

Sistemas de afinación en música desde el punto de vista de las matemáticas



María Aguado Yáñez¹, Ángel Rivas Vargas²

¹ Universitat Pompeu Fabra

² Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid

PACS: 43.75.-z, 43.75.+a.

Resumen

Dentro de la rama de la acústica musical, la evolución que han seguido los principales sistemas de afinación occidentales puede ser analizada a través de modelos matemáticos, dado que un sistema de afinación es un conjunto de relaciones matemáticas impuestas sobre frecuencias. Este artículo analiza los sistemas pitagórico, mesotónico y el temperamento igual. Para ello, primero se realiza un análisis histórico de los mismos. Posteriormente se realiza una interpretación geométrica de estos sistemas mediante curvas. Por último, son caracterizados cuantitativamente mediante dos métodos que explotan la simetría de cada uno de ellos. Los resultados muestran que estos sistemas disminuyen en complejidad cuanto más modernos son, lo que explica, en parte, su evolución histórica. Además los métodos empleados son igualmente aplicables a otros sistemas distintos y pretenden ser intuitivos y visuales, de manera que tanto científicos como músicos comprendan las ventajas e inconvenientes de cada tipo de sistema.

Palabras clave: sistema de afinación, temperamento, simetrías.

Abstract

Within the area of musical acoustics, the evolution of Western tuning systems can be studied through the perspective of mathematical models, since a tuning system is a set of mathematical relations imposed on frequencies. In this document, the Pythagorean and mesotonic tunings, as well as the equal temperament, are analyzed. Firstly, a historical analysis of these systems will be performed. Secondly, the systems will be modelled using geometric curves. Lastly, two quantitative methods will be applied to make a numerical description which exploits their symmetries. The results show that complexity decreases the more modern the systems are, which partly explains their historical evolution. Moreover, these models can be extended for further new systems, and are meant to be intuitive and visual for both scientists and musicians to understand the advantages and disadvantages of each system.

Keywords: tuning system, temperament, symmetries.

1. Sistemas de afinación: ¿qué son y cuál es su historia?

1.1. Qué es un sistema de afinación

Para comprender mejor qué es un sistema de afinación es necesario conocer el concepto de *intervalo* y de *escala* en música.

La diferencia en frecuencia entre dos notas se conoce como intervalo, y cada tipo de intervalo recibe un nombre diferente dependiendo de su longitud. Por ejemplo, para ir de *do* a *re* se avanza un intervalo de segunda. Para ir de *do* a *mi* se avanza una tercera. En la Figura 1 se

muestran en una imagen los intervalos que van a ser de interés para este texto.

Como se observa en el diagrama, cuando se recorre la serie de notas de *do* a *si* se vuelve a alcanzar un *do*, desde

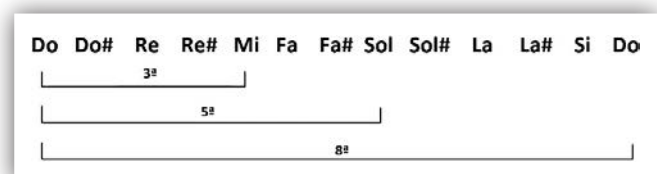


Figura 1. Intervalos de tercera, quinta y octava en la escala de 12 notas en que se basa la armonía occidental.

donde comienza de nuevo la sucesión. Cada vuelta de *do* a *do* recibe el nombre de *escala*. Al ascender de escala las notas se hacen más agudas, aumentando en frecuencia, y al descender se agravan. Los intervalos se mantienen en distintas escalas. Por ejemplo, entre *do* y *re* hay siempre una segunda independientemente de la escala.

