

Anexo A. Combinatoria

La combinatoria estudia el número de formas de escoger unos individuos dentro de un conjunto finito. Por lo tanto, es una herramienta que se aplica muchas veces al aplicar la regla de Laplace, que se basa en evaluar los casos favorables y los casos posibles.

Consideremos entonces un conjunto finito, que tiene n elementos. Se trata ahora de escoger varios de esos individuos, digamos k . Lo primero que hay que tener en cuenta es que tenemos que especificar cómo van a ser seleccionados esos individuos; así, tenemos que especificar si un mismo individuo puede ser seleccionado más de una vez, si nos importa el orden en que son seleccionados los elementos, etcétera. Esto da lugar a distintas expresiones, algunas de las cuales se explicarán a continuación.

A.1. Variaciones

Las variaciones aparecen en situaciones en que **importa el orden de selección** de los individuos. Dependiendo de si se puede elegir varias veces al mismo individuo o no tenemos dos expresiones diferentes.

A.1.1. Variaciones sin repetición

Supongamos que tenemos un grupo de 40 personas que se presentan a un concurso y que debemos entregar un primer premio dotado de 100 000 euros, un segundo premio por valor de 50 000 euros y un tercer premio de 10 000 euros. ¿De cuántas formas pueden ser entregados estos premios?

En este caso, tenemos una situación en la que importa el orden de selección de los individuos, ya que nos es lo mismo ganar el primer

premio que el tercero. Además, un individuo no puede ser seleccionado varias veces, puesto que un mismo individuo no puede ganar varios premios.

Para resolver este problema se procede de la siguiente manera: primero tenemos que seleccionar al ganador del primer premio, para el que tenemos 40 posibilidades; fijado este individuo A , tenemos que seleccionar al ganador del segundo premio B , para el que tenemos 39 posibilidades, pues no podemos volver a seleccionar al ganador del primer premio; de la misma forma, tenemos 38 posibilidades para el ganador del tercer premio C . En definitiva, tenemos $40 \times 39 \times 38$ formas diferentes de entregar los premios, cada una de ellas identificada con un vector (A, B, C) , donde la primera coordenada nos indica al ganador del primer premio, la segunda coordenada al ganador del segundo premio y la tercera al ganador del tercer premio.

En general, si hay n individuos, tenemos n posibilidades para seleccionar el primer individuo, $n - 1$ para el segundo, $n - 2$ para el tercero, y así sucesivamente. Este proceso puede representarse en un diagrama de árbol tal y como se ve en la figura A.1.

En situaciones en que importa el orden de selección de los individuos y además no puede seleccionarse un individuo varias veces, diremos que estamos en un caso de **variaciones sin repetición**. Procediendo como en el ejemplo anterior, si tenemos un conjunto de n individuos y tenemos que seleccionar k de ellos importando el orden y sin repetición, el número de variaciones sin repetición de n elementos tomados k a k viene dado por

$$V_{n,k} = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - k + 1).$$

A.1.2. Variaciones con repetición

Consideremos ahora la situación en la que lanzamos un dado 2 veces y recibiremos como premio 10 veces el resultado del primer lanzamiento más el resultado del segundo lanzamiento. ¿Cuántos premios distintos podemos tener?

En este caso, tenemos nuevamente una situación en la que importa el orden de selección (no es lo mismo $(1,6)$ que $(6,1)$), pero en este caso sí es posible repetir el individuo seleccionado, es decir $(6,6)$ es posible.

Para resolver este problema, tenemos que tener en cuenta que tenemos seis posibilidades para el primer lanzamiento, y de la misma forma, puesto que puede haber repeticiones, tenemos seis posibilidades para el segundo lanzamiento. En definitiva, tenemos 6×6 posibilidades.

En general, si hay n individuos, tenemos n posibilidades para seleccionar el primer individuo, n para el segundo, n para el tercero y así sucesivamente. Este proceso puede representarse en un diagrama de árbol tal y como se ve en la figura A.2.

Si tenemos un conjunto de n individuos y tenemos que seleccionar k importando el orden y con posibilidad de repetición, el número de variaciones con repetición de n elementos tomados k a k viene dado por

$$VR_n^k = n \times n \times n \times \dots \times n = n^k.$$

A.2. Permutaciones

Consideremos un conjunto de n elementos. El problema que nos planteamos ahora es ordenar estos elementos, es decir, tenemos que escoger uno de esos individuos para ser el primero, otro para ser el segundo, y así sucesivamente. ¿Cuántas posibles ordenaciones existen? Este valor se conoce como el número de permutaciones.

