

SOBRE LOS CONJUNTOS INTUICIONISTAS DE ATANASSOV

D. Gómez

E.U. Estadística
Universidad Complutense
Madrid 28040
dagomez@estad.ucm.es

J. Montero

Fac.CC. Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid 28040
javier.montero@mat-ucm.es

H. Bustince

Depto. Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
Pamplona 31006
bustince@unavarra.es

Resumen

En este trabajo se hace hincapié en el modelo de clasificación subyacente dentro del marco de los Conjuntos Difusos Intuicionistas de Atanassov para justificar que la coincidencia formal con otros modelos sólo se verifica en determinado contexto, y que fuera de este contexto puede estar justificado su desarrollo. En concreto, dicho modelo se plantea como un caso muy particular de los sistemas de clasificación difusa propuestos por Amo et al., permitiendo además una interpretación muy específica del modelo de Atanassov, que creemos fiel a su intuición inicial.

Palabras Clave: Conjuntos Intuicionistas de Atanassov, Sistemas de Clasificación Difusa.

1 INTRODUCCIÓN

Desde que Zadeh [21] introdujo los conjuntos difusos, un buen número de modelos y teorías han sido propuestos como posibles modelos para la incertidumbre. En este sentido, quizá un primer logro de su trabajo ha sido romper el monopolio de la Teoría de la Probabilidad como única posibilidad de modelizar la incertidumbre: hay varios tipos de incertidumbre, y éstos pueden y deben ser formalmente caracterizados (ver, de todas maneras, [16]). Una primera generalización inmediata fueron los *L-Fuzzy sets* de Goguen [13], y más tarde vinieron los *Intuitionistic Fuzzy Sets* de Atanassov, AIFS [5]. Los AIFS han sufrido una fuerte controversia, tanto por la propia denominación que Atanassov adoptó como por la identificación real de su propuesta con otros modelos ya existentes (ver, por ejemplo, [9, 11]).

Baste recordar aquí que un L-Fuzzy Set de Goguen [13] se caracteriza a través de una aplicación sobre cierto universo X de objetos

$$\mu : X \longrightarrow L$$

donde (L, \leq_L, N) es un retículo completo (toda familia de elementos de L tiene un ínfimo y un supremo), dotado de un operador N involutivo que invierte el orden de sus elementos.

En concreto, un Conjunto Difuso Intervalo Valorado, abreviadamente IVFS (*Interval-Valued Fuzzy Set*, [18, 20]) se define como una aplicación sobre un universo X de objetos de modo que su función de pertenencia toma la forma

$$\mu : X \longrightarrow \text{Int}([0, 1])$$

donde $\text{Int}([0, 1])$ es el conjunto de todos los subintervalos cerrados en $[0, 1]$.

Los AIFS fueron efectivamente introducidos por Atanassov [5] como una generalización de los Conjuntos Difusos de Zadeh [21]. Así, un AIFS ordinario se puede modelizar como una aplicación

$$\mu^A : X \longrightarrow [0, 1]^2$$

para una familia de objetos X , siendo la primera coordenada $\mu_+^A(x)$, que representa el grado en que $x \in A$, y la segunda coordenada $\mu_-^A(x)$ el grado en que $x \notin A$. La restricción

$$\mu_+^A(x) + \mu_-^A(x) \leq 1$$

se suele imponer por definición, de modo que $\mu_0^A(x) = 1 - \mu_+^A(x) - \mu_-^A(x)$ puede interpretarse como el grado de *no-determinación* del objeto x con respecto al AIFS (ver también [7]).

Pero resulta que los AIFS coinciden formalmente con los IVFS

En este artículo vamos a presentar a los AIFS como un caso particular de sistema de clasificación en el sentido de Amo *et al.* [2], donde el grado de verificación

se distribuye entre tres clases, y que este enfoque es generalizable a otros sistemas de clasificación más complejos donde aquella identificación no es ya directa (ver también [3, 1]). Nótese en concreto que un *AIFS* define una partición difusa en el sentido de Ruspini [17] con tres clases $(\mu_{A^+}, \mu_{A^-}, \mu_{A^0})$, puesto que

$$\mu_{A^+}(x) + \mu_{A^-}(x) + \mu_{A^0}(x) = 1$$

para todo $x \in X$. Pero ni Ruspini [17] ni Atanassov [5] hacen referencia alguna a la posible existencia de una estructura entre estas clases, ni a las operaciones entre ellas (en el caso de [2] no se impone a priori que la suma o agregación de los grados de pertenencia entre las diferentes clases tenga que ser necesariamente la unidad, ni menor que la unidad, ni mayor que la unidad).

