

El Nacimiento de la Geometría: Los Elementos de Euclides

Concepción Romo Santos

Dpto de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid.
romosan@mat.ucm.es

Abstract

“The goal of this work is to recall the notions and geometrical problems treated in Euclid’s Elements as well as to comment on some early versions in Spanish”

A la memoria de Miguel de Guzmán

Miguel de Guzmán ha tenido una vida extraordinariamente fecunda, él ha dado proyección internacional a la Educación Matemática Española. Además ha sido una persona de una gran calidad humana, un hombre sencillo y asequible a todos. Descanse en paz.

Introducción

La matemática es una ciencia sin tiempo. Las contribuciones de los geómetras de la antigüedad están presentes con frecuencia, y también lo están, los resultados conquistados recientemente. Como decía Littelwood, los matemáticos griegos son, todavía hoy, “colegas de otra Universidad”.

El nacimiento de la geometría son los Elementos de Euclides. La cantidad y calidad de conocimientos matemáticos a principios del siglo III a. C. exigían una ordenación para su utilización por una memoria limitada. Esta ordenación son los Elementos. El lenguaje de esta obra es geométrico, pero en ella se exponen tam-

bién ideas y problemas aritméticos, algebraicos y de lo que hoy se llama análisis matemático.

El objetivo de este trabajo es estudiar las ideas y problemas geométricos expuestos en los Elementos de Euclides así como comentar algunas de las primeras versiones de dichos Elementos. Tres en castellano y una en latín.

De las versiones castellanas que elegimos, dos se encuentran en la Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial,. Son las versiones de Campaño de Novara y Jacques Peletier. La tercera, la de Carduchi se conserva en el Seminario Mayor Diocesano de Valladolid. La versión en latín que hemos elegido es la de Cristóbal Clavio, conservada también en el Seminario Mayor Diocesano de Valladolid.

1. Ideas y problemas geométricos expuestos en los Elementos de Euclides

Los Elementos de Euclides son toda la Matemática de la época; o, con otras palabras. la Matemática griega era Geometría. Ya en la primera página del primer libro nos encontramos con estas definiciones:

Definición 1.- Un punto es lo que no puede dividirse.

Definición 2.- Una línea es una longitud sin anchura.

Definición 3.- Los extremos de una línea son puntos.

Definición 5.- Una superficie es lo que tiene solamente longitud y anchura.

Definición 6.- Los extremos de una superficie son líneas.

La definición 2, con un lenguaje libre actual, corresponde a decir que una línea es el resultado de deformar, sin romper, un trozo de recta, lo que con la terminología matemática se expresa diciendo que una línea es un subconjunto de puntos del espacio homeomorfo a un segmento de recta. La definición 6 no es propiamente una definición, sino una proposición. Para extenderla es necesario, en primer lugar, tener presente que para los griegos no tenían sentido las figuras infinitas; a lo largo de toda la obra, una recta es siempre un segmento capaz de ser prolongado, por lo que constantemente se dice: “prolongando la recta AB”. Por tanto, las superficies, para los griegos, tenían siempre un borde, cuando no eran cerradas, como la superficie esférica. Con lenguaje actual, la definición 6 se diría: la intersección de dos superficies es una línea. Las condiciones de equivalencia de

las definiciones 2 y 6 constituyen uno de los teoremas fundamentales de la Matemática actual: el teorema de la función implícita.

A la vista de las definiciones del libro I de los Elementos podemos buscar las primeras raíces de la teoría de la dimensión en la antigua Grecia. De hecho, los griegos no formularon una teoría detallada de la misma; no obstante, sus estudios sobre problemas conceptuales tocaron el tema de la dimensión y de ellos surgieron ideas y teorías informales que han influido en los matemáticos de épocas posteriores, incluidos los del siglo XX.

Podemos distinguir dos teorías rudimentarias de dimensión sugeridas por estas definiciones: Una teoría directa dada por las definiciones 1,2 y 5 y una teoría indirecta que se infiere de las definiciones 3 y 6.

