-excitación colisional, tal y como ocurre en estrellas de baja gravedad como las supergigantes (Faraggiana *et al.*, 1988). Estos autores, representando la EW del triplete de oxígeno frente al tipo espectral, argumentaron que si bien existe una clara distinción entre la clase I y el resto de las clases de luminosidad, esta distinción no es tan clara entre las clases III, IV y V como Keenan y Hynek (1950) postularon. No obstante, estos autores utilizaron datos procedentes de distintas fuentes, todas ellas antiguas (la referencia más moderna es Thomas *et al.*, 1979). Esto les obligó a considerar el triplete como una sola línea puesto que la resolución espectral no era suficiente para poder separar las distintas líneas, asumiendo un error en las medidas de anchura equivalente mayor o igual que el 10% en todos los casos.

En nuestro trabajo hemos repetido los cálculos de Faraggiana *et al.* (1988) a partir de las observaciones de McDonald. En la Figura 6.7 se han representado la abundancia de oxígeno y la anchura equivalente del triplete de O I frente indicadores de luminosidad como son $[\text{Fe I}/\text{Fe II}]$ o el valor de la gravedad calculado mediante la calibración de MD85. Se puede observar claramente que existe una relación entre la luminosidad y la EW del triplete de O I, que Faraggiana *et al.* (1988) no encontraron debido a la baja calidad de sus datos. El hecho de que la EW del triplete dependa del valor de $\log g$ permite explicar, al menos en parte, los valores anómalos de abundancia que habíamos obtenido (Tablas 6.2 y 6.3): puesto que todo nuestro análisis de abundancias se basa en considerar modelos con distintos valores de T_{eff} y $[\text{M}/\text{H}]$ fijando un valor de $\log g = 4.0$ y puesto que la EW del triplete aumenta a medida que la gravedad disminuye, los valores mayores de $[\text{O I}/\text{H}]$ se obtendrán para aquellas estrellas con $\log g$ menor. Esta hipótesis aparece demostrada en la Figura 6.7 considerando HR 1135, V352 Aur, VZ Cnc y HR 8805: se observa que, a medida que el valor de $\log g$ es menor, el valor de $[\text{O}/\text{H}]$ es mayor. Igualmente, la dispersión existente en los valores de abundancia calculados se explica por la dependencia de

la EW con la gravedad: así, por ejemplo, dos estrellas (HR 783 y V352 Aur) cuyas temperaturas difieren solamente en 200 K, presentan una diferencia de casi 400 mÅ en anchura equivalente lo que se traduce en valores de $[O/H] = -0.24$ y $[O/H] = 0.77$ respectivamente.

Por otro lado, una de las principales peculiaridades del triplete es la discrepancia existente entre los valores de abundancia calculados cuando se comparan con los derivados utilizando otras líneas de O I. Baschek *et al.* (1977) sugirieron que un análisis NLTE es suficiente para eliminar las discrepancias entre las abundancias derivadas mediante el triplete y las abundancias derivadas mediante otras líneas como $\lambda 6456 \text{ \AA}$, $\lambda 6158 \text{ \AA}$, ó $\lambda 3947 \text{ \AA}$. Por el contrario, un análisis LTE implica la necesidad de utilizar grandes valores de *microturbulencia* para homogeneizar las abundancias calculadas mediante las distintas líneas. Así, por ejemplo, Osmer (1972) se vió forzado a introducir el concepto de *microturbulencia supersónica* para homogeneizar sus valores de abundancia.

García López *et al.* (1993) determinaron las abundancias de oxígeno de 50 estrellas de tipo espectral F pertenecientes a la Secuencia Principal utilizando el triplete O I $\lambda 7773 \text{ \AA}$ con un modelo de atmósferas bajo la hipótesis de NLTE. Estos autores confirman nuevamente las diferencias significativas observadas en las abundancias suponiendo LTE o NLTE. Clegg *et al.* (1981) en su análisis de abundancias de C, N, O para 20 estrellas F y G de la Secuencia Principal encontraron igualmente que las abundancias derivadas a partir del triplete O I $\lambda 7773 \text{ \AA}$ son sistemáticamente mayores que las derivadas de otras líneas de O I como $\lambda 6158 \text{ \AA}$, $\lambda 6300 \text{ \AA}$, $\lambda 9260 \text{ \AA}$, $\lambda 9262 \text{ \AA}$ ó $\lambda 9266 \text{ \AA}$. Basándose en los modelos de Baschek *et al.* (1977), estos autores observaron que aunque el triplete de O I es más débil en estrellas F que en estrellas A, los efectos NLTE son todavía significativos, mientras que en estrellas de tipo solar o más frías las abundancias de oxígeno derivadas del triplete o a partir de otras líneas coinciden. Este último argumento concuerda con los estudios de Sneden *et al.* (1979) quienes obtuvieron abundancias de oxígeno similares utilizando modelos LTE y NLTE sobre estrellas de tipo solar.

Nissen *et al.* (1992) estudiaron las abundancias de oxígeno para 23 estrellas de tipos espectrales F y G en la Secuencia Principal proponiendo otra hipótesis, distinta a la de efectos NLTE, para las diferencias sistemáticas que encuentran entre las abundancias derivadas a partir del triplete O I $\lambda 7773 \text{ \AA}$ y la línea prohibida [O I] a

$\lambda = 6300 \text{ \AA}$. Estos autores apuntan que las líneas del triplete dependen fuertemente de la temperatura efectiva adoptada (Nissen, 1991), por lo que su intensidad puede verse afectada por inhomogeneidades en la temperatura de las atmósferas estelares (producidas, por ejemplo, por convección) que no se tienen en cuenta en los modelos de atmósferas. Kiselman (1991) sugirió la misma hipótesis. Este autor, utilizando un modelo NLTE encontró que para estrellas de tipo solar la corrección NLTE tiene una influencia prácticamente nula sobre las líneas del triplete. Por el contrario, las líneas prohibidas a 6300 \AA y 6363 \AA son muy poco sensibles a efectos NLTE y a variaciones de la temperatura. Además, para estrellas con temperaturas inferiores a 7000 K , casi todos los átomos de oxígeno se encuentran en los niveles de energía correspondientes a las líneas prohibidas, por lo que estas líneas proporcionarán valores precisos de la abundancia de oxígeno. Sin embargo, estas líneas son demasiado débiles para ser medidas en los espectros de McDonald no pudiendo ser, por tanto, utilizadas.

Un método alternativo se sugiere en Faraggiana *et al.* (1988): estos autores comparan las anchuras equivalentes del triplete para distintos valores de T_{eff} , ξ_{mic} y $\log g$ obtenidas utilizando los modelos de Kurucz (1979a) y los modelos NLTE de Johnson *et al.* (1974) y Bascheck *et al.* (1977) estableciendo distintos factores correctores dependiendo del valor de los tres parámetros anteriormente citados.

Por tanto, se deduce que un método adecuado de determinación de abundancias de O I consistirá en, una vez conocida la temperatura, determinar el valor de $\log g$ (utilizando el indicador [Fe I/Fe II], por ejemplo) y con estos dos parámetros construir un conjunto de modelos sintéticos para diferentes valores de metalicidad.

Tal y como se vió el cociente [Ca/Fe] se puede considerar como indicador de la difusión. Con vistas a estudiar si las abundancias de oxígeno están afectadas por el mismo fenómeno, se han comparado en la Figura 6.8 los cocientes [O I/Fe II] (que, como dijimos anteriormente, son bastante insensibles a las variaciones de $\log g$ y T_{eff}) y [Ca/Fe]. Se observa que en el rango $-0.2 \leq [Ca/Fe] \leq 0.2$, donde se supone una abundancia solar, existe una importante variación en [O I/Fe II]. Puesto que la temperatura se conoce con precisión y el efecto de la gravedad se ha eliminado, en principio, gracias al índice [O I/Fe II], en caso de que el oxígeno fuese afectado por difusión, este efecto debería ser visible. No obstante, cuando se esperaría encontrar valores cercanos a la abundancia solar para $-0.2 \leq [Ca/Fe] \leq 0.2$, la Figura 6.8 muestra una enorme dispersión. Un resultado similar se obtiene de la Figura 6.9

en la que a un rango de valores de abundancias de Fe I normales le corresponde un rango de abundancias de O I con una gran dispersión. Se deduce, pues, que no es posible determinar si existe un efecto de difusión sobre O I a partir de los datos disponibles.

