

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FT37

Ondas gravitatorias y su detección

Gravitational waves and their detection

Supervisor/es: Antonio Dobado González

Mario Mateos Carrasco

Grado en Física

Curso académico 2024-25

Convocatoria Ordinaria

Calificación: 9.1

Resumen:

Un siglo después de la predicción teórica de las ondas gravitacionales por parte de Einstein, el estudio de ondas gravitacionales se ha convertido en un elemento clave en la exploración del universo, especialmente tras la primera detección directa en febrero de 2016 por la colaboración LIGO-VIRGO. En el presente trabajo, se presentan los principales fundamentos teóricos de las ondas gravitacionales y de su detección en el marco de la Relatividad General. Partiendo de la teoría linealizada de la gravedad, se muestra cómo surgen la ecuación de onda y su solución más simple en el gauge TT, obteniéndose así las polarizaciones de la onda gravitatoria.

A partir de esta base, se analiza cómo estas ondas interactúan con la materia y cómo esta interacción permite su detección mediante interferómetros Michelson equipados con masas espejo. Se explica cómo, durante el paso de la onda gravitacional, la distancia propia entre dos masas oscila con la frecuencia de la onda. Este hecho representa el fundamento físico principal para la detección de ondas gravitacionales en los observatorios más importantes a lo largo de todo el mundo, como LIGO y VIRGO, entre otros.

Posteriormente, se tratan los principales aspectos energéticos y la radiación emitida por las ondas gravitacionales. Considerando la teoría linealizada de la gravedad como una teoría clásica de campos, se obtiene la expresión del tensor energía-momento. Asimismo, se deduce el campo gravitatorio radiado, cuyo desarrollo multipolar a velocidades no relativistas permite identificar el término cuadrupolar como dominante en la emisión de radiación gravitatoria. Por último, se hace un repaso de las posibles fuentes astrofísicas y cosmológicas de ondas gravitacionales en el contexto de los detectores terrestres y espaciales.

Abstract:

A century after Einstein's theoretical prediction of gravitational waves, the study of gravitational waves has become a key element in the exploration of the universe, notably after the first direct detection in February 2016 by the LIGO-VIRGO collaboration. In this paper, we present the main theoretical foundations of gravitational waves and their detection in the framework of General Relativity. Starting from the linearized theory of gravity, it is shown how the wave equation and its simplified solution in the TT gauge arise, from which the wave polarizations emerge.

From this basis, it is analyzed how these waves interact with matter, and how this interaction allows their detection by means of Michelson interferometers equipped with mirror masses. During the passage of a gravitational wave, the proper distance between two masses oscillates with the wave's frequency, showing a key principle behind gravitational wave detection. This fact represents the main physical principle for the detection of gravitational waves in the most important observatories all over the world, such as LIGO and VIRGO, among others.

Subsequently, the main energy-related aspects and the radiation emitted by gravitational waves are discussed. The energy-momentum tensor is derived by treating the linearized theory of gravity as a classical field theory. Likewise, the radiated gravitational field is also derived. Its multipole expansion at non-relativistic velocities allows us to identify the quadrupole term as dominant in the emission of gravitational radiation. Finally, the possible astrophysical and cosmological sources of gravitational waves are reviewed in the context of ground-based and space-based detectors.

Índice

1. Introducción.	4
2. Objetivos	4
3. Metodología.	4
4. Teoría linealizada de la gravedad	5
4.1. Transformaciones de coordenadas y transformaciones gauge.	5
4.2. Gauge de Lorenz y ecuación de onda en el vacío	6
4.3. Solución de la ecuación de onda	7
4.4. Gauge transverso y sin traza. Polarización de la onda.	7
5. Interacción de ondas gravitacionales con masas test	8
5.1. Ecuación de las geodésicas y de su desviación	8
5.2. Sistema de referencia del gauge TT y sistema propio del detector	9
5.2.1. Sistema de referencia TT	9
5.2.2. Sistema de referencia propio del detector	10
5.3. Detección de ondas gravitacionales. Interferómetros y fuentes de ruido.	12
6. Tensor energía-momento de una onda gravitacional.	14
6.1. Tensor energía-momento	14
6.2. Flujo energético.	15
7. Fuentes de las ondas gravitacionales en la teoría linealizada	16
7.1. Fuentes de campos débiles con velocidad arbitraria	17
7.2. Desarrollo multipolar a bajas velocidades	18
7.3. Radiación cuadrupolar	19
7.4. Fuentes astrofísicas y cosmológicas de ondas gravitatorias	21
8. Conclusiones	22

Ondas gravitatorias y su detección

Mario Mateos Carrasco

26 de mayo de 2025

1. Introducción.

Tras 100 años de espera, después de que Einstein propusiera la existencia teórica de las ondas gravitacionales en la Relatividad General, llegó el anuncio de la primera detección de una onda gravitacional (GW150914) en febrero de 2016 por la colaboración LIGO-VIRGO. Esto y la posterior concesión del premio Nobel a Rainer Weiss, Barry C. Barish y Kip S. Thorne en 2017 no solo confirmaron una de las predicciones más importantes de la teoría de Einstein, sino que también inauguraron una nueva era en la observación de fenómenos astronómicos.

En este contexto, el presente trabajo está enfocado en mostrar cómo surgen este tipo de ondas dentro de la teoría de la Relatividad General y en cómo interaccionan con la materia hasta llegar a su observación en los interferómetros más importantes de la actualidad. Para ello, se hará un estudio energético de la radiación gravitatoria emitida por las fuentes y se verá cuáles son los eventos astronómicos observables mediante la detección de ondas gravitacionales.

2. Objetivos

Los objetivos de este trabajo pasan por estudiar los principios teóricos de las ondas gravitacionales en el marco de la teoría linealizada de la Relatividad General, así como los aspectos más básicos de su detección. Para ello, será necesario construir la ecuación de onda y su solución, comprender la interacción con masas test en el ámbito de la detección y exponer los principales detectores que existen en la actualidad. Asimismo, se pretende realizar un repaso de las principales características energéticas de las ondas gravitacionales y de sus fuentes.

3. Metodología.

El trabajo se ha desarrollado mediante la revisión bibliográfica de las distintas fuentes mencionadas en las referencias, llevando a cabo un análisis y una síntesis de los elementos más fundamentales en la predicción teórica de las ondas gravitatorias y en su detección. Por otro lado, los diferentes apartados han sido organizados siguiendo el orden lógico escogido por la mayoría de los libros abordados, adaptando la información a un formato comprensible y coherente dentro del carácter introductorio del tema del trabajo. Es importante mencionar que, pese a que no se han realizado cálculos propios ni nueva física, se han reproducido cada uno de los desarrollos expuestos en el trabajo con el fin de entender el origen de los resultados obtenidos. Para ello, se ha hecho uso de las principales herramientas de la Relatividad General y la Teoría Clásica de Campos, realizando una analogía con el Campo Electromagnético en los casos necesarios.

4. Teoría linealizada de la gravedad

En este apartado, se realizará un análisis de las ecuaciones del campo gravitatorio hasta entender cómo surgen las ondas gravitacionales a través de la teoría linealizada de la gravedad. Esta teoría se basa en considerar que el espacio-tiempo es aproximadamente plano y que, por lo tanto, la métrica es la métrica de Minkowski más una pequeña perturbación, que representa un campo gravitatorio débil. Es decir:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (4.1)$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, y por lo tanto, $h^2 \approx 0$. De este modo, será la métrica de Minkowski la que bajará y subirá los índices. Entonces, a primer orden en $h_{\mu\nu}$, los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) , \quad (4.2)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Por otro lado, para estudiar la ecuación de Einstein, será necesario obtener el tensor de Ricci y el escalar de curvatura en el desarrollo a primer orden. El tensor de Ricci se define como $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$. Entonces, en la teoría linealizada:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - h_{,\mu\nu}) , \quad (4.3)$$

ya que los términos $\Gamma^2 \approx 0$ y donde se ha definido $h = h^\alpha_\alpha = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$. Así, el escalar de curvatura se define como $R = R^\alpha_\alpha = \eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$. Introduciendo el resultado anterior, se tiene:

$$R = h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - h^{\alpha,\alpha} . \quad (4.4)$$

Por lo tanto, usando $G = 1$ y $c = 1$, la ecuación de Einstein queda:

$$16\pi T_{\mu\nu} = h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha + h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - h^{\alpha,\alpha}) . \quad (4.5)$$

Sin embargo, es posible reducir considerablemente el número de términos introduciendo el cambio de variables:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} . \quad (4.6)$$

Ahora, se puede comprobar fácilmente que $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$. Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein en las nuevas variables se expresan:

$$16\pi T_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\alpha}^{\alpha,\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha}^{\alpha,\mu} - \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} , \quad (4.7)$$

que se obtiene rápidamente viendo que $h = -\bar{h}$.

