

# CAPÍTULO IX: LA INVESTIGACIÓN EN ESTIMACIÓN EN CÁLCULO<sup>1</sup>

ISIDORO SEGOVIA, isegovia@ugr.es

*Universidad de Granada*

CARLOS DE CASTRO, carlos.decastro@edu.ucm.es

*Universidad Complutense de Madrid*

Este trabajo constituye una revisión actualizada de las investigaciones realizadas sobre estimación en cálculo; previamente se realiza una definición de estimación, tipos de estimación así como los elementos y características de la misma y el interés que tiene para la enseñanza.

## EL CONCEPTO DE ESTIMACIÓN Y DEFINICIONES CONCEPTUALES AFINES

El término estimación tiene múltiples usos y campos de aplicación. Es por tanto conveniente comenzar por establecer el concepto de estimación al cual se refiere este trabajo.

Estimación: *juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite.* (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989, p. 18)<sup>2</sup>

En el concepto anterior aparecen dos tipos de estimación:

- a) Estimación en cálculo; referido a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados. Ejemplo: una estimación del resultado de 2345 multiplicado por 52 es 120000.
- b) Estimación en Medida; referido a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida.

Dentro de la estimación en medida se distingue entre dos grupos de magnitudes: continuas y discretas. Ejemplos: una estimación, para el caso de magnitudes continuas, es la valoración que hacemos sobre la altura de una persona cuando la comparamos con nuestra propia altura; para el caso de magnitudes discretas es la estimación del número de personas que asisten a una manifestación.

El concepto general de estimación tiene implícitas las características dadas por Reys (1984) y completadas por Segovia, Castro, Rico y Castro (1989, p. 21):

1. Consiste en valorar una cantidad o el resultado de una operación aritmética.
2. El sujeto que hace la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.
3. La valoración se realiza por lo general de forma mental.
4. Se hace con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles.

---

<sup>1</sup> Segovia, I. y De Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cazares Solórzano* (pp. 213-236). Granada: Editorial Universidad de Granada.

<sup>2</sup> El concepto de estimación dado, así como algunas de las consideraciones que en este trabajo se van a hacer están tomadas de los libros *Estimación en Cálculo y Medida* (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989) y *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos* (Segovia, 1997).

5. El valor asignado no es exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones.
6. El valor asignado admite distintas aproximaciones dependiendo de quien realice la valoración.

Conviene precisar algunas de las características referidas; concretamente, las que hacen referencia al cálculo mental, al empleo de números sencillos y a la aproximación.

### *Estimación y Cálculo Mental*

En los procesos de estimación del resultado de una operación o de la medida de una cantidad, el cálculo mental tiene un papel muy destacado. No quiere decir esto que la estimación tenga como única herramienta de resolución los algoritmos mentales de cálculo; una estimación puede realizarse con algoritmos de lápiz y papel o calculadora; pero en la mayor parte de las situaciones, esto no es posible o deseable, y por tanto, se hace necesario el cálculo mental.

Para Reys (1984, p. 548) hay dos características que distinguen al cálculo mental; la primera característica es que el cálculo mental produce respuestas exactas, mientras que la segunda, es que emplea procedimientos mentales de realización, sin ayuda externa de herramientas tales como el lápiz y el papel. No hay contradicción entre la producción de respuestas exactas, con los valores aproximados que produce la estimación; Reys hace referencia al cálculo mental, exclusivamente, sin relacionarlo con la estimación. Cuando el Cálculo Mental se utiliza en procedimientos de estimación, hay una selección previa de números sencillos con los que se opera mentalmente; es esta elección de números la que da lugar respuestas aproximadas.

Reys da cinco razones para defender la enseñanza del cálculo mental en la escuela:

- es un prerrequisito para el desarrollo de la aritmética escrita;
- es un promotor del conocimiento de las estructuras de los números y sus propiedades;
- es un promotor de la creatividad, del conocimiento independiente e incita a los estudiantes a tener ingenio con números grandes;
- contribuye a la mejora en la resolución de problemas;
- es una base para el desarrollo de técnicas de cálculo estimativo.

Gómez (1994, pp. 35-45) desarrolla más ampliamente las razones que motivan la inclusión del cálculo mental en el currículum para la enseñanza obligatoria, entre las cuales se encuentra también la relación de éste con la estimación.

Así, una buena base para la estimación consiste en lograr una destreza adecuada sobre algoritmos mentales que sean fáciles de memorizar y rápidos. Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) exponen algunos métodos y Gómez (1994) da también una relación amplia y detallada de estos métodos.

### *Estimación y números sencillos o redondos*

La estimación produce resultados aproximados porque en los procesos de estimación se transforman o sustituyen los datos por números sencillos; es decir, que sean fáciles de memorizar y asequibles para las operaciones aritméticas mentales. Hay varias formas de producir, a partir de los datos exactos, números sencillos.

Números sencillos por truncamiento: truncar un número consiste en tomar sólo los dígitos de la izquierda más significativos según las situaciones. Para operar con el número

resultante, se puede reemplazar por ceros las cifras suprimidas cuando son valores enteros (ejemplo, un truncamiento de 3572 sería 3570, ó 3500, ó 3000); o se puede operar con el número tal como queda y añadir posteriormente los ceros al resultado.

Números sencillos por redondeo: redondear un número, igual que el truncamiento, consiste en tomar sólo los dígitos de la izquierda más significativos de acuerdo a las diferentes situaciones, con la condición de que si la primera cifra que se desecha es 0, 1, 2, 3 ó 4, entonces la última cifra (y todas las demás) se mantienen igual; en otro caso, la última cifra que se mantiene aumenta en una unidad respecto del número que redondeamos; en el ejemplo anterior los posibles redondeos de 3572 serían 3570, 3600 y 4000.

Números sencillos por sustitución: cuando un dato resulta complicado para operar con él, puede ser sustituido por otro próximo, con lo que desaparece la dificultad. Por ejemplo, para obtener un resultado estimado de  $36894:7$  se sustituye 36894 por 35000 de forma que la división  $35000:7$  resulta sencilla de realizar mentalmente.

### *Estimación y aproximación*

La Aproximación es un término de uso frecuente en cálculo numérico, que tiene relación con la Estimación pero no es un sinónimo (Hall, 1984); Sowder (1989) también analiza la diferencia entre ambos términos. Más detalladamente, en Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) se define la aproximación y su relación con la estimación. Aproximar es encontrar un resultado suficientemente preciso para un determinado propósito. La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; se aproxima tanto como la situación lo precise; tiene como herramientas los teoremas del cálculo (aproximado) o teoría de errores y los algoritmos de lápiz y papel o con calculadora. La estimación tiene en cuenta el error pero de manera menos precisa. A veces, éste no tiene un control asegurado. Las características de la estimación 3 y 6 citadas, no las tiene la aproximación. La estimación puede emplear algunos de los teoremas del cálculo aproximado en la medida que estos teoremas puedan aplicarse mentalmente. Hemos de decir que, en general, este trabajo no se refiere a la aproximación en los términos que acabamos de definir. Los términos *aproximado* y *aproximación* son usados con mucha frecuencia en nuestro trabajo para referirnos a los resultados de la estimación, que pueden calificarse de aproximaciones al valor exacto y por tanto aproximados, como también lo son los resultados de una aproximación en los términos que la hemos descrito; también nos referiremos a la aproximación como el proceso que consiste en sustituir un número por otro más sencillo y próximo.

### *La estimación es parte de las matemáticas*

Una concepción simplista de las matemáticas asocia a éstas con la exactitud; y, por tanto, la estimación puede parecer ajena a las mismas o, más bien, una forma poco correcta de hacer matemáticas. El análisis de las razones que pueden provocar el uso de la estimación demuestra justamente lo contrario. "El uso de la estimación contiene los ideales matemáticos a saber: claridad de pensamiento y discurso, facilidad en relación con los problemas y consistencia en la aplicación de procedimientos" (Usiskin, 1986, p. 2).