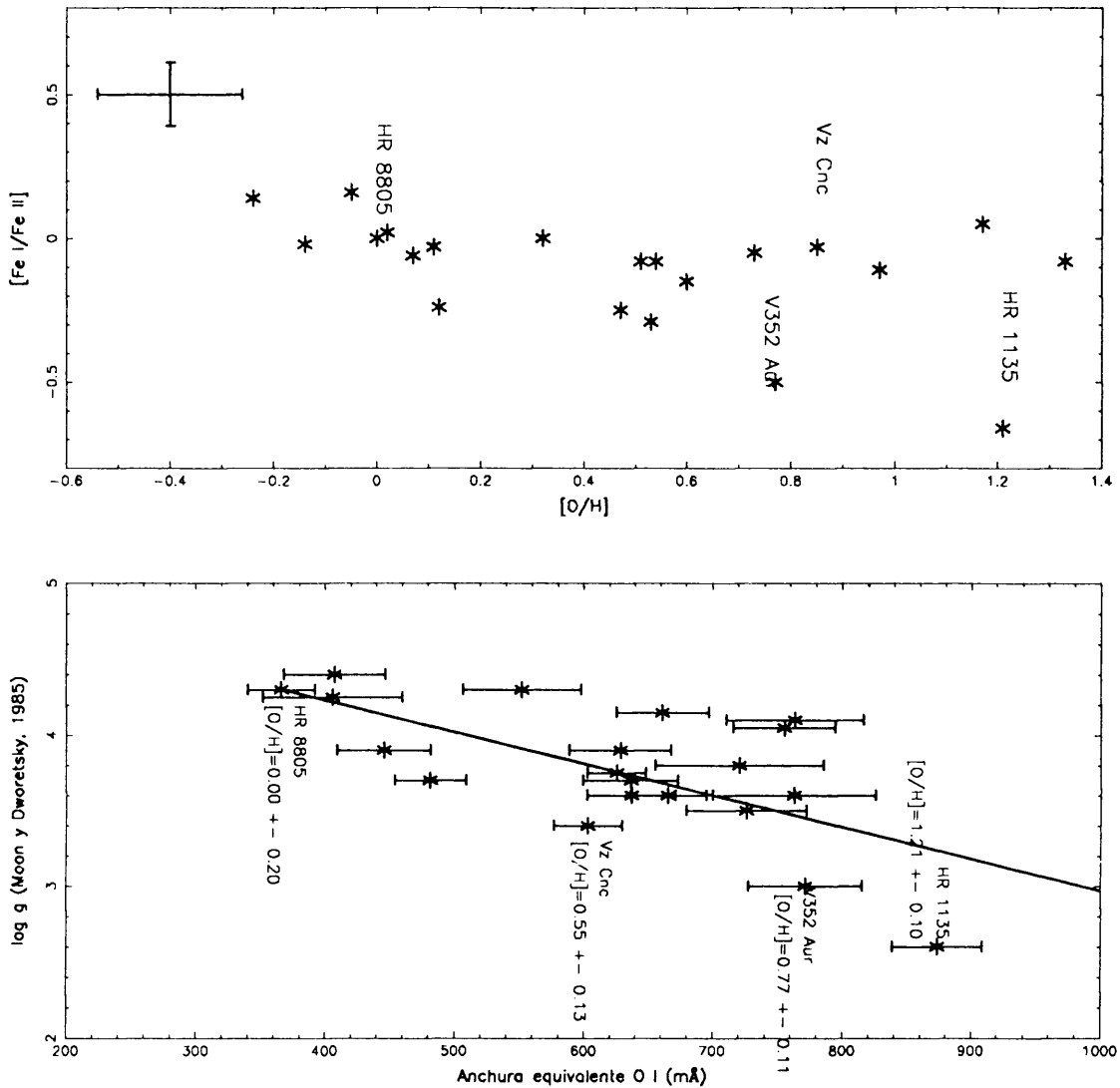
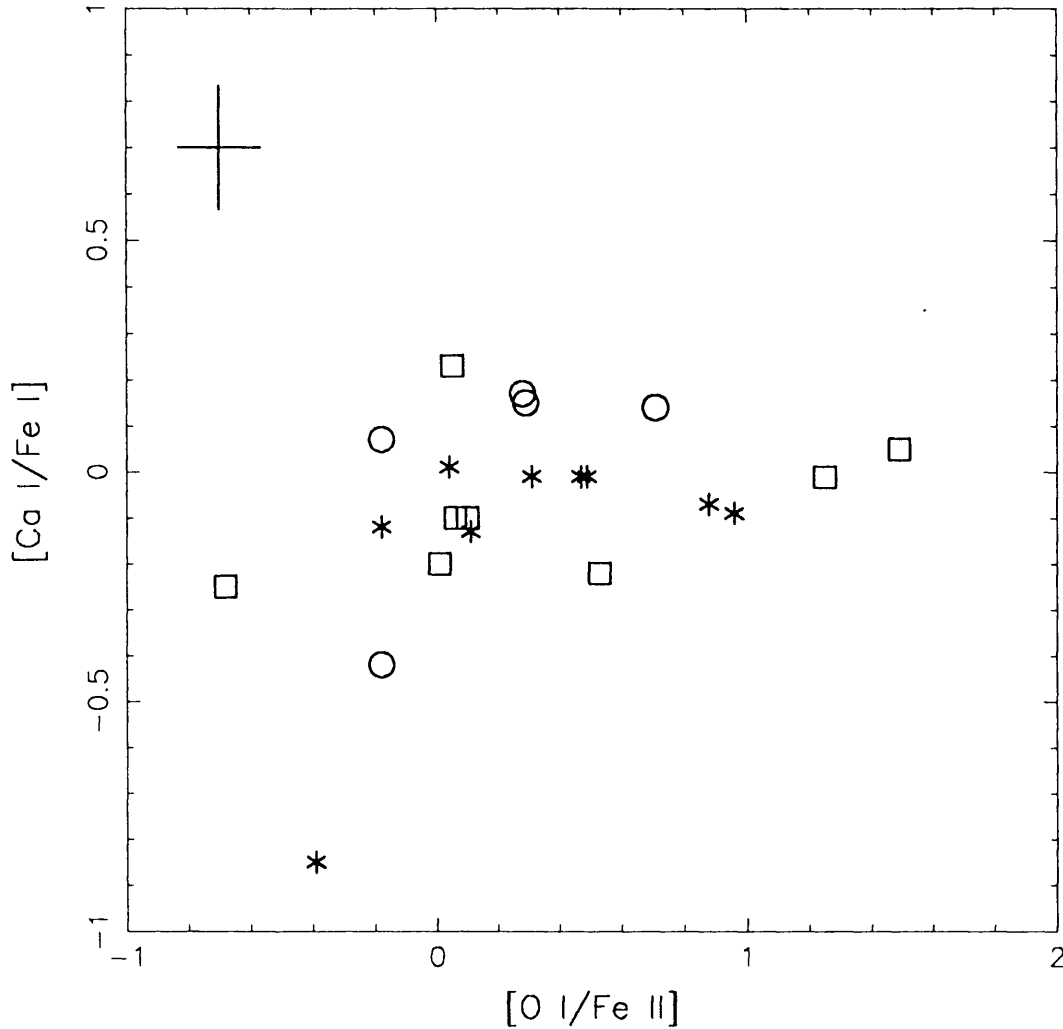
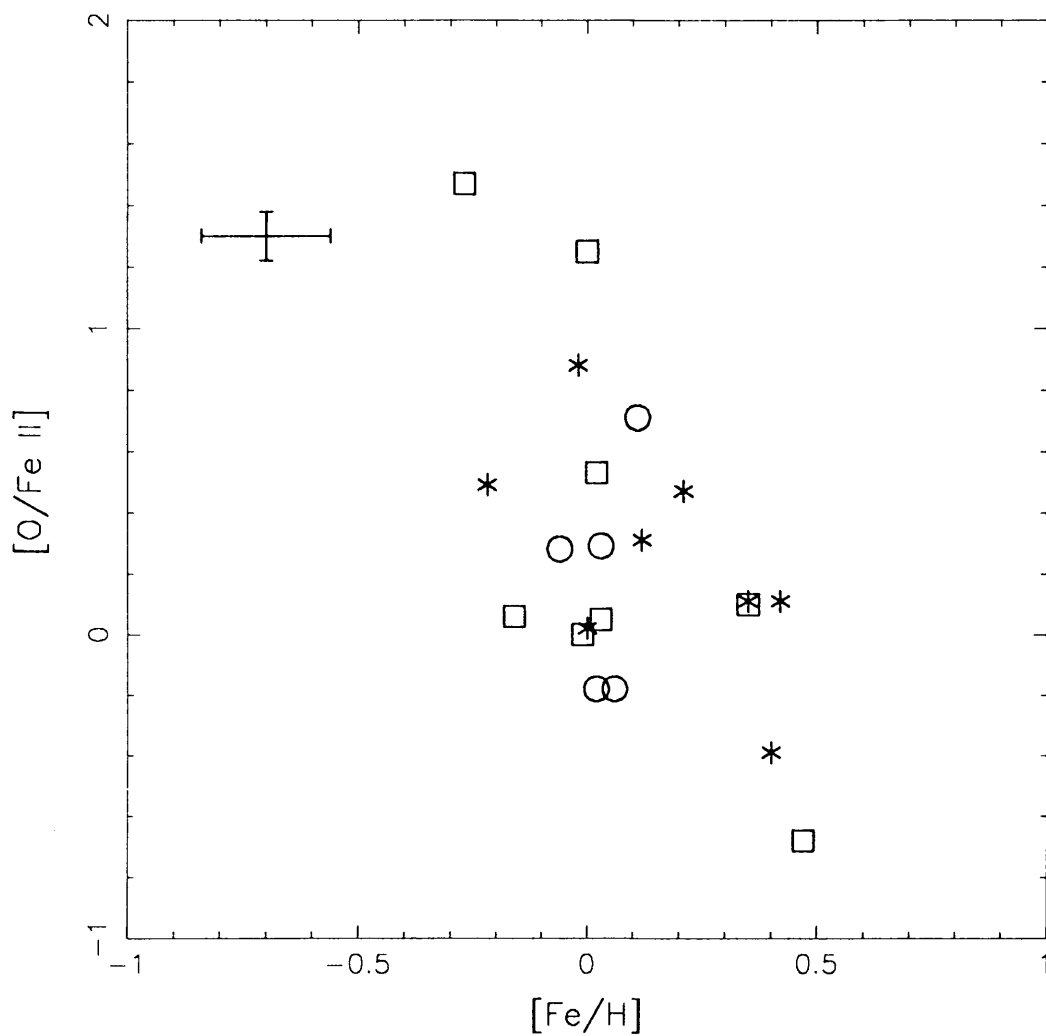


Figura 6.7

Dependencia del triplete de oxígeno O I $\lambda 7773 \text{ \AA}$ con la luminosidad. En el Panel superior se muestra la relación entre la abundancia de O I y el indicador de gravedad $[\text{Fe I}/\text{Fe II}]$. En la parte superior izquierda se muestra una barra de error promedio. Como comparación, en el Panel inferior se relaciona la anchura equivalente con el valor de gravedad calculado a partir de la calibración de MD85. En ambos casos, la relación con la luminosidad se muestra claramente.

**Figura 6.8**

Relación entre la abundancias de oxígeno y calcio respecto al hierro. se observa que los valores de $[O/Fe]$ presentan una gran dispersión para un conjunto de valores de $[Ca/Fe]$ cercanos a la metalicidad solar (± 0.2 dex.). Los cuadrados representan estrellas *no variables*, los asteriscos, estrellas δ Scuti de *baja amplitud*, y los círculos, estrellas δ Scuti de *gran amplitud*. En la parte superior derecha se muestran unas barras de error "promedio" para todas las observaciones.

**Figura 6.9**

Relación entre la abundancia de hierro, derivada a partir de las líneas de Fe I y el cociente $[\text{O I}/\text{Fe II}]$. A semejanza de lo mostrado en la Figura anterior, a un rango pequeño de abundancias de $[\text{Fe}/\text{H}]$ le corresponden valores de $[\text{O I}/\text{H}]$ con una gran dispersión. El criterio de símbolos ha sido el mismo que en 3.8.

Capítulo 7

Conclusiones

Se han analizado los espectros de 68 estrellas δ *Scuti* y de 43 estrellas *no variables* de tipos espectrales A y F obtenidos en diferentes campañas a lo largo de 4 años de observación (1990-1994) en dos observatorios diferentes (La Palma y McDonald). Los espectrógrafos utilizados en La Palma son de *rendija plana* mientras que el usado en McDonald es de tipo *echelle*. Los procedimientos de reducción propios de cada instrumento se explican en el Capítulo II. Los espectros de La Palma presentan una menor resolución que los de McDonald (0.37 Å/pixel a $H\beta$ $\lambda 4682$ Å y 0.06 Å/pixel a $H\alpha$ $\lambda 6562$ Å, respectivamente) pero una mejor *relación señal-ruido* (S/R \approx 140–160 y S/R \approx 80–100, respectivamente)

Tras los primeros estudios, se observó que la resolución de los espectros de La Palma no era suficiente para realizar un análisis detallado de abundancias, una de las partes más interesantes de este trabajo. Dos fueron las principales fuentes de ensanchamiento. En primer lugar, el perfil instrumental, que contribuía por igual para todos los espectros y, en segundo lugar, el perfil de rotación, más importante a velocidades altas. Estos efectos fueron mucho menores en los espectros de McDonald ya que además de ser la resolución 6 veces mayor, correspondían solamente a estrellas con bajas velocidades de rotación.

En un intento de solucionar o, al menos, minimizar este problema, se comenzó un estudio de distintas técnicas de deconvolución aplicadas a la espectroscopía. Se consideraron en primer lugar los métodos tradicionales (Van Cittert, 1930) con la idea de entender la naturaleza de los algoritmos de deconvolución, realizando posteriormente un análisis más detallado de los métodos actuales (Jansson, 1984). Se

realizaron diferentes pruebas sobre espectros sintéticos con idea de encontrar la función y el factor de relajación óptimos en nuestro caso. Se demostró igualmente que la efectividad de los algoritmos venía condicionada por la forma del perfil de ensanchamiento, por la anchura a media altura del mismo y por la *relación señal-ruido* del espectro. Aun cuando estas técnicas de deconvolución no fueron finalmente utilizadas al realizar posteriormente observaciones en McDonald con una resolución 6 veces mejor, quedó demostrado que dichas técnicas de deconvolución son perfectamente utilizables en espectros con una buena *relación señal-ruido* y con una moderada resolución como corresponde a las observaciones de La Palma.

En los siguientes capítulos se calcularon valores de rotación, temperaturas efectivas y metalicidades para las estrellas observadas. En todos ellos se siguió una línea de investigación semejante, consistente en analizar diversos métodos encontrados en la bibliografía, estudiar su aplicabilidad a nuestro caso concreto, seleccionar el método más adecuado y comparar los resultados obtenidos con valores procedentes ya publicados.

Se seleccionaron tres métodos para el cálculo de las velocidades de rotación: Sletteback (1975), Tonry y Davis (1979) y Gray (1992f). Se escogió éste último ya que es el único que no necesita una calibración con un conjunto de velocidades previamente conocidas. Igualmente, en el capítulo de temperaturas, tras una descripción de los distintos métodos, se analizaron los resultados obtenidos a partir de calibraciones fotométricas y a partir de líneas de la serie de Balmer ($H\alpha$ y $H\beta$). Estas comparaciones permitieron descubrir errores sistemáticos en alguna de las calibraciones fotométricas utilizadas y aconsejar cual de ellas proporcionaba valores más realistas. Igualmente, nuestro análisis sirvió para reforzar la hipótesis, planteada por diversos autores en los últimos años, de la existencia de un error sistemático en la calibración de Lester, Gray y Kurucz (1986).

La parte final del trabajo se dedicó al cálculo de abundancias. Previo a la determinación de las mismas y debido a la falta de un conjunto extenso, preciso y homogéneo de valores del parámetro *fuerza del oscilador*, se desarrolló un método para su cálculo basado en el Atlas fotométrico de Procyon (Griffin y Griffin, 1979). Una vez conocidos los valores $\log gf$, se llevó a cabo el cálculo de abundancias de hierro, calcio y oxígeno. Al igual que ocurrió en el capítulo de temperaturas, los valores calculados de abundancias sirvieron para estudiar dos calibraciones fo-

tométricas (Berthet, 1990b; Smalley, 1993), encontrando que la segunda de ellas proporcionaba valores más precisos. Especialmente interesante fue la determinación de las abundancias de oxígeno: mientras que los valores de abundancia de hierro y calcio eran similares a los de la bibliografía, los valores obtenidos de oxígeno mostraban una gran dispersión. Se encontraron dos causas para tal dispersión: por un lado, la importante dependencia con la luminosidad del triplete de oxígeno estudiado, por otro lado, la posible influencia de efectos NLTE sobre dicho triplete. Finalmente, se indicó un método para obtener valores de abundancias de O I realistas.

