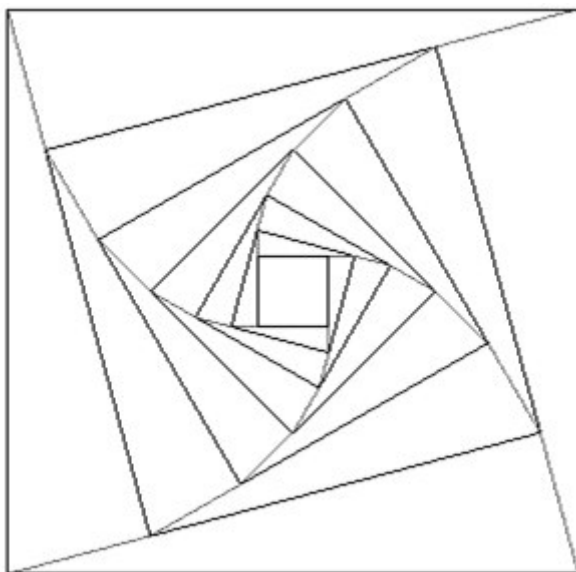


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 117
ABRIL DE 2024**

Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Lozano

Transposición informática y formación del profesorado en matemáticas

Inés M. Gómez-Chacón

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología e Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Abstract

An implementation research is presented based on the project ESCEMMAT in mathematics. The research strategy is framed inside a Design- Based Research (DBR). It describes the methodology used in initial teacher training, multimedia learning scenarios to help high school teacher-students learn to teach algebraic systems with technology. The results allow us to identify how the attitudes and the instrumental reasoning play a role in the construction of mathematical knowledge to be taught and affect how the computational transposition is developed.

In memoriam del profesor Eugenio Roanes Lozano

Introducción

Las investigaciones sobre el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas desde diversas perspectivas teóricas son numerosas, muestra de ello son las publicaciones del National Council of Teachers of Mathematics ([1],[2]), el 17th ICMI study ([3]), y los libros de la editorial Springer serie denominada *Mathematics Education in the Digital Era* (por ejemplo, [4], [5]), así como las actas de la *International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT)*. Estos estudios han puesto de manifiesto que

- el diseño de tareas matemáticas potenciadas por las TIC es una cuestión delicada y heterogénea, y
- el área educativa con apoyo tecnológico está cambiando rápidamente y ofrece nuevas formas de abordar el pensamiento matemático, pero el desarrollo teórico didáctico apenas sigue el ritmo del progreso tecnológico, ni aborda la necesaria formación del profesorado.

La formación del profesorado se destaca en distintas investigaciones sobre todo en la necesidad de prestar atención a los procesos de *transposición informática* ([6], [7]) y especialmente a nivel universitario en lo referente al conocimiento didáctico ([8], [9]) y pedagógico de la tecnología (PTK) ([10]). En la actualidad sigue siendo un reto la extensión de la transposición didáctica a los contextos computacionales dando lugar a la *transposición informática, entendida como el* reconocimiento de las ventajas y limitaciones de los contextos informáticos y el análisis de cómo el conocimiento matemático se transforma a partir del uso de estos ([11], [7]).

Este artículo busca apoyar los estudios de implementación de la transposición informática presentando resultados de una investigación en Educación Matemática pionera en el área realizada en colaboración con el profesor Eugenio Roanes Lozano, colega en el área y compañero del departamento de Álgebra de la Facultad de Ciencias Matemáticas. El proyecto al que nos referiremos es el que tiene por título *Escenarios Multimedia en Formación de Futuros Profesores de Matemáticas de Secundaria (ESCEMMAT)* (UCM-2007-463) aprobado por la Universidad Complutense de Madrid (UCM) en el 2007. En el que participaron seis investigadores de la UCM (Rafael Carballo Santaolalla (†), María José Fernández Díaz, Inés M. Gómez-Chacón (investigadora principal, coordinadora), Nuria Joglar Prieto, Eugenio Roanes Lozano (†), Eugenio Roanes Macías).

