

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física Teórica



TESIS DOCTORAL

**Contribuciones al estudio de fundamento dinámico de la
mecánica estadística**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Rafael de la Llave Canosa

DIRECTOR:

Oscar Lanford

Madrid, 2015

Rafael de la Llave Canosa

TP
1985
029



* 5 3 0 9 8 6 7 9 1 X *
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

X-53-300925-5

CONTRIBUCIONES A LA JUSTIFICACION DINAMICA
DE LA MECANICA ESTADISTICA

Departamento de Física Teórica
Facultad de Ciencias Física
Universidad Complutense de Madrid
1985



Colección Tesis Doctorales. Nº 29/85

© Rafael de la Llave Canosa
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 28015 Madrid
Madrid, 1985
Xerox 9400 X 721
Depósito Legal: M-4246-1985

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO DE FUNDAMENTO DINAMICO
DE LA MECANICA ESTADISTICA

Memoria que presenta:
RAFAEL DE LA LLAVE CANOSA.
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas
Dirigida por el Profesor
OSCAR LANFORD.



CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO DEL FUNDAMENTO DINAMICO
DE LA MECANICA ESTADISTICA

Tesis Doctoral de RAFAEL DE LA LLAVE CANOSA

AGRADECIMIENTOS

El material incluido en esta tesis, es parte de lo que pude aprender durante los cursos 79-80, 80-81, 81-82 y primer semestre del 82.

Durante ese tiempo, he estado ligado al departamento de Matemáticas de la Universidad de Princeton, aunque muchas cosas las he aprendido en otras Universidades, como Austin en Texas, Rutgers en New Jersey, la Escuela de verano de Les Houches, Berkeley en California y Minnesota. Así como en visitas cortas a otros sitios.

A lo largo de todo este tiempo he tenido la oportunidad de recibir la guía de Arthur Wightman, John Mather, Sheldon Goldstein, Elliot Lieb, Oscar Landford y Giovanni Gallavotti.

Muchas veces es más útil una palabra de ánimo que un consejo científico y todos ellos fueron extremadamente generosos en ambos.

Por eso tengo una deuda muy especial con mis colegas de Princeton Javier Cabrera, Manuel Gadella, Antonio Sánchez, Danny Goroff, Alan Sokal y Robert Mc Kay, con quienes he discutido de todo lo discutible y con las personas que desde España me animaron a marcharme, notablemente Alfonso Casal, Antonio Córdoba y Antonio Rañada.

....

....

Un lugar especial merece Juan Usón que ha entrado en todas las categorías anteriores -y en algunas otras-.

También querría agradecer a mi familia su apoyo en muchas cosas, de las cuales la última, aunque no la más importante, es la mecanografía de esta tesis.

INDICECONTRIBUCIONES AL ESTUDIO DEL FUNDAMENTO DINAMICO DE LA
MECANICA ESTADISTICA

Agradecimientos.....	ii
Indice.....	iv
Capítulo 1; INTRODUCCION A LA TEORIA ERGODICA	
I Prefacio.....	2
II El formalismo y sus interpretaciones.....	3
III Los argumentos fundamentales de la teoría blanda.....	18
IV Algún método de análisis duro.....	46
V Bibliografía.....	63
Capítulo 2, LA TEORIA DE PRIGOGINE-MISRA-COURBAGE	
I Prefacio.....	68
II Mecánica Estadística y Dinámica.....	70
III La teoría de Prigogine-Misra-Courbage.....	82
IV Bibliografía.....	101
Capítulo 3, EL TEOREMA DE SIEGEL	
I Prefacio.....	105
II Los resultados clásicos.....	108
III La prueba según el método de Hermann.....	121
IV Bibliografía.....	129
Conclusiones.....	131



Capítulo 1 INTRODUCCION A LA TEORIA ERGODICA

- I Prefacio
- II El formalismo y sus interpretaciones
 - *Sistemas dinámicos clásicos
 - *Procesos estocásticos estacionarios
 - *Mecánica estadística de sistemas unidimensionales.)
 - *Comentarios
- III Los argumentos fundamentales de la teoría blanda
 - *El teorema de Krylov-Bogoliugov
 - *El teorema de recurrencia de Poincaré
 - *El teorema ergódico de Von Neuman
 - *El teorema ergódico de G.D. Birkhoff
 - *Entropía de Kolmogorov-Sinai
 - *Sistemas K
- IV Algún método de análisis duro
 - *Resumen
 - *Dinámica simbólica
 - *Hiperbolicidad y particiones de Markov
- V Bibliografía

I. PREFACIO

Este capítulo tiene un carácter introductorio. La inmensa mayoría del material en él se encuentra en la literatura probado y discutido en una manera casi idéntica a la dada aquí.

El objetivo perseguido al incluirlo no es sólo hacer que la tesis sea esencialmente autocontenida, sino también clarificar un punto de vista sobre problemas dinámicos; el énfasis es, por tanto, en seleccionar las ideas fundamentales y sus relaciones, mostrar sólo el esqueleto de la teoría y dar referencias a los lugares donde pueden encontrarse desarrollos más completos y precisos.

En cuanto al nivel de prerequisites, consistentemente he utilizado sin referir a la literatura los resultados que aparecen, bien en el volumen 1 de los libros de M. Reed-B.Simon, en el libro W. Rudin de Análisis Real y Complejo, o en el libro de Halmos de teoría de la medida; todos los demás hechos están referidos en la bibliografía.

II El formalismo y sus interpretaciones

La teoría ergódica puede definirse (1) como el estudio de las propiedades estadísticas de los sistemas determinísticos.

Sus métodos son esencialmente de dos tipos: blandos (teoría abstracta de la medida y análisis funcional) y duros (propiedades geométricas, topología, etc.)

Mi opinión es que la teoría blanda tiene un núcleo bien definido consistente en tres teoremas (de recurrencia de H. Poincaré, ergódico de J. Von Neuman y ergódico de G.D. Birkhoff) y los métodos ligados al concepto de entropía.

La situación de la teoría dura es menos estructurada. Hay muchos métodos; pero de aplicabilidad limitada la mayoría. Sin embargo, los métodos ligados al concepto de hiperbolicidad permiten desarrollar una teoría sistemática de una gran amplitud, riqueza y belleza. Sus resultados y técnicas son básicos para otros métodos. Además, encajan muy bien con los métodos duros. Otro aspecto interesante es que recientemente se han descubierto nuevas aplicaciones, con lo que -y esto es extraño en ciencia- es una teoría coherente, que todavía tiene puntos abiertos. Por ello, es el único método duro que voy a describir en este capítulo introductorio. En el tercer capítulo se explicará otro método, que creo también es muy importante: la teoría de perturbaciones a la K.A.M.; sin embargo, este capítulo tiene un carácter menos expositivo, pues

;

el objetivo es presentar resultados originales y, las explicaciones generales que se dan son más personales y de aceptación menos generalizada.

Una observación que es necesario tener en cuenta es que, en general, los métodos blandos, por sí solos, a pesar de -quizá a causa de- la gran abstracción que tienen y que los hacen particularmente fascinantes, generalmente, no resuelven nada. Son utilísimos para proporcionar, digamos, la estrategia del análisis, pero con gran frecuencia, en contra de lo que se pensaba en los comienzos de la teoría, las dificultades reales son tácticas.

Un aspecto ciertamente espinoso de esta teoría, es el de su interpretación física. Como todo el mundo sabe, esta teoría se introdujo como fundamentos de la termodinámica. Desgraciadamente, cuando hubo las controversias fundacionales sobre la mecánica estadística, había elementos de información muy importantes que faltaban, (notablemente, las transiciones de fase y el límite termodinámico). Creo que el trabajo iniciado esencialmente por Ruelle y colaboradores en los 50 ha clarificado aspectos esenciales aunque, de modo sorprendente (y exasperante) ha sido ignorado por todos los escritores de libros de texto. Más aún, los libros de texto, en general, todavía vacilan en el formalismo a aplicar.

El teorema de recurrencia de Poincaré, se presenta como una paradoja, dándole una interpretación que ya Poincaré dudaba y que Gibbs y Einstein eliminaron. Desgraciadamente esa dificultad conceptual aparece como un obstáculo -inclu-

so para hacer cálculos- en mecánica estadística del no equilibrio.

Voy a tratar de mantenerme alejado de esas polémicas hasta el segundo capítulo, en el que se aplicarán las técnicas desarrolladas en la introducción a un análisis de una teoría física -siendo honestos, habría que decir que está abandonada incluso por sus proponentes, la única justificación de incluirla en la tesis es que el análisis es original y que jugó un cierto papel en dicho abandono. Aún así, la encuentro extremadamente ingeniosa-.

El campo, ciertamente, se presta a discusiones filosóficas. Para poder estudiar propiedades estadísticas de problemas deterministas, tendremos que construir un formalismo que englobe a ambos. Dada la antítesis metafísica entre determinismo y caoticidad, los experimentos y las matemáticas son susceptibles de discusión ontológica y de arrojar luz sobre problemas existenciales (2). El autor, aunque no totalmente opuesto a esas discusiones, prefiere no verse envuelto en ellas en público. (*) (**)

Notas (*)

Sin embargo, le gustaría al autor relatar la siguiente anécdota: Un día en una fiesta, fuera de su círculo de amistades, conoció casualmente, a un hombre de negocios, calvinista convencido y, como tal, profundamente atormentado por el problema del determinismo. Tras jugar con una calculadora iterando $f(x)=1-4x^2$, el autor le convenció de que

;

.../

Los objetos que vamos a estar considerando son los SISTEMAS DINAMICOS ABSTRACTOS, es decir la siguiente estructura:

Un espacio Ω
 Una σ -álgebra \mathcal{B} en Ω
 Una medida μ en \mathcal{B} , $\mu(\Omega) = 1$
 Una transformación medible que preserva μ
 es decir $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$

Lo que vamos a investigar son los modos de establecer relaciones entre propiedades de T y de μ . Muchas veces, el dato será T , y el objetivo será conocer propiedades de las μ 's. Otras veces, será al revés, μ será dada y nos preguntaremos por propiedades de las T que la preservan.

Se comprende que las técnicas serán semejantes

.../(*) eso era indistinguible empíricamente—si no se hacían los experimentos adecuados, claro—de un proceso aleatorio. Unos días más tarde, el autor recibió una nota de agradecimiento de este conocido casual diciendo que esa charla había puesto fin a años de torturas morales. Aunque el autor no entiende muy bien los argumentos envueltos, ciertamente, quedó satisfecho y orgulloso.

Advertencia

Aunque no es necesario en todos los argumentos, supondré en algunos de ellos que Ω es compacto y normal, \mathcal{B} es σ -álgebra de Borel (de modo que las medidas son el dual de las funciones continuas) y que Ω es separable de modo que $C^0(\Omega)$ es también separable.

Desgraciadamente, hay una sutileza que hay que mencionar. En algunos argumentos nos gustaría que nuestras medidas fuesen completas, es decir, que los subconjuntos de medida cero, sean también de medida cero. Si tenemos fija una medida, nada más sencillo que incluir en \mathcal{B} todos los subconjuntos de conjuntos de medida cero.

Si hablamos de dos o más medidas, es muy posible que no nos interese tener que definir la segunda medida en todos los conjuntos nulos de la primera.

Una de las ventajas de utilizar sistemáticamente el teorema de Riesz en la construcción de medidas es que esta di-

(**) Como punto relacionado le gustaría comentar el hecho que está emergiendo un nuevo "paradigma" precisamente el siguiente "leyes de movimiento sencillas pueden dar origen a movimientos muy complicados" curiosamente, ya era conocido por H. Poincaré y G.D. Birkhoff, pero fué sistemáticamente ignorado por los físicos que sólo ponían en libros aquellas ecuaciones que podían resolver exactamente y, tendían a creerse que eran todas.

Desde luego, la emergencia de este paradigma no se ajusta
.../

ficultad queda superada (aparte, por supuesto, de las más obvias de facilidad en las construcciones y que la interpretación física es más intuitiva).

Una interpretación que es posible tener es la siguiente:

SISTEMA DINAMICO CLASICO

Ω es el espacio de las fases de un sistema mecánico (o una superficie de energía constante)

\mathcal{B} la σ -álgebra usual de conjuntos Borel (completada)

μ la medida de Liouville $dx = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ (o su restricción a la superficie de energía constante)

T la correspondencia que a cada punto asocia su imagen tras un segundo de evolución hamiltoniana.

El teorema de Liouville, garantiza, en este caso, que la medida se conserva.

...(**) tan ni a los esquemas de Kolmogorov ni a los de Lakatos ni a ninguno que el autor conozca que haya sido propuesto.

Es de notar que aquí hay otra propiedad importante:

μ es una medida de Borel, y asocia medida positiva a conjuntos abiertos.

Es costumbre decir entonces que es una medida topológica.

Dentro incluso de la mecánica, caben otras interpretaciones, por ejemplo Ω una superficie de sección y μ la medida inducida por la medida de Liouville y el flujo.

Más interesantes son, sin embargo, las siguientes interpretaciones

PROCESOS ESTOCÁSTICOS ESTACIONARIOS

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias que toman valores en un cierto conjunto (digamos $\{-1, +1\}$). $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$

Podemos pensar en X_i como el resultado de realizar un cierto experimento aleatorio en el tiempo i . (Para simplificar supondremos que hay sólo dos posibles resultados de cada experimento, como llamarlos cara o cruz da un cierto aire vicioso y, además no se traduce bien al inglés, los denotaremos por $+1$ y -1)

Es natural, considerar el espacio de las realizaciones del proceso

$$\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$$

Consideramos el proceso bien caracterizado cuando podemos definir las "funciones de distribución finito dimensionales". Es decir

$$P_{\mathbb{R}} \{ X_N = i_N, \dots, X_M = i_M \} \quad i_j = \pm 1$$

de modo que satisfagan las condiciones de compatibilidad obvias.

No es difícil probar en este caso que hay una única medida definida en la menor σ -álgebra conteniendo todos los conjuntos cilíndricos (es decir, aquellos obtenidos especificando un número finito de coordenadas y dejando libres las demás).

Es de notar que, en contra de la intuición elemental este tipo de problemas es no trivial (ver un ejemplo en (3) página 25).

Tales fenómenos no son simplemente una patología matemática y, tienen profundas consecuencias físicas -sobre todo en la siguiente interpretación que discutiremos-.

Así que daremos una prueba completa en este caso.

La prueba está adaptada de (4) y es un argumento muy útil, aunque no el más económico en este caso sencillo. En otros casos, será indispensable un argumento de este tipo.

Prueba de la extensión

Observamos que $\{-1, +1\}$ es compacto con la topología discreta.

Si le damos a Ω la topología producto de Tichonov es también un conjunto compacto. Por la propia definición de la topología, los conjuntos cilíndricos son una base de entornos.

Consideremos Γ el álgebra de funciones continuas que dependen de un número finito de coordenadas

$$\Gamma = \{ f / f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, } f(\{x_i\}) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \}$$

Las probabilidades finito-dimensionales nos permiten definir un funcional.

$$P: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

Ahora bien, Γ separa puntos y, por el teorema de Stone-Weirstrass, es densa en $C^0(\Omega)$

P tiene norma menor que 1 sobre Ω y, por tanto, se extiende de una manera única. Por el teorema de Riesz ese funcional es una medida, que un momento de reflexión muestra satisface todas las condiciones que pedimos:

Definición:

Se dice que el proceso es estacionario cuando

$$\begin{aligned} P_2 \{ X_{-N+1} = i_{-N}, \dots, X_{M+1} = i_M \} &= \\ = P_2 \{ X_{-N} = i_{-N}, \dots, X_M = i_M \} \end{aligned}$$

La interpretación de esta condición es una ^{que} secuencia finita de datos, nos lleva información sobre el tiempo en que fué extraída.

Se comprende que si el promedio de unos y menos unos cam-

biase con el tiempo, dada una secuencia de -digamos 10.000 sucesos- podríamos conjeturar cuando fué extraída.

Aunque el promedio en sí no cambiase, si cambiase en correlación podríamos deducirlo igualmente.

Otro modo, ligeramente más sofisticado de decir lo mismo -pero que subraya la analogía con lo anterior- es la siguiente:

Introduzcamos la siguiente función (que obviamente es medible) en el espacio de sucesiones.

$$\Psi(\{i_k\}) = \{i_{k+1}\}$$

El proceso es estacionario si y sólo si la medida que lo describe en el espacio de realizaciones, es invariante bajo Ψ .

MECANICA ESTADISTICA DE SISTEMAS UNIDIMENSIONALES

Otra interpretación posible es la siguiente

Podemos interpretar $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ como el espacio de las configuraciones de un cristal unidimensional de átomos con spin 1/2.

Una medida μ en Ω es un estado termodinámico. Su interpretación física es una regla que, dado un observable que depende de la configuración, le asocia su promedio termodinámico i.e. el valor que observamos si hacemos un experimento.

De particular importancia son los estados de equilibrio, correspondientes a que el cristal esté en equilibrio térmico.

Si los spines no interaccionan ni entre ellos ni con un campo externo, la medida que representa el estado de equilibrio es

$$\mu \{ \{X_i\} / X_N = i_N, \dots, X_M = i_M \}$$

Si hay interacciones, la situación puede cambiar (radicalmente si la interacción es de largo alcance).

Mucha veces, en termodinámica estamos interesados particularmente en sistemas homogéneos, ello se corresponde con que el estado sea invariante bajo traslación.

Hay que notar que, aunque la interacción sea invariante bajo traslación, puede que haya estados de equilibrio que no lo sean.

Si la interacción es invariante bajo traslación, el trasladado de un estado de equilibrio será también de equilibrio. Pero (a menos que sólo haya un estado de equilibrio) no hay ninguna razón para pensar que deba ser el mismo.

Un ejemplo a tener en cuenta podrían ser los cristales antiferromagnéticos o -este es todavía un problema abierto- por qué átomos interaccionando mediante interacciones que son invariantes por el grupo de Galileo tienen estados de equilibrio- si es que los tienen- que son cristales, invariantes por un grupo mucho menor.

En dinámica, sin embargo, estaremos interesados en casos en los que sólo hay un estado de equilibrio que, por tanto, será invariante por traslaciones.

Las medidas que describen una situación de equilibrio se llaman medidas (o estados) de Gibbs y el mejor modo de caracterizarlas es mediante las ecuaciones D.L.R. (Dobrushin, Lanford, Ruelle) (5).

Estas ecuaciones son un método natural de dar sentido a la fórmula de Boltzmann-Gibbs

$$P_r = e^{-H/kT}$$

La dificultad de interpretar esta fórmula está en el hecho de que queremos trabajar con configuraciones de sistemas infinitos (de otro modo no hay p. ej. transiciones de fase). Pero para estos sistemas, la energía será infinita.

La idea detrás de ellas es la siguiente. Si especificamos la configuración fuera de un conjunto finito Λ podemos definir mediante la fórmula de Boltzmann-Gibbs las probabilidades de diversas configuraciones en Λ .

Damos así, las distribuciones finito dimensionales condicionadas a la σ -álgebra de variables fuera de Λ .

Se comprende que aquí, los problemas de existencia y unicidad van a ser no triviales y van a depender de la interacción. Lo interesante es que las "patologías" señaladas anteriormente corresponden a fenómenos físicos. Hay interacciones que no definen una termodinámica y hay interacciones para las

cuales hay varios estados de Gibbs.

Comentarios

Como advertí antes, notemos que en la primera interpretación, ya tenemos la medida invariante -la de Liouville- y queremos investigar qué propiedades fuerza en las funciones que la preservan. En la segunda, tomamos como dada la transformación y queremos ver qué medidas invariantes hay y qué propiedades tienen.

Desde el punto de vista matemático, una vez que tenemos una estructura, el primer problema que salta a la mente es clasificar todas las posibilidades que pueden suceder salvo morfismos de la estructura. En toda su generalidad, este es un problema muy difícil, y que, desde luego, no está resuelto, -ni hay esperanzas en un futuro próximo- sin embargo, es un problema que es útil tener presente.

El llamado programa de Smale (6) -aún hoy lectura obligada para quien se interese en el tema- proponía precisamente clarificar, no todos los sistemas, pero sí una parte mayoritaria de ellos, aunque preservando no sólo la estructura de medida sino una topología también, es decir, queríamos estudiar todo, no salvo cambios de coordenadas medibles, sino sólo salvo cambios de coordenadas continuas (aún hay una versión más débil, la Ω -conjugación).

