Algunas Propiedades de Consistencia de las Familias de Operadores de Agregación

Karina Rojas[1], **Daniel Gómez**[2], **J.Tinguaro Rodríguez**[3], **Javier Montero**[4]

[1] *krpatuelli@yahoo.com*,
[2] *dagomez@estad.ucm.es*,
[3,4] *jtrodrig, monty@mat.ucm.es*,

Resumen

Diversos estudios se han centrado en analizar amplia y profundamente distintas propiedades de los operadores de agregación. Sin embargo, no ha ocurrido lo mismo en el estudio de propiedades relativas a las *Familias de Operadores de Agregación*. ¿Debiera haber una relación entre los miembros de una familia de operadores de agregación?, ¿es posible agregar n elementos de una base de datos con operadores de agregación de menor dimensión?, ¿debería haber algún tipo de consistencia interna en una familia de operadores de agregación?. En este trabajo se analiza la estabilidad para una familia de operadores de agregación, a fin de asegurar la consistencia entre operadores de una misma familia, y a través de esto, la robustez del proceso de agregación. La propiedad de *Estabilidad* que aquí se propone, intenta forzar a que una familia de operadores de agregación tenga una definición estable/contínua en términos de robustez de los resultados, para lo cual se condiciona que la agregación de n elementos no debe ser muy distinta a la de $n-1$ elementos, cuando un ítem es el valor agregado de los otros. Se presentan algunas definiciones y resultados siguiendo esta idea para distintos niveles de estabilidad y dos tipos de estructuras en un proceso de agregación lineal.

Palabras Clave: Agregación, Operadores, Familia de Funciones, Funciones Extendidas, Conjuntos Borrosos.

1 INTRODUCCIÓN

La agregación de la información es un camino natural en las áreas del conocimiento basadas en sistemas (véase [2, 4, 6, 11]). Usualmente, el proceso de agregación/fusión produce una reducción de la cardinalidad de la base de datos original, en tanto el principal objetivo de la agregación es simplificar la información a fin de facilitar la toma de desiciones.

Un operador de agregación es una función real de n valores que es utilizada para reducir la dimensión de la base de datos original, y la definición estándar de una familia de operadores de agregación bajo un contexto borroso es $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n\varepsilon\mathbb{N}\}$, para cualquier tamaño n de la base de datos.

Hasta la fecha, se han estudiado diversas propiedades relativas a las funciones de agregación, tales como continuidad, conmutatividad, monoticidad, asociatividad, entre otras. Estas propiedades evidencian algunas características deseables que están relacionadas con cada función de agregación, pero no entregan ninguna información respecto de la consistencia de las familias de operadores de agregación, en términos de la relación que debiera existir entre sus miembros, tal como ha sido señalado por algunos autores (véase [1, 5, 7, 8, 9, 12]).

En la practica, es frecuente que se produzcan cambios de cardinalidad en las bases de datos a lo largo de un proceso de agregación, y cada vez que esto ocurre, se requiere un nuevo operador A_m que agregue la nueva colección de m elementos, no existiendo necesariamente una relación entre los operadores de agregación A_n y A_m. Es en este contexto, bajo cambios de cardinalidad, cuando parece ser natural incorporar alguna propiedad que mantenga la consistencia lógica entre estos operadores, para lo cual se requiere una definición de familia de operadores de agregación en términos de su consistencia lógica, independientemente de la cardinalidad de la base de datos.

Teniendo en cuenta que una secuencia del tipo $A(2)$, $A(3)$, $A(4), \ldots$, está presente a lo largo de cualquier proceso de agregación, parece lógico estudiar propiedades que otorguen sentido a esta secuencia a través de un concepto unificador que esté a la base de cada una de dichas funciones de agregación, ya que de otra forma, podrían ser funciones desconectadas, como por ejemplo, una definición de agregación que entregue el valor Mínimo para $n = 2$, la Media Aritmética para $n = 3$, la Media Geométrica para $n = 4$ y la Mediana para $n = 5$. Si bien, pareciera que una formulación formal podría resolver este problema al exigir una unidad conceptual mediante una fórmula matemática, este último ejemplo actúa como contra ejemplo, en tanto podría formalizarse matemáticamente para estos primeros cinco casos.

