UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Espacios de funciones débilmente contínuas sobre espacios de Banach

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Juan Ferrera Cuesta

DIRECTOR:

José Luis González Llavona

Madrid, 2015

Juan Ferrera Cuesta

ESPACIOS DE FUNCIONES DEBILMENTE CONTINUAS SOBRE ESPACIOS DE BANACH

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1982

Colección Tesis Doctorales. Nº 157/82

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1982
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-M-24651-1982

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Departamento de Teoría
de Funciones

ESPACIOS DE FUNCIONES DEBILMENTE CONTINUAS SOBRE ESPACIOS DE BANACH

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Juan Ferrera Cuesta

Madrid, Septiembre de 1980

Agradezco al Profesor José Luis González Llavona, director de este trabajo, sus valiosas orientaciones y la ayuda que continuamente me ha prestado.

También quiero expresar mi agradecimiento a los compañeros del Departamento de Teoría de Funciones que tanto me han ayudado y animado durante su realización.

INDICE

ESPACIOS DE FUNCIONES DEBILMENTE
CONTINUAS SOBRE ESPACIOS DE
BANACH

INTRODUCCION

El contenido de esta memoria es el estudio de ciertos tipos de espacios de funciones debilmente continuas que aparecen en la teoría de aproximación, tanto de funciones continuas como diferenciables. En el año 1969 Restrepo |22|, consigue una versión infinito dimensional de un teorema de Bernstein, para una clase de funciones de C^1, definidas sobre un espacio de Banach reflexivo E, con la propiedad, entre otras, de que tanto las funciones como sus diferenciales son aplicaciones debilmente continuas sobre los acotados de E. Este resultado fue generalizado para espacios de Banach E, con la propiedad de aproximación acotada y para funciones de clase C^m ($m \in \mathbb{N}$) por Aron y Prolla |1| quienes consideran clases de funciones con la propiedad de que tanto ellas como sus diferenciales, en los distintos ordenes, son aplicaciones debilmente uniformemente continuas sobre los acotados de E. Clases similares de funciones son las adecuadas para obtener versiones infinito dimensionales del teorema, tipo Stone-Weierstrass, de Nachbin |18|, como se pone de manifiesto en |1|.

Por otra parte Valdivia |31| como corolario importante de una serie de resultados sobre compacidad débil en espacios casi-completos, prueba que el espacio de las funciones reales debilmente continuas sobre un espacio de Banach, con la topología compacto-abierta, siempre es tonelado; en otras palabras: Si un espacio de Banach E no es reflexivo, siempre existen funciones debilmente continuas sobre E que no estan acotadas en la bola unidad. Resulta que dicho espacio de las funciones reales debilmente continuas sobre E nunca es completo, si dimensión de E es infinito, y que al estudiar el completado aparecen, en numerosos casos, nuevamente el espacio de las funciones debilmente continuas sobre los acotados.

El estudio sobre estos espacios se refiere principalmente a temas como la completitud, caracterización de completados, su carácter tonelado y bornológico y propiedad de aproximación.

Es importante resaltar que aunque el estudio de estos espacios tiene un interés intrínseco, a nuestro juicio lo más importante son las consecuencias que de este estudio y de las técnicas empleadas se derivan.

De forma precisa si E es un espacio de Banach real, $C_{\omega b}(E)$ va a representar el espacio de las funciones reales debilmente continuas sobre los acotados de E. Para el estudio de este espacio hemos seguido la técnica de representarlo como un espacio de funciones continuas sobre un espacio topológico. Esto nos ha permitido aplicar los resultados de Warner |32|, Ptak |21|, Nachbin |19| y Shirota |29|.

En concreto hemos tenido que abordar el estudio topológico del espacio (E , ωb), siendo ωb la topología más fina que coincide con la débil sobre las bolas de E; tanto en lo que se refiere a propiedades de aplicación inmediata en nuestro estudio, como en la línea de sistematizar los resultados referentes al caracter localmente convexo de dicha topología. Problema clásico planteado en Day |8| y resuelto en parte por Wheeler |33|.

Se obtienen resultados de interés en el estudio de la completitud de $C_{\omega b}(E)$, en particular el resultado afirmativo para espacios de Banach separables que no contienen a ℓ^1, utilizando para ello la reciente caracterización de Rosenthal |24| en esta línea. Esto nos permite dar una representación manejable del completado de $C_\omega(E)$, espacio de las funciones debilmente continuas sobre E.

En la línea de estudiar cuando es bornológico el espacio $C_{\omega b}(E)$, es de interés el teorema 4.7, que garantiza en particular que $C_{\omega b}(\ell^\infty)$ es bornológico.

La introducción del espacio $C_{\omega bu}(E)$ de las funciones debilmente uniformemente continuas sobre los acotados de E nos permite dar dos caracterizaciones de los espacios de Banach reflexivos, según el comportamiento de dichas funciones. En concreto, se demuestra que son equivalentes: a) E reflexivo

b) $C_{\omega bu}(E)$ tonelado

c) $C_{\omega bu}(E) = C_{\omega b}(E)$

Es decir siempre que un espacio de Banach no sea reflexivo, tenemos garantizada la existencia de funciones debilmente continuas sobre los acotados, que no son debilmente uniformemente continuas sobre los acotados. Este resultado ha sido utilizado por J.G. Llavona |14| para definir una nueva clase de funciones diferenciables en las que se consigue un teorema de aproximación tipo Stone-Weierstrass.

Por último mediante la utilización de la técnica del ε-producto, se demuestra que $C_{\omega b}(E)$ verifica la propiedad de aproximación, lo cual tiene evidente interés en teoría de aproximación diferencial. "

Pasamos a dar un pequeño resumen del contenido de los capítulos de esta memoria:

En el primer capítulo se dan las definiciones y resultados que serán utilizados a lo largo de la memoria. Así, para el desarrollo de nuestro trabajo, ha sido fundamental, a parte de técnicas usuales de análisis funcional, un conocimiento exhaustivo de temas como: topologías "mixtas", espacios realcompactos, teoremas de extensión, etc.

En el capítulo dos se estudia la topología ωb demostrando que es completamente regular, mediante la utilización de una técnica que puede ser generalizada para demostrar que bajo determinadas condiciones, el límite inductivo de espacios completamente regulares es completamente regular. Así mismo se dan condiciones necesarias y condiciones suficientes para ver que dicha topología sea localmente convexa. En caso afirmativo se caracteriza cuando es completo el espacio $(E,\omega b)$. Así mismo se estudian los compactos de dicho espacio, y se obtiene un resultado de regularidad en el comportamiento respecto a subespacios, de interés en los capítulos tres y cuatro.

En el capítulo tercero se demuestra que el espacio $C_\omega(E)$ solo es completo cuando E tiene dimensión finita, y se deduce de esto que en todo espacio de dimensión infinita existen funciones que son debilmente continuas sobre los acotados, y sin embargo no son debilmente continuas sobre todo el espacio. Se obtiene así mismo la densidad de $C_\omega(E)$ en $C_{\omega b}(E)$ lo cual nos permite calcular el completado de $C_\omega(E)$ en algunos casos. Se demuestra que para el caso de que E sea reflexivo o separable no conteniendo a ℓ^1, se tiene que $C_{\omega b}(E)$ es completo. Así mismo se demuestran que para $E = \ell^1$ y en algunos casos en que E contiene a ℓ^1, $C_{\omega b}(E)$ no es completo. Se introduce $C_{\omega k}(E)$ espacio de las funciones debilmente continuas sobre los subconjuntos debilmente compactos de E, y se ve que es el completado de $C_\omega(E)$. En particular se obtiene que para $E = \ell^1$, el completado de $C_\omega(\ell^1)$ es $C(\ell^1)$ espacio de las funciones continuas en norma sobre ℓ^1.

En el capítulo cuarto se caracterizan el ser $C_{\omega b}(E)$ bornológico a traves de que $C_\omega(E)$ lo sea, para el caso de que E es debilmente normal. Se dan condiciones suficientes, que mejoran el resultado anterior, para que $C_{\omega b}(E)$ sea bornológico, y se demuestran que dicho espacio siempre es tonelado. Se introduce el espacio $C_{\omega bu}(E)$ y se relaciona con $C_{\omega b}(E)$, demostrando que siempre es un subespacio denso de este último, y que la igualdad se da cuando E es reflexivo, y sólo en ese caso. Se caracteriza así mismo el ser E reflexivo por una serie de condiciones equivalentes sobre $C_{\omega bu}(E)$: a) Ser completo

b) Ser de Ptak

c) Ser Frechet

d) Ser tonelado

Por último en el capítulo cinco estudiamos los compactos y los debilmente compactos en $C_{\omega b}(E)$. Se extienden resultados de los capítulos anteriores al caso vectorial, y se obtienen teoremas de representación en términos de ε-producto. En particular se demuestra:

$$C_{\omega b}(E,L) \subset C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L \subset C_{\omega k}(E)\ \varepsilon\ L = C_{\omega k}(E,L)$$

dandose igualdades en algunos casos no triviales. Estos resultados permiten demostrar que $C_{\omega k}(E)$ verifican la propiedad de aproximación, y por tanto $C_{\omega}(E)$, $C_{\omega b}(E)$, y $C_{\omega bu}(E)$ también la verifican.

CAPITULO 1

1. Resultados preliminares. Definiciones y notaciones.

A lo largo de este trabajo, la letra X denotará un espacio topológico Hausdorff. Vamos a introducir en primer lugar dos conceptos topológicos íntimamente relacionados con el análisis funcional.

1.1. Definición: Diremos que X, completamente regular es un k-espacio si todo subconjunto C de X que verifique que su intersección con cada compacto K de X es cerrada; tiene que ser necesariamente cerrado.

1.2. Definición: Diremos que un espacio completamente regular X es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio cuando verifique la siguiente propiedad: Toda función f definida sobre X y que tome valores reales, que sea continua al restringirla a los subconjuntos compactos de X; tiene que ser necesariamente continua sobre todo X.

Claramente todo k-espacio es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, pero el recíproco no es cierto como se demuestran en |4| pág. 65-70.

No obstante si denotamos por X_k (k-extensión de X) al espacio topológico obtenido afinando la topología de X con todos aquellos conjuntos que al intersecarlos con los compactos de X sean abiertos en la topología relativa; es decir tomando la topología más fina sobre X que nos da los mismos compactos que la topología original. Obtenemos el siguiente resultado:

<u>1.3. Proposición</u>: Un $k_{\mathbb{R}}$-espacio X es k-espacio si y sólo si X_k es completamente regular.

<u>Demostración</u>: Ver |4| pág. 70. #

Es fácil ver que un subespacio cerrado de un k-espacio es también k-espacio; sin más que notar que un conjunto que intersecado con todos los compactos del subespacio es cerrado, verifica esta propiedad también para todos los compactos del espacio, luego es cerrado en el espacio y por tanto también en el subespacio.

Desgraciadamente no disponemos de un resultado semejante para $k_{\mathbb{R}}$-espacios, y la solución general de este problema parece difícil ya que nos encontraríamos ante la necesidad de extender funciones que son continuas sobre los compactos de una parte del espacio, a funciones continuas sobre todos los compactos del espacio.

El otro concepto topológico de interés en nuestro trabajo es el de espacio realcompacto. Antes de definirlo vamos a enunciar unos conceptos previos.

<u>1.4. Definición</u>. Dado X Z(X) denotará la familia de subconjuntos de X que pueden expresarse de la forma $f^{-1}(0)$, siendo f una función a valores reales, continua sobre X.

A los elementos de Z(X) los llamaremos conjuntos cero.

1.5. Definición. Dado X una subfamilia no vacía $\mathfrak{F}$ de $Z(X)$ se dice que es un z-filtro sobre X cuando verifica:

i) $\Phi \notin \mathfrak{F}$

ii) Si Z_1 y Z_2 están en $\mathfrak{F}$, entonces $Z_1 \cap Z_2 \in \mathfrak{F}$

iii) Si $Z \in \mathfrak{F}$, $Z' \in Z(X)$ y $Z \subset Z'$, entonces $Z' \in \mathfrak{F}$.

1.6. Definición. Un z-ultrafiltro es un z-filtro maximal.

1.7. Definición. Diremos que X completamente regular es realcompacto cuando verifique que todo z-ultrafiltro con la propiedad de intersección numerable, tiene intersección no vacía.

1.8. Proposición. Todo espacio T_{3a} y de Lindeloff es realcompacto.

Demostración. Ver |11| pág. 115. #

1.9. Proposición. Todo subespacio cerrado de un espacio realcompacto es realcompacto.

Demostración. Ver |11| pág. 119. #

1.10. Proposición. Si Y es un espacio topológico que verifica que todo subespacio suyo es realcompacto, y $f : X \longrightarrow Y$ es continua e inyectiva, entonces X es realcompacto.

Demostración. Ver |11| pág. 122. #

En todo lo que sigue, siempre que no haya indicación contraria, E denotará un espacio de Banach real.

B_n^E denotará la bola cerrada de centro cero y radio n en E. $B_n^E = \{x \in E \;/\; \|x\| \leq n\}$. Cuando no haya confusión escribiremos simplemente B_n.

1.11. Definición. Diremos que E está debilmente compactamente generado (W C G) cuando exista un subconjunto de E total que sea debilmente compacto.

Es facil ver que todos los espacios de Banach reflexivos o separables son W C G. En el primer caso basta considerar la bola unidad que es debilmente compacta y evidentemente es total; en el segundo caso consideramos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ densa en la bola unidad, y consideramos el subconjunto total de E formado por la sucesión $\{\frac{1}{n} x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unión el $\{o\}$; este conjunto es total y es debilmente compacto.

También $C_o(\Gamma)$ para cualquier Γ es W C G, ya que $\{e_\gamma \;/\; \gamma \in \Gamma\}$ siendo e_{γ_o} el elemento que tiene todas sus coordenadas cero, menos la γ_o que vale 1; es debilmente relativamente compacto.

Los espacios de funciones continuas sobre un compacto estan perfectamente caracterizados en lo que se refiere a ser W C G.

1.12. Definición. Sea K un compacto Hausdorff, diremos que K es un compacto de Eberlein cuando sea homeomorfo a un subconjunto debilmente compacto de un espacio de Banach.

1.13. Teorema. El espacio de Banach $C(K)$ es W C G si y sólo si K es un compacto de Eberlein.

Demostración. Ver |9| pág. 152. #

Como ha demostrado Rosenthal |23|, en general ser W C G no se conserva para subespacios cerrados.