4.1. Transformaciones de coordenadas y transformaciones gauge.

La teoría linealizada se puede estudiar a través de una transformación infinitesimal de coordenadas. Para entender en primera instancia las ondas gravitacionales, es necesario estudiar las ecuaciones de Einstein alrededor del espacio-tiempo plano. Es decir, todas las ecuaciones mostradas a continuación, serán a primer orden en $h_{\mu\nu}$.

Dado que las componentes de $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x^p)$ son dependientes del sistema de referencia, la ecuación (4.1) no es válida en todo el espacio, sino que en cierta región suficientemente grande sí que lo es. Es decir, el espacio-tiempo no es plano globalmente, sino que en alguna región grande se puede aproximar de tal forma. De este modo, se puede tratar la gravedad como un campo en el espacio-tiempo plano, en vez de como una geometría curva. Así, en la teoría linealizada, el tensor $h_{\mu\nu}$ es un campo en un espacio-tiempo plano

regido por la métrica de Minkowski donde está definida la invariancia Poincaré para transformaciones de Lorentz y traslaciones.

Las transformaciones de coordenadas serán difeomorfismos arbitrarios: invertibles, diferenciables y con inversas diferenciables. Por lo tanto, se realiza una transformación infinitesimal de coordenadas a este sistema de coordenadas deseado, que tiene la forma:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\rho) , \quad (4.8)$$

siendo ξ^μ una función arbitraria muy pequeña y del mismo orden que $|h_{\mu\nu}|$, preservando así $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Así misma, bajo un difeomorfismo, la métrica $g_{\mu\nu}(x^\rho(r)) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\rho(r))$ se transforma:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) , \quad (4.9)$$

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} , \quad (4.10)$$

de forma que la transformación de $h_{\mu\nu}$ a primer orden es:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} . \quad (4.11)$$

Por otro lado, realizando una transformación de Lorentz, vemos que la métrica sigue siendo un tensor:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu , \quad (4.12)$$

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g_{\alpha\beta}(x) , \quad (4.13)$$

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu h_{\alpha\beta} , \quad (4.14)$$

donde se ha usado que $\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$ y, por lo tanto:

$$h'_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta h_{\mu\nu} . \quad (4.15)$$

Además, se ve claramente en la ecuación (4.10) que una traslación $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, con a^μ un cuadvivector constante, deja invariante la métrica. De este modo se comprueba la invariancia de la teoría linealizada bajo el grupo de transformaciones finitas de Poincaré (traslaciones y transformaciones de Lorentz). También es posible comprobar que, análogamente al campo electromagnético, donde el tensor $F_{\mu\nu}$ es invariante bajo transformaciones gauge, el tensor de Riemann también lo es:

$$R'_{\alpha\beta\rho\sigma} = R_{\alpha\beta\rho\sigma} , \quad (4.16)$$

siendo invariantes también: el tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$; y el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. Del mismo modo, se obtiene la siguiente expresión para la transformación infinitesimal de $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^\rho_{,\rho} . \quad (4.17)$$

4.2. Gauge de Lorenz y ecuación de onda en el vacío

Con el fin de facilitar el estudio de la teoría, puede fijarse el llamado gauge de Lorenz (o también conocido como condición de Hilbert):

$$\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0 . \quad (4.18)$$

A partir de la ecuación (4.10) vemos que para que sea posible definir esta condición se obtiene un gauge residual tal que:

$$\square \xi_\mu = 0 , \quad (4.19)$$

siendo $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha$ el operador D'Lambertiano. La ecuación anterior siempre admite una solución, por lo que es posible fijar el gauge de Lorenz. Así, la ecuación de Einstein que se tiene tras aplicar esta condición es:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} . \quad (4.20)$$

Aunque serán consideradas más adelante, para estudiar la propagación de las ondas, va a emplearse la ecuación de Einstein sin fuentes, $T_{\mu\nu} = 0$. Entonces:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.21)$$

4.3. Solución de la ecuación de onda

Para las ecuaciones obtenidas en la teoría linealizada $\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{\prime\alpha} = 0$, la solución más simple es una onda plana monocromática que viaja a la velocidad de la luz del tipo:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re[A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)] , \quad (4.22)$$

donde $\Re[\dots]$ está referido a tomar la parte real de lo que hay dentro del corchete. La amplitud $A_{\mu\nu}$ y el cuadvivector de onda $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ son constantes y, de acuerdo con las ecuaciones, satisfacen $k_\alpha k^\alpha = 0$ y $A_{\mu\alpha} k^\alpha = 0$. Por lo tanto, a partir de la ortogonalidad de k^μ , la frecuencia de la onda viene dada por:

$$\frac{\omega}{c} \equiv k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} . \quad (4.23)$$

4.4. Gauge transverso y sin traza. Polarización de la onda.

También conocido como el gauge TT ("Transverse traceless"), se utiliza para simplificar la expresión de la onda gravitacional y reducir el número de grados de libertad al mínimo. Esto es sencillo, pues las funciones ξ_μ son completamente arbitrarias, aunque siempre manteniendo el orden $|\xi^\mu| \ll 1$ y $\xi^2 \approx 0$. Por otro lado, $\bar{h}_{\mu\nu}$ es una matriz 4×4 simétrica, por lo que son 10 sus componentes independientes. Sin embargo, se demostrará que puede reducirse a 2. Como las funciones ξ_μ son elegibles a conveniencia, imponiendo $\bar{h} = 0$ y eligiendo $\xi^0 = 0$ arbitrariamente, se obtiene $\bar{h} = 0$ y por lo tanto, $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Imponiendo ahora $h^{0i}(x) = 0$ y tomando $\xi^i(x) = 0$ arbitrariamente, la ecuación del gauge de Lorenz para $\mu = 0$ se convierte en $\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0$ y $\partial^0 h_{00} = 0$.

No obstante, una onda gravitacional es dependiente del tiempo. Es decir, h_{00} solo puede ser $h_{00} = 0$ en lo que se refiere a la onda (se toman como 0 aquellas componentes que no forman parte de la onda gravitatoria). De este modo, por la simetría del tensor, $h_{0\mu} = h_{\mu 0} = 0$ pues $h_{00} = h_{0i} = h_{i0} = 0$. Entonces, las ecuaciones obtenidas son:

$$h_{0\mu} = 0 , \quad (4.24)$$

$$h^i{}_i = 0 , \quad (4.25)$$

$$\partial^j h_{ij} = 0 . \quad (4.26)$$

Es posible observar que las cuatro ecuaciones (4.24) reducen por simetría de 10 a 6 las componentes independientes. La ecuación (4.25) representa la traza nula que elimina otro grado de libertad (5 componentes independientes). Mientras que las tres ecuaciones (4.26) confirman lo previsto, pues las ondas gravitacionales tienen 2 grados de libertad en el gauge TT. Evidentemente, esto es solamente válido para $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, por lo que el cálculo no es válido en el caso de considerar una fuente $T_{\mu\nu} \neq 0$. De esta forma, la onda adquiere la forma siguiente:

$$h_{ij} = \Re[e_{ij} \exp(ik_\alpha x^\alpha)] , \quad (4.27)$$

donde $e_{ij} = e_{ij}(k)$ es el tensor de polarización, y donde el k^μ es el cuadrivector de onda visto antes. Como $k_\alpha k^\alpha = 0$, entonces $|\vec{k}| = \omega/c$. Además, queda definido un vector unitario direccional $\hat{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ en la dirección de propagación. A partir de la ecuación (4.26), es posible ver que el tensor de polarización cumple $e_{ij}n^i = 0$. Eligiendo \hat{n} en la dirección z , $\hat{n} = (0, 0, 1)$, y considerando que la traza tiene que ser nula, la onda gravitacional adquiere la forma:

$$h_{ab}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] , \quad (4.28)$$

siendo los índices $a, b = 1, 2$. De este modo, el elemento de línea que es $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ se convierte en:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + \{1 + h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dx^2 + \{1 - h_+ \cos[\omega(t - z/c)]\} dy^2 + 2h_\times \cos[\omega(t - z/c)] dx dy . \quad (4.29)$$