Por lo tanto, tal como es mostrado en [12], una vez asumida la importancia de considerar operadores de agregación como parte de una misma famlia, se requiere indagar respecto de alguna idea de consistencia interna. Es posible encontrar algunas referencias en esta línea, por ejemplo las reglas recursivas (véase en [4]), que recogen la idea de que es posible construir un operador de agregación A_n de manera secuencial. La clave de la recursividad es que para que una regla de agregación sea consistente, debe basarse en una aplicación iterativa de operadores binarios en base a agregaciones anteriores. Esta idea también es estudiada en [1, 12], en la cual las reglas recursivas son generalizadas de un modo más flexible. No obstante lo anterior, la recursividad no es la única propiedad de consistencia de una familia de operadores. En [17, 18], es analizado el concepto de operatividad desde un punto de vista computacional, en el que se intenta capturar la consistencia en la implementación de una función de agregación.

En este trabajo, se estudia una propiedad relacionada con la consistencia de una familia de operadores de agregación; la *Estabilidad*. La estabilidad de una familia de operadores de agregación intenta forzar a que una familia tenga una definición estable/continua, en el sentido que la agregación de n ítems debería ser similar a la agregación de $n-1$ ítems cuando un ítem es la agregación de los otros. La *Estabilidad* puede ser considerada como una generalización de la propiedad *Self-Identity* de *Yager* (1997), en tanto esta última es definida sólo para una función de agregación bajo un proceso lineal por la derecha, mientras que en este trabajo se presentan distintos niveles de estabilidad para una familia de operadores de agregación con dos tipos de estructuras lineales, por la derecha y por la izquierda.

En nuestra opinión, la idea y definición de consistencia de una familia de operadores de agregación debe tener en cuenta la estructura de la base de datos. Se pueden encontrar algunas ideas preliminares en [21], en la cual se considera la estructura de un conjunto de clases borrosas para distinguir entre algunas situaciones aparentemente similares pero que tienen distintas estructuras subyacentes (como los intervalo-valorados borrosos y los cojuntos borrosos intuicionistas). En otras áreas, como por ejemplo en la teoría de la probabilidad, es evidente que el proceso de estimación es dependiente de la estructura de la base de datos que va a ser agregada. Por ejemplo, a fin de pronosticar el clima de mañana, es más relevante la información del clima de hoy que la de ayer. Estas situaciones son usualmente representadas con una estructura lineal (como en series temporales) o por medio de gráficos (como en cadenas de Markov).

2 ESTABILIDAD DE UNA FAMILIA DE OPERADORES DE AGREGACIÓN

Como se menciona en [4], la estabilidad de cualquier modelo matemático para problemas de ingeniería hace alusión a que "pequeños errores de entrada" no dan lugar a "grandes errores de salida". La estabilidad de una función de agregación es definida en el mismo sentido que la continuidad, en tanto pequeños cambios en el vector x no deberían producir grandes cambios en $A(x)$. La estabilidad es definida como: Si máx $|x-y|$ es pequeño, entonces $|A(x)-A(y)|$ también lo es.

Tal como ha sido mencionado en la introducción de este documento, la estabilidad sólo ha sido definida para funciones de agregación, no se ha encontrado en la literatura una definición que persiga esta idea de estabilidad para toda una familia de operadores de agregación. Y como esto está relacionado con la robustez del proceso de agregación, la noción de estabilidad para una familia de operadores de agregación que se propone, está inspirado en la continuidad de funciones, pero se centra en la cardinalidad de la base de datos más que en los datos en si mismos. En términos generales, se entiende por *Estabilidad* de una familia de operadores de agregación a pequeños cambios en el valor agregado cuando se produce un cambio de cardinalidad en la base de datos.