También esta línea de transposición informática y de formación del profesorado la pude seguir desarrollando desde 30-10-2009 hasta el 27-4-2017 como miembro del Grupo de Investigación UCM: 910563- *Álgebra Computacional e Inteligencia Artificial* con vigencia desde 22.12.2004 (GR201/04) y dirigido por el profesor Eugenio Roanes Lozano. Se pueden consultar las publicaciones que realizamos en colaboración con Miguel. A. Abánades, Francisco Botana, Jesús Escribano sobre *distintas herramientas informáticas para el Concepto de Lugar Geométrico* poniendo el acento en la génesis de utilización personal y profesional (ver por ejemplo [12]). En este estudio, con base en sistemas de geometría dinámica, se comparan tres herramientas, las diferentes representaciones matemáticas de los lugares geométricos generadas por ellas, tanto desde la perspectiva de su dinámica matemática como de sus funcionalidades didácticas. Los resultados ponen de relieve la necesidad de articular en el trabajo geométrico los niveles epistemológico y cognitivo a través de diferentes génesis de razonamiento (visual-discursiva, instrumental y discursiva).

En lo que sigue se describe el proyecto ESCEMMAT (Escenarios multimedia para el aprendizaje de las matemáticas) y se precisa la colaboración con el profesor Roanes Lozano sobre transposición informática y formación de profesores en el tema de Sistemas ecuaciones algebraicas.

2. Formación del profesorado de matemáticas y tecnología

El trabajo del docente en entornos informáticos es complejo, requiriendo nuevas competencias técnicas, didácticas y matemáticas ([6] en la formación inicial del profesorado. Los supuestos que guiaron esta propuesta de formación fueron los siguientes:

H1: como estudiante, el uso de software para resolver problemas matemáticos durante los estudios universitarios no conduce espontáneamente al desarrollo de un método, como profesor, para integrar el software en la enseñanza situaciones de enseñanza;

H2: la influencia positiva que tiene la formación en el uso de las TIC en la actividad del estudiante para profesor tiene como base la articulación entre la génesis instrumental y la dimensión profesional del profesor en sus componentes cognitiva, mediática, personal e institucional.

De acuerdo con estas hipótesis, se realizaron diversos experimentos de enseñanza, en situaciones de formación en el marco del desarrollo curricular de la enseñanza superior del Grado en Matemáticas. Estos escenarios se diseñaron para que los estudiantes universitarios, posibles futuros profesores de matemáticas en secundaria, adquirieran las competencias necesarias para enseñar matemáticas utilizando las TIC. El material curricular de estos escenarios está en formato multimedia (sitio web con vídeos y documentos).

3. Fundamentación teórica y metodología

Para el establecimiento de las competencias, el análisis de las prácticas docentes y las situaciones específicas de formación, hemos utilizado como marco conceptual el enfoque de la Doble Aproximación definido por Robert y Rogalski ([13]), que combina la ergonomía cognitiva con un enfoque didáctico de la actividad del profesor con el enfoque de la aproximación instrumental ([6]). La idea principal de este último enfoque es la génesis instrumental, a través de la cual los seres humanos construyen patrones instrumentales para manejar herramientas.

El trabajo de la detección y desarrollo de competencias para aprender a enseñar matemáticas con TIC's que aquí se presenta está ligado a la combinación de los siguientes cuatro aspectos:

1. *Aspecto tecnológico*: uso de tecnología en el aula, control de la transposición informática,
2. *Aspecto pedagógico-didáctico*: control de la transposición didáctica y de los recursos docentes,
3. *Aspecto conceptual*: dominio del contenido matemático,
4. *Aspecto profesional*: control de la componente socio-institucional y de la componente personal del profesor de matemáticas de secundaria.

Para más detalles y desarrollo se puede consultar algunas publicaciones sobre este proyecto ([14], [15], [16]).

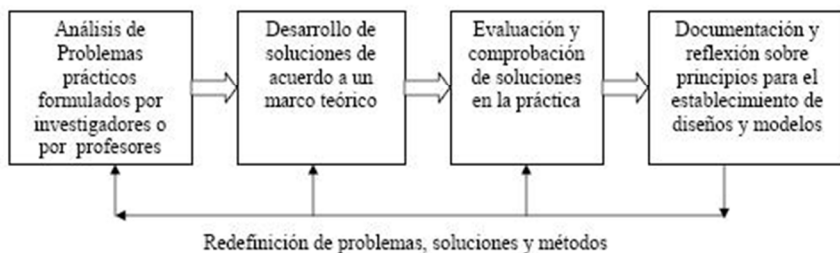


Figura 1: Metodología *Design based Research*

Se ha utilizado la noción de escenario de aprendizaje y la metodología de investigación *Design-Based Research* para el diseño, desarrollo e implementación de los escenarios, siempre teniendo en cuenta los cuatro aspectos mencionados. El *concepto escenario* es un concepto teórico-práctico en el que se desarrollan unos objetivos educativos y de aprendizaje matemático determinados. Además, se define un plan activo vinculado a los dos objetivos principales de la investigación citados en la introducción de este trabajo, con sugerencias sobre las herramientas informáticas a utilizar en el aula, la secuencia didáctica, los roles del profesor y de los alumnos, las características del grupo, el plan de actividades, la aproximación epistemológica, las características del ambiente de aprendizaje, etc.

