

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN  
OPERATIVA**



**TESIS DOCTORAL**

**CUESTIONES NOTABLES DE  
ORDENACIÓN  
ESTOCÁSTICA EN OPTIMIZACIÓN  
FINANCIERA**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**

**PRESENTADA POR**

**Elena Almaraz Luengo**

**Bajo la dirección del doctor:**

**Francisco José Cano Sevilla**

**Madrid, 2010**

**ISBN: 978-84-693-3177-4**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa



CUESTIONES NOTABLES DE ORDENACIÓN  
ESTOCÁSTICA EN OPTIMACIÓN  
FINANCIERA

Elena Almaraz Luengo

Memoria para obtener el grado de Doctor

**Director:** Dr. Francisco José Cano Sevilla

**Junio de 2009**

**Programa de Doctorado:** Métodos Estadístico Matemáticos y Computacionales para el Tratamiento de la Información. Mención de Calidad ref. MCD 2006-00033.



A papá, mamá, Quique y “Nuno”



# Resumen

Esta monografía analiza diferentes tipos de Dominancia Estocástica (SD) en el ámbito económico-financiero.

El Capítulo 1 estudia los principales conceptos de SD y sus aplicaciones en diferentes áreas de conocimiento, poniendo las bases de nuestra exposición posterior.

En el Capítulo 2 se aplican los conceptos SD para variables aleatorias de interés en Economía como por ejemplo las variables truncadas de Pareto, Normales y Lognormales.

Asimismo, se profundiza en el análisis de la consistencia de las reglas de Media-Varianza, obteniendo algunos resultados notables en variables aleatorias ponderadas, introduciendo el problema de selección óptima de la cartera eficiente, que constituye una de las principales aportaciones de este capítulo.

El Capítulo 3 trata el estudio de procesos estocásticos orientado al ámbito económico-financiero y estableciendo los fundamentos del desarrollo posterior.

El Capítulo 4 versa sobre algunas aplicaciones notables de la SD en el caso de procesos estocásticos que modelan situaciones económico-financieras y de gestión, como es el caso del estudio de procesos estocásticos en el área de seguros. Se analiza el modelo clásico de ruina y se generaliza. A continuación se obtienen condiciones suficientes para la dominancia estocástica de primer orden entre tiempos hasta la ruina de los modelos en seguros considerados. La principal novedad y aportación radica en la selección de modelos comparando estocásticamente los tiempos hasta la ruina y sin necesidad, por tanto, de obtener la expresión de la probabilidad de ruina o una aproximación de la misma, que es la metodología tradicional.

Se estudian otros modelos del tipo Cox y Rubinstein de valoración de activos. En esta situación la ordenación estocástica es acerca de la excedencia de nivel obteniendo resultados novedosos e interesantes.

Finalmente, en el Capítulo 5, se establecen las futuras líneas de investigación a seguir.

A lo largo de este trabajo se desarrollan en diferentes capítulos algoritmos de simulación de las situaciones presentadas.

**Palabras clave:** Economía, Finanzas, modelos de Cox y Rubinstein, modelos de riesgo, ordenación estocástica, probabilidad de ruina, proceso(s) estocástico(s), seguros, variable(s) aleatoria(s) ponderada(s), vector(es) aleatorio(s).

# Abstract

This monograph analyzes different types of Stochastic Dominance (SD) in the economic and financial context.

Chapter 1 introduces the principal concepts of SD and its applications in different knowledge areas, establishing the bases of the following presentation.

In Chapter 2, the SD concepts are applied to interesting random variables in Economy, for example, the truncated Pareto, Normal and Lognormal variables.

In addition a depth analysis of the consistency of the Mean-Variance rules is carried out, some notable results in weighted random variables are obtained introducing the problem of optimal portfolio selection, this constituting one of the main contributions of this chapter.

In chapter 3 addresses the study of stochastic processes is head for the economic and financial context, establishing subsequent developments in the monograph.

Chapter 4 concerns some notable applications of SD rules in case of stochastic processes which shape economic, financial and management situations, for example stochastic processes in insurance area. The classic risk model is analyzed and generalized. Straight afterwards, sufficient conditions for first order SD (FSD) are obtained between ruin times of processes under consideration . The main contribution of the chapter is that models can be selected without knowing the expression of the ruin probability or an approximation of it, as usually done.

Other models as Cox and Rubinstein's model of assets valuation are studied. In this case the stochastic order used is the generalized level crossing order. New and interesting results are obtained in this context.

Finally, in Chapter 5, directions for future work are established.

Along this work simulation algorithms of the presented situations are developed in different chapters.

**Keywords:** Cox and Rubinstein's model, Economy, Finance, Insurance, risk models, stochastic ordering, stochastic process, random vector, ruin probability, weighted random variable.

# Agradecimientos

Me gustaría expresar mi sincera gratitud a mi padre, el Doctor Juan C. Almaraz Simón, por inculcarme el amor a las Matemáticas desde pequeña, a mi madre la Doctora Maribel Luengo y Dos Santos, por prestarme siempre su ayuda y en especial todo este tiempo, a mis hermanos Enrique y Eduardo (Nuno) por su apoyo, alegría y amor, y a C. Oklay y F. Ingeborg por su cariño.