Cuando discutamos técnicas duras, veremos que la técnica importante es precisamente un truco para probar -entre otras cosas- que sistemas como billares, el gas de Lorentz, o el gas de esferas duras (la prueba aún no está completa) son

equivalentes, bajo un cambio de coordenadas medible a un estado de Gibbs --de hecho, podremos probar más--.

Si se toma el punto de vista que estamos discutiendo de considerar equivalentes dos sistemas que son equivalentes bajo cambios de coordenadas que preserven medidas, hay que advertir que la intuición que dí no es invariante bajo dichos cambios. Un ejemplo aclarará lo que quiero decir con esto.

Consideremos el modelo de Ising con hamiltoniano $H = \sum X_i X_{i+1}$ de interacción a vecinos más próximos.

La intuición que antes recomendé tener presente, es la de un sistema en el que el futuro está condicionado por el pasado, pero sólo levemente.

Sin embargo, si en vez de describir el sistema mediante las coordenadas X_i utilizásemos $Y_i = X_i X_{i+1}$ el sistema se nos mostraría desacoplado.

Hay un argumento standard para reducir interacciones de alcance finito (digamos n) Hay interacciones de vecinos más próximos. Consideremos variables que tomen 2^n valores correspondiendo a las 2^n cadenas de longitud n que podemos formar. Se entiende que es lo mismo asociar una de estas "supervariables" a un "supersitio" --que es un sitio normal de coordenada múltiplo de n --que el sistema original. El supersistema es, sin embargo, de vecinos más próximos-spin 2^{n-1} , sin embargo--.

Si las interacciones son de soporte infinitamente largo, pero decreciendo suficientemente rápido, se comprende que podremos aproximar arbitrariamente bien el sistema por interacciones de alcance finito. Ahora bien, estas interacciones son desacopladas.

Curiosamente en dinámica el lema clave del teorema de Ornstein (7) -que discutiremos en la sección de entropías- es precisamente que un sistema satisfaciendo esta condición se puede desacoplar completamente.

Si se hace todo con cuidado, por ejemplo, para interacciones a pares basta suponer

$$\frac{1}{T} \sum_k k \Phi(k) < \infty$$

Más aún, haciendo un pequeño argumento extra, estas consideraciones permiten probar que el estado de Gibbs es único -que las ecuaciones D.L.R. tienen solución única-. Este es el famoso teorema de unicidad de Dobrushin probado así, mediante técnicas de dinámica (8). Más adelante, tendremos ocasión de probar en más detalle teoremas de dinámica utilizando técnicas de mecánica estadística. Aunque se cite ahora, las técnicas necesarias para esta prueba no las describiré hasta la sección sobre entropía.

III Los argumentos fundamentales de la teoría blanda

El teorema de Krylov-Bogoliubov

El objetivo de este teorema es probar que todas las transformaciones tienen una medida invariante. La ventaja de este argumento, es que es una construcción casi explícita y que se puede controlar bastante para dar propiedades de las medidas que construyamos.

Aparece en muchos otros teoremas; en estas notas, la versión del teorema de Von Neumann que discutiremos que discutiremos, también utiliza un argumento de este tipo.

Teorema: Sea Ω tal que satisface las condiciones del formalismo, y $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ medible. Entonces hay una medida de probabilidad invariante bajo φ .

Prueba: Definamos φ^* actuando sobre las medidas del siguiente modo

$$\int f d(\varphi^* \mu) = \int (f \circ \varphi) d\mu$$

Es fácil comprobar que

- μ es φ -invariante si y sólo si $\varphi^* \mu = \mu$
- φ^* aplica medidas de probabilidad en medidas de probabilidad

Escojamos una medida de probabilidad cualquiera ν y formemos

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi^k \nu$$

Para una $f \in C(\Omega)$ cualquiera, $\int f dA_n$ está acotada y podremos escoger una subsucesión que converja.

Utilizando un truco diagonal, podemos escoger esa subsucesión de modo que converja sobre un conjunto numerable que sea denso.

A_n interpretados como funcionales son equicontinuos de modo que esta sucesión convergerá sobre todas las funciones continuas. Llamemos al límite $\tilde{\nu}$

Esta medida es invariante puesto que

$$\psi^* A_{n_k} = A_{n_k} + \frac{1}{n_k} (\psi^{n_k} \nu - \nu)$$

Integremos respecto a una función cualquiera y tomemos límites.

Nótese que lo que estamos haciendo es utilizar el teorema de Banach-Alaoglu (las medidas de probabilidad son un conjunto compacto en la topología débil*) y que esta topología es metrizable, con lo que podemos extraer subsucesiones.

Esta última parte del argumento, no es necesaria puesto que podíamos haber probado la existencia mediante otros métodos (por ejemplo el teorema de Schauder-Tichonov).

La ventaja de hacerlo como lo hemos hecho aquí, es, ya dije antes, que todos los pasos se pueden controlar y, por ejemplo, es posible discutir propiedades de la medida así construída.

Ejemplo:

Siguiendo este argumento se puede probar.

Supongamos que $\varphi^{*n} \mathbb{1}$ es absolutamente continua con respecto a la medida μ y que sus densidades son siempre menores que una función en L^1 independiente de n .

Entonces, existe una medida invariante absolutamente continua respecto a μ .

Este es el teorema abstracto que está detrás de los trabajos de Misiurewicz (9) sobre medidas de mapas del intervalo. También es instructivo comparar el teorema abstracto, con la táctica de la prueba.

Otro argumento muy semejante aparece en (10) (11)

EL TEOREMA DE RECURRENCIA (Poincaré)

Sea A un conjunto de medida positiva. Entonces, existe un conjunto \tilde{A} contenido en A y de la misma medida tal que si $x \in \tilde{A}$, entonces visita A un número infinito de veces.

Prueba

Llamemos B_n al conjunto de puntos de Ω que en el tiempo n están en A , pero no lo vuelven a visitar más.

Es decir

$$B_n = \varphi^{-n}(A) \cap \bigcap_{k \geq 1} \varphi^{-(n+k)}(\Omega - A)$$

Claramente tenemos

$$\varphi^{-k}(B_n) = B_{n+k}$$

de modo que todos los B_n tienen la misma medida.

Por otra parte

$$B_n \cap B_{n'} = \emptyset \quad \text{si } n \neq n'$$

De modo que esta medida común no puede ser sino cero ya que la unión de todos los B_n , -que son disjuntos e igual medida-, está contenida en un conjunto de medida finita.

Ahora bien, los puntos que visitan en el futuro un

número infinito de veces es precisamente

$$A = \bigcup_{k \geq 0} B_k$$

Difícil es sobreestimar la capacidad polémica de este teorema (12). De acuerdo con lo prometido, guardaré una discusión de sus interpretaciones para el siguiente capítulo.

Déjese, sin embargo, mencionar que las aplicaciones son mucho más potentes si se aplica en tandem con argumentos de categoría (13)

Como veremos en su lugar, puede deducirse fácilmente del teorema de Birkhoff.

TEOREMA DE VON NEUMAN

La versión que voy a discutir de este teorema es más cercana a la versión de Yosida que a la de Von Neuman.

La versión de Von Neuman.- hipótesis más restrictivas- pueden encontrarse en Red-Simon. Sin embargo, es divertido notar que la prueba original de Von Neuman era más complicada.

La razón de incluir esta versión es que la tuve que utilizar -y que redescubrir- en algún momento y que, creo subraya la unidad de la teoría ergódica: complicamos el argumento de Krilov-Bogoliu Bov, y damos un resultado más preciso y tenemos un argumento, que es bastante más flexible que el argumento de Von Neuman.

El lector puede divertirse tratando de debilitar alguna hipótesis extra en este enunciado.

Teorema

Sea X un espacio de Banach, reflexivo y separable

$$U : X \rightarrow X$$

un operador tal que $\|U^n\| \leq K < \infty$ Para todo: $n \geq 0$

Entonces

$$\Lambda_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k x \rightarrow \Pi x \quad \text{Para todo } x$$

Más aún -se sigue de lo anterior:

$$\Pi^2 = \Pi U = U \Pi = \Pi$$

O sea que Π es proyección sobre el espacio de vectores tal que

$$Ux = x$$

Prueba

Observemos que el resultado es trivial si x es tal que

$$Ux = x$$

o si $x \in \text{Ran}(U - I)$

(En este caso la suma cancela casi todos los términos iguales que cuando se suman series geométricas, de modo que el límite es cero)

llamemos X_1 al primer espacio y X_2 al segundo.

Digo que:

Estos dos espacios tienen intersección trivial (de modo que se puede hablar de $X_1 \oplus X_2$) y además, $X_1 \oplus X_2$ es denso en X .

La primera propiedad se obtiene de que cuando $x \in X_1$, $\lim_n A_n x = x$, y que, cuando $x \in X_2$, $\lim_n A_n x = 0$.

(Nótese que usamos $\|U^k\| \leq K$).

La segunda propiedad es interesante incluso en dimensión finita, así que la discutiremos primero en este caso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & \cdot & 0 & & \\ & & \cdot & 0 & \\ & & & \cdot & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

así que $X = \text{Ker} (I-U) \oplus \text{Ran} (U-I)$

Lo que deberíamos hacer en dimensión infinita es un análogo de la forma de Jordan.

Obviamente, la teoría espectral, (y de hecho hay un teorema que nos dice que esto es cierto (14)).

La estrategia de la prueba que voy a dar es seguir paso a paso la prueba de la forma de Jordan en (15). Lo único que allí, objetos cuya construcción se terminaba por la dimensión finita, aquí habrán de ser reemplazados por objetos contruídos utilizando un argumento del tipo de Krylov-Bogoliubov.

Lema: ..

En las condiciones del teorema

$\lambda_n x$ converge débilmente a Πx , para todo $x \in K$

Prueba:

De nuevo, invocaremos el teorema de Banach-Alaoglu, y el hecho de que X es separable con la topología débil (misma que la topología débil*, ya que X es reflexivo) para obtener que existe una subsucesión de modo que

$\lambda_{n_k} x$ converge débilmente a Πx

Ya que tenemos que este límite existe, y que

$$U \lambda_{n_k} = \lambda_{n_k} U = \lambda_{n_k} + \frac{1}{n_k} (U^{n_k} - U)$$

Obtenemos $\pi u = u \pi = \pi$

Para demostrar que el límite existe, nos bastaría demostrar que es único.

Supongamos, pues que existe otra subsucesión

$$A_{\hat{m}_R} \rightarrow \hat{\pi} \quad (\text{débil de operadores})$$

$$\hat{\pi} \quad \text{también verifica que} \quad \hat{\pi} u = u \hat{\pi} = \hat{\pi}$$

De modo que $\hat{\pi} A_{m_R} = A_{m_R} \hat{\pi} = \hat{\pi}$

$$\pi A_{\hat{m}_R} = A_{\hat{m}_R} \pi = \pi$$

Tomando límites $\hat{\pi} \pi = \pi \hat{\pi} = \hat{\pi}, \quad \pi \hat{\pi} = \hat{\pi} \pi = \pi$

con lo cual, el límite es único

Ahora, utilizaremos el lema, para probar que

$$X_1 \oplus X_2$$

es denso.

Utilizaremos el lema, aplicado no a X y U sino a X^* y U^* , que es fácil ver también verifican las hipótesis.

Lo que tratamos de ver que no existe ningún funcional continuo diferente de cero que se anule sobre X_1 y X_2 (Teorema de Hahn-Banach)

Supongamos que y^* se anula sobre X_2

$$\langle y^*, (1-u)x \rangle = 0, \quad \forall x \in X$$

Es lo mismo que decir

$$(1 - U^*) y^* = 0$$

Por tanto,

$$U^* y^* = y^*$$

$$A_n y^* = y^*$$

28

Un pequeño cambio de sitios y estrellas muestra que

$A_n^* \longrightarrow \Pi^*$ en la topología débil
de X^* de modo que $\Pi^* y^* = y^*$

Por otra parte, si

$$\langle y^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X_1$$

se tiene

$$\langle y^*, \Pi x \rangle = 0 \quad \forall x \in X$$

$$\Pi^* y^* = 0$$

Esto establece el teorema

Comentario.

Antes dije que un método alternativo para probar que $\overline{X_1 \oplus X_2} = X$ era utilizar una versión adecuada al teorema espectral. Puede uno pensar que esa versión podría recuperarse del argumento que acabamos de dar. De hecho puede hacerse, y además, es bien conocida. Todo el teorema espectral puede probarse utilizando álgebras de Banach y la prueba viene a ser más o menos la misma dada aquí.

Comentario.

La hipótesis de que X sea reflexivo no es satisfecha en casos interesantes, como por ej. $X = L^1$

Sin embargo, hay veces que hay argumentos $\varepsilon/3$ que dan el mismo resultado.

Doy un caso concreto

$$U f:(x) = U (\Psi x)$$

Si Ψ es invertible U es unitario en $L^2(\Omega, \mu)$ y además

$$\|U\|_{L^1 \rightarrow L^1} = 1$$

Podemos aplicar el teorema que hemos aprobado, para demostrar que hay convergencia en sentido de L^2 sobre $L^2(\Omega, \mu)$

Ahora bien, convergencia L^2 implica convergencia L^1 ,

A_n son equicontínuos como operadores $L^1 \rightarrow L^1$ y L^2 es denso en L^1 . Utilizando un argumento $\varepsilon/3$ obtenemos convergencia sobre todo L^1

TEOREMA ERGODICO DE G.D. BIRKHOFF.

El siguiente teorema tiene una distinguida historia.

Aparte de su interpretación dinámica, con la segunda interpretación del formalismo, es la ley fuerte de los grandes números para procesos estacionarios. En un sentido muy preciso, fué uno de los primeros teoremas de diferenciación de integrales (ver (16) para un desarrollo explícito de la analogía).

Cuando se dan las hipótesis para su aplicación, supera a los teoremas que hemos probado antes en que se obtienen conclusiones más precisas.

Regatear hipótesis en su prueba ha sido una gran industria.

Teorema.

Sea $f \in L^1(\Omega, \mu)$

Definamos

$$A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\psi^k x)$$

Entonces i) $\lim A_n f(x) = Tf(x)$ existe para μ -casi todo x .

ii) si $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p < \infty$

$$\|A_n f - Tf\|_p \rightarrow 0$$

Por supuesto, para $1 < p < \infty$ es solo un caso particular del teorema de Von Neuman con $Uf(x) = f(\psi(x))$

(para $p = 1$ ver el segundo comentario).

Mostremos aquí que ii) se sigue de i)

Claramente

$$\|Uf\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

por tanto

$$\|A_n f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \quad 1 \leq p \leq \infty$$

si $f \in L^\infty$

$$A_n f(x) \leq \|f\|_{L^\infty}$$

Por tanto, la convergencia puntual garantizada por i) implica convergencia L^p ($1 \leq p < \infty$) para toda función $f \in L^\infty$ (convergencia dominada)

Pero L^∞ es denso en L^p Y los operadores A_n son equicontinuos

La principal novedad en las hipótesis, es la positividad del operador, i.e. que

$$Uf \geq 0 \quad \text{cuando} \quad f \geq 0$$

Esta hipótesis está crucialmente relacionada al principal ingrediente de la prueba que es un lema maximal.

Lema. (Hopf - Garsia)

Sea $g \in L^1(\Omega, \mu)$

Llamemos $E_n(g) = \{x / \sup_{0 \leq i \leq n} A_i g(x) > 0\}$

$$E(g) = \{x / \sup_{0 \leq i} A_i g(x) > 0\} = \bigcup_n E_n(g)$$

Entonces

$$\int_{E_n} g d\mu \geq 0 \quad \text{y, por tanto,} \quad \int_E g d\mu \geq 0$$

Prueba

Llamemos

$$S_n^* = \sup_{0 \leq i \leq n} (S_0 = 0)$$

Dado que

$$S_{n+1} = g + S_n \circ \varphi$$

Se tiene sobre E_n

$$S_{n+1}^* = g + S_n^* \circ \varphi$$

y, por tanto

$$S_n^* \leq S_{n+1}^* = g + S_n^* \circ \varphi$$

Integrando sobre E_n

$$\begin{aligned} \int_{E_n} S_n^* d\mu &\leq \int_{E_n} g d\mu + \int_{E_n} S_n^* \circ \varphi d\mu \leq \\ & \text{(porque el integrando siempre es positivo)} \\ &\leq \int_{E_n} g d\mu + \int_{\Omega} S_n^* \circ \varphi d\mu = \\ & \text{(Por la invariancia bajo } \varphi \text{ de } \mu \text{)} \\ &= \int_{E_n} g d\mu + \int_{E_n} S_n^* d\mu = \\ & \text{(Dado que fuera de } E_n, S_n^* = 0 \text{)} \\ &= \int_{E_n} g d\mu + \int_{E_n} S_n^* d\mu \end{aligned}$$

Corolario 1Llamemos $E^\beta = \{x \mid \sup_{0 \leq n} A_n f(x) > \beta\}$

$$D^\alpha = \{x \mid \inf_{0 \leq n} A_n f(x) < \alpha\}$$

Entonces

$$\int_{E^\beta} f d\mu \geq \beta \mu(E^\beta)$$

$$\int_{D^\alpha} f d\mu \leq \alpha \mu(D^\alpha)$$

Prueba.

Aplicar el lema maximal a $f - \beta$ y a $\alpha - f$

Notar que este corolario es bastante para probar que el $\lim. \sup. \Lambda_n(g)(x)$ y el $\lim. \inf. \Lambda_n(g)(x)$ están definidos casi doquiera. Lo único que hay que probar ahora es que son los mismos

Si no hubiese más conjuntos invariantes más que de medida uno o cero, el resultado sería trivial.

$\lim. \sup. \Lambda_n(g)$ y $\lim. \inf. \Lambda_n(g)$ son funciones invariantes (truco del telescopio) y, por tanto deben ser constantes

(digamos $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\alpha}$) Si $\tilde{\beta} > \tilde{\alpha}$, como $E^{\tilde{\beta}} = D^{\tilde{\alpha}} = \Omega$

obtenemos una contradicción del corolario anterior.

El caso general se prueba siguiendo más o menos la misma idea.

Corolario 2.

Si B es un conjunto invariante

$$\beta \mu(E^{\beta} \cap B) \leq \int_{E^{\beta} \cap B} g \, d\mu$$

$$\alpha \mu(D^{\alpha} \cap B) \geq \int_{D^{\alpha} \cap B} g \, d\mu$$

Prueba.

Aplicar el corolario anterior a g_{λ_B}

Una vez que ya sabemos que el \liminf y el \limsup existen casi doquiera llamemos

$$M^\beta = \{ x / \limsup A_n f(x) > \beta \} \subset E^\beta$$

$$M_\alpha = \{ x / \liminf A_n f(x) < \alpha \} \subset D^\alpha$$

M^β y M_α son conjuntos invariantes, puesto que al cambiar de x a $\varphi(x)$ no altera los \liminf y \limsup de la sucesión de promedios (de nuevo, solo difieren en 1 término)

$$M^\beta \cap M_\alpha \cap E^\beta = M^\beta \cap M_\alpha \cap D_\alpha = M^\beta \cap M_\alpha$$

Por tanto, aplicando el segundo corolario tenemos:

$$\beta \mu(M^\beta \cap M_\alpha) \leq \int_{M^\beta \cap M_\alpha} f d\mu \leq \alpha \mu(M^\beta \cap M_\alpha)$$

Si $\beta > \alpha$ esto sólo puede ser si $\mu(M^\beta \cap M_\alpha) = 0$

El resultado i) del teorema queda probado al observar que

$$\begin{aligned} \{ x / \exists \lim A_n f(x) \} &= \{ x / \limsup A_n f(x) > \\ &> \liminf A_n f(x) \} = \bigcup_{\substack{\beta > \alpha \\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}}} M^\beta \cap M_\alpha \end{aligned}$$

y, por tanto, tiene medida cero

Observación 1.

Πf es claramente una función invariante.

Más aún, de \mathcal{U}) tiene la misma integral que f .

En el caso de que los únicos conjuntos invariantes sean de medida cero o de medida uno, Πf debe ser precisamente

$\int f d\mu$. Esta situación se describe diciendo que "se pueden intercambiar los promedios espaciales y temporales". En este caso se dice que el sistema es ergódico.