Asimismo, en cálculos futuros, para poder escribir tensores simétricos (que ya estén en el gauge de Lorenz) en el gauge TT, es posible definir [Maggiore, 2008, pg. 9] los llamados proyectores lambda $\Lambda_{ij,kl}$ tal que:

$$S_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} S_{kl} , \quad (4.29)$$

donde S_{ij} es un tensor simétrico cualquiera en el gauge de Lorenz y el tensor lambda se define como:

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} , \quad (4.30)$$

siendo $P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ un proyector simétrico y transverso con traza $P_{kk} = 2$.

5. Interacción de ondas gravitacionales con masas test

En la sección anterior se ha visto cómo se describe la propagación de una onda gravitatoria a través de la teoría linealizada. Ahora, se mostrará cómo interaccionan estas ondas con un conjunto de masas de prueba. Como se mostrará más adelante, esta interacción será el principio más simple de un detector de ondas gravitatorias.

Anteriormente, se ha visto que la forma más simple de la onda se obtiene en el gauge TT. Sin embargo, a la hora de la detección puede ser más intuitivo el sistema propio del detector. Por lo tanto, se va a estudiar la interacción de las ondas gravitacionales con las masas test en ambos sistemas de referencia.

5.1. Ecuación de las geodésicas y de su desviación

Para explicar el significado físico de la interacción con las masas test en cada sistema de referencia, una forma es analizar las ecuaciones de desviación de las geodésicas en función del tensor de curvatura de Riemann. Se supondrá una región suficientemente pequeña en la que por cada punto solo pasa una geodésica. De este modo, será posible colocar masas puntuales en los distintos puntos a conveniencia.

Dada una trayectoria tipo tiempo $x^\mu = x^\mu(\tau)$ (o de tipo espacio, $x^\mu = x^\mu(s)$) donde τ es el tiempo propio que parametriza la curva, la ecuación de las geodésicas viene dada por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 . \quad (5.1)$$

Considerando una geodésica en $x^\mu(\tau)$ y otra muy cercana en $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$, lo que se obtiene restando las ecuaciones de ambas geodésicas, es la conocida ecuación de desviación de las geodésicas. A primer orden de la función ξ^μ , la ecuación de desviación es:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 . \quad (5.2)$$

Como se verá más adelante, es posible relacionarla con el tensor de Riemann que, como se vio antes, es invariante bajo transformaciones gauge.

5.2. Sistema de referencia del gauge TT y sistema propio del detector

5.2.1. Sistema de referencia TT

Aunque en este sistema de referencia la expresión de la onda es la más simple, el significado físico de las ecuaciones (5.1) y (5.2) en este gauge puede resultar confuso y sorprendente. El sistema de referencia del gauge TT se trata de un sistema de referencia en caída libre ("freely falling frame") donde los símbolos de Christoffel son nulos a lo largo de cada una de las geodésicas. Considerando una masa que se encuentra en reposo inicialmente, $dx^i/d\tau = 0$, la ecuación de las geodésicas (3.1) se convierte en:

$$\left. \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} + \left[\Gamma^i_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \right]_{\tau=0} = 0, \quad (5.3)$$

donde, a partir de la ecuación (4.2) los símbolos de Christoffel son $\Gamma^i_{00} = (2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00})/2$ y se convierten en cero, pues en el gauge TT, $h_{0\mu} = 0$. Además, como estos símbolos son cero, $d^2 x^i/d\tau^2 = 0$ y, por lo tanto, las velocidades de las masas se mantienen constantes para cualquier tiempo. Es decir, en el sistema de referencia del gauge TT, las coordenadas se curvan de manera que las posiciones de las masas que inicialmente estaban en reposo no cambian. Por lo tanto, en vez de considerar masas en un sistema de referencia, se considerarán masas que nos delimiten las coordenadas, pues estas sí son curvadas durante el paso de la onda. Además, la distancia entre dos masas que inicialmente están en reposo debe permanecer constante, lo que se demuestra con la ecuación de desviación de las geodésicas. Para $\tau = 0$, la velocidad inicial es nula y $dx^0/d\tau = c$ de modo que, a partir de la ecuación (5.2):

$$\left. \frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = - \left[2c\Gamma^i_{0\beta}(x) \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + c^2 \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^i_{00} \right]_{\tau=0}, \quad (5.4)$$

donde $\Gamma^i_{00} = 0$ y $\Gamma^i_{0j} = (1/2)\partial_0 h_{ij}$. Sin embargo, suponiendo que en $\tau = 0$ tenemos $d\xi^i/d\tau = 0$, entonces $d^2 \xi^i/d\tau^2 = 0$ y la separación entre las geodésicas (una por coordenada) se mantiene constante.

Pese a que en el gauge TT parece que las masas no cambian su posición durante el paso de la onda, esto solo es correcto en este sistema de coordenadas. Por lo tanto, no significa que las ondas gravitacionales no tengan un efecto físico sobre estas masas. Es decir, podemos obtener, a partir de (4.28), la distancia propia entre dos eventos que ocurren en el mismo instante de tiempo, $(t, x_1, 0, 0)$ y $(t, x_2, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} s &= (x_2 - x_1) [1 + h_+ \cos(\omega t)]^{1/2} \\ &\approx (x_2 - x_1) \left[1 + \frac{1}{2} h_+ \cos(\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es decir, la distancia propia entre dos sucesos cualesquiera oscila a lo largo del tiempo. Como se explicará en los siguientes apartados, este hecho constituye una de las formas más intuitivas de detectar una onda gravitatoria, pues considerando $x_1 = 0$ el origen, y $x_2 = L_*$, un haz de luz que viaje de una masa a otra (suponiendo masas unidas a espejos) verá cambios en el camino recorrido en la ida y en la vuelta determinados por la distancia propia oscilante.

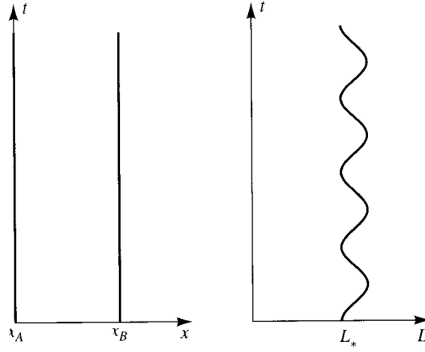


Figura 1: Movimiento de dos masas prueba durante el paso de una onda gravitatoria en la dirección z . Una masa de prueba ($x_2 = L_*$) con respecto a otra situada en el origen ($x_1 = 0$), donde $L = (x_2 - x_1) = x_2$. La primera gráfica muestra la separación entre coordenadas y la segunda la distancia propia. [Hartle, 2021, pg. 335]

Se observa claramente cómo, durante el paso de la onda, la distancia entre las coordenadas de las masas en el gauge TT se mantiene constante, mientras que la distancia propia entre estas masas sí que oscila con la frecuencia de la onda.

5.2.2. Sistema de referencia propio del detector

Si bien el gauge TT es la forma más simple de representar una onda gravitatoria y sus efectos físicos, no es el marco de referencia usado generalmente en los laboratorios experimentales. En este sistema, las masas test que fijan coordenadas no están en caída libre, como en el caso anterior. De este modo, al contrario que en el gauge TT, se espera que las masas sí sean desplazadas durante el paso de la onda. Existen dos posibilidades de detectores: terrestres y satélites en caída libre ("drug-free satellites"). En este caso, solamente serán considerados los detectores terrestres, sin entrar en detalles.