También quiero agradecer a mi tutor el Profesor Francisco J. Cano Sevilla, Director del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencias Matemáticas (U.C.M.), por su orientación y apoyo a la hora de realizar esta Tesis. Ha sido un verdadero placer trabajar todo este tiempo bajo su tutela.

Asimismo, agradezco al Profesor António Pacheco Pires, Director del Centro de Matemática e Aplicações (CEMAT) del Instituto Superior Técnico de Lisboa, por su ayuda en este trabajo y por su amable atención durante mi estancia en la Universidad Técnica de Lisboa. También al Profesor Manuel Cabral Morais del Departamento de Matemática del Instituto Superior Técnico de Lisboa (Universidad Técnica de Lisboa), por su amabilidad y disposición a ayudarme en mi trabajo, y a la Profesora Fátima Ferreira del Departamento de Matemática de la Universidad de Trás os Montes e Alto Douro, por su colaboración y simpatía.

Agradezco también al Doctor Fernando R. Gaiolas, Inspector Superior Principal do Ministério da Educação (Gobierno Portugués) y a Doña Lúcia de Castro su cariño y su gran apoyo en mi etapa en Lisboa.

Finalmente, agradecer a la Fundación Ramón Areces que ha financiado este trabajo, mediante una beca competitiva.



# Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Índice de Figuras	XII
Notación Básica	XIII
<b>1. Dominancia Estocástica</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Dominancia Estocástica de Primer Orden . . . . .	4
1.2.1. Variables aleatorias . . . . .	4
1.2.2. Vectores aleatorios . . . . .	7
1.2.3. Procesos estocásticos . . . . .	9
1.2.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de primer orden . . . . .	14
1.3. Dominancia Estocástica de Segundo Orden . . . . .	17
1.3.1. Variables aleatorias . . . . .	17
1.3.2. Vectores aleatorios . . . . .	20
1.3.3. Procesos estocásticos . . . . .	20
1.3.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de segundo orden . . . . .	21
1.4. Dominancia Estocástica de Tercer Orden . . . . .	25
1.4.1. Variables aleatorias . . . . .	25

1.4.2.	Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de tercer orden . . . . .	28
1.5.	Otros tipos de dominancia estocástica . . . . .	30
<b>2.</b>	<b>Dominancia estocástica de variables aleatorias en Economía.</b>	
	<b>Aplicaciones notables</b>	<b>33</b>
2.1.	Dominancia estocástica de primer orden en distribuciones truncadas. Algunos ejemplos. . . . .	33
2.1.1.	Definiciones y ejemplos . . . . .	33
2.1.2.	Distribuciones de Pareto truncadas . . . . .	37
2.1.3.	Distribuciones lognormales truncadas . . . . .	50
2.2.	Consistencia de las reglas de Media-Varianza.	
	Aplicaciones a variables aleatorias ponderadas . . . . .	63
2.2.1.	Introducción . . . . .	63
2.2.2.	Consistencia de las reglas de dominancia estocástica en variables aleatorias ponderadas y funciones de utilidad . . . . .	66
<b>3.</b>	<b>Procesos Estocásticos en Economía: una breve descripción</b>	<b>75</b>
3.1.	Introducción . . . . .	75
3.2.	Conceptos matemáticos . . . . .	83
<b>4.</b>	<b>Aplicaciones de los procesos estocásticos en Seguros</b>	<b>91</b>
4.1.	Introducción . . . . .	91
4.2.	Dominancia estocástica de tiempos de ruina en procesos de riesgo semi-Markov modulados . . . . .	100
4.2.1.	Procesos estocásticos supuesto que la cantidad de la indemnización depende del ambiente . . . . .	101
4.2.2.	Procesos estocásticos supuesto que la cantidad de la indemnización depende del ambiente y del tiempo entre reclamaciones . . . . .	111
4.2.3.	Comparación de probabilidades de ruina . . . . .	116
4.3.	Ordenación estocástica para el modelo financiero de Cox y Rubinstein .	121

4.3.1. Introducción y descripción del modelo . . . . .	121
4.3.2. Ordenación en excedencia de nivel. Conceptos fundamentales . .	122
4.3.3. Ordenación en excedencia de nivel en procesos de Cox y Rubinstein . . . . .	127
<b>5. Conclusiones y futuras líneas de investigación</b>	<b>133</b>
<b>Appendix. Conclusions and future work</b>	<b>145</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>159</b>