Para elegir el primer individuo tenemos n posibilidades, puesto que todos los individuos son susceptibles de ser escogidos. Fijado el primer individuo, tenemos $n-1$ posibilidades para escoger el segundo individuo, puesto que el primer individuo no puede volver a ser seleccionado. Y así sucesivamente.

Si tenemos un conjunto de n individuos, el número de **permutaciones** viene dado por

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 = n!.$$

Recuérdese que $0! = 1$. En definitiva, las permutaciones coinciden con las permutaciones sin repetición si se seleccionan todos los individuos, es decir,

$$P_n = V_{n,n}.$$

A.3. Combinaciones sin repetición

Supóngase ahora que tenemos un grupo de 40 personas que participan en el sorteo de tres viajes, de forma que una misma persona no puede ganar más de un premio. En este caso tenemos una situación en la que no importa el orden en la selección de los individuos, ya que las consecuencias son las mismas. Además, como una persona no puede optar a los tres premios, no hay repeticiones.

Para resolver este problema procedemos de la siguiente manera: en primer lugar seleccionamos un individuo que ganará uno de los premios, que denotaremos por individuo A ; para esta elección tenemos 40 posibilidades. A continuación, se elige otro individuo, B , para el otro premio; en este caso tenemos 39 posibilidades; y de la misma manera, tenemos 38 posibilidades para el tercer ganador C . En definitiva, tenemos $40 \times 39 \times 38$ posibles vectores (A, B, C) . Luego tenemos $V_{40,3}$ posibilidades, tal y como se estudió en la sección de variaciones. Sin embargo, se obtiene el mismo resultado si la selección hubiese sido (A, C, B) , (B, A, C) , (B, C, A) , (C, A, B) , (C, B, A) , pues los premiados son los mismos.

Y esto sucedería sea cual sea la elección de los individuos seleccionados para el premio. Es decir, en todos los casos tenemos 6 posibilidades que nos llevan al mismo número de premiados. Es decir, que hay seis posibilidades que llevan al mismo resultado, lo que implica que el número de posibilidades sea

$$\frac{40 \times 39 \times 38}{6}.$$

¿De dónde ha salido el valor 6? Para responder a esta pregunta, basta tener en cuenta que las diferencias entre las seis posibilidades radican en su ordenación; entonces, hay que calcular todas las posibles ordenaciones, que son las formas de ordenar los tres individuos premiados, es decir $P_3 = 3! = 6$.

En general, dado un conjunto de n individuos, del que hay que escoger k sin repetición y sin que importe el orden de selección, se definen las **combinaciones sin repetición** como el valor

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!}.$$

En muchas ocasiones, $C_{n,k}$ se denota por $\binom{n}{k}$. Ahora bien, nótese que

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \dots \times 1}{k!(n-k) \times \dots \times 1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= C_{n,n-k} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C_{n,k} = C_{n,n-k}$. Los valores de esta expresión, que se llaman *números combinatorios*, son los coeficientes que aparecen en la expresión del binomio de Newton $(a+b)^n$, por lo que también se llaman *números binomiales*. Su cálculo puede hacerse mediante el *triángulo de Pascal* o *Tartaglia*, que viene dado en la tabla A.1.

				1			
			1		1		
		1		2		1	
	1		3		3	1	
1		4		6		4	1

Tabla A.1. Triángulo de Tartaglia o de Pascal.

Para construir esta tabla basta sumar las coordenadas superiores. Así, el valor 6 de la quinta fila viene de $3+3$, que son los dos números que están encima. La fila i da los coeficientes de $\binom{i}{j}$ con $j = 0, \dots, i$ (se considera que la primera fila es la fila 0).

Quedaría ahora el caso de las combinaciones con repetición, pero este caso no aparece en probabilidad, pues las distintas posibilidades de

combinaciones con repetición no cumplen el postulado de indiferencia. Para ver esto, considérese el ejemplo de lanzar dos dados; entonces dos posibles combinaciones con repetición son $(1, 1)$ (sale dos veces el valor 1) y $(1, 2)$ (sale un valor 1 y un valor 2 en cualquier orden); sin embargo, estas dos combinaciones no son igualmente probables, puesto que para que salga $(1, 1)$ necesitamos que salga 1 en los dos lanzamientos (primero y segundo), mientras que para $(1, 2)$ tenemos dos posibilidades: 1 en el primer lanzamiento y 2 en el segundo o al revés.