2 META FUZZY SETS

Como ya puntualizaron los autores en [15], muchos de los conceptos que aparecen en la Teoría de Conjuntos Difusos pueden explicarse dentro de un sistema de clasificación donde se asignan diferentes grados de pertenencia a una serie de clases dotadas de una cierta estructura (por ejemplo, de proximidad). Por supuesto, esos grados de pertenencia no tienen necesariamente que sumar la unidad a lo largo de todas las clases, como impone Ruspini [17]: se trata ésta de una propiedad quizá deseable en abstracto (y no siempre), pero que desde luego sólo puede entenderse como producto final de un largo proceso de aprendizaje acerca del mejor conjunto de clases (si es que nuestro objetivo es definir una partición de Ruspini, que no siempre lo es).

Pero es esa estructura asociada a la familia de clases la que da un significado concreto a las operaciones (conjunciones, disyunciones, negaciones,...) que se pretenden introducir, algunas de las cuales pueden no tener una justificación en base a esa estructura, y por tanto no ser operaciones lícitas (ver [15]). Esta cuestión del papel de la estructura subyace en el planteamiento de Goguen [13], una vez que se plantea que el conjunto de valoración de los grados de verificación no tiene por qué ser el intervalo real, como asumió inicialmente Zadeh [21].

Así, por ejemplo, puede que no tenga un significado directo la agregación de clases no conexas, y si los cálculos han de realizarse sobre un grafo de proximidades, quizá los modelos secuenciales de [4, 10], o una generalización suya, puedan jugar un papel esencial (la estructura que define la familia de clases puede marcar el orden en que la información puede ser agregada).

En base a los argumentos anteriores, proponemos la

siguiente definición como el modelo que debe centrar buena parte de nuestras aplicaciones.

DEFINICIÓN.- Sea

$$\mu_A : X \longrightarrow V$$

una función donde X es una familia de objetos y cada elemento de V es un conjunto difuso ordinario [21]

$$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1]$$

siendo \mathcal{C} una familia de clases. Diremos que A es un *Meta Fuzzy Set* si y sólo si existe un grafo (V, E) (siendo V el conjunto de vertices y E el conjunto de relaciones no dirigidas entre ellos), una negación N [19] y una regla de agregación [10]

$$\{\Phi_n : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1]\}_n$$

tal que sean consistentes con dicho digrafo (es decir, que el resultado de la agregación sea el mismo independientemente de la secuencia de cálculo a lo largo del digrafo).

Evidentemente, esta consistencia limita el campo de estructuras posibles.

Así, caso de que el cardinal de \mathcal{C} sea c finito, a cada objeto $x \in X$ se le está asignando un vector de grados de pertenencia de dimensión c , y cada coordenada indica el grado de pertenencia de ese objeto a una clase concreta. Estos *Meta Fuzzy Sets* (MFS) son por tanto una clases específica de Conjuntos Difusos de Tipo 2, donde cada componente tiene un significado concreto (y la familia de clases está dotada de una cierta estructura).

De esta manera, una vez determinada la estructura (elementos, grafo, negación, regla de agregación y otros operadores asociados), la información contenida en un camino debe ser complementaria a la información contenida en el resto de clases, siempre que éstas definan otro camino. Muchos problemas de aplicación de la Teoría de conjuntos difusos son casos particulares de esta estructura.

EJEMPLO 1.- Una estructura muy estándar es la formada por cuatro valores de verdad:

- “Verdadero” (T),
- “Falsedad” (F),
- “Ignorancia” (I) y
- “Contradicción” (C)

Pero el sistema en cuanto tal no queda descrito con precisión si no se incorpora la relación entre estas

clases o valores de verdad, que desde luego no es unívoca. Por una parte, podría asumirse (es lo que parece hacerse por defecto) que todas las clases están relacionadas entre sí, de acuerdo a la siguiente figura.

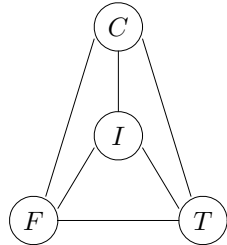


Figura 1: Grafo con cuatro valores de verdad cruzados

Naturalmente pueden aparecer entonces ciertas imposiciones para las reglas de agregación, como por ejemplo las siguientes:

- $\Phi_2(\mu_I, \mu_F) = N(\Phi_2(\mu_C, \mu_T))$
- $\Phi_2(\mu_I, \mu_T) = n(\Phi_2(\mu_F, \mu_C))$
- $\Phi_3(\mu_I, \mu_F, \mu_C) = n(\mu_T)$
- $\Phi_3(\mu_T, \mu_C, \mu_F) = n(\mu_I)$

Y desde luego que existen muchas reglas de agregación verificando dichas ecuaciones.

Pero podría justificarse alternatively la siguiente estructura alternativa, donde la relación entre la verdad y la falsedad no es directa, sino a través de la ignorancia o la contradicción.

