

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática Aplicada



TESIS DOCTORAL

**Sistemas Dinámicos Infinito Dimensionales : Aplicaciones a
la Ecuación de Kuramoto-Velarde**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Anibal Rodríguez Bernal

Madrid, 2015

IT
VICM
1490

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Matemática Aplicada **IT**

517.938

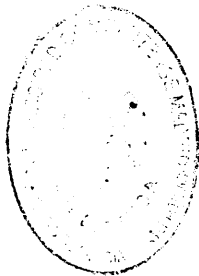
ROD

BIBLIOTECA UCM



5303877857

**SISTEMAS DINAMICOS INFINITO
DIMENSIONALES.
APLICACIONES A LA ECUACION DE
KURAMOTO-VELARDE**



R. 40.659

Anibal Rodríguez Bernal

Madrid, 1991

Colección Tesis Doctorales. N.º 75/91

X-53-165010-2

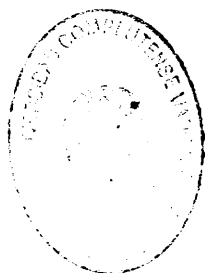
© Aníbal Rodríguez Bernal

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía.
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria.
Madrid, 1991.
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-5811-1991

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

SISTEMAS DINAMICOS INFINITO DIMENSIONALES.

APLICACIONES A LA ECUACION DE KURAMOTO-VELARDE.



Memoria presentada por

D. Anibal Rodríguez Bernal

para la obtención del Grado de Doctor en
Matemáticas por la Universidad Complutense de
Madrid.

Dirigida por

D. Manuel García Velarde.

Presentada por el ponente

D. Jesús Ildefonso Díaz Díaz

Madrid, Abril de 1990

Fue defendida el 25 de Junio de 1990 ante el Tribunal
constituido por

J.M.Vegas Montaner (Universidad Complutense, Madrid)
P.G.Drazin (Bristol University, Reino Unido)
A.Liñan Martinez (Universidad Politécnica, Madrid)
X.Mora (Universidad Autónoma, Barcelona)
C.Fernandez Pérez (Universidad Complutense, Madrid)

recibiendo la calificación de: APTO CUM LAUDE.

A mis padres

A Yolanda

AGRADECIMIENTOS

Estas líneas no podrán ser suficientes para agradecer todo lo que debo a las numerosas personas que me han rodeado durante el tiempo en que los contenidos de esta Memoria han ido saliendo a la luz.

En primer lugar quisiera agradecer al Profesor M.G.Velarde, Director de esta Memoria, su apoyo y confianza constantes desde el momento en que, terminados los estudios de Licenciatura, entré en contacto con la materia que ha servido para la elaboración de esta Memoria; a él debo gran parte de los conocimientos de Física que he adquirido en este tiempo, así como el apoyo logístico recibido para acudir a, posiblemente, algunos de los mejores centros de investigación y enseñanza de posgraduados. Sin su apoyo, mis estancias en la Escuela de Física Teórica de Les Houches, por dos veces, y los viajes a la Université Paris-Sud (Orsay, Francia) y a Los Alamos National Laboratory (New Mexico, USA) no habrían sido posibles y así, posiblemente, el resultado final de mis trabajos no habría sido, ni se asemejaría, al actual.

Al Profesor J.I.Díaz, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid y ponente de esta Memoria, quisiera también agradecer, sobre todo, el haberme distinguido con el gran privilegio de haber sido escogido, entre otros posibles candidatos, para encomendarme la tarea de analizar las ecuaciones que el Profesor M.G.Velarde había derivado, lo cual me introdujo por vez primera en el campo de la Dinámica de Fluidos; sin esta inapreciable distinción esta Memoria tampoco habría visto la luz.

Asimismo debo agradecer a ambos la supervisión de la versión final de este manuscrito; sus sugerencias han permitido una mayor comprensibilidad de los contenidos de la Memoria.

Debo destacar muy especialmente el constante apoyo, seguimiento y, cuando los ánimos estuvieron bajos, aliento recibido por parte de dos buenos amigos y compañeros, los Profesores J.Sabina y J.M.Fraile, que han soportado durante este tiempo, a veces estolicamente, las numerosas cuestiones y dudas que se me plantearon mientras los contenidos de esta Memoria fueron

cristalizando. Sus numerosas sugerencias, indicaciones, datos bibliográficos y críticas a mis ideas y resultados han sido, sin lugar a dudas, el punto de apoyo más importante que he tenido durante los tres años largos en los que he trabajado sobre la ecuación de Kuramoto-Velarde y los problemas relacionados con ella. Sin el especial apoyo de estos dos colegas la maduración de ideas que todo trabajo de las características de una Tesis Doctoral requiere, así como parte de los resultados obtenidos no habrían sido, ni remotamente, posibles.

Asimismo quiero mencionar, colectivamente, al resto del personal del Departamento de Matemática Aplicada, que siempre confió en que el trabajo iniciado arribara a buen término; el ambiente de amistad y camaradería que reina en los pasillos y despachos del Departamento es otra inestimable ayuda para quien, como yo, comienza a adentrarse en los hermosos caminos del Análisis No Lineal. En particular quisiera agradecer la paciencia y la atención mostradas por los Profesores J.M.Vegas y J.Esquinas que más de una vez soportaron mis preguntas y cuestiones, así como me ayudaron con la aportación de valiosa bibliografía. No puedo terminar sin recordar el ambiente jovial y distendido que se vive en La Quinta (la quinta planta de la Facultad de Matemáticas), que contribuye, aunque no siempre se reconozca o aprecie suficientemente, a un mejor aprovechamiento de las horas de trabajo. Por otro lado el constante contacto con las personas y muy especialmente con los problemas en los que investigan los ocupantes de La Quinta, en su mayor parte Ayudantes y Becarios, me ha sido fundamental para no perder de vista otros problemas de la Matemática Aplicada que por falta de tiempo no he podido tratar con profundidad.

Finalmente quiero agradecer la atención recibida por parte de las personas que me recibieron en sus centros de trabajo y que me dedicaron parte de su tiempo y conocimiento a pesar de la inexperiencia y falta de madurez matemática que yo mostraba en aquella época; en especial a B.Scheurer del CEA de Limeil-Valenton, a los miembros del Laboratoire d'Analyse Numerique de la Universidad de Paris-Sud (Orsay), a B.Nicolaenko de Los Alamos National Laboratory (Nuevo México) y a J.D.Gibbon

del Department of Mathematics del Imperial College (Londres), todos ellos aportaron de una u otra manera parte de los conocimientos y experiencia que ahora poseo.

Sería injusto terminar estos agradecimientos sin citar a las personas que más proximas han estado a mi, cotidianamente, durante todo estos últimos años de trabajo, en especial a mis padres y a Yolanda, a quienes con mucho cariño dedico esta Memoria.

INDICE

CAPITULO 0. INTRODUCCION. MOTIVACION FISICA, DESCRIPCION DE RESULTADOS

0.1 Origen Físico de los Problemas Considerados	2
0.1.1 Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky	2
0.1.2 Ecuación de Kuramoto-Velarde	6
0.1.3 Ecuación de Cahn-Hilliard	8
0.2 Unas palabras sobre Modelización	10
0.2.1 Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky	11
0.2.2 Ecuación de Kuramoto-Velarde	14
0.2.3 Ecuación de Cahn-Hilliard	17
0.3 Motivación Matemática. Descripción de Resultados	23
Bibliografía	33

CAPITULO I. ECUACIONES SEMILINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT

1.1 Existencia, Unicidad y Regularidad de Soluciones de Ecuaciones de Evolución No Lineales en Escalas Extendidas de Espacios de Hilbert. Ejemplos.	40
1.2 Diferenciabilidad Uniforme de Semigrupos No Lineales.	64
Bibliografía	83

CAPITULO II. PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA LA ECUACION DE KURAMOTO-VELARDE GENERALIZADA

2.1 Planteamiento Funcional. Existencia, Unicidad, Regularidad de Soluciones.	86
2.2 Condiciones de Explosión. Estimaciones del Tiempo de Existencia.	99
2.3 Comportamiento Asintótico. Conjuntos ω -límites. Explosión, Existencia Global, Disipatividad.	119

2.4 Comportamiento Finito Dimensional. Estimación de la Dimensión Fractal y Hausdorff de Conjuntos Invariantes.	137
Bibliografía	149

CAPITULO III. VARIETADES INERCIALES DE SISTEMAS DINAMICOS
DISIPATIVOS EN ESPACIOS DE BANACH

3.1 Planteamiento. Descripción del Método.	154
3.2 Existencia de la Variedad Inercial. Primera y Segunda Condiciones de Salto Espectral.	162
3.3 Atractividad Global. Tercera Condición de Salto Espectral.	169
3.3.1 Caso Hilbertiano.	171
3.3.2 Caso General.	176
3.3.3 Ejemplos.	183
3.4 Conclusiones.	190
3.4.1 Variedad Inercial de (S).	190
3.4.2 Anidamiento de Variedades Inerciales.	199
Bibliografía	205

CAPITULO IV. SIMETRIAS EN LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES:
ASPECTOS DINAMICOS

4.1 Grupo de Simetrías de una Ecuación en Derivadas Parciales. Consecuencias Dinámicas.	208
4.2 Variedades Inerciales.	216
4.3 Semigrupo con Simetría Prescrita.	224
4.4 Ejemplo: Ecuación de Kuramoto-Velarde	227
4.4.1 Modos Determinantes de Soluciones Simétricas.	229
4.4.2 Formula exacta para la dimensión de Variedades Inerciales. Análisis Dimensional.	236
Bibliografía	243

CAPITULO 0.

INTRODUCCION.

MOTIVACION FISICA. DESCRIPCION DE RESULTADOS.

En este Capítulo abordamos la descripción de los fenómenos físicos y los modelos matemáticos de los que surgen las ecuaciones que han sido el origen y la causa de la elaboración de esta Memoria, así como una derivación de dichos modelos a partir de consideraciones físicas. Asimismo presentamos una breve exposición de los resultados más importantes que se obtienen en los restantes Capítulos.

0.1 Origen Físico de los Problemas Considerados.

Las ecuaciones de Kuramoto-Sivashinsky y de Kuramoto-Velarde, K-S y K-V respectivamente, que serán escritas más abajo, han sido deducidas por diversos autores al modelizar fenómenos de inestabilidad en distintos campos de la Física: hidrodinámica, termohidráulica, reacciones químicas, combustión, plasmas etc; estas ecuaciones describen la evolución de pequeñas perturbaciones de soluciones explícitas de cada modelo, producidas por distintos mecanismos de inestabilidad. En este sentido los modelos describen una misma clase de fenómenos físicos: la propagación (evolución) de interfaces deformables. La ecuación de Cahn-Hilliard, C-H, por su parte, ha sido propuesta como modelo para describir la transición de fase de aleaciones en metalurgia. Así los tres modelos describen fenómenos de formación de estructuras que se preceden con la aparición de turbulencia y dinámica caótica.

0.1.1 Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad (1.1)$$

Al estudiar el movimiento de un fluido sobre un plano inclinado, D.J.Benney [4], S.P.Lin [5], las ecuaciones de Navier-Stokes bidimensionales (con el campo gravitatorio externo añadido) admiten una solución explícita que corresponde al Flujo de Poiseuille: la interfase (borde del líquido) tiene un perfil parabólico; estudiando la estabilidad de esta solución explícita y escribiendo la interfase como $\xi(x,t) + u(x,t)$ donde ξ es la solución de perfil parabólico se llega tras un análisis con desarrollos asintóticos (método de escalas múltiples) y suponiendo que la tensión superficial es infinita en el borde del líquido, a que u verifica (1.1), que aparece como una ecuación de "clausura" de las ecuaciones asociadas a los desarrollos asintóticos. Estamos pues en presencia de un modelo de inestabilidades hidrodinámicas, [13,14].

En [6,7,8,9] Y.Kuramoto y T.Tsuzuki estudian las reacciones químicas de Belutzov-Zabotinskii para N especies químicas, modeladas por un sistema parabólico de ecuaciones de reacción-difusión:

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^N D_{jk} \frac{\partial^2 C_k}{\partial x^2} = f_j(C_1, \dots, C_N) \quad j = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

los D_{jk} son los coeficientes de difusión y los f_j son los términos de reacción, que son dados. La parte cinética de (1.2), es decir el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dC_j}{dt} = f_j(C_1, \dots, C_N) \quad j = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

revela la existencia de un tipo especial de solución de (1.2): homogénea espacialmente y periódica en el tiempo; este tipo de soluciones puede ser visualizada en experimentos de laboratorio de los cuales existen excelentes filmaciones, [21]; es pues natural buscar soluciones de (1.2) que correspondan a perturbaciones de estas soluciones particulares, en este caso una cierta "fase" de la solución perturbada verifica (1.1).

En combustión pueden considerarse dos tipos de llamas, [2]: llamas de premezcla, en las que los gases reactivos están inicialmente mezclados de forma homogénea y las llamas de difusión en las que por contrario los gases aparecen en zonas bien diferenciadas. La combustión se produce en una región pequeña, que deja a cada uno de sus lados el gas quemado y el gas sin arder, esta zona que avanza hacia la zona ocupada por el gas sin reaccionar es lo que se denomina frente de llama. En cuanto a las llamas de premezcla se han observado dos tipos de mecanismos que provoquen la inestabilidad "espontánea" de un frente de llama, [10]:

i) La expansión térmica del gas que atraviesa el frente de la llama; esto es, un mecanismo de inestabilidad hidrodinámica.

ii) La interacción de los mecanismos de difusión y transporte (convección) de calor y de materia en el interior del frente; esto es, un mecanismo de inestabilidad termo-difusiva.

En [10,11,12] G.Sivashinsky propone un modelo termodifusivo para la inestabilidad de un frente plano de llama de premezcla debida a la expansión térmica del gas y a los efectos de transporte, este modelo viene dado por el sistema parabólico

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T + \frac{\partial}{\partial x} T - \nu \Delta T = Q C \exp\left(-\frac{\beta}{T}\right) \\ \frac{\partial}{\partial t} C + \frac{\partial}{\partial x} C - \Delta C = -C \exp\left(-\frac{\beta}{T}\right) \end{cases} \quad (1.4)$$

siendo T y C la temperatura y concentración de la mezcla de gases, ν , β , Q constantes positivas y Δ el operador de Laplace en dos variables espaciales (x,y). Para valores grandes de β (energía de activación) (1.4) admite una solución explícita con derivadas discontinuas sobre el "frente de llama" dado por $F(x,y,t) = 0$, Sivashinsky muestra que una perturbación de este frente evoluciona según (1.1), cuando se ignoran los efectos de expansión térmica del gas y la densidad se supone constante. Así (1.1) describe únicamente los efectos de difusión y transporte sobre la estabilidad del frente, [12].

Obsérvese que la parte lineal de (1.1) corresponde a una relación de dispersión $\omega(k) = k^2(1-k^2)$ para perturbaciones de $u = 0$ de la forma $\exp(\omega t + ikx)$, que muestra inestabilidades para pequeñas modulaciones de la interfase ($k < 1$) pero un efecto estabilizante para longitudes de onda largas, [15,16,17]. Esto experimentalmente se manifiesta en la aparición de dendritas en el frente, originariamente plano, que crecen según la longitud de onda más inestable (i.e. aquella para la que ω es máxima), este fenómeno recibe el nombre de crecimiento dendrítico (este efecto es evidente en el caso de un fluido deslizandose por un plano inclinado) y está relacionado con otros fenómenos de propagación

de interfaces, por ejemplo el crecimiento de cristales, la propagación de fracturas o el problema de la penetración de un fluido en otro de distinta viscosidad (problema de Saffman-Taylor), [22]; después de un cierto transitorio los términos no lineales entran en juego saturando los modos inestables y originando un cierto retraimiento en el movimiento de la interfase, experimental y numéricamente [2,8,9,11,23], se ha observado que el frente puede desarrollar estructuras espaciales complejas así como una evolución caótica y turbulenta temporalmente; asimismo complejas transiciones al caos son observables.

Destaquemos que (1.1) puede ser deducido de forma heurística a partir de la relación de dispersión anterior, una ley fenomenológica debida a G.H.Markstein que da una relación entre la velocidad del frente y el radio de curvatura del mismo, y argumentos geométricos concernientes a la velocidad normal de propagación del frente, [20].

La ecuación (1.1) es complementada por el dominio (usualmente la variable espacial está en un intervalo $[0,L]$ que en el caso de llamas corresponde al tamaño de la misma), por condiciones de contorno (típicamente condiciones de no-flujo, o periódicas) y por condiciones iniciales. Obsérvese que en el caso de dominio espacial acotado y con condiciones de contorno adecuadas, la cantidad $\phi(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x,t) dx$ representa la posición media del frente y además $\frac{d}{dt} \phi(t) + \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \right)^2 dx = 0$, así $\frac{d}{dt} \phi(t)$, la velocidad media del frente, es negativa y puede ser no acotada en el tiempo (en cuanto una desigualdad tipo Sobolev se verifique y $\phi(0) \leq 0$, en este caso el frente se desplaza siempre hacia un lado, ϕ tiene signo constante, sin detenerse). Es por tanto natural utilizar un sistema móvil de referencia y tomar como nueva incognita $v = u - \frac{1}{L} \int_0^L u$ que verifica ahora

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (1.5)$$

y v tiene media nula.

0.1.2 Ecuación de Kuramoto-Velarde

La ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x} u\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} u\right)^2 = 0 \quad (1.6)$$

ha sido derivada por M.G.Velarde et al., [24,25], en el contexto de la convección Bénard-Marangoni bajo efectos de microgravedad, con una frontera libre (interfase): una capa de fluido (sección bidimensional) yace en un contenedor con la parte superior al aire libre mientras se somete a un calentamiento progresivo por la parte inferior; partiendo del reposo (posición inicial horizontal del fluido) para valores pequeños del calentamiento una solución explícita aparece en las ecuaciones que gobiernan al fluido: la solución en la que el perfil de temperatura decrece linealmente de la parte inferior a la superior del fluido (conducción pura del calor sin efectos convectivos), en este estado, la configuración de la superficie libre del fluido permanece en equilibrio.

Tras un cierto valor crítico del calentamiento (caracterizado por el número de Marangoni) esta solución pierde la estabilidad apareciendo otras soluciones donde los fenómenos difusivos y convectivos son determinantes: rollos, células convectivas y otra "fauna" análoga a la del problema de Bénard clásico, [1], (i.e. sin frontera libre); de esta forma la configuración horizontal de la interfase líquido-aire pierde su estabilidad y comienza a moverse por medio de este mecanismo termohidráulico; a su vez a través de la interfase el líquido y el aire intercambian energía por tanto la tensión superficial, y sobre todo su variación espacial debida a variaciones de temperatura, los efectos de difusión, y las propiedades geométricas de la interfase (curvatura por ejemplo) son claves a la hora de establecer el balance del flujo de energía a través de la interfase y por tanto para establecer un modelo de evolución de la perturbación de la interfase de equilibrio; así pues tenemos una competencia entre mecanismos termodifusivos e hidrodinámicos. Por otro lado dependiendo de cómo se varíen los parámetros de control del

problema, el movimiento la interfase puede caer en un régimen evolutivo (primer orden en el tiempo) o en un régimen oscilatorio (segundo orden) como ha sido mostrado en una larga serie de artículos por M.G.Velarde y Chu Xiao Lin, [26,27], donde el problema se estudia en forma más general añadiendo a lo anterior efectos externos sobre la tensión superficial (por ejemplo la presencia de soluto afecta no sólo a las variaciones en la tensión superficial sino también a las variaciones de densidad y de elasticidad de la interfase) o añadiendo el efecto de campos eléctricos o magnéticos (para fluidos conductores, dieléctricos o ferromagnéticos) además del gravitatorio anteriormente comentado.

En consecuencia (1.6) surge como modelo describiendo, en el régimen en que el fluido desarrolla una estructura de células convectivas (experimentalmente observables, [1]), la evolución de una pequeña perturbación de la posición de equilibrio en una de dichas celdas. Así tienen significado físico las condiciones de dominio acotado $[0,L]$ para la variable espacial (L es el tamaño de la celda de convección) y condiciones L -periódicas o de no-flujo en la frontera.

Obsérvese que ahora $\phi(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x,t) dx$ (supuestas condiciones de contorno adecuadas) es constante y la condición de conservación de volumen en el fluido (no hay cavitación) impone a (1.6) la condición de que u tenga media nula; por otro lado la parte lineal de (1.6) es la de (1.1) y por tanto tenemos el mismo análisis que antes derivado de la relación de dispersión; el primer término no lineal en (1.6) es el mismo que en (1.5) y como allí da cuenta de los efectos geométricos de la deformación de la interfase, por último el segundo término no lineal de (1.6) puede escribirse como $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2)$ que corresponde al tipo de no linealidades que encontraremos en la ecuación de Cahn-Hilliard.

0.1.3 Ecuación de Cahn-Hilliard

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (u^3)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.7)$$

En [28,29], J.W.Cahn y J.E.Hilliard estudian aleaciones binarias en metalurgia centrandose en las precipitaciones que se producen en ellas (transición de fase liquido-solido). En función de la temperatura y la densidad dos tipos de precipitación se observan, [31]:

1) Nucleación: aparición aleatoria de nucleos de una de las especies.

ii) Descomposición Espinoidal: los mecanismos de difusión producen la agregación de la mezcla, esto es, agrupación en partes homogéneas.

Es en este último contexto en el que (1.7) aparece como modelo, siendo u una cierta variable de composición de la mezcla que es el parámetro de orden, magnitud cuya evolución trata de describir la teoría física para explicar la dinámica de la transición.

El proceso de separación de fases se produce de la manera siguiente: inicialmente la mezcla se encuentra a temperatura elevada de forma que la mezcla es espacialmente homogénea y estable. Un descenso rápido de la temperatura de la mezcla (quenching) por debajo de cierta temperatura crítica hace a esta solución homogénea perder su estabilidad y la mezcla se separa en regiones con distintas concentraciones. En el equilibrio estas regiones tienen concentraciones constantes que pertenecen a un conjunto de concentraciones admisibles determinadas según la composición original de la mezcla. Aparece así una interfase separando las distintas regiones de la mezcla; asociada a esta interfase hay una cierta energía libre que se manifiesta matemáticamente en la existencia de un funcional de Lyapunov disipado por el sistema.

En el excelente artículo de J.S.Langer [31], se deriva la ecuación (1.7) rigurosamente a partir de principios básicos de la

Mecánica Estadística; por otro lado, recientemente A. Novick-Cohen y G.I. Sivashinsky, [32,33] han derivado (1.7) con u^2 en vez de u^3 (i.e. la misma no linealidad de K-V) al describir la estructura interfacial de un frente de solidificación en una aleación binaria.

En (1.7) tenemos de nuevo que $\phi(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x,t) dx$ es constante pero a diferencia de (1.1), la ecuación de $u - \frac{1}{L} \int_0^L u$ análoga a (1.5) contiene coeficientes no locales que dependen de $\frac{1}{L} \int_0^L u$ y que están determinados por el dato inicial, pudiendo pues depender la ecuación del estado inicial del sistema.

Las ecuaciones (1.1), (1.6), (1.7) pueden ser escritas en varias variables espaciales aunque la validez de los modelos puede ser cuestionada al menos en aquellos fenómenos en los que los efectos geométricos de la deformación de los frentes es importante; en estos casos es de esperar que más términos no lineales tengan que ser tenidos en cuenta en un modelo realista.

A la vista de (1.1), (1.6), (1.7) nos disponemos a estudiar un modelo que los engloba dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \beta u + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(u)) - \gamma \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (1.8)$$

en $(0,L) \times \mathbb{R}^+$, verificando condiciones de contorno periódicas y con media cero y siendo $\nu > 0$, $\beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ y δf un polinomio con $\delta f(0) = 0$; obsérvese que en (1.1), (1.6), (1.7) la parte lineal de $\delta f(s)$ es $-s$.

0.2 Unas palabras sobre Modelización.

Es importante observar que pese a que las ecuaciones de partida para derivar K-S y K-V son de primer o segundo orden (ecuaciones de Navier-Stokes, difusión del calor, conservación de masa etc.) los modelos resultantes son de cuarto orden. Esto es debido esencialmente a que las ecuaciones de segundo orden están referidas a magnitudes físicas que ocupan un espacio tridimensional (aunque en algunos modelos se parta de esquemas bidimensionales por simplicidad) pero el objetivo de los modelos es encontrar una ecuación para la evolución de la interfase, del frente, de la superficie libre, según sea el modelo; es decir una ecuación referida a una magnitud física con una dimensión menos que las que se refieren las ecuaciones de segundo orden. Estas ecuaciones forman un sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales de manera que formalmente al resolver (desacoplar) el sistema aparecen ecuaciones de orden superior sobre unas incógnitas auxiliares indicando la posición de la frontera libre.

Por su parte C-H, como veremos, puede ser derivada directamente sin la particularidad anterior de K-S y K-V.

A continuación nos centraremos (aunque de forma superficial) en una de las posibles formas y ámbitos de derivar cada modelo a partir de consideraciones físicas. Como ya se indicó en la Sección 0.1 es muy amplio el campo de fenómenos en los que estos modelos pueden surgir de diferentes orígenes físicos pero además hay que destacar que también es amplia la gama de técnicas matemáticas por las que las ecuaciones pueden ser obtenidas. Así por ejemplo en [32,33] se deriva un tipo especial de ecuación C-H (con técnicas distintas a las que emplearemos más abajo) partiendo de un modelo para un frente de solidificación en una aleación binaria, como ecuación asintótica para ciertos valores de los parámetros físicos, y sin embargo en [33b], sobre el mismo modelo y con las mismas técnicas pero usando desarrollos asintóticos para otros valores de los parámetros físicos se obtiene K-S.

Por tanto vamos a exponer una posible forma de obtener cada modelo, en uno de los posibles campos en que pueden ser obtenidos y usando en cada uno de ellos técnicas distintas: para K-S

tomaremos un modelo en el que las suposiciones sobre las escalas de las magnitudes permite simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes despreciando los términos de inercia y de variación temporal; para K-V las ecuaciones de la Termodinámica son resueltas, hasta segundo orden, usando escalas múltiples y teniendo en cuenta las condiciones de contorno y por último para C-H adoptaremos una aproximación fenomenológica.

0.2.1 Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.

Consideremos dos capas superpuestas de fluidos incompresibles de igual viscosidad dinámica μ y de espesores $h_S = H$ y $h_I = h$, donde los subíndices S e I indican la capa superior e inferior respectivamente, además suponemos que el fluido de la capa superior es más denso: $\rho_S > \rho_I$. El sistema está encerrado entre dos placas y está sometido a la inestabilidad de Rayleigh-Taylor: las placas se mueven a velocidades constantes y opuestas de forma que los esfuerzos internos de rozamiento y los esfuerzos viscosos producen la inestabilidad de la interfase entre los dos fluidos, originalmente plana.

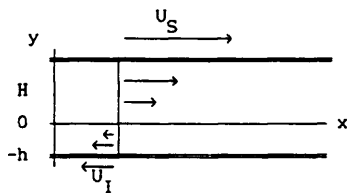


Figura 1.

Elegimos un sistema de referencia como en la Figura 1 de forma que la configuración inicial del campo de velocidades $v = (u, w)$ viene dada por $w_S = 0$, $w_I = 0$ y el perfil lineal $u_S = u_S(y) = Wy$, $u_I = u_I(y) = Wy$ con $W = U_S/h = U_I/H$.

Consideraremos a continuación las ecuaciones de las perturbaciones de este campo de velocidades (ecuaciones de Navier-Stokes) que simplificaremos con las siguientes hipótesis sobre las escalas de las diversas magnitudes físicas del problema:

$$k = h/L \ll 1 \quad (2.1)$$

siendo L una longitud característica del problema en el eje x (a posteriori L podrá expresarse en términos de los parámetros del sistema sin perturbar $L = \left(\sigma / g(\rho_S - \rho_I) \right)^{1/2}$ siendo σ la tensión superficial en la superficie común de los dos fluidos y g la aceleración gravitatoria, definimos entonces $\delta = g(\rho_S - \rho_I)$). Esta condición dice que la capa inferior es delgada y permitirá despreciar ciertas derivadas en x en la capa inferior.

La siguiente hipótesis implica que la escala vertical de la capa inferior es mucho menor que la de la capa superior

$$\beta = h/H \ll 1 \quad (2.2)$$

El siguiente parámetro pequeño (número de Strouhal) permitirá eliminar la derivada temporal en las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\epsilon = L/TU_I \ll 1 \quad (2.3)$$

siendo T un tiempo característico del problema (a posteriori $T = \mu\sigma/h^3\delta^2$).

Por último supondremos que el número de Reynolds es pequeño:

$$\alpha = U_I h^2 / \nu \ll 1 \quad (2.4)$$

siendo $\nu = \mu/\rho_I$ la viscosidad cinemática. Esta hipótesis indica que el fluido de la capa inferior no se mueve muy rápido y permite por tanto eliminar los términos de inercia en las ecuaciones de Navier-Stokes, por tanto sólo retendremos de estas ecuaciones los términos viscosos y de presión.

Por último efectuamos las siguientes hipótesis acerca de la magnitud de la perturbación, ξ , de la interfase y ≈ 0 entre las dos capas y acerca de las velocidades horizontales en las capas inferior y superior:

$$\xi/h \ll 1 \quad (2.5)$$

y

$$u_I/U_I \approx u_S/U_S \ll \xi/h \quad (2.6)$$

Así las ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes en la capa inferior son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_I}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_I}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p_I}{\partial x} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

y la condición de incompresibilidad

$$\frac{\partial u_I}{\partial x} + \frac{\partial w_I}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Además las condiciones de contorno en la frontera libre son las siguientes: el balance de esfuerzos tangenciales

$$\frac{\partial u_I}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

para los esfuerzos normales (ley de Laplace)

$$p_I = -\delta\xi - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

y la condición cinemática (el frente avanza con la velocidad del fluido y no hay cavitación)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \langle v_I, N \rangle = -W\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + w_I|_{y=0} \quad (2.11)$$

siendo N el vector normal exterior $N = (-\frac{\partial \xi}{\partial x}, 1)$, y donde se han realizado las aproximaciones $u_I(x, \xi) \approx u_I(x, 0) + \frac{\partial u_I}{\partial y}(x, 0)\xi = W\xi$ y $w_I|_{y=\xi} \approx w_I|_{y=0}$. Por último las condiciones de contorno en la placa inferior son

$$v_I = (u_I, w_I) = (0, 0) \quad (2.12)$$

La ecuación de evolución de la interfase sale de expresar $w_I|_{y=0}$ en (2.11) en términos de ξ . Por la condición de incompresibilidad (2.8) y por (2.12) obtenemos que $w_I|_{y=0} = -\int_{-h}^0 \frac{\partial u_I}{\partial x} dy$, pero por (2.7) $p_I = p_I(x)$ y u_I se puede expresar en términos de p_I usando las condiciones de contorno en la interfase (2.9) y (2.12); por tanto obtenemos que $w_I|_{y=0} = \frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial^2 p_I}{\partial x^2}$ pero por (2.10) p_I está dado en términos de ξ y así resulta

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + W\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{h^3}{3\mu} \left(\delta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (2.13)$$

que es una versión diferenciada de K-S. (1.1) Sección 0.1; vease (3.1) Sección 0.3.

0.2.2 Ecuación de Kuramoto-Velarde.

Consideremos una capa de fluido (sección bidimensional) de espesor d , calentado por debajo y con la superficie superior abierta al aire. Para valores pequeños del calentamiento el fluido está en reposo y el transporte de calor a través de él es puramente difusivo (no hay convección), así la configuración de la superficie libre del fluido es horizontal y es estable; la distribución estacionaria de velocidades, temperatura y presión en el líquido es (tras normalizar y adimensionalizar)

$$\begin{cases} v_e = (u_e, w_e) = (0, 0) \\ T_e = T_e(y) = -y \\ p_e = p_s + \left[(1-y) - (1-y)^2 \frac{d_T}{2} \right] G \end{cases} \quad (2.14)$$

donde el subíndice s se refiere al valor en la superficie libre, e y es un eje perpendicular a la superficie del fluido, las demás constantes se definirán con precisión más abajo.

Las funciones de (2.14) son por supuesto soluciones estacionarias particulares de las ecuaciones de la Termohidráulica, que resultan de acoplar las ecuaciones de Navier-Stokes con una ecuación para la difusión del calor, teniendo en cuenta los fenómenos de transporte (convección), ver (2.15). Tras un cierto valor crítico del calentamiento la solución explícita de (2.14) pierde su estabilidad y por tanto la convección se produce en el seno del fluido: las partes del fluido más próximas al fondo están más calientes y son por tanto menos densas con lo que sufren un empuje neto hacia arriba; por tanto la superficie libre del fluido ya no permanece en reposo y comienza a moverse.

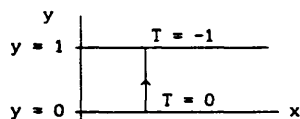


Figura 2.

Las constantes que aparecen en (2.14) y los números

adimensionales que definiremos a continuación encierran gran parte del contenido físico del problema; g es la aceleración gravitatoria, k la difusividad térmica, ρ la densidad del fluido, μ la viscosidad dinámica, $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática, σ la tensión superficial en la superficie libre del fluido y $\Delta T = T(y=0) - T$ y α el coeficiente de expansión térmica del fluido; con estas notaciones

$$G = gd^3/k\nu$$

$$Pr = \nu/k \quad \text{número de Prandtl}$$

$$C = \mu k/\sigma d \quad \text{número de capilaridad}$$

$$B_0 = \rho g d^2/\sigma \quad \text{número de Bond}$$

$$Ra = \alpha g d^3 \Delta T/k\nu \quad \text{número de Rayleigh}$$

$$Ma = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right) d \Delta T/\rho \nu k \quad \text{número de Marangoni}$$

$$d_T = \alpha \Delta T = Ra/G$$

Las perturbaciones de la solución explícita de (2.14) verifican el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v = Pr \Delta v - Pr \nabla p + (0, Pr Ra \theta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \nabla \theta = \Delta \theta + w \end{cases} \quad (2.15)$$

donde $v = (u, w)$ es el campo de velocidades del fluido, p es la presión y θ es la temperatura.

Las condiciones de contorno en la placa $y = 0$ son

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = Bi \theta \quad (\text{ley de Newton de enfriamiento}) \quad (2.16)$$

$$v = (0, 0) \quad (2.17)$$

siendo Bi el número de Biot (que depende de la relación entre los coeficientes de difusividad del líquido y el sólido).

La superficie libre está en el nivel $y = 1 + \xi(x, t)$ y en ella las condiciones de contorno son: el balance de los esfuerzos tangenciales

$$Ma \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] = - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(1 - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} N^{-1} \quad (2.18)$$

siendo $N = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x}, 1 \right)$ el vector normal exterior a la superficie libre

y $N^2 = 1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$ el cuadrado de su módulo; el primer miembro da cuenta de los esfuerzos de los gradientes de la tensión superficial mientras que el segundo miembro es la componente tangencial del tensor de esfuerzos viscosos.

Los esfuerzos normales

$$p - G \left[\xi + \frac{\alpha_T}{2} \xi^2 \right] + N^{-3} \left(\frac{1}{C} - Ma(\theta - \xi) \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} =$$

$$= 2N^{-2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (2.19)$$

donde el segundo término del primer miembro da cuenta de las variaciones en la presión hidrostática (ver (2.14)), el tercero es una variación sobre el término de Laplace y el segundo miembro es la componente normal del tensor de esfuerzos viscosos.

Por último la condición cinemática (no hay cavitación)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \langle v, N \rangle \quad (2.20)$$

Finalmente el flujo de calor a través de la superficie libre viene dado por

$$NV\theta = 1 - N \quad (2.21)$$

Realizamos en este punto la hipótesis de que la placa inferior es mala conductora lo que se expresa diciendo que en (2.16) $Bi = \varepsilon^2$ con $\varepsilon \ll 1$, lo cual permite tras el cambio de escalas

$$\begin{cases} X = \varepsilon^{1/2} x \\ Y = y \\ \tau = \varepsilon^2 t \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\text{desarrollar } \xi = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \xi_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \theta_i, \quad u = \varepsilon^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_i, \quad w = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i w_i,$$

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i p_i, \quad Ma = M_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i M_i \text{ y } Ra = R_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i R_i.$$

Así integrando la sucesión de ecuaciones hasta segundo orden, supuesto que $d_T = 0$ (es decir no hay fenómeno de flotación en el fluido), usando las condiciones de periodicidad en x y la condición de conservación de volumen: $\int_0^1 \xi(x, t) dx = 0$, se llega a la ecuación

$$\frac{G^2 + 27G + 216}{G} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right) = - \frac{(72 + G)^2 M_1}{48G} \xi_1'' - \left(\frac{216 + G}{15} + \frac{72}{6G} \right) \xi_1'''' -$$

$$- G\xi + (72 - 2g)(\xi_1 \xi_1')' + 36(\xi_1')^2 - \frac{36}{L} \int_0^L (\xi_1')^2 dx \quad (2.23)$$

que es la ecuación de Kuramoto-Velarde (1.8), Sección 0.1.

0.2.3 Ecuación de Cahn-Hilliard.

Consideremos una aleación binaria de dos especies A y B que se difunden sin reaccionar.

El proceso de separación de fase que consideramos, descomposición espinoidal, puede describirse de la siguiente manera:

Inicialmente la mezcla se encuentra a una temperatura elevada de forma que la mezcla es homogénea espacialmente con valor constante c_e (un valor cualquiera, tan sólo restringido por la proporción de sustancias en la mezcla) que es estable; un rápido descenso de la temperatura de la mezcla (quenching) por debajo de una cierta temperatura crítica produce la pérdida de la estabilidad por parte de la concentración c_e , por tanto se produce la separación de fases en la que la mezcla se descompone en partes homogéneas cada una con una de las concentraciones posibles (descomposición espinoidal).

Denotando c_A y c_B las concentraciones de las especies y de las relaciones fenomenológicas lineales se deduce que los flujos de las especies vienen dados por

$$\begin{cases} J_A = -M_{AA} \nabla \mu_A - M_{AB} \nabla \mu_B \\ J_B = -M_{BA} \nabla \mu_A - M_{BB} \nabla \mu_B \end{cases} \quad (2.24)$$

donde las M son las movibilidades de las sustancias y los μ los potenciales químicos, verificándose que $J_A = -J_B$; así denotando $J = J_B - J_A$ y $c = c_B = 1 - c_A$ y por la relación de Gibbs-Duhem $c_A \nabla \mu_A + c_B \nabla \mu_B = 0$ resulta entonces que

$$J = -M \nabla (\mu_B - \mu_A) \quad \text{con } M = M(c, M_{AA}, M_{AB}, M_{BA}, M_{BB}) \quad (2.25)$$

siendo M positivo.

Si $F = F(c)$ representa una energía libre por unidad de volumen de la cual derivan los potenciales químicos (aquí no se tienen en cuenta las inhomogeneidades espaciales) entonces $\mu_B - \mu_A = \frac{\partial F}{\partial c} = f$ y por tanto $J = -M(c)\nabla\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)$ de donde por la conservación de la masa

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla\left(M(c)\nabla\frac{\partial F}{\partial c}(c)\right) = \nabla\left(M(c)\nabla f(c)\right) \quad (2.26)$$

que se reduce a

$$\frac{\partial c}{\partial t} = M\Delta\left(f(c)\right) \quad (2.27)$$

si M no depende de c; en particular si F es un polinomio de grado dos con coeficiente principal positivo entonces obtenemos la ecuación de difusión estandar: la ecuación del calor.

Como las especies no reaccionan entre sí debe verificarse la conservación de la composición de la mezcla y así

$$\int_V c(x,t)dx = \int_V c_0(x)dx \quad (2.28)$$

que es una cantidad dada a priori, siendo V el volumen ocupado por la mezcla.

Una elección general para F es que sea un polinomio cuártico con coeficientes dependientes de la temperatura y coeficiente principal positivo.

Observemos que en general las soluciones de $\frac{\partial F}{\partial c} = f = \text{cte}$ (una o tres en el caso del polinomio cuártico) son las soluciones homogéneas espacialmente de (2.26) (la única restricción sobre esta constante es (2.28)) y que el operador linealizado en torno a ellas es

$$\nabla\left(M(c_e)\nabla\left(f'(c_e)C\right)\right) + \nabla\left(M'(c_e)C\nabla f(c_e)\right) = \nabla\left(M(c_e)\nabla\left(f'(c_e)C\right)\right)$$

y por tanto la ecuación linealizada es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla\left(M(c_e)\nabla\left(f'(c_e)C\right)\right) \quad (2.29)$$

con $f'(c_e) = \frac{\partial^2 F}{\partial c^2}(c_e)$ y por tanto la solución c_e es estable si $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} > 0$.

Podemos dar una interpretación del fenómeno físico descrito arriba en términos de la energía libre: mientras la energía libre

$F = F(c,T)$ es convexa, $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} > 0$, por encima de la temperatura crítica, entonces toda solución homogénea es estable y las dos especies no coexisten separadamente (y no hay separación de fase) pero por debajo de la temperatura crítica aparecen intervalos en los que F es cóncava, $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \leq 0$, y las soluciones homogéneas en esos rangos pierden la estabilidad dando lugar a la separación de fase. En particular cuando F es un polinomio cuártico entonces la temperatura crítica se caracteriza porque los dos mínimos de F coinciden y por debajo de ella F tiene dos mínimos distintos.

Así las regiones en el plano (c,T) en las que $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} < 0$ reciben los nombres de estable (o por encima de la espinoidal), espinoidal, e inestable (o subespinoidal) respectivamente.

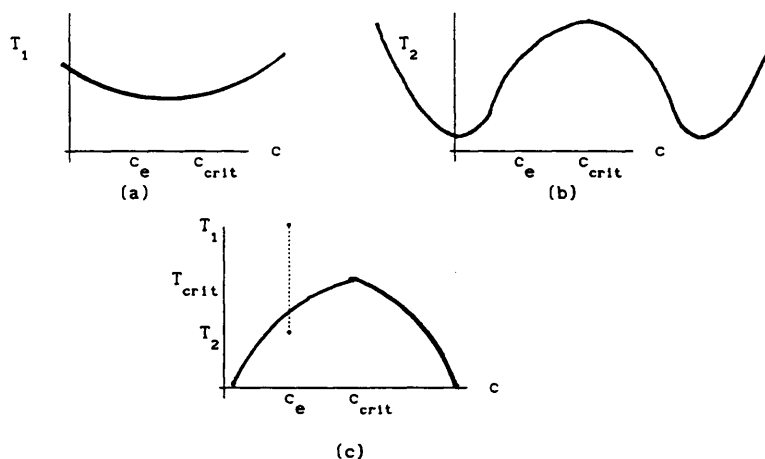


Figura 3.

La energía libre por encima y por debajo de la temperatura crítica, (a) y (b); la curva espinoidal en el plano (c,T) , (c).

Tras el quenching, en el equilibrio, todo el volúmen se descompone en diversas partes donde la concentración es constante e igual a una de las concentraciones posibles ($\frac{\partial F}{\partial c} = f = \text{cte}$), i.e. la mezcla se vuelve homogénea a trozos; la restricción (2.28) relaciona el tamaño de cada fase pero no su configuración espacial, es decir cualquier c constante a trozos con constantes entre las admisibles y con los tamaños adecuados de cada trozo, es solución de las ecuaciones independientemente del número de trozos y de su distribución espacial.

Si consideramos la energía libre total en el volúmen

$$G = \int_V F(c(x)) dx \quad (2.30)$$

concluimos que todas las configuraciones con las mismas proporciones entre las fases son energéticamente equivalentes lo cual no es posible por consideraciones de entropía: a mayor cantidad de subdivisiones mayor es el desorden del sistema.

Esto sugiere que la descripción del fenómeno hecha no es fina para la descripción de transiciones de fase y la formación de estructuras, y no lo es esencialmente porque no tiene en cuenta inhomogeneidades espaciales, i.e. la energía libre F depende sólo de c y no de sus derivadas de orden superior.

Antes de enmendar este problema observemos que la ecuación de Euler-Lagrange (teniendo en cuenta la restricción de la composición de la mezcla, (2.28)) para los minimizadores de G es exactamente $\frac{\partial F}{\partial c} = f = \text{cte}$, es decir las soluciones homogéneas a trozos usadas arriba. Así las soluciones de equilibrio de (2.26) corresponden a los mínimos de G .

Observemos además que si c es una configuración cercana a una configuración de equilibrio, c_e , entonces la "distancia al equilibrio" esta medida por

$$G(c) - G(c_e) = \int_V F(c) - F(c_e) \approx \int_V \frac{\partial F}{\partial c}(c_e)(c - c_e) \quad (2.31)$$

además la derivada funcional (de Frechet) de G es $\delta G = \frac{\partial F}{\partial c} = f$ y así el flujo puede escribirse

$$J = -M(c)\nabla(\delta G(c)) \quad (2.32)$$

así G puede verse como un término forzante para el flujo de la mezcla y δG es el "potencial".

El siguiente refinamiento de la teoría consiste en

generalizar la energía libre teniendo en cuenta las inhomogeneidades espaciales, encontrar la "distancia generalizada al equilibrio" y el correspondiente "potencial generalizado" y por consiguiente el flujo y la ecuación de la mezcla; asimismo los mínimos de la energía libre proporcionarán soluciones de equilibrio.

La energía libre generalizada por unidad de volumen \mathfrak{F} es tal que depende de c y de sus derivadas de orden superior y por tanto si ponemos $F(c) = \mathfrak{F}(c, 0, 0, \dots)$ tenemos que

$$\mathfrak{F} = F(c) + \int_I L_i \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) + \left[K_{ij}^1 \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \int_{IJ} K_{ij}^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \right] + \text{TOS} \quad (2.33)$$

donde TOS son términos de orden superior, siendo

$$L_i = \partial \mathfrak{F}(c, 0, \dots) / \partial \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right), \quad K_{ij}^1 = \partial^2 \mathfrak{F}(c, 0, \dots) / \partial \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad \text{y}$$

$K_{ij}^2 = \partial^2 \mathfrak{F}(c, 0, \dots) / \partial \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \partial \left(\frac{\partial c}{\partial x_j} \right)$; por argumentos de isotropía espacial resulta que $L_i = 0$, $K_{ij}^1 = K_1 \delta_{ij}$ y por tanto en una primera corrección a la energía libre anterior tomamos $\mathfrak{F} = F(c) + K_1 \Delta c + K_2 / 2 |\nabla c|^2$ de forma que la "energía libre total generalizada" es

$$G = \int_V F(c) + K_1 \Delta c + K_2 / 2 |\nabla c|^2 \quad (2.34)$$

Para minimizar G sujeta a la condición (2.28) es preciso indicar las condiciones de contorno que usualmente son de la forma $\frac{\partial c}{\partial n} = 0$ en el borde del volumen o bien condiciones periódicas si V es un cubo; en ambos casos la contribución del segundo sumando en G es nula y así

$$G = \int_V F(c) + K_2 / 2 |\nabla c|^2 \quad (2.35)$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange es $\frac{\partial F}{\partial c} - K_2 \Delta c = \text{cte}$ (o $\frac{\partial F}{\partial c} - \nabla \cdot [K_2(c) \nabla c] = \text{cte}$ si K_2 dependiese de c), que da las configuraciones de equilibrio. Ahora el "potencial generalizado" es $\partial G(c) = \frac{\partial F}{\partial c}(c) - K_2 \Delta c = f(c) - K_2 \Delta c$ de donde el flujo es $J = -M(c) \nabla \cdot (-K_2 \Delta c + f(c))$, con $M(c) > 0$ y así la ecuación de la mezcla es

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(M(c) \nabla (-K_2 \Delta c + f(c)) \right) \quad (2.36)$$

que es la ecuación de Cahn-Hilliard de la Sección 0.1 cuando M es constante.

Si ahora F es un polinomio cuártico entonces escribiendo la solución como $c = c_0 + \hat{c}$ con c_0 una configuración homogénea de referencia entonces \hat{c} verifica una ecuación como (2.36) con un polinomio con coeficientes dependiendo de c_0 y con $\int_V \hat{c} = 0$; puede probarse que esta nueva variable tras ser reescalada en x y t verifica una ecuación del tipo

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \left[M(c) \nabla (-K \Delta c + A c + B c^2 + c^3) \right] \quad (2.37)$$

con $A \in \{1, 0, -1\}$ según c_0 esté por encima, en, o por debajo de la espinoidal respectivamente.

En los sistemas físicos M y B suelen depender sensiblemente de la temperatura y la presión, pero en un caso ideal en el que el quenching se produzca lo suficientemente rápido puede suponerse que el sistema alcanza su estado final antes de que la separación de fase comience y así la dependencia en T y p puede suprimirse. En un caso más realista la separación de fase comienza antes de alcanzarse la temperatura y presión final y la dependencia en estas variables debe tenerse en cuenta; en algunos casos esta situación puede modelizarse con M y B dependiendo del tiempo.

Observemos por último que la energía libre (2.30), (2.35) actúa como funcional de Lyapunov del sistema, i.e. decrece sobre las soluciones: $\frac{d}{dt} G(c) \leq 0$. De hecho con una G arbitraria, si $c(x, t)$ es solución de $\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \left[M(c) \nabla \partial G(c) \right]$ entonces

$$\frac{d}{dt} G(c) = \int_V \partial G(c) \frac{\partial c}{\partial t} = - \int_V M(c) |\nabla \partial G(c)|^2 \leq 0$$

y de hecho $\frac{d}{dt} G(c) = 0$ si y sólo si $\partial G(c) = \text{cte}$ en V , que es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a G .

0.3 Motivación Matemática. Descripción de Resultados.

Al interés intrínseco motivado por razones de la Física en el estudio de los modelos que describen los fenómenos descritos en las Secciones 0.1 y 0.2 hay que añadir un interés matemático puesto que evidencias experimentales y numéricas, [20,23,34-37,39], demuestran una enorme riqueza matemática por parte de las soluciones de las ecuaciones involucradas: comportamientos caóticos, transiciones a la turbulencia (cascada de Feigenbaum, intermitencia (Pomeau-Manneville), escenario Ruelle-Takens, [3]), complejas bifurcaciones de soluciones estacionarias y periódicas, existencia de ondas viajeras y ondas pulsantes, presencia de simetrías, atractores extraños, comportamientos finito dimensionales y un largo etcétera.

Por otro lado el "aspecto" de las ecuaciones (1.1)-(1.8) en la Sección 0.1 es aparentemente "simple": son ecuaciones escalares que se pueden estudiar con una sola dimensión espacial, hay pocos términos no lineales y son ecuaciones de tipo parabólico semilineal; esto hace a estos modelos susceptibles de ser estudiados analíticamente y numéricamente en búsqueda de la comprensión de los mecanismos que originan los comportamientos citados arriba y sus diversas interacciones. En este sentido estas son ecuaciones modelo.

Por supuesto, lo anterior representa un enorme trabajo (que es hoy por hoy uno de los mayores retos de la Ciencia moderna), tanto en estos modelos que estamos considerando como en otros muchos (entre los que caben destacar las ecuaciones de Navier-Stokes), el cual, hasta la fecha, está muy lejos de estar finalizado por la comunidad científica y al cual esta Memoria pretende ser una modesta aportación.

Tras una segunda ojeada a las ecuaciones, se aprecia que una primera dificultad añadida es el hecho de que las ecuaciones son de orden superior a dos, lo que impide utilizar una de las mayores herramientas en el estudio de problemas no lineales: los principios de Comparación y del Máximo; además en general las ecuaciones carecen de términos monótonos. Esto obliga, hasta la fecha, a utilizar sólo métodos de Energía en el estudio analítico

de dichas ecuaciones. Por otro lado como se comentó en la sección anterior desde el punto de vista físico es relevante el caso en el que el operador lineal no es positivo, ya que así la solución $u = 0$ es inestable debido a ciertas longitudes de onda por debajo de cierta longitud crítica, esto obliga a buscar resultados de estabilidad (lesee acotación de órbitas) en base a una información de carácter no lineal.

Otras dificultades aparentes provienen tanto del carácter no local de algunos términos no lineales ((1.5), (1.6), (1.8)) como de la condición de conservación de la media en (1.7); por contra las condiciones de contorno estudiadas (periódicas) son de una gran comodidad desde el punto de vista matemático (tanto teórico como computacional), así como también tienen significado físico.

Obsérvese que en la ecuación K-V, (1.8), los términos no lineales son la suma de los términos no lineales de K-S, (1.5), y C-H, (1.7), ecuaciones que han sido estudiadas en la literatura, [40-42]. Desgraciadamente (aunque por fortuna para el desarrollo de esta Memoria) los métodos empleados para ambas ecuaciones por separado son radicalmente distintos y esto hace que los resultados probados para ellas no sean automáticamente transpasables a K-V (de hecho muchos de ellos permanecen abiertos); asimismo el tipo de interacción y competencia entre ambos términos no lineales no está suficientemente comprendido. De hecho como probaremos en el Capítulo II (una vez recuperados e incluso generalizado resultados conocidos para K-S y C-H) el término característico de K-S tiene una fuerte estructura disipativa (al menos sobre funciones pares) mientras que el de C-H puede tener un carácter disipativo o explosivo y al acoplarlos (y dependiendo de diversos parámetros) alguno de ambos caracteres puede competir con ventaja sobre el otro (Sección II.3).

Tras las exploraciones numéricas [34,35,36], se aprecia que K-V posee la misma riqueza de soluciones y la misma estructura del diagrama de bifurcación que K-S, pero el término no lineal que las diferencia acelera las bifurcaciones y complicaciones dinámicas, i.e. estas se producen a menores valores umbrales del parámetro de bifurcación.

El modelo K-S dado por la ecuación (1.1) tiene una importante

característica que se expresa en el hecho de que la solución, una vez eliminado su promedio (que puede ser no acotado) verifica la ecuación (1.5), además derivando en (1.1) (o en (1.8) con $\delta = 0$) obtenemos que $v = \frac{\partial}{\partial x} u$ es solución de

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial^4}{\partial x^4} v + \frac{\partial^2}{\partial x^2} v + 2v \frac{\partial}{\partial x} v = 0 \quad (3.1)$$

ecuación que ha sido derivada directamente en [5,14], y que presenta un aspecto más simple, y cuya no linealidad es de tipo Burgers, además de que el promedio de u puede conocerse una vez conocida la evolución de v , según se vió en la Sección 0.1. Esta propiedad no es compartida por (1.6)-(1.8) donde al derivar con respecto a x siempre aparecen términos residuales en u y por tanto la ecuación no se puede desacoplar como antes. En el análisis matemático de K-S, esta propiedad de poder trabajar simultáneamente con una ecuación local (1.1) o una no local (1.5) o un sistema dado por (3.1) y la evolución del promedio se ha mostrado de gran ayuda, [40-42].

El modelo C-H dado por (1.7) (o por (1.8) con $\gamma = 0$) a pesar de su aspecto tiene una enorme virtud matemática: la existencia de un "funcional de Lyapunov", asociado a una energía libre interfacial, [28,31], que es disipado por el sistema, este funcional viene dado, con las notaciones de (1.8), por (Sección II.3):

$$G(u) = V(u) + \frac{\beta}{2} \|u\|^2, \text{ siendo}$$

$$V(u) = \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \int_{\Omega} \delta F(u), \quad \Omega = (0, L) \quad (3.2)$$

$\delta F(s) = \int_0^s \delta f(t) dt$, y $\|\cdot\|$ es la norma en un dual de un espacio de Sobolev adecuado (obsérvese la diferencia con el funcional de Lyapunov descrito en la Sección 0.2.3 debido al término extra en la ecuación). Esta propiedad es la que permite obtener una información no lineal acerca del comportamiento de las soluciones de la ecuación; esta incluye (dependiendo de δF) desde disipatividad hasta explosiones en tiempo finito pasando por convergencia hacia soluciones estacionarias del sistema.

Si bien el origen de esta Memoria fueron los modelos (1.1)-(1.8), a lo largo de todo el tiempo dedicado su estudio matemático así como al de la literatura previamente existente y a la que se publicó durante este período, fueron apareciendo argumentos, formas de obtener información de las ecuaciones que eran aplicables más allá del ámbito particular de los modelos de partida y que podían ser aplicados a otros muchos problemas en derivadas parciales de la Física; así la presente Memoria pese a estar estructurada desde su inicio en torno a la ecuación de Kuramoto-Velarde (generalizada), Capítulo II y Capítulo IV, Sección IV.4, presenta un aspecto mucho más teórico y abstracto, Capítulos I, III y IV, cuyos resultados son obtenidos bajo condiciones estructurales suficientemente amplias como para abarcar una grandísima gama de ecuaciones. Un claro exponente de lo dicho se encontrará en los ejemplos estudiados en el Capítulo I y las aplicaciones sobre ellos en el Capítulo III. De igual manera los resultados abstractos del Capítulo IV son susceptibles de ser aplicados a otros muchos modelos.

Esta vertiente teórica se manifiesta en la organización interna de la Memoria a través de la forma y el orden en el que se han expuesto los diferentes capítulos.

Veamos a continuación una descripción más detallada de los contenidos de cada capítulo.

CAPITULO I. ECUACIONES SEMILINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT

La Sección I.1 está dedicada a la extensión de un marco funcional abstracto, hoy por hoy clásico, [43,44], que se muestra muy adecuado para el tratamiento del problema de valor inicial determinado por las ecuaciones (1.1)-(1.8) de la Sección 0.1, así como otras muchas ecuaciones en derivadas parciales que son ilustradas al final de la sección.

La extensión de este marco funcional consiste básicamente en poder trabajar con no linealidades operando entre cierta clase de espacios (los espacios de interpolación asociados a un operador

lineal) y sus duales (espacios de extrapolación), definiendo y encontrando soluciones del problema de Cauchy que toman valores en espacios duales y que por tanto han de ser interpretadas como funcionales, esto nos hace recuperar en un gran número de casos que la solución encontrada es de las llamadas "soluciones débiles" o incluso "muy débiles" en los clásicos métodos variacionales, [45,46].

Hasta ahora el marco funcional sólo permitía encontrar soluciones que tomaban valores en espacios de "funciones" (y no en los duales) restringiendo la clase de datos iniciales que puede tomarse; en este sentido, pues, obtenemos mejoras en cuanto a la clase de datos iniciales para los que ciertas ecuaciones del tipo estudiado pueden resolverse.

Por otro lado los resultados de existencia y unicidad se complementan con resultados de regularidad que extienden y en algún caso mejoran resultados conocidos en la literatura. De hecho se demuestra que todos los teoremas válidos para el marco funcional conocido tiene un análogo en el nuevo marco funcional; esto permite utilizar, por ejemplo, toda la vastísima información contenida en [43] (incluso para no linealidades no autónomas) para soluciones mucho más débiles.

Con este método funcional una vez probado que un determinado problema puede ser tratado (que es por supuesto algo no trivial, ver abajo) los resultados básicos (existencia, unicidad, regularidad, dependencia continua respecto a datos iniciales y parámetros, estabilidad por la aproximación lineal etc.) son obtenidos de manera directa incluso para ecuaciones en las que los métodos clásicos no funcionan bien (por ejemplo términos no lineales no monótonos); así en los ejemplos del final de la Sección I.1 y en el Capítulo II la potencia del método se aprecia no sólo en la diversidad de ecuaciones a las que se aplica, sino a la casi optimalidad de los resultados de regularidad que obtenemos en ecuaciones tan importantes como ecuaciones de Reacción Difusión Convección, ecuaciones de Navier-Stokes (en dimensión 2 ó 3), a ecuaciones de orden superior incluyendo por supuesto K-S, K-V y C-H. Por contra se requieren algunas condiciones de mayor regularidad en las no linealidades que las necesarias en métodos

variacionales.

Por otro lado el problema de identificar el marco funcional para un modelo concreto, i.e. identificar los espacios de interpolación, es un problema directamente relacionado con resultados de regularidad elíptica e interpolación de espacios, y es por tanto interesante en sí mismo y ha sido estudiado por diversos autores, [49-52]. Una vez hecho este "trabajo sucio" pero que es lineal y que sólo depende de la parte lineal de la ecuación y de las condiciones de contorno, en la práctica no es difícil encontrar espacios de interpolación entre los que un término no lineal dado actúe, con esta información puramente estacionaria una gran información se obtiene sobre las soluciones del problema de evolución, [43,44]; por lo dicho anteriormente mientras más débiles sean estos espacios entre los que la no linealidad actúa mayor será la clase de datos iniciales admisibles, aunque quizás menor la regularidad.

La Sección I.2 está dedicada a un problema técnico referente a la llamada "Diferenciabilidad Uniforme": Se pretende conocer si el semigrupo no lineal definido por las ecuaciones consideradas se puede aproximar en ciertas topologías por la solución de la ecuación linealizada y si esta aproximación es uniforme (en el tiempo y) en ciertos conjuntos del espacio de fases.

Esta propiedad es esencial a la hora de aplicar los métodos generales desarrollados en [47,48] para estimar la dimensión de los atractores de sistemas dinámicos finito o infinito dimensionales. Cuando la Diferenciabilidad Uniforme se verifica, la información que da la ecuación linealizada es muy útil para deducir determinadas propiedades geométricas del sistema dinámico.

En esta Sección probamos que este problema puede ser considerado con comodidad en el marco funcional de la Sección I.1, y encontramos condiciones suficientemente flexibles como para incluir una enorme clase de no linealidades; en particular probamos que para no linealidades polinómicas tenemos, siempre, Diferenciabilidad Uniforme en ciertas topologías que en casos concretos (por ejemplo en las ecuaciones de Navier-Stokes) coinciden con resultados que hasta ahora resultaban penosamente

largos de obtener y que se hacían caso por caso, [47,48].

CAPITULO II. PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA LA ECUACION DE KURAMOTO VELARDE GENERALIZADA.

La Sección II.1 está dedicada a aplicar el marco funcional desarrollado en el Capítulo I al modelo concreto (1.8) de la Sección 0.1; así obtenemos la existencia y unicidad sobre una clase natural de funciones y obtenemos resultados finos de regularidad aprovechando las particularidades del modelo. Asimismo se obtiene una información primaria sobre soluciones acotadas y sobre tiempos de explosión en distintas normas.

En la Sección II.2 estudiamos condiciones de explosión (o de acotación) de soluciones en diversas normas (regularidad de conjuntos absorbentes) e incluso obtenemos un resultado de descripción de la explosión: explosión en cada punto; asimismo obtenemos estimaciones de los tiempos de existencia de soluciones arbitrarias y estimaciones de la cuenca de atracción de la solución $u \equiv 0$.

La Sección II.3 contiene una propiedad de regularidad de los conjuntos invariantes del semigrupo y de la atractividad de los conjuntos ω -límites. Estos resultados junto con la mayor parte de los de la Sección II.2 siguen la siguiente filosofía: si una propiedad se verifica en una norma (acotación de orbitas, explosión, atracción, disipatividad) entonces esta propiedad se verifica con normas más fuertes (en esta parte los resultados de regularidad de la Sección II.1 son esenciales). A continuación, la Sección II.3 contiene un análisis de casos particulares en los que se puede obtener cierta información cualitativa y cuantitativa de la dinámica asintótica del sistema, entre los que destacan el análisis exhaustivo que se hace de C-H, mostrando las distintas propiedades cinéticas del término no lineal, dependiendo de su grado, y por otro lado, dos casos para la ecuación completa (1.8) en las que se muestran dos formas distintas de interacción entre los términos no lineales, uno produciendo explosiones y el otro con existencia global de soluciones. También se muestran casos con

unicidad de soluciones estacionarias.

Finalmente en la Sección II.4, utilizando técnicas recientes, [48], probamos la finitodimensionalidad de los conjuntos invariantes y acotados del sistema, estimando su dimensión Fractal y Hausdorff en dos métricas distintas, para esto usamos los resultados de la Sección I.2; los resultados concuerdan con los obtenidos previamente para K-S y C-H.

CAPITULO III. VARIEDADES INERCIALES DE SISTEMAS DINAMICOS DISIPATIVOS EN ESPACIOS DE BANACH

En los últimos tiempos se ha descubierto en numerosas ecuaciones de caracter "disipativo" que el comportamiento asintótico es esencialmente finito dimensional y que por tanto posee un número finito de grados de libertad, esto ocurre si el sistema posee un atractor maximal que es finito dimensional (en el sentido de la dimensión Fractal o Hausdorff); un intento riguroso de afirmar que a largo plazo el sistema se gobierna por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es la construcción de Variedades Inerciales, que son variedades finito dimensionales en el espacio de fases, que contienen al atractor maximal (y por tanto la dinámica asintótica) y que atraen exponencialmente el flujo del sistema (y por tanto tienen alguna información sobre los transitorios del sistema). A este tema se dedica este capítulo.

La presencia de Variedades Inerciales indica la existencia de estructuras espaciales coherentes (sólo un número finito de modos de Fourier excitados), es decir un ORDEN ESPACIAL, conviviendo con un comportamiento temporal que puede ser muy complejo, CAOS TEMPORAL, [23].

La Sección III.1 se dedica al plantamiento y a la descripción del método seguido en las siguientes secciones; es de destacar que el marco funcional del Capítulo I se presenta, de nuevo, como muy adecuado para los propósitos perseguidos. En la Sección III.2 obtenemos de forma natural condiciones que permitan utilizar el método así como condiciones de existencia de la variedad inercial. La Sección III.3 (con mucho la más larga y técnica de este

capítulo) analiza condiciones naturales para que el objeto construido anteriormente posea la propiedad de atracción exponencial, así como particularizaciones de estas condiciones, y muestra cómo los resultados probados por otros autores se recuperan de ellas; asimismo se indican casos en los que los resultados cubren casos que hasta la fecha quedaban fuera del ámbito de estudio. De hecho con nuestra aproximación, la técnica es susceptible de ser aplicada a una clase de problemas muchísimo más amplia que la conocida hasta ahora. Finalmente la Sección III.4 analiza un problema que no se había tratado en la literatura de variedades inerciales pero que es clave para que la variedad construida sea realmente una variedad inercial; la dificultad proviene de que la variedad se construye previo un truncamiento del término no lineal de la ecuación y por tanto trabajando con una ecuación distinta a la original, así el "empalme" entre los flujos original y truncado debe tenerse en cuenta. Uno de los resultados más importantes (Teorema 4.1, Propiedad de Localización) establece que es precisamente la hipótesis de disipatividad (que hasta este momento no entra en juego) la que permite obtener una construcción efectiva de la variedad inercial.

Finalmente es de destacar que el método es susceptible de ser aplicado no sólo para ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólicas disipativas sino también a ciertas ecuaciones de ondas con rozamiento, [53].

CAPITULO IV. SIMETRIAS EN LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. ASPECTOS DINAMICOS

En este capítulo estudiamos consecuencias dinámicas de la presencia de un grupo de simetrías en una ecuación de evolución semilineal, centrandonos especialmente en propiedades de la dinámica asintótica: atractores, cuencas, variedades inerciales.

La Sección IV.1 contiene las nociones básicas de trabajo así como las propiedades de simetría de atractores y cuencas.