Observación 2

Si \mathcal{I} es la σ -álgebra de los conjuntos invariantes, decir que Πf es invariante es lo mismo que decir que es \mathcal{I} -medible. Más aún, para todo conjunto $A \in \mathcal{I}$ se tiene

$$\int_A f d\mu = \int_A \Pi f d\mu \quad (\text{aplicar el cálculo anterior a } f \chi_A)$$

Estas dos propiedades, determinan únicamente Πf (por el teorema de Radon Nikodyn) y se suele escribir $E[f|\mathcal{I}]$ en vez de Πf .

Observación 3

En realidad, las únicas propiedades del operador U que se ha utilizado en la prueba son

- a) $f \geq 0 \Rightarrow Uf \geq 0$
- b) $U1 = 1$
- c) $\int Uf d\mu = \int f d\mu$

Los operadores que satisfacen esta condición se llaman operadores doblemente markovianos. Muchos operadores, como el núcleo de Poisson o el del calor son doblemente markovianos y, pueden probarse teoremas de diferenciación siguiendo paso a paso la prueba del teorema de Birkhoff. (La propiedad de ser contracción en L^p usada en ii) se sigue de la markovianidad (17) mediante un teorema de interpolación).

Precisamente la propiedad de que para sistemas ergódicos pudieran intercambiarse las medias espaciales y temporales fué lo que, históricamente les dió interés. Si se interpreta la medición de un observable como un proceso que toma tiempo, y suponemos que ese tiempo es muy largo con respecto al "tiempo característico" del sistema, podemos idealizar el proceso de medida

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt \quad (\text{En nuestra versión}$$

de tiempo discreto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\psi^k x)$$

El teorema ergódico sería una justificación, pues, de la utilización de la colectividad microcanónica al asegurar que, de acuerdo con esta interpolación, el valor de un observable es, cuando el sistema es ergódico, precisamente el predicho por la colectividad microcanónica.

Esta interpretación, tiene dificultades que, como ya he dicho relegamos al capítulo 2.

Como último punto relacionado con el teorema ergódico, permítaseme citar el siguiente problema abierto de también engañosa simplicidad.

Es cierto que
$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\varphi^k x) f(\varphi^{-k} x)$$

converge en casi todo punto cuando f es -digamos- una función de L^2 ?.

Entropía.

La idea intuitiva que se asocia a la ergodicidad es la de complejidad del movimiento. Un sistema es ergódico cuando casi todo punto se mueve tan erráticamente que visita cada conjunto medible del espacio de las fases con una frecuencia bien definida (1). Eso sugiere complejidad del movimiento.

Sin embargo, es un tipo muy débil de complejidad como lo prueba que la transformación del círculo en sí mismo consistente en rotar un ángulo irracional sea ergódica aunque, evidentemente, no demasiado compleja.

(1) Esta afirmación colorista, es una simplificación, habría que haber dicho una colección innumerable de ellos. Si se toma al pie de la letra, es una caracterización de los sistemas "distales" que no nos interesan por ahora. El ejemplo que doy a continuación es distal.

Antes de dar una definición formal -que es, obviamente, lo único que vamos a utilizar- será útil dar una discusión heurística de por qué se la considera una medida de la complejidad del movimiento.

La entropía es un concepto muy rico y se le puede mirar desde muchos puntos de vista. El artículo de lectura realmente obligada es (18) pero hay otros muchos puntos de vista ((1)(19)).

(20) da una buena relación de la entropía con lo que se llama entropía en mecánica estadística, ((21)(22)) dan unas relaciones muy interesantes con otros campos, (23), aunque está escrito en un tono humorístico, contiene una exposición que puede ayudar a aclarar por qué la entropía es la medida de la información -la única razonable-; y su relación con los principios variacionales.

En mecánica estadística, en el formalismo macrocanónico, el número de estados del sistema crece exponencialmente con el número de partículas y el exponente es la entropía.

Esta es la analogía que vamos a seguir.

Trataremos de dar a la entropía una interpretación como la siguiente.

Supongamos que en nuestro sistema, haciendo observaciones durante n instantes (estamos en tiempo discreto) podemos distinguir N_n trayectorias diferentes.

Para n suficientemente grande se verifica.

$$N_{n+1} \approx N_n e^S$$

Se entiende así que un sistema con entropía positiva es un sistema en el que hacer predicciones es difícil.

No importa la longitud de la trayectoria que conozcamos, en el instante siguiente hay varias posibilidades.

Por supuesto que ahora, hay que explicar claramente qué queremos decir por número de trayectorias distinguibles.

Hay otras posibilidades (20) que la que vamos a dar, notablemente, la entropía, topológica, adaptadas a otros problemas.

La definición que adoptaremos será la siguiente:

Supongamos, para fijar ideas, por el momento, que hacemos la siguiente idealización de un experimento para medir la trayectoria:

Dividimos el espacio de las fases en número finito de regiones

$$\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\} ; \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j ; \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

que representa la máxima precisión de nuestros aparatos de medida, y anotamos, a cada instante, -tiempo discreto;- en qué punto estamos

Llamemos

$$P_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}} = \{x \in \Omega / x \in A_{\sigma_0}; \psi x \in A_{\sigma_1}, \dots, \psi^n x \in A_{\sigma_{n-1}}, \dots\}$$

$$S_n(\mathcal{P}) = \sum_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}} -\mu(P_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}}) \ln \mu(P_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}})$$

Un momento de reflexión mostrará que la interpretación de $S_n(\mathcal{P})$ es más o menos algo así como el valor esperado del logaritmo del número de trayectorias distinguibles con el aparato \mathcal{P} midiendo n veces.

La complejidad del movimiento, visto con el aparato, será, pues

$$S(\mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(\mathcal{P})$$

La entropía intrínseca del sistema será

$$S = \sup_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P})$$

Claramente S es un invariante bajo conjugación métrica (i.e. bajo todos los cambios de variables que preserven la medida).

Un invariante es una gran ayuda para el problema de clasificación si es fácil de calcular.

Por ello es bastante notable el siguiente teorema:

Teorema (Kolmogorov) (1) (19)

S es estrictamente mayor que 0, si y sólo si, existe una partición $\mathcal{P} = \{A_1 \dots A_n\}$

tal que

$$i) \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \psi^k \mathcal{P} = \mathcal{Q}$$

(definiremos después el símbolo \bigvee)

$$ii) \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \psi^k \mathcal{P}$$

sólo contiene conjuntos de medida cero o uno.

En tal caso

$$S = \sum_{A_i \in \mathcal{P}} -\mu(A_i) \ln \mu(A_i)$$

El símbolo \bigvee quiere decir la partición consistente en intersecciones de elementos de las particiones.

Cuando hay un número infinito de ellos, quiere decir la menor σ -álgebra que los contiene a todos ellos. Puede verse este uso es consistente.

El más celebrado teorema en conexión con el concepto de entropía es el teorema de Ornstein (7) que asegura que dos sistemas de Bernouilli -sucesiones de sucesos independientes, como el tirar la moneda- son isomorfos si sólo si tienen la misma entropía.

Los sistemas que tienen entropía de Kolmogorov positiva se llaman K- sistemas y gozan de propiedades muy interesantes que vamos a utilizar en el siguiente capítulo, así que nos extendemos un poco en ellas.

Antes de seguir adelante y, como inciso, me gustaría proponer un reto:

Está claro que definir un invariante independiente de la entropía y computable, sería un gran avance. Hay algunos en (18).

Muchas veces es más fácil demostrar que es un invariante que, de hecho, computarlo y ver que es diferente de la entropía.

Alguna vez he pensado en las siguientes definiciones.

Si $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\ell$ son particiones denotaremos

$$\underline{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\ell)$$

Decimos que una partición es menor que otra cuando todos los elementos de la primera son uniones de elementos de la segunda.

Llamemos

$\bigwedge_{i=1}^{\ell} \mathcal{P}_i$ a la unión de todas las particiones que son más finas que $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\ell$ a la vez.

(Esta definición es standard).

Si $\bigwedge_{i=1}^{\ell} \mathcal{P}_i = \mathcal{I}$

llamaremos

$$\widehat{\mathcal{P}}_i = \bigvee_{\substack{\mathcal{P}_i^{\hat{}} \text{ menor que } \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_i^{\hat{}} \wedge \mathcal{I} = \{\Omega\}}} \mathcal{P}_i^{\hat{}}$$

$$\Pi(\underline{\mathcal{P}}) = (\widehat{\mathcal{P}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{P}}_\ell)$$

$$S_0(\underline{\mathcal{P}}) = \sum_{A_{ij} \in \mathcal{P}_i \in \underline{\mathcal{P}}} -\mu(A_{ij}) \ln \mu(A_{ij})$$

$$\widehat{S}_n(\underline{\mathcal{P}}) = \widehat{S} \left(\bigvee_{k=1}^n \psi^{-k} \mathcal{P}_1, \dots, \bigvee_{k=1}^n \psi^{-k} \mathcal{P}_\ell \right)$$

$$\hat{S}(\underline{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_n(\underline{p})$$

$$\hat{S} = \sup_{\underline{p}} \hat{S}(\underline{p})$$

El reto es obviamente, decidir si esta definición es computable y si es independiente de la entropía usual.

Por supuesto que se le pueden hacer modificaciones.

Al contrario que en la entropía normal, el límite en la definición de $\hat{S}(\underline{p})$ no necesita existir y, se podría sustituir, quizá por $\lim. \inf. \sup.$ e, intercalar en vez del $\sup.$ fijar alguna partición y minimizar respecto a la fija, tomar sub-sucesiones como se hace en (17), etc..

La intuición que hay detrás de todo esto es la siguiente:

Podemos imaginar $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ como aparatos experimentales para medir trayectorias (digamos telémetros digitales de distintas precisiones)

La operación Π lo que hace es que quita las mediciones redundantes.

Esta entropía, lo que mediría sería el crecimiento del número de trayectorias distinguibles, pero no por medidas redundantes, es decir, las trayectorias distinguibles por sólo alguno de los aparatos, no por todos.

La verdad, sólo he sido capaz de calcular esta entropía para sistemas de Bernouilli, para los que, obviamente, está relacionada a la entropía de Kolmogorov.

Estas definiciones me fueron inspiradas por Mario Cassartelli, que introdujo conceptos relacionados a éstos.

Vamos a introducir ahora, una caracterización de sistemas K en términos de σ -álgebras crecientes que puede generalizarse muy bien a flujos (sustituir en la definición que sigue la variable n con valores enteros, por una variable real t)

Decimos que un sistema es K , si existe una σ -álgebra \mathcal{G}_T tal que

$$i) \quad \varphi^n \mathcal{G}_T \supseteq \mathcal{G}_T \quad n \geq 0$$

$$ii) \quad \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \varphi^k \mathcal{G}_T = \mathcal{B}$$

$$iii) \quad \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \varphi^k \mathcal{G}_T = \text{trivial}$$

Claramente, si tenemos un sistema K en el sentido anterior, bastará tomar

$$\mathcal{G}_T = \bigvee_{-\infty}^{\infty} \varphi^k \mathcal{P}$$

Inversamente, si tomamos un sistema K en este sentido, también lo es en el otro.

Cualquier \mathcal{P} que satisfaga

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{G}_T = \varphi \mathcal{G}_T \quad \wedge \varphi^{-k} \mathcal{P} = \text{trivial}$$

puede utilizarse y puede probarse que siempre existe.

Comentario marginal.

Aunque no va a aparecer en nada de lo que voy a discutir.

-espero- durante un cierto tiempo voy a estar manejando σ -álgebras. En este campo hay una plaga que son las sutilezas asociadas a la "propiedad fuerte de Markov" (24) que es uno de los errores que más lejos han llegado en la literatura. ¡Es tan antiintuitivo!

Es uno de los pocos casos en los que un resultado matemático es definitivamente repulsivo. Cuando estaba trabajando en obtener los resultados del capítulo II, varias veces estuve a punto de caer en ella. En el caso de que alguien quiera trabajar en este campo, o más allá que, entendiéndolo la corrección de las pruebas que voy a presentar, definitivamente recomiendo una lectura cuidadosa de (24) que además resultará deliciosa.

Un ingrediente importante es el teorema de convergencia de martingalas.

Teorema.

Supongamos que $\{\mathcal{B}_t\}$, $t \in [0, \infty)$ es una familia de σ -álgebras creciente y de modo que $\bigcup_{t=0}^{\infty} \mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ sea f una función \mathcal{B} -medible.

$$E[f|\mathcal{B}_t] \rightarrow E[f|\mathcal{B}] = f$$

casi doquiera (dada la doble markovianidad de los operadores $E[\cdot|\mathcal{B}_t]$, no es difícil probar que el límite es en sentido L^p , $1 \leq p < \infty$, si $f \in L^p$.

Para funciones acotadas se sigue de la convergencia dominada y se pasa a todo L^p por equicontinuidad, lo mismo que el teorema Birkhoff

La prueba puede encontrarse en (3) junto con una interpretación estadística muy interesante. La estrategia de la prueba es semejante a la del teorema de G.D. Birkhoff.

Una observación que será interesante hacer, es que el hecho de que un sistema sea K determina el espectro del operador inducido

Llamemos P_λ las proyecciones $E[\cdot | \mathcal{F}_\lambda]$

a) Claramente es una familia creciente de proyecciones continuas por la derecha (no necesariamente por la izquierda);

b) $P_\lambda \rightarrow$ Identidad, $\lambda \rightarrow +\infty$

$P_\lambda \rightarrow P_{-\infty}$, $\lambda \rightarrow -\infty$, proyección sobre constantes

c) $U_t^* P_\lambda U_t = P_{\lambda-t}$

d) $U_t^* P_{-\infty} U_t = P_{-\infty}$

Podemos considerar las $F_\lambda = P_\lambda - P_{-\infty}$ como una familia de proyecciones espectrales para el grupo

$$V_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_\lambda$$

Un cálculo formal muestra que V_t y U_t satisfacen las reglas de conmutación de Weyl y, por tanto, su espectro está determinado por el teorema de Von Neumann (25)

Es de notar, sin embargo que una prueba más cuidadosa muestra -cuando Ω es métricamente isomorfo $(0,1)$ con la medida de Lebesgue- que la multiplicidad es contable infinita (19)

Considerable esfuerzo ha sido por Misra o Prigogine et al. (26) a discutir el siguiente operador tiempo, T generador de V_t

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_\lambda$$

La interpretación que ellos dan a T es una especie de "operador tiempo interno".

La razón es que, si definimos el "tiempo interno" de un estado mediante

$$\langle T \rangle_\rho = \int \rho(x) T \rho(x) d\mu(x) \quad ; \quad \int \rho^2(x) d\mu(x) = 1$$

claramente

$$\langle T \rangle_{\rho_t} = \langle T \rangle_\rho + t$$

A mi modo de ver, esto es forzar la interpretación puesto que los observables en mecánica estadística no se calculan con

el producto escalar, sino con la integral directa de la densidad.

(Por supuesto podíamos definir la "función de ondas" mediante $\psi = \sqrt{\rho}$. Dado $(U_t \psi)^2 = U_t(\psi^2)$ -recuérdese que U_t es sólo evolución temporal inversa- esta interpretación es coherente. Los autores citados son poco explícitos en esto).

En cualquier caso si definimos esto en la forma que he dicho antes, las reglas de conmutación anteriores nos permitirían hablar de un principio de incertidumbre entre el "tiempo interno" y la "energía" -los generadores de V_t y U_t - del mismo modo que las de posición y momento.

Aunque creo que no debe tomarse demasiado al pie de la letra todo esto, no puedo menos de encontrarlo interesante y divertido, pese a que mi conciencia positivista rechine.

IV. Algún método de análisis duro.

Resumen.

Para acabar este capítulo introductorio, voy a discutir brevemente una técnica que, aunque muy importante (y, de hecho, probablemente la que permite desarrollos más sistemáticos) no va a ser discutida en detalle luego.

La conexión con lo que hemos expuesto hasta ahora es más que nada de motivación. Habiendo discutido las particiones K , espero haber convencido al lector que este estudiar cómo se comportan las particiones bajo evolución temporal es interesante.

Lo que voy a discutir ahora es cómo se construirían particiones verificando ciertas propiedades -más fuertes- que las de las particiones K - para algunos modelos concretos. El argumento va a ser geométrico de naturaleza y , va a producir bastantes más resultados que una partición K .

La exposición técnicamente óptima es posiblemente (20) y, ciertamente, quien quiera profundizar en el tema debe leerlo. Sin embargo, yo he seguido mucho más el artículo original (27) que tiene la ventaja de que se presta más a sustituir argumentos laboriosos por figuras, permitiéndome así, resaltar lo que yo creo son las ideas importantes (la alternativa era traducir (20)).

Déjese me comentar cuales son las diferencias técnicas entre estas dos referencias.

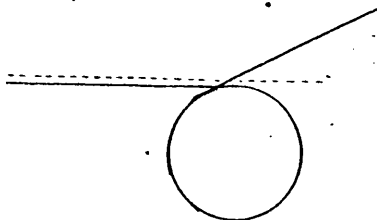
A mi juicio, la más importante es que buena parte del argumento de (20) se hace utilizando "shadowing".

Si uno trata de sustituir estos argumentos por la prueba de "Shadowing" en casos sencillos se encuentra p.ej. en (28) uno acabaría haciendo un argumento como el que doy aquí.

La ventaja de agrupar argumentos de "Shadowing" es que se sabe cómo hacerlo en otros casos en los que la prueba sencilla no funciona.

Aunque, ciertamente, los argumentos abstractos sean imprescindibles creo que es útil saber entenderlos geoméricamente.

Por ejemplo, la idea de la prueba de la ergodicidad del gas de Lorentz (o del gas de esferas duras) es repetir la misma prueba que vamos a dar aquí



con la complicación adicional de que hay trayectorias "malas" que dan origen a singularidades (ver figura). Todo el trabajo es ver como se sitúan esas trayectorias singulares y controlar el que no cambian nada cualitativo.

Entender esto, -me llevó trabajo- fué utilísimo para poder leer los artículo relevantes. En este aspecto, me resultaron utilísimas conversaciones con Giovanni Gallavotti a quien tanto el tema como yo debemos mucho.

Otra observación es que en dimensión 2 hay otra construcción distinta de las particiones (29).

Como hemos visto, hay casos en que tenemos "casi" las hipótesis de hiperbolicidad.

Mucho más interesantes son alguno otros conceptos como los

asociados a la teoría de hiperbolicidad parcial (teoría de Pesin). El hecho de que la teoría de Pesin sea mucho más útil en dimensión 2 que en otras es que esta otra construcción puede hacerse bajo las condiciones de esta teoría.

Antes de empezar la construcción, voy a hacer dos observaciones heurísticas.

La primera es una reinterpretación de lo que vamos a hacer.

Si pudieramos construir una partición $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ satisfaciendo las condiciones de la definición de sistema K , podríamos codificar casi todas las órbitas mediante

$$x \rightarrow \{\sigma_i\}$$

donde σ_i se determina por $\psi^i x \in P_{\sigma_i}$

(hay puntos ambiguos siempre, pero dejémoslos por el momento)
 ψ , en esta representación es simplemente el desplazamiento.

Ejemplo.

$$\psi: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\psi(x) = 10x \pmod{1}$$

$$\mathcal{P} = \{[0,0], [0,0.1], [0.1,0.2], \dots, [0.9,1.0]\}$$

La codificación, por supuesto, es la representación decimal.

(La partición, no es tal, por supuesto, pero, lo es salvo un conjunto de medida de Lebesgue cero. Nótese que los puntos ambiguos forman un conjunto invariante y que, si esto va a servir de algo -no ser todo el conjunto- han de tener medida cero por la ergodicidad)

Es importante notar que la ambigüedad va solo en una dirección: aunque haya puntos con varias representaciones decimales, cada representación decimal tiene solo un punto.

Una vez que tenemos esta codificación, la dinámica, del sistema es muy simple -mover todos los índices- y será posible hacer un análisis bastante detallado de la estructura de órbitas

(salvo los puntos patológicos, que, afortunadamente son ignorables o se les puede hacer un análisis separado).

