

Modelización y Simulación en Sistemas dinámicos

Ana Carpio

Master en Ingeniería
Matemática

UCM, 09/01/2017



Contenidos

Muchas leyes de la Naturaleza, en química, física, biología o astronomía, encuentran su expresión natural en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Son asimismo importantes sus aplicaciones en la propia matemática, especialmente en geometría, y también en ingeniería, economía y otros muchos campos de las ciencias aplicadas.

Durante las próximas sesiones vamos a ver cómo extraer información sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales: proximidad a equilibrios, comportamientos oscilatorios, propagación de ondas... Los temas a tratar seguirán la distribución siguiente:

1. Planos de fase.
2. Sistemas conservativos y disipativos.
3. Trayectorias heteroclínicas: Frentes en sistemas de reacción-difusión.
4. Bifurcación nodo-silla: Anclaje y propagación de frentes.
5. Trayectorias homoclínicas: Pulsos en sistemas excitables.
6. Bifurcaciones de tipo transcrito y pitchfork: Nucleación de defectos en cristales.
7. Ciclos límite y bifurcaciones de Hopf.
8. Sincronización.

1. Planos de fase

Cuando el modelo toma la forma de un sistema autónomo, es decir, aquellos en que no aparece la variable independiente t , se puede obtener información sobre su comportamiento cualitativo representando el plano de las fases. Consideraremos únicamente sistemas 2×2 , que tienen la forma general

$$x'(t) = f(x(t), y(t)), \quad y'(t) = g(x(t), y(t)), \quad t > 0.$$

Se trata entonces de representar todas las soluciones posibles que parten de datos iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ en el plano (x, y) . Es lo que se llama el plano de fases. Obsérvese que las soluciones del sistema $(x(t), y(t))$ (curva en forma paramétrica) se pueden expresar como $y(x)$ (curva explícita) o $h(x, y) = c$ (curva implícita) resolviendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Normalmente, hay soluciones especiales como puntos de equilibrio o soluciones periódicas, en torno a las cuales se organizan las demás según su estabilidad.

Un *punto de equilibrio* satisface $x'(t) = y'(t) = 0$, $\forall t > 0$, es decir, $x(t) = x_e$, $y(t) = y_e$, $\forall t > 0$, con $f(x_e, y_e) = g(x_e, y_e) = 0$.

Un punto de equilibrio (x_e, y_e) es *estable* si $\|(x(t), y(t)) - (x_e, y_e)\| \leq \varepsilon$, $\forall t > 0$, para cualquier solución cuyo dato inicial satisface $\|(x_0, y_0) - (x_e, y_e)\| \leq \delta(\varepsilon)$.

Un punto de equilibrio (x_e, y_e) es *asintóticamente estable* si $\|(x(t), y(t)) - (x_e, y_e)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para cualquier solución cuyo dato inicial satisface $\|(x_0, y_0) - (x_e, y_e)\| \leq \delta$.

Un punto de equilibrio (x_e, y_e) es *exponencialmente estable* si $\|(x(t), y(t)) - (x_e, y_e)\| \leq C_\varepsilon e^{-\varepsilon t}$, $\forall t > 0$, para cualquier solución cuyo dato inicial satisface $\|(x_0, y_0) - (x_e, y_e)\| \leq \delta$.

Una *trayectoria periódica* es una solución que cumple $x(t + T) = x(t)$, $y(t + T) = y(t)$, para algún periodo $T > 0$.

Los conceptos de trayectoria periódica estable, asintóticamente estable, exponencialmente estable, se definen de forma análoga.

Vamos a ver cómo extraer información cualitativa del comportamiento de las soluciones del sistema a tiempos largos según los datos iniciales usando

el plano de fases en algunos casos prácticos.

Ejercicio 1: Sistema depredador-presa con competición. *Consideremos el siguiente modelo depredador-presa con competición:*

$$y_1' = y_1 - y_1^2 - by_1y_2, \quad y_2' = y_2 - y_2^2 + cy_1y_2.$$

Para $c = 2$ y $b = -2$, determinar los puntos de equilibrio y su estabilidad. Dibujar la estructura del plano de fases.

En primer lugar calculamos los puntos de equilibrio:

$$y_1(1 - y_1 - by_2) = 0, \quad y_2(1 - y_2 + cy_1) = 0,$$

y los ubicamos en el plano (y_1, y_2) . Nótese que $y_1, y_2 > 0$ al ser poblaciones. Para $c = 2$ y $b = 0,1$, por ejemplo, tenemos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0,75, 2,5)$. Tomamos una región del plano (x, y) que los contiene y vemos cómo se distribuyen las trayectorias en ella barriendo distintas zonas de puntos iniciales.

El programa principal es:

```
clf, clear all
b=0.1;c=2;
global b c
[y1,y2]=meshgrid(-0.1:0.1:1.5,-0.1:0.1:3.5);
Dy1Dt=y1-y1.^2-b*y1.*y2;Dy2Dt=y2-y2.^2+c*y1.*y2;
quiver(y1,y2,Dy1Dt,Dy2Dt); hold on
plot(0,0,'r+');plot(1,0,'ro');
plot(0,1,'r*');plot(0.75,2.5,'rs')
axis([-0.1 1.5 -0.1 3.5])
pause y01=[0:0.1:1.5];
tspan=0:0.1:10;
n=length(y01);
for i=1:n
[t,y]=ode45('dpresac',tspan,[y01(i) 0]);
plot(y(:,1),y(:,2),'c-')
drawnow;
hold on
pause
end
```

```

y01=[0.1:0.1:3];
tspan=0:0.1:10;
n=length(y01);
for i=1:n
[t,y]=ode45('dpresac',tspan,[y01(i) 0.1]);
plot(y(:,1),y(:,2),'g-')
drawnow;
hold on
pause
end
y01=[0.1:0.1:1.5];
n=length(y01);
for i=1:n
[t,y]=ode45('dpresac',tspan,[y01(i) 3]);
plot(y(:,1),y(:,2),'m-')
drawnow;
hold on
pause
end
y02=[0.1:0.1:3];
n=length(y02);
for i=1:n
[t,y]=ode45('dpresac',tspan,[0.1 y02(i)]);
plot(y(:,1),y(:,2),'r-')
drawnow;
hold on
pause
end
y02=[0.1:0.1:3];
n=length(y02);
for i=1:n
[t,y]=ode45('dpresac',tspan,[0 y02(i)]);
plot(y(:,1),y(:,2),'y-')
drawnow;
hold on
pause
end
pause

```

```
plot(tspan,y(:,1),'-b',tspan,y(:,2),'-r')
hold off
```

y la función que define el sistema:

```
function dy=dpresac(t,y)
global b c
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(1)-y(1)^2-b*y(1)*y(2);
dy(2)=y(2)-y(2)^2+c*y(1)*y(2);
```

Ejercicio 2: Sistema depredador-presa. Consideramos el modelo depredador-presa siguiente:

$$y_1' = ay_1 - by_1y_2, \quad y_2' = cy_1y_2 - dy_2.$$

Este modelo se puede integrar directamente, eliminando t y separando variables:

$$a \log(y_2) - by_2 = cy_1 - d \log(y_1) + \text{constante}.$$

Dibujar el plano de fases y comprobar que las trayectorias son cerradas. Esto implica que la evolución de las poblaciones de depredadores y presas descrita por este modelo es cíclica, tras un tiempo vuelven a su estado inicial.

Ejercicio 3: Competencia de especies. Supongamos que dos especies distintas ocupan el mismo ecosistema como competidores en el uso de los mismos recursos, como alimentos o espacio vital. La razón de crecimiento demográfico de cada especie aislada es $x' = ax$, $y' = cy$. Cuando las especies coexisten y compiten, el crecimiento de cada especie se ve mermado por la existencia de la otra y tenemos el modelo

$$x' = ax - by, \quad y' = cy - dx, \quad a, b, c, d > 0.$$

El sistema tiene matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -d & c \end{pmatrix}$. Puede tener autovalores λ_1, λ_2 reales distintos o autovalores complejos $\text{Re}(\lambda) \pm i\text{Im}(\lambda)$ con autovectores $(v_1, v_2)^t$, $(w_1, w_2)^t$, o autovalores reales dobles.

Sean $s = (a + c) > 0$ y $p = ac - db$. El polinomio característico es

$x^2 - sx + p = 0$. La solución general será de la forma:

$$\begin{aligned}
 & c_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \quad s^2 - 4p > 0, \\
 & c_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + c_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} t e^{\lambda t}, \quad s^2 - 4p = 0, \\
 & c_1 \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \cos(\operatorname{Im}(\lambda)t) e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \\
 & + c_2 \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix} \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t) e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}, \quad s^2 - 4p < 0.
 \end{aligned}$$

Esto es un estudio de estabilidad lineal. Si los autovalores tienen parte real positiva, ambas poblaciones crecen indefinidamente con el tiempo. Si tienen parte real negativa, decaerían a un equilibrio estable exponencialmente. Si fueran imaginarios puros, tendríamos soluciones periódicas en torno a posibles equilibrios estables.

Modelos más realistas incluyen una corrección no lineal: los términos que reflejan el impacto de la otra población son proporcionales al producto de las poblaciones.

$$x' = ax - bxy, \quad y' = cy - dxy.$$

Este problema no puede resolverse en general de forma explícita. Hemos de recurrir a los métodos de aproximación numérica. Calcular los puntos de equilibrio y estudiar la estructura del plano de fases cuando $a = 2$, $c = 1$, $b = 0'3$, $d = 0'3$.

2. Sistemas conservativos y disipativos

Un tipo de sistemas importante con estructura autónoma son los modelos conservativos unidimensionales de la Mecánica clásica: $y'' + V'(y) = 0$. Esta ecuación describe la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de una partícula sujeta a una fuerza $-V'(y)$, donde V representa su energía potencial (eléctrica, gravitatoria...) [2].