Con la letra L denotaremos un espacio localmente convexo y Hausdorff.

1.14. Definición. L se dice tonelado cuando todo tonel (subconjunto de L absolutamente convexo, absorbente y cerrado) es un entorno de cero en L. .

1.15. Definición. L se dice bornológico si todo subconjunto absolutamente convexo que absorbe a los acotados de L, es un entorno de cero en L.

1.16. Definición. L se dice de Ptak (B-completo) si un subespacio $M \subset L'$ es $\sigma(L',L)$-cerrado cuando $M \cap A$ es $\sigma(L',L)$-cerrado en A. Para todo $A \subset L'$ equicontinuo.

1.17. Teorema. (Eberlein-Smulian)

Si L es casi-completo para la topología de Mackey, entonces $K \subset L$ es debilmente relativamente numerable compacto si y sólo si es debilmente relativamente secuencialmente compacto.

Demostración. Ver |13| pág. 313-315. #

1.18. Definición. L se dice que verifica la propiedad de aproximación cuando la identidad $i : L \longrightarrow L$ se aproxima uniformemente sobre los compactos por operadores de rango finito.

1.19. Proposición. Todo espacio de Banach E dotado de la topología débil $\sigma(E,E')$ verifica la propiedad de aproximación.

Demostración. En nuestro caso veremos que para todo entorno débil de cero en E, V, existe $u: E \longrightarrow E$ lineal de rango finito tal que $u(x)-x \in V$ para todo $x \in E$. Dado V, vendrá dado por $x_1',\ldots,x_n' \in E'$ linealmente independiente; consideramos $y_1,\ldots,y_n \in E$ tales que $x_i'(y_j) = \delta_{ij}$ $i,j=1,\ldots,n$, definimos $u = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i$. Ahora bien:

$$|x_k'(u(x)-x)| = |x_k'(\sum_{i=1}^{n} x_i'(x)y_i - x)| = |x_k'(x) - x_k'(x)| < 1$$

para todo $k=1,\ldots,n$. Luego $u(x) - x \in V$. #

Procederemos a definir ahora los polinomios sobre espacios de Banach.

Si E y F son dos espacios de Banach reales, denotaremos por $P(^nE,F)$ al espacio de los polinomios n-homogéneos continuos de E a F. Estos polinomios son de la forma $A.\Delta_n$ con $A \in L(^nE,F)$ y

$\Delta_n : E \longrightarrow E \overset{n}{\times \ldots\ldots \times} E$ el operador diagonal.

Si dotamos a $P(^nE,F)$ de la norma:

$$\|P\| = \operatorname{Sup}\{\|P(x)\| \ / \ \|x\| \leq 1\}$$

obtenemos que $P(^nE,F)$ es un espacio de Banach.

Por $P_f(^nE,F)$ denotaremos el subespacio de $P(^nE,F)$ generado por las funciones $\Phi^n \otimes y$ con $\Phi \in E'$ é $y \in F$ definidas por $\Phi^n \otimes y(x) = (\Phi(x))^n y$.

$P(E,F)$ denotará $\bigoplus_{n=o}^{\infty} P(^nE,F)$ y $P_{\not f}(E,F) = \bigoplus_{n=o}^{\infty} P_f(^nE,F)$.

Los conceptos $P_f(^nE,F)$ y $P_{\not f}(E,F)$ se definen análogamente para espacios localmente convexos.

1.20. Definición. $P_{\omega bu}(^mE,F)$ denotará el subespacio de $P(^mE,F)$ formado por aquellos polinomios que son debilmente uniformemente continuos sobre los acotados de E.

1.21. Proposición. $P_{\omega bu}(^mE,F)$ dotado de la norma inducida por $P(^mE,F)$ es completo.

Demostración. Ver |1| pág. 6. proposición 2.4.2. #

1.22. Proposición. $P_f(^nE,F)$ es el espacio de los polinomios debilmente continuos de E en F, n-homogéneos.

Demostración. Ver |1| pág. 6-7. #

En todo lo anterior, para el caso $F = \mathbb{R}$, se omite la letra $\mathbb{R}$, quedando: $P(E)$, $P_f(E)$, $P_{\omega bu}(^mE)$, etc....

Si L es un espacio localmente convexo Hausdorff, $C(X,L)$ denotará el espacio vectorial de todas las funciones $f : X \longrightarrow L$ continuas. Cuando $L = \mathbb{R}$ escribiremos simplemente $C(X)$.

A $C(X,L)$ le dotamos de estructura localmente convexa mediante la topología "compacto-abierta" definida por la familia de seminormas:

$$P_{k,\nu}(f) = \sup_{x \in K} \nu(f(x)) \quad ,$$

con K variando en los compactos de X, y ν en la familia de seminormas continuas de L.

En el caso $L = \mathbb{R}$ quedará reducido a

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

1.23. Definición. Un subespacio vectorial $W \subset C(X,L)$ se dice que es un álgebra polinomial cuando verifica que para cada entero $n \geq 1$, dados $g \in W$ y $p \in P_f(^nL,L)$, se tiene que $p \circ g \in W$.

1.24. Teorema (Stone-Weierstrass). Sea $W \subset C(X,L)$ un álgebra polinomial. Entonces W es densa si y sólo si se verifican:

a) Para cada $x,y \in X$ $x \neq y$, existe $f \in W$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

b) Para cada $x \in X$ existe $f \in W$ tal que $f(x) \neq 0$.

Demostración. Ver |20| pág. 69. #

En nuestro trabajo, tendrán interés una serie de teoremas clásicos, que relacionan propiedades de análisis funcional del espacio $C(X)$ dotado de la topología compacto-abierta, con propiedades topológicas de X.

1.25. Teorema. Sea X un espacio topológico completamente regular y Hausdorff, entonces el espacio $C(X)$ es completo si y sólo si X es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio.

Demostración. Ver |32|. #

<u>1.26. Teorema</u>. Sea X un espacio completamente regular y Hausdorff, si $C(X)$ es un espacio de Ptak, entonces X es un k-espacio.

<u>Demostración</u>. Ver |21|. #

El recíproco no es cierto como se demuestra en |4| pág. 123.

Enunciamos ahora los teoremas de Nachbin-Shirota, pero antes introducimos el siguiente concepto:

<u>1.27. Definición</u>. Un subconjunto $C \subset X$ espacio topológico, se dice relativamente pseudocompacto cuando toda función continua sobre X a valores reales, está acotada sobre C.

Este concepto es más débil que el de pseudocompacidad; y para espacios normales, en el caso de conjuntos cerrados coinciden ambos conceptos.

Pasemos a enunciar los teoremas:

<u>1.28. Teorema</u>. En las hipótesis de 1.25, el espacio $C(X)$ es tonelado si y sólo si X verifica que todo subconjunto $C \subset X$ cerrado y relativamente pseudocompacto es compacto.

<u>1.29. Teorema</u>. En las hipótesis de 1.25, el espacio $C(X)$ es bornológico si y sólo si X es realcompacto.

La demostración de ambos teoremas fue obtenida independientemente por Nachbin |19| y Shirota |29|.

Daremos ahora algunos resultados para el caso vectorial.

<u>1.30. Proposición</u>. Si X es completamente regular y L un espacio localmente convexo Hausdorff, se tiene: $C(X,L)$ es completo si y sólo si $C(X)$ y L son completos.

<u>Demostración</u>. Como $C(X)$ y L son subespacios cerrados de $C(X,L)$, la completitud de los primeros se sigue de la de este. El recíproco se obtiene teniendo en cuenta que si X es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, X también es un k_L-espacio (es decir toda función de X en L continua sobre los compactos, es continua); y procediendo como en el caso escalar se obtiene que $C(X,L)$ es completo. #

<u>1.31. Proposición</u>. En las hipótesis de la proposición anterior, si $C(X,L)$ es tonelado, entonces $C(X)$ y L son tonelados.

<u>Demostración</u>. Ver |25|. #

<u>1.32. Proposición</u>. Si $C(X)$ es tonelado y L es Frechet, entonces $C(X,L)$ es tonelado.

<u>Demostración</u>. Ver |16|. #

Sobre el problema de cuando es bornológico el espacio $C(X,L)$, tenemos lo siguiente:

<u>1.33. Proposición</u>. Si X es realcompacto y L metrizable, entonces $C(X,L)$ es bornológico.

<u>Demostración</u>. Ver |26|. #

El estudio del dual de C(X) dotado de la topología compacto-abierta tiene gran interés, sobre todo en la línea de obtener información sobre los conjuntos debilmente compactos de C(X). En esta línea tenemos el siguiente resultado:

1.34. Teorema. Si X es completamente regular, entonces el dual de C(X), C(X)' es algebraicamente isomorfo el espacio de las funciones de conjunto a valores reales, regulares, numerablemente aditivas definidas sobre los subconjuntos de Borel de X, y con soporte compacto.

Demostración. Ver |4| pág. 88 Teorema 2.4.1. #

Por último veremos cuando verifica la propiedad de aproximación el espacio C(X).

1.35. Proposición. Si X es un k_R-espacio, entonces C(X) verifica la propiedad de aproximación.

Demostración. Ver |20| pág. 146 Corolario 8.8. #

Vamos a introducir los conceptos y algunos resultados de la técnica de topologías "mixtas".

1.36. Definición. Si E es un espacio vectorial, una bornología sobre E es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos absolutamente convexos de E que no contengan subespacios no triviales, y que verifique:

a) $E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

b) Si $B \in \mathcal{B}$ y $\lambda > 0$ entonces $\lambda B \in \mathcal{B}$

c) Si $B, C \in \mathcal{B}$ existe $D \in \mathcal{B}$ tal que $B \cup C \subset D$

d) Si $B \in \mathcal{B}$ y $C \subset B$, siendo C absolutamente convexo, entonces $C \in \mathcal{B}$

1.37. Definición. Una base de $\mathcal{B}$ es una subfamilia $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{B}$ que verifique que cada $B \in \mathcal{B}$ es un subconjunto de un elemento B_1 de $\mathcal{B}_1$.

1.38. Definición. Una bornología $\mathcal{B}$ se dice de tipo numerable si tiene una base numerable.

Sea ahora (L,τ) un espacio localmente convexo, $\mathcal{B}$ una bornología de tipo numerable sobre L que verifique:

a) todo elemento $B \in \mathcal{B}$ es τ-acotado

b) $\mathcal{B}$ tiene una base de τ-cerrados.

1.39. Definición. Definimos la topología "mixta" $\gamma = \gamma|\mathcal{B},\tau|$ sobre L como la topología localmente convexa más fina definida sobre L que coincide con τ sobre los subconjuntos que pertenecen a $\mathcal{B}$.

1.40. Proposición. La topología γ es la topología vectorial más fina que coincide con τ sobre los subconjuntos de L que estan en $\mathcal{B}$.

Demostración. Ver |6| pág. 7. Proposición 1.5. #

1.41. Proposición. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en L converge a x para la topología γ si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ-converge a x, y existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ver |6| pág. 9, Proposición 1.10. #

1.42. Proposición. (L,γ) es completo si y sólo si $\mathcal{B}$ tiene una base de conjuntos τ-completos.

Demostración. Ver |6| pág. 11 Proposición 1.14. #

La siguiente proposición nos da condiciones para que γ sea la topología más fina (localmente convexa o no) que coincide con τ sobre los elementos de $\mathcal{B}$.

1.43. Proposición. Si $\mathcal{B}$ tiene una base de τ-compactos, entonces $\gamma|\mathcal{B},\tau|$ es la topología más fina que coincide con τ sobre los conjuntos de $\mathcal{B}$.

Demostración. Por |6| pág. 38 Proposición 4.1 y Corolario 4.2. #

Introduciremos por último el concepto de ε-producto, y algún resultado de interés.

1.44. Definición. Si L es un espacio localmente convexo Hausdorff, denotaremos por L_c' al dual dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absolutamente convexos y compactos de L.

1.45. Definición. Siendo L y M dos espacios localmente convexos Hausdorff, definimos el ε-producto de L y M; $L \varepsilon M$ como el espacio $\mathcal{L}_\varepsilon(L_c',M)$ de las aplicaciones lineales y continuas de L_c' en M dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre las partes equicontinuas de L'.

1.46. Proposición. Sean L un espacio localmente convexo, L verifica la propiedad de aproximación si y sólo si $L \otimes M$ es denso en $L \varepsilon M$ para todo espacio localmente convexo M.

Demostración. Ver |28| Proposición 11.#

1.47. Proposición. Sea L un espacio localmente convexo completo, L verifica la propiedad de aproximación si y sólo si $L \otimes E$ es denso en $L \varepsilon E$ para todo espacio de Banach E.

Demostración. Ver |20| pág. 144. Teorema 8.7.#

CAPITULO 2

2. Estudio de la topología ωb de E.

En este capítulo procederemos a estudiar la topología ωb; se demuestra que dicha topología es completamente regular, y se estudia en que casos es localmente convexa, analizando el comportamiento de ωb para subespacios; se caracterizan las sucesiones convergentes, y los compactos de dicha topología.

Dado E espacio de Banach y Bn la bola cerrada de radio n, dotamos a dichas bolas de la topología débil $\sigma(E,E')$ restringida. La topología ωb sobre E será la topología más fina que coincide con la débil sobre las bolas Bn. En lenguaje topológico $(E,\omega b)$ será el límite inductivo de los espacios topológicos $(Bn,\sigma(E,E')/Bn)$. Denotaremos al espacio $(E,\omega b)$ por X_E, (X simplemente, cuando no haya confusión).

De las propiedades del límite inductivo se sigue que un subconjunto de X es abierto (respectivamente cerrado) si y sólo si su intersección con cada bola cerrada es abierto para la topología débil restringida (respectivamente debilmente cerrado).

X coincide conjuntistamente con E, sin embargo la topología de X es en general más fina que la débil, ya que todo subconjunto debilmente cerrado de E es debilmente cerrado al intersecarlo con cada bola, y por tanto es cerrado en X.

Veamos un ejemplo sencillo, que se utilizará más adelante, de que la topología de X es estrictamente más fina que la topología débil.

<u>2.1. Ejemplo</u>. Consideremos $E = C_o$ espacio de las sucesiones reales que tienden a cero, dotado de la norma del supremo. e_k será la sucesión que tiene todas sus coordenadas cero excepto la k-ésima que vale 1.

Definimos $x_n^k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} e_j + n e_{k+1}$.