El tamaño de cada intervalo está determinado por el sistema de afinación que se escoja. Un sistema de afinación impone una separación en frecuencia concreta y exacta entre las distintas notas, y por tanto establece la longitud de cada intervalo. Para distintos sistemas de afinación, los mismos intervalos pueden ser más o menos largos, aunque la variación será lo suficientemente pequeña como para que no pierdan su identidad y nuestro oído pueda distinguir el tipo de intervalo. Por ejemplo, la segunda de *do* a *re* no es equivalente en cantidad de frecuencia bajo distintos sistemas, aunque sí conserva suficiente parecido como para que pueda seguir siendo identificada como segunda. Del mismo modo, los intervalos deben ser lo suficientemente parecidos al ascender o descender en escalas, por lo que la manera en que los establezca el sistema de afinación afecta a la composición a la hora de cambiar de escala.

Los sistemas de afinación son en esencia un conjunto de normas matemáticas que los músicos han de respetar para componer. Por tanto, aunque su evolución en la música occidental ha estado motivada por razones compositivas y artísticas, los problemas que han surgido y la manera en que se han solucionado tienen un fundamento físico y matemático muy marcado.

1.2. Evolución histórica de los principales sistemas de afinación occidentales desde el punto de vista de las matemáticas

El primer sistema de afinación que se desarrolló en Occidente fue el pitagórico [1]. Pitágoras (s.VI-V a.C.) observó que había propiedades armónicas interesantes relacionadas con las proporciones de los objetos que vibraban emitiendo sonido: estas frecuencias de vibración eran los armónicos fundamentales que presentaban los objetos al ser golpeados. El tamaño y la forma de cada objeto imponían unas condiciones determinadas que producían distintos armónicos, y por tanto, distintos sonidos. La formación de estos armónicos surge matemáticamente al resolver el problema diferencial asociado para la ecuación de ondas.

Pitágoras utilizó en particular dos armónicos para crear un sistema de afinación y ordenar frecuencias, cuyas proporciones con respecto al armónico fundamental son 2:1 y 3:2. Ahora bien, ¿por qué escogió estos dos intervalos frente al resto?

Contestar a esta pregunta requiere hacer la siguiente mención: las soluciones a la ecuación de ondas pueden

expresarse mediante series de Fourier. Aplicar un intervalo a una solución en serie de Fourier equivale a multiplicar por un cierto factor la frecuencia de todos los términos de la serie.

El primer armónico, el que duplica la frecuencia, se corresponde con el intervalo de octava en música, y este es el intervalo que resulta más consonante para el oído humano. De hecho, percibimos dos notas separadas por una octava prácticamente como si fueran la misma, por lo que en música se suelen considerar equivalentes. Duplicar o dividir a la mitad una frecuencia no altera la armonía. Esto se debe a que al multiplicar por dos la frecuencia, sobreviven todos los términos pares de la solución en serie de Fourier (ver Figura 2). Compartir la mitad de los términos hace que nuestro oído perciba dos notas separadas por una octava como un intervalo altamente consonante.

El segundo armónico que comparte el mayor número de términos en la solución es el 3:2, y Pitágoras lo escogió junto a la octava por ser el segundo intervalo más consonante. El intervalo que genera este armónico recibe el nombre de intervalo de quinta.

Así pues, Pitágoras estableció un sistema de afinación P en el cual las notas debían atender a la siguiente relación con respecto a una frecuencia fundamental de referencia o nota central ν

$$\left(\frac{3}{2}\right)^a 2^b \cdot \nu \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Este sistema presentaba dos problemas significativos: por un lado, si aumentabas con intervalos de quinta desde una nota hasta llegar a su octava, la frecuencia resultante no coincidía con el doble de la frecuencia fundamental (ver Figura 3). Esta diferencia en frecuencia

Figura 2. Expresión general para una serie de Fourier a la que se ha aplicado un intervalo de octava. Este intervalo duplica la frecuencia, por lo que la serie resultante comparte solo la mitad de los términos con la serie original.

entre las dos maneras de generar la octava producía un batimiento que recordaba al aullido de un lobo, y que recibió el nombre de *wolf interval* o *quinta del lobo*. Este batimiento resulta muy disonante, por lo que los músicos lo evitaban para componer (ver Figura 4). Por otro lado, el intervalo de tercera generado a través de quintas en el sistema pitagórico era también demasiado disonante. Esto inicialmente no resultó un problema porque las quintas y las octavas eran los intervalos más relevantes en armonía, pero con el tiempo el intervalo de tercera ganó mucha importancia. Este intervalo sonaba disonante porque existe un armónico que lo genera que no se corresponde ni con el 2:1 ni con el 3:2. Por tanto, al ser generado con tan solo estos dos armónicos se obtiene una aproximación que no resulta tan agradable al oído humano.