En la Tierra, las ondas gravitatorias coexisten con el ruido de otro tipo de efectos físicos de mayor magnitud como fuerzas de Coriolis, efectos gravitatorios estáticos, etc. El hecho de que las ondas gravitacionales tengan altas frecuencias en contraste con los otros efectos permite aislar el efecto de dichas ondas en dicho rango de frecuencias. En este rango, la aceleración causada por gravedad terrestre se compensa mediante mecanismos de suspensión. De este modo, este sistema se puede considerar aproximadamente como un sistema de referencia en caída libre. En este rango de frecuencias, se puede considerar que el único contribuyente al tensor de Riemann es la onda gravitacional. Así, la ecuación de desviación de las geodésicas (5.2) queda:

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^i_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (5.6)$$

donde se ha utilizado que los símbolos de Christoffel se anulan alrededor de un punto P cuando aproximamos a un sistema en caída libre. Además, se ha usado que el detector se mueve a velocidades no relativistas por lo que $dx^i/d\tau$ se puede despreciar respecto a $dx^0/d\tau$. Por otro lado, alrededor del punto P, la métrica es plana a primer orden:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(x^2), \quad (5.7)$$

que solo depende de las distancias al cuadrado. Así, a primer orden la ecuación (5.6) no se anula, pues $\xi^\rho \partial_\rho \Gamma^i_{00} = \xi^j \partial_j \Gamma^i_{00}$. Además, como $\Gamma^2 \approx 0$ y $\partial_0 \Gamma^i_{00} = 0$, el tensor de Riemann se puede expresar $R^i_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{0j} = \partial_j \Gamma^i_{00}$. Entonces, la ecuación (5.6) queda:

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = -R^i_{0j0} \xi^j \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2. \quad (5.8)$$

Suponiendo una masa inicialmente en reposo, esta adquirirá una velocidad $dx^i/d\tau = c O(h)$ tras el paso de la onda. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} dt^2 &= d\tau^2 \left[1 + \frac{1}{c^2} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} \right] \\ &= d\tau^2 [1 + O(h^2)] , \end{aligned} \quad (5.9)$$

y a primer orden, $t \approx \tau$, por lo que $dx^0/d\tau = c$ y la ecuación (5.7) se convierte en:

$$\ddot{\xi}^i = -c^2 R^i{}_{0j0} \xi^j , \quad (5.10)$$

siendo los puntos derivadas respecto del tiempo coordinado t . Sin embargo, como se ha comentado con anterioridad, el tensor de Riemann es invariante bajo cambios de coordenadas en la teoría linealizada. De este modo, es posible expresarlo en el sistema de referencia más conveniente. En este caso, la expresión más simple del tensor de Riemann se obtiene en el gauge TT:

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2c^2} \ddot{h}_{ij}^{TT} . \quad (5.11)$$

Así, la ecuación de desviación de las geodésicas se expresa de la forma:

$$\ddot{\xi}_i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi^j . \quad (5.12)$$

En otras palabras, esta ecuación representa la fuerza newtoniana que ejerce la onda gravitatoria sobre una masa:

$$F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi^j . \quad (5.13)$$

Es por ello que, en el sistema propio del detector el efecto de las ondas gravitacionales sobre masas test se puede analizar mediante lenguaje newtoniano. Por lo tanto, considerando un anillo de masas en reposo y empleando la ecuación (5.12), se puede estudiar la interacción de las ondas gravitacionales con masas de prueba en el sistema propio del detector. El origen se sitúa en el centro del anillo, por lo que ξ^i representa la distancia entre el origen y una masa test.

Se va a considerar una onda gravitatoria que se propague en la dirección z y un anillo de masas en el plano XY con la expresión representada en la ecuación (4.27). Además, el anillo permanecerá en $z = 0$ tras el paso de la onda, restringiendo el desplazamiento de las masas al plano XY (onda transversa). Para estudiar el desplazamiento de las masas en el plano, se puede considerar el desplazamiento $\xi^a(t) = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t))$.

Empezando con la **polarización** $(h_{\times} = 0)$, y eligiendo el origen de tiempo de modo que $h_{ij}^{TT}(t = 0) = 0$, la expresión de la onda es:

$$h_{ab}^{TT} = h_+ \sin(\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5.14)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (5.12) se obtienen las ecuaciones diferenciales de los desplazamientos provocados por la onda en el anillo en el plano XY . Como los términos δx y δy son del orden $O(h_+)$, a primer orden en h , estos se pueden despreciar respecto del punto (x_0, y_0) . Integrando, obtenemos:

$$\delta x = +\frac{h_+}{2} x_0 \sin(\omega t) , \quad (5.15)$$

$$\delta y = -\frac{h_+}{2} y_0 \sin(\omega t) . \quad (5.16)$$

De forma análoga para la **polarización** \times , los desplazamientos vienen dados por:

$$\delta x = +\frac{h_{\times}}{2} y_0 \sin(\omega t) , \quad (5.17)$$

$$\delta y = -\frac{h_{\times}}{2} x_0 \sin(\omega t) . \quad (5.18)$$

A continuación, se muestran gráficamente los desplazamientos de ambas polarizaciones en función de ωt :









ωt	h_{+}	h_{\times}
0		
$\pi / 2$		
π		
$3 \pi / 2$		

Figura 2: Desplazamientos de las masas en un anillo respecto del origen tras el paso de una onda gravitacional debido a las polarizaciones $+$ y \times , en función de distintos valores de ωt . [Maggiore, 2008, pg. 26]

Además, es posible analizar el desplazamiento de las masas mediante las líneas de fuerza empleando la ecuación (5.13). Derivando esta ecuación, obtenemos la divergencia de la fuerza ejercida por la onda:

$$\partial_i F^i = \frac{m}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \delta^{ij} , \quad (5.19)$$

que se anula, pues la onda tiene traza nula, es decir $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$. Esta condición implica la ausencia de fuentes o sumideros para las líneas del campo. De este modo, como se muestra en las siguientes figuras, se pueden obtener las líneas de fuerza para cada polarización en el plano XY :

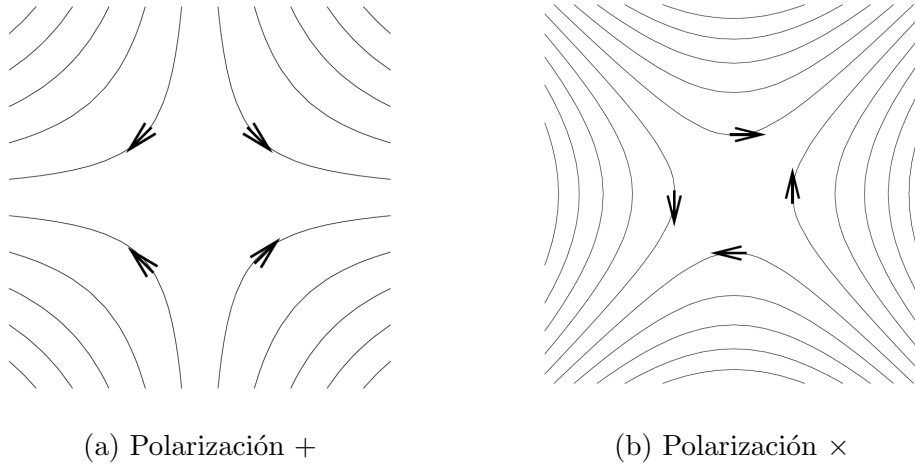


Figura 3: Líneas de fuerza ejercida por la onda gravitacional en el plano XY . Las flechas muestran el sentido de la fuerza cuando el $\sin(\omega t) > 0$. Cuando $\sin(\omega t) < 0$ las flechas tienen sentido contrario al mostrado en estas figuras. [Maggiore, 2008, pg. 26]

5.3. Detección de ondas gravitacionales. Interferómetros y fuentes de ruido.

En esta sección se hará un repaso del principal tipo de detector usado en la detección de ondas gravitatorias y de los principales interferómetros que existen hoy en día. Es decir, se estudiará el funcionamiento de un

interferómetro Michelson en la detección de ondas gravitatorias y hablaremos de LIGO y otros detectores. Además, será importante explicar las principales fuentes de ruido que lastran la detección.