En la Sección IV.2 hacemos un riguroso análisis de las consecuencias que las simetrías tienen sobre las variedades

inerciales en general, y en particular sobre las construidas según el método desarrollado en el Capítulo III; asimismo volvemos a discutir, como en el Capítulo III, el problema de recuperar una variedad inercial para el sistema original, en este caso conservando todas las simetrías originales, eliminando todo efecto causado por el truncamiento. Aquí el problema se centra en como efectuar el truncamiento de la no linealidad sin producir "ruptura de simetría", es decir sin perder simetrías del problema original.

En la Sección IV.3, centramos nuestra atención sobre la dinámica de soluciones que tienen una determinada simetría prescrita y fundamentalmente probamos que estas soluciones heredan del sistema total una variedad inercial que es una sección de la variedad inercial del sistema ambiente.

Finalmente en la Sección IV.4 aplicamos los resultados anteriores a la ecuación de Kuramoto-Velarde obteniendo dos resultados sorprendentes, el primero concuerda con el comportamiento de la ecuación lineal: si el sistema dinámico es disipativo, entonces toda solución de período suficientemente pequeño converge a cero exponencialmente (;para la ecuación no lineal!); el segundo permite bajo ciertas hipótesis razonables calcular exactamente las dimensiones de las variedades inerciales en función de un parámetro del problema y por tanto determinar los puntos de bifurcación para las dimensiones.

A su vez también se muestran las dimensiones y los modos determinantes de las variedades inerciales para determinadas subclases de soluciones y, por último, utilizando un cambio de escalas adecuado explicitamos como podemos obtener comportamientos equivalentes variando los parámetros del problema (Análisis Dimensional).

La mayor parte de estos resultados son prácticamente independientes del modelo estando basados fundamentalmente en el Grupo de Simetrías del problema.

Como última consideración general indicamos que cada Capítulo lleva su bibliografía específica de forma que esta puede consultarse con mayor facilidad y precisión.

BIBLIOGRAFIA

1. M.G.Velarde, C.Normand "Convection", Scientific American 243, #1, 92-108 (1980).
2. P.Clavin, E.Guyon "La Flamme", La Recherche vol.9, #94, 954-963 (1978).
3. J.P.Eckman "Roads to Turbulence in dissipative systems", Rev. Modern Physics vol.53, #4, parte 1, 643-654 (1981).
4. D.J.Benney "Long waves in liquid film". J. Math. and Physics 45, 150-155 (1966).
5. S.P.Lin "Finite amplitude side-band stability of viscous fluid". J. Fluid Mechanics 63, 417-429 (1974).
6. Y.Kuramoto, T.Tsuzuki "On the formation of dissipative structures in Reaction-Diffusion systems". Progress of Theor. Physics 54, 687-699 (1975).
7. Y.Kuramoto, T.Tsuzuki "Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium", Progress of Theor. Physics 55, 356-369 (1976).
8. Y.Kuramoto "Diffusion-induced chaos in Reaction systems", Suppl. Progr. Theor. Phys. 64, 346-367 (1978).
9. Y.Kuramoto "Instability and Turbulence of wave fronts in Reaction-Diffusion systems", Progr. Theor. Phys. 63, #6, 1885-1903 (1980).
10. G.I.Sivashinsky "Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames, Part I. Derivation of basic equations", Acta Astronáutica 4, 1176-1206 (1977).
11. M.D.Michelson, G.I.Sivashinsky "Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames, Part II. Numerical experiments", Acta Astronáutica 4, 1207-1221 (1977).
12. G.I.Sivashinsky "On flame propagation under conditions of Stoichiometry", SIAM Journal of Appl. Maths 39, 67-82 (1980).

13. G.I.Sivashinsky, M.D.Michelson "On irregular wavy flow of a liquid down a vertical plane", Progr. Theor. Phys. 63, 211-2114 (1980).
14. A.J.Babchin, A.L.Frenkel, B.G.Levich, G.I.Sivashinsky "Nonlinear saturation of Rayleigh-Taylor instability in thin films", Phys. Fluids 26, #11, 3159-3161 (1983).
15. P.Pelcé, P.Clavin "Influence of hydrodynamic and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames", J. Fluid Mech. 124, 219-237 (1982).
16. G.Joulin, P.Clavin "Linear stability analysis of nonadiabatic flames: diffusional thermal model", Combustion and Flame 35, 139-153 (1979).
17. P.Clavin, F.A.Williams "Effects of molecular diffusion and of thermal expansion on the structure and dynamics of premixed flames in turbulent flows of large scale and low density", J. Fluid Mech. 116, 251-182 (1982).
18. G.H.Markstein "Experimental and theoretical studies of flame fronts stability", J. Aero. Sci. 18, 199 (1951).
19. P.Clavin "Dynamic behavior of premixed flame fronts in laminar and turbulent flows", Progr. Energy and Comb. Sci. 11, 1-59 (1985).
20. M.T.Aimar "Etude numérique d'une équation d'évolution non linéaire décrivant l'instabilité thermodiffusive d'un front de flamme", Tesis de Tercer Ciclo, Universidad de Provence (1982).
21. M.G.Velarde, Curso de Dinámica de Fluidos, Curso de Doctorado 89-90, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid.
22. Escuela de Física Teórica de Les Houches, Mayo-Junio 1988, curso "Liquids at Interfaces".
23. H.Chaté "Transition vers la turbulence via intermittence spatio-temporelle", Tesis Doctoral, Universidad Pierre et Marie Curie (1989).

24. P.L.García-Ybarra, J.L.Castillo, M.G.Velarde "A nonlinear evolution equation for Bénard-Marangoni convection with deformable boundary", Phys. Lett.A 122, 107-110 (1987).
25. P.L.García-Ybarra, J.L.Castillo, M.G.Velarde "Bénard-Marangoni convection with a deformable interface and poorly conducting boundaries", Phys. Fluids 30, 2655-2661 (1987).
26. X.L.Chu, Tesis Doctoral, UNED, Madrid 1988.
27. X.L.Chu, M.G.Velarde "Waves and turbulence at interfaces", Physica Scripta T25, 231-237 (1989).
- "Sustained transverse and longitudinal waves at the open surface of a liquid", Phys. Chem. Hydrodynamics 10, #5, 727-737 (1988).
- "Transverse and longitudinal waves induced and sustained by surfactant gradients at liquid-liquid interfaces", J. Colloidal and Interface Science 131, #2, 471-484 (1989).
28. J.W.Cahn, J.E.Hilliard "Free energy of a non-uniform system I. Interfacial free energy", J.Chem. Phys. 28, 258-267 (1958).
29. J.W.Cahn "Spinoidal Decomposition", Trans. Met. Soc. of Aime 248, 166-180 (1968).
30. J.S.Langer "Statistical theory of the decay of metastable states", Ann. of Phys. 54, 258-275 (1969).
31. J.S.Langer "Theory of Spinoidal Decomposition in alloys", Ann. Phys. 65, 53-86 (1971).
32. G.I.Sivashinsky "On cellular instability in the solidification of a dilute binary alloy", Physica 8D, 243-248 (1983).
33. A.Novick-Cohen, G.I.Sivashinsky "On the solidification front of a dilute binary alloy: thermal diffusivity effects and breathing solutions", Physica 20D, 237-258 (1986).
- 33a. A.Novick-Cohen, L.A.Segel "Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation", Physica 10D, 277-298 (1984).
- 33b. A.Novick-Cohen "Interfacial instabilities in directional solidification of dilute binary alloys: the Kuramoto-Sivashinsky

equation", *Physica* 26D, 403-410 (1987).

34. B.Nicolaenko, en *Physicochemical hydrodynamics: Interfacial Phenomena*, (M.G.Velarde editor) Plenum Press (1988).

35. J.M.Hyman, B.Nicolaenko "Coherence and Chaos in the Kuramoto-Velarde equation", en *Directions in Partial Differential Equations*, (M.Crandall editor) Academic Press (1987).

36. J.M.Hyman, B.Nicolaenko "The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and Dynamical Systems", *Physica* 18D, 113-126 (1986).

37. I.G.Kevrekidis, B.Nicolaenko, J.C.Scovel "Back in the saddle again: a computed assisted study of the Kuramoto-Sivashinsky equation", *SIAM Journal of Appl. Maths* (1989).

38. J.D.Farmer, E.Jen, A.Brandstätter, J.Swift, H.L.Swinney, A.Wolff, J.P.Crutchfield "Low dimensional Chaos in hydrodynamic system", *Phys. Rev. Lett* 51, 1442-1445 (1983).

39. P.Bergé "From temporal chaos towards spatial effects", *Proceedings of "Chaos 87"*, Monterrey, USA (1987).

40. B.Nicolaenko, B.Sheurer, R.Temam "Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equation: nonlinear stability and attractors", *Physica* 16D, 155-183 (1985).

41. B.Nicolaenko, B.Sheurer, R.Temam "Attractors for the Kuramoto-Sivashinsky equation", *AMS-SIAM lectures in Appl. Maths* vol.23, 149-170 (1986).

42. B.Nicolaenko, B.Sheurer, R.Temam "Dynamical properties of a class of pattern formation equations", *Comm. in PDE's* 14, #2, 245-297 (1989).

43. D.Henry "Geometric theory of semilinear parabolic equations", *Lecture Notes in Mathematics* 840, Springer (1982).

44. A.Pazy "Semigroups of linear operators and applications to PDE's", *Applied Mathematical Sciences* 44, Springer (1983).

45. J.L.Lions, E.Magenes "Problèmes aux limites non homogènes et applications", vol.I y II, Dunod (1968).

46. J.L.Lions "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod (1969).
47. P.Constantin, C.Foias "Global Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke Formulas and the dimension of the attractors for 2D Navier-Stokes equations", Comm. on Pure and Appl. Maths 38, 1-27 (1985).
48. P.Constantin, C.Foias, R.Temam "Attractors representing turbulent flows", Memorias de la AMS, vol.53, #314 (1985).
49. A.P.Calderon "Intermediate spaces and interpolation, the complex method", Studia Math. 24, 113-190 (1964).
50. P.Grisvard "Caractérisation de quelques espaces d'interpolation", Arch. Rat. Mech. Anal. 25, 40-63 (1967).
51. R.Seeley "Norms and domains of the complex powers A_B^z ", Amer. J. of Math. 93, 299-309 (1971).
52. R.Seeley "Interpolation in L^p with boundary conditions", Studia Math. 44, 47-60 (1972).
53. X.Mora "Finite-dimensional attracting invariant manifolds for damped semilinear wave equations", Res. Notes in Math. 155, 172-183 (1987).

CAPITULO I.

ECUACIONES SEMILINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT.

El objetivo de este capítulo es el de ampliar el marco en el cual las técnicas de [1] (obra que tomamos como punto de partida) se aplican, permitiéndonos mejores resultados abstractos de existencia, unicidad, regularidad de soluciones y permitiéndonos incluir ecuaciones de la Dinámica de Fluidos (Navier-Stokes en dimensión 2 ó 3, convección de Bénard), así como ecuaciones de Reacción Difusión Convección y las ecuaciones de Kuramoto-Sivashinsky, Kuramoto-Velarde y Cahn-Hilliard que hasta ahora eran tratadas con métodos muy diferentes (compacidad, monotonía).



1.1 Existencia, Unicidad y Regularidad de Soluciones de Ecuaciones de Evolución No Lineales en Escalas Extendidas de Espacios de Hilbert.

Sea H espacio de Hilbert real y separable; sea $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal no acotado, cerrado, positivo, autoadjunto y con resolvente compacta; así en particular A es sectorial en H (i.e. $-A$ genera un semigrupo analítico de aplicaciones lineales en H), [1]. Sea $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$ la sucesión no decreciente, convergente a $+\infty$ de autovalores de A contados con su multiplicidad, con $\lambda_1 > 0$ y sea $\{e_n\}$ base de Hilbert de H de autovectores de A , $Ae_n = \lambda_n e_n$. Así tenemos la siguiente Representación Espectral de A , [4]: si $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \in D(A) \subset H$

entonces $Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n e_n \in H$ siendo

$$D(A) = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \in H, \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |u_n|^2 < \infty \right\}.$$

De forma clásica, [1,2,3,4,12], pueden definirse las potencias fraccionarias de A y los espacios de interpolación X^α , puesto que A es sectorial en H , coincidiendo en nuestro caso con:

Definición 1.1

Con $0 \leq \alpha < \infty$ sean $X^\alpha = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \in H, \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |u_n|^2 < \infty \right\}$

y $A^\alpha: D(A^\alpha) = X^\alpha \rightarrow X^0 = H$ tal que $A^\alpha u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha u_n e_n$ si

$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \in X^\alpha$ y denotamos $|u|_\alpha = |A^\alpha u|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |u_n|^2 \right)^{1/2}$

que es una norma hilbertiana en X^α . En particular $X^0 = H$, $X^1 = D(A)$.

Como es bien sabido, [1,2,3], estos espacios y topologías definidas arriba nos proveen de la herramienta funcional básica para tratar problemas de evolución de tipo semilineal. Más abajo recuperaremos en un marco más general propiedades de dichos espacios de interpolación que son bien conocidas.

Definición 1.2

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos X^α como el espacio vectorial de las sucesiones reales, $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2 < \infty$, dotado de la norma hilbertiana $|x|_\alpha = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2 \right)^{1/2}$. Obsérvese que $X^0 = \ell^2$.

Definimos además, A^α operador lineal actuando entre sucesiones de forma que $A^\alpha((x_n)) = (\lambda_n^\alpha x_n)$.

El siguiente resultado, aunque natural, no parece haber sido usado en la literatura más que para los espacios X^α de la Definición 1.1 con α no negativo.

Proposición 1.1

- i) $(X^\alpha, |\cdot|_\alpha)$ es un espacio de Hilbert para todo α real.
- ii) Si $\alpha \geq \beta$ entonces $X^\alpha \subseteq X^\beta$ con inclusión continua, densa, y compacta si $\alpha > \beta$. La inclusión $i: X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ verifica

$$\|i\|_{\alpha, \beta} = |\lambda_1|^{\beta-\alpha} \tag{1.1}$$

- iii) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, 1]$ entonces para todo x de X^γ , $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, se tiene

$$|x|_{\theta\alpha + (1-\theta)\beta} \leq |x|_\alpha^\theta |x|_\beta^{1-\theta} \tag{1.2}$$

- iv) Para todo c, α reales $A^c: X^{\alpha+c} \rightarrow X^\alpha$ es una isometría suprayectiva con $(A^c)^{-1} = A^{-c}$; además $A^\alpha \cdot A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ como operadores de $X^{\gamma+\alpha+\beta}$ en X^γ para todo α, β, γ reales.

Demostración

- i) Es consecuencia de iv) puesto que $X^0 = \ell^2$ es de Hilbert.
- ii) Si $\alpha \geq \beta$ y $x \in X^\alpha$ entonces claramente $|x|_\alpha \geq |\lambda_1|^{\alpha-\beta} |x|_\beta$ y por tanto la inclusión es continua y la estimación de la norma es válida. Observemos que si llamamos para todo N natural $\delta^N = (\delta_n^N)$ tal que $\delta_n^N = \begin{cases} 1 & \text{si } n=N \\ 0 & \text{si } n \neq N \end{cases}$ entonces $\{\delta^N\}_N$ es un conjunto ortogonal

en X^α para todo α real, con normas: $|\delta^N|_\alpha = |\lambda_N|^\alpha$; además si $x = (x_n) \in X^\alpha$ entonces $x = \sum_{N=1}^{\infty} x_N \cdot \delta^N$ en X^α , por tanto $\{\delta^N\}_N$ es un conjunto ortogonal total en X^α ; consecuentemente la inclusión es densa. Por último si $\{u^m\}_m$ es una sucesión débilmente convergente a 0 en X^α , entonces $\{u^m\}_m$ es acotado en X^α y $u_n^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ para todo n natural; así para todo k natural:

$$|u^m|_\beta^2 = \sum_{n=1}^k |\lambda_n|^{2\beta} |u_n^m|^2 + \sum_{n>k} |\lambda_n|^{2\beta} |u_n^m|^2$$

si $n > k$ entonces $|\lambda_n| \geq |\lambda_k|$ y entonces $|\lambda_n|^{2\beta} \leq \frac{|\lambda_n|^{2\alpha}}{|\lambda_k|^{2(\alpha-\beta)}}$, así

$$|u^m|_\beta^2 \leq \sum_{n=1}^k |\lambda_n|^{2\beta} |u_n^m|^2 + \frac{C}{|\lambda_k|^{2(\alpha-\beta)}}$$

y por tanto $\limsup_{m \rightarrow \infty} |u^m|_\beta^2 \leq \frac{C}{|\lambda_k|^{2(\alpha-\beta)}}$ para todo k ; como $\alpha > \beta$

entonces u^m converge a 0 en X^β .

iii) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0, 1)$, $x \in X^\gamma$, $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$

$$|x|_{\theta\alpha + (1-\theta)\beta}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2 \right)^\theta \cdot \left(|\lambda_n|^{2\beta} |x_n|^2 \right)^{1-\theta} \leq \text{(desigualdad de Hölder)} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2 \right)^\theta \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\beta} |x_n|^2 \right)^{1-\theta} = |x|_\alpha^{2\theta} \cdot |x|_\beta^{2(1-\theta)}$$

iv) Claramente $|A^\epsilon x|_\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |\lambda_n^\epsilon x_n|^2 = |x|_{\alpha+\epsilon}^2$, $x \in X^{\alpha+\epsilon}$, el resto es obvio. \square

Definición 1.3

Por verificarse i)-iii) decimos que $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ es una Cadena de Espacios de Interpolación. Por verificarse iv) decimos que A^ϵ es un Operador (Isometría) con Descenso ϵ sobre la cadena $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$.

Proposición 1.2

i) La correspondencia $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{-\alpha, \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ pone en dualidad a X^α y $X^{-\alpha}$ para todo α real. En particular para $\alpha = 0$ es el producto escalar en $X^0 = \ell^2$, que está por consiguiente

identificado canónicamente con su dual.

ii) Si $\alpha \geq \beta \geq 0$ la inclusión $i: X^{-\beta} \rightarrow X^{-\alpha}$ es la transpuesta (con respecto a la dualidad de i)) de la inclusión $i: X^{\alpha} \rightarrow X^{\beta}$.

El operador A^{ϵ} como operador entre $X^{-\alpha}$ y $X^{-\alpha-\epsilon}$ es el transpuesto de A^{ϵ} como operador entre $X^{\alpha+\epsilon}$ y X^{α} ; decimos así que A^{ϵ} es Autoadjunto como operador sobre la cadena $\{X^{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$.

Si consideramos el operador A^{ϵ} como operador no acotado en X^{α} , con dominio $X^{\alpha+\epsilon}$, $\epsilon \geq 0$, entonces su transpuesto es

$$A_{\alpha}^{\epsilon}: D^{\circ} \subset X^{-\alpha} \rightarrow X^{-\alpha} \text{ con } D^{\circ} = X^{-\alpha+\epsilon} \text{ y } A_{\alpha}^{\epsilon} = A^{\epsilon} \text{ sobre } D^{\circ}.$$

iii) Siendo $J: X^0 = H \rightarrow X^0 = \ell^2$ definido por $J(u) = (u_n)_n$, siendo $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \in H$, entonces $J: X^{\alpha} \rightarrow X^{\alpha}$ es una isometría suprayectiva para todo $\alpha \geq 0$. Tomando $J': X^{-\alpha} \rightarrow (X^{\alpha})'$ la transpuesta de J , entonces $L = (J')^{-1}$ es una isometría suprayectiva y es tal que si $T \in (X^{\alpha})'$ entonces $L(T) = (T(e_n))_n \in X^{-\alpha}$; además para todos $u \in X^{\alpha}$ y $T \in (X^{\alpha})'$ se tiene que $T(u) = \langle L(T), J(u) \rangle_{-\alpha, \alpha}$ para todo $\alpha \geq 0$.

iv) Si $j: X^{\alpha} \rightarrow X^{\beta}$ es la inclusión, $\alpha \geq \beta \geq 0$, entonces

$$\begin{array}{ccc} X^{\alpha} & \xrightarrow{j} & X^{\beta} \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ X^{\alpha} & \xrightarrow{i} & X^{\beta} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} X^{\alpha+\epsilon} & \xrightarrow{A^{\epsilon}} & X^{\alpha} \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ X^{\alpha+\epsilon} & \xrightarrow{A^{\epsilon}} & X^{\alpha} \end{array}$$

son conmutativos si $\alpha+\epsilon \geq 0, \alpha \geq 0$. En particular los resultados de la Proposición 1.1 se verifican cambiando las X y A por X y A respectivamente y siempre que los "exponentes" verifiquen las restricciones correspondientes.

Por transposición

$$\begin{array}{ccc} (X^{\beta})' & \xrightarrow{J'} & (X^{\alpha})' \\ L \downarrow & & \downarrow L \\ X^{-\beta} & \xrightarrow{i} & X^{-\alpha} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} (X^{\alpha})' & \xrightarrow{(A^{\epsilon})'} & (X^{\alpha+\epsilon})' \\ L \downarrow & & \downarrow L \\ X^{-\alpha} & \xrightarrow{A^{\epsilon}} & X^{-\alpha-\epsilon} \end{array}$$

son conmutativos si $\alpha+\epsilon \geq 0, \alpha \geq 0$ y por tanto los resultados de la Proposición 1.1 y ii) de la Proposición 1.2 son válidos para los duales de X^{α} y para los transpuestos de A^{ϵ} .

v) Por último si $R: X \rightarrow X'$ es la identificación canónica de X y su dual i.e. $R(x) = \langle x, \cdot \rangle$ ($\langle \cdot \rangle$ producto escalar en $X = X^0 = H$) entonces

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{R} & X' \\ J \searrow & & \swarrow L \\ & X^0 = \ell^2 = (X^0)' & \end{array} \text{ es conmutativo.}$$

Demostración

i) Claramente $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{-\alpha, \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^{-\alpha} u_n) \cdot (\lambda_n^{\alpha} v_n)$ está bien definida sobre $X^{-\alpha} \times X^{\alpha}$ para todo α real (en particular para $\alpha = 0$ es el producto escalar) y $|\langle u, v \rangle_{-\alpha, \alpha}| \leq |u|_{-\alpha} |v|_{\alpha}$ entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\alpha, \alpha}$ es lineal y continua sobre X^{α} ($\langle \cdot, v \rangle_{-\alpha, \alpha}$ lo es sobre $X^{-\alpha}$ respectivamente) con norma $|u|_{-\alpha}$ ($|v|_{\alpha}$ respectivamente). Recíprocamente si T es lineal y continuo sobre X^{α} , con las notaciones de la Proposición 1.1, $\{\delta^n\}_N$ es un conjunto ortogonal en X^{α} y si $x = (x_n) \in X^{\alpha}$ entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \delta^n$ en X^{α} , siendo $\delta_n^N = \begin{cases} 1 & \text{si } n=N \\ 0 & \text{si } n \neq N \end{cases}$ por lo tanto $|T(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot T(\delta^n) \right| \leq \|T\| |x|_{\alpha}$ para todo $x \in X^{\alpha}$ o equivalentemente con $y = A^{\alpha}(x) \in \ell^2$ $\left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cdot \lambda_n^{-\alpha} T(\delta^n) \right| \leq \|T\| \cdot |y|_{\ell^2}$ para todo y de ℓ^2 , así $\{\lambda_n^{-\alpha} T(\delta^n)\} \in \ell^2$ y por tanto $v = \{T(\delta^n)\} \in X^{-\alpha}$, además $\|T\| = |v|_{-\alpha}$ y $T(x) = \langle v, x \rangle_{-\alpha, \alpha}$ para todo $x \in X^{\alpha}$.

ii) Si $\alpha \geq \beta \geq 0$, sean $v \in X^{-\beta} \subset X^{-\alpha}$, $x \in X^{\alpha} \subset X^{\beta}$ así

$$\langle v, l(x) \rangle_{-\beta, \beta} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n = \langle l(v), x \rangle_{-\alpha, \alpha}$$

Análogamente si $v \in X^{-\alpha}$, $x \in X^{\alpha+c}$ entonces

$$\langle v, A^c x \rangle_{-\alpha, \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \lambda_n^c x_n = \langle A^c v, x \rangle_{-\alpha-c, \alpha+c}$$

Si consideramos el operador A^c como operador no acotado en X^{α} , con dominio $X^{\alpha+c}$, $c \geq 0$, entonces su transpuesto es

$$A_s^c: D^c \subset X^{-\alpha} \rightarrow X^{-\alpha} \quad \text{con } D^c = \left\{ v \in X^{-\alpha}, \langle v, A^c(\cdot) \rangle_{-\alpha, \alpha} \text{ es continua} \right.$$

para la topología de X^{α} } y $\langle v, A^c(x) \rangle_{-\alpha, \alpha} = \langle A_s^c v, x \rangle_{-\alpha, \alpha}$ para todo $v \in D^c$, $x \in X^{\alpha+c}$. Pero $\langle v, A^c(\cdot) \rangle_{-\alpha, \alpha}$ es continua para la topología de X^{α} si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para todo

$x \in X^{\alpha+\epsilon}$, $|\langle v, A^{\epsilon}(x) \rangle_{-\alpha, \alpha}| \leq C \cdot |x|_{\alpha}$ y tomando $y = A^{\alpha}x$ esto equivale a que para todo $y \in X^{\epsilon}$ (que es denso en ℓ^2 , Proposición 1.1) $|\sum_{n=1}^{\infty} v_n \lambda_n^{c-\alpha} y_n| \leq C \cdot |y|_{\ell^2}$ y por consiguiente $\{v_n \lambda_n^{c-\alpha}\} = A^{c-\alpha}v \in \ell^2$ o lo que es lo mismo $v \in X^{-\alpha+\epsilon}$. Así $D^{\epsilon} = X^{-\alpha+\epsilon}$ y si $v \in D^{\epsilon}$, $x \in X^{\alpha+\epsilon}$ entonces $\langle v, A^{\epsilon}(x) \rangle_{-\alpha, \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \lambda_n^{\epsilon} x_n = \langle A^{\epsilon}v, x \rangle_{-\alpha, \alpha}$ por tanto $A_{\theta}^{\epsilon} = A^{\epsilon}$ sobre D^{ϵ} .

iii) La afirmación sobre J es obvia por construcción de X^{α} y X^{α} ; si tomamos $J': X^{-\alpha} \rightarrow (X^{\alpha})'$ la transpuesta de J , con $L = (J')^{-1} = (J^{-1})'$, como $J^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X^{\alpha}$, $x = (x_n) \in X^{\alpha}$, y la serie converge en X^{α} entonces si $T \in (X^{\alpha})'$ se tiene que $L(T) \in X^{-\alpha}$ verifica por definición que

$$L(T)(x) = T(J^{-1}(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n T(e_n)$$

y por tanto $L(T) = \{T(e_n)\} \in X^{-\alpha}$ (por 1)), también es claro que para todos $u \in X^{\alpha}$ y $T \in (X^{\alpha})'$ se tiene que $T(u) = \langle L(T), J(u) \rangle_{-\alpha, \alpha}$ para todo $\alpha \geq 0$.

iv) Es obvio por transposición.

v) Siendo $R: X \rightarrow X'$ la identificación canónica de X y su dual i.e. $R(x) = \langle x, \cdot \rangle$ ($\langle \cdot \rangle$ producto escalar en $X = H$), para todo $u \in X$ $(L \circ R)(u) = L(\langle u, \cdot \rangle) = \{ \langle u, e_n \rangle \} = J(u)$. □

Observación

Denotando $X^{-\alpha} = (X^{\alpha})'$, sea $K(\alpha) = \begin{cases} J & \text{si } \alpha \geq 0 \\ L & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$, definimos:

si $\alpha \geq \beta$

$$i: X^{\alpha} \rightarrow X^{\beta} \text{ como } i = (K(\beta))^{-1} \circ J \circ K(\alpha)$$

y para todos α, ϵ reales

$$A^{\epsilon}: X^{\alpha+\epsilon} \rightarrow X^{\alpha} \text{ como } A^{\epsilon} = (K(\alpha))^{-1} \circ A^{\epsilon} \circ K(\alpha+\epsilon)$$

por tanto los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 X^\alpha & \xrightarrow{i} & X^\beta \\
 K(\alpha) \downarrow & & \downarrow K(\beta) \\
 X^\alpha & \xrightarrow{i} & X^\beta
 \end{array} \quad \alpha \geq \beta, \quad
 \begin{array}{ccc}
 X^{\alpha+c} & \xrightarrow{A^c} & X^\alpha \\
 K(\alpha+c) \downarrow & & \downarrow K(\alpha) \\
 X^{\alpha+c} & \xrightarrow{A^c} & X^\alpha
 \end{array}$$

así A^c (i respectivamente) coincide con A^c (j respectivamente) si actúa entre espacios de "exponente" positivo, o con $(A^c)'$ ((j)' respectivamente) si son de exponentes negativos, o bien con una composición de una potencia de A (j respectivamente), R (o R^{-1}) y el traspuesto de otra si los exponentes tienen distinto signo.

Consecuentemente $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ es una "Cadena de Espacios de Interpolación" y A^c es un "Operador (isometría) Autoadjunto con Descenso c " sobre ella.

A la vista de lo anterior es claro que cualquier propiedad probada en los espacios X^α para los operadores A^β (que son simples de manejar) se "elevan" con las isometrías $K(\alpha)$ a propiedades análogas de los espacios X^α y sus duales y a los operadores A^α y sus traspuestos.

Definición 1.4

Con las notaciones anteriores definimos un operador actuando entre sucesiones reales: $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(-At)(u_n)_n = e^{-At}(u_n)_n = \left(e^{-\lambda_n t} u_n \right)_n$$

Proposición 1.3

1) Para todos α, β reales y $t > 0$ $\exp(-At): X^\alpha \rightarrow X^\beta$ es lineal y continua con norma:

$$\|\exp(-At)\|_{\alpha, \beta} = \begin{cases} e^{-\lambda_1 t} |\lambda_1|^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta \leq \alpha \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{t^{\beta-\alpha}} & \text{para } t \leq t_0 \\ \lambda_1^{\beta-\alpha} \cdot e^{-\lambda_1 t} & \text{para } t > t_0 \end{array} \right\} & \text{si } \beta > \alpha \end{cases} \quad (1.3)$$

donde $C = C(\beta-\alpha)$, $C(\sigma) = \sigma^\sigma e^{-\sigma}$, y $t_0 = t_0(\beta-\alpha) = (\beta-\alpha)\lambda_1^{-1}$

Su traspuesto es $(\exp(-At))' = \exp(-At): X^{-\beta} \rightarrow X^{-\alpha}$ (Es Autoadjunto sobre la cadena).

ii) Para todo α, β, c reales $A^c \cdot e^{-At} = e^{-At} \cdot A^c$ como operador entre X^α y X^β .

iii) Para todos s, t no negativos $e^{-At} \cdot e^{-As} = e^{-A(t+s)}$, $e^{-A0} = I$, como operadores en X^α , α real. Además para todo $x \in X^\alpha$ $e^{-At}x \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } x$ en X^α , es decir $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ es un Semigrupo Fuertemente Continuo en X^α , cuyo generador infinitesimal es $(-A, X^{\alpha+1})$, para todo α .

Demostración

i) Con α, β reales, $t > 0$, $x \in X^\alpha$ entonces

$$|e^{-At}x|_{\beta}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t} |\lambda_n|^{2(\beta-\alpha)} \cdot (|\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2) \leq \sup_n \left(\frac{|\lambda_n|^{\beta-\alpha}}{e^{\lambda_n t}} \right)^2 \cdot |x|_{\alpha}^2$$

Si $\beta \leq \alpha$ el supremo se alcanza en $n = 1$; si $\beta > \alpha$ el supremo es menor o igual que $\sup_{r \geq \lambda_1} \{ e^{-rt} \cdot r^{\beta-\alpha} \} = \frac{1}{t^{\beta-\alpha}} \cdot \sup_{s \geq \lambda_1} \{ e^{-st} \cdot s^{\beta-\alpha} \}$, un

fácil cálculo concluye el resultado. Por otro lado si $v \in X^{-\beta}$, y $x \in X^\alpha$ entonces $\langle v, e^{-At}x \rangle_{-\beta, \beta} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{-\lambda_n t} x_n = \langle e^{-At}v, x \rangle_{-\alpha, \alpha}$

ii) Es obvio.

iii) La propiedad de semigrupo es inmediata. Además basta comprobar lo demás para $\alpha = 0$ ya que $e^{-At}x$ converge a x en X^α (con t tendiendo a 0) si y sólo si $A^\alpha(e^{-At}x - x) = e^{-At}A^\alpha x - A^\alpha x$ converge a 0 en X^0 . Por otro lado si $(-A, X^1)$ es el generador infinitesimal en X^0 , sea $(G, D(G))$ el generador infinitesimal en X^α ; así $x \in D(G)$ si y sólo si existe $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-At}x - x}{t} = G(x)$ (límite en X^α) que equivale a que $y = A^\alpha x \in X^0$ verifique $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-At}y - y}{t} = A^\alpha(G(x))$ (límite en X^0) que equivale a $A^\alpha x \in X^1$ y $-A(A^\alpha x) = A^\alpha(G(x))$, o bien $x \in X^{\alpha+1}$ y $G(x) = -Ax$, es decir $(G, D(G)) = (-A, X^{\alpha+1})$.

Sean $x \in X^0$, $t > 0$, y k natural

$$\begin{aligned} |e^{-At}x - x|^2 &= \sum_{n=1}^k (e^{-\lambda_n t} - 1)^2 |x_n|^2 + \sum_{n>k} (e^{-\lambda_n t} - 1)^2 |x_n|^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^k (e^{-\lambda_n t} - 1)^2 |x_n|^2 + \sum_{n>k} |x_n|^2 \end{aligned}$$

así $\limsup_{t \rightarrow 0^+} |e^{-At}x - x|^2 \leq \sum_{n>k} |x_n|^2$ para todo k , y por tanto
 $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-At}x = x$ en X^0 .

Finalmente si $x \in X^1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-At}x - x}{t} + Ax \right|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_n t} - 1}{t} + \lambda_n \right)^2 |x_n|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_n t} - 1}{t\lambda_n} + 1 \right)^2 |\lambda_n|^2 |x_n|^2 \end{aligned}$$

la función $\phi(s) = \frac{e^{-s} - 1}{s} + 1$, $s > 0$, está acotada ($\phi(0^+) = 0$) y así con k natural

$$\left| \frac{e^{-At}x - x}{t} + Ax \right|^2 \leq \sum_{n=1}^k \phi(\lambda_n t)^2 |\lambda_n|^2 |x_n|^2 + \left| \phi \right|_{\infty}^2 \sum_{n>k} |\lambda_n|^2 |x_n|^2$$

y concluimos como arriba que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-At}x - x}{t} = -Ax$, en X^0 . Por tanto el generador infinitesimal ha de ser una extensión de $(-A, X^1)$;

pero si $\frac{e^{-At}x - x}{t} = \left\{ \frac{e^{-\lambda_n t} - 1}{t} x_n \right\}$ converge en X^0 entonces para cada n natural, $\frac{e^{-\lambda_n t} - 1}{t} x_n$ converge con t tendiendo a 0, y entonces el límite es $-\lambda_n x_n$, así el generador es $(-A, X^1)$. \square

Observaciones

i) En particular si $\beta > \alpha$, entonces para todo $0 < \delta < \lambda_1$, $t > 0$

$$\left\| \exp(-At) \right\|_{\alpha, \beta} \leq \frac{C_0}{t^{\beta-\alpha}} e^{-\delta t} \text{ para cierta constante } C_0 \quad (1.4)$$

ver [1,3].

ii) Es sabido, [4], que si $(G, D(G))$ es el generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ en un espacio de Banach reflexivo X , entonces el transpuesto de G como operador no acotado en X , es el generador infinitesimal del semigrupo transpuesto; los resultados anteriores concuerdan con esto.

iii) Bajo las condiciones impuestas sobre A , este genera un Semigrupo Fuertemente Continuo (de hecho analítico, ver Proposición 1.4 abajo) en X , [1,2], dado por $\exp(-At)(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} u_n e_n \in X$

si $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \in X, t \geq 0.$

Por tanto es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X^\alpha & \xrightarrow{e^{-At}} & X^\beta \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ X^\alpha & \xrightarrow{e^{-At}} & X^\beta \end{array} \quad \text{con } \beta, \alpha \geq 0 \text{ y}$$

por tanto la Proposición 1.3 vale para $\exp(-At)$ en este rango de "exponentes". Además el diagrama transpuesto también es conmutativo; consecuentemente $(e^{-At})' = L^{-1} \cdot e^{-At} \cdot L$ como operador entre $X^{-\beta}$ y $X^{-\alpha}$ $\beta, \alpha \geq 0$, y la Proposición 1.3 también es válida en este caso.

Definición 1.5

Sea, con las notaciones anteriores:

$$\exp(-At) = e^{-At} = (K(\beta))^{-1} \cdot e^{-At} \cdot K(\alpha): X^\alpha \longrightarrow X^\beta$$

para todo α, β reales.

Proposición 1.4

Sea $t \geq 0$, $\exp(-At)$ es Autoadjunto sobre la cadena $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$, además la Proposición 1.3 es válida. Más aún: $\{\exp(-At)\}_{t \geq 0}$ es un Semigrupo Analítico en X^α , con generador $(-A, X^{\alpha+1})$ para todo α real; consecuentemente $t \mapsto \exp(-At)u_0 = u(t)$ es analítica con valores en X^α , $u_0 \in X^\alpha$, y es la única solución del problema lineal de evolución:

$$u_t + Au = 0, u(0) = u_0 \in X^\alpha.$$

Demostración

Sólo queda por probar la analiticidad ya que las demás propiedades se "elevan" por medio de isometrías. Para esto es suficiente (de hecho equivalente, [1,3]) comprobar que existe una constante C y t_0 tales que $\|e^{-At}\|_{\alpha, \alpha} \leq C$ y $\|Ae^{-At}\|_{\alpha, \alpha} \leq \frac{C}{t}$ con $0 < t < t_0$, pero por la Proposición 1.3

$$\|e^{-At}\|_{\alpha, \alpha} \leq e^{-\lambda_1 t}, t \geq 0 \text{ y}$$

$$\|Ae^{-At}\|_{\alpha, \alpha} \leq \|A\|_{\alpha+1, \alpha} \|e^{-At}\|_{\alpha, \alpha+1} = \|e^{-At}\|_{\alpha, \alpha+1} \leq \frac{C}{t} \text{ con}$$

$0 < t < t_0 = \lambda_1^{-1}$ y $C = e^{-1}$ y por tanto concluimos. \square
 El resto puede verse en [1,2,3], ver también Lema 1.1 abajo.

Notación

A partir de ahora escribiremos A^c por A^c , c real, y $\exp(-At)$ por $\exp(-At)$ sin posibilidad de confusión por el contexto.

Ya tenemos construido el marco abstracto en el que resolver problemas de evolución de la forma $u_t + Au + f(u) = 0$, $u(0) = u_0$ siendo f no lineal, actuando entre dos espacios adecuados de la cadena $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. A diferencia de [1,2,3,10] permitimos que f actúe entre espacios de exponente negativo o de distinto signo obteniendo soluciones, mas o menos regulares, que pueden eventualmente tomar valores en espacios "duales"; esto permite incluir en éste marco abstracto un gran número de ecuaciones algunas de ellas tan importantes como por ejemplo las ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 2 ó 3 (que son tratadas habitualmente por métodos totalmente distintos, [6,9]), ecuaciones de Reacción Difusión Convección y ecuaciones de orden superior como las ecuaciones de Kuramoto-Velarde y Cahn-Hilliard, obteniendo mejoras parciales en la regularidad de las soluciones; además este marco aprovecha al máximo las propiedades "funcionales" de f sobre la cadena de espacios, para determinar la mejor clase de datos iniciales para los que puede resolverse el problema de Cauchy.

Es importante resañar que todos los teoremas de [1], son adaptables a la "escala extendida" (puesto que contiene a los duales), siendo obvios los nuevos enunciados, más abajo un simple argumento nos muestra que esta afirmación es cierta; aquí nos limitaremos a dar un sumario de resultados, los más importantes, básicos y más utilizados. Por simplicidad nos ceñiremos al caso autónomo, i.e. al caso en el que el término no lineal no depende del tiempo aunque en el caso no autónomo los resultados se trasladan fácilmente de los de [1] a nuestro marco.

I) ECUACION LINEAL

El problema de Cauchy lineal: (PCL)
$$\begin{cases} u_t + Au = f(t) \\ u(0) = u_0 \in X^\beta \end{cases}$$

siendo $f: [0, T] \rightarrow X^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Definición 1.6 (Solución Fuerte)

Si $u_0 \in X^\beta$ entonces $u(\cdot)$ es solución de (PCL) en $[0, T]$ si y sólo si $u: [0, T] \rightarrow X^\beta$ es continua y de clase C^1 en $(0, T)$, $u(t) \in X^{\beta+1}$ en $(0, T)$, $u(t) = u_0$ y la ecuación diferencial se verifica en $(0, T)$.

Lema 1.1 ([1], pg 50)

Supuesto que $f = 0$, entonces para todo $u_0 \in X^\beta$ y para todo T positivo, $u(t) = e^{-At}u_0$ es la única solución de (PCL) en $[0, T]$.

Lema 1.2 ([1], Lema 3.2.1, Teorema 3.2.2)

Sea $u_0 \in X^\beta$ y $f: (0, T) \rightarrow X^\beta$ localmente Hölder continua, tal que $\int_0^{\rho} |f(t)|_\beta dt < +\infty$ para algún ρ positivo.

Entonces existe una solución (fuerte) del problema de Cauchy lineal no homogéneo (PCLNH) $\begin{cases} u_t + Au = f(t) \\ u(0) = u_0 \in X^\beta \end{cases}$ a saber:

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds$$

II) ECUACION NO LINEAL

Consideremos el problema de Cauchy no lineal

(PC)
$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = u_0 \in X^\beta \end{cases}$$

con $f: X^\alpha \rightarrow X^\beta$ localmente lipschitz, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Obsérvese que aquí la positividad de A puede ser eliminada ya que podemos sustituir A y f por $A + \lambda I$ y $f - \lambda I$ respectivamente, con $A + \lambda I$ positivo.

Nuestro tratamiento difiere ligeramente del empleado en [1], adoptando el enfoque de [11] (para obtener unicidad).

Definición 1.7 (Solución Fuerte)

Si $u_0 \in X^\beta$, $u(\cdot)$ es solución de (PC) en $[0, T]$ si y sólo si $u: [0, T] \rightarrow X^\beta$ es continua, $u(0) = u_0$, $u([0, T]) \subset X^\alpha$, $u(t) \in X^{\beta+1}$, $u_t \in X^\beta$ en $(0, T)$, $f(u(\cdot)): [0, T] \rightarrow X^\beta$ es continua y la ecuación diferencial se verifica en $(0, T)$.

Observemos que en [1] se requiere en la definición de solución que $t \rightarrow f(u(t)) \in X^\beta$ sea localmente Hölder continua en $(0, T)$ y que $\int_0^\rho |f(u(s))|_\beta ds < \infty$ para algún ρ positivo; a posteriori según [11], Teorema A.2.2, Apéndice 2, toda solución en nuestro sentido verifica estas condiciones y por tanto son soluciones en el sentido de [1] y por tanto todos sus teoremas pueden ser aplicados a nuestras soluciones con la ventaja de la unicidad, ver [10].

En [11] se prueba que las soluciones de (PC) coinciden con las funciones u , verificando $u([0, T]) \subset X^\alpha$, y $f(u(\cdot)): [0, T] \rightarrow X^\beta$ es continua, que son soluciones de la ecuación integral

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(u(s))ds$$

por tanto como en [1], se puede probar

Teorema 1.1 ([1], Teorema 3.3.3)

Si $0 \leq \alpha - \beta < 1$, entonces para todo $u_0 \in X^\alpha$ existe $T = T(u_0) > 0$, tal que el (PC) tiene una única solución en $[0, T]$ con dato inicial u_0 .
(la solución es $u: [0, T] \rightarrow X^\alpha$ continua y es solución de la ecuación integral)

Teorema 1.2 ([1], Teorema 3.3.4)

En las hipótesis de antes, si además f es Acotada (i.e. f transforma acotados de X^α en acotados de X^β), sea $u_0 \in X^\alpha$ y consideremos el intervalo maximal de definición de la solución de (PC) con dato inicial u_0 , $[0, T_1)$ entonces o bien $T_1 = +\infty$ o bien $\text{LimSup}_{t \rightarrow T_1^-} |u(t)|_\alpha = +\infty$.

(Se prueba que u sale de cualquier acotado del dominio de f , si $T_1 < +\infty$; como paso intermedio se prueba que si u es acotada en X^α cuando $t \rightarrow T_1^-$, entonces también lo es en X^γ para todo $\gamma < \beta + 1$, esto último es cierto para $T_1 = +\infty$ en el caso de que $\text{Re}(\sigma(A)) (\geq \lambda_1) > \delta > 0$).

Consecuencia ([1], Teorema 3.3.6)

Como A tiene resolvente compacta, si f Acotada y $\{u(t), t \geq 0\}$ es una órbita acotada en X^α (y por tanto definida en $[0, \infty)$), entonces $\{u(t), t \geq 0\}$ es relativamente compacta en X^α .

Teorema 1.3 ([1], Teorema 3.5.2)

En las hipótesis del Teorema 1.1, con $u_0 \in X^\alpha$, si u es solución de (PC) con dato inicial u_0 definida en $[0, T]$, entonces para todo $\gamma < \beta + 1$ $t \mapsto u_t(t) \in X^\gamma$ es localmente Hölder continua en $(0, T]$.

Por otro lado todos los teoremas sobre dependencia continua y diferenciable y sobre el principio de estabilidad por la aproximación lineal de [1] són aplicables sin dificultad. De hecho los resultados de [1] pueden ser probados adaptando las demostraciones, utilizando adecuadamente las propiedades de la cadena $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ probadas más arriba.

Sin embargo, un argumento más corto es el siguiente: si partimos de (PC) $\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = u_0 \in X^\beta \end{cases}$ con $f: X^\alpha \rightarrow X^\beta$, localmente

lipschitz y $0 \leq \alpha - \beta < 1$, sean $v(t) = A^\beta u(t)$ y $v_0 = A^\beta u_0 \in X$, entonces v , formalmente, verifica $\begin{cases} v_t + Av = F(v) \\ v(0) = v_0 \in X \end{cases}$ con $F: X^c \rightarrow X$, localmente lipschitz, $F = A^\beta \circ f \circ A^{-\beta}$, $c = \alpha - \beta \in [0, 1)$; para esta ecuación todo [1] se aplica y como $A^{-\beta}$ es una isometría sobre la cadena $\{X^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ es inmediato comprobar que $A^{-\beta}$ transforma soluciones de la segunda ecuación en soluciones de (PC), así obtenemos los resultados para (PC).

Comentario

La cadena de espacios X^α y los operadores A^α con $\alpha \in \mathbb{R}$ están expresamente contruidos para poder ejecutar el paso anterior de tomar A^β sobre la ecuación, el marco funcional justifica la legitimidad de esta forma de proceder.

El caso $\alpha - \beta = 1$ marca el límite de aplicabilidad de esta teoría ya que impide el trabajar con soluciones tan regulares como las encontradas arriba, esencialmente debido a que la función $\phi(t) = t^{\beta - \alpha}$ es integrable en 0 sólo para $\alpha - \beta < 1$, apareciendo esta integral impropia en la mayor parte de las estimaciones, ver [1]. Por otro lado, pensando en las aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales particulares, en los que usualmente los espacios X^α son espacios de funciones con cierto grado de derivabilidad (o sus duales), el que $\alpha - \beta = 1$ indica que en cierta forma que en la "expresión de f " aparecen derivadas del mismo orden que el orden de A , en cuyo caso la ecuación no debe ser tratada como semilineal; en general lo anterior no es cierto sino que (usualmente dependiendo de la dimensión espacial, vía inmersiones de Sobolev o similares) algunos términos de f son "equivalentes funcionalmente" a las derivadas de orden superior de A .

Es en alguno de estos casos, cuando $\alpha - \beta = 1$, donde métodos clásicos (monotonía y/o compacidad) han proporcionado "Soluciones Débiles" sobre alguna clase de datos iniciales, [5, 9].

Veamos ahora un resultado de regularidad que es muchas veces aplicable en la práctica:

Proposición 1.5

Supongamos que existen $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=0}^M$, $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tales que

$$\begin{cases} \beta_{k+1} \geq \alpha_{k+1} > \alpha_k \geq \beta_k, \\ \beta_{k+1} > \beta_{k+1} > \beta_k \end{cases}$$

y tales que $f: X^{\alpha_k} \rightarrow X^{\beta_k}$ es localmente lipschitz para todo k .

Entonces si $u_0 \in X^{\alpha_0}$ se tiene que

$$u \in C(0, T, X^{\beta_{M+1}}) \cap C([0, T], X^{\alpha_0}) \text{ y } u_t \in C(0, T, X^{\gamma})$$

para todo $\gamma < \beta_{M+1}$ (si $M = \infty$ entonces $\beta_{\infty} = \sup\{\beta_k\}$)

Demostración

Si $u_0 \in X^{\alpha_k}$, como $0 \leq \alpha_k - \beta_k < 1$, por los resultados anteriores $u \in C(0, T_0, X^{\alpha_k})$ y entonces $u_t, f(u) \in C(0, T_0, X^{\beta_k})$, leyendo la ecuación como $Au = f(u) - u_t$ (podemos suponer que A es positivo: si no reemplazamos A y f por $A + \lambda I$ y $f + \lambda I$ respectivamente con $\lambda \gg 0$) y teniendo en cuenta que A es un isomorfismo entre $X^{\alpha+1}$ y X^{α} concluimos que $u \in C(0, T_0, X^{\beta_{k+1}})$, $u_t \in C(0, T_0, X^{\epsilon})$ para todo $\epsilon < \beta_k + 1$; para todo $t > 0$ fijo, repetimos el argumento usando como dato inicial $u(t) \in X^{\beta_{k+1}} \subset X^{\alpha_{k+1}}$ y el semigrupo local en $X^{\alpha_{k+1}}$; repitiendo el proceso concluimos. \square

Corolario

Sean $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=0}^M$, $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como en la Proposición 1.5; para cada $k = 0, \dots, M$ y $u_0 \in X^{\alpha_k}$ sea $T_k(u_0)$ el tiempo maximal de definición de la solución de (PC). Entonces si $k \geq 0$, para todo $u_0 \in X^{\alpha_k}$ se tiene que $T_k(u_0) = T_j(u_0) = T_0(u_0)$ $k \geq j \geq 0$.

Demostración

Puesto que $X^{\alpha_k} \subset X^{\alpha_0}$ y por el Teorema 1.2 entonces $T_k = T_k(u_0) \leq T_0(u_0) = T_0$; supongamos que $T_k < T_0$, por la Proposición 1.5 como $u_0 \in X^{\alpha_0}$ entonces $u \in C(0, T_0, X^{\alpha_k})$ y

$\limsup_{t \rightarrow T_k^-} |u(t)|_{\alpha_k} = +\infty$ lo cual es claramente absurdo. \square

Observación

En particular si una solución explota en tiempo finito, entonces todas las normas X^α explotan simultáneamente; en casos prácticos esto implica que no podría ocurrir, por ejemplo, que una solución permanezca pequeña mientras sus gradientes se hacen muy grandes.

Veamos unos ejemplos de ecuaciones que caen en este marco; estos ejemplos sólo pretenden ilustrar el alcance de los resultados y por tanto no aparecen indicados con la máxima generalidad ni con las hipótesis mínimas.

Es importante destacar que en la práctica un problema notablemente poco trivial es el de la caracterización de los espacios de interpolación, que son conocidos en algunos casos particulares (aunque suficientemente importantes) [16-18]; si existen sin embargo resultados generales de inclusión por ejemplo para operadores sectoriales en L^p , [1,2,3]. Veamos a continuación algunos casos en los que la caracterización es completa:

I) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, suficientemente regular (si $n > 1$), y sea $A = (-\Delta)^m$ con $D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, en $L^2(\Omega)$.

Entonces $X^\alpha = H^{2m\alpha}(\Omega) \cap H_0^{2m\alpha}(\Omega)$, [1], $\alpha > 0$.

II) Sea $\Omega = (0, L)^n \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, y definamos

$H = \{ u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n), u(x+Le_i) = u(x) \text{ c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n \}$

$H_{per}^m(\Omega) = H_{loc}^m(\mathbb{R}^n) \cap H$, $m \in \mathbb{N}$

Tomando $A = (-\Delta)^m$ con $D(A) = H_{per}^{2m}(\Omega)$, entonces $X^\alpha = H_{per}^{2m\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$, [5,6]. Si tomamos $\hat{H} = \{ u \in H, \int_{\Omega} u = 0 \}$ entonces la conclusión es válida cambiando $H_{per}^s(\Omega)$ por $\hat{H}_{per}^s(\Omega) = H_{per}^s(\Omega) \cap \hat{H}$.

III) Sea $\Omega = (0,L)^n \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, con las notaciones de II) sea X el cierre en $\hat{H} = (\hat{H})^n$ de los vectores $C_{\text{per}}^{\infty}(\Omega)$ con media y divergencia nula, tomando

$A = -\Delta$ con $D(A) = \{ u \in \hat{H}_{\text{per}}^2(\Omega), \text{Div}(u) = 0 \}$, entonces

$X^{\alpha} = \{ u \in \hat{H}_{\text{per}}^{2\alpha}(\Omega), \text{Div}(u) = 0 \}$, $\alpha > 0$, [5,6].

Observaciones

i) Muchos ejemplos de problemas de contorno que definen operadores sectoriales pueden encontrarse en [3], pero en la mayoría de los casos una descripción completa de los espacios X^{α} no es bien conocida.

ii) Existen en la literatura algunos resultados sobre los espacios de interpolación asociados a perturbaciones de un operador sectorial, [1,2,3], destaquemos por ejemplo:

Teorema 1.4 ([1], Teorema 1.4.8)

Si A_1, A_2 son operadores sectoriales en X (espacio de Banach) con el mismo dominio; si $(A_1 - A_2) \circ A_1^{-\alpha}$ es acotado en X con algún $0 \leq \alpha < 1$ entonces si llamamos $X_j^{\beta} = D(A_j^{\beta})$, $j=1,2$, tenemos que $X_1^{\beta} = X_2^{\beta}$ con normas equivalentes, para todo $0 \leq \beta \leq 1$. \square

Así en los ejemplos I)-III) podemos perturbar A por algunos operadores diferenciales de orden inferior, obteniendo el mismo marco funcional.

Veamos ahora ecuaciones que pueden ser tratadas con éstas técnicas.

Empecemos por observar que al aplicar los teoremas desarrollados más arriba, y resolver el problema de evolución, la ecuación diferencial es una igualdad en uno de los espacios X^{α} (determinado por ser el rango de la no linealidad o en su defecto por ser el espacio de datos iniciales), por tanto si $\alpha < 0$ la ecuación debe ser interpretada en sentido "dual"; es en estos casos donde recuperamos las nociones habituales de "soluciones débiles" dadas en los métodos variacionales. Empezaremos por dos ejemplos en el caso lineal y a continuación definiremos una clase

de no linealidades para las cuales aplicar todos nuestros resultados:

Con las notaciones de I) consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \lambda u = f & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

este problema tiene una única solución en X^α supuesto que $u_0, f \in X^\alpha$, en particular:

Si $f \in L^2(\Omega)$, entonces para todo $u_0 \in L^2(\Omega) = X$, u es analítica en t con valores en $L^2(\Omega)$, $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_t \in H_0^1(\Omega)$ y la ecuación diferencial se verifica en casi todo punto de Q .

Si $f \in (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega) = X^{-1/2}$, $f = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} g_i$ con $g_i \in L^2(\Omega)$, [8], entonces para todo $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$ la solución es analítica con valores en $H^{-1}(\Omega)$, $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, $u_t \in L^2(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega} u_t \phi + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi + \lambda \int_{\Omega} u \phi = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \quad \text{para toda } \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (1.5)$$

Si $f \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))' = (H^2(\Omega))' + H^{-1}(\Omega) = X^{-1}$, $f = f_1 + f_2$ con, por ejemplo, $f_1 = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g_{1j}$ con g_{1j} en $L^2(\Omega)$ (pero podría contener trazas) y $f_2 = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} h_i$ con h_i en $L^2(\Omega)$, [8], entonces para todo u_0 en X^{-1} la solución es analítica con valores en $(H^2(\Omega))' + H^{-1}(\Omega)$, $u(t) \in L^2(\Omega)$, $u_t \in H^{-1}(\Omega)$ y

$$\langle\langle u_t \phi \rangle\rangle - \int_{\Omega} u \Delta \phi + \lambda \int_{\Omega} u \phi = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} g_{1j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \phi + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \quad (1.6)$$

para toda $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ es el producto de dualidad entre $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$). Ahora u es una "solución muy débil" de la ecuación de evolución. Obsérvese que de hecho tenemos continuidad en el tiempo para la función y su derivada en cada uno de los casos expuestos arriba (ver las ecuaciones no lineales abajo).

Una interpretación totalmente análoga puede hacerse con $(-\Delta)^m$ y/o con condiciones de contorno periódicas. A continuación la

ecuación no lineal:

Definición 1.8

Sea Ω como en I), II) o III), decimos que $\hat{f}: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de pertenece a la clase \mathfrak{F} si \hat{f} verifica la condición de Caratheodory (i.e. $\hat{f}(x, \cdot)$ es continua para casi todo x en Ω y $\hat{f}(\cdot, y)$ es medible para todo y en \mathbb{R}) y $|\hat{f}(x, y)| \leq a(x) + b|y|$ $x \in \Omega, y \in \mathbb{R}$ y \hat{f} es lipschitz en la segunda variable, siendo $a(\cdot) \in L^2(\Omega), b \geq 0$.

Así $f: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definido por $f(u)(x) = \hat{f}(x, u(x))$ es continuo y acotado, más aún f es lipschitz en $L^2(\Omega)$, [7].

Análogamente $\hat{f}: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pertenece a la clase \mathfrak{F}_n si $\hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)$ con $\hat{f}_i \in \mathfrak{F}$. Así $f: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$ definido por $f(u)(x) = \hat{f}(x, u(x))$ es continuo, acotado y lipschitz.

A) Ecuaciones de Reacción-Difusión.

Con las notaciones de I), $m = 1, \hat{f} \in \mathfrak{F}, \nu > 0$

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

tiene una única solución para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$ verificando

$$u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), u_t \in C(0, T, H_0^1(\Omega)) \tag{1.7}$$

y la ecuación diferencial es una igualdad en $L^2(\Omega)$ para cada $t > 0$.

B) Ecuaciones de Difusión-Convección (perturbaciones viscosas de leyes de conservación).

Como en I), $m = 1, \hat{g} \in \mathfrak{F}_n, \nu > 0$

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u - \text{Div}(g(u)) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Así $-\text{Div}(g): L^2(\Omega) = X^0 \rightarrow (H_0^1)' = X^{-1/2}$ es lipschitz y por tanto para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$ la solución es única y

$$u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C(0, T, H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in C(0, T, L^2(\Omega))$$

y se verifica que

$$\int_{\Omega} u_t \phi + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega} g(u) \nabla \phi = 0 \quad \text{para toda } \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (1.8)$$

C) Ecuaciones de Reacción-Difusión-Convección.

Como en I), $m = 1$, $\hat{f} \in \tilde{Y}$, $\hat{g} \in \tilde{Y}_n$, $\nu > 0$

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u - \text{Div}(g(u)) + f(u) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Así para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$ la solución es tan regular como en B) y para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u_t \phi + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega} g(u) \nabla \phi + \int_{\Omega} f(u) \phi = 0 \quad (1.9)$$

D) Ecuaciones de Navier-Stokes.

Como en III) con $\nu > 0$, h función regular.

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = h & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ \text{div}(u) = 0, u \text{ periódica, de media nula} \end{cases}$$

Según [6] (observación 2.2, pg.12) el término no lineal $f(u) = (u \cdot \nabla)u$ es un operador cuadrático entre $X^{1/2}$ y $X^{-1/4}$ y entre $X^{3/4}$ y X^0 , por tanto con nuestros resultados y usando la Proposición 1.5 obtenemos las llamadas Soluciones Fuertes en la literatura de N-S [5,6,9]: con

$$u_0 \in X^{1/2} = \{ u \in \hat{H}_{\text{per}}^1(\Omega), \text{Div}(u) = 0 \} \text{ entonces}$$

$$u \in C([0, T], X^{1/2}) \cap C(0, T, D(A)), \quad u_t \in C(0, T, X^{1/2})$$

y con las notaciones de [5,6]

$$\int_{\Omega} u_t \phi + \nu \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi + \langle b(u, u), \phi \rangle = \int_{\Omega} h \phi \quad \text{para toda } \phi \in X^{1/2} \quad (1.10)$$

Ecuaciones de orden superior:

E) Como en I), $m = 2$, $\hat{f} \in \mathfrak{F}$, $\hat{g} \in \mathfrak{F}_n$.

$$\begin{cases} u_t + \nu \Delta^2 u - \text{Div}(g(u)) + f(u) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0, \frac{\partial}{\partial n} u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Ahora $-\text{Div}(g): L^2(\Omega) = X^0 \longrightarrow (H_0^1)' = X^{-1/4}$, y por tanto para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} u &\in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C(0, T, H^3(\Omega) \cap H_0^{3/2}(\Omega)) \\ u_t &\in C(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

y para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u_t \phi - \nu \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \nabla \phi + \int_{\Omega} g(u) \nabla \phi + \int_{\Omega} f(u) \phi = 0 \quad (1.11a)$$

además para toda $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u_t \phi + \nu \int_{\Omega} \Delta u \Delta \phi + \int_{\Omega} g(u) \nabla \phi + \int_{\Omega} f(u) \phi = 0 \quad (1.11b)$$

F) Ecuaciones tipo Cahn-Hilliard.

Como en I) o II), $m = 2$, $\hat{f} \in \mathfrak{F}$

$$u_t + \nu \Delta^2 u - \Delta f(u) + \beta u = 0 \text{ en } Q = \Omega \times (0, T)$$

Es fácil comprobar que ahora $-\Delta f: X \longrightarrow X^{-1/2}$. Así para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$ existe una única solución que satisface

$$u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in C(0, T, H_0^1(\Omega))$$

y para toda $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u_t \phi + \nu \int_{\Omega} \Delta u \Delta \phi - \int_{\Omega} f(u) \Delta \phi + \beta \int_{\Omega} u \phi = 0 \quad (1.12)$$

G) Ecuaciones tipo Kuramoto-Velarde.

Como en II),

$$u_t + \nu \Delta^2 u - \Delta u + \beta u + \delta \Delta f(u) + \gamma |\nabla u|^2 = \frac{\gamma}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\nabla u| dx$$

Esta ecuación será estudiada en el Capítulo II, ver también

[13].

Observación

Sucesivas hipótesis de regularidad sobre los términos no lineales pueden permitirnos usar la Proposición 1.5, así por ejemplo:

Si para todo k natural $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \hat{f} \in \mathfrak{F}$ (o \mathfrak{F}_n) y $\frac{\partial^k}{\partial y^k} \hat{f}$ está acotada entonces $f: H^m(\Omega) \rightarrow H^m(\Omega)$ para todo m natural. Así se puede esperar que $f: X^{m/2} \rightarrow X^{m/2}$ y entonces usar Proposición 1.5.

A continuación veremos como aprovechar el marco funcional construido para obtener estimaciones de la ecuación diferencial.

Definición 1.9

Para todo $\delta \in \mathbb{R}$, definimos el " δ -producto":

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_{\delta} = \sum_n \lambda_n^{\delta} u_n v_n \quad (1.13)$$

para todos $\epsilon \in \mathbb{R}$, $u \in X^{\delta-\epsilon}$ y $v \in X^{\epsilon}$.

Así es claro que si $\alpha + \beta + 2\gamma = \delta$, para todos $u \in X^{\alpha+\gamma}$ y $v \in X^{\beta+\gamma}$

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_{\delta} = \langle A^{\alpha} u, A^{\beta} v \rangle_{\gamma} \quad (1.14)$$

consecuentemente esta propiedad puede ser "elevada" (mediante isometrías) para que sea válida con X y A sustituyendo a X y A respectivamente. En particular el 0-producto nos describe todas las dualidades de los X^{α} y el δ -producto, entre otros, el producto escalar en $X^{\delta/2}$.

Para obtener estimaciones sobre la solución de problema de

$$\text{Cauchy (PC)} \begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = u_0 \in X^{\beta} \end{cases}$$

sin usar la expresión integral del Lema 1.2, podemos proceder como sigue:

a) Si u es derivable con valores en X^γ , entonces

$$\langle\langle u_t, u \rangle\rangle_{2\gamma} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|_\gamma^2 \quad (1.15)$$

b) Si $u \in X^{\gamma+1}$, entonces

$$\langle\langle Au, u \rangle\rangle_{2\gamma} = |u|_{\gamma+1/2}^2 \quad (1.16)$$

y el tipo de estimaciones obtenidas es

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|_\gamma^2 + |u|_{\gamma+1/2}^2 = \langle\langle f(u), u \rangle\rangle_{2\gamma} \quad (1.17)$$

El conjunto de γ admisibles depende fuertemente de la regularidad de las soluciones, ver Proposición 1.5.

Esta técnica será utilizada de forma primordial en la sección siguiente, Sección I.2, y en el Capítulo III, Sección III.3.1.

Observemos que (1.17), con cierto γ , es el punto de partida de los denominados Métodos de Compacidad, [5,9], que esencialmente utilizando las estimaciones a priori que se derivan de (1.17) (si el término de la derecha lo permite), que son típicamente estimaciones en $L^\infty(0, T, X^\gamma) \cap L^2(0, T, X^{\gamma+1/2})$, y resultados de compacidad (para pasar al límite con soluciones aproximadas, por ejemplo) permiten encontrar en casos concretos, soluciones "débiles"; con respecto a nuestras soluciones "fuertes", estas soluciones "débiles" pueden surgir si por ejemplo $\alpha - \beta = 1$ o/y si pretendemos resolver el (PC) con datos iniciales en espacios de exponente menor que α ; en estos casos es frecuente que la solución débil se regularize hasta convertirse en fuerte, para todo instante de tiempo posterior.