Las razones por las que la estimación se hace necesaria pueden clasificarse en cinco grupos:

- a) Imposibilidad de conocimiento de un valor exacto; como es el caso del empleo en

algún cálculo de un valor desconocido de manera exacta; por ejemplo, la cantidad de ozono que hay en la atmósfera, el número de personas que salen de viaje un fin de semana, etc.

- b) Imposibilidad de tratamiento numérico exacto; por ejemplo, cuando empleamos en un cálculo un número irracional.
- c) Claridad numérica; los medios de comunicación, por ejemplo, para mayor claridad y comprensión de la información emplean números redondos (Segovia, 1989), como "150 millones para una población escolar de 63 mil alumnos en lugar de "148739426 pesetas para una población escolar de 62879 alumnos".
- d) Facilitar el cálculo; son numerosas las situaciones en las que la estimación es necesaria como herramienta de comprobación de que los resultados que nos proporciona una máquina no tienen un error desproporcionado; un redondeo apropiado y unos algoritmos mentales apropiados proporcionan de manera sencilla un resultado bastante aproximado al exacto.
- e) Consistencia de la información; es decir, coherencia interna entre los distintos datos que componen una información. Por ejemplo, carecería de consistencia desde este punto de vista la expresión, "el precio del coche A es unos treinta mil euro, el del coche B unos cuarenta y cinco mil euros C, 35456 euros"; la expresión sería correcta si el precio del coche C se expresase con un precio de unos treinta y cinco mil euros.

### *La estimación en el currículo escolar*

Hay dos razones fundamentales para que la Estimación se incorpore al currículo escolar. La primera es su utilidad práctica y la segunda es que completa la formación de los estudiantes.

En relación a la primera razón, en la sección anterior ya se han dado algunos argumentos por los que la Estimación se hace necesaria en determinadas situaciones. También el conocido Informe Cockcroft (1985) destaca como complemento necesario a las necesidades matemáticas de los adultos "tener el sentido del número que permite hacer estimaciones y aproximaciones aceptables; por ejemplo, comprender que el coste de 3 artículos a 95 pesetas cada uno sería un poco menos de 300 pesetas, y que permita llevar a cabo cálculos mentales sencillos" (p.94). Este mismo informe pone de manifiesto la utilidad de la Estimación dentro de la escuela.

*La estimación puede considerarse desde distintas perspectivas. Un primer tipo de estimación es el que permite obtener; antes de efectuar un cálculo, una respuesta aproximada... que permita verificar si el resultado de una operación es del orden de magnitud correcto. Un segundo aspecto de la estimación es el que podría definirse como capacidad para determinar si la respuesta es o no razonable. Un aspecto conexo es la posibilidad de estimar medidas de diversos tipos, en el que sin duda la experiencia práctica y el uso continuado reportan los mejores resultados" (p. 95).*

También el *National Council of Teachers of Mathematics* americano en su informe "*An agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*", dice que la Estimación es útil en las tareas escolares cuando se usa como herramienta de comprobación de resultados o como recurso para la enseñanza de algunos tópicos; por ejemplo, la medida. También en los *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* del N.C.T.M. (1991) se considera que "las destrezas y estructuras conceptuales de la

estimación potencian la capacidad que los niños tienen para enfrentarse a situaciones cuantitativas de la vida diaria" (p. 35)

En relación a la segunda razón, la Estimación amplía la visión restrictiva de las matemáticas a la que antes hemos hecho referencia. La enseñanza escolar debe abarcar este doble carácter de la matemática, exacto y aproximado, y debe proporcionar a los estudiantes actividades que les permitan apreciar en qué circunstancias conviene utilizar una u otra. La estimación en definitiva "presenta a los estudiantes otra dimensión de las matemáticas; algunos términos como aproximadamente, casi, más cerca de, entre, un poco menos que, ilustran la idea de que las matemáticas implican algo más que exactitud" (N.C.T.M., 1991, p. 36).

La razón que resume todo tipo de argumentaciones en defensa de la enseñanza de la estimación la dan Edwards (1984, p. 61) y Hope (1989, p. 15): la Estimación desarrolla el Sentido Numérico.

La relación de componentes implicadas en la Estimación proporciona, por otro lado, una idea clara de la importancia de este tópico dentro del currículo escolar.

### *Componentes implicadas en el cálculo estimativo*

Sowder (1989, p. 376) proporciona el siguiente listado:

#### a) Componentes conceptuales:

1. Papel de los números aproximados.
  - 1.1. Reconocer que la aproximación numérica se usa para calcular.
  - 1.2. Reconocer que la estimación es un procedimiento con el que se obtienen valores aproximados.
2. Multiplicidad de procesos/multiplicidad de resultados.
  - 2.1. Aceptar más de un proceso para obtener una estimación.
  - 2.2. Aceptar más de un valor como resultado de una estimación.
3. Conveniencias
  - 3.1. Reconocer la conveniencia de que los procesos dependen del contexto.
  - 3.2. Reconocer la conveniencia de estimar dependiendo del deseo de aproximar.

#### b) Componentes técnicas:

1. Procesos.
  - 1.1. Reformulación: Cambiar los números usados para el cálculo.
    - Redondeo
    - Truncamiento
    - Mediación
    - Cambiar la expresión del número
  - 1.2. Compensación: hacer ajustes durante o después del cálculo.
  - 1.3. Traslación: cambiar la estructura del problema.
2. Resultados
  - 2.1. Determinar en una estimación el orden de magnitud correcto.
  - 2.2. Determinar una estimación aceptable.

#### c) Relacionar conceptos y técnicas:

1. Habilidad para trabajar con potencias de 10.
2. Conocer el valor posicional de los números.
3. Habilidad para comparar números por tamaños.
4. Habilidad para calcular mentalmente.
5. Conocer factores básicos.

6. Conocer las propiedades de las operaciones y su uso apropiado.
  7. Reconocer que modificar los números puede cambiar el resultado
- d) Componentes afectivas:
1. Confianza en la habilidad para hacer matemáticas
  2. Confianza en la habilidad para estimar
  3. Tolerancia al error
  4. Reconocer que la estimación es útil.

## INCORPORACIÓN DE LA ESTIMACIÓN AL CURRÍCULO

En Estados Unidos el interés por el tema de estimación no es reciente; los anuarios (yearbooks) del N.C.T.M. de los años 1937, 1960, 1976 y 1978 publican artículos sobre el tema; el de 1986 está íntegramente dedicado a estimación. El número de artículos publicados en revistas especializadas en matemática educativa en los 20 últimos años es muy elevado. Sowder (1989) referencia unos cien trabajos en una revisión que hace sobre investigaciones relacionadas con la estimación. A pesar del énfasis puesto en la incorporación del tema de estimación al currículo y de las investigaciones emprendidas, la situación en la enseñanza es presentada, de manera general por los investigadores, como de un bajo nivel de consolidación. Aunque el tema lleva años incorporado al currículo, sin embargo el tratamiento que se le da es muy superficial (Reys, 1984) y limitado (Hope, 1986, Johnson, 1979, Trafton, 1986, Sowder y Wheeler 1989). Carlow (1986) muestra en un estudio de un programa donde se incluye la estimación, y desarrollado a partir de 1969, la insatisfacción por los resultados obtenidos. Las pruebas de evaluación realizadas por el *National Assessment of Educational Progress (NAEP)* (Carpenter, Coburn y Reys, 1976; Montgomery, 1990) así lo vienen poniendo de manifiesto.