En el ámbito de la detección de ondas gravitacionales, un interferómetro Michelson está compuesto por tres masas, dos masas test (M) unidas a espejos y una masa (S) que actúa como divisor del haz de luz; un láser (L) que genera un haz de luz; y un detector (D) que permitirá medir las variaciones de longitud en los dos caminos recorridos por la luz. El haz de luz se separa en dos haces que, tras ser reflejados en cada una de las masas, vuelven a ser recombinados. Además, al recombinarse, ambos haces tienen interferencia constructiva o destructiva respectivamente si:

$$\Delta L \equiv 2(L_x - L_y) = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.20)$$

$$\Delta L \equiv 2(L_x - L_y) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.21)$$

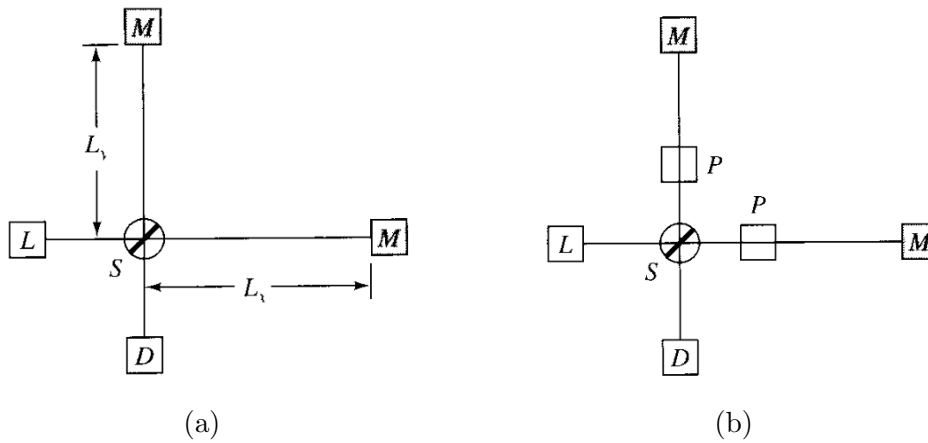


Figura 4: (a) Esquema de un interferómetro Michelson para la detección de ondas gravitacionales. Las tres masas tienen libertad de movimiento en el plano del diagrama (XY). Las pequeñas variaciones de las longitudes L_x o L_y generadas por las ondas gravitacionales son detectadas por el detector (D). (b) Esquema de un interferómetro de Michelson más parecido a un diseño actual. Dos masas nuevas con espejos que reflejan parcialmente (P) son introducidas para aumentar la precisión pues los haces se reflejan muchas más veces generando un camino más largo. [Hartle, 2021, pg. 339]

De esta forma, una onda gravitacional cambiará la longitud de los brazos del interferómetro. Por lo tanto, la onda actuará como en la figura 2, donde la masa (S) es una masa en el centro del anillo y las masas (M) son las masas que componen el anillo y que varían su posición con desplazamientos que se muestran en las ecuaciones (3.19) y (3.20) donde $\delta x = \delta L_x / L_x$ y $\delta y = \delta L_y / L_y$. De este modo, la frecuencia ω y la amplitud h_+ se pueden medir mediante el análisis del patrón de interferencia. Además, viendo las ecuaciones de los desplazamientos y las condiciones de interferencia, se puede ver cómo cuanto más largos sean los brazos del interferómetro, mayores serán las variaciones de longitud obtenidas (mayor sensibilidad).

Existen en el mundo varios detectores de ondas gravitacionales como LIGO (Estados Unidos), VIRGO (Italia), GEO (Alemania), TAMA (Japón) y ACIGA (Australia). LIGO es actualmente el detector más importante y más avanzado tecnológicamente. Éste cuenta con tres interferómetros: dos en Hanford, Washington, y otro en Livingston, Louisiana. Es preciso comentar que para detectar la posición exacta en el cielo de las fuentes de emisión, son necesarios varios detectores a lo largo del planeta. Además, existen proyectos de interferómetros orbitando en el espacio como LISA (previsto para 2035), pues los interferómetros terrestres, debido a diferentes fuentes de ruido, solo están capacitados para detectar ondas

gravitacionales de alta frecuencia ($\sim 10^2$ Hz). Aunque LISA será sensible a frecuencias que llegan hasta 10^{-4} Hz, los detectores espaciales tienen menos precisión en la medida de los desplazamientos.

Como se ha comentado, existen una gran cantidad de fuentes de ruido que complican la labor de detección en los interferómetros terrestres. El ruido sísmico (bajas frecuencias), el ruido térmico (frecuencias intermedias) y el ruido generado por fotones (altas frecuencias) que llegan al detector de forma no regular son las principales fuentes de ruido. Sin embargo, los detectores más avanzados cuentan con tecnología para compensar el ruido sísmico con sistemas de suspensiones o sensores sísmicos precisos para eliminar dicho ruido de la señal de ondas gravitacionales. Por otro lado, existen fuentes de ruido menos significativas pero inevitables como gradientes de gravedad por motivos atmosféricos, vientos fuertes, el tráfico de coches u otras fuentes humanas.

6. Tensor energía-momento de una onda gravitacional.

6.1. Tensor energía-momento

Una vez estudiada la interacción con masas test, es posible cerciorarse de que las ondas gravitacionales tienen un tensor energía-momento $t_{\mu\nu}$ no nulo. En esta sección, se tratará de entender la energía y momento que porta una onda gravitatoria. Este desarrollo se puede realizar mediante dos formas distintas, obteniendo dos resultados iguales. En primer lugar, obteniendo la curvatura (tensor de Riemann) generada por todas las fuentes de energía (entre ellas las ondas gravitatorias), es posible definir, mediante la ecuación de Einstein, el tensor energía-momento de la onda. En segundo lugar, se puede tomar la Relatividad General como una teoría clásica de campos y, usando el teorema de Noether, obtener dicho tensor. En este caso, usaremos la segunda opción.

En secciones anteriores, se ha explicado que en la teoría linealizada de la gravedad podíamos suponer un espacio-tiempo plano donde existía un campo gravitatorio pequeño $h_{\mu\nu}$ (igual que lo haría el campo EM, $F_{\mu\nu}$). Es por ello que se puede entender la teoría linealizada en el contexto de una teoría clásica de campos. De acuerdo con esto, el teorema de Noether proporciona la expresión del tensor energía-momento:

$$t_{\mu\nu} = \left\langle -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu h^{\alpha\beta})} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \right\rangle, \quad (6.1)$$

donde \mathcal{L} es la lagrangiana que define la dinámica de $h_{\mu\nu}$. Asimismo, se está promediando en una caja centrada en el pico del paquete de onda, y alrededor de un valor $\lambda/2\pi \ll L_B$, siendo $\lambda/2\pi$ la longitud de onda reducida de la onda gravitacional y L_B la escala de longitud a la que el fondo deja de ser suave y empieza a cambiar significativamente. Se toma este promedio, pues es imprescindible para obtener correctamente la energía portada por la onda, separar la perturbación de la onda gravitatoria de la curvatura generada por el fondo. Existen dos condiciones a priori independientes para poder aislar el fondo de la perturbación de la onda, $\lambda/2\pi \ll L_B$ ó $f \gg f_B$, siendo f la frecuencia de la onda.