Desgraciadamente, en general, la situación no es tan sencilla como parece. El análisis de la estructura de órbitas depende de la estructura del espacio Ω de sucesiones compatibles. No cuesta mucho trabajo darse cuenta de que si no hubiésemos escogido la partición adecuada o si el sistema fuese más complicado, las condiciones de compatibilidad habrían sido horribles y no habríamos ganado nada.

Las condiciones que vamos a imponer a las particiones de Markov, van a ser; esencialmente, condiciones para hacer que Ω sea fácil de analizar

Otra consideración heurística que puede ayudar es pensar que la condición que queremos capturar con la idea de sistema K, es la de algo esencialmente impredecible.

Un modo de que un sistema dinámico en una variedad sea impredecible es que los pequeños errores se amplifiquen muy deprisa, -que el sistema sea inestable-.

Es precisamente, para sistemas muy inestables para los que vamos a construir particiones de Markov.

El análisis que vamos a hacer va a poder dar mucho más que la propiedad K para una cierta medida. De hecho, vamos a poder construir muchas medidas de modo que el sistema tenga buenas propiedades ergódicas.

Hiperbolicidad y particiones Markovianas.

Supondremos que nuestro espacio de las fases es M , una variedad riemanniana conexa compacta, de clase C^∞ y que nuestro φ es un diffeomorfismo C^∞

Se dice que una familia de conjuntos

$$\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\}$$

es una partición markoviana si y solo si

$$1) \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = M$$

Λ_i son la clausura de su interior

Los interiores de Λ_i son disjuntos

Definamos una "matriz de transición" T , del siguiente modo.

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\text{Int } A_i) \cap (\text{Int } \varphi^{-1}A_j) \neq \emptyset \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Definamos

$$X(\{\sigma_i\}) = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} \varphi^{-k} A_{\sigma_k}$$

Requeriremos

$$2) \quad X(\{\sigma_i\}) \text{ contiene a lo mas un punto.}$$

Esta posibilidad se da cuando $T_{\sigma_i \sigma_{i+1}} = 1$ para todo i

3) La correspondencia $\{\sigma_i\} \rightarrow X(\{\sigma_i\})$ es Hölder continua cuando el espacio de sucesiones se le da la métrica natural

$$d(\{\sigma_i\}, \{\sigma'_i\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad \text{donde}$$

$$N = \max \{n : \sigma_i = \sigma'_i, \forall |i| \leq n\}$$

4) Sea $\Delta = \bigcup_i F_2(A_i)$ se puede
 descomponer $\Delta = \Delta^s \cup \Delta^u$ de modo
 que

$$\varphi^{-1} \Delta^u \subset \Delta^u, \quad \varphi \Delta^s \subset \Delta^s$$

5) Hay una ambigüedad máxima es decir, el cardinal de $X^{-1}(x)$ es menor que k

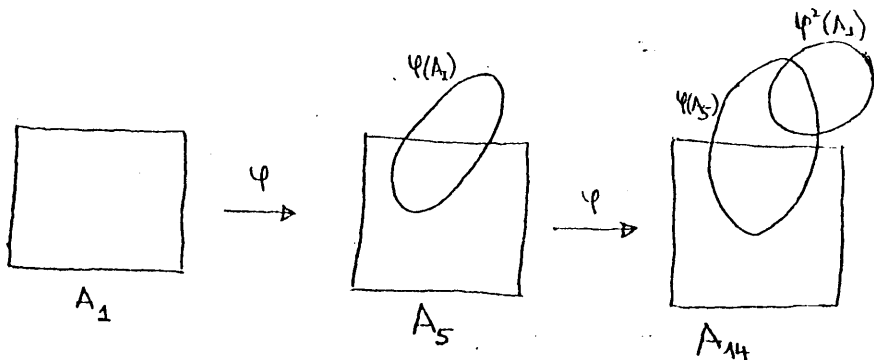
Comentario.

1) Implica que una partición Markoviana no es una partición. Los conjuntos A pueden superponerse en las fronteras. En inglés se habla del principio del "red herring" que no necesita ser ni "red ni herring". Este es un buen ejemplo, porque tampoco fueron inventadas por Markov y, estrictamente hablando, no dan origen a un proceso de Markov sino de Gibbs. Giovanni Gallavotti ha sugerido utilizar "pavimentación". Como eso no arregla el problema de markoviano, prefiero seguir con la costumbre.

2) En vista de la compacidad de los Λ_1 la propiedad de que $X(\{\sigma_i\})$ sea no vacío cuando $\tau_{\sigma_i \sigma_{i+1}} = 1, \forall i$

es lo mismo que decir que lo mismo es cierto para cualquier número finito. Es decir que las transiciones sólo tienen la condición binaria de compatibilidad.

Pictóricamente, queremos que no se den situaciones como las de la figura 1

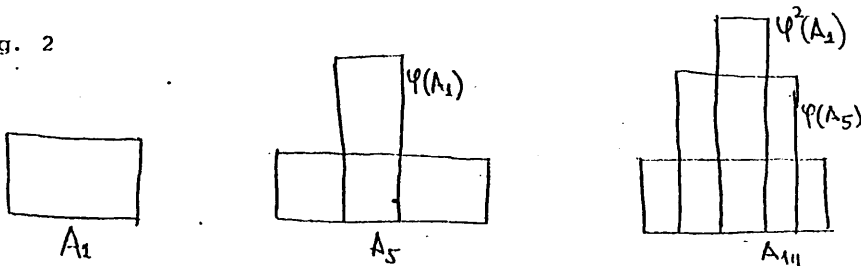


(Esta es la única justificación para el nombre markoviano, que las condiciones de compatibilidad "no tienen historia".

3) Si se supone que los A son rectángulos y se hace que Δ^u sean los rayos verticales y Δ^s los horizontales se verá que

de algún modo está relacionado con lo anterior para este caso

fig. 2



De hecho, se imponen estas condiciones para tener un control en los puntos ambiguos (asociados con las fronteras).

Esta condición de compatibilidad es, obviamente, la más sencilla que podíamos esperar. Ingenuamente se pensaría que una generalización sencilla sería considerar condiciones de compatibilidad dependiendo de un número finito de símbolos previos.

Ello no es así puesto que puede reducirse al caso anterior, considerando los conjuntos compatibles de longitud

Este truco es el mismo que se utiliza en mecánica estadística de 1-dimensión para reducir todas las interacciones de alcance finito a interacciones entre vecinos (32) "de largo alcance".

Una observación que utilizaremos después es que si podemos probar la existencia de una partición markoviana para Ψ^N , podemos probarla también para Ψ , y esta última es más fina.

Notemos que este análisis da mucho más p. ej., si hay secuencias periódicas compatibles, habrá órbitas periódicas y podremos estimar incluso cuántas (31) etc.

Otros métodos de codificar sistemas, por ejemplo las "kneading

calculus" llevan, pues, a condiciones de compatibilidad

Sistemas Anosov

Los sistemas de Anosov son, desde nuestro punto de vista, la formalización del concepto de inestabilidad. Esto se ve más claro en una formulación infinitesimal de las condiciones de hiperbolicidad (1), (20), (6) etc.

Sin embargo, lo que vamos a utilizar es una versión global, cuya equivalencia con la infinitesimal es un teorema.

Estas "estructuras hiperbólicas globales" -o debilitaciones- restringen bastante la topología de la variedad en las que se pueden definir, del mismo modo que lo hace una métrica de Lorenz - de ahí el nombre de estructura hiperbólica- .

Esto ha sido astutamente utilizado por W. Thurston para tratar de clasificar variedades tridimensionales (33).

Desde el punto de vista dinámico, la suposición de "Anosov" es más fuerte de lo necesario. Muchas veces hay conjuntos más pequeños que controlan la dinámica de la variedad. Una debilitación natural es el considerar "Axioma Λ " (6). Sin embargo, la prueba es más delicada que la que voy a dar aquí (20).

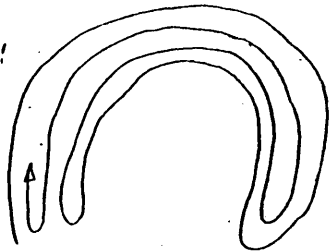
Una última observación es que, en contra de lo que pasaba en los otros problemas que hemos discutido, (y en muchos otros que no hemos tratado), en hiperbolicidad, parece haber una diferencia no meramente técnica entre la teoría de diffeomorfismos y de flujos. Hay un análogo de particiones de Markov para flujos, pero algunas de las consecuencias que esto tiene para diffeomorfismos son falsas para flujos

Sea M una variedad riemanniana, compacta, conexa, de clase C^∞ y φ un diffeomorfismo de clase C^∞ (C^{1+k} es natural, pero seamos generosos).

Se dice que forman un sistema Anosov cuando

- 1) Para todo punto x perteneciente a M , existen dos variedades que pasan por x , y son transversales $W^s(x)$ y $W^u(x)$ (Son variedades inmersas, no sumergidas, es decir, pueden venir arbitrariamente cerca de sí mismas, pero no cruzarse)

Fig. 3



etc.

Llamemos $W_\varepsilon(x)$ la intersección de esas variedades con una esfera de radio ε alrededor de x

Para algún ε

$$\varphi W_\varepsilon^s(x) \subset W_\varepsilon^s(\varphi(x))$$

$$\varphi^{-1} W_\varepsilon^u(x) \subset W_\varepsilon^u(\varphi^{-1}(x))$$

3) Existe un $\lambda > 1$, $k > 0$ tal que para todo $n \geq 0$

$$d(\varphi^n y, \varphi^n z) \leq K \lambda^n d(y, z) \quad \forall y, z \in W_\varepsilon^s(x)$$

$$d(\varphi^{-n} y, \varphi^{-n} z) \leq K \lambda^n d(y, z) \quad \forall y, z \in W_\varepsilon^u(x)$$

Consecuencias.

i) Los planos tangentes de las variedades $W^s(x)$, $W^u(x)$ en x dependen con continuidad Hölderiana del punto x

(La prueba es bastante útil, ver (20) muchas veces se incluye en la definición)

ii) Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $K = 1$ simplemente cambiando la métrica. Esto es un argumento de John Mather que ahora es standard. Como no voy a hacer cálculos no habrá diferencia, pero si nó, daría lugar a bastante engorro el arrastrar la K . Sin embargo, creo que es bastante instructivo

hacer los cálculos arrastrándola dado que en teoría de Pesin se permite que K dependa de x .

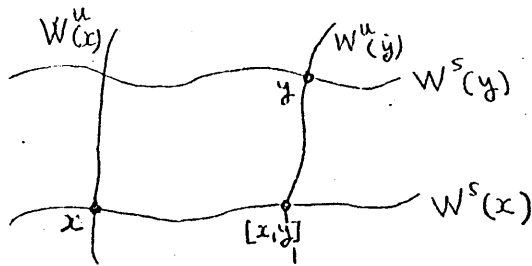
Aquí, supondremos, que $K = 1$. Más aún, ya que, por la observación al final de la sección en particiones markoninas, podemos pasar a construir particiones para φ^n y, podemos suponer λ tan pequeña como queramos.

iii) Esta es la consecuencia más importante. Se llama "Estructura de producto local".

Podemos escoger ε de modo que si $d(x, y) \leq \varepsilon$

$W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ es un solo punto $[x, y]$

Fig. 4



Claramente se verifica

$$[x, x] = x$$

$$[x, [y, z]] = [x, z]$$

$$[[x, y], z] = [x, z]$$

Definición.

Rectángulos:

Se dice que un conjunto es un rectángulo para φ si y sólo si

a) $R = \overline{\text{int} R}$

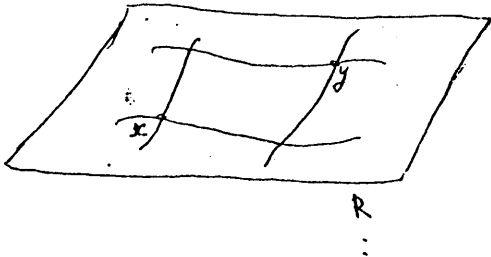
57

b) $\text{diam} R < \epsilon$

(el ϵ que aparece en la definición de estructura de producto local)

c) $x, y \in R \Rightarrow [x, y] \in R$

Fig. 5



Obviamente, los puntos de un rectángulo, se pueden representar únicamente como pares (y, z) donde $y \in W_{\epsilon}^u(x)$, $z \in W_{\epsilon}^s(x)$ respectivamente. x es un punto interior.

Teorema.

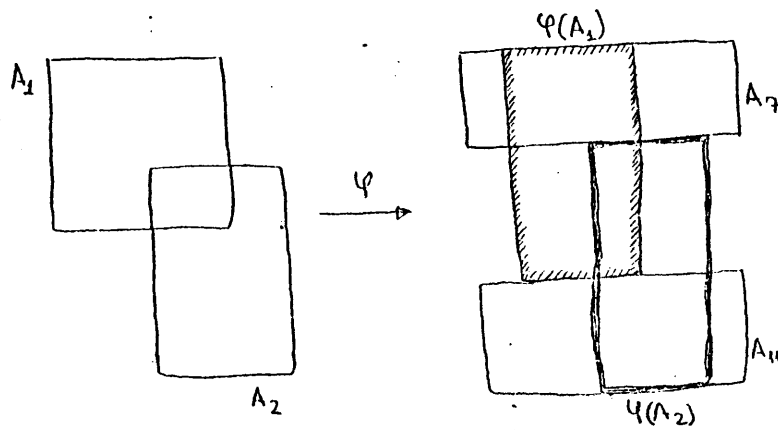
Para todo $\delta > 0$, el sistema (M, φ) admite una partición markoviana con rectángulos de diámetro menor que δ

Se entiende que las propiedades de invariancia y contracción -o expansión- a lo largo de las variedades estables e inestables van a ayudar a que podamos conseguir la situación expresada en la figura 2. Lo único que tenemos que hacer es lograr que las imágenes de los iterados se paren en el lugar adecuado.

Una vez que hemos ajustado esta parte de mandar los bordes a los bordes, es fácil acabar la construcción de particiones de Markov.

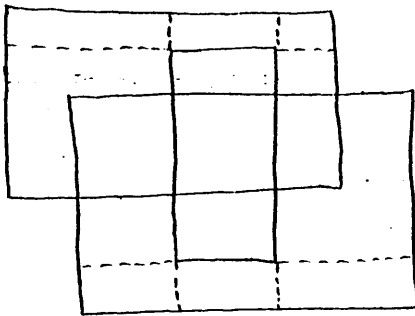
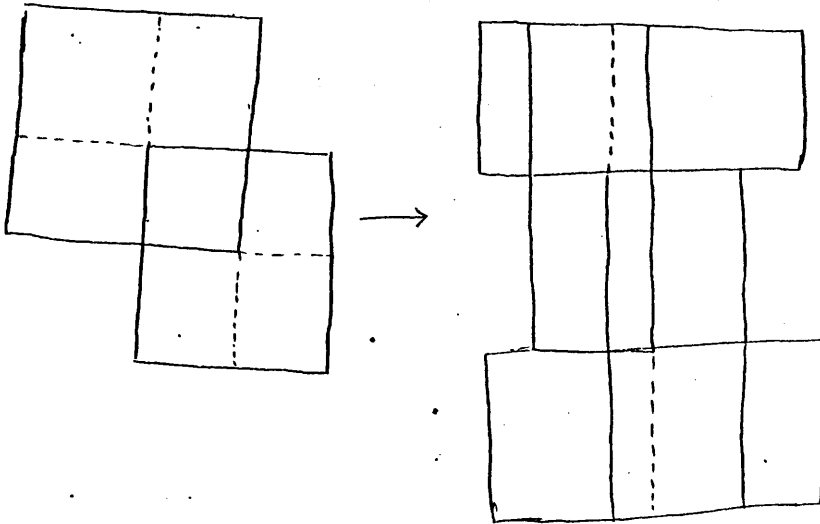
En efecto, supongamos que tenemos un recubrimiento mediante rectángulos cerrados de modo que los bordes estables de uno que-

dan aplicados dentro de los bordes de otro



Podíamos pensar en la partición obtenida, intersecciones de todos los rectángulos, pero, como muestra el ejemplo de la figura, no sería una partición en rectángulos y no sería fácil probar que es una partición de Markov.

El remedio está, en prolongar los bordes obteniendo más rectángulos.



etc.

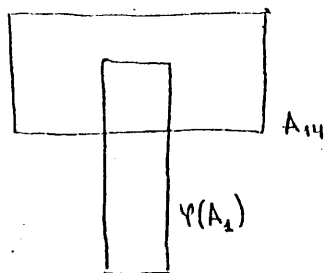
Notando que podemos asumir que λ es tan pequeña como queramos, la escogeremos lo suficientemente pequeña como para que todas las

prolongaciones que queremos añadir queden dentro de los bordes adecuados (necesitamos un lema de recubrimiento para probar que todos los puntos del espacio están suficientemente dentro de un rectángulo, pero es obvio para variedades).

La idea de cómo conseguir satisfacer esta condición es la siguiente.

Empecemos con un recubrimiento mediante rectángulos de diámetro menor que $100^{-1}\delta$ de modo que los interiores cubran todo el espacio.

Fijémonos en el primero de ellos A_1 probablemente no acabe en el borde de un rectángulo sino en el interior



Prolonguemos A_1 -por una distancia menor que $\lambda 100^{-1}\delta$ - de modo que acabe en el borde de A_{14}

Después modifiquemos A_2 de modo que acabe bien también.

El problema está en que es posible que tengamos que ajustar A_{14} . A_1 no va a acabar bien.

En cualquier caso, A_1 sólo fallará por $100^{-1}\lambda\delta$ cuando acabemos.

Iteremos el procedimiento.

En el siguiente paso empezaremos con un cubrimiento que tiene diámetro menor que $(1+2\lambda)10^{-2}\delta$

pero que no falla más que por $\lambda 10^{-2}\delta$

Obviamente, vamos ahora a tener que hacer modificaciones no mayores que $\lambda^2 10^{-2}\delta$ y vamos a acabar a menos de $\lambda^2 10^{-2}\delta$ de la meta.

El proceso es convergente si λ es suficientemente pequeño.

Una vez que hemos ajustado las variedades estables, podemos empezar a ajustar las variedades inestables usando φ^{-1} y el mismo proceso, que se ve no afecta a lo que habíamos conseguido.

Aunque ésta es aproximadamente la idea detrás de la construcción he sido un poco ambiguo en el orden de las selecciones que uno debe hacer. Como ya he dicho, los detalles se encuentran en el artículo y el libro de Bowen.

La única parte que no es trivial, una vez que se tiene esto es la finitud de la ambigüedad

Hay que notar, como mencioné antes que, en general no se obtiene un proceso de Markov sino un proceso de Gibbs. Veamos si puedo explicar por qué.

Imaginemos para simplificar, que, lo que preserva es la medida plana. Si las variedades invariantes fueran estrictamente rectas y φ perfectamente lineal, no es difícil convencerse de que tendríamos un proceso que sería hasta Bernouilli. Si las variedades se curvan ligeramente o φ no es exactamente lineal ello no es cierto. Ahora bien, la diferencia con el caso lineal

es proporcional al cuadrado del tamaño de los rectangulitos que estamos considerando., pero el tamaño de los rectangulitos va disminuyendo exponencialmente con el tiempo.

Esa es precisamente la condición de los estados de Gibbs -da- da heurísticamente- que un punto afecta los siguientes de un modo que decrece exponencialmente. (Ver el capítulo introductorio de (20).

Nótese que una vez que hemos hecho esta codificación no sólo estamos en condiciones de discutir las medidas invariantes, sino también las medidas en el espacio de las órbitas. Esto nos permite discutir propiedades mucho más finas, como correlaciones (ver la pregunta al final del teorema de Birkhoff).