1.2 Diferenciabilidad Uniforme de Semigrupos No Lineales.

En esta sección discutiremos un problema técnico importante, que surge en el estudio de la dinámica asintótica de numerosas ecuaciones semilineales. Este problema puede ser descrito de la siguiente forma:

Consideremos la ecuación de evolución semilineal

$$(ES) \begin{cases} u_t + Au + f(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

en un espacio de Hilbert X , ecuación de las consideradas en la sección anterior, es decir A es lineal, no acotado, autoadjunto (no necesariamente positivo), cerrado, de dominio denso y con resolvente compacta, que define un semigrupo analítico $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ y f es un operador no lineal actuando entre dos espacios de interpolación X^α y X^β , que es Lipschitz y acotado sobre conjuntos acotados de X^α , por último si $0 \leq \alpha - \beta < 1$ entonces la ecuación semilineal (ES) genera un semigrupo local (en el tiempo) $\{S(\cdot)\}_t$ en X^α , tan regular como el término no lineal f , mas exactamente además de los Teoremas 1.1, 1.2, 1.3 de la Sección I.1 tenemos los siguientes resultados, adaptados a nuestro marco funcional de [1], Teoremas 3.4.4, 7.1.3 y sus corolarios:

Teorema 2.1

i) Si en la situación anterior f es de clase C^r $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, entonces $\mathbb{R}^+ \times X^\alpha \ni (t, u_0) \mapsto S(t)u_0 \in X^\alpha$ es de la misma clase, en su dominio de definición; en particular con t positivo fijo, $X^\alpha \ni u_0 \mapsto S(t)u_0 \in X^\alpha$ es de clase C^r en su dominio y además $L(t, u_0) = \left[D_u S(t) \right] (u_0)$ viene dado por: para cada $\xi \in X^\alpha$ $L(t, u_0)\xi = U(t, u_0, \xi) \in X^\alpha$ es la solución de

$$\begin{cases} U_t + AU + Df(u(t))U = 0 \\ U(0) = \xi \end{cases}$$

siendo $u(\cdot)$ la solución de (ES) con dato inicial u_0 (supuesto que

$x \mapsto Df(x)$ es loc. Hölder).

ii) Si en la situación anterior $[t_0, t_1] \ni t \mapsto B(t) \in \mathcal{L}(X^\alpha, X^\beta)$ es Hölder continuo, entonces para todo ξ en X^β y τ en $[t_0, t_1]$ existe una única solución $U(t) = U(t, \tau, \xi)$ de

$$\begin{cases} U_t + AU + B(t)U = 0 \\ U(\tau) = \xi \end{cases}$$

definida en $(\tau, t_1]$. Más aún:

Con $t \geq \tau$ fijos $X^\beta \ni \xi \mapsto U(t, \tau, \xi) \in X^\beta$ es lineal y continuo y escribimos $U(t, \tau, \xi) = T(t, \tau)\xi$, $t \geq \tau$; así se verifican

a) $T(\tau, \tau) = I$, $T(t, s) \cdot T(s, \tau) = T(t, \tau)$ con $t \geq s \geq \tau$

b) $\left\{ T(t, \tau) \right\}_{t, \tau}$ es fuertemente continuo en (t, τ) con valores en $\mathcal{L}(X^\gamma)$ para todo $\gamma \in [\beta, \beta+1)$. □

La familia de operadores lineales $\left\{ T(t, \tau) \right\}_{t, \tau}$ se llama Proceso definido por la función B.

Por tanto si $u \in C([0, T], X^\alpha)$ es solución de (ES) entonces $B(\cdot) = Df(u(\cdot)) : [0, T] \mapsto \mathcal{L}(X^\alpha, X^\beta)$ es localmente Hölder continua en cuanto $x \mapsto Df(x)$ es loc. Hölder, en este caso i) y ii) del Teorema 2.1 pueden ser aplicados y al hacerlo denotamos $T(t, \tau, u_0)$ al Proceso definido por esta función B ($u_0 = u(0)$).

Si consideramos $S(t)$ con dominio en X^α pero con la topología de X^γ , $\alpha \geq \gamma$, podemos formular

Cuestión 1

Con $\gamma \in [\beta, \alpha]$, tenemos $X^\alpha \ni u_0 \mapsto S(t)u_0 \in X^\gamma$ y $L(t, u_0) = T(t, 0, u_0) \in \mathcal{L}(X^\gamma)$ entonces:

¿Es $L(t, u_0)$ la "diferencial" de $S(t)$ en u_0 para la topología X^γ ? es decir:

¿Aproxima $L(t, u_0)$ a $S(t)$ en algún sentido, para la topología de X^γ en algún entorno (con la métrica de X^γ) de u_0 ?

La respuesta es si para $\gamma = \alpha$ por el Teorema 2.1; veremos que

también lo es para algunos γ 's bajo condiciones suficientemente flexibles; numerosos ejemplos de la literatura, [5,14,15], para los que hasta ahora la comprobación de este hecho era penosamente larga son ahora discutidos con brevedad.

En los casos de respuesta afirmativa estamos interesados (como se verá más adelante) en que la aproximación anterior sea "uniforme" en el sentido siguiente:

Definición 2.1

Sean H espacio de Hilbert, $K \subset H$, y $S:K \rightarrow H$ continuo. S es Uniformemente Diferenciable (Unif.Dif. por brevedad) en K con la topología de H si y sólo si para cada $u \in K$ existe $L(u) \in \mathcal{L}(H)$ (no necesariamente único) tal que

$$\varphi(\epsilon) = \sup_{\substack{u,v \in K \\ 0 < |u-v| \leq \epsilon}} \frac{|Sv - Su - L(u)(v-u)|}{|v-u|} \rightarrow 0 \text{ con } \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

$$\text{y } \sup_{u \in K} \|L(u)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M < \infty \quad (2.2)$$

Observaciones

i) Si K es abierto entonces S es en particular diferenciable en sentido de Frechét en K y $DS(u) = L(u)$.

ii) Si S está definido en un entorno (en H) de K , es de clase C^2 en él, y si D^2S es acotada sobre K (que es cierto si K es compacto en H) entonces S es Uniformemente Diferenciable en K con $L(u) = DS(u)$.

Así podemos formular :

Question 2

¿Para qué conjuntos $K \subset X^\alpha$ y para qué $\gamma \in [\beta, \alpha]$ es $S(t)$ Uniformemente Diferenciable sobre K con la Topología de X^γ ? ¿Es esta propiedad uniforme en t ?

Intentaremos dar respuesta a estas cuestiones, que aunque parciales cubren todas las aplicaciones prácticas que nos interesan. Observemos que $S(\cdot)$ debe estar definido sobre K en

$[0, t]$, por tanto si nos restringimos al caso de K acotado en X^α , es natural considerar el problema sobre la siguiente familia de conjuntos:

Definición 2.2

Para cada $\rho, T > 0$,

$$\mathcal{D}_{\rho, T} = \left\{ v \in X^\alpha \text{ , } |S(t)v|_\alpha < \rho \text{ para } 0 \leq t \leq T \right\} \quad (2.3)$$

Además es claro que todo conjunto acotado en X^α e invariante para el semigrupo está contenido en un elemento de esta familia. Por otro lado si $S(t)$ es Unif. Dif. sobre K , entonces $S(t)$ es localmente Lipschitz y uniformemente continuo en K , por tanto es natural investigar alguna propiedad de lipschitzianidad de $S(t)$ sobre $\mathcal{D}_{\rho, T}$, así tenemos:

Proposición 2.1

Sean u_0 en $\mathcal{D}_{\rho, T}$ y $v_0 \in X^\alpha$, llamemos $w(t) = u(t) - v(t)$, siendo $u(\cdot) = S(\cdot)u_0$, $v(\cdot) = S(\cdot)v_0$ las soluciones correspondientes a (ES).

i) Si existe una función continua $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para cada $u_0 \in \mathcal{D}_{\rho, T}$, $v_0 \in X^\alpha$, (mientras $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ existen)

$$\frac{d}{dt} |w|_\alpha^2 \leq P(|w|_\alpha^2) \quad (2.4)$$

con $P(0) = 0$ y $\int_0^+ \frac{ds}{P(s)} = +\infty$ (2.5)

Entonces $\mathcal{D}_{\rho, T}$ es abierto en X^α .

ii) Si existe una función no negativa $Q \in C^1([0, \infty))$ con $Q(0) = 0$, y una constante positiva C , tales que para cada $u_0, v_0 \in \mathcal{D}_{\rho, T}$, $0 \leq t \leq T$

$$\frac{d}{dt} |w|_\gamma^2 + C |w|_{\gamma+1/2}^2 \leq Q(|w|_\gamma^2) \quad (2.6)$$

entonces existe una constante positiva $M = M(\rho, T, Q)$ tal que

$$|w(t)|_Y^2 + C \int_0^t |w(s)|_{Y^{1/2}}^2 ds \leq |w_0|_Y^2 e^{Mt} \quad \text{para cada } 0 \leq t \leq T \quad (2.7)$$

En particular

$$\mathcal{D}_{\rho, T} \ni u_0 \longmapsto S(\cdot)u_0 \in C([0, T], X^{\gamma}) \text{ or } L^2(0, T, X^{\gamma+1/2}) \quad (2.8)$$

es Lipschitz, con respecto a la norma de X^{γ} , en $\mathcal{D}_{\rho, T}$.

Demostración

1) El siguiente lema se encontrará mas adelante como Lema 2.3, Capítulo II, Sección II.2, posponemos a ese momento su demostración.

Lema

Sea $y(t)$ una función regular tal que
$$\begin{cases} y'(t) \leq P(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

siendo $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sean a_1, a_2 dos raíces consecutivas de P , con esto queremos decir que $P(a_i) = 0$, $i = 1, 2$, o que algún a_i es $\pm \infty$ pero P no se anula en (a_1, a_2) .

Supongamos que $y_0 \in (a_1, a_2)$ y definamos para $r \in (a_1, a_2)$

$$G(r) = \int_{y_0}^r \frac{1}{P(s)} ds$$

i) Si P es positiva en (a_1, a_2) , sea

$$0 < T(y_0) = G(a_2^+) = \int_{y_0}^{a_2} \frac{1}{P(s)} ds \in \bar{\mathbb{R}}$$

Entonces para cada $t \in [0, T(y_0))$ $y(t) < a_2$, y si $a_1 < y(s)$ para todo $s \in [0, t]$ entonces $y(t) \leq F(t) = G^{-1}(t)$.

Más aún, en este caso con $a_1 < \alpha < a_2$, entonces $y(t) < \alpha$ siempre que $y_0 < \alpha$ y $0 \leq t < G(\alpha) = \int_{y_0}^{\alpha} \frac{1}{P(s)} ds$.

ii) Si P es negativa en (a_1, a_2) , sea

$$0 < T(y_0) = G(a_1^-) = \int_{y_0}^{a_1} \frac{1}{P(s)} ds \in \bar{\mathbb{R}}$$

Entonces para todo $t \in [0, T(y_0))$ tal que $a_1 < y(s)$ para todo $s \in [0, t]$, se tiene que $y(\cdot)$ es decreciente en $[0, t]$ y

$$y(t) \leq F(t) = G^{-1}(t) \leq y_0 < a_2. \quad \square$$

Ahora con $a_1 = 0$ y $a_2 = +\infty$ y $y(t) = |w(t)|_\alpha^2$, de (2.4) para todo $c > 0$ se tiene que $y(t) < c$ siempre que $y_0 = y(0) < c$ y

$$t < \int_{y_0}^c \frac{ds}{P(s)}.$$

Si $u_0 \in \mathcal{D}_{\rho, T}$ sea R tal que $\sup_{[0, T]} |u(t)|_\alpha \leq R < \rho$ y sea $c = (\rho - R)^2$, si $v_0 \in X^\alpha$ entonces como $\int_0^c \frac{ds}{P(s)} = +\infty$, existe $\epsilon_0 > 0$

tal que $T < \int_{\epsilon_0}^c \frac{ds}{P(s)}$, así si $|u_0 - v_0|_\alpha < \delta_0 = \min\{\epsilon_0, c\}$ entonces

$w(\cdot)$ está acotada con $|w(t)|_\alpha^2 < c$ en $[0, T]$ (e implícitamente está definida en $[0, T]$ ya que si no w debería explotar, Teorema 1.2 Sección I.1), por tanto $|v(t)|_\alpha \leq |u(t)|_\alpha + |w(t)|_\alpha < R + \sqrt{c} = \rho$ en $[0, T]$, es decir $v_0 \in \mathcal{D}_{\rho, T}$.

ii) Como $\frac{d}{dt}|w|_\gamma^2 + C|w|_{\gamma+1/2}^2 \leq Q(|w|_\gamma^2)$ en $[0, T]$, con $Q(0) = 0$ y $|w|_\gamma^2 \leq C_0|w|_\alpha^2$ (ya que $\alpha \geq \gamma$), tomamos

$$M = \max\left\{ \left| \frac{dQ}{ds}(s) \right|, s \in [0, C_0 4\rho^2] \right\}$$

y así $\frac{d}{dt}|w|_\gamma^2 + C|w|_{\gamma+1/2}^2 \leq M|w|_\gamma^2$ de donde deducimos que

$|w(t)|_\gamma^2 \leq |w_0|_\gamma^2 e^{Mt}$ en $[0, T]$, e integrando entre 0 y $t \leq T$ obtenemos (2.7). \square

Corolario 2.1

i) Supongamos que $0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$ y que f es globalmente Lipschitz, entonces $\mathcal{D}_{\rho, T}$ es abierto en X^α .

Si f es sólo lipschitz sobre acotados, supongamos que el semigrupo generado por (ES) está globalmente definido y es Localmente Uniformemente Acotado en el sentido de que para cada $u \in X^\alpha$ y $\tau > 0$ existe un entorno B de u , tal que $\bigcup_{t=0}^{\tau} S(t)B$ es acotado en X^α . Entonces $\mathcal{D}_{\rho, T}$ es abierto en X^α .

ii) Supongamos que con $\gamma \in [\beta, \alpha]$ se verifica que

$$|\langle f(u) - f(v), u - v \rangle_\gamma| \leq Q(|u - v|_\gamma^2) + k|u - v|_{\gamma+1/2}^2 \quad (2.9)$$

con $Q \in C^1([0, \infty))$, $Q \geq 0$, $Q(0) = 0$ y $0 \leq k < 1$, para todos $u, v \in B(\rho) \cap X^{\gamma+1/2}$, siendo $B(\rho)$ la bola en X^α de radio ρ .

Entonces se verifica (2.6). En particular si $0 \leq \alpha - \gamma < 1/2$, $0 \leq \gamma - \beta \leq 1/2$ y f es Lipschitz sobre acotados, se verifica (2.9).

Observación

La condición (2.9), al igual que las condiciones (2.12) y (2.13) que aparecerán más abajo requieren cierta justificación: deben entenderse en términos de el δ -producto introducido en la Sección I.1; así si $f \in X^\beta$ y $z \in X^{\gamma+1/2}$ entonces con $\delta = \beta + \gamma + 1/2$, su δ -producto está bien definido y por tanto también lo está el δ' -producto con $\delta' \leq \delta$, así para obtener el producto escalar en X^γ (2γ -producto) basta que $\beta + \gamma + 1/2 \geq 2\gamma$ o lo que es lo mismo $0 \leq \gamma - \beta \leq 1/2$. Por otro lado (2.9), (2.12) y (2.13) sólo se necesitan sobre soluciones de (ES) que usualmente son mucho más regulares (Sección I.1).

En los resultados que siguen, por comodidad, y después de lo dicho, tomaremos productos escalares en diversos espacios en vez de hablar de δ -productos. Supondremos pues la regularidad necesaria para que éstos estén bien definidos.

Demostración del Corolario 2.1

i) De (ES) $w(\cdot)$ verifica $w_t + Aw + f(u) - f(v) = 0$ en $[0, T]$, sea $\lambda_0 \geq 0$ tal que $A_1 = A + \lambda_0 I$ es positivo, multiplicando escalarmente (en X) por $A_1^{2\alpha} w$ obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_\alpha^2 + |w|_{\alpha+1/2}^2 - \lambda_0 |w|_\alpha^2 + \langle f(u) - f(v), A_1^{2\alpha} w \rangle = 0 \quad (2.10)$$

Supongamos que $0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$ y que f es globalmente Lipschitz, entonces

$$\begin{aligned} |\langle f(u) - f(v), A_1^{2\alpha} w \rangle| &= |\langle A_1^\beta (f(u) - f(v)), A_1^{2\alpha-\beta} w \rangle| \leq \\ &\leq |f(u) - f(v)|_\beta |w|_{2\alpha-\beta} \leq K |w|_\alpha |w|_{2\alpha-\beta} \leq KC |w|_\alpha |w|_{\alpha+1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |w|_{\alpha+1/2}^2 + \frac{(KC)^2}{2} |w|_\alpha^2 \end{aligned}$$

donde C es la norma de la inclusión $X^{\alpha+1/2} \subset X^{2\alpha-\beta}$ (ver (1.1) Sección I.1). Así (2.4) se verifica con $P(s) = (2\lambda_0 + (KC)^2)s$ y (2.5) es cierto.

Si f es sólo lipschitz y acotada sobre acotados, supuesto que el semigrupo generado por (ES) está globalmente definido y es Localmente Uniformemente Acotado, entonces si $u_0 \in \mathcal{D}_{\rho, T}$ y v_0 está en cierta bola centrada en u_0 , $w(t) = u(t) - v(t)$ permanece en un acotado de X^α independiente de v_0 y t en $[0, T]$ y el razonamiento anterior vale siendo ahora K la constante de Lipschitz de f en cierto conjunto acotado.

Más abajo veremos condiciones más débiles y el caso particular de no linealidades polinómicas.

ii) Como arriba pero multiplicando por $A_1^{2\gamma} w$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_\gamma^2 + |w|_{\gamma+1/2}^2 - \lambda_0 |w|_\gamma^2 + \langle f(u) - f(v), A_1^{2\gamma} w \rangle = 0 \quad (2.11)$$

así la primera afirmación es obvia por (2.9).

Supongamos que $0 \leq \alpha - \gamma < 1/2$, entonces $X^{\gamma+1/2} \subset X^\alpha \subset X^\gamma$ y $|w|_\alpha^2 \leq |w|_\gamma^{2\theta} |w|_{\gamma+1/2}^{2(1-\theta)}$ con $\theta \in (0, 1]$ tal que $\alpha = \theta\gamma + (1-\theta)(\gamma+1/2)$ ((1.2) Sección I.1); como $u_0, v_0 \in \mathcal{D}_{\rho, T}$, w está acotada uniformemente en t y así

$$\begin{aligned} |\langle f(u) - f(v), A_1^{2\gamma} w \rangle| &\leq |f(u) - f(v)|_\beta |w|_{2\gamma-\beta} \leq K_\beta |w|_\alpha |w|_{2\gamma-\beta} \\ &\leq K |w|_\gamma^\theta |w|_{\gamma+1/2}^{(1-\theta)} |w|_{2\gamma-\beta} \end{aligned}$$

siendo K la constante de Lipschitz de f en la bola en X^α de centro cero y radio ρ , $B(\rho)$; por tanto si $0 \leq \gamma - \beta \leq 1/2$ lo anterior se puede acotar por

$$K |w|_\gamma^\theta |w|_{\gamma+1/2}^{(2-\theta)} \leq 1/2 |w|_{\gamma+1/2}^2 + CK^{2/\theta} |w|_\gamma^2$$

y así se verifica (2.9) con $Q(s) = (2\lambda_0 + CK^{2/\theta})s$. □

Teorema 2.2

Con las notaciones anteriores, supongamos que con $\gamma \in [\beta, \alpha]$ se verifica (2.7) y que para todos $u, v \in B(\rho) \cap X^{\gamma+1/2}$, $z \in X^{\gamma+1/2}$

$$| \langle f(v) - f(u) - Df(u)(v-u), z \rangle_\gamma | \leq k_1 |z|_{\gamma+1/2}^2 + C_1 |z|_\gamma^2 + g(|v-u|_{\gamma+1/2}^2) h(|v-u|_\gamma^2) \quad (2.12)$$

con $0 \leq k_1 < 1$, $C_1 \geq 0$, g, h positivas estrictamente crecientes (salvo que una sea constante), g cóncava, y supongamos además que para todo $u \in B(\rho) \cap X^{\gamma+1/2}$, $z \in X^{\gamma+1/2}$

$$| \langle Df(u)z, z \rangle_\gamma | \leq k_2 |z|_{\gamma+1/2}^2 + C_2 |z|_\gamma^2 \quad (2.13)$$

con $0 \leq k_1 + k_2 < 1$, $C_2 \geq 0$.

Entonces

$$\sup_{[0, T]} \sup_{\substack{u, v \in \mathcal{D}_{\rho, T} \\ 0 < |u-v|_\gamma \leq \varepsilon}} \frac{|S(t)v - S(t)u - L(t, u)(v-u)|_\gamma}{|v-u|_\gamma} \leq \sigma(\varepsilon) \quad (2.14)$$

siendo $\sigma^2(\varepsilon) = \sigma^2(\varepsilon, g, h, \rho, T) = M_1 \sup_{(0, \varepsilon^2]} \frac{g(M_2 s) \cdot h(M_3 s)}{s}$, M_1, M_2, M_3

constantes positivas.

Demostración

Sean $u(t)$, $v(t)$ las soluciones de (ES) con dato inicial $u_0, v_0 \in \mathcal{D}_{\rho, T}$ y denotemos $U(t) = L(t, u_0)(v_0 - u_0)$ y $\theta = v - u - U$.

Así θ verifica $\theta(0) = 0$ y $\theta_t + A\theta + f(v) - f(u) - L(u)U = 0$ o equivalentemente $\theta_t + A\theta + f(v) - f(u) - L(u)(v-u) + L(u)\theta = 0$.

Multiplicando escalarmente por $A_1^{2\gamma}\theta$ ($A_1 = A + \lambda_0 I$ positivo y $\lambda_0 > 0$) obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta|_\gamma^2 + |\theta|_{\gamma+1/2}^2 - \lambda_0 |\theta|_\gamma^2 \leq | \langle f(u) - f(v) - L(u)(v-u), \theta \rangle_\gamma | + | \langle L(u)\theta, \theta \rangle_\gamma | \quad (2.15)$$

por las hipótesis (2.12), (2.13), con $C_0 = 2(1 - (k_1 + k_2))$, $C_3 = 2(C_1 + C_2 + \lambda_0)$

$$\frac{d}{dt} |\theta|_{\gamma}^2 + C_0 |\theta|_{\gamma+1/2}^2 \leq C_3 |\theta|_{\gamma}^2 + 2g(|v-u|_{\gamma+1/2}^2) h(|v-u|_{\gamma}^2)$$

y así para todo $t \in [0, T]$, como $\theta(0) = 0$

$$|\theta(t)|_{\gamma}^2 \leq C_3 \int_0^t |\theta(s)|_{\gamma}^2 ds + 2 \int_0^t g(|v-u|_{\gamma+1/2}^2) h(|v-u|_{\gamma}^2)$$

y por el lema de Gronwall concluimos que para todo $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\theta(t)|_{\gamma}^2 &\leq C_4 \int_0^t g(|v-u|_{\gamma+1/2}^2) h(|v-u|_{\gamma}^2) \leq \\ &\leq C_4 \sup_{[0, T]} h(|v-u|_{\gamma}^2) \cdot \int_0^T g(|v-u|_{\gamma+1/2}^2) \leq \\ &\leq C_4 \sup_{[0, T]} h(|v-u|_{\gamma}^2) \cdot g(C(T) \int_0^T |v-u|_{\gamma+1/2}^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde hemos usado que g, h crecientes y g cóncava. Como se verifica (2.7), entonces para todo $t \in [0, T]$

$$|\theta(t)|_{\gamma}^2 \leq C_4 h(C_5 |v_0 - u_0|_{\gamma}^2) \cdot g(C_6 |v_0 - u_0|_{\gamma}^2) \quad (2.17)$$

ahora (2.14) es inmediato. \square

Corolario 2.2

Con las hipótesis y notaciones anteriores si

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{\sigma}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s) \cdot h(s)}{s} = 0 \quad (2.18)$$

entonces para cada $t \in [0, T]$, $S(t)$ es Uniformemente Diferenciable en $\mathcal{D}_{\rho, T}$ con la topología de X^{γ} ; más aún $\sigma(\varepsilon)$ en (2.14) tiende a cero con ε .

Además la conclusión del Teorema 2.2 es cierta si en (2.12) aparece una suma de productos $g_i \cdot h_i$ con g_i, h_i como allí; la condición (2.18) debe verificarse para cada producto $g_i \cdot h_i$ para obtener la Diferenciabilidad Uniforme.

Demostración

Como g, h son crecientes, en (2.14) con $M_4 = \max\{M_2, M_3\}$

$$\sup_{(0, \varepsilon^2]} \frac{g(M_2 s) \cdot h(M_3 s)}{s} \leq M_4 \cdot \sup_{(0, M_4 \varepsilon^2]} \frac{g(r) \cdot h(r)}{r} \quad \text{el resto es obvio.} \quad \square$$

Consideremos ahora el caso particular de que f sea un polinomio homogéneo de grado m , es decir $f(u) = B(u, \dots, u)$ donde $B: (X^\alpha)^m \rightarrow X^\beta$ m -lineal; así si B es continua entonces f es Lipschitz y acotada en acotados e incluso f es analítica, [7]. Sea VR el conjunto de las variaciones con repetición de dos elementos tomados de m en m , así con u, v en X^α podemos escribir

$$f(v) = f(u+(v-u)) = \sum_{\sigma \in VR} B(\sigma(u, v-u)) \quad (2.19)$$

y denotemos $n(\sigma)$ al número de $v-u$ en la variación σ , así

$$Df(u)(\cdot) = \sum_{n(\sigma)=1} B(\sigma(u, \cdot)) \quad (2.20)$$

$$\|Df(u)\|_{\alpha, \beta} \leq C_1 |u|_\alpha^{m-1} \quad (2.21)$$

$$|f(v) - f(u)|_\beta \leq C_2 \sum_{k=0}^{m-1} |u|_\alpha^k |v-u|_\alpha^{m-k} \quad (2.22)$$

$$|f(v) - f(u) - Df(u)(v-u)|_\beta \leq C_3 \sum_{k=0}^{m-2} |u|_\alpha^k |v-u|_\alpha^{m-k} \quad (2.23)$$

Teorema 2.3

- i) Con f como arriba, si $0 \leq \alpha - \beta \leq 1/2$ entonces $\mathcal{D}_{\rho, T}$ es abierto en X^α .
- ii) Si $0 \leq \alpha - \gamma < 1/2$, y $0 \leq \gamma - \beta \leq 1/2$ entonces (2.6), el Teorema 2.2 y (2.18) se verifican, en particular $S(t)$ es Uniformemente Diferenciable en $\mathcal{D}_{\rho, T}$ con la topología de X^γ .
- iii) Los resultados i) y ii) son ciertos si f es una suma de polinomios homogéneos.

Demostración

i) Como en (2.10) sea $\lambda_0 \geq 0$ tal que $A_1 = A + \lambda_0 I$ es positivo, multiplicando escalarmente (en X) por $A_1^{2\alpha} w$ obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_\alpha^2 + |w|_{\alpha+1/2}^2 - \lambda_0 |w|_\alpha^2 \leq | \langle f(u) - f(v), w \rangle_\alpha |$$

y el segundo miembro puede acotarse por

$$\begin{aligned}
 |f(u) - f(v)|_{\beta} |w|_{2\alpha-\beta} &\leq |f(u) - f(v)|_{\beta} |w|_{\alpha+1/2} \\
 &\leq C_2 \left(\sum_{k=0}^{m-1} |u|_{\alpha}^k |w|_{\alpha}^{m-k} \right) |w|_{\alpha+1/2} \leq C(\rho) \left(\sum_{k=0}^{m-1} |w|_{\alpha}^{m-k} \right) |w|_{\alpha+1/2} \\
 &\leq |w|_{\alpha+1/2}^2 + C_4 \left(\sum_{k=0}^{m-1} |w|_{\alpha}^{2(m-k)} \right) \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

y por (2.4), (2.5) con $P(s) = C_4 \left(\sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k} \right)$ concluimos.

ii) Por el Corolario 2.1, y las condiciones sobre γ , (2.6) se verifica automáticamente (ya que (2.9) se verifica). Además con $u, v \in B(\rho) \cap X^{\gamma+1/2}$, $z \in X^{\gamma+1/2}$ y $\theta \in (0, 1]$ tal que $\alpha = \theta\gamma + (1-\theta)(\gamma+1/2)$, como $2\gamma-\beta \leq \gamma+1/2$

$$\begin{aligned}
 |\langle f(v)-f(u)-Df(u)(v-u), z \rangle_{\gamma}| &\leq |f(v)-f(u)-Df(u)(v-u)|_{\beta} |z|_{\gamma+1/2} \\
 &\leq C_3 \sum_{k=0}^{m-2} |u|_{\alpha}^k |v-u|_{\alpha}^{m-k} |z|_{\gamma+1/2} \leq C(\rho) |v-u|_{\alpha}^p |z|_{\gamma+1/2}
 \end{aligned}$$

con $p \in (1, 2]$ a elegir más adelante; así esto es

$$\begin{aligned}
 &\leq C(\rho) |v-u|_{\gamma}^{p\theta} |v-u|_{\gamma+1/2}^{p(1-\theta)} |z|_{\gamma+1/2} \\
 &\leq 1/4 |z|_{\gamma+1/2}^2 + C_5 |v-u|_{\gamma}^{2p\theta} |v-u|_{\gamma+1/2}^{2p(1-\theta)}
 \end{aligned}$$

así en el Teorema 2.2 verificamos (2.12) con $h(s) = s^{p\theta}$, $g(s) = s^{p(1-\theta)}$; además para todo $u \in B(\rho) \cap X^{\gamma+1/2}$, $z \in X^{\gamma+1/2}$

$$\begin{aligned}
 |\langle Df(u)z, z \rangle_{\gamma}| &\leq \|Df(u)\|_{\alpha, \beta} |z|_{\alpha} |z|_{\gamma+1/2} \leq C_1 |u|_{\alpha}^{m-1} |z|_{\gamma}^{\theta} |z|_{\gamma+1/2}^{2-\theta} \\
 &\leq C(\rho) |z|_{\gamma}^{\theta} |z|_{\gamma+1/2}^{2-\theta} \leq 1/4 |z|_{\gamma+1/2}^2 + C_6 |z|_{\gamma}^2
 \end{aligned}$$

por tanto (2.13) se verifica y como $g(s).h(s) = s^p$ el Corolario 2.2 es aplicable siempre que g sea cóncava, pero como $\theta \in (0, 1]$ siempre se puede tomar $p \in (1, 2]$ tal que $0 \leq p(1-\theta) \leq 1$. Además en (2.14) $\sigma(\varepsilon) = O(\varepsilon^r)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, donde $r = \theta/2(1-\theta)$ si $0 < \theta \leq 1/2$ y $r = 1/2$ si $1/2 \leq \theta \leq 1$.

iii) Es obvio por lo anterior y el Corolario 2.2. □

Observaciones

i) Si $\alpha \geq \gamma + 1/2$ y en (2.12) tenemos que g es una potencia convexa, es decir $g(s) = s^r$, $r > 1$, cosa natural para no linealidades polinómicas, podemos poner

$$g(|v-u|_{\gamma+1/2}^2) = |v-u|_{\gamma+1/2}^{2r} \leq \rho^k |v-u|_{\gamma+1/2}^2 = \hat{g}(|v-u|_{\gamma+1/2}^2)$$

con $k + 2 = 2r$, y \hat{g} es concava (ver 2.25).

ii) Si para toda $\sigma \in VR$

$$|\langle B(\sigma(u, w), \theta) \rangle_\gamma| \leq D_\sigma |w|_{\gamma+1/2}^{a_\sigma} |w|_\gamma^{b_\sigma} |\theta|_{\beta+1/2} \quad (2.25)$$

con $a_\sigma + b_\sigma > 1$, y con $0 \leq a_\sigma \leq 1$ si $\alpha < \gamma + 1/2$, entonces se verifica (2.12), con una suma de productos como en el Corolario 2.2.

iii) Con α, β fijos el conjunto de γ para los que el Corolario 2.1 y el Teorema 2.3 son aplicables es $\gamma + 1/2 > \alpha \geq \gamma$, y $0 \leq \gamma - \beta \leq 1/2$, o bien $\gamma \in G = (\alpha - 1/2, \alpha] \cap [\beta, \beta + 1/2]$ y así: si $0 \leq \alpha - \beta < 1/2$ $G = [\beta, \alpha]$; si $\alpha - \beta = 1/2$ $G = (\beta, \beta + 1/2]$ y por último si $1/2 \leq \alpha - \beta < 1$ $G = (\alpha - 1/2, \beta + 1/2]$; obsérvese que como $0 \leq \alpha - \beta < 1$ entonces G es siempre no vacío y además en cualquier caso su punto medio es $(\alpha + \beta)/2$.

Veamos unos ejemplos de Diferenciabilidad Uniforme, para ello conservamos todas las notaciones anteriores.

A) Ecuación de Navier-Stokes bi-dimensional (Ejemplo D, Sección I.1) (no linealidad cuadrática).

Tenemos $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/4$, $G = (0, 1/4]$; según [5] pg.106, [6], se verifica para todos u, w, θ en $X^{1/2}$

$$|\langle B(u, w), \theta \rangle| \leq C |u|^{1/2} |u|_{1/2}^{1/2} |w|_{1/2} |\theta|^{1/2} |\theta|_{1/2}^{1/2}$$

y $\langle B(u, w), w \rangle = 0$

Veamos que podemos probar, además, diferenciabilidad uniforme con $\gamma = 0$ (así $\alpha = \gamma + 1/2$)

$$|\langle f(v) - f(u) - Df(u)(v-u), z \rangle| = |\langle B(w, w), z \rangle| \leq C |w|_{1/2}^{3/2} |w|^{1/2} |z|_{1/2}$$

por (2.25) deducimos (2.12). Además

$$|\langle Df(u)z, z \rangle| = |\langle B(u, z), z \rangle + \langle B(z, u), z \rangle| = |\langle B(z, u), z \rangle| \leq \\ \leq C(\rho) |z|_{1/2} |z|$$

y así verificamos (2.13). Por último

$$|\langle f(v) - f(u), v - u \rangle| \leq |\langle Df(u)w, w \rangle| + |\langle B(w, w), w \rangle| = |\langle Df(u)w, w \rangle| \leq \\ \leq C(\rho) |w|_{1/2} |w|$$

y por tanto comprobamos (2.9); la Dif. Unif. se sigue del Teorema 2.2.

B) El mismo argumento es posible para las ecuaciones estudiadas en [5], Cap. III, Sección 3, incluyendo las ecuaciones de un fluido dirigido por su frontera, ecuaciones de la Magnetohidrodinámica, y las ecuaciones de la Termohidráulica (convección de Bénard).

C) Ecuación de Navier-Stokes Tri-dimensional (Ejemplo D, Sección I.1) (nolinealidad cuadrática).

Como antes $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/4$, $G = (0, 1/4)$; ahora según [5] pg. 378, se verifica para todos u, w, θ en $X^{1/2}$ y cierto ε en $(0, 1)$

$$|\langle B(u, w), \theta \rangle| \leq C |u|_{1/2} |w|_{1/2} |\theta|^{1-\varepsilon} |\theta|_{1/2}^{\varepsilon}$$

y $\langle B(u, w), w \rangle = 0$

También podemos probar, además, diferenciabilidad uniforme con $\gamma = 0$ (así de nuevo $\alpha = \gamma + 1/2$), como antes

$$|\langle f(v) - f(u) - Df(u)(v - u), z \rangle| = |\langle B(w, w), z \rangle| \leq C |w|_{1/2}^2 |z|_{1/2}$$

por (2.25) deducimos (2.12). Además

$$|\langle Df(u)z, z \rangle| = |\langle B(u, z), z \rangle + \langle B(z, u), z \rangle| = |\langle B(z, u), z \rangle| \leq \\ \leq C(\rho) |z|_{1/2}^{1+\varepsilon} |z|^{\varepsilon}$$

y así verificamos (2.13) gracias a la desigualdad de Young. Por último

$$|\langle f(v) - f(u), v - u \rangle| \leq |\langle Df(u)w, w \rangle| + |\langle B(w, w), w \rangle| = |\langle Df(u)w, w \rangle| \leq \\ \leq C(\rho) |w|_{1/2}^{1+\varepsilon} |w|^{\varepsilon}$$

y por tanto comprobamos (2.9).

D) Ecuación de Kuramoto-Velarde (Ejemplo G) Sección I.1 y Capítulo II) (no linealidad cuadrática).

Tenemos $\alpha = 1/4$, $\beta = -1/4$, $G = (-1/4, 1/4]$.

En particular utilizaremos en el Capítulo II la Dif. Unif. con $\gamma = 0, 1/4$.

Una vez contestadas las cuestiones anteriores veamos en qué ámbito se aplican estos resultados, para esto necesitamos algunas definiciones y resultados; referimos a [5,15] para las demostraciones y para una exposición más extensa:

Definición 2.2

Sea (M, d) un espacio métrico y $K \subset M$ un compacto; sean $\epsilon, d > 0$, definimos

i) $\mu_{H,d,\epsilon}(K) = \inf \left\{ \sum_1^d r_i^d \right\}$ donde el ínfimo se toma sobre todos los recubrimientos finitos de K por bolas de radios $r_i \leq \epsilon$; como esta cantidad es no creciente en ϵ , definimos la Medida de Hausdorff d -dimensional de K

$$\mu_{H,d}(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_{H,d,\epsilon}(K) = \sup_{\epsilon > 0} \mu_{H,d,\epsilon}(K) \quad (2.26)$$

Se llama dimensión de Hausdorff de K a

$$d_H(K) = \sup \{ d > 0, \mu_{H,d}(K) = \infty \} = \inf \{ d > 0, \mu_{H,d}(K) = 0 \} \quad (2.27)$$

ii) La Medida Fractal d -dimensional de K

$$\mu_{F,d}(K) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^d \cdot n_K(\epsilon) \quad (2.28)$$

siendo $n_K(\epsilon)$ el mínimo número de bolas de radio ϵ necesarias para cubrir K . La dimensión Fractal de K es

$$d_F(K) = \sup \{ d > 0, \mu_{F,d}(K) = \infty \} = \inf \{ d > 0, \mu_{F,d}(K) = 0 \} \quad (2.29)$$

Así claramente $\mu_{H,d}(K) \leq \mu_{F,d}(K)$ y por tanto $d_H(K) \leq d_F(K)$, pudiendo ser esta última desigualdad estricta en algún caso, [15].

Definición 2.3

Sea H un espacio de Hilbert y $L \in \mathfrak{L}(H)$, para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$\alpha_m(L) = \sup_{\substack{F \subset H \\ \dim F = m}} \inf_{\substack{h \in F \\ \|h\|=1}} |Lh|_H$$

$$\omega_m(L) = \alpha_1(L) \dots \alpha_m(L) \tag{2.30}$$

si $s = \theta m + (1-\theta)(m+1)$, $\theta \in (0,1)$

$$\omega_s(L) = \omega_m^\theta(L) \omega_{m+1}^{1-\theta}(L) \tag{2.31}$$

Así, claramente, $\alpha_m(L)$ es decreciente en m y $\alpha_1(L) = \|L\|$; además si L es compacto los $\alpha_m(L)$ son los autovalores de $(L^* \circ L)^{1/2}$.

Consideremos $K \subset H$ compacto, y $S:K \rightarrow H$ continuo tal que $S(K) = K$ y supongamos que S es Uniformemente Diferenciable en K con la topología de H (Definición 2.1): para cada $u \in K$ existe $L(u) \in \mathfrak{L}(H)$ tal que $\varphi(\varepsilon) = \sup_{\substack{u, v \in K \\ 0 < \|u-v\| \leq \varepsilon}} \frac{|Sv - Su - L(u)(v-u)|}{\|v-u\|}$ tiende a cero

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\sup_{u \in K} \|L(u)\| \leq M < \infty$.

Es fácil comprobar que para todo $p \in \mathbb{N}$, S^p es también Unif. Dif. en K con la topología de H con "diferencial"

$$L_p(u) = L(S^{p-1}(u)) \circ \dots \circ L(S(u)) \circ L(u)$$

y que $\sup_{u \in K} \|L_p(u)\| \leq M^p$.

Podemos entonces definir con $d > 0$

$$\bar{\omega}_d = \sup_{u \in K} \{\omega_d(L(u))\} \text{ y } \bar{\omega}_d(p) = \sup_{u \in K} \{\omega_d(L_p(u))\} \tag{2.32}$$

y puede demostrarse, [5,14], que el siguiente limite existe

$$\Pi_d = \limsup_{p \rightarrow \infty} \bar{\omega}_d(p)^{1/p} = \inf_p \bar{\omega}_d(p)^{1/p} \tag{2.33}$$

lo que nos permite definir los números Λ_m , $m \in \mathbb{N}$, por medio de:

$$\Lambda_1 = \pi_1, \quad \Lambda_1 \Lambda_2 = \pi_2, \quad \Lambda_1 \dots \Lambda_m = \pi_m \quad (2.34)$$

Los Λ_m son los números de Lyapunov Uniformes en K y los exponentes de Lyapunov Uniformes en K son $\mu_m = \log(\Lambda_m)$.

Las definiciones són análogas si tenemos un semigrupo $S(\cdot)$ para el cual K es Invariante en el sentido de que $S(t)$ está definido en K para todo $t \geq 0$ y $S(t)K = K$; en este caso sólo hay que cambiar formalmente $p \in \mathbb{N}$ por $t > 0$ en la discusión anterior, [5].

Los resultados culminantes de este desarrollo teórico son, [5,14,15].

Teorema 2.3

i) En las hipótesis anteriores si para $d \geq 1$

$$\bar{\omega}_d = \sup_{u \in K} \{\omega_d(L(u))\} \leq k < 1 \quad (2.35)$$

Entonces $d_H(K) \leq d$.

ii) En las hipótesis anteriores si en vez de (2.35), tenemos con $d = m+s$ la condición más fuerte

$$\bar{\omega}_j \bar{\omega}_{m+1}^{(d-j)/(n+1)} < 1 \quad \text{para todo } j = 1 \dots m \quad (2.36)$$

Entonces $d_F(K) \leq d$. □

Estos resultados tienen una sencilla lectura en términos de los exponentes de Lyapunov uniformes; sin embargo sólo detallaremos una versión de estos resultados que es aplicable en la práctica.

Teorema 2.4 [5]

Sean $B \subset H$ siendo B, H espacios de Banach y Hilbert respectivamente tal que la inclusión es continua, sea $F: B \rightarrow H$ diferenciable. Sea $K \subset H$ compacto tal que el problema de Cauchy:

$$(PC) \begin{cases} u_t + F(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \in K \end{cases}$$

define un semigrupo continuo en K con $S(t)K = K$ para todo $t \geq 0$. Supongamos que éste semigrupo es Unif. Dif. sobre K con la topología de H , siendo su "diferencial" $L(t, u_0)$, la solución a tiempo t de la ecuación linealizada:

$$(PCL) \begin{cases} U_t + DF(u)U = 0 \\ U(0) = \xi \in H \end{cases}$$

con $u(t) = S(t)u_0$.

Entonces

i) Para todo u_0 en K y $t > 0$

$$\omega_m(L(t, u_0)) \leq \exp\left(-\int_0^t \inf_P \text{tr}(DF(u(s))oP) ds\right)$$

y así

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_m(t) &= \sup_{u_0 \in K} \omega_m(L(t, u_0)) \leq \\ &\leq \exp\left(-\inf_{u_0 \in K} \int_0^t \inf_P \text{tr}(DF(u(s))oP) ds\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $m \in \mathbb{N}$, P es un proyector ortogonal en H con rango m -dimensional en B , $\text{tr}(\cdot)$ es el operador traza y $u(\cdot)$ es la solución de (PC) con dato inicial u_0 en K . Consecuentemente con

$$q_m(t) = \inf_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \inf_P \text{tr}(DF(u(s))oP) ds \quad (2.38)$$

$$\bar{q}_m = \liminf_{t \rightarrow \infty} q_m(t) \quad (2.39)$$

tenemos

$$\bar{\Pi}_m = \Lambda_1 \dots \Lambda_m \leq \exp(\bar{q}_m) \quad \text{y} \quad \mu_1 + \dots + \mu_m \leq \bar{q}_m \quad (2.40)$$

ii)

Si $m \in \mathbb{N}$ verifica que $\bar{q}_m < 0$ entonces K tiene dimensión de Hausdorff y Fractal finitas (como subconjunto de H), con

$$d_H(K) \leq m \quad (2.41)$$

$$d_F(K) \leq m \cdot \max_{1 \leq j < m} \left(1 + \frac{(\bar{q}_j)^+}{|\bar{q}_m|} \right) \quad (2.42)$$

En el Capítulo II, Sección II.4, usaremos estas notaciones y resultados para estimar las dimensiones de conjuntos invariantes para la ecuación de Kuramoto-Velarde.

BIBLIOGRAFIA

1. D.Henry "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Lecture Notes in Mathematics, 840, Springer (1982).
2. A.Pazy "Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations", Applied Mathematical Sciences 44, Springer (1983).
3. A.Friedman "Partial Differential Equations", Holt Rinehart Winston (1969).
4. K.Yosida "Functional Analysis", Springer.
5. R.Temam "Infinite dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics", Applied Mathematical Sciences 68, Springer (1988).
6. R.Temam "Navier Stokes equation and Nonlinear Functional Analysis", CBMS-NSF Regional Conferences, SIAM, Philadelphia (1983).
7. M.Berger "Nonlinearity and Functional Analysis", Academic Press (1977).
8. J.L.Lions, E.Magenes "Problèmes aux limites non homogènes et applications" vol.1, Dunod (1968).
9. J.L.Lions "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod (1969).
10. J.K.Hale "Asymptotic behavior of Dissipative Systems", Mathematical Surveys and Monographs, 25, AMS (1988).
11. M.Miklavčić "Stability for Semilinear Parabolic Equations with noninvertible linear operator", Pacific Journal of Maths, vol.118, #1, 199-214 (1985).
12. H.Komatsu "Fractional Powers of Operators" I y II, Pacific Journal of Maths, vol.19, #2,285-346 (1966) y vol.21, #1, 89-111 (1967).
13. A.Rodríguez Bernal "Remarks on the Kuramoto Velarde equation", Proceedings de la *Conference on Syneresis, Order and Chaos* (M.G.Velarde editor), 655-670, World Scientific (1988).

14. P.Constantin, C.Foias, R.Temam "Attractors Representing Turbulent Flows", Memorias de la AMS, vol.53, #314 (1985).
15. P.Constantin, C.Foias "Global Lyapunov Exponents, Kaplan-Yorke Formulas and the Dimension of the Attractors for 2D Navier-Stokes Equations", Comm. Pure and Appl. Maths, vol.38, 1-27 (1985).
16. P.Grisvard "Caractérisation de quelques espaces d'interpolation", Arch. Rat. Mech. Anal. 25, 40-63 (1967).
17. R.Seeley "Norms and domains of the complex powers $A_B^{z_n}$ ", Amer. J. of Math. 93, 299-309 (1971).
18. R.Seeley "Interpolation in L^p with boundary conditions", Studia Math. 44, 47-60 (1972).

CAPITULO II.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA LA ECUACION DE KURAMOTO-VELARDE GENERALIZADA.

En este capítulo presentamos un detallado análisis de la ecuación de Kuramoto-Velarde [1,2,3,26]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu D^4 u + D^2 u + \beta u + \gamma (Du)^2 + \frac{\delta}{2} D^2(u^2) = \frac{\gamma}{L} \int_0^L (Du)^2 \quad (K-V)$$

indicando analogías y diferencias con resultados conocidos para K-S y C-H.

2.1 Planteamiento Funcional. Existencia, Unicidad, Regularidad de Soluciones.

En lo que sigue consideraremos la siguiente generalización de la ecuación K-V

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu D^4 u + \beta u + \gamma (Du)^2 - \delta D^2(f(u)) = \frac{\gamma}{L} \int_0^L (Du)^2 \quad (1.1)$$

en $(0,L) \times (0,T)$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{con } x \in \Omega = (0,L)$$

$$D^k u(x+L,t) = D^k u(x,t) \quad \forall t \in (0,T) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k \in \{0,1,2,3\}$$

$$\int_{\Omega} u(x,t) dx = 0 \quad \forall t \in (0,T)$$

siendo $\nu > 0$, $\beta, \gamma, \delta \geq 0$, $D^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$, \mathbb{R} el conjunto de los números

reales, y $\delta f(s) = \sum_{k=1}^m \delta a_k s^k$; así para la ecuación original K-V

$\delta f(s) = -s - \frac{\delta}{2} s^2$; en general cuando eliminemos el término en δ conservaremos el término lineal de f (i.e. con $k \geq 2$ $\delta a_k(\delta) \rightarrow 0$ y $\delta a_1(\delta) \rightarrow -1$ con $\delta \rightarrow 0$).

Esta ecuación puede ser estudiada en el marco funcional desarrollado en el Capítulo I: tomemos como espacio ambiente, [7, 22, 30, 27]

$$H = \{ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}), u(x+L) = u(x) \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}, \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \} \quad (1.2)$$

que es un espacio de Hilbert para el producto escalar $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx$ (y norma denotada $|\cdot|_H$ o sencillamente $|\cdot|$, por el contexto estará claro si $|\cdot|$ representa la norma de H o el valor absoluto de un número real); el operador $A = \nu D^4$ es un operador lineal no acotado en H : $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ con dominio

$$D(A) = \{ u \in H^4_{loc}(\mathbb{R}), u(x+L) = u(x), \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \} \quad (1.3)$$

i.e. $D(A) = H^4_{loc}(\mathbb{R}) \cap H$.

Observaciones

1) Por las condiciones de contorno periódicas el intervalo $[0,L]$ puede identificarse con el toro unidimensional S^1 ; en este caso

$$H = \{ u \in L^2(S^1) , \int_{S^1} u = 0 \}, \quad D(A) = \{ u \in H^4(S^1) , \int_{S^1} u = 0 \}$$

ii) Otras condiciones de contorno, corrientes en la literatura, [4], pueden ser tratadas de forma análoga, a saber condiciones de No-Flujo en la frontera (Neumann):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{en } x = 0, L$$

Las pruebas de los resultados requieren pequeñas modificaciones con estas condiciones de contorno.

Las principales propiedades del operador lineal se resumen en

Proposición 1.1

i) Existe λ_0 tal que para todo $\lambda > \lambda_0$, $(\lambda I + A)$ es Maximal Monótono y autoadjunto en H y además $(\lambda I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ es compacto (A tiene resolvente compacta).

En particular, $-A$ genera un Semigrupo Analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ de operadores en H , [7,22,30,27].

ii) Para todo $\lambda > 0$ tal que $A_1 = A + \lambda I$ verifique $\text{Re } \sigma(A_1) > 0$, podemos definir, [7,31,27], las potencias fraccionarias de A_1 , A_1^α , con dominios $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (independientes de λ) que son espacios de Hilbert, con $X^1 = D(A)$, $X^0 = H$, $X^n = D(A^n)$ $n \in \mathbb{N}$, y $X^\alpha \subset X^\beta$ con inclusión continua, densa y compacta si $\alpha \geq \beta$; $X^{-\alpha}$ es el dual de X^α y A_1 es un isomorfismo entre $X^{1+\alpha}$ y X^α , $\alpha \in \mathbb{R}$.

En particular,

$$H = X^0 = \{ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}), u(x+L) = u(x), \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \}$$

$$X^{1/4} = H^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap H, \quad X^{1/2} = H^2_{loc}(\mathbb{R}) \cap H$$

$$X^{3/4} = H^3_{loc}(\mathbb{R}) \cap H, \quad D(A) = X^1 = H^4_{loc}(\mathbb{R}) \cap H$$

Además denotando $V_k = X^{k/4}$ con $k \in \mathbb{N}$ ($V_0 = H$, $V_1 = V$), entonces

$$V_k = H^k_{loc}(\mathbb{R}) \cap H, \quad \text{siendo la norma del grafo de } A^{k/4} \text{ equivalente a la norma de } H^k(\Omega). \quad (1.4)$$

iii) El espectro de A es: $\sigma(A) = \{ \lambda_n \}_{n \in \mathbb{N}} \uparrow \infty$ con

$$\lambda_n = \nu \left(\frac{2\pi}{L} n \right)^4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

y autoespacio generado por $\left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) \right\}$.

Demostración

i) Tomando $W = H_{loc}^2(\mathbb{R}) \cap H$ con la norma inducida por $H^2(\Omega)$, i.e. $|u|_W = \left(\int_{\Omega} |D^2 u|^2 + |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ y la forma bilineal simétrica sobre W, $a(\cdot, \cdot)$ definida por: $a(u, v) = \nu \int_{\Omega} D^2 u \cdot D^2 v + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v$, entonces es inmediato que $a(\cdot, \cdot)$ es continua y W-elíptica para $\lambda > \lambda_0 = \nu$, por el teorema de Lax-Milgram, [25], concluimos que $(\lambda I + A)$ es un isomorfismo entre W y su dual W^* . Con la clásica identificación $W \subset H \equiv H^* \subset W^*$, con inclusiones compactas y densas y por los resultados de regularidad para este problema elíptico, [18,32,33], podemos considerar $(\lambda I + A)^{-1}$ como un operador compacto en H. El resto es obvio, [7,22,27].

ii) Los resultados sobre los espacios X se siguen de [7,22,27]. En i) hemos probado que $W = X^{1/2}$, [32]; la descripción de $X^{1/4}$ y $X^{3/4}$ se deduce por argumentos clásicos de interpolación (por ejemplo usando series de Fourier), [19,27]; por tanto el resultado está probado para $k = 4n + j$ con $n = 0$ y $j = 0, 1, 2, 3$. Supuesto el resultado para todo $k < 4n$, sea k tal que $k = 4n + j$ y $j = 0, 1, 2, 3$, entonces $X^{k/4} = X^{n+j/4} = \left\{ v, A_1 v \in X^{n-1+j/4} \right\}$ ya que A_1 es un isomorfismo entre $X^{1+\alpha}$ and X^{α} ; por hipótesis $X^{n-1+j/4} = H_{loc}^{4n-4+j}(\mathbb{R}) \cap H$ y así $X^{n+j/4} = H_{loc}^{4n+j}(\mathbb{R}) \cap H$

iii) La demostración es inmediata. □

Observaciones

i) Los espacios X pueden ser definidos y caracterizados usando $A = \nu D^4 - \delta a_1 D^2 + \beta I$ ya que proporcionan el mismo marco funcional, Teorema 1.4, Sección I.1.

ii) Si $u \in V_k$, $k \geq 1$, entonces u y todas sus primeras k-1

derivadas tienen media cero en Ω ya que $D^m u(x+L) = D^m u(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ y $m = 0, 1, \dots, k$ y entonces la desigualdad de Poincaré-Wirtinger, [8, 25], implica que en V_k la norma $H^k(\Omega)$ es equivalente a $|D^k u|_{L^2(\Omega)} = |D^k u|_H$. A partir de ahora usaremos siempre esta norma, que será denotada por $|\cdot|_k$.

iii) Para cada $k \geq 1$, $H^k(\Omega)$ es un álgebra de Banach para la multiplicación de funciones, [8], y así existe una constante $C_k > 0$ tal que

$$|u \cdot v|_{H^k(\Omega)} \leq C_k \cdot |u|_{H^k(\Omega)} \cdot |v|_{H^k(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^k(\Omega) \quad (1.6)$$

La mejor constante C_k , cuando (1.6) se restringe a V_k depende de L en la forma siguiente $C_k(L) = C_k(1)L^{k-1/2}$.

El término no lineal de (1.1) se puede escribir como $F(u) = \sum_{j=2}^m b_j(u) + L(u)$, siendo L el operador lineal

$$L = -\delta a_1 D^2 + \beta I$$

y

$$b_2(u) = \gamma (Du)^2 - \delta a_2 D^2(u^2) - \frac{\gamma}{L} \int_{\Omega} (Du)^2$$

$$b_j(u) = -\delta a_j D^2(u^j), \quad j = 3, \dots, m$$

que son polinomios homogéneos de orden j , i.e. $b_j(u) = B_j(u, \dots, u)$, donde $B_j(\cdot)$ es un operador j -lineal simétrico:

$$B_2(u, v) = \gamma (Du \cdot Dv) - \delta a_2 D^2(u \cdot v) - \frac{\gamma}{L} \int_{\Omega} (Du)(Dv)$$

$$B_j(v_1, \dots, v_j) = -\delta a_j D^2(v_1 \dots v_j) \quad (1.7)$$

Con las notaciones anteriores tenemos los siguientes resultados

Proposición 1.2

Para cada $j = 2, \dots, m$

i) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ $B_j: H^k(\Omega) \times \dots \times H^k(\Omega) \rightarrow H^{k-2}(\Omega)$ está bien definido y es un operador j -lineal, simétrico y continuo. Gracias a las condiciones de contorno B_j induce un operador (que seguimos llamando B_j), $k \geq 2$

$B_j: V_k \times \dots \times V_k \rightarrow V_{k-2}$ que es j -lineal, simétrico y continuo. Las normas de estos operadores, $\|B_j\|_k$, verifican

$$\|B_2\|_2 \leq \gamma \cdot C_1 C_0 + \delta |a_2| C_2, \quad \|B_2\|_k \leq \gamma \cdot C_{k-2} + \delta |a_2| C_k, \quad k \geq 3$$

$$\|B_j\|_k \leq \delta |a_j| C_k^{j-1}, \quad j = 3..m \quad (1.8)$$

siendo C_0 la constante de Poincaré para funciones con media nula.

Así $b_j(\cdot) = B_j(\cdot, \dots, \cdot): V_k \rightarrow V_{k-2}$, es lipschitz y acotado en conjuntos acotados. (1.9)

ii) B_j puede ser contemplado como un operador j -lineal simétrico y continuo

$$B_j: H^1(\Omega) \times \dots \times H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^{\circ}$$

y entonces, $B_j: V_1 \times \dots \times V_1 \rightarrow V_{-1}$ con normas

$$\|B_2\|_1 \leq \gamma \cdot C_{-1} + \delta |a_2| C_1, \quad \|B_j\|_1 \leq \delta |a_j| C_1^{j-1}, \quad j \geq 3 \quad (1.10)$$

donde C_{-1} es la norma de la inclusión $H^1 \subset L^{\infty}$; así (1.8), (1.9) se verifican incluso para $k = 1$.

iii) Si $m = 2$ y $\gamma = 0$, entonces $B_2: L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow (H^3(\Omega))^{\circ}$ es bilineal, simétrico y continuo y entonces

$$B_2: V_0 \times V_0 \rightarrow V_{-3} \text{ con norma } \|B\|_0 \leq C_{-1} \delta |a_2| \quad (1.11)$$

con C_{-1} como arriba. Así $b_2: V_0 \rightarrow V_{-3}$, es continuo y

$$|b_2(u) - b_2(v)|_{-3} \leq \|B_2\|_0 \cdot |u+v| \cdot |u-v| \quad \forall u, v \in V_0 \quad (1.12)$$

iv) Con $k = 0, 1, 2, \dots$, L es un operador lineal acotado actuando entre V_k y V_{k-2} , con norma $\|L\|_k \leq \delta|a_1| + \beta L^2$.

En particular en cada caso, F es Lipschitz y acotada en acotados (i.e. F transforma acotados de su dominio en acotados de su rango).

Demostración

1) Con $j = 2$ y $k = 2$

$$|B_2(u, v)| \leq \gamma |Du \cdot Dv| - \frac{1}{L} \int_{\Omega} Du \cdot Dv + \delta |a_2| |D^2(u \cdot v)|$$

por la desigualdad de Poincaré el primér término está acotado por $\gamma C_0 |Du \cdot Dv|_{H^1} \leq \gamma C_0 C_1 |u|_{H^2} |v|_{H^2}$ siendo C_0 la constante de Poincaré; el segundo término se acota por $\delta |a_2| |u \cdot v|_{H^2} \leq \delta |a_2| C_2 |u|_{H^2} |v|_{H^2}$;

Para $k \geq 3$, entonces

$$\begin{aligned} |D^{k-2} B_2(u, v)| &\leq \gamma |D^{k-2}(Du \cdot Dv)| + \delta |a_2| |D^k(u \cdot v)| \leq \\ &\leq \gamma |Du \cdot Dv|_{H^{k-2}} + \delta |a_2| |u \cdot v|_{H^k} \leq \\ &\leq \gamma \cdot C_{k-2} |u|_{H^{k-1}} |v|_{H^{k-1}} + C_k \delta |a_2| |u|_{H^k} \cdot |v|_{H^k} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Por otro lado con $k \geq 2$ y $j \geq 3$

$$\begin{aligned} |D^{k-2} B_j(v_1, \dots, v_j)| &\leq \delta |a_j| |D^k(v_1 \cdot \dots \cdot v_j)| \leq \\ &\leq \delta |a_j| (C_k)^{j-1} |v_1|_{H^k} \cdot \dots \cdot |v_j|_{H^k} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Por tanto se sigue el resultado de continuidad. Por la Proposición 1.1 y la observación anterior, la norma de V_k es $|D^k(\cdot)|$, $k \in \mathbb{N}$, y el resto es obvio por (1.13), (1.14) y el hecho de que $\int_{\Omega} b_j(u(x)) dx = 0$ con $j = 2, \dots, m$ si $u \in V_k$, $k \geq 2$.

ii) $B_j: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^{\circ}$ actúa de la forma siguiente:

$$\langle B_2(u, v), w \rangle = \gamma \int_{\Omega} Du \cdot Dv \cdot w + \delta a_2 \int_{\Omega} D(u \cdot v) \cdot Dw - \frac{\gamma}{L} \left(\int_{\Omega} Du \cdot Dv \right) \cdot \left(\int_{\Omega} w \right)$$

$$\langle B_j(v_1, \dots, v_j), w \rangle = \delta a_j \int_{\Omega} D(v_1 \dots v_j) \cdot Dw \quad \text{con } j \geq 3 \quad (1.15)$$

para todos $u, v, w \in H^1(\Omega)$; entonces

$$\begin{aligned} |\langle B_2(u, v), w \rangle| &\leq \gamma |Du \cdot Dv|_{L^1} |w|_{L^\infty} + \delta |a_2| |D(u \cdot v)|_{L^2} |Dw|_{L^2} + \\ &\quad + \frac{\gamma}{\sqrt{L}} |Du|_{L^2} |Dv|_{L^2} |w|_{L^2} \leq \\ &\leq \left(\gamma C_{-1} |Du|_{L^2} |Dv|_{L^2} + \delta |a_2| |u \cdot v|_{H^1} \right) |w|_{H^1} + \frac{\gamma}{\sqrt{L}} |u|_{H^1} |v|_{H^1} |w|_{L^2} \end{aligned}$$

y concluimos que

$$|B_2(u, v)|_{(H^1(\Omega))^*} \leq \left(\gamma C_{-1} + \delta |a_2| C_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{L}} \right) |u|_{H^1} |v|_{H^1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |\langle B_j(v_1, \dots, v_j), w \rangle| &\leq \delta |a_j| |D(v_1 \dots v_j)|_{L^2} |Dw|_{L^2} \leq \delta |a_j| |v_1 \dots v_j|_{H^1} |w|_{H^1} \\ |B_j(v_1, \dots, v_j)|_{(H^1(\Omega))^*} &\leq \delta |a_j| |v_1 \dots v_j|_{H^1} \end{aligned}$$

el resto es obvio.

iii) Si $m = 2$ y $\gamma = 0$, $B_2: L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow (H^3(\Omega))^*$ actúa de la forma siguiente: para todos $u, v \in L^2(\Omega)$ y $w \in H^3(\Omega)$

$$\langle B_2(u, v), w \rangle = -\delta a_2 \int_{\Omega} u \cdot v \cdot D^2 w \quad (1.16)$$

por tanto

$$|\langle B_2(u, v), w \rangle| \leq \delta |a_2| |u \cdot v|_{L^1} |D^2 w|_{L^\infty} \leq C_{-1} \delta |a_2| |u|_{L^2} |v|_{L^2} |w|_{H^3}$$

y entonces $|B(u, v)|_{(H^3(\Omega))^*} \leq C_{-1} \delta |a_2| |u|_{L^2} |v|_{L^2}$, el resto es obvio.

iv) Denotando $|\cdot|_k$ la norma de V_k y con $k \geq 2$

$$|L(u)|_{k-2} \leq \delta |a_1| |D^k u| + \beta |D^{k-2} u| \leq (\delta |a_1| + \beta L^2) |u|_k$$

y también $\int_{\Omega} L(u(x)) dx = 0$ con $u \in V_k$, $k \geq 2$.

Para $k = 1$, $L: H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$ actúa de la forma siguiente

$$\langle L(u), v \rangle = \delta a_1 \int_{\Omega} Du \cdot Dv + \beta \int_{\Omega} u \cdot v$$

mientras que para $k = 0$ $L: L^2(\Omega) \rightarrow (H^2(\Omega))^*$ viene dado por

$$\langle L(u), v \rangle = -\delta a_1 \int_{\Omega} u \cdot D^2 v + \beta \int_{\Omega} u \cdot v$$

restringiendo a los espacios V concluimos. \square

Observaciones

i) En el punto i), C_0 se puede tomar igual a L mientras que C_{-1} puede tomarse $C_{-1} = \sqrt{L}$ en ii) y iii).

En el punto ii), al restringir B_2 a V_1 y por las condición de media nula, para todos $u, v, w \in V_1$:

$$\langle B_2(u, v), w \rangle = \gamma \int_{\Omega} Du \cdot Dv \cdot w - \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} D(u \cdot v) \cdot Dw$$

esto hace desaparecer el segundo término en γ de la estimación de la norma de B_2 .

ii) En el punto i) de la Proposición 1.2, excepto para $k = 2$, es de observar que si $\delta = 0$ (i.e. para la ecuación de Kuramoto Sivashinsky) entonces de (1.13), (1.14) se sigue que $B: H^k(\Omega) \times H^k(\Omega) \rightarrow H^{k-1}(\Omega)$ es continua y consecuentemente $B: V_k \times V_k \rightarrow V_{k-1}$ con las mismas cotas sobre sus normas que arriba.

Ahora $K-V$ puede ser escrita como una ecuación abstracta de evolución

$$(K-V) \begin{cases} u_t + Au + F(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

para la cual definimos, [7, 34, 27]

Definición 1.1 (Definición de solución)

Con $k \in \mathbb{N}$ fijo y $F: V_k \rightarrow V_{k-2}$, u es una "Solución en sentido k " de (1.17) en $(0, T)$ si y sólo si $u \in C([0, T], V_k)$ y verifica: $F(u) \in C([0, T], V_{k-2})$, u es diferenciable en $(0, T)$ con valores en V_{k-2} , $u(t) \in V_{k+2}$ y la ecuación diferencial se verifica en $(0, T)$.

(Si $\gamma = 0$ y $\delta(f) = 2$ entonces podemos tomar también $k = 0$ y $F: V_0 \rightarrow V_{-3}$)

En este momento podemos ya aplicar resultados generales, [7,27], para obtener

Teorema 1.1 (existencia local en el tiempo)

i) Para todo $k \geq 1$ y $u_0 \in V_k$, $K-V$ tiene una única solución $u(\cdot)$, definida en un intervalo maximal $[0, T_k)$, $T_k = T_k(u_0) > 0$ en el cual

$$u \in C([0, T_k), V_k) \cap C(0, T_k, V_{k+2}), \quad u_t \in C(0, T_k, X^c)$$

para todo $\varepsilon < k/4 + 1/2$.