En unidades físicas, la lagrangiana se puede obtener a partir de la llamada acción de Einstein:

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (6.2)$$

donde se va a expandir la acción hasta orden cuadrático en $h_{\mu\nu}$. De este modo, se puede definir el escalar de curvatura como:

$$R = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)) \left(R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + O(h^3) \right), \quad (6.3)$$

siendo los órdenes de $R_{\mu\nu}^{(1)} \sim O(h)$ y $R_{\mu\nu}^{(2)} \sim O(h^2)$. Por lo tanto, para obtener estos términos, se expandirá

el tensor de Ricci hasta orden cuadrático en $h_{\mu\nu}$. Tras un largo desarrollo, estos términos tienen la forma:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} [\partial^\alpha \partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h] \quad (6.4)$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\beta} \eta^{\rho\alpha} \left[\left(\frac{1}{2} \partial_\rho h_{\lambda\beta} - \partial_\lambda h_{\beta\rho} \right) (\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\lambda\alpha} \partial_\nu h_{\beta\rho} \right. \\ \left. + \partial_\alpha h_{\lambda\nu} (\partial_\rho h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\rho}) + h_{\beta\rho} (\partial_\alpha \partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\alpha} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\nu\alpha} - \partial_\alpha \partial_\nu h_{\lambda\nu}) \right] \quad (6.5)$$

Además, como $g_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + h_\nu^\mu$, se tiene $-g = \det(I + H)$ donde H es la matriz del tensor $h_{\mu\nu}$. Usando la identidad para matrices no degeneradas $\log(\det A) = \text{tr}(\log A)$, se obtiene:

$$\det(I + H) = \exp[\log \det(I + H)] \\ = 1 + h + O(h^2) . \quad (6.6)$$

Así, a primer orden (pues R tiene mínimo orden $O(h)$) tendremos $\sqrt{-g} = \sqrt{1+h} \approx 1 + h/2$. Una vez tenemos estos términos, se puede obtener la acción de Einstein a orden cuadrático en $h_{\mu\nu}$ despreciando términos de orden superior. Tras un largo desarrollo se obtiene:

$$S_E = -\frac{c^3}{64\pi G} \int d^4x \left[\partial_\rho h_{\alpha\beta} \partial^\rho h^{\alpha\beta} - \partial_\alpha h \partial^\alpha h + 2\partial_\alpha h^{\alpha\beta} \partial_\beta h - 2\partial_\alpha h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\rho\beta} \right] , \quad (6.7)$$

y por lo tanto, como $S = c \int d^4x \mathcal{L}$, la lagrangiana en el gauge TT ($\partial_\mu h^{\mu\nu} = h = 0$) es:

$$\mathcal{L}_{TT} = -\frac{c^4}{64\pi G} \partial_\rho h_{\alpha\beta} \partial^\rho h^{\alpha\beta} , \quad (6.8)$$

cuya ecuación del movimiento es $\square h_{\mu\nu} = 0$ pues:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{TT}}{\partial (\partial_\mu h_{\alpha\beta})} = -\frac{c^4}{32\pi G} \partial^\mu h^{\alpha\beta} . \quad (6.9)$$

La lagrangiana (6.8) es equivalente a la siguiente, pues un término de derivada total no cambia la dinámica del sistema:

$$\mathcal{L}_{TT} = \frac{c^4}{64\pi G} h_{\alpha\beta} \square h^{\alpha\beta} + \text{divergencia total} , \quad (6.10)$$

que se anula, pues la ecuación del movimiento es $\square h_{\mu\nu} = 0$. La expresión final del tensor energía-momento de la onda gravitacional es:

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\beta} \rangle . \quad (6.11)$$

Este resultado también se obtiene cuando lo obtenemos a través del análisis geométrico y de las ecuaciones de Einstein. Para una onda gravitacional propagándose en la dirección z , $h_{\mu\nu}^{TT}$ solo depende de t y de z . Por lo tanto, en este caso y tomando $c = 1$, las únicas componentes no nulas del tensor serían:

$$t_{00} = t_{zz} = -t_{0z} = -t_{z0} = \frac{\omega^2}{32\pi G} (h_+^2 + h_\times^2) . \quad (6.12)$$

6.2. Flujo energético.

Una vez obtenido el tensor energía-momento es sencillo obtener el flujo de energía de la onda, es decir, la energía por unidad de tiempo y superficie. Para este cálculo, será supuesto un punto de observación a

larga distancia de la fuente. Conocida la ecuación del movimiento del campo gravitatorio $\square h_{\mu\nu} = 0$, se ve que el tensor energía-momento se conserva $\partial^\mu t_{\mu\nu} = 0$. Esto equivale a escribir:

$$\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0 , \quad (6.13)$$

donde V es el volumen de la región considerada. La energía de la onda gravitacional dentro del volumen es, por definición:

$$E_V = \int_V d^3x t^{00} , \quad (6.14)$$

por lo que la ecuación (6.13) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} &= - \int_V d^3x \partial_i t^{i0} \\ &= - \int_S dA n_i t^{i0} , \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde se ha usado el teorema de la divergencia, n_i es un vector unitario perpendicular a la superficie y dA es el elemento de superficie. Si consideramos coordenadas esféricas $dA = r^2 d\Omega$ y, por lo tanto, $\hat{n} = \hat{r}$ en la dirección radial, la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_S dA t^{0r} \quad (6.16)$$

donde:

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \partial_r h_{ij}^{TT} \rangle . \quad (6.17)$$

A largas distancias, una onda gravitacional propagándose de forma radial se puede expresar de forma general como:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{1}{r} f_{ij}(t - r/c) , \quad (6.18)$$

donde $f_{ij}(t - r/c) = f_{ij}(t_{ret})$ y por lo tanto, si despreciamos órdenes a partir de $O(1/r^2)$, es fácil ver que $\partial_r f_{ij}(t - r/c) = -(1/c) \partial_t f_{ij}(t - r/c)$. De esta manera:

$$\begin{aligned} \partial_r h_{ij}^{TT}(t, r) &= -\partial_0 h_{ij}^{TT}(t, r) + O(1/r^2) \\ &= +\partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r) + O(1/r^2) . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Así, a largas distancias se cumple que $t^{0r} = t^{00}$ y por lo tanto:

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_S dA t^{00} . \quad (6.20)$$

Esta ecuación representa el cambio de la energía dentro del volumen V . Es decir, desde dentro del volumen la energía decrece, por lo que desde fuera, la energía debe aumentar en el tiempo:

$$\frac{dE_V}{dt dA} = +c t^{00} . \quad (6.21)$$

7. Fuentes de las ondas gravitacionales en la teoría linealizada

A lo largo de esta sección, se va a estudiar la generación de las ondas gravitacionales dentro del régimen de la teoría linealizada: suponiendo un fondo plano y un campo gravitatorio suficientemente débil. Sin embargo, la mayoría de las fuentes astrofísicas de las ondas gravitatorias son sistemas autogravitantes, por lo que es necesario tener en cuenta que espacio-tiempo no se puede considerar plano más allá de los primeros órdenes en v/c . Para velocidades pequeñas, las fuentes de onda se pueden expresar mediante un desarrollo multipolar. Como veremos, incluso para sistemas autogravitantes, será posible obtener el cuadrupolo de masa dentro de la teoría linealizada.

7.1. Fuentes de campos débiles con velocidad arbitraria

En la teoría linealizada, tomando unidades físicas, la ecuación de onda en presencia de fuentes es:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (7.1)$$

que se puede resolver empleando la función de Green como se haría, por ejemplo, en la obtención de la solución de onda del campo electromagnético. Para ello, se busca una solución de $G(x - x')$ en la ecuación:

$$\square_x G(x - x') = \delta^4(x - x') . \quad (7.2)$$

En este caso, como en el campo electromagnético radiado, la solución más apropiada es la función de Green retardada. Esta es la solución tal que la respuesta a una perturbación en x' llega en un tiempo t a el punto de observación x :

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(x_{ret}^0 - x'^0) , \quad (7.3)$$

donde $x'^0 = ct$, $x_{ret}^0 = ct_{ret}$ y el tiempo retardado es:

$$t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} . \quad (7.4)$$

Entonces, la onda tiene una solución:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(t', \mathbf{x}') . \quad (7.5)$$

Si ahora introducimos la ecuación (7.3), se tiene:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(t_{ret}, \mathbf{x}') . \quad (7.6)$$

Como vimos en la sección 4, fuera de la fuente es posible llevar esta solución al gauge TT usando la relación $h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}$ y por lo tanto, fuera de la fuente:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{kl} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) , \quad (7.7)$$

donde $\hat{n} = \hat{x}$. Además, se puede ver como h_{ij}^{TT} solo depende de las componentes espaciales T_{kl} . La razón por la que se pueden eliminar las componentes T_{00} y T_{0k} es que en el gauge de Lorenz $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, y entonces el tensor energía-momento se conserva $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ relacionando ambas componentes. De este modo, las componentes con uno, o los dos, índices temporales se pueden escribir en función de T_{kl} .