BIBLIOGRAFIA

- (1) I. A. Sinai
Introduction to Ergodic Theory
Princeton Univ. Press. 1977, Princeton.
- (2) R. Shaw
Univ. of California thesis.
- (3) L. Breiman
Probability
Adison Wesley, 1968, N.Y.
- (4) E. Nelson & I. Velo & A.S. Wightman
Constuctive Quantum Field Theory
Lec. Notes in Phys. 25, Springer Verlag, Berlin 1974
- (4) C.J. Preston
Random Fields on countable sets
Cambridge Univ. Press, Cambridge 1974.
- (6) S. Smale
Bull Am. Math. Soc. 73 747-817 (1967)
(ver su reimpresión con comentarios en:
S. Smale The Geometry of time
Springer, Berlin (1981) -)
- (7) D. Ornstein
Ergodic Theory, Randomness and Dynamical Systems
Yale Univ. Press New Haven. 1974

- (8) G. Gallavotti.
 Comm. Math. Phys. 32 183-190 (1973)
- (9) M. Misiuřewiiz
 Pub. Mat. I.H.E.S. 53
- (10) A. Lasota, J.A. Yorke
 Trans A.M.S. 183 481-485 (1973)
- (11) G. Pianigiani
 Boll. U.M.I. 16 374-378 (1979)
- (12) Brush
 Kinetic Theory
 Pergamon. Oxford (1965-1972)
- (13) Oxtoby
 Measure and Category
 Springer, Berlin, (1971)
- (14) N. Dunford, J.T. Schwartz
 Linear Operators I Interscience (1957) N.Y.
- (15) N. Herstein
 Topics in Algebra
 Blaisdell, N.Y. (1964)
- (16) N. Wiener
 Duki Math. Jour, 5 1-18 (1939)
- (17) E. Stein
 Singular integral operators and differentiability
 of functions
 Princeton Univ. Press, (1970) Princeton

- (18) V.A. Rohlin
Russ. Math. Surv. 22 1-52 (1967)

- (19) V.A. Arnold. A. Vez
Ergodic Problems of Classical Mechanics
Benjamin. New York (1968)

- (20) R. Bowen
Equilibrium States and the
Ergodic Theory of Axion Λ Systems.
Lec. Not. in Math 470
Springer. Berlin, (1975)

- (21) C. Shannon
Information Theory

- (22) A. Renyi
Act. Acad. Sci. Hung 8 477-493 (1957) En sus
obras completas.

- (23) R. de la Llave
Aula?

- (24) S. Goldstein
Remarks on the global Markov property
Rutgers preprint

- (25) Stone
Linear Transformations in Hilbert Space
A.M.S. Providence

- (26) I. Prigogine. B. Misra
A aparecer en "Long time prediction in conservative Non-linear systems"
Plenum.
- (27) R. Bowen
Am Jour Math 92 725-747
- (28) O.E. Lanford.
Lecciones en les Houches 1981
a aparecer. North Holland
- (29) Berg.
Univ. of Minnesota thesis
recogido en (30)y(1)
- (30) R. Adler. B. Weiss
Mem. A.M.S. 98 Providence (1968)
- (31) R' Bowen O.E. Lanford
En Symp. Pure Ap' Math. 14
A.M.S. Providence
- (32) P. Collet., J.P. Eckmann
Iterated maps of the interval
as dynamical systems
Birkhäuser, Boston (1980)
- (31) W. Thurston.
Notas tomadas de sus cursos por N. Kuhn.

CAPITULO 2: LA TEORIA DE PRIGOGINE - MISRA- COURBAGE

- I Prefacio
- II Mecánica estadística y dinámica
- III La teoría de Prigogine -Misra- Courbage
- IV Bibliografía

I Prefacio

El principal objetivo de este capítulo es discutir la teoría de Prigogine -Misra- Courbage. Por razones obvias, esta discusión está basada principalmente en (1) dado que dicho trabajo aspira a ser bastante exhaustivo, no incluyo referencias previas, que se pueden encontrar allí.

Tambien, me he decidido a recoger algunos otros argumentos sobre fundamentos de la mecánica estadística que por alguna razón creo que no han recibido suficiente atención y que va a ser la base de la discusión.

Aunque, hoy rechace muchas de las ideas en ellos -voy a explicar por qué- siempre me han parecido muy estimulantes los libros (2) (3) (4) (5). En especial (4), contiene multitud de ideas que aunque no aplicables directamente, a la mecánica estadística, tuvieron profunda influencia en la escuela rusa de sistemas dinámicos (6), entre ellos, la definición de hiperbolicidad y la noción de que debería haber propiedades ergódicas más fuertes que la mera ergodicidad para un buen comportamiento termodinámico, (esta idea se encuentra, quizá tambien en Gibbs) y que deberían ser probadas por técnicas duras.

En cualquier caso, no se pretende hacer una historia del tema. Si cito argumentos antiguos, es porque los considero interesantes aún hoy. La historia de este tema es harto complicada y llena de confusiones en las que no he tenido nunca ni la oportunidad ni la capacidad de profundizar. No hay ningún intento de sistema histórico.

Hasta llegar a la teoría de Prigogine-Misra-Courbage, voy a

hacer razonamientos físicos, pero un tanto vagos; por ejemplo, no voy a decir explícitamente lo que es la segunda ley de la termodinámica. La razón para ello es que no creo que haya una formulación precisa: es más bien una sabiduría difusa que -espero- todos los físicos reconocen.

II MECANICA ESTADISTICA Y TERMODINAMICA

El objetivo de la mecánica estadística es decir las propiedades termodinámicas de los cuerpos macroscópicos de hipótesis dinámicas sobre sus partes constitutivas.

Por ejemplo, nos gustaría ser capaces no sólo de calcular la ecuación de estado que relaciona el volumen específico, la presión y la temperatura, -supuesto que estas existen- sino también conocer el sentido en el que existen estas magnitudes y sus limitaciones.

También nos gustaría, poder calcular -o probar existencia- de los coeficientes de difusión utilizando sólo hipótesis microscópicas.

Igualmente nos gustaría derivar como teoremas, en las condiciones más generales posible, las leyes clásicas de la termodinámica, así como otras hipótesis que se incluyen implícitamente en ellas. (estabilidad termodinámica suficiente diferenciabilidad, etc.)

Para una deliciosa y muy clarificadora visión de todo esto, ver (8)

Estos objetivos están esencialmente conseguidos para la termodinámica del equilibrio. Hay una teoría físicamente satisfactoria y esencialmente completa. Fenómenos como las transiciones de fase, que aparecían como inabordable hace menos de cincuenta años, hoy están, creo, que bastante bien entendidas (*)

En cambio, el problema de estudiar sistemas termodinámicos fuera del equilibrio, se halla en una condición más delicada.

Aunque hay ciertas teorías -notablemente la ecuación de Boltzman que parecen funcionar experimentalmente bien en cierto régimen, no está todavía claro por qué ello es así.

Más aún, hay regímenes de interés -dinámica de sistemas cerca de una transición de fase, plasmas - en los que ni siquiera hay ecuaciones propuestas que resulten sensatas.

Nota.

(*) Uno de los resultados de este análisis es que hay casos en los que las propias magnitudes termodinámicas no existen, por tanto, obligado a reinterpretar las ideas sobre la universalidad, de la termodinámica.

Algunos de estos ejemplos son tan físicos como un imán corriente: la energía de magnetización depende de la forma (factores desimadores) y no es una magnitud de volumen.

Al depositar silicio sobre germanio en capas muy delgadas se obtienen muchos tipos de transiciones de fase, que no se explican sin desechar las condiciones de diferenciabilidad de la energía libre utilizada en la prueba de la regla de las fases que falla.

Pasemos a describir brevemente cuáles son los pasos que llevan a deducir las leyes de la mecánica estadística del equilibrio.

El sistema físico a tener presente como ejemplo es un gas de esferas duras en un recipiente. (Modelo de Maxwell-Boltzman)(**)

Deberemos especificar qué objetos matemáticos asociar a los estados físicos y deducir qué ecuaciones satisfacen estos objetos si los sistemas físicos satisfacen otras condiciones físicas (***).

Nota

(**) Este modelo presenta algunas dificultades matemáticas provenientes del hecho de que las trayectorias singulares que mencionamos en el capítulo anterior son particularmente abundantes, de la posibilidad, -a priori- de colisiones de tres o más bolas, en las que no hay modo de decir qué va a pasar después, o de singularidades más complicadas, como existencia de infinitas colisiones en un tiempo finito. Como sólo se cita como modelo heurístico, nos limitaremos a mencionar que existen y remitir al artículo de Vasertein en Comm. Math. Phys.

Nota

(***) Por supuesto, que las leyes microscópicas son cuánticas. Sin embargo, voy a discutir sólo modelos clásicos. Aparte del interés intrínseco de la mecánica estadística clásica (aplicaciones a la teoría constructiva de campos, belleza formal, aplicabilidad en ciertos casos), desde nuestro punto de vista, el paso interesante es ir de modelos microscópicos a macroscópicos y las técnicas para hacerlo son semejantes -salvo algún artifi-

... /

¿Qué formalismo escoger?

La primera idea que se nos ocurre al pensar en un sistema de partículas, digamos N es asociar a un estado el mismo objeto que le asociaríamos en mecánica. Es decir, un punto en \mathbb{R}^{3N} y suponer que evoluciona en el tiempo siguiendo una ley hamiltoniana.

Sin embargo, es facilísimo probar que tal formalismo no puede contener la termodinámica. En lenguaje moderno, la entropía debería ser una función de Liapounov, pero ello es imposible para un sistema que preserve volumen.

Curiosamente, este argumento era conocido de Poincaré (10). El problema es que su prueba es ciertamente incompleta, va en dirección equivocada y hace hipótesis innecesarias. De todos

.... (***) cio matemático- independientemente de que el sistema sea clásico o cuántico. Hoy en día hay una cantidad considerable de trucos que permiten resolver muchas veces el problema cuántico, cuando el clásico se entiende.

Como observación al margen, es de notar que, históricamente, la mecánica cuántica fué introducida para remediar dificultades de la mecánica estadística clásica (algunas de ellas, como por ejemplo, el hecho de que en mecánica clásica no hay magnetismo -tesis de Bohz-, curiosamente no aparecen)

Periódicamente hay quien propone como alternativa a la Mecánica Cuántica que la mecánica estadística clásica no estaba bien entendida.

modos el lector interesado disfrutará leyéndolo. (*).

El propio Poincaré probó su teorema de recurrencia pensando en este problema. Está claro que un sistema que vuelva siempre arbitrariamente cerca del punto de partida no puede tener una entropía siempre creciente (a menos que ésta sea severamente discontinua) Ver (11) para conocer la polémica que se creó. Buena parte de ella es sin duda debido a que en la época no existía todavía la teoría de la medida y el modo que tiene Poincaré de mejorar uniones contables es simplemente llamando al volumen "probabilidad" que en aquella época tenía demasiadas resonancias metafísicas que alimentaron la discusión

Nota

(*) Arthur Wighman me comunicó en carta unos resultados muy bellos de Ira Herbst que iban en la dirección de completar la prueba de Poincaré. A él le debo también el llamarme la atención sobre la existencia de este artículo de Poincaré.

Nótese que ninguno de estos argumentos utiliza la reversibilidad en el tiempo que es otra fuente independiente de problemas.

La propuesta -quizá hecha de modo más coherente que nadie por Gibbs- es la de interpretar un estado como una distribución de probabilidad, que asocia a cada observable microscópico su valor observado. En aquella época la interpretación de las medidas de probabilidad era la que hoy se llamaría "frecuencista". (La probabilidad de un suceso es la frecuencia con que se da cuando se hace el experimento un número suficientemente grande de veces cada una de ellas independientemente de las demás).

Por tanto, la imagen que Gibbs sugiere siempre tener presente es una "colectividad". De ahí el nombre que ha perdurado hasta hoy. Por supuesto que, hoy en día, se prefiere tener otras imágenes.

Si nuestra medida en el espacio de las fases es una delta de Dirac y la evolución es hamiltoniana estamos en el caso anterior y, por supuesto, en las mismas dificultades, pero ahora tenemos más lugar para maniobrar.

Tomemos por ejemplo

$$\Omega = [0,1]$$

μ medida de Lebesgue

$$\psi(x) = 2x \quad (\text{mod. } 1)$$

(Este es un ejemplo muy típico: hiperbolicidad;)

Por supuesto, el preservarse la medida de Lebesgue, se aplican los argumentos que hemos mencionado antes (el argumento de

Poincaré y el teorema de recurrencia). Sin embargo, no es difícil probar que si tomamos como espacio de observables las funciones en L^2 y como distribuciones iniciales sólo aquellas también en L^2 , cualquiera que sea $\rho \in L^2$

$$\langle T^{*n} \rho, f \rangle \rightarrow \int f d\mu \quad \forall f \in L^2$$

Es decir, $T^{*n} \rho$ tiende a la medida de Lebesgue en sentido débil $-*$, que, en vista de la interpretación de las medidas como reglas que asocian a un observable su valor observado es bastante natural.

Los sistemas que satisfacen esta propiedad se llamarán "mezclantes" ("mixing" en inglés).

Se puede probar que esta propiedad implica ergodicidad.

En efecto:

Supongamos que A es un conjunto invariante de medida no cero

$$\text{Tomemos } \rho = \frac{1}{\mu(A)} \chi_A, \quad f = \chi_A$$

$$\langle T^{*n} \rho, f \rangle = 1$$

Pero, por otra parte, debería tender a

$$\int \chi_A d\mu = 1$$

Por tanto, los únicos conjuntos invariantes tienen medida cero o uno, i. e. el sistema es ergódico.

Sin embargo, el sistema consistente en una rotación irracional del círculo es ergódico pero no mezclante.

Desde este punto de vista, parece pues lógico, que los únicos sistemas que presentarán interés termodinámico serán los mezclantes.

Se puede probar también que los sistemas K son mezclantes y también se puede mostrar ejemplos probando que la inclusión es estricta.

(El flujo horocídico sería quizá el más físico). Ver (12)

Una vez que nos hemos decidido a que los estados sean medidas en un espacio de configuración queda por hacer algunas precisiones sobre cual puede ser ese espacio.

Hay un hecho físico que va a ser importante; hay sistemas con transiciones de fase y a veces, esas fases coexisten. Naturalmente, dependiendo de las proporciones de esas fases, tendremos diferentes estados de equilibrio.

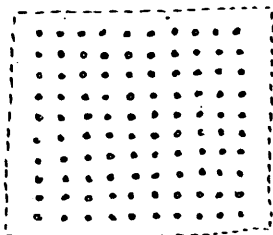
Es natural que si μ_1 y μ_2 son las medidas que representan la fase I y la fase II respectivamente, y α , $(1-\alpha)$ son las proporciones de las dos fases. Al estado mezcla, le asociamos $\alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2$

(Las magnitudes microscópicas observadas deberían ser combinación de las de la fase pura).

Esto puede sorprender un poco a las personas con la formación media de un físico teórico.

¿A caso no da la prescripción de Boltzman-Gibbs una prescripción única?

Veamos con detalle un caso sencillo: el modelo de Ising en dos dimensiones. Cojamos una caja y tratemos de calcular la función de partición.



Pronto veremos que en los bordes de la caja, no sabemos qué energía asignar.

Podíamos pensar que es automático que los efectos frontera no importan (de hecho libros standard, lo "prueban")

Si estuviésemos en el cero absoluto, ello ciertamente no sería así puesto que el poner todos los valores frontera positivos forzarían a ser positivos en la caja y valores negativos en la frontera lo contrario.

Hay circunstancias -largas longitudes de correlación;- en las que no se puede concluir que las condiciones de frontera no afectan el estado termodinámico en el interior

Pero ya hemos visto que la prescripción de Boltzman-Gibbs requiere condiciones de frontera;

El único camino sensato, parece ser ir tomando cajas cada

vez mayores y diferentes condiciones de frontera. Fijémonos en una región finita: es posible que ese proceso converja para todas las funciones que dependan sólo de variables en ella.

Más aún, puede que converja para cualquier conjunto finito.

Una de las sorpresas técnicas es que este procedimiento es equivalente a considerar estados en espacios de configuración infinitos (13) (14) - o los artículos originales de Lanford y Ruelle.

Para algunos físicos resulta escandaloso el considerar sistemas infinitos. Después de todo el radio del Universo es limitado; Bueno, lo mismo puede decirse de tomar derivadas para calcular la velocidad. (¿Sabemos qué pasa a distancias menores que la longitud de Planck?). En nuestro caso, al estudiar sistemas infinitos solemos estarnos restringiendo a estudiar las propiedades que no pueden ser modificadas haciendo el sistema mayor.

Aunque, como he dicho, para el equilibrio ambos puntos de vista lleven al mismo formalismo, es posible que ello no sea así para el no equilibrio.

Aún hoy creo que los artículos que mejor clarifican estos dos puntos de vista son las contribuciones de Oscar Lanford y de Aizenman, Goldstein y Lebowitz en (15). Puestas a punto más modernas se encuentra en (16) que, es ciertamente, imprescindible.

En cuanto al problema de justificar la prescripción de Boltzmann - Gibbs, se han propuesto muchos argumentos -incluyendo el francamente repulsivo de decir simplemente que parece funcionar-. Mi favorito es el contenido en la tesis de E. Nelson que lo que hace es caracterizarlos como los estados estaciona-

rios que son indistinguibles de los que obtendrían haciendo evolucionar el sistema en la dirección contraria del tiempo.

Nótese que esta condición de "reversibilidad" no es una condición dinámica, aunque lo parezca. Puede escribirse como una serie de condiciones de compatibilidad.

Desde un punto de vista técnico, si nuestros únicos objetos son medidas, y nuestros únicos argumentos de teoría de la medida, no hay ninguna dificultad en considerar espacios de configuración de infinitas partículas, porque la teoría de la medida solo utiliza compacidad y normalidad -hipótesis del teorema de Riesz - que se mantienen cuando tomamos productos infinitos. Si queremos hacer dinámica, es bien conocido que la teoría de existencia y unicidad, requiere propiedades más finas como continuidad y condiciones Lipschitz cuya estructura queda totalmente alterada al pasar a un número infinito de partículas.

Curiosamente, las propiedades ergódicas de los modelos cambian totalmente: un gas de infinitas partículas libre no sólo es ergódico y K sino también Bernouilli; (La prueba, debida a Sinai, muy sencilla, una vez que se entienden las definiciones, se encuentra en el artículo de Aizenman, Goldstein, y Lebowitz (15)).

La teoría de irreversibilidad propuesta por O. Lanford en (15) incorpora todas estas ideas:

Tomamos una sucesión de modelos de gases de esferas duras, caracterizados por el número de partículas, el volumen, y el radio de los átomos.

Si tomamos el límite de un modo muy preciso (límite de Grad)

y una distribución inicial (suma de δ 's) que converge -después de reescalar- un límite, la ecuación satisfecha- durante un cierto tiempo por esos límites de distribuciones es la ecuación de Boltzan.

Desgraciadamente, sólo parece servir para probar validez durante un tiempo finito.

III LA TEORIA DE PRIGOGINE - MISRA - COURBAGE

Esta teoría es un poco diferente del marco que hemos estado discutiendo.

Esencialmente, lo que los autores proponen es una reinterpretación del proceso de medida, de modo que con ella la teoría cinética sea un teorema.

Lo que los autores proponen poner en juego es el hecho de que, bajo evolución temporal, los conjuntos del espacio de las fases se complica mucho y además, son casi independientes, después de un cierto tiempo.

En este aspecto, es una teoría de irreversibilidad para sistemas K (hay también versiones cuánticas, pero no las voy a discutir) y, por tanto, es independiente de si esos sistemas K provienen de un número finito o infinito de partículas.

La razón por la que pienso que es una teoría de un número finito de partículas es que sólo sirve para establecer relación al equilibrio de medidas que son absolutamente continuas con respecto a la medida de equilibrio. Para sistemas de un número finito de partículas no creo que sea una restricción demasiado severa desde el punto de vista físico. Sin embargo, para sistemas de un número infinito de partículas las medidas absolutamente continuas son aquellas en las que el sistema está en equilibrio salvo una perturbación local (ver (15)) que es, ciertamente, menos de lo que querríamos probar.

Es posible que pudiera obtenerse una teoría más física a partir de estas ideas aplicándolas a una sucesión de modelos de tamaño creciente. Parece, sin embargo, que no sería muy satisfactorio considerarla como una solución definitiva.

Estas opiniones, parecen reforzadas por la investigación que sigue sobre la velocidad con la que se produce el acercamiento al equilibrio. Parece demasiado lenta para acomodar algunas ecuaciones cinéticas aunque, claro está, tomar límites termodinámicos podía cambiar esto radicalmente.

Como veremos, la irreversibilidad y la segunda ley -una versión de ella- son un teorema y, en ese aspecto, las conclusiones son interesantes. Queda, por supuesto, el problema de decidir si el precio a pagar-una reinterpretación del proceso de medida- vale la pena.