Para solucionar la disonancia en la tercera se planteó un nuevo sistema de afinación conocido como sistema mesotónico M , el cual se extendió por Europa durante los siglos XVI – XVIII [1]. Este sistema disminuye cada intervalo de quinta en el sistema Pitagórico en una pequeña cantidad, de manera que la tercera se aproxima más al sonido de su frecuencia natural. Las frecuencias

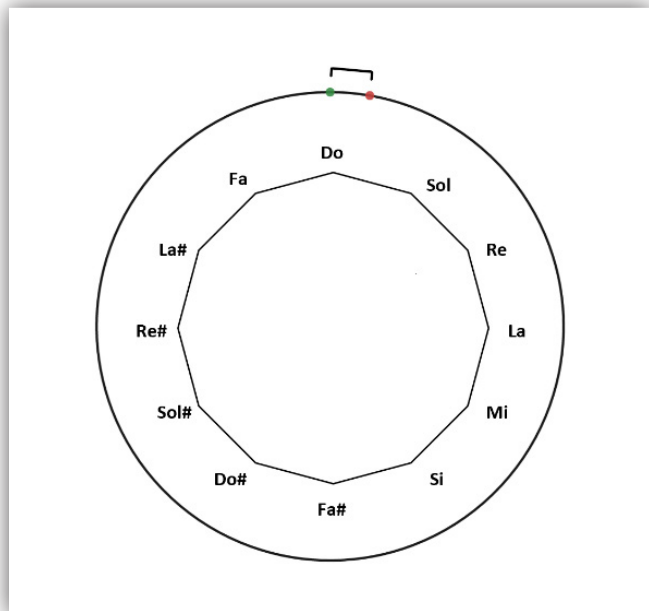


Figura 3. Dodecágono generado a través de quintas. Avanzar de un vértice a otro contiguo equivale a aplicar un intervalo de quinta. El punto verde que coincide con el vértice superior del dodecágono se corresponde con la octava de ν_{do} , es decir, $2 \cdot \nu_{do}$. El punto rojo se corresponde con la frecuencia obtenida al subir de quinta en quinta desde ν_{do} pasando por todos los vértices del dodecágono. Los puntos no coinciden, es decir, aplicar quintas hasta llegar de nuevo a un do devuelve una frecuencia cercana a $2 \cdot \nu_{do}$ pero no exacta.

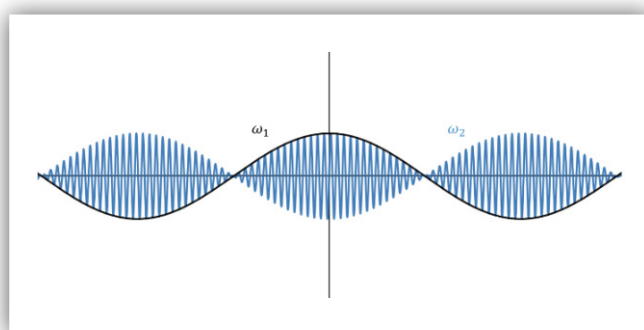


Figura 4. Fenómeno de batimiento. Se produce cuando dos frecuencias son muy cercanas entre ellas. El resultado de la superposición de las ondas es una sucesión de pulsos modulados por una envolvente con una frecuencia moduladora ω_1 . Estos pulsos contienen a su vez una frecuencia modulada ω_2 .

del sistema mesotónico se describen matemáticamente como

$$\left(\frac{3}{2} - k\right)^a 2^b \cdot \nu \in M \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad \forall k \in \left[0, \frac{3}{2}\right) \quad (2)$$

Sin embargo al tratar de solventar el problema de la tercera, el intervalo de quinta de lobo aumenta, por lo que suena aún más disonante. El sistema mesotónico permite componer escogiendo los intervalos que se desea que sean más consonantes, pero siempre sacrifica otros intervalos en consecuencia. Permitía más libertad compositiva que el pitagórico, pero aún presentaba limitaciones que dificultaban la afinación de instrumentos y los cambios de escala dentro de las obras.