Este es un elemento de C_o ya que a partir de $k+1$ todas las coordenadas valen cero.

Denotemos $A = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} \{x_n^k\}$

Demostraremos que A es cerrado en X, pero no es debilmente cerrado en C_o.

Para ver lo primero, hay que demostrar que su intersección con cada bola Bn es debilmente cerrada.

Dado n_o, $A \cap B_{n_o} = \bigcup_{n=1}^{n_o} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_n^k\}$ ya que $\|x_n^k\| = n$ para n y k cualesquiera.

Ahora bien, si fijamos n el conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_n^k\}$ es debilmente cerrado en C_o, ya que si calculamos su adherencia en ℓ^∞ con la topología estrella débil, $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, esta es $(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_n^k\}) \cup \{x_n\}$ siendo x_n el elemento de ℓ^∞ que tiene todas sus coordenadas con valor $\frac{1}{n}$. Por tanto la adherencia débil en C_o de nuestro conjunto, que será la adherencia estrella débil en ℓ^∞ intersección con C_o, vuelve a ser $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_n^k\}$ que por tanto es debilmente cerrado.

Luego $A \cap B_{n_o}$ será unión finita de conjuntos débilmente cerrados, con lo cual resulta que es debilmente cerrado. Es decir A es un conjunto cerrado en X.

Por otra parte la clausura débil de A es la clausura estrella débil en ℓ^∞ intersección con C_o. Ahora bien la clausura estrella débil de A en ℓ^∞ es $A \cup \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\bar{o}\}$; ya que el vector $\bar{o}$ es límite para la topología estrella débil de ℓ^∞ de los vectores $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, luego la adherencia débil de A es $A \cup \{\bar{o}\}$. Luego A no es debilmente cerrado. #

En el siguiente capítulo demostraremos que la igualdad entre ambos espacios se da sólo en el caso de que la dimensión de E sea finita.

Toda topología localmente convexa es completamente regular, luego el espacio de Banach E dotado de la topología débil lo es; y por tanto también lo son las bolas cerradas con la topología restringida. Sin embargo el límite inductivo de espacios completamente regulares, en general no es completamente regular. Morita ha demostrado |17| que bajo determinadas condiciones (que incluyen nuestro caso) el límite inductivo de espacios normales es normal. En nuestro caso Bn con la topología débil restringida no tiene porque ser normal, pero el hecho de estar contenidas en las bolas del bidual con la topología estrella débil restringida, las cuales constituyen una cadena de compactos; nos permite demostrar que X es siempre completamente regular.

<u>2.2. Lema</u>. Dado E, X es completamente regular y Hausdorff.

<u>Demostración</u>. Es Hausdorff trivialmente. Veamos que es completamente regular. Sea $C \subset X$ cerrado $x \notin C$, podemos considerar que $x \in B_1$ sin

perder generalidad.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $C_n = C \cap B_n$. $\overline{C_n}$ será la adherencia de C_n en la bola cerrada de radio n del bidual: B''_n dotada de la topología estrella débil $\sigma(E'',E')$ restringida. Vamos a construir por inducción una familia de funciones continuas sobre B''_n para cada n.

Como B''_1 es completamente regular, existe $\overline{f}_1 : B''_1 \longrightarrow |0,1|$ continua de tal forma que

$$\overline{f}_1(\overline{C}_1) = \{o\} \qquad \text{y} \qquad \overline{f}_1(x) = \{1\}$$

Dada $\overline{f}_1$ definimos $\overline{f}^*_2 : B''_1 \cup \overline{C}_2 \longrightarrow |0,1|$

$$\overline{f}^*_2(y) = \overline{f}_1(y) \qquad \text{si} \qquad y \in B''_1$$

$$\overline{f}^*_2(y) = 0 \qquad \text{si} \qquad y \in \overline{C}_2$$

$\overline{f}^*_2$ está bien definido porque $\overline{C}_2 \cap B''_1 = \overline{C}_1$, y sobre $\overline{C}_1$ la función $\overline{f}_1$ vale cero.

Por otra parte tanto B''_1 como $\overline{C}_2$ son cerrados en $B''_1 \cup \overline{C}_2$ luego $\overline{f}^*_2$ que es continua sobre B''_1 y sobre $\overline{C}_2$, resulta continua sobre la unión.

Tenemos pues $B''_1 \cup \overline{C}_2$ cerrado en B''_2 que es normal, luego $\overline{f}^*_2$ se puede extender a $\overline{f}_2 : B''_2 \longrightarrow |0,1|$.

Repetimos el proceso, y construimos una familia $\{\overline{f}_n\}$ de funciones, $\overline{f}_n : B''_n \longrightarrow |0,1|$ continuas, tal que $\overline{f}_n\big|_{B''_{n-1}} = \overline{f}_{n-1}$, y que valen $\overline{f}_n(\overline{C}_n) = \{0\}$ para cada n.

Consideramos $f_n = \overline{f}_n|_{B_n}$. Son continuas y se tiene que $f_n(C_n) = \{0\}$ y $f_n(x) = 1$ para cada n. Definimos $f : X \longrightarrow |0,1|$ por $f(z) = f_n(z)$ siendo $z \in B_n$.

f está bien definida por coincidir las restricciones, $f(x) = 1$ $f(C) = \{0\}$, y es continua, ya que una función definida en X es continua, si las restricciones a B_n son continuas, pero $f|_{B_n}$ coincide con f_n que es continua. #

Surge el problema de si la topología de X ωb, es localmente convexa, o cuando menos vectorial; en esta línea un primer resultado es:

2.3. Proposición. Si E es reflexivo, entonces X es un espacio localmente convexo.

Demostración. Según la proposición 1.43 bastará demostrar que la bornología de los acotados tiene una base debilmente compactos; ya que la topología de X es la más fina que coincide con la débil sobre los acotados (por definición de límite inductivo). Luego en este caso la topología de X será $\gamma|\| \;\|, \sigma(E,E')|$ que es localmente convexa. Pero si el espacio E es reflexivo, las bolas cerradas son subconjuntos debilmente compactos, con lo cual queda demostrada la proposición. #

Sin embargo esto no es cierto en general, y el siguiente ejemplo utilizando 2.1 nos servirá para ver que en el caso de $E = C_o$, la topología de X no es localmente convexa.

2.4. Ejemplo. Para $E = C_o$ la topología de X ωb, no es localmente convexa:

Con la notación de topologías mixtas, γ^* será $\gamma|\| \ \|, \omega^*|$ siendo ω^* la topología estrella débil $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ sobre ℓ^∞. Por γ_o denotaremos $\gamma^*|_{C_o}$. γ_o es estrictamente menos fina que la topología ωb, ya que la inclusión $i : X \longrightarrow (L^\infty, \gamma^*)$ es continua, y por otra parte el conjunto A del ejemplo 2.1, ya vimos que era cerrado en X, y sin embargo no lo podemos poner como un γ^*-cerrado de ℓ^∞ restringido a C_o, ya que la γ^*-adherencia de A en ℓ^∞ contiene al $\bar{o}$.

Nos bastará demostrar pues que $\gamma_o = \gamma$ siendo $\gamma = \gamma|\| \ \|, \sigma(C_o, \ell^1)|$. Como γ^* es localmente convexa, también lo será γ_o, y además todo γ^*-cerrado de ℓ^∞ restringido a los acotados de C_o es debilmente cerrado en C_o (por la definición de γ^*). Luego $\gamma_o \leq \gamma$.

Por otra parte γ_o es la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de ℓ^1 (|6| pp. 20-21); luego bastará probar que todo γ-equicontinuo cerrado de ℓ^1 es compacto.

Sea pues $S \subset \ell^1$ γ-equicontinuo. Sea B una bola en C_o; como S° es un γ-entorno de 0 en C_o (la polar formada en la dualidad (C_o, ℓ^1)), tenemos que existe $D \subset \ell^1$ finito tal que $S^\circ \supset (2B) \cap D^\circ$; ya que S° intersección con cualquier bola contiene un entorno débil de C_o (la polar de un finito de ℓ^1) intersección dicha bola. Operando tenemos:

$$S^{\circ\circ} \subset ((2B) \cap D^\circ)^\circ = \frac{1}{2} B^\circ + D^{\circ\circ}$$

Pero $D^{\circ\circ}$ es precompacto en ℓ^1 (compacto también), por ser la bipolar de un conjunto finito, luego existe $D_1 \subset \ell^1$ finito tal que $D^{\circ\circ} \subset D_1 + 1/2\ B^{\circ}$.

Llegamos pues a que $S \subset S^{\circ\circ} \subset D_1 + B^{\circ}$, luego S es precompacto en ℓ^1 y por tanto compacto. #

Este ejemplo es debido a Wheeler |33|.

El siguiente resultado nos garantiza que es equivalente que la topología ωb sea localmente convexa, a que sea vectorial.

<u>2.5. Proposición</u>. Si la topología de X es vectorial, entonces es localmente convexa.

<u>Demostración</u>. Por la proposición 1.40, la topología mixta $\gamma|\ \|\ \ \|,\ \sigma(E,E')\,|$ es la topología vectorial más fina que coincide con $\sigma(E,E')$ sobre los acotados de E. Luego si la topología de X es vectorial, tiene que ser necesariamente localmente convexa.#

En general sobre la topología de X podemos afirmar algo más general que ser vectorial.

<u>2.6. Definición</u>. Una topología sobre un espacio vectorial se dice semilineal si las operaciones suma y multiplicación son separadamente continuas.

Collins |5| demuestra el siguiente resultado:

<u>2.7. Proposición</u>. La topología de X, ωb es semilineal.

Ya vimos antes que si el espacio E es reflexivo, la topología de X es localmente convexa; las siguientes proposiciones nos dan información sobre la completitud de X.

2.8. Proposición. Si E es reflexivo, entonces el espacio localmente convexo X es completo.

Demostración. Si E es reflexivo, las bolas cerradas son debilmente compactos, luego la bornología de los acotados tiene una base de conjuntos debilmente compactos y por tanto completos para la topología débil. Por la proposición 1.42, se tiene que E dotado de la topología $\gamma|\| \ \|, \sigma(E,E')|$ es completo, pero por la proposición 2.3, este espacio es precisamente X. #

La proposición siguiente es una especie de recíproco de 2.8.

2.9. Proposición. Dado E, si X es un espacio localmente convexo y completo, entonces E es reflexivo.

Demostración. Si la topología de X es localmente convexa, coincide con $\gamma|\| \ \|, \sigma(E,E')|$, y si E es completo para esta topología, por la proposición 1.42, se tiene que la bornología de los acotados en E tiene una base de debilmente compactos, es decir en particular las bolas cerradas son debilmente completas y por tanto el espacio E es reflexivo. #

La siguiente proposición nos asegura una regularidad en nuestro espacio, en lo referente al paso a subespacios.

2.10. Proposición. Sea E un espacio de Banach, F un subespacio vectorial cerrado de E, entonces X_F es un subespacio topológico cerrado de X_E.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
B_1^E & \longrightarrow & B_2^E & \longrightarrow & \cdots\cdots\cdots\cdots & \longrightarrow & X_E \\
\uparrow i_1 & & \uparrow i_2 & & & & \uparrow i \\
B_1^F & \longrightarrow & B_2^F & \longrightarrow & \cdots\cdots\cdots\cdots & \longrightarrow & X_F
\end{array}$$

i es continua, porque si denotamos por $j_n^F : B_n^F \longrightarrow X_F$ la inclusión natural en un límite inductivo, y análogamente $j_n^E : B_n^E \longrightarrow X_E$, tenemos que: $i \circ j_n^F = j_n^E \circ i_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero la segunda parte de la igualdad es continua por ser composición de dos funciones continuas. Luego $i \circ j_n^F$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, y esto nos asegura que i es continua.

Por otra parte i es cerrada, ya que si $C \cap X_F$ es cerrado, tenemos que $C \cap B_n^F$ es debilmente cerrado en F para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $C \cap B_n^E = C \cap B_n^F$ es debilmente cerrado en E para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto C es cerrado en X_E. Esto basta para asegurarnos que X_F es subespacio topológico de X_E cerrado. #

2.11. Corolario. Si E contiene un subespacio vectorial isomorfo a C_o, entonces la topología de X_E no es localmente convexa.

Demostración. Por la proposición 2.10, X_{C_o} es un subespacio topológico de X_E, si este fuese localmente convexo, también lo sería X_{C_o}, en contradicción con el ejemplo 2.1. #

Vamos a dar dos proposiciones que nos caracterizan el comportamiento de las sucesiones, y los compactos en X.

2.12. Proposición. Una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es convergente si y sólo si es debilmente convergente en E.

Demostración. La convergencia en X implica la convergencia débil por ser la topología débil menos fina. Recíprocamente si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debilmente, está acotada y por tanto converge para la topología de X. #

Este resultado no es cierto para redes como se deduce del ejemplo 2.1.

2.13. Proposición. Un subconjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si es debilmente compacto.

Demostración. Como la aplicación $i : X \longrightarrow (E,\sigma(E,E'))$ identidad, es continua, todo compacto para la topología de X es debilmente compacto.

Recíprocamente si K es debilmente compacto, está acotado; luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B_n$, y K es compacto en $(B_n,\sigma(E,E')|_{B_n})$; como la inclusión de B_n a X es continua, se tiene que K es compacto en X. #

CAPITULO 3

3. Completitud de los espacios de funciones debilmente continuos. Consecuencias.

En este capítulo introducimos el espacio $C_{\omega b}(E)$ de las funciones debilmente continuas sobre los acotados de E, lo relacionamos con el espacio $C_{\omega}(E)$ de las funciones debilmente continuas sobre E. Dotamos a $C_{\omega b}(E)$ de la topología compacto-abierta, y lo representamos como un espacio de funciones continuas $C(X)$ sobre un espacio topológico. Damos condiciones necesarias y condiciones suficientes para que $C_{\omega b}(E)$ sea completo, y nos planteamos el problema de cuando es un espacio de Ptak, y cuando es Frechet. Por último estudiamos el completado de $C_{\omega b}(E)$.

E será de nuevo un espacio de Banach real, y consideraremos que está dotado de la topología débil $\sigma(E,E')$.

Por $C_{\omega}(E)$ denotaremos el espacio $C(E,\sigma(E,E'))$ dotado de la topología compacto abierta.

Vamos a estudiar en primer lugar cuando es completo $C_{\omega}(E)$.