La primera de estas teorías proporciona una relación directa entre las figuras geométricas fundamentales y la dimensión. Las definiciones, en efecto, dan nombre y enumeran las dimensiones de las distintas figuras: Los puntos no tienen dimensión (sin partes); las líneas tienen una dimensión (longitud); las superficies dos (longitud y anchura).

La segunda teoría hace referencia al carácter inductivo de la dimensión al poder tomar cada elemento como borde de las figuras cuya dimensión es una unidad superior.

El libro V, atribuido a Eudoxo, es, seguramente, el libro más bello y acabado de los Elementos. En él se construye con gran perfección la teoría de las magnitudes, de un modo totalmente actual. Una magnitud es un conjunto a cuyos elementos se les llama cantidades y que tienen la forma, por ejemplo, de $5m$, en donde aparece un número y una cantidad. Con las cantidades se definen dos operaciones: adición, $3m+5m=8m$ y multiplicación por números: $2(3m)=(2 \times 3)m=6m$, que poseen propiedades bien conocidas. Estos conjuntos se designan hoy día con el nombre de semiespacios vectoriales. La mayor dificultad de la construcción de magnitudes está en definir el conjunto de los números, que debe ser el de los números reales. Lo sorprendente del caso es que el concepto de número real ha sido uno de los que más ha costado establecer con precisión, debiéndose a Dedekind, a finales del siglo pasado, la primera definición correcta de estos números. Pues bien, Dedekind en el prefacio de su memoria, confiesa que la idea desarrollada en esa memoria no es suya, que se ha limitado a expresar en lenguaje actual la construcción dada en el libro V de Euclides. ¿Es sorprendente?.

El libro V de Euclides ha estado sin ser entendido durante más de veintidós siglos. Los números que definen los griegos en el libro V no son los números reales positivos, como pensó Dedekind; pero los contiene como caso particular, como vio Krull. El conjunto de números negativos tardó mucho tiempo en alcanzarse, y durante el siglo XVIII todavía hubo grandes controversias acerca de los números negativos. Lo que actualmente se llama Álgebra Lineal, se encuentra por tanto, perfectamente construida, para semiespacios vectoriales de dimensión 1, en el mencionado libro V. Pero hay más: el Álgebra multilineal, construida sobre la idea de producto tensorial, que aparece desarrollada a mediados del siglo XX, como una de las teorías más modernas de la Matemática, está perfectamente desarrollada, siempre sobre espacios vectoriales de dimensión 1, en los libros II, VII, VIII, IX, y esto no es de extrañar, porque los griegos, como acabamos de señalar, no trabajaban con números, sino con magnitudes, por lo que se veían obligados, para definir la multiplicación a usar el producto tensorial. En los mencionados libros VII, VIII, IX se obtienen también los resultados fundamentales de la Teoría de Números, estudiándose la divisibilidad y llegándose a dar una bella demostración de la infinitud de los números primos. En el libro IX se llega a sumar una progresión geométrica.

Los libros I, II, III, IV contienen la parte geométrica tradicional relativa al plano, y los libros XI, XII, XIII, la geometría del espacio; paralelismo y perpendicularidad en el espacio, ángulos poliédricos, volúmenes de prismas, pirámides, cuerpos redondos y construcción y cálculo de elementos de poliedros regulares.

Prestemos un momento de atención al libro X. Comencemos por recordar que los griegos decían que el segmento AB era conmensurable con el segmento CD cuando existía un múltiplo entero (y positivo) de AB igual a otro múltiplo de CD. En caso contrario se decía que AB era inconmensurable con CD.