# Índice de figuras

1.1.	<i>Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de primer orden.</i>	7
1.2.	<i>Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de segundo orden.</i>	19
1.3.	<i>Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de tercer orden.</i>	28
2.1.	<i>Algoritmo de simulación de variables aleatorias truncadas.</i>	36
2.2.	<i>Densidades de Pareto, <math>P_1 \sim \text{Pareto}(5, 2)</math> y <math>P_2 \sim \text{Pareto}(7, 2)</math></i>	39
2.3.	<i>Curva de Lorenz asociada a una distribución de Pareto y la recta de equidistribución.</i>	41
2.4.	<i>Distribuciones de Pareto, <math>P_1 \sim \text{Pareto}(4, 2)</math> y <math>P_2 \sim \text{Pareto}(6, 2)</math></i>	45
2.5.	<i>Distribuciones de Pareto, a la izquierda se representan <math>P_1 \sim \text{Pareto}(3, 4)</math> y <math>P_2 \sim \text{Pareto}(4, 2)</math> y a la derecha <math>P_3 \sim \text{Pareto}(3, 2)</math> y <math>P_4 \sim \text{Pareto}(4, 4)</math></i>	45
2.6.	<i>A la izquierda se representan las distribuciones de Pareto <math>P_1^* \sim \text{Pareto}(4, 2)</math> y <math>P_2^* \sim \text{Pareto}(6, 2)</math> y a la derecha las distribuciones truncadas asociadas <math>P_1</math> y <math>P_2</math> siendo los puntos de truncamiento <math>x_1^F</math> y <math>x_1^G</math> tales que <math>F^*(x_1^F) = 0,1 = G^*(x_1^G)</math>, <math>x_2^F</math> y <math>x_2^G</math> tales que <math>F^*(x_2^F) = 0,7 = G^*(x_2^G)</math></i>	48
2.7.	<i>A la izquierda se representan las distribuciones de Pareto <math>P_1^* \sim \text{Pareto}(3, 4)</math> y <math>P_2^* \sim \text{Pareto}(4, 2)</math> y a la derecha las distribuciones truncadas asociadas <math>P_1</math> y <math>P_2</math> siendo los puntos de truncamiento <math>x_1^F</math> y <math>x_1^G</math> tales que <math>F^*(x_1^F) = 0,1 = G^*(x_1^G)</math>, <math>x_2^F</math> y <math>x_2^G</math> tales que <math>F^*(x_2^F) = 0,7 = G^*(x_2^G)</math></i>	50
2.8.	<i>Distribuciones lognormales originales <math>F^* \sim \text{LN}(6, 1)</math>, <math>G^* \sim \text{LN}(5, 0,5)</math> y sus correspondientes distribuciones truncadas asociadas <math>F</math> y <math>G</math>.</i>	57
2.9.	<i>Distribuciones lognormales originales <math>F^* \sim \text{LN}(2, 0,5)</math>, <math>G^* \sim \text{LN}(1, 1)</math> y sus correspondientes distribuciones truncadas asociadas <math>F</math> y <math>G</math>.</i>	59

2.10. Distribuciones lognormales originales $F^* \sim LN(6, 1)$ , $G^* \sim LN(5, 1)$ y sus correspondientes distribuciones truncadas asociadas $F$ y $G$ . . . . .	61
2.11. Distribuciones lognormales originales $F^* \sim LN(\log(20000), 1)$ y $G^* \sim LN(\log(20000), 0,5)$ y sus distribuciones truncadas asociadas $F$ y $G$ . . . . .	63
3.1. Algoritmo de simulación del movimiento browniano estándar. . . . .	79
3.2. Trayectoria browniana . . . . .	80
3.3. Algoritmo de simulación del proceso de Poisson homogéneo. . . . .	81
3.4. Trayectoria típica de un proceso de Poisson homogéneo . . . . .	82
3.5. Algoritmo de simulación de un MRP vía su núcleo subyacente $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ y el vector inicial de probabilidad de fase $\mathbf{p}$ . . . . .	87
3.6. Algoritmo de simulación de trayectorias de un SMP e un intervalo de tiempo dado $[0, t]$ vía caracterización del mismo a través de su núcleo. . . . .	89
4.1. Algoritmo de simulación de secuencias de variables aleatorias como las definidas en (4.7), bajo las condiciones del Teorema 4.2.1.1. . . . .	116
4.2. Algoritmo para estimar la diferencia de las probabilidades de ruina durante un tiempo dado $T$ , de procesos que satisfacen las condiciones del Teorema 4.2.1.1. . . . .	118
4.3. Reducción que se obtiene al aplicar el método de simulación dependiente. . . . .	120

# Notación Básica

Este trabajo está dividido en capítulos que a su vez se componen de secciones y subsecciones.

Las Definiciones, Lemas, Teoremas, Corolarios y Observaciones se numeran de manera independiente haciendo referencia al capítulo, sección, subsección y un dígito de orden.

El símbolo ■ indica el fin de una demostración.

Los vectores y matrices se representan en negrita. Otra notación que se usará es la siguiente:

## Conjuntos

$\mathbb{N}$  conjunto de los números naturales incluyendo el 0

$\mathbb{N}_+$  conjunto de los números naturales (sin el 0)

$\mathbb{Z}$  conjunto de los números enteros

$\mathbb{R}$  conjunto de los números reales

$\mathbb{R}_+$  conjunto de los números reales no negativos

## General

$A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$  matriz con entradas  $a_{ij}, i \in I, j \in J$

$a_{ij}$  entrada correspondiente a la fila  $i$  y a la columna  $j$  de la matriz  $A$

$A_i$   $i$ -ésima fila de la matriz  $A$

$I$  Matriz Identidad de dimensiones adecuadas

$\cong$  Aproximadamente igual

## Distribuciones

$Be(p)$	Distribución Bernoulli de parámetro $p$
$Bi(n, p)$	Distribución Binomial de parámetros $n$ y $p$
$Pareto(b, x_0)$	Distribución de Pareto de parámetros $x_0$ y $b$
$U(a, b)$	Distribución Uniforme en el intervalo $(a, b)$ , $a < b$
$N(\mu, \sigma)$	Distribución Normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$
$LN(\mu, \sigma)$	Distribución lognormal de parámetros $\mu$ y $\sigma$
$X \sim F$	La variable aleatoria $X$ tiene distribución $F$
$X =^d Y$	Las variables aleatorias $X$ e $Y$ están igualmente distribuidas