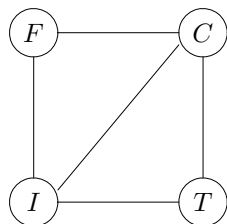


Figura 2: Grafo alternativo con cuatro valores

Así, a partir de unas asignaciones de los grados de pertenencia a cada valor de verdad, y por supuesto teniendo en cuenta una estructura concreta, podremos o no podremos tratar de responder a determinadas preguntas, en función claro está de las operaciones que

hayamos escogido (en la segunda estructura, por ejemplo, no es lícita la pregunta “cuál es el grado en que la afirmación es cierta o falsa?”)

EJEMPLO 2.- Otra estructura muy común es la basada en 5 valores lingüísticos de coincidencia, muy frecuente en las encuestas:

- “Ninguna” (N),
- “Poca” (P),
- “Intermedia” (A),
- “Mucha” (V) y
- “Completa” (C).

En este caso las cinco clases

$$\mathcal{C} = \{N, P, A, V, C\}$$

definen una estructura linealmente ordenada, por lo que no es lícita la agregación de clases no conexas (no tiene sentido preguntarnos hasta qué punto se está “nada o completamente” de acuerdo con una frase).

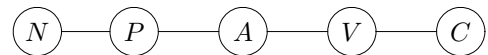


Figura 3: Escala lineal de 5 valores de coincidencia

EJEMPLO 3.- En la lógica trivalente de Lukasiewicz, tres son los valores de verdad, con una clase intermedia de “Posibilidad” (P) que se sitúa entre lo “Verdadero” (T) y la “Falsedad” (F). Esta situación parece sugerir una estructura linealmente ordenada como en el ejemplo anterior.



Figura 4: Sistema de evaluación de Lukasiewicz

Sin embargo, si tratamos de introducir el aprendizaje en esta estructura, el punto de partida (ignorancia, desconocimiento) habría de ser asignado a la Posibilidad con un grado de pertenencia máximo, para a partir de ahí iniciar una transferencia hacia los dos otros estados (el grafo sería entonces un digrafo, marcando de manera explícita las posibles disgregaciones y agregaciones). Este modelo no sería entonces exactamente

igual que el del ejemplo anterior, donde el punto de partida para el aprendizaje debiera ser uno de los dos extremos, para a partir de ese punto iniciar las transferencias de los grados de pertenencia. No deja de tener esta cuestión una cierta analogía con el problema de las distribuciones *a priori* en el contexto Bayesiano de la Probabilidad.

En nuestro contexto, quizá fuese más correcto que la ignorancia (ausencia total o parcial de información) quedase reflejada en un cuarto estado adicional. Una estructura razonable sería introducir este estado de ignorancia (I) conectándolo únicamente con el estado de Posibilidad (de modo que se accede a los dos valores extremos de Verdadero o Falsedad reconociendo previamente su Posibilidad).

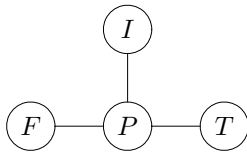


Figura 5: Lukaszewicz con Ignorancia

3 EL MODELO DE ATANASSOV

Observar que el modelo de Atanassov [7] no hace referencia alguna a la estructura existente entre sus tres clases:

- “Verdadero” (T),
- “Falsedad” (F) e
- “Indeterminación” (N).

Esta omisión sugiere a nuestro entender que está asumiendo que todas las clases están conectadas entre sí.

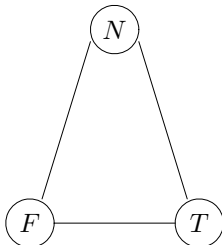


Figura 6: Sistema de Atanassov cruzado

Pero si hacemos caso al significado que Atanassov [5, 7] le da al estado de “Indeterminación”, este estado parece jugar el papel de la “Ignorancia” en ejemplos anteriores. En este caso quizá la estructura más fiel al pensamiento de Atanassov sería la siguiente, donde tiene sentido calcular el grado de “Determinación” como la negación de la “Indeterminación”, pero no como la agregación entre lo “Verdadero” y la “Falsedad”.

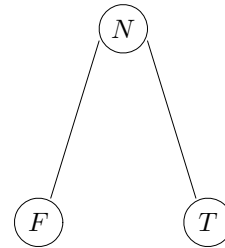


Figura 7: Sistema de Atanassov alternativo

Adoptamos esta representación para remarcar que no se trata de un orden lineal, donde la “Indeterminación” hace el papel de la “Posibilidad” de Lukaszewicz en la figura 4.