Estos modelos se pueden escribir en forma de sistema autónomo poniendo $y_1 = y$ y $y_2 = y'$:

$$y_1'(t) = y_2(t), \quad y_2'(t) = -V'(y_1).$$

También se pueden reducir a una ecuación separable de primer orden multiplicando por y' e integrando:

$$\frac{1}{2}y'^2(t) + V(y(t)) = E,$$

E es una constante que se interpreta como la energía total del sistema. Integrando esta ecuación obtenemos

$$t - t_0 = \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{2(E - V(y))}}. \quad (1)$$

Esta expresión nos permite calcular el tiempo que tarda una trayectoria en ir de una posición a otra. Para ciertas funciones $V(y)$ esta fórmula produce integrando una expresión explícita para $y(t)$. En general, esto no es posible, pero se puede extraer mucha información sobre las trayectorias $(y(t), y'(t))$ a partir de la conservación de la energía: existencia de puntos de equilibrio, trayectorias periódicas ... y construir *el plano de fases*. En esta práctica vamos a utilizar Matlab para dibujar los planos de fases de distintos modelos.

Ejercicio 1: El péndulo no lineal. *Consideremos la ecuación del péndulo no lineal:*

$$y'' + \text{sen}(y) = 0 \iff y_1' = y_2, \quad y_2' = -\text{sen}(y_1).$$

En primer lugar, se programa la función que define el segundo miembro del sistema:

```
function dy=pend(t,y)
dy=[y(2);-sin(y(1))];
```

A continuación de define el intervalo de tiempo en el que se quieren calcular las soluciones y se fijan los datos iniciales.

```
tspan=[0 10];yazero=[1;1];ybzero=[-5;2];yczero=[5;-2];
[ta,ya]=ode45('pend',tspan,yazero);
[tb,yb]=ode45('pend',tspan,ybzero);
[tc,yc]=ode45('pend',tspan,yczero);
[y1,y2]=meshgrid(-5:0.5:5,-3:0.5:3);
Dy1Dt=y2;Dy2Dt=-sin(y1);
quiver(y1,y2,Dy1Dt,Dy2Dt);hold on
plot(ya(:,1),ya(:,2),yb(:,1),yb(:,2),yc(:,1),yc(:,2))
axis equal, axis([-5 5 -3 3])
xlabel y_1(t), ylabel y_2(t), hold off
```

Si incluimos en el modelo efectos de fricción el sistema deja de ser conservativo y tenemos:

$$y'' + y' + \text{sen}(y) = 0 \iff y'_1 = y_2, y'_2 = -\text{sen}(y_1) - y_2$$

Definimos el segundo miembro:

```
function dy=pendf(t,y)
dy=[y(2);-sin(y(1))-y(2)];
```

y el programa principal

```
tspan=0:0.2:10;y0=-10:0.2:10;n=length(y0);
for i=1:n [t,y]=ode45('pendf',tspan,[y0(i);0]);
plot(t,y); hold on; drawnow; end
```

Como vemos, es fácil hacerse una idea sobre cómo se organizan las trayectorias una vez ubicados en el plano de fases los puntos de equilibrio, las separatrices y los ciclos límite.

Ejercicio 2. *Estudiar la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio en el modelo del péndulo no lineal con y sin fricción.*

Los puntos de equilibrio son de la forma $(k\pi, 0)$, k entero. Linealizamos $\sin(y)$ en torno a ellos:

$$\sin(y) \sim \sin(k\pi) + \cos(k\pi)(y - k\pi) + o(y - k\pi)^2.$$

Escribiendo $y_1 = \tilde{y}_1 + k\pi$, $y_2 = \tilde{y}_2 + 0$, el sistema conservativo queda de forma aproximada (despreciando los términos cuadráticos):

$$\tilde{y}'_1 = \tilde{y}_2, \quad \tilde{y}'_2 = -\cos(k\pi)\tilde{y}_1.$$

Cuando k es par $\cos(k\pi) = 1$. Cuando k es impar $\cos(k\pi) = -1$. La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el primer caso, con k par, tenemos autovalores $\pm i$, imaginarios puros. Los puntos de equilibrio son centros estables rodeados de trayectorias periódicas cerradas. La solución general es:

$$c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

En el segundo caso, con k impar, tenemos autovalores ± 1 . Los puntos de equilibrio son puntos silla de los que salen trayectorias en la dirección del autovector asociado a 1 y en los que entran trayectorias en la dirección del autovector asociado a -1 . Son las separatrices, que separan regiones con trayectorias que se acercan temporalmente al equilibrio, pero luego se alejan. La solución general es:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Cómo queda la estabilidad lineal de ambos tipos de puntos en presencia de fricción?

Ejercicio 3. *Multiplicando la ecuación del péndulo por y' e integrando tenemos para $t > 0$:*

$$\frac{1}{2}(y'(t))^2 + (1 - \cos(y(t))) = E_0 = \frac{1}{2}(y'(0))^2 + (1 - \cos(y(0))) \geq 0.$$

Dibuja la función $V(y) = 1 - \cos(y)$. Según la variación de los cortes de esta función con E_0 al subir E_0 y la restricción $\frac{1}{2}(y'(t))^2 + (1 - \cos(y(t))) \geq 0$ puedes obtener conclusiones sobre las regiones donde el movimiento es posible?

Ejercicio 4. Consideramos el potencial

$$V(w) = \frac{1}{4}w^4 - \frac{(1+a)}{3}w^3 + \frac{a}{2}w^2 \geq 0$$

con 2 mínimos en $0, 1$ y un máximo en $a \in (0, 1)$, véase la figura 1. La función es positiva. Su derivada es

$$V'(w) = -w(1-w)(w-a).$$

Consideramos la dinámica

$$u'' + V'(u) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(u')^2 + V(u) = E.$$

Variando el nivel $E \geq 0$ tenemos:

- Para valores de $E < V(a)$, hay trayectorias cerradas en torno a los mínimos, que son equilibrios estables.
- Para $E = V(a)$, aparecen trayectorias que entran y salen del máximo, que es un equilibrio inestable. Estas trayectorias que tardan un tiempo infinito (1) en salir de un equilibrio inestable y volver al mismo se llaman *homoclínicas*.

Dibujar el potencial y dibujar el plano de fases. Cómo son las trayectorias si $E > V(a)$?

Ejercicio 5. Consideramos el potencial

$$V(w) = -\frac{1}{4}w^4 + \frac{(1+a)}{3}w^3 - \frac{a}{2}w^2$$

con 2 máximos en $0, 1$ y un mínimo en $a \in (0, 1)$, véase la figura 2. Su derivada es

$$V'(w) = w(1-w)(w-a).$$

Consideramos la dinámica

$$u'' + V'(u) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(u')^2 + V(u) = E.$$

Sea m el máximo correspondiente a $V(m)$ menor. Variando el nivel $E \geq 0$ tenemos:

- Para valores de $E < V(m)$, hay trayectorias cerradas en torno al mínimo, que es un equilibrio estable.
- Para $E = V(m)$, tenemos dos casos
 - Caso simétrico $a = 0,5$: aparecen trayectorias que unen los dos equilibrios inestables, los dos máximos, que están a la misma altura. Estas trayectorias que tardan un tiempo infinito (1) en ir de un equilibrio inestable a otro distinto se llaman *heteroclínicas* (ya aparecían en el péndulo no lineal).
 - Caso asimétrico $a \neq 0,5$: los dos máximos están a distinta altura, sea a_m que corresponde a $V(m)$ menor. Va a haber trayectorias *homoclínicas* que unen ese equilibrio inestable consigo mismo en un tiempo infinito (1) (ya aparecen en el ejercicio 4).

Dibujar el potencial en el caso simétrico $a = 0,5$ y asimétrico $a \neq 0,5$. Dibujar los planos de fases. Cómo son las trayectorias para $E > V(m)$?

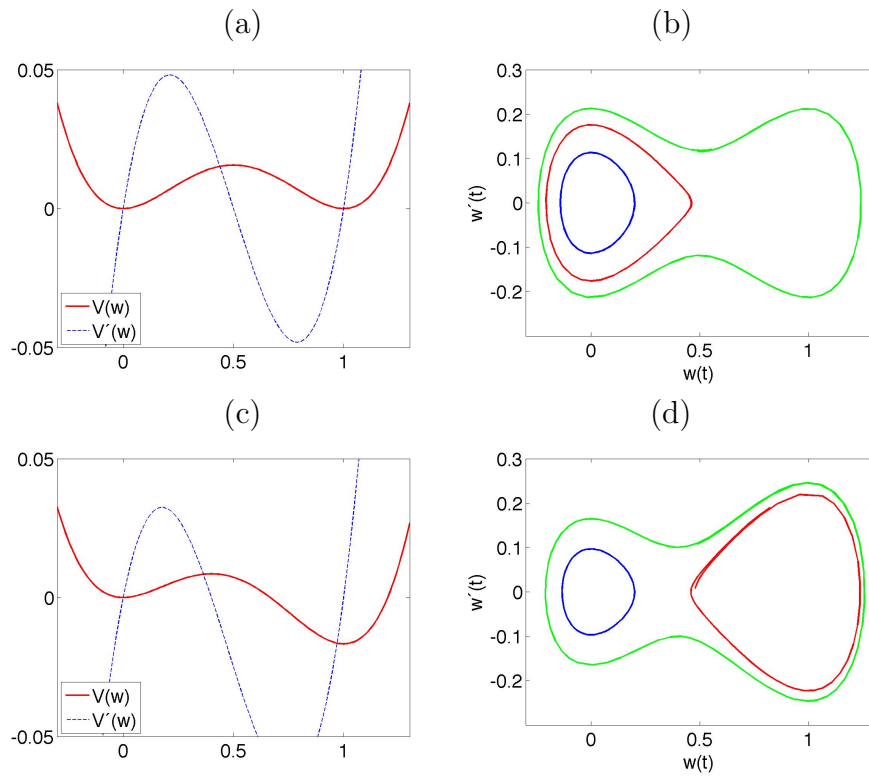


Figura 1: Potencial de doble pozo. Caso simétrico $a = 0,5$: (a) Aspecto del potencial y (b) Plano de fases con trayectoria cerrada en torno a un equilibrio estable (azul), homoclínica que entra y sale del equilibrio inestable (roja) haciendo de separatriz, trayectoria cerrada entorno a todos los equilibrios (verde). Caso asimétrico $a = 0,4$: (a) Aspecto del potencial y (b) Plano de fases con trayectoria cerrada en torno a un equilibrio estable (azul), homoclínica que entra y sale del equilibrio inestable (roja) en torno a uno de los equilibrios estables, trayectoria cerrada entorno a todos los equilibrios (verde). La única diferencia es la asimetría de los pozos y las trayectorias.