## Funciones

$P$	Función de probabilidad
$E[X]$	Esperanza matemática de la variable aleatoria $X$
$E[X^k]$	Momento centrado en el origen de orden $k$ de la variable aleatoria $X$
$Var(X)$	Varianza de la variable aleatoria $X$
$F^{-1}$	Función inversa generalizada de la función de distribución $F$
$\exp\{x\}$	Función exponencial $e^x$

## Acrónimos

MP	Proceso de Markov
CTMC	Cadena de Markov en Tiempo Continuo
DTMC	Cadena de Markov en Tiempo Discreto
MRP	Proceso de Renovación Markoviano
SMP	Proceso Semi-Markoviano
IPICC	Orden Estocástico Integral para variables aleatorias positivas y cerrado para convoluciones
i.i.d.	independiente e idénticamente distribuido
v.a. (v.as.)	Variable(s) aleatoria(s)
c.s.	casí seguro
e.o.c.	en otro caso

## Órdenes Estocásticos

$\leq_{FSD}$	Dominancia estocástica de primer orden
$\leq_{st}$	Dominancia estocástica en el sentido estocástico usual
$\leq_{SSD}$	Dominancia estocástica de segundo orden
$\leq_{icx}$	Dominancia estocástica en el sentido convexo creciente
$\leq_{TSD}$	Dominancia estocástica de tercer orden
$\leq_{3-icv}$	Dominancia estocástica en el sentido cóncavo creciente de orden 3
$\leq_{Lo}$	Dominancia estocástica en el sentido de Lorenz
$\leq_{lr}$	Dominancia estocástica en el sentido de razón de verosimilitud
$\leq_{hr}$	Dominancia estocástica según la función de tasa de fallo
$\leq_{rh}$	Dominancia estocástica en el sentido inverso de la función de tasa de fallo
$\leq_{lc}$	Dominancia estocástica en excedencia de nivel
$\leq_{*-lc}$	Dominancia estocástica en excedencia de nivel generalizada
$\leq_*$	Dominancia estocástica según el orden de estrella
$\leq_{SDR}$	Dominancia estocástica en el caso de activos sin riesgo
$\leq_K$	Dominancia estocástica en el sentido de Kalmykov



# Capítulo 1

## Dominancia Estocástica

### 1.1. Introducción

Una forma simple de comparar variables aleatorias (v.as.) es a través de sus valores esperados, no obstante, ello es poco informativo, ya que se basa únicamente en dos valores. Normalmente se obtiene mayor información del comportamiento de funciones de distribución, transformadas de Laplace, funciones generadoras de momentos, funciones de tasa de fallo, de razón de verosimilitudes, etc. Estas características proporcionan un mayor conocimiento de las v.as. Por ello surge la necesidad de reglas de carácter estocástico que permitan la comparación de v.as. Estas reglas se dicen de Dominancia Estocástica (DE) o (SD) y su uso se ha generalizado a numerosas áreas de la Economía, Finanzas y Estadística.

El concepto SD se encuentra en los orígenes del cálculo de probabilidades, por ejemplo en la comparación de dos juegos para elegir aquel que nos proporcione mayores beneficios. Bawa (1982) señala que los orígenes se remontan a Bernoulli (1713).

Históricamente debe citarse el trabajo pionero de Lorenz (1905) relativo al análisis de la desigualdad en la distribución de riquezas entre los miembros de una población.

Karamata (1932) estableció el concepto SD de segundo orden (SSD).

La ordenación estocástica tiene una larga historia, Mann y Whitney (1947) y Lehmann (1955) la usan en sus problemas de contraste estadístico. Blackwell (1951, 1953) comparó experimentos estadísticos mediante SSD. La aplicación en Teoría de la Decisión

comenzó alrededor de 1950 (véase Allais (1953), Quirk y Saposnik (1962), Fishburn (1964)) y ha seguido desarrollándose (ver Beccacece (2006)).

Karlin (1960) introduce el concepto en investigación operativa, en particular en problemas de inventario, problemas que han estudiado otros autores como Huergo y Moreno (2005).

La teoría de la SD y sus aplicaciones a la Economía y Finanzas se desarrolla en 1969-1970, con la publicación de numerosos artículos como los de Hadar y Russell (1969), Hanoch y Levy (1969), Rothschild y Stiglitz (1970), Kroll y Lévy (1980) y Withmore (1970), entre otros. Con posterioridad, se ha seguido trabajando en estas áreas y podemos encontrar numerosa bibliografía al respecto (ver Constantinides (2002), Xu (2006), Abhyankar (2008) y Kopa (2008), entre otros).