En España la estimación aparece por primera vez de manera explícita en los actuales diseños curriculares para los nuevos planes de estudios de Educación Primaria (MEC, 1992) y Secundaria Obligatoria (Nieto y otros, 1989). Concretamente, en Primaria uno de los objetivos es desarrollar la capacidad de "elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, cálculo mental y orientación y aplicarlas en la resolución de problemas sencillos".

Este objetivo general se desglosa en los objetivos de desarrollo de las capacidades siguientes:

- Estimación de cantidades y del orden del resultado de operaciones.
- Predicción y comprobación del resultado de operaciones y problemas.
- Estimación y comprobación del resultado de mediciones.
- Utilización de diferentes estrategias de contar de manera exacta y aproximada.
- Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones, valorando el grado de error admisible.
- Estimación del resultado de un cálculo escogiendo entre varias soluciones propuestas y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
- Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la realización personal de cálculo mental.
- Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana. (MEC, 1992, pp. 28-35)

## ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE ESTIMACIÓN EN CÁLCULO

A continuación se presenta una revisión de las investigaciones que se han realizado hasta la fecha sobre estimación en cálculo<sup>3</sup>. Se mostrarán las líneas principales de trabajo que se han seguido en esta área señalando, de forma resumida, los hallazgos más notables. Finalmente, se indican cuáles son los interrogantes abiertos en la investigación sobre estimación en cálculo que deberían orientar los esfuerzos futuros en este campo.

Existen en la literatura varias revisiones de investigaciones sobre estimación en cálculo. Benton (1986) divide las investigaciones en tres áreas: rendimiento en estimación de alumnos y maestros, estrategias y características de los estimadores y estudios experimentales sobre estimación. Sowder y Wheeler (1989) organizan los estudios en tres clases: relación de la estimación con otras destrezas, comparación de métodos de enseñanza e identificación de estrategias. Segovia (1997) utiliza la clasificación de Sowder y Wheeler (1989), añadiendo las investigaciones sobre instrucción y evaluación de la estimación. Sowder (1992) considera los estudios sobre la habilidad de estimar, el desarrollo de los conceptos y estrategias propios de la estimación, la enseñanza de la estimación, la influencia de los factores afectivos en la habilidad de estimar y la evaluación. R. E. Reys (1993) agrupa los resultados encontrados en las investigaciones según versen sobre el rendimiento de los alumnos, el currículo, la enseñanza de la estimación o la evaluación. En este trabajo se ha tomado una opción que, aprovechando todos los esfuerzos de organizar este campo de investigación, sirva también para incorporar los resultados de los estudios más recientes. Así, se ha optado por clasificar las investigaciones sobre estimación en cálculo en cinco campos: La habilidad de estimar y los factores relacionados con el rendimiento en estimación, estrategias y procesos de estimación, enseñanza de la estimación en cálculo, evaluación de la estimación y desarrollo de conceptos y destrezas de la estimación.

### *La habilidad de estimar y los factores relacionados con el rendimiento en estimación*

Algunas investigaciones se han orientado a determinar qué factores influyen en la dificultad de las tareas de estimación o están relacionados con la habilidad de estimar de los sujetos. Entre los primeros merecen ser destacadas las variables de tarea. Dentro de las mismas se han estudiado el tipo de operación y el tipo de número, el formato de respuesta —abierta, razonable o no-razonable, número de referencia y orden de magnitud— y el formato de la pregunta —cálculos aplicados o cálculos directos. Entre los segundos reseñamos, por el creciente interés que suscitan en la actualidad, los factores afectivos.

La influencia del tipo de número en la dificultad de las tareas de estimación en cálculo ha sido estudiada por varios autores. Bestgen, R. E. Reys, Rybolt y Wyatt (1980) encontraron —en su trabajo con 187 maestros en formación— que los ítems en los que aparecían números decimales eran más difíciles que aquellos en los que solamente aparecían números enteros. Rubenstein (1985) llega en su estudio —en el que participan 309 alumnos de octavo grado— al mismo resultado que Bestgen y otros (1980). Sin embargo, Goodman (1991) obtiene un resultado en su investigación —en la que participan 46 maestros en formación— que contradice los hallados en las dos investigaciones antes citadas. El autor no encuentra diferencia significativa de dificultad entre los ítems en que aparecen números decimales y aquellos en los que sólo hay números enteros. Una diferencia importante entre

---

<sup>3</sup> Una revisión más extensa puede verse en De Castro (2002).

estos estudios es que, mientras que todos los decimales que aparecen en la prueba de estimación utilizada por Goodman (1991) son mayores que uno, en las pruebas de estimación empleadas por Bestgen y otros (1980) y por Rubenstein (1985) aparecen números decimales mayores y menores que uno. Por otra parte, Levine (1980) y Morgan (1990) han encontrado se producen dificultades en las tareas de estimación cuando aparecen en ellas números decimales menores que uno. Ambas autoras atribuyen estas dificultades a la presencia en los sujetos de ideas equivocadas sobre las operaciones. De Castro, Castro y Segovia (2002), apoyándose en los resultados de Levine (1980) y Morgan (1990) plantean la hipótesis de que la verdadera diferencia de dificultad en las tareas de estimación se da entre los ítems que tienen números enteros o decimales mayores que uno y aquellos en los que aparecen números decimales menores que uno. En su investigación participan 53 maestros en formación a los que se les administra el test de Levine (1982) tras un periodo de instrucción sobre estimación de 10 horas. Se llega a la conclusión de que estimar con decimales menores que uno es más difícil que con enteros o decimales mayores que uno, lo que confirma la hipótesis planteada. Este resultado contribuye a clarificar la causa de la aparente contradicción que se producía entre los resultados de Bestgen y otros (1980) y Rubenstein (1985) por un lado, y Goodman (1991) por otro.

En cuanto al formato de pregunta, Morgan (1990) ha estudiado la influencia del contexto —el enunciado de un problema— en el rendimiento de alumnos de educación secundaria en tareas de estimación en cálculo. Torna como referencia el trabajo de Levine (1982), en el que se advertía que alumnos universitarios mostraban dificultades en la conceptualización de la multiplicación y de la división al enfrentarse a tareas de estimación descontextualizadas con decimales menores que uno. Las ideas equivocadas sobre las operaciones —"la multiplicación siempre aumenta", "la división disminuye" y "siempre se divide el número mayor por el menor"— dejaron de aparecer en gran medida cuando se plantearon tareas de estimación presentadas dentro de un contexto práctico. Se observó, en concordancia con los resultados obtenidos en otras investigaciones llevadas a cabo con maestros en formación (Bestgen y otros, 1980; Gliner, 1991; Goodman, 1991), que los alumnos obtenían mejores resultados dando estimaciones en problemas aplicados que al realizar cálculos descontextualizados. Parece que este resultado, sin embargo, deja de ser cierto cuando participan en la investigación niños de educación primaria (Rubenstein, 1985). Otros resultados son los siguientes: la estimación con fracciones presenta grandes dificultades (Goodman, 1991; Hanson y Hogan, 2000), las sumas y restas resultan más sencillas que multiplicaciones y divisiones (Bestgen y otros, 1980; Rubenstein, 1985) y los ítems de respuesta abierta son más difíciles que los de elección múltiple (Goodman, 1991; Rubenstein, 1985).

Una línea de trabajo que está recabando un interés creciente en Didáctica de las Matemáticas es la del estudio de factores afectivos y su influencia en la actuación matemática de los sujetos. En el campo de la estimación en cálculo, ha sido poco explorada. Los factores afectivos, relacionados con la estimación, que han sido considerados hasta ahora son: el autoconcepto como estudiante de matemáticas, la atribución de éxito o fracaso, La valoración de la estimación como destreza matemática y la tolerancia del error. Todos estos factores están, en palabras de Sowder (1989), "más cercanos a las actitudes y a las creencias que a las emociones" (p. 190).