3.1. Proposición. $C_{\omega}(E)$ es completo si y sólo si E es de dimensión finita.

Demostración. Si E es de dimensión finita, su topología débil coincide con la de la norma; ahora bien todo espacio métrico es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio y por tanto $C_\omega(E)$ es completo. Recíprocamente si dimensión de E es infinita, existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de formas lineales y continuas sobre E, de norma 1 y de tal forma que la dimensión del espacio engendrado por ellas sea infinita.

Definimos el polinomio $Q = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\phi_n^2$ sobre E, que verifica:

a) No es debilmente continuo, ya que es un polinomio 2-homogéneo; y según vimos en la proposición 1.22 el espacio de los polinomios reales sobre E 2-homogéneos es precisamente $P_f(^2E)$, mientras que Q claramente no es de tipo finito por ser la dimensión del espacio engendrado por $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinita.

Luego Q no pertenece a $C_\omega(E)$.

b) Sin embargo los polinomios $Q_m = \sum_{n=1}^{m} 2^{-n}\phi_n^2$ si son de tipo finito, y por tanto para cada $m \in \mathbb{N}$ $Q_m \in C\omega(E)$. Ahora bien Q_m converge en la norma de $P(^2E)$ a Q, ya que: $\|Q-Q_m\| =$
$= \|\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}\phi_n^2\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\{|\sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}\phi_n(x)^2|\} \leq \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}$ (por ser $\|\phi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$) que tiende a cero cuando m tiende a infinito.

Luego Q_m tiende uniformemente a Q sobre los debilmente compactos de E, y por tanto se tiene que Q está en el completado de $C_\omega(E)$. Es decir queda visto que $C_\omega(E)$ no es completo. #

<u>3.2. Definición</u>. Denotaremos por $C_{\omega b}(E)$ al espacio de las funciones a valores reales, definidas sobre E que son continuas para la topología

débil sobre los subconjuntos acotados de E.

<u>3.3. Corolario</u>. $C_\omega(E) = C_{\omega b}(E)$ si y sólo si dimensión de E es finita.

<u>Demostración</u>. Que ser finita la dimensión es suficiente, es trivial.

Recíprocamente: Vimos en la proposición 1.21 que $P_{\omega bu}(^2E)$ es completo, y claramente contiene a $P_f(^2E)$, luego el completado de este espacio está contenido en $P_{\omega bu}(^2E)$; por tanto según vimos en la proposición 3.1 $Q \in P_{\omega bu}(^2E)$ que por la definición 1.20, está contenido en $C\omega b(E)$, luego $Q \in C_{\omega b}(E) \setminus C_\omega(E)$. #

Restrepo en |22| presenta un ejemplo que es un caso particular del anterior, para el caso de que E sea un espacio de Hilbert, definiendo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(x)^2}{(2n)!}$ para cada $x \in E$, y demostrando que f está en $C_{\omega b}(E)$, pero no es debilmente continua en el origen.

Hemos visto pues que $C_{\omega b}(E) \supset C_\omega(E)$ conjuntistamente y que son distintos siempre que la dimensión de E sea infinita. Vamos a dotar a $C_{\omega b}(E)$ de topología, de forma que $C_\omega(E)$ sea un subespacio vectorial topológico.

De forma análoga a como hicimos en el capítulo 1, sobre $C_{\omega b}(E)$ se puede definir la topología compacto-abierta, es decir la de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos debilmente compactos de E. Hemos dotado así a $C_{\omega b}(E)$ de una estructura localmente convexa, de forma que $C_\omega(E)$ es un subespacio vectorial topológico.

3.4. Proposición. El espacio $C_\omega(E)$ es denso en $C_{\omega b}(E)$.

Demostración. Sea f un elemento de $C_{\omega b}(E)$. Consideramos un entorno de cero en $C_{\omega b}(E)$:

$$T_{K,\varepsilon} = \{g \in C_{\omega b}(E) : |g(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K\}$$

Con K debilmente compacto en E, y $\varepsilon > 0$.

La restricción de f a K: $f|_K$ es una función debilmente continua, y por tanto debilmente uniformemente continua, luego existirá W entorno débil de cero de tal forma que:

Si $x \in E$, $y \in K$ y $x-y \in W$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Ahora bien, como vimos en 1.19, todo espacio de Banach con la topología débil, verifica la propiedad de aproximación, luego dados W y K, existe $u \in E \otimes E'$ de tal forma que siempre que $x \in K$ se tiene que $x-u(x) \in W$.

Luego para todo $x \in K$ tenemos que $|f(x) - f \circ u(x)| \leq \varepsilon$; es decir $f-f \circ u \in T_{K,\varepsilon}$.

Nos falta ver solo que para todo $u \in E \otimes E'$ se tiene que $f \circ u$ está en $C_\omega(E)$.

Pero $u(E)$ es de dimensión finita, y $f \circ u$ es debilmente continua sobre los acotados de E, luego $f|_{u(E)}$ es debilmente continua sobre los acotados de $u(E)$. Como $u(E)$ es de dimensión finita, coinciden la topología débil y la de la norma; luego $f|_{u(E)}$ es continua sobre los acotados de $u(E)$ y por tanto continua sobre $u(E)$. Luego $f|_{u(E)}$ es debilmente continua; como u también lo es, tendremos que $f \circ u$ es debilmente continua. #

Este resultado motiva el interés de estudiar propiedades del espacio $C_{\omega b}(E)$; y en particular si podemos garantizar que es completo, tendremos una representación del completado de $C_{\omega}(E)$. Para estudiar las propiedades de $C_{\omega b}(E)$, y poder aplicar los resultados expuestos en el capítulo de preliminares, nos interesa expresar a $C_{\omega b}(E)$ como un espacio de funciones continuas dotado de la topología compacto-abierta. En esta línea tenemos el siguiente resultado:

<u>3.5. Lema</u>. Sea E un espacio de Banach. Sea X el espacio topológico asociado a E según vimos en el capítulo 2. Entonces $C_{\omega b}(E)$ es topológicamente isomorfo a $C(X)$, dotados ambos espacios de la topología compacto-abierta.

<u>Demostración</u>. Conjuntistamente coinciden, sin más que considerar que las funciones continuas sobre un límite inductivo se caracterizan por ser continuas restringidas a los espacios de los que hacemos el límite; en este caso a las bolas de E.

Por otra parte, por la proposición 2.13 tenemos que los compactos de X son precisamente los debilmente compactos de E, con lo cual las familias de seminormas en ambos espacios coinciden; y por lo tanto el isomorfismo es topológico. #

Vamos a estudiar ahora cuando es X un k-espacio o un k_R-espacio. En esta línea un primer resultado es:

3.6. Teorema. Si E es un espacio de Banach separable que no contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, entonces el espacio X asociado a E es un k-espacio.

Demostración. En |24| teorema 3 se demuestra que un espacio de Banach que esté en las hipótesis de nuestro teorema verifica que todo subconjunto acotado B de E es secuencialmente denso en su clausura débil.

Sea C un subconjunto de X, que verifique que su intersección con cualquier subconjunto de X compacto K, es cerrado en X (es decir debilmente cerrado por ser $C \cap K$ acotado). Tenemos que ver que C es cerrado en X, o lo que es lo mismo, que $C \cap B_n$ es debilmente cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $C \cap B_n$ es acotado, se tiene que para cualquier punto x que esté en la clausura débil de $C \cap B_n$, se tiene que existe una sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en $C \cap B_n$ y que converge debilmente a x.

Por otra parte $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$ es debilmente compacto (por tanto compacto en X), luego $C \cap (\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\})$ es debilmente cerrado, y se tiene que $x \in C$, es claro por otra parte que $x \in B_n$, ya que B_n es debilmente cerrado, luego $x \in C \cap B_n$, y por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $C \cap B_n$ es debilmente cerrado, luego C es cerrado en X, luego X es un k-espacio. #

3.7. Proposición. Con las notaciones del teorema anterior, si E es reflexivo, entonces X es un k-espacio.

Demostración. Si E es reflexivo, las bolas dotadas de la topología débil son compactas, luego por la propia definición de X, un subconjunto C de X es cerrado si y sólo si su intersección con los compactos de X es cerrado. Luego X es un k-espacio. #

3.8. Ejemplo. Para $E = \ell^1$ tenemos que el espacio X asociado no es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, y por tanto tampoco un k-espacio.

Demostración. La aplicación norma $\| \ \|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no es continua, ya que el cero es un punto de adherencia débil de la esfera unidad $S^1 = \{x \in \ell^1 : \|x\|_1 = 1\}$ y por tanto de la adherencia en X de S^1 (por ser S^1 acotado), sin embargo $\| \ \|_1(S^1) = \{1\}$ y en el cero vale cero. Es decir $\| \ \|_1 \notin C_{\omega b}(E)$; sin embargo la norma si es continua sobre los compactos de X, ya que esto equivale a que sea debilmente continua sobre los debilmente compactos de ℓ^1; ahora bien por el lema de Schur sabemos que los debilmente compactos y los compactos en norma coinciden en ℓ^1, luego tendremos que demostrar que la norma en ℓ^1 es debilmente continua sobre los compactos; pero esto es cierto porque sobre los compactos de un espacio de Banach coinciden la topología de la norma y la topología débil. #

3.9. Proposición. Sea E un espacio de Banach que contiene un subespació isomorfo a ℓ^1, entonces el espacio X asociado a E no es un k-espacio.

Demostración. En las hipótesis dadas, si denotamos por X_1 al espacio asociado a ℓ^1, tenemos que X_1 es un subespacio topológico cerrado de X, por la proposición 2.10. Luego si X fuese un k-espacio, X_1 también lo sería por lo que vimos en el capítulo 1, en contradicción con la proposición anterior. #

Desgraciadamente no tenemos un resultado semejante para $k_{\mathbb{R}}$-espacios; sin embargo podemos asegurar:

3.10. Proposición. Si E es un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, que tiene suplementario topológico, entonces el espacio X asociado no es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio.

Demostración. Sea $E = \ell^1 \oplus F$; supongamos que X es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio. Sea $f : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ debilmente continua sobre los subconjuntos debilmente compactos en ℓ^1.

Definimos $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{f}(x_1 + y) = f(x_1)$ siendo $x_1 \in \ell^1$ $y \in F$.

Si $P_1 : E \longrightarrow \ell^1$, $P_2 : E \longrightarrow F$ son las proyecciones, se tiene que dado $K \subset E$ debilmente compacto, $K_1 = P_1(K)$ y $K_2 = P_2(K)$ son debilmente compactos en ℓ^1 y F respectivamente. Por otra parte al ser la aplicación suma $\ell^1 \times F \longrightarrow E$ debilmente continua, se tiene que $K_1 + K_2$ es debilmente compacto en E, como por otra parte $K \subset K_1 + K_2$, para probar que $\tilde{f}$ es debilmente continua sobre los subconjuntos debilmente compactos de E, bastará ver que f es debilmente continua sobre los subconjuntos de la forma $K_1 + K_2$ con K_1 debilmente compacto en ℓ^1 y K_2 debilmente compacto en F.

Consideramos pues $\tilde{f}|_{K_1+K_2} : K_1 + K_2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea G abierto en $\mathbb{R}$

$\tilde{f}^{-1}(G) \cap (K_1 + K_2) = (K_1 \cap f^{-1}(G)) + K_2$ ya que si

$x_1 + x_2 \in K_1 + K_2$ y $\tilde{f}(x_1+x_2) \in G$ se tiene que $f(x_1) \in G$, $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$, luego $x_1+x_2 \in (K_1 \cap f^{-1}(G)) + K_2$.

Recíprocamente si $x_1+x_2 \in (K_1 \cap f^{-1}(G)) + K_2$ se tiene que $x_2 \in K_2$, $x_1 \in K_1$ y $f(x_1) \in G$, luego $x_1+x_2 \in K_1 + K_2$ y $\tilde{f}(x_1+x_2) = f(x_1) \in G$, con lo cual se da la igualdad.

Luego $\tilde{f}^{-1}(G) \cap (K_1 + K_2)$ es debilmente abierto en $K_1 + K_2$ y por tanto $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es debilmente continua sobre los debilmente compactos de E; pero como hemos supuesto que X es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, se tendrá que $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua; luego $f : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo X_1 el espacio asociado a ℓ^1, será continua por ser f la restricción de $\tilde{f}$ a X_1. Por tanto llegamos a que X_1 es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, en contradicción con el ejemplo 3.8. #

Vamos a aplicar estos resultados a nuestro caso:

<u>3.11. Corolario</u>. Si E es un espacio de Banach separable que no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, o E es reflexivo, entonces el espacio $C_{\omega b}(E)$ es completo, resultando el completado de $C_{\omega}(E)$.

<u>Demostración</u>. Por el teorema 3.6 y la proposición 3.7, el espacio X asociado a E es un k-espacio; luego $C(X)$ es completo para la topología compacto-abierta por el teorema 1.25.

Aplicando el lema 3.5 resulta que $C_{\omega b}(E)$ es completo.

Por la proposición 3.4 tenemos entonces que $C_{\omega b}(E)$ es el completado de $C_{\omega}(E)$. #

3.12. Proposición. E es reflexivo si y sólo si $C_{\omega b}(E)$ es Frechet.

Demostración. Si E es reflexivo, vimos en el corolario anterior que $C_{\omega b}(E)$ era completo; por otra parte si E es reflexivo las bolas cerradas son $\sigma(E,E')$-compactas, luego existe una familia numerable de seminormas que nos define la topología de $C_{\omega b}(E)$, por tanto dicho espacio es metrizable.

Recíprocamente si $C_{\omega b}(E)$ es Frechet su topología viene dada por una cantidad numerable de seminormas, es decir existe una familia numerable de conjuntos $\sigma(E,E')$-compactos de forma que todo $\sigma(E,E')$-compacto está contenido en uno de ellos, luego el espacio es reflexivo. #

De la proposición anterior se sigue que si E es reflexivo, $C_{\omega b}(E)$ es un espacio de Ptak, el siguiente corolario nos da condiciones suficientes para que falle dicha propiedad.

3.13. Corolario. Si E es un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, entonces $C_{\omega b}(E)$ no es un espacio de Ptak.

Demostración. Por la proposición 3.9. tenemos que X no es un k-espacio, luego por el teorema 1.26 $C(X)$ no será un espacio de Ptak, luego por el lema 3.5 resulta que $C_{\omega b}(E)$ no es de Ptak. #

3.14. Corolario. Si E contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1 con suplementario topológico (o en particular si $E = \ell^1$), entonces $C_{\omega b}(E)$ no es completo.