Prigogine - Misra observan que para sistemas K , dada su inestabilidad, resulta muy difícil hacer preparaciones de modo que las trayectorias de un sistema sigan una prefijada durante un tiempo apreciable. Por tanto, el concepto de trayectoria individual pierde sentido.

Cuando observamos un sistema, no observamos la "verdadera" densidad ρ , sino una versión difuminada de ella $\tilde{\rho} = \Lambda \rho$ donde Λ es un operador lineal que, para poder mantener la interpretación de $\tilde{\rho}$ como una densidad de probabilidad debe ser un operador markoviano. Dada su interpretación como operador hace las cosas más borrosas es razonable suponer que es un operador doblemente markoviano.

Como mencionamos antes, nos restringiremos a considerar estados absolutamente continuos, de hecho, siguiendo práctica standard en la teoría, limitándonos a estados en L^2 . Por com-

pletitud, tambien daremos algunos otros resultados para otros L^p . Muchos de ellos, como se verá, se siguen de los resultados L^2 y de los mucho más sencillos dada la doble markovianidad de $L^1 \rightarrow L^\infty$ mediante "interpolación" (19) (que ya ha sido invocada para la acotación $\|W_t\|_{L^p \rightarrow L^p} = 1$. Deduciremos estos resultados de esta cota en vez de probarlos directamente, que, probablemente, sería más elegante matemáticamente).

Si Λ es inyectivo podremos describir nuestro sistema tanto usando ρ como $\tilde{\rho}$. En la descripción usando $\tilde{\rho}$, la dinámica vendrá dada por

$$\tilde{\rho}_t = \Lambda U_t \Lambda^{-1} \tilde{\rho}_0$$

Hay que notar que, en general, Λ^{-1} no estará definida en todo punto, pero, requeriremos que esté definida en un conjunto denso.

Para que estos operadores puedan interpretarse como una dinámica en el conjunto de distribuciones de probabilidad que preserva 1, el estado de equilibrio, $\Lambda U_t \Lambda^{-1}$ debería ser un operador doblemente markoviano en su dominio de definición. De esto se puede deducir (18) que preserva todos los espacios L^p , $1 \leq p \leq \infty$ de modo que su norma es 1 como operador de L^p en L^p . Por tanto, tiene una extensión única W_t a todo L^p que también es doblemente estocástica.

Obsérvese que sólo podemos hacer estos requerimientos para $t \geq 0$. Nuestro objetivo es que $\|\tilde{\rho}_t - 1\|_{L^2}$ tienda a cero; por tanto W_{-t} no puede estar uniformemente acotado y, por tanto, no puede ser doblemente estocástico.

(Una de las consecuencias de esto es que hay densidades cuya historia sólo se extiende un tiempo finito en el pasado)

El objetivo sería probar que todas las distribuciones en L^2 se acercan al equilibrio monótonamente. La definición que tomamos de aproximación monótona es $\| \tilde{P}_t - 1 \|_{L^2} \rightarrow 0$ monótonamente.

Prigogine-Misra propone llamar a esta cantidad la entropía del sistema.

A mi modo de ver, esta no es una definición totalmente satisfactoria, puesto que si tomamos dos sistemas independientes, la entropía del sistema compuesto no es la suma de las entropías.

Una definición, bastante en la filosofía de Prigogine-Misra que goza de esta propiedad, se encuentra en (20). Muchas de las técnicas de este artículo fueron muy útiles en la que considero la mejor versión de esta teoría (21). Voy a seguir este último muy de cerca para un resumen de la teoría.

En resumen, estamos buscando un operador Λ de modo que

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda \text{ preserva positividad} \\ \Lambda^* 1 = 1 \\ \Lambda 1 = 1 \end{array} \right\} \text{doble markovianidad}$$

Λ^{-1} Definida en un conjunto denso

$W_t = \Lambda U_t \Lambda^{-1}$ (cierra) preserva positividad de esto, usando lo anterior se sigue doble markovianidad de W_t

$\| (W_t - P_{t, \alpha}) \rho \|_{L^2} \rightarrow 0$ monótonamente.

Lo que vamos a hacer es dar un método general de construir los operadores Λ -satisfaciendo todos los requerimientos anteriores para todos los sistemas K .

La construcción, como se verá, es sorprendentemente general y sólo utiliza argumentos blandos. Al final discutiremos su importancia.

Las notaciones para los objetos asociados a los sistemas $-K$ son las mismas que en el capítulo anterior. Por conveniencia para el lector repetimos las que vamos a usar.

Una dinámica T_t induce un semigrupo de operadores U_t . Si la dinámica es un sistema $-K$ tenemos una familia de proyecciones verificando

$$a) P_\lambda \leq P_{\lambda'} \quad \text{cuando } \lambda < \lambda'$$

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_\lambda = \text{Id}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_\lambda = P_{-\infty} \equiv \text{proyección sobre constantes}$$

$$c) U_t^* P_\lambda U_t = P_{\lambda-t}$$

$$d) U_t^* P_{-\infty} U_t = P_{-\infty} \quad (\text{se sigue de las anteriores})$$

$$e) P_\lambda \text{ preserva positividad.}$$

Aunque ya hemos probado un sistema K verifica estas propiedades es interesante mencionar que el converse tambien es cierto. Esto se sigue del hecho (lecciones de Nelson en (25)) que las proyecciones que preservan positividad son valores esperados con respecto a una σ -álgebra. Por la propiedad C), estas σ -álgebras han de verificar las propiedades de la definición de sistema K

Trataremos de construir Λ del siguiente modo

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) dP_{\lambda} + P_{-\infty}$$

Hay que notar que P_{λ} no es una descomposición de la unidad por el molesto $P_{-\infty}$. Sin embargo

$$F_{\lambda} = P_{\lambda} - P_{-\infty}$$

Sí que es una partición de la unidad sobre el subespacio de las funciones de integral cero. Con frecuencia lo utilizaremos en vez de los P

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) dF_{\lambda} + P_{-\infty}$$

Vamos ahora a tratar de traducir las propiedades que necesitábamos de Λ en propiedades de h y a comprobar que hay funciones que la satisfacen

- a) Es claro que independientemente de cual sea h , la forma nos garantiza $\Lambda^2 1 = \Lambda(1) = 1$ (h real)
- b) Intégramo por partes (supondremos h suficientemente regular)

$$\Lambda = - \int_{-\infty}^{\infty} h'(\lambda) P_{\lambda} d\lambda + (1 - h(-\infty)) P_{-\infty}$$
 De modo que cuando $h'(\lambda) \leq 0$, $(1 - h(-\infty)) \geq 0$
 Λ es combinación con coeficientes positivos de operadores que preservan positividad (*)
- c) Si $h(\lambda) \neq 0$ entonces Λ^{-1} está densamente definido.

Observemos que W_t preserve positividad si y sólo si $U_t^* W_t$ lo hace. Un cálculo sencillo muestra que

$$U_t^* W_t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\lambda+t)}{h(\lambda)} dF_{\lambda} + P_{-\infty}$$

con lo cual la discusión vuelve al punto b). Nótese que ya tenemos

$$(i) \quad 0 < \frac{h(\lambda+t)}{h(\lambda)} \leq 1$$

$$(ii) \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{h(\lambda+t)}{h(\lambda)} = 1$$

Nota

(*) El que la función sea decreciente y acotada ya garantiza suficiente regularidad si interpretamos $h(\lambda)$ como integral de Stieltjes. Claramente es un punto sin importancia y, aunque se puede comprobar que es una suposición superflua, se puede asumir que h es continuamente derivable.

Para una distribución de probabilidad en L^2 tenemos

$$\begin{aligned} \|W_t P - 1\|_{L^2}^2 &= \|U_t^* W_t P - P_{-\infty} P\|_{L^2}^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\lambda+t)}{h^2(\lambda)} d\langle P, F_{\lambda} P \rangle \end{aligned}$$

Dado que $d\langle P, F_{\lambda} P \rangle$ es una medida positiva y finita y que $\frac{h^2(\lambda+t)}{h^2(\lambda)}$ decrece monótonamente con t para λ fijo usando el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, $\|W_t P - 1\|_{L^2} \rightarrow 0$ monótonamente, supuesto que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda+t)}{h(\lambda)} = 0 \quad \text{para todo } \lambda$$

Esto sucede si y sólo si $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = 0$

La construcción de Λ está, por tanto, completa en cuanto encontremos un función h que satisfaga simultáneamente:

- a) monótona decreciente
- b) $h(-\infty) \leq 1$
- c) $\frac{h(\lambda+t)}{h(\lambda)}$ decreciente con λ para todo t
- d) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} h(\lambda) = 0$

Las funciones que satisfacen estas condiciones son las exponenciales de funciones, cóncavas, negativas, decrecientes, tendiendo a cero. condiciones que son claramente compatibles. (e.g. e^{-x})

Ahora nos gustaría investigar propiedades más finas de esta construcción. El objetivo declarado de esta construcción es

convertirla eventualmente en una derivación exacta de una ecuación cinética. Por supuesto, para hacer eso, presumiblemente habría que hacer un análisis duro adaptado al modelo. Esto no estaría demasiado lejos de las ideas en (23) (24).

Sin embargo, como vamos a ver, esta construcción tiene una limitación -incluso a este nivel abstracto-: que todas las ecuaciones cinéticas que se pueden derivar por este procedimiento tendrían cero perteneciendo al espectro -es decir, no habría tiempos de relajación-.

Es de notar, sin embargo, que esta teoría está adaptada al formalismo microcanónico mientras que la mayoría de las ecuaciones cinéticas están formuladas en el formalismo canónico.

El objetivo del argumento es caracterizar de algún modo los estados que decrecen lentamente.

El instrumento idóneo para hacer esto es un argumento de categoría (*). La única dificultad es que estamos interesados en hacerlo en un subconjunto -el de los estados que tiene interior vacío. Sin embargo, por la linealidad, controla todo lo que pasa en el espacio.

Nota

(*) Fieles a la tradición de la teoría ergódica de mezclar diferentes estructuras, el argumento de la categoría es extraño, puesto que aunque sus conclusiones son topológicas, sus hipótesis-completitud y metricidad-no lo son.

Así que es poco sorprendente el siguiente teorema (que obviamente es generalizable)

Teorema 1

Sea $E_p = \{p \geq 0, \int p = 1, p \in L^p\}$ $2 \leq p \leq \infty$

Sea $\{A_\alpha\}$ una familia de operadores $A_\alpha: L^p \rightarrow L^2$ continuos.

de modo que $\|A_\alpha\|$ no está acotada cuando α recorre I .

Entonces, hay un conjunto residual-en la topología L^p de E_p -de modo que todos sus elementos x tienen la propiedad que $\|A_\alpha x\|$ no está acotado.

Prueba

Llamemos $B_r = \{x / x \in L^p, \|A_\alpha x\|_2 \leq r \forall \alpha\}$, $r \in \mathbb{R}^+$

Por la definición $B_r \cap E_p$ son cerrados en E_p

bastaría probar que de interior vacío, puesto que entonces

$E_p - (B_r \cap E_p)$ sería abierto y denso y $\bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} E_p - (B_r \cap E_p)$ es precisamente el conjunto de puntos x en E_p para los que $\|A_\alpha x\|$ no está acotado.

El modo de probar esto es mediante contradicción. Probaremos que si uno tuviese interior no vacío en E_p , entonces $\|A_\alpha\|$ estaría acotado.

Así que supongamos que existen, $r, \varepsilon > 0$ y $x_0 \in E_p$ de modo que $\|x - x_0\|_p \leq \varepsilon$, $x \in E_p \Rightarrow x \in B_r$
Entonces podríamos encontrar $\delta \geq 0$, tal que $\|y\|_p < \delta$
 $\Rightarrow \|(1 + \int y d\mu)^{-1} (y + x_0) - x_0\|_p < \varepsilon$
Si $y \geq 0$, claramente $(1 + \int y)^{-1} (y + x_0) \in E_p$
y, por suposición debe pertenecer a B_r . De modo que

$$(y+x_0) \in B_{r(1+\delta)} \quad \text{y por tanto} \quad y \in B_{r(2+\delta)}$$

En otras palabras, cualquier función en L^p positiva, y de norma menor que δ pertenece a $B_{r(2+\delta)}$

Escribiendo cualquier función como diferencia de su parte positiva y su parte negativa, esto implica una cota uniforme para $\|A_\alpha\|$

De aquí se deducen fácilmente los siguientes teoremas

Teorema 2

Sea E_p definido como antes. Entonces, dada cualquier $f(t) \rightarrow 0$ y cualquier Λ construida como se ha indicado anteriormente, hay un conjunto R_p residual en la topología L_p de E_p de modo que $f(t)^{-1} \|(W_t - P_\infty)e\|_2$

no está acotado para todo $p \in R_p$

Como vamos a probar existencia de ciertos estados, es posible que al imponer más condiciones a los estados, estos desapareciesen. Una condición que surge naturalmente en mecánica estadística es simetría bajo intercambio de argumentos. La conclusión, sin embargo, se mantiene y, en el curso de la prueba, quedará claro que hay muchas otras simetrías que tampoco alteran la conclusión.

Teorema 3

$$\Omega = (\Delta)^m$$

$$E_p = \{ \rho \mid \rho \in L^p, \rho \geq 0, \int \rho = 1, \rho \text{ simétrico bajo intercambio de argumentos} \}$$

Entonces dada cualquier $f(t) \rightarrow 0$ y cualquier Λ construida como anteriormente y que preserve esta simetría (mostremos que ello es posible) existe un conjunto $R_p \subset E_p$ que es L^p -residual de modo que

$$f^{-1}(t) \| (W_t - P_\omega) \rho \|_2 \text{ no está acotado para todo } \rho \in R_p$$

Nótese que la condición de que Λ preserve la simetría puede justificarse por la misma razón por la que exigíamos markovianidad: que aplique estados en estados.

Prueba

En vista del teorema 1, bastaría probar

$$(*) \quad \| (W_t - P_\omega) \|_{L^p \rightarrow L^2} = 1$$

dado que entonces, a fortiori, tendríamos

$$f^{-1}(t) \| W_t - P_\omega \|_{L^p \rightarrow L^2} \text{ no acotado}$$

El resultado con $L^2 \rightarrow L^2$ es muy fácil

$$\| W_t - P_\omega \|_{L^2 \rightarrow L^2} = \| U_t^* W_t - P_\omega \|_{L^2 \rightarrow L^2}$$

Pero, este es un operador que ya tenemos diagonalizado con lo que es sólo cuestión de una simple comprobación.

Para obtener el resultado más fuerte, lo único que tenemos que hacer es comprobar que las funciones que saturan la norma del operador, tienen norma L^∞ menor que 1.

Claramente, el método de saturar la norma es poner masa cerca de $\lambda = -\infty$ (en la representación de \mathcal{P}_λ)

Si una función $\psi \in L^2$ satisface

$\mathcal{F}_\tau \psi = \psi$ — tiene toda su masa a la izquierda de τ — puede comprobarse que

$$\| (W_t - P_{-\infty}) \psi \|_2^2 \geq \frac{h^2(t+\tau)}{h^2(\tau)} \|\psi\|_2^2$$

Podemos tomar ψ de la forma $\psi = \chi_A - \mu(A)$ donde A es un conjunto de \mathcal{F}_τ

Si A tiene medida $1/2$, la norma L^2 de ψ coincide con la norma L^∞

Dado que todas las σ -álgebras \mathcal{F}_t son isomorfas y que $\bigvee \mathcal{F}_t$ contiene conjuntos de medida $1/2$, debe contener conjuntos de medida arbitrariamente próxima a $1/2$.

De aquí obtenemos.

$$\| W_t - P_{-\infty} \|_{L^\infty \rightarrow L^2} \geq \frac{h(t+\tau)}{h(\tau)},$$

como τ es arbitrario tomando $\tau \rightarrow -\infty$ obtenemos

$$\| W_t - P_{-\infty} \|_{L^\infty \rightarrow L^2} \geq 1$$

(que en realidad es todo lo que necesitamos). La otra desigualdad es trivial.

Por tanto, hemos probado (*) y, usando el teorema 1, el teorema 2.

La prueba del teorema 4 es totalmente similar, lo único que hay que tener en cuenta es mantener en cada paso el requerimiento de simetría. Lo que no es absolutamente trivial es comprobar (*). Pero U_t debe reservar la simetría y V_t contiene conjuntos simétricos de medida arbitraria.

Observación 1

El escoger B^2 para los teoremas anteriores se hizo porque sólo para L^2 hemos podido probar monotonicidad de la convergencia al equilibrio -que hay convergencia se sigue de un argumento de equicontinuidad-.

Es posible, sin embargo probar: para cualquier $f(t) \rightarrow 0$ y cualquier q , $1 \leq q \leq \infty$, hay un conjunto R_q^f residual en E_p de modo que $f(t)^{-1} \|(W_t - P_\infty)p\|_q$ no está acotado para todos los $p \in R_q^f$.

El razonamiento para probarlo es el mismo. Sólo necesitamos que

$$\|W_t - P_\infty\|_{L^\infty \rightarrow L^1} \geq K > 0$$

Esto se prueba observando que, $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1 \|x\|_\infty$

Por tanto

$$\begin{aligned} \|(W_t - P_\infty)p\|_2^2 &\leq \|(W_t - P_\infty)p\|_1 \|(W_t - P_\infty)p\|_{L^\infty} \\ &\leq \|(W_t - P_\infty)p\|_1^2 \|p\|_\infty \end{aligned}$$

Usando que $\|(W_t - P_\infty)\|_{L^\infty \rightarrow L^2} = 1$

Obtenemos que

$$\|W_t - P_\infty\|_{L^\infty \rightarrow L^1} \geq \frac{1}{2}$$

Podemos, pues, decir que en cierto sentido preciso, la convergencia lenta al equilibrio es el comportamiento más abundante. Esto no quiere decir que no haya comportamientos exponenciales.

Teorema 4

Hay un conjunto $D \subset E$ (E como en los teoremas 2, 3) de modo que

$$\|(W_t - P_\infty)p\| \leq K(p) e^{-\alpha t} \quad \alpha > 0$$

donde α es una constante que solo depende de h .

Este conjunto es no trivial en el sentido de que es L^2 - denso en el conjunto

$$\{p \in E : \|p - 1\|_\infty \leq \frac{1}{3}\}$$

Podríamos hacer afirmaciones más fuertes sobre su tamaño, pero no vale la pena por el momento

Prueba

El conjunto D lo vamos a construir como aquellos estados que tienen toda la masa a la derecha de un cierto punto.

si $p \in L^2$ y $p \in \text{Ran}(I - F_\varepsilon)$ para algún ε

$$\begin{aligned} \|(V_t - P_{-\omega})\rho\|_{L^2}^2 &= \int_0^\infty \frac{h^2(\lambda+t)}{h^2(\lambda)} d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle \leq \\ &\leq \frac{h^2(\tau+t)}{h^2(\tau)} \|\rho - P_{-\omega}\rho\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Como h es log-convexa, existen $\alpha, K_\tau > 0$ de modo que

$$\frac{h(\tau+t)}{h(\tau)} \leq K_\tau e^{-\alpha t}$$

Ahora, si ρ es un estado y $\|\rho - 1\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2}$ entonces $(1 - F_\tau)\rho$ es también un estado, dado que

$$\|1 - F_\tau\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} \leq 3 \quad \gamma \quad (1 - F_\tau)1 = 1$$

Pero

$$(1 - F_\tau)\rho \xrightarrow{L^2} \rho \quad \text{cuando } \tau \rightarrow -\infty$$

de modo que, como afirmamos, todos los estados suficientemente cerca de 1 pueden ser aproximados en L^2 por estados decayendo exponencialmente

El teorema, tal como se ha enunciado, no es óptimo. Cual - quier función $f(t)$ tal que $h(\tau+t) \leq K(\tau) f(t)$

podría ser utilizada en vez de $e^{-\alpha t}$

Hay algunos h satisfaciendo las condiciones necesarias para definir una Λ de modo que todas las f 's son a lo más exponenciales. Hay otras, sin embargo, que admiten un decrecimiento más rápido

$$(e^{-e^x} \text{ p. ej.})$$

(Si escribimos $h(\lambda) = e^{-\Phi(\lambda)}$ podríamos tomar α tan cerca como queramos de $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Phi'(\lambda)$)

Si este límite es ∞ podremos tomar funciones más rápidas que exponenciales)

Tenemos el siguiente teorema que puede ayudar a clarificar cuán lejos está el teorema anterior de ser óptimo.