La metodología *Design-based Research* (Figura 1) es una metodología de investigación sistemática y flexible que tiene por finalidad la mejora de la práctica educativa a través de un análisis iterativo del diseño, desarrollo e implementación, basado en la colaboración entre investigadores y docentes ([17]). Los estudios tienen lugar en situaciones reales dentro de la práctica diaria organizados en dos fases: fase de anticipación y fase de reflexión. Las fases se combinan en distintas

etapas temporales de manera cíclica y recursiva en espiral. Esta metodología permite mejorar la manera en la que un diseño opera en la práctica ya que contempla la revisión de los aspectos que no funcionan adecuadamente y su modificación durante el proceso del estudio. Además, permite por lo tanto complementar y usar simultáneamente la investigación teórica en el área de la formación inicial de profesores y la experiencia educativa en la práctica.

Los escenarios están concebidos como material curricular de formación. Por esta razón, es importante subrayar que hay que distinguir entre dos tipos de situaciones: una situación de formación y las situaciones de enseñanza. Estas situaciones implican varios niveles de actividad y práctica, tanto para el formador (profesor universitario) como para el estudiante futuro profesor de secundaria. En la situación de formación, hay dos niveles de actividad: las actividades del formador (A1) y las actividades del estudiante futuro profesor durante la formación (A2). En las situaciones de formación, el enfoque de la doble aproximación y el enfoque instrumental dan acceso al nivel de la etapa práctica: P1, la del formador, y la etapa P2, la del estudiante-profesor en prácticas. Las tareas de éste están vinculadas al desarrollo de las matemáticas en la medida en que construye sus competencias profesionales para aprender a enseñar utilizando la tecnología. En este nivel de práctica (P2) el estudiante-profesor tendrá que realizar diversas tareas relacionadas con el manejo instrumental de software para el aprendizaje de las matemáticas, así como tareas relacionadas con la creación de tareas para la enseñanza de los alumnos de secundaria. La aproximación instrumental nos permite analizar la génesis instrumental propuesta al estudiante-profesor. En la situación de enseñanza encontramos los siguientes niveles de actividad: el nivel de actividad del formador, el nivel de actividad del estudiante-profesor y el nivel de los alumnos de secundaria.

4. Implementación Escenario: Aprender a enseñar sistemas algebraicos. Usos del Derive

4.1 Presentación

En esta sección se presenta el *Escenario 1*, con el tema *Sistemas de Ecuaciones Lineales y Algebraicas con Derive*, experimentado con alumnos de la Facultad de Matemáticas de la UCM, en la asignatura Metodología Matemática. Los objetivos del Escenario 1 eran: a) reconocer el valor del uso de las TIC; b) mejorar el conocimiento de la profesión de profesor; c) reconocer técnicas y recursos específicos para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en secundaria; d) potenciar la reflexión auto-formativa sobre la enseñanza de los

sistemas de ecuaciones en los futuros profesores tras trabajar con los materiales elaborados. Todo ello basándonos en el análisis del trabajo práctico del estudiante-profesor tras recibir la formación tanto de Matemáticas como en Educación Matemática. En la Figura 2 recoge las distintas actividades de fundamentación teórica y desarrollo práctico.