Bestgen y otros (1980) han encontrado una relación positiva entre la habilidad de estimar y el autoconcepto como estudiante de matemáticas. Este resultado es consistente con los resultados de la investigación de Gliner (1991) que, al analizar la influencia de distintas variables en el rendimiento en estimación en cálculo —de 141 maestros en formación—, encuentra que el mejor predictor de éxito para la prueba

de estimación fue la respuesta a la pregunta: ¿Se te dan bien las matemáticas?

Sowder (1989) estudia factores afectivos relacionados con el rendimiento en estimación de maestros en formación. Concluye que "el que se atribuya el éxito o fracaso [en Matemáticas] a causas internas o externas y el hecho de que estas causas estén o no bajo el control del alumno guarda relación con el rendimiento en matemáticas" (Sowder, 1989, 177), y que "este factor está también relacionado con el autoconcepto" (p. 177). Así, los buenos estimadores tienen muy buen autoconcepto como matemáticos, atribuyen el éxito a su destreza y valoran positivamente tanto la estimación como el cálculo mental. Los malos estimadores tienen un bajo concepto sobre sí mismos en Matemáticas, atribuyen su bajo rendimiento en tareas de estimación a la dificultad de las mismas y a la falta de tiempo para realizarlas correctamente y dan poco valor a la estimación y al cálculo mental.

Por otra parte, otro factor que parece ser de naturaleza afectiva y es específico de la estimación es la tolerancia del error. Tanto Bestgen y otros (1980) como Rubenstein (1985) han señalado este factor como importante para llegar a ser un buen estimador. Por último, el valor que se atribuye a la estimación como destreza matemática, útil en la vida diaria, está relacionado con la tolerancia del error y con la aceptación de que un problema matemático puede tener más de una respuesta válida. Esta valoración de la estimación suele considerarse como una característica de los buenos estimadores (Reys y otros, 1980).

## ESTRATEGIAS Y PROCESOS DE ESTIMACIÓN

R. E. Reys, Bestgen, Rybolt, & Wyatt (1982) desarrollaron un test para medir la habilidad de estimar. Utilizaron este test para seleccionar a los mejores estimadores de entre 1200 sujetos que tomaron parte en la investigación. Participaron alumnos desde séptimo a 12º grado y un grupo de adultos. Se entrevistó a 59 de los mejores estimadores para identificar los procesos mentales que utilizaban cuando hacían estimación en cálculo. Las entrevistas revelaron el uso de muchas estrategias diferentes de estimación. Se describieron las características de los buenos estimadores y se propuso un modelo para los procesos de estimación. Este modelo postula la existencia de tres procesos cognitivos de alto nivel (reformulación, traducción y compensación) que se ponen de manifiesto en las estrategias de estimación.

Esta metodología de investigación ha sido posteriormente empleada en sucesivos estudios de réplica con el fin de generalizar los resultados a alumnos de otros países. Así, B. J. Reys, R. E. Reys y Flores (1991) encuentran los mismos procesos generales de estimación en una muestra de 177 alumnos mejicanos de 8º grado. El rendimiento medio de los alumnos mejicanos fue muy bajo. Destacó la utilización de la estrategia de "uso de puntos de referencia" con la que los sujetos demostraban la comprensión que tenían de los cálculos con porcentajes. Igualmente, R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa y Shimizu (1991) seleccionan 21 alumnos de una muestra de 466 estudiantes japoneses mediante una prueba de estimación y vuelven a encontrar los mismos procesos generales de estimación hallados anteriormente en estudiantes de Estados Unidos y México. Además, los alumnos japoneses demuestran un mayor nivel en cálculo mental que los americanos y una mayor resistencia a aceptar el error. Los alumnos japoneses tienden a aplicar mentalmente procedimientos de cálculo con papel y lápiz que interfieren en sus habilidades como estimadores.

En el análisis de estrategias de estimación ha tenido gran influencia el trabajo de Levine (1982). Esta autora analiza las estrategias de estimación utilizadas por 89

alumnos de primer ciclo universitario. Para ello elabora un test de estimación en cálculo compuesto por 20 cálculos descontextualizados (10 multiplicaciones y 10 divisiones) con números naturales y decimales. Aparecen en el análisis 8 tipos de estrategias distintas. El redondeo de ambos números y la imitación del algoritmo escrito son las estrategias más utilizadas. Los mejores estimadores utilizan mayor número de estrategias mientras que los peores utilizan casi exclusivamente la imitación del algoritmo escrito. El test de Levine (1982) ha sido administrado por Dowker (1992) a una muestra de 44 matemáticos profesionales y por Dowker, Flood, Griffiths, Harris y Hook (1996) a otros tres grupos formados por 44 contables, 44 estudiantes de psicología y 44 estudiantes de inglés. Los matemáticos hicieron estimaciones muy precisas y utilizaron un gran número de estrategias distintas. Las estrategias más utilizadas fueron la sustitución de números decimales por fracciones, el uso de números compatibles y la descomposición de números en factores. Los matemáticos, al contrario que los sujetos que participaron en el estudio de Levine (1982), tendían a utilizar estrategias que demostraban comprensión de propiedades aritméticas y relaciones antes que estrategias basadas en el uso de técnicas enseñadas en clase. Los matemáticos y los contables utilizaron un número mucho mayor de estrategias apropiadas distintas que los dos grupos de estudiantes. Todos los grupos a excepción de los matemáticos utilizaron un gran número de estrategias inadecuadas. Hanson y Hogan (2000) elaboran una prueba de estimación para evaluar la habilidad de estimar de un grupo de 77 alumnos universitarios (con edades comprendidas entre 18 y 21 años). Toman ítems paralelos a los del test de Levine (1982) y añaden otros de suma y resta, y porcentajes y fracciones. Se selecciona una muestra de 45 alumnos con niveles alto, medio y bajo en habilidad de estimar. En el análisis de las entrevistas aparecen 23 estrategias distintas de estimación, trece de las cuales no aparecían en anteriores investigaciones.

Una característica común a todas estas investigaciones sobre estrategias de estimación es que en ellas se han considerado "estrategias específicas" a las destrezas de aproximación utilizadas para sustituir los datos iniciales por otros más manejables (redondeo, truncamiento, sustitución de un decimal por una fracción, uso de números compatibles, etc.). Sin embargo, también han tenido consideración de "estrategias específicas" los algoritmos de cálculo (imitación del algoritmo escrito y los productos parciales incompletos), las propiedades de las operaciones (estrategia distributiva), los procesos generales de estimación (compensación intermedia, compensación final), e incluso las actuaciones de los alumnos en las que se pone de manifiesto que no están realizando una estimación (tratar de hacer un cálculo mental exacto, negarse a realizar una estimación o la ya citada imitación del algoritmo escrito) o en las que no hay un procedimiento genuinamente matemático (intentar adivinar el resultado). Por contra, De Castro, Segovia y Castro (2002) —en su trabajo con 53 maestros en formación— utilizan un modelo alternativo para la descripción de las estrategias de estimación en el que interpretan las estrategias de forma "global". En él, las estrategias están integradas por destrezas de aproximación, algoritmos de cálculo, procesos cognitivos (reformulación, traducción y compensación) y procesos metacognitivos (como la valoración del resultado). La adopción de este modelo permite a los autores identificar y caracterizar estrategias de estimación y realizar una clasificación sistemática de las mismas, atendiendo a los procesos de estimación que intervienen en ellas.