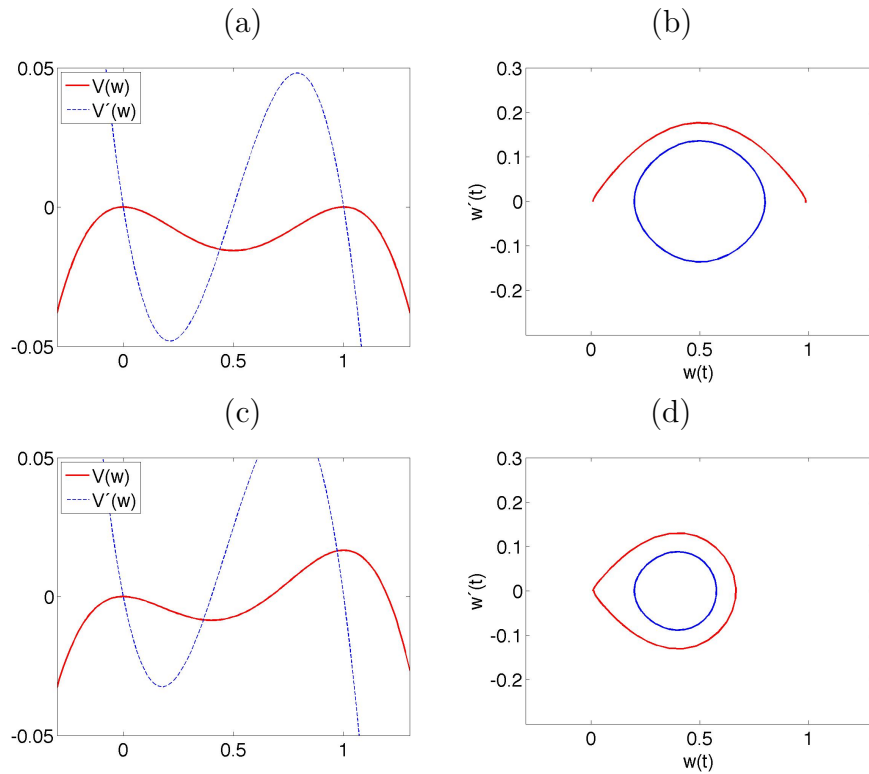


Figura 2: Potencial de doble pozo invertido. Caso simétrico $a = 0,5$: (a) Aspecto del potencial y (b) Plano de fases con trayectoria cerrada en torno al equilibrio estable (azul), heteroclínica que une los dos equilibrios inestables haciendo de separatriz. Existe otra simétrica. Fuera de la región determinada por ellas las trayectorias no están acotadas. Caso asimétrico $a = 0,4$: (a) Aspecto del potencial y (b) Plano de fases con trayectoria cerrada en torno al equilibrio estable (azul), homoclínica que entra y sale de equilibrio inestable con menos energía (roja). Fuera de esa región las trayectorias no están acotadas.

3. Trayectorias heteroclínicas y frentes

En el estudio del plano de fases para el péndulo no lineal hemos observado la presencia de trayectorias que salen de $-\pi$ y llegan a π . Tales trayectorias que unen dos equilibrios inestables distintos en un tiempo infinito se llaman heteroclínicas y cobran gran importancia en el estudio de la dinámica de sistemas más complejos. Un ejemplo los proporcionan los *sistemas de reacción-difusión*, cuyas soluciones suelen evolucionar a ondas viajeras que se propagan a una cierta velocidad con un perfil fijo [3]. Cuando este perfil toma la forma de curva que une dos constantes recibe el nombre de *frente de onda*.

Consideramos el problema de difusión:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u(u - a)(1 - u), & x \in (-\infty, \infty), t > 0, \\ u(-\infty, t) &= 0, & u(\infty, t) = 1, & t > 0, \end{aligned}$$

con $a \in (0, 1)$. Buscamos una solución de tipo frente viajero $u(x, t) = w(x - ct)$ que se propaga a velocidad c con perfil $w(z)$. El perfil satisface:

$$\begin{aligned} -cw_z - w_{zz} &= w(w - a)(1 - w), & z \in (-\infty, \infty), \\ w(-\infty) &= 0, w(\infty) = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

El segundo miembro tiene una primitiva $V(w) = -\frac{1}{4}w^4 + \frac{(1+a)}{3}w^3 - \frac{a}{2}w^2$.

3.1. Frentes estacionarios

Cuando $a = 0,5$, $c = 0$ (se ve integrando la ecuación del perfil (2) respecto a z , la integral de la fuente es cero por simetría). Tenemos un frente estacionario, caso de que el perfil buscado exista. Multiplicando (2) por w_z e integrando:

$$\frac{1}{2}w_z^2 + V(w(z)) = E \geq 0, \quad z \in (-\infty, \infty).$$

La función $V(w)$ es un doble pozo invertido con máximos en 0 y 1, mínimo en a . Mirando la evolución de las regiones de movimiento a medida que E crece desde 0, vemos trayectorias cerradas en torno al centro $a = 0,5$. Cuando llegamos a $E = V(0,5)$, tenemos separatrices o heteroclínicas que unen ambos equilibrios inestables.

El perfil buscado existe. Cómo calcularlo? En el plano de fases es una curva inestable, en el sentido de que cualquier punto próximo pero no situado exactamente en él, da lugar a trayectorias que se alejan por giro o escape al infinito.

Obsérvese que w recorre todos los valores de 0 a 1. En algún punto, valdrá 0'5. Por simetría podemos tomar $w(0) = 0'5$ y ambas ramas, a izquierda y derecha de esa valor serán simétricas. Una estrategia numérica consiste en combinar truncatura a dominio finito y método de tiro:

- truncar a un dominio finito $\in [-L, L]$, L grande.
- fijar $w(0) = 0'5$ y encontrar la pendiente α tal que $w_z(0) = \alpha$ conduce a $w(L) = 1$ y $w(-L) = 0$.

Para aproximar el valor de α recurrimos a un método de bisección:

- Encontramos a_0 y b_0 tales que la solución de $w(0) = 0'5$, $w_{zz} = w(w - a)(w - 1)$, con $w_z(0) = a_0$ en L se mantiene por debajo de 1, pero supera 1 si $w_z(0) = b_0$.
- Tomamos el punto medio $\frac{a_0+b_0}{2}$ y vemos si usándolo como pendiente quedamos por encima o debajo de 1.
- Redefinimos los nuevos valores a_1 y b_1 usando el punto medio de modo que a un corresponda una curva por encima de 1 y a otro por debajo.
- Iteramos hasta calcular α con varios dígitos correctos.

Este proceso se implementa en los códigos siguientes:

```
global a
a=0.5;
L=10;
nit=100;
a0=0.15; % cae
[t,u]=ode45('rhsheteroclinica',[0 L],[a;a0]);
plot(t,u(:,1),'r');
hold on
b0=0.18; % se va a infinito
[t,u]=ode45('rhsheteroclinica',[0 L],[a;b0]);
plot(t,u(:,1),'b');
```

```

hold off
for it=1:nit
b1=(a0+b0)/2;
[t,u]=ode45('rshheteroclinica',[0 L],[a;b1]);
plot(t,u(:,1),'g');
drawnow
lt=length(t);
disp(u(lt,1))
if u(lt,1)>1
b0=b1;
else
a0=b1;
end
disp([a0 b0])
pause
if abs(a0-b0)<1e-4 break; end
end
    complementado por la función:
function dy=rshheteroclinica(t,y)
global a;
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=y(1)*(y(1)-1)*(y(1)-a);

```

3.2. Frentes viajeros

El perfil de un frente viajero satisface:

$$\begin{aligned}
 -cw_z - w_{zz} &= w(w - a)(1 - w), & z \in (-\infty, \infty), \\
 w(-\infty) &= 0, w(\infty) = 1.
 \end{aligned}$$

Tenemos una variable más, la velocidad c , que depende de a . Integrando, tenemos que:

$$c = - \int_{-\infty}^{\infty} w(z)(w(z) - a)(1 - w(z))dz.$$

Planteando el problema de tiro, necesitamos encontrar una pendiente α de modo que:

$$w_z = v, \quad v_z = -cv - w(w - a)(1 - w),$$

$$\begin{aligned}w(0) &= 0,5, & v(0) &= w_z(0) = \alpha, \\w(-L) &= 0, & w(L) &= 1,\end{aligned}$$

Ejercicio. Programar un método de tiro doble alternado para calcular el perfil y la velocidad:

- Fijado $c = 0$, ajustamos α por el método de tiro en $[0, L]$ para que $w(L) = 1$.
- Fijado α , ajustamos c por el método de tiro en $[-L, 0]$ para que $w(-L) = 0$.
- Iteramos el proceso ajustando sucesivamente α con el nuevo valor de c y c con el nuevo valor de α hasta llegar a un equilibrio.