Figura 2: Escenario secuencia de actividad

4.2 Fundamentación matemática y trasposición informática

En la propuesta se trabajó la modelización de competencias del estudiante para profesor desde la interacción que supone distintos dominios de conocimiento para su actuación didáctica: contenido matemático, tecnología y modelización de procesos de aprender a enseñar (véase Figura 3). Esto exigió que los conocimientos que los estudiantes-profesores tenían que transformar para preparar la tarea descrita en el Escenario 1 (ver caso), involucraran ambas formaciones didáctica y matemática. Por tanto, la profesora Gómez-Chacón responsable de la asignatura *Metodología Matemática* en la que se desarrolló la experiencia fortaleció la *formación didáctica* articulada en tres bloques (Figura

3): Enfoque realista en la Didáctica de la Matemática, Didáctica del Álgebra y competencia en razonamiento algebraico y usos del programa Derive ([18]); y la *formación matemática*, focalizando en la transposición didáctica del tema matemático *Sistemas de Ecuaciones Algebraicas* conectando la formación universitaria: Álgebra lineal (sistemas lineales) y Estructuras Algebraicas (sistemas algebraicos) y estructuró de la siguiente forma: 1. Introducción y planteamiento del problema (sistemas de ecuaciones lineales: método de eliminación de Gauss, y notación vectorial), 2. Sistemas de ecuaciones lineales (teorema de Rouché-Fröbenius, Regla de Cramer, visualización. problemas geométricos: ecuaciones de subespacios vectoriales); 3. Sistemas de ecuaciones algebraicas.

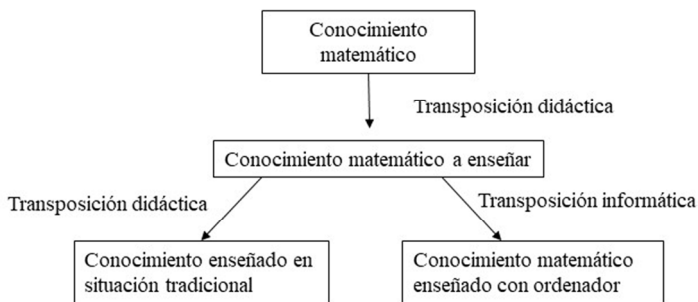


Figura 3: *Transposición didáctica e informática en matemáticas*

En este contexto, la contribución que realizamos en colaboración con Roanes Lozano fue en la articulación para este tema de la *transposición informática* que conlleva el tema *Sistemas de ecuaciones algebraicas* mediante las herramientas informáticas de *Derive* y *las bases de Groebner*.

Es sabido que la mayoría de los problemas en Matemáticas, Ciencias e Ingeniería son no lineales: se pueden modelizar con sistemas de ecuaciones polinomiales (no lineales). Las herramientas entonces para resolver estos sistemas son mucho más complejas y modernas que las utilizadas en el caso lineal descritas en las secciones anteriores. Una de las herramientas clave para encontrar las soluciones a un conjunto de ecuaciones polinomiales son las bases de Groebner. Ejemplos de ecuaciones algebraicas no lineales en dos y tres variables son por ejemplo: $y - x^2 = 0$ y $x^2 + 2y^2 - z = 0$. El conjunto de soluciones de las ecuaciones citadas en el plano real y en el espacio de tres dimensiones real son, respectivamente, una parábola y un paraboloides elíptico. Vemos entonces que,

intuitivamente hablando, los conjuntos de soluciones de ecuaciones algebraicas no lineales están curvados, no son planos como en el caso lineal descrito anteriormente.

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales es la intersección del conjunto de soluciones de cada ecuación por separado (hipersuperficie). Dichos conjuntos reciben el nombre de variedades algebraicas. Como en el caso lineal, los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales pueden tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Además, una cuarta posibilidad surge en el caso no lineal: el conjunto de soluciones puede tener varias componentes conexas. Dichas variedades algebraicas vienen representadas entonces como conjuntos de soluciones de ecuaciones algebraicas. Cuando se consideran combinaciones algebraicas lineales de polinomios (es decir sumas de polinomios con coeficientes polinomiales) se generan unas estructuras algebraicas llamadas ideales dentro del anillo de los polinomios en n variables con coeficientes reales. Un conjunto de polinomios que genera un ideal (en términos de combinaciones algebraicas lineales) se llama base del ideal. La noción de base de un ideal es similar a la de conjunto de generadores de un espacio vectorial. Hay que observar que no todas las bases de un ideal tienen el mismo número de elementos, incluso cuando los no necesarios se eliminan. Cada variedad tiene entonces un ideal de polinomios asociado: el ideal generado por las ecuaciones que la definen.