Figura 8: Sistema de Atanassov lineal

Hay que hacer notar que todavía Atanassov [8] parece utilizar representaciones que sugieren esta estructura lineal. Pero el sentido en el que la “Posibilidad” está entre lo “Verdadero” y la “Falsedad” no es el sentido en el que la “Indeterminación” está entre los esos dos valores de verdad: la “Posibilidad” está a medio camino entre lo “Verdadero” y la “Falsedad”, por lo que la estructura lineal parece correcta; pero la “Indeterminación” no está a medio camino y la estructura no es lineal (el grafo que caracteriza la estructura es en el caso de Atanassov un digrafo, no linealmente ordenado en nuestra opinión, pues el caso linealmente ordenado correspondería al modelo de Lukaszewicz).

4 COMENTARIOS FINALES

La tesis que planteamos en este trabajo se resume en lo siguiente: si el modelo de Atanassov es visto como un modelo de clasificación, la generalización que proponemos mantiene sus planteamientos intuitivos, y la

asimilación formal con otros modelos queda limitada a contextos concretos. Efectivamente, un intervalo en la recta real introduce una partición de la recta en tres regiones: el intervalo en cuestión, el intervalo anterior y el intervalo posterior (es decir, tres clases como propone Atanassov, por lo que hubiese sido de esperar el isomorfismo entre los dos modelos). Los Meta Fuzzy Sets que proponemos permiten superar la paradoja de tener un único modelo formal con diferentes aproximaciones. Y es que la intuición de Atanassov no genera un modelo diferenciado si nos quedamos en una estructura tan básica como la que él propone, pero éste no será el caso en otras estructuras más complejas (ver [6]).

Además, la familia de conjuntos difusos que generamos dentro de la familia de Meta Fuzzy Sets puede cubrir previsiblemente una buena proporción de los casos prácticos de mayor interés.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con financiación del proyecto *MTM2005 – 08982 – C04 – 01* del Plan de Promoción General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia, y dentro de la Red Temática Nacional de Procesos de Toma de Decisiones, Modelado y Agregación de Preferencias *REDEMAP-II*, TIN2004-21700-E.

Referencias

- [1] A. Amo, D. Gómez, J. Montero and G. Biging (2001): *Relevance and redundancy in fuzzy classification systems*. *Mathware and Soft Computing* 8:203–216.
- [2] A. Amo, J. Montero, G. Biging and V. Cutello: Fuzzy classification systems. *European Journal of Operational Research* 156:459–507 (2004).
- [3] A. Amo, J. Montero and V. Cutello: On the principles of fuzzy classification. *Proceedings NAFIPS Conference*, IEEE Press, Piscataway, NJ; pp. 675–679 (1999).
- [4] A. Amo, J. Montero, and E. Molina: Representation of consistent recursive rules. *European Journal of Operational Research* 130:29–53 (2001).
- [5] K.T. Atanassov: Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems* 20:87–96 (1986).
- [6] K.T. Atanassov, ed.: *Generalized nets*, World Scientific (1991).
- [7] K.T. Atanassov: *Intuitionistic Fuzzy sets*, Physica-Verlag (1999).
- [8] K.T. Atanassov: Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade paper “Terminological difficulties in fuzzy set theory-The case of Intuitionistic Fuzzy Sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 156:496–499 (2005).
- [9] H. Bustince and P. Burillo: Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 79:403–405 (1996).
- [10] V. Cutello and J. Montero: Recursive connective rules. *International Journal of Intelligent Systems* 14:3–20 (1999).
- [11] G. Deschrijver and E.E. Kerre: On the relationship between some extensions of fuzzy sets theory. *Fuzzy Sets and Systems* 133:227–235 (2003).
- [12] D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade: Terminological difficulties in fuzzy set theory-The case of “Intuitionistic Fuzzy Sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 156:485–491 (2005).
- [13] J. Goguen: L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 18:145–174 (1967).
- [14] P. Grzegorzewski and E. Mrówka: Some notes on (Atanassov’s) intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 156:492–495 (2005).
- [15] J. Montero and D. Gómez: Preferences, classification and intuitionistic fuzzy sets. *Proceedings EUSFLAT’03*, University of Applied Sciences, Zittau; pp. 187–192 (2003).
- [16] J. Montero and M. Mendel: Crisp acts, fuzzy decisions. In S. Barro *et al.*, eds.: *Advances in Fuzzy Logic*, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela; pp. 219–238 (1998).
- [17] E.H. Ruspini: A new approach to clustering. *Information and Control* 15:22–32 (1969).
- [18] R. Sambuc: Fonctions Φ -floues, application à l’aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne. *Ph.D. Thesis*, University of Marseille (1975).
- [19] E. Trillas: Sobre funciones de negación en la teoría de los subconjuntos difusos. *Stochastica* III-1:47–59, 1979. English version in S. Barro *et al.*, eds.: *Advances of Fuzzy Logic*, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela; pp. 31–43 (1998).
- [20] I.B. Türksen: Interval valued fuzzy sets based on normal forms. *Fuzzy Sets and Systems* 20:191–210 (1986).
- [21] L.A. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and control* 8:338–353 (1965).