4. Bifurcación nodo-silla: Anclaje de frentes

El comportamiento de las soluciones de los modelos considerados puede variar con los parámetros presentes en los mismos. Para determinados valores críticos, el comportamiento cualitativo puede variar completamente. Tales valores críticos de los parámetros de control se llaman *bifurcaciones*.

Hay varios tipos de bifurcaciones que aparecen recurrentemente. Nos centramos aquí en la *bifurcación de tipo nodo-silla*. Proporciona el mecanismo básico por el cual puntos de equilibrio se crean y se destruyen.

El prototipo de bifurcación nodo-silla lo define la ecuación:

$$x' = F + x^2, \quad (3)$$

donde F es un parámetro real que puede ser:

- positivo: no hay equilibrios (la parábola no tiene ceros),
- nulo: hay un equilibrio (la parábola tiene un cero),
- negativo: hay dos equilibrios (la parábola tiene dos ceros, uno es un equilibrio estable, otro inestable).

La ecuación diferencial pasa de una situación en la que tiene un equilibrio que atrae y otro que no, a una situación sin equilibrios, con trayectorias que se van a infinito, véase la Figura 3. Este ocurre para el parámetro de control $r = 0$, donde tiene lugar la bifurcación nodo-silla.

El diagrama de bifurcación representa la evolución de las ramas de solución estable e inestable en $r = 0$, véase la Figura 4.

Ejemplo: Anclaje y propagación de frentes [4, 5]. Consideramos el problema:

$$\begin{aligned} u_{n,t} - d(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) &= u_n(2 - u_n)(u_n - a) - w, \quad n \in \mathbb{N}, t > 0, \\ u_{-\infty}(t) &= 0, \quad u_{\infty}(t) = 2, \quad t > 0, \end{aligned}$$

con $a \in (0, 2)$ y n entero. Para el problema de reacción-difusión continuo

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u(2 - u)(u - a) - w, \quad x \in (-\infty, \infty), t > 0, \\ u(-\infty, t) &= 0, \quad u(\infty, t) = 2, \quad t > 0. \end{aligned}$$

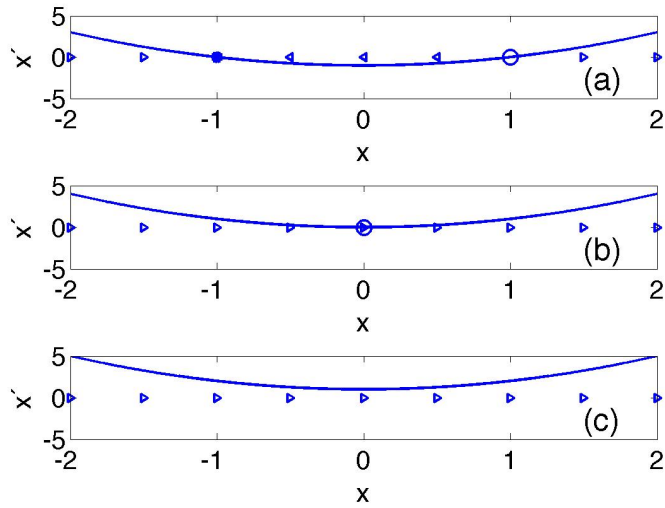


Figura 3: Evolución del segundo miembro con el parámetro r en sistemas que muestran una bifurcación nodo-silla: (a) $r < 0$, (b) $r = 0$, (c) $r > 0$.

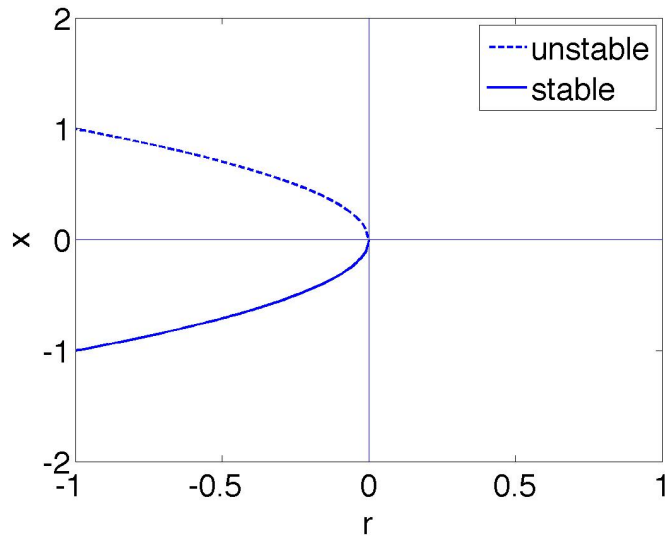


Figura 4: Diagrama de bifurcación para una bifurcación nodo-silla.

sabemos por la sección 3 que si $w = 0$ y $a = 1$ existe un frente estacionario con velocidad $c = 0$. En otro caso, se rompe la simetría de la fuente y existen soluciones de tipo frente viajero con velocidad $c \neq 0$. Sin embargo, para el problema de difusión discreto se observa un fenómeno de *anclaje*. Fijemos $a = 1$ de forma que el término no lineal sea simétrico:

- Cuando $w_l(d) \leq w \leq w_r(d)$ hay soluciones de tipo frente estacionario u_n que crecen de 0 a 1.
- Cuando $w > w_r(d)$ o $w < w_l(d)$ hay soluciones de tipo frente viajero $u_n(t) = w(n - ct)$ con perfiles w que crecen de 0 en $-\infty$ a 1 en ∞ y $c \neq 0$.

Qué ocurre en los puntos críticos $w_r(d)$ y $w_l(d)$? Para entenderlo consideramos un caso en el que d es pequeño, por ejemplo, $d = 0'1$, de modo que el frente se puede aproximar básicamente por dos colas constantes $z_1(w)$, $z_3(w)$, y un punto de unión intermedio u_0 . Hay soluciones estacionarias siempre que la ecuación aproximada para la evolución de ese punto de unión:

$$\begin{aligned} u_0' - d(z_3(w) - 2u_0 + z_1(w)) &= u_0(2 - u_0)(u_0 - 1) - w \Rightarrow \\ u_0' &= -2du_0 + u_0(2 - u_0)(u_0 - 1) - w + d(z_3(w) + z_1(w)) \end{aligned}$$

tenga solución estacionaria $u_0 \in (z_1(w), z_3(w))$, siendo $z_1(w)$ y $z_3(w)$ el primer y tercer ceros de la fuente $f(u) = u(2 - u)(u - 1) - w$.

Consideramos la fuente

$$g(u_0) = -2du_0 + u_0(2 - u_0)(u_0 - 1) - w + d(z_3(w) + z_1(w)).$$

Para valores bajos de w tiene 3 ceros y u_0 se queda cerca del intermedio. A medida que w crece, los dos ceros inferiores, uno estable y otro inestable, comisionan y desaparecen. Por tanto u_0 ha de moverse hacia el tercer cero, el superior. Tenemos pues una bifurcación de tipo nodo-silla en el comportamiento de éste sistema reducido, que se extiende al global y caracteriza la transición de soluciones estacionarias ancladas a ondas viajeras.

Vamos a visualizar esta situación.

Ejercicio 1. Dibujar la función $g(u) = -2du + u(2 - u)(u - 1) - w + d(z_3(w) + z_1(w))$ para valores crecientes de w dentro del rango en el que la función $f(u) = u(2 - u)(u - 1) - w$ tiene tres ceros. Tomar $d = 0'1$.

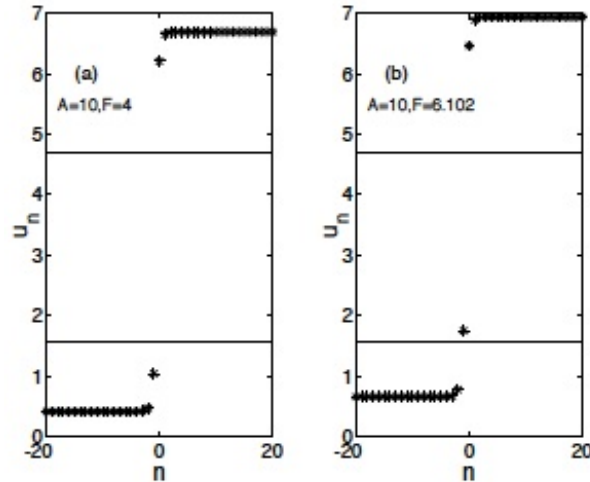


Figura 5: Evolución del frente estacionario a medida que el parámetro de control se acerca al valor crítico. Imagen tomada de [4].

- Observar cómo a medida que crece w , dos ramas de ceros de g colisionan y desaparecen.
- Qué relaciones caracterizan el valor w_c en el que ocurre esta colisión, y por tanto, la bifurcación.
- Pintar el diagrama de bifurcación correspondiente.
- Derivar la forma normal de la bifurcación para el problema de evolución (4) escribiendo $u_0 = u_0(w_c) + v_0$ y obteniendo una ecuación para v_0 despreciando las potencias de orden superior, para valores de w ligeramente por encima de w_c . Comprobar que se obtiene una ecuación de la forma:

$$v_0' = \alpha(w - w_c) + \beta v_0^2.$$

Ejercicio 2. Usando como referencia el valor w_c obtenido en el ejercicio anterior, comprobar que el sistema

$$u_{n,t} - \theta^t (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = u_n(2 - u_n)(u_n - 1) - w, \quad -L \leq n \leq L,$$

$$u_{-L}(t) = 0, \quad u_L(t) = 2,$$

tiene soluciones estacionarias si $w < w_c$ pero viajeras si $w > w_c$. Para ello, simular la evolución del sistema partiendo de un estado inicial de la forma $u_n(0) = z_1(w)$ si $n \leq 0$ y $u_n(0) = z_2(w)$ si $n > 0$. Observar si la solución se queda 'anclada' (Figura 5) o va avanzando en una dirección.