El último sistema de afinación que se va a estudiar en este artículo se propuso de tal manera que respetase de forma simultánea las quintas, las terceras y las octavas, que no produjera batidos como el de la quinta del lobo, y que permitiese cambiar de escala sin disonancias. Este sistema de afinación es el que se utiliza de forma predominante actualmente en todo el mundo, y recibe el nombre de temperamento igual¹ [1]. Se desarrolló y extendió durante los siglos XV y XVI, y fue coetáneo al sistema mesotónico hasta que se hizo evidente que era mucho más práctico y útil que este. El sistema mesotónico fue desplazado paulatinamente, y todos los instrumentos pasaron a estar afinados en temperamento igual.

El temperamento igual ordena las notas en clases de equivalencia de frecuencia, por lo que por mucho que se aumente o se disminuya de escala los intervalos entre notas se mantienen, y no se acumulan pequeñas variaciones como ocurría en los sistemas más antiguos. Se

¹ Llamamos temperamento a un sistema de afinación que no utiliza exclusivamente fracciones de números enteros para definir los intervalos. En ocasiones también se denomina temperamento a cualquier sistema de afinación en general.

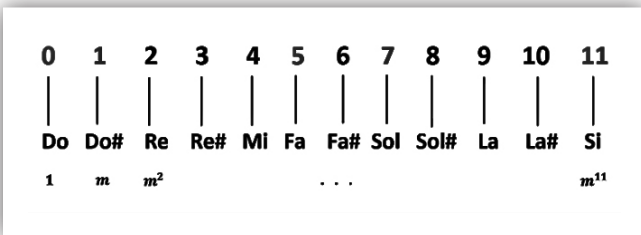


Figura 5. Estructura del temperamento igual. Para ir de una nota a la siguiente se multiplica su frecuencia por el valor m , que es la doceava parte de la octava, es decir $m = \sqrt[12]{2}$.

construye dividiendo la octava en doce partes iguales y utilizando la doceava parte de la misma como intervalo geométrico para aumentar de nota en nota (ver Figura 5).

Por tanto, las frecuencias del temperamento igual f se pueden describir matemáticamente como

$$m^a \cdot v \in I \text{ con } [a] \in \mathbb{Z}_{12} \text{ donde } a \sim a+12 \quad (3)$$

En la siguiente sección se utilizan modelos matemáticos que permiten realizar interpretaciones y explicaciones geométricas y cuantitativas que justifican esta evolución histórica de los sistemas de afinación desde una perspectiva más técnica.

2. Metodología: estudio de sistemas de afinación a través de modelos matemáticos

Entender las dificultades que pueden ofrecer estos sistemas a la hora de componer y cuál puede resultar más o menos útil es complejo y poco intuitivo. Sin embargo, es posible utilizar modelos matemáticos para representarlos, de manera se pueda comprender mediante métodos visuales qué problemas ofrece cada sistema y por qué el temperamento igual es el más ventajoso.

A continuación, se analizará cada sistema desde un punto de vista geométrico, utilizando curvas como modelos, y después a través de modelos matemáticos numéricos y cuantitativos.

2.1. Interpretación geométrica de los sistemas de afinación

Las trayectorias curvas que se van a utilizar son espirales. La música encierra siempre cierta periodicidad al aumentar en frecuencia, pues cuando se parte de *do* y se asciende en una escala se vuelve a llegar a *do* al cabo de

12 notas, y por ello resultan útiles las curvas concéntricas. Por otro lado, las espirales son curvas abiertas, infinitas, así que describen también adecuadamente el carácter infinito de los sistemas pitagórico y mesotónico. Para el temperamento igual, por el contrario, al establecerse clases de equivalencia no interesa una curva cuyo radio aumente progresivamente con la frecuencia, ni una curva abierta e infinita. La curva ideal para describir este temperamento es el círculo, que en el fondo es una “espiral” de radio constante.