Como se acaba de indicar, también los procesos metacognitivos han recibido atención en el ámbito de la estimación. Sowder (1994) afirma que los individuos considerados como buenos estimadores "suelen ser caracterizados como flexibles, tienen confianza en sí mismos, toleran el error en las estimaciones y [...] examinan la razonabilidad de los resultados" (p. 142). De este modo, el sujeto que realiza una estimación debe ser capaz de

elegir de forma flexible una estrategia adecuada para el problema de estimación y de evaluar tanto el proceso (modificándolo si fuera oportuno) como el resultado (examinando la razonabilidad del mismo). Sowder (1994) considera la elección flexible de estrategias y la valoración del proceso y del resultado como ejemplos de "auto-regulación" y "auto-monitorización" que constituyen procesos metacognitivos.

En resumen, puede decirse que el modelo RTC (Reformulación, Traducción y Compensación) presentado por Reys y otros (1982) es asumido en general como marco teórico general para elaborar informes de investigación sobre estimación en cálculo. Algunos autores (De Castro, Segovia y Castro, 2002; LeFevre, Greenham, y Waheed, 1993; Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989) han intentado dar descripciones más precisas de los procesos y estrategias de estimación, basándose en este modelo. Como ya se indicó, hay diferentes concepciones sobre las estrategias. En algunos trabajos se estudian las "estrategias específicas" centrando la atención en un punto aislado del proceso de estimar —como la aplicación de una destreza de aproximación; en otros, se adopta un enfoque más global —de "estrategia general"— más acorde con la forma de ver las estrategias en otros campos de investigación como el de la resolución de problemas. Queda pendiente para futuras investigaciones el estudio más detallado —y la incorporación a los modelos de estrategias de estimación— de los procesos metacognitivos que intervienen en la ejecución de las tareas de estimación y los factores afectivos que influyen en la misma. También debería profundizarse en el estudio de las estrategias que utilizan los sujetos para dar estimaciones para cálculos inmersos en un contexto de resolución de problemas.

Para terminar, se incluyen dos aportaciones recientes al estudio de estrategias provenientes de la Psicología. Lemaire, Lecacheur y Farioli (2000) estudian el uso de estrategias de estimación, en tareas de suma y resta, de 23 niños franceses de 10 años. También investigan la frecuencia de uso de las estrategias, la relación del uso de estrategias con las características del problema y la eficiencia, en términos de precisión y rapidez, de las mismas. Los niños utilizaron cuatro estrategias: redondeo con descomposición, redondeo sin descomposición, compensación y truncamiento. Los dos tipos de redondeo fueron las estrategias utilizadas con más frecuencia. El truncamiento fue la estrategia ejecutada con mayor rapidez y la compensación, la más lenta. La compensación fue la estrategia utilizada con mayor precisión. Los niños eligieron las estrategias en función de las características del problema mostrando una gran capacidad de adaptación en el uso de las mismas. En otro trabajo, Lemaire y Lecacheur (2001) llevan a cabo un estudio para averiguar qué estrategias eran las preferidas por niños y jóvenes franceses para hacer conversiones de francos a euros. También investigan qué estrategias se aplican con mayor rapidez y precisión. La mejor estrategia (en términos de rapidez, precisión y preferencia por parte de los participantes) fue la de "añadir la mitad". Para hacer este tipo de conversión es necesario multiplicar por 0.152449. Si se desea realizar una estimación, basta con multiplicar por 0.15. Esta operación es equivalente a tomar la cantidad en francos, añadir la mitad y dividir por 10. Por ejemplo, 82 francos serán aproximadamente  $(82 + 41) \div 10 = 12.3$  euros (La cantidad exacta es 12.5). Como resultado de sus investigaciones, los autores recomiendan la enseñanza de esta estrategia para realizar conversiones de francos a euros. Estos dos trabajos ponen un acento quizá excesivo en la eficiencia de las estrategias —valorada en términos de rapidez y precisión. Sin embargo, el trabajo de Lemaire y Lecacheur (2001) tiene interesantes implicaciones para el diseño curricular partiendo de un estudio sobre las estrategias que se utilizan realmente en la vida diaria y se han desarrollado fuera del contexto escolar.

También dentro de la categoría de investigaciones sobre análisis de estrategias de estimación, pueden situarse algunos estudios en los que, como objetivo secundario, se ha realizado un análisis de los errores en la estimación —Bobis (1991), De Castro, Castro y Segovia (2002), Lefevre y otros (1993) y Levine (1980). Aunque las tipologías de los errores en estimación varían de unos autores a otros, prácticamente en todas ellas aparecen: errores en la aproximación de los números —previa al cálculo—, errores debidos a una falta de coordinación de la destreza de aproximación utilizada con las reglas para operar la coma decimal, errores en la compensación —tanto en la dirección como en la intensidad de la misma—, errores en el ajuste del valor posicional, en el cálculo mental u otros debidos a una ausencia de procesos específicos de estimación. Entre las causas de estos errores suelen citarse el conocimiento deficiente sobre la estimación, sus procesos y estrategias, sobre los decimales y las fracciones, conocimiento inadecuado sobre las operaciones —en particular sobre el efecto de multiplicar o dividir un número por un decimal menor que uno— y otras como la sobrecarga de la memoria. Los esfuerzos futuros orientados a la clarificación de este campo de estudio pueden servir para complementar los hallazgos de las investigaciones sobre factores que influyen en la habilidad de estimar. De ellos pueden obtenerse valiosas implicaciones para el diseño curricular. No obstante, más allá de esto, la propia naturaleza de la estimación, cuyas tareas admiten múltiples "respuestas razonables", hace que en algunas ocasiones sea muy difícil trazar una línea divisoria entre lo que es un error y lo que no lo es. Por esta razón, el estudio de los errores en la estimación puede aportar además una perspectiva novedosa que enriquezca los debates teóricos sobre el error en matemáticas.

## ENSEÑANZA DE LA ESTIMACIÓN EN CÁLCULO

La introducción de la estimación en el currículo escolar se ha enfrentado siempre a numerosas dificultades. Por una parte, la matemática suele considerarse como una ciencia exacta, dentro de la cual tienen muy difícil cabida resultados aproximados. Esto hace que, frecuentemente, la estimación no sea considerada por muchos como "parte de las matemáticas" y sus técnicas y procesos no sean tenidos por matemáticamente válidos. Por otra parte, una creencia muy arraigada entre los escolares es la de pensar que cada problema de matemáticas admite una única solución y un único procedimiento válido para llegar a la misma. Al estimar, por contra, se aceptan como igualmente válidas soluciones distintas, muchas de las cuales son obtenidas por procedimientos intuitivos inventados por los alumnos, alejados de los algoritmos de cálculo tradicionales. Así, si se desea que la estimación sea aceptada y bien comprendida por los alumnos, no es posible limitarse a añadir algunas lecciones adicionales sobre este tópico a los antiguos manuales escolares. Es necesario, además, defender una visión más abierta, y una concepción distinta, de las matemáticas que deje espacio de forma natural a los procesos de estimación —tan diferentes de los de las matemáticas usuales. Los investigadores, profesores y diseñadores de currículos han ido paulatinamente asumiendo estos planteamientos. Esta evolución ha ido marcando el paso de las investigaciones en este tópico.

Así, muchos investigadores se han planteado estudiar la efectividad de un periodo de instrucción sobre estimación para mejorar la habilidad de estimar (Bestgen y otros, 1980; Bobis, 1991; Edwards, 1984; R. E. Reys, Bestgen, Trafton y Zawojewski, 1984; Schoen, Friesen, Jarrett, & Urbatsch, 1981; Segovia, 1986). En todos los casos se han desarrollado una serie de lecciones sobre estimación o sobre los componentes de la

misma. Todos los autores coinciden al concluir que un periodo de instrucción sobre estimación —aun siendo breve— mejora la habilidad de estimar de los alumnos. Otros resultados de estas investigaciones son: cuando la enseñanza de la estimación es significativa, y no sólo memorística, la habilidad de estimar puede transferirse a la estimación en resolución de problemas (Schoen, Friesen, Jarrett, & Urbatsch, 1981); los alumnos alcanzan una comprensión mucho mayor sobre la estimación y aumenta considerablemente el número de estrategias utilizadas por los alumnos para realizar una estimación y la tolerancia del error (R. E. Reys, Bestgen, Trafton y Zawojewski, 1984); el dominio de las destrezas necesarias para estimar no es suficiente, por sí solo, para garantizar la destreza en estimación (Bobis, 1991).