El objetivo de este trabajo, tras establecer un conjunto homogéneo y extenso de parámetros físicos de estrellas δ Scuti, consistió en analizarlos y obtener relaciones entre ellos y los parámetros de pulsación de una estrella. En las Figuras 7.1 a 7.4 se muestran las relaciones existentes entre la amplitud de la pulsación con la velocidad de rotación proyectada ($v \sin i$), la temperatura, la gravedad y la abundancia metálica respectivamente. De todas ellas, la relación más clara se muestra en la Figura 7.1 y es la base de una posible explicación de uno de los principales problemas relacionados con las estrellas δ Scuti, como es el gran rango de amplitudes de pulsación observado: desde $0.^m8$ hasta menos de $0.^m01$. Para explicar este fenómeno, se han planteado distintos mecanismos. Dziembowski (1980) sugirió que, en las estrellas con amplitudes pequeñas, la energía de pulsación se reparte entre los diversos modos mediante lo que el autor denomina *acoplamiento no lineal de modos*. Este es un argumento interesante puesto que las estrellas con grandes amplitudes solamente pulsan en uno o dos modos radiales, por lo que el mecanismo de acoplamiento no sería posible. Del mismo modo, la mayoría de las estrellas de baja amplitud se caracterizan por presentar un complicado espectro frecuencial que, en ocasiones, incluye modos de pulsación no radiales. No obstante, este mecanismo no explica la existencia de estrellas δ Scuti que presentan pulsación radial y bajas amplitudes (p.e., 28 And, 44 Tau y ρ Pup (Breger, 1982)).

Un segundo mecanismo se basa en la relación observada en la Figura 7.1 entre las amplitudes y las velocidades de rotación calculadas: se deduce que estrellas con grandes amplitudes presentan bajas velocidades de rotación. El recíproco no es cierto puesto que es posible encontrar estrellas con bajas amplitudes tanto con bajas como con altas velocidades de rotación. Son dos las fuentes de error a tener en cuenta en la Figura 7.1. Por un lado, los errores asociados al cálculo de $v \sin i$ y por

otro lado el criterio de elección del valor de la amplitud, según se defina ésta como la correspondiente al modo de pulsación más excitado o como el valor medio de la amplitud de la curva de luz. Con círculos señalamos aquellas velocidades calculadas a partir de espectros de McDonald. Puesto que el límite inferior de $v \sin i$ en los espectros de La Palma se encuentra, aproximadamente, en $v \sin i = 30 \text{ km s}^{-1}$, la Figura 7.1 parece indicar que la dispersión en velocidades para estrellas de alta amplitud (definiendo *alta amplitud* como $\Delta V \geq 0.01$) puede reducirse, limitándose el intervalo de velocidades para estas estrellas al comprendido entre 0 y 25 km s^{-1} .

Danziger y Faber (1972) ya postularon la idea de que las estrellas de *alta amplitud* presentaban velocidades de rotación bajas. No obstante, el reducido número de datos con los que trabajaban les impidió llegar a ninguna conclusión. Breger (1982) estudió la posibilidad de que las estrellas con bajas amplitudes y bajas velocidades de rotación fueran tales que su eje de rotación fuera perpendicular a la línea de visión y, por tanto, tuvieran un valor pequeño de $v \sin i$ aun cuando v fuera grande. No obstante, este autor rechazó dicha hipótesis al no ser capaz de reproducir la distribución observada de las estrellas de *baja amplitud* mediante distribuciones aleatorias de los ejes de rotación en el espacio.

McNamara (1985) planteó otra hipótesis para explicar la naturaleza de las estrellas de *alta amplitud*. Según este autor, podrían representar estados evolucionados de las estrellas A_p : las estrellas A_p poseen velocidades de rotación mucho menores que las estrellas A "normales" de la misma temperatura. A lo largo de su evolución el campo magnético puede ejercer un efecto de frenado, reduciendo la velocidad de rotación. Este efecto de frenado debilita igualmente el campo magnético de tal forma que cuando la estrella se convierte en una δ Scuti de *gran amplitud*, las características magnéticas de la estrella han desaparecido y su velocidad de rotación ha quedado reducida a valores próximos a cero.

De la Figura 7.1 se deduce que el límite natural entre las estrellas δ Scuti de *alta y baja amplitud* se sitúa en $0^m.1$. No obstante, esta Figura encierra un interrogante: ¿cómo es posible que las estrellas de *gran amplitud* aparezcan precisamente a velocidades de rotación bajas donde juegan un papel importante los mecanismos de difusión, que inhiben la pulsación? Una posible explicación podría radicar en el fenómeno *blue straggler*: puesto que se supone que las estrellas variables de Población II de *gran amplitud* (*SX Phe*) son *blue stragglers variables*, se podría pen-

sar, del mismo modo, que las estrellas de Población I de *gran amplitud* pertenecerían al mismo grupo. Puesto que la hipótesis de transferencia de masa hasta llegar a un estado final de coalescencia es, quizás, la más aceptada para explicar la naturaleza de las *blue stragglers*, podemos suponer, en principio, que este fenómeno debe producirse indistintamente tanto en estrellas de Población I como de Población II. Igualmente, el proceso de coalescencia podría dar lugar, por un lado, a una disminución de la velocidad de rotación de la estrella resultante y, por otro lado, a una mezcla en el material estelar que impediría la aparición de difusión.

En el resto de las Figuras citadas (7.2 a 7.4), la relación entre la amplitud de pulsación y los parámetros físicos citados no se muestra tan claramente. En la Figura 7.4 se representan las abundancias de $[Ca/Fe]$ frente a la amplitud de pulsación. Esta es una relación especialmente interesante ya que como las estrellas A_m se caracterizan por presentar sobreabundancias de hierro e infraabundancias de calcio, el cociente $[Ca/Fe]$ será un indicador óptimo del fenómeno de difusión. Un ejemplo claro lo constituye V775 *Tau*, estrella δ Scuti de baja amplitud (0.01 mag.) y catalogada como A_m por diversos autores (Guthrie, 1987; Burkhart *et al.*, 1991). HR 723, por su parte, se encuentra catalogada como estrella A_m en SIMBAD, aunque las abundancias calculadas ($[Fe/H] = 0.47 \pm 0.22$ y $[Ca/H] = 0.22 \pm 0.18$) no concuerdan con dicha clasificación. Igualmente, HR 1135 presenta un valor $[Ca/Fe]$ menor que el que le correspondería a una estrella con abundancia solar. En principio, se podría pensar en catalogar a esta estrella como δ *Delphini* pero las abundancias calculadas ($[Fe/H] = 0.02 \pm 0.19$ y $[Ca/H] = -0.20 \pm 0.13$) no se corresponden con la definición típica de una estrella δ *Delphini* (sobreabundancia de hierro y valores normales de calcio). Un caso peculiar lo constituye la estrella V1162 *Ori* catalogada como δ *Scuti* de gran amplitud y que presenta un valor de $[Ca/Fe] = -0.42$. En un primer momento se intentó comparar este resultado con anteriores determinaciones publicadas en la bibliografía, no encontrándose ninguna referencia sobre análisis de abundancia para esta estrella. Si bien el conjunto de líneas para la determinación de abundancias es reducido tanto para el hierro como para el calcio, en ambos casos se han encontrado líneas de perfiles bien definidos (Fe I $\lambda 6411$ Å y Ca I $\lambda 6439$ Å) que indican que los valores de $[Fe/H]$ y $[Ca/H]$ son adecuados. Del mismo modo, las 6 líneas de Fe I seleccionadas son suficientes para proporcionar un valor preciso de la microturbulencia. De hecho, el valor de $[Fe/H] = 0.06 \pm 0.020$ es muy similar

a los calculados a partir de las calibraciones de Berthet (1990b) y Smalley (1993), aunque la variación de este índice a lo largo del ciclo de pulsación de las estrellas SX *Phe* y δ *Scuti* de gran amplitud (Rodríguez *et al.*, 1991) desaconsejan el uso de estas calibraciones para *V1162Ori* ($\Delta V = 0.18$ mag). Esta estrella fue observada en dos ocasiones más en las campañas de McDonald. No obstante, la mala calidad de las mismas imposibilitaron la realización de cualquier análisis. Es necesario, por tanto, nuevas observaciones de *V1162Ori* para determinar con exactitud la composición química de esta estrella.

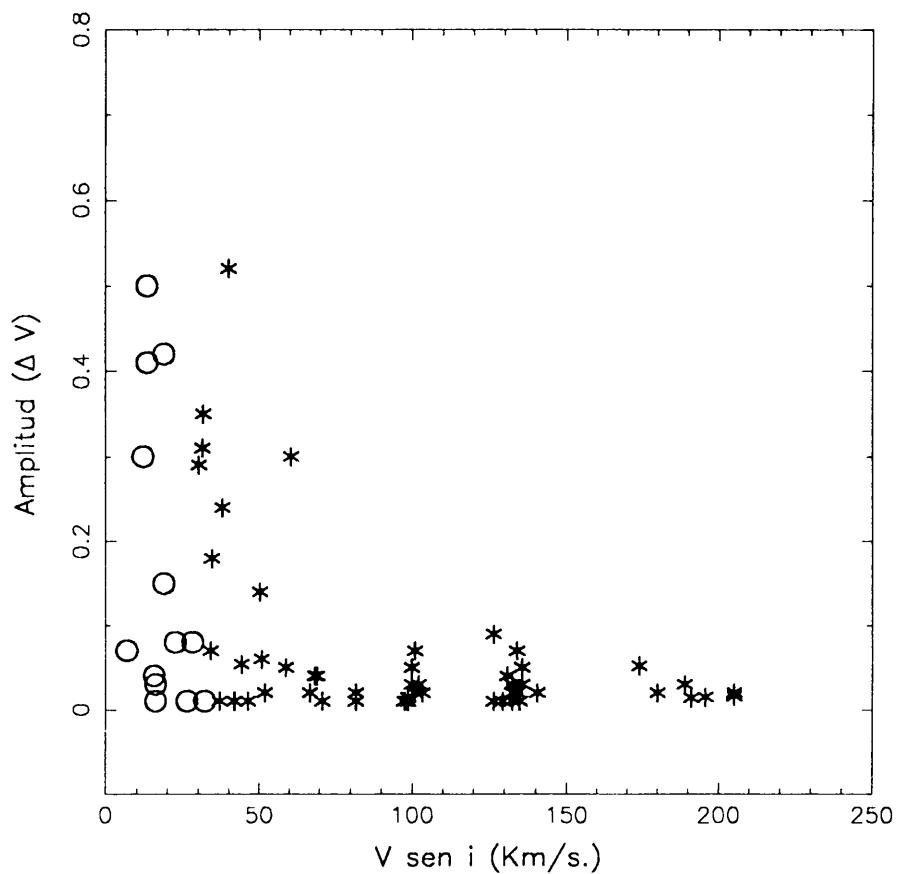
En la Figura 7.3 se muestra la relación entre el valor de la gravedad para los diferentes tipos de estrellas (*no variables*, δ *Scuti* de baja amplitud y δ *Scuti* de gran amplitud) con la amplitud de la pulsación. Dos han sido los indicadores de gravedad considerados: $[\text{Fe I}/\text{Fe II}]$ y $\log g$ determinado mediante la calibración de MD85. En ambos casos se observa que no existe una relación claramente definida.

Esta Figura, junto con la 7.2, no muestra la tendencia señalada por algunos autores (p.e., Breger, 1982), según los cuales las estrellas de *gran amplitud* tienden a ocupar en el *diagrama H-R* posiciones con menores valores de gravedad y T_{eff} que las ocupadas por las estrellas de *baja amplitud*. No obstante, es necesario realizar un análisis estadístico más profundo para poder comparar las distribuciones de ambas muestras y poder confrontar dicha hipótesis.