Las áreas de aplicación de mayor interés son:

- (1) Desarrollos teóricos acerca de (i) la ordenación de determinadas opciones de riesgo, (ii) reglas SD en clases restringidas de funciones de utilidad, (iii) reglas en activos de bajo riesgo, (iv) SD en vectores multivariantes, (v) diversificación de carteras bajo riesgo, (vi) análisis multivariante, (viii) desarrollo de SD en el caso de funciones de utilidad no lineales y (viii) SD de la transformación de variables.
- (2) Aplicación a datos empíricos (eficiencia y diseño de algoritmos).
- (3) Desarrollos en Economía y Finanzas: (i) optimización del apalancamiento financiero cuando existe posibilidad de bancarrota, (ii) optimización de la producción, (iii) medidas de desigualdad de ingresos, (iv) análisis y definición de riesgo, (v) medida del riesgo de bancarrota, (vi) selección de carteras seguras y (vii) opciones de tasación.
- (4) Aplicación a la Estadística: Selección de estimadores eficientes.

En este trabajo se analizan diversas aplicaciones de la Dominancia Estocástica en el área de Economía y Finanzas. En general, dados dos activos de riesgo  $A$  y  $B$ , con funciones de distribución  $F$  y  $G$  respectivamente, para seleccionar entre uno u otro es preciso establecer un orden de preferencia entre ambos.

De manera intuitiva, un individuo no saciable y con aversión al riesgo prefiere aquel activo que le dé mayor utilidad esperada, según los axiomas de Von Neumann-Morgenstern (1949).

En la literatura existen distintos criterios basados en las propiedades estocásticas de los retornos (o de las funciones de probabilidad de los retornos) que le aseguren al individuo la elección del activo que le proporcione mayor utilidad esperada. Los criterios de comparación se conocen como criterio de Dominancia Estocástica de Primer Orden (FSD), de Segundo Orden (SSD) y de Tercer Orden (TSD). Estos criterios se relacionan con el nivel del retorno y con la dispersión o variabilidad del mismo.

**Definición 1.1.0.1** *Un activo se dice que es dominante desde el punto de vista estocástico si el individuo recibe mayor riqueza con este activo que con cualquier otro que se le presente.*

Sean  $F$  y  $G$  las funciones de distribución de  $A$  y  $B$  respectivamente (sin pérdida de generalidad se supone que el soporte es el intervalo  $[0, 1]$ ) donde:

$$F(x) = P[r_A \leq x] = \int_0^x f(z)dz \quad (1.1)$$

$$G(x) = P[r_B \leq x] = \int_0^x g(z)dz \quad (1.2)$$

siendo  $r_A$  y  $r_B$  los rendimientos de los activos  $A$  y  $B$ , y  $f$  y  $g$  sus densidades, respectivamente.

La Dominancia Estocástica se caracteriza mediante criterios mínimos sobre las propiedades estocásticas de los retornos que nos aseguren que

$$E_F[U(r_A)] \geq E_G[U(r_B)]$$

con  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función no decreciente, o dicho de otra manera,

**Definición 1.1.0.2** *El activo  $A$  domina estocásticamente a  $B$  si para toda función no decreciente  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple:*

$$\int_0^1 U(x)dF(x) \geq \int_0^1 U(x)dG(x)$$

FSD permite conocer si un activo domina a otro (es más eficiente) bajo el único supuesto de no saciabilidad de las funciones de utilidad, SSD añade la aversión al riesgo y TSD la aversión absoluta al riesgo decreciente.

Si  $V_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , definen las clases de funciones de utilidad donde  $V_1$  incluye todas las funciones de utilidad  $U$ , con  $U' \geq 0$ ,  $V_2$  con  $U' \geq 0$  y  $U'' \leq 0$ , y  $V_3$  incluye  $U' \geq 0$ ,  $U'' \leq 0$  y  $U''' \geq 0$ , Russell y Seo (1989) prueban que cada  $V_i$  tiene una función de utilidad simple representativa.

## 1.2. Dominancia Estocástica de Primer Orden

FSD corresponde a la noción de estocásticamente menor en sentido fuerte y clasifica los activos con riesgo de modo consistente para individuos que prefieren más a menos riqueza. Esto implica que  $U' \geq 0$ .

### 1.2.1. Variables aleatorias

**Definición 1.2.1.1** *El activo  $A$  domina a  $B$  según FSD y se denota  $A \geq_{FSD} B$  o también  $A \geq_{st} B$  si se verifica que*

$$P[B > x] \leq P[A > x]$$

*o equivalentemente, si*

$$F(x) \leq G(x)$$

*para todo  $x \in \mathbb{R}$  y con al menos un  $x_0$  en el que la desigualdad sea estricta.*

Dado que  $F$  y  $G$  son las funciones de distribución de los retornos de los activos  $A$  y  $B$ , es mayor la probabilidad de obtener un rendimiento superior con el activo  $A$  que con el activo  $B$ .

Esta definición supone aversión al riesgo por parte del inversor y significa que se preferirá al activo  $A$ , pues acumula menor probabilidad en la cola izquierda de la distribución, que es la menos desfavorable, sin importar la renuncia a un mejor rendimiento.

La ordenación estocástica puede caracterizarse por la función de distribución inversa relativa  $\Phi_{F,G}(t)$  definida como:

$$\Phi_{F,G}(t) = G^{-1}(F(t)) \quad (1.3)$$

Esta función está fuertemente relacionada con el diseño cuantil-cuantil (Q-Q plot), que se obtiene dibujando los cuantiles de las distribuciones  $G^{-1}$  y  $F^{-1}$  una frente a otra para todo  $0 < p < 1$ . En distribuciones continuas el diseño Q-Q y la gráfica de la función  $\Phi_{F,G}$  son idénticas. En general, la función del diseño Q-Q forman sólo un subconjunto del grafo de  $\Phi_{F,G}$ .