Demostración. Por la proposición 3.10 resulta que X no es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio, y por el teorema 1.25 tenemos que $C(X)$ y por tanto $C_{\omega b}(E)$, no es completo. #

Hemos resuelto el problema del completado de $C_{\omega}(E)$ en algunos casos; ahora daremos una solución general.

3.15. Definición. Llamaremos $C_{\omega k}(E)$ al espacio de las funciones debilmente continuas sobre los subconjuntos debilmente compactos de E, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos debilmente compactos de E.

3.16. Proposición. $C_{\omega b}(E)$ es un subespacio denso de $C_{\omega k}(E)$.

Demostración. Es subespacio trivialmente por ser todo debilmente compacto acotado, y coincidir las topologías. Veamos la densidad:

Sea $f \in C_{\omega k}(E)$; para cada K contenido en E debilmente compacto, $f|_K$ es debilmente continua. Luego existe $\tilde{f}_K : E \longrightarrow \mathbb{R}$ extensión de $f|_K$ debilmente continua (toda función continua sobre un subconjunto compacto de un espacio completamente regular puede extenderse con continuidad a todo el espacio).

La red $\{\tilde{f}_K\}$ con K variando en los subconjuntos debilmente compactos de E está pues contenida en $C_{\omega}(E) \subset C_{\omega b}(E)$ y claramente converge uniformemente sobre los subconjuntos debilmente compactos de E a la función f. #

3.17. Proposición. El espacio $C_{\omega k}(E)$ es completo.

Demostración. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red de Cauchy en $C_{\omega k}(E)$. Sea K un subconjunto de E $\sigma(E,E')$-compacto. $\{f_\alpha|_K\}_{\alpha\in A}$ es una red de Cauchy en $C_\omega(K)$ que es completo, luego $\{f_\alpha|_K\}_{\alpha\in A}$ converge uniformemente a una cierta $f_K \in C_\omega(K)$. Podemos así definir una función f, por $f(x) = f_{\{x\}}(x)$; es decir como el límite puntual. $f \in C_{\omega k}(E)$ porque dado cualquier $\sigma(E,E')$-compacto $K \subset E$, se tiene que $f|_K$ es debilmente continua. Por otra parte $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ converge uniformemente a f sobre los $\sigma(E,E')$-compactos de E. #

3.18. Corolario. El completado de $C_\omega(\ell^1)$ es $C(\ell^1)$ espacio de las funciones reales definidas sobre ℓ^1, continuas para la topología de la norma, dotado de la topología compacto-abierta.

Demostración. Por la proposición anterior el completado será $C_{\omega k}(\ell^1)$; ahora bien toda $f \in C_{\omega k}(\ell^1)$ es debilmente continua sobre los subconjuntos debilmente compactos de ℓ^1, luego en particular es continua (para la norma) sobre los compactos, y al ser ℓ^1 un k-espacio, por ser métrico, se tiene que f es continua para la norma.

Recíprocamente toda función continua en norma en ℓ^1, es continua sobre los compactos de ℓ^1; luego es debilmente continua sobre los compactos, por coincidir en estos ambas topologías. Como por el lema de Schur los compactos y los debilmente compactos son los mismos en ℓ^1, se tiene que $f \in C_{\omega k}(E)$. #

Nótese que el espacio $C_{\omega k}(E)$ puede expresarse como un espacio de funciones continuas sobre la k-extensión X_K del espacio X asociado a E; nótese también que si X no es un k-espacio, X_K tendrá necesariamente una topología más fina que la de X. Pero esto no basta para asegurar que $C_{\omega b}(E)$ no es completo, ya que no podemos garantizar que X_K sea completamente regular, con lo que nos encontraríamos con el hecho de que siendo distintos X y X_K, pueden ser iguales $C(X)$, $C(X_K)$. El hecho de no poder asegurar que X_K sea completamente regular, salvo algunos casos como cuando $E = \ell^1$ en el cual se hace una demostración análoga a la del ejemplo 3.8, resta interés a representar $C_{\omega k}(E)$ como $C(X_K)$. Nótese por último que este hecho está implícito ya en la proposición 1.3.

CAPITULO 4

4. Sobre el problema de cuando es bornológico o tonelado el espacio $C_{\omega b}(E)$. El espacio $C_{\omega bu}(E)$.

En este capítulo se dan condiciones suficientes para que $C_{\omega b}(E)$ sea bornológico. Demostraremos que dicho espacio es siempre tonelado. Por último se estudian propiedades de $C_{\omega bu}(E)$, espacio de las funciones debilmente uniformemente continuas sobre los acotados de E, y se relaciona este espacio con $C_{\omega b}(E)$. Así mismo se dan caracterizaciones de cuando es E reflexivo, utilizando estos espacios.

En primer lugar estudiaremos el problema de cuando es bornológico, y cuando es tonelado el espacio $C_{\omega b}(E)$; para ello utilizaremos la representación de $C_{\omega b}(E)$ obtenida en el capítulo anterior, así como los teoremas de Nachbin-Shirota (Teorema 1.28 y 1.29). Es decir el problema se reducirá a estudiar cuando el espacio X asociado a E es realcompacto, o cuando verifica que todo subconjunto suyo relativamente pseudocompacto y cerrado es compacto.

Estudiaremos en primer lugar cuando es X realcompacto.

En 1961 H.H. Corson en |7| caracteriza cuando un espacio de Banach dotado de la topología débil es realcompacto; para ello da las siguientes definiciones:

<u>4.1. Definición</u>. Dado E espacio de Banach real, se define la $\mathcal{V}_0\omega$*-topología sobre E' como la topología más fina que coincide con $\sigma(E',E)$ sobre los subespacios de E' $\sigma(E',E)$-separables.

<u>4.2. Definición</u>. $\mathcal{V}_0E$ denotará el subespacio de E" formado por todos los elementos $\mathcal{V}_0\omega$*-continuos sobre E'.

Claramente $E \subset \mathcal{V}_0E$, ya que todo elemento de E es $\sigma(E',E)$-continuo sobre E' y por tanto será continuo para la topología $\mathcal{V}_0\omega^*$ que es más fina que la $\sigma(E',E)$.

Por otra parte si E tiene dual separable, se tiene que la $\mathcal{V}_0\omega$*-topología y $\sigma(E',E)$ coinciden sobre E', y por tanto $\mathcal{V}_0E = (E',\sigma(E',E))' = E$.

Como en general $E \subset \mathcal{V}_0E \subset E''$, para espacios reflexivos coinciden los tres.

Con estas definiciones, Corson da el siguiente teorema:

<u>4.3. Teorema</u>. El espacio de Banach E es debilmente realcompacto si y sólo si $E = \mathcal{V}_0E$.

Este resultado asegura como vimos antes que los espacios reflexivos, o aquellos que tengan dual separable, son debilmente realcompactos. Corson demuestra también que ℓ^∞ es debilmente realcompacto (y no es debilmente normal), y utilizando la caracterización antes expuesta ve que ℓ^∞/c_0 no es debilmente realcompacto. Edgar posteriormente sistematiza bastante este trabajo, y demuestra en |10| que $C[0,\omega_1]$ siendo ω_1 el " el primer ordinal no numerable, no es debilmente realcompacto, sin utilizar para ello la caracterización de Corson.

Un primer intento para resolver el problema de cuando es X realcompacto, es intentar caracterizarlo en función de que E sea debilmente realcompacto.

4.4. Proposición. Si E es un espacio de Banach, normal para la topología débil, entonces X es realcompacto si y sólo si E es debilmente realcompacto.

Demostración. Por la proposición 1.9 sabemos que todo subconjunto cerrado de un espacio realcompacto es realcompacto, luego para demostrar la equivalencia bastará ver que del hecho de que las bolas cerradas $(B_n, \sigma(E,E')|_{B_n})$ sean realcompactos, se sigue que X (respectivamente E) es realcompacto (respectivamente debilmente realcompacto).

Lo demostraremos para E, pero la misma demostración sirve para X.

Según 1.7 tenemos que E será debilmente realcompacto si y sólo si todo z-ultrafiltro con la propiedad de intersección numerable tiene intersección no vacía.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ z-ultrafiltro. Cada $U_\alpha = f_\alpha^{-1}(0)$ con $f_\alpha : E \longrightarrow \mathbb{R}$ debilmente continua.

Tendremos que para toda sucesión de índices $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} \neq \Phi$.

1) Existe n_o tal que $U_\alpha \cap B_{n_o} \neq \Phi$ para todo $\alpha \in A$.

Si no fuese así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $\alpha_n \in A$ tal que

$U_{\alpha_n} \cap B_n = \Phi$. Con lo cual se tendrá que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} = \Phi$, fallando la propiedad de intersección numerable.

Luego para todo $n \geq n_o$ $\{U_\alpha \cap B_n\}_{\alpha \in A}$ es base de filtro en B_n.

2) Existe $n_1 \geq n_o$ de forma que la base de filtro $\{U_\alpha \cap B_{n_1}\}_{\alpha \in A}$ sobre B_{n_1} tiene la propiedad de intersección numerable.

Supongamos que no : Para cada $n \geq n_o$ existirá $\{\alpha_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión de índices de forma que $\bigcap_{n=1}^{\infty} [U_{\alpha_{n,m}} \cap B_n] = \Phi$.

Consideramos la familia numerable $\{U_{\alpha_{n,m}}\}_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N}}}$ $n \geq n_o$

$$\bigcap_{\substack{n \geq n_o \\ m \in \mathbb{N}}} U_{\alpha_{n,m}} = \bigcap_{\substack{n \geq n_o \\ m \in \mathbb{N}}} [U_{\alpha_{n,m}} \cap (\bigcup_{k=n_o}^{\infty} B_k)] = \bigcap_{\substack{n \geq n_o \\ m \in \mathbb{N}}} [\bigcup_{k=n_o}^{\infty} (U_{\alpha_{n,m}} \cap B_k)] =$$

$$= \bigcup_{k=n_o}^{\infty} [\bigcap_{n=n_o}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} (U_{\alpha_{n,m}} \cap B_k)] \subset \bigcup_{k=n_o}^{\infty} [\bigcap_{m=1}^{\infty} U_{\alpha_{k,m}} \cap B_k] = \Phi.$$

y llegaríamos a la contradicción de que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no tiene la propiedad de intersección numerable.

3) $\{U_\alpha \cap B_{n_1}\}_{\alpha \in A}$ es un z-filtro con la propiedad de intersección numerable sobre B_{n_1}, ya que $f_\alpha|_{B_{n_1}}$ es una función continua sobre $(B_{n_1}, \sigma(E,E')|_{B_{n_1}})$ para todo $\alpha \in A$.

4) $\{U_\alpha \cap B_{n_1}\}_{\alpha \in A}$ es un z-ultrafiltro.

De no serlo existiría $Z \subset B_{n_1}$ cero en B_{n_1}, es decir $Z = f^{-1}(0)$

con $f : (B_{n_1}, \sigma(E,E')|_{B_{n_1}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, de forma que $Z \cap (U_\alpha \cap B_{n_1}) \neq \Phi$ para todo $\alpha \in A$, pero $Z \notin \{U_\alpha \cap B_{n_1}\}_{\alpha\in A}$. Ahora bien dada f, como B_{n_1} es cerrado en $(E, \sigma(E,E'))$ que es normal por hipótesis, por el teorema de Tietze existe $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ debilmente continua, tal que $\tilde{f}|_{B_{n_1}} = f$. Luego $\tilde{f}^{-1}(0) = \tilde{Z}$ será un cero en $(E, \sigma(E,E'))$, y $Z = \tilde{Z} \cap B_{n_1}$.

Ahora bien como $Z \cap (U_\alpha \cap B_{n_1}) \neq \Phi$ para todo $\alpha \in A$, se tiene que $\tilde{Z} \cap U_\alpha \neq \Phi$ para todo $\alpha \in A$, luego $\tilde{Z} \in \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ por ser z-ultrafiltro. Es decir $\tilde{Z} = U_{\alpha_o}$ para algún α_o, y por tanto $Z = U_{\alpha_o} \cap B_{n_1}$.

Luego $\{U_\alpha \cap B_{n_1}\}_{\alpha\in A}$ es un z-ultrafiltro sobre B_{n_1} con la propiedad de intersección numerable; como por hipótesis B_{n_1} es realcompacto, se sigue que $\bigcap_{\alpha\in A} (U_\alpha \cap B_{n_1}) \neq \Phi$ y por tanto $\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha \neq \Phi$. Luego E es debilmente realcompacto.

Nótese que la función $\tilde{f}$ es también continua de X en $\mathbb{R}$, luego la misma demostración nos sirve para ver que X es realcompacto, con lo que se tiene la equivalencia. #

En la demostración se ve que es esencial el hecho de que E sea debilmente normal, para poder extender las funciones de una bola a todo el espacio. Sin embargo ya vimos antes que existen espacios de Banach que no son debilmente normales (ℓ^∞ en particular). Si no imponemos la normalidad débil, no podremos garantizar que la traza del z-ultrafiltro sea un z-ultrafiltro, y si lo completamos con lo que le falta para serlo, puede resultar que no verifique ya la propiedad de intersección numerable.

<u>4.5. Corolario</u>. Si E es un espacio de Banach debilmente normal, entonces $C_{\omega b}(E)$ es bornológico si y sólo si $\ell/\eta \circ E = E$.

<u>Demostración</u>. $C_{\omega b}(E)$ será bornológico si y sólo si el espacio X asociado a E es realcompacto, por el lema 3.5 y el teorema 1.29. La proposición anterior y el teorema 4.3 nos dan la equivalencia. #

Vamos a estudiar ahora, una serie de condiciones suficientes para que X sea realcompacto, y por tanto $C_{\omega b}(E)$ sea bornológico.

<u>4.6. Proposición</u>. Si E es un espacio de Banach WCG, entonces $C_{\omega b}(E)$ es bornológico.

<u>Demostración</u>. Por |30| sabemos que todo espacio WCG es debilmente Lindeloff, ahora bien las bolas $(B_n, \sigma(E,E')|_{B_n})$ son subespacios topológicos cerrados, y por tanto son también Lindeloff. De aquí se sigue que el límite inductivo X es también Lindeloff, ya que si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un recubrimiento abierto de X, $\{U_\alpha \cap B_n\}$ será un recubrimiento abierto de B_n para cada n, luego existe $\{\alpha_{n,m}\}_{m\in N} \subset A$ tal que $\{U_{\alpha_{n,m}}\}_{m\in N}$ recubre B_n. La familia $\{U_{\alpha_{n,m}}\}_{n,m\in N}$ recubre todo X.