Finalmente, podemos distinguir dos clases de proyectos a realizar como continuación natural de este trabajo. Por un lado, aquellos que se refieren a la determinación de los parámetros físicos y, por otro lado, aquéllos en los que se relacionan éstos con los parámetros de pulsación. Referente a las técnicas de deconvolución, sería aconsejable el estudio de nuevos algoritmos así como el uso de distintos tipos de filtros en los ya estudiados con vistas a aplicarlos a espectros con una *relación señal-ruido* menor que la estimada como límite en el Capítulo III. La generalización, para el caso de macroturbulencia, del método de Gray (1992f) en el cálculo de rotación y que ya fue utilizado con resultados óptimos en Gray (1975) sería un estudio interesante. Igualmente, sería interesante confrontar las temperaturas de la reciente calibración de Balona (1994) con nuestros resultados con idea de reforzar la hipótesis de existencia de errores sistemáticos en la calibración de Lester, Gray y Kurucz (1986). Del mismo modo, la utilización de modelos NLTE o factores de corrección NLTE \Rightarrow LTE (p.e., Faraggiana *et al.*, 1988) para el cálculo de abundancias de O

I es totalmente necesario para poder estudiar, por ejemplo, el comportamiento de dicho elemento frente a fenómenos tales como la difusión.

Por otro lado, sería necesario realizar un cálculo preciso de valores de gravedad, bien utilizando el indicador [Fe I/Fe II] mencionado en el Capítulo VI o bien otros indicadores como el triplete de O I $\lambda 7773 \text{ \AA}$ para poder determinar las masas de las estrellas estudiadas, en especial las de *gran amplitud* de Población I y poder confrontar la teoría de la naturaleza *blue straggler* de estas estrellas con las observaciones. De igual manera y tal como se indicó anteriormente, es necesario un análisis estadístico en profundidad para poder estudiar la distribución, en función de la temperatura y la gravedad, de las muestras de los distintos tipos de estrellas considerados. Actualmente, se dispone de nuevas observaciones, la mayoría estrellas *δ Scuti de gran amplitud*, obtenidas en una nueva campaña llevada a cabo en el Observatorio de McDonald en el mes de Junio de 1994. Igualmente, otra campaña está prevista para el Invierno de 1994-1995. Las nuevas observaciones y sus resultados servirán para clarificar las ideas apuntadas en este trabajo.

**Figura 7.1**

Relación entre la velocidad de rotación proyectada ($v \sin i$) y la amplitud de pulsación. Los asteriscos representan las velocidades calculadas utilizando los espectros de La Palma, mientras que los círculos indican las velocidades calculadas utilizando los de McDonald.

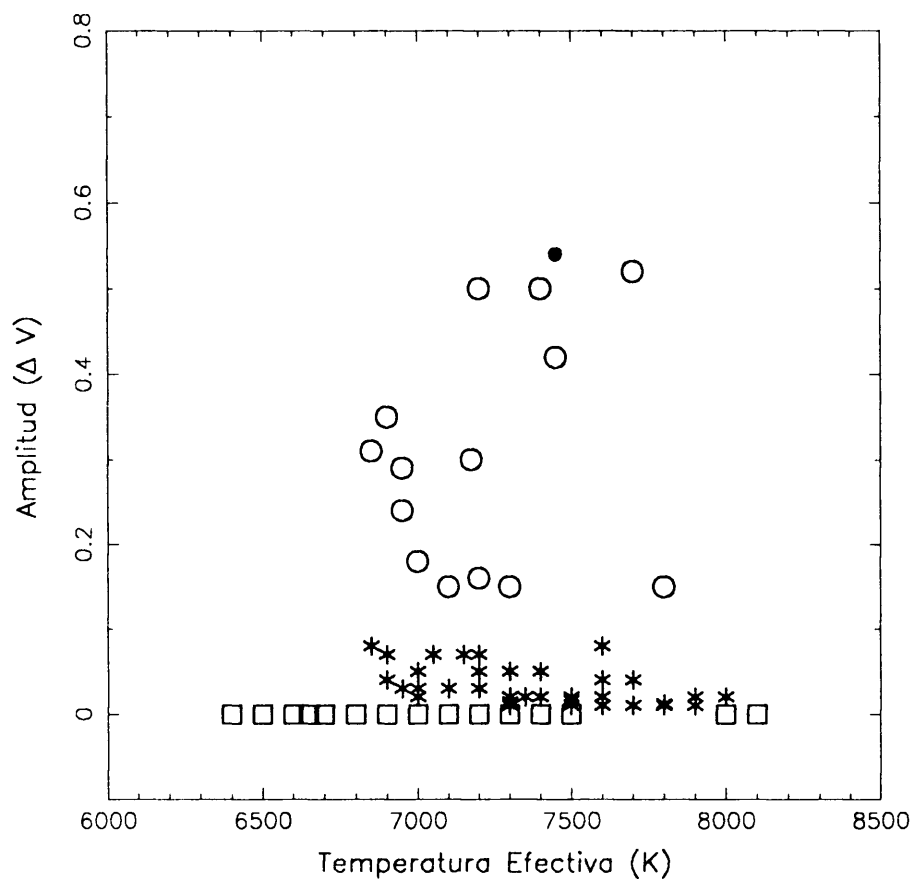
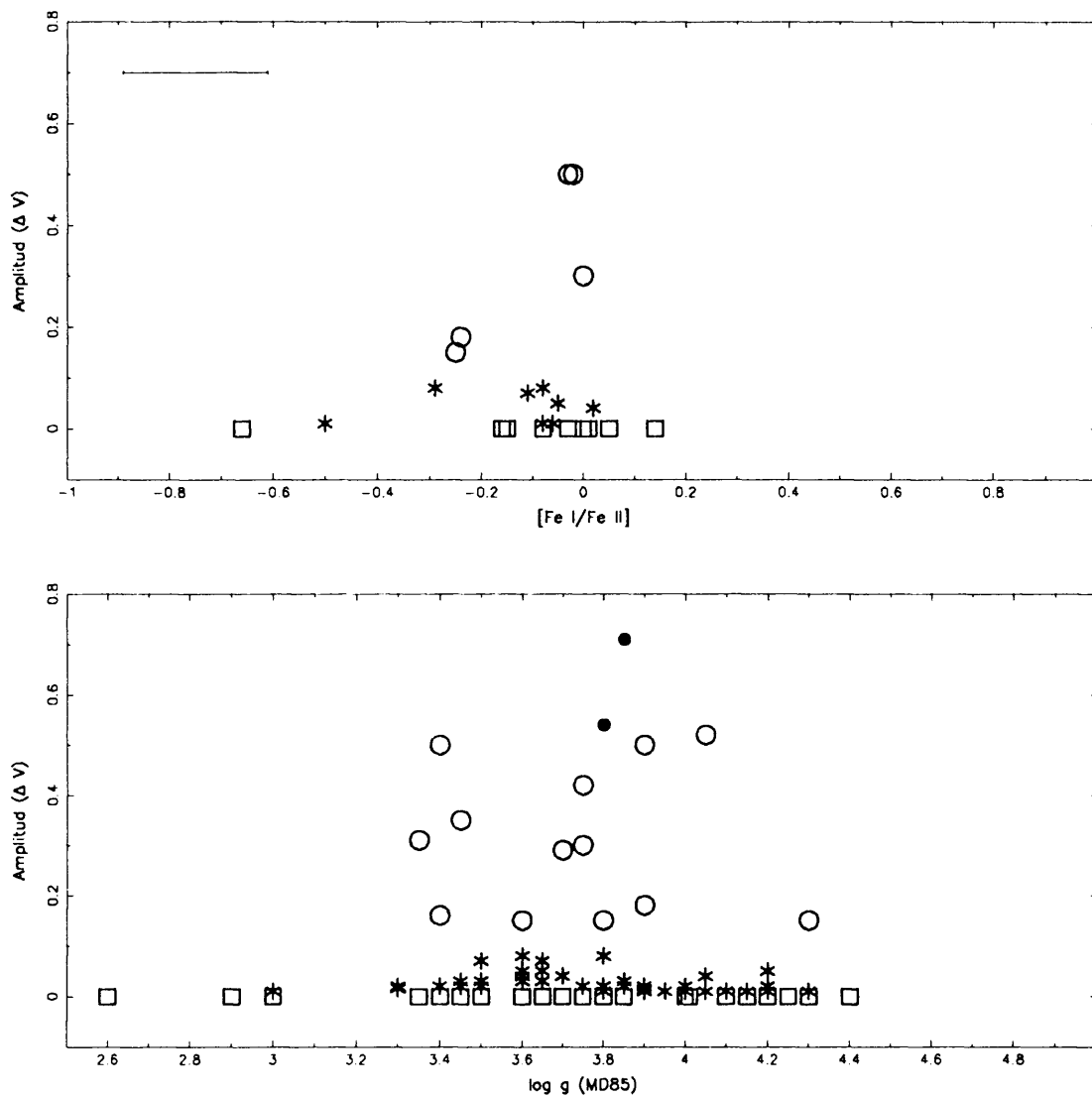


Figura 7.2

Relación entre la temperatura efectiva calculada utilizando $H\beta$ y la amplitud de pulsación para las diferentes estrellas observadas. Los cuadrados representan las estrellas *no variables*, los asteriscos las estrellas δ Scuti de *baja amplitud*, los círculos las *estrellas δ Scuti de gran amplitud* y el punto negro una estrella *SX Phe*.

**Figura 7.3**

Relación entre el valor de la gravedad y la amplitud de pulsación para el conjunto de estrellas observado. En el Panel superior se ha utilizado como indicador de gravedad el cociente [Fe I/Fe II] calculado en los espectros de McDonald. En la parte superior izquierda se muestra una barra de error promedio. Como comparación, en el Panel inferior se muestran los valores de gravedad para el conjunto de estrellas observado (La Palma y McDonald) utilizando la calibración de Moon and Dworetzki (1985), (MD85). El criterio de símbolos es el mismo que el utilizado en la Figura 7.2.

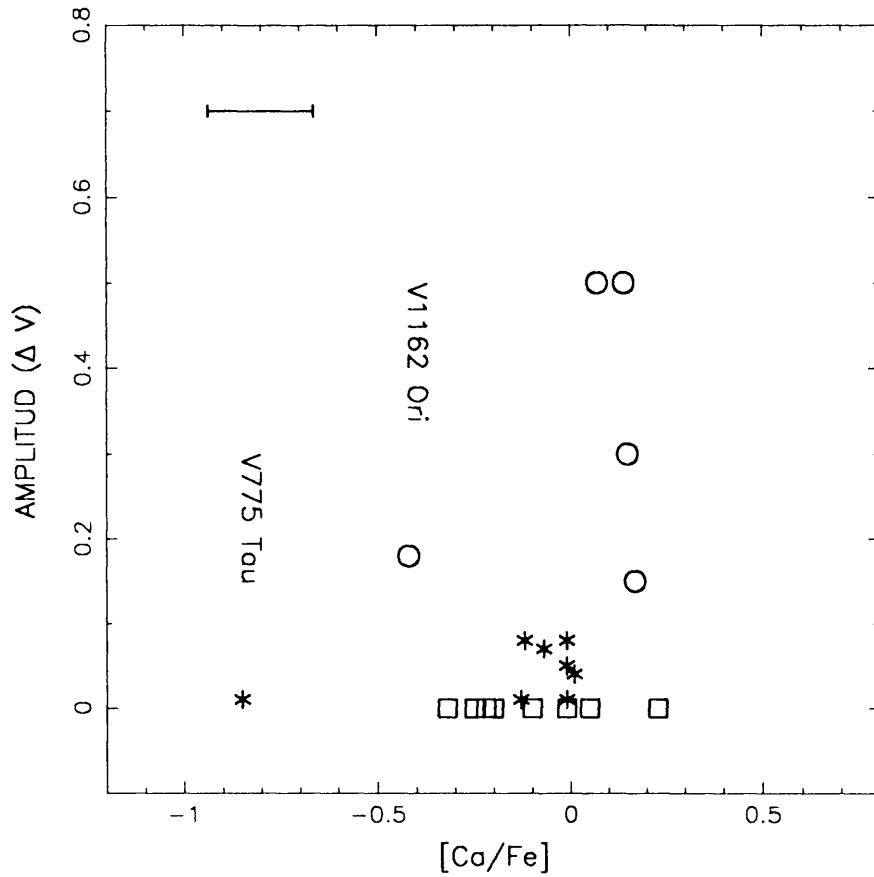


Figura 7.4

Relación entre la abundancia de [Ca/Fe] y la amplitud de pulsación. Los cuadrados representan las estrellas *no variables*, los asteriscos las estrellas δ Scuti de *baja amplitud* y los círculos las estrellas δ Scuti de *gran amplitud*. En la parte superior izquierda se muestra una barra de error promedio.