**Teorema 1.2.1.1** Sean  $F$  y  $G$  las funciones de distribución de los activos  $A$  y  $B$  respectivamente. Entonces  $B \leq_{st} A$  si y sólo si

$$\Phi_{F,G}(x) \leq x \quad (1.4)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Por definición  $G^{-1}(G(x)) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$  y  $G(G^{-1}(x)) \geq x, \forall x \in (0, 1)$ .

Entonces si  $B \leq_{st} A$ , se tiene que  $F(x) \leq G(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , y de aquí

$$G^{-1}(F(x)) \leq G^{-1}(G(x)) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Recíprocamente si  $G^{-1}(F(x)) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$G(x) \geq G(G^{-1}(F(x))) \geq F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

El teorema permite un procedimiento gráfico simple para validar la ordenación estocástica entre dos funciones distintas. Es decir,  $B \leq_{st} A$  si el diseño Q-Q de  $G^{-1}$  frente a  $F^{-1}$  permanece por debajo de la bisectriz.

**Definición 1.2.1.2** (*FSD con utilidad esperada*). *El activo A domina a B en este sentido cuando  $E[U(r_A)] \geq E[U(r_B)]$  con  $U' \geq 0$  (o también  $E_F[U(x)] \geq E_G[U(x)]$ ), siendo  $U$  la función de utilidad esperada y  $r_A$  y  $r_B$  los rendimientos de A y B respectivamente.*

Otra caracterización de la dominancia estocástica de primer orden es a través de los cuantiles de la distribución. Si denotamos por  $Q_F(p)$  y  $Q_G(p)$  a los cuantiles de orden  $p$  de las distribuciones  $F$  y  $G$  respectivamente, esto es:

$$P_F[A \leq Q_F(p)] = p$$

(análogamente para  $Q_G(p)$ ), podemos establecer la siguiente definición:

**Definición 1.2.1.3** *Diremos que la distribución F domina a la distribución G según FSD si y sólo si  $Q_F(p) \geq Q_G(p)$ , con desigualdad estricta para al menos un valor de p.*

La caracterización a través de los cuantiles nos permite establecer un algoritmo para comprobar si dadas dos muestras de las distribuciones, una domina a la otra según FSD. En concreto, sean  $X$  e  $Y$  dos v.as. de distribuciones  $F$  y  $G$  respectivamente, de las que se obtienen sendas muestras de tamaño  $n$ :  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

Dadas las observaciones anteriores, se obtienen sendas muestras ordenadas, que denotaremos por  $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  e  $\{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}\}$  respectivamente, es decir, que  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  e  $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ .

Se le asigna una probabilidad de  $1/n$  a cada observación (si hubiera dos observaciones idénticas, se sitúa una detrás de la otra y se asignará probabilidad  $1/n$  a cada una).

El algoritmo para comprobar FSD se enuncia como sigue:

**Input:** Sendas muestras  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

**Paso 1, Ordenación de las muestras:**  
 $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  e  $\{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}\}$

**Paso 2, Comprobación:**  $F$  (o  $X$ ) domina a  $G$  (o  $Y$ ) según FSD si y sólo si  $x_{(i)} \geq y_{(i)}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  y existe al menos una desigualdad estricta.

**Output:** La respuesta indicará si existe o no FSD entre las muestras.

Figura 1.1: *Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de primer orden.*

Esto implica que  $x_{(i)} \geq y_{(i)}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  y que  $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x_{i_0} > y_{i_0}$ , entonces, dado que a cada observación se la ha asignado una probabilidad de  $1/n$ ,  $F$  debe estar por debajo de  $G$  y en alguna zona del rango debe ser estrictamente menor, que es precisamente la definición de FSD.

En efecto:

$F(x_{(i)}) = i/n$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , entonces, para todo  $p \in \{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ , se tendrá que  $Q_F(p) \geq Q_G(p)$  y para algún  $p_0$ :  $Q_F(p_0) > Q_G(p_0)$ , es decir, se tiene la definición de FSD utilizando los cuantiles.

De manera análoga, si  $x_{(i)} \geq y_{(i)}$  con desigualdad estricta para algún índice, pero  $\exists j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x_{(j)} < y_{(j)}$ , entonces  $F$  debe cortar a  $G$ , por tanto, no existe FSD.

### 1.2.2. Vectores aleatorios

El concepto de dominancia estocástica en el sentido usual en el caso de vectores aleatorios puede establecerse en la forma siguiente observando el concepto de “conjunto creciente”. Diremos que un conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}$  es creciente si  $y \in U$  siempre que exista un  $x \in U$  tal que  $x \leq y$ , siendo  $\leq$  el orden definido sobre los elementos de un vector.

**Definición 1.2.2.1** *Dados dos vectores reales aleatorios  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  e  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ , diremos que  $\mathbf{X}$  es estocásticamente menor que  $\mathbf{Y}$  según FSD y escribiremos  $\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y}$  o también  $\mathbf{X} \leq_{FSD} \mathbf{Y}$ , si y sólo si*

$$P[\mathbf{X} \in U] \leq P[\mathbf{Y} \in U]$$

para todo conjunto creciente  $U \in \mathbb{R}^n$ .