En particular si $\gamma = 0$ y $m = 2$ se tiene el mismo resultado con $u_0 \in V_0$ y

$$u \in C([0, T_0), V_0) \cap C(0, T_0, V_1), \quad u_t \in C(0, T_0, X^c)$$

para todo $\varepsilon < 1/4$.

ii) Como F es acotada sobre acotados, se tiene la siguiente alternativa para $u_0 \in V_k$, $k \geq 1$:

a) $T_k = +\infty$

o

b) $\limsup_{t \rightarrow T_k} |u(t)|_k = +\infty$

Si $\gamma = 0$ y $m = 2$ podemos poner $k = 0$ en i) y ii).

iii) Como A tiene resolvente compacta y F es acotada sobre acotados, si $\{u(t), t \geq 0\}$ es una órbita acotada (y por tanto definida en $[0, \infty)$ en V_k , entonces $\{u(t), t \geq 0\}$ es

relativamente compacta en V_k .
(más aún $\{u(t), t \geq t_0\}$ está acotada en X^c para todo $c < k/4 + 1/2$ y $t_0 > 0$).

Si $\gamma = 0$ y $m = 2$ podemos tomar también $k = 0$ (and $c < 1/4$).

Demostración

Tan sólo hay que aplicar de la Sección I.1 los Teoremas 1.1 y 1.3 para i), 1.2 para ii) y la consecuencia del Teorema 1.2 para iii) (que corresponden en [7] a los teoremas 3.3.3 y 3.5.2 para i), 3.3.4 para ii) y 3.3.6 para iii)). □

Este resultado nos permite definir el Semigrupo local definido por K-V:

Para $u_0 \in V_k$ $S(\cdot)u_0: [0, T_k(u_0)) \rightarrow V_k$, es la única solución de K-V que comienza en u_0 ; se verifica que $S(0) = I$, $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)u_0 = u_0$ (límite en V_k), y la propiedad de semigrupo $S(t)oS(s) = S(t+s)$ $s, t \geq 0$, cuando ámbos miembros tienen sentido. Si $\gamma = 0$ y $m = 2$ se puede poner también $k = 0$.

Usando los resultados de [7,27] podemos complementar el Teorema 1.1 con:

Proposición 1.3 (Regularidad de soluciones)

i) Como $F: V_k \rightarrow V_{k-2}$ es analítica, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R} \times V_k \ni (t, u_0) \longmapsto u(t) = S(t)u_0 \in V_k$$

es analítica en su dominio; esto también es cierto para $k = 0$ si $\gamma = 0$ y $m = 2$, con $F: V_0 \rightarrow V_{-3}$.

En particular tenemos la propiedad de Unicidad Retrógrada, i.e. $S(t)$ es inyectivo, sobre su dominio, [18,20,21].

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $u_0 \in V_k$ tenemos que

$$u \in C([0, T_k], V_k) \cap C(0, T_k, X^c), \quad u_t \in C(0, T_k, X^c)$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, (también $k = 0$ si $\gamma = 0$ y $m = 2$).

iii) Con $u_0 \in V_k$ fijo, denotemos, como arriba, T_k el tiempo maximal de existencia de la solución. Con j verificando $k \geq j \geq 1$, como $u_0 \in V_k \subset V_j$, entonces $T_k = T_j$.

Demostración

i) Esto es consecuencia de [7], Corolario 3.4.6 (adecuadamente adaptado con las técnicas del Capítulo I, [27]). Ver el Teorema 2.1 de la Sección I.2.

ii) Llamemos $\alpha_k = k/4$, $\beta_k = (k-2)/4$, $k \in \mathbb{N}$; si $u_0 \in X^{\alpha_k} = V_k$, por la Proposición 1.2 y el Teorema 1.1, $u \in C(0, T_0, X^{\alpha_k})$ y entonces $u_t, F(u) \in C(0, T_0, X^{\beta_k})$, leyendo ahora la ecuación como $Au = -F(u) - u_t$ (en este momento podemos suponer que A es positivo: si no reemplazamos A y F por $A + \lambda I$ y $F - \lambda I$ respectivamente con $\lambda \gg 0$) y teniendo en cuenta que A es un isomorfismo entre $X^{\alpha+1}$ y X^α , concluimos que $u \in C(0, T_0, X^{\beta_k+1})$; con $t > 0$ fijo repetimos el argumento anterior usando como dato inicial $u(t) \in V_{k+2} = X^{\beta_k+1} \subset X^{\alpha_{k+1}} = V_{k+1}$ y el semigrupo local en V_{k+1} , sucesivamente aplicando el Teorema 1.1 obtenemos el resultado, ver [27]. Si $\gamma = 0$ y $m = 2$ entonces inicializamos el argumento con $\alpha_0 = 0$ y $\beta_0 = -3/4$. Ver la Proposición 1.5 de la Sección I.1.

iii) Claramente si $k \geq j \geq 1$ y u es una solución en el sentido k también lo es en sentido j , y así como $V_k \subset V_j$ entonces $T_k \leq T_j$.

Supongamos que $T_k < T_j$, entonces por los resultados de regularidad probados en ii), como $u_0 \in V_j$ tenemos que $u \in C((0, T_j), V_k)$ y $\limsup_{t \rightarrow T_k} |u(t)|_k = +\infty$ y esto es una contradicción. □

Observación

Como consecuencia si una solución explota en tiempo finito entonces todas las normas X^α explotan simultaneamente.

Ahora con un resultado clásico de inmersión

Corolario 1.1

Sea $u(t,x)$ una solución de K-V en $[0,T)$ con dato inicial $u_0 \in V_1$, entonces $u(t,x)$ es una solución clásica, i.e. $u(t,x)$ verifica las condiciones de contorno, $u \in C^\infty((0,T) \times \mathbb{R})$, y más aún, u y todas sus derivadas con respecto a x son analíticas en el tiempo.

Lo mismo es cierto con $u_0 \in V_0$ si $\gamma = 0$ y $m = 2$.

Demostración

Como es bien sabido, $\{8\}$, $H^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\bar{\Omega})$ con $k \geq 1$, así por los resultados anteriores (δ_x representa la Delta de Dirac en el punto $x \in \bar{\Omega}$ y δ_x^k su derivada k -ésima) si $u_0 \in V_{k+1}$

$$t \xrightarrow{S} u(t, \cdot) \in C^k(\bar{\Omega}) \xrightarrow{\delta_x^k} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x)$$

es analítica por ser composición de funciones analíticas, pero por los resultados de regularidad $u(\varepsilon) \in V_k$ para cada $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ si $u_0 \in V$, y así u y sus derivadas son analíticas en t ; además $u(t) \in V_n \subset C^{n-1}(\bar{\Omega})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $u(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Por otra parte se prueba fácilmente que $x \xrightarrow{\delta_x} \delta_x \in V_{-k}$ es de clase C^{k-1} con $k \geq 1$ y entonces si $u_0 \in V_k$, tenemos que $(t,x) \xrightarrow{\delta_x} (u(t), \delta_x) \in V_k \times V_{-k} \xrightarrow{\delta_x} u(t,x)$ es de clase C^{k-1} ; de nuevo por la regularidad $u(\varepsilon) \in V_k$ para cada $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ si $u_0 \in V$, y así $u \in C^\infty((0,T) \times \mathbb{R})$. □

Observaciones

1) Con el cambio obvio en la definición de los espacios X y en las estimaciones de la norma de B , se puede excluir la "condición de contorno" $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$. En este caso como $\int_{\Omega} b_j(u(x)) dx = 0$ con $j = 2, \dots, m$, integrando la ecuación y poniendo $\phi(t) = \int_{\Omega} u(t,x) dx$, obtenemos: $\frac{d}{dt} \phi(t) + \beta \phi(t) = 0$, $\phi(0) = \phi_0 = \int_{\Omega} u_0(x) dx$, por lo cual $\phi(t) = \phi_0 e^{-\beta t}$, por tanto si $\int_{\Omega} u_0(x) dx = 0$ entonces $\int_{\Omega} u(t,x) dx = 0$ para todo $t \geq 0$; además si $\beta = 0$ entonces el promedio se conserva para $t \geq 0$, mientras que si β no es cero el promedio crece o

decrece exponencialmente.

ii) Si u_0 es una función par entonces $u(t, \cdot)$ también es par, para todo $t \geq 0$, puesto que la ecuación permanece invariante ante el cambio x por $-x$ ya que el orden de derivaciones es par.

2.2 Condiciones de Explosión. Estimaciones del Tiempo de Existencia.

Debido al Teorema 1.1, toda solución o bien existe globalmente o bien explota en tiempo finito para la norma en V así que intentamos debilitar esta condición.

Como vamos a obtener diversas inecuaciones diferenciales para diferentes normas de una solución, necesitamos la siguiente versión del lema de Gronwall para tratar el caso $T = \infty$, [18]:

Lema 2.1 Lema de Gronwall Uniforme

Sean a, b, y tres funciones positivas y localmente integrables sobre (t_0, ∞) tales que y' es localmente integrable en (t_0, ∞) , y que satisfacen

$$y' \leq ay + b \quad \text{con} \quad t \geq t_0 \quad (2.1)$$

$$y \quad \int_t^{t+r} a(s) \leq C_1, \quad \int_t^{t+r} b(s) \leq C_2, \quad \int_t^{t+r} y(s) \leq C_3 \quad \forall t \geq t_0$$

para ciertas constantes positivas r, C_1, C_2, C_3 . Entonces

$$y(t+r) \leq \left(\frac{C_3}{r} + C_2 \right) \exp(C_1) \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.2)$$

□

Podemos introducir los espacios $L_r^p(t_0, \infty, X)$ formados por las funciones localmente integrables $y: (t_0, \infty) \rightarrow X$ tales que $\sup \int_t^{t+r} |y(s)|_X^p ds < \infty$, donde el supremo se toma sobre $t \geq t_0$, X es un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$, y reformular entonces el Lema 2.1 de la siguiente forma: si para algún $r > 0$, $y(\cdot)$, $a(\cdot)$, $b(\cdot) \in L_r^1(t_0, \infty, \mathbb{R})$, positivas con y' localmente integrable en (t_0, ∞) , y si (2.1) se verifica, entonces $y \in L^\infty(t_0, \infty)$.

Las siguientes estimaciones son consecuencia inmediata de las inclusiones de Sobolev y se usarán más abajo en la forma

explicitada en el Lema 2.2:

Lema 2.2

Sean $r, s \geq 1$

i) Para todo $u \in V_2$

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \leq C |u|^a |D^2u|^b \quad (2.3)$$

con $a = \frac{1}{4}(3r+s+2)$ $b = \frac{1}{4}(r+3s-2)$. Si $s \leq 2$ podemos tomar también $a = \frac{1}{4}(3r+2s)$ $b = \frac{1}{4}(r+2s)$.

ii) Para todo $u \in V_3$

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \leq C |u|^a |D^3u|^b \quad (2.4)$$

con $a = \frac{1}{6}(5r+3s+2)$ $b = \frac{1}{6}(r+3s-2)$. Si $s \leq 2$ podemos tomar también $a = \frac{1}{6}(5r+4s)$ $b = \frac{1}{6}(r+2s)$.

iii) Para todo $u \in V_3$

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \leq C |Du|^a |D^3u|^b \quad (2.5)$$

con $a = \frac{1}{4}(4r+3s+2)$, $b = \frac{1}{4}(s-2)$ si $s > 2$ y $a = r+s$, $b = 0$ si $s \leq 2$.

iv) Para todo $u \in V_1$, $s \geq 1$

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \geq C |u|_{L^{r+s}}^{r+s} - g(u(0)) \quad (2.6)$$

para cierta función g continua y positiva.

v) Para todo $u \in V_3$

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |D^2u|^s \right| \leq C |u|^a |D^3u|^b \quad (2.7)$$

con $a = \frac{1}{6}(5r+s+2)$ $b = \frac{1}{6}(r+5s-2)$. Si $s \leq 2$ podemos tomar también $a = \frac{1}{6}(5r+2s)$ $b = \frac{1}{6}(r+4s)$.

vi) Para todo $u \in V_3$

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |D^2 u|^s \right| \leq C |Du|^a |D^3 u|^b \quad (2.8)$$

con $a = \frac{1}{4}(4r+s+2)$ $b = \frac{1}{4}(3s-2)$. Si $s \leq 2$ podemos tomar también $a = r + \frac{1}{2}s$ $b = \frac{1}{2}s$.

Demostración

i) Para todo $u \in V_2$, por la desigualdad de Hölder con $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tales que $rp \geq 2$, entonces $\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \leq |u|_{L^{rp}}^r |Du|_{L^{sq}}^s$ y por las inclusiones de Sobolev, $H^s \subset L^p$ si $2s < 1$ y $2 \leq p \leq \frac{2}{1-2s}$, por tanto tomando $n = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{rp})$ y $m = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{s} + \frac{2}{sp})$ tenemos que $H^n \subset L^{rp}$ y $H^m \subset L^{sq}$, consecuentemente interpolando las normas de H^n y de H^m entre H^0 y H^2 y entre H^0 y H^1 , respectivamente, obtenemos con $\alpha = n/2$ y $\beta = m$

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \leq C |u|^a |D^2 u|^b$$

donde $a = r(1-\alpha) + \frac{s}{2}(1-\beta) = \frac{1}{4}(3r+s+2) = r + s - b$ y $b = \frac{1}{4}(r+3s-2)$.

Si $s \leq 2$ entonces $\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \leq C |u|_{L^\infty}^r |Du|_{L^2}^s$, ahora usando la desigualdad de Agmon, $|u|_{L^\infty} \leq C |u|^{3/4} |D^2 u|^{1/4}$, e interpolando como antes concluimos.

ii) Procedemos como antes, con $u \in V_3$, aplicando la desigualdad de Hölder y las inclusiones de Sobolev e interpolando derivadas para obtener cotas dependiendo sólo de u y $D^3 u$. El caso $s \leq 2$ es análogo al anterior, usando $|u|_{L^\infty} \leq C |u|^{5/6} |D^3 u|^{1/6}$.

iii) Para todo $u \in V_3$, $\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \leq C |u|_{L^\infty}^r |Du|_{L^s}^s \leq C |Du|^r |Du|_{L^s}^s$ si $s > 2$ usamos las inclusiones de Sobolev e interpolación entre H^0 y H^2 ; si $s \leq 2$ entonces $|Du|_{L^s}^s \leq |Du|^s$ y concluimos.

iv) Para todo $u \in V_1$, $s \geq 1$, observemos que u tiene traza constante en $\partial\Omega = \{0, L\}$ por ser periódica, entonces

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| = \left| |u|^{(r/s)-1} u \cdot Du \right|_{L^s}^s = C |D(|u|^{(r/s)+1})|_{L^s}^s =$$

$$= C |D(|u|^{(r/s)+1} - |u(0)|^{(r/s)+1})|_{L^s}^s$$

pero ahora $|u|^{(r/s)+1} - |u(0)|^{(r/s)+1}$ pertenece a $W_0^{1,s}(\Omega)$ y por tanto la desigualdad de Poincaré nos da

$$\left| \int_{\Omega} |u|^r |Du|^s \right| \geq C \left| |u|^{(r/s)+1} - |u(0)|^{(r/s)+1} \right|_{L^s}^s$$

y se sigue la conclusión.

v) y vi) se obtienen siguiendo las líneas de ii) y iii). \square

Teorema 2.1

Supongamos que $\partial(f) = m < 5$, $\delta \neq 0$. Sea $T \leq +\infty$ y sea u una solución de K-V definida en $[0, T)$ con $u(0) \in V = V_1$.

Entonces $u \in L^\infty(0, T, V)$ si y sólo si $u \in L^\infty(0, T, H)$. En este caso si $T < \infty$, entonces $u \in L^2(0, T, V_3)$.

Como consecuencia, u explota en tiempo finito en norma V si y sólo si explota en tiempo finito para la norma H .

Mas aún si $T = +\infty$, y $u \in L^\infty(0, \infty, H)$ entonces para cada $r > 0$, $D^2u, D^3u \in L^2_r(0, \infty, L^2)$, $u \in L^\infty(r, \infty, V)$ y para cada $t > 0$

$$\nu \int_t^{t+r} |D^2u|^2 \leq C_0 (\|u\|_{L^\infty(H)}, r) \quad (2.9)$$

$$\|u(t+r)\|_V \leq C_1 (\|u\|_{L^\infty(H)}, r) \quad (2.10)$$

$$\nu \int_t^{t+r} |D^3u|^2 \leq C_2 (\|u\|_{L^\infty(V)}, r) \quad (2.11)$$

Además si hay un conjunto acotado y absorbente en H , entonces hay uno en V .

En particular si $a = \frac{\nu}{L^4} + 2\beta$, y $u \in L^\infty(0, \infty, H)$, sea ϕ la función no creciente $\phi(t) = \sup_{s \geq t} |u(s)|_H$, $t \geq 0$. Entonces $u \in L^\infty(0, \infty, V)$ y si $0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \inf_{t \geq 0} \phi(t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)|_H \leq K$, entonces para cierta función no decreciente P (ver abajo) con $P(0) = 0$, tenemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)|_V^2 \leq \frac{P(K^2)}{a} \quad (2.12)$$

así si una solución converge a 0 en H también lo hace en V.

Si $\delta = 0$ entonces para todo $u_0 \in V$ tenemos una solución de K-V globalmente definida. Restringiendo el flujo a funciones pares, el sistema dinámico es disipativo como se ha probado en [10,12,18], ver Sección II.4 abajo.

Demostración

Como V está incluido en H con continuidad, la condición es necesaria. Por brevedad en lo siguiente denotaremos $L^p(Z) = L^p(0,T,Z)$ con $1 \leq p \leq \infty$, Z un espacio de Banach y $\|\cdot\|_{p,Z}$ su norma.

Para probar que la condición es suficiente, supongamos que $u \in L^\infty(0,T,H)$. Multiplicando K-V, (1.1), por u e integrando por partes en Ω obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2 u|^2 + \beta |u|^2 + \int_{\Omega} (\gamma u + \delta f'(u)) (Du)^2 = 0 \quad (2.13)$$

pero $|\gamma s + \delta f'(s)| \leq C(1+|s|^{m-1})$, $C = C(\gamma, \delta)$ entonces por (2.3), Lema 2.2

$$\left| \int_{\Omega} (\gamma u + \delta f'(u)) (Du)^2 \right| \leq C \left(|Du|^2 + a_0 |u|^{(3m+1)/4} |D^2 u|^{(m+3)/4} \right)$$

si $m < 5$ por la desigualdad de Young, para cada $\epsilon > 0$

$$Ca_0 |u|^{(3m+1)/4} |D^2 u|^{(m+3)/4} \leq \epsilon |D^2 u|^2 + C_1(\epsilon, \delta, \gamma) \left(|u|^2 \right)^{(3m+1)/(5-m)}$$

y $C |Du|^2 \leq \epsilon |D^2 u|^2 + C_2(\epsilon, \delta, \gamma) |u|^2$, $\epsilon > 0$; tomando $\epsilon = \frac{\nu}{4}$

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2 u|^2 + 2(\beta - C_2(\nu, \delta, \gamma)) |u|^2 \leq C_1(\nu, \delta, \gamma) \left(|u|^2 \right)^{(3m+1)/(5-m)} \quad (2.14)$$

sean $a = 2(\beta - C_2(\nu, \delta, \gamma))$ $b = C_1(\nu, \delta, \gamma)$, integrando (2.14), si $T < \infty$ entonces $u \in L^2(0,T, X^{1/2})$; si $T = \infty$ entonces para cada $r > 0$, $t \geq 0$

$$\nu \int_t^{t+\tau} |D^2 u|^2 \leq \left(b \|u\|_{\infty, H}^{2(3m+1)/(5-m)} + (a)_+ \|u\|_{\infty, H}^2 \right) \tau + \|u\|_{\infty, H}^2 \quad (2.15)$$

y deducimos (2.9).

Ahora, multiplicando K-V por $-D^2 u$ e integrando por partes en Ω , y por las condiciones de contorno, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Du|^2 + \nu |D^3 u|^2 + \beta |Du|^2 + \delta \left(\int_{\Omega} f'(u) (D^2 u)^2 - \frac{1}{3} \int_{\Omega} f^3(u) (Du)^4 \right) = 0 \quad (2.16)$$

ahora $|\delta f'(s)| \leq C(1+|s|^{m-1})$ y $|\delta f^3(s)| \leq C(1+|s|^{m-3})$, $C = C(\delta)$, así (2.4), (2.7) del Lema 2.2 nos dan

$$\begin{aligned} \left| \delta \int_{\Omega} f'(u) (D^2 u)^2 \right| &\leq C \left(|D^2 u|^2 + |u|^{(5m-1)/6} |D^3 u|^{(m+7)/6} \right) \\ \left| \frac{\delta}{3} \int_{\Omega} f^3(u) (Du)^4 \right| &\leq C \left(|Du|_{L^4}^4 + |u|^{(5m-1)/6} |D^3 u|^{(m+7)/6} \right) \end{aligned}$$

así si $m < 5$ por la desigualdad de Young, para cada $\epsilon > 0$

$$2C |u|^{(5m-1)/6} |D^3 u|^{(m+7)/6} \leq \epsilon |D^3 u|^2 + C_3(\epsilon, \delta) |u|^{2(5m-1)/(5-m)}$$

de nuevo por interpolación y la desigualdad de Young $C |D^2 u|^2 \leq \epsilon |D^3 u|^2 + C_4(\epsilon, \delta) |u|^2$, y usando $H^{1/4} \subset L^4$, interpolación y la desigualdad de Young obtenemos finalmente para cada $\epsilon > 0$

$$C |Du|_{L^4}^4 \leq C |Du|^{7/2} |D^3 u|^{1/2} \leq C |u|^{7/3} |D^3 u|^{5/3} \leq \epsilon |D^3 u|^2 + C_5(\epsilon, \delta) |u|^{14}$$

y así tomando $\epsilon = \frac{\nu}{6}$, $\alpha_m = (5m-1)/(5-m)$

$$\frac{d}{dt} |Du|^2 + \nu |D^3 u|^2 + 2\beta |Du|^2 \leq P(|u|^2) \quad (2.17)$$

donde $P(s) = 2C_3(\nu, \delta) s^{\alpha_m} + 2C_5(\nu, \delta) s^7 + 2C_4(\nu, \delta) s$; así tras la desigualdad de Poincaré para funciones de media nula: $|w| \leq L |Dw|$ tenemos que $y(t) = |Du(t)|^2$ satisface $y' + ay \leq b$ con

$$a = \frac{\nu}{L^4} + 2\beta \quad \text{y} \quad b = P(\|u\|_{\infty, H}^2) \quad (2.18)$$

Por tanto $y \in L^{\infty}(0, T)$ y así $u \in L^{\infty}(0, T, V)$; precisando, como

$a > 0$, entonces

$$|Du(t)|^2 \leq |Du_0|^2 e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at}) \leq |Du_0|^2 + \frac{b}{a}$$

y así $\|u\|_{\infty, V}^2 \leq \|u_0\|_V^2 + \frac{P(\|u\|_{\infty, H}^2)L^4}{\nu + 2\beta L^4}$ (2.19)

Si $T = \infty$, gracias a (2.9), (2.15) para cada $r > 0$, $t > 0$
 $\int_t^{t+r} |Du|^2 \leq \nu L^2 \int_t^{t+r} |D^2 u|^2 \leq C_0(\|u\|_{\infty, H}, r)L^2$ y por el lema de Gronwall
 uniforme, Lema 2.1, aplicado a (2.18) nos da (2.10): para todo
 $r > 0$, $t > 0$

$$|Du(t+r)|^2 \leq \left(\frac{C_0(\|u\|_{\infty, H}, r)L^2}{r\nu} + b \right) \quad (2.20)$$

por tanto $u \in L^\infty(0, \infty, V)$ y (2.10) se verifica.

De (2.15), (2.20) se ve claramente que la existencia de un acotado absorbente en H implica la existencia de un acotado absorbente en V .

En particular, de (2.17), como $a = \frac{\nu}{L^4} + 2\beta > 0$, tenemos que
 $\frac{d}{dt}|Du|^2 + a|Du|^2 \leq P(|u|^2)$, y así para $t > t_0 > 0$,

$$\frac{d}{dt}|Du|^2 + a|Du|^2 \leq P(\phi(t_0)^2) = \psi(t_0)$$

e integrando

$$|Du(t)|^2 \leq |Du(t_0)|^2 e^{-a(t-t_0)} + \frac{\psi(t_0)}{a}(1-e^{-a(t-t_0)})$$

así $\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)|_V^2 \leq \frac{\psi(t_0)}{a}$ para todo $t_0 \geq 0$ (2.21)

haciendo $t_0 \rightarrow \infty$, por hipótesis $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \inf_{t \geq 0} \phi(t) \leq K$ y por tanto concluimos (2.12).

Si $\gamma = 0$ y $m = 2$ lo anterior puede ser hecho con cualquier solución con $u(0) \in X$, ya que $u(t_0) \in V$.

Tras integrar la desigualdad (2.17) obtenemos:

$$|Du(t)|^2 + \nu \int_0^t |D^3 u|^2 + 2\beta \int_0^t |Du|^2 \leq t \cdot P(\|u\|_{\infty, H}^2) + |Du_0|^2$$

así si $T < \infty$, entonces $D^3u \in L^2(0, T, H)$ y

$$\nu \|D^3u\|_{2, H}^2 \leq \|u_0\|_V^2 + T.P(\|u\|_{\infty, H}^2) \quad (2.22)$$

Si $T = \infty$ para cada $r > 0$, $t > 0$

$$\nu \int_t^{t+r} |D^3u|^2 \leq \|u\|_{\infty, V}^2 + r.P(\|u\|_{\infty, H}^2) \quad (2.23)$$

y (2.11) se verifica.

Por último si $\delta = 0$, de (2.16) (recuérdese que conservamos el término lineal $-s$ en $f(s)$ cuando $\delta = 0$)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Du|^2 + \nu |D^3u|^2 - |D^2u|^2 + \beta |Du|^2 = 0 \quad (2.24)$$

y para todo $\epsilon > 0$, $|D^2u|^2 \leq \epsilon |D^3u|^2 + \frac{1}{4\epsilon} |Du|^2$, por tanto tomando

$\epsilon = \frac{\nu}{2}$, $\frac{d}{dt} |Du|^2 + \nu |D^3u|^2 + (2\beta - \frac{1}{\nu}) |Du|^2 \leq 0$, y por la desigualdad de Poincaré para funciones de media nula, $|w| \leq L|Dw|$,

$$\frac{d}{dt} |Du|^2 + \left(\frac{\nu}{L^4} + 2\beta - \frac{1}{\nu} \right) |Du|^2 \leq 0$$

y así $|u(t)|_V \leq |u_0|_V e^{-at}$ con $a = \frac{\nu}{L^4} + 2\beta - \frac{1}{\nu}$ (2.25)

y u permanece acotada en V en todo tiempo finito, por tanto tenemos una solución global.

Obsérvese que el carácter disipativo de la ecuación (acotación de órbitas, existencia de conjuntos absorbentes, atractores maximales etc.) cuando $\delta = 0$ debe provenir del término no lineal ya que en (2.24) sólo los términos lineales controlan la evolución de la norma; esto se puede conseguir restringiendo el flujo a funciones pares: escribiendo $u = v - \varphi$, u, v, φ pares, y escribiendo la ecuación para v y eligiendo adecuadamente φ se puede probar que la estimación análoga a (2.24), controlando $|v(t)|_V^2$ revela la existencia de una bola absorbente en V ; detalles y una información más precisa se encuentra en [10,12,18], ver Sección II.4, abajo. \square

Observación

Muy recientemente en [39] se ha probado la disipatividad de

K-S para funciones arbitrarias y $\beta \in \mathbb{R}$ por el método anterior de traslación en el espacio de fases (tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$), siendo válido estos resultados para cualquier conjunto de condiciones de contorno que incluyan a $Du = 0$ en $\partial\Omega = \{0, L\} \times (0, T)$.

Teorema 2.2

Supongamos que $\delta \neq 0$, $\beta(f) = m$ es impar y que $a_m > 0$ y sea u una solución de K-V.

i) Si u está definida en $(0, T)$, $T < \infty$, entonces $u \in L^\infty(0, T, H)$ (aunque quizás no en $L^\infty(0, T, V)$, el problema está en T por supuesto).

ii) Si $T = \infty$ y existe un $x_0 \in [0, L]$ tal que $u(x_0, \cdot) \in L^\infty(0, \infty)$, entonces $u \in L^\infty(0, \infty, H) \cap L_r^2(0, \infty, V_2) \cap L_r^{m+1}(0, \infty, L^{m+1})$ para cada $r > 0$.

Demostración

De (2.13)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2 u|^2 + \beta |u|^2 + \int_{\Omega} (\gamma u + \delta f'(u))(Du)^2 = 0$$

y ahora $\gamma s + \delta f'(s) \geq \frac{\delta}{2} a_m s^{m-1} - C(\gamma, \delta)$; en particular

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2 u|^2 + \beta |u|^2 \leq C(\gamma, \delta) |Du|^2$$

y i) se verifica tras interpolar: $|Du|^2 \leq |u| |D^2 u|$, y la desigualdad de Young.

Por otro lado de (2.6), Lema 2.2

$$\int_{\Omega} (\gamma u + \delta f'(u))(Du)^2 \geq C_1 |u|_{L^{m+1}}^{m+1} - C_2 |Du|^2 - g(u(0)) \text{ y por tanto}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2 u|^2 + \beta |u|^2 + C_1 |u|_{L^{m+1}}^{m+1} \leq C_2 |Du|^2 + g(v(t)) \quad (2.26)$$

donde hemos puesto $v(t) = u(0, t)$. Así si $T = \infty$ y $v \in L^\infty(0, \infty)$, como $|u|_{L^{m+1}}^{m+1} \geq L^{-(m-1)/2} |u|^{m+1}$ e interpolando como antes obtenemos que $y(t) = |u|^2$ verifica

$$y'(t) + ay(t)^r \leq by(t) + g(v(t)) \quad (2.27)$$

con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, y $r > 1$; así ii) sale fácilmente de (2.26) y (2.27) ya que $g(v) \in L^\infty(0, \infty)$, ver Lemas 2.3 y 2.4 abajo.

Para cada $u \in H$ y $\tau \in \mathbb{R}$ denotemos $u_\tau(x) = u(x+\tau)$, así si $S(x, t, u)$ es la solución de K-V comenzando en u , se prueba fácilmente que $S_\tau(x, t, u) = S(x, t, u_\tau)$ (i.e. el grupo de traslaciones espaciales en un grupo de simetrías para K-V; ver Capítulo IV). Supongamos que $u(x_0, \cdot)$ está acotada en $(0, \infty)$ para algún $x_0 \in (0, L)$, llamando $u_0(x) = u(x, 0)$, $\tau = x_0$ y $w_0 = u_{0\tau}$, entonces

$$w(x, t) = S(x, t, w_0) = S_\tau(x, t, u_0) = u_\tau(x, t)$$

en particular $w(0, t) = u_\tau(0, t) = u(x_0, t)$, ahora podemos aplicar el resultado a $w(x, t)$ para obtener que $w(0, \cdot)$ acotado implica que $w \in L^\infty(0, \infty, H)$, pero de nuevo $w(x, t) = u_\tau(x, t)$ y tienen la misma norma en H . El resto se deduce interpolando e integrando en (2.26). \square

Observación

En las hipótesis del Teorema 2.2 si una solución está globalmente definida pero no está acotada en H entonces tenemos explosión en todos los puntos en tiempo infinito: si $u \in L^\infty(0, \infty, H)$ entonces para todo $x_0 \in (0, L)$, $u(x_0, \cdot) \in L^\infty(0, \infty)$.

El siguiente Teorema ha sido probado por separado para las ecuaciones de Kuramoto-Sivashinsky y de Cahn-Hilliard incluso en dimensiones mayores, [12].

Teorema 2.3

Denotando $V_k = X^{k/4}$ con $k \geq 1$, $V_1 = V$, sea u una solución de K-V definida en $[0, T)$, $T \leq +\infty$, con $u(0) \in V_k$. Entonces $u \in L^\infty(0, T, V_k)$ si y sólo si $u \in L^\infty(0, T, V)$, en este caso si $T < \infty$ entonces $u \in L^2(0, T, V_{k+2})$.

Si $T = \infty$ entonces para cada $r > 0$, $D^{k+2}u \in L^2_r(0, \infty, L^2)$ y para cada $t > 0$

$$\nu \int_t^{t+r} |D^{k+2}u|^2 \leq C(\|u\|_{\infty, V}, r, k) \quad (2.28)$$

Más aún, con $u(0) \in V_k$, $u \in L^\infty(0, T, V_k)$ implica que $u \in L^\infty(\varepsilon, T, V_j)$, para todos $j \geq k$ y $\varepsilon > 0$; además si existe un conjunto absorbente acotado en V entonces hay uno en V_k .

Demostración

Por inducción en k . Con $k \geq 1$, tomando la derivada D^k en la ecuación (1.1), multiplicando por $D^k u$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |D^k u|^2 + \nu |D^{k+2} u|^2 + \beta |D^k u|^2 + \\ + \gamma \int_{\Omega} D^k u \cdot D^k (Du)^2 + \delta \int_{\Omega} D^k u \cdot D^{k+2} (f(u)) = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Acotamos cada término como sigue:

1) Por la regla de Leibniz

$$\int_{\Omega} D^k u \cdot D^k (Du)^2 = \sum_{j=0}^k a_j \int_{\Omega} D^k u \cdot D^{k-j} (Du) \cdot D^j (Du)$$

y así $|\int_{\Omega} D^k u \cdot D^k (Du)^2| \leq C_1 \sum_{j=0}^k |D^k u|_{L^2} |D^{k-j} (Du)|_{L^4} |D^j (Du)|_{L^4}$

e interpolando derivadas en L^4 :

$$|D^{k-j} (Du)|_{L^4} \leq M |D^k (Du)|_{L^4}^{(k-j)/k} |Du|_{L^4}^{j/k}$$

y

$$|D^j (Du)|_{L^4} \leq M |D^k (Du)|_{L^4}^{j/k} |Du|_{L^4}^{(k-j)/k} \quad (2.30)$$

usando $H^{1/4} \subset L^4$ e interpolación:

$$|D^k u| \leq |D^{k+2} u|^{1/3} |D^{k-1} u|^{2/3}, \quad |D^k (Du)|_{L^4} \leq |D^{k+2} u|^{3/4} |D^{k-1} u|^{1/4} \quad y$$

$$|Du|_{L^4} \leq |Du|^{3/4} |D^2 u|^{1/4}, \text{ obtenemos de (2.30)}$$

$$\begin{aligned} |\gamma \int_{\Omega} D^k u \cdot D^k (Du)^2| &\leq C_2 |D^k u|_{L^2} |D^k (Du)|_{L^4} |Du|_{L^4} \leq \\ &\leq C_3 |D^{k+2} u|^{13/12} |D^{k-1} u|^{11/12} |Du|^{3/4} |D^2 u|^{1/4} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \epsilon |D^{k+2}u|^2 + C(\epsilon, \gamma) |D^{k-1}u|^2 |Du|^{18/11} |D^2u|^{6/11} \quad \forall \epsilon > 0 \quad (2.31)$$

iii) Como f es un polinomio

$$|D^k(f(u))| \leq C_0(|u|_{L^\infty}) |D^k u| \quad (2.32)$$

[35], y como la solución u se supone que pertenece a $L^\infty(0, T, V) \subset L^\infty(0, T, L^\infty)$ entonces la cota C_0 en (2.32) se puede tomar independiente de t , por tanto $C_0 = C_0(|u|_{\infty, V})$; de nuevo con $|D^k u| \leq |D^{k+2}u|^{1/3} |D^{k-1}u|^{2/3}$

$$\begin{aligned} |\delta \int_{\Omega} D^k u \cdot D^{k+2}(f(u))| &= |\delta \int_{\Omega} D^{k+2} u \cdot D^k(f(u))| \leq \\ &\leq \delta C_0 |D^{k+2}u| |D^k u| \leq \delta C_0 |D^{k+2}u|^{4/3} |D^{k-1}u|^{2/3} \leq \\ &\leq \epsilon |D^{k+2}u|^2 + C(\epsilon, \delta, C_0) |D^{k-1}u|^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

A continuación probamos el resultado para $k = 1$: el término con γ en (2.29) se anula y tomando $\epsilon = \nu/2$ en (2.33) tenemos de (2.29)

$$\frac{d}{dt} |Du|^2 + \nu |D^3u|^2 + 2\beta |Du|^2 \leq C(\nu, \delta, C_0) |u|^2 \quad (2.34)$$

si $T < \infty$ esto implica que $u \in L^2(0, T, V_3)$ mientras que si $T = \infty$ (2.28) se verifica con $C(|u|_{\infty, V}, r, 1) = C(\nu, \delta, C_0) |u|_{\infty, H^1}^2$

Introduciendo (2.31) y (2.33) en (2.29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |D^k u|^2 + \nu |D^{k+2}u|^2 + \beta |D^k u|^2 &\leq 2\epsilon |D^{k+2}u|^2 + \\ &+ C(\epsilon, \gamma) |D^{k-1}u|^2 |Du|^{18/11} |D^2u|^{6/11} + C(\epsilon, \delta, C_0) |D^{k-1}u|^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ahora si $k = 2$

$$|Du|^2 |Du|^{18/11} |D^2u|^{6/11} \leq \eta |D^2u|^2 + C(\eta) |Du|^5 \quad \forall \eta > 0$$

y por (2.35), $\forall \epsilon > 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |D^2u|^2 + \nu |D^4u|^2 + \beta |D^2u|^2 \leq 2\epsilon |D^4u|^2 + \epsilon |D^2u|^2 +$$

$$+ C(c, \beta, \gamma, \delta, C_0) \left(|Du|^2 + |Du|^5 \right) \quad (2.36)$$

tomando $c = \nu/4$

$$\frac{d}{dt} |D^2u|^2 + \nu |D^4u|^2 + (2\beta - \frac{\nu}{2}) |D^2u|^2 \leq C(\nu, \beta, \gamma, \delta, C_0) \left(|Du|^2 + |Du|^5 \right) \quad (2.37)$$

por la desigualdad de Poincaré $|D^2u|^2 \leq L^4 |D^4u|^2$

$$\frac{d}{dt} |D^2u|^2 + (\nu L^{-4} + 2\beta - \frac{\nu}{2}) |D^2u|^2 \leq C(\nu, \beta, \gamma, \delta, C_0) \left(|Du|^2 + |Du|^5 \right) \quad (2.38)$$

el miembro derecho está acotado en $(0, T)$ por hipótesis, así (2.38) y $u(0) \in V_2$ prueban que $u \in L^\infty(0, T, V_2)$ incluso para $T = \infty$ (si $\nu L^{-4} + 2\beta - \frac{\nu}{2} \leq 0$ entonces debemos usar el lema de Gronwall uniforme y (2.28) con $k = 1$); asimismo (2.37) prueba, si $T < \infty$, que $u \in L^2(0, T, V_4)$ y si $T = \infty$, que (2.28) se verifica con

$$C(\|u\|_{\infty, V, r, 2}) = rC(\nu, \beta, \gamma, \delta, C_0) \left(\|u\|_{\infty, V}^2 + \|u\|_{\infty, V}^5 \right) + \|u\|_{\infty, V_2}^2 \quad (2.39)$$

Ahora procedemos por inducción, $k \geq 3$, para probar que si $u \in L^\infty(0, T, V_j)$ con $j \leq k-1$, entonces $u \in L^\infty(0, T, V_k)$: de (2.35) con $c = \nu/4$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |D^k u|^2 + \nu |D^{k+2} u|^2 + 2\beta |D^k u|^2 &\leq \\ &\leq |D^{k-1} u|^2 \left(C(\nu, \delta, C_0) + C(\nu, \gamma) |Du|^{18/11} |D^2 u|^{6/11} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

por la desigualdad de Poincaré $|D^k u|^2 \leq L^4 |D^{k+2} u|^2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |D^k u|^2 + (\nu L^{-4} + 2\beta) |D^k u|^2 &\leq \\ &\leq |D^{k-1} u|^2 \left(C(\nu, \delta, C_0) + C(\nu, \gamma) |Du|^{18/11} |D^2 u|^{6/11} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

de nuevo el miembro derecho está acotado en $(0, T)$, y así (2.41) y $u(0) \in V_k$ implican que $u \in L^\infty(0, T, V_k)$ y (2.40) implica que $u \in L^2(0, T, V_{k+2})$ si $T < \infty$, o (2.28) si $T = \infty$, con

$$C(r, k) = \left(\|u\|_{\infty, k-1}^2 \left(C(\nu, \delta, C_0) + C(\nu, \gamma) \|u\|_{\infty, 1}^{18/11} \|u\|_{\infty, 2}^{6/11} \right) \right)^r + \|u\|_{\infty, k}^2 \quad (2.42)$$

donde hemos puesto $\|u\|_{\infty, k}$, la norma en $L^\infty(0, T, V_k)$.

Más aún con $u(0) \in V_k$, $u \in L^\infty(0, T, V_k)$ y dado cualquier $\epsilon > 0$, por la Proposición 1.3, $u(\epsilon) \in V_j$ para todo $j \geq k$ y los resultados anteriores implican que $u \in L^\infty(\epsilon, T, V_j)$, $j \geq k$.

Por último si hay un conjunto acotado absorbente en V la existencia de uno en V_k se deduce fácilmente, por inducción, de (2.38) y (2.41) ya que $y(t) = |D^k u(t)|^2$ verifica $y' + ay \leq b$ para $t \geq t_0$. \square

Una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 es:

Corolario 2.1

i) Supuesto que $\delta(f) = 3$, $a_3 > 0$, $\delta \neq 0$, si u es una solución de K-V, entonces u está globalmente definida y si no hay explosión puntual entonces la solución está acotada en V_k , para todo k .

ii) Supuesto que $\delta(f) < 5$, $\delta \neq 0$, si u es una solución de K-V definida en $[0, T)$, con $T \leq +\infty$, entonces

$$u \in L^\infty(0, T, H) \text{ si y sólo si } u \in L^\infty(0, T, V_k) \text{ para todo } k \geq 1$$

Además si hay un conjunto acotado absorbente en H entonces lo hay en V_k , para todo k . \square

El siguiente objetivo es obtener estimaciones sobre el tiempo de existencia de una solución particular de K-V. Para esto usaremos a menudo el próximo Lema.

Lema 2.3

$$\text{Sea } y(t) \text{ una función regular tal que } \begin{cases} y'(t) \leq P(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

siendo $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sean a_1, a_2 dos raíces consecutivas de P , con esto queremos decir que $P(a_i) = 0$, $i = 1, 2$, o que algún

a_1 es $\neq \infty$ pero P no se anula en (a_1, a_2) .

Supongamos que $y_0 \in (a_1, a_2)$ y definamos para $r \in (a_1, a_2)$

$$G(r) = \int_{y_0}^r \frac{1}{P(s)} ds$$

i) Si P es positiva en (a_1, a_2) , sea

$$0 < T(y_0) = G(a_2^+) = \int_{y_0}^{a_2} \frac{1}{P(s)} ds \in \bar{\mathbb{R}} \quad (2.43)$$

Entonces para cada $t \in [0, T(y_0))$ $y(t) < a_2$, y si $a_1 < y(s)$ para todo $s \in [0, t]$ entonces $y(t) \leq F(t) = G^{-1}(t)$.

Más aún, en este caso con $a_1 < \alpha < a_2$, entonces $y(t) < \alpha$ siempre que $y_0 < \alpha$ y $0 \leq t < G(\alpha) = \int_{y_0}^{\alpha} \frac{1}{P(s)} ds$.

ii) Si P es negativa en (a_1, a_2) , sea

$$0 < T(y_0) = G(a_1^-) = \int_{y_0}^{a_2} \frac{1}{P(s)} ds \in \bar{\mathbb{R}} \quad (2.44)$$

Entonces para todo $t \in [0, T(y_0))$ tal que $a_1 < y(s)$ para todo $s \in [0, t]$, se tiene que $y(\cdot)$ es decreciente en $[0, t]$ y $y(t) \leq F(t) = G^{-1}(t) \leq y_0 < a_2$.

Demostración

i) En este caso G es estrictamente creciente y claramente $\frac{d}{dt}G(y(t)) \leq 1$, integrando entre 0 y t , obtenemos $G(y(t)) \leq t$, pero $G: (a_1, a_2) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una inversa estrictamente creciente

$$F = G^{-1}: (G(a_1^-), G(a_2^+)) \rightarrow (a_1, a_2)$$

y la conclusión es inmediata.

Para la última parte, si $a_1 < y_0 < \alpha < a_2$ entonces mientras $a_1 < y(t) < a_2$, $F(t) < \alpha$ si y sólo si $0 \leq t < G(\alpha) = \int_{y_0}^{\alpha} \frac{1}{P(s)} ds$.

ii) Los argumentos son como antes con la única diferencia de que G y F son estrictamente decrecientes y

$$F = G^{-1}: (G(a_2^+), G(a_1^-)) \rightarrow (a_1, a_2)$$

□

Observación

La misma discusión es posible si $\begin{cases} y'(t) \geq P(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ solamente cambiando las desigualdades anteriores, en particular en el caso i) $y(\cdot)$ es creciente, esto se usará cuando discutamos las explosiones en la Sección II.4.

Teorema 2.4

Sea $u_0 \in V$ y $u(t) = S(t)u_0$ la solución de K-V comenzando en u_0 en tiempo $t = 0$. Supongamos que $\delta \neq 0$.

i) Si $\beta(f) = m < 5$ entonces existen $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ dependiendo de $\nu, \beta, \delta, \gamma, L$ y m tales que denotando $r = (3m+1)/(5-m) > 1$

Si $a \leq 0$ (caso no coercivo) tenemos el tiempo de existencia

$$T(u_0) = \int_{|u_0|^2}^{\infty} \frac{1}{bs^r - as} ds < \infty \quad (2.45)$$

Si $a > 0$ (caso coercivo), entonces si $|u_0|^2 \in \left(0, \left(\frac{a}{b}\right)^{r-1}\right)$, u está definida en $(0, \infty)$ y $|u(t)|^2 \rightarrow 0$ monótonamente, (como $\delta \neq 0$ la convergencia también es en V , Teorema 2.1); si $|u_0|^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^{r-1}$ entonces la estimación (2.45) se verifica y puede acotarse inferiormente por

$$\bar{T}(u_0) = \int_{|u_0|^2}^{\infty} \frac{1}{bs^r} ds = \frac{1}{b(r-1)} |u_0|^{2(1-r)} \quad (2.46)$$

En cualquier caso, $u \in L^{2(r-1)}(0, T, H)$ implica $u \in L^{\infty}(0, T, H)$ (2.47)

ii) Supongamos ahora que f es un polinomio de grado m , arbitrario, entonces como antes existen $a \in \mathbb{R}$ y $b \geq 0$ dependiendo de los parámetros tales que

Si $a \leq 0$ (caso no coercivo) tenemos el tiempo de existencia

$$T(u_0) = \int_{|u_0|_1^2}^{\infty} \frac{1}{bs^m - as} ds < \infty \quad (2.48)$$

Si $a > 0$ (caso coercivo) y si $|u_0|_1^2 \in \left(0, \left(\frac{a}{b}\right)^{m-1}\right)$ entonces

u está definida en $(0, \infty)$ y $|u(t)|_1 \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$; si $|u_0|_1^2 > (\frac{a}{b})^{m-1}$ entonces la estimación (2.48) se verifica y se puede acotar inferiormente por

$$\bar{T}(u_0) = \int_{|u_0|_1^2}^{\infty} \frac{1}{bs^m} ds = \frac{1}{b(m-1)} |u_0|_1^{2(1-m)} \quad (2.49)$$

En cualquier caso, $u \in L^{2(m-1)}(0, T, V)$ implica $u \in L^m(0, T, V)$ (2.50)

iii) Si $\gamma = 0$ y $m = 2$ entonces las estimaciones (2.45), (2.46), (2.47) se verifican para todo $u_0 \in H$.

Demostración

1) Por (2.14)

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|D^2u|^2 + 2(\beta - C_2(\nu, \delta, \gamma))|u|^2 \leq C_1(\nu, \delta, \gamma) \left(|u|^2\right)^{(3m+1)/(5-m)}$$

Sea $a = \frac{\nu}{L^4} + 2(\beta - C_2(\nu, \delta, \gamma))$, $b = C_1(\nu, \delta, \gamma)$ y $r = (3m+1)/(5-m)$ por la desigualdad de Poincaré, $|w| \leq L|Dw|$, $y(t) = |u(t)|^2$ verifica

$$y' + ay \leq by^r \quad (2.51)$$

Si $a \leq 0$ (caso no coercivo) aplicamos el Lema 2.3 con $P(s) = bs^r - as$, $a_1 = 0$ y $a_2 = \infty$ para obtener el tiempo de existencia (2.45).

Si $a > 0$ (caso coercivo) primero aplicamos el Lema 2.3 con $P(s) = bs^r - as$, $a_1 = 0$ y $a_2 = (\frac{a}{b})^{r-1}$ para obtener el decaimiento monótono a 0. A continuación, si $|u_0|_1^2 > (\frac{a}{b})^{r-1}$ aplicamos de nuevo el Lema 2.3 con $P(s) = bs^r - as$, $a_1 = (\frac{a}{b})^{r-1}$ y $a_2 = \infty$ para obtener (2.45), o alternativamente podemos usar $P(s) = bs^r$, $a_1 = 0$ y $a_2 = \infty$ para obtener (2.46).

La inecuación diferencial (2.51) nos da la otra propiedad de regularidad:

$$y' \leq by^r + (-a)_+ y = \theta y \quad \text{con } \theta(t) = b(y(t))^{r-1} + (-a)_+$$

En particular, $0 \leq y(t) \leq y_0 \cdot e^{\int_0^t \theta(s) ds}$ y $\theta \in L^1(0, T)$ implica $y \in L^m(0, T)$; así en nuestro caso $T < \infty$ o si $T = \infty$ pero a es

positivo, como $y = |u|^2$:

$$u \in L^{2(r-1)}(0, T, H) \quad \text{implica} \quad u \in L^\infty(0, T, H)$$

Si $T = \infty$ pero a es negativo concluimos con el lema de Gronwall uniforme.

ii) Por (2.16)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Du|^2 + \nu |D^3u|^2 + \beta |Du|^2 + \delta \left(\int_{\Omega} f'(u) (D^2u)^2 - \frac{1}{3} \int_{\Omega} f^{(3)}(u) (Du)^4 \right) = 0$$

con $|\delta f'(s)| \leq C(1+|s|^{m-1})$ y $|\delta f^{(3)}(s)| \leq C(1+|s|^{m-3})$, $C = C(\delta)$, entonces por (2.5), (2.8), Lema 2.2

$$\begin{aligned} \left| \delta \int_{\Omega} f'(u) (D^2u)^2 \right| &\leq C \left(|D^2u|^2 + |Du|^m |D^3u| \right) \\ \left| \frac{\delta}{3} \int_{\Omega} f^{(3)}(u) (Du)^4 \right| &\leq C \left(|Du|_{L^4}^4 + |Du|^{m+1/2} |D^3u|^{1/2} \right) \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Young, para cada $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} C |Du|^m |D^3u| &\leq \epsilon |D^3u|^2 + C_1(\epsilon, \delta) |Du|^{2m} \\ C |Du|^{m+1/2} |D^3u|^{1/2} &\leq \epsilon |D^3u|^2 + C_2(\epsilon, \delta) |Du|^{(4m+2)/3} \end{aligned}$$

de nuevo interpolando y por la desigualdad de Young, para cada $\epsilon > 0$, $C |D^2u|^2 \leq \epsilon |D^3u|^2 + C_3(\epsilon, \delta) |Du|^2$, y usando $H^{1/4} \subset L^4$, y de nuevo interpolación y la desigualdad de Young

$$C |Du|_{L^4}^4 \leq a_0 |Du|^{7/2} |D^3u|^{1/2} \leq \epsilon |D^3u|^2 + C_4(\epsilon, \delta) |Du|^{14/3}$$

para todo $\epsilon > 0$, tomando $\epsilon = \nu/8$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |Du|^2 + \nu |D^3u|^2 + 2(\beta - C_3(\nu, \delta)) |Du|^2 &\leq \\ &\leq C_1(\nu, \delta) |Du|^{2m} + C_2(\nu, \delta) |Du|^{(4m+2)/3} + C_4(\nu, \delta) |Du|^{14/3} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Obsérvese que si $m = 2$ entonces sólo los términos con C_1 y C_3 aparecen en (2.52) mientras que si $m = 3$ entonces C_2 se puede tomar como cero. Así definiendo $a = \frac{\nu}{L^4} + 2(\beta - C_3(\nu, \delta))$, $b = C_1(\nu, \delta)$, $c = C_2(\nu, \delta)$, $d = C_4(\nu, \delta)$, entonces $y(t) = |Du(t)|^2$ verifica:

$$y' + a y \leq b y^m + c y^{(2m+1)/3} + d y^{7/3} \quad (2.53)$$

y se puede usar el Lema 2.3 con $P(y) = b y^m + c y^{(2m+1)/3} + d y^{7/3} - a y$. Como se observó anteriormente si $m = 2$ entonces $P(y) = b y^2 - a y$, mientras que si $m \geq 3$ tenemos que $1 < 7/3, (2m+1)/3 < m$ y usando la desigualdad de Young, para todo $c > 0$, $c y^{(2m+1)/3} \leq c y + C_c y^m$ y $d y^{7/3} \leq c y + C_c y^m$, por tanto con c pequeño, podemos reescribir (2.53) como

$$y' + a y \leq b y^2 \quad \text{si } m = 2 \quad (2.54a)$$

$$y' + a y \leq b y^m \quad \text{si } m \geq 3 \quad (2.54b)$$

donde los coeficientes tienen los mismos signos que en (2.53) y podemos aplicar el argumento anterior:

Si $a \leq 0$ (caso no coercivo) obtenemos el tiempo de existencia (2.48); si $a > 0$ (caso coercivo) y si $|u_0|_1^2 \in (0, \frac{a}{b})^{m-1}$ entonces $|u(t)|_1^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Asimismo (2.49) se deduce como antes. Por último $y' \leq \theta y$ con $\theta = b y^{m-1} + (-a)_+$, por tanto si $T < \infty$ o si $T = \infty$ pero a es positivo

$$u \in L^{2(m-1)}(0, T, V) \quad \text{implica} \quad u \in L^\infty(0, T, V)$$

Si $T = \infty$ pero a es negativo concluimos con el Lema 2.1.

iii) Es inmediato. \square

Observación

El Lema 2.3 nos da también una estimación del crecimiento o del decaimiento monótono a cero de las normas de $u(t)$ en términos de la función F ; esto no es, sin embargo, fácil de calcular si la constante a no es cero, a pesar de esto podemos dar estimaciones explícitas en nuestro caso: las inecuaciones diferenciales (2.51) (2.54) se pueden escribir en forma general $y' + a y \leq b y^p$ $p > 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $y > 0$, entonces con el cambio usual de variables $z = y^{1-p}$ obtenemos (supuesto que a no es cero)

$$\frac{1}{y(t)^{p-1}} = z(t) \geq \left[\left(z_0 - \frac{b}{a} \right) e^{(p-1)at} + \frac{b}{a} \right]_+ \geq 0$$

y entonces

$$0 \leq y(t) \leq \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{y_0^{p-1}} - \frac{b}{a} \right) e^{(p-1)at} + \frac{b}{a} \right]_+^{\frac{1}{p-1}}} \quad (2.55)$$

Así si $a > 0$:

si $0 < y_0 < \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ el término de la derecha converge a cero con t tendiendo a $+\infty$, e incluso $y(t) = O(e^{-at})$ con $t \gg 1$.

si $y_0 = \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ entonces $y(t) \leq \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ para todo $t \geq 0$.

finalmente si $y_0 > \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ entonces el segundo miembro explota en tiempo

$$T(y_0) = \frac{1}{(p-1)a} \text{Log} \left(\frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a} - \frac{1}{y_0^{p-1}}} \right) > 0 \quad (2.56)$$

Si $a < 0$ entonces la estimación (2.56) se verifica para todo y_0 .

Como consecuencia inmediata de (2.45), (2.49), (2.56) y del Teorema 2.1:

Corolario 2.2

Para cada conjunto acotado $B \subset V$ existe $T(B) > 0$ tal que S , el semigrupo generado por $K-V$, está definido en $B \times [0, T(B)]$ y $S(B \times [0, T(B)])$ está acotado en V . Además si $\partial(f) < 5$ entonces para todo $B \subset V$ acotado en H , existe $T_1(B) > 0$ tal que S está definido en $B \times [0, T_1(B)]$.

2.3 Comportamiento Asintótico. Conjuntos ω -límites. Explosión, Existencia Global, Disipatividad.

Nos ocupamos a continuación del comportamiento asintótico de órbitas acotadas de la ecuación K-V. Las propiedades básicas de estas órbitas son:

Definición 3.1

Sea $\{u(t), t \geq 0\}$ una solución de K-V, globalmente definida y acotada en V, $u(0) \in V$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $\omega(k)$ -límite

$$\omega(k) = \bigcap_{t>0} \overline{\{u(s), s > t\}} \quad (3.1)$$

donde la adherencia se toma en $V_k = X^{k/4}$.

Proposición 3.1

Se verifican:

- i) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\omega(k)$ es no vacío, compacto y conexo en V_k . Además $\omega(k)$ es invariante, i.e. $S(t)$ está definido sobre $\omega(k)$ para todo $t \geq 0$ y $S(t)\omega(k) = \omega(k)$, y más aún $\text{dist}_k(u(t), \omega(k)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, donde la distancia se toma en V_k , i.e.

$$\text{dist}_k(u(t), \omega(k)) = \inf \{|u(t) - w|_k, w \in \omega(k)\}$$

- ii) Para todos $k, m \in \mathbb{N}$ $\omega(k) = \omega(m)$.

- iii) Si K es un conjunto acotado en V tal que $S(s)K \subset K$ para todo s en $[0, T]$, entonces $S(t)$ está definido sobre K para todo $t \geq 0$ y $S(t)K \subset K$.

Por otro lado, todo conjunto acotado (en V) e invariante está contenido en $C^{\infty}(\Omega)$ y es acotado en V_k para todo k.

Demostración

- i) Por la Proposición 1.3, para cada $t > 0$, $u(t)$ está en todos los V_k y por tanto $\omega(k)$ está bien definido. Además es inmediato que

$$\omega(k) = \{ v \in V_k, \exists \{t_n\} \text{ convergiendo a } \infty \text{ y } u(t_n) \rightarrow v \text{ en } V_k \} \quad (3.2)$$

Gracias al Teorema 2.3, $\{ u(t), t \geq c > 0 \}$ es acotado en V_k y por el Teorema 1.1 es relativamente compacto en V_k , usando argumentos clásicos, [7,14,36], se deduciría fácilmente que $\omega(k)$ es no vacío, compacto y conexo en V_k , si el semigrupo estuviese globalmente definido sobre $\omega(k)$; pero esto es consecuencia inmediata del punto iii) abajo: por la continuidad del semigrupo (en la norma de V_k , Proposición 1.3) se deduce fácilmente que $S(t)\omega(k) \subset \omega(k)$ al menos para $0 \leq t \leq T(\omega(k))$ ($T(\omega(k))$ como en el Corolario 2.2, ya que $\omega(k)$ es acotado en V), por iii) concluimos. El resto se deduce de nuevo con argumentos clásicos, ver [7,14] para los detalles.

ii) Fijando $k \in \mathbb{N}$, como se observó anteriormente para cada $t > 0$, $\{ u(s), s > t \}$ es relativamente compacto en $V_{k+1} \subset V_k$ y por tanto tiene la misma adherencia en ambos espacios, consecuentemente $\omega(k+1) = \omega(k)$.

iii) De hecho para todo $K \subset V$, acotado, tal que $S(t)K \subset K$ para todo $0 \leq t \leq T$, ($T \leq T(K)$, $T(K)$ como en Corolario 2.2) entonces $S(t)$ está definido sobre K en $0 \leq t \leq nT$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $S(\cdot)$ está definido para todo $t \geq 0$ sobre K y $S(t)K \subset K$ $t \geq 0$.

Si K es acotado e invariante, i.e. $S(t)K = K$ $t \geq 0$, entonces K está incluido en todos los V_k y es acotado en él (Teorema 2.3).

□

Observaciones

i) Si $\gamma = 0$ y $m = 2$, podemos definir también $\omega(0)$ si la órbita es acotada en H ; puesto que por los Teoremas 2.1 y 2.3 la órbita está acotada en V_k , entonces los resultados anteriores se verifican incluso para $k = 0$.

ii) Por la propiedad de Unicidad Retrógrada (Proposición 1.3) la ecuación se puede invertir en el tiempo sobre $\omega(k)$, i.e. $\{S(t)\}$ es un grupo sobre $\omega(k)$, [14,21,36].

iii) El punto ii) implica que el ω -límite de una trayectoria acotada en V atrae a la solución en todas las normas V_k .

CASOS PARTICULARES

I) $\delta = \gamma = 0$ Ecuación Lineal.

Los autovalores del operador lineal $A + L$ son (recuérdese que conservamos el término lineal $-s$ en $\delta f(s)$ cuando $\delta = 0$):

$$\mu_n = \nu \left(\frac{2\pi n}{L-n} \right)^4 - \left(\frac{2\pi n}{L-n} \right)^2 + \beta \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

Como la función $g(s) = \nu s^4 - s^2 + \beta$ ($s \geq 0$) alcanza su mínimo absoluto en $s = \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$ y $g\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\right) = \beta - \frac{1}{4\nu}$ entonces si $\beta \cdot \nu > \frac{1}{4}$ (caso coercivo) todos los μ_n 's son positivos y por tanto la solución trivial es Globalmente Asintóticamente Estable. Como las raíces de g se calculan explícitamente es fácil estimar cuantos de los autovalores son negativos.

Un caso corriente es $\beta = 0$, [6,10-13], en el que

$$\mu_n = \left(\frac{2\pi n}{L-n} \right)^2 \cdot \left(\nu \left(\frac{2\pi n}{L-n} \right)^2 - 1 \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

así si $L > \sqrt{\nu} \cdot 2\pi$ entonces hay exactamente $\left[\frac{L}{2\pi\sqrt{\nu}} \right]$ autovalores negativos causantes de la inestabilidad de la solución cero (aquí $[\cdot]$ denota la parte entera de un número real), y su número crece con L . Si $\beta > 0$ entonces $\left[\frac{L}{2\pi\sqrt{\nu}} \right]$ es una cota superior del número de autovalores negativos.

Por otra parte como el término no lineal es un operador polinómico entonces la ecuación linealizada sobre la solución trivial coincide con la ecuación lineal, en este caso los autovalores son

$$\mu_n = \nu \left(\frac{2\pi n}{L-n} \right)^4 + \delta a_1 \left(\frac{2\pi n}{L-n} \right)^2 + \beta \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

así la solución cero es genéricamente hiperbólica con una variedad inestable finito dimensional. Finalmente observemos que en el Teorema 2.4 hemos estimado el tamaño de su cuenca de atracción.

II) $\delta = 0$, Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.

Para este valor del parámetro, recuperamos la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, K-S. Este caso junto con el caso III) abajo, muestran que el término $\gamma(Du)^2$ de la ecuación es fuertemente estabilizante, ya que su ausencia produce explosiones en tiempo finito o crecimiento exponencial, y su presencia produce una fuerte disipatividad: para la ecuación K-S, restringida a funciones pares (ver Teorema 2.1), se ha probado, [10-13], la existencia de bolas absorbentes en V y V_2 , la existencia de un atractor maximal con dimensión Fractal finita, y un comportamiento asintótico finito dimensional, estrictamente hablando la existencia de una Variedad Inercial finito dimensional (i.e. una variedad finito dimensional invariante exponencialmente atractiva), [13,18,29]. Asimismo estos resultados son válidos para funciones arbitrarias con condiciones de contorno incluyendo a $Du = 0$ en $\partial\Omega = \{0,L\} \times (0,T)$, [39].

Algunos casos tienen un comportamiento asintótico trivial: de (2.24), (2.25) si $a = \frac{\nu}{L^4} + 2\beta - \frac{1}{\nu} > 0$, entonces toda solución converge a cero en V_k para todo $k \in \mathbb{N}$, así $u = 0$ es globalmente asintóticamente estable y es el Atractor Maximal de K-S es este rango de parámetros.

III) $\gamma = 0$, Ecuación de Cahn-Hilliard.

La ecuación está ahora relacionada con la ecuación de Cahn-Hilliard, [4,12,18], y se puede escribir (con $\Delta = D^2$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta \left(-\nu \Delta u + \delta f(u) \right) + \beta u = 0 \quad (3.5)$$

siendo

$$\delta f(s) = \sum_{k=1}^m a_k s^k, \quad \delta F(s) = \int_0^s \delta f(t) dt = \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{k+1} s^{k+1}, \quad a_m \neq 0 \quad (3.6)$$

(obsérvese la diferencia de notación con respecto a (1.1) Sección II.1)

Pero $-\Delta$ es el isomorfismo canónico entre $V = X^{1/4}$ y su dual

$V^\circ = X^{-1/4} = V_{-1}$; con $u \in V$ $-\Delta u = f \in V^\circ$ si y sólo si

$$\langle f, v \rangle_{V^\circ \times V} = \int_{\Omega} Du \cdot Dv = \langle u, v \rangle_V \text{ para cada } v \in V, \text{ donde } \langle \cdot, \cdot \rangle_V \text{ denota}$$

el producto escalar en V ; así en particular $\|f\|_{V^\circ} = \|u\|_V$, y llamando $P = (-\Delta)^{-1} \in \mathcal{L}(V^\circ, V)$, entonces $\|f\|_{V^\circ} = \|P(f)\|_V$ para todo $f \in V^\circ$.

Haciendo la identificación usual $V \subset H \equiv H^1 \subset V^\circ$ con inclusión compacta y densa, podemos considerar P como operador en H , que es compacto, positivo y autoadjunto: para todo $f, g \in H$

$$\langle f, P(g) \rangle_H = \langle f, P(g) \rangle_{V^\circ \times V} = \langle P(f), P(g) \rangle_V = \langle P(f), g \rangle_H$$

en particular $\langle f, P(f) \rangle_H = \|P^{1/2}(f)\|_H^2 = \|P(f)\|_V^2 = \|f\|_{V^\circ}^2$ con $f \in H$.

Tomando $A : V \rightarrow V^\circ$ definido por

$$A(u) = -\nu \Delta u + \delta f(u) - \frac{\delta}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u) dx \quad (3.7)$$

podemos reescribir la ecuación como

$$P\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + A(u) + \beta P(u) = 0 \quad \text{en } V^\circ \quad (3.8)$$

Observemos que con $u_0 \in V$ tenemos que $S(\cdot)u_0 = u(\cdot) \in C^1(0, T, V)$ y así (3.8) tiene sentido.