Teorema 6

Sea $f(t)$ satisfaciendo $\frac{f(t)}{h(\tau+t)} \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0$ todo t .

Entonces no hay ninguna función ρ que tienda al equilibrio más deprisa que $f(t)$.

Es decir, no hay ninguna función $\rho \in L^2$ tal que $\rho \neq$ constant.

Prueba

Dado que $\int d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle = \|\rho - P_\infty \rho\|_2^2$
debe haber un τ de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle > 0$$

Pero $d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle$ es una medida positiva y

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(t)^2} \|(W_t - P_\infty) \rho\|_2^2 &= \frac{1}{f(t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\lambda+t)}{h^2(\lambda)} d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle \gg \\ &\geq \frac{h^2(\tau+t)}{f^2(t) h^2(\tau)} \int_{-\infty}^{\tau} d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle \end{aligned}$$

Si el objetivo de la teoría era derivar directamente la teoría cinética, los resultados anteriores son un poco desilusionantes. Podemos preguntarnos si cambiando un poco el formalismo podríamos obtener resultados más esperanzadores.

Sin embargo, puede comprobarse que los resultados del argumento son bastante difíciles de modificar pues están basados en un argumento bastante general -de la categoría-. Por ejemplo, son también ciertos si decidimos imponer a los estados la condición de ser funciones continuas -el único paso a comprobar es que la norma $\|W_t - P_{-\infty}\|_{C^0 \rightarrow L^2}$ es uno, pero, bajo hipótesis muy débiles en el espacio, podemos aproximar por funciones continuas sin aumentar la norma de éstos.

Desde el punto de vista dinámico parece que podría ser interesante exigir algo más a las particiones -por ejemplo ser markovianas- y algo más a los estados -por ejemplo continuidad Holder-. En ese caso, es bien conocido que hay propiedades de "cluster" y muchas otras propiedades relacionadas con el límite.

Otra posibilidad proviene del siguiente razonamiento: En realidad, lo que estamos haciendo es poner masa cerca de $\lambda = -\infty$. Hay condiciones que podemos imponer como por ejemplo

$$\int |\lambda| d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle < \infty$$

Entonces

$$\int \frac{h^2(\lambda+t)}{h^2(\lambda)} d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{1}{(|\lambda|+1)} \frac{h^2(\lambda+t)}{h^2(\lambda)} \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda|+1) d\langle \rho, F_\lambda \rho \rangle$$

De modo que ρ tiende al equilibrio más deprisa

$$g(t) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{1}{(|\lambda|+1)^{1/2}} \frac{h(\lambda+t)}{h(\lambda)}$$

Esta condición tiene la interpretación de que "la edad interna" del estado tiene sentido.

Otra posibilidad que cabe considerar es que estos estados decreciendo despacio, se hubiesen introducido al tomar el cierre.

No es así puesto que las pruebas anteriores pueden repetirse, paso por paso, para

$$V_t = \Lambda U_t = \int h(\lambda+t) dP_\lambda + P_{-\infty}$$

Dado que

$$V_t \tilde{P} = W_t \Lambda \tilde{q}$$

está claro que los estados decreciendo lentamente para V_t generan estados en $\text{Ran } \Lambda$ decreciendo lentamente para W_t .

Por supuesto, puede argüirse bastante sobre cuál es el marco funcional en el que hacer mecánica estadística. En mecánica cuántica se han considerado varias posibilidades (25), curiosamente para tratar problemas que tienen una cierta similitud con los aquí discutidos (la teoría de Scattering en la versión de Lax y Phillips tiene unas ciertas similitudes técnicas con la formulación de sistemas $-K$ que hemos utilizado. (Debo agradecer a M. Galella haberme informado de estos resultados y su ayuda cuando ambos asistíamos a un curso de B. Simon)

Otra posibilidad a considerar, es que podría parecer otra nueva construcción de operadores a la que no se aplicasen los argumentos aquí discutidos. Como ya hemos mencionado, no sería el final de toda la historia, sería un avance, si acaso, en la estrategia.

Me gustaría, sin embargo, llamar la atención a un punto importante traído por la teoría y es que posiblemente la definición actual de entropía para un estado —de un sistema finito— no refleja nuestra intuición de lo que es la complejidad de un estado (de hecho se mantiene constante, bajo evolución hamiltoniana). Depende de la medida (no de la forma) del conjunto donde se toman ciertos valores.

Otra pregunta que quizá sería interesante, es si se podría hacer (¡y justificar!) una teoría semejante a ésta en el contexto de la teoría de Lax-Phillips.

BIBLIOGRAFIA

- (1) R. de la Llave
Jour. Stat. Phys. 29 1
- (2) E. Mach
Foundations of thermodynamics
Dover N.Y.
- (3) I. Kinchine
Mathematical foundations of Statistical Mechanics
Dover, N.Y. 1979
- (4) S. Krylov
Works on the Foundations of Statistical Mechanics
Princeton Univ. Press Princeton 1979
- (5) C. Truesdell
The Tragical History of thermodynamics
Springer N.Y. 1980
- (6) A.S. Wightman, comunicación privada
- (7)
- (8) A.S. Wightman, introducción a (9)
- (9) R. Israel
Convexity in the theory of Lattice gases
Princeton Univ. Press, Princeton.

- (10) H. Poincaré
Sur les tentatives d'explication mécanique des
principes de la thermodynamique, Obras 10
Gunthier Villars (1954)

- (11) H. Brush
Kinetic Theory
Pergamon Press Oxford 1965-1972

- (12) V.I. Arnold & A. Avez
Ergodic Problems of classical Mechanics
Benjamin N.Y. (1968)

- (13) D. Ruelle
Thermodynamic formalism
Addison-Wesley, Reading 1978

- (14) C. Preston
Gibbs states on countable sts
Cambridge Univ. Press, Cambridge 1974

- (15) J. Moser, ed.
Lecture Notes in Physics 38
Springer N.Y. 1975

- (16) H. Spohn
Rev. Mod. Phys. 52 569-616 (1980)

- (17) E. Nelson
University of Chicago, thesis

- (18) J.R. Brown
Ergodic theory and topological Dynamics
Academic Press N.Y. 1976

- (19) E. Stein
Singular Integrals and Differentiability
properties of functions
Princeton Univ. Press, Princeton 1970
- (20) S. Goldstein, O. Penrose
Jour. Stat. Phys. 24 (1981) 325-372
- (21) S. Goldstein, B. Misra, M. Courbage
Jour. Stat. Phys. 25 (1981) 111-126
- (22) G. Velo & A. Wightman ed.
Lecture Notes in Physics 25
Springer N.Y. (1973)
- (23) I. Prigogine, C. George, F. Henin, L. Rosenfeld
Chem. Scrip. 4 (1973) 5-32
- (24) I. Prigogine
Irreversible Thermodynamics
Interscience N.Y. 1967
- (25) A. Bohm
Quantum Mechanics
Springer Verlag N.Y. 1979.

CAPITULO 3 EL TEOREMA DE SIEGEL

I Prefacio

II Los resultados clásicos

III La prueba según el método de Hermann

IV Bibliografía

I. Prefacio

Dentro de la filosofía de dividir los métodos en "blandos" y "duros" resulta muy coherente, después de haber dedicado un capítulo a resultados "blandos", dedicar un capítulo a resultados "duros".

Los métodos que me parecieron más interesantes son los métodos K. A. M.

El material de este capítulo está todo él tomado de notas de un seminario que di en Princeton en la primavera de 1982, por sugerencia de E. Lieb. El objetivo era servir de motivación al curso que iba a dar G. Gallavotti, sobre material más avanzado.

Por aquel entonces, ya había dado seminarios sobre los métodos de M. Herman que aprendí en Les Houches y los había aplicado a dar una prueba del teorema de Siegel que mejoraba las constantes clásicas en 40 órdenes de magnitud. Cuando me puse a preparar las lecciones me di cuenta que podía simplificar algo las pruebas standard .

En el curso de la exposición, G. Gallavotti, J. Mather, descubrieron algunos errores y sugirieron nuevos arreglos del material.

Especialmente en el trabajo de entender los métodos de

M. Herman discutí mucho de este material con mi compañero
D. Goroff.

A todos ellos estoy muy agradecido, porque hicieron un
placer el aprender todo esto.

Las razones por las que me decidí a estudiar el teorema de Siegel son múltiples.

Aunque presenta varias de las dificultades de problemas mucho más realistas, no presenta algunas de carácter técnico y, por tanto, es más interesante pedagógicamente.

Pero el interés no es sólo pedagógico: un problema de enorme interés matemático, físico y práctico es estudiar la ruptura de los métodos K.A.M. Siguiendo el método cartesiano, parece más sensato empezar por los casos más sencillos.

Pero no es sólo un problema más sencillo. También es susceptible de ataques más generales: notablemente las ideas de Julia (1) que hoy están siendo revitalizadas por D. Sullivan, A. Douady y J. Hubbard y que, en mi opinión -son de los resultados más interesantes que están apareciendo en sistemas dinámicos recientemente. Desgraciadamente no hay referencias publicadas de este último trabajo.

Dos referencias recientes que considero particularmente interesantes son (2) (3). Los conjuntos de Julia, han servido para aclarar y organizar la teoría de mapas del intervalo. Por ejemplo, utilizándolos se puede probar que la entropía topológica de $1 - \mu x^2$, $0 \leq \mu \leq 4$ es una función creciente de μ (Equivalentemente, $1 - \mu x^2$ hace la cascada de Feigenbaum canónica) (4).

II Los resultados clásicos

Los resultados de esta sección están tomados de las notas de mi seminario (5).

El problema que vamos a considerar es el siguiente: tenemos una aplicación conforme del plano sobre sí mismo con un punto fijo

$$f(z) = az + \sum_{k \geq 1} f_k z^k$$

Podemos imaginarla como una ley de movimiento de puntos en el plano.

Cerca del origen, la dinámica es heurísticamente, casi la dada por la parte lineal

$$f(z) \approx az$$

El método de Hamilton-Jacobi en mecánica, consiste en hacer un cambio de variables preservando la estructura canónica de modo que nuestro sistema en las nuevas variables sea trivial.

(Incluso, aunque tal cambio no pueda hacerse más que hasta un orden finito, resulta haber una ventaja sobre hacer perturbaciones así).

Así que, estaremos interesados, como modelo del problema de perturbaciones en mecánica en el siguiente problema.

¿Cuándo hay un cambio de variables analítico en una vecindad del origen de modo que

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f \psi(z) &= \varphi(az) \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi'(0) &= 1 \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \psi f(z) &= a \psi(z) \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi'(0) &= 1 \end{aligned}$$

(La última condición en la derivada, sólo se supone por tener unicidad, claramente si ψ satisface b), también $\lambda \psi$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ la satisface).

Lo primero que hay que notar es que si a no es una raíz de la unidad, hay una única solución formal para ψ — a fortiori una única solución analítica—.

La razón para ello es que mirando al coeficiente de z^n en ambos miembros tenemos

$$a \varphi_n + P_n(\{\varphi_i\}_1^{n-1}, \{f_i\}_1^n) = a^n \varphi_n$$

Donde P_n es una función que se puede calcular.

Así, dados $\{f_i\}_1^n$ y conocidos $\{\varphi_i\}_1^{n-1}$ se puede calcular φ_n mediante

$$\varphi_n = - \frac{1}{a - a^n} P_n$$

El único problema, es, por tanto, probar convergencia de la serie así obtenida.

Así planteado, el problema resulta difícil.

Cuando $|a| > 1$ el denominador decrece exponencialmente y, tenemos además que sustituir recursivamente.

Incluso cuando $|a| = 1$, el denominador se hace también arbitrariamente pequeño un número infinito de veces.

Antes de dar una prueba de convergencia, será interesante examinar las relaciones de este problema con el problema de la estabilidad.

El lector familiarizado con la física matemática notará que φ, Ψ son los operadores de onda y quizá, los argumentos siguientes les resulten familiares. De hecho, fueron construídos teniendo delante un libro de teoría de "scattering", notando que la compacidad en nuestro caso es sólo equicontinuidad.

Teorema 1

Supongamos $|a| < 1$ Entonces, el problema b) tiene solución

Prueba

Construiremos Ψ como

$$\Psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} f^n(z)$$

Observemos que, entonces, hay una vecindad que queda aplicada en sí misma y la constante de Lipschitz en ella es menor que $(|a| + \varepsilon)$ donde ε se puede hacer tan pequeño como sea necesario, tomando una vecindad suficientemente pequeña.

Entonces

$$|a^{-(n+1)} f^{n+1}(z) - a^{-n} f^n(z)| \leq |a|^{-n+1} |f f^n(z) - a f^n(z)| \leq$$

(Obsérvese que a es la derivada de f en el origen y que estamos cerca de él)

$$\leq |a|^{-n+1} k |f^n(z)|^2 \leq |a|^{-n+1} k (k + \varepsilon)^2$$

De modo que

$a^{-n} f^n(z)$ converge uniformemente en esa vecindad.

El límite es claramente analítico y satisface la ecuación b).

Corolario

Nótese que esto prueba unicidad incluso en el conjunto de funciones continuas.

Claramente cualquier función continua que satisfaga b) puede obtenerse del modo que hemos discutido.

Para resolver el problema en el caso que $|a| > 1$ podríamos simplemente estudiar el problema para f^{-1} y aplicar el caso anterior. Sin embargo, es interesante probarlo directamente.

Teorema 2

Si $|a| > 1$ el problema a) tiene solución.



Prueba

Construiremos la función ψ como

$$\psi(z) = \lim_n f^n(a^{-n}z)$$

Si tratamos de imitar la prueba anterior estimando

$$|f^{n+1}(a^{-(n+1)}z) - f^n(a^{-n}z)|$$

pronto nos damos cuenta de que queremos probar que

$$f^{n+1}(a^{-(n+1)}z)$$

quedan en una vecindad, de modo que podemos utilizar una constante de Lipschitz para f^n , $(|a| + \epsilon)^n$

El argumento, puede hacerse por inducción.

Supongamos que es cierto para n . Entonces, estamos autorizados a suponer que

$$|f^{n+1}(a^{-(n+1)}z) - f^n(a^{-n}z)| \leq (|a| + \epsilon)^n K |a|^{-2n}$$

esto nos implica que $f^{n+1}(a^{-(n+1)}z)$ también está en una vecindad no mucho mayor. En total, escogiendo adecuadamente la vecindad inicial resulta que $f^k(a^{-n+1}z)$ $k \leq n$ siempre permanece en una vecindad

El resto del argumento es como antes.

Esto me sugiere que hay una relación entre estabilidad del origen y la existencia de soluciones del problema a) b). (Que una solución de a) ó b) implica estabilidad es obvio.

Teorema 3

Supongamos que hay una vecindad tal que $f^n(z)$ es equicontinuo en esa bola. (el origen es estable), $a \neq 1$ entonces también hay solución a).

Prueba

$a^{-n} f^n(z)$ también es equicontinua
Y, por tanto,
también son equicontinuas

$$A_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} f^k(z)$$

$$A_n(f(z)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} f^{k+1}(z) =$$

$$= \frac{1}{n} a \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k+1} f^{k+1}(z) =$$

$$= a A_n(z) + \frac{1}{n} (a^{-n} f^n(z) - 1)$$

Escogiendo cualquier sucesión convergente

$$A_n \rightarrow \psi$$

$$\psi(f(z)) = a \psi(z)$$

(¿Reconoce el lector el argumento de Krylov-Bogoliubov?)

Vemos así que hay una relación entre propiedades geométricas y la convergencia de series de perturbaciones.

Vamos a atacar ahora el problema de la convergencia.

Como dijimos antes, el problema es tratar de controlar los "pequeños denominadores". Podemos pensar en ellos como resonan-

cias y, aunque sea inevitable que haya resonancias muy severas parece intuitivamente claro que si para que una resonancia sea muy severa es necesario que tenga un orden muy elevado, no es tan importante.

Teorema 4

Si a es tal que

$$|a^k - 1|^{-1} \leq \gamma k^\nu \quad \text{algún } \gamma, \nu > 0$$

Entonces hay solución de a)

Comentario

Aunque he escrito la hipótesis como $\nu > 0$, es para señalar que la prueba funciona también en ese caso

Notar que no hay ningún a que satisfaga estas desigualdades cuando $\nu < 1$. Para $\nu = 1$, el conjunto es no vacío, pero es de medida nula en el círculo (sin embargo, es un conjunto muy interesante) y para los otros resulta ser de medida total en el círculo aunque ni siquiera la unión de todos estos conjuntos es todo el círculo. Hay números cuyos lados derechos crecen exponencialmente (por ejemplo $\exp 2\pi i e$)

Esta rapidez -mayor que ninguna potencia, está ligada a que el número sea trascendente.

Aunque las pruebas de la relativa abundancia de estos números sea casi triviales (ver el libro de Arnold & Avez), el lector es animado a consultar donde toda esta información -y mucha otra- se deriva del teorema ergódico de Birkhoff (en un estilo francamente delicioso) (6b) es también muy interesante.

La prueba que voy a dar está basada en un método propuesto por Kolmogorov, y es casi la prueba standard. Al final comentaré las diferencias.

Podíamos pensar en esto como en teorema de la función implícita

$$F(f, \varphi) = 0$$

donde

$$F(f, \varphi) = f(\varphi(z)) - \varphi(az)$$

claramente

$$f(z) = az$$

$$\varphi(z) = z$$

es una solución y podemos pensar en pequeñas perturbaciones. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) &= az + z(z) \\ \varphi(z) &= z + u(z) \\ F(f, \varphi) &\simeq a u(z) + z(z) + u(az) \end{aligned}$$

Claramente dado r , podemos hallar z .

Parece pues, que podríamos utilizar el teorema standard de la función implícita (7). Sin embargo, F consiste en un operador de composición que no es "diferenciable" -sentido débil- más que en espacios de funciones analíticas. Pero, en esos espacios y con esos sentidos de la derivada no hay teoremas de la función implícita, como prueba un ejemplo en (7).

(De hecho, con hipótesis de no resonancia más débiles, aunque la "derivada" también tiene solución, hay ejemplos que muestran que hay divergencia. Los discutiremos al final)

Una observación que probará ser útil es pues totalmente equi-

valiente suponer que los términos no lineales son pequeños o que trabajar en vecindades más pequeñas

Así que supongamos que tenemos una aproximación φ^n de nuestro problema y queremos encontrar otra mejor

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\varphi &= {}^n\varphi + {}^n\mu \\ \Delta_{n+1} &= f({}^{n+1}\varphi) - {}^{n+1}\varphi(az) = \\ &= [f({}^n\varphi(z) + {}^n\mu(z)) - f'({}^n\varphi(z)) {}^n\mu(z)] + \\ &\quad + [f'({}^n\varphi(z)) {}^n\mu(z) - {}^n\mu(az)] \end{aligned}$$

Tomaremos, como ecuación para u^n que el segundo término es cero, de modo, que así, el error restado será de "segundo orden".

Por tanto, será útil pasar un cierto tiempo estudiando ecuaciones de la forma

$$(1) \quad h(z) = a g(z) u(z) - u(az)$$

donde $g(z)$ está suficientemente cercano a 1 en una vecindad del origen

Estas ecuaciones son demasiado difíciles de abordar directamente. Estudiaremos primero

$$(2) \quad h(z) = a u(z) - u(az)$$

Lema

Supuesto $h(0) = 0$, (2) tiene una solución única

$$u_k = \frac{h_k}{a - a^k} \quad k \geq 1$$

$$u_0 = 0$$

Más aún, bajo la hipótesis de no resonancia del teorema

Llamando

$$\begin{aligned}\|u\|_2 &= \sup_{|z| < r} |u(z)| \\ \|u\|_2 e^{-\delta} &\leq \sum |u_k| r^k e^{-k\delta} \leq \\ &\leq \sum |h_k| r^k r^{\nu} e^{-\delta k} \leq\end{aligned}$$

Usando las desigualdades de Cauchy

$$\begin{aligned}&\leq \|h\|_2 r \sum k^{\nu} e^{-\delta k} \leq \\ &\leq A \delta^{-\nu} \|h\|_2\end{aligned}$$

Donde A es un número que no depende ni de r ni de δ

Podemos ahora volver a 1

$\log g(z)$ es analítica

$$\log g(0) = 0$$

Por tanto, existirá una $\Phi(z)$

$$\log g(z) = \Phi(z) - \Phi(az)$$

y, si $g(z)$ es cercano a uno en una vecindad $\Gamma(z) = e^{\Phi(z)}$

también será cercano a uno en una vecindad ligeramente menor.