**Observación 1.2.2.1** *En el caso particular de considerar dos variables aleatorias reales, la definición anterior corresponde a la Definición 1.2.1.1 con  $U$  de la forma  $[0, \infty)$  ó  $(u, \infty)$ , con  $u \in \mathbb{R}$ .*

A continuación se presentan caracterizaciones alternativas para FSD en el caso de vectores aleatorios.

**Proposición 1.2.2.1** *Dados dos vectores reales aleatorios  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  e  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ , entonces  $\mathbf{X} \leq_{FSD} \mathbf{Y}$  equivale a que se tengan cualquiera de las siguientes dos condiciones:*

- a. *Existen vectores aleatorios  $\widehat{\mathbf{X}}$  e  $\widehat{\mathbf{Y}}$ , definidos en un espacio de probabilidad común  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tales que  $\widehat{\mathbf{X}} =_{FSD} \mathbf{X}$ ,  $\widehat{\mathbf{Y}} =_{FSD} \mathbf{Y}$  y  $\widehat{\mathbf{X}}(\omega) \leq \widehat{\mathbf{Y}}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Omega$ .*
- b.  *$E[f(\mathbf{X})] \leq E[f(\mathbf{Y})]$  para toda función creciente real  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  siempre que dicha esperanza exista.*

**Demostración.** Para la demostración ver Liggett (1985), Stoyan (1983) o Szekli (1995). ■

### 1.2.3. Procesos estocásticos

En lo que sigue,  $\Gamma$  se referirá a uno de los siguientes conjuntos:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_+$  o  $\mathbb{R}_+$ .

**Definición 1.2.3.1** *Dados dos procesos estocásticos  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \Gamma}$  con espacio de estados común  $I$ , diremos que  $X$  es estocásticamente menor que  $Y$  según FSD y denotaremos  $X \leq_{FSD} Y$ , si y sólo si*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \leq_{FSD} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_+$  y  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \Gamma$ .

Stoyan (1983, Definición 4.1.2.) lo denomina dominancia estricta de procesos estocásticos en contraposición con la dominancia débil, que también presenta en su Definición 4.1.2., en la que sólo se requiere  $X_t \leq_{FSD} Y_t$ , para todo  $t \in \Gamma$ . (Ver también Muller y Stoyan (2002, Definición 5.1.2.)).

Tenemos la siguiente caracterización de FSD en el caso de procesos estocásticos.

**Proposición 1.2.3.1** *Dados dos procesos estocásticos  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \Gamma}$  con espacio de estados común  $I$ , entonces  $X \leq_{FSD} Y$ , si y sólo si se da alguna de las condiciones siguientes:*

- a. *Existen procesos estocásticos  $\widehat{X}$  e  $\widehat{Y}$ , definidos en un espacio de probabilidad común  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tales que  $\widehat{X} =_{FSD} X$ ,  $\widehat{Y} =_{FSD} Y$  y  $\widehat{X}_t(\omega) \leq \widehat{Y}_t(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Omega$ .*
- b.  *$E[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})] \leq E[f(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})]$  con  $n \in \mathbb{N}_+$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \Gamma$  y para toda función creciente real  $f$ , siempre que dicha esperanza exista.*

**Demostración.** Para la demostración ver Liggett (1985), Stoyan (1983) o Szekli (1995). ■

El siguiente resultado es una propiedad muy importante de la dominancia según FSD.

**Teorema 1.2.3.1** *Dos procesos estocásticos  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \Gamma}$  con espacio de estados común  $I$  satisfacen  $X \leq_{FSD} Y$  si y sólo si existen dos procesos  $\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t \in \Gamma}$  e  $\hat{Y} = (\hat{Y}_t)_{t \in \Gamma}$ , definidos en el mismo espacio de probabilidad, tales que*

$$\hat{X} =_{FSD} X \quad (1.5)$$

$$\hat{Y} =_{FSD} Y \quad (1.6)$$

y

$$P[\hat{X}(t) \leq \hat{Y}(t), t \in \Gamma] = 1 \quad (1.7)$$

**Demostración.** Se trata de una generalización de la Proposición. 1.2.2.1 (a), ver Stoyan (1983). ■

**Teorema 1.2.3.2** *Sean  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dos procesos estocásticos en tiempo discreto. Si*

$$X(0) \leq_{FSD} Y(0) \quad (1.8)$$

y

$$[X(i)|X(1) = x_1, \dots, X(i-1) = x_{i-1}] \leq_{FSD} [Y(i)|Y(1) = y_1, \dots, Y(i-1) = y_{i-1}], \quad (1.9)$$

siempre que  $x_j \leq y_j, j = 1, 2, \dots, i-1, i = 1, 2, \dots$

Entonces

$$X \leq_{FSD} Y$$

**Demostración.** Primeramente se construyen  $\hat{X}(0)$  e  $\hat{Y}(0)$  definidos en el mismo espacio de probabilidad<sup>1</sup>. Esto es posible por (1.8). Cualquier realización  $(x, y)$  de  $(\hat{X}, \hat{Y})$  cumple  $x \leq y$ .