DEFINICION 1: Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación. Entonces:

1. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad Estricta por la Derecha* si $\forall x_1, \ldots x_{n-1} \in [0,1]$, se satisface lo siguiente:

$$A_n(x_1, \ldots x_{n-1}, A_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})) = A_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

2. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad Estricta por la Izquierda* si $\forall x_1, \ldots x_{n-1} \in [0,1]$ se satisface lo siguiente:

$$A_n(A_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_1, \ldots x_{n-1}) = A_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

3. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad Estricta* si se satisfacen los dos puntos anteriores.

Observemos que el primer punto de la Definición 1 fue definida en [24] para una función de agregación específica llamada función de agregación *Self-Identity*. No obstante, nótese que la propiedad descrita en Definición 1.1 es definida para una familia completa y no para una función en particular. En este sentido, la *Estabilidad Estricta por la*

Derecha puede ser considerada como una generalización de la propiedad dada en [24], a la que se le añade la *Estabilidad Estricta por la Izquierda* y la *Estabilidad Estricta*, estableciendo por tanto una diferencia entre la estabilidad de las familias de operadores de agregación en términos de la estructura del proceso de agregación.

Las definiciones anteriores por tanto, intentan asegurar que cualquier cambio de cardinalidad que se produzca en la base de datos, no impactará significativamente en los resultados de la agregación.

Es sencillo ver que las familias de operadores Mínimo (Min) y Máximo (Max) satisfacen trivialmente esta propiedad tanto por la derecha como por la izquierda. Lo mismo ocurre con la Media Aritmética $M_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$, la Media Geométrica $G_n(x_1,\ldots,x_n) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}$, la Media Armónica $H_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$ y la Mediana (Med). Además, cualquier familia de operadores binarios idempotentes satisfacen la propiedad por la derecha si tienen una extensión inductiva hacia adelante (A_*), y por la izquierda si tienen una extensión indictiva hacia atrás (A^*). Sin embargo, otras familias de operadores satisfacen débilmente la propiedad de estabilidad, como por ejemplo es el caso de la Media Ponderada bajo esta definición: $W_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i * w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$. En esta situación, se entiende que W_n converge en ley a W_{n-1} y por lo tanto, la propiedad de estabilidad se satisface en el límite.

DEFINICION 2: Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación. Entonces:

1. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad por la Derecha* si $\forall x_1,\ldots x_{n-1} \in [0,1]$, se satisface lo siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty} |A_n(x_1,x_2,\ldots x_{n-1},A_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})) - A_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})| = 0.$$

2. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad por la Izquierda* si $\forall x_1,\ldots x_{n-1} \in [0,1]$, se satisface lo siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty} [\ |A_n(A_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}),x_1,x_2,\ldots x_{n-1}) - A_{n-1}(x_1,x_2\ldots,x_{n-1})| = 0.$$

3. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad* si se satisfacen los dos puntos anteriores.

Por último, otras familias de operadores de agregación satisfacen la propiedad de estabilidad pero en un sentido más débil, por ejemplo el Producto $P_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$. En esta situación, se observa que P_n tiene una convergencia casi segura a P_{n-1}, y por lo tanto, la propiedad de estabilidad se cumple bajo una convergencia asintótica.

DEFINICION 3: Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación. Entonces:

1. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad Débil por la Derecha* si $\forall x_i \sim U(0,1)$, se satisface lo siguiente:

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to+\infty} |A_n(x_1,x_2,\ldots x_{n-1},A_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})) - A_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})| = 0\ ] = 1.$$

2. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad Débil por la Izquierda* si $\forall x_i \sim U(0,1)$, se satisface lo siguiente:

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to+\infty} [\ |A_n(A_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}),x_1,x_2,\ldots x_{n-1}) - A_{n-1}(x_1,x_2\ldots,x_{n-1})| = 0\ ] = 1.$$

3. A_n cumple con la propiedad de *Estabilidad Débil* si se satisfacen los dos puntos anteriores.

PROPOSICION 1: Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación.

1. Si la familia $\{A_n\}$ satisface la propiedad de *Estabilidad Estricta*, entonces también satisface la propiedad de *Estabilidad*.

2. Si la familia $\{A_n\}$ satisface la propiedad de *Estabilidad*, entonces también satisface la propiedad de *Estabilidad Débil*.