Capítulo 8

Apéndice

8.1 Transformadas de Fourier

Las transformadas lineales, tales como las transformadas de Fourier o de Laplace, se utilizan normalmente en la resolución de sistemas lineales. Mediante la utilización de las transformadas, el planteamiento del problema se modifica de tal forma que puede resolverse.

El análisis de Fourier fue desarrollado primeramente para la resolución de la ecuación de transferencia de calor. Fourier demostró que toda función f que cumpla las *condiciones de Dirichlet* se puede expresar como suma de funciones *senos* y *cosenos*. Las *condiciones de Dirichlet* exigen que la función se encuentre acotada, que sea periódica en $(-P/2, P/2)$ y que presente un número finito de discontinuidades y de valores extremos en dicho intervalo. Por tanto, según lo anterior, si la función verifica dichas condiciones se puede expresar como

$$f(t) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} a_n \cos(2\pi nt/P) + \sum_1^{\infty} b_n \sin(2\pi nt/P) \quad (8.1)$$

donde

$$a_n = 2/P \int_{P/2}^{P/2} f(t) \cos(2\pi nt/P) dt \quad (8.2)$$

$$b_n = 2/P \int_{P/2}^{P/2} f(t) \sin(2\pi nt/P) dt \quad (8.3)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

Utilizando una representación en función de coeficientes complejos, f quedaría como

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp[i2\pi nt/P] \quad (8.4)$$

donde

$$\begin{aligned} c_n &= 0.5(a_n + ib_n) \\ c_{-n} &= 0.5(a_n - ib_n) \\ c_0 &= a_0/2 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Sea una función F definida como

$$\begin{aligned} F &= c_n; n \in Z \\ F &= 0; \text{ para el resto de valores} \end{aligned} \quad (8.6)$$

La función F valdrá $2\pi/P$ para $n = 1$, $4\pi/P$ para $n = 2, \dots$. Si $P \rightarrow \infty$, los valores en los que F no se anula tienden a estar cada vez más próximos y, en el límite, F será una función continua y vendrá definida por la siguiente expresión

$$F = \int_{P/2}^{P/2} f(t) \exp[i2\pi nt/P] dt \quad (8.7)$$

recibiendo el nombre de *transformada de Fourier de la función f* y representando el valor de los coeficientes complejos de la serie de Fourier cuando $P \rightarrow \infty$. En otras palabras, si una función f puede expresarse como serie de *senos* y *cosenos* con distintas frecuencias, amplitudes y fases, la *transformada de Fourier* es la función que representa la amplitud y la fase de cada frecuencia.

La ecuación integral que representa la *transformada de Fourier* puede resolverse bien analíticamente o bien utilizando algoritmos numéricos. Aunque existen numerosas funciones cuya transformadas han sido calculadas explícitamente (p.e., la transformada del perfil de rotación (Carrol, 1933a, b)), en la mayoría de los casos es necesario hacer uso de métodos numéricos. Se puede demostrar que el número de operaciones a realizar es proporcional al número de puntos de la función f . Así, por ejemplo, el número de sumas a realizar coincide con el número de puntos, mientras

que el número de multiplicaciones es igual al cuadrado de dicho número. Cooley y Tukey desarrollaron un algoritmo que calcula *transformadas de Fourier* minimizando el número de operaciones a realizar. Este algoritmo se conoce con el nombre de *transformada de Fourier rápida*. De manera resumida, el algoritmo se basa en dividir la función f en otras funciones más pequeñas. Así, por ejemplo, una función con 16 puntos necesitaría de 256 multiplicaciones, mientras que si esta función se separa en dos funciones $f = f_1 + f_2$ de 8 puntos cada una, el número de multiplicaciones será de $64+64 = 128$. La división más pequeña se conseguirá tomando funciones con dos puntos solamente. Bell (1972) estimó que el cociente entre el número de operaciones necesarias utilizando o no la *transformada de Fourier rápida* es $0.46N/\ln N$ donde N es el número de puntos de la función cuya transformada se quiere calcular.

Son dos las condiciones necesarias para poder aplicar la *transformada de Fourier rápida*. Por un lado, el número de puntos debe ser una potencia de dos, para poder ir realizando las subdivisiones anteriormente mencionadas. Por otro lado, los datos deben estar equiespaciados. Ninguna de estas dos condiciones suponen una restricción en nuestro caso. Por un lado, el número de puntos que definen el perfil de línea se ha aumentado hasta una potencia de dos (512 puntos para los espectros de McDonald y 128 para los de La Palma) sin más que añadir valores del continuo. Añadir valores es, por otro lado, aconsejable, tal y como se vio en la Sección 4.2 para evitar problemas de *aliasing*. Por otro lado, los datos se encuentran equiespaciados, siendo la distancia entre ellos igual a la resolución espectral ($\approx . 0.06 \text{ \AA}/\text{píxel}$ en los espectros de McDonald y $0.37 \text{ \AA}/\text{píxel}$ en los de La Palma).

8.2 Ajuste de funciones

Sea $y(x, a)$ una función donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ son las variables independientes y $a \in A \subset R^p$. Si A no es el espacio completo R^p , el problema se denomina *constreñido*.

Si se han realizado una serie de observaciones de un fenómeno determinado $(y^{(i)}, x^{(i)})$ con $i = 1, \dots, n$, es posible calcular el valor de los parámetros del modelo $y(x, a)$ que mejor se corresponda con las observaciones. Puesto que las observaciones llevan asociadas un cierto error, es imposible encontrar el valor exacto de los parámetros sino solamente calcular una estimación de los mismos. Si los errores de las observaciones presentan una distribución gaussiana, la mejor estimación de los parámetros se consigue mediante un *ajuste por mínimos cuadrados* minimizando el valor de la función χ^2 la cual viene dada por

$$\chi^2(a) = \sum_i w^{(i)} [y^{(i)} - y(x^{(i)}, a)]^2 \quad (8.8)$$

Las cantidades

$$r^{(i)}(a) = \sqrt{\omega^{(i)}} [y^{(i)} - y(x^{(i)}, a)]^2 \quad (8.9)$$

se denominan *residuos* siendo $\omega^{(i)}$ es el peso estadístico de la observación i -ésima, el cual puede venir dado, por ejemplo, por el inverso de la varianza asociada a dicha observación.

Si $y(x, a)$ depende linealmente de cada parámetro a_j , el problema se denomina *regresión lineal*. No obstante, en el ajuste de funciones no existe dicha dependencia lineal. Para resolver este problema es necesario introducir los conceptos de *gradiente* y *matriz Hessiana* de la función $\chi^2(a)$, los cuales vienen dados por

$$g(a) = 2J(a)^T r(a) \quad (8.10)$$

y

$$H(a) = 2(J(a)^T J(a) + B(a)) \quad (8.11)$$

donde $r(a)$ es el vector de residuos

$$r(a) = (r^1(a), \dots, r^m(a)) \quad (8.12)$$

y $J(a)$ es la matriz Jacobiana de $r(a)$ dada por

$$J(a)_{i,j} = \partial r^{(i)} / \partial a_j \quad (8.13)$$

siendo $B(a)$

$$B(a) = \sum_i r^{(i)}(a) H_i(a) \quad (8.14)$$

con $H_i(a)$ la matriz Hessiana de $r^i(a)$

El método utilizado para la resolución del problema de mínimos cuadrados no lineal ha sido el denominado *método de Newton-Raphson* (Gill *et al.*, 1981; Gill y Murray, 1978). Este método se basa en que la condición necesaria para que la función $\chi^2(a)$ tenga un extremo es que sus derivadas parciales se anulen, esto es

$$\sum_i r^i \partial r^i / \partial a_j = 0 \quad (8.15)$$

para $j = 1, \dots, p$, o, de forma equivalente

$$J(a)^T r(a) = 0 \quad (8.16)$$

lo que lleva a un sistema de ecuaciones no-lineales que, numéricamente, se puede resolver utilizando el *método de Newton-Raphson* también conocido en el caso unidimensional como *método de las tangentes*. El desarrollo de Taylor limitado al primer orden para unos valores iniciales de los parámetros da lugar al siguiente sistema lineal

$$J(a^k)^T J(a^k) \Delta a^k = -J(a^k) r(a^k) \quad (8.17)$$

con el que se obtiene una corrección a los valores iniciales de la forma

$$a^{k+1} = a^k + \gamma \Delta a^k \quad (8.18)$$

siendo γ un factor de relajación. La elección del factor de relajación es crítico puesto que dos factores de relajación distintos pueden dar lugar a dos soluciones distintas o incluso uno puede converger y el otro no. La convergencia del proceso hacia la solución del problema de minimización no-lineal se ha demostrado en aquellos casos en que χ^2 sea localmente convexa.

En nuestro caso, el conjunto de observaciones (y^i, x^i) viene dado por la longitud de onda y la intensidad relativa de cada uno de los puntos que definen el perfil de la línea espectral estudiada. Como funciones a ajustar se han considerado un perfil gaussiano de parámetros (altura máxima, anchura a media altura y posición central) variables y una recta de valor constante $y = 1$ que define el nivel del continuo espectral.

Bibliografía

- [1] Abt, H.A., 1961, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **6**, 137.
- [2] Abt, H.A., 1965, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **11**, 429.
- [3] Abt, H.A., 1985, *Astrophys. J. Lett.*, **294**, L103.
- [4] Adelman, S.J., Philip, A.G.D., 1992, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **104**, 316.
- [5] Ahmad, J.A., 1981, *NASA IUE Newsletters*, **14**, 129.
- [6] Aizenman, M.L., Smeyers, P., Weigtert, A., 1977, *Astron. Astrophys.*, **58**, 41.
- [7] Allebach, J.P., 1981, *J. Opt. Soc. Am.*, **71**, 99.
- [8] Andersen, J., 1991, *Ann. Rev. of Astron. and Astrophys.*, **3**, 91.
- [9] Andreasen, G.K., Hejlesen, P.M., Petersen, J.O., 1983, *Astron. Astrophys.*, **121**, 241.
- [10] Andreason, G.K., 1983, *Astron. Astrophys.*, **121**, 241.
- [11] Andreason, G.K., 1983, *Astron. Astrophys.*, **121**, 250.
- [12] Antonello, E., Guerrero, G., Mantegazza, L., Scardia, M., 1985, *Astron. Astrophys.*, **146**, 11.
- [13] Antonello, E., Pastori, L., 1981, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **93**, 237.
- [14] Arny, T., Weissman, P., 1973, *Astron. J.*, **78**, 309.
- [15] Baglin, A., 1972, *Astron. Astrophys.*, **19**, 45.
- [16] Balona, L.A., 1984, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **211**, 973.
- [17] Balona, L.A., 1986, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **219**, 111.

- [18] Balona, L.A., 1994, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **268**, 119.
- [19] Balona, L.A., Shobbrook, R.R., 1984, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **211**, 375.
- [20] Balona, L.A., Stobie, R.S., 1979, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **189**, 649.
- [21] Balona, L.A., Stobie, R.S., 1980, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **190**, 931
- [22] Bard, A., Kock, A., Kock, M., 1991, *Astron. Astrophys.*, **248**, 315.
- [23] Barker, P.K., 1984, *Astron. J.*, **89**, 899.
- [24] Barlow, R.J., 1988, *Statistics*, Wiley & Sons.
- [25] Bascheck, B., Reimers, D., 1969, *Astron. Astrophys.*, **2**, 240.
- [26] Bascheck, B., Scholz, M., Sedlmayr, E., 1977, *Astron. Astrophys.*, **55**, 375.
- [27] Batten, A.H., 1967, *Ann. Rev. of Astron. and Astrophys.*, **5**, 25.
- [28] Beekmans, F., 1977, *Astron. Astrophys.*, **60**, 1.
- [29] Bell, R.J., 1972, *Introductory Fourier Transform Spectroscopy*. Academic. New York.
- [30] Bell, R.A., Dreiling, L.A., 1981, *Astrophys. J.*, **248**, 1031.
- [31] Bell, R.A., Oke, J.B., 1986, *Astrophys. J.*, **307**, 253.
- [32] Belmonte, J.A., 1989, *Tesis Doctoral*, Univ. de La Laguna.
- [33] Benz, W., Hills, J.G., 1987, *Astrophys. J.*, **323**, 614.
- [34] Bernacca, P.L., Perinotto, M., 1974, *Astron. Astrophys.*, **33**, 443.
- [35] Berrington, K.A., Burke, P.G., Butler, K., et al., 1987, *J. Phys.B:At. Mol. Phys.*, **20**, 6379.
- [36] Berthet, S., 1990a, *Astron. Astrophys.*, **227**, 156.
- [37] Berthet, S., 1990b, *Astron. Astrophys.*, **236**, 440.
- [38] Berthet, S., 1991, *Astron. Astrophys.*, **251**, 171.
- [39] Berthet, S., 1992, *Astron. Astrophys.*, **253**, 451.