Esto último se expresa también diciendo que la medida de AB con la unidad CD es un número irracional. Ya los pitagóricos conocían que la diagonal del cuadrado era inconmensurable con su lado, pero lo que Euclides se propone en este libro es ver cuantos números irracionales existen. Obsérvese que los números irracionales no se pueden representar mediante un número finito de cifras, y para los griegos, el infinito actual era impensable, por lo que estos números eran sorprendentes; pero, sin embargo, como ellos los podían construir mediante un número finito de construcciones geométricas, los podían admitir sin dificultad, pero únicamente aquellos que admitían construcciones de este tipo. De aquí el interés de analizar completamente este conjunto. Esta es la finalidad del libro X, y el re-

sultado fundamental del mismo es demostrar que existen infinitos números irracionales, esto es, demostrar que, dadas varias cantidades irracionales, son capaces de construir otra distinta de las anteriores. Con la terminología actual lo que se consigue en este libro es construir ecuaciones cuadráticas o bicuadráticas cuyas raíces son reales y positivas. La belleza de este libro y el ingenio empleado en él son extraordinarios. Sin embargo, a lo largo de los siglos han sido muchos los que se han preguntado para qué sirve dicho libro, cuyos resultados no se aplican en ningún momento, ya que no puede considerarse justificado todo el esfuerzo de estudiar el problema de los irracionales cuadráticos reales por la aplicación al cálculo de los elementos de los poliedros regulares convexos del libro XIII. Veintidos siglos más tarde, a partir de las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, se ha podido comprender el significado del mismo. El problema de este libro es de la más estricta actualidad, ya que se trata de uno de los problemas que está actualmente sobre el tapete: el estudio de las propiedades algebraicas reales.

Auxiliándonos del libro XI, analicemos el concepto de dimensión en la Grecia antigua. En dicho libro encontramos las siguientes definiciones relativas a los objetos básicos de la Geometría:

Definición 1.- Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y altura.

Definición 2.- El borde de un sólido es una superficie.

De la misma manera que en el libro primero, podemos distinguir dos teorías rudimentarias de dimensión sugeridas por estas definiciones. Una teoría directa dada por la definición 1 y una teoría indirecta que se infiere de la definición 2.

La primera de estas teorías proporciona una relación directa entre las figuras geométricas fundamentales y la dimensión. Así de la definición 1 se deduce que los sólidos tienen tres dimensiones (longitud, anchura y altura).

La segunda teoría hace referencia al carácter inductivo de la dimensión al poder tomar cada elemento como borde de las figuras cuya dimensión es una unidad superior. Este es el aspecto de la dimensión que se ha tenido en cuenta en las teorías modernas de la misma: “Un conjunto o espacio de dimensión n (según la definición inductiva) es aquel para el cual n es el menor entero que cumple la condición de que cualquier punto del mismo tiene una base de entornos con fronteras de dimensión menor o igual que $n-1$, asignando al conjunto vacío la dimensión -1 ”.

Continuemos nuestra observación de la recién nacida geometría. También en el libro XI se aborda el problema de medir el volumen de los prismas. La idea es simplemente esta: dos prismas tienen el mismo volumen cuando se pueden cortar en trozos, de modo que al recomponer de modo conveniente todos ellos resulte en ambos casos el mismo cubo. Este problema se resuelve totalmente en dicho libro. En el libro XII se trata de hacer lo mismo con la pirámide. Pero esto ya no es posible. Esto es, no se puede trocear una pirámide en un número finito de partes que al recomponer estas se obtenga un cubo. Para resolver este problema es preciso utilizar la idea más importante de la Matemática, que es el concepto de límite.

Este concepto está prácticamente contenido en el método de exhaustación, que se atribuye también a Eudoxo. Si esto fue así, el hombre genial de la antigüedad helénica sería Eudoxo, ya que resolvió los dos problemas más difíciles : creación de los números reales y concepto de límite. El concepto de límite es el fundamento del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz, por lo que el método de exhaustación puede considerarse como el germen de este importante capítulo de la Matemática. Con el método de exhaustación se calculan en el libro XII los volúmenes de las pirámides y de los cuerpos redondos. Pero hay más: lo que realmente se consigue en este capítulo es reducir el cálculo de un volumen al cálculo de áreas, o con lenguaje actual , se reduce el cálculo de una integral triple al de una integral doble, lo cual es el importante teorema de Stokes de la Matemática de nuestros días.