Multiplicando (3.8) por u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ e integrando en Ω obtenemos respectivamente

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^\circ}^2 + \langle A(u), u \rangle + \beta \|u\|_{V^\circ}^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{V^\circ}^2 + \frac{d}{dt} \left(V(u) + \frac{\beta}{2} \|u\|_{V^\circ}^2 \right) = 0 \quad (3.10)$$

siendo

$$V(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{\nu}{2} (Du)^2 + \delta F(u) \right) \quad (3.11)$$

por tanto $G(u) = V(u) + \frac{\beta}{2} \|u\|_{V^\circ}^2$ es estrictamente decreciente sobre las trayectorias.

Con estas notaciones, [12, 18]

Teorema 3.1

Supongamos que $\delta(f) = m$ es impar y a_m es positivo. Entonces para cada u_0 en V , $u(t) = S(t)u_0$ está en $L^\infty(0, \infty, V)$. Más aún, para todo k existe una bola absorbente en V_k con tiempo de entrada independiente del dato inicial.

En particular el semigrupo generado por C-H es disipativo en V_k para todo k , de hecho el sistema dinámico es un sistema gradiente en V .

Demostración

Como m es impar y a_m es positivo, entonces

$$\int_{\Omega} \delta f(u)u \geq C_1 \int_{\Omega} u^{m+1} - C_2 \quad \text{y} \quad C_3 \int_{\Omega} u^{m+1} + C_4 \geq \int_{\Omega} \delta F(u) \geq C_5 \int_{\Omega} u^{m+1} - C_6 \quad (3.12)$$

con C_1, \dots, C_6 constantes positivas dependientes de δ (y de L); además C_1 y C_5 se pueden tomar arbitrariamente pequeñas (a menor C_1 y C_5 le corresponden mayores C_2 y C_6).

$$\text{Así} \quad G(u) \geq \frac{\nu}{2} |u|_V^2 + \frac{\beta}{2} \|u\|_{V^*}^2 + C_5 \int_{\Omega} u^{m+1} - C_6 \quad (3.13)$$

y como G decrece sobre las trayectorias entonces las soluciones están globalmente definidas y en $L^\infty(0, \infty, V)$.

$$\text{Además} \quad \langle A(u), u \rangle = \nu |u|_V^2 + \int_{\Omega} \delta f(u)u \geq \nu |u|_V^2 + C_1 \int_{\Omega} u^{m+1} - C_2$$

y así en (3.9)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^*}^2 + \nu |u|_V^2 + C_1 \int_{\Omega} u^{m+1} + \beta \|u\|_{V^*}^2 \leq C_2 \quad (3.14)$$

pero $V \subset H$ y $H \subset V^*$ con $|w|_H \leq L|w|_V$ y $\|u\|_{V^*} \leq L|u|_H$ para todos $w \in V$ y $u \in H$ respectivamente, y

$$\int_{\Omega} u^{m+1} \geq L^{-(m-1)/2} \cdot \left(\int_{\Omega} u^2 \right)^{(m+1)/2} \geq L^{-(3m+1)/2} \cdot \|u\|_{V^*}^{m+1}$$

así de (3.14)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^*}^2 + \left(\beta + \frac{\nu}{L^4} \right) \|u\|_{V^*}^2 + C_1 L^{-(3m+1)/2} \cdot \|u\|_{V^*}^{m+1} \leq C_2 \quad (3.15)$$

y por tanto tenemos que cualquier bola en V° de centro cero y radio mayor que $\rho_0 = (C_2/C_1)^{1/2(m+1)} \cdot L^{(3m+1)/4(m+1)}$ es absorbente y el tiempo de entrada es independiente del dato inicial:
 $y = \|u\|_V^2$ verifica $\dot{y} + ay + by^p \leq c$, $a, b, c > 0$, y podemos usar el siguiente resultado que tomamos de [18] (Cap. III, Lema 5.1):

Lemma 3.1

Si $y(\cdot) \geq 0$ verifica $\dot{y} + by^p \leq c$, $b, c > 0$, $p > 1$, entonces para todo $t > 0$, $y(t) \leq (c/b)^{1/p} + (b(p-1)t)^{-1/(p-1)}$.

Por tanto con $\rho_0^2 = (c/b)^{1/p}$, para todo $\rho > \rho_0^2$ existe t_ρ , dependiendo sólo de ρ , tal que $y(t) \leq \rho$ para todo $t \geq t_\rho$. \square

Más aún, por (3.12)

$$\begin{aligned} \langle A(u), u \rangle &= \nu \|u\|_V^2 + \int_{\Omega} \delta f(u) u \geq \nu \|u\|_V^2 + C_1 \int_{\Omega} u^{m+1} - C_2 \geq \\ &\geq \nu \|u\|_V^2 + C_1/C_3 \int_{\Omega} \delta F(u) - C_2 - C_1 C_4/C_3 \geq \\ &\geq \epsilon V(u) - C_7 = \epsilon \left(G(u) - \frac{\beta}{2} \|u\|_V^2 \right) - C_7 \end{aligned}$$

para algún ϵ en $(0, 2]$ (ya que C_1 se puede tomar pequeña), y entonces en vez de (3.14) obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_V^2 + \epsilon G(u) + \beta(1 - \frac{\epsilon}{2}) \|u\|_V^2 \leq C_7 \quad (3.16)$$

de los resultados derivados de (3.15) e integrando esta última expresión (3.16), se deduce que existe $t_0 > 0$ tal que para todo u_0 en V , $r > 0$ y $t > t_0$ se tiene $\int_t^{t+r} G(u) \leq C(r)$, como G decrece entonces $G(u(t+r)) \leq C(r)/r$, para todo $t > t_0$, así por (3.13) tenemos una bola absorbente en V , con tiempo de entrada independiente del dato inicial.

En particular el Teorema 2.3 prueba la existencia de conjuntos acotados absorbentes en V_k para todo k ; en particular $S(t)$ es compacto en V_k con t grande y por tanto el semigrupo generado por C-H es disipativo en V_k , [14,36].

En este caso tras (3.13)-(3.16), el sistema dinámico en V es un sistema gradiente, [14,23,36], en particular todo conjunto

ω -límite está contenido en el conjunto de puntos fijos, i.e. $S(t)u_0 = u_0$ $t \geq 0$. Además su Atractor Maximal puede ser descrito completamente ya que G es un funcional de Lyapunov [14,24,36]: el atractor es el conjunto inestable del conjunto de puntos de equilibrio del sistema dinámico, si estos son finitos en número entonces el atractor es la unión de las variedades inestables de cada punto de equilibrio; además el atractor tiene dimensión Fractal y Hausdorff finita e incluso está contenido en una Variedad Inercial, [11-13], ver Capítulo III y Proposición 3.4 abajo. \square

Observaciones

i) La acotación de órbitas y la existencia de conjuntos absorbentes en V se verifican con cualquier término no lineal que verifique (3.12) y no sólo para polinomios.

ii) Como se probó en la Sección II.1, si $\delta f = 2$ y $\gamma = 0$, entonces podemos resolver el problema de Cauchy con $u_0 \in H$ y si el grado es mayor con $u_0 \in V$; sin embargo los métodos de compacidad, [37], proporcionan "soluciones débiles" para cada u_0 en H siempre que se tengan buenas estimaciones a priori, i.e. si f tiene grado impar y coeficiente principal positivo, [18,38]. Así en este caso el sistema dinámico es disipativo en H .

Mostraremos a continuación que si no estamos en la situación del Teorema 3.1 entonces el "mecanismo de reacción", f , produce explosiones: observemos que:

$$\langle A(u), u \rangle = \nu |u|_V^2 + \int_{\Omega} \delta f(u) u$$

y entonces para todo $j = 1, \dots, m$

$$\langle A(u), u \rangle = (j+1)V(u) - (j-1)\frac{\nu}{2}|u|_V^2 - \sum_{k=1}^m a_k \frac{j-k}{k+1} \int_{\Omega} u^{k+1}$$

$$\langle A(u), u \rangle = (j+1)G(u) - (j+1)\frac{\beta}{2}|u|_V^2 - (j-1)\frac{\nu}{2}|u|_V^2 - \sum_{k=1}^m a_k \frac{j-k}{k+1} \int_{\Omega} u^{k+1} \quad (3.17)$$

por (3.9) y como G es decreciente

$$\frac{d}{dt} \|u\|_V^2 \geq (j-1)\beta \|u\|_V^2 + (j-1)\nu \|u\|_V^2 + \sum_{k=1}^m 2a_k \frac{j-k}{k+1} \int_{\Omega} u^{k+1} - 2(j+1)G(u_0) \quad (3.18)$$

Así tenemos

Teorema 3.2

Supongamos que $\delta(f) = m$ es impar pero que a_m es negativo.

Entonces si $u_0 \in V$ verifica para algún $j < m$

$$(j-1) \left(\beta + \frac{\nu}{L^4} \right) \|u_0\|_V^2 + C_1 L^{-(3m+1)/2} \|u_0\|_V^{m+1} - 2(j+1)G(u_0) - C_2 > 0 \quad (3.19)$$

entonces la solución explota en tiempo finito.

Más aún definiendo $R_1 = R_1(u_0)$ por

$$(j-1) \left(\beta + \frac{\nu}{L^4} \right) R_1^2 + C_1 L^{-(3m+1)/2} R_1^{m+1} = \left[2(j+1)G(u_0) + C_2 \right]_+ \quad (3.20)$$

si la solución con dato inicial u_0 sale en tiempo finito de la bola en V^* , de centro cero y radio R_1 , entonces explota en tiempo finito.

Demostración

Como m es impar pero a_m es negativo, tomando cualquier $j < m$, la expresión polinómica en (3.18) se puede acotar inferiormente por $C_1 \int_{\Omega} u^{m+1} - C_2$, siendo C_1, C_2 constantes positivas; entonces como en el Teorema 3.1

$$\frac{d}{dt} \|u\|_V^2 \geq (j-1) \left(\beta + \frac{\nu}{L^4} \right) \|u\|_V^2 + C_1 L^{-(3m+1)/2} \|u\|_V^{m+1} - 2(j+1)G(u_0) - C_2 \quad (3.21)$$

entonces si (3.19) se verifica, aplicando el Lema 2.3 la solución explota en tiempo finito ($m > 1$). Más aún si con u_0 dado en V , definimos $R_1 = R_1(u_0)$ como en (3.20), entonces claramente si la solución sale de la bola de radio R_1 , entonces explota en tiempo finito. \square

Observación

Obsérvese que (3.19) se verifica por ejemplo si

$2(j+1)G(u_0) \leq -C_2$ y u_0 no es cero.

Teorema 3.3

Supongamos que $\delta(f) = m$ es par y que $a_{m-1} > 0$ o incluso mejor supongamos que el término no nulo de mayor orden (por debajo de m) tiene coeficiente positivo y grado impar, m_0-1 . Entonces si $u_0 \in V$ verifica

$$(m-1) \left(\beta + \frac{\nu}{L^4} \right) \|u_0\|_V^2 + C_1 L^{-(3m_0-2)/2} \cdot \|u_0\|_V^{m_0} - 2(m+1)G(u_0) - C_2 > 0 \quad (3.22)$$

entonces la solución explota en tiempo finito si $m_0 > 2$ o crece exponencialmente si $m_0 = 2$.

Más aún definiendo $R_2 = R_2(u_0)$ por

$$(m-1) \left(\beta + \frac{\nu}{L^4} \right) R_2^2 + C_1 L^{-(3m_0-2)/2} \cdot R_2^{m_0} = \left[2(m+1)G(u_0) + C_2 \right]_+ \quad (3.23)$$

si la solución sale de la bola en V° , de centro cero y radio R_2 , entonces explota en tiempo finito.

Demostración

Como m es par, $a_m \neq 0$ y $a_{m_0-1} > 0$, entonces en (3.18) con $j = m$ la expresión polinómica se puede acotar inferiormente por $C_1 \int_{\Omega} u^{m_0} - C_2$, siendo C_1, C_2 constantes positivas y así

$$\frac{d}{dt} \|u\|_V^2 \geq (m-1) \left(\beta + \frac{\nu}{L^4} \right) \|u\|_V^2 + C_1 L^{-(3m_0-2)/2} \cdot \|u\|_V^{m_0} - 2(m+1)G(u_0) - C_2 \quad (3.24)$$

y de nuevo si (3.22) se verifica entonces la solución explota en tiempo finito si $m_0 > 2$ o crece exponencialmente si $m_0 = 2$ (Lema 3.2). Como antes, con $R_2 = R_2(u_0)$ definido en (3.23) si la solución sale de la bola de radio R_2 entonces explota en tiempo finito o crece exponencialmente. \square

Observación

Obsérvese de nuevo que (3.22) se verifica si por ejemplo $2(m+1)G(u_0) \leq -C_2$ y u_0 no es cero.

La misma discusión se puede hacer si $\delta f(s) = a_1 s + a_m s^m$, (i.e. $m_0 = 2$), m par y a_1 negativa pero pequeña:

Proposición 3.2

Con las notaciones anteriores, si $\delta(f) = m$ es par, $m_0 = 2$ y $\nu + a_1 L^2 \geq 0$, entonces si $u_0 \in V$ verifica

$$(m-1) \left(\beta + \frac{\nu + a_1 L^2}{L^4} \right) \|u_0\|_V^2 - 2(m+1)G(u_0) > 0 \quad (3.25)$$

entonces la solución crece exponencialmente. Más aún definiendo

$R_3 = R_3(u_0)$ por

$$(m-1) \left(\beta + \frac{\nu + a_1 L^2}{L^4} \right) R_3^2 = [2(m+1)G(u_0)]_+ \quad (3.26)$$

si la solución sale de la bola de radio R_3 , entonces crece exponencialmente.

Más aún, existe una constante $C_0 \geq 0$ (tal que $C_0 = 0$ si β y a_1 son cero) tal que si $u_0 \in V$ verifica

$$\frac{\nu}{2} \|u_0\|_V^2 + C_0 \|u_0\|_V^2 + \frac{a_m}{m+1} \int_{\Omega} u_0^{m+1} < 0 \quad (3.27)$$

entonces la solución explota en tiempo finito.

Demostración

Por (3.18) con $j = m$

$$\frac{d}{dt} \|u\|_V^2 \geq (m-1)\beta \|u\|_V^2 + (m-1)\nu \|u\|_V^2 + a_1(m-1) \int_{\Omega} u^2 - 2(m+1)G(u_0)$$

y como $\nu/L^2 + a_1 \geq 0$

$$\frac{d}{dt} \|u\|_V^2 \geq (m-1) \left(\beta + \frac{\nu + a_1 L^2}{L^4} \right) \|u_0\|_V^2 - 2(m+1)G(u_0) \quad (3.28)$$

el resto es como antes.

De hecho en este caso, $m_0 = 2$, i.e. $\delta f(s) = a_1 s + a_m s^m$ tenemos una condición más fina usando los resultados de [9]: existe una constante $C_0 \geq 0$ (tal que $C_0 = 0$ si β y a_1 son cero) tal que si $u_0 \in V$ verifica (3.27) entonces la solución explota en

tiempo finito. Por supuesto la condición (3.27) puede ser verificada excepto si m es impar y a_m es positivo. \square

Observaciones

i) Obsérvese de nuevo que (3.25) se verifica si $G(u_0) \leq 0$ y u_0 no es cero.

ii) Para la ecuación K-V original tenemos que $\delta f(s) = -s - \frac{\delta}{2} s^2$ y la condición (3.25) quiere decir $\nu \geq L^2$ y

$$\left(\beta + \frac{\nu - L^2}{L^4} \right) \|u_0\|_V^2 - 6G(u_0) > 0$$

o equivalentemente $\nu \geq L^2$ y

$$\frac{\nu}{2} \|u_0\|_V^2 + \left(\frac{2RL^4 + \nu - L^2}{6L^4} \right) \|u_0\|_V^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2 - \frac{\delta}{6} \int_{\Omega} u_0^3 < 0 \quad (3.29)$$

iii) Obsérvese que todas las condiciones (3.19), (3.22), (3.25), (3.27) muestran explosión en la norma de V^* y por tanto en cualquier norma más fuerte, en particular en la norma de cualquier V_k con $k \geq -1$.

iv) Si una solución no explota en tiempo finito o infinito en V^* según (3.19), (3.22) o (3.25) entonces su norma V^* permanece acotada mientras la solución existe e incluso más, con R_i $i = 1, 2, 3$ definidos en (3.20), (3.23) y (3.26) entonces $R(t) = R_i(u(t))$ es decreciente y $\|u(t)\|_{V^*} \leq R(t)$.

A continuación mostraremos cual es la dinámica asintótica de las soluciones que no explotan:

Proposición 3.3

Supongamos que estamos en cualquiera de los casos de los Teoremas 3.2, 3.3 o de la Proposición 3.2 y sea $u_0 \in V$, $u_0 \neq 0$, tal que no es una solución estacionaria y que $u(\cdot) = S(\cdot)u_0$ no explota en tiempo finito, entonces $u(\cdot)$ debe estar definida $t \geq 0$ y $G(u(\cdot))$ es estrictamente decreciente; llamemos

$$\alpha = \inf_{t \geq 0} G(u(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} G(u(t))$$

Entonces si la órbita está acotada en V entonces el ω -límite de u_0 está formado por soluciones estacionarias, i.e. $\omega(u_0) \subset \text{Fix}$ y además $h \in \omega(u_0)$ si y sólo si

$$-\Delta \left(-\nu \Delta h + \delta f(h) \right) + \beta h = 0 \quad \text{y} \quad G(h) = \alpha \quad (3.30)$$

en particular si $\beta = 0$ entonces

$$-\nu \Delta h + \delta f(h) - \frac{\delta}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(h) dx = 0 \quad \text{y} \quad V(h) = \alpha \quad (3.31)$$

Demostración

Por (3.19), (3.22), (3.25) sabemos que existe $\alpha_0 \leq 0$ tal que toda función no nula en el "conjunto de energía" $\{G \leq \alpha_0\}$ explota en tiempo finito (o crece exponencialmente si $m_0 = 2$, en este caso si $\alpha < \alpha_0$ entonces $u(\cdot)$ crece exponencialmente para la norma de V^*). Como suponemos que la órbita está acotada en V entonces $\alpha \geq \alpha_0$ y sobre el ω -límite G es constantemente α ; si $\alpha = \alpha_0$ por (3.19), (3.22) o (3.25) la única posibilidad es $\omega = \{0\}$ ya que el ω -límite está acotado en V , pero entonces necesariamente $\alpha = \alpha_0 = 0$; por último si $\alpha > \alpha_0$ como G es estrictamente decreciente sobre las trayectorias entonces $\omega \subset \text{Fix}$ y e resto es obvio. \square

En el caso del Teorema 3.1

Proposición 3.4

En las hipótesis del Teorema 3.1

- i) Si $\beta \geq 0$ y $\frac{\nu}{L^2} + a_1$ es suficientemente grande o si $\beta \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{L^2} \left(\frac{\nu}{L^2} + a_1 \right) + \beta$ es suficientemente grande entonces (3.30), (3.31) poseen unicamente la solución trivial $u = 0$. Como consecuencia toda solución converge a cero en la norma de V_k para todo $k \in \mathbb{N}$.
- ii) Incluso si i) no se verifica el conjunto de soluciones estacionarias es acotado en V_k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración

De (3.9), (3.30) si u es una solución estacionaria entonces

$$\langle A(u), u \rangle + \beta \|u\|_V^2 = 0 \text{ y } \langle A(u), u \rangle = \nu |u|_V^2 + \int_{\Omega} \delta f(u) u$$

siendo $\delta f(s) = \sum_{k=1}^m a_k s^{k+1}$, pero por la desigualdad de Young y poniendo $C_1 = a_m - c \sum_{j=2}^{m-1} |a_j|$ y $C_2 = a_1 - \sum_{j=2}^{m-1} C(c, j) |a_j|$ se obtiene (obsérvese que se pueden excluir de las sumas los coeficientes a_j positivos con j impar)

$$\nu |u|_V^2 + C_1 |u|_{L^{m+1}}^{m+1} + C_2 |u|^2 + \beta \|u\|_V^2 \leq 0 \quad (3.32)$$

y así suponiendo que $C_1 > 0$

$$\left(\frac{\nu}{L^2} + C_2 \right) |u|^2 + C_1 L^{-(m-1)/2} |u|^{m+1} + \beta \|u\|_V^2 \leq 0 \quad (3.33)$$

y de nuevo suponiendo que el coeficiente de $|u|^2$ en (3.33) es positivo

$$\left[\frac{1}{L^2} \left(\frac{\nu}{L^2} + C_2 \right) + \beta \right] \|u\|_V^2 + C_1 L^{-(3m+1)/2} |u|^{m+1} \leq 0 \quad (3.34)$$

pero (3.33), (3.34) se pueden reescribir respectivamente como

$$p(|u|) + \beta \|u\|_V^2 \leq 0 \quad (3.35)$$

$$q(\|u\|_V) \leq 0 \quad (3.36)$$

con p y q de la forma $as^2 + bs^{m+1}$ con $b > 0$ si se toma c lo suficientemente pequeño para que $C_1 > 0$; en particular en (3.36) $q(s) = as^2 + bs^{m+1}$ con $a > 0$ y así $u \equiv 0$, mientras que si $a \leq 0$ entonces (3.34) no es válido pero por (3.35) y (3.32) se sigue que $|u|_V$ está acotado por una constante absoluta.

El resto se sigue imponiendo que $\frac{\nu}{L^2} + a_1 - \sum_{j=2}^{m-1} C(c, j) |a_j|$ y $\frac{1}{L^2} \left(\frac{\nu}{L^2} + a_1 - \sum_{j=2}^{m-1} C(c, j) |a_j| \right) + \beta$ sean positivos y usando el Teorema 3.1 y la Proposición 3.1. \square

Observaciones

i) La misma discusión de los Teoremas 3.1-3.3 y de las Proposiciones 3.2, 3.3 y 3.4 es válido para la ecuación de Reacción-Difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \delta f(u) = 0 \quad (3.37)$$

tomando formalmente $P = I$ en (3.8) y H en vez de V^* desde (3.9), hasta (3.30) y (3.33), ver también [9,18,38].

ii) Obsévese que con u_0 fijo en V , denotando por \mathfrak{J} el miembro derecho de (3.19), (3.22), (3.25), (3.27), y (3.29) entonces \mathfrak{J} es un polinomio de orden $d \leq m+1$ sobre cada rayo $\{\lambda u_0, \lambda \in \mathbb{R}\} = [u_0]$, por tanto sus raíces reales son, genéricamente con respecto a sus coeficientes, simples y si hay $p \leq d$ de ellas, entonces al menos en $(p+1)/2$ intervalos de la recta, $\mathfrak{J}(\lambda u_0)$ es positiva (o negativa) y por tanto las condiciones de explosión se verifican en esa parte del rayo.

IV) $\delta \neq 0 \neq \gamma$, Ecuación de Kuramoto-Velarde.

Ahora mostramos dos casos de la ecuación completa uno con existencia global y el otro mostrando crecimiento exponencial de soluciones de forma similar al caso III anterior.

Estos casos reflejan dos tipos distintos de balance entre los términos no lineales, en el primero de ellos y cuando el polinomio tiene grado dos el término con γ cancela la estructura explosiva del término con δ (Teorema 3.3, Proposición 3.2) permitiendo existencia global de soluciones, mientras que cuando el grado es impar el término disipativo con δ (Teorema 3.1, Corolario 2.1) origina el decaimiento a cero; en el segundo caso, donde el grado es dos de nuevo, el término con δ aún produce crecimiento exponencial y el sistema es de tipo gradiente:

Proposición 3.5

Si $\delta f(s) = \frac{-\gamma}{2} s^2 + \lambda s$, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces para cada dato inicial en V la solución está globalmente definida.

Más aún si $\gamma s + \delta f'(s) \geq \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq 0$ (y en este caso ponemos $a = \nu L^{-4} + \beta$) o tal que existe $\nu \geq \epsilon > 0$ tal que $a = (\nu - \epsilon)L^{-4} + \beta - \frac{\lambda^2}{4\epsilon}$ es positivo, entonces tenemos decaimiento exponencial, en H , de toda solución a cero (aunque puede explotar en norma V). En particular si el grado es tres toda solución converge a cero en V_k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración

Obsérvese que la condición $\gamma s + \delta f'(s) \geq \lambda$ sólo puede verificarse si $\delta f(s) = \frac{-\gamma}{2} s^2 + \lambda s$ o si δf es de grado impar y coeficiente principal positivo. Así (2.13) como $\gamma s + \delta f'(s) \geq \lambda$ entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2 u|^2 + \beta |u|^2 + \lambda |Du|^2 \leq 0$$

ahora $|Du|^2 \leq |u| |D^2 u|$ y $|u|^2 \leq L^4 |D^2 u|^2$; si $\lambda \geq 0$ el resultado es claro, si $\lambda < 0$ entonces para cada $\nu \geq \epsilon > 0$

$$|\lambda| |Du|^2 \leq |\lambda| |u| |D^2 u| \leq \epsilon |D^2 u|^2 + \frac{\lambda^2}{4\epsilon} |u|^2$$

y entonces $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \left((\nu - \epsilon)L^{-4} + \beta - \frac{\lambda^2}{4\epsilon} \right) |u|^2 \leq 0$ y concluimos ya que el Teorema 2.1, el Corolario 2.1 y la Proposición 3.1 nos da la existencia global y el decaimiento a cero en la norma de V_k cuando $a > 0$. \square

Proposición 3.6

Supongamos que $\delta f(s) = \gamma s^2 + \lambda s$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$G(u) = \frac{\nu}{2} |D^2 u|^2 + \frac{\beta}{2} |u|^2 + \gamma \int_{\Omega} u (Du)^2 + \frac{\lambda}{2} |Du|^2 \quad (3.38)$$

es decreciente sobre las trayectorias.

Si $\lambda \geq 0$, y en este caso ponemos $a = \nu L^{-4} + \beta + \lambda L^{-2}$, o si $\lambda < 0$ y existe $\epsilon > 0$ tal que $a = (\nu - \epsilon)L^{-4} + \beta - \frac{\lambda^2}{4\epsilon}$ es positivo, entonces si $u_0 \in V$ verifica

$$a|u_0|^2 - 6G(u_0) > 0 \quad (3.39)$$

entonces la solución crece exponencialmente. Más aún definiendo $R_4 = R_4(u_0)$ por

$$aR_4^2 = 6[G(u_0)]_+ \quad (3.40)$$

entonces si la solución sale de la bola en H de centro cero y radio R_4 entonces crece exponencialmente. Además denotando $\tilde{\gamma}(u) = a|u|^2 - 6G(u)$ entonces con u_0 en V fijo, $\tilde{\gamma}$ es un polinomio de grado tres sobre cada rayo $[u_0]$, con coeficiente principal -6γ y por tanto para cada u_0 la condición (3.39) se verifica en alguna parte del rayo.

Demostración

Multiplicando K-V por $\frac{\partial}{\partial t}u = u_t$ e integrando en Ω obtenemos

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}u \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\nu |D^2u|^2 + \beta |u|^2 \right) + \int_{\Omega} \left(\gamma (Du)^2 u_t - \delta \Delta f(u) u_t \right) = 0 \quad (3.41)$$

pero

$$-\delta \int_{\Omega} \Delta f(u) u_t = \delta \int_{\Omega} f'(u) Du Du_t = \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} f'(u) \frac{\partial}{\partial t} (Du)^2$$

y por hipótesis $\frac{\delta}{2} f'(s) = \gamma s + \frac{\lambda}{2}$, por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\gamma (Du)^2 u_t - \delta \Delta f(u) u_t \right) &= \int_{\Omega} \gamma (Du)^2 u_t + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} f'(u) \frac{\partial}{\partial t} (Du)^2 = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\gamma \int_{\Omega} u (Du)^2 + \frac{\lambda}{2} |Du|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

y entonces (3.41) es

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}u \right|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu}{2} |D^2u|^2 + \frac{\beta}{2} |u|^2 + \gamma \int_{\Omega} u (Du)^2 + \frac{\lambda}{2} |Du|^2 \right) = 0 \quad (3.43)$$

y por tanto $G(u) = \frac{\nu}{2} |D^2u|^2 + \frac{\beta}{2} |u|^2 + \gamma \int_{\Omega} u (Du)^2 + \frac{\lambda}{2} |Du|^2$ es decreciente sobre las trayectorias.

Por otra parte $\gamma s + \delta f'(s) = 3\gamma s + \lambda$ y así por (2.13)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2u|^2 + \beta |u|^2 + 3\gamma \int_{\Omega} u (Du)^2 + \lambda |Du|^2 = 0 \quad (3.44)$$

y entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + 3G(u) - \frac{\nu}{2} |D^2 u|^2 - \frac{\beta}{2} |u|^2 - \frac{\lambda}{2} |Du|^2 = 0$$

así

$$\frac{d}{dt} |u|^2 \geq \nu |D^2 u|^2 + \beta |u|^2 + \lambda |Du|^2 - 6G(u_0) \quad (3.45)$$

si $\lambda < 0$ interpolando como en la Proposición 3.5 obtenemos

$$\frac{d}{dt} |u|^2 \geq \left((\nu - \epsilon) L^{-4} + \beta - \frac{\lambda^2}{4\epsilon} \right) |u|^2 - 6G(u_0) \quad (3.46)$$

mientras que si $\lambda \geq 0$

$$\frac{d}{dt} |u|^2 \geq \left(\nu L^{-4} + \beta + \lambda L^{-2} \right) |u|^2 - 6G(u_0) \quad (3.47)$$

el resto se sigue de forma similar al caso III anterior. \square

Observación

i) Obsérvese que (3.40) se verifica si $G(u_0) \leq 0$ y u_0 no es cero.

ii) Si una solución no crece exponencialmente según (3.39) entonces está acotada en V_k para todo $k \in \mathbb{N}$ (Corolario 2.1) y más aún con R_4 definido en (3.40) entonces $R(t) = R_4(u(t))$ es decreciente y $|u(t)| \leq R(t)$.

2.4 Comportamiento Finito Dimensional. Estimación de la Dimensión Fractal de Conjuntos Invariantes.

Para probar el comportamiento finito dimensional de la dinámica asintótica de la ecuación K-V, expresado en la finitud de las dimensiones de Hausdorff y Fractal de cualquier ω -límite, e incluso de cualquier acotado estrictamente invariante, necesitamos previamente verificar algunas propiedades técnicas del semigrupo, principalmente la Diferenciabilidad Uniforme, [15,18]; esta propiedad se ha verificado para K-V así como para otras muchas ecuaciones semilineales en [28]. En el Capítulo I, Sección I.2 introdujimos la notación y los resultados que usaremos más abajo ([15,18] para definiciones y más detalles):

Sea $K \subset V$, K es un conjunto Invariante si y sólo si $S(t)$ está definido sobre K para todo $t \geq 0$ y $S(t)K = K$.

Para encontrar cotas de las dimensiones Hausdorff y Fractal de K , como subconjuntos de H , debemos encontrar cotas de los números (uniformes):

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_N(t) &\leq \sup_{u_0 \in K} \exp \left(- \int_0^t \inf_P \operatorname{tr} (A_u(s) o P) ds \right) \\ &\leq \exp \left(- \inf_{u_0 \in K} \int_0^t \inf_P \operatorname{tr} (A_u(s) o P) ds \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $N \in \mathbb{N}$, P es cualquier proyección ortogonal en H con rango N -dimensional en V_2 , $\operatorname{tr}(\cdot)$ es el operador traza, u es la solución de la ecuación comenzando en $u_0 \in K$ ($u(t) = S(t)u_0$) y A_u representa el operador de la ecuación, linealizado a lo largo de la solución $u(\cdot)$, así en nuestro caso con las notaciones de (1.7)

$$A_u(s)(\cdot) = A(\cdot) + DF(u(s))(\cdot) = A(\cdot) + L(\cdot) + \sum_{j=2}^m Db_j(u(s))(\cdot)$$

así para K-V:

$$A_u(s)(v) = \nu D^4 v + \beta v + 2 \left(\gamma Du(s) \cdot Dv - \frac{\gamma}{L} \int_{\Omega} Du(s) \cdot Dv dx \right) - \delta D^2 (f'(u(s)) \cdot v) \quad (4.2)$$

El resultado principal de esta técnica, [15,18], afirma que si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\omega}_H(t)^{1/t} < 1 \quad (4.3)$$

entonces las dimensiones Hausdorff y Fractal de K (como subconjunto de H) son finitas con $d_H(K) \leq N$ y $d_F(K) \leq C \cdot (N+1) < +\infty$ para alguna constante C ; así necesitamos acotar inferiormente

$$\inf_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \inf_P \text{tr}(A_{u_0}(s) \circ P) ds$$

por un número positivo (para t grande).

Sea $h(u) = \frac{\delta}{2} f'(u) + \gamma u$, y definamos para cualquier conjunto invariante K las cantidades

$$\begin{aligned} B_0(t, K) &= \sup_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4}, & B_1(t, K) &= \sup_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t |f'(u)|_{L^\infty}^{5/2} \\ B_2(t, K) &= \sup_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t |f'(u)|_{L^\infty}^2, & B_3(t, K) &= \sup_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t |\Delta h(u)|_{L^{5/4}}^{5/4} \\ B_4(t, K) &= \sup_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t |u|_{L^\infty}^2, & B_5(t, K) &= \sup_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t |h(u)|_{L^\infty}^2 \end{aligned}$$

y $B_i(K) = \limsup_{t \rightarrow \infty} B_i(t, K)$, $i = 0, \dots, 5$ (4.4)

Así tenemos

Teorema 4.1

Sea $K \subset V$ un conjunto invariante acotado, entonces para cada $N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\omega}_N(t)^{1/t} \leq \exp(-\bar{q}_N) \quad (4.5)$$

donde de forma alternativa se puede tomar

$$\bar{q}_N = \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + \beta N - C_1 B_0(K) - C_3 B_1(K) \quad (4.6)$$

$$\bar{q}_N = \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + (\beta - \delta^2 \nu^{-1} B_2(K)) N - C_4 B_3(K) \quad (4.7)$$

$$\bar{q}_N = \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + \left(\beta - 4\delta^2 \nu^{-1} B_4(K) \right) N - C_5 B_5(K) \quad (4.8)$$

siendo C_i constantes positivas.

Escribiendo en cada caso $\bar{q}_N = aN^5 - bN - c$, entonces si b es positivo y $N_0 \in \mathbb{N}$ está definido por

$$N_0 - 1 < \left(4(c/a + D(b/a)^{5/4}) \right)^{1/5} \leq N_0 \quad (4.9)$$

siendo $D = (4/5)^{5/4} 2^{-1/4}$, o si $b \leq 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ está definido por

$$N_0 - 1 < (2c/a)^{1/5} \leq N_0 \quad (4.10)$$

entonces la dimensión de Hausdorff de K es menor que N_0 y su dimensión Fractal es menor que $2N_0$ (ambas como subconjunto de H).

i. e.

$$d_H(K) \leq N_0 \quad \text{y} \quad d_F(K) \leq 2N_0 \quad (4.11)$$

Demostración

Tomando u_0 en V , si P es cualquier proyección ortogonal en H con rango N dimensional en V_2 , sea $\{ \phi_1 \dots \phi_N \}$ una base ortonormal (en H) de $R(P) \subset V_2$, entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &= \nu \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 + \beta N + \\ &+ 2\gamma \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} Du \cdot D\phi_i \cdot \phi_i + \delta \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D(f'(u)\phi_i) D\phi_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

teniendo en cuenta que

$$\int_{\Omega} Du \cdot D\phi_i \cdot \phi_i = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} D^2 u \cdot |\phi_i|^2 = -\int_{\Omega} u \cdot \phi_i \cdot D^2 \phi_i - \int_{\Omega} u \cdot |D\phi_i|^2$$

y que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D(f'(u)\phi_i) D\phi_i &= \\ &= \int_{\Omega} f'(u) \cdot |D\phi_i|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} D^2(f'(u)) \cdot \phi_i^2 = -\int_{\Omega} f'(u) \cdot \phi_i \cdot D^2 \phi_i \end{aligned}$$

obtenemos las tres siguientes expresiones alternativas: definiendo

en casi todo punto de Ω $\rho(x) = \sum_{i=1}^N |\phi_i(x)|^2$, y $h(s) = \frac{\delta}{2} f'(s) + \gamma s$

entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &= \nu \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 + \beta N + \\ &- \left[\gamma \int_{\Omega} D^2 u \cdot \rho + \delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i D^2 \phi_i \right) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &= \nu \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 + \beta N + \\ &- \int_{\Omega} D^2 h(u) \cdot \rho + \delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^N |D \phi_i|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &= \nu \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 + \beta N + \\ &- 2 \int_{\Omega} h(u) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i D^2 \phi_i \right) - 2\gamma \int_{\Omega} u \left(\sum_{i=1}^N |D \phi_i|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Usando la desigualdad de Lieb-Thirring [16,17,18]: existe una constante $C_0 > 0$ (que depende sólo de la forma de Ω) tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, y $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ funciones regulares ortonormales en $L^2(\Omega)$, L -periódicas y de media cero

$$\sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 \geq C_0 \int_{\Omega} \rho^5 \quad (4.16)$$

y $\int_{\Omega} \rho^5 \geq N^5 \cdot L^{-4}$ gracias a la desigualdad de Hölder y a que $\int_{\Omega} \rho = N$.

Si elegimos (4.13), entonces

$$\left| \gamma \int_{\Omega} D^2 u \cdot \rho \right| \leq \gamma |\Delta u|_{L^{5/4}} |\rho|_{L^5} \leq C_0^{-1/5} \gamma |\Delta u|_{L^{5/4}} \left(\sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 \right)^{1/5}$$

y por la desigualdad de Young: para todo $\epsilon > 0$ a, b ≥ 0 tenemos que $ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q$ con $1/p + 1/q = 1$, $C(\epsilon) = \frac{1}{q(\epsilon p)^{q/p}}$ y tomando entonces $\epsilon = \frac{\nu}{4}$, $p = 5$, $q = 5/4$ obtenemos

$$\left| \gamma \int_{\Omega} D^2 u \cdot \rho \right| \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 + C_1 |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4} \quad (4.17)$$

con $C_1 = C_1(\nu, \gamma)$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
|\delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i D^2 \phi_i \right)| &\leq \delta \int_{\Omega} |f'(u)| \cdot \rho^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \delta L^{1/s} |f'(u)|_{L^r} |\rho|_{L^s}^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

gracias a la desigualdad de Hölder, siendo r, s positivos tales que $1/r + 1/s = 2/5$. De nuevo la desigualdad de Lieb-Thirring nos da

$$|\delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i D^2 \phi_i \right)| \leq C_0^{-1/10} \delta L^{1/s} |f'(u)|_{L^r} \left(\sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 \right)^{3/5}$$

ahora, por la desigualdad de Young con $\epsilon = \frac{\nu}{4}$, $p = 5/3$, $q = 5/2$ obtenemos

$$|\delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i D^2 \phi_i \right)| \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 + C_2 |f'(u)|_{L^r}^{5/2} \quad (4.18)$$

con $C_2 = C_2(\nu, \delta, s, L)$; como $|w|_{L^r} \leq L^{1/r} |w|_{L^\infty}$ obtenemos con $C_3 = C_3(\nu, \delta) L$

$$|\delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i D^2 \phi_i \right)| \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 + C_3 |f'(u)|_{L^\infty}^{5/2} \quad (4.19)$$

finalmente introduciendo (4.17), (4.19) en (4.13):

$$\begin{aligned}
\text{tr}(A_u(s) \circ P) &\geq \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 + \beta N - C_1 |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4} - C_3 |f'(u)|_{L^\infty}^{5/2} \geq \\
&\geq \frac{\nu}{2} C_0^5 \cdot L^{-4} + \beta N - C_1 |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4} - C_3 |f'(u)|_{L^\infty}^{5/2} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Si elegimos (4.14) entonces como en (4.17)

$$\left| \int_{\Omega} D^2 h(u) \cdot \rho \right| \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^N |D^2 \phi_i|^2 + C_4 |\Delta h(u)|_{L^{5/4}}^{5/4} \quad (4.21)$$

con $C_4 = C_4(\nu)$. Por otro lado

$$|\delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^N |D\phi_i|^2 \right)| \leq \delta |f'(u)|_{L^\infty} \cdot \left(\sum_{i=1}^N |D\phi_i|_{L^2}^2 \right)$$

consecuentemente con $\epsilon = \frac{\nu}{4}$, $p = 2 = q$ en la desigualdad de Young y usando $|D\phi_i|_{L^2}^2 \leq |\phi_i|_{L^2} \cdot |D^2 \phi_i|_{L^2}$ obtenemos

$$\delta|f'(u)|_{L^\infty} \left(\sum_{i=1}^N |D\phi_i|_{L^2}^2 \right) \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^N |D^2\phi_i|_{L^2}^2 + (\delta|f'(u)|_{L^\infty})^2 \nu^{-1} N \quad (4.22)$$

así introduciendo (4.21), (4.22) en (4.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &\geq \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^N |D^2\phi_i|_{L^2}^2 + \left(\beta - (\delta|f'(u)|_{L^\infty})^2 \nu^{-1} \right) N - C_4 |\Delta h(u)|_{L^{5/4}}^{5/4} \geq \\ &\geq \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + \left(\beta - (\delta|f'(u)|_{L^\infty})^2 \nu^{-1} \right) N - C_4 |\Delta h(u)|_{L^{5/4}}^{5/4} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si elegimos (4.15), entonces como en (4.19)

$$|2 \int_{\Omega} h(u) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i D^2\phi_i \right)| \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^N |D^2\phi_i|_{L^2}^2 + C_5 |h(u)|_{L^\infty}^{5/2} \quad (4.24)$$

ahora con $C_5 = C_5(\nu)L$. Por otro lado como en (4.22)

$$2\gamma|u|_{L^\infty} \left(\sum_{i=1}^N |D\phi_i|_{L^2}^2 \right) \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^N |D^2\phi_i|_{L^2}^2 + (2\gamma|u|_{L^\infty})^2 \nu^{-1} N \quad (4.25)$$

así en (4.15)

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &\geq \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^N |D^2\phi_i|_{L^2}^2 + \left(\beta - (2\gamma|u|_{L^\infty})^2 \nu^{-1} \right) N - C_5 |h(u)|_{L^\infty}^{5/2} \geq \\ &\geq \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + \left(\beta - (2\gamma|u|_{L^\infty})^2 \nu^{-1} \right) N - C_5 |h(u)|_{L^\infty}^{5/2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Así en cualquiera de los casos (4.20), (4.23), (4.26) necesitamos estimar el promedio en el tiempo de $|\Delta u|_{L^{5/4}}$, $|u|_{L^\infty}$, $|f'(u)|_{L^\infty}$, $|\Delta h(u)|_{L^{5/4}}$, $|h(u)|_{L^\infty}$ (con $h(u) = \frac{\delta}{2} f'(u) + \gamma u$) a lo largo de cualquier trayectoria contenida en el conjunto invariante K , por tanto con $B_0(t, K) - B_5(t, K)$ y $B_1(K) = \limsup_{t \rightarrow \infty} B_1(t, K)$ como en (4.4), obtenemos de (4.20), (4.23), (4.26):

$$\begin{aligned} \inf_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \inf_P \text{tr}(A_u(s) \circ P) ds &\geq \\ &\geq \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + \beta N - C_1 B_0(t, K) - C_3 B_1(t, K) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \inf_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \inf_P \operatorname{tr} (A_U(s) \circ P) ds &\geq \\ &\geq \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + (\beta - \delta^2 \nu^{-1} B_2(t, K)) N - C_4 B_3(t, K) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \inf_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \inf_P \operatorname{tr} (A_U(s) \circ P) ds &\geq \\ &\geq \frac{\nu}{2} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + (\beta - 4\delta^2 \nu^{-1} B_4(t, K)) N - C_5 B_5(t, K) \end{aligned} \quad (4.29)$$

así obtenemos por (4.1) una cota de la forma $\bar{\omega}_N(t)^{1/t} \leq \exp(-q_N(t))$ siendo $q_N(t)$ el lado derecho de (4.27)-(4.29); pero denotando $\bar{q}_N = \limsup_{t \rightarrow \infty} q_N(t)$ obtenemos para cada $N \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\omega}_N(t)^{1/t} \leq \exp(-\bar{q}_N) \quad (4.30)$$

con \bar{q}_N definido como en (4.6)-(4.8).

Para concluir necesitamos estimar el menor valor de N para el que \bar{q}_N es positivo en (4.6)-(4.8). Escribiendo $\bar{q}_N = aN^5 - bN - c$, si $b > 0$, aplicando la desigualdad de Young obtenemos

$$\bar{q}_N \geq a/2 \cdot N^5 - (c + Db^{5/4} a^{-1/4})$$

siendo $D = (4/5)^{5/4} 2^{-1/4}$. Ahora usamos un resultado de [18] (Lema 2.2 Cap. VI) para concluir que si $N_0 \in \mathbb{N}$ está definido por (4.9):

$$N_0 - 1 < \left(4(c/a + D(b/a)^{5/4}) \right)^{1/5} \leq N_0$$

entonces la dimensión de Hausdorff de K es menor que N_0 y su dimensión Fractal es menor que $2N_0$, i.e. (4.11) se verifica:

$$d_H(K) \leq N_0 \quad \text{and} \quad d_F(K) \leq 2N_0$$

Si $b \leq 0$ concluimos (4.11) con $N_0 \in \mathbb{N}$ definido por (4.10), de nuevo gracias al resultado de [18]. \square

Así tenemos una dependencia explícita de estas dimensiones en términos de los parámetros y datos, i.e. $\nu, \beta, \delta, \gamma, L$, y K , etc.

Podemos incluso estimar la dimensión de conjuntos invariantes como subconjuntos de V (gracias a los resultados del Capítulo I y [28] tenemos también la diferenciabilidad uniforme en la norma de V); ahora tenemos que estimar, como en (4.1)

$$\bar{\omega}_N(t) \leq \sup_{u_0 \in K} \exp \left(- \int_0^t \inf_P \operatorname{tr} (A_u(s) \circ P) ds \right)$$

siendo ahora P una proyección ortogonal en V con rango N dimensional en D(A); así necesitamos acotar inferiormente

$$\inf_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \inf_P \operatorname{tr} (A_u(s) \circ P) ds$$

por un número positivo (para t grande).

Teorema 4.2

Con las notaciones de (4.4), definimos además

$$B_\delta(t, K) = \sup_{u_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t |D(f'(u))|_{L^2}^2 \quad (4.31)$$

y

$$B_\delta(K) = \limsup_{t \rightarrow \infty} B_\delta(t, K) \quad (4.32)$$

y obtenemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\omega}_N(t)^{1/t} \leq \exp(-\bar{q}_N) \quad (4.33)$$

siendo

$$\bar{q}_N = \frac{\nu}{4} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + (\beta - \delta^2 \nu^{-1} B_\delta(K)) N - C_1 B_0(K) - C_3 B_1(K) \quad (4.34)$$

(comparar con (4.6)).

Escribiendo $\bar{q}_N = aN^5 - bN - c$, entonces si b es positivo y $N_0 \in \mathbb{N}$ está definido por

$$N_0 - 1 < \left(4(c/a + D(b/a)^{5/4}) \right)^{1/5} \leq N_0 \quad (4.35)$$

siendo $D = (4/5)^{5/4} 2^{-1/4}$, o si $b \leq 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ está definido por

$$N_0 - 1 < (2c/a)^{1/5} \leq N_0 \quad (4.36)$$

entonces la dimensión de Hausdorff de K es menor que N_0 y su dimensión Fractal es menor que $2N_0$ (ambas como subconjuntos de V), i. e.

$$d_H(K) \leq N_0 \text{ y } d_F(K) \leq 2N_0 \quad (4.37)$$

Demostración

Tomando u_0 en V , y P una proyección ortogonal en V con rango N dimensional en $D(A)$, sea $\{\psi_1 \dots \psi_M\}$ una base ortonormal en V de $R(P) \subset D(A)$, y llamemos $\phi_i = D\psi_i$ entonces $\{\phi_1 \dots \phi_M\}$ es ortonormal en H y como

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &= \sum_{i=1}^M \langle A \circ P \psi_i, \psi_i \rangle_V + \sum_{i=1}^M \langle L \circ P \psi_i, \psi_i \rangle_V + \\ &+ \sum_{j=2}^M \sum_{i=1}^M \langle D b_j(u(s)) \circ P \psi_i, \psi_i \rangle_V \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_u(s) \circ P) &= \nu \sum_{i=1}^M |D^2 \phi_i|^2 + \beta N + \\ &+ 2\gamma \sum_{i=1}^M \int_{\Omega} D(Du \cdot \phi_i) \cdot \phi_i - \delta \sum_{i=1}^M \int_{\Omega} D^2(f'(u)\psi_i) D\phi_i \end{aligned} \quad (4.38)$$

(comparar con (4.12)) y definiendo en casi todo punto de Ω

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^M |\phi_i(x)|^2 \text{ y } \bar{\rho}(x) = \sum_{i=1}^M |\psi_i(x)|^2 \text{ obtenemos}$$

$$2\gamma \sum_{i=1}^M \int_{\Omega} D(Du \cdot \phi_i) \cdot \phi_i = \gamma \int_{\Omega} D^2 u \cdot \rho \quad (4.39)$$

y

$$\delta \sum_{i=1}^M \int_{\Omega} D^2(f'(u)\psi_i) D\phi_i = -\delta \left[\int_{\Omega} f'(u) \sum_{i=1}^M \phi_i D^2 \phi_i - \int_{\Omega} D(f'(u)) \sum_{i=1}^M \psi_i D^2 \phi_i \right] \quad (4.40)$$

Como en (4.17)

$$|\gamma \int_{\Omega} D^2 u \cdot \rho| \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^M |D^2 \phi_i|^2 + C_1 |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4}$$

con $C_1 = C_1(\nu, \gamma)$. De (4.18), (4.19)

$$|\delta \int_{\Omega} f'(u) \left(\sum_{i=1}^M \phi_i D^2 \phi_i \right)| \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^M |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 + C_3 |f'(u)|_{L^{\infty}}^{5/2}$$

con $C_3 = C_3(\nu, \delta)L$; finalmente en (4.40)

$$\begin{aligned} |\delta \int_{\Omega} D(f'(u)) \left(\sum_{i=1}^M \psi_i D^2 \phi_i \right)| &\leq \delta \int_{\Omega} |D(f'(u))| \cdot (\bar{\rho})^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^M |D^2 \phi_i|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \delta (L \cdot N)^{1/2} |D(f'(u))| \left(\sum_{i=1}^M |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^M |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 + \frac{\delta^2}{\nu} LN |D(f'(u))|^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde hemos usado la siguiente cota sobre $\bar{\rho}$:

$$|\bar{\rho}|_{L^{\infty}} \leq \sum_{i=1}^M |\psi_i|_{L^{\infty}}^2 \leq L \sum_{i=1}^M |\phi_i|_{L^2}^2 = L \cdot N$$

así por (4.38)-(4.41) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{tr} (A_U(s) \circ P) &\geq \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^M |D^2 \phi_i|_{L^2}^2 + (\beta - \frac{\delta^2}{\nu}) L |D(f'(u))|^2 N \\ &\quad - C_1 |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4} - C_3 |f'(u)|_{L^{\infty}}^{5/2} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \text{tr} (A_U(s) \circ P) &\geq \frac{\nu}{4} C_0 N^5 \cdot L^{-4} + (\beta - \frac{\delta^2}{\nu}) L |D(f'(u))|^2 N \\ &\quad - C_1 |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4} - C_3 |f'(u)|_{L^{\infty}}^{5/2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ahora con las notaciones de (4.4) y con $B_6(t, K)$, $B_6(K)$ como en (4.31), (4.32), y como en el Teorema 4.1 obtenemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{\omega}_N(t)^{1/t} \leq \exp(-\bar{q}_N)$$

con \bar{q}_N definido en (4.34). El resto es como en el Teorema 4.1. \square

Observaciones

i) Obsérvese que por el Teorema 2.3 y la Proposición 3.1 punto iii), $B_0(K), \dots, B_6(K)$ son finitos e incluso las estimaciones del Teorema 3.2 (2.32), (2.41), pueden darnos cotas superiores de los números B 's. Observemos también que de una cota para B_1 se obtiene fácilmente por la desigualdad de Hölder una cota sobre B_2 , y que B_4 y B_5 son del mismo orden que B_2 .

ii) En particular si $\partial(f) = 2$ entonces sólo dos estimaciones son necesarias, a saber B_0, B_1 ; además si $h(s) = \frac{\delta}{2} f'(s) + \gamma s$ es

constante, i.e. $\delta f(s) = -\gamma s^2 + \lambda s$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la estimación (4.7) se hace lo más simple posible ya que $B_3 = 0$.

En general si $\partial(f) = 2$ como supondremos que el conjunto invariante K está acotado en V y como $|u|_{L^\infty} \leq L|u|_V$ entonces este término está uniformemente acotado en el tiempo sobre K y por tanto obtenemos una cota sobre B_1 y B_6 ; así si $\partial(f) = 2$ sólo tenemos que estimar $\frac{1}{t} \int_0^t |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4}$, pero

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\Delta u|_{L^{5/4}}^{5/4} \leq L^{3/8} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t |\Delta u|_{L^2}^{5/4} \leq L^{3/8} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |\Delta u|_{L^2}^2 \right)^{5/8}$$

y ahora por (2.13), (2.14)

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \nu |D^2 u|^2 + 2(\beta - C_6) |u|^2 \leq C_7 \cdot (|u|^2)^{7/3}$$

con $C_6 = C_6(\nu, \delta, \gamma)$, $C_7 = C_7(\nu, \delta, \gamma)$, así integrando

$$|u(t)|^2 + \nu \int_0^t |D^2 u|^2 + 2(\beta - C_6) \int_0^t |u|^2 \leq |u_0|^2 + C_7 \int_0^t |u|^{14/3}$$

entonces si denotamos $(a)_+$ la parte positiva de a (i.e. a si es no negativo, cero en caso contrario), tenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t |D^2 u|^2 \leq \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{t} |u_0|^2 + 2(C_6 - \beta)_+ \cdot \frac{1}{t} \int_0^t |u|^2 + C_7 \cdot \frac{1}{t} \int_0^t |u|^{14/3} \right) \quad (4.43)$$

como suponemos que $K \subset V$ es acotado e invariante definimos

$$|K|_0 = \sup\{|v|_{L^2}, v \in K\} \quad |K|_1 = \sup\{|v|_V, v \in K\}$$

y

$$|K|_\infty = \sup\{|v|_{L^\infty}, v \in K\} \leq L|K|_1 \quad (4.44)$$

y así en la desigualdad anterior (4.43), se obtiene para todo u_0 en K y $t > 0$:

$$\frac{1}{t} \int_0^t |D^2 u|^2 \leq \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{t} |K|_0^2 + 2\left(\frac{1}{\nu} - \beta\right)_+ \cdot |K|_0^2 + C_6 \cdot |K|_0^{14/3} \right) \quad (4.45)$$

consecuentemente (4.6)-(4.8), (4.34) y N_0 en (4.9), (4.10), (4.35) y (4.36) se puede estimar sólo en términos de $|K|_0$, $|K|_1$, $|K|_\infty$.

iii) Si K es un conjunto invariante y acotado en V , i.e. $S(t)K = K$ $t \geq 0$, entonces truncando como en [29], en un entorno de K obtenemos un sistema dinámico truncado (S_T) que posee una variedad cerrada, invariante, finito dimensional y exponencialmente atractiva \mathfrak{M}_T (ya que $\lambda_N \propto N^4$ $N \gg 1$); entonces $K \subset \mathfrak{M}_T$ y así K es finito dimensional.

BIBLIOGRAFIA

1. J.M.Hyman, B.Nicolaenko "Coherence and Chaos in the Kuramoto-Velarde equation" en *Directions in Partial Differential Equations* (M. Crandall editor). Academic Press, New York (1987).
2. P.L.García-Ybarra, J.L.Castillo, M.G.Velarde, *Phys. Lett.A* 122, 107-110 (1987).
3. P.L.García-Ybarra, J.L.Castillo, M.G.Velarde, *Phys. Fluids* 30, 2655-2661 (1987) y J.L.Castillo, P.L.García-Ybarra, M.G.Velarde, en *Proceedings 1986 Varena Summer School* (G.Caglioti y L.A.Lugiato, editores) North Holland, Amsterdam.
4. C.M.Elliot "The Cahn-Hilliard model for the kinetics of phase separation", en *Mathematical Models for Phase Change Problems* (J.F.Rodrigues editor), International Series of Numerical Mathematics vol.88, Birkhauser Verlag (1989).
5. B.Nicolaenko, en *Physicochemical Hydrodynamics: Interfacial Phenomena* (M.G.Velarde editor), Plenum Press, New York (1988).
6. I.G.Kevrekidis, B.Nicolaenko, J.C.Scovel "Back in the saddle again: A computer assisted study of the Kuramoto-Sivashinsky Equation", *SIAM Journal of Applied Mathematics* (1989).
7. D.Henry "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", *Lecture Notes In Mathematics* 840, Springer Verlag (1982).
8. A.Adams "Sobolev Spaces", Academic Press, New York (1979)
9. V.K.Kalantarov, O.A.Ladyzenskaya "On the Occurrence of Collapse for Quasilinear Equations of Parabolic and Hyperbolic type", *Zap. Nau. Sem. Len. of Math. Inst. V. A. Steklova, AN SSSR*, 69, (1977) (en ruso); publicado en inglés por Plenum Publishing Corporation, (1978).
10. B.Nicolaenko, B.Scheurer, R.Temam "Some Global Dynamical Properties of the Kuramoto-Sivashinsky Equation: Nonlinear Stability and Attractors", *Physica* 16D, 155-183 (1985).

11. B.Nicolaenko, B.Scheurer, R.Temam "Attractors for the Kuramoto-Sivashinsky Equation", AMS-SIAM Lectures in Applied Mathematics vol.23, 149-170 (1986).
12. B.Nicolaenko, B.Scheurer, R.Temam "Dynamical Properties of a Class of Pattern Formation Equations", Communications in PDE's, 14, #2, 245-297 (1989).
13. C.Foias, B.Nicolaenko, G.Sell, R.Temam "Inertial Manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky Equation and an estimate of its lower Dimension", J. Math Pures Appl., 67, #3, 197-226 (1988).
14. A.V.Babin, M.I.Vishik "Attracteurs Maximaux dans les Equations aux Derivées Partielles", Collège de France Seminars vol V, Pitman, London.
15. P.Constantin, C.Foias, R.Temam "Attractors Representing Turbulent Flows", Memorias de la AMS vol 53, #314 (1985).
16. E.Lieb, W.Thirring, en *Studies in Mathematical Physics: Essays in honor of V. Bergman*, Princeton University Press, 269-303 (1976).
17. J.M.Ghidaglia, M.Marion, R.Temam "Generalization of the Sobolev-Lieb-Thirring Inequalities and Applications to the Dimension of Attractors", Diff. and Integral Eq. vol 1, #1, 1-21 (1988).
18. R.Temam "Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics", Applied Mathematical Sciences, vol.68. Springer (1988).
19. R.Temam "Navier Stokes equation and Nonlinear Functional Analysis", CBMS-NSF Regional Conferences, SIAM Philadelphia (1983).
20. C.Bardos, L.Tartar "Sur l'Unicité Retrograde des Equations Paraboliques et quelques questions voisines", Arch. Rat. Mech. Ann. 50, 10-15 (1973).
21. J.M.Ghidaglia "Some backward Uniqueness results", Nonlinear Analysis T.M.A., vol 10, #8, 777-790 (1986).

22. A.Pazy "Semigroups of Linear Operators and Applications to PDE's", *Applied Mathematical Sciences*, vol.44. Springer (1983).
23. J.K.Hale "Asymptotic behavior and dynamics in infinite dimension", en *Nonlinear Differential Equations* (J.K.Hale y P.Martinez Amores editores), Pitman.
24. A.V.Babin, M.I.Vishik "Regular attractors of semigroups and evolution equations", *J.Math Pures Appl.*, #62, 441-491 (1983).
25. H.Brezis "Analyse Fonctionnel et Applications", Masson.
26. A.Rodríguez Bernal "Remarks on the Kuramoto Velarde equation", *Proceedings de la Conference on Synergetics, Order and Chaos* (M.G.Velarde editor), 655-670, World Scientific (1988).
27. A.Rodríguez Bernal, Tesis Doctoral, Capítulo I, Sección I.1 y "Existence uniqueness and regularity of solutions of nonlinear evolution equations in extended scales of Hilbert spaces" artículo en preparación.
28. A.Rodríguez Bernal, Tesis Doctoral, Capítulo I, Sección I.2 y "Uniform differentiability of nonlinear semigroups" artículo en preparación.
29. A.Rodríguez Bernal, Tesis Doctoral, Capítulo III e "Inertial Manifolds for dissipative semiflows in Banach spaces" aparecerá en *Applicable Analysis* (1990).
30. A. Friedman "Partial Differential Equations", Holt Rinehart Winston (1969).
31. K. Yosida "Functional Analysis", Springer.
32. J.L.Lions, E.Magenes "Problèmes aux limites non homogènes et applications", vols. I,II, Dunod (1968).
33. S.Agmon, A.Douglis, L.Nirenberg "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions" I,II, *Comm. on Pure and Applied Maths*, vol XII, 623-727 (1959) y vol.XVII, 35-92 (1964).

34. M.Miklavčič "Stability for parabolic semilinear equations with non invertible linear operator", Pacific Journal of Maths vol.118, #1, 199-214 (1989).
35. S.Klainerman "Global existence for non linear wave equation", Comm. on pure and applied maths, vol. 33, 43-101 (1980).
36. J.K.Hale "Asymptotic behavior of dissipative systems", Math. Surveys and Monographs #25, AMS (1988).
37. J.L.Lions "Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires", Dunod (1969).
38. M.Marion "Attractors of Reaction Difussion equations: Existence and and estimate of their dimension", Applicable Analysis, 25, 101-147 (1987).
39. M.Taboada "Finite-dimensional asymptotic behavior for the Swift-Hohemberg model of convection", Nonlinear Analysis T.M.A. 14, #1, 43-54 (1990).

CAPITULO III.

VARIEDADES INERCIALES DE SISTEMAS DINAMICOS DISIPATIVOS

EN ESPACIOS DE BANACH.

En los últimos años un enorme esfuerzo se ha realizado para comprender el comportamiento asintótico de sistemas dinámicos generados por ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales; en esta dirección conceptos como el de Atractor Global, [7,8a] o el de Variedad Inercial, [11,12,12a,13], juegan un papel muy importante, tanto en el aspecto teórico como en el práctico (computacional), para una clase de sistemas llamados genéricamente "disipativos".

Una Variedad Inercial para un sistema dinámico disipativo, es una variedad finito dimensional en el espacio de fases donde se plantea el sistema dinámico (que es infinito dimensional para las ecuaciones en derivadas parciales), que es invariante, contiene al atractor maximal y que atrae con una tasa exponencial las trayectorias que comienzan en conjuntos acotados del espacio de fases.

La existencia de estos objetos ha sido probada para diferentes ecuaciones, [13,14,15], siguiendo algunas ideas generales que son el objeto de estudio de este capítulo. Aquí modificamos las ya conocidas técnicas hilbertianas para poder cubrir ecuaciones semilineales parabólicas disipativas en espacios de Banach arbitrarios, generalizando las llamadas Condiciones de Salto Espectral.

3.1 Planteamiento. Descripción del Método.

Sea X un espacio de Banach, $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal, cerrado de dominio denso. Más aún supongamos que A es sectorial en X , [1,2,3].

Supongamos que $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$; así con $\alpha \geq 0$ tenemos definidos los espacios de interpolación X^α verificando $X^\alpha \subset X^\beta$ si $\alpha \geq \beta$; $X^0 = X$, $D(A) = X^1$, con inclusiones continuas (en X^α se toma la norma $\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\| \quad \forall u \in X^\alpha$, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$).

Sea $f: X^\alpha \rightarrow X^\beta$ con $\alpha, \beta \geq 0$, acotada y lipschitziana sobre acotados, i.e. para cada $B \subset X^\alpha$ acotado existen $L(B)$, $M(B)$ constantes positivas tales que:

$$(H1) \quad \|f(u) - f(v)\|_\beta \leq L(B) \|u - v\|_\alpha \quad \forall u, v \in B$$

$$(H2) \quad \|f(u)\|_\beta \leq M(B) \quad \forall u \in B$$

Consideremos la Ecuación Semilineal en X

$$(ES) \quad \begin{cases} u_t + Au + f(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Supondremos que (ES) genera un Sistema Dinámico (Semigrupo no lineal) en X^α , llamado (S), i.e. una familia de aplicaciones $S(t): X^\alpha \rightarrow X^\alpha \quad t \geq 0$ tal que para cada $u_0 \in X^\alpha$ (ES) tiene una única solución $u(t) = S(t)u_0$, $t \geq 0$ tal que

$$u(\cdot) \in C([0, \infty), X^\alpha) \cap C^1((0, \infty), X^\alpha)$$

(para resultados de regularidad ver [1]). En este sentido para aplicar las técnicas de [1] basta pedir

$$(H3) \quad 0 \leq \alpha - \beta < 1, \quad \alpha \in [0, 1]$$

([1] Cap.3 sec.3.5 ejercicio 1), aunque alguna restricción más aparecerá más adelante. En la práctica los casos más corrientes corresponden a $\beta = 0$ con $\alpha \in [0, 1)$, pero es interesante ver como afecta a los resultados la regularidad de f .

En particular si X es un espacio de Hilbert, real y separable, y A es un operador autoadjunto con resolvente compacta

(ver Sección III.3, abajo) podemos definir $X^{-\alpha}$ como el dual de X^{α} , $\alpha \geq 0$, y en este caso en (H1)-(H3) podemos tomar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y utilizar todos los resultados del Capítulo I.

(H4) Supondremos además que el sistema dinámico es "disipativo" en el sentido de que tiene un Atractor Maximal compacto, [7].

La hipótesis (H4) implica que existe un conjunto $B \subset X^{\alpha}$ acotado y absorbente, i.e. $\forall B \subset X^{\alpha}$ acotado $\exists t_B \geq 0$ tal que $\forall t \geq t_B$ $S(t)B \subset B$. Por contra la existencia de un conjunto acotado y absorbente implica la existencia del Atractor Maximal si por ejemplo B es compacto o si $S(t)$ es compacto para t grande, [7, 8, 8a, 13].

Entenderemos por una Variedad Inercial de clase C^k y dimensión N para (S) a una variedad topológica \mathfrak{M} de dimensión N y clase C^k , subvariedad regular de X^{α} (i.e. la topología de \mathfrak{M} es la inducida por X^{α}) tal que:

- i) $S(t)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \quad \forall t \geq 0$
- ii) \mathfrak{M} contiene al Atractor Maximal de (S).
- iii) Existe $M > 0$ tal que $\forall B \subset X^{\alpha}$ acotado, $\exists C(B) \geq 0$ tal que $\text{dist}(S(t)B, \mathfrak{M}) \leq C(B)\exp(-Mt) \quad \forall t \geq 0$.