Si ahora consideramos que $d \ll r$, donde d es el radio de la fuente y $r = |\mathbf{x}|$, se puede obtener la aproximación:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + O\left(\frac{d^2}{r}\right) . \quad (7.8)$$

Ahora se tomará un punto de observación a largas distancias $r \rightarrow \infty$. Como estamos despreciando términos a partir de $O(1/r^2)$, entonces $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx 1/r$. A largas distancias, la ecuación (7.7) tiene la forma:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, \mathbf{x}' \right) . \quad (7.9)$$

Tomando la transformada de Fourier del tensor energía-momento:

$$T_{kl}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{T}_{kl}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} , \quad (7.10)$$

y tras un pequeño cálculo, se obtiene:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^5 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{T}_{kl} \left(\omega, \hat{\mathbf{n}} \frac{\omega}{c} \right) e^{-i\omega(t-r/c)} . \quad (7.11)$$

En la sección anterior se vió cómo, a largas distancias el flujo de energía venía dado por la ecuación (6.21). Por lo tanto, la energía total radiada por ángulo sólido, se puede expresar como:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} . \quad (7.12)$$

La integral sobre el tiempo da lugar a una función $\delta(\omega - \omega')$ por lo que, definiendo $\tilde{T}_{kl}^*(\omega) = \tilde{T}_{kl}(-\omega)$:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{G}{2\pi^2 c^7} \Lambda_{ij,kl} \int_0^{\infty} dt \tilde{T}_{ij} \left(\omega, \hat{\mathbf{n}} \frac{\omega}{c} \right) \tilde{T}_{kl}^* \left(\omega, \hat{\mathbf{n}} \frac{\omega}{c} \right) , \quad (7.13)$$

donde se ha utilizado la propiedad de los proyectores lambda $\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}$.

7.2. Desarrollo multipolar a bajas velocidades

En analogía con el electromagnetismo, se puede ver que las expresiones de radiación se simplifican mucho si las velocidades dentro de la fuente son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Llamando ω_f a la frecuencia dentro de la fuente y d al radio de la fuente, entonces, las velocidades dentro de la fuente serán $v \sim \omega_f d$. Por lo tanto, la frecuencia de radiación tendrá un orden de magnitud $\omega \sim \omega_f$.

Considerando velocidades pequeñas $v \ll c$, se tienen longitudes de onda reducidas muy grandes en comparación con el radio de la fuente $\lambda/2\pi \gg d$. Esta es la condición principal en fuentes con velocidades no relativistas. Como la longitud de onda reducida es mucho mayor que el tamaño de la fuente, no es necesario estudiar con detalle la dinámica interna de la fuente. Es por ello que la radiación emitida estará gobernada por los primeros órdenes en el desarrollo multipolar.

Para estudiar el desarrollo multipolar, realizaremos un desarrollo de la fórmula (7.9). Asimismo, es posible expresar en forma de desarrollo el tensor T_{kl} . Como $v/c \ll 1$, $v \sim \omega_f d \sim \omega d$ y se sabe que $|\mathbf{x}'| \leq d$, se puede escribir:

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \leq \frac{\omega}{c} d \ll 1 , \quad (7.14)$$

y expandiendo alrededor de $t - r/c$:

$$\begin{aligned} T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, \mathbf{x}' \right) &\simeq T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}' \right) + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_t T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}' \right) \\ &+ \frac{x'^i x'^j n^i n^j}{2c^2} \partial_t^2 T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}' \right) + \dots , \end{aligned} \quad (7.15)$$

donde se ha usado que $dT_{kl}/d(t - r/c) = \partial T_{kl}/\partial t$. Definiendo los tres primeros momentos del tensor T^{ij} :

$$S^{ij}(t) = \int d^3 x T^{ij}(t, \mathbf{x}) , \quad (7.16)$$

$$S^{ij,k}(t) = \int d^3 x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k , \quad (7.17)$$

$$S^{ij,kl}(t) = \int d^3 x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k x^l , \quad (7.18)$$

donde la coma en los índices separa los índices provenientes del tensor T^{ij} de los índices $x^{i_1} \dots x^{i_N}$. De este modo, el desarrollo de la ecuación de h_{ij}^{TT} viene dado por:

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \left[S_{kl} + \frac{1}{c} n^m \dot{S}_{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n^m n^p \ddot{S}_{kl,mp} + \dots \right]_{ret}, \quad (7.19)$$

donde todos los momentos están evaluados en el tiempo retardado $t_{ret} = t - r/c$. Además, los momentos son simétricos en los índices referidos al tensor, y por separado en los índices referidos a las x . Es decir, $S^{ij,k} = S^{ji,k}$ y $S^{ij,kl} = S^{ij,lk}$. Sin embargo, en general, el intercambio entre dos índices de distinto tipo no genera simetría (o antisimetría).

7.3. Radiación cuadrupolar

En este trabajo solo será considerada la corrección a primer orden, es decir: **el cuadrupolo**. La ecuación (7.19) proporciona la amplitud a primer orden de la onda gravitacional. Sin embargo, para que el significado físico de los términos del desarrollo sea más claro, es posible definir los momentos de la densidad de energía T^{00}/c^2 , y el momento de la densidad de momento lineal T^{0i}/c :

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}), \quad (7.20)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i, \quad (7.21)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j. \quad (7.22)$$

$$P^i = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}), \quad (7.23)$$

$$P^{i,j} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j, \quad (7.21)$$

$$P^{i,jk} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j x^k. \quad (7.22)$$

Empleando la conservación del tensor energía-momento $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y considerando que la componente T^{0i} se anula en las fronteras de volumen ∂V ($V \gg V_{fuente}$), se obtienen las siguientes relaciones para el momento referido a T^{00} :

$$\dot{M} = 0, \quad (7.23)$$

$$\dot{M}^i = P^i, \quad (7.24)$$

$$\dot{M}^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i}, \quad (7.25)$$

y para el momento de T^{0i} :

$$\dot{P}^i = 0, \quad (7.26)$$

$$\dot{P}^{i,j} = S^{ij}. \quad (7.27)$$

Entonces $S^{ij} = \frac{1}{2} \dot{M}^{ij}$, e introduciendo este resultado en (7.19), el término cuadrupolar se convierte en:

$$[h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x})]_{cuadrupolo} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{M}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (7.28)$$

Por otro lado, a primer orden, la densidad de masa es $\rho = T^{00}/c^2$ y se puede definir el tensor simétrico del momento cuadrupolar como:

$$\begin{aligned} Q^{ij} &\equiv M^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}M_{kk} \\ &= \int d^3x \rho(t, \mathbf{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3}r^2 \delta^{ij} \right), \end{aligned} \quad (7.29)$$

donde M_{kk} es la traza del momento M_{ij} . Entonces, la ecuación (7.28) se convierte en:

$$\begin{aligned} [h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x})]_{cuadrupolo} &\equiv \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{kl}^{TT} \left(t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (7.30)$$