A continuación se plantea un modelo matemático que devuelve estas curvas geométricas (espirales o un círculo) dependiendo del sistema de afinación que se introduzca, siendo n cada una de las notas a través de las que iteran los elementos para un sistema dado

$$\begin{cases} x = F(n) \cos\left(n \frac{\pi}{6}\right), \\ y = F(n) \sin\left(n \frac{\pi}{6}\right), \end{cases} \quad (4)$$

donde la función amplitud $F(n)$ depende de la frecuencia como

$$F(n) = \frac{v(n)}{m^{7n} \cdot v} \rightarrow \begin{cases} v_P(n) = (3/2)^n \cdot v, \\ v_M(n) = (3/2 - k)^n \cdot v, \\ v_I(n) = m^{7n} \cdot v, \end{cases} \quad (5)$$

Nótese que el ángulo aumenta en $\pi/6$ con cada iteración porque se corresponde con la doceava parte de un círculo, y las escalas son precisamente de 12 notas. La amplitud depende de la frecuencia para que el radio de la curva aumente al ascender, y está normalizada con respecto al temperamento igual para que en el caso de introducir las frecuencias de este sistema la curva resultante sea un círculo y no una espiral. Es importante destacar que para establecer una correspondencia adecuada entre las notas de los distintos sistemas, debemos normalizar al temperamento igual utilizando quintas (m^{7n}) y no simplemente m . Los temperamentos pitagórico y mesotónico generan sus frecuencias a través de quintas², por lo que generar con otro intervalo distinto en temperamento igual no permitiría relacionar notas equivalentes entre sistemas, dando lugar a conclusiones incorrectas. Se ha escogido como nota fundamental a partir de la cual se aplican los intervalos la nota *do* con frecuencia 261,63Hz, más conocido como *do central* en música.

Representando las curvas según aumenta n para cada sistema, se obtiene la Figura 6. Las gráficas correspondientes a los sistemas pitagórico y mesotónico son espirales en dos dimensiones, como se observa en las imágenes. Para apreciar que en el caso del sistema pita-

² También octavas, pero estas se pueden obviar, ya que en música se consideran a menudo equivalentes, como ya se me mencionó previamente.