Obsérvese que la tercera condición implica la segunda por la invarianza del Atractor Maximal cuando \mathfrak{M} sea cerrada en X^{α} .

Denotaremos en un espacio métrico (X, d) :

$$\text{dist}(x, A) = \inf \left\{ d(x, a) , a \in A \right\} \quad x \in X , A \subset X$$

$$\text{dist}(A, B) = \sup \left\{ d(a, B) , a \in A \right\} \quad A, B \subset X$$

obsérvese que $\text{dist}(A, B)$ y $\text{dist}(B, A)$ en general no coinciden y que $\text{dist}(A, B) = 0$ si y sólo si $A \subset \bar{B}$.

Sea $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ donde $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ y σ_1, σ_2 son conjuntos espectrales, [1]; sean P, Q las proyecciones asociadas a dicha descomposición del espectro de A y sean $X_1 = P(X)$, $X_2 = Q(X)$.

El siguiente resultado es bien conocido:

Lema 1.1 [1,2,3,5]

i) P y Q conmutan con A, A^α , e^{-At} , $t \geq 0$. En particular X_1, X_2 son A, A^α , e^{-At} , $t \geq 0$ invariantes.

ii) P y Q restringidas a X^α son proyecciones en X^α ; $A_1 = A|_{X_1}$ es sectorial en X_1 ; $\sigma(A_1) = \sigma_1$ y $(A|_{X_1})^\alpha = A^\alpha|_{X_1}$. En particular $Q(X^\alpha) = Q(X) \cap X^\alpha = D(A^\alpha|_{X_2}) = X_2^\alpha$ con un resultado análogo para $P(X^\alpha)$, así $X^\alpha = X_1^\alpha \oplus X_2^\alpha$. \square

Supongamos que σ_1 es acotado (y por tanto A_1 es continuo, [1] Cap.1 Teorema 1.5.2.) e introduzcamos las siguientes notaciones:

$$0 < \delta_1 < \inf \left\{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma_1 \right\}, \quad i \in \{1,2\} \quad (1.1)$$

$$0 < \delta_3 = \sup \left\{ \operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma_1 \right\} < \infty \quad (1.2)$$

$$0 < \delta_4 = \sup \left\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma_1 \right\} < \infty \quad (1.3)$$

Así $\exists C_0 \geq 1$ tal que se verifican con $t \geq 0$ y $\alpha \in (0,1]$ ([1] Teorema 1.5.3)

$$\| e^{-A_1 t} \| \leq C_0 e^{-\delta_1 t} \quad (1.4)$$

$$\| e^{A_1 t} \| \leq C_0 e^{\delta_3 t} \quad (1.5)$$

$$\| A_1^\alpha \| \leq C_0 \delta_4^\alpha \quad (1.6)$$

$$\exists C_\alpha \geq 0 \text{ tal que } \| A_2^\alpha e^{-A_2 t} \| \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha} e^{-\delta_2 t} \quad (1.7)$$

Observaciones

i) Si no se verifica $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$; podemos tomar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re}(\sigma(A+\lambda I)) > 0$ y trabajar la ecuación $u_t + (A+\lambda I)u + (f-\lambda I)(u) = 0$ que verifica todas las hipótesis hechas.

ii) Un caso interesante es cuando X_1 es finito dimensional, lo cual es equivalente (ya que $\sigma(A_1) = \sigma_1$) a " σ_1 es finito y puramente

puntual", i.e. todo elemento de σ_1 es un autovalor de multiplicidad finita; esta condición queda a su vez asegurada por ejemplo si σ_1 es finito y A tiene resolvente compacta.

iii) La constante C_0 definida arriba puede ser tomada $C_0 = 1$ por ejemplo en el caso de X espacio de Hilbert y A_1 un operador Normal. En general C_0 depende de la partición de $\sigma(A)$ pero sólo por la condición (1.6).

iv) En el caso de X un espacio de Hilbert real y separable (caso al que dedicaremos un estudio especial, Sección III.3.1) y siendo A con resolvente compacta los δ_1 pueden definirse con "=" en (1.1)-(1.3), de forma que (1.4)-(1.7) sigan siendo ciertas.

v) Como A_1 es continuo en X_1 y por tanto isomorfismo, entonces $X_1^\alpha = X_1 \forall \alpha \in [0,1]$ de forma que $|\cdot|_\alpha$ y $|\cdot|$ son equivalentes; en todo caso usaremos siempre la norma $|\cdot|_\alpha$ en X_1^α .

Por la descomposición de X dada por P y Q todo elemento de X, u, se puede escribir de forma única $u = p + q$ con $p \in X_1, q \in X_2$; proyectando (ES) según P y Q obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + f_1(p + q) = 0 \\ q_t + A_2 q + f_2(p + q) = 0 \\ p(0) = p_0 \quad q(0) = q_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

donde $f_1 = P \circ f, f_2 = Q \circ f$.

Como la dinámica no transitoria de (S) está en \mathcal{B} , truncamos la no linealidad en un entorno de \mathcal{B} de forma que el sistema resultante sea más tratable; introducimos así el PARAMETRO DE TRUNCAMIENTO $\rho > 0$ de forma siguiente:

Sea $\rho > 0$ tal que $\mathcal{B} \subset B(\rho)$, siendo $B(\rho)$ la bola abierta de centro 0 y radio ρ , en X^α . Sea $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ tal que valga uno en el intervalo $[0,1]$ y cero en $[2,\infty)$, no creciente y con derivada acotada.

Sea $F: X^\alpha \rightarrow X^\beta$ tal que $F(u) = \theta\left(\frac{|u|_\alpha}{\rho}\right) \cdot f(u)$; así $\text{sop}(F) \subset \overline{B(2\rho)}, F|_{\overline{B(\rho)}} = f|_{\overline{B(\rho)}}$ y F globalmente lipschitz y acotada en X^α .

En general si $g: X^\alpha \rightarrow X^\beta$ es acotada y lipschitz

escribiremos $\|g\|_{\alpha,\beta} = \sup\{ \|g(u)\|_{\beta} \mid u \in X^{\alpha} \}$ y $K_{\alpha,\beta}(g)$ la constante de lipschitz de g .

En nuestro caso sea $K_{\alpha,\beta} = K_{\alpha,\beta}(f,\rho) = K_{\alpha,\beta}(F)$ con $K_{\alpha,0} = K_{\alpha}$ y $\|F\|_{\alpha,0} = \|F\|_{\alpha}$.

Además denotaremos $\|Q\|_{\alpha} = \|Q\|_{\mathcal{L}(X^{\alpha})}$, $\|Q\|_0 = \|Q\|$ la norma en el espacio de aplicaciones lineales continuas en X^{α} , $\mathcal{L}(X^{\alpha})$.

Tenemos así la ecuación y el correspondiente sistema truncados:

$$(ES)_T \begin{cases} u_t + Au + F(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(p+q) = 0 \\ q_t + A_2 q + F_2(p+q) = 0 \\ p(0) = p_0, q(0) = q_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

siendo $F_1 = P \circ F$, $F_2 = Q \circ F$. El sistema dinámico asociado a $(ES)_T$ lo representaremos por (S_T) ; obsérvese que este sistema depende de la elección de ρ .

Buscaremos una variedad invariante para (S_T) de la forma $\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ donde $\phi: X_1^{\alpha} \longrightarrow X_2^{\alpha}$. Así si $u_0 = p_0 + q_0 \in \mathfrak{M}$ debe ocurrir que $S_T(t)u_0 = u(t) = P(u(t)) + \phi(P(u(t)))$ $t \geq 0$, por tanto $p(t) = P(u(t))$, $q(t) = \phi(p(t))$ deben verificar el sistema asociado a (S_T) , (1.9), en particular $q = \phi(p(t))$ debe ser solución de

$$q_t + A_2 q + F_2(p + \phi(p)) = 0, \quad q(0) = q_0 = \phi(p_0).$$

Por tanto \mathfrak{M} es invariante si y sólo si para cada $p_0 \in X_1^{\alpha}$ el sistema

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0 \\ q_t + A_2 q + F_2(p + \phi(p)) = 0 \quad t \geq 0 \\ p(0) = p_0, q(0) = \phi(p_0) \end{cases} \quad (1.10)$$

tiene por solución a $(p(t), \phi(p(t)))$; por estar la primera ecuación desacoplada esto nos permite encontrar un problema de punto fijo del cual ϕ es solución.

Sea $\phi: X_1^{\alpha} \longrightarrow X_2^{\alpha}$, lipschitziana, así $F_1(1+\phi): X_1^{\alpha} \longrightarrow X_1^{\alpha}$ es

globalmente lipschitziana y acotada, entonces

$$p_t + A_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0, \quad p(0) = p_0$$

tiene una única solución, globalmente definida en todo \mathbb{R} (ya que A_1 es continuo) $p(t) = p(t, p_0, \phi)$, $p \in C^1(\mathbb{R}, X_1^\alpha)$ tal que

$$p(t) = e^{-A_1 t} p_0 - \int_0^t e^{-A_1(t-s)} F_1(I + \phi)p(s) ds, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

y para cada $q_0 \in X_2^\alpha$

$$q_t + A_2 q + F_2(p + \phi(p)) = 0, \quad q(0) = q_0$$

tiene solución única en $[0, \infty)$ $q(t) = q(t, q_0, p_0, \phi)$ dada por

$$q(t) = e^{-A_2(t-r)} q(r) - \int_r^t e^{-A_2(t-s)} F_2(I + \phi)p(s) ds, \quad t \geq r \quad (1.12)$$

Siguiendo las líneas de la construcción de la Variedad (local) Centro Inestable, [1,4]:

Lema 1.2

Existe un único $q_0 \in X_2^\alpha$ tal que $q_t + A_2 q + F_2(p + \phi(p)) = 0$ tiene solución definida en $(-\infty, \infty)$ y acotada en X_2^α para $t \rightarrow -\infty$ que además viene dado por

$$q_0 = - \int_{-\infty}^0 e^{A_2 r} F_2(I + \phi)p(r) dr \quad (1.13)$$

y dicha solución es $q(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-A_2(t-r)} F_2(I + \phi)p(r) dr$ (1.14)

con $t \in \mathbb{R}$.

Demostración

Sea $g(r) = F_2(I + \phi)p(r)$, $r \in \mathbb{R}$, así g es acotada en X^β . Si q es solución de la ecuación, definida en $(-\infty, \infty)$ y acotada sobre $(-\infty, 0)$ en X_2^α , entonces q verifica (1.12):

$$q(t) = e^{-A_2(t-r)} q(r) - \int_r^t e^{-A_2(t-s)} g(s) ds, \quad t \geq r$$

Con $t = 0$ y $r \rightarrow -\infty$ como $\| e^{A_2 r} q(r) \|_\alpha \leq C_0 e^{\delta_2 r} \| q(r) \|_\alpha \rightarrow 0$

tenemos: $q_0 = - \int_{-\infty}^0 e^{A_2 s} g(s) ds$ lo cual prueba la unicidad. Además esta integral es convergente:

$$\left\| \int_{-\infty}^0 e^{A_2 r} g(r) dr \right\|_{\alpha} \leq \sup_{r \leq 0} \|g(r)\|_{\beta} \int_{-\infty}^0 \|A_2^{\alpha-\beta} \cdot e^{A_2 r}\| dr$$

y por (1.7) $\|A_2^{\alpha-\beta} e^{-A_2 t}\| \leq \frac{C_{\alpha-\beta}}{t^{\alpha-\beta}} e^{-\delta_2 t}$ $t \geq 0$ y por (H3)

$0 \leq \alpha - \beta < 1$, así la integral define un elemento de X_2^{α} . La solución de la ecuación con este dato inicial es

$$q(t) = e^{-A_2 t} \left(\int_{-\infty}^0 e^{A_2 r} g(r) dr \right) - \int_0^t e^{-A_2(t-s)} g(s) ds, \quad t \geq 0$$

o bien

$$q(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-A_2(t-r)} g(r) dr \quad t \geq 0$$

pero esta misma expresión tiene sentido para $t \in \mathbb{R}$ y define una función que es solución de $q_t + A_2 q + g = 0$, $t \in \mathbb{R}$, y es acotada para $t \rightarrow -\infty$. \square

Por tanto hemos definido una transformación no lineal $\mathbb{T} : \phi \rightarrow \mathbb{T}(\phi)$, tal que

$$\mathbb{T}(\phi)(p_0) = - \int_{-\infty}^0 e^{A_2 r} F_2(I+\phi)p(r) dr \quad \forall p_0 \in X_1^{\alpha} \quad (1.15)$$

siendo $p(r) = p(r, p_0, \phi)$.

Lema 1.3

Sea $\phi : X_1^{\alpha} \rightarrow X_2^{\alpha}$ lipschitz, tal que $\mathbb{T}(\phi) = \phi$.

Entonces $\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ es una subvariedad lipschitziana de X^{α} , positiva y negativamente invariante para $(S_{\mathbb{T}})$.

Además $\forall t \geq 0$ $S_{\mathbb{T}}(t)|_{\mathfrak{M}}$ es un homeomorfismo de \mathfrak{M} .

Demostración

Sea $u_0 = p_0 + q_0 = p_0 + \phi(p_0) \in \mathfrak{M}$, sea $p(t) = p(t, p_0, \phi)$, $t \in \mathbb{R}$, solución de $p_t + A_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0$, $p(0) = p_0$; sea $t \in \mathbb{R}$

entonces $p(s, p(t), \phi) = p(s+t, p_0, \phi)$, $s \in \mathbb{R}$ (por la unicidad de soluciones), por tanto de (1.15)

$$\begin{aligned} \phi(p(t)) &= \Upsilon(\phi)(p(t)) = - \int_{-\infty}^0 e^{A_2 r} F_2(I+\phi)p(r, p(t), \phi) dr \\ \phi(p(t)) &= - \int_{-\infty}^0 e^{A_2 r} F_2(I+\phi)p(r+t, p_0, \phi) dr \end{aligned}$$

y tras cambiar de variable

$$\phi(p(t)) = - \int_{-\infty}^t e^{-A_2(t-r)} F_2(I+\phi)p(r) dr \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

pero por el Lema 1.2, (1.14), esta función es solución, en \mathbb{R} , de $q_t + A_2 q + F_2(p+\phi(p)) = 0$ con dato inicial

$$- \int_{-\infty}^0 e^{A_2 r} F_2(I+\phi)p(r) dr = \phi(p_0)$$

Por tanto $(p(t), \phi(p(t)))$, $t \in \mathbb{R}$, verifican (1.10):

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(p+\phi(p)) = 0 \\ q_t + A_2 q + F_2(p+\phi(p)) = 0 \\ p(0) = p_0, \quad q(0) = \phi(p_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

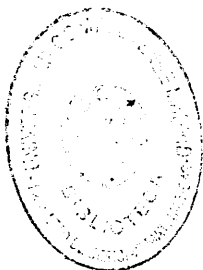
y por tanto $p(t) + \phi(p(t)) = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, es solución de (S_T) y así $u(t) = S_T(t)u_0 \in \mathfrak{M}$, $t \in \mathbb{R}$.

Como acabamos de ver

$$S_T(t)u_0 = p(t, P(u_0), \phi) + \phi(p(t, P(u_0), \phi)) \quad \forall u_0 \in \mathfrak{M} \quad (1.17)$$

está definido para $t \in \mathbb{R}$, es continuo en u_0 , por la dependencia continua respecto a datos iniciales y claramente

$$\left(S_T(t) |_{\mathfrak{M}} \right)^{-1} = S_T(-t) |_{\mathfrak{M}}, \text{ por tanto es un homeomorfismo de } \mathfrak{M}. \quad \square$$



3.2 Existencia de la Variedad Inercial. Primera y Segunda Condiciones de Salto Espectral

Veamos propiedades "a priori" de la clase de funciones ϕ sobre la que se debe plantear el problema de punto fijo:

Lema 2.1

Sea $\phi: X_1^\alpha \rightarrow X_2^\alpha$ lipschitziana

i) Entonces $T(\phi): X_1^\alpha \rightarrow X_2^\alpha$ y es acotada independientemente de ϕ .

ii) Supongamos $\exists \epsilon > 0$ tal que $F: X^\alpha \rightarrow X^{\beta+\epsilon} \subset X^\beta$ es acotada. Entonces $T(\phi): X_1^\alpha \rightarrow X_2^{\alpha+\epsilon} \subset X_2^\alpha$ y es acotada en $X_2^{\alpha+\epsilon}$ independientemente de ϕ .

En particular si las inclusiones $X^a \subset X^b$ $a > b$ son compactas (i.e. si A tiene resolvente compacta) entonces el rango de $T(\phi)$ está contenido en un conjunto relativamente compacto de X_2^α independiente de ϕ .

Demostración

i) Que $T(\phi): X_1^\alpha \rightarrow X_2^\alpha$ nos lo dice el Lema 1.2; y como allí

$$\|T(\phi)p_0\|_\alpha \leq \sup_{r \leq 0} \|F_2(I+\phi)p(r)\|_\beta \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{C_{\alpha-\beta}}{(-r)^{\alpha-\beta}} e^{\delta_2 r} dr$$

y $\sup_{r \leq 0} \|F_2(I+\phi)p(r)\|_\beta \leq \|Q\|_\beta \cdot \|F\|_{\alpha,\beta}$. Por tanto

$$\|T(\phi)p_0\|_\alpha \leq \frac{\|Q\|_\beta \cdot \|F\|_{\alpha,\beta} \cdot C_{\alpha-\beta} \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha)}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} = b_{\alpha,\beta} \quad \forall p_0 \in X_1^\alpha \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \|T(\phi)p_0\|_{\alpha+\epsilon} &\leq \int_{-\infty}^0 \|A_2^{\alpha-\beta} e^{A_2 r}\| \|F_2(I+\phi)p(r)\|_{\beta+\epsilon} dr \leq \\ &\leq \frac{\|Q\|_{\beta+\epsilon} \cdot \|F\|_{\alpha,\beta+\epsilon} \cdot C_{\alpha-\beta} \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha)}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} = b_{\alpha,\beta}^\epsilon \end{aligned} \quad (2.2)$$

el resto es obvio. \square

Lema 2.2

Sea como arriba $|P|_\alpha = |P|_{\mathcal{L}(X^\alpha)}$. Entonces

$$\text{Sop}(T(\phi)) \subset \overline{B(2\rho C_0 |P|_\alpha)} \quad (2.3)$$

siendo $\overline{B(2\rho C_0 |P|_\alpha)}$ la bola cerrada en X_1^α de centro 0 y radio $2\rho C_0 |P|_\alpha$.

Demostración

Sea $M \geq 1$, sea $p_0 \in X_1^\alpha$ tal que $|p_0|_\alpha > 2\rho M \geq 2\rho$, así $|p_0 + \phi(p_0)|_\alpha \geq \frac{1}{|P|_\alpha} |p_0|_\alpha > \frac{2\rho M}{|P|_\alpha}$ y esto es mayor que 2ρ si y sólo si $M \geq |P|_\alpha$. En este caso existe un intervalo abierto, I , que contiene a cero, tal que si $p(t, p_0, \phi)$ es la solución de $p_t + A_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0$, $p(0) = p_0$ se verifica

$$p(t) = e^{-A_1(t-s)} p(s) \quad \forall t \geq s, \quad t, s \in I$$

ya que $\text{sop}(F) \subset \overline{B(2\rho)}$, por construcción. Con $t = 0$, $s < 0$, $s \in I$, tenemos por (1.4)

$$2\rho M < |p_0|_\alpha \leq C_0 e^{\delta_1 s} |p(s)|_\alpha < C_0 |p(s)|_\alpha$$

ya que $s < 0$ y $\delta_1 > 0$; por tanto si $M \geq C_0 |P|_\alpha$ entonces $I > (-\infty, 0]$ y $p(s)$ no puede alcanzar en tiempo negativo la bola $\overline{B(\frac{2\rho M}{C_0})}$ y además

$$|p(s) + \phi(p(s))|_\alpha \geq \frac{1}{|P|_\alpha} |p(s)|_\alpha > \frac{2\rho M}{|P|_\alpha C_0} \quad \forall s \leq 0$$

Así eligiendo $M \geq C_0 \cdot |P|_\alpha \geq |P|_\alpha \geq 1$ tenemos

$$F(p(s) + \phi(p(s))) = 0 \quad \forall s \leq 0$$

$$T(\phi)(p_0) = - \int_{-\infty}^0 e^{A_2 s} F_2(I + \phi)p(s) ds = 0 \quad \square$$

Lema 2.3

Sea $\phi: X_1^\alpha \rightarrow X_2^\alpha$ lipschitziana de constante L. Si se verifica la Primera Condición de Salto Espectral:

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \delta_2 - \left(\delta_3 + C_0^2 \cdot |P|_\beta \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot (1+L) \cdot \delta_4^{\alpha-\beta} \right) > 0 \quad (2.4)$$

Entonces $\Gamma(\phi): X_1^\alpha \rightarrow X_2^\alpha$ es lipschitziana de constante

$$L \left(\Gamma(\phi) \right) \leq \frac{|Q|_\beta \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot (1+L) \cdot C_0 \cdot C_{\alpha-\beta} \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha)}{\Omega_{\alpha,\beta}^{1+\beta-\alpha}} = L_{\alpha,\beta} \quad (2.5)$$

Demostración

Sean $p_{0,i} \in X_1^\alpha$, $i \in \{1,2\}$, y sean p_i las soluciones de $p_t + \Lambda_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0$, $p(0) = p_{0,i}$, sean $u_i = p_i + \phi(p_i)$. Sea K_1 la constante de lipschitz de F_1 , así $K_1 \leq |P|_\beta \cdot K_{\alpha,\beta}$ y $K_2 \leq |Q|_\beta \cdot K_{\alpha,\beta}$; con esto

$$\begin{aligned} |\Gamma(\phi)(p_{01}) - \Gamma(\phi)(p_{02})|_\alpha &\leq \int_{-\infty}^0 |\Lambda_2^{\alpha-\beta} e^{\Lambda_2 s}| \cdot |F_2(u_1) - F_2(u_2)|_\beta ds \\ \text{y } |F_2(u_1) - F_2(u_2)|_\beta &\leq K_2(1+L) \cdot |p_1 - p_2|_\alpha; \text{ además} \end{aligned}$$

$$p_1(t) - p_2(t) = e^{-\Lambda_1 t} (p_{01} - p_{02}) - \int_0^t e^{-\Lambda_1(t-s)} (F_1(u_1) - F_1(u_2))(s) ds$$

como aquí $t \leq 0$, usando (1.5), (1.6) tenemos que

$$|p_1 - p_2|_\alpha(t) \leq e^{-\delta_3 t} \left(C_0 |p_{01} - p_{02}|_\alpha + C_0^2 K_1 (1+L) \delta_4^{\alpha-\beta} \int_t^0 e^{\delta_3 s} |p_1 - p_2|_\alpha \right)$$

de donde con el lema de Gronwall, con $t \leq 0$

$$|p_1 - p_2|_\alpha(t) \leq C_0 |p_{01} - p_{02}|_\alpha \cdot \exp \left[- \left(\delta_3 + C_0^2 |P|_\beta \cdot K_{\alpha,\beta} (1+L) \delta_4^{\alpha-\beta} \right) t \right]$$

así

$$|\Gamma(\phi)(p_{01}) - \Gamma(\phi)(p_{02})|_\alpha \leq K_2(1+L) C_0 |p_{01} - p_{02}|_\alpha \int_{-\infty}^0 \frac{C_{\alpha-\beta}}{(-s)^{\alpha-\beta}} e^{\Omega_{\alpha,\beta} s} ds$$

que es convergente por (2.4) y (H3); así

$$\|\mathbb{T}(\phi)(p_{01}) - \mathbb{T}(\phi)(p_{02})\|_{\alpha} \leq \frac{K_2 \cdot (1+L) \cdot C_0 \cdot C_{\alpha-\beta} \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha)}{\Omega_{\alpha,\beta}^{1+\beta-\alpha}} \|p_{01} - p_{02}\|_{\alpha}$$

y por tanto concluimos. □

Observación

$\Omega_{\alpha,\beta} > 0$ si y sólo si

$$\frac{\delta_2 - \delta_3}{\delta_4^{\alpha-\beta}} > \Lambda_0 = C_0^2 \cdot \|P\|_{\beta} \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot (1+L) \quad (2.6)$$

Los Lemas anteriores determinan en cierta forma la clase de funciones en la que plantear el problema de punto fijo:

Definición 2.1

Sean $b, L > 0$. Sea $\phi: X_1^{\alpha} \rightarrow X_2^{\alpha}$, ϕ está en la clase $\tilde{\mathfrak{J}}_{b,L}$ si y sólo si

i) ϕ lipschitziana de constante no mayor que L

$$\|\phi(p_1) - \phi(p_2)\|_{\alpha} \leq L \cdot \|p_1 - p_2\|_{\alpha} \quad \forall p_1, p_2 \in X_1^{\alpha}$$

ii) ϕ acotada por b

$$\|\phi(p)\|_{\alpha} \leq b \quad \forall p \in X_1^{\alpha}$$

iii) $\text{sop}(\phi) \subset \overline{B(2\rho C_0 \|P\|_{\alpha})}$

Así los Lemas 2.1-2.3 nos dicen que verificandose la Primera Condición de Salto Espectral, (2.4), y con $b_{\alpha,\beta}$ definido por (2.1), y $L_{\alpha,\beta}$ por (2.5) tenemos que

$$\mathbb{T}: \tilde{\mathfrak{J}}_{b,L} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{J}}_{b_{\alpha,\beta}, L_{\alpha,\beta}} \quad (2.7)$$

Además los espacios $\tilde{\mathfrak{J}}_{b,L}$ son claramente subconjuntos convexos, cerrados y acotados del espacio $C_b(X_1^{\alpha}, X_2^{\alpha})$, por lo tanto heredan de éste una topología métrica para la cual son espacios completos.

Ahora ya podemos abordar la existencia de la variedad inercial por medio de la existencia de puntos fijos de \mathbb{T} .

Lema 2.4

Con las notaciones anteriores, supuesta la Primera Condición de Salto Espectral (2.4), entonces

$T: \tilde{D}_{b,L} \longrightarrow \tilde{D}_{\alpha,\beta,L}$ es lipschitziana de constante

$$L(T) \leq \frac{C_0 \|P\|_{\beta} \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot L_{\alpha,\beta}}{\delta_3 \cdot \delta_4^{\beta-\alpha}} + \frac{C_{\alpha-\beta} \|Q\|_{\beta} \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha)}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} \quad (2.8)$$

Además si F verifica las hipótesis del Lema 2.1 11) y A tiene resolvente compacta entonces T es compacta.

Demostración

Sean $\phi_1, \phi_2 \in \tilde{D}_{b,L}$, así

$d(T(\phi_1), T(\phi_2)) = \sup \{ \|T(\phi_1)p - T(\phi_2)p\|_{\alpha}, p \in X_1^{\alpha} \}$; sea $p_0 \in X_1^{\alpha}$, y sean $u_i = p_i + \phi_i(p_i)$ siendo p_i las soluciones de $p_t + A_1 p + F_1(p + \phi_1(p)) = 0$, $p(0) = p_0$ $i \in \{1,2\}$

$$\|T(\phi_1)p_0 - T(\phi_2)p_0\|_{\alpha} \leq \int_{-\infty}^0 \|A_2^{\alpha-\beta} e^{A_2 s}\| \cdot \|F_2(u_1) - F_2(u_2)\|_{\beta} ds$$

$$\|F_2(u_1) - F_2(u_2)\|_{\beta} \leq K_2 \cdot \|u_1 - u_2\|_{\alpha} \leq K_2 \left((1+L) \|p_1 - p_2\|_{\alpha} + d(\phi_1, \phi_2) \right)$$

y tenemos $p_1(t) - p_2(t) = - \int_0^t e^{-A_1(t-s)} (F_1(u_1) - F_1(u_2))(s) ds$ así para $t \leq 0$ con (1.5), (1.6) obtenemos

$$\|p_1 - p_2\|_{\alpha}(t) \leq e^{-\delta_3 t} C_{0,1}^2 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_t^0 e^{\delta_3 s} \left((1+L) \|p_1 - p_2\|_{\alpha}(s) + d(\phi_1, \phi_2) \right) ds$$

con lo que la función $y(t) = \int_t^0 e^{\delta_3 s} \|p_1 - p_2\|_{\alpha}(s) ds$ cumple

$$-\frac{d}{dt} y(t) \leq C_{0,1}^2 \delta_4^{\alpha-\beta} d(\phi_1, \phi_2) \frac{1}{\delta_3} + C_{0,1}^2 \delta_4^{\alpha-\beta} (1+L) y(t), t \leq 0$$

así con $t \leq 0$ por el lema de Gronwall

$$\|p_1 - p_2\|_\alpha(t) \leq C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} d(\phi_1, \phi_2) \frac{1}{\delta_3} \exp\left(-(\delta_3 + C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta}(1+L))t\right)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \|\mathbb{T}(\phi_1)_{p_0} - \mathbb{T}(\phi_2)_{p_0}\|_\alpha \leq & \left(C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \frac{1}{\delta_3} K_2 (1+L) \int_{-\infty}^0 \frac{C_{\alpha-\beta}}{(-s)^{\alpha-\beta}} e^{\Omega_{\alpha,\beta}s} ds + \right. \\ & \left. + K_2 \int_{-\infty}^0 \|A_2^{\alpha-\beta} e^{A_2 s}\| ds \right) d(\phi_1, \phi_2) \quad \forall p_0 \in X_1^\alpha \end{aligned}$$

de donde usando (2.5) y (1.7) concluimos el resultado.

La compacidad de \mathbb{T} es una simple aplicación del teorema de Ascoli-Arzelá ya que $\mathbb{T}(\mathfrak{B}_{b,L}) \subset \mathfrak{B}_{b,\alpha\beta,L}$ es por tanto una familia equicontinua y por el Lema 2.1 ii) $\{\mathbb{T}(\phi)(p), \phi \in \mathfrak{B}_{b,L}\}$ está en un conjunto relativamente compacto de X_2^α , para cada $p \in X_1^\alpha$ fijo. \square

Teorema 2.1

Sea $L > 0$. Si se verifica la Segunda Condición de Salto Espectral:

$$\Omega_{\alpha,\beta} \geq R_0 \quad , \quad \frac{\delta_4^{\alpha-\beta}}{\delta_3} A_1 + \frac{A_2}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} < 1 \quad (2.9)$$

siendo:

$$R_0 = \left(\frac{C_0 \cdot C_{\alpha-\beta} \cdot \|Q\|_{\beta} \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot (1+L) \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha)}{L} \right)^{\frac{1}{1+\beta-\alpha}} \quad (2.10)$$

$$A_1 = C_0 \cdot \|P\|_{\alpha,\beta} \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot L \quad A_2 = C_{\alpha-\beta} \cdot \|Q\|_{\alpha,\beta} \cdot K_{\alpha,\beta} \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha) \quad (2.11)$$

entonces \mathbb{T} es contractiva en $\mathfrak{B}_{b,\alpha\beta,L}$. Consecuentemente \mathbb{T} tiene un único punto fijo en $\mathfrak{B}_{b,\alpha\beta,L}$.

Demostración

i) De (2.4) y (2.5) $L_{\alpha\beta} \leq L$ si y sólo si $\Omega_{\alpha,\beta} \geq R_0$ y así por (2.7) $\mathbb{T}(\mathfrak{B}_{b,\alpha\beta,L}) \subset \mathfrak{B}_{b,\alpha\beta,L}$.

ii) Supuesto 1) por (2.8) $L(T) \leq \frac{\delta_4^{\alpha-\beta}}{\delta_3} \cdot A_1 + \frac{A_2}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}}$ que es menor que uno por (2.9). □

Observaciones

i) Si $\delta_4 = \delta_3 (< \delta_2)$, por ejemplo en el caso hilbertiano con A autoadjunto, entonces

$$L(T) \leq \frac{A_1}{\delta_3^{1+\beta-\alpha}} + \frac{A_2}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} < \frac{A_1 + A_2}{\delta_3^{1+\beta-\alpha}}$$

y esto es menor que 1 si y sólo si

$$\delta_3 \geq R_3 = \left(A_1 + A_2 \right)^{\frac{1}{1+\beta-\alpha}} \tag{2.12}$$

ii) En el caso de T compacta (Lema 2.1) y si $\Omega_{\alpha\beta} \geq R_0$, el teorema de Schauder nos da la existencia de puntos fijos de T ya que $\mathfrak{J}_{\alpha\beta} \cdot L$ es convexo, cerrado y acotado.

3.3 Atractividad Global. Tercera Condición de Salto Espectral

Pretendemos ver ahora bajo qué condiciones adicionales la variedad construida en la Sección III.2 es atractiva para (S_T) .

En el caso particular de los espacios de Hilbert se obtienen condiciones más finas, debido a la sobresaliente propiedad de COMPRESION FUERTE (Strong Squeezing), [11,13,14]. Nada análogo a esto ha sido probado aún para espacios de Banach generales, donde de todos modos una Tercera Condición de Salto Espectral nos dá la atractividad (exponencial) de la variedad.

En este sentido los dos próximos Lemas serán claves.

Lema 3.1 [14]

Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, sean $y, z: I \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\gamma > 0$ y el cono $C_\gamma = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, z \geq \gamma \cdot y \right\}$. Supongamos que con $t \in I$, en C_γ se verifica

$$\begin{cases} \dot{y} + ay + bz \geq 0 \\ \dot{z} - cy + dz \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

siendo a, b, c, d no negativos. Así

i) Si

$$d - \frac{c}{\gamma} > 0 \quad (3.2)$$

y con $s \in [t_0, t] \subset I$ se tiene $(y(s), z(s)) \in C_\gamma$, entonces

$$z(s) \leq z(t_0) \exp\left[-\left(d - \frac{c}{\gamma}\right)(s-t_0)\right], \quad s \in [t_0, t] \subset I \quad (3.3)$$

ii) Si

$$d - b\gamma > 0 \quad \text{y} \quad d - b\gamma - a - \frac{c}{\gamma} \geq 0 \quad (3.4)$$

entonces

$$\Sigma_\gamma = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, z \leq \gamma \cdot y \right\} \quad (3.5)$$

es invariante y exponencialmente atractivo de orden $\exp\left[-(d - b\gamma)t\right]$, i.e. si con $t_0 \in I$ se tiene $(y(t_0), z(t_0)) \in \Sigma_\gamma$, entonces $(y(t), z(t)) \in \Sigma_\gamma \quad \forall t \geq t_0, \quad t \in I$, y si

$(y(s), z(s)) \in \Sigma_\gamma$ con $s \in [t_0, t] \subset I$ entonces

$$\left(z(s) - \gamma y(s) \right) \leq \left(z(t_0) - \gamma y(t_0) \right) \exp\left\{ -(d - b\gamma)(s - t_0) \right\} \quad (3.6)$$

Demostración

i) Si con $s \in [t_0, t] \subset I$ se tiene $(y(s), z(s)) \in C_\gamma$ entonces $z(s) \geq \gamma y(s)$ y así como $c \geq 0$

$$z + \left(d - \frac{c}{\gamma} \right) \cdot z \leq 0 \quad (3.7a)$$

así (3.3) es obvio.

ii) Si $(y(s), z(s)) \in C_\gamma$ con $s \in [t_0, t] \subset I$ entonces

$$\frac{d}{ds} (z - \gamma y) \leq -(d - b\gamma) \cdot z + (c + a\gamma) \cdot y$$

$$\frac{d}{ds} \left(z - \gamma y \right) + (d - b\gamma) \left(z - \frac{c + a\gamma}{d - b\gamma} y \right) \leq 0$$

supuesto que $d - b\gamma > 0$; así $\frac{c + a\gamma}{d - b\gamma} \leq \gamma$ si y sólo si $d - b\gamma - a - \frac{c}{\gamma} \geq 0$ y en este caso

$$\frac{d}{ds} (z - \gamma y) + (d - b\gamma) (z - \gamma y) \leq 0 \quad (3.7b)$$

El resto es obvio. \square

Observación

En particular si $I = [t_0, \infty)$ y $(y(t), z(t)) \in C_\gamma$ con $t \in I$ entonces $y(t), z(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

Lema 3.2 ([1], Cap. 7, Lema 7.1.1)

Sean $b \geq 0$, $\beta > 0$, $a(\cdot)$ una función no negativa, localmente integrable en $[0, T]$, $T \leq \infty$.

Sea $u(\cdot)$ no negativa, localmente integrable en $[0, T]$, tal que

$$u(t) \leq a(t) + b \cdot \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds \quad t \in [0, T] \quad (3.8)$$

Entonces

$$u(t) \leq a(t) + \theta \cdot \int_0^t \left(\frac{d}{ds} E_\beta \right) (\theta(t-s)) \cdot a(s) ds \quad t \in [0, T] \quad (3.9)$$

siendo $\theta = \left(b \cdot \Gamma(\beta) \right)^{\frac{1}{\beta}}$, $E_{\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}$ (3.10)

En particular si $a(\cdot)$ es constante entonces $u(t) \leq a \cdot E_{\beta}(\theta t)$ y además existe $M_0 = M_0(\beta) > 0$ tal que

$$E_{\beta}(t) \leq M_0 e^t \quad t \in [0, T] \quad (3.11)$$

□

3.3.1 Caso Hilbertiano.

Supondremos que X es un espacio de Hilbert real y separable, A operador autoadjunto con resolvente compacta (ver Capítulo I).

Sea $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión no decreciente convergente a $+\infty$, de los autovalores de A (contados con su multiplicidad) y sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base ortonormal de X de los autovectores de A ; sea por último

$$\sigma_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \{\lambda_n\}_{n \geq N+1} \quad (3.12)$$

así $\delta_1 = \lambda_1$, $\delta_2 = \lambda_{N+1}$, $\delta_3 = \delta_4 = \lambda_N$, $C_0 = 1$, $\|P\|_{\alpha} = \|Q\|_{\alpha} = 1$. Obsérvese que no se ha supuesto que los λ_N sean todos distintos, tan sólo que $\lambda_N \neq \lambda_{N+1}$.

Teorema 3.1 (Propiedad de Compresión Fuerte) [11]

Sea $\gamma > 0$, definimos

$$\Sigma_{\gamma} = \left\{ (u, v) \in X^{\alpha} \times X^{\alpha}, \|Q(u-v)\|_{\alpha} \leq \gamma, \|P(u-v)\|_{\alpha} \right\} \quad (3.13)$$

Supondremos que F es algo más regular: $F: X^{\alpha} \longrightarrow X^{\beta}$ es acotada y lipschitz, siendo

$$0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

Supongamos además que $\lambda_{N+1}^{1+\beta-\alpha} > K_{\alpha, \beta}$ (3.15)

y así definamos

$$\gamma_N = \gamma_N(\alpha, \beta) = \frac{K_{\alpha, \beta}}{\lambda_{N+1} - K_{\alpha, \beta}} > 0 \quad (3.16)$$

Sea $\gamma > \gamma_N$. Si se verifica la Tercera Condición de Salto Espectral:

$$\Delta_{\alpha, \beta} = \lambda_{N+1} - (1+\gamma^{-1}) \cdot K_{\alpha, \beta} \cdot \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} - \lambda_N - (1+\gamma) K_{\alpha, \beta} \lambda_N^{\alpha-\beta} \geq 0 \quad (3.17)$$

- 1) Si $(u_0, v_0) \in \Sigma_\gamma$, entonces $(u(t), v(t)) \in \Sigma_\gamma \quad \forall t \geq 0$
siendo $u(t) = S_T(t)u_0$ y $v(t) = S_T(t)v_0$.
- ii) Si $(u_0, v_0) \notin \Sigma_\gamma$ entonces $\forall t \geq 0$ tal que $(u(t), v(t)) \notin \Sigma_\gamma$
se tiene

$$\|Q(u-v)\|_\alpha(t) \leq \exp(-M_{\alpha, \beta} \cdot t) \|Q(u_0 - v_0)\|_\alpha \quad (3.18)$$

$$\|u-v\|_\alpha(t) \leq (1+\gamma^{-1}) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} \cdot t) \|u_0 - v_0\|_\alpha \quad (3.19)$$

$$\text{siendo } M_{\alpha, \beta} = \lambda_{N+1} - K_{\alpha, \beta} \left[\lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} + \gamma \cdot \lambda_N^{\alpha-\beta} \right] > 0 \quad (3.20)$$

Demostración

Sean $u_0, v_0 \in X^\alpha$, como $u(\cdot), v(\cdot)$ son soluciones de (S_T) entonces $w = u - v$ verifica $w_t + Aw + F(u) - F(v) = 0$. Sean $p = Pw$, $q = Qw$, así

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(u) - F_1(v) = 0 \\ q_t + A_2 q + F_2(u) - F_2(v) = 0 \end{cases}$$

multiplicando escalarmente por $A_1^{2\alpha} p$, $A_2^{2\alpha} q$ (vease el δ -producto definido en la Sección I.1) cada ecuación

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p\|_\alpha^2 + \|p\|_{\alpha+\frac{1}{2}}^2 + \langle F_1(u) - F_1(v) | A_1^{2\alpha} p \rangle = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_\alpha^2 + \|q\|_{\alpha+\frac{1}{2}}^2 + \langle F_2(u) - F_2(v) | A_2^{2\alpha} q \rangle = 0 \quad (3.22)$$

$$\left| \frac{d}{dt} \|p\|_\alpha^2 + \|p\|_{\alpha+\frac{1}{2}}^2 \right| \leq K_{\alpha, \beta} \|u-v\|_\alpha \cdot \|p\|_{2\alpha-\beta} \leq K_{\alpha, \beta} (\|p\|_\alpha + \|q\|_\alpha) \|p\|_{2\alpha-\beta}$$

pero por la construcción de X_1 y usando la representación

espectral de A (ver Capítulo I) es inmediato que

$$|p|_{2\alpha-\beta}^2 \leq \lambda_N \cdot |p|_{\alpha}^{\alpha-\beta} \quad \text{y} \quad |p|_{\alpha+\frac{1}{2}}^2 \leq \lambda_N \cdot |p|_{\alpha}^2 \quad (3.23)$$

así $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |p|_{\alpha}^2 \geq -\lambda_N |p|_{\alpha}^2 - K_{\alpha,\beta} \lambda_N^{\alpha-\beta} (|p|_{\alpha} + |q|_{\alpha}) |p|_{\alpha}$ (3.24)

Como $\alpha + \frac{1}{2} \geq 2\alpha - \beta$ si y sólo si $0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$ y en este caso se tiene $|q|_{\alpha+\frac{1}{2}}^2 \geq \lambda_{N+1}^{2\beta+1-2\alpha} \cdot |q|_{2\alpha-\beta}^2$, entonces en (3.22) podemos acotar :

$$\begin{aligned} \left| \langle F_2(u) - F_2(v) | A_2^{2\alpha} q \rangle \right| &\leq \|F_2(u) - F_2(v)\|_{\beta} \cdot |q|_{2\alpha-\beta}^2 \\ &\leq \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \cdot K_{\alpha\beta} (|p|_{\alpha} + |q|_{\alpha}) |q|_{\alpha+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |q|_{\alpha+\frac{1}{2}}^2 + |q|_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(|q|_{\alpha+\frac{1}{2}} - K_{\alpha\beta} (|p|_{\alpha} + |q|_{\alpha}) \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \right) \leq 0 \quad (3.25)$$

como $|q|_{\alpha+\frac{1}{2}}^2 \geq \lambda_{N+1} \cdot |q|_{\alpha}^2$, entonces en la región en la que

$$\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} \cdot |q|_{\alpha} - K_{\alpha\beta} (|p|_{\alpha} + |q|_{\alpha}) \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta-\frac{1}{2}} \geq 0 \quad \text{de (3.25) se deduce que}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |q|_{\alpha}^2 + \left(\lambda_{N+1} - K_{\alpha\beta} \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} \right) \cdot |q|_{\alpha}^2 - K_{\alpha\beta} \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} \cdot |p|_{\alpha} |q|_{\alpha} \leq 0 \quad (3.26)$$

y esto es válido en la región

$$|q|_{\alpha} \geq \left(\frac{K_{\alpha\beta}}{\lambda_{N+1} - K_{\alpha\beta}} \right) |p|_{\alpha} \quad (3.27)$$

donde hemos usado (3.15) implícitamente.

Derivando en (3.24), (3.26):

$$\frac{d}{dt} |p|_{\alpha} + \left(\lambda_N + K_{\alpha,\beta} \lambda_N^{\alpha-\beta} \right) |p|_{\alpha} + K_{\alpha,\beta} \lambda_N^{\alpha-\beta} \cdot |q|_{\alpha} \geq 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt}|q|_{\alpha} + \left(\lambda_{N+1} - K_{\alpha\beta} \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} \right) \cdot |q|_{\alpha} - K_{\alpha\beta} \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} \cdot |p|_{\alpha} \leq 0 \quad (3.29)$$

y estamos en las condiciones del Lema 3.1 con $y = p$, $z = q$

$$\gamma \geq \gamma_N, \quad a = \left(\lambda_N + K_{\alpha\beta} \lambda_N^{\alpha-\beta} \right), \quad b = K_{\alpha\beta} \lambda_N^{\alpha-\beta}$$

$$c = K_{\alpha\beta} \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta}, \quad d = \left(\lambda_{N+1} - K_{\alpha\beta} \lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} \right)$$

en este caso $d > 0$ si y sólo si se da (3.15); (3.2) equivale a $\gamma > \gamma_N$ y (3.4) a $\Delta_{\alpha,\beta} \geq 0$ y $M_{\alpha,\beta} > 0$ verificandose además que $\Delta_{\alpha,\beta} \geq 0$ implica $M_{\alpha,\beta} > 0$. \square

Observación

Como $\beta \geq \alpha - \frac{1}{2}$ entonces $1+\beta-\alpha \geq \frac{1}{2}$ y así

$$\gamma_N = \left(\frac{K_{\alpha\beta}}{1+\beta-\alpha} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \text{ como hemos de tomar } \gamma > \gamma_N, \text{ a mayor } N, \text{ menor es la región (conica) atractiva.}$$

NOTA

Una vez obtenido este resultado, siguiendo [11,14], llegó a nuestro conocimiento que R.Temam había obtenido las mismas conclusiones siguiendo un razonamiento análogo, [13].

Teorema 3.2

Supuesta la Primera y Tercera Condiciones de Salto Espectral (2.4), (3.17), si ϕ es un punto fijo cualquiera de T , entonces $\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ es una variedad invariante, globalmente atractiva de orden $\exp(-M_{\alpha,\beta} t)$, para el flujo de (S_T) en X^{α} , con $M_{\alpha,\beta}$ dado en (3.20). Más aún $\forall B \subset X^{\alpha}$ acotado $\exists C(B) \geq 0$ tal que $\forall t \geq 0$

$$\text{dist}(S_T(t)B, \mathfrak{M}) \leq C(B) \cdot \exp(-M_{\alpha,\beta} t) \quad (3.30)$$

donde la distancia se toma en X^{α} .

Por tanto \mathfrak{M} es una Variedad Inercial lipschitziana de dimensión $\text{Dim}(\mathfrak{M}) = N$, para (S_T) . El flujo sobre \mathfrak{M} queda

determinado por (1.17) y la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0 \\ p(0) = p_0 \in X_1^\alpha \end{cases}$$

que recibe el nombre de Forma Inercial de (S_T)

Demostración [12]

Sea $u_0 \in X^\alpha$, sea $t > 0$ fijo, sea $\gamma > \gamma_N$; sea $p(s) = p(s, P(S_T(t)u_0), \phi)$, $s \in \mathbb{R}$, solución de

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0 \\ p(0) = P(S_T(t)u_0) \end{cases}$$

sea $v(t) = p(-t) + \phi(p(-t)) \in \mathfrak{M}$. Consideremos $S_T(\cdot)v(t)$; entonces $P(S_T(t)u_0 - S_T(t)v(t)) = 0$ y por tanto $(S_T(t)u_0, S_T(t)v(t)) \in \Sigma_\gamma$, (salvo que $S_T(t)u_0 = S_T(t)v(t)$ en cuyo caso el resultado es trivial), por el Teorema 3.1 $\forall s \in [0, t]$ $(S_T(s)u_0, S_T(s)v(t)) \in \Sigma_\gamma$ y además $\forall s \in [0, t]$

$$\|Q(S_T(s)u_0 - S_T(s)v(t))\|_\alpha \leq \|Q(u_0 - v(t))\|_\alpha \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} s) \quad (3.31)$$

observemos que como $S_T(s)v(t) \in \mathfrak{M} \quad \forall s \in [0, t]$ entonces

$$Q(S_T(s)v(t)) = \phi(P(S_T(s)v(t))) \quad \forall s \in [0, t]$$

en particular con $s = t$

$$\begin{aligned} \|Q(S_T(t)u_0 - S_T(t)v(t))\|_\alpha &= \|Q(S_T(t)u_0) - \phi(P(S_T(t)u_0))\|_\alpha = \\ &= \|S_T(t)u_0 - P(S_T(t)u_0) - \phi(P(S_T(t)u_0))\|_\alpha \geq \text{dist}(S_T(t)u_0, \mathfrak{M}) \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \|Q(u_0 - v(t))\|_\alpha &\leq \|Q(u_0)\|_\alpha + \|Q(v(t))\|_\alpha = \\ &= \|Q(u_0)\|_\alpha + \|\phi(p(-t))\|_\alpha \leq \|Q(u_0)\|_\alpha + b_{\alpha, \beta} \end{aligned}$$

ya que $\phi \in \tilde{\mathfrak{B}}_{b_{\alpha, \beta}}^{L_{\alpha, \beta}}$, así de (3.31) deducimos

$$\text{dist}(S_T(t)u_0, \mathfrak{M}) \leq \left(\|Q(u_0)\|_\alpha + b_{\alpha, \beta} \right) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t)$$

de donde se deduce (3.30) con

$$C(B) = b_{\alpha, \beta} + \sup_{u_0 \in B} \|Q(u_0)\|_{\alpha} \quad (3.32)$$

El resto es obvio. \square

Observaciones

- i) De hecho \mathfrak{M} atrae todo $B \subset X^{\alpha}$ con $Q(B) \subset X_2^{\alpha}$ acotado.
- ii) Se ha probado arriba que si $u(t)$ es solución de (S_T) entonces $\|u - (Pu + \phi(Pu))\|_{\alpha}(t) \leq C(B) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t)$

3.3.2 Caso General.

Teorema 3.3

Supongamos válida la Primera Condición de Salto Espectral. Sea ϕ un punto fijo cualquiera de T , entonces si se verifica la Tercera Condición de Salto Espectral:

$$M_{\alpha, \beta} = \Omega_{\alpha, \beta}^{-1} - \Theta_{\alpha, \beta} > 0 \quad (3.33)$$

siendo

$$\Omega_{\alpha, \beta}^{-1} = \delta_2^{-1} \left(\delta_3 + 2C_0^2(1+L) \|P\|_{\beta} K_{\alpha, \beta}^2 \delta_4^{\alpha-\beta} \right) > 0 \quad (3.34)$$

$$\Theta_{\alpha, \beta} = \left(M_3 \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha) \right)^{\frac{1}{1+\beta-\alpha}} \quad (3.35)$$

con $M_3 = M_1 + M_2$, siendo

$$M_1 = \left(\frac{C_0^2 C_{\alpha-\beta} \|P\|_{\beta} \|Q\|_{\beta} K_{\alpha, \beta}^2 (1+L) \delta_4^{\alpha-\beta}}{\Omega_{\alpha, \beta}} + C_{\alpha-\beta} K_2 \right) \quad (3.36)$$

$$M_2 = \frac{C_0^2 C_{\alpha-\beta} \|P\|_{\beta} \|Q\|_{\beta} K_{\alpha, \beta}^2 (1+L) \delta_4^{\alpha-\beta}}{\Omega_{\alpha, \beta}^{-1}} \quad (3.37)$$

entonces para toda solución, $u(t)$, de (S_T) se verifica

$$\|q(t) - \phi(p(t))\|_{\alpha} \leq C \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t) \quad \forall t \geq 0 \quad (3.38)$$

siendo $p(t) = P(u(t))$, $q(t) = Q(u(t))$, $M_{\alpha,\beta} = \Omega_{\alpha,\beta}^{-1} - \Theta_{\alpha,\beta}$, para una cierta constante $C \geq 0$.

En particular $\text{dist}(u(t), \mathfrak{M}) \leq C \cdot \exp(-M_{\alpha,\beta} t)$, y es más $\exists M_4 = M_4(\alpha-\beta)$ tal que $\forall B \subset X^\alpha$ con $Q(B)$ acotado en X_2^α

$$\text{dist}(S_T(t)B, \mathfrak{M}) \leq C(B) \cdot \exp(-M_{\alpha,\beta} t) \quad (3.39)$$

con
$$C(B) = C_0 M_4 \left(b_{\alpha,\beta} + \sup_{u \in B} \|Q(u)\|_\alpha \right) \quad (3.40)$$

Así $\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ es una Variedad Inercial, lipschitziana, para (S_T) , de dimensión

$$\text{Dim}(\mathfrak{M}) = \text{Dim}(X_1)$$

Asímismo el flujo sobre \mathfrak{M} queda determinado por (1.17) y la Forma Inercial

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(p + \phi(p)) = 0 \\ p(0) = p_0 \in X_1^\alpha \end{cases}$$

que es una EDO si y sólo si X_1 es finito dimensional.

Demostración

Si $u(t)$ solución de (S_T) , p y q definidas como en el enunciado verifican (1.9)

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(p + q) = 0 \\ q_t + A_2 q + F_2(p + q) = 0 \end{cases}$$

Sea para cada $t \geq 0$ $y(s, t)$, $s \in \mathbb{R}$, solución de

$$\begin{cases} y_t + A_1 y + F_1(y + \phi(y)) = 0 \\ y(t, t) = p(t) \end{cases} \quad (3.41)$$

Con $t \geq t_0 \geq 0$ fijos sea $\xi = q - \phi(p)$, así

$$\begin{aligned} \xi(t) - e^{-A_2(t-t_0)} \xi(t_0) &= \left(q(t) - e^{-A_2(t-t_0)} q(t_0) \right) - \\ &- \left(\phi(p(t)) - e^{-A_2(t-t_0)} \phi(p(t_0)) \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

este último sumando es

$$\left(\phi(y(t, t)) - e^{-A_2(t-t_0)} \phi(y(t_0, t)) \right) + e^{-A_2(t-t_0)} \left(\phi(y(t_0, t)) - \phi(y(t_0, t_0)) \right) \quad (3.43)$$

de forma que tenemos representaciones integrales de cada término usando (1.9), (3.41) y (1.16) dos veces:

$$q(t) - e^{-A_2(t-t_0)} q(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A_2(t-s)} F_2(p + q)(s) ds \quad (3.44)$$

$$\phi(y(t, t)) - e^{-A_2(t-t_0)} \phi(y(t_0, t)) = \int_{t_0}^t e^{-A_2(t-s)} F_2(I + \phi)y(s, t) ds \quad (3.45)$$

$$\phi(y(t_0, t_0)) = \int_{-\infty}^{t_0} e^{-A_2(t_0-s)} F_2(I + \phi)y(s, t_0) ds \quad (3.46)$$

$$\phi(y(t_0, t)) = \int_{-\infty}^{t_0} e^{-A_2(t_0-s)} F_2(I + \phi)y(s, t) ds \quad (3.47)$$

así para estimar $\|\xi(t) - e^{-A_2(t-t_0)} \xi(t_0)\|_\alpha$ tendremos que estimar en norma $\|\cdot\|_\alpha$ los dos términos (I_1, I_2 respectivamente) que resultan de restar a (3.44), (3.45) y a (3.46), (3.47) llevando en este caso el factor $e^{-A_2(t-t_0)}$:

$$I_1 = \left\| \int_{t_0}^t e^{-A_2(t-s)} \left[F_2(p + q)(s) - F_2(I + \phi)y(s, t) \right] ds \right\|_\alpha$$

$$I_2 = \left\| \int_{-\infty}^{t_0} e^{-A_2(t-s)} \left[F_2(I + \phi)y(s, t_0) - F_2(I + \phi)y(s, t) \right] ds \right\|_\alpha$$

Denotando K_1 la constante de lipschitz de F_1

a)

$$I_1 \leq \int_{t_0}^t K_2 \|A_2^{\alpha-\beta} e^{-A_2(t-s)}\| \cdot \|p(s) - y(s, t) + q(s) - \phi(y(s, t))\|_\alpha ds$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_0}^t K_2 |A_2^{\alpha-\beta} e^{-A_2(t-s)}| \left((1+L) |p(s)-y(s,t)|_\alpha + |\xi(s)|_\alpha \right) ds \leq \\ &\leq C_{\alpha,\beta} \int_{t_0}^t \frac{e^{-\delta_2(t-s)}}{(t-s)^{\alpha-\beta}} \left((1+L) |p(s)-y(s,t)|_\alpha + |\xi(s)|_\alpha \right) ds \quad (3.48) \end{aligned}$$

Sea $t_0 \leq s \leq t$, así

$$0 = p(t)-y(t,t) = e^{-A_1(t-s)} \left(p(s)-y(s,t) \right) - \int_s^t e^{-A_1(t-r)} \left(F_1(p+q) - F_1(I+\phi)y(r,t) \right) dr$$

o equivalentemente

$$p(s)-y(s,t) = \int_s^t e^{A_1(r-s)} \left(F_1(p+q)(r) - F_1(I+\phi)y(r,t) \right) dr$$

de donde, como $r-s \geq 0$, por (1.5), (1.6)

$$\begin{aligned} |p(s)-y(s,t)|_\alpha &\leq C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_s^t e^{\delta_3(r-s)} |p(r)-y(r,t)+q(r)-\phi(y(r,t))|_\alpha dr \\ &\leq C_0^2 (1+L) K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_s^t e^{\delta_3(r-s)} |p(r)-y(r,t)|_\alpha + C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_s^t e^{\delta_3(r-s)} |\xi|_\alpha dr \end{aligned}$$

con las técnicas del lema de Gronwall para $s \in [t_0, t]$ obtenemos

$$|p(s)-y(s,t)|_\alpha \leq \exp \left(C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} (1+L) (t-s) \right) C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_s^t e^{\delta_3(r-s)} |\xi|_\alpha dr$$

Así en (3.48) con $\Omega_1 = \delta_2 - C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} (1+L)$

$$\int_{t_0}^t \frac{e^{-\delta_2(t-s)}}{(t-s)^{\alpha-\beta}} |p(s)-y(s,t)|_\alpha \leq C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_{t_0}^t \frac{e^{-\Omega_1(t-s)}}{(t-s)^{\alpha-\beta}} \left(\int_s^t e^{\delta_3(r-s)} |\xi|_\alpha dr \right) ds$$

Ahora por el teorema de Fubini y teniendo en cuenta que $\Omega_{\alpha,\beta} = \Omega_1 - \delta_3$, lo anterior es igual a

$$C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_{t_0}^t |\xi|_\alpha e^{\delta_3(r-t)} \left(\int_{t-r}^{t-t_0} \frac{e^{-\Omega_{\alpha,\beta} z}}{z^{\alpha-\beta}} dz \right) dr \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_{t_0}^t \|\xi\|_{\alpha} e^{\delta_3(r-t)} \left(\int_{t-r}^{\infty} \frac{e^{-\Omega_{\alpha,\beta} z}}{z^{\alpha-\beta}} dz \right) dr \leq \\ &\leq \frac{C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta}}{\Omega_{\alpha,\beta}} \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} \frac{e^{-\Omega_1(t-r)}}{(t-r)^{\alpha-\beta}} dr \end{aligned}$$

como $\Omega_1 \leq \delta_2$, de (3.48) obtenemos finalmente

$$I_1 \leq M_1 \cdot \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} \frac{e^{-\Omega_1(t-r)}}{(t-r)^{\alpha-\beta}} dr \quad (3.49)$$

con M_1 definida como en (3.36).

b) Por otro lado

$$I_2 \leq K_2(1+L) \int_{-\infty}^{t_0} \|\Lambda_2^{\alpha-\beta} e^{-\Lambda_2(t-s)}\| \cdot \|y(s, t_0) - y(s, t)\|_{\alpha} ds \quad (3.50)$$

pero con $s \leq t$

$$\begin{aligned} y(t, t_0) - y(t, t) &= e^{-\Lambda_1(t-s)} \left(y(s, t_0) - y(s, t) \right) - \\ &- \int_s^t e^{-\Lambda_1(t-r)} \left(F_1(I+\phi)y(r, t_0) - F_1(I+\phi)y(r, t) \right) dr \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} y(s, t_0) - y(s, t) &= e^{\Lambda_1(t-s)} \left(y(t, t_0) - y(t, t) \right) + \\ &+ \int_s^t e^{\Lambda_1(r-s)} \left(F_1(I+\phi)y(r, t_0) - F_1(I+\phi)y(r, t) \right) dr \end{aligned}$$

por (1.5), (1.6), como $t \geq r \geq s$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|y(s, t_0) - y(s, t)\|_{\alpha} &\leq C_0 e^{\delta_3(t-s)} \|y(t, t_0) - y(t, t)\|_{\alpha} + \\ &+ C_0^2 K_1(1+L) \delta_4^{\alpha-\beta} \int_s^t e^{\delta_3(r-s)} \|y(r, t_0) - y(r, t)\|_{\alpha} dr \end{aligned}$$

de nuevo con las técnicas del lema de Gronwall, para $s \leq t$

$$\|y(s, t_0) - y(s, t)\|_{\alpha} \leq C_0 \exp\left[\delta_3 + C_0^2 K_1 (1+L) \delta_4^{\alpha-\beta}\right] (t-s) \|y(t, t_0) - y(t, t)\|_{\alpha} \quad (3.51)$$

y ahora como en a) con $s \in [t_0, t]$ y con

$$p(s) - y(s, t_0) = \int_{t_0}^s e^{-A_1(s-r)} \left(F_1(p+q)(r) - F_1(I+\phi)y(r, t_0) \right) dr$$

obtenemos

$$\|p(s) - y(s, t_0)\|_{\alpha} \leq C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_{t_0}^s \|p(r) - y(r, t_0) + q(r) - \phi(y(r, t_0))\|_{\alpha} dr$$

de donde

$$\begin{aligned} \|p(s) - y(s, t_0)\|_{\alpha} &\leq C_0^2 (1+L) K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_{t_0}^s \|p(r) - y(r, t_0)\|_{\alpha} dr + \\ &+ C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \int_{t_0}^s \|\xi(r)\|_{\alpha} dr \end{aligned}$$

nuevamente por el lema de Gronwall, evaluando en $s = t$ y usando que $y(t, t) = p(t)$, obtenemos

$$\|y(t, t) - y(t, t_0)\|_{\alpha} \leq C_0^2 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \exp(C_0^2 (1+L) K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} (t-t_0)) \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} dr \quad (3.52)$$

así en (3.51) y con $s \leq t_0 \leq t$

$$\|y(s, t_0) - y(s, t)\|_{\alpha} \leq C_0^3 K_1 \delta_4^{\alpha-\beta} \exp(\Omega_2(t-s)) \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} dr \quad (3.53)$$

donde $\Omega_2 = \delta_3 + 2C_0^2(1+L)K_1\delta_4^{\alpha-\beta}$ y se ha usado que $t-t_0 \leq t-s$, por tanto de (3.50)

$$I_2 \leq C_0^3 C_{\alpha-\beta} K_1 K_2 (1+L) \delta_4^{\alpha-\beta} \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} dr \cdot \int_{-\infty}^{t_0} \frac{e^{-\Omega_{\alpha, \beta}^1(t-s)}}{(t-s)^{\alpha-\beta}} ds$$

siendo $\Omega_{\alpha,\beta}^1 = \delta_2 - \left(\delta_3 + 2C_0^2(1+L)K_1\delta_4^{\alpha-\beta} \right) > 0$, así

$$I_2 \leq C_0^3 C_{\alpha-\beta} K_1 K_2 (1+L) \delta_4^{\alpha-\beta} \frac{e^{-\Omega_{\alpha,\beta}^1(t-t_0)}}{\Omega_{\alpha,\beta}^1 (t-t_0)^{\alpha-\beta}} \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} dr$$

con M_2 como en (3.37) y usando que $t-t_0 \geq t-r$, obtenemos

$$I_2 \leq M_2 \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} \frac{e^{-\Omega_{\alpha,\beta}^1(t-r)}}{(t-r)^{\alpha-\beta}} dr \quad (3.54)$$

Ahora de (3.49), (3.54), por (3.42)

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|_{\alpha} &\leq C_0 e^{-\delta_2(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|_{\alpha} + M_1 \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} \frac{e^{-\Omega_1(t-r)}}{(t-r)^{\alpha-\beta}} dr + \\ &+ M_2 \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} \frac{e^{-\Omega_{\alpha,\beta}^1(t-r)}}{(t-r)^{\alpha-\beta}} dr \end{aligned}$$

y como $\Omega_{\alpha,\beta}^1 \leq \Omega_1 \leq \delta_2$, con $M_1 + M_2 = M_3$, entonces $\forall t \geq t_0$

$$\|\xi(t)\|_{\alpha} \leq C_0 e^{-\Omega_{\alpha,\beta}^1(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|_{\alpha} + M_3 \int_{t_0}^t \|\xi(r)\|_{\alpha} \frac{e^{-\Omega_{\alpha,\beta}^1(t-r)}}{(t-r)^{\alpha-\beta}} dr \quad (3.55)$$

de forma que con $z(r) = e^{\Omega_{\alpha,\beta}^1(t_0+r)} \|\xi(t_0+r)\|_{\alpha}$, $r \in [0, t-t_0]$

$$z(r) \leq C_0 z(0) + M_3 \int_0^r \frac{z(s)}{(r-s)^{\alpha-\beta}} ds \quad \forall r \in [0, t-t_0]$$

y estamos en condiciones de aplicar el Lema 3.2, por tanto

$$\exists M_4 = M_4(\alpha-\beta) \text{ tal que con } e_{\alpha,\beta} = \left(M_3 \cdot \Gamma(1+\beta-\alpha) \right)^{\frac{1}{1+\beta-\alpha}}$$

$$\|\xi(t)\|_{\alpha} \leq C_0 \|\xi(t_0)\|_{\alpha} M_{\alpha, \beta} \exp(-M_{\alpha, \beta}(t-t_0)) \quad (3.56)$$

con $M_{\alpha, \beta} = \Omega_{\alpha, \beta}^{-1} - e_{\alpha, \beta}$ que es positivo por (3.33).