-
- [40] Bessell, M.S., 1969, *Astrophys. Journ. Suppl.*, **18**, 195.
- [41] Biemont, E., Hibbert, A., Godefroid, M., Vaeck, N., Fawcett, B.C., 1991, *Astrophys. J.*, **375**, 818.
- [42] Blackwell, D.E., Booth, A.J., Menon, L.R., Petford, A.D., Smith, G., 1983, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **204**, 141.
- [43] Blackwell, D.E., Booth, A.J., Menon, L.R., Petford, A.D., 1986, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **220**, 289.
- [44] Blackwell, D.E., Booth, A.J., Petford, A.D., 1984, *Astron. Astrophys.*, **132**, 236.
- [45] Blackwell, D.E., Collins, B.S., 1972, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **157**, 255.
- [46] Blackwell, D.E., Ibbetson, P.A., Petford, A.D., 1975, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **171**, 195.
- [47] Blackwell, D.E., Ibbetson, P.A., Petford, A.D., Shallis, M.J., 1979, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **186**, 633.
- [48] Blackwell, D.E., Ibbetson, P.A., Petford, A.D., Willis, R.B., 1976, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **177**, 219.
- [49] Blackwell, D.E., Menon, S.L.R., Petford, A.D., 1984, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **207**, 533.
- [50] Blackwell, D.E., Petford, A.D., Shallis, M.J., 1979, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **186**, 657.
- [51] Blackwell, D.E., Petford, A.D., Simmons, G.J., 1982, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **210**, 595.
- [52] Blackwell, D.E., Shallis, M.J., 1977, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **180**, 177.
- [53] Blackwell, D.E., Shallis, M.J., Simmons, G.J., 1980, *Astron. Astrophys.*, **81**, 340.
- [54] Blackwell, D.E., Shallis, M.J., Simmons, G.J., 1982, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **199**, 33.
- [55] Bless, R.C., Code, A.D., Fairchild, E.T., 1976, *Astrophys. J.*, **203**.
- [56] Bodenheimer, P., 1978, *Astrophys. J.*, **244**, 488.

- [57] Boesgaard, A.M., 1987, *Astrophys. J.*, **321**, 967.
- [58] Boesgaard, A.M., Budge, K.G., Burck, E.E., 1988, *Astrophys. J.*, **325**, 749.
- [59] Boesgaard, A.M., Friel, E., 1990, **351**, 467.
- [60] Boesgaard, A.M., Tripicco, M.J., 1986, *Astrophys. J.*, **303**, 724.
- [61] Boggess, A., 1978, *Nature*, **275**, 372.
- [62] Böhm-Vitense E., 1981, *Astrophys. J.*, **244**, 938.
- [63] Böhm-Vitense E., 1989, *Stellar Astrophysics*. Cambridge Univ. Press.
- [64] Boss, A.P., 1980, *Astrophys. J.*, **237**, 866.
- [65] Breger, M., 1969, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **19**, 79.
- [66] Breger, M., 1972, *Astrophys. J.*, **176**, 373.
- [67] Breger, M., 1975, *Astrophys. J.*, **201**, 653.
- [68] Breger, M., 1979, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **91**, 5.
- [69] Breger, M., 1980, *Astrophys. J.*, **235**, 153.
- [70] Breger, M., 1982, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **94**, 845.
- [71] Breger, M., 1989, *Communications in Asteroseismology*, **9**.
- [72] Breger, M., 1990, *Pub. Astron. Soc. Pac. Conf.*, **11**, 263.
- [73] Breger, M., Bregman, J.N., 1975, *Astrophys. J.*, **200**, 343.
- [74] Burkhardt, C., Coupry M.F., 1989, *Astron. Astrophys.*, **220**, 197.
- [75] Burkhardt, C., Coupry M.F., 1991, *Astron. Astrophys.*, **249**, 205.
- [76] Burkhardt, C., van't Veer-Menneret, C., Coupry, M.F., 1980, *Astron. Astrophys.*, **92**, 132.
- [77] Buser, R., Kurucz, R.L., 1978, *Astron. Astrophys.*, **70**, 555.
- [78] Carney, B.W., 1983, *Astron. J.*, **88**, 623.

-
- [79] Carney, B.W., Seitzer, P., 1986, *Astron. J.*, **92**, 23.
- [80] Carrol, J.A., 1933a, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **93**, 478.
- [81] Carrol, J.A., 1933b, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **93**, 680.
- [82] Cayrel, R., Burkhart, C., van't Veer-Menneret C., 1991, *Evolution of Stars: The Photospheric Abundance Connection*, Michaud, G., Tutukov, A., IAU Symp. 145. Kluwer, Dordrecht, p.99.
- [83] Cayrel, R., Cayrel de Strobel, G., Campbell, B., 1985, *Astron. Astrophys.*, **146**, 249.
- [84] Cayrel de Strobel G., Bentolila C., 1989, *Astron. Astrophys.*, **211**, 324.
- [85] Clegg, R.E.S., Lambert, D.L., Tomkin, J., 1981, *Astrophys. J.*, **250**, 262.
- [86] Code, A.D.: 1975, *Dudley Obs. Rep.* No 9, pag. 221
- [87] Code, A.D., Davis J., Bless, R.C., Hanbury Brown, R., 1976, *Astrophys. J.*, **203**, 417.
- [88] Conti, P.S., 1970a, *Astrophys. J.*, **158**, 1085.
- [89] Conti, P.S., 1970b, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **82**, 781.
- [90] Conti, P.S., Barker, P.K., 1973, *Astrophys. J.*, **186**, 185.
- [91] Conti, P.S., Deutsch, A.J., 1966, *Astrophys. J.*, **145**, 742.
- [92] Coupry, M.F., Burkhart, C., 1992, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **95**, 41.
- [93] Cowley, A., Cowley, C., Jaschek, M., Jaschek, C., 1969, *Astron. J.*, **74**, 375.
- [94] Cox, J.P., 1980, *Theory of Stellar Pulsation*, Princenton Univ. Press.
- [95] Cox, J.P., Giuli, R.G., 1968, *Principles of Stellar Structure*, New York: Gordon & Breach.
- [96] Cox, A.N., King, D.S., Hodson, S.W., 1979, *Astrophys. J.*, **231**, 798.
- [97] Craig, I.J.D., Brown, J.C., 1986, *Inverse Problems in Astronomy*, Adam Hilger Ltd., Bristol.
- [98] Crawford, D.L., 1975, *Astron. J.*, **80**, 955.

- [99] Crawford, D.L., 1978, *Astron. J.*, **70**, 575.
- [100] Crawford, D.L., Perry, C.L., 1966, *Astron. J.*, **71**, 206.
- [101] Crawford, D.L., Perry, C.L., 1976, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **88**, 454.
- [102] Da Costa, G.S., 1984, *Astrophys. J.*, **285**, 483.
- [103] Danziger, I.J., Dickens, R.J., 1967, *Astrophys. J.*, **149**, 55.
- [104] Danziger, I.J., Faber, S.M., 1972, *Astron. Astrophys.*, **18**, 428.
- [105] Davies, J., Webb, R.J., 1974, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **168**, 163.
- [106] de Loore, C., 1970, *Astrophys. Space Sci*, **6**, 60.
- [107] Delbouille, L., Neven, L., Roland, G., 1973, *Atlas photométrique du spectre solaire*, Institut d'Astrophysique, Université de Liège.
- [108] Deupree, R.G., 1979, *Astrophys. J.*, **234**, 228.
- [109] Dworetzky, M.M., Moon, T.T., 1986, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **220**, 787.
- [110] Dziembowski, W., 1977, *Acta Astron.*, **27**, 203.
- [111] Dziembowski, W., 1980, *Lecture Notes in Physics*, **125**, 22.
- [112] Dziembowski, W., Królikowska, M., 1990, *Acta Astronómica*, **40**, 19.
- [113] Eddington, A.S., 1918a, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **79**, 2.
- [114] Eddington, A.S., 1918b, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **79**, 177.
- [115] Edmunds, M.G., 1978, *Astron. Astrophys.*, **64**, 103.
- [116] Eggen, O.J., 1956, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **68**, 238.
- [117] Eggen, O.J., 1979, *Astrophys. Journ. Suppl.*, **41**, 413.
- [118] Eggen, O.J., Iben Ijr., 1989, *Astron. J.*, **97**, 431.
- [119] Eggen, O.J., 1991, *Astron. J.*, **102**, 5.
- [120] Faraggiana, R., Gerbaldi, M., van't Veer-Menneret, 1988, *Astron. Astrophys.*, **201**, 259.

- [121] Faraggiana, R., van't Veer–Menneret C., 1971, *Astron. Astrophys.*, **12**, 258.
- [122] Fellgett, P.B., 1955, *Vistas in Astronomy*, **1**, 475.
- [123] Fernie, J.D., 1965, *Astron. J.*, **70**, 575.
- [124] Fernley J.A., 1989, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **239**, 905.
- [125] Fernley, J.A., Jameson, R.F., Sherrington, M.R., Skillen, I., 1987, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **225**, 451.
- [126] Fitch, W.S., 1976, *Multiple Periodic Variable Stars*. Ed. W.S. Fitch (Dordrecht, Holland: Reidel), p.167.
- [127] Fitch, W.S., 1981, *Astrophys. J.*, **249**, 218.
- [128] Frieden, B.R., 1975, *Top. Appl. Phys.: Picture Processing and Digital Filtering*. Springer–Verlag. New York. Vol. 6. Pag. 177.
- [129] Fuhr, J.R., Martin, G.A., Wiese, W.L., Younger, S.M., 1981, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **10**, 305.
- [130] García, J.R., Cebral, J.R., Scoccimarro, E.R., Wahnou, P., Zimmermann, M., Arena, R., Bazterra, V., Krawzenko, C., Marotta, F., Pellizza, L., Risi, A., 1993, *Delta Scuti Newsletters*, **6**, 14.
- [131] García López, R.J., Rebolo, R., Herrero, A., Beckman, J.E., 1993, *Astrophys. J.*, **412**, 173.
- [132] Garrido, R., 1994, *comunicación privada*.
- [133] Garrido, R., García-Lobo, E., Rodríguez, E., 1990, *Astron. Astrophys.*, **234**, 262.
- [134] Garrido, R., López de Coca, P., Quintana, J.M., Rolland, A., Sáez, M., 1980, *Astron. Astrophys.*, **83**, 114.
- [135] Gehlsen, M., Holweger, H., Danzmann, K., Kock, M., Kuehne, M., 1978, *Astron. Astrophys.*, **64**, 285.
- [136] Gehren, T., 1980, *Stellar Turbulence*, eds. D.F. Gray, J.L. Linsky. *Lecture Notes in Physics*, **114**, 103.
- [137] Gigas, D., 1986, *Astron. Astrophys.*, **165**, 170.

- [138] Gill, P.E., Miller, G.F., 1972, *Comp. Journal*, **15**, 80.
- [139] Gill, P.E., Murray, W., 1978, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **15**, 977.
- [140] Gill, P.E., Murray, W., Wright, M.H., 1981, *Practical Optimization*. Academic Press. London.
- [141] Gilmore, G., Wyse, R.F.G., Kuijken, K., 1989, *Ann. Rev. of Astron. and Astrophys.*, **27**, 555.
- [142] Glusneva, I.N., 1985, *Soviet Astron.*, **29**, 659.
- [143] Glusneva, I.N., 1987, *Soviet Astron.*, **31**, 315.
- [144] Golay, M., 1974, *Introduction to Astronomical Photometry*, Reidel, Dordrecht, Holland.
- [145] Gratton, R.G., Tornambé, A., Ortolani, S., 1986, *Astron. Astrophys.*, **169**, 111.
- [146] Gray, D.F., 1973, *Astrophys. J.*, **184**, 461.
- [147] Gray, D.F., 1975, *Astrophys. J.*, **202**, 148.
- [148] Gray, D.F., Johanson, H.L.: 1991a, *PASP*, **103**, 439.
- [149] Gray, D.F., 1992a, *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge Univ. Press, chapter 12.
- [150] Gray, D.F., 1992b, *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge Univ. Press, chapter 2.
- [151] Gray, D.F., 1992c, *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge Univ. Press, chapter 4.
- [152] Gray, D.F., 1992d, *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge Univ. Press, chapter 15.
- [153] Gray, D.F., 1992e, *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge Univ. Press, chapter 3.
- [154] Gray, D.F., 1992f, *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge Univ. Press, chapter 17.