5. Trayectorias homoclínicas y pulsos en sistemas excitables

Al margen de frentes, un sistema de reacción-difusión puede tener soluciones viajeras con un perfil que toma la forma de curva que une dos constantes y recibe el nombre de *pulso*. Los frentes se observan en situaciones de biestabilidad: el sistema de reacción-difusión tiene dos equilibrios constantes estables y el frente evoluciona de uno a otro. Los pulsos se observan en situaciones de excitabilidad, en las que el sistema tiene un único equilibrio estable. El pulso abandona temporalmente este estado y vuelve a él. Tal es el caso en sistemas de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v), \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon g(u, v), \quad (5)$$

en los que la fuente $f(u, v)$ es una función cúbica respecto a u con tres ceros $z_1(v) < z_2(v) < z_3(v)$, el primero y tercero de los cuales son estables para la dinámica (4) con v fijo. Una elección clásica corresponde al sistema de FitzHugh-Nagumo

$$f(u, v) = u(2 - u)(u - a) - v, \quad g(u, v) = u - bv,$$

con $a \in (0, 1)$, $b > 0$, de modo que el único equilibrio del sistema es $(0, 0)$. El modelo de FitzHugh-Nagumo es un modelo simplificado utilizado para comprender fenómenos de propagación de impulsos nerviosos [7], véase Figura 6. Modelos de estructura similar describen la contracción de fibras musculares [10]. u representa el impulso nervioso o muscular, w la variable de recuperación de la fibra tras la excitación.

El parámetro ε se toma suficientemente pequeño para que las variables excitable v y de relajación w actúen en escalas de tiempo separadas. El perfil del pulso en la variable excitable u se forma por unión de dos frentes, uno ascendente y otro descendente. En tales frentes, v se mantiene casi constante, y ambos son por tanto solución tipo frente (como las estudiadas en la sección 3) de la ecuación (4). Fuera de ellos, u varía subordinado a la evolución de v y con la restricción de que el término fuente en (4) es básicamente nulo.

Los perfiles de un pulso viajero que se propaga con velocidad c y es solución de (4)-(5) cumplen $u(x, t) = u(x - ct)$, $v(x, t) = v(x - ct)$ con

$$-cu_z(z) = u_{zz}(z) + f(u(z), v(z)), \quad z = x - ct,$$

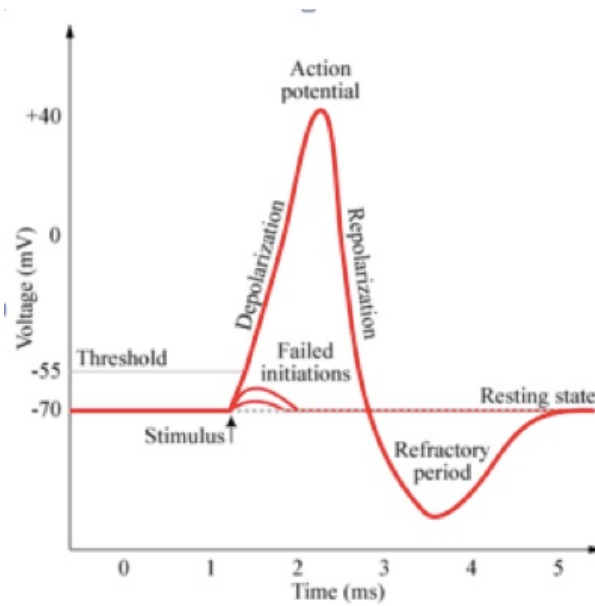


Figura 6: Esquema de un pulso nervioso

$$-cv_z(z) = \varepsilon g(u(z), v(z)).$$

Se debe ajustar la velocidad c de forma que el sistema tenga de ecuaciones diferenciales ordinarias tenga una trayectoria homoclínica. Para construir la solución podemos recurrir a métodos de tiro como en el caso de los frentes, o considerar un problema de autovalores, con autovalor c . Otra opción consiste en resolver el sistema de reacción-difusión original, con condiciones iniciales y de contorno adecuadas, y ver cómo la solución adopta la forma de un pulso viajero, a partir de lo cual se pueden inferir perfiles y velocidades. Nótese que para una solución viajera

$$u(x+1, t) = u(x+1-ct) = u(x-c(t-1/c)) = u(x, t-1/c).$$

La velocidad c es positiva si el perfil se mueve a la derecha, negativa si se mueve a la izquierda. En módulo, es el recíproco del tiempo que tarda un punto $x+1$ en alcanzar el mismo estado que el punto x . Estimada la velocidad c , el perfil de la onda viajera se obtiene a partir de la trayectoria $u(x, t)$ del punto x como

$$u(z) = u(x-ct) = u(x, (x-z)/c)$$

usando $z = x - ct$, es decir, $t = (x - z)/c$.

Vamos a simular numéricamente la evolución usando una versión discretizada de (4)-(5):

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = d(u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1}) + u_n(2 - u_n)(u_n - a) - v_n, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = \varepsilon(u_n - bv_n). \quad (7)$$

Esta ecuación se puede considerar una discretización del problema continuo, cuyas soluciones aproximan la solución del continuo para d grande ($d = \frac{1}{h^2}$, siendo h^2 el paso de discretización). También es un modelo de propagación de impulsos nerviosos o musculares en sí mismo, que toma en cuenta la variación espacial de las fibras nerviosas humanas o los músculos, ignorada en el modelo continuo [8, 10].

Ejercicio. *Calculamos los valores de $u_n(t)$ y $v_n(t)$ en una red de puntos $t_j = jk$, $j = 0, \dots, M$, con $k = \frac{T}{M}$. Para ello usamos una discretización explícita en tiempo: $\frac{v_{n,j+1} - v_{n,j}}{k} = v_{n,t}(t_j) + O(k)$, lo que nos proporciona:*

$$\frac{u_{n,j+1} - u_{n,j}}{k} = d(u_{n+1,j} - 2u_{n,j} + u_{n-1,j}) + u_{n,j}(2 - u_{n,j})(u_{n,j} - a) - v_{n,j},$$

$$\frac{v_{n,j+1} - v_{n,j}}{k} = \varepsilon(u_{n,j} - bv_{n,j}),$$

con $n = 0, \dots, N$. Para resolver la recurrencia, se despeja sucesivamente el nivel $j + 1$ a partir del nivel j , partiendo del nivel cero $u_{n,0} = 0$, $v_{n,0} = 0$, que es conocido. Se precisa una condición de contorno. Tomamos $v_{0,j} = 2\chi_{[0,\tau]}(t_j)$ (se excita el extremo de la fibra durante un tiempo τ). $\chi_{[0,\tau]}$ denota la función característica del intervalo $[0, \tau]$, que vale uno si $t \leq \tau$ y cero si $t > \tau$.

Para garantizar la estabilidad del esquema, hará falta una restricción adicional sobre k y d : $k < \frac{0,5}{d}$. Parámetros sugeridos: $a = 0,8$, $b = 0,3$, $\varepsilon = 0,005$, $T = 2000$, $\tau = 10$, $M = 200000$, $N = 500$. Para relacionar con el problema continuo podemos tomar $d = \frac{1}{h^2}$, $h = \frac{L}{N}$, $L = 100$. De esta forma, $u_n(t_j) \sim u(x_n, t_j)$, $v_n(t_j) \sim v(x_n, t_j)$, $x_n = nh$, $n = 0, \dots, N$.

Cuál es la velocidad de propagación del pulso? Cuál es su perfil?

Qué ocurre si no se cumple la condición $k < 0,5h^2$? Qué ocurre si usamos como condición de contorno $v(0, t) = \alpha\chi_{[0,\tau]}$ con α cada vez menor? Qué ocu-

¿Ocurre si aumentamos o disminuimos el valor de ε ? ¿Qué ocurre si aumentamos o disminuimos el valor de τ ?

6. Bifurcaciones de tipo transcrito y pitchfork

La bifurcación *transcrita* proporciona un mecanismo para el cambio de estabilidad de un punto de equilibrio que persiste al variar los parámetros pero puede cambiar de estable a inestable. La forma normal para una bifurcación transcrita es:

$$x' = rx - x^2, \quad (8)$$

donde r , x pueden ser positivos o negativos:

- Si $r < 0$, hay un equilibrio estable en $x_e = 0$ y otro inestable en $x_e = r$.
- Si $r = 0$, los dos equilibrios comisionan en $x_e = 0$, que es marginalmente estable, es decir, estable o inestable según por dónde nos acerquemos.
- Si $r > 0$, hay un equilibrio inestable en $x_e = 0$ y otro estable en $x_e = r$.

A diferencia de lo que ocurre en la bifurcación nodo-silla, no se pierden puntos de equilibrio, simplemente se intercambia la estabilidad, véase la Figura 7. El diagrama de bifurcación para la bifurcación transcrita se representa en la Figura 8.

El tercer tipo de bifurcación es la bifurcación *pitchfork*, común en los problemas con simetría, en los que puntos de equilibrio aparecen o desaparecen en parejas simétricas. Hay dos tipos: supercrítica y subcrítica.