A pesar de haber un cierto acuerdo en estos resultados, hay autores que advierten de los potenciales peligros de llevar a cabo una enseñanza de la estimación inadecuada. Por ejemplo, Koyama (1994), en su trabajo con alumnos de cuarto, quinto y sexto grado, encuentra que la enseñanza del redondeo y de estrategias de estimación, basadas en el mismo, pueden tener efectos negativos en el rendimiento de los niños en tareas de estimación propuestas dentro de un contexto práctico. Muchos alumnos tendían a utilizar el redondeo estándar cuando era más apropiado usar el redondeo "hacia arriba" (en situaciones en las que se preguntaba a los niños si tenían suficiente dinero con cierta cantidad para comprar dos productos de un precio dado). El autor advierte que debe tenerse cuidado para que la enseñanza no conduzca a los alumnos a una forma de estimar rígida y estereotipada. Estos posibles efectos negativos de la enseñanza han sido también señalados por Schoen, Blume y Hart (1987) y por Sowder (1984).

Siguiendo esta línea crítica están los estudios cuyo objetivo es el de estudiar si los alumnos pueden aprender aspectos complejos de la estimación difícilmente reductibles a destrezas que puedan aplicarse de forma mecánica. Sowder y Markovits (1990) estudian el efecto de un periodo de instrucción en la mejora del conocimiento de los alumnos sobre el error absoluto y relativo en estimación. Participan 14 alumnos de séptimo grado. Durante el periodo de instrucción (de nueve clases) se produjo una enseñanza indirecta a través de la resolución de problemas de estimación. No hubo enseñanza explícita de estrategias de estimación. Los alumnos fueron entrevistados antes del periodo de instrucción, inmediatamente después, y cinco meses después del mismo. El estudio muestra que la comprensión de los alumnos sobre el error relativo puede mejorarse con la instrucción. Sin embargo, a los alumnos les costó mucho, al dar una estimación para el cálculo  $42 \times 34$ , darse cuenta de la necesidad de realizar una compensación, después de haber aplicado el redondeo, para reducir el error relativo en su estimación (de 1200). Para las autoras, entraña una gran dificultad conseguir que los alumnos lleguen a sentir la necesidad de compensar en estas situaciones. Por otra parte, los resultados de las entrevistas realizadas 5 meses después del periodo de instrucción resultaron mejores que los obtenidos inmediatamente después del mismo. Esto se debe, según las autoras, a que el tipo de tareas propuesto requiere "verdadera comprensión más que dependencia del recuerdo de reglas formuladas durante la enseñanza" (p. 327).

Este tipo de planteamientos ha conducido a algunos autores a abrir el enfoque, pasando a prestar más atención al sentido numérico y a su desarrollo, antes que a la estimación como una de las destrezas relacionadas con el mismo. Como ejemplo citamos el trabajo de Markovits y Sowder (1994) que analizan los efectos de una intervención, en la instrucción de un grupo de alumnos de séptimo grado, que tenía el propósito de desarrollar el sentido numérico de estos alumnos. Los alumnos recibieron enseñanza sobre cálculo mental (5 a 10 minutos al día durante 3 meses), conceptos relacionados con el tamaño de los números (siete sesiones de clase), fracciones (siete sesiones) y estimación en cálculo (nueve sesiones). Los resultados obtenidos por los alumnos en las

tareas de estimación en cálculo utilizadas mostraron que los alumnos pueden mejorar su comprensión en aspectos conceptuales difíciles de la estimación: redondear sumandos a cero cuando es apropiado, comprender el efecto que tiene en el producto de dos números el redondeo en los factores, los conceptos de error absoluto y relativo, saber cuándo y cómo deben utilizar la compensación, utilizar números compatibles para estimar cocientes y estimar el resultado de productos y cocientes con factores y divisores menores que uno.

Cabe pensar que, en el futuro, un buen trabajo sobre la enseñanza de la estimación pueda ser el que investigue cómo la enseñanza puede cambiar concepciones de los alumnos, como las citadas en el párrafo inicial de este apartado, que dificultan la introducción de la estimación en el currículo escolar. Por último, puede añadirse que, aunque la enseñanza de la estimación ha recibido hasta ahora atención insuficiente, algunos resultados de investigación permiten mirar el futuro con optimismo. Chandler y Brosnan (1994) que realizan un análisis comparativo de libros de texto editados antes y después de 1989 (fecha de la publicación de los estándares del NCTM). El análisis de datos revela que las actividades de estimación y las que proponen el uso de las calculadoras aumentan considerablemente. En particular, el número de páginas en las que hay actividades en las que se anima a realizar una estimación aumenta un 61% reflejando bastante bien las recomendaciones del NCTM.

## EVALUACIÓN DE LA ESTIMACIÓN

Inicialmente, los autores dedicados a la investigación en estimación asumían —sin apenas cuestionarlo— que la habilidad de estimar podía ser valorada mediante la administración de un test ante el cual los sujetos debían producir estimaciones para diversos cálculos. De acuerdo a esta premisa, autores como Goodman (1991) han planteado como objetivo fundamental de su investigación el desarrollo de un test de este tipo. Otros, han empleado pruebas de estimación para estudiar la posible relación de la habilidad de estimar con otros factores —como la habilidad cuantitativa (Levine, 1982).

Este planteamiento ha chocado con dos tipos de dificultades distintas. En primer lugar, la habilidad de estimar está influenciada por múltiples factores como las variables de tarea —como la presencia o no de un contexto práctico— o la forma de administración de la prueba —como la limitación del tiempo de respuesta. Esto hace que las pruebas de estimación que se han elaborado posiblemente estén evaluando habilidades distintas. Por ejemplo, Hanson y Hogan (2000) y Levine (1982) utilizan pruebas para evaluar la habilidad de estimar en las que todos los ítems son cálculos directos —desprovistos de contexto. En segundo lugar, la forma de puntuar las estimaciones, dentro de un test, también plantea problemas. Una de las opciones que aparecen en la literatura sobre estimación ha sido el uso de un determinado porcentaje de error. Esta respuesta refleja una falta de comprensión de la diferencia entre la estimación y el cálculo aproximado. En la aproximación "los valores asignados y los resultados obtenidos tienen un grado de proximidad controlada con respecto al dato exacto" (Segovia y otros, 1989, p. 22). El porcentaje de error puede darnos entonces una buena medida de este grado de proximidad. Sin embargo, cuando hacemos una estimación, es muy difícil que podamos controlar el tamaño del error cometido (Edwards, 1984). Otra opción ha sido la de evaluar mediante la elaboración de intervalos de respuesta razonable utilizando estrategias de estimación comúnmente aceptadas. En ninguna de estas dos opciones se tiene en cuenta el procedimiento por el que se ha producido la estimación. Carpenter, Coburn, R. E. Reys y Wilson (1976) señalan a este respecto: "La estimación es un proceso. Por lo cual, no

parece creíble que la habilidad de estimar pueda ser evaluada si solamente tomamos en cuenta el resultado final del cálculo. Para obtener una medida válida de la habilidad de un alumno para estimar, posiblemente sea necesario observar al alumno estimando". (p. 299)

Esta afirmación está sólidamente respaldada por distintos resultados de investigación. Sowder (1984) entrevista a 26 alumnos de sexto, séptimo, octavo y noveno grado. Pide a los alumnos que den una estimación y, a continuación, expliquen la estrategia que han utilizado. Las explicaciones se clasifican como aceptables o inaceptables. El número de explicaciones inaceptables resulta muy alto incluso en los ítems de elección múltiple en los que se da una respuesta correcta. Los alumnos tienden a utilizar estrategias como el redondeo de forma mecánica. Se concluye que para evaluar la habilidad de estimar no basta realizar una prueba de estimación. Es necesario, además, saber qué procedimientos utilizan los alumnos para producir sus estimaciones. De acuerdo con este resultado, Sowder (1989) valora —por vez primera— las estimaciones, pero también la descripción de las estrategias empleadas por los sujetos participantes, para seleccionar a los estimadores de habilidad alta de su investigación.