Por la proposición 1.8 se tiene que X es realcompacto. #

Este resultado nos asegura que $C_{\omega b}(E)$ es bornológico, entre otros para todos los espacios reflexivos, separables, o $C(K)$ con K

compacto de Eberlein (en particular los $C_o(I)$ con I cualquiera).

4.7. Teorema. Si E es dual de un espacio separable, entonces $C_{\omega b}(E)$ es bornológico.

Demostración. Sea $E = F'$ con F separable. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una parte densa de F, definimos la siguiente función: $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$x' \longrightarrow (\langle x_n, x'\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

Esta función es inyectiva, porque si $x', y' \in E$ con $x' \neq y'$, se tiene que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\langle x_{n_o}, x'\rangle \neq \langle x_{n_o}, y'\rangle$, por ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una parte densa de F, que por tanto separan puntos de E.

Por otra parte f es continua, ya que si componemos con las proyecciones $P_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$, tendremos que $f_n = P_n \circ f$ es continua, por ser $f_n = x_n \circ i$ composición de funciones continuas, siendo $i : X \longrightarrow E$ la identidad.

Ahora bien $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es metrizable, luego los puntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son conjuntos G_γ, como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es realcompacto por ser producto de realcompactos (|11| Teorema 8.11 pág. 121) se tiene que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son realcompactos (|11| Corolario 8.15 p. 121). Tenemos pues una aplicación continua e inyectiva de X en un espacio topológico que verifica que todos sus subespacios son realcompactos, luego por la proposición 1.10 se tiene que X también es realcompacto, y por tanto $C_{\omega b}(E)$ bornológico. #

Este resultado es interesante en la línea de que resolvemos el problema para ℓ^∞ afirmativamente. Téngase en cuenta que ℓ^∞ sabíamos que era debilmente realcompacto, pero al no ser debilmente normal, no podemos aplicar el corolario 4.5. Por otra parte tampoco está en las hipótesis de la proposición 4.6 ya que si no es debilmente normal, no puede ser W C G.

4.8. Corolario. Si E es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach F W C G, o dual de un espacio separable, entonces $C_{\omega b}(E)$ es bornológico.

Demostración. Por el teorema 4.7 y la proposición 4.6, tenemos que X_F será realcompacto. Como por la proposición 2.10 X_E es un subespacio topológico cerrado de X_F, resulta que X_ε también es realcompacto (proposición 1.9). Luego $C_{\omega b}(E)$ es bornológico. #

4.9. Corolario. Sea E un espacio de Banach que verifique que la bola unidad de su dual dotada de la topología estrella débil $\sigma(E',E)$ es un compacto de Eberlein. Entonces $C_{\omega b}(E)$ es bornológico.

Demostración. E se puede poner como un subespacio vectorial, cerrado del espacio de las funciones reales continuas sobre $(B_n', \sigma(E',E)|_{B_n'})$. Ahora bien, este espacio es W C G por el teorema 1.13. Luego por el corolario anterior $C_{\omega b}(E)$ será bornológico. #

4.10. Proposición. $C_{\omega b}(E)$ es siempre tonelado.

Demostración. Sea K un subconjunto de X relativamente pseudocompacto y cerrado. Para todo $x' \in E'$ $x'(K)$ tiene que ser acotado, luego

K está debilmente acotado, y por tanto acotado en norma; es decir existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B_n$.

Como K está contenido en B_n y es cerrado en X, se tiene que K es debilmente cerrado; por otra parte toda función debilmente continua sobre E, es continua para la topología de X, luego K es debilmente relativamente pseudocompacto. Valdivia demuestra en |31| que todo subconjunto debilmente cerrado y debilmente relativamente pseudocompacto de un espacio de Banach (el resultado es cierto en condiciones más generales) es debilmente compacto. Luego K es debilmente compacto, y por tanto compacto en X por la proposición 2.13. Luego por el teorema 1.28 se tiene que $C_{\omega b}(E) = C(X)$ es tonelado. #

Esta técnica es de interés para estudiar el espacio de las funciones debilmente uniformemente continuas sobre los acotados, y su relación con $C_{\omega b}(E)$. Dicho espacio ya vimos en la introducción que tiene interés en la teoría de aproximación de funciones diferenciables.

<u>4.11. Definición</u>. $C_{\omega bu}(E)$ denotará el espacio de las funciones reales definidas sobre E que son debilmente uniformemente continuas sobre los subconjuntos acotados de E. Dotaremos a $C_{\omega bu}(E)$ de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos debilmente compactos de E.

Claramente se tiene que $C_{\omega bu}(E)$ está contenido en $C_{\omega b}(E)$, la siguiente proposición nos da más información sobre este hecho.

<u>4.12. Proposición</u>. $C_{\omega bu}(E)$ es denso en $C_{\omega b}(E)$.

<u>Demostración</u>. Sea $f \in C_{\omega b}(E)$. Para cada subconjunto de E debilmente compacto K, $f|_K$ será debilmente continua. Considero una extensión $\tilde{f}_K$ a $\beta(E)$ compactificación de Stone-Cech de $(E, \sigma(E,E'))$, que será uniformemente continua, luego $f_K = \tilde{f}_K|_E$ es debilmente uniformemente continua sobre E, luego $f_K \in C_{\omega bu}(E)$ para todo $K \subset E$ debilmente compacto.

Claramente $\{f_K\}_{K \subset E}$ K debilmente compacto, es una red que converge uniformemente a f sobre los debilmente compactos de E. #

Por otra parte el polinomio Q de la demostración del corolario 3.3 está claramente en $C_{\omega bu}(E)$, luego existen funciones en $C_{\omega bu}(E)$ que no están en $C_{\omega}(E)$.

<u>4.13. Proposición</u>. $C_{\omega b}(E) = C_{\omega bu}(E)$ si y sólo si E es reflexivo.

<u>Demostración</u>. Si E es reflexivo, los espacios $(B_n, \sigma(E,E')|_{B_n})$ son compactos y por lo tanto ser debilmente continua sobre las bolas y ser debilmente uniformemente continua es equivalente.

Recíprocamente si $C_{\omega b}(E) = C_{\omega bu}(E)$ demostraremos que B_1 es debilmente compacta.

Dada $f \in C_{\omega}(E)$, tendremos que $f \in C_{\omega b}(E) = C_{\omega bu}(E)$, luego f es debilmente uniformemente continua sobre B_1 y por tanto acotada en B_1; ya que B_1 es precompacto y por tanto totalmente acotado, ahora bien como f es debilmente uniformemente continua en B_1, se tiene que existe V entorno débil de cero en E tal que $|f(x) - f(y)| < 1$ siempre que $x-y \in V$ y x e y están en B_1.

Como B_1 es debilmente totalmente acotado, se tiene que existen $x_1,\dots,x_{n_o} \in B_1$ tal que $B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n_o} \{x_i + V\}$.

Luego para cada $x \in B_1$ $|f(x)| \leq \max_{i=1,\dots,n_o} \{f(x_i)\} + 1$.

Es decir toda función debilmente continua sobre E está acotada sobre B_1, luego B_1 es debilmente relativamente pseudocompacto y debilmente cerrado, de donde se sigue que B_1 es debilmente compacto por |31| y por tanto E reflexivo. #

La demostración de esta proposición nos indica que una forma para obtener una función de $C_{\omega b}(E)$ que no esté en $C_{\omega bu}(E)$, en el caso de que E no sea reflexivo, sería encontrar una función debilmente continua sobre E, que no esté acotada sobre la bola unidad.

<u>4.14. Ejemplo</u>. Si E es un espacio de Banach separable no reflexivo, por el teorema de James-Klee (|9| pág. 7, teorema 1) tenemos que existe $\phi \in E'$ que no alcanza su norma.

Definimos la función $f_o : B_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_o(x) = \dfrac{1}{\|\phi\| - \phi(x)}$.
Esta función es debilmente continua sobre B_1, y no está acotada. Como E es separable es W C G, y por tanto debilmente normal, B_1 es debilmente cerrado en E, luego por el teorema de Tietze existe $f \in C_\omega(E)$ extensión de f_o, que no estará acotada sobre la bola unidad, y por tanto no podrá estar en $C_{\omega bu}(E)$. #

<u>4.15. Corolario</u>. $C_\omega(E) \subset C_{\omega bu}(E)$ si y sólo si E es reflexivo.

<u>Demostración</u>. Si E es reflexivo, por la proposición 4.13 $C_{\omega bu}(E) = C_{\omega b}(E)$, y por tanto $C_\omega(E) \subset C_{\omega b}(E) = C_{\omega bu}(E)$.

Recíprocamente de manera análoga a como hicimos en la proposición 4.13. #

Vamos a ver ahora algunas propiedades del espacio $C_{\omega bu}(E)$.

<u>4.16. Proposición</u>. $C_{\omega bu}(E)$ es completo si y sólo si E es reflexivo.

<u>Demostración</u>. Si E es reflexivo $C_{\omega b}(E) = C_{\omega bu}(E)$ (Proposición 4.13), y $C_{\omega b}(E)$ es completo (Corolario 3.11).

Recíprocamente como $C_{\omega bu}(E)$ es denso en $C_{\omega b}(E)$ por la proposición 4.12, si es completo, tienen que coincidir ambos espacios, y por 4.13 se sigue que E es reflexivo. #

A la vista de la proposición 3.12, el resultado anterior nos dice que son equivalentes: a) E reflexivo,

b) $C_{\omega bu}(E)$ completo

c) $C_{\omega bu}(E)$ Frechet.

<u>4.17. Teorema</u>. El espacio $C_{\omega bu}(E)$ es tonelado si y sólo si E es reflexivo.

<u>Demostración</u>. Si E es reflexivo, $C_{\omega bu}(E)$ es igual a $C_{\omega b}(E)$, y por tanto tonelado.

Recíprocamente, consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} B_1'' & \longrightarrow & B_2'' & \longrightarrow & \cdots\cdots & \longrightarrow & X'' \\ \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 & & & & \uparrow i \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & \cdots\cdots & \longrightarrow & X \end{array}$$

Considerando en las bolas del bidual B_n'', la topología estrella débil restringida. X'' será el límite inductivo de los espacios $(B_n'', \sigma(E'',E')|_{B_n''})$.

i es continua porque al componerla con las inclusiones $j_n : B_n \longrightarrow X$ nos resulta que $i \circ j_n = j_n^* \circ i_n$ siendo $j_n^* : B_n'' \longrightarrow X''$ la inclusión canónica en el límite inductivo; y claramente $j_n^* \circ i_n$ es continua por serlo i_n. i es inyectiva, e $i(X)$ es denso en X'', por ser densas las bolas $(B_n, \sigma(E,E')|_{B_n})$ en las bolas $(B_n'', \sigma(E'',E')|_{B_n''})$; de forma que todo abierto G en X'' tiene que cortar alguna bola B_n'', y $G \cap B_n''$ será abierto en $(B_n'', \sigma(E'',E')|_{B_n''})$, luego corta B_n por ser densa. Es decir todo abierto de X'' corta a $i(X)$.

En general X no es un subespacio de X''; el conjunto A del ejemplo 2.1 es un cerrado en X (para $E=C_o$), sin embargo no puede ponerse como un cerrado en X'' intersección X.

Consideramos ahora la aplicación restricción: $\Phi : C(X'') \longrightarrow C(X)$
$f \longrightarrow f \circ i$

1) Tenemos que $\Phi(C(X'')) = C_{\omega bu}(E)$. Veamoslo:

Si $f \in C_{\omega bu}(E)$, se tiene que $f_n = f|_{B_n} : (B_n, \sigma(E,E')|_{B_n}) \to \mathbb{R}$

es uniformemente continua, luego por la densidad de B_n en $(B''_n, \sigma(E'',E')|_{B''_n})$ se puede extender a $\tilde{f}_n : (B''_n, \sigma(E'',E')|_{B''_n}) \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Por otra parte $\tilde{f}_n|_{B''_{n-1}} = \tilde{f}_{n-1}$ porque $(\tilde{f}_n|_{B''_{n-1}})|_{B_{n-1}} = (\tilde{f}_n|_{B_n})|_{B_{n-1}} = f_n|_{B_{n-1}} = f_{n-1}$ y $(\tilde{f}_{n-1})|_{B_{n-1}} = f_{n-1}$.

Luego ambas funciones coinciden sobre una parte densa de B''_{n-1}, y por tanto coinciden sobre B''_{n-1}.

Podemos definir así $\tilde{f} : X'' \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, como $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_n(x)$ si $x \in B''_n$. Claramente $\tilde{f}|_X = f$, luego $f \in \Phi(C(X''))$. Recíprocamente si $f \in \Phi(C(X''))$, se tiene que existe $\tilde{f} \in C(X'')$ tal que $f = \tilde{f}|_X$; pero $\tilde{f}_n = \tilde{f}|_{B''_n}$ es continua sobre $(B''_n, \sigma(E'',E')|_{B''_n})$, que es compacto, luego $\tilde{f}_n$ es uniformemente continua, luego $f_n = f|_{B_n} : (B_n, \sigma(E,E')|_{B_n}) \longrightarrow \mathbb{R}$ será $\tilde{f}_n|_{B_n}$, y por tanto uniformemente continua, luego $f \in C_{\omega bu}(E)$.

2) Φ es claramente lineal.

3) Φ es inyectiva por ser denso $i(X)$ en X''.

4) Φ es continua porque al ser $i : X \longrightarrow X''$ continua, se tiene que los compactos en X son también compactos en X''.

Ahora bien, el espacio X'' es unión numerable de compactos, y por tanto la topología del espacio $C(X'')$ (compacto-abierta) viene dada por una familia numerable de seminormas, luego $C(X'')$ es metrizable. Por la propia definición de X'', tenemos que por ser límite inductivo de compactos, X'' es un k-espacio y por tanto $C(X'')$ es completo por el teorema 1.25. Luego $C(X'')$ es un espacio de Frechet.