La bifurcación *pitchfork supercrítica* tiene forma normal

$$x' = rx - x^3, \quad (9)$$

y es invariante reemplazando x por $-x$:

- Si $r < 0$, hay un equilibrio exponencialmente estable en $x_e = 0$.
- Si $r = 0$, $x_e = 0$ sigue siendo un equilibrio estable, pero más débil. El decaimiento a $x_e = 0$ desde el entorno pasa a ser algebraico en lugar de exponencial.
- Si $r > 0$, $x_e = 0$ se hace inestable y aparecen dos equilibrios estables simétricos en $x_e = \pm\sqrt{r}$.

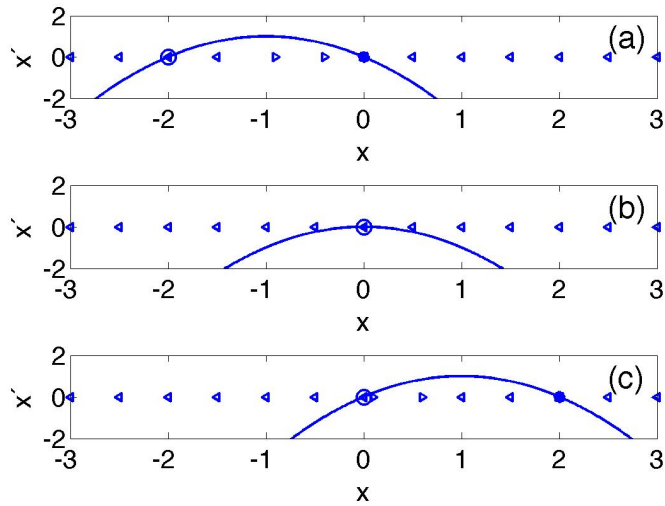


Figura 7: Evolución del segundo miembro con el parámetro r en sistemas que muestran una bifurcación pitchfork supercrítica: (a) $r < 0$, (b) $r = 0$, (c) $r > 0$.

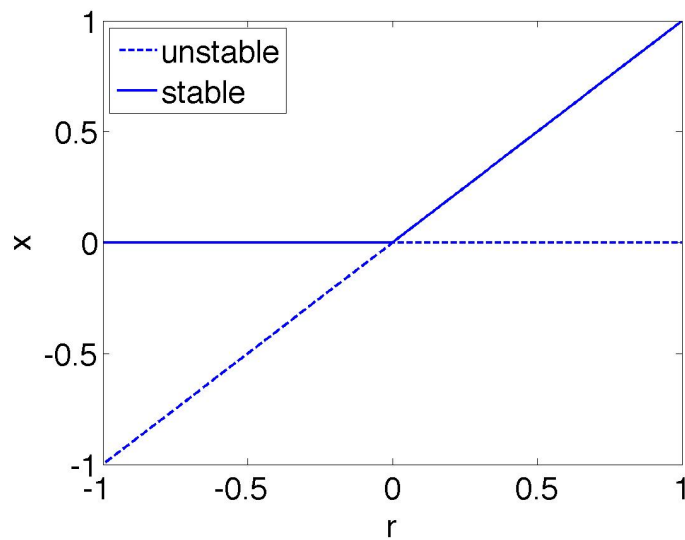


Figura 8: Diagrama de bifurcación para una bifurcación pitchfork supercrítica.

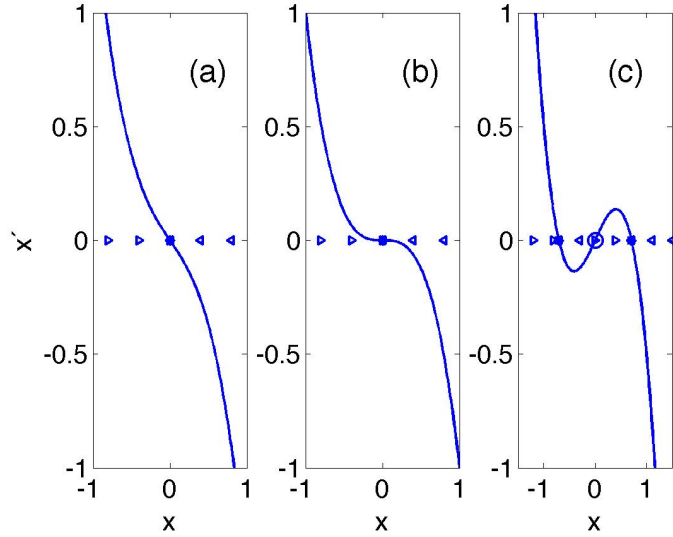


Figura 9: Evolución del segundo miembro con el parámetro r en sistemas que muestran una bifurcación pitchfork supercrítica: (a) $r < 0$, (b) $r = 0$, (c) $r > 0$.

La Figura 9 esquematiza esta evolución. El diagrama de bifurcación para la bifurcación pitchfork supercrítica se representa en la Figura 10.

La bifurcación *pitchfork subcrítica* tiene forma normal

$$x' = rx + x^3, \quad (10)$$

y es invariante reemplazando x por $-x$:

- Si $r > 0$, hay un equilibrio inestable en $x_e = 0$.
- Si $r = 0$, $x_e = 0$ es un equilibrio marginalmente estable, estable o inestable según desde dónde nos aproximemos. La inestabilidad para $r > 0$ puede dar lugar a explosiones en tiempo finito.
- Si $r < 0$, $x_e = 0$ se hace estable y aparecen dos equilibrios inestables simétricos en $x_e = \pm\sqrt{-r}$.

El diagrama de bifurcación para la bifurcación pitchfork subcrítica se representa en la Figura 11(a).

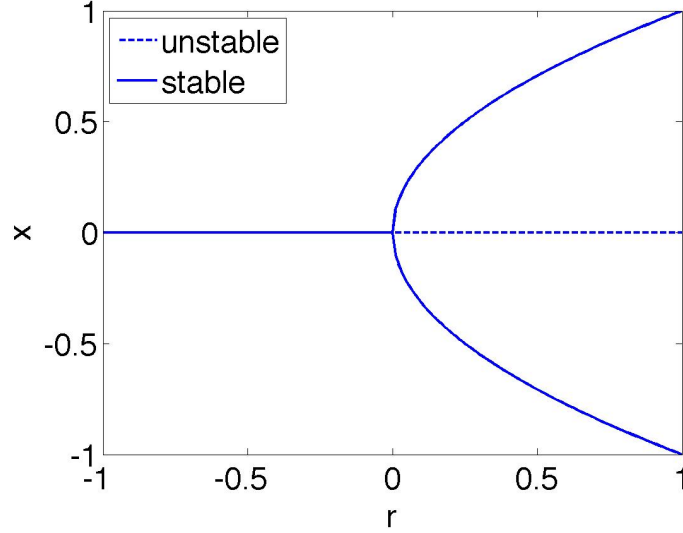


Figura 10: Diagrama de bifurcación para una bifurcación pitchfork supercrítica.

En los sistemas físicos reales la inestabilidad para $r > 0$ viene balanceada por otros términos, por ejemplo:

$$x' = rx + x^3 - x^5.$$

Debido a la presencia de x^5 , las ramas inestables se dan la vuelta y hacen estables en algún valor $r_s < 0$. En el rango $r_s < r < 0$, coexisten dos soluciones estables y el sistema puede evolucionar a cualquiera de ellas, ocasionando situaciones de irreversibilidad. Este fenómeno se denomina *histéresis*. El diagrama de bifurcación correspondiente se representa en la Figura 11(b).

Ejemplo: Nucleación de defectos en cristales atómicos [?]. Consideramos una red cúbica bidimensional (i, j) , $1 \leq i, j \leq N$. Cada punto se identifica con un átomo de un cristal cúbico en su posición de equilibrio. Su movimiento está gobernado por el sistema de ecuaciones

$$m \frac{d^2 u_{i,j}}{dt^2} + \alpha \frac{du_{i,j}}{dt} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + A[g_a(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + g_a(u_{i,j-1} - u_{i,j})],$$

con

$$g_a(x) = \frac{2a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right), \quad -a \leq x \leq a,$$

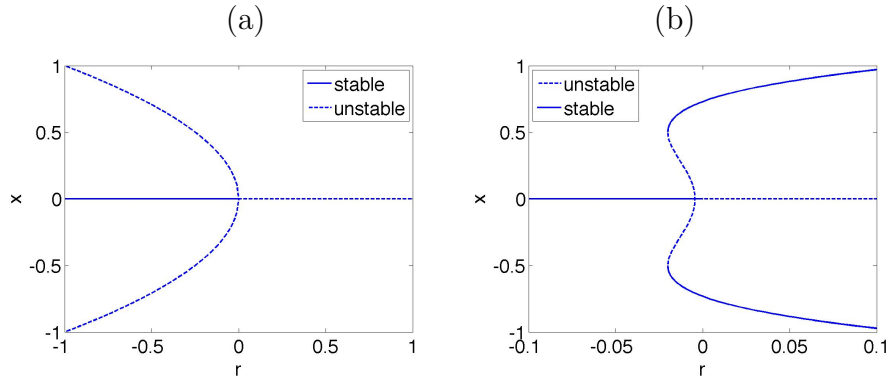


Figura 11: (a) Diagrama de bifurcación para una bifurcación pitchfork subcrítica. (b) Diagrama de bifurcación para una bifurcación pitchfork subcrítica regularizada, con retorno e histéresis.

$$g_a(x) = \frac{2a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi(x - 1/2)}{2a - 1}\right), \quad a \leq x \leq 1 - a.$$

Consideramos $a = 0,2$, $A = 0,3$, $N = 10$, $m = 0$, $\alpha = 1$. Imponemos condiciones de contorno $u_{i,j} = F[j - (N+1)/2]$ para $j = 1, j = N, i = 1, i = N$ para cerrar el sistema. Tomamos $F = F(t) = \frac{F_f}{t_r} t H(t_r - t) + F_f H(t - t_r)$, $F_f = 0,22$, siendo H la función de Heaviside, que vale 1 para argumentos positivos, y se anula caso contrario.