Con esto como $\xi = q - \phi(p) = u - (Pu + \phi(Pu))$, entonces

$$\text{dist}(u(t), \mathbb{M}) \leq \|\xi(t)\|_{\alpha} \leq C_0 \|\xi(t_0)\|_{\alpha} M_{\alpha, \beta} \exp(-M_{\alpha, \beta}(t-t_0)) \quad (3.57)$$

y $\|\xi(t_0)\|_{\alpha} = \|q(t_0) - \phi(p(t_0))\|_{\alpha} \leq \|Q(u(t_0))\|_{\alpha} + b_{\alpha, \beta}$ por lo cual deducimos (3.39), (3.40). El resto es obvio. \square

3.3.3 Ejemplos

Veamos condiciones sobre $\sigma(\Lambda)$ que aseguren las tres Condiciones de Salto Espectral, así como posibles aplicaciones a los ejemplos del Capítulo I, Sección I.1.

a) Caso Hilbertiano, $0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$

Así (2.9) es

$$i) \quad \Omega_{\alpha, \beta} = \lambda_{N+1} - \left(\lambda_N + a_0 \lambda_N^{\alpha - \beta} \right) \geq a_1$$

$$ii) \quad \frac{a_2}{\lambda_N^{1 + \beta - \alpha}} + \frac{a_3}{\lambda_{N+1}^{1 + \beta - \alpha}} < 1$$

mientras que (3.15) es

$$iii) \quad \lambda_{N+1} > a_4$$

y (3.17) es

$$iv) \quad \Delta_{\alpha, \beta} = \lambda_{N+1} - a_5 \lambda_{N+1}^{\alpha - \beta} - \lambda_N - a_6 \lambda_N^{\alpha - \beta} \geq 0$$

que son las condiciones a verificar.

$$\text{Sean} \quad \tau_N = \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{\lambda_{N+1}^{\alpha - \beta} + \lambda_N^{\alpha - \beta}} < \sigma_N = \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{\lambda_N^{\alpha - \beta}} \quad (3.58)$$

como $\lambda_{N+1} > \lambda_N$, basta que se verifiquen:

- a) $\sigma_N \geq a_0 + \frac{a_1}{\lambda_N^{\alpha-\beta}}$
 b) $\lambda_N > a_7 = \left(a_2 + a_3 \right)^{\frac{1}{1+\beta-\alpha}}$, $\lambda_{N+1} > a_4$
 c) $\tau_N \geq a_8 = \max\{a_5, a_6\}$

De forma que a su vez es suficiente:

$$\lambda_N \longrightarrow \infty, \quad \tau_N = \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{\lambda_{N+1}^{\alpha-\beta} + \lambda_N^{\alpha-\beta}} \longrightarrow \infty \quad (3.59)$$

Observemos que $\tau_N \geq \mu_N = \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} - \lambda_N^{\frac{1}{2}}$ con igualdad en el caso $\alpha-\beta = \frac{1}{2}$. Así con (3.59) ó con la condición más restrictiva

$$\lambda_N \longrightarrow \infty, \quad \mu_N \longrightarrow \infty \quad (3.60)$$

entonces (S_T) tiene una Variedad Inercial de dimensión finita y la propiedad de Compresión Fuerte se verifica.

La condición (3.60) es la que ha aparecido en los trabajos [11,12,14], y (3.59) en [13].

Si por ejemplo, [21,22], $\lambda_N \propto N^a$ con $a > 0$

$$\tau_N \propto \frac{aN^{a-1} + O(N^{a-2})}{2N^a(\alpha-\beta) + O(N^a(\alpha-\beta)-1)} \quad \text{que diverge si y sólo si}$$

$$a > \frac{1}{1+\beta-\alpha} \geq 1, \quad 0 \leq \alpha-\beta \leq \frac{1}{2} \quad (3.61)$$

mientras que μ_N diverge si $a > 2$.

b) Caso General

Como antes, (2.9) es

$$i) \quad \Omega_{\alpha,\beta} = \delta_2 - \left(\delta_3 + a_0 \delta_4^{\alpha-\beta} \right) \geq a_1 \quad ii) \quad \frac{a_2 \delta_4^{\alpha-\beta}}{\delta_3} + \frac{a_3}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} < 1$$

mientras que (3.33) es

$$iii) \quad \Omega_{\alpha,\beta}^1 = \delta_2 - \left(\delta_3 + 2a_0 \delta_4^{\alpha-\beta} \right) > 0 \quad \text{y}$$

$$\Omega_{\alpha,\beta}^1 > \left(a_4 + \frac{a_5 \delta_4^{\alpha-\beta}}{\Omega_{\alpha,\beta}} + \frac{a_6 \delta_4^{\alpha-\beta}}{\Omega_{\alpha,\beta}^1} \right)^c \quad \text{con } c = \frac{1}{1+\beta-\alpha}$$

como $\Omega_{\alpha,\beta} > \Omega_{\alpha,\beta}^1$ basta que se verifiquen

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\delta_2 - \delta_3}{\delta_4^{\alpha-\beta}} \geq 2a_0 + \frac{a_1}{\delta_4^{\alpha-\beta}} & \text{b)} \quad & \frac{a_2 \delta_4^{\alpha-\beta}}{\delta_3} + \frac{a_3}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} < 1 \\ \text{c)} \quad & \Omega_{\alpha,\beta}^1 > \left(a_4 + \frac{(a_5 + a_6) \delta_4^{\alpha-\beta}}{\Omega_{\alpha,\beta}^1} \right)^c \cdot c = \frac{1}{1+\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Para que se verifique b) $\frac{\delta_4^{\alpha-\beta}}{\delta_3}$ y $\frac{1}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}}$ han de ser pequeños, así escribiremos

$$\frac{\delta_4^{\alpha-\beta}}{\delta_3} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \delta_2 \rightarrow \infty \quad (3.62)$$

y para a)

$$\frac{\delta_2 - \delta_3}{\delta_4^{\alpha-\beta}} \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \delta_4 \rightarrow 0 \quad (3.63)$$

pero de (3.63) se deduce que $\frac{\Omega_{\alpha,\beta}^1}{\delta_4^{\alpha-\beta}} \rightarrow \infty$ y $\Omega_{\alpha,\beta}^1 \rightarrow \infty$ por tanto se verifica c).

En particular en el caso Hilbertiano con $0 \leq \alpha - \beta < 1$ para (3.62) y (3.63) basta

$$\lambda_N \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \sigma_N = \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{\lambda_N^{\alpha-\beta}} \rightarrow \infty \quad (3.64)$$

y entonces hay Variedad Inercial finito dimensional, aunque la propiedad de Compresión Fuerte puede no ser válida. Este resultado no aparece en [11-14].

Por último si $\lambda_N \propto N^a$ con $a > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_N \propto & \frac{aN^{a-1} + O(N^{a-2})}{N^{a(\alpha-\beta)} + O(N^{a(\alpha-\beta)-1})} \quad \text{que diverge si y sólo si} \\ & a > \frac{1}{1+\beta-\alpha} \geq 1, \quad 0 \leq \alpha - \beta < 1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Observemos además que con las notaciones anteriores $\sigma_N > \tau_N$

y $\tau_N \geq \mu_N$ si $0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$; sea $\omega_N = \frac{\lambda_{N+1}}{\lambda_N} \geq 1$, así

$$\tau_N = \frac{\sigma_N}{\omega_N^{\alpha-\beta} + 1} = \frac{\lambda_N^{1+\beta-\alpha} (\omega_N - 1)}{\omega_N^{\alpha-\beta} + 1} \quad \text{y} \quad \mu_N = \lambda_N^{\frac{1}{2}} (\omega_N^{\frac{1}{2}} - 1)$$

por tanto si

i) $\omega_N \rightarrow \infty$ entonces $\sigma_N, \tau_N, \mu_N \rightarrow \infty$ y hay Variedad Inercial con $0 \leq \alpha - \beta < 1$, siendo válida la Propiedad de Compresión si $0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$.

ii) $\{\omega_N\} \subset K$, K compacto de $(1, \infty)$, entonces $\mu_N \rightarrow \infty$ y por tanto hay Variedad Inercial con $0 \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{2}$ y se verifica la Propiedad de Compresión; además si $\frac{1}{2} < \alpha - \beta < 1$ $\tau_N \rightarrow \infty$ si y sólo si $\sigma_N \rightarrow \infty$ lo cual se verifica ya que $\lambda_N \rightarrow \infty$, así en este caso también hay Variedad Inercial.

iii) por último si $\omega_N \rightarrow 1$ (por ejemplo si $\lambda_N \propto N^a$ con $a > 0$) nuevamente $\tau_N \rightarrow \infty$ si y sólo si $\sigma_N \rightarrow \infty$.

Observaciones

i) En [10], se ha estudiado la regularidad C^1 de las variedades inerciales, siguiendo una aproximación al problema distinta a la seguida aquí.

ii) En [12a, 15] se desarrolla un método distinto, mucho más geométrico y mejor adaptado a algunos casos hilbertianos, para construir variedades inerciales.

iii) Es inmediato que en la discusión anterior las condiciones a verificar pueden ser obtenidas, en vez de imponiendo condiciones sobre $\sigma(\lambda)$, δ_1 , σ_N , τ_N , μ_N , imponiendo que las constantes a_1 sean pequeñas lo cual equivale a que la constante de lipschitz del truncamiento F sea pequeña; recuperamos así la teoría de variedades localmente invariantes.

Para los ejemplos modelo del Capítulo I, y asumiendo la disipatividad, condición que depende esencialmente de términos no lineales adecuados, tenemos las siguientes posibles aplicaciones:

Para empezar, según [21,22] la siguiente estimación asintótica es válida para operadores elípticos de orden $2m$ en dominios acotados de \mathbb{R}^n :

$$\lambda_N \propto N^{2m/n}, \quad N \gg 1 \quad (3.66)$$

con esto y las notaciones anteriores y las del Capítulo I:

A) Ecuaciones de Reacción-Difusión

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Así $\alpha - \beta = 0$, $m = 1$ y la condición (3.61) es $2/n > 1$ que sólo se verifica con $n = 1$; para $n = 2$ (3.61) no asegura que haya saltos suficientemente grandes en el espectro, aunque puede haberlos como se ha probado en [15,16] para condiciones de contorno periódicas en un rectángulo, asimismo dichos autores anuncian un contraejemplo a la existencia de variedades inerciales para esta ecuación con $n = 3$ (resultado que aún no ha sido publicado).

B) Ecuaciones de Difusión-Convección (perturbaciones viscosas de leyes de conservación).

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u - \text{Div}(g(u)) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

En este caso $\alpha - \beta = 1/2$, $m = 1$ y la condición (3.61) sería $2/n > 2$ lo cual es imposible.

C) Ecuaciones de Reacción-Difusión-Convección.

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u - \text{Div}(g(u)) + f(u) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

En este caso la situación es idéntica a la del caso B).

D) Ecuaciones de Navier-Stokes.

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = h & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0, u \text{ periódica, de media nula.} \end{cases}$$

Ahora la situación es aún peor que en los casos B) y C) puesto que $\alpha - \beta = 3/4$ y (3.65) no se verifica. De hecho la búsqueda de variedades invariantes para estas ecuaciones es un problema muy investigado y poco resuelto de la Dinámica de Fluidos, [11].

E) Ecuaciones de orden superior

$$\begin{cases} u_t + \nu \Delta^2 u - \operatorname{Div}(g(u)) + f(u) = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0, \frac{\partial}{\partial n} u = 0 & \text{en } \partial \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

En este caso $m = 2$ y $\alpha - \beta = 1/4$, por tanto (3.61) es $4/n > 4/3$ que se verifica con $n = 1, 2$.

F) Ecuaciones tipo Cahn-Hilliard.

$$u_t + \nu \Delta^2 u - \Delta f(u) + \beta u = 0 \text{ en } Q = \Omega \times (0, T)$$

Ahora $m = 2$ y $\alpha - \beta = 1/2$ con lo que (3.61) queda: $4/n > 2$, que se verifica por tanto para $n = 1$.

G) Ecuaciones tipo Kuramoto-Velarde.

$$u_t + \nu \Delta^2 u - \Delta u + \beta u + \delta \Delta f(u) + \gamma |\nabla u|^2 = \frac{\gamma}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\nabla u| dx$$

en $Q = \Omega \times (0, T)$.

Como en el caso F), $m = 2$ y $\alpha - \beta = 1/2$ con lo que (3.61) se verifica para $n = 1$.

Observaciones

i) Las ecuaciones anteriores regularizadas elípticamente con operadores de orden superior admiten variedades inerciales para dimensiones espaciales mayores, [11].

ii) Los resultados de los ejemplos A)-G) pueden ser mejorados si

las no linealidades (o sus truncamientos) son tales que $\alpha-\beta$ sea menor, esto requiere un detallado estudio, en cada caso, de las propiedades funcionales del operador no lineal.

iii) El método empleado para construir las variedades inerciales es susceptible de aplicarse a algunas ecuaciones de ondas con rozamiento y disipativas, [23].

3.4 Conclusiones.

En esta Sección abordamos el problema, no trivial, de construir a partir de una Variedad Inercial de (S_T) , una Variedad Inercial para (S) . Como en todos los métodos que trabajan con truncamientos, características globales del sistema truncado no corresponden, en general, al sistema original; así por ejemplo una variedad invariante para (S_T) sólo origina una variedad localmente invariante para (S) (en la región donde los flujos coinciden, localmente, en el tiempo), e incluso en el caso de que fuese globalmente invariante para (S) , la heredabilidad de la atractividad no es inmediata.

Obsérvese que hasta ahora no se ha usado la disipatividad del sistema, hipótesis (H4); es precisamente esta propiedad y su relación con la elección del truncamiento la que permite "empalmar" correctamente los flujos de (S) y (S_T) , permitiéndole a (S) heredar una Variedad Inercial de (S_T) . La clave en este proceso es el Teorema 4.1, Propiedad de Localización.

3.4.1 Variedad Inercial de (S) .

Pretendemos ver ahora bajo qué hipótesis, lo más generales posibles, podemos construir a partir de una Variedad Inercial de (S_T) , una Variedad Inercial para (S) .

Por lo dicho esto no es inmediato ya que las no linealidades sólo coinciden en $\overline{B(\rho)}$ y esto implica que el sistema original y el truncado coincidan sólo mientras permanezcamos en dicha bola; más exactamente se tiene:

Lema 4.1

Sea $\rho > 0$, Parámetro de Truncamiento, sea (S_T) el correspondiente sistema dinámico truncado.

Sea $B \subset X^\alpha$ tal que $S_T(s)B \subset \overline{B(\rho)}$ ($S(s)B \subset \overline{B(\rho)}$ respectivamente) $\forall s \in [0, t]$.

Entonces $S_T(s)B = S(s)B \quad \forall s \in [0, t]$.

Demostración

Sea $u_0 \in X^\alpha$ tal que $u_T(s) = S_T(s)u_0 \in \overline{B(\rho)}$ $\forall s \in [0, t]$ sea $u(s) = S(s)u_0$; así como F y f coinciden sobre $\overline{B(\rho)}$, u_T y u verifican la misma ecuación diferencial (ES) con $s \in [0, t]$ y el mismo dato inicial; por la unicidad de soluciones u_T y u coinciden en ese intervalo de tiempo; el otro caso es idéntico. \square

Lema 4.2

Sean $\rho > 0$ y el sistema truncado (S_T) .

Como $\text{sop}(F) \subset \overline{B(2\rho)}$, entonces para la ecuación truncada $u_t + Au + F(u) = 0$, la bola en X^α , $\overline{B(2\rho C_0)}$ es absorbente.

Demostración

1) Sea u_0 tal que $\|u_0\|_\alpha = 2\rho$ y tal que $u(t) = S_T(t)u_0 \in \overline{B(2\rho)}$ $\forall t \in (0, t_0)$, así u verifica la ecuación lineal homogénea en $(0, t_0)$ y así

$$\|u(t)\|_\alpha \leq C_0 e^{-\delta_1(t-s)} \|u(s)\|_\alpha \quad \text{con } 0 < s < t < t_0$$

y por continuidad vale en $[0, t_0)$; en particular con $s = 0$ y $t \in (0, t_0)$

$$2\rho < \|u(t)\| \leq C_0 e^{-\delta_1 t} \|u_0\|_\alpha = 2\rho C_0 e^{-\delta_1 t}$$

y por tanto $t < \frac{\text{Ln}(C_0)}{\delta_1}$, y entonces $t_0 \leq \frac{\text{Ln}(C_0)}{\delta_1} = T_0$, luego $u(t)$ no puede permanecer fuera de $\overline{B(2\rho)}$ un tiempo mayor que T_0 y en este tiempo

$$\|u(t)\| \leq C_0 e^{-\delta_1 t} \|u_0\| = 2\rho C_0 e^{-\delta_1 t} \leq 2\rho C_0$$

por tanto $u(t) \in \overline{B(2\rho C_0)} \quad \forall t \geq 0$.

ii) Sea $B \subset X^\alpha \setminus \overline{B(2\rho)}$ acotado, sea $u_0 \in B$ y definamos

$$0 < t(u_0) = \inf \{ t > 0, \|u(t)\|_\alpha = 2\rho \} \leq \infty$$

así con $t \in [0, t(u_0))$ tenemos que $\|u(t)\|_\alpha \leq C_0 e^{-\delta_1 t} \|u_0\|_\alpha$, pero $C_0 e^{-\delta_1 t} \|u_0\|_\alpha \leq 2\rho$ si y sólo si

$$t \geq \frac{1}{\delta_1} \text{Ln} \left(\frac{C_0 \|u_0\|_\alpha}{2\rho} \right) = T(u_0) > 0$$

por tanto $t(u_0) \leq T(u_0) < \infty$ y además $\|u(t(u_0))\| = 2\rho$; sea

$$T(B) = \sup \left\{ T(u_0), u_0 \in B \right\} = \frac{1}{\delta_1} \ln \left(\frac{C_0 \sup \{ \|u_0\|_\alpha, u_0 \in B \}}{2\rho} \right) < \infty$$

así $\forall u_0 \in B \exists t \leq t_B$ tal que $S_T(t)u_0 \in \overline{B(2\rho)}$.

iii) Sea $B_0 \subset X^\alpha$, acotado, sea $B = B_0 \setminus \overline{B(2\rho)}$ y definamos $t_B = T(B)$ como en ii) si B es no vacío, o $t_B = 0$ en caso contrario, con esto tenemos que $\forall u_0 \in B_0 \exists t \leq t_B$ tal que $S_T(t)u_0 \in \overline{B(2\rho)}$, así por 1), $S_T(t+s)u_0 = S_T(s)S_T(t)u_0 \in \overline{B(2\rho C_0)}$ $\forall s \geq 0$ y por tanto $\forall u_0 \in B_0$ $S_T(t)u_0 \in \overline{B(2\rho C_0)}$ $\forall t \geq t_B$, consecuentemente $\overline{B(2\rho C_0)}$ es absorbente. \square

Observaciones

i) Si $C_0 = 1$, $\overline{B(2\rho)}$ es además invariante para (S_T) .

ii) Como por (H4) y la elección de ρ , $\overline{B(\rho)}$ es absorbente para (S) y $\overline{B(2\rho C_0)}$ lo es para (S_T) , puede haber una dinámica asintótica no trivial para (S_T) en $\overline{B(2\rho C_0)} \setminus \overline{B(\rho)}$, que es una dinámica artificial para (S) .

iii) En la demostración anterior hemos probado además que si $\|u_0\|_\alpha \leq 2\rho$ entonces $\|S_T(t)u_0\|_\alpha \leq 2\rho C_0$ y si $\|u_0\|_\alpha > 2\rho$ entonces $\|S_T(t)u_0\|_\alpha \leq C_0 \|u_0\|_\alpha \quad \forall t \geq 0$.

Introduzcamos la siguiente

Definición 4.1 [7,8a]

Un semigrupo en un espacio de Banach E se dice "Uniformemente Acotado" si y sólo si

$$\forall \tau > 0 \quad \forall B \subset E \text{ acotado}, \quad \bigcup_{t=0}^{\tau} S(t)B \text{ es acotado en } E.$$

o equivalentemente $\forall \tau > 0 \quad \forall R > 0, \exists K(R) \geq 0$ tal que $\|S(t)u\|_E \leq K(R) \quad \forall t \in [0, \tau]$ y $\forall u$ tal que $\|u\|_E \leq R$

Así la observación anterior dice que fijado el Parámetro de

Truncamiento, (S_T) es Uniformemente Acotado, y que la condición de la definición se verifica incluso con $\tau = \infty$.

Lema 4.3

Sea (S) un semigrupo de aplicaciones continuas en un espacio métrico X , que posee un Atractor Maximal \mathbb{A} .

Sea B_0 abierto en X , que contiene a \mathbb{A} , entonces por la compacidad de \mathbb{A} , B_0 es absorbente para (S) .

(el recíproco: si B_0 absorbente, entonces B_0 contiene a \mathbb{A} , es obviamente cierto)

Demostración

Sea $B \subset X$ acotado, así $\text{dist}(S(t)B, \mathbb{A}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$; sea $\delta = \inf \{ d(v, B_0^c) \mid v \in \mathbb{A} \}$; como $\mathbb{A} \subset B_0$ y \mathbb{A} compacto, entonces $0 < \delta < \infty$ y por tanto $\exists t_B$ tal que $\forall t \geq t_B \text{ dist}(S(t)B, \mathbb{A}) < \frac{\delta}{2}$.

Veamos que $S(t)B \subset B_0 \forall t \geq t_B$: si $u \in S(t)B$ con $t \geq t_B$ y es tal que $u \in B_0^c$, entonces

$$d(u, \mathbb{A}) \leq \text{dist}(S(t)B, \mathbb{A}) < \frac{\delta}{2}$$

como \mathbb{A} compacto, $\exists z \in \mathbb{A}$ tal que $d(u, z) = d(u, \mathbb{A})$ y como por hipótesis $u \in B_0^c$

$$\frac{\delta}{2} > d(u, z) \geq d(z, B_0^c) \geq \delta$$

lo cual es evidentemente contradictorio. □

Teorema 4.1 (Propiedad de Localización)

Sean $\rho > 0$ y el sistema truncado (S_T) .

i) Sea \mathbb{M} una Variedad Inercial de (S_T) cerrada en X^α y sea \mathbb{A} el Atractor Maximal de (S) , entonces $\mathbb{A} \subset \mathbb{M}$.

ii) Supongamos además que (S) es Uniformemente Acotado. Sea $\mathbb{M}_\rho \subset \mathbb{M}$ abierto en \mathbb{M} tal que $\mathbb{A} \subset \mathbb{M}_\rho$.

Entonces $\forall B \subset X^\alpha$ acotado $\exists C(B) \geq 0$ tal que

$$\text{dist}(S(t)B, \mathbb{M}_\rho) \leq C(B) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.1)$$

donde como antes la distancia se toma en X^α .

Demostración

i) Como $S(t)\mathbb{A} = \mathbb{A} \subset \mathbb{B} \subset B(\rho) \quad \forall t \geq 0$, por el Lema 4.1

$$S_T(t)\mathbb{A} = S(t)\mathbb{A} = \mathbb{A} \quad \forall t \geq 0 \quad (4.2)$$

como \mathbb{M} es Variedad Inercial de (S_T) y \mathbb{M} cerrada entonces

$$\text{dist}(\mathbb{A}, \mathbb{M}) = \text{dist}(S_T(t)\mathbb{A}, \mathbb{M}) \leq C(\mathbb{A}) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

así $\mathbb{A} \subset \mathbb{M}$. En particular \mathbb{A} está contenido en el atractor maximal de (S_T) .

ii) Sea $B_0 \subset B(\rho)$ absorbente para (S) (podemos tomar así por ejemplo cualquier superconjunto de \mathbb{B} en $B(\rho)$). Sea $B \subset X^\alpha$ acotado, entonces $\exists t_B \geq 0$ tal que $\forall t \geq t_B \quad S(t)B \subset B_0$. Tomemos $\underline{B} = S(t_B)B$, así $S(t)\underline{B} \subset B_0 \subset B(\rho) \quad \forall t \geq 0$, por el Lema 4.1 tenemos que $S_T(t)\underline{B} = S(t)\underline{B} \quad \forall t \geq 0$, por tanto como \mathbb{M} es Variedad Inercial de (S_T)

$$\text{dist}(S(t)\underline{B}, \mathbb{M}) = \text{dist}(S_T(t)\underline{B}, \mathbb{M}) \leq C(\underline{B}) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t) \quad (4.3)$$

para una cierta constante $C(\underline{B}) \geq 0$.

a) Supongamos $\mathbb{M}_* \neq \mathbb{M}$, y sea $\delta = \inf \left\{ d(u, \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_*) \mid u \in \mathbb{A} \right\}$; como $\mathbb{M}_* \neq \mathbb{M}$ entonces $\delta < \infty$ y por la compacidad de \mathbb{A} $\delta > 0$, ya que en caso contrario $\exists \{u_n\} \subset \mathbb{A}$ tal que $d(u_n, \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_*) \xrightarrow{n} 0$, por la compacidad alguna subsucesión de $\{u_n\}$ (la llamamos igual) converge en \mathbb{A} a un elemento u_0 , y como para todo $n \in \mathbb{N}$

$$d(u_0, \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_*) \leq d(u_0, u_n) + d(u_n, \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_*)$$

entonces $d(u_0, \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_*) = 0$, pero $\mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_*$ es cerrado en \mathbb{M} y por tanto $u_0 \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}_* \cap \mathbb{A}$ lo cual es absurdo. Obsérvese que aquí hemos usado el hecho de que \mathbb{M} es subvariedad regular de X^α , y no solamente incluida en él.

Como \mathbb{A} es el Atractor Maximal de (S) y \underline{B} es acotado entonces $d(S(t)\underline{B}, \mathbb{A}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ y por tanto $\exists t_0 \geq 0$ tal que $\forall t \geq t_0$

$$d(S(t)\underline{B}, \mathbb{A}) < \frac{\delta}{2}.$$

Veamos que

$$d(S(t)B, \mathfrak{M}) = d(S(t)B, \mathfrak{M}_*) \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.4)$$

claramente con $w \in X^\alpha$ $\delta \leq d(w, \mathfrak{A}) + d(w, \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_*)$ ya que $\delta = \inf \{ d(u, v) \mid u \in \mathfrak{A}, v \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_* \}$ y la propiedad triangular; en particular con $w \in S(t)B$, $t \geq t_0$, $d(w, \mathfrak{A}) \leq d(S(t)B, \mathfrak{A}) < \frac{\delta}{2}$ y entonces $d(w, \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_*) > \frac{\delta}{2}$, pero entonces como

$$d(w, \mathfrak{M}) = \inf \{ d(w, \mathfrak{M}_*), d(w, \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_*) \} = d(w, \mathfrak{M}_*)$$

y se sigue (4.4). Así

$$\text{dist}(S(t)B, \mathfrak{M}_*) \leq C(B) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t) \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.5)$$

o equivalentemente

$$\text{dist}(S(s)B, \mathfrak{M}_*) \leq C(B) \exp(-M_{\alpha, \beta}(s-t_B)) \quad \forall s \geq T_0 = t_0 + t_B \quad (4.6)$$

como suponemos que (S) es Uniformemente Acotado, sea

$$L(B) = \sup \{ \text{dist}(S(t)B, \mathfrak{M}_*), t \in [0, T_0] \} < \infty \quad (4.7)$$

y con esto $\forall s \geq 0$

$$\text{dist}(S(s)B, \mathfrak{M}_*) \leq \max\{C(B), L(B)\} \cdot \exp(M_{\alpha, \beta} t_B) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} s)$$

tomando $C(B) = \max\{C(B), L(B)\} \cdot \exp(M_{\alpha, \beta} t_B)$ se sigue (4.1)

b) Si $\mathfrak{M}_* = \mathfrak{M}$, como en (4.3)

$$\text{dist}(S(t)B, \mathfrak{M}) \leq C(B) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta} t) \quad \forall t \geq 0$$

o bien

$$\text{dist}(S(s)B, \mathfrak{M}) \leq C(B) \cdot \exp(-M_{\alpha, \beta}(s-t_B)) \quad \forall s \geq t_B \quad (4.8)$$

y concluimos como arriba con

$$L(B) = \sup \{ \text{dist}(S(t)B, \mathfrak{M}), t \in [0, t_B] \} < \infty \quad (4.9)$$

□

Observaciones

1) La condición de Acotación Uniforme es, en principio,

independiente de la condición de Disipatividad del sistema, que entre otras cosas implica que para cada dato inicial su semiórbita positiva está acotada (ya que el semigrupo es continuo). La condición de Acotación Uniforme pide que esto pase uniformemente sobre acotados.

ii) Sin la hipótesis de Acotación Uniforme no se puede asegurar que $L(B)$ definido en (4.7), (4.9) sea finito y sólo se obtiene, en principio, la atracción exponencial a la variedad después de un cierto transitorio, i.e. (4.6), (4.8).

Como consecuencia inmediata de todo lo anterior tenemos los siguientes Corolarios:

Corolario 4.1

Sea M_0 abierto de M , que contiene a X , entonces si

$$S(t)M_0 \subset M_0 \quad \forall t \geq 0$$

M_0 es Variedad Inercial para (S). □

Corolario 4.2

(S) tiene una Variedad Inercial en M si y sólo si $\exists M_0 \subset M$ abierto en M tal que $X \subset M_0$ y

$$S(t)M_0 \subset M_0 \quad \forall t \geq 0 \quad \square$$

El razonamiento del Teorema 4.1 nos lleva a la siguiente generalización:

Teorema 4.1 bis (Propiedad de Localización)

Sea (S) un semigrupo de aplicaciones continuas en un espacio métrico X , que posee un Atractor Maximal compacto X y una Variedad Inercial M . Entonces

Todo entorno de X en M , tras un cierto transitorio, atrae exponencialmente el flujo de (S), i.e. (4.5) es válido. Si además (4.7) (ó (4.9)) es finito, entonces se tiene (4.1).

Demostración

Con el mismo razonamiento que el seguido sobre el conjunto B en el Teorema 4.1 ii) se llega a (4.5); el resto es inmediato. \square

Gracias al Teorema 4.1 y a sus corolarios sólo queda por construir en una Variedad Inercial de (S_T) un abierto \mathfrak{M}_* como arriba. Veamos que esto puede hacerse siempre eligiendo "a priori" el Parámetro de Truncamiento $\rho > 0$.

Teorema 4.2

Supongamos que (S) es Uniformemente Acotado.

Sea $\rho > 0$ y sea \mathfrak{M} una Variedad Inercial cerrada en X^α de (S_T) , tal que $S_T|_{\mathfrak{M}}$ es abierta.

i) Sea $B_0 \subset X^\alpha$ abierto acotado, tal que $\mathfrak{A} \subset B_0$, que es por el Lema 4.3 absorbente y así $B_* = \bigcup_{t \geq 0} S(t)B_0$ es absorbente y acotado por ser (S) Uniformemente Acotado.

Supongamos que se ha elegido el parámetro $\rho > 0$ tal que

$$B_* \subset \overline{B(\rho)} \tag{4.10}$$

Si denotamos por \mathfrak{M}_* el interior (en \mathfrak{M}) (que es no vacío) de $\mathfrak{M} \cap B_*$, entonces

$$\mathfrak{M}_* \text{ es una Variedad Inercial de } (S) \tag{4.11}$$

En particular, si B_0 es invariante para (S) , i.e. $S(t)B_0 \subset B_0$ $\forall t \geq 0$ entonces $B_* = B_0$ y

$$\mathfrak{M}_* = \mathfrak{M} \cap B_0 \text{ es Variedad Inercial de } (S) \tag{4.12}$$

ii) Supongamos que fijado $\rho > 0$ existe $B_0 \subset X^\alpha$ abierto tal que $\mathfrak{A} \subset B_0 \subset \overline{B(\rho)}$ y tal que B_0 es absorbente para (S_T) (de hecho basta que se absorba a sí mismo), sea t_0 tal que $\forall t \geq t_0$ $S_T(t)B_0 \subset B_0$, sea

$$\mathfrak{M}_* = \bigcup_{t \geq t_0} S_T(t) \left(B_0 \cap \mathfrak{M} \right) \tag{4.13}$$

entonces \mathfrak{M}_* es Variedad Inercial de (S) .

Demostración

i) Claramente $S(t)B_\rho \subset B_\rho \quad \forall t \geq 0$, como $B_\rho \subset \overline{B(\rho)}$ por el Lema 4.1 $S_T(t)B_\rho = S(t)B_\rho \subset B_\rho \quad \forall t \geq 0$. Además $\mathcal{A} \subset B_0 \subset \text{int}(B_\rho)$, siendo $\text{int}(\cdot)$ el interior (en X^α) de un conjunto; sea $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \cap B_\rho$ y \mathcal{M}_ρ el interior de \mathcal{M}_0 en \mathcal{M} . Así $\mathcal{M}_\rho \supset B_0 \cap \mathcal{M} \supset \mathcal{A}$ y además

$$S_T(t)\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0 \quad \forall t \geq 0$$

y como $S_T(t)|_{\mathcal{M}}$ es abierta

$$S_T(t)\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{M}_\rho \subset B_\rho \subset \overline{B(\rho)} \quad \forall t \geq 0$$

y así por el Lema 4.1 $S(t)\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{M}_\rho \quad \forall t \geq 0$, por los corolarios anteriores concluimos.

ii) $B_0 \cap \mathcal{M}$ es un abierto de \mathcal{M} y como $S_T(t)|_{\mathcal{M}}$ es abierta entonces \mathcal{M}_ρ es abierto en \mathcal{M} ; además $\mathcal{A} \subset B_0 \cap \mathcal{M}$ y por (4.2) \mathcal{A} es (S_T) -invariante, por tanto $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\rho$; por último claramente

$$S_T(r)\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{M}_\rho \subset \left(\bigcup_{t \geq t_0} S_T(t)B_0 \right) \cap \mathcal{M} \subset B_0 \subset \overline{B(\rho)} \quad \forall r \geq 0$$

así nuevamente el Lema 4.1 nos da $S(r)\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{M}_\rho \quad \forall r \geq 0$ y concluimos. \square

Observaciones

i) Fijado $\rho > 0$, supuesto que se verifican las tres Condiciones de Salto Espectral, la Variedad Inercial de (S_T) construida en las Secciones anteriores, verifica todas las hipótesis requeridas en los Teoremas 4.1 y 4.2 ya que \mathcal{M} es cerrada en X^α por ser el gráfico de una función continua definida globalmente en X_1^α , y por el Lema 3.1 $S_T|_{\mathcal{M}}$ es un homeomorfismo de \mathcal{M} y es por tanto abierta. Además es fácil ver que en este caso \mathcal{M} verifica la Propiedad de Aproximación Óptima, i.e. $\forall u \in X^\alpha \exists v \in \mathcal{M}$ tal que $d(u, \mathcal{M}) = d(u, v)$, [11].

Así estos teoremas son aplicables si (S) es Uniformemente Acotado y se tiene la elección a priori (4.10) en cuyo caso si $\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{M}$ es Variedad Inercial de (S) (p.ej. \mathcal{M}_ρ como en (4.11), (4.12) o (4.13)) el flujo sobre \mathcal{M}_ρ queda determinado por (1.17) y la Forma Inercial:

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + f_1(I + \phi)p = 0 \\ p(0) = p_0 \in P(\mathfrak{M}_*) \subset X_1^\alpha \end{cases}$$

Resaltamos el hecho de que ahora aparece f_1 y no F_1 por lo cual la Forma Inercial describe fielmente el flujo de (S), sin "interferencias" por efecto del truncamiento.

ii) La hipótesis de invarianza hecha en la obtención de (4.12) es bastante restrictiva, aunque se verifica en importantes y numerosos casos y ha sido utilizada en [6,10,13]; por otro lado esta hipótesis representa el caso más simple en que propiedades de (S_T) son compartidas globalmente por (S).

Obsérvese además que la condición de ii) en el Teorema equivale a que no haya ninguna dinámica asintótica de (S_T) en $\overline{B(2\rho C_0)} \setminus \overline{B(\rho)}$.

3.4.2 Anidamiento de Variedades Inerciales.

El siguiente Teorema, probado en [11] en el caso Hilbertiano, sigue siendo válido en el caso general.

Teorema 4.3

Sea $\rho > 0$ tal que para (S_T) se verifican las dos primeras Condiciones de Salto Espectral, sea $\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ la variedad invariante construida en la Sección IV.2

A)

Sea $p: \mathbb{R} \rightarrow X_1^\alpha$ solución de $p_t + A_1 p + F_1(I + \phi)p = 0$ y sea $q: \mathbb{R} \rightarrow X_2^\alpha$ continua. Sea $u(t) = p(t) + q(t)$

Entonces son equivalentes

- i) $u(t) \in \mathfrak{M} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- ii) $q(t) = \phi(p(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- iii) q verifica $q_t + A_2 q + F_2(I + \phi)p = 0$ y $q(0) = \phi(p(0))$
- iv) q verifica $q_t + A_2 q + F_2(I + \phi)p = 0$ y $\|q\|_\alpha$ acotada

v) q verifica

$$q(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-A_2(t-s)} F_2(p + q)(s) ds \quad t \in \mathbb{R}$$

B)

Si $u(t)$ es solución de (S_T) definida en \mathbb{R} , son equivalentes

i) $u(t) \in \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ii) $Q(u(0)) = \phi(P(u(0)))$

iii) $\|Q(u(t))\|_\alpha$ es acotada en \mathbb{R}

Es decir \mathcal{M} contiene todas las órbitas globalmente definidas y Q-acotadas de (S_T) .

Demostración

A) i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii) \Leftrightarrow iv) y ii) \Rightarrow v) son inmediatas por construcción.

v) \Rightarrow ii) Fijada p, solución de $p_t + A_1 p + F_1(I + \phi)p = 0$ definida en \mathbb{R} , sea $q \in C_b(\mathbb{R}, X_2^\alpha)$ y sea

$$T(q)(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-A_2(t-s)} F_2(p + q)(s) ds$$

así

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(q_1)(t) - T(q_2)(t)\|_\alpha \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|q_1 - q_2\|_\alpha \|Q\|_{\beta, \alpha, \beta} \frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}}$$

pero por la Segunda Condición de Salto Espectral (2.9)

$$\|Q\|_{\beta, \alpha, \beta} \frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)}{\delta_2^{1+\beta-\alpha}} < 1$$

así T es una contracción estricta en $C_b(\mathbb{R}, X_2^\alpha)$ y tiene un único punto fijo; por (1.16) $\phi(p)$ es el único punto fijo de T .

Ahora, q verifica v) si y sólo si $T(q) = q$ y por tanto $q = \phi(p)$, i.e. ii).

B)

i) \Leftrightarrow ii) y i) \Leftrightarrow iii) son inmediatas.

iii) \Rightarrow ii) Sea $q \in C_b(\mathbb{R}, X_2^\alpha)$, sea $p_0 \in X_1^\alpha$ fijo; definamos \bar{p} tal que $\bar{p}_t + A_1 \bar{p} + F_1(\bar{p} + q) = 0$ con $\bar{p}(0) = p_0$, sea

$$T(q)(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-A_2(t-s)} F_2(\bar{p} + q)(s) ds$$

usando la dos primeras Condiciones de Salto Espectral, T es una contracción estricta en $C_b(\mathbb{R}, X_2^\alpha)$ y por tanto tiene un único punto fijo, [11].

Pero si p es tal que $p(t) = p(t, p_0, \phi)$, i.e.

$$p_t + A_1 p + F_1(I + \phi)p = 0 \quad \text{con} \quad p(0) = p_0$$

tomando $q = \phi(p) \in C_b(\mathbb{R}, X_2^\alpha)$ se tiene $\bar{p} = p$ y por (1.16) $\phi(p)$ es el único punto fijo de T .

Si $u(t)$ es solución de (S_T) definida en \mathbb{R} tal que $\|Q(u)\|_\alpha$ es acotada, sea $\bar{p} = P(u)$ y $\bar{q} = Q(u)$, así $\bar{p}_t + A_1 \bar{p} + F_1(\bar{p} + \bar{q}) = 0$ con $\bar{p}(0) = P(u(0))$ y

$$\bar{q}(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-A_2(t-s)} F_2(\bar{p} + \bar{q})(s) ds$$

por tanto $T(\bar{q}) = \bar{q}$ y consecuentemente $\bar{q} = \phi(p)$ con $p(t) = p(t, P(u(0)), \phi)$; evaluando en $t = 0$ queda $Q(u(0)) = \phi(P(u(0)))$, i.e. ii). \square

Con esto, como en [11], podemos probar el siguiente teorema de anidamiento:

Sea $\sigma(A) = \sigma_1^1 \cup \sigma_2^1 = \sigma_1^2 \cup \sigma_2^2$ (uniones disjuntas) tal que $\sigma_1^1 \subset \sigma_1^2$ y tal que para ambas descomposiciones se verifican las dos primeras Condiciones de Salto Espectral (en general distinguiremos con superíndices 1 y 2 los distintos elementos correspondientes a cada descomposición).

Así, sean $X_1^\alpha = P^1(X^\alpha)$, $X_2^\alpha = Q^1(X^\alpha)$ y $Y_1^\alpha = P^2(X^\alpha)$, $Y_2^\alpha = Q^2(X^\alpha)$; por tanto $X^\alpha = X_1^\alpha \oplus X_2^\alpha = Y_1^\alpha \oplus Y_2^\alpha$, con $X_1^\alpha \subset Y_1^\alpha$ y $X_2^\alpha \supset Y_2^\alpha$ y cada subespacio es complementado en el espacio que lo contiene, así $X_1^\alpha \oplus R = Y_1^\alpha$ y $R \oplus Y_2^\alpha = X_2^\alpha$ siendo la proyección (en X^α) sobre $R = P^2 - P^1$ (la proyección también la llamamos R).

Sean ϕ^1, ϕ^2 los únicos puntos fijos, correspondientes a cada descomposición, cuyos gráficos son variedades invariantes;

$\phi^1: X_1^\alpha \rightarrow X_2^\alpha$ y $\phi^2: Y_1^\alpha \rightarrow Y_2^\alpha$; sean ϕ_R, ϕ_Q tales que
 $\phi_R = R \circ \phi^1: X_1^\alpha \rightarrow R, \phi_Q = Q \circ \phi^1: X_1^\alpha \rightarrow Y_2^\alpha$ por tanto $\phi^1 = \phi_R + \phi_Q$.
 Así tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.4

Con las notaciones anteriores

$$\forall p_0 \in X_1^\alpha \quad \phi^2(p_0 + \phi_R(p_0)) = \phi_Q(p_0) \quad (4.14)$$

En particular

$$\mathfrak{M}_1 = \text{Graf}(\phi^1) \subset \mathfrak{M}_2 = \text{Graf}(\phi^2) \quad (4.15)$$

Demostración

Sean $p_0 \in X_1^\alpha$ fijo, $p(t) = p(t, p_0, \phi^1)$ como en (1.11), sea
 $q(t) = \phi^1(p(t))$, por tanto $u(t) = p(t) + q(t)$ es solución de
 (S_T) . Sean $p_2(t) = p(t) + \phi_R(p(t))$ y $q_2(t) = \phi_Q(p(t))$; así
 $u(t) = p_2(t) + q_2(t)$. Proyectando según P^2 y Q^2 obtenemos

$$\begin{cases} (p_2)_t + A_1^2 p_2 + F_1^2(p_2 + q_2) = 0 \\ (q_2)_t + A_2^2 q_2 + F_2^2(p_2 + q_2) = 0 \end{cases}$$

como q_2 es acotada en \mathbb{R} , por el Teorema 4.3 B) resulta que
 $q_2(0) = \phi^2(p_2(0))$, que es exactamente (4.14).

En particular

$$(I + \phi^2)(p_0 + \phi_R(p_0)) = p_0 + \phi_R(p_0) + \phi_Q(p_0) = (I + \phi^1)(p_0)$$

así $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ □

Obsérvese que ambos Teoremas 4.3 y 4.4 son independientes de
 la atractividad de las variedades y sólo son válidos para las
 variedades construidas por el método particular desarrollado en
 las Secciones IV.1 y IV.2; de hecho la demostración depende
 esencialmente de la existencia y unicidad del problema de punto
 fijo.

Veamos a continuación resultados válidos para Variedades
 Inerciales arbitrarias de Semigrupos Disipativos utilizando sólo
 propiedades dinámicas del semigrupo y por tanto independiente del
 método empleado para construirlas.

Teorema 4.5

Sea (S) un semigrupo en un espacio métrico X , con \mathcal{A} Atractor Maximal compacto, y supongamos que (S) posee la propiedad de Unicidad Retrógada, i.e. $S(t)$ es inyectivo $\forall t \geq 0$, [13,19,20].

Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ Variedades Invariantes de (S) con $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$, $i = 1,2$; supongamos que $S(t)\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2 \forall t \geq 0$.

Son equivalentes:

- i) $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$
- ii) $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ es abierto en \mathcal{M}_1
- iii) $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ es un entorno de \mathcal{A} en \mathcal{M}_1

Demostración

i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) son obvias.

iii) \Rightarrow i)

Si $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ es entorno de \mathcal{A} en \mathcal{M}_1 , sea $V \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ abierto en \mathcal{M}_1 tal que $\mathcal{A} \subset V$.

Sea $u_0 \in \mathcal{M}_1$, así $\text{dist}(S(t)u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ por tanto aplicando el Lema 4.3 con $X = \mathcal{M}_1, B_0 = V$

$$\exists t_0 \geq 0 \text{ tal que } \forall t \geq t_0 \quad S(t)u_0 \in V \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$$

En particular $S(t_0)u_0 \in \mathcal{M}_2$. Como $S(t_0)\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2 \exists w \in \mathcal{M}_2$ tal que $S(t_0)w = S(t_0)u_0$, pero como $S(t_0)$ es inyectivo, entonces $u_0 = w \in \mathcal{M}_2$ □

Observaciones

- i) La condición : " $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ es entorno de \mathcal{A} , en \mathcal{M}_1 " es una condición de NO TRANSVERSALIDAD entre \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 .
- ii) Sin la condición de Unicidad Retrógada de (S) , y con dos Variedades Inerciales arbitrarias, \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 , claramente se tiene

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \text{ y } S(t)(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \subset \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \forall t \geq 0 \quad (4.16)$$

Así tenemos los siguientes casos:

* Si $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ es abierto en \mathcal{M}_1 , por el Teorema 4.1 bis i), con

$X = \mathbb{R}^n$, entonces $M_1 \cap M_2$ es una Subvariedad Inercial de M_1 contenida en M_2 .

• Si $M_1 \cap M_2$ es entorno de \mathbb{R} en M_1 , por el Teorema 4.1 bis y por (4.16), $M_1 \cap M_2$ es invariante, atrae exponencialmente el flujo de (S) y tiene interior no vacío en M_1 ; sin embargo puede tener "partes" de dimensión inferior a la de M_1 .

• Si $M_1 \cap M_2$ es entorno de \mathbb{R} en M_1 y $S|_{M_1}$ es abierta, tomando M_0 , el interior en M_1 de $M_1 \cap M_2$, por (4.16), $\mathbb{R} \subset M_0$ y $S(t)M_0 \subset M_0$ $\forall t \geq 0$, como arriba, M_0 es una Subvariedad Inercial de M_1 , contenida en M_2 .

• Si el corte entre M_1 y M_2 es TRANSVERSAL, entonces típicamente $M_1 \cap M_2$ será una variedad de dimensión inferior, que verifica (4.16) y en un entorno de la cual es de esperar que las propiedades del flujo vengan determinadas por aquellas del flujo en las vecindades de M_1 y M_2 . En cualquier caso la atractividad de $M_1 \cap M_2$ es un problema no trivial.

BIBLIOGRAFIA

1. D.Henry "Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations", Lectures Notes in Mathematics 840, Springer (1982).
2. A.Pazy "Semigroups of Linear Operators and applications to PDE's", Applied Mathematical Sciences, vol.44, Springer (1983).
3. A.Friedman "Partial Differential Equations", Holt Rinehart Winston (1969).
4. S.N.Chow, J.K.Hale "Methods of Bifurcation theory", Springer (1982).
5. A.E.Taylor "Functional Analysis", Wiley (1961).
6. X.Mora , Tésis Doctoral, Univ. Autnoma, Bellaterra, Barcelona (1982).
7. A.V.Babin, M.I.Vishik "Attracteurs Maximaux dans les Equations aux Derivées Partielles", Seminario del College de France vol.V, Pitman, Londres.
8. J.K.Hale "Asymptotic behavior and Dynamics in Infinite Dimension", en *Nonlinear Differential Equations* (J.K.Hale y P.Martinez Amores editores), Pitman (1985).
- 8a. J.K.Hale "Asymptotic behavior of Dissipative Systems", Math. Surveys and Monographs #25, AMS, (1988).
9. P.Constantin, C.Foias, R.Temam "Attractors Representing Turbulent Flows", Memorias de la AMS 53, 314, 1-67 (1985).
10. S.N.Chow, K.Lu "Invariant Manifolds for Flows in Banach Spaces", J. Diff. Eqns. 74, 285-317 (1988).
11. C.Foias, G.R.Sell, R.Temam "Inertial Manifolds for Nonlinear Evolution Equations", J.Diff.Eqns. 73, 309-353 (1988).
12. C.Foias, B.Nicolaenko, G.R.Sell, R.Temam "Inertial Manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky Equation and an estimate of their lowest Dimension", Journal de Math. Pures et Appl. 67, #3 (1988).
- 12a. P.Constantin, C.Foias, B.Nicolaenko, R.Temam "Integral and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations", Applied Math. Sciences vol.70, Springer (1989).

13. R.Temam "Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics", Appl. Math. Sciences, vol. 68, Springer (1988).
14. B.Nicolaenko, B.Sheurer, R.Temam "Dynamical properties of a class of Pattern Formation Equations", Prepublicaciones del IMA #381 (1986).
15. J.Mallet-Paret, G.R.Sell "Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equations in higher space dimension", Prepublicaciones del IMA #331 (1987).
16. J.Mallet-Paret, G.R.Sell "The Principle of Spatial Averaging and Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equations", Lecture Notes in Math. 1248, 94-107 (1987).
17. C.Foias, M.S.Jolly, I.G.Kevrekidis, G.R.Sell, E.S.Titi "On the computation of Inertial Manifolds", Los Alamos preprint (1988).
18. I.G.Kevrekidis, B.Nicolaenko, J.C.Scovel "Back in the Saddle again: A computed assisted study of the Kuramoto Sivashinsky Equation", SIAM Journal of Applied Maths (1988).
19. C.Bardos, L.Tartar "Sur l'unicité Rétrograde des Equations Paraboliques et quelques questions voisines", Arch. Rat. Mech. Anal 50,10-15 (1973).
20. J.M.Ghidaglia "Some Backwards Uniqueness Results", Nonlinear Analysis T.M.A. vol 10, #8, 777-790 (1986).
21. G.Metivier "Valeurs Propes d'operateurs definis par la restriction de Systemes Variationels a des sous-espaces", J. Math.Pures et Appl., 133-156 (1978).
22. S.Agmon "Lectures in Elliptic Boundary Value problems", Van Nostrand, Princeton (1965).
23. X.Mora "Finite-dimensional attracting invariant manifolds for damped semilinear wave equations", Res. Notes in Math. 155, 172-183 (1987).

CAPITULO IV.

SIMETRÍAS EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

ASPECTOS DINAMICOS.

En este capítulo definimos el concepto de simetría y de soluciones simétricas de ecuaciones semilineales parabólicas, centrandonos en consecuencias dinámicas de la presencia de simetrías en el semigrupo correspondiente.

El origen de este capítulo hay que situarlo en la lectura de los libros de Golubitsky y Schaeffer [1,2] (del cual tomamos la mayor parte de nuestras notaciones y conceptos) y del de Bluman y Cole [3]; en el primero los autores hacen uso del concepto de simetría de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para abordar y simplificar y fundamentalmente esclarecer, por qué y qué ocurre en la bifurcación de soluciones estacionarias o periódicas de dicho sistema, mientras que en el segundo se emplean grupos de Lie de simetrías, bien para reducir el orden de una ecuación diferencial ordinaria (integración por cuadratura), bien para disminuir el número de variables independientes en una ecuación en derivadas parciales.

Nuestro enfoque se diferencia en dos aspectos, por un lado nuestro lenguaje se referirá a problemas de evolución en espacios de dimensión infinita, lo cual requiere ciertas modificaciones sobre el lenguaje de [1,2,3]; por otro lado estamos interesados en propiedades dinámicas de la ecuación de evolución bajo las restricciones de la simetría, por ejemplo simetrías de órbitas y de ω -límites, de los atractores y de las variedades inerciales. Además no se utiliza de forma esencial la estructura íntima del grupo de simetrías de forma que los resultados son igualmente válidos para grupos discretos o para grupos de Lie continuos multiparamétricos, por ejemplo.

**4.1 Grupo de Simetrías de una Ecuación en Derivadas Parciales.
Consecuencias dinámicas.**

Sea H espacio topológico y G un subgrupo del grupo de homeomorfismos de H , $G \subset \text{Hom}(H)$, consideremos la actuación (por evaluación) de G sobre H .

Definición 1.1

i) Si $A \subset H$ se llama Grupo de Isotropía de A a

$$\Sigma_A = \{g \in G, g(A) = A\} \quad (1.1)$$

Es el conjunto de simetrías de A .

ii) Si $\Sigma \subset G$ el conjunto de puntos fijos de Σ es

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in H, g(x) = x, \text{ para todo } g \in \Sigma\} \quad (1.2)$$

Son los puntos Σ simétricos. Obsérvese que si $\langle \Sigma \rangle$ denota el subgrupo generado por Σ en G , entonces $\text{Fix}(\Sigma) = \text{Fix}(\langle \Sigma \rangle)$.

iii) Si $x \in H$ se llama G -órbita de x a

$$\Gamma_x = \{gx, g \in G\} \quad (1.3)$$

Observaciones

i) Si $A \subset H$ entonces Σ_A es un subgrupo de G y si $A = \{x\}$ entonces $x \in \text{Fix}(\Sigma_x)$ que son los puntos con (al menos) las mismas simetrías de x . Además si $y = gx \in \Gamma_x$ entonces $\Sigma_y = g\Sigma_x g^{-1}$, en particular si Σ_x es normal entonces $\Gamma_x \subset \text{Fix}(\Sigma_x)$.

ii) Si Σ es un subgrupo de G entonces $\Sigma \subset \Sigma_{\text{Fix}(\Sigma)} \subset G$; si $g \in G$ entonces $g(\text{Fix}(\Sigma)) = \text{Fix}(g \circ \Sigma \circ g^{-1})$, en particular si Σ es normal entonces $\Sigma_{\text{Fix}(\Sigma)} = G$.

iii) Para todo Σ en G $\text{Fix}(\Sigma) = \bigcap \text{Fix}(g)$ donde la intersección se toma sobre $g \in \Sigma$ y $\text{Fix}(g)$ es el conjunto de puntos fijos de g . Entonces $\text{Fix}(\Sigma)$ es cerrado en H ; en particular si H es un espacio vectorial topológico y G es un grupo de isomorfismos lineales de H , entonces $\text{Fix}(\Sigma)$ es un subespacio vectorial cerrado de H .

iv) Si $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset G$ son subgrupos de G ; entonces

$\text{Fix}(\Sigma_1) \cap \text{Fix}(\Sigma_2) = \text{Fix}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \text{Fix}(\Sigma_1 \circ \Sigma_2)$; si $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ entonces $\text{Fix}(\Sigma_1) \supset \text{Fix}(\Sigma_2)$; por último si H es un espacio vectorial entonces $\text{Fix}(\Sigma_1) + \text{Fix}(\Sigma_2) \subset \text{Fix}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$.

Definición 1.2

Con las notaciones anteriores sean $X, Y \subset H$, $T: X \rightarrow Y$ una aplicación, y $g \in G$; decimos que g y T conmutan si y sólo si $g(X) \subset X$ y $g \circ T = T \circ g$ sobre X .

Obsérvese que fijada T entonces

$$G_T = \{g \in G, g(X) = X, g \text{ y } T \text{ conmutan}\}$$

es un subgrupo de G .

En nuestro marco de trabajo H será un espacio de Banach y $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal cerrado con dominio denso, más aún A será sectorial en H , así $-A$ genera un semigrupo analítico de operadores lineales e^{-At} , $t \geq 0$, [9,10]; hay un caso particular interesante, llamado caso hilbertiano, en el cual H será un espacio de Hilbert separable y $(A, D(A))$ es lineal no acotado, cerrado con dominio denso, positivo autoadjunto y con resolvente compacta; así el espectro de A es $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_n$, una sucesión no decreciente convergente a $+\infty$. Denotando por $N(\lambda)$ el autoespacio asociado a $\lambda \in \sigma(A)$ y por P_λ la correspondiente proyección ortogonal sobre $N(\lambda)$, tenemos que $H = \oplus N(\lambda)$, $I = \sum P_\lambda$ (donde las sumas son sobre $\lambda \in \sigma(A)$), $A \equiv \lambda I$ en $N(\lambda)$ y si $x \in D(A)$ entonces $Ax = \sum \lambda P_\lambda(x)$ (ver Capítulo I).

En general si $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ con $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ y si σ_1, σ_2 son conjuntos espectrales entonces se pueden definir las proyecciones y los subespacios espectrales asociados a estos conjuntos, [9,11].

Por otro lado G será un grupo de isomorfismos lineales de H , i.e. un subgrupo de $\text{Iso}(H)$.

Con estas notaciones tenemos el siguiente resultado de aspecto más o menos clásico:

Proposición 1.1

Sea $g \in \text{Iso}(H)$ y A como antes, entonces son equivalentes:

- i) g conmuta con A
- ii) g conmuta con e^{-At} , $t \geq 0$
- iii) g^{-1} conmuta con A

Consecuentemente si g conmuta con A entonces g conmuta con todas las proyecciones espectrales, P , asociadas con cualquier descomposición espectral de $\sigma(A)$, y más aún $g \in \text{Iso}(R(P))$.

Más aún en el caso hilbertiano g conmuta con A si y sólo si $g \in \text{Iso}(N(\lambda))$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$.

Demostración

i) \Rightarrow ii) Si g conmuta con A entonces para todo $\lambda \in \sigma(-A)$, g conmuta con $(\lambda + A)$ y por tanto $(\lambda + A)^{-1}g = g(\lambda + A)^{-1}$ sobre el rango de $(\lambda + A)$, i.e. sobre H y por tanto g conmuta con $(\lambda + A)^{-1}$. Pero se sabe, [9,11], que $e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda$ siendo Γ una curva adecuada en \mathbb{C} y por tanto

$$ge^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} g(\lambda + A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} g d\lambda = e^{-At} g$$

ii) \Rightarrow i) Si $ge^{-At} = e^{-At}g$ entonces para cada $x \in D(A)$

$$-Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-At}x - x}{t} \quad \text{y entonces} \quad -gAx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-At}g(x) - g(x)}{t} \quad \text{de}$$

donde $g(x) \in D(A)$ y $Agx = gAx$.

Ahora iii) \Rightarrow ii) es claro.

Si P es una proyección espectral entonces P se puede escribir como $P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} d\lambda$ para cierta curva Γ en \mathbb{C} , [9,11], de donde es obvio que g conmuta con P y que $g \in \text{Iso}(R(P))$.

En el caso hilbertiano, reciprocamente si $g \in \text{Iso}(H)$ y $g \in \text{Iso}(N(\lambda))$ para todo $\lambda \in \sigma(A)$, entonces $g \circ A = \lambda g$ y como $g(N(\lambda)) = N(\lambda)$ entonces

$$A \circ g = A \circ g = \lambda g$$

$$\begin{matrix} A \circ g & = & A & \circ & g & = & \lambda g \\ |N(\lambda) & & |N(\lambda) & & |N(\lambda) & & |N(\lambda) \end{matrix}$$

así g y A conmutan sobre $N(\lambda)$ (si H fuese de dimensión finita

habríamos terminado). Sea $x \in H$, escribiendo $x = \sum p_\lambda$ con $p_\lambda = P_\lambda(x)$, entonces $g(x) = \sum g(p_\lambda)$ y como $g(N(\lambda)) = N(\lambda)$ entonces tenemos que $g \circ P_\lambda = P_\lambda \circ g$; además $x \in D(A)$ si y sólo si $\sum \lambda^2 |p_\lambda|^2 < \infty$ y en este caso $\sum \lambda^2 |g(p_\lambda)|^2 \leq \|g\|^2 \cdot \sum \lambda^2 |p_\lambda|^2 < \infty$, siendo $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ las normas de H y de operadores respectivamente. Consecuentemente $g(D(A)) \subset D(A)$, y para acabar, si $x \in D(A)$ entonces

$$(A \circ g)(x) = A(\sum g(p_\lambda)) = \sum \lambda g(p_\lambda) = g(\sum \lambda p_\lambda) = (g \circ A)(x)$$

□

Corolario 1.1

En la situación anterior si g y A conmutan entonces $g \in \text{Iso}(X^\epsilon)$ con $\epsilon \in [0,1]$, siendo X^ϵ los espacios de interpolación usuales asociados a las potencias fraccionarias de A , [9].

Demostración

Como es sabido $X^0 = H$ y $X^1 = D(A)$ y tomando λ tal que $\text{Re}(\sigma(A + \lambda)) > 0$ y poniendo $A_1 = A + \lambda$ entonces la norma en X^1 , $|\cdot|_1$, es la norma del grafo para A_1 , [9], y así para cada $x \in X^1$ $|g(x)|_1 = |A_1 g x| = |g A_1 x| \leq \|g\| \cdot |x|_1$ y por tanto $g \in \mathcal{L}(X^1, X^1)$; como g^{-1} también lo verifica entonces $g \in \text{Iso}(X^1)$; finalmente como los espacios X^ϵ son espacios de interpolación y $g \in \text{Iso}(X^\epsilon)$ con $\epsilon = 0,1$ entonces $g \in \text{Iso}(X^\epsilon)$ con $\epsilon \in [0,1]$. □

Sea A como antes, G un grupo de isomorfismos lineales de H y sea $f: X \rightarrow Y$ con X, Y subespacios de H . Consideremos la ecuación semilineal en H

$$(ES) \begin{cases} u_t + Au + f(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

Suponemos que (ES) genera un semigrupo en X denotado $S(t)$, este semigrupo esta posiblemente sólo definido localmente en t , sin embargo, por comodidad más abajo escribiremos ciertas expresiones como si estuviese definido globalmente, la lectura en el caso local es obvia; de hecho al referirnos al comportamiento asintótico supondremos que está globalmente definido.

En la práctica al usar los resultados del Capítulo I en el

caso hilbertiano o los de [9] en el caso general, X e Y serán dos espacios de interpolación de exponentes no negativos, $X = X^\alpha$ y $Y = X^\beta$ con $0 \leq \alpha - \beta < 1$ y f será localmente lipschitz.

Proposición 1.2

Supongamos que A y f conmutan con todos los elementos de G . Entonces para todo $t \geq 0$ y para todo $g \in G$

$$S(t) \circ g = g \circ S(t) \text{ sobre } X \tag{1.4}$$

Es decir $S(t)$ conmuta con los elementos de G . En particular g transforma órbitas en órbitas y si $\Sigma \subset G$ entonces $V = \text{Fix}(\Sigma)$ es un subespacio vectorial positivamente invariante, i.e. si $u \in V \cap X$ entonces $S(t)u \in V$ para todo $t \geq 0$.

Además si $B \subset X$ entonces para todo $t \geq 0$

$$\Sigma_{S(t)B} \supset \Sigma_B \tag{1.5}$$

y si además $S(t)$ es inyectivo (t fijo), es decir tenemos Unicidad Retrógrada, [7,8], entonces con $0 \leq s \leq t$

$$\Sigma_{S(t)B} = \Sigma_{S(s)B} = \Sigma_B \tag{1.6}$$

Demostración

Sea $u_0 \in X$ y consideremos $u(t) = S(t)u_0$ la solución de (ES), como $g \in G$ conmuta con A y f y como $g \in \text{Iso}(H)$ entonces claramente $g(X) \subset X$ y $0 = g(u_t + Au + f(u)) = g(u)_t + A(g(u)) + f(g(u))$, así $g(u(t))$ es otra solución de (ES) y por unicidad

$$g(S(t)u_0) = S(t)(g(u_0))$$

Claramente g transforma órbitas en órbitas y si tomamos $V = \text{Fix}(\Sigma)$ con $\Sigma \subset G$ entonces si $u_0 \in V \cap X$, $g(u_0) = u_0$ para todo $g \in \Sigma$ y así $g(S(t)u_0) = S(t)u_0$ con $g \in \Sigma$, por tanto $S(t)u_0 \in V \cap X$.

Además si $B \subset X$ y $g \in \Sigma_B$ por lo anterior $g(S(t)B) = S(t)g(B) = S(t)B$ y así $g \in \Sigma_{S(t)B}$.

Si además $S(t)$ es inyectivo, $g \in \Sigma_{S(t)B}$ si y sólo si $g(S(t)B) = S(t)g(B) = S(t)B$ y de la última igualdad deducimos que para todo $b_1 \in B$ existe un único $b_0 \in B$ tal que $b_1 = g(b_0)$, i.e. $g(B) = B$ y por tanto $g \in \Sigma_B$. □

Notación

Cuando (1.4) se verifica decimos que g es una Simetría de la ecuación (ES) y que G es un Grupo de Simetrías de (ES) (o equivalentemente del semigrupo).

Si (1.5) es una inclusión estricta decimos que hay Ruptura Dinámica de Simetría (en tiempo finito).

La presencia de un grupo de simetrías en una ecuación tiene una inmediata influencia en la estructura dinámica del semigrupo como ya hemos visto en la Proposición 1.2, y a su vez tiene un reflejo en el comportamiento asintótico de soluciones. Para expresar esto necesitamos algo de notación:

Definición 1.3

i) Sea $B \subset X$, definimos su ω -límite como

$$\omega(B) = \{w \in X, \exists \{x_n\} \subset B, \{t_n\}_n \rightarrow \infty, \text{ con } S(t_n)x_n \rightarrow w\} \quad (1.7)$$

ii) Si $K \subset X$ es invariante, i.e. $S(t)K = K$ para todo $t \geq 0$, definimos sus Cuencas de Atracción:

$$C_1(K) = \{w \in X, \exists \{t_n\}_n \rightarrow \infty \text{ con } \text{dist}(S(t_n)w, K) \rightarrow 0\}$$

$$C_2(K) = \{w \in X, \forall \{t_n\}_n \rightarrow \infty \text{ se tiene } \text{dist}(S(t_n)w, K) \rightarrow 0\} \quad (1.8)$$

donde como es usual $\text{dist}(x, K) = \inf\{d(x, y), y \in K\}$; así claramente $C_2 \subset C_1$ y ambos son conjuntos positivamente invariantes.

iii) Un Atractor Maximal (único cuando existe, [6]) del semigrupo es un conjunto $A \subset X$ compacto invariante ($S(t)A = A$) tal que para todo $B \subset X$ acotado se verifica que

$$\text{dist}(S(t)B, A) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

donde como es usual $\text{dist}(A, B) = \sup\{\text{dist}(a, B), a \in A\}$

Observaciones

i) Para que los términos de la Definición 1.3 estén bien definidos es necesario indicar qué métrica se considera en X , de ella sólo es necesario indicar que sea una topología normada para la cual los elementos de G , restringidos a X , sean continuos y esto equivale a

$$G \subset \text{Iso}(X)$$

(además de ésta condición usualmente el semigrupo también verificará alguna condición de regularidad, continuidad por ejemplo). Como se dijo anteriormente en muchos casos X es un espacio de potencias fraccionarias en cuyo caso el Corolario 1.1 hace que esta hipótesis se verifique.

ii) El ω -límite definido en (1.7) y las cuencas definidas en (1.8) puede tener o no propiedades de invarianza y/o atractividad dependiendo de diversas características de la ecuación (ES), [6], lo que probaremos es que independientemente de esto siempre tienen ciertas propiedades de simetría.