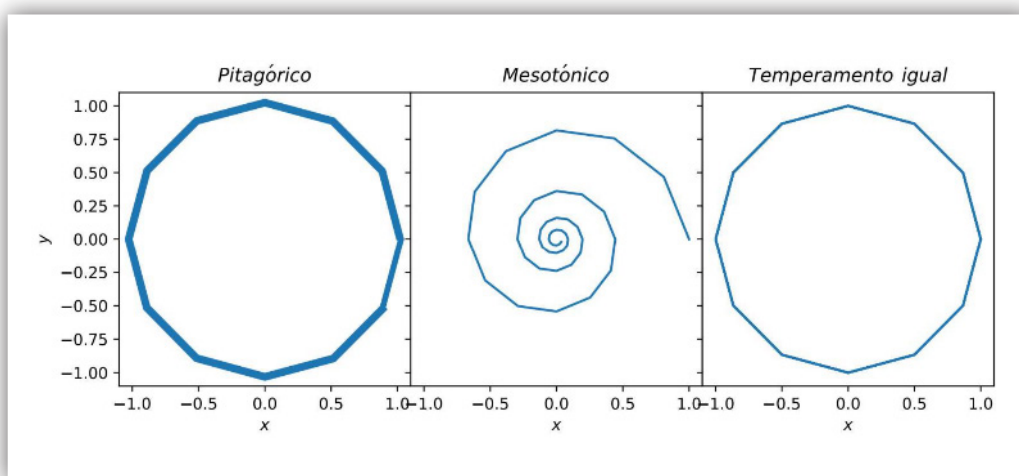


Figura 6. Representación en dos dimensiones de cada sistema de afinación según la parametrización en función de n . Para la representación del sistema mesotónico se ha escogido $k = 0.1$, y se observa que difiere más del temperamento igual de lo que lo hace el pitagórico, cuando se supone que el mesotónico es una mejora y ha de parecerse más al igual. Esto se debe al valor de k escogido. Escogiendo un valor diferente de k es posible aproximarse más al temperamento igual de lo que lo hace el pitagórico. En este caso se ha escogido una k que acentúe el crecimiento del radio en la espiral para hacer notable la variación en función de este parámetro. La nota fundamental con $n = 1$ sobre la cual se han generado los sistemas es el *do* central. Se han representado hasta $n = 48$ notas en cada caso (4 escalas de 12 notas).

górico se obtiene una espiral, nótese que la línea de la imagen de la figura es más gruesa porque se trata de una trayectoria abierta dando vueltas con un aumento lento del radio. El temperamento igual es sin embargo un dodecágono cerrado. Cabe destacar que si al variar K podemos alejarnos o aproximarnos al temperamento igual, esto sugiere la existencia de un *extremo relativo* para el cual el sistema mesotónico converge al igual.

Con esta interpretación geométrica podemos apreciar de forma visual dónde reside la complejidad de los sistemas antiguos y por qué el temperamento igual es el sistema más sencillo. El círculo, de trayectoria cerrada, permite comprender mejor el colapso en clases de equivalencia.

En esta sección se han caracterizado los 3 sistemas de afinación mediante una interpretación geométrica, y se ha explicado mediante un método visual la complejidad que presenta cada uno a nivel armónico, mostrando por qué el temperamento igual es el sistema más sencillo. En la siguiente sección se caracterizarán estudiando el extremo relativo antes mencionado, y cuantificando el concepto de “acercarse” o “alejarse” del temperamento igual variando el parámetro k . El temperamento igual se tomará como sistema óptimo y se compararán los otros dos con respecto a él.

2.2. Caracterización cuantitativa de los sistemas de afinación

Se puede calcular teóricamente el valor del extremo relativo en el que $k = k_p$, para el que el sistema mesotónico

co converge al temperamento igual. Igualando el valor para una nota n dada en sendos sistemas, se tiene que

$$v(n) \cdot \left(\frac{3}{2} - k\right)^n = m^{7n} \cdot v(n) \Rightarrow k_i = \frac{3}{2} - 2^{\frac{1}{12}} \quad (6)$$

Nótese que la k necesaria para transformar el sistema mesotónico en pitagórico es trivialmente $k_p = 0$. Una vez calculados los valores de k para los que el sistema mesotónico se identifica con los otros dos sistemas, resulta interesante tratar de graficar cuánto se desplaza el sistema mesotónico con respecto al temperamento igual en función del parámetro k , y en qué posición se sitúan el mínimo relativo y el sistema pitagórico.

Una manera de estudiar este extremo relativo consiste en asignar ángulos a las frecuencias de cada temperamento para trabajar con distancias de arco en un círculo. A las frecuencias del temperamento igual, como se subdivide la octava en doce partes iguales y surgen 12 clases de equivalencia, se les asignan los ángulos $\pi/6$ para subdividir el círculo en 12 clases también. A los otros dos sistemas se les asignan ángulos estableciendo una correspondencia entre las distancias de arco en el círculo y las distancias en frecuencia de cada una de sus notas con respecto a las 12 clases del temperamento igual. Así pues, a medida que se asciende de escala en los dos sistemas antiguos, los puntos que representan sus frecuencias en el círculo se van desplazando poco a poco con respecto a los 12 puntos del temperamento igual (ver Figura 7.)