Ejemplo 137.

Consideremos el experimento que consiste en sacar cinco cartas de una baraja, ¿cuál es la probabilidad de sacar dosoros y tres copas?

En primer lugar, todas las posibilidades tienen la misma probabilidad, por lo que podemos aplicar la regla de Laplace. Tal y como está planteado el problema, no importa el orden de aparición de las cartas, por lo que se usarían combinaciones.

Los casos posibles son $C_{40,5}$, pues tenemos que escoger cinco cartas distintas de un conjunto de 40.

Los casos favorables son $C_{10,2} \times C_{10,3}$ puesto que tenemos que escoger dos cartas de entre los 10 oros, y fijadas esas cartas, tenemos que escoger tres cartas de entre las 10 copas. Esto es debido a que cada combinación de los casos favorables es de la forma

$$(O_1, O_2, C_1, C_2, C_3),$$

y si lo representamos en un diagrama de árbol nos queda que el número de posibilidades es el producto $C_{10,2} \times C_{10,3}$. En definitiva, la probabilidad pedida es

$$p = \frac{C_{10,2} \times C_{10,3}}{C_{40,5}} = \frac{\frac{10 \times 9}{2} \frac{10 \times 9 \times 8}{6}}{\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36}{120}}.$$

Otra forma válida de resolver el problema (aunque menos natural) es mediante variaciones, es decir, suponiendo que el orden es importante. Entonces los casos posibles son $V_{40,5}$ y los casos favorables son $V_{10,2} \times V_{10,3} \times C_{5,2}$, donde el último término proviene de la mezcla de los dos oros y las tres copas, ya que al utilizar las variaciones sí importa el orden; por ello, tenemos que distinguir las posiciones de las dos cartas que son oros, y esto consiste en decidir entre las cinco posiciones posibles dos

de ellas sin repetición y sin que nos importe el orden de selección, es decir, $C_{5,2}$. Entonces,

$$p = \frac{V_{10,2} \times V_{10,3} \times C_{5,2}}{V_{40,5}} = \frac{10 \times 9 \times 10 \times 9 \times 8 \times \frac{5 \times 4}{2}}{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36},$$

con lo que se obtiene el mismo resultado que antes.

A la vista del ejemplo anterior, parece que el uso de combinaciones da lugar a una forma más compacta y sencilla de hallar los casos favorables. Esto suele ser cierto en general, por lo que es recomendable aplicar combinaciones en lugar de variaciones siempre que sea posible (casi siempre si no hay repetición).

Otro caso viene si tenemos posibilidad de repeticiones. En este caso, ya se explicó que las combinaciones con repetición no cumplen el postulado de indiferencia, por lo que no queda más remedio que utilizar las variaciones con repetición.