	<pre>#67: GROEBNER_BASIS([x² + y² - z - 1, z - 1], [x, y, z]) #68: [z - 1, x² + y² - 2]</pre> <p>The polynomial <i>ideal</i> generated by a set of polynomials is the set of linear combinations of the given polynomials. The polynomials of the algebraic system generate an ideal that can be generated by different bases (sets of generators). For instance, the previous input and output are two different ways of generating the same ideal.</p>
--	---

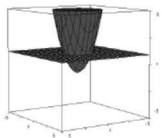


Figure 27: A circumference in the 3D space.

Let us consider the following example (see Figure 27):

#65: $\text{SOLVE}([x^2 + y^2 - z - 1 = 0, z - 1 = 0], [x, y, z])$

#66: $[x^2 + y^2 = 2 \wedge z = 1]$

SOLVE expresses the intersection the simplest possible way (as an intersection of a vertical cylinder and a horizontal plane, see Figure 28). In fact, this command is based in Gröbner bases computations.

Gröbner bases' algorithm provides a canonical basis of any given ideal, that characterizes it (once the variable ordering and term ordering are chosen).

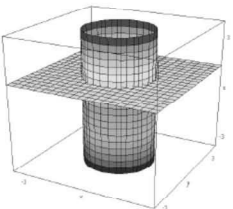


Figure 28: The same circumference in the 3D space.

Figura 4: Extracto de la sesión de clase impartida el 20/11/2007, *Derive Bases de Groebner ([19])*

Durante décadas, geómetras algebraicos conjeturaron que cada ideal de polinomios (cada variedad algebraica) tenía una base que le identificaba completamente. A principios de los años 60 del siglo pasado, H. Hironaka y B. Buchberger demostraron, de manera independiente, que este resultado era cierto. Llamaron a sus bases “bases estándar” y “bases de Groebner” respectivamente. Las últimas tienen la ventaja adicional de incluir un algoritmo para su construcción (el algoritmo de Buchberger). Dicho algoritmo está implementado en Maple ([20]).

La Fig. 4 muestra un extracto de la sesión impartida por el profesor Roanes en la que se muestran ejemplos de variedades algebraicas y bases de Groebner. Para más detalle del contenido de esta sesión ver artículos: ([21], [22]) y ([19]), que contiene los ejemplos que se desarrollaron en noviembre 2007 en clase.

Para ampliación de la información sobre bases de Groebner y la teoría de ideales dimos a la clase, además de estos artículos, la referencia el libro de Cox, Little y Donal O’Shea ([23]).

5. Algunos resultados en la práctica docente en el aula de secundaria

Siguiendo la metodología de investigación *Design Based Research* las fases se combinaron en varias etapas temporales, de forma cíclica y recursiva. Se reseña la de etapa temporal 1, curso 2006-2007 (69 alumnos del segundo ciclo de la licenciatura de matemáticas matriculados en la asignatura Metodología Matemática y Práctica Docente y futuros profesores de Secundaria) que conllevó las siguientes fases:

Fase I: análisis inicial del problema (fase de anticipación). Creación de actividades formativas primera versión del *Escenario 1 (aprender a enseñar sistemas de ecuaciones algebraicas con Derive)*. Elaboración de cuestionarios de evaluación y diagnóstico de los profesionales.

Fase II: experimentación e implementación en dos asignaturas del grado de matemáticas Metodología Matemática y Práctica Docente. El formador desarrolla sesiones de formación sobre modelización en matemáticas y sobre el uso del software Derive para sistemas algebraicos y polinómicos. Los alumnos-profesores que participan en esta primera etapa del proyecto crean un módulo para explicar sistemas de ecuaciones algebraicas para el nivel de secundaria, utilizando el programa de cálculo simbólico Derive como herramienta de apoyo (Escenario 1).

La tarea propuesta en este Escenario 1, tras recibir los estudiantes previamente la formación descrita, fue la siguiente:

Formula y resuelve con Derive una actividad para ser implementada en el aula con alumnos de Bachillerato basada en aplicaciones de resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales en los ámbitos de la Biología, Medicina, Economía, Astronomía, Ciencias Sociales, etc. Trata de plantear actividades donde se haga especial hincapié en el paso de la ecuación algebraica a la visualización geométrica. La actividad debe cubrir una hora de clase y será impartida en un laboratorio informático (aula TIC). Plantea una guía de introducción de 15 minutos y una tarea práctica para ser trabajada por los alumnos en 35 o 40 minutos. Describe con todo detalle la modelización del problema que plantees. El formato de presentación de esta actividad debe ser en word, con capturas de pantalla de Derive y adjunta los archivos de Derive también. Se valorará especialmente la creatividad.