Luego si $C_{\omega bu}(E)$ es tonelado, se tiene que Φ es isomorfismo topológico ya que por el teorema de la aplicación abierta todo isomorfismo continuo de un espacio de Frechet en un tonelado es isomorfismo topológico. Tenemos entonces que $C_{\omega bu}(E)$ será completo, y como por la proposición 4.12 sabemos que $C_{\omega bu}(E)$ es denso en $C_{\omega b}(E)$, se tiene que ambos espacios coinciden, y por tanto por la proposición 4.13 tenemos que E es reflexivo. #

La observación que hicimos después de la proposición 4.16, unida a este resultado, nos da el siguiente corolario:

<u>4.18. Corolario</u>. Si E es un espacio de Banach, son equivalentes:

i) E es reflexivo

ii) $C_{\omega bu}(E)$ es de Frechet

iii) $C_{\omega bu}(E)$ es de Ptak

iv) $C_{\omega bu}(E)$ es completo

v) $C_{\omega bu}(E)$ es tonelado

vi) $C_{\omega bu}(E) = C_{\omega b}(E)$. #

CAPITULO 5

5. Compacidad en el espacio $C_{\omega b}(E)$. Teoremas de representación. La propiedad de aproximación.

En este capítulo procederemos al estudio de los conjuntos relativamente compactos y de los debilmente relativamente compactos en $C_{\omega b}(E)$. Así mismo definiremos espacios análogos a este último para el caso de funciones vectoriales, y utilizaremos técnicas de ε-producto para obtener representaciones de estos espacios, que se utilizarán para abordar el problema de la propiedad de aproximación. En concreto se demuestra que $C_{\omega}(E)$ siempre verifica la propiedad de aproximación, a pesar de que $(E, \sigma(E,E'))$ nunca es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio.

5.1. Proposición. Sea E un espacio de Banach separable que no contenga ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, o bien E reflexivo (separable o no). Entonces un subconjunto F de $C_{\omega b}(E)$ es relativamente compacto si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) Para todo $K \subset E$ debilmente compacto $F|_K = \{f|_K : K \to \mathbb{R} \ / \ f \in F\}$ es equicontinuo en $C(K)$.

b) Para todo $x \in E$ $F(x) = \{f(x) \ / \ f \in F\}$ es acotado en $\mathbb{R}$.

Demostración. Por el teorema 3.6 y la proposición 3.7, tenemos que el espacio X asociado a E es un k-espacio. Ahora bien en |3| se demuestra (Teorema 8) que en las hipótesis de ser X k-espacio, los relativamente compactos de $C(X)$ vienen caracterizados por a) y b). #

Vamos a estudiar ahora los subconjuntos debilmente compactos de $C_{\omega b}(E)$. Para ello vamos a ver en qué condiciones podemos aplicar el teorema de Eberlein. Tenemos el siguiente corolario:

5.2. Corolario. Si E es un espacio de Banach separable que no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, o bien E es reflexivo; entonces un subconjunto K de $C_{\omega b}(E)$ es debilmente relativamente compacto, si y sólo si es debilmente relativamente numerablemente compacto.

Demostración. En nuestras hipótesis, tenemos que por el corolario 3.11 $C_{\omega b}(E)$ es completo, por tanto está en las hipótesis del teorema de Eberlein (Teorema 1.17). #

Téngase en cuenta, que en el caso de que $C_{\omega b}(E)$ sea bornológico (caso que incluye los espacios en las hipótesis de 5.2), la topología compacto-abierta, es precisamente la de Mackey. Por otra parte en un espacio de funciones continuas con la topología compacto abierta, son equivalentes ser completo y ser casi-completo (|32| Teorema 1). Es decir en la hipótesis de que $C_{\omega b}(E)$ es bornológico, son equivalentes: ser completo y ser casi-completo para la topología de Mackey.

Nos interesa ahora caracterizar las sucesiones debilmente convergentes.

5.3. Teorema. $\{f_n\}_{n \in N}$ sucesión de elementos de $C_{\omega b}(E)$ converge a $f \in C_{\omega b}(E)$ debilmente si y sólo si:

a) Para cada $K \subset E$ $\sigma(E,E')$-compacto, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n(K)|\} < M.$$

b) Para todo $x \in E$ $f_n(x)$ converge a $f(x)$.

Demostración. Para ver que ambas condiciones son necesarias, nos bastará demostrar que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f$ debilmente, entonces para todo $K \subset E$ debilmente compacto $\{f_n|_K\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f|_K$ debilmente en $C(K)$, ya que de aquí se sigue trivialmente (b), y por |13| pág. 324 tenemos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ converge debilmente si y sólo si converge puntualmente y está uniformemente acotada.

Pero esto es cierto, ya que si $x' \in C(K)'$, $x'(f_n|_K) = x'(\phi(f_n))$ siendo $\phi : C_{\omega b}(E) \longrightarrow C(K)$ la restricción; ahora bien $x' \circ \phi$ es lineal y continua, luego $x' \circ \phi \in C_{\omega b}(E)'$; por tanto $\{(x' \circ \phi)(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(x' \circ \phi)(f)$ por converger $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a f debilmente. Como $(x' \circ \phi)(f) = x'(f|_K)$, resulta la convergencia débil de $\{f_n|_K\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $f|_K$.

Recíprocamente, tendremos que ver que para todo $\mu \in C_{\omega b}(E)'$ $\mu(f_n) \longrightarrow \mu(f)$. Ahora bien, por el teorema 1.34 sabemos que el dual de $C_{\omega b}(E)$ son las funciones de conjunto regulares, numerablemente aditivas definidas sobre los borelainos de X (asociado a E), y con soporte compacto.

Sea $\mu \in C_{\omega b}(E)'$, sea K el soporte de μ; K será debilmente compacto. Como $\mu(f_n) = \int_X f_n \, d\mu = \int_K f_n \, d\mu$, y $\mu(f) = \int_X f \, d\mu = \int_K f \, d\mu$, para ver que $\mu(f_n) \longrightarrow \mu(f)$, habrá que ver que

$\mu|_K \in C(K)'$, ya que por la caracterización de convergencia débil antes citada, a) y b) implican que $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende debilmente a $f|_K$.

Pero para ver que $\mu|_K \in C(K)'$, bastará ver que los borelianos de K son los borelianos de X restringidos a K, lo cual se sigue del hecho de ser K cerrado en X. $\mu|_K$ estará definida por $\mu|_K(C) = \mu(C)$ siendo C boreliano en K, y por tanto en X. #

Pasemos a estudiar ahora el caso vectorial; de forma análoga a como hicimos en los capítulos 3 y 4, tenemos las siguientes definiciones: L será un espacio localmente convexo; $C_{\omega b}(E,L)$ será el espacio de las las funciones de E en L, que son debilmente continuas al restringirlas sobre los subconjuntos acotados de E, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los debilmente compactos de E.

$C_{\omega bu}(E,L)$ será el espacio de las funciones de E en L debilmente uniformemente continuas al restringirlas a los subconjuntos acotados de E, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los debilmente compactos de E.

$C_{\omega k}(E,L)$ será el espacio de las funciones de E, en L, debilmente continuas al restringirlas a los subconjuntos debilmente compactos de E, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los debilmente compactos de E.

De manera totalmente análoga a como hicimos en el capítulo 3, lema 3.5 $C_{\omega b}(E,L)$ se puede representar como $C(X,L)$ siendo X el espacio asociado a E.

Aplicando los resultados del capítulo 1, obtenemos:

5.4. Proposición. Si L es completo y E es reflexivo o bien separable de forma que no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, entonces $C_{\omega b}(E,L)$ es completo.

Demostración. Por el corolario 3.11 $C_{\omega b}(E)$ es completo, y por la proposición 1.30 se tiene que $C_{\omega b}(E,L)$ es completo. #

5.5. Proposición. Si $C_{\omega b}(E,L)$ es completo, entonces L es completo y E no contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1, con suplementario topológico.

Demostración. Por el corolario 3.14 y la proposición 1.30. #

5.6. Proposición. Si $C_{\omega b}(E,L)$ es tonelado, entonces L es tonelado.

Demostración. Por la proposición 1.31. #

5.7. Proposición. Si L es Frechet, entonces $C_{\omega b}(E,L)$ es tonelado.

Demostración. Por la proposición 4.10 $C_{\omega b}(E)$ es tonelado, y esto unido a la proposición 1.32, nos dan que $C_{\omega b}(E,L)$ es tonelado. #

5.8. Proposición. Si L es metrizable, y E es un subespacio cerrado de un espacio W C G o bien de un dual de un espacio separable, entonces $C_{\omega b}(E,L)$ es bornológico.

Demostración. Por el corolario 4.8 X es realcompacto (equivalentemente $C_{\omega b}(E)$ bornológico). Luego de 1.33 se sigue que $C_{\omega b}(E,L)$ es bornológico. #

En el mismo sentido que la proposición 5.1, tenemos una caracterización de los relativamente compactos en $C_{\omega b}(E,L)$, para el caso de que L sea semi-métrico.

5.9. Proposición. Si E es un espacio de Banach reflexivo, o bien E es separable y no contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1; si además L es semi-métrico, entonces $F \subset C_{\omega b}(E,L)$ es relativamente compacto si y sólo si:

a) Para cada K debilmente compacto en E, $F|_K$ es equicontinuo en $C(K,L)$.

b) Para todo $x \in E$ $F(x)$ es relativamente compacto en L.

Demostración. Ver |3| Teorema 8. #

Como resultado paralelo a la proposición 4.13 tenemos:

5.10. Proposición. Si L es un espacio localmente convexo no trivial, $C_{\omega b}(E,L) = C_{\omega bu}(E,L)$ si y sólo si E es reflexivo.

5.11. Proposición. $C_{\omega b}(E) \otimes L$ es denso en $C_{\omega b}(E,L)$.

Demostración. Ver |20| pág. 14, Teorema 1.15. #

Por último vamos a utilizar la ténica del ε-producto, para obtener representaciones de los espacios $C_{\omega b}(E,L)$. Para ello vamos a representar en primer lugar $C_{\omega b}(E,L)$ como un subespacio de $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$. L será en lo que sigue un espacio localmente convexo completo.

<u>5.12. Teorema</u>. $C_{\omega b}(E,L)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos debilmente compactos de E, es un subespacio de $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$.

<u>Demostración</u>. Con las notaciones habituales, se trata de ver que $C(X,L)$ es un subespacio de $C(X)\ \varepsilon\ L$, siendo X el espacio asociado a E.

$$\text{Definimos}\quad \phi : C(X,L) \longrightarrow C(X)\ \varepsilon\ L$$
$$f \longrightarrow \phi(f)$$

siendo

$$\phi(f) : L'_c \longrightarrow C(X)$$
$$y' \longrightarrow y' \circ f$$

1) ϕ está bien definida, ya que $\phi(f)$ es claramente lineal, y para ver que es continua consideramos $T_{K,\varepsilon}$ entorno de 0 en $C(X)$. $f(K)$ es compacto en L, luego $(f(K))^o$ es un entorno de 0 en L'_c. Si $y' \in \varepsilon\ (f(K))^o$ tenemos que $\phi(f)(y') \in T_{K,\varepsilon}$, ya que $|(\phi(f)(y'))(x)| = |(y' \circ f)(x)| = |y'(f(x))| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$, luego $\phi(f) \in L(L'_c, C(X))$.

2) ϕ es claramente inyectiva ya que si $f \neq g$, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$ luego existe $y' \in L'_c$ tal que $y'(f(x)) \neq$ $\neq y'(g(x))$, luego $\phi(f)(y') \neq \phi(g)(y')$.

3) ϕ es continua.

Sea H equicontinuo, absolutamente convexo y cerrado en L^1; H será $H = V°$ con V entorno de 0 en L, $T(K,\varepsilon)$ entorno de 0 en $C(X)$.

$T(K,\varepsilon V)$ es un entorno de 0 en $C(X,L)$, y tenemos que $\phi(T(K,\varepsilon V))(H) \subset T(K,\varepsilon)$; veamoslo:

Sea $f \in T(K,\varepsilon V)$; $y' \in H$ $\phi(f)(y') = y' \circ f$; sea $x \in K$ $|(y' \circ f)(x)| = |y'(f(x))|$; pero $f(x) \in \varepsilon V$ luego $f(x) = \varepsilon y$ con $y \in V$. Como $y' \in H = V°$ $|y'(f(x))| = |y'(\varepsilon Y)| = \varepsilon |y'(Y)| \leq \varepsilon$.

Luego $\phi(f)(Y') \in T(K,\varepsilon)$ y por tanto ϕ es continua.

4) Para ver que ϕ es isomorfismo topológico sobre su imagen, por último, veremos que si $\phi(f)$ es un elemento de $\phi(C(X,L))$ que está en el entorno de cero dado por H y $T(K,\varepsilon)$, entonces $f \in T(K,\varepsilon V)$ (siendo $V° = H$).

Tenemos que: $\phi(f)(H) \subset T(K,\varepsilon)$, luego para todo $y' \in H = V°$ $\phi(f)(y') = y' \circ f \in T(K,\varepsilon)$.

Tenemos pues que $|y' \circ f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$ y para todo $y' \in V°$, luego $f(x) \in \varepsilon V°°$ para todo $x \in K$; ahora bien tomando V absolutamente convexo y cerrado, se sigue por el teorema de la bipolar que $V°° = V$, y por tanto $f(x) \in \varepsilon V$ para todo $x \in K$, luego $f \in T(K,\varepsilon V)$. #

El problema será ahora, estudiar cuando ϕ es suprayectiva, y en caso de que no lo sea, qué espacio es $C_{\omega b}(E) \varepsilon L$. En esta línea tenemos el siguiente resultado:

5.13. Teorema. Si E es reflexivo, o separable no conteniendo ningún subespacio isomorfo a ℓ^1, entonces $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L = C_{\omega b}(E,L)$.