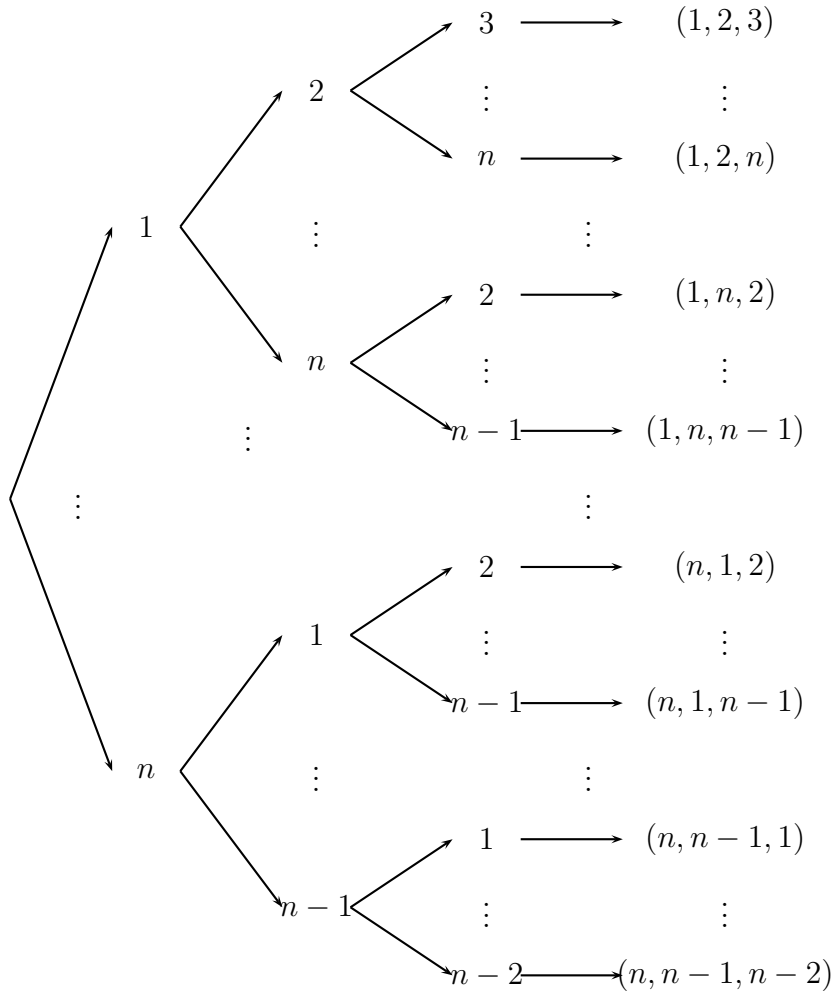


Figura A.1. Representación gráfica mediante un diagrama de árbol de la forma de obtener todas las posibilidades en un proceso de variaciones sin repetición de n elementos tomados 3 a 3. Nótese que se consideran soluciones diferentes $(1, 2, n)$ y $(n, 1, 2)$ aunque sean los mismos elementos, puesto que el orden de selección tiene importancia.

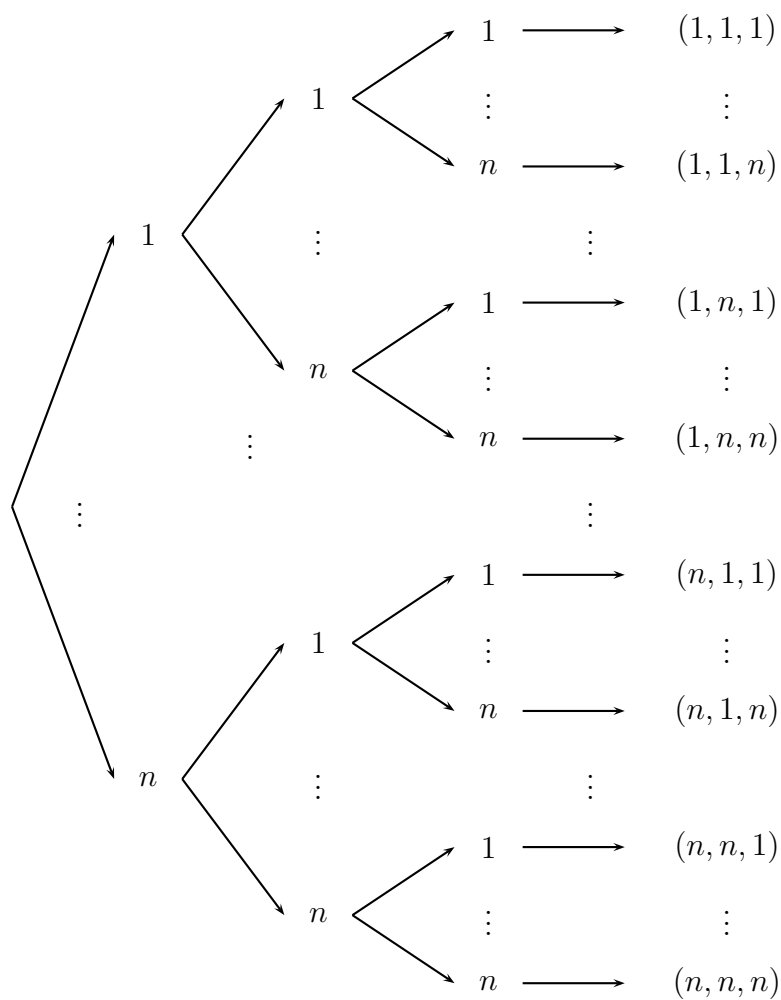


Figura A.2. Representación gráfica mediante un diagrama de árbol de la forma de obtener todas las posibilidades en un proceso de variaciones con repetición de n elementos tomados 3 a 3.