Finalmente, con la siguiente definición se completa la definición de niveles de estabilidad de una familia de operadores de agregación. Y bajo este último escenario, una familia de operadores de agregación que otorgue como resultado el valor máximo si n es impar y el mínimo si n es par por ejemplo, es definida como una familia *Inestable*.

DEFINICION 4: Sea $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación. Entonces:

1. A_n cumplirá la propiedad de *Inestabilidad por la Derecha*, si esta familia no satisface la *Estabilidad Débil por la Derecha*.

2. A_n cumplirá la propiedad de *Inestabilidad por la Izquierda*, si esta familia no satisface la *Estabilidad Débil por la Izquierda*.

3. A_n cumplirá la propiedad de *Inestabilidad* si esta familia no satisface la *Estabilidad Débil*.

3 MAPEO DEL NIVEL DE ESTABILIDAD DE ALGUNAS FAMILIAS DE OPERADORES DE AGREGACIÓN

El nivel de estabilidad de una familia de operadores de agregación otorga información respecto de la robustez del proceso de agregación en el que está involucrada. A continuación, se analiza el nivel de estabilidad de las familias de operadores de agregación comúnmente utilizadas, como un acercamiento a la consistencia de los operadores de una misma familia, independientemente de la cardinalidad de la base de datos a agregar.

Tabla 1: Nivel de Estabilidad de algunas Familias de Operadores de Agregación.

F. de Operadores de Agregación $\{A_n\}_{n\varepsilon\mathbb{N}}$	Estab. Estr.	Estab.	Estab. Débil	Inest.
$Min_n = Min(x_1,..,x_n)$	*R, L*	–	–	–
$Max_n = Max(x_1,..,x_n)$	*R, L*	–	–	–
$Md_n = Md(x_1,..,x_n)$	*R, L*	–	–	–
$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$	*R, L*	–	–	–
$G_n = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}$	*R, L*	–	–	–
$Hn = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i}$	*R, L*	–	–	–
$Qn = \prod_{i=1}^{n} x_i^i$	–	–	*R, L*	–
$P_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$	–	–	*R, L*	–
$A_n^* = A^*(x_1,\ldots,x_n)$	*R*	–	–	*L*
$A_{*n} = A_*(x_1,\ldots,x_n)$	*L*	–	–	*R*
$W_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j}$	*R*	–	*L*	–
$O_n = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \cdot \frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j}$	–	–	*R, L*	–

Nota: R y L indican estabilidad por la derecha o por la izquierda.
Nota: Los pesos de W_n y O_n no tienen restricciones.

En la Tabla 1 se observa que las seis primeras familias satisfacen la propiedad de *Estabilidad Estricta* para ambos tipos de estructura lineal, por la derecha y por la izquierda, mientras que las otras familias no. Por ejemplo, $\{Q_n\}$ y $\{P_n\}$ satisfacen la propiedad de *Estabilidad Débil*, y los operadores idempotentes binarios son *Estrictamente Estables por la Derecha* si su extensión es inductiva hacia adelante, y por la izquierda si es hacia atrás. Además, el nivel de estabilidad de las familias $\{W_n\}$ y $\{O_n\}$ dependen de la definición de sus pesos, y particularmente para la definición expuesta, la Media Ponderada es una familia *Estrictamente Estable por la Derecha* y *Débilmente Estable por la Izquierda*, y el operador OWA es una familia *Débilmente Estable* bajo la misma definición de pesos.

4 CONCLUSIONES

En nuestra opinión, una familia de operadores de agregación no se debe entender sólo como una familia de operadores $n-ary$, en tanto todos estos operadores deben estar íntimamente relacionados a lo largo del proceso de agregación en el que están involucrados. En consideración con esto, se presentan algunas propiedades de consistencia a fin de asegurar la robustez de un proceso de agregación.

Es evidente que no debería ser posible definir una familia de operadores de agregación $\{A_n\}$ en la cual $\{A_2\}$ corresponde a la Media Aritmética, $\{A_3\}$ a la Media Geométrica y $\{A_4\}$ al Mínimo por ejemplo. Este simple ejemplo pone en evidencia que el proceso de agregación demanda una unidad conceptual más que sólo una fórmula matemática.