Demostración. En nuestras hipótesis, ya vimos que el espacio X asociado a E es un k-espacio, luego por la proposición 1.35 tenemos que $C_{\omega b}(E) = C(X)$ verifica la propiedad de aproximación; de donde se sigue por la proposición 1.46 que para cualquier espacio localmente convexo L, $C_{\omega b}(E) \otimes L$ es denso en $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$. Por el teorema 5.12 tenemos que $C_{\omega b}(E) \otimes L \subset C_{\omega b}(E,L) \subset C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$, y por tanto $C_{\omega b}(E,L)$ es denso en $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$. Ahora bien, por ser X k-espacio $C_{\omega b}(E)$ es completo, y como L también lo es, se sigue por la proposición 5.4 que $C_{\omega b}(E,L)$ es completo, y por tanto coincide con $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$. #

Al intentar ver si la aplicación ϕ es supráyectiva, nos encontramos con que la imagen inversa de un elemento de $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$ no tiene porque ser debilmente continua sobre los acotados. Tenemos sin embargo el siguiente teorema:

5.14. Teorema. $C_{\omega b}(E)\ \varepsilon\ L$ es un subespacio de $C_{\omega k}(E,L)$.

Demostración. Consideramos la aplicación: $\Phi : L_\varepsilon(L'_c, C_{\omega b}(E) \to C_{\omega k}(E,L)$ definida por

$$\Phi(u) : E \longrightarrow L \qquad \text{para cada } u \in L(L'_c, C_{\omega b}(E))$$
$$x \longrightarrow \Phi(u)(x)$$

siendo $(\Phi(u)(x))(y') = (uy')(x)$ para $y' \in L'$. En general $\Phi(u)(x) \in (L'_c)'$ ya que es lineal sobre L', y además es continua sobre L'_c, ya que dado $\varepsilon > 0$, consideramos $T(\{x\},\varepsilon)$ entorno de cero en $C_{\omega b}(E)$, como u es continua, existe U' entorno de cero en L'_c tal que $u(U')\ \ T(\{x\},\varepsilon)$, como L es completo se tiene que $(L'_c)'=L$, ..

y por tanto $\Phi(u)$ está bien definida.

Veamos que $\Phi(u) \in C_{\omega k}(E,L)$. Sea K debilmente compacto en E, hay que ver que $\Phi(u)|_K$ es debilmente continua. Sea $x \in K$; tenemos que ver que para todo V entorno de 0 absolutamente convexo y cerrado en L, existe U entorno débil de 0 en E tal que

$\Phi(u)((x+U) \cap K) \subset \Phi(u)(x) + V$; esto es equivalente a ver que para todo $y \in U$ tal que $x+y \in K$, $\Phi(U)(x+y) - \Phi(u)(x) \in V = V^{\circ\circ}$. Luego hay que ver para cada $y' \in V^\circ$ $|(u\, y')(x+y) - (u\, y')(x)| \leq 1$.(*) Ahora bien como V° es equicontinuo en L', es relativamente compacto en L'_c, por tanto $u(V^\circ)$ es relativamente compacto en $C_{\omega b}(E)$, luego por el teorema de Ascoli $u(V^\circ)|_K$ es equicontinuo en $C(K)$; tenemos entonces que existe U entorno débil de cero en E tal que si $z \in K$ y $z-x \in U$ entonces $|h(z) - h(x)| \leq 1$ para todo $h \in u(V^\circ)$. Tomando $h = uy'$, y $z = x+y$, resulta la condición (*).

Φ está bien definida, y es claramente lineal e inyectiva.

Veamos que es continua: Sea $T(K,V)$ entorno de cero en $C_{\omega k}(E,L)$, K debilmente compacto en E, V entorno de 0 en L absolutamente convexo y cerrado. Consideramos en $L_\varepsilon(L'_c, C_{\omega k}(E))$ el entorno de cero dado por V° equicontinuo en L' y $T(K,1)$ entorno de cero en $C_{\omega k}(E)$. La imagen de dicho entorno por Φ está contenida en $T(K,V)$.

Un razonamiento análogo al anterior prueba que Φ es un isomorfismo topológico sobre su imagen. //

La siguiente proposición extiende el resultado 3.16, en el caso de que L sea Frechet.

5.15. Proposición. Si L es Frechet, $C_{\omega b}(E,L)$ es denso en $C_{\omega k}(E,L)$.

Demostración. En |15| pág. 161, proposición X3-33 se demuestra que si X es paracompacto y F es Frechet, toda función continua de $C \subset X$ cerrado a L se puede extender a todo X. Modificando ligeramente la demostración de la proposición 3.16, se obtiene nuestro resultado. #

5.16. Corolario. Si L es Frechet $C_{\omega b}(E) \varepsilon L$ es denso en $C_{\omega k}(E,L)$.

5.17. Proposición. El espacio $C_{\omega k}(E,L)$ es completo.

Demostración. Análogamente a la proposición 3.17, teniendo en cuenta que si K es compacto y L completo, $C(K,L)$ es completo.

5.18. Teorema. $C_{\omega k}(E,L) = C_{\omega k}(E) \varepsilon L$.

Demostración. Definimos $\Phi : C_{\omega k}(E) \varepsilon L \longrightarrow C_{\omega k}(E,L)$ de manera análoga a como lo hicimos en el teorema 5.14, se demuestra que es un isomorfismo topológico sobre su imagen, y se ve que Φ es suprayectiva definiendo $\Phi^{-1}(f)$ para $f \in C_{\omega k}(E,L)$ como:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(f) : L'_c &\longrightarrow C_{\omega k}(E) \\ v' &\longrightarrow y' \circ f \end{aligned} \qquad \#$$

5.19. Corolario. Si L es Frechet, $C_{\omega k}(E) \otimes L$ es denso en $C_{\omega k}(E) \varepsilon L$.

Demostración. Por la proposición 5.15 y el teorema 5.18 resulta que $C_{\omega b}(E,L)$ es denso en $C_{\omega k}(E) \varepsilon L$. Por la proposición 5.11, nos resulta que $C_{\omega b}(E) \otimes L$ es denso en $C_{\omega k}(E) \varepsilon L$. Ahora bien

$C_{\omega b}(E) \otimes L \subset C_{\omega k}(E) \otimes L \subset C_{\omega k}(E) \varepsilon L$. Luego se obtiene el resultado. #

5.20. Corolario. $C_{\omega k}(E)$ verifica la propiedad de aproximación.

Demostración. Por la proposición 3.17 $C_{\omega k}(E)$ es completo; ahora bien por la proposición 1.47 tenemos que un espacio localmente convexo completo M verifica la propiedad de aproximación si y sólo si $M \otimes E$ es denso en $M \varepsilon E$ para todo E' Banach. El corolario 5.19 nos da que $C_{\omega k}(E)$ verifica la propiedad de aproximación. #

5.21. Corolario. $C_{\omega}(E)$ y $C_{\omega b}(E)$ verifican la propiedad de aproximación.

Demostración. $C_{\omega k}(E)$ es el completado de ambos, y por el corolario anterior verifica la propiedad de aproximación, luego por |27| Exp. 15, Teorema 7 se sigue que $C_{\omega}(E)$ y $C_{\omega b}(E)$ verifican la propiedad de aproximación. #

CAPITULO 6

6. Apéndice. Problemas abiertos.

Ya vimos en el segundo capítulo que cuando el espacio de Banach E es reflexivo, el espacio topológico asociado X tiene estructura localmente convexa, recíprocamente vimos que si E contenía a C_o, X no era localmente convexo; posteriormente el profesor Javier Gómez ha demostrado que si E no contiene a ℓ^1, el espacio X es localmente convexo si y sólo si E es reflexivo. Este resultado deja abierto el siguiente problema:

1. ¿Es X localmente convexo si y sólo si E es reflexivo?

La forma de abordar esto es estudiar si la topología de X_{ℓ^1} es localmente convexa. En caso de no serlo, tendríamos que para cualquier espacio F que contenga a ℓ^1 (que claramente no puede ser reflexivo), la topología de X_F no sería localmente convexa, por ser X_{ℓ^1} subespacio topológico de X_F; con lo cual quedaría establecida la equivalencia.

Otra cuestión abierta es el problema de la compleción de $C_{\omega b}(E)$. En particular cuando E contiene a ℓ^1 sabemos que X no es k-espacio, pero no podemos afirmar que no sea k_R-espacio este problema está relacionado con estudiar cuando X_K, k-extensión de X, definido como X dotado de la topología más fina que coincide con la X sobre los compactos de X; es completamente regular.

Téngase en cuenta que si X no es un k-espacio, la topología de

X es estrictamente menos fina que la de X_K, y que por otra parte el completado de $C_{\omega b}(E)$, $C_{\omega k}(E)$ se puede representar como $C(X_K)$, pero si X_K no es completamente regular, en general $C(X)$ y $C(X_K)$ no tienen porque ser distintos. Es fácil ver que el espacio X_K para ℓ^1 si es completamente regular, ya que la función norma que está en $C(X_K)$ separa cerrados y puntos de X_K, pero para demostrar esto es esencial el lema de Schur.

El problema más interesante desde nuestro punto de vista es el de caracterizar cuando es X realcompacto. En esta línea un resultado ideal sería:

2. X es realcompacto si y sólo si E es debilmente realcompacto. El intento natural es demostrar el teorema de Corson |6| para X, la línea que hemos abordado es intentar demostrarlo para las bolas, es decir encontrar un resultado del tipo: SI $(B_1, \sigma(E,E')|_{B_1})$ es realcompacto entonces $B_1'' \cap \chi_o E = B_1$, lo cual nos daría el siguiente resultado: Si X es realcompacto, entonces E es debilmente realcompacto. Este intento encuentra desde nuestro punto de vista dificultades difíciles de salvar, ya que en el Teorema de Corson es esencial un resultado de separación de abiertos en un producto de espacios topológicos debido a Bockstein |2|, que en general no es cierto para subespacios topológicos de dicho producto (nosotros tendríamos que aplicarlo a B_1'' en lugar de a E'^*).

Otra línea de trabajo, sería demostrar directamente para casos concretos que X no es realcompacto. Los posibles candidatos serían espacios que sabemos que no son debilmente realcompactos, en particular ℓ^{∞}/c_o, o $C[0,\omega_1]$ siendo ω_1 el primer ordinal no numerable. En la demostración de que ℓ^{∞}/c_o no es debilmente realcompacto |7| es esencial el resultado de Corson, por lo cual pensamos que es mas factible de abordar el caso de $C[0,\omega_1]$ en cuya demostración se utiliza la siguiente caracterización de Hewitt |12|: Un espacio topológico es realcompacto si y sólo si toda medida de probabilidad numerablemente aditiva sobre los conjuntos de Baire, que tome solo valores 0 y 1 es τ-regular; es decir para toda red $\{f_\alpha\}$ de funciones continuas y acotadas que decrece a cero, se tiene que el límite $\int_X f_\alpha \, d\mu$ es cero.

Por último en la demostración del teorema 3.6 se utiliza que todo espacio separable que no contiene a ℓ^1 verifica que todo subconjunto acotado es secuencialmente denso en su clausura |24|. No se sabe si hay un resultado análogo prescindiendo de la condición de separabilidad. Una posible forma de abordar esto, sería encontrar un espacio E no separable que no contenga a ℓ^1, y tal que $C_{\omega b}(E)$ no fuese completo, lo cual demostraría que las hipótesis de separabilidad no se puede eliminar.

BIBLIOGRAFIA

|1| Aron, R.M. y Prolla, J.B.: Polinomial approximation of differentiable functions on Banach spaces. Journal fur die reine und angeivandte mathematik, 313, 195-216 (1980).

|2| Bockstein, M.: Un théoreme de separabilite pour les produits topologiques. Fund. Math. 35 (1948) 241-246.

|3| Bombal, F., Llavona, J.G.: La propiedad de aproximación en espacios de funciones diferenciables. Rev. Real Acad. Ciencias. Madrid LXX n° 4 (1976) 727-741.

|4| Beckenstein, E., Narici, L., Suffel, Ch.: Topological algebras. North-Holland. (1977), Math. Studies, 24.

|5| Collins, H.S.: Completeness and compactness in linear topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955) 256-280.

|6| Cooper, J.B.: Saks spaces and applications to functional Analysis. North-Holland (1978). Math. Studies, 28.

|7| Corson, H.H.: The weak topology of a Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 1-15.

|8| Day, M.M.: Normed linear spaces. Berlin, 1962.

|9| Diestel, J.: Geometry of Banach spaces. Selected Topics. Lectures Notes in Math. 485 Springer-Verlag, New York (1975).

|10| Edgar, G.A.: Mesurability in a Banach Space. Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 663-677.

|11| Gilman, L. y Gerison, M.: Rings of continuous functions. Van Nostrand (1960).

|12| Hewitt E.: Linear functionals on spaces of continuous functions. Fund. Math. 37 (1950), 161-189.

|13| Kothe, G.: Topological vector spaces I. Springer-Verlag, New York (1969).

|14| Llavona, J.G.: Sobre la densidad de subálgebras polinomiales de funciones debilmente diferenciables. Por aparecer.

|15| Margalef, Outerelo, E., Pinilla, J.: Topología IV. Ed. Alhambra.

|16| Mendoza, J.: Algunas propiedades de $C_c(X,E)$. Por aparecer.

|17| Morita, K.: On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. Proc. Japan Acad. 29 (1953), 537-543.

|18| Nachbin, L.: Sur les algebres denses de fonctions différentiables sur une variété. C.R. Acad. Sc. Paris 288, 1549-1551 (1949).

|19| Nachbin, L.: Topological vector spaces of continuous functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 40 (1954) 471-474.

|20| Prolla, J.B.: Approximation of vector valued functions. North-Holland (1977). Math. Studies, 28.

|21| Ptak, V.: On complete topological linear spaces. Czech Math. J. 78 (1953), 301-364.

|22| Restrepo, G.: An infinite dimensional version of a theorem of Bernstein. Proc. A.M.S. 23 (1969), 193-198.

|23| Rosenthal, H.P.: The heredity problem for weakly compactly generated. Banach Spaces. Colloq. Math.

|24| Rosenthal, H.P.: Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach Spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978) 803-831.

|25| Schmets, J.: Spaces of vector valued continuous functions. Lect. Notes in Math. 644, Springer-Verlag, 369-377 (1978).

|26| Schmets, J.: Bornological and ultrabornological C(X,E) spaces Manuscripta Math. (Por aparecer).

|27| Schwartz, L.: Produits tensorieles topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucleaires. Applications. Seminaire Schwartz Année 1953/54, Fac. Sci. Paris.

|28| Schwartz, L.: Théorie des distributions a valeurs vectorielles I. Ann. Fourier, 7. 1-139 (1957).

|29| Shirota, T.: On locally convex vector spaces of continuous functions. Proc. Japan Acad. 30, 294-298 (1954).

|30| Talagrand, M.: Sur une conjecture de H.H. Corson. Bull. Sci. Math. (2), 99 (1975), 211-212.

|31| Valdivia, M.: Some new results on weak compactness. Journal of Funct. Anal. 24 (1977), 1-10.

|32| Warner, S.: The topology of compact convergence on continuous function spaces. Duke Math. J. 25, 265-282.

|33| Wheeler, R.F.: The equicontinuous weak* topology an semi-refle xivity*. Studia Math. XLI, 243-256 (1972).