El libro XIII está dedicado a la construcción de los cinco poliedros regulares convexos. Y de nuevo se puede volver a formular la pregunta: ¿Para qué sirven estos poliedros?. Excluido el cubo, puede decirse que en aquel momento para nada. Sin embargo, a partir de la introducción de la idea de grupo por Galois en el siglo pasado, los poliedros regulares han proporcionado modelos de grupos con aplicaciones al Álgebra, a la teoría de funciones automorfas, a la cristalografía, etc.

Vemos, pues, que en esta fotografía de la Geometría en su infancia se observan todas las características fundamentales que aparecerán desarrolladas en su edad adulta. Lo más importante es observar que los problemas básicos de la Matemática están perfectamente planteados en los Elementos, esto es: problemas lineales y multilineales, teoría de números, problema de la aproximación local y problemas de la medida.

2. Versiones de los Elementos de Euclides de Carduchi, Clavio, Campano de Novara y Jacques Peletier

Comentaremos algunas de las primeras versiones castellanas de la obra del gran matemático y geómetra clásico Euclides.

Luis Carduchi: Elementos geométricos de Euclides, Alcalá de Henares 1637, Libro impreso, Seminario Mayor Diocesano, Valladolid.

Luis Carduchi era hijo de padres italianos y sobrino de los pintores Bartolomé y Vicente Carduchi. Fue matemático y arquitecto militar. Escribió varios libros sobre matemáticas y diseñó una serie de planos para hacer navegable el río Tajo.

Los Elementos geométricos de Euclides, comentados por Carduchi y editados en 1637 en Alcalá, es una de las primeras traducciones al castellano de la obra de Euclides, después de la de Rodrigo Zamorano de 1576. El libro está dedicado al Conde Duque de Olivares.

Cristóbal Clavio: Euclides elementorum libri XV, Roma, 1574, Vicentium Accoltum, Libro impreso, Seminario Mayor Diocesano, Valladolid.

Cristóbal Clavio (Bamberg 1537, Roma 1612) fue un jesuita alemán que se dedicó con entusiasmo al estudio de las Matemáticas. Amigo de Kepler, algunos historiadores le atribuyen el uso del punto para separar la parte entera de la decimal de un número.

En la biblioteca del Seminario Mayor de Valladolid se conserva la primera edición de 1574, de los Elementos de Euclides, en 15 libros, comentada por Clavio. Después aparecieron numerosas ediciones corregidas y aumentadas. Históricamente, esta obra es digna de estudio porque los comentarios de Clavio contienen gran parte de los conocimientos geométricos del siglo XVI.

Campano De Novara: Elementos geométricos de Euclides, Venecia 1509, Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial.

La biografía de Campano de Novara es muy poco conocida. Se le sitúa en el siglo XIII, aunque no falta quien lo considera del XII, e incluso del XI. La aportación fundamental de Campano de Novara es la traducción de los Elementos sobre una versión de Adelard de Bath, que será la primera que se edite en Venecia en 1482. En la Biblioteca del Monasterio se encuentra una edición de dicha traducción de 1509

Jacques Peletier: “Euclides Elementa”, Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial.

Las obras escritas por el matemático francés Jacques Peletier pueden ser consideradas como prototipo de las del siglo XVI. Todas sus obras tienen un gran interés histórico. En El Escorial encontramos su Aritmética Departie, Lion 1554, que contiene un cuadro de coeficientes binómicos, cien años antes de que lo popularizara Pascal, y una regla de “falsa exposición”, aplicada al cálculo de raíces. “Euclides Elementa” con demostraciones de Theón y Campano de Novara. Y unas “Disquisiciones geométricas”, en las que realiza una aplicación de la proporcionalidad a la Geometría.

Bibliografía

- [1] Abellanas Cebollero, Pedro: “Discurso de Apertura del curso 1979-80”, Universidad Complutense.
- [2] Romo Santos, Concepción: “Libros de Matemáticas en la Iglesia de Castilla y León”, “Revista Educación Matemática, Volumen 3, nº 2. México 1991.
- [3] Tarrés Freixenet, Juan: “Historia de la teoría de la dimensión”. Seminario de Historia de la Matemática. Universidad Complutense. Madrid 1991.