Utilizando la función Γ podemos escribir la ecuación original (1) como

$$\Gamma(az) h(z) = a \Gamma(z) u(z) - \Gamma(az) u(az)$$

Supondremos inductivamente que $\|\varphi\|_{2n} \leq 2$, de modo que

$$\|f'(\varphi)\|_{2n} \leq \|f'\|_2 \leq \frac{1}{2}$$

Por las mismas estimaciones de la ecuación linealizada

$$\|\bar{\Phi}\|_{2n} e^{-\delta_n/2} \leq A(\log 2) \frac{1}{2} \delta_n^{-\nu} 2^\nu$$

Por tanto

$$\|\Gamma\|_{2n} e^{-\delta_n/2} \leq \exp(B \delta_n^{-\nu})$$

$$\|\Gamma^{-1}\|_{2n} e^{-\delta_n/2} \leq \exp(B \delta_n^{-\nu})$$

Por tanto

$$\|\Gamma h\|_{2n} e^{-\delta_n/2} \leq \exp(B \delta_n^{-\nu}) \|h\|_{2n}$$

Y utilizando los resultados de la ecuación linealizada

$$\|\Gamma u\|_{2n} e^{-\delta_n} \leq A \delta_n^{-\nu} \exp(B \delta_n^{-\nu}) \|h\|_{2n}$$

$$\|u\|_{2n} e^{-\delta_n} \leq A \delta_n^{-\nu} \exp(2B \delta_n^{-\nu}) \|h\|_{2n}$$

Modificando las constantes

$$\|u\|_{2n} e^{-\delta_n} \leq A \exp(B \delta_n^{-\nu}) \|h\|_{2n}$$

Por tanto

$$\|\Delta_{n+1}\|_{2n+1} \leq A \exp(2B \delta_n^{-\nu}) \|\Delta_n\|_{2n}^2$$

Tomemos ahora $\delta_n = \frac{1}{n^{2+1}}$

$$\begin{aligned} \|\Delta_{n+1}\|_{2n+1} &\leq A \exp(2B(n^2+1)^\nu) \|\Delta_n\|_{2n}^2 \leq \\ &\leq A \exp(2B(n^2+1)^2) A^2 \exp 4B[(n-1)^2+1]^\nu \|\Delta_{n-1}\|_{2n}^4 \\ &\leq \dots \end{aligned}$$

Estimando todos los polinomios por $(n^2+1)^\nu$

$$\leq A A^2 \dots A^{2^n} \exp(B(2+\dots+2^n)(n^2+1)^\nu) \|\Delta_0\|_{2_0}^{2^n}$$

$$\leq [A^2 \exp(2\tilde{B})]^{2^n} \|\Delta_0\|_{2_0}^{2^n}$$

Podemos ver que esta sucesión, tomando $\|\Delta_n\|_0$ suficientemente pequeño, tiende a cero muy deprisa, de modo que es sumable y, haciendo el error inicial suficientemente pequeño, no nos salimos de la hipótesis de inducción puesto que la suma de la serie es arbitrariamente pequeña.

Comentario.-

Las pruebas clásicas de todos los hechos citados aquí se encuentran en (8). Excepto la prueba de convergencia, creo que las pruebas presentadas aquí son mejores. (La prueba del teorema 3, por ejemplo, aparte de ser más simple que la de Siegel y Morse, se extiende sin dificultad a varias variables y a los anillos de Herman, en este último caso, es la única alternativa para probar un resultado semejante)

Si incluí esta prueba aquí, aunque no la pienso superior que las que hay en la bibliografía, es porque, es un trabajo original y, si no la incluyo aquí, quedaría olvidada.

Mi objetivo era explorar cuál era el mecanismo de ruptura del teorema y, ciertamente, con ese objetivo en mente, es mejor tener cuantas más pruebas mejor. Uno nunca sabe que va a ser inferior hasta que acaba.

Uno de los aspectos desagradables de esta prueba es que en ella se utiliza la suma en el método de Newton.

En el método standard, lo que se hace en el método de Newton es componer con funciones cercanas a la identidad.

Desde el punto de vista de las aplicaciones a mecánica, los objetos naturales son los difeomorfismos, no las funcio-

nes, y, aunque para ellos la composición con objetos cercanos a la identidad tiene sentido no lo tiene la suma.

Sin embargo, la composición da origen a problemas extras que son también molestos, sobre todo en el caso de varias variables. Desgraciadamente, para tratar la ecuación linealizada, tuve que recurrir a un truco esencialmente unidimensional.

Dejo como ejercicio para el lector el preguntarse por qué la idea más sencilla de tratarlo como perturbaciones del caso $r = 1$ mediante la fórmula de Schwinger - Dyson no habría funcionado.

Hay ejemplos que prueban divergencia de estas series en ciertos casos. Sin embargo, parece haber espacio entre los ejemplos citados p. ej. en (8) y los resultados conocidos. Sería interesantísimo saber qué pasa para ellos.

Otro aspecto que sería necesario mejorar en el teorema son los radios de convergencia de la ψ

Es bien conocido que estos métodos tienden a dar resultados del orden 10^{-40} . veces lo que la gente cree que es razonable.

En la siguiente sección presentamos una prueba que, en este aspecto, es esencialmente óptima.

Otro problema interesante y relacionado con éste, es el de clasificar según equivalencia analítica de los casos en los que no hay serie formal (raíces de la unidad) en los que hay, posiblemente, divergencia. Para el caso ver (9). Sobre el segundo creo que no se sabe nada.

Para este problema, los métodos de teoría de scattering son esenciales.

III La prueba según el método de M Herman

En esta sección voy a dar otra prueba que, aunque tiene condiciones de resonancia muy fuertes, sin embargo, produce dominios de convergencia que son esencialmente óptimos. Más aún, la simplicidad de la prueba, creo que hace factible una discusión detallada de optimalidad de las constantes.

Función

Aunque algunos de los pasos podían haberse hecho algo más elegantes con el uso de métodos más poderosos (como desigualdades de Sobolev) que, desgraciadamente, no está en el bagaje de la mayoría de los físicos, se ha hecho un esfuerzo por evitarlos y sustituirlos por argumentos que son standard en la formación de un físico (*) aunque, admitidamente, menos elegantes.

Se ha hecho también un esfuerzo por mantener el argumento suelto y flexible de modo que dada una función se pueda optimizar para ajustarse a ella.

(*) Recuerdo que el paso más delicado, apareció en el examen de Métodos Matemáticos I, el año que yo hice la as.g-natura !!.

El material para esta sección está tomado de (10), que, a su vez está fuertemente influenciado por (11) donde se tratan otros problemas -más realistas e interesantes- pero que no parece puedan evitar totalmente los métodos más sofisticados. Por tanto, tengo la esperanza de que puedan servir como introducción a los métodos de M. Herman.

Intentamos probar el mismo teorema que anteriormente, pero utilizando la (mucho más fuerte) condición de no resonancia.

$$|a^k - 1|^{-1} \leq \gamma^k$$

La primera observación que vamos a hacer que, ya suponemos fijos los valores en cero, la ecuación funcional, es equivalente a la que se obtiene tomando derivadas

$$f'(\psi(z)) \psi'(z) = a \psi'(z)$$

y también se puede comprobar que podemos tomar logaritmos

$$\log f'(\psi(z)) + \log \psi'(z) = \log \psi'(az) - \log a$$

llamemos

$$h(z) = \log \left(\frac{1}{a} f'(z) \right)$$

$$(*) \quad h(z) = \log \psi'(az) - \log \psi'(z)$$

la idea es estudiar el operador (altamente no -lineal) que pasa de ψ a ψ satisfaciendo

$$h \circ \psi = \log \psi'(az) - \log \psi'(z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{y condiciones} \\ \text{de contorno} \end{array} \right.$$

$$\zeta_h \psi = \psi$$

y probar que tiene un punto fijo

Este operador se puede descomponer en varios pasos

$$\mathcal{T}_1 \psi = h \circ \psi$$

$$\mathcal{T}_2 \psi = \eta \Rightarrow \eta'(az) - \eta(z) = \psi, \quad \eta(0) = 0$$

$$\mathcal{T}_3 \psi(z) = \exp \psi(z)$$

$$\mathcal{T}_4 \psi(z) = \int_0^z \psi(w) dw$$

$$\mathcal{T}_h \psi = \mathcal{T}_4 \mathcal{T}_3 \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_1 \psi$$

La dificultad los pequeños denominadores queda reducida al paso 2.

Con las suposiciones que hemos hecho, de no-resonancia, puede verse que \mathcal{T}_2 es como tomar una derivada, pero \mathcal{T}_4 es integrar;

Más precisamente -no precisamente del todo- introduciremos dos normas $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$. La norma 0 controla la función y la norma 1 controla la derivada.

Consideraremos

$$\mathcal{T}_1: \|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_1$$

$$\mathcal{T}_2: \|\cdot\|_1 \rightarrow \|\cdot\|_0$$

$$\mathcal{T}_3: \|\cdot\|_0 \rightarrow \|\cdot\|_0$$

$$\mathcal{T}_4: \|\cdot\|_0 \rightarrow \|\cdot\|_1$$

No cuesta mucho trabajo convencerse de que no debe ser difícil probar existencia de constantes de Lipschitz independientes de h y a para \mathcal{T}_3 y \mathcal{T}_4 . Para \mathcal{T}_2 podemos calcular constantes de Lipschitz dependiendo de a . Para \mathcal{T}_h podemos calcular constantes Lipschitz que son pequeñas si h es pequeño.

Pero, como mencioné antes, podemos suponer que h es arbitrariamente pequeño restringiéndonos a una vecindad.

De hecho, por razones técnicas es más conveniente probar que \mathcal{G}_h aplica una bola $\| \cdot \|_h$ en sí misma.

Esa bola es convexa y compacta en $\| \cdot \|_0$. \mathcal{G}_h también es continuo $\| \cdot \|_0 \rightarrow \| \cdot \|_0$ y podemos aplicar el teorema de Schauder - Tychonov.

La ventaja de este procedimiento es que permite obtener mejores constantes y, creo, puede aplicarse a problemas en los que el otro no funcionaría.

Nótese que el tomar la condición de no resonancia tan fuerte es esencial para la estrategia. \mathcal{G}_h sólo "nos hace ganar una derivada".

Sin embargo, aun en el caso de no resonancias discutidas anteriormente, la ecuación (*) puede resolverse mediante una iteración como la que utilizamos para el problema de Siegel.

En el problema de homomorfismos del círculo, este comienzo supone una ventaja (12) (Una versión más legible es (13)).

Lo que voy a hacer es presentar una selección coherente de elecciones de espacios etc. que llevan a nuestra meta.

En (10) se presentan dos, cada una ofrece ciertas ventajas pero sólo voy a exponer aquí la más sencilla.

Si estuviéramos interesados en obtener cotas óptimas para

una función dada, la mejor estrategia sería utilizar todas estas arbitrariedades de la prueba para buscar la que mejor se adapta a nuestra función dada.

Por ello, es interesante dar varias versiones de la teoría.

Si se tiene un pequeño computador, es muy posible obtener buenísimas cotas haciendo estos cálculos con su ayuda.

La fórmula final que voy a dar, es muy susceptible de un cálculo numéricamente estable.

Para un problema relacionado, ideas muy similares fueron propuestas por L. Chiercia (14)

Prueba

Llamemos $f_\lambda(z) = \lambda^{-1} f(\lambda z)$

claramente, cuando $\lambda \rightarrow 0$ $f_\lambda(z) \rightarrow az$

y, además, está definida en vecindades cada vez mayores.

Si encontramos φ_λ satisfaciendo las condiciones de ecuación funcional

$$f_\lambda \varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(az)$$

habremos encontrado una solución al problema original

$$f(\lambda \varphi_\lambda(z)) = \lambda \varphi_\lambda(az)$$

$$f(\lambda \varphi_\lambda(\lambda^{-1}z)) = \lambda \varphi_\lambda(\lambda^{-1}(az))$$

Claramente $\lambda \varphi_\lambda(\lambda^{-1}z)$ satisface todos los requerimientos.

Por tanto, podemos suponer que h está definida en vecindades tan grandes como queramos y satisface allí las condiciones de pequeñez que necesitamos.

Especificaremos las que son necesarias en el momento que se utilicen en la prueba.

En este caso no vamos a utilizar $\|\cdot\|_0$ como una norma, sino la topología usual en funciones analíticas de círculo unidad. (Lo hago para mostrar que no hay que restringirse a espacios de Banach; las ideas de M. Hermann son realmente flexibles)

$$A = \left\{ \psi(z) \mid \psi_0 = 0, \psi_1 = 1, \sum_{k \geq 2} |\psi_k| k \leq \frac{1}{2} \right\}$$

A es convexo (trivial) y compacto.

$$\psi \in A \Rightarrow |\psi(z)| \leq \frac{3}{2} \quad \text{si } |z| < 1$$

Por tanto A está contenido en un conjunto compacto y es cerrado, puesto que

$$A = \bigcap_{N=2}^{\infty} \left\{ \psi(z) \mid \psi_0 = 0, \psi_1 = 1, \sum_{k=2}^N |\psi_k| k \leq \frac{1}{2} \right\}$$

que son condiciones cerradas.

Así que si h es analítica en el disco de radio $3/2$ será analítica en el disco de radio 1.

Más aún, utilizando acotaciones standard en los libros elementales para la composición tenemos

$$\sum_{n \geq 1} n |(h \circ \psi)_n| \leq \sum_{n \geq 1} |h_n| \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

De aquí, podemos obtener resolviendo la ecuación lineari-
zada

$$\sum_{n \geq 1} |(\log \varphi^1)_n| \leq \gamma \sum_{n \geq 1} n |h_n| \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Y por el mismo método, componiendo $\log \varphi^1$ con la exponen-
cial

$$\sum_{n \geq 0} n |\varphi_n| = \sum_{n \geq 0} |\varphi'_n| \leq \exp\left(\gamma \sum_{n \geq 1} |h_n| n \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$$

Por tanto basta con imponer como segunda condición
a h

$$\exp\left(\gamma \sum_{n \geq 1} n |h_n| \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \leq \frac{3}{2}$$

Una vez tenemos que aplica un conjunto compacto sobre
sí mismo, la continuidad es equivalente a que el gráfico sea
cerrado. Pero eso es muy fácil puesto que el gráfico es aque-
llos pares de funciones que satisfacen (*) que es una colección
cerrada.

Como se ve, esta prueba es un record de simplicidad en el
tema.

Sorprendentemente, las constantes son excelentes.

Para la función

$$f(z) = a z + z^2$$

$$a = \exp 2\pi i \frac{1}{2} (\sqrt{5}-1)$$

(un caso muy famoso)

Dado que $|h \frac{1}{2} (\sqrt{5}-1) - p| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} h^{-2}$

podemos tomar

$$\gamma = 2\sqrt{5} \quad (\text{ciertamente excesivo})$$

que nos lleva a

$$\lambda = \frac{\log^{3/2}}{3(\gamma + \log^{3/2})} \approx 0.0277$$

Sin embargo, podemos escoger otro número en lugar de $3/2$ en la prueba. Llamémoslo x .

$$\lambda_x = \frac{\log x}{2x(\gamma + \log x)}$$

Llamando $u = \log x$

$$\lambda_u = \frac{u e^{-u}}{2(\gamma + u)}$$

y es muy fácil calcular cuál es el que da resultados óptimos

$$u = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \gamma}$$

$$\lambda = 0.034$$

De hecho, como he mencionado antes se puede tomar bastante mejor, y, más aún, se puede observar que son los primeros número los que dan origen a peores constantes, etc.

Experimentalmente, parece que el valor exacto está entre 0.2 y 0.3

BIBLIOGRAFIA

- (1) C. Julia
Jour de Math. Ser 7 4 (1918) 47
- (2) R.B. Burckel
An. Math. Month. 86, 6, 396-406
- (3) M. Misiurewicz
Ergodic Theory and Dynamical Systems 1 (1981)
- (4) D. Sullivan
Charla dada en la "Summer Research
Conference on Ergodic Theory"
New Hampshire JUnio 1982
- (5) R. de la Llave
"The Yoga of Small denominators"
- (6) P. Billingsley
Ergodic Theory and Information
John Willey, N.Y. (1965)
- (6b) Renyi
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8 (1957)
- (7) R. Abraham & J. Marsden
Foundations of Mechanics
Benjamin N.Y. (1981)

- (8) Siegel & Moser
Lectures on celestial mechanics
Springer, N.Y. (1971)

- (9) B. Malgrange
Seminaire Bourbaki 582 (1981)

- (10) R. de la Llave
Jour. Math. Phys. Submitted

- (11) M. Herman
Lecciones en Les Houches, julio 1981

- (12) M. Herman
Pub. Mat. I.H.E.S. 49

- (13) P. Deligne
Seminaire Bourbaki 477 (1976)

- (14) L. Chiercia
Resultados no publicados, comunicados por
G. Gallavotti

- (15) H. Cartan
Teoría de las funciones analíticas
Selecciones Científicas, Madrid, 1968

CONCLUSIONES

Cuando empecé a pensar en las relaciones de la teoría ergódica con la Mecánica estadística, partía de la hipótesis de trabajo de que el formalismo abstracto podía arrojar alguna luz sobre las paradojas clásicas.

Hoy, mis opiniones sobre esto son distintas: en primer lugar, porque después de examinar la Termodinámica he llegado a la conclusión de que en una formulación algo más precisa (devida a Ruelle, Lanford, etc.) las paradojas no son tales. En esa formulación los problemas de construir una dinámica son, ciertamente más difíciles (aunque estén bien formulados matemáticamente)

Jugar con el formalismo abstracto, aunque ciertamente es imprescindible para formular una estrategia del análisis, no es toda la historia. Más interesante me es buscar métodos de analizar problemas concretos.

Aunque, como ya he confesado el esfuerzo puesto haya sido irrelevante casi para el problema de justificar la Mecánica estadística, no creo que haya sido así para el problema de entender lo que es la Mecánica.

Si se me permite una analogía, que no es de tomarse muy en serio, podía comparar la situación con lo que pasó en la Mecánica cuántica. En una primera fase, hubo que discutir, cuál era el formalismo necesario, clarificar qué eran los operadores autoadjuntos, etc. Después hubo que empezar con el problema, p. ej., de probar que el potencial de Coulomb daba origen a un operador autoadjunto, probar completitud asintótica, etc. Cuando empezaron a discutirse algunas patologías, hubo que reinterpretar ligeramente el formalismo, etc.

En contra de lo que decía el libro de texto que estudió mi generación, (hace falta uno nuevo;), la mecánica no está acabada.

En cuanto se han estudiado con detalle ejemplos concretos, han empezado a aparecer comportamientos que creo obligan a revisar las definiciones matemáticas que habíamos dado de objetos físicos (e.g. la estabilidad estructural es un concepto más escaso de lo que sería interesante físicamente, la definición de atractor es demasiado restrictiva, etc.).

Es muy posible que hoy sea prematuro hacer esa revisión puesto que aún no se ha acumulado experiencia suficiente. (Ello es definitivamente cierto para el autor, aunque puede que no lo sea para la comunidad matemática). Mi impresión es que el desarrollo en los próximos años va a venir del análisis de ejemplos. Para corroborar esto diré que en los pocos años que he estado estudiando esto he visto aparecer:

- * Teoría de Pesin
- * Ejemplos de Newhouse
- * Aplicaciones unidimensionales
- * Grupo de renormalización
- * Aplicaciones twist
- * Rigidez
- * Dinámica analítica compleja

Todas ellas me parece que van en la dirección apuntada y, aunque es casi increíble la velocidad a la que se ha progresado, mi conjetura final es que el paso se va a mantener o incluso a avivar.