La multiplicación del proyector lambda con cualquier tensor simétrico [Maggiore, 2008, pg. 110], aplicado a la ecuación (7.28) relaciona las amplitudes polarizadas h_+ y h_\times con las derivadas temporales de los momentos. Para una onda propagándose en la dirección \hat{z} , se tiene:

$$\Lambda_{ij,kl} \ddot{M}_{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & -(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.31)$$

de dónde se obtienen directamente las polarizaciones de la amplitud para una onda gravitacional propagándose en la dirección \hat{z} :

$$h_+ = \frac{G}{rc^4} [\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}]_{ret}, \quad (7.32)$$

$$h_\times = \frac{2G}{rc^4} [\ddot{M}_{12}]_{ret}. \quad (7.33)$$

Por otro lado, es interesante calcular la potencia radiada $P = dE/dt$ por el cuadrupolo. Introduciendo el resultado obtenido (7.30) en la ecuación (7.12), se obtiene:

$$\left[\frac{dP}{d\Omega} \right]_{cuadrupolo} = \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle_{ret}, \quad (7.34)$$

donde se promedia sobre los periodos característicos de la onda gravitatoria. Si se quisiera obtener la potencia total radiada, se integraría sobre el ángulo sólido. El único término dependiente de ángulos es el proyector $\Lambda_{ij,kl}$. Por lo tanto, las siguientes identidades [Maggiore, 2008, pgs. 105,113] deben ser contempladas:

$$\int d\Omega n^i n^j = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij}, \quad (7.35)$$

$$\int d\Omega n^i n^j n^k n^l = \frac{4\pi}{15} \left(\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk} \right). \quad (7.36)$$

Entonces, integrando el proyector, se obtiene:

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik} \delta_{jl} - 4\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (7.37)$$

Conocida esta integral, la potencia total radiada por el cuadrupolo será:

$$P_{cuadrupolo} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle_{ret}. \quad (7.38)$$

Expresando este resultado en función del momento M_{ij} , usando (5.29), se obtendría:

$$P_{cuadrupolo} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{kk})^2 \rangle_{ret} . \quad (7.39)$$

Una vez en este punto, es posible obtener la energía radiada por unidad de ángulo sólido en función de las frecuencias. Para esto, se define la transformada de Fourier del momento cuadrupolar:

$$Q_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{Q}_{ij}(\omega) e^{-i\omega t} . \quad (7.40)$$

Introduciendo la transformada en la ecuación (7.34) e integrando sobre todo el tiempo:

$$\left[\frac{dE}{d\Omega} \right]_{cuadrupolo} = \frac{G}{8\pi^2 c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^{\infty} d\omega \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{kl}^*(\omega) . \quad (7.41)$$

7.4. Fuentes astrofísicas y cosmológicas de ondas gravitatorias

Para terminar, se hará un repaso breve de las posibles fuentes de ondas gravitatorias que existen en el universo. Las fusiones de dos objetos compactos de varios tipos, como agujeros negros o estrellas de neutrones, son una de las principales fuentes estudiadas en los observatorios, pero existen otras. Por las características explicadas en el apartado 5.3, las fuentes observables serán distintas para los interferómetros terrestres y los espaciales.

Para interferómetros terrestres, estas fuentes no serán observables hasta que la fusión esté cerca de completarse, y solo si los objetos de la fusión son muy masivos. Por lo que se sabe, existen muchas fusiones de objetos compactos al año a distancias menores de 100 Mpc. Otra posibilidad sería observar los colapsos gravitacionales de estrellas muy masivas, dando lugar a supernovas. Aunque un colapso perfectamente simétrico no generaría ninguna onda gravitacional, en la realidad, este tipo de eventos no son simétricos totalmente, dando lugar a la generación de ondas gravitatorias. Por otro lado, aunque todavía no han sido detectados individualmente (sí en un sistema binario), algunos púlsares no completamente esféricos también serían posibles fuentes observables mediante ondas gravitacionales en observatorios terrestres.

Por el contrario, para futuros interferómetros espaciales como LISA la situación cambia, pues estos permiten la detección de ondas de baja frecuencia. Existe una gran cantidad de sistemas binarios que representan una fuente detectable para estos interferómetros. De hecho, los sistemas binarios no resueltos son una fuente de confusión para el detector, pues es imposible separar individualmente cada una de las fuentes a bajas frecuencias. En cambio, las fuentes de alta frecuencia sí que podrían ser observadas por estos interferómetros. Asimismo, diferentes eventos que tienen lugar en la evolución de un agujero negro supermasivo (más de $1000 M_{\odot}$) como la formación o el crecimiento de este tipo de objetos compactos son una de las posibles fuentes a estudiar por este tipo de detectores. Por otro lado, las llamadas capturas extremas también serían observables. Se denominan capturas extremas a sistemas en los que un objeto compacto ligero (de pocas masas solares) es absorbido por un agujero negro supermasivo. Estos eventos ocurren muy lentamente, por lo que a través del análisis de las ondas gravitacionales se podría probar la Relatividad General en el régimen de campos gravitatorios extremos y mapear de forma precisa la métrica del espacio-tiempo.

No obstante, también se contempla la existencia de un fondo estocástico de ondas gravitacionales, es decir, un ruido de fondo isotrópico generado supuestamente por eventos ocurridos en el universo primitivo. Este fondo estocástico está caracterizado por tener una potencia dependiente de la frecuencia. Una posibilidad es que estas ondas fueran generadas durante la inflación, siendo imposibles de detectar con la tecnología

actual (incluyendo LISA). Otra es que fueran generadas por cambios de fase bruscos, generando un espectro con una frecuencia pico bien definida y relacionada con la temperatura que podría ser observada por LISA.

8. Conclusiones

Tras un análisis general del contenido desarrollado, podemos afirmar que se ha demostrado el surgimiento de la ecuación de onda (4.20) a partir de la linealización de la gravedad. Además, se ha visto cómo, en el gauge TT, la solución a esta ecuación (4.28) en ausencia de fuentes tiene sólo dos grados de libertad, obteniéndose así las dos polarizaciones: h_+ y h_\times .

Posteriormente, ha sido estudiada la interacción de las ondas con la materia. Se ha explicado cómo, durante el paso de una onda gravitatoria, la distancia propia entre masas oscila con la frecuencia de la onda mientras que la distancia entre coordenadas se mantiene constante en el gauge TT (figura 1). Asimismo, se ha visto, para cada una de las polarizaciones, cómo ocurre la interacción con un anillo de masas test (figura 2) y la fuerza newtoniana ejercida sobre éstas (figura 3). Ha quedado evidenciado cómo estos resultados constituyen uno de los principios más importantes en la detección de ondas gravitacionales.

En consecuencia con estas soluciones, se han expuesto los principales modelos de interferómetros Michelson y el funcionamiento de estos en la detección de ondas gravitacionales (figura 4). Además, se ha hecho un repaso de los principales detectores de ondas gravitacionales a lo largo del planeta (LIGO, VIRGO, GEO, etc), explicando cuáles son las fuentes más importantes de ruido que surgen en la detección: ruido sísmico, ruido térmico, ruido por fotones, etc.

A continuación, ha sido tratado el aspecto energético y la ecuación de onda en presencia de fuentes. Considerando la teoría linealizada de la gravedad como una Teoría Clásica de Campos (en analogía al campo electromagnético), se ha obtenido la expresión del tensor energía-momento portado por una onda gravitacional (6.11) y sus componentes no nulas para una onda propagándose en la dirección z (6.12). A partir de esta expresión, se ha estudiado la ecuación de onda en presencia de fuentes (7.1), obteniéndose el campo radiado para velocidades arbitrarias (7.11). Adicionalmente, para fuentes con velocidades internas no relativistas, se ha obtenido el desarrollo multipolar del campo (7.19), la potencia radiada por el cuadrupolo en función del momento cuadrupolar (7.38) y la energía radiada por ángulo sólido en función de las frecuencias (7.41). Para finalizar, se han resumido las posibles fuentes astrofísicas y cosmológicas de ondas gravitacionales, diferenciando entre detectores terrestres y espaciales según su capacidad de detección en distintos rangos de frecuencia.

Referencias

- [Carroll, 2019] Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
- [Hartle, 2021] Hartle, J. B. (2021). *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity*. Cambridge University Press.
- [Maggiore, 2008] Maggiore, M. (2008). *Gravitational waves*, volume 1. Oxford university press.
- [Thorne et al., 2000] Thorne, K. S., Misner, C. W., and Wheeler, J. A. (2000). *Gravitation*. Freeman San Francisco.