Otra línea de trabajo, que toma un poco de las dos anteriores, es la de utilizar las descripciones de las estrategias utilizadas por los alumnos para elaborar ítems de elección múltiple que permitan evaluar la destreza de los sujetos en la elección de una estrategia de estimación adecuada para un problema dado. Schoen, Blume y Hart (1987) examinan los procedimientos utilizados por alumnos de quinto, sexto, séptimo y octavo grado al responder a los ítems de un test de estimación en cálculo. Los alumnos muestran una fuerte tendencia a utilizar el redondeo a potencias de 10 incluso en situaciones en las que resulta más apropiado utilizar una estrategia distinta. Por esta razón, los autores concluyen que los ítems de respuesta abierta sólo sirven para medir la habilidad de los alumnos en el redondeo, pero no son adecuados para evaluar otros aspectos fundamentales de la estimación como por ejemplo la elección de estrategias adecuadas para realizar una estimación dada. Como continuación a este trabajo, Schoen, Blume y Hoover (1990) se plantean el objetivo de diseñar un test de estimación que permita medir la habilidad de los alumnos para utilizar distintos procesos de estimación. También se proponen, en relación con el objetivo anterior, describir las respuestas que dan los alumnos a ítems de estimación con distintos formatos. Para ello, participan en el estudio alumnos de quinto, sexto, séptimo y octavo grado (con un total de 1376 alumnos). Veinte alumnos fueron entrevistados, volviendo a mostrar preferencia clara por el redondeo a la potencia más cercana de 10 aun cuando era más apropiado utilizar otro tipo de estrategias. Los ítems, en los que el redondeo no era la opción adecuada, fueron los más difíciles. Se encontraron diferencias de dificultad entre formatos. Los más fáciles fueron los ítems cuyas opciones presentaban distinto orden de magnitud y los que tenían operaciones en las opciones. Los más difíciles fueron los que tenían intervalos en las opciones. Entre estos dos extremos se situaron los ítems de elección múltiple estándar y los de "puntos de referencia". Los autores proponen los ítems de elección múltiple estándar y los de intervalos en las opciones como los más apropiados para construir un test que evalúe la destreza de los alumnos para elegir la estrategia de estimación más apropiada para cada situación.

Después de toda esta discusión, parece inevitable concluir que, tanto para evaluar la habilidad de estimar, como la de elegir estrategias adecuadas para un cálculo, las pruebas de estimación resultan instrumentos claramente insuficientes. En esta línea, Schoen (1994) sugiere la necesidad de probar alternativas para la evaluación de la estimación. Este autor propone como método la observación de alumnos o grupos de alumnos trabajando dentro de un contexto de resolución de problemas que requieran estimar. El hecho de otorgar tal protagonismo a la resolución de problemas se debe a que la

estimación es una destreza matemática a la que difícilmente podemos dar sentido en ausencia de un contexto práctico. Esto es así por ser el contexto el que determina la necesidad de una respuesta exacta o aproximada, pero además, porque nos proporciona "pistas importantes para juzgar si una respuesta es o no razonable" (Hope, 1989, p. 14). Esta última consideración podría suponer una inestimable ayuda teórica para aclarar el concepto de "intervalo de respuesta aceptable", tan necesario para valorar adecuadamente los resultados de los procesos de estimación.

## DESARROLLO DE CONCEPTOS Y DESTREZAS DE LA ESTIMACIÓN

Sowder y Wheeler (1989) parten de un análisis de los componentes de la estimación en cálculo. Clasifican estos componentes en: conceptos sobre la estimación, conocimiento de los procesos y los resultados propios de la estimación, conceptos y destrezas relacionados con la estimación y factores afectivos vinculados a la misma. El objetivo del trabajo es analizar cómo se desarrolla la comprensión de estos conceptos y destrezas componentes. Participan en el estudio alumnos de tercer, quinto, séptimo y noveno grado. Las autoras llegan a la conclusión de que la comprensión de los procesos de estimación, la aceptación de múltiples respuestas o el reconocimiento de la necesidad de realizar una compensación mejoran con la edad —aunque se desarrollan muy lentamente. Se advierte del perjuicio que puede causar el énfasis que suele ponerse en la enseñanza en las respuestas únicas en el desarrollo de la comprensión de la estimación y se recomienda evitar que el aprendizaje de la estimación se convierta en la asimilación de un conjunto de reglas algorítmicas.

Case y Sowder (1990) intentan contrastar si el modelo de desarrollo evolutivo de Case (1985) explica adecuadamente la competencia de niños de distintas edades en tareas de estimación en cálculo. Participan en el estudio varios grupos de niños de educación infantil, segundo, cuarto, séptimo, noveno, undécimo y duodécimo grado. De acuerdo con la teoría de Case (1985) los niños no deberían dominar las tareas de estimación —en las que hay que coordinar las destrezas de aproximación con el cálculo mental— hasta alcanzar la etapa del pensamiento vectorial (en torno a los once o doce años). Los resultados confirmaron las hipótesis de los autores. Se obtienen valiosas implicaciones para el diseño curricular: Los niños que no han alcanzado la etapa del pensamiento vectorial no son todavía capaces de dominar las áreas de estimación, pero pueden realizar tareas "componentes de la estimación" como la aproximación de números o el cálculo mental. En general, la estimación resultó muy compleja para los niños de Educación Primaria. Algunos conocimientos fundamentales relativos a la estimación como la aceptación de varias respuestas válidas distintas y de valores aproximados para el cálculo, o el uso de la compensación, se van desarrollando con la edad. En consonancia con estos resultados, LeFevre y otros (1993) —en su trabajo con alumnos de cuarto, sexto y octavo grado y sujetos adultos— encuentran que, tanto la precisión de las estimaciones como la habilidad de estimar de los sujetos mejora con la edad. A partir de sexto grado, los alumnos parecen entender el concepto de estimación y reducen la complejidad de los problemas mediante redondeo y compensación intermedia. Los adultos tienden a dar respuestas exactas en problemas sencillos y a utilizar la compensación final. Dowker (1997) llega a la conclusión de que el número de estimaciones razonables dadas por los sujetos depende de su competencia aritmética, aumenta con la edad y disminuye a medida que crece la dificultad de las tareas. La autora propone que entre los cinco y los nueve años existe una "zona" en que el conocimiento y la comprensión de las tareas de estimación son solamente parciales.

Dentro de las investigaciones sobre el desarrollo de los conceptos y destrezas de la estimación, parece haber un acuerdo tácito en asumir como marco teórico las teorías desarrolladas por Case (1985) sobre el desarrollo intelectual. Estas teorías han sido aplicadas a la estimación (Case y Sowder, 1990) partiendo del análisis de los componentes de la estimación realizado por Sowder y Wheeler (1989). Este marco teórico ha sido también empleado en estudios sobre el desarrollo de la estimación en medida (Segovia, 1995).