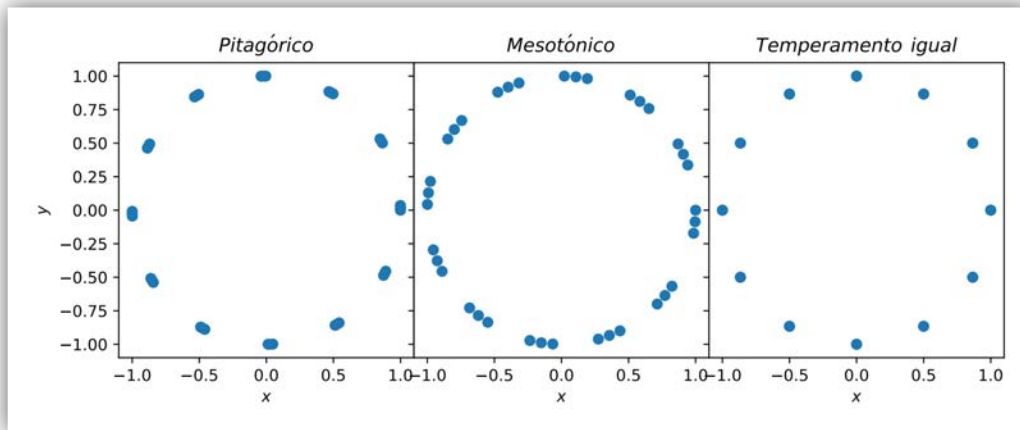


Figura 7. Representación de cada sistema de afinación asignando ángulos a sus frecuencias. El valor de k escogido para el mesotónico es $k = 0.01$. Se han graficado $n = 36$ notas (3 escalas). Se observa claramente que el temperamento igual tiene 12 clases definidas, y que los otros dos no. Para este valor de k el sistema mesotónico se desplaza más que el pitagórico con respecto a las clases del temperamento igual.

En los siguientes apartados se cuantifican estos desplazamientos con respecto a los 12 puntos del temperamento igual y se grafican para visualizar el extremo relativo antes calculado.

2.2.1. Método de la distancia acumulada

Si se suman los desplazamientos de los puntos de los sistemas antiguos a medida que agregamos notas con respecto a los 12 puntos del temperamento igual, es decir, si se van acumulando las distancias de arco, se obtiene una suma de distancias total que cuantifica cuánto se alejan estos sistemas de la situación ideal del temperamento igual. Graficando esta *distancia total acumulada* en función del parámetro k se obtiene la Figura 8.

El valor de d para $k = 0$ se corresponde con el temperamento pitagórico, que es el extremo izquierdo de la función graficada. A partir de ese valor el sistema meso-

tónico disminuye su distancia relativa al temperamento igual hasta converger a él en $k = k_i = 0.001694$. Pasando este valor el sistema mesotónico se aleja de las clases de equivalencia a medida que k aumenta.

Así pues, en este modelo el parámetro d mide cuánto se aleja un sistema dado del valor ideal k_i del temperamento igual, y muestra gráficamente por qué el sistema mesotónico resulta ser una mejora con respecto al pitagórico.

2.2.2. Método del baricentro

También es posible estudiar cuantitativamente la Figura 7 analizando el centro geométrico o *baricentro* de los puntos en el círculo a medida que se añaden de uno en uno. Como en los sistemas antiguos se producen desplazamientos, el baricentro no siempre se corresponde con el centro del círculo. Si se calcula el módulo del vector del baricentro R en el plano y se grafica su evolución en función del parámetro k , se obtiene la representación de la Figura 9.

Cuanto menor es el valor de R , mayor es la simetría del sistema, pues la distribución de puntos en el círculo está más equilibrada. El valor de R para $k = 0$ se corresponde con el temperamento pitagórico. Se observa de nuevo claramente un mínimo en $k = k_i = 0.001694$.

Este método, así como el de distancia acumulada, han permitido caracterizar cuantitativamente mediante las magnitudes d y R los tres tipos de sistemas tratados en este documento. Del mismo modo que ocurría con d frente a k , el método del módulo del baricentro muestra también que el temperamento mesotónico es efectivamente una mejora con respecto al pitagórico con valor óptimo para la k_i del temperamento igual.