Proposición 1.3

i) Para todo $B \subset X$

$$g(\omega(B)) = \omega(g(B)) \text{ para todo } g \in G \quad (1.10)$$

En particular $\Sigma_{\omega(B)} \supset \Sigma_B$ (1.11)

ii) Si K es invariante entonces $g(K)$ es invariante con $g \in G$ (lo mismo ocurre si K es sólo positivamente invariante). Siendo $C(K)$ cualquiera de las cuencas definidas arriba entonces

$$g(C(K)) = C(g(K)) \text{ para todo } g \in G \quad (1.12)$$

y en particular $\Sigma_{C(K)} \supset \Sigma_K$ (1.13)

iii) Si \mathfrak{A} es el Atractor Maximal entonces \mathfrak{A} es G -simétrico:

$$\Sigma_{\mathfrak{A}} = G \quad (1.14)$$

Demostración

i) Sean $B \subset X$ y $g \in G$; $w \in \omega(B)$ si y sólo si existen $\{x_n\} \subset B$ y $\{t_n\}_n \rightarrow \infty$, con $S(t_n)x_n \rightarrow w$ en cuyo caso $\{g(x_n)\} \subset g(B)$ y $S(t_n)g(x_n) = g(S(t_n)x_n) \rightarrow g(w)$ y por tanto $g(w) \in \omega(g(B))$ o equivalentemente $g(\omega(B)) \subset \omega(g(B))$; como esto también vale con g^{-1} concluimos (1.10), de donde (1.11) es obvio. Obsérvese que además

por (1.5) para todo $t \geq 0$ $\Sigma_{\omega(B)} \supset \Sigma_{S(t)B} \supset \Sigma_B$.

ii) Si $K \subset X$ es positivamente invariante $S(t)K \subset K$, $t \geq 0$, y así $S(t)g(K) = g(S(t)K) \subset g(K)$ y $g(K)$ es positivamente invariante. Si K es invariante $S(t)K = K$ y así $S(t)g(K) = g(S(t)K) = g(K)$ y $g(K)$ es invariante.

Sea $w \in C_2(K)$ (por ejemplo), así $\forall \{t_n\}_n \rightarrow \infty$ se tiene $\text{dist}(S(t_n)w, K) \rightarrow 0$, como la métrica proviene de una norma para la que los elementos de G son continuos, entonces $\text{dist}(g(S(t_n)w), g(K)) \rightarrow 0$ y por tanto $g(w) \in C_2(g(K))$, siendo análogo con $C_1(K)$; así $g(C(K)) \subset C(g(K))$ y como podemos tomar g^{-1} deducimos (1.12) y (1.13).

iii) Sea \mathfrak{A} el atractor maximal de (ES), por lo anterior $g(\mathfrak{A})$ es compacto e invariante y como \mathfrak{A} es maximal para la relación de inclusión entre los conjuntos compactos e invariantes entonces $g(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$, tomando g^{-1} deducimos (1.14). □

4.2 Variedades Inerciales.

Recordamos ahora la definición de Variedad Inercial dada en el Capítulo III para sistemas dinámicos disipativos: $\mathcal{M} \subset X$ subvariedad regular de clase C^k y dimensión N es una Variedad Inercial de (ES) si

- i) $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \quad t \geq 0$, es decir \mathcal{M} es positivamente invariante.
- ii) \mathcal{M} contiene al atractor maximal, \mathcal{A} .
- iii) Existe $M > 0$ tal que $\forall B \subset X$ acotado existe $C(B) \geq 0$ tal que $\text{dist}(S(t)B, \mathcal{M}) \leq C(B) \cdot \exp(-Mt)$, $t \geq 0$.

Un primer resultado es el siguiente:

Proposición 2.1

Sea \mathcal{M} una Variedad Inercial para (ES), entonces para todo $g \in G$ se tiene que $g(\mathcal{M})$ es una Variedad Inercial de (ES) de la misma clase, dimensión y tasa de atracción que \mathcal{M} .

Demostración

Por la Proposición 1.3, $g(\mathcal{M})$ es positivamente invariante y como $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ entonces $\mathcal{A} = g(\mathcal{A}) \subset g(\mathcal{M})$; si $B \subset X$ acotado, como g es continua en X , denotando $\|g\|$ la norma en $\mathcal{L}(X)$

$$\text{dist}(S(t)g(B), g(\mathcal{M})) \leq \|g\| \cdot \text{dist}(S(t)B, \mathcal{M}) \leq \|g\| C(B) \cdot \exp(-Mt)$$

pero como g y g^{-1} transforman acotados de X en acotados, para todo $B \subset X$ acotado

$$\text{dist}(S(t)B, g(\mathcal{M})) \leq \|g\| \cdot C(g^{-1}(B)) \cdot \exp(-Mt) \quad (2.1)$$

y por tanto $g(\mathcal{M})$ es variedad inercial, que es homeomorfa a \mathcal{M} (g es isomorfismo lineal) y por tanto de la misma clase y dimensión y con la misma tasa de atracción. \square

Un resultado deseable a la vista de resultados anteriores sería $g(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ para todo $g \in G$, al menos bajo algunas hipótesis extra, lo cual implica que el sistema dinámico restringido a \mathcal{M} hereda todas las simetrías del grupo G ; si por contra $g(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$

para algún g en G , esto nos proporciona algunas propiedades geométricas del flujo entorno al atractor maximal: sea $\mathfrak{M}_g = \mathfrak{M} \cap g(\mathfrak{M})$ que es intersección de dos variedades de igual clase, dimensión y tasa de atracción, que es positivamente invariante y que contiene al atractor maximal, así si el corte es No Transversal (ver Sección III.4) entonces \mathfrak{M}_g contiene una Subvariedad Inercial de la misma clase y dimensión que \mathfrak{M} ; si por contra el corte es Transversal entonces en este caso, típicamente \mathfrak{M}_g sera una variedad de dimensión $\text{Dim}(\mathfrak{M}) - 1$.

Las Variedades Inerciales construidas con el método particular del Capítulo III gozan de mayor simetría, independientemente de su atractividad como refleja el siguiente resultado, Teorema 2.1, sin embargo hay que notar que de momento admitimos que al proceder al truncamiento de la no linealidad lo hacemos de tal manera que el sistema truncado posea las mismas simetrías que el original; más abajo probaremos que esto es cierto en situaciones muy generales. Con esta hipótesis

Teorema 2.1

Supuestas ciertas las Primera y Segunda Condiciones de Salto Espectral del Capítulo III sea $\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ la variedad invariante allí construida (para el sistema truncado).

Entonces $g(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ para todo $g \in G$ (i.e. $\sum_{\mathfrak{M}} = G$), o equivalentemente ϕ conmuta con todos los elementos de G .

En particular la Forma Inercial (Capítulo III) de (ES) tiene todas las simetrías de G .

Demostración

$\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ siendo $\phi: X_1 \rightarrow X_2$ lipschitz, y X_1, X_2 son rangos de proyecciones espectrales (suma de autoespacios de A en el caso hilbertiano), así $g(X_1) = X_1$, consecuentemente $g(\mathfrak{M}) = \text{Graf}(\psi)$ siendo $\psi = g \circ \phi \circ g^{-1}$ y por tanto $g(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ si y sólo si $g \circ \phi = \phi \circ g$ sobre X_1 .

Si la primera y segunda condiciones de Salto Espectral del Capítulo III se verifican, por el Teorema 4.3, Sección III.4, tenemos la siguiente caracterización de \mathfrak{M} :

" $u_0 \in \mathfrak{M}$ si y sólo si la solución $S_T(t)u_0$ está definida en $(-\infty, +\infty)$ y es Q-acotada"

siendo Q la proyección espectral sobre X_2 ; así si $v_0 = g(u_0) \in g(\mathfrak{M})$, con $u_0 \in \mathfrak{M}$, entonces $S_T(t)v_0 = g(S_T(t)u_0)$ está definida en $(-\infty, +\infty)$ y como g conmuta con Q, Proposición 1.1 arriba, entonces también esta Q-cotada, por tanto $v_0 = g(u_0) \in \mathfrak{M}$ y así $g(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$, tomando g^{-1} concluimos.

Por último con las notaciones del Capítulo III, la Forma Inercial de (S_T) viene dada por
$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(I+\phi)p = 0 \\ p(0) = p_0 \in X_1 \end{cases}, \text{ con}$$

$F_1 = P \cdot F$ siendo P la proyección espectral sobre X_1 y como $g(X_1) = X_1$, entonces g conmuta con A_1 y con $F_1(I+\phi)$ y es por tanto una simetría de la Forma Inercial. \square

Observaciones

i) Si \mathfrak{M} es finito dimensional entonces la Forma Inercial es una ecuación diferencial ordinaria con todas las simetrías del grupo G, así en principio, se pueden aplicar las técnicas de [1,2,3], sobre el sistema restringido a \mathfrak{M} .

ii) Al problema de punto fijo resuelto en el Capítulo III se le pueden añadir las restricciones de simetría sin alterar las condiciones de Salto Espectral: con las notaciones del Capítulo III, sea

$$\hat{\mathfrak{U}}_{b,L} = \mathfrak{U}_{b,L} \cap \{ \phi, g \cdot \phi = \phi \cdot g, g \in G \} \quad (2.2)$$

y poniendo $p(s, p_0, \phi)$ la solución de
$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(I+\phi)p = 0 \\ p(0) = p_0 \in X_1 \end{cases},$$

tenemos la transformación no lineal

$$\Gamma(\phi)p_0 = - \int_{-\infty}^0 e^{A_2 s} F_2(I+\phi)p(s, p_0, \phi) ds \quad (2.3)$$

con $\phi \in \hat{\mathfrak{U}}_{b,L}$ y $p_0 \in X_1$; así si $\phi \in \hat{\mathfrak{U}}_{b,L}$ entonces para todo $p_0 \in X_1$,

$p(s, g(p_0), \phi) = g(p(s, p_0, \phi))$ y como g también conmuta con $\exp(-At)$ entonces

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}(\phi) \circ g)(p_0) &= - \int_{-\infty}^0 e^{As} F_2(I+\phi)p(s, g(p_0), \phi) ds = \\ &= g(- \int_{-\infty}^0 e^{As} F_2(I+\phi)p(s, p_0, \phi) ds) = (g \circ \mathbb{T}(\phi))(p_0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Así el problema de punto fijo puede plantearse en $\hat{\mathfrak{B}}_{b,L}$ directamente.

iii) Según se probó en la Sección III.2 la función ϕ cuyo grafo es la variedad invariante del Teorema 2.1 es de soporte acotado en X_1 (Lema 2.2, Sección III.2) y claramente con $p \in X_1$ y $g \in G$ se tiene que $\phi(p) = 0$ si y sólo si $\phi(g(p)) = g(\phi(p)) = 0$ ya que g es invertible (y $g(X_1) = X_1$), por tanto el soporte de ϕ es G -invariante.

En cuanto al problema del truncamiento recordemos que en el Capítulo III procedimos de la siguiente forma: con $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ constantemente uno en $[0,1]$ y cero en $[2,\infty]$, decreciente y con derivada acotada y tomando una bola en X (espacio de fases, allí era X^α) $B(\rho)$, donde ρ es el parámetro de truncamiento, definíamos $F(u) = \theta\left(\frac{|u|}{\rho}\right) \cdot f(u)$, de forma que $\text{Sop}(F) \subset \bar{B}(2\rho)$, F y f coinciden sobre $\bar{B}(\rho)$ y F es globalmente lipschitz y acotada ($|\cdot|$ norma en X).

Si g conmuta con f , entonces g conmuta con F si y sólo si $|g(u)| = |u|$ o equivalentemente, si g es una transformación isométrica de X . Como veremos abajo esto es cierto en algunos casos, para una norma equivalente en X .

Si suponemos que G es un subgrupo topológico compacto de $\text{Iso}(X)$, entonces la Medida de Haar Normalizada, μ , de G está bien definida, [12], y es tal que

i) Si $f, g \in C(G, \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_G (af+bg) d\mu = a \int_G f d\mu + b \int_G g d\mu$$

ii) Si $f \in C(G, \mathbb{R})$, $f \geq 0$, entonces $\int_G f d\mu \geq 0$

iii) Si $\delta \in G$ entonces $\int_G f(\delta\gamma) d\mu(\gamma) = \int_G f(\gamma\delta) d\mu(\gamma) = \int_G f(\gamma) d\mu(\gamma)$

$$iv) \int_G 1 d\mu = 1$$

en particular si G es discreto entonces μ es la medida de contar en G .

Definimos entonces, sobre X : para todos $x, y \in X$

$$|x|_G^2 = \int_G |\gamma x|^2 d\mu(\gamma) \quad (2.5)$$

siendo $|\cdot|$ la norma de X . Así tenemos el siguiente resultado, [2]:

Lema 2.1

Con las notaciones anteriores, $|\cdot|_G$ es una norma en X para la que G es un grupo de Isometrías. La topología inducida por $|\cdot|_G$ es equivalente a la topología original de X . Si X es un espacio de Hilbert entonces $|\cdot|_G$ proviene del producto escalar

$$\langle x, y \rangle_G = \int_G \langle \gamma x, \gamma y \rangle d\mu(\gamma) \quad (2.6)$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar de X .

Demostración

Por la positividad de la medida de Haar $|x|_G = 0$ si y sólo si $|\gamma x| = 0$ para casi todo $\gamma \in G$ (respecto de μ) y por tanto $x = 0$; también es inmediato que para todo escalar λ , $|\lambda x|_G = |\lambda| |x|_G$; finalmente la propiedad triangular sale del hecho de que $\gamma \mapsto \gamma x$ está en $C(G, X)$ y por tanto $\gamma \mapsto |\gamma x|$ está en $L^2(G, \mathbb{R})$ y de la propiedad triangular en $L^2(G, \mathbb{R})$. Por tanto $|\cdot|_G$ es una norma en X .

Con $g \in G$, $x, y \in X$

$$|g(x)|_G^2 = \int_G |\gamma g(x)|^2 d\mu(\gamma) = \int_G |\gamma x|^2 d\mu(\gamma) = |x|_G^2 \quad (2.7)$$

y por tanto g es una isometría para $|\cdot|_G$. Más aún

$$\inf |\gamma^{-1}|^2 \cdot |x|^2 \leq |x|_G^2 = \int_G |\gamma x|^2 d\mu(\gamma) \leq \sup |\gamma|^2 \cdot |x|^2 \quad (2.8)$$

donde $|\cdot|$ es la norma en $\mathcal{L}(X)$ y el supremo y el ínfimo se toman sobre $\gamma \in G$ (que es acotado por hipótesis en $\text{Iso}(X)$); por tanto basta probar que $\inf |\gamma^{-1}| = \inf |\gamma| > 0$, de hecho afirmamos que $\inf |\gamma| = 1$, ya que si $\gamma \in G$ con $|\gamma| < 1$, entonces con $n \in \mathbb{N}$ $|\gamma^n| \leq |\gamma|^n \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$, pero como G es compacto

deduciríamos que $0 \in G$ lo cual es absurdo; como $I \in G$ entonces $\inf |\gamma| = 1$ y en particular $|x|^2 \leq |x|_G^2 \leq \sup |\gamma|^2 \cdot |x|^2$.

Si X es un espacio de Hilbert claramente $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ es una forma bilineal simétrica en X , definida positiva (por la positividad de la medida de Haar), y que induce la norma $|\cdot|_G$. \square

Observación

Si X es un espacio de Hilbert el producto escalar tiene otras buenas propiedades: Si A positivo o coercitivo o autoadjunto para $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces también lo es para $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$; además si V, W subespacios de X con $g(V) = V$, $g(W) = W$ para todo $g \in G$ y V y W son ortogonales para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entonces lo son para $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$: con $x \in V$, $y \in W$,

$$\langle x, y \rangle_G = \int_G \langle \gamma x, \gamma y \rangle d\mu(\gamma) = 0 \quad (2.9)$$

En particular los autoespacios $N(\lambda)$ con $\lambda \in \sigma(A)$ son ortogonales para $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$.

En las condiciones del Lema 2.1, podemos por tanto utilizar el truncamiento $F(u) = \theta \left(\frac{|u|_G}{\rho} \right) \cdot f(u)$ que conmuta con todos los elementos de G y con el que todos los resultados del Capítulo III se aplican y por tanto, además, el Teorema 2.1 nos da la simetría de la variedad inercial del sistema truncado. Obsérvese que con esta elección se trunca la no linealidad en una bola para la norma $|\cdot|_G$ y el parámetro de truncamiento se refiere a dicha bola.

En particular supuestas las tres Condiciones de Salto Espectral del Capítulo III nuestro interés es recuperar una variedad inercial G -simétrica de la ecuación original, y no (o no sólo) de la ecuación truncada; recordemos que el paso clave en el Capítulo III para hacer esto (una vez probada la Propiedad de Localización, Teorema 4.1, Sección III.4) es el Teorema 4.2, Sección III.4 que a continuación recordamos:



Teorema 4.2 (Sección III.4)

Supongamos que (S) (el semigrupo generado por (ES)) es Uniformemente Acotado.

Sea $\rho > 0$ y sea \mathfrak{M} una Variedad Inercial cerrada en X^α de (S_T) , tal que $S_T|_{\mathfrak{M}}$ es abierta.

i) Sea $B_0 \subset X^\alpha$ abierto acotado, tal que $\mathfrak{A} \subset B_0$ que es por tanto absorbente, así $B_* = \bigcup_{t \geq 0} S(t)B_0$ es absorbente y acotado por ser (S) Uniformemente Acotado.

Supongamos que se ha elegido el parámetro $\rho > 0$ tal que

$$B_* \subset \overline{B(\rho)} \quad (2.10)$$

Si denotamos por \mathfrak{M}_* el interior (en \mathfrak{M}) (que es no vacío) de $\mathfrak{M} \cap B_*$, entonces

$$\mathfrak{M}_* \text{ es una Variedad Inercial de (S)} \quad (2.11)$$

En particular si B_0 es positivamente invariante para (S), i.e. $S(t)B_0 \subset B_0 \forall t \geq 0$ entonces $B_* = B_0$ y

$$\mathfrak{M}_* = \mathfrak{M} \cap B_0 \text{ es Variedad Inercial de (S)} \quad (2.12)$$

ii) Supongamos que fijado $\rho > 0$ existe $B_0 \subset X^\alpha$ abierto tal que $\mathfrak{A} \subset B_0 \subset \overline{B(\rho)}$ y tal que B_0 es absorbente para (S_T) (de hecho basta que se absorba a sí mismo), sea t_0 tal que $\forall t \geq t_0$ $S_T(t)B_0 \subset B_0$, sea

$$\mathfrak{M}_* = \bigcup_{t \geq t_0} S_{T_1}(t) \left(B_0 \cap \mathfrak{M} \right) \quad (2.13)$$

entonces \mathfrak{M}_* es Variedad Inercial de (S). □

Observemos de nuevo que en presencia de simetrías y con el truncamiento anterior, $B(\rho)$ es una bola para $|\cdot|_G$ y que por tanto si B_0 se toma en el teorema tal que $g(B_0) = B_0$ para todo $g \in G$ (por ejemplo una bola para $|\cdot|_G$), entonces supuesta la condición (2.10), \mathfrak{M}_* dada por (2.11)-(2.13) verifica

$$g(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}_0 \text{ para todo } g \in G \text{ (i.e. } \Sigma_{\mathfrak{M}_0} = G)$$

Entonces hemos probado

Teorema 2.2

Con las notaciones del Teorema 4.2, Sección III.4 arriba, si B_0 se toma tal que $g(B_0) = B_0$ para todo $g \in G$ entonces en las condiciones del teorema si \mathfrak{M}_0 viene dada por (2.11)-(2.13), entonces \mathfrak{M}_0 es Variedad Inercial de la ecuación original y es G -simétrica, i.e. $g(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}_0$ para todo $g \in G$ o equivalentemente $\Sigma_{\mathfrak{M}_0} = G$.

Así, en particular, si \mathfrak{M} se contruye con el método de punto fijo del Capítulo III, entonces el flujo sobre \mathfrak{M}_0 queda determinado por la Forma Inercial:

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + f_1(I + \phi)p = 0 \\ p(0) = p_0 \in P(\mathfrak{M}_0) \subset X_1^\alpha \end{cases}$$

ahora esta ecuación no contiene ningún efecto de truncamiento y además posee todas las simetrías de G , (obsérvese que como g conmuta con las proyecciones espectrales y \mathfrak{M}_0 es g -invariante entonces $g(P(\mathfrak{M}_0)) = P(\mathfrak{M}_0)$). □

4.3 Semigrupo con Simetría Prescrita.

Un método corriente en [2,3,4,5], para obtener información de las simetrías de una ecuación es buscar soluciones con simetría prescrita, esto es, restringir el dominio de trabajo a un subespacio $V = \text{Fix}(\Sigma)$ con $\Sigma \in G$. Como se probó en la Proposición 1.2, $V \cap X$ es invariante para la ecuación semilineal

$$(ES) \begin{cases} u_t + Au + f(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

que suponemos genera un semigrupo disipativo en X , esto es suponemos la existencia de un Atractor Maximal compacto y que para todo B acotado en X , $\omega(B)$ como en la Definición 1.3 es no vacío, compacto, invariante y atrae la órbita de B (en [6] pueden encontrarse condiciones generales asegurando esto) y nos interesa el comportamiento asintótico de las soluciones con simetría Σ .

Es pues natural investigar qué características disipativas (atractores, variedades inerciales) de todo el sistema se heredan al semigrupo restringido; se observa fácilmente que la mayor parte de las propiedades referentes a conjuntos absorbentes, invariantes, ω -límites, atractores etc. de [6] se trasladan al semigrupo restringido, sin embargo la permanencia de variedades inerciales no es tan inmediata. Otra posibilidad consistiría en estudiar la disipatividad directamente sobre el semigrupo restringido a $X \cap V$, pero esto puede tener dificultades técnicas (por ejemplo las propiedades espectrales de A en V pueden no asegurar las Condiciones de Salto Espectral del Capítulo III, por ejemplo si V es de dimensión finita). En algún caso se puede dar el problema inverso: la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (Capítulo II) es disipativa sobre las funciones pares, que es un espacio de puntos fijos (ver Sección IV.4, abajo), mientras se desconoce si lo es sin la restricción de la simetría.

Tenemos entonces el siguiente resultado

Teorema 3.1

i) Sea $\Sigma \subset G$, subgrupo y denotemos ahora $V = \text{Fix}(\Sigma) \cap X$. Definimos

$$\mathfrak{A}(\Sigma) = V \cap \mathfrak{A} \quad (3.1)$$

Entonces $\mathfrak{A}(\Sigma)$ es compacto y positivamente invariante, contiene a todo compacto invariante de V y atrae acotados de V . En particular $\mathfrak{A}(\Sigma)$ contiene al Atractor Maximal del semigrupo restringido a V .

Si se verifica la Unicidad Retrógrada, [7,8], entonces $\mathfrak{A}(\Sigma)$ es invariante y es por tanto el Atractor Maximal del semigrupo restringido a V .

ii) Supuestas las tres Condiciones de Salto Espectral, sea $\mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$ la variedad inercial construida en el Capítulo III, y sea $\Sigma \subset G$, subgrupo, entonces

$$\mathfrak{M} \cap V = (I + \phi)(X_1 \cap V) \quad (3.2)$$

que es una subvariedad regular de V , positivamente invariante que contiene a $\mathfrak{A}(\Sigma)$ y que atrae exponencialmente las trayectorias que parten de acotados de V . En consecuencia $\mathfrak{M} \cap V$ es una Variedad Inercial, que además tiene la misma tasa de atracción que \mathfrak{M} . La Forma Inercial del semigrupo restringido viene dada por

$$\begin{cases} p_t + A_1 p + F_1(I + \phi)p = 0 \\ p(0) = p_0 \in X_1 \cap V \end{cases} \quad (3.3)$$

Demostración

i) Claramente $\mathfrak{A}(\Sigma)$ es compacto en V y positivamente invariante; si además $S(t)$ es inyectivo para todo t , como $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, si $x \in \mathfrak{A}(\Sigma)$ y $t \geq 0$, entonces $x = S(t)y$, con $y \in \mathfrak{A}$, y por la Proposición 1.2, $\Sigma \subset \Sigma_x = \Sigma_y$ y por tanto $y \in \mathfrak{A}(\Sigma)$, por tanto $S(t)\mathfrak{A}(\Sigma) = \mathfrak{A}(\Sigma)$, $t \geq 0$. Además en cualquier caso si K es compacto invariante de V , entonces $K \subset \mathfrak{A}$ (por ser maximal) y por tanto $K \subset \mathfrak{A}(\Sigma)$. En particular $\mathfrak{A}(\Sigma)$ contiene al Atractor Maximal del semigrupo restringido (si existe).

Si $B \subset V$ es acotado entonces por la hipótesis de disipatividad, $\omega(B)$ como en la Definición 1.3, es compacto e

invariante y atrae a $S(t)B$, por tanto como V es cerrado $\omega(B) \subset \mathfrak{A}(\Sigma)$ y por tanto $\mathfrak{A}(\Sigma)$ atrae acotados de V . De esto y como $\mathfrak{A}(\Sigma)$ es compacto se sigue la existencia del Atractor Maximal del semigrupo restringido, [6].

Por último supuesta la Unicidad Retrógrada, $\mathfrak{A}(\Sigma)$ es el Atractor Maximal (Definición 1.3).

ii) Observemos primero que por la Proposición 1.1 los elementos de G conmutan con las proyecciones espectrales sobre X_1 y X_2 , P y $Q = I - P$ respectivamente, y por tanto si $x \in \text{Fix}(\Sigma)$ entonces $P(x), Q(x) \in \text{Fix}(\Sigma)$; por tanto con $u \in \mathfrak{M} = \text{Graf}(\phi)$, $u = p + \phi(p)$ pertenece a $V = \text{Fix}(\Sigma)$ si y sólo si $g(p) = p$ (ya que ϕ conmuta con g , Teorema 2.1) y por tanto concluimos (3.2). Así $\mathfrak{M} \cap V$ es una variedad de la misma clase que \mathfrak{M} , que claramente contiene a $\mathfrak{A}(\Sigma)$.

En cuanto a la atractividad, en el Capítulo III, Sección III.3, se probó que supuestas las Condiciones de Salto Espectral entonces para todo $u_0 \in X$,

$$\text{dist}(S(t)u_0, P(S(t)u_0) + \phi(P(S(t)u_0))) \quad (3.4)$$

tiende a cero exponencialmente y de aquí se extraía la propiedad de atracción exponencial uniforme de la variedad \mathfrak{M} ; pero ahora para el semigrupo restringido, si $u_0 \in V$ entonces $S(t)u_0 \in V$ y por tanto $P(S(t)u_0)$ y $\phi(P(S(t)u_0))$ están en V , consecuentemente

$$P(S(t)u_0) + \phi(P(S(t)u_0)) \in (I + \phi)(X_1 \cap V) \quad (3.5)$$

y atrae exponencialmente a $S(t)u_0$, el resto es obvio. \square

Observación

En el caso hilbertiano X_1 es suma de los autoespacios correspondientes a los autovalores de A en un cierto subconjunto, σ_1 , de $\sigma(A)$, por tanto $X_1 \cap V$ está generado por los autovectores de A , con autovalor en σ_1 (ver Capítulo III) y con simetría Σ .

4.4 Ejemplo: Ecuación de Kuramoto-Velarde.

Recordemos el marco funcional y algunos resultados del Capítulo II:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu D^4 u + \beta u + \gamma (Du)^2 - \delta D^2(f(u)) = \frac{\gamma}{L} \int_0^L (Du)^2 \quad (4.1)$$

en $(0,L) \times (0,T)$, $u(x,0) = u_0(x)$ con $x \in \Omega = (0,L)$, con condiciones periódicas, $D^k u(x+L,t) = D^k u(x,t)$ para todos $t \in (0,T)$, $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \{0,1,2,3\}$, y condición de media nula

$$\int_{\Omega} u(x,t) dx = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

siendo $\nu > 0$, $\beta, \gamma, \delta \geq 0$, $D^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$, y $\delta f(s) = \sum_{k=1}^m \delta a_k s^k$, (para la ecuación original $\delta f(s) = -s - \frac{\delta s^2}{2}$).

En particular, tomando

$$H = \left\{ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}), u(x+L) = u(x), \int_{\Omega} u(x) dx = 0 \right\}$$

con la norma de $L^2(\Omega)$ y $V_k = X^{k/4} = H^k_{loc}(\mathbb{R}) \cap H$, $k \in \mathbb{N}$ ($V_0 = H$, $V_1 = V$, $V_4 = D(A)$), con la norma de $H^k(\Omega)$, entonces K-V está bien puesto en los espacios V_k .

El espectro de la parte lineal de orden superior es $\sigma(A) = \{ \lambda_n \}_{n \in \mathbb{N}} \uparrow \infty$ con

$$\lambda_n = \nu \left(\frac{2\pi}{L} n \right)^4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

con autoespacio generado por $\left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) \right\}$. Observemos que el período mínimo de estas funciones es $\frac{L}{n}$ y disminuye con n .

Un grupo de simetrías es inmediato: sobre funciones definidas en \mathbb{R} , $g_{\tau}(u)(x) = u(x + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ y $g_{\bullet}(u)(x) = u(-x)$, conmutan con todos los términos (lineales o no) de K-V; además g_{τ} y g_{\bullet} conservan las condiciones de contorno y media nula de K-V y son isometrías en H (con la norma de $L^2(\Omega)$), de hecho son isometrías en V_k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Así $G = \langle \{g_{\tau}, \tau \in \mathbb{R}\}, g_{\bullet} \rangle$ es un grupo (no conmutativo) de

simetrías de K-V. Claramente g_* es de orden 2 y $T = \{g_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ es un grupo conmutativo cuya actuación efectiva sobre H viene dada por el cociente de T sobre los elementos que actúan trivialmente en H , i.e. sobre $T_0 = \{g_\tau, \tau = kL, k \in \mathbb{Z}\}$ y por tanto

$$\frac{T}{T_0} \approx \frac{\mathbb{R}}{L\mathbb{Z}} \approx \{g_\tau, \tau \in [0, L)\} \approx S^1 \approx SO(2)$$

que es un grupo de Lie compacto y conmutativo ($SO(2)$ es el grupo de transformaciones ortogonales del plano que conservan la orientación, i.e. los giros).

Por tanto el grupo efectivo de simetrías es

$$G_0 = \langle \{g_\tau, \tau \in [0, L)\}, g_* \rangle \approx O(2) \quad (4.3)$$

($O(2)$ es el Grupo Ortogonal del plano) y así $\text{Fix}(g_*) = \{u \in H, u \text{ par}\}$ mientras que $\text{Fix}(g_\tau)$ es no trivial si y sólo si $\frac{\tau}{L} \in \mathbb{D}$, en cuyo caso $\text{Fix}(g_\tau)$ consiste de las funciones de H que son τ -periódicas; de hecho si $u \in \text{Fix}(g_\tau)$ es no trivial, con $\tau \leq L$ entonces el período mínimo de u , p , es tal que $L = mp$ y $\tau = np$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y así $p = L/m$ y $u \in \text{Fix}(g_{L/m})$; en consecuencia al considerar puntos fijos de elementos de $SO(2)$ podemos tomar directamente $\tau = L/m$, i.e. subarmónicos de L .

Podemos considerar conjuntos de puntos fijos de otros subgrupos de $O(2)$, como por ejemplo $Z(n)$ o el grupo diédrico $D(n)$, i.e. el grupo de simetrías de un n -ágono regular, [4]; representaciones de $Z(2)$ en G_0 son $\langle g_{L/2} \rangle$, $\langle g_* \rangle$ y $\langle g_* \cdot g_{L/2} \rangle$, de $Z(n)$ lo es $\langle g_{L/n} \rangle$ mientras que de $D(n)$ lo es $\langle g_* \cdot g_{L/n} \rangle$; sus puntos fijos son respectivamente las funciones de H que son $L/2$ -periódicas, las funciones pares, las funciones que verifican $u(x) = u(L/2-x)$ (o equivalentemente las funciones que pueden ponerse como la suma de una función par $L/2$ -periódica y una función impar $L/2$ -antiperiódica), las funciones L/n -periódicas y las funciones pares L/n -periódicas.

En particular, los espacios $\text{Fix}(g_\tau)$, $\text{Fix}(g_*)$, $\text{Fix}(g_* \cdot g_{L/2})$ y $\text{Fix}(\langle g_* \cdot g_{L/n} \rangle)$ son cerrados e invariantes para K-V, en $\text{Fix}(g_*)$ la ecuación K-S ($\delta = 0$) define un sistema dinámico disipativo (Capítulo II).

4.4.1 Modos Determinantes para soluciones simétricas

Supongamos que K-V genera un sistema dinámico disipativo (para quizá sólo determinados valores de los parámetros $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$, por ejemplo para la ecuación de Cahn Hilliard, $\gamma = 0$ y δf adecuada, según se vió en la Sección II.3), para lo cual basta, por ejemplo, probar la existencia de un conjunto absorbente en V (ver Sección II.2). Como $\lambda_N \approx N^4$ entonces los resultados de las Secciones III.3 y IV.1 son aplicables, en particular a la construcción de una variedad inercial de K-V en este rango de parámetros.

Como observamos anteriormente, los períodos mínimos de las autofunciones decrecen, esto permite "seleccionar", por intersección con la variedad inercial, como en el Teorema 3.1, distintos modos invariantes prefijando un período suficientemente pequeño, "lejos" de los únicos modos determinantes del comportamiento asintótico, de forma que la dinámica tiene que ser mucho más simple que el de una solución arbitraria. Las otras simetrías igualmente seleccionan modos invariantes para los que se puede construir variedades inerciales.

Precisando, con las notaciones de estas secciones, sea N tal que se verifican las Condiciones de Salto Espectral y por tanto $\sigma_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, $\sigma_2 = \{\lambda_n, n > N\}$, X_1 está generado por

$$\left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \dots, \sin\left(\frac{2\pi}{L}Nx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L}Nx\right) \right\} \quad (4.4)$$

y X_2 por el resto de autovectores; así la variedad inercial viene dada por $\mathbb{M} = \text{Graf}(\phi)$ con $\phi: X_1 \rightarrow X_2$, que es de dimensión 2N.

Los modos dados en (4.4) se llaman Modos Determinantes del sistema puesto que si denotamos por P la proyección asociada, si dos soluciones $u(t)$ y $v(t)$ verifican que $P(u(t)-v(t))$ tiende a cero entonces $u(t)-v(t)$ tiende a cero, [15], i.e. si para dos soluciones estos modos se comportan igual entonces ambas soluciones se comportan igual, en otras palabras el comportamiento de estos modos caracteriza la clase de soluciones con el mismo comportamiento asintótico. Esta propiedad está muy estrechamente relacionada con la Propiedad de Compresión encontrada en el

Capítulo III, Sección III.3, [13,14,15].

Consideremos $\tau_k = \frac{L}{k}$ y $G_k = \langle g_{\tau_k} \rangle \approx Z(k)$ y sea $Z_k = \text{Fix}(G_k)$, $k \in \mathbb{N}$ fijo; por el Teorema 3.1, $\mathfrak{M} \cap Z_k = (I + \phi)(X_1 \cap Z_k)$ es una variedad inercial para el semigrupo restringido a Z_k , pero como las proyecciones espectrales de Z_k están en Z_k , $X_1 \cap Z_k = \mathfrak{e}(N(\lambda) \cap Z_k) = \mathfrak{e}(N(\lambda) \cap Z_k)$ (la suma es sobre $\lambda \in \sigma_1$), así $X_1 \cap Z_k$ está generado por:

- i) $\{ \sin(jk\frac{2\pi}{L}x), \cos(jk\frac{2\pi}{L}x), jk \leq N, j \geq 1 \}$, si $k < N$
- ii) $\{ \sin(N\frac{2\pi}{L}x), \cos(N\frac{2\pi}{L}x) \}$ si $k = N$ (4.5)
- iii) $\{0\}$ si $k > N$

En particular si $k = N$ entonces $\mathfrak{M} \cap Z_N$ es una variedad inercial bidimensional que contiene la dinámica asintótica de las soluciones $\frac{L}{N}$ -periódicas. A su vez si $k > N$ entonces $\mathfrak{M} \cap Z_k = \{\phi(0)\}$ y por tanto las soluciones $\frac{L}{k}$ -periódicas convergen exponencialmente (y uniformemente para datos iniciales en conjuntos acotados) a $\phi(0)$ que es un punto de equilibrio de K-V, pero como Z_k es cerrado entonces $\phi(0)$ es $\frac{L}{k}$ -periódico para todo $k > N$ y por tanto $\phi(0) = 0$.

Este sorprendente resultado concuerda con el comportamiento de la ecuación lineal: las frecuencias altas son disipadas exponencialmente. Como el principio de superposición de soluciones no es válido, esta propiedad no determina el comportamiento de una solución arbitraria.

Es de destacar que en [17] se menciona este decaimiento de los modos de altas frecuencias aunque allí es observado sólo numéricamente.

Si ahora tomamos $\tau_k = \frac{L}{k}$ y $G_{\sigma,k} = \langle g_{\sigma, \tau_k} \rangle \approx D(k)$ y llamamos $Z_{\sigma,k} = \text{Fix}(G_{\sigma,k})$, tenemos entonces por el Teorema 3.1 que $\mathfrak{M} \cap Z_{\sigma,k} = (I + \phi)(X_1 \cap Z_{\sigma,k})$ es variedad inercial (que es una parte de la variedad inercial en Z_k construida arriba) y por (4.5) $X_1 \cap Z_{\sigma,k}$ está generado por

$$\begin{aligned}
\text{i)} & \{ \cos(jk \frac{2\pi}{L}x), jk \leq N, j \geq 1 \}, \text{ si } k < N \\
\text{ii)} & \{ \cos(N \frac{2\pi}{L}x) \} \text{ si } k = N \\
\text{iii)} & \{0\} \text{ si } k > N
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

en particular si $k = N$ entonces $\mathfrak{M} \cap Z_{\bullet, N}$ es una variedad inercial unidimensional que contiene la dinámica asintótica de las soluciones pares y $\frac{L}{N}$ periódicas.

Si ahora consideramos $G_{\bullet} = \langle g_{\bullet} \rangle$, $Z_{\bullet} = \text{Fix}(G_{\bullet})$ y el semigrupo restringido (a funciones pares), entonces de nuevo $\mathfrak{M} \cap Z_{\bullet} = (I + \phi)(X_1 \cap Z_{\bullet})$ es variedad inercial; en este caso $X_1 \cap Z_{\bullet}$ está generado por

$$\{ \cos(k \frac{2\pi}{L}x), 1 \leq k \leq N \}
\tag{4.7}$$

y por tanto la variedad inercial tiene dimensión N , sobre funciones pares.

Sobre Z_{\bullet} , K-V puede ser tratado directamente con el mismo marco funcional de antes, introduciendo la condición de paridad en los espacios H y V_k y utilizando los resultados del Capítulo I, de forma que la mayor parte de los resultados del Capítulo II siguen siendo válidos con esta restricción (como ya se ha dicho la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, $\delta = 0$, define un sistema dinámico disipativo sobre Z_{\bullet} y posee una variedad inercial, el mismo comportamiento para soluciones arbitrarias es un problema abierto), los autovalores son los mismos de (4.2) pero ahora son simples con autofunción coseno, [13]; la variedad inercial, con las notaciones de (4.4), se construye sobre $X_1 \cap Z_{\bullet}$, dado por (4.7).

Sin embargo $\{g_{\tau}, \tau \in [0, L)\}$ no son simetrías de la ecuación restringida, de hecho la única traslación (no trivial) que transforma todas las funciones pares y L -periódicas en funciones pares (y L -periódicas) corresponde a $\tau = \frac{L}{2}$, y así g_{τ} es una simetría orden 2 (por contra g_{\bullet} si es una simetría de la ecuación restringida a Z_k). En particular, supuesto que K-V es disipativo sobre Z_{\bullet} , por intersección con la variedad inercial según el Teorema 3.1, K-V restringido a funciones pares y $\frac{L}{2}$ -periódicas,

i.e. restringido a $\text{Fix}(\langle g_{\bullet}, g_{L/2} \rangle) = Z_{\bullet,2} = Z_{\bullet} \cap Z_2$, hereda una variedad inercial construida sobre $X_1 \cap Z_{\bullet,2}$, generado por

$$\left\{ \cos\left(2j\frac{2\pi}{L}x\right), 2j \leq N \right\} \quad (4.8)$$

cuya dimensión viene dada por el cardinal de $\{ j \in \mathbb{N}, 2j \leq N \}$, es decir la parte entera de $N/2$, siendo N la dimensión de la variedad inercial de $K-V$ para funciones pares.

Obviamente la acción del grupo G_0 proporciona soluciones no pares de $K-V$ con una dinámica trasladada por el grupo.

Si consideramos ahora $G_{\bullet,2} = \langle g_{\bullet}, g_{L/2} \rangle \approx Z(2)$ y denotamos $Z_{\bullet,2} = \text{Fix}(G_{\bullet,2}) = \{ u \in H, u(x) = u(L/2-x) \}$, de nuevo por el Teorema 3.1, sobre $Z_{\bullet,2}$ $K-V$ hereda una variedad inercial construida sobre $X_1 \cap Z_{\bullet,2}$, que está generado por

$$\left\{ \sin\left((2k+1)\frac{2\pi}{L}x\right), \cos\left(2j\frac{2\pi}{L}x\right), 2k+1 \leq n, 2j \leq N \right\} \quad (4.9)$$

cuya dimensión es por tanto N .

Volviendo a la ecuación completa (4.1), observemos que $g^{\bullet} = -g_{\bullet}$, i.e. $g^{\bullet}(u)(x) = -u(-x)$, transforma soluciones de (4.1), con polinomio $\delta f(s)$ y coeficiente γ dados, en soluciones de (4.1) con polinomio $\hat{\delta f}(s) = -\delta f(-s)$ (es decir cambian de signo los coeficientes pares del polinomio original) y coeficiente $-\gamma$; en consecuencia si δf es un polinomio impar entonces g^{\bullet} es simetría de C-H, ($\gamma = 0$), de forma que el grupo de simetrías es ahora

$$G_0 \otimes \langle g^{\bullet} \rangle = \langle \{ g_{\tau}, \tau \in [0, L] \}, g_{\bullet}, g^{\bullet} \rangle \quad (4.10)$$

por tanto además de los casos discutidos anteriormente tenemos que $Z^{\bullet} = \text{Fix}(g^{\bullet})$, funciones impares de H , es invariante para $C-H$ y además cada caso de espacio de puntos fijos anterior puede ser complementado con esta nueva simetría:

Tomando $\tau_k = \frac{L}{k}$ y $G_k^{\bullet} = \langle g^{\bullet}, g_{\tau_k} \rangle$, entonces en $Z_k^{\bullet} = \text{Fix}(G_k^{\bullet})$ tenemos una variedad inercial construida sobre $X_1 \cap Z_k^{\bullet}$, que está generado por

- i) $\{ \text{sen}(jk\frac{2\pi}{L}x), jk \leq N, j \geq 1 \}$, si $k < N$
 ii) $\{ \text{sen}(N\frac{2\pi}{L}x) \}$ si $k = N$ (4.11)
 iii) $\{0\}$ si $k > N$

en particular si $k = N$ entonces $\mathfrak{M} \cap Z_N^*$ es una variedad inercial unidimensional que contiene la dinámica asintótica de las soluciones impares y $\frac{L}{N}$ periódicas; obsérvese que $X_1 \cap Z_k^* = (X_1 \cap Z_{*,k}) \oplus (X_1 \cap Z_k^*)$ y que la variedad inercial de (4.5) se "descompone" de igual manera en las variedades inerciales de (4.6) y (4.11).

Si ahora consideramos $G^* = \langle g^* \rangle$, $Z^* = \text{Fix}(G^*)$ y el semigrupo restringido (a funciones impares), entonces de nuevo recuperamos una variedad inercial sobre $X_1 \cap Z^*$ que está generado por

$$\{ \text{sen}(k\frac{2\pi}{L}x), 1 \leq k \leq N \} \quad (4.12)$$

y por tanto la variedad inercial tiene dimensión N , sobre funciones impares; de nuevo la descomposición $X_1 = (X_1 \cap Z_*) \oplus (X_1 \cap Z^*)$ se refleja en las variedades de (4.4), (4.7) y (4.12). Como arriba, la única traslación (no trivial) que transforma todas las funciones impares y L -periódicas en funciones impares (y L -periódicas) corresponde a $\tau = \frac{L}{2}$, de forma que $C-H$ restringido a funciones impares y $\frac{L}{2}$ -periódicas, i.e. restringido a $\text{Fix}(\langle g^*, g_{L/2}^* \rangle) = Z_2^* = Z^* \cap Z_2$, hereda una variedad inercial construida sobre $X_1 \cap Z_2^*$, generado por

$$\{ \text{sen}(2j\frac{2\pi}{L}x), 2j \leq N \} \quad (4.13)$$

cuya dimensión es la parte entera de $N/2$. Obsérvese de nuevo en (4.5), con $k = 2$, (4.8) y (4.13) el efecto de la descomposición $X_1 \cap Z_2^* = (X_1 \cap Z_{*,2}) \oplus (X_1 \cap Z_2^*)$.

Para concluir pongamos $G^{* \circ 2} = \langle g^* \circ g_{L/2}^* \rangle \approx Z(2)$ y denotemos $Z^{* \circ 2} = \text{Fix}(G^{* \circ 2}) = \{ u \in H, u(x) = -u(L/2-x) \}$ (o equivalentemente, las funciones de H que son suma de una función par $L/2$ -antiperiódica y una función impar $L/2$ -periódica); así sobre

Z^{*2} C-H hereda una variedad inercial construida sobre $X_1 \cap Z^{*2}$, que está generado por

$$\left\{ \sin\left(2k\frac{2\pi}{L}x\right), \cos\left((2j+1)\frac{2\pi}{L}x\right), 2k \leq N, 2j+1 \leq N \right\} \quad (4.14)$$

cuya dimensión es por tanto N. Compárese este resultado con (4.9) y obsérvese que (4.9) y (4.14) corresponden a una descomposición en suma directa de X_1 en (4.4).

Observaciones

i) En cada uno de los casos discutidos arriba (4.11)-(4.14), y siempre supuesto que el sistema dinámico es disipativo (i.e. δf tiene grado impar y coeficiente principal positivo, Sección III.3), tenemos que la descomposición en suma directa del subespacio sobre el que se construye la variedad inercial, permite descomponer la ecuación en un sistema parabólico de cuarto orden

$$\begin{cases} v_t + Av = F_1(v, w) \\ w_t + Aw = F_2(v, w) \end{cases}$$

de forma que tanto el sistema como cada ecuaciones por separado (anulando v o w) poseen variedades inerciales, cuyas dimensiones estan interrelacionadas.

ii) Obsérvese que los resultados anteriores (y algunos de los que veremos en la Subsección IV.4.2 abajo) dependen muy poco de la forma ecuación (fijadas las condiciones periódicas): tan sólo hemos usado que el sistema dinámico es (se supone) disipativo, que es invariante por $G_0 = \langle \{g_\tau, \tau \in [0, L]\}, g_* \rangle$ o por $G_0 \otimes \langle g^* \rangle$, que tiene las mismas autofunciones que antes y que los autovalores crecen lo suficientemente rápido para asegurar las Condiciones de Salto Espectral; por tanto la idea parece aplicable a algunos problemas de reacción difusión unidimensionales (problema de Chafee-Infante por ejemplo, [9]).

Además observemos que si no se impone la condición de media nula típicamente las funciones constantes son autofunciones del primer autovalor, en cuyo caso si las ideas anteriores son aplicables, entonces las dimensiones de las descomposiciones en suma directa de X_1 y de las variedades encontradas con ellas se

incrementan en una unidad.

Con las consideraciones de la observación anterior, supongamos que la ecuación estudiada (no necesariamente K-V) cumpla todos los requisitos del punto ii) pero que el crecimiento de los autovalores no asegure el salto espectral, de forma que el sistema dinámico es disipativo pero no sabemos si tiene una variedad inercial: con las notaciones del Capítulo III, Sección III.3, $\lambda_n \propto n^m$ y las condiciones de salto espectral se resumen en que $\sigma_n = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n^{\alpha-\beta}}$ sea divergente (basta que pueda tomar un valor por encima de una cantidad dependiente de los datos del problema y de la disipatividad), condición que se verifica si y sólo si $m > \frac{1}{1+\beta-\alpha}$; si por contra $m = \frac{1}{1+\beta-\alpha}$ entonces σ_n converge a una constante con lo que el salto espectral no está garantizado. En esta situación tenemos:

Proposición 4.1

Supongamos que $m = \frac{1}{1+\beta-\alpha}$ y que la ecuación (con condiciones periódicas y las mismas autofunciones) es invariante por $\{g_\tau, \tau \in [0, L)\}$. Consideremos $\tau_k = \frac{L}{k}$, $G_k = \langle g_{\tau_k} \rangle$ y $Z_k = \text{Fix}(G_k)$.

Entonces con k suficientemente grande el sistema dinámico posee una Variedad Inercial en Z_k .

Demostración

Las autofunciones en Z_k son $\{ \sin(jk\frac{2\pi}{L}x), \cos(jk\frac{2\pi}{L}x), j \in \mathbb{N} \}$ con autovalores $\hat{\lambda}_j = \lambda_{kj} \propto (kj)^m$ de forma que para el semigrupo restringido tenemos que

$$\hat{\sigma}_j = \frac{\hat{\lambda}_{j+1} - \hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_j^{\alpha-\beta}} \propto \frac{k^m((j+1)^m - j^m)}{k^{m(\alpha-\beta)} j^{m(\alpha-\beta)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} km$$

precisamente porque $m = \frac{1}{1+\beta-\alpha}$. Por consiguiente tomando k suficientemente grande podemos asegurar que el sistema dinámico posee una variedad inercial en Z_k . □

4.4.2 Formula exacta para la dimensión de Variedades Inerciales. Análisis Dimensional.

En lo que sigue denotaremos la ecuación K-V, (4.1), por $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ para indicar la dependencia en todos los parámetros del problema.

Por otro lado, volviendo a las consecuencias de (4.5) podemos enunciar el siguiente resultado

Proposición 4.2

Existe una correspondencia uno a uno entre las soluciones L/k periódicas de $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ y las soluciones de $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L/k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

En particular si $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ es disipativo y si $N = N(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ está definido por (4.4) entonces para todo $k > N$ el cero es Globalmente Asintóticamente Estable para $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L/k)$ y es de hecho el Atractor Maximal de este problema (de hecho la tasa de atracción es exponencial). Decimos en este caso que el sistema posee Cero Modos Determinantes en este rango de parámetros.

Más aún si $k = N$ entonces $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L/k)$ posee una Variedad Inercial bidimensional construida sobre el autoespacio del primer autovalor del problema.

Además conservando sólo la dependencia de N en L tenemos que $N(L/k) = \left[\frac{N(L)}{k} \right]$ ($[\cdot]$ = parte entera) y por tanto

$$N(L) = \min\{ k \in \mathbb{N}, (\nu, \beta, \gamma, \delta f, L/n) \text{ tiene cero modos determinantes para todo } n \geq k \} - 1 \quad (4.15)$$

Demostración

Observemos que si $u \in H$ y es L/k -periódica entonces $0 = \int_0^L u = k \int_0^{L/k} u$ y $\frac{1}{L} \int_0^L (Du)^2 = \frac{1}{(L/k)} \int_0^{L/k} (Du)^2$, en consecuencia como con las notaciones de la Subsección anterior Z_k es invariante para K-V la primera afirmación es cierta. El resto no es más que una reformulación de (4.5) y de las consecuencias ya obtenidas de allí. Por esto, de (4.5) iii) proviene la expresión de "Cero Modos

Determinantes".

□

Este resultado tiene como consecuencia la posibilidad de obtener una estimación experimental y/o numérica de $N(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ alternativa a la verificación de las Condiciones de Salto Espectral: tomando subarmónicos de la periodicidad espacial se debe detectar la aparición de una variedad inercial bidimensional y acto seguido, en el siguiente subarmónico, toda solución debe disiparse exponencialmente a cero.

Si como es habitual, [4,5,16,17,18], y el resultado anterior sugiere como adecuado, contemplamos L como parámetro de bifurcación (y los otros parámetros permanecen fijos, de forma que tenemos un problema de bifurcación uniparamétrica), el tipo de razonamiento anterior nos proporciona cierta información analítica del diagrama de bifurcación de K-V, [16,17,18]: supongamos la siguiente hipótesis

(H) "Existe un intervalo $I = (a, b)$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tales que $N(L)$ es acotado con $L \in I$, y $N(L) < N_0$ para todo $L \in I$ "

Entonces denotando $J(I) = \bigcup_{k > N_0} I/k$, tenemos que con $L \in J(I)$, la dinámica es trivial (el cero es el atractor maximal y atrae exponencialmente) y $J(I)$ contiene un intervalo de la forma $(0, L_0)$.

Obsérvese que si la hipótesis (H) es falsa y si ponemos $N(L) = \infty$ si el sistema es no disipativo entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{L, n \leq N(L) \leq \infty\}$ es denso en $(0, \infty)$. Esta propiedad reflejaría una gran dependencia sensible de la dinámica respecto al parámetro L y no es esperable desde el punto de vista físico, además para la ecuación de Cahn-Hilliard por ejemplo se sabe que el sistema es disipativo y que tiene una variedad inercial para todo valor del parámetro L y que su dimensión se puede acotar en términos de L , [13].

De hecho las exploraciones numéricas de [4,5,16,17] confirman que el rango del parámetro en el que hay dinámica trivial consiste en un único intervalo $(0, L_0)$ en cuyo extremo superior, típicamente, una primera bifurcación de estados estacionarios

(bifurcación tipo pitchfork, o tenedor) se produce; recordemos de la Sección II.3 la expresión de los autovalores de la ecuación linealizada entorno a 0 y su dependencia en L:

$$\mu_n = \nu \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^4 + \delta a_1 \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 + \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de forma que para L pequeño todos los autovalores son positivos, así L_0 sería tal que un único autovalor μ_n se anula, supuesto que $a_1 < 0$; observemos que si $a_1 \geq 0$ entonces todos los autovalores μ_n son siempre positivos y que por tanto 0 es siempre asintóticamente estable y por tanto no hay ramas bifurcadas de la solución trivial, en particular si $L > L_0$ entonces la dinámica del sistema es debida a nuevos tipos de soluciones ninguna de ellas bifurcadas de 0.

Obsérvese que con $a_1 < 0$ incluso podría haber dinámica no trivial conviviendo con la condición $\mu_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (que es una condición de estabilidad local en torno a cero), en este caso el valor L_1 para el que el primer autovalor μ_n se anula sería una cota superior del valor L_0 .

Introducimos entonces para $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$:

$$\hat{N}(L) = \min\{ k \in \mathbb{N}, \{0\} \text{ es el atractor maximal de } (\nu, \beta, \gamma, \delta f, L/n) \text{ para todo } n \geq k \} - 1 \quad (4.16)$$

y así tenemos

Lema 4.1

Con las notaciones anteriores, para todo $L > 0$

$$\hat{N}(L) \leq N(L) \quad (4.17)$$

Si además existe un único intervalo $(0, L_0)$ con dinámica trivial entonces si para el valor de L el sistema es disipativo

$$\hat{N}(L) = \min\{ k \in \mathbb{N}, L/k < L_0 \} - 1 = \left[\frac{L}{L_0} \right] \quad (4.18)$$

y en particular

- 1) $\hat{N}(nL_0) = n$
- ii) si $nL_0 < L < (n+1)L_0$ entonces $\hat{N}(L) = n$ (4.19)
- iii) $\hat{N}(L) \rightarrow \infty$ con $L \rightarrow \infty$

Demostración

Inmediata por (4.15), (4.16) y la Proposición 4.2. □

Observemos además que (4.16) permite un análisis similar a (4.18), (4.19) si el conjunto donde hay dinámica trivial fuese por ejemplo de la forma $(0, L_0) \cup (L_1, L_2)$.

Con estos resultados introducimos

Definición 4.1

El flujo definido por K-V, $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$, es No Anómalo si y sólo si

$$\hat{N}(L) = N(L) \text{ para todo } L > 0 \quad (4.20)$$

Así si el flujo es No Anómalo entonces (4.18), (4.19) proporcionan una formula exacta para las dimensiones de las variedades inerciales de K-V.

Claramente si para cierto L se tiene $\hat{N}(L) < N(L)$ entonces esto significa que con $k = \hat{N}(L) + 1$ el sistema $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L/k)$ posee una variedad inercial de dimensión mayor que uno (al menos un modo determinante) y simultaneamente toda solución es atraída exponencialmente a cero, esto es el flujo sobre la variedad es trivial. De aquí el nombre de flujos Anómalos cuando esta situación se da.

Por último destaquemos que en las condiciones anteriores si el flujo es No Anómalo entonces (4.18)-(4.20) implican que la conjetura de Pomeau-Maneville, [19], sobre el número de grados de libertad del sistema (formulada en el contexto de la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky) es cierta: $N(L) \approx L$.

Un problema abierto es por tanto la caracterización de los Flujos No Anómalos.

Es conveniente en este punto reescalar la ecuación K-V por ejemplo haciendo que el dominio espacial quede normalizado a $[0, 2\pi]$; de hecho es inmediato verificar que si partimos de K-V con parámetros $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)_{\tau, \xi}$ (τ, ξ son las variables de tiempo y espacio respectivamente) entonces el cambio $\xi = \omega x, \tau = \omega^2 t$ nos da las soluciones de $(\hat{\nu} = \nu/\omega^2, \hat{\beta} = \beta\omega^2, \gamma, \delta f, \hat{L} = L/\omega)_{t, x}$; dos elecciones de ω son de especial utilidad: $\omega = \omega(L) = L/2\pi$ que nos lleva a la NORMALIZACION EN $[0, 2\pi]$ y $\omega = k \in \mathbb{N}$ (independiente de L) que nos produce la k-REPLICACION en el lenguaje de [4,5]; como los términos en γ y δf no cambian, simbólicamente escribiremos

$$\begin{array}{l} (\nu, \beta, L) \xrightarrow{\omega = L/2\pi} (\nu 4\pi^2/L^2, \beta L^2/4\pi^2, 2\pi) \\ (\nu, \beta, L) \xrightarrow{\omega = k} (\nu/k^2, k^2\beta, L/k) \end{array}$$

una buena propiedad de la k-replicación es que nos permite pasar de soluciones en $[0, L]$ a soluciones en $[0, L]$ (de período L/k); este hecho ha sido utilizado de forma crucial en [4,5] para analizar las bifurcaciones de soluciones estacionarias de K-S apartir de la solución trivial.

Observemos que si fijamos $\hat{\nu}_0$ y $\hat{\beta}_0$ entonces todos los problemas (ν, β, L) verificando $\nu = \hat{\nu}_0 L^2/4\pi^2$ y $\beta = \hat{\beta}_0 4\pi^2/L^2$ tienen un comportamiento dinámico equivalente por corresponder al mismo problema normalizado $(\hat{\nu}_0, \hat{\beta}_0, 2\pi)$; en particular cualquier problema (ν, β, L) y su k-replicado $(\nu/k^2, k^2\beta, L/k)$ corresponden al mismo problema normalizado. Con estas notaciones podemos probar

Teorema 4.1

Supongamos que existen $\nu_0, \beta_0 > 0$ y $J_0 \subset (0, \infty)$ tales que para todo $L \in J_0$, K-V dado por $(\nu_0, \beta_0, \gamma, \delta f, L)$, tiene un determinado comportamiento dinámico (por ejemplo: el 0 es asintóticamente estable, o K-V tiene una variedad inercial etc.).

Entonces

i) Para todos $\nu, \beta > 0$ verificando $\nu \cdot \beta = \nu_0 \cdot \beta_0$ existe $J = J(\nu, \beta)$ homeomorfo a J_0 tal que para todo $L \in J$ se tiene que $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ tiene el mismo comportamiento. Además si J_0 contiene un intervalo de extremo 0 entonces $J(\nu, \beta)$ también.

ii) Para todo $L > 0$ existen $\nu > 0$ (suficientemente grande) y $\beta > 0$ (suficientemente pequeño) verificando $\nu \cdot \beta = \nu_0 \cdot \beta_0$ y tal que $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ tiene el mismo comportamiento que $(\nu_0, \beta_0, \gamma, \delta f, L_0)$, $L_0 \in J_0$. De hecho, fijado $L > 0$, las parejas (ν, β) verificando lo anterior pueden tomarse en un conjunto homeomorfo a J_0 .

Demostración

i) Consideremos la renormalización a $[0, 2\pi]$, $\hat{\nu} = \nu 4\pi^2 / L^2$, $\hat{\beta} = \beta L^2 / 4\pi^2$, como transformación del cuadrante $(\mathbb{R}^+)^3$ a $(\mathbb{R}^+)^2$: $(\nu, \beta, L) \mapsto (\hat{\nu}, \hat{\beta})$ y observemos que el hiperboloide $\nu \cdot \beta = \text{cte}$ se transforma en la hipérbola $\hat{\nu} \cdot \hat{\beta} = \text{cte}$, por tanto la imagen de $\{(\nu_0, \beta_0, L), L \in J_0\}$ es un subconjunto, \hat{J}_0 homeomorfo a J_0 , de la hipérbola $\hat{\nu} \cdot \hat{\beta} = \nu_0 \cdot \beta_0$.

Fijados ν, β verificando $\nu \cdot \beta = \nu_0 \cdot \beta_0$ la imagen de $\{(\nu, \beta, L), L \in \mathbb{R}^+\}$ recorre unívocamente la hipérbola $\hat{\nu} \cdot \hat{\beta} = \nu_0 \cdot \beta_0$ y por tanto basta tomar $J = J(\nu, \beta)$ la imagen inversa de \hat{J}_0 en $\{(\nu, \beta, L), L \in \mathbb{R}^+\}$. Claramente si J_0 contiene un intervalo de extremo 0 entonces J también.

ii) Sea \hat{J}_0 como arriba y sea $(\hat{\nu}_0, \hat{\beta}_0) \in \hat{J}_0$, como se observó anteriormente todos los problemas (ν, β, L) verificando $\nu = \hat{\nu}_0 L^2 / 4\pi^2$ y $\beta = \hat{\beta}_0 4\pi^2 / L^2$ son equivalentes, de donde deducimos la afirmación y claramente (ν, β) recorren un conjunto homeomorfo a \hat{J}_0 y por tanto a J_0 . \square

Observación

Si $\beta_0 = 0$ el Teorema 4.1 es cierto poniendo:

i) Para todo $\nu > 0$ existe $J = J(\nu)$ homeomorfo a J_0 tal que para todo $L \in J$ se tiene que $(\nu, 0, \gamma, \delta f, L)$ tiene el mismo comportamiento. Además si J_0 contiene un intervalo de extremo 0 entonces $J(\nu)$ también.

ii) Para todo $L > 0$ existe $J = J(L)$ homeomorfo a J_0 , tal que para todo $\nu \in J$, $(\nu, 0, \gamma, \delta f, L)$ tiene el mismo comportamiento que

$(\nu_0, 0, \gamma, \delta f, L_0), L_0 \in J_0.$

Observación

Si en el cambio de escalas tomamos $\omega = 1/k$ (cambio inverso a la k -replicación), tenemos

$$(\nu, \beta, L/k) \longmapsto (\nu k^2, \beta/k^2, L)$$

por tanto si $(\nu, \beta, \gamma, \delta f, L)$ es disipativo entonces por la Proposición 4.2 con $k \gg 1$ $(\nu k^2, \beta/k^2, \gamma, \delta f, L)$ tiene a $\{0\}$ como atractor maximal.

BIBLIOGRAFIA

1. M.Golubitsky, D.G.Schaeffer "Singularities and Groups in Bifurcation Theory" vol.I, Applied Math. Sciences 51, Springer (1985).
2. M.Golubitsky, I.Stewart, D.G.Schaeffer "Singularities and Groups in Bifurcation Theory" vol.II, Applied Math. Sciences 69, Springer (1988).
3. G.W.Bluman, J.D.Cole "Similarity Methods for Differential Equations", Applied Math. Sciences 13, Springer (1974).
4. I.G.Kevrekidis, B.Nicolaenko, J.C.Scovel "Back in the saddle again: A computed assisted study of the Kuramoto-Sivashinsky equation", SIAM Journal of Appl. Maths (1989).
5. J.C.Scovel, I.G.Kevrekidis, B.Nicolaenko "Scaling laws and the prediction of bifurcations in systems modeling pattern formation", Los Alamos preprint (1988).
6. J.K.Hale "Asymptotic behavior of dissipative systems", Mathematical Surveys and Monographs #25, AMS (1988).
7. C.Bardos, L.Tartar "Sur l'unicité retrograde des equations paraboliques et quelques questions voisines", Arch. Rat. Mech. Ann. 50, 10-15 (1973).
8. J.M.Ghidaglia "Some backwards Uniqueness results", Nonlinear Analysis T.M.A. vol 10, #8, 777-790 (1986).
9. D.Henry "Geometric theory of semilinear parabolic equations", Lecture Notes in Mathematics 840, Springer (1982).
10. A.Pazy "Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations", Applied Mathematical Sciences vol. 44, Springer (1983).
11. E.B.Davies "One parameter semigroups", London Mathematical Society Monographs vol. 15, Academic Press (1980).
12. P.R.Halmos "Measure Theory", Graduate Texts in Mathematics 18, Springer (1974).

13. R.Temam "Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics", Applied Mathematical Sciences vol. 68, Springer (1989).
14. R.Temam "Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis", CBMS-NSF Regional Conferences in Applied Maths, SIAM Philadelphia (1983).
15. P.Constantin, C.Foias, R.Temam "Attractors representing turbulent flows", Memorias de la AMS vol.53, #314 (1985).
16. J.M.Hyman, B.Nicolaenko "The Kuramoto-Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and Dynamical Systems", Physica 18D, 113-126 (1986).
17. J.M.Hyman, B.Nicolaenko "Coherence and chaos in the Kuramoto-Velarde equation", en *Directions in Partial Differential Equations* (M.Crandall editor), Academic Press (1987).
18. D.Arbruster, J.Guckenheimer, P.Holmes "Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the Center-Unstable manifold", SIAM J. Appl. Math. 49, #3, 676-691 (1989).
19. Y.Pomeau, P.Manneville "Stability and fluctuations of a spatially periodic convective flow", J.Physique Letters 40, L609-L612 (1979).