Después de redactado el módulo, se revisó y corrigió. A continuación, el alumno profesor lo imparte, en una clase real de un centro de secundaria local que colabora con nosotros. Las sesiones de clases se graban en vídeo para su posterior evaluación e incorporación a los materiales multimedia del escenario.

Fase III: Evaluación inicial (fase de reflexión) por parte del equipo de investigación. Análisis del experimento de enseñanza y estudio de los efectos del escenario de formación sobre las competencias profesionales del estudiante para profesor. Realización de estudios de casos. Incorporación de los resultados para mejorar los materiales del curso de formación correspondiente al escenario en el curso 2007-2008).

Del gran grupo total (69 estudiantes-profesor) se eligió cuatro de ellos para la realización de un estudio de casos. De ellos, tres han preparado una memoria para una clase de 1º de Bachillerato sobre métodos de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas, especialmente lineales, y uno que lo ha hecho sobre la función exponencial. Los cuatro imparten, tras la corrección y revisión de su memoria escrita, esa clase en un aula real de bachillerato usando las TIC's acordadas en el enunciado propuesto de la tarea. Los estudiantes ponen en práctica su clase en centros de enseñanza secundaria de la Comunidad de Madrid. Se recogieron los datos de los centros, y de los evaluadores: en vivo o en vídeo ([15]).

A modo de ejemplo, incluimos brevemente los detalles de la actividad desarrollada por uno de los estudiantes, María. Se incluye en breve comentario sobre la situación inicial del estudiante extraído de una entrevista personal y de sus trabajos en las asignaturas de didáctica matemática.

Situación inicial del Estudiante 1: María es una estudiante de 5º curso de la licenciatura en Ciencias Matemáticas que ha cursado las asignaturas Metodología Matemática y Prácticas de enseñanza en el curso 2006-07. Es una buena estudiante con vocación docente. Constata como necesidad de formación como futuro profesor el aprender a evaluar a los alumnos y el conseguir una buena atención a la diversidad. Durante el período de prácticas en el instituto en el que ella había estudiado, echa de menos recursos informáticos como Derive, GeoGebra y el acceso a Internet. Por otro lado, valora especialmente el aprender de los alumnos durante el período en prácticas de 3 meses.

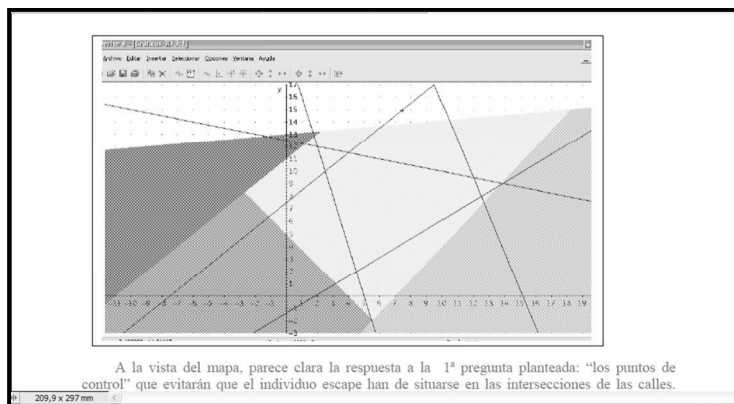


Figura 6: Captura de Derive de la actividad de Estudiante 1

Actividad real planteada por el Estudiante 1: Matemáticas y actuación policial (basada en la serie televisiva norteamericana Numb3rs). En la actividad propuesta se trata de localizar a un criminal conociendo pistas de testigos que le han visto en diferentes lugares de un barrio recientemente. Los datos recopilados corresponden con calles donde se ha visto al sospechoso que se modelizan con ecuaciones lineales y con ellas se localiza el perímetro de la zona ya reducida donde se cree que está el sospechoso.

María plantea además una actividad más avanzada con ecuaciones de grado 2 para acceder a un artefacto enterrado en una zona limitada por superficies concretas. María da indicaciones para el profesor sobre la planificación de la actividad en el aula y especifica los requisitos de los alumnos necesarios para seguir con éxito la actividad. Usa adecuadamente el editor de ecuaciones e incluye buenas capturas de pantalla del Derive en su memoria (Fig. 6). La actividad planteada es original y puede llamar la atención de los estudiantes, aunque basada en la serie televisiva.