- [155] Gray, D.F., 1992f, *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge Univ. Press, chapter 13.
- [156] Griffin, R., 1968, *A photometric Atlas of the spectrum of Arcturus $\lambda\lambda$ 3600–8825 Å*. Cambridge.
- [157] Griffin, R., 1971, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **155**, 139.
- [158] Griffin, R., Griffin, R., 1979, *A photometric atlas of the spectrum of Procyon $\lambda\lambda$ 3140–7470 Å*. The Observatories. Cambridge.
- [159] Gurtovenko, E.A., Kostik, R.I., 1981, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **46**, 239.
- [160] Gustafsson, B., Bell, R.A., Eicksson, K., Nordlund, A., 1975, *Astron. Astrophys.*, **57**, 235.
- [161] Guthrie, B.N.G., 1987, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **226**, 361.
- [162] Hanbury Brown, R., Davis, J., Allen, L.R., 1974, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **167**, 121.
- [163] Handler, G., 1994, *delta Scuti Newsletters*, **7**, 11.
- [164] Hartmann, L., Hewett, R., Stahler, S., Mathieu, R.D., 1986, *Astrophys. J.*, **309**, 275.
- [165] Hauck, B., 1985, *Calibration of Fundamental Stellar Quantities*. IAU Symp. 111. Hayes, D.S., et al., (eds.). Kluwer, Dordrecht. P.271.
- [166] Hauck, B., 1986, *Astron. Astrophys.*, **155**, 371.
- [167] Hauck, B., Mermilliod, M., 1980, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **40**, 1.
- [168] Hauck, B., Mermilliod, M., 1990, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **86**, 107.
- [169] Hauck, B., North P., 1982, *Astron. Astrophys.*, **114**, 23.
- [170] Hauck, B., North P., 1993, *Astron. Astrophys.*, **269**, 403.
- [171] Hayes, D.S., 1978, *The Hr Diagram*, IAU Symp. No 80, p.65, eds Philip, A.G., Davis & Hayes, Reidel D.S., Dordrecht, Holland.
- [172] Hayes, D.S., 1979, *Dudley Obs. Rep.*, **14**, 297.

- [173] Hayes, D.S., Latham, D.W., 1975, *Astrophys. J.*, **197**, 593.
- [174] Heise, C., Kock, M., 1990, *Astron. Astrophys.*, **230**, 244.
- [175] Hesser, J.E., Harris, W.E., Vandenberg, D.A., Allwright, J.W.B., Shott, P., Stetson, P.B., 1987, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **99**, 739.
- [176] Hill, G.M., Landstreet, J.D., 1993, *Astron. Astrophys.*, **276**, 142.
- [177] Hills, J.G., Day, C.A., 1976, *Astrophys. Lett.*, **17**, 87.
- [178] Hoffleit, D., Jaschek, C., 1982, *The Bright Star Catalogue*, Yale University Observatory.
- [179] Holweger, H., 1988, *The Impact of Very High S/N Spectroscopy on Stellar Physics*, ed. G. Cayrel de Strobel and M. Spite. Dordrecht; Kluwer, p.411.
- [180] Horan, S., 1979, *Astron. J.*, **84**, 1770.
- [181] Horne, K., 1986, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **98**, 609.
- [182] Iben, I., Jr., 1986, *Mem. Soc. Astron. Ital.*, **57**, 453.
- [183] Irwin, A.W., 1983, *Astron. Astrophys.*, **117**, 173.
- [184] James, F., Roos, M., 1991, *CERN Program Library Office*.
- [185] Jansson, P.A., 1968, *Ph. D.*. Florida State Univ.
- [186] Jansson, P.A., 1970, *J. Opt. Soc. Am.*, **60**, 184.
- [187] Jansson, P.A., 1984, *Deconvolution with application in Spectroscopy*. Academic Press.
- [188] Jaschek, C., Jaschek, M., 1987, *The classification of stars*. Cambridge Univ. Press.
- [189] Johnson H.L., 1963, *Basic Astronomical Data*. Ed. W A Hiltner University of Chicago Press.
- [190] Johnson, H.L., 1965, *Astrophys. J.*, **141**, 923.
- [191] Johnson, H.L., 1966, *Ann. Rev. of Astron. and Astrophys.*, **4**, 193.
- [192] Johnson, H.R., Milkey, R.W., Ramsey, L.W., 1974, *Astrophys. J.*, **187**, 147.

-
- [193] Johnson, H.L., Mitchell, R.I., Iriarte, B., Wisniewski, W.Z., 1966, *Comm. Lunar and Planet. Lab.*, **4**, 99.
- [194] Johnson, H.L., Morgan, W.W., 1953, *Astrophys. J.*, **117**, 313.
- [195] Jorgensen, H.E., Hansen, L., 1984, *Astron. Astrophys.*, **133**, 165.
- [196] Kato, K., Sadakane, K., 1982, *Astron. Astrophys.*, **113**, 135.
- [197] Keenan, P.C., Hynek, J.A., 1950, *Astrophys. J.*, **111**, 1.
- [198] King, J.R., 1991, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **249**, 658.
- [199] Kiselman, D., 1991, *Astron. Astrophys.*, **245**, L9.
- [200] Kitchin, C.R., 1991, *Astrophysical Techniques*, IOP Publishing Ltd.
- [201] Kholopov, P.N., Samus, N.N., Frolov, M.S., *et al.*, 1987, *General Catalogue of Variable Stars*, 4th Edition, vol III, Moscú.
- [202] Koepfen, J., 1988, *Bull. Inform. CDS*, **34**, 143.
- [203] Krisciunas K., 1993, *delta Scuti Newsletters*, **6**, 23.
- [204] Kukarkin, B.V., Kholopov P.N., Efremov, Y.N., *et al.*, 1969, *General Catalogue of Variable Stars*, Moscow.
- [205] Kurtz, D.W., 1978, *Astrophys. J.*, **221**, 869.
- [206] Kurtz, D.W., 1979a, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **189**, 1.
- [207] Kurtz, D.W., 1979b, *Mon. Not. Astron. Soc. S. Afr.*, **38**, 32.
- [208] Kurtz, D.W., 1980, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **193**, 29.
- [209] Kurtz, D.W., 1981, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **194**, 737.
- [210] Kurtz, D.W., 1987, *Multimode Stellar Pulsation*. Budapest: Konkoli Observatory, p. 107.
- [211] Kurtz, D.W., 1991, *Delta Scuti Stars Newsletters*, **3**, 3.
- [212] Kurucz, R.L., 1979a, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **40**, 1.
- [213] Kurucz, R.L., 1979b, *Dudley Obs. Rept.*, **14**, 271.

- [214] Kurucz, R.L., 1991 In: *Stellar Atmospheres: beyond classical models*. Kluwer, Dordrecht, p441.
- [215] Kurucz, R.L., Petryemann, E., Avrett, E.H., 1972 *Blanketed Model Atmospheres for Early Type Stars*. (Washington: Smithsonian Institution Press).
- [216] Kurucz, R.L., Petryemann E., 1975, *Smithsonian Ap. Obs. Spec. Rept.*, **362**. Flux Atlas from 296 to 1300 nm. National Solar Obs.: Sunspot.
- [217] Kuschnig, R., Weiss, W.W., Kreidl, T.J., 1990, *Pub. Astron. Soc. Pac. Conf.*, **11**, 348.
- [218] Lambert, D.L., Heath, J.E., Edvardsson, B., 1991, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **253**, 610.
- [219] Lambert, D.L., Smith, V.V., Heath, J., 1993, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **105**, 568.
- [220] Lane, M.C. and Lester, J.B., 1984, *Astrophys. J.*, **281**, 723.
- [221] LeContel, J.M., Valtier, J.C., Sareyan, J.P., Baglin, A., Zribi, G., 1974, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **15**, 115.
- [222] Leggett, S.K., Mountain, C.M., Selby, M.J., Blackwell, D.E., Booth, A.J., Petford, A.D., 1986, *Astron. Astrophys.*, **159**, 217.
- [223] Lemke, M., 1989, *Astron. Astrophys.*, **225**, 125.
- [224] Lemke, M., 1990, *Astron. Astrophys.*, **240**, 331.
- [225] Leonard, P.J.T., 1985, *Bull. Am. Astron. Soc.*, **17**, 882.
- [226] Leonard, P.J.T., 1989, *Astrophys. J.*, **98**, 217.
- [227] Lester J.B., 1987, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **227**, 135.
- [228] Lester J.B., Gray R.O., Kurucz R.L., 1986, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **61**, 509.
- [229] Lester, J.B., Lane, M.C., Kurucz, R.L 1982, *Astrophys. J.*, **260**, 272.
- [230] López de Coca P., Rodríguez E., Rolland A., 1991, comunicación privada.
- [231] López de Coca P., Rolland A., Rodríguez E., Garrido R., 1990, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **83**, 51.

- [232] Maeder, A., 1987, *Astron. Astrophys.*, **178**, 159.
- [233] Malagnini, M.L., Faraggiana, R., Morossi, C., Crivellari, L., 1982, *Astron. Astrophys.*, **114**, 170.
- [234] Malagnini, M.L., Morossi, C., 1990, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **85**, 1015.
- [235] Malagnini, M.L., Morossi, C., Rossi L., Kurucz R.L., 1985, *Astron. Astrophys.*, **152**, 117.
- [236] Mantegazza, L., Poretti, E., Zerbi, F.M., 1994, *delta Scuti Newsletters*, **7**, 4.
- [237] Mateo, M., Harris, H.C., Nemec, J., Olszewski E.W., 1988, *Bull. Amer. Astron. Soc.*, **20**, 717.
- [238] Mateo, M., Harris, H.C., Nemec, J., Olszewski E.W., 1990, *Astron. J.*, **100**, 469.
- [239] Mathys, G., 1987, *Astron. Astrophys. Suppl.*, **71**, 201.
- [240] Matsushima, S., 1969, *Astrophys. J.*, **158**, 1137.
- [241] Matthews, J.M., Kurtz, D.W., Wehlau, W.H., 1987, *Astrophys. J.*, **313**, 782.
- [242] McCarthy, J.K., Sandiford, B.A., Boyd, D., Booth, J., 1993, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **105**, 881.
- [243] McClure, R.D., Twarog, B.A., 1977, *Astrophys. J.*, **214**, 111.
- [244] McCrea, W.H., 1964, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **128**, 147.
- [245] McNally, D., 1965, *Observatory*, **85**, 166.
- [246] McNamara, D.H., 1985, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **97**, 715.
- [247] McNamara, D.H., Feltz, K.A., jr., 1978, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **88**, 510.
- [248] Mégessier, C., 1988, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **72**, 551.
- [249] Mégessier, C., van't Veer-Menneret, C., 1991, *Evolution of Stars: the Photospheric Abundance Connection*. Michaud G., Tutokov, A., Bergevin, M., (eds). P.47.
- [250] Merrill, P.W., 1925, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **37**, 272.
- [251] Michaud, G., 1970, *Astrophys. J.*, **160**, 641.