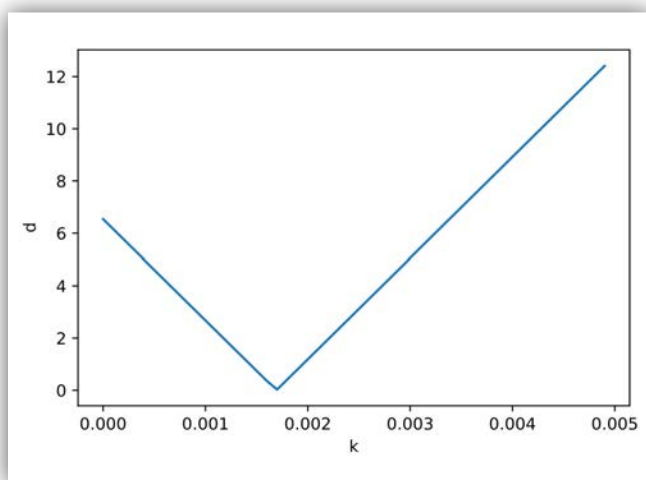


Figura 8. Distancia total en función de k entorno al mínimo relativo en el que $k = k_i$.

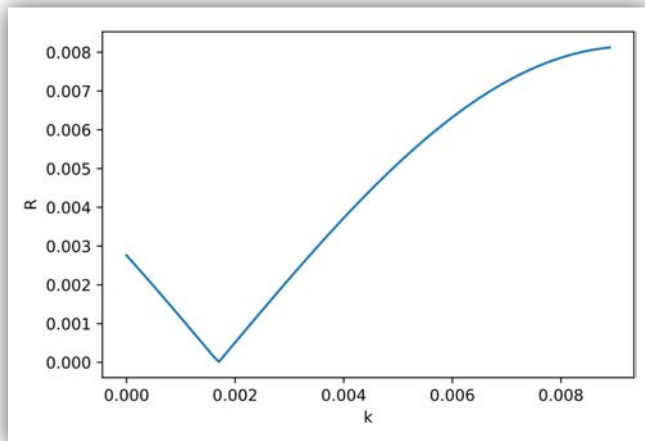


Figura 9. Representación del módulo de la posición del baricentro R con respecto a k para $n = 480$ entorno al mínimo relativo en el que $k = k_r$

3. Conclusión

Utilizar modelos matemáticos para estudiar sistemas de afinación permite explicar la evolución histórica que han seguido y la complejidad armónica de cada uno desde un punto de vista completamente diferente.

Las clases de equivalencia del temperamento igual representadas como un dodecágono cerrado y como 12 ángulos en el círculo son claramente mucho más simples y prácticas que las espirales infinitas cuyos correspondientes ángulos en el círculo no presentan la simetría de las 12 clases. Además, también es claro que la introducción del nuevo parámetro k por parte del sistema mesotónico con respecto al sistema pitagórico aporta una mejora significativa, y que variando este

parámetro k podemos localizar el k_r óptimo del temperamento igual en el mínimo relativo. Así pues, estos modelos ayudan a entender por qué el sistema pitagórico quedó obsoleto, dando paso a los otros dos nuevos sistemas, y por qué el temperamento igual desplazó al sistema mesotónico.

Esta manera de entender la armonía aporta un soporte técnico a la música, y resulta ser una herramienta útil tanto para desarrollar nuevos sistemas de afinación como para estudiar otros tipos diferentes a los aquí estudiados.

4. Agradecimientos

El presente trabajo se ha realizado gracias a la Facultad de Física de la Universidad Complutense de Madrid, desde la cual se aprobó la propuesta de tema para poder defenderlo como Trabajo de Fin de Grado.

5. Referencias

- [1] Barbour, J.M., 2004. Tuning and temperament: A historical survey. Courier Corporation.
- [2] White, H.E. and White, D.H., 2014. Physics and music: the science of musical sound. Courier Corporation.
- [3] Herrera, E., 1995. Teoría musical y armonía moderna Vol. 1. Antoni Bosch editor.
- [4] Aguado, M. y Vargas, A., 2022. Sistemas de afinación como estructuras algebraicas de grupo. Universidad Complutense de Madrid.