Modificaciones y sugerencias a la actividad realizada en papel: Simplificar y reducir las actividades propuestas, son muy largas para el tiempo estipulado. Mejorar el formato para que la propuesta quede más clara. Revisar la gramática y la ortografía de todo el documento y utilizar el registro formal adecuado.

Comentarios sobre la implementación en el aula extraídos de los cuestionarios de evaluación: María muestra un dominio alto de los contenidos matemáticos tratados, plantea bien el problema para incitar la reflexión de los alumnos y usa de manera precisa en el aula el lenguaje y las operaciones simbólicas (4 sobre 5 puntos). Usa el programa Derive en el aula TIC con soltura. No planea adecuadamente la distribución temporal de la sesión en el aula y no prevé los resultados de su actuación. Motiva a los alumnos a participar y se adapta a las necesidades del grupo razonablemente. Maneja las funcionalidades básicas de Derive para representar regiones planas. No da referencias.

6. A modo de conclusión

En la primera implementación del proyecto ESCEMMAT que se describe en este artículo, se detectó la necesidad de una mayor comprensión de pre-condiciones matemáticas sobre las nuevas tecnologías para poder aplicarlas de una forma más adecuada y establecerlas como contenido curricular a nivel universitario.

Se confirmó que el nivel de éxito del estudiante en formación para profesor de matemáticas a la hora de conseguir enseñar un tema usando TIC's en el aula logrando una buena transposición informática depende claramente de las

actitudes y competencias instrumentales del aprendiz y estas deben estar articuladas con la transposición didáctica del conocimiento matemático que ofrece el formador. El prestar atención a la transposición informática ha ayudado a significar herramientas permiten, median y dan forma al pensamiento matemático, siendo ellas mismas, al menos hasta cierto punto, un producto de estos procesos. Para el tema matemático específico de Sistemas de ecuaciones algebraicos se ha puesto de manifiesto la importancia de alinear las técnicas matemáticas que emergen en la situación problemática con las técnicas disponibles en la herramienta informática.

Estos son resultados que aún permanecen abiertos tal como ha sido reseñado para la enseñanza universitaria ([8]) y que siguen requiriendo investigación.

Para terminar, se puso de manifiesto durante la elaboración de ESCEMMAT, que la composición interdisciplinar del grupo de investigadores fue muy positiva. La participación de profesores de secundaria expertos fue fundamental para la buena implementación del proyecto.

Referencias

[1] G. W. Blume y M. K. Heid, (Eds.) (2008), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1*. Research syntheses. Information Age Publishing.

[2] M. K. Heid y G.W. Blume (Eds.) (2008), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 2*. Cases and perspectives. Information Age Publishing.

[3] C. Hoyles, C. y J.-B. Lagrange (Eds.) (2010), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Springer. doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

[4] P. R. Richard, M. P. Vélez, S. Van Vaerenbergh (Eds) (2022), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning*. Mathematics Education in the Digital Era: Vol.17. Springer Nature: Cham, Switzerland. DOI: 10.1007/978-3-030-86909-0

[5] A. Clark-Wilson, O. Robutti, N. Sinclair (Eds) (2022), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. International Research on Professional Learning and Practice*. Mathematics Education in the Digital Era: Vol.16. Springer Nature: Cham, Switzerland. DOI: 10.1007/978-3-031-05254-5.

[6] M. Artigue, M. (2002), Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical

and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245–274.

[7] J.-B. Lagrange (2004), Transposing computer tools from "mathematical sciences" into teaching. Some possible obstacles, In D. Guin; K. Ruthven, L. Trouche (eds), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. Kluwer.

[8] A. Heck y L. Másilko (2021), Creating Teaching Units for Student Inquiry, In I. M. Gómez-Chacón, R. Hochmuth., B. Jaworski, J. Rebenda, J. Ruge, S. Thomas (Eds), *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning: The Platinum Project*. (pp. 93-126). Brno: MUNI, Masaryk University Editor. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-6>

[9] A. Bacelo, I. M. y Gómez-Chacón, (2023). Characterising algorithmic thinking: a university study of unplugged activities, Thinking skills and creativity, vol 48, 101284, <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101284>

[10] M.O.J. Thomas y Y.Y. Hong (2005), Teacher factors in integration of graphic calculators into mathematics learning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 257–264)*. University of Melbourne.