Programar un código que simule la evolución del sistema cuando $t_r = 84$ y cuando $t_r = 1000$. Dibujar a intervalos de tiempo t_r el aspecto del retículo $(i + u_{i,j}, j)$. Qué diferencias observas en la evolución? Qué relación crees que guarda lo que ves con el diagrama de bifurcación representado en la Figura 12? Qué tipo de bifurcación es?

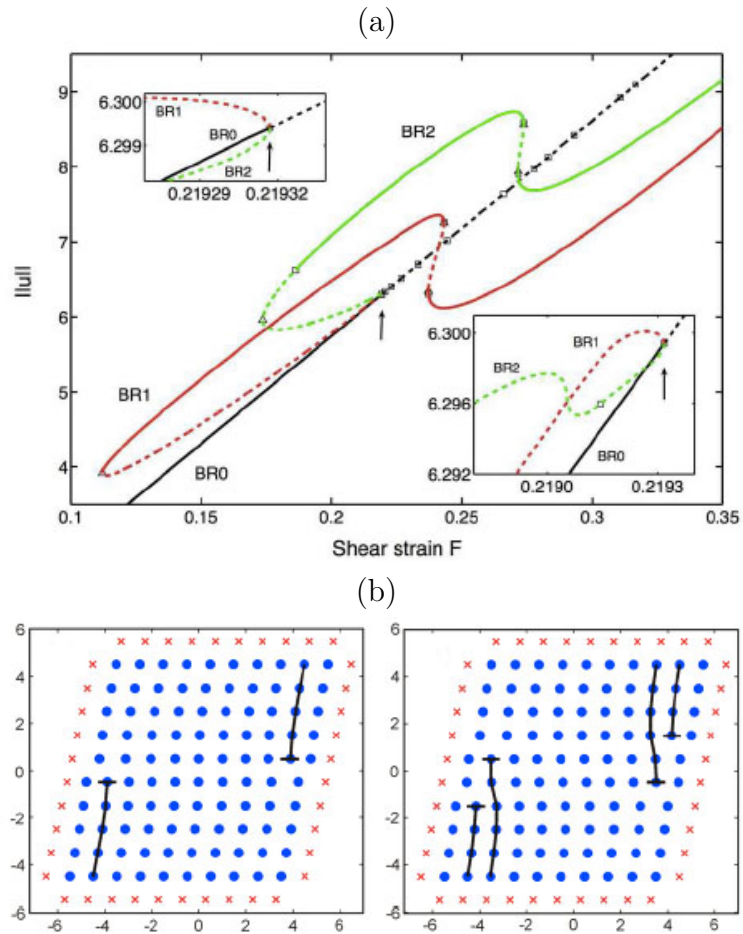


Figura 12: (a) Diagrama de bifurcación. (b) Ramas estables que coexisten, BR1 y BR2. Imágenes tomadas de [9].

7. Ciclos límite y bifurcaciones de Hopf

Las bifurcaciones en torno a puntos de equilibrio estudiadas hasta ahora persisten en sistemas dinámicos de dimensión mayor. Las variaciones de interés se concentran en un espacio unidimensional, mientras que el resto de las componentes contribuyen atracción o repulsión a ese subespacio.

En sistemas dinámicos bidimensionales (o de dimensiones mayores), aparte de puntos de equilibrio podemos tener trayectorias cerradas. En el caso del péndulo no lineal, por ejemplo, tenemos un continuo de trayectorias cerradas. Para el péndulo no lineal con fricción, tenemos trayectorias cerradas aisladas: *ciclos límite*. Los ciclos límite pueden ser:

- Estables: Atraen las trayectorias situadas fuera y dentro.
- Inestables: Repelen las trayectorias situadas fuera y dentro.
- Marginalmente estables: atraen las trayectorias de un lado (externo o interno) pero no de otro.

Son un fenómeno no lineal, no se encuentran en sistemas lineales.

Algunos criterios permiten excluir la existencia de ciclos límite:

- Los sistemas gradiente, de la forma $\mathbf{x}' = -\nabla V(\mathbf{x})$, no tienen órbitas cerradas.
- Un sistema $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ que posee un equilibrio \mathbf{x}^* y una función de Liapunov V ($V(\mathbf{x}) > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, $V(\mathbf{x}^*) = 0$, $V' < 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, no tiene ciclos límite. Todos los estados van hacia el equilibrio globalmente asintóticamente estable.

Otros criterios, como el de Poincaré-Bendixon, proporcionan criterios para la existencia de tales órbitas cerradas. Si

- R es un conjunto cerrado, acotado del plano,
- $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ es un campo vectorial continuamente diferenciable definido en un abierto que contiene R ,
- R no contiene equilibrios,
- Existe una trayectoria C contenida en R ,

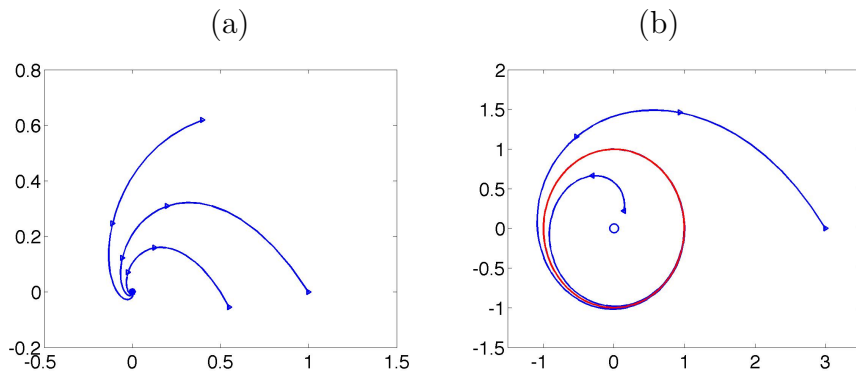


Figura 13: Bifurcación de Hopf supercrítica: (a) $\mu < 0$, (b) $\mu > 0$. El equilibrio estable pierde estabilidad dando paso a un ciclo límite estable.

entonces o C es una órbita cerrada o se aproxima en espiral a una órbita cerrada. En cualquier caso, R contiene una órbita cerrada.

Las *bifurcaciones de Hopf* proporcionan un mecanismo por el que se crea un ciclo límite a partir de un estado estacionario. Pueden ser subcríticas o supercríticas.

En una *bifurcación de Hopf supercrítica*, podemos tener sistemas físicos que evolucionan a un equilibrio de forma oscilatoria, con decaimiento en amplitud que depende de un parámetro μ . Si el decaimiento se hace más y más pequeño al acercarnos a un valor crítico, y pasa a crecer tras él, el equilibrio pierde estabilidad y a menudo acaba evolucionando a un ciclo límite.

Ejemplo 1. Consideramos en coordenadas polares el sistema:

$$r' = \mu r - r^3, \quad \theta' = \omega + br^2.$$

Aparecen 3 parámetros: μ controla la estabilidad del punto de equilibrio en el origen, ω proporciona la frecuencia de las oscilaciones, y b determina la dependencia de la frecuencia respecto a la amplitud.

Dibujar el plano de fases. Comprobar que si $\mu < 0$ tenemos un punto de equilibrio en $(0,0)$ en el cual se enroscan las demás trayectorias de forma exponencialmente estable. Si $\mu = 0$, el punto $(0,0)$ es un equilibrio más débil, con espirales que decaen algebraicamente. Si $\mu > 0$, tenemos un ciclo límite

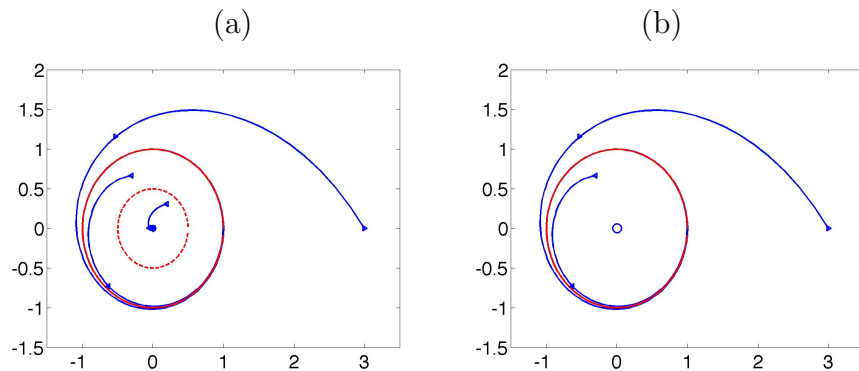


Figura 14: Bifurcación de Hopf supercrítica: (a) $\mu < 0$, (b) $\mu > 0$. Un ciclo límite inestable absorbe un equilibrio estable, haciéndolo inestable y forzando la evolución a otro ciclo límite estable.

en torno al cual se enroscan espirales desde dentro y desde fuera.

Para ver la evolución de la estabilidad lineal del punto de equilibrio, cambiamos a coordenadas cartesianas $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos(\theta) - r\theta' \sin(\theta) = \mu x - \omega y + \text{cubic terms}, \\ y' &= \omega x + \mu y + \text{cubic terms}. \end{aligned}$$

La matriz del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

tiene autovalores $\lambda = \mu \pm i\omega$. Como esperábamos, la parte real de los autovalores cambia de signo en cero.

En la *bifurcación de Hopf subcrítica*, las trayectorias han de saltar del ciclo que se desvanece a otro equilibrio estable: un punto de equilibrio, otro ciclo límite, o, en dimensiones mayores o iguales que 3, un atractor caótico. Desde un punto físico, este tipo de bifurcaciones pueden ser muy destructivas.