## REFERENCIAS

- BENTON, S. (1986). A summary of research on teaching and learning estimation. In H. L. Schoen, & M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation* (pp. 16-30). Reston, VA: NCTM.
- BESTGEN, B.; REYS, R.; RYBOLT, J.; WYATT, J. W. (1980). Effectiveness of systematic instruction on attitudes and computational estimation skills of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(2), 124-136.
- BOBIS, J. (1991). The effect of instruction on the development of computational estimation strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 3(1), 1729.
- CARLOW, C. (1986). Critical balances and payoffs of an estimation program. En **H.L. Schoen & M.J. Zweng (Eds.)**, *Estimation and mental computation* (pp. 93-102). Reston, VA: NCTM.
- CARPENTER, T. P., COBURN, T. G., REYS, R. E., & WILSON, J. W. (1976). Notes from national assessment: Estimation. *Arithmetic Teacher*, 23(4), 296-302.
- CASE, R. (1985). *Intellectual development*. Orlando, Fla.: Academic Press.
- CASE, R.; Sowder, J. (1990). The development of computational estimation: A neo-piagetian analysis. *Cognition and Instruction*, 7(2), 79-104.
- CHANDLER, D. G.; BROSNAN, P. (1994). Mathematics textbook changes from before to after 1989. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(4), 1-9.
- COCKCROFT, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Informe Cockcroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- DE CASTRO, C. (2002). *Influencia del tipo de número en la estimación en cálculo*. Universidad de Granada.
- DE CASTRO, C., CASTRO, E., & SEGOVIA, I. (2002). Influence of number type and analysis of errors in computational estimation tasks. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26<sup>th</sup> Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 201-208). Norwich: University of Norwich.
- DE CASTRO, C.; SEGOVIA, I.; CASTRO, E. (2002). An alternative model for the description of computational estimation strategies. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26<sup>m</sup> Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 193-200). Norwich: University of Norwich.
- DOWKER, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 45-55.
- DOWKER, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition*, 3(2), 141-154.
- DOWKER, A.; FLOOD, A.; GRIFFITHS, H.; HARRIS, L.; HOOK, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical Cognition*, 2(2), 113-135.
- Edwards, A. (1984). Computational estimation for numeracy. *Educational Studies in*

- Mathematics, 15(1), 59-73.
- GLINER, G. S. (1991). Factors contributing to success in mathematical estimation in preservice teachers: Types of problems and previous mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 595-606.
- GÓMEZ, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo y los procesos cognitivos involucrados en los errores que cometen los estudiantes al aplicarlos*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.
- GOODMAN, T. (1991). Computational estimation skills of pre-service elementary teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 22, 259-272.
- HALL, L. (1984). Estimation and approximation not synonyms. *Mathematics Teacher*, 77(7), 516-517.
- HANSON, S. A.; HOGAN, T. P. (2000). Computational estimation skill of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 483-499.
- HOPE, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 12-18.
- JOHNSON, D. (1979). Teaching estimation and reasonableness of results. *Arithmetic Teacher*, 27(1), 34-37.
- KOYAMA, M. (1994). Research into relationship between the computational estimation ability and strategy and the mental computation ability: Analysis of a survey of the fourth, fifth, and sixth graders in Japan. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 35-44.
- LEFEVRE, J.; GREENHAM, S. L.; WAHEED, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11(2), 95-132.
- LEMAIRE, P. LECACHEUR, M.; FARIOLI, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 141-148.
- LEMAIRE, P.; LECACHEUR, M. (2001). Older and younger adults' strategy use and execution in currency conversion tasks: Insights from French franc to euro and euro to French franc conversions. *Journal of Experimental Psychology-Applied*, 7(3), 195-206.
- LEVINE, D. R. (1980). *Computational estimation ability and the use of estimation strategies among college students*. Doctoral dissertation. New York University.
- LEVINE, D. R. (1982). Strategy use and estimation ability of college students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 350-359.
- MARKOVITS, Z.; SOWDER, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.
- M. E. C. (1992). *Propuestas de secuencia matemáticas*. Madrid: Editorial Escuela Española. S.A.
- MONTGOMERY, M. (1990). *Results of the fourth NAEP mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston VA: NCTM.
- MORGAN, C. (1990). Factors affecting children's strategies and success in estimation. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 265-272). México: CONACYT.
- N.C.T.M. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. (SAEM THALES). Reston, VA: NCTM.
- NIETO, P. y otros. (1989). *Diseño curricular de matemáticas. Enseñanza obligatoria 12-16*. Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía.
- REYS, B. J.; REYS, R. E.; FLORES, A. (1991). Estimation performance and strategy

- use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, 22(4), 353-375.
- REYS, R. E. (1993). Research on computational estimation: What it tells us and some questions that need to be addressed. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 105-112.
- REYS, R. E.; BESTGEN, B. J.; RYBOLT, J. F.; WYATT, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(3), 183-201.
- REYS, R. E.; BESTGEN, B. J.; TRAFTON, P. R.; ZAWOJEWSKI, J. S. (1984). *Computational estimation instructional materials for the middle grades. Final report*. Washington, DC: National Science Foundation.
- REYS, R. E.; REYS, B. J.; NOHDA, N.; ISHIDA, J.; YOSHIKAWA, S.; SHIMIZU, K.. (1991), Computational estimation performance and strategies used by fifth and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 39-58.
- RUBENSTEIN, R. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 106-119.
- SCHOEN, H.; (1994). Assessing computational estimation: Research and new directions. In R. E. Reys, & N. Nohda (Eds.), *Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp. 87-97). Reston, Va: NCTM.
- SCHOEN, H.; BLUME, G.; HART, E. (1987, April). *Measuring computational estimation processes*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Washington, DC.
- SCHOEN, H.; BLUME, G.; HOOVER, H.; (1990). Outcomes and processes on estimation test items in different formats. *Journal of Research in Mathematics Education*, 21(1), 61-73.
- SCHOEN, H.; FRIESEN, CH.; JARRETT, J.; URBATSCH, T.; (1981). Instruction in estimating solutions of whole number computations. *Journal of Research in Mathematics Education*, 12(3), 165-178.
- SEGOVIA, I. (1986). *Estimación y cálculo aproximado en EGB*. Tesina de licenciatura. Universidad de Granada.
- SEGOVIA, I.; CASTRO, E.; CASTRO, E.; RICO, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
- SEGOVIA, I. (1987). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Granada: Comares.
- SHUMWAY, R. J. (1994). Some common directions for future research related to computational alternatives. In R. E. Reys, & N. Nohda (Eds.), *Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp. 187-95). Reston, Va: NCTM.
- SOWDER, J. T. (1984). Computational estimation procedures of school children. *Journal of Educational Research*, 77(6), 332-36.
- SOWDER, J. T. (1989). Affective factors and computational estimation ability. In D. B. McLeod, & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 177-191). New York: Springer-Verlag.
- SOWDER, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A Project of the NCTM* (pp. 371-389). New York: Macmillan Publishing Company.
- SOWDER, J. T. (1994). Cognitive and metacognitive processes in mental computation and computational estimation. In R. E. Reys, & N. Nohda (Eds.), *Computational*

- alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp. 139-46). Reston, Va: NCTM.
- SOWDER, J. T.; MARKOVITS, Z. (1990). Relative and absolute error in computational estimation. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 321-328). México: CONACYT.
- SOWDER, J. T.; WHEELER, M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 130-146.
- TRAFTON, P. (1986). Teaching computational estimation: establishing an estimation mind set. En H.L. Schoen & M.J. Zweng (Eds.). *Estimation and mental computation* (pp. 16-30). Reston, VA: NCTM.
- USISKIN, Z. (1986). Reasons for estimating. En H.L. Schoen & M.J. Zweng (Eds.). *Estimation and mental computation*. Reston, VA: NCTM.