[11] N. Balacheff, (1994), Didactique et Intelligence Artificielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, vol 1-2, 9-42.

[12] I.M. Gómez-Chacón, F. Botana, J. Escribano, M.A. Abánades, (2016), The concept of locus. Genesis of personal and professional use with different tools, *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 30(54), pp. 67-94. DOI: 10.1590/1980-4415v30n54a04

[13] A. Robert y J. Rogalski (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, 2 (4).

[14] D. Butlen, F. Labroue, C. Asselain-Missenard, D. Perrin y I.M. Gómez Chacón (2008) Autour de la formation des enseignants, In C. Ouvrier-Bufferet & M.-J. Perrin-Glorian (éd.) *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?*

Actes colloque DIDIREM, (pp. 344-351). Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Paris Diderot-Paris 7

[15] I. M. Gómez-Chacón y N. Joglar (2008), Escenarios multimedia para aprender a enseñar con nuevas tecnologías. Estudio de casos. *V Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria*. (pp. 380-383).

[16] I.M. Gómez-Chacón y N. Joglar (2010), Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach, *Educação Matemática Pesquisa* (Monográfico en Tecnología y Educación Matemática), 12 (3), 485-513

[17] P. Cobb, J. Cofrey, A. di Sessa, R. Lehrer & L. Schauble (2003), Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9-13.

[18] M. de Guzmán (2002), Experiment, conjecture and proof in geometry with Derive, In J. Bohn (Ed.) *Proceedings of Vienna International Symposium Integrating Technology in Mathematics Education* (CD Rom), BK, teachware

[19] E. Roanes-Lozano (2004), Pictures at a DERIVE's exhibition (interpreting DERIVE's SOLVE command), Congreso Technology and its Integration into Mathematics Education (TIME-2004) Actas del Congreso, p. 15 (abstract). Actas con artículos completos publicadas en CD-ROM por bk teachware Schriftenreihe, Nr. SR-41, J. Boehm (ed.), ISBN 3-901769-59-5, Montreal (Canada)

[20] E. Roanes M. y E. Roanes L. (1999), *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple*, ed. Rubiños.

[21] E. Roanes-Lozano, L.M. Laita y E. Roanes-Macías (2004), Geometry of Algebraic Systems and its Exact Solving using Gröbner Bases. *Computing In Science and Engineering* 6/2, 76-79.

[22] E. Roanes-Lozano, L.M. Laita y E. Roanes-Macías (2004), Some Applications of Gröbner Bases. *Computing In Science and Engineering* 6/3, 56-60.

[23] D. Cox, J. Little y D. O'Shea (1997), *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer.

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas	2
Comité Editorial del Boletín	4
Asamblea General Ordinaria de 2024	6
Nota para los Socios que hayan cambiado de cuenta bancaria	6
Sesión conjunta del Seminario de Historia de la Matemática y del Seminario del Departamento de Álgebra, Geometría y Topología de la UCM, acerca del Prof. Etayo Miqueo	7
Exposición bibliográfica sobre el Prof. Etayo Miqueo	8
Matemática aplicada al tráfico ferroviario y al tenis desarrollada por Eugenio con varios colegas, por <i>G. Aguilera, J.L. Galán, A. Hernando, A. Martínez-Zarzuelo, E. Roanes Macías, F. Sánchez y C. Solano</i>	9
Paseos matemáticos con MathCityMap y GeoGebra Discovery: una propuesta, por <i>Belén Ariño-Morera, Angélica Martínez-Zarzuelo, Claudia Lázaro del Pozo y Tomás Recio</i>	19
Comparando álgebras de evolución con otras álgebras relacionadas, por <i>Juan Núñez Valdés, Lorena Rodríguez González y Belén Carrasco Moya</i>	38
¿Puede un teorema ser acíclico?, por <i>Jesús Aransa, Laureano Lambán y Julio Rubio</i>	54
La Educación Matemática y los juegos didácticos, por <i>M^a Carmen Escribano Ródenas</i>	64
Transposición informática y formación del profesorado en matemáticas, por <i>Inés M. Gómez-Chacón</i>	79
Reseña de libros	94
Información sobre artículos recibidos aun no publicados	96
Nota sobre el Concurso Intercentros “Joaquín Hernández” de este año	96
Instrucciones para el envío de originales	97
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	98
Boletín de inscripción en la Sociedad “Puig Adam”	99