Ejemplo 2. Consideramos en coordenadas polares el sistema:

$$r' = \mu r + r^3 - r^5, \quad \theta' = \omega + br^2.$$

Dibujar el plano de fases. Comprobar que si $\mu < 0$ tenemos dos atractores: un ciclo límite estable y un punto fijo estable en el origen. Entre ambos hay una órbita cerrada inestable. Ver que a medida que μ crece hacia cero, este ciclo inestable se va aproximando al origen. En $\mu = 0$ este ciclo absorbe el origen, haciéndolo inestable. Si $\mu > 0$, queda solo un ciclo límite como solución estable. Las trayectorias que para valores de μ negativos quedaban cerca del origen, ahora han de precipitarse hacia el ciclo estable. Este sistema muestra histéresis: una vez las oscilaciones comienzan, no se pueden desconectar ni bajando μ a cero, persisten hasta $\mu = -1/4$, valor para el que el ciclo estable y el inestable colisionan.

La *bifurcación de Hopf degenerada* ya nos ha aparecido. Se observa en el péndulo no lineal $x'' + \mu x' + \sin(x) = 0$. Cuando μ cambia de positivo a negativo, el origen cambia de ser una espiral estable a una espiral inestable. Sin embargo, en $\mu = 0$ no tenemos una verdadera bifurcación de Hopf porque no hay ciclos límite ni para $\mu > 0$, ni para $\mu < 0$. Sin embargo, cuando $\mu = 0$ tenemos un continuo de órbitas cerradas, que no ciclos límite alrededor del origen.

Ejemplo 3. Consideramos el sistema $x' = \mu x - y + xy^2$, $y' = x + \mu y + y^3$. Estudia el tipo de bifurcación que aparece a medida que μ varía. Es subcrítica, supercrítica o degenerada?

- Comenzar estudiando el problema linealizado en el origen. Los autovalores sugieren un cambio de espiral estable a inestable en $\mu = 0$, lo que sugiere algún tipo de bifurcación.
- Transformando el sistema a polares

$$r' = \mu r + ry^2 \geq \mu r.$$

Por tanto, r crece al menos como $r_0 e^{\mu t}$ para $\mu > 0$. No hay órbitas cerradas si $\mu > 0$. La espiral inestable no puede estar rodeada por un ciclo cerrado, y la bifurcación no es supercrítica.

- Para ser degenerada, el origen debiera ser un centro si $\mu = 0$, pero r' sigue siendo positivo fuera del eje x , luego es imposible.
- Conjeturamos por eliminación que será subcrítica. Pintar el plano de fases para $\mu = -0,2$ y comprobar que un ciclo inestable rodea el punto fijo estable.

8. Sincronización

Los sistemas de reacción-difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v), \quad d > 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon g(u, v), \quad (12)$$

pueden mostrar un comportamiento excitable o auto-oscilatorio, según el único equilibrio (u^0, v^0) sea estable o inestable. Caso de existir, los ciclos límite del sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon g(u, v), \quad (13)$$

inducen *sincronización*.

Comparemos el comportamiento de los sistemas de reacción-difusión de tipo FitzHugh-Nagumo para impulsos nerviosos, en los que:

$$f(u, v) = u(2 - u)(u - a) - v, \quad g(u, v) = u - bv, \quad (14)$$

con los sistemas de tipo Morris-Lecar para fibras musculares:

$$f(u, v) = 2v(u+0,7)+0,5(u+0,5)+0,5 \left[1 + \tanh\left(\frac{u+0,01}{0,15}\right) \right] (u-1) - 2I \quad (15)$$

$$g(u, v) = \cosh\left(\frac{u+0,01}{0,29}\right) \left[1 + \tanh\left(\frac{u+0,01}{0,145}\right) - 2v \right].$$

El comportamiento cualitativo de las soluciones depende en gran medida de los equilibrios y su estabilidad. La figura ?? representa algunos casos posibles. Para el sistema FitzHugh-Nagumo, si fijamos a , vemos que conforme b crece pasamos de una situación en la que tenemos un equilibrio estable (dinámica excitable, pulsos) a una situación en la que tenemos dos equilibrios estables, más uno inestable (dinámica biestable, frentes). Para el sistema de Morris-Lecar, vemos que conforme I crece pasamos de una situación en la que tenemos un equilibrio estable en la primera rama de la cúbica (dinámica excitable, pulsos) a una situación en la que tenemos un equilibrio inestable en la rama intermedia (dinámica oscilatoria, sincronización).

Ejercicio 1. Dibujar el plano de fases para el sistema (13) con fuentes (15) cuando $I = 0,375$, $\varepsilon = 0,01$. Identificar el ciclo límite estable $(U(t), V(t))$ y el equilibrio inestable (u^0, v^0) .

Ejercicio 2. Consideramos el sistema de reacción-difusión (4)-(5) fuentes (15) cuando $I = 0,375$, $\varepsilon = 0,01$, $d = 0,5$, with zero Neumann boundary conditions. Discretizamos el sistema en espacio con paso $h = 1$. Comparar el comportamiento a medida que el tiempo crece:

- Tomando datos iniciales $u_n(0) = U(n/2)$, $v_n(0) = V(n/2)$, donde $(U(t), V(t))$ definen el perfil del ciclo límite. Se generan trenes de onda de periodo $T/2$ y velocidad 2, como en la Figura 15(b).
- Tomando datos iniciales $u_{2n}(0) = U(\tau)$, $v_{2n}(0) = V(\tau)$, y $u_{2n+1}(0) = U(\tau + 1)$, $v_{2n+1}(0) = V(\tau + 1)$, pares e impares en la misma posición. Para tiempos muy largos (~ 6000) todas las trayectorias de todos los puntos han confluído en el perfil del ciclo límite, véase la Figura 15(a). Persiste este comportamiento si cambiamos los valores iniciales por otros dos pares de constantes?

En dimensiones mayores, por ejemplo, sistemas bidimensionales como hojas de grafeno, se pueden formar dominios espaciales que evolucionan de forma coordinada [11].

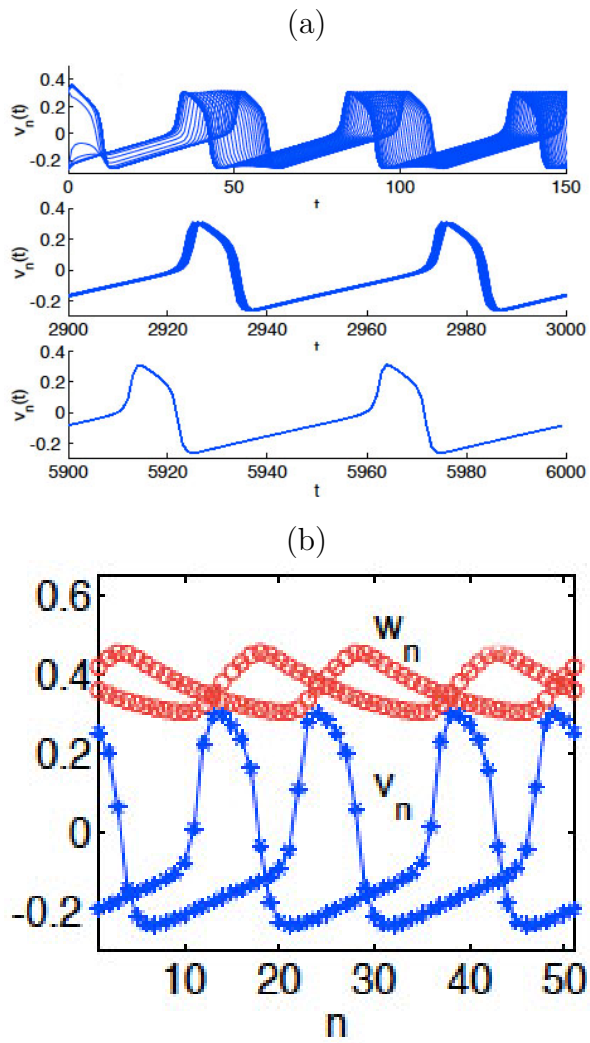


Figura 15: (a) Sincronización de trayectorias. (b) Trenes de onda. Imágenes tomadas de [10].

Referencias

- [1] S.H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering, Studies in nonlinearity, Westview Press, 2000
- [2] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Física Teórica, Vol 1: Mecánica, Reverté S.A., 1970
- [3] J. Smöller, Shock waves and reaction - diffusion equations, Springer, 1994
- [4] A. Carpio, L.L. Bonilla, Depinning transitions in discrete reaction-diffusion equations, SIAM Journal on Applied Mathematics, 63 (3), 1056-1082, 2003
- [5] A. Carpio, L.L. Bonilla, G. Dell'Acqua, Motion of wave fronts in semiconductor superlattices, Physical Review E 64 (3), 036204, 2001
- [6] A.H. Nayfeh, Perturbation Methods, Wiley 2004.
- [7] A. C. Scott, The electrophysics of a nerve fiber, Review of Modern Physics, 47, 487-, 1975
- [8] A. Carpio, L.L. Bonilla, Pulse propagation in discrete systems of coupled excitable cells, SIAM Journal on Applied Mathematics, 63 (2), 619-635, 2003
- [9] I. Plans, A. Carpio, L.L. Bonilla, Homogeneous nucleation of dislocations as bifurcations in a periodized discrete elasticity model, EPL (Europhysics Letters), 81 (3), 36001, 2008
- [10] A. Carpio, Wave trains, self-oscillations and synchronization in discrete media, Physica D: Nonlinear Phenomena, 207, 117-136, 2005
- [11] L.L. Bonilla, A. Carpio, Model of ripples in graphene, Physical Review B 86 (19), 195402, 2012