La noción de *Estabilidad* propuesta en este trabajo enfatiza la idea de *Robustez/Continuidad/Estabilidad* de una familia de operadores de agregación, en el sentido que un operador definido para n elementos no debiera diferir demasiado de uno definido para $n-1$ elementos.

Referencias

[1] A. Amo, J. Montero, E. Molina. Representation of consistent recursive rules. European Journal of Operational Research 130, 29-53, 2001.

[2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo. Aggregation Functions, a Guide to Practitioners (Springer-Verlag, Berlin, 2007).

[3] H. Bustince, E. Barrenechea, J. Fern´andez, M. Pagola, J. Montero and C. Guerra: Aggregation of neighbourhood information by means of interval type 2 fuzzy relations.

[4] T. Calvo, A. Kolesarova, M. Komornikova, R. Mesiar. Aggregation operators, properties, classes and construction methods. In T. Calvo et al. (Eds.): Aggregation Operators New trends ans Aplications (Physica-Verlag, Heidelberg, 3-104, 2002.

[5] T. Calvo, G. Mayor, J. Torrens, J. Suñer, M. Mas and M. Carbonell. Generation of weighting triangles associated with aggregation fuctions. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 8(4) (2000) 417-451.

[6] C.H. Carlsson, R. Fuller. Fuzzy reaasoning in decision making and optimization. Heidelberg, Springfield-Verlag, 2002.

[7] V. Cutello, J. Montero. Hierarchical aggregation of OWA operators: basic measures and related computational problems. Uncertainty, Fuzzinesss and Knowledge-Based Systems 3, 17-26,1995.

[8] V. Cutello, J. Montero. Recursive families of OWA operators. Proceedings FUZZ-IEEE Conference (IEEE Press, Piscataway, 1994), 1137-1141.

[9] V. Cutello, J. Montero. Recursive connective rules. International Journal of Intelligent Systems 14, 3-20, 1999.

[10] D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, H. Prade. Terminological difficulties in fuzzy set theory - the case of intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 156, 485-491, 2005.

[11] L.W. Fung, K.S. Fu. An axiomatic approach to rational decision making in a fuzzy environment. In: L.A. Zadeh et at. (Eds.): Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes (Academic Press, New York, 1975), 227-256.

[12] D. Gómez, J. Montero. A discussion of aggregation functions. Kybernetika 40, 107-120, 2004.

[13] D. Gómez, J. Montero, J. Yáñez, C. Poidomani (2007): A graph coloring algorithm approach for image segmentation. Omega 35:173–183.

[14] D. Gómez, J. Montero and J. Yánez (2006): A coloring algorithm for image classification. Information Sciences 176, 3645-3657.

[15] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar and E. Pap. Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2009).

[16] A. Kolesárová. Sequential aggregation. In: M. González et al. (Eds.): Proceedings of the Fifth International Summer School on Aggregation Operators, AGOP (Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca, 2009), 183-187.

[17] V. López, L. Garmendia, J. Montero, G. Resconi. Specification and computing states in fuzzy algorithms. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 16, 301-336, 2008.

[18] V. López, J. Montero. Software engineering specification under fuzziness. Multiple-Valued Logic and Soft Computing 15, 209-228, 2009.

[19] V. López, J. Montero and J. Tinguaro Rodriguez. Formal Specification and implementation of computational aggregation Functions. Computational Intelligence, Foundations and Applications Proceedings of the 9th International FLINS Conference 2010, 523-528

[20] J. Montero. A note on Fung-Fu's theorem. Fuzzy Sets and Systems 13, 259-269, 1985.

[21] J. Montero, D. Gómez, H. Bustince. On the relevance of some families of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 158, 2429-2442, 2007.

[22] J. Montero, V. López, D. Gómez. The role of fuzziness in decision making. Studies in Fuzziness and Soft Computing 215, 337-349, 2007.

[23] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18, 183-190, 1988.

[24] R.R. Yager and A.Rybalov. Nonconmutative self-identity aggregation. Fuzzy Sets and Systems, 85:73-82, 1997.