- [252] Michaud, G., Charland, Y., Vauclair, S., Vauclair, G., 1976, *Astrophys. J.*, **210**, 447.
- [253] Michaud, G., Tarasick, D., Charland, Y., Pelletier, C., 1983, *Astrophys. J.*, **269**, 239.
- [254] Mitchell, R.I., Johnson, H.L., 1969, *Comm. Lunar and Planet. Lab.*, **8**, 1.
- [255] Moon, T.T., Dworetzky, M.M., 1985, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **217**, 305.
- [256] Moore, C.E., Minnaert, M.G.J., Houtgast, J., 1966, *The Solar Spectrum 2935 Å to 8770 Å*. National Bureau of Standards.
- [257] Morguleff, N., Rutily, B., Terzan, A., 1976, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **23**, 429.
- [258] Morton, D.C., Adams, T.F., 1968, *Astrophys. J.*, **151**, 611.
- [259] Mouschovias, T., Ch., 1977, *Astrophys. J.*, **211**, 147.
- [260] Mouschovias, T.Ch., Paleologou, E.V., 1979, *Astrophys. J.*, **230**, 204.
- [261] Mouschovias, T.Ch., Paleologou, E.V., 1980, *Astrophys. J.*, **237**, 877.
- [262] Napiwotzki, R., Schönberner, D., Wenske, V., 1993, *Astron. Astrophys.*, **268**, 653.
- [263] Nelson, G.D., 1980, *Astrophys. J.*, **238**, 659.
- [264] Nemec, J.M., 1988. *The use of pulsating stars in fundamental problems in Astronomy*. IAU Coll., 111, ed. E.G. Schmidt., p. 215.
- [265] Nemec, J.M., Cohen, J.G., 1989, *Astrophys. J.*, **336**, 780.
- [266] Nemec, J.M., Harris, H.C., 1987, *Astrophys. J.*, **316**, 172.
- [267] Nemec, J.M., Mateo, M., 1990, *Pub. Astron. Soc. Pac. Conf.*, **11**, 64.
- [268] Niss, B., Jorgensen, H.E., Laustsen, S., 1978, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **32**, 387.
- [269] Nissen, P.E., 1981, *Astron. Astrophys.*, **97**, 145.
- [270] Nissen, P.E., 1991, *Elements and the Cosmos*. Proc. of the 31st Herstmonceux Conference, eds. R.J. terlevich and M.G. Edmunds, Cambridge Univ. Press.

- [271] Nissen, P.E., Edvarsson, B., 1992, *Astron. Astrophys.*, **261**, 255.
- [272] Nordlund, Å., 1980, *Stellar Turbulence*, eds. D.F. Gray y J.L. Linsky, *Lecture Notes in Physics*, **114**, 213.
- [273] North, P., Berthet, S., Lanz, T., 1994, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **103**, 321.
- [274] Olszewsky, E., Aaronson, M., 1985, *Astron. J.*, **90**, 2221.
- [275] Osmer, P.S., 1972, *Astrophys. J. Supl. Ser.*, **24**, 255.
- [276] Paczynski, B., 1970, *Acta Astr.*, **20**, 47.
- [277] Paparó, M., Kovacs, G., 1984, *Astrophysics and Space Science.*, **105**, 357.
- [278] Pasinetti, L.E., Pastori, L., Schimidt, E.G., Teays, T.J., 1990, *Pub. Astron. Soc. Pac. Conf.*, **11**, 64.
- [279] Perry, C.L., Olsen, E.H., Crawford, D.L., 1987, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **99**, 1184.
- [280] Petersen, J.O., 1975, *Multiple Periodic Variable Stars*, ed. W.S. Fitch (Dordrecht, Holand: Reidel), p. 195.
- [281] Petersen, J.O., Jorgensen, H.E., 1972, *Astron. Astrophys.*, **17**, 367.
- [282] Philip, A.G.D., Egret, D., 1980 *Astr. Ap. Suppl.*, **40**, 199.
- [283] Philip A.G.D., Relyea L.J., 1979, *Astron. J.*, **84**, 1743.
- [284] Popper D.M., 1980, *Ann. Rev. Astr. Astrophys.*, **18**, 115.
- [285] Popper, D.M., Jorgensen, H.E., Morton, D.C., Leckrone, D.S., 1970, *Astrophys. J. Letters*, **161**, L57.
- [286] Praderie, F., 1981, *Astron. Astrophys.*, **98**, 92.
- [287] Relyea L.J., Kurucz, R.L., 1978, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **37**, 45.
- [288] Remie, H. Lamers, H.J.G.L.M., 1982, *Astron. Astrophys.*, **105**, 85.
- [289] Renzini, A., Mengel, J.G., Sweigart, A.V., 1977, *Astron. Astrophys.*, **56**, 369.
- [290] Richardson, Brealey, 1973, *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, **67**, 165.

- [291] Roberts, M.S., 1960, *Astron. J.*, **65**, 457.
- [292] Roby, S.W., Lambert, D.L., 1990, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **73**, 67.
- [293] Rodríguez E., López de Coca P., Rolland A., Garrido R. and Costa V., 1994, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, preprint.
- [294] Rodríguez, E., Rolland, A., López de Coca, P., Garrido, R., 1991, *Astron. Astrophys.*, **247**, 77.
- [295] Roman, N.G., Morgan, W.W., Eggen, O.J., 1948, *Astrophys. J.*, **107**, 107.
- [296] Rossiter, R.A., 1924, *Astrophys. J.*, **60**, 15.
- [297] Sadakane, K., 1981, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **93**, 587.
- [298] Saez, M., Auvergne, M., Valtier, J.C., Baglin, A., Morel, P., 1981, *Astron. Astrophys.*, **157**, 757.
- [299] Sandage, A.R., 1953, *Astron. J.*, **58**, 61.
- [300] Sargent, W.L.W., 1968, *Astrophys. J.*, **152**, 885.
- [301] Schild, H., Berthet, S., 1986, *Astron. Astrophys.*, **162**, 369.
- [302] Schild, R.E., Chaffee, F., 1971, *Astrophys. J.*, **169**, 529.
- [303] Schmidt, E.G., 1979, *Astron. J.*, **84**, 1739.
- [304] Schroeder, D.J., 1987, *Astronomical optics*. Academic Press.
- [305] Schutt, R.L., 1991, *Astron. J.*, **101**, 2177.
- [306] Schutt, R.L., 1993, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **105**, 22.
- [307] Seaton, M.J., 1987, *J. Phy..B.:At. Mol. Phy*, **20**, 6363.
- [308] Shibahashi, H., 1987, *Lecture Notes in Physics*, **274**, 112.
- [309] Shobbrook, R.R., Stobie, R.S., 1974, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **169**, 643.
- [310] Sigut., T.A.A., Landstreet, J.D., 1990, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **247**, 611.
- [311] Silk, J., Takahashi, T., 1979, *Astrophys. J.*, **229**, 242.

- [312] Slettebak, A., Collins, G.W., Boyce, P.B., White, N.M., Parkinson, T.D., 1975, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **29**, 137.
- [313] Slovak, M.H., 1978, *Astrophys. J.*, **223**, 192.
- [314] Smalley, B., 1993, *Astron. Astrophys.*, **274**, 391.
- [315] Smalley, B., Dworetzky, M.M., 1993, *Astron. Astrophys.*, **271**, 515.
- [316] Smith, G., 1981, *Astron. Astrophys.*, **103**, 351.
- [317] Smith, G., Drake, J.J., 1987, *Astron. Astrophys.*, **181**, 103.
- [318] Smith, H.J., 1955, *Astron. J.*, **60**, 179.
- [319] Smith, M.A., 1971, *Astron. Astrophys.*, **11**, 325.
- [320] Smith, M.A., 1973, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **25**, 277.
- [321] Smith, M.A., McCall, M.L., 1978, *Astrophys. J.*, **223**, 221.
- [322] Smith, R.A., Jones, F.E., Chasmar, R.P., 1957, *The Detection and Measurement of Infrared Radiation*, Oxford, p. 209.
- [323] Smith, V.V., 1993, *Astrophys. J.*, **408**, 262.
- [324] Smyth, M.J., Stobie, R.S., Shobbrook, R.R., 1975, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **171**, 143.
- [325] Sneden, C., Lambert, D.L., Whitaker, R.W., 1979, *Astrophys. J.*, **234**, 964.
- [326] Spitzer, L.jr, Mathieu, R.D., 1980, *Astrophys. J.*, **241**, 618.
- [327] Steffen, M., 1985, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **59**, 403.
- [328] Stellingwerf, R.F., 1979, *Astrophys. J.*, **227**, 935.
- [329] Stickland, D.J., 1972, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **159**, 29.
- [330] Strömgren, B., 1966, *Ann. Rev. of Astron. and Astrophys.*, **4**, 433.
- [331] Tassoul, J.L., 1978, *Theory of Rotating Stars*. Princenton University Press, p.32.
- [332] Taylor, B.J., 1984, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **54**, 259.

- [333] Teske, R.G., 1967, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **79**, 110.
- [334] Thèvenin, F., 1989, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **77**, 137.
- [335] Thomas, R.M., Morton, D.C., Murdin, P.G., 1979, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **188**, 19.
- [336] Titus, J., Morgan, W.W., 1940, *Astrophys. J.*, **92**, 256.
- [337] Tonry, J., Davis, M., 1979, *Astron. J.*, **84**, 1511.
- [338] Tsvetkov, Ts.G., 1985a, *Astrophysics and Space Science.*, **117**, 137.
- [339] Tsvetkov, Ts.G., 1985b, *Astrophysics and Space Science.*, **117**, 227.
- [340] Tsvetkov, Ts.G., 1986a, *Astrophysics and Space Science.*, **127**, 219.
- [341] Tsvetkov, Ts.G., 1986b, *Astrophysics and Space Science.*, **128**, 319.
- [342] Tsvetkov, Ts.G., 1988, *Astrophysics and Space Science.*, **150**, 357.
- [343] Tsvetkov, Ts.G., 1989, *Astrophysics and Space Science.*, **151**, 39.
- [344] Tsvetkov, Ts.G., 1990, *Astrophysics and Space Science.*, **173**, 1.
- [345] Tsvetkov, Ts.G., 1993a, *Astrophysics and Space Science.*, **203**, 247.
- [346] Tsvetkov, Ts.G., 1993b, *Astrophysics and Space Science.*, **203**, 289.
- [347] Tsvetkov, Ts.G., Petrova, Ts.C., 1993, *Astrophysics and Space Science.*, **203**, 257.
- [348] Tull, R.G., MacQueen, P.J., Sneden, C., Lambert, D.L., 1993, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, in preparation.
- [349] Uesugi, A., Fukuda, I., 1976, *Revised Catalogue of Stellar Rotational Velocities*.
Depart. of Astronomy, Kyoto Univ., Japan.
- [350] Uesugi, A., Fukuda, I., 1982, *Revised Catalogue of Stellar Rotational Velocities*.
Depart. of Astronomy, Kyoto Univ., Japan.
- [351] Unger, S.W., Brinks, E., Laing, R.A., Tritton, K.P., Gray, P.M., 1988, *Observers' Guide*. Isaac Newton Group. La Palma.

- [352] Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., Shibahashi, H., 1989, *Nonradial Oscillations of Stars*, Univ. of Tokyo Press.
- [353] Van Citter, P.H., 1930, *Z. Phys.*, **69**, 298.
- [354] Vandenberg, D.A., 1992, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, (in press).
- [355] van't Veer-Menneret, C., Coupry, M.F., Burkhart, C., 1985, *Astron. Astrophys.*, **146**, 139.
- [356] Vauclair, S., Vauclair, G., 1982, *Ann. Rev. of Astron. and Astrophys.*, **20**, 37.
- [357] Waddell, J., 1956, *An Empirical Determination of the Turbulence Field in the Solar Photosphere Based on a study of Weak Fraunhofer Lines*. Ph. D. thesis, University of Michigan.
- [358] Wamsteker, W., 1981, *Astron. Astrophys.*, **97**, 329.
- [359] Ward, L., 1985, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **213**, 71.
- [360] Warman, J., Pena, J.H., 1978, *Pub. Astron. Soc. Pac.*, **90**, 495.
- [361] Watson, W.D., 1970, *Astrophys. J. Letters*. **162**, L45.
- [362] Watson, R.D., 1988, *Astrophysics and Space Science.*, **140**, 255.
- [363] Wheeler, J.C., 1979, *Astrophys. J.*, **234**, 569.
- [364] Wheeler, J., Sneden, C., Truran, J., 1989, *Ann. Rev. of Astron. and Astrophys.*, **27**, 279.
- [365] Wiese, W.L., Smith, M.W., Miles, B.M., 1969, *Atomic Transition Probabilities*. national Bureau of Standards. U.S. Department of Commerce.
- [366] Williams, I.P., 1964, *Ann. Astrophys.*, **27**, 198.
- [367] Willson, P.D., 1973, *Ph. D. Thesis*. Michigan State University, East Lansing.
- [368] Willson, L.A., Bowen, G.H., Struck-Marcell, C., 1987, *Comments Astrophys.*, **12**, 17.
- [369] Wolff, S.C., 1983, *The A stars: problems and perspectives*, NASA SP-463, 93.

- [370] Woolfson, M.M., 1976, *The Origin of the Solar System*. Eds. S.F. Dermott (New York: Wiley), p.163.
- [371] Wonnacott, D., Kellet, B.J., Smalley, B., Lloyd, C., 1994, *Mon. Not. Royal. Astronom. Soc.*, **267**, 1045.
- [372] Zinn, R., Searle, L., 1976, *Astrophys. J.*, **209**, 734.