Condicionado en toda posible realización  $(x, y)$ , se construye  $(\hat{X}(1), \hat{Y}(1))$  en el mismo espacio de probabilidad. Esto es posible por (1.9). Cualquier posible realización  $((x, y), (z, t))$  de  $((\hat{X}(0), \hat{X}(1)), (\hat{Y}(0), \hat{Y}(1)))$  cumple  $x \leq z$  e  $y \leq t$ .

<sup>1</sup>Se usa la siguiente propiedad conocida: Si  $F$  es una función de distribución y  $U \sim U(0, 1)$ , entonces  $F^{-1}(U) \sim F$ .

Y así sucesivamente se construyen los procesos  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  tal y como se ha descrito. De esta manera se obtienen dos procesos  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  que cumplen  $P[\hat{X} \leq \hat{Y}] = 1$ . Por construcción, también cumplen  $\hat{X} =_{FSD} X$  e  $\hat{Y} =_{FSD} Y$ . Así, usando Teorema 1.2.3.1 se tiene que  $X \leq_{FSD} Y$ . ■

El orden FSD para procesos estocásticos es cerrado bajo transformaciones crecientes, al igual que en el caso FSD para v.as. y vectores aleatorios, es decir, que si

$$X \leq_{FSD} Y$$

entonces

$$g(X) \leq_{FSD} g(Y)$$

siendo  $g$  una función creciente y  $X$  e  $Y$  dos procesos estocásticos. También se verifica que esta ordenación es cerrada bajo mixturas.

Sean ahora dos procesos de Markov homogéneos en tiempo discreto

$$X = (X(n))_{n \in \mathbb{N}} \quad e \quad Y = (Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

con espacio de estados común  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Denotemos por  $Z_X(x) =_{FSD} [X(n+1)|X(n) = x]$  y  $Z_Y(x) =_{FSD} [Y(n+1)|Y(n) = x]$ ,  $x \in I$ .

**Teorema 1.2.3.3** Sean  $X$  e  $Y$  dos procesos de Markov en las condiciones anteriores. Supongamos que  $X(0) \leq_{FSD} Y(0)$  y que

$$Z_X(x) \leq_{FSD} Z_Y(y), \quad x \leq y, \tag{1.10}$$

entonces

$$X \leq_{FSD} Y.$$

**Demostración.** La demostración se deduce directamente del Teorema 1.2.3.2. ■

Una variante del resultado anterior para el caso de cadenas de Markov (es decir, para procesos de Markov homogéneos en tiempo discreto y con espacio de estados en  $\mathbb{N}$ ), se

deduce de considerar una cadena de Markov skip free positiva, es decir, una cadena que no tiene saltos positivos de amplitud mayor que uno. Para una cadena de Markov  $X = (X(n))_{n \in \mathbb{N}}$  con espacio de estados  $I \subseteq \mathbb{N}$ , sea  $Z_X(i) =_{FSD} [X(n+1)|X(n) = i]$ ,  $i \in I$ .

**Teorema 1.2.3.4** Sean  $X = (X(n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Y = (Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$  dos cadenas de Markov. Supóngase que  $X(0) \leq_{FSD} Y(0)$ , que

$$Z_X(i) \leq_{FSD} Z_Y(i), \forall i \quad (1.11)$$

y

$$Z_Y(i) \geq i, \forall i \quad (1.12)$$

y que  $X = (X(n))_{n \in \mathbb{N}}$  es skip-free positiva. Entonces  $X \leq_{FSD} Y$ .

**Demostración.** Se trata de la aplicación del Teorema 1.2.3.3 para el caso de cadenas de Markov. La demostración se basa en la construcción de dos cadenas de Markov subyacentes en el mismo espacio de probabilidad y después usar el Teorema 1.2.3.1. ■

Si dos procesos estocásticos  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \Gamma}$  verifican  $X \leq_{FSD} Y$ , entonces, en virtud del Teorema 1.2.3.1, los tiempos de primer paso

$$T_X(a) = \inf \{t : X(t) \geq a\} \quad (1.13)$$

y

$$T_Y(a) = \inf \{t : Y(t) \geq a\} \quad (1.14)$$

(con  $\inf \emptyset = \infty$ ) satisfacen  $T_X(a) \geq_{FSD} T_Y(a)$ . El recíproco no es necesariamente cierto. Usando el Teorema 1.2.3.1 y el Teorema 1.2.3.4 podemos enunciar el siguiente resultado, cuya demostración se basa en construir de manera apropiada las cadenas de Markov subyacentes en el mismo espacio de probabilidad y aplicar el Teorema 1.2.3.1.

**Teorema 1.2.3.5** Sean  $X = (X(n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Y = (Y(n))_{n \in \mathbb{N}}$  dos cadenas de Markov. Supóngase que  $X(0) \leq_{FSD} Y(0)$ ,  $Z_Y(i) \geq i$ ,  $\forall i$ , que

$$Z_X(i) \leq_{FSD} Z_Y(i), \forall i \in I \quad (1.15)$$

y que  $X = (X(n))_{n \in \mathbb{N}}$  es skip-free positiva. Entonces

$$T_X(a) \geq_{FSD} T_Y(a),$$

para todo  $a$ .

**Demostración.** La demostración se construye a partir del Teorema 1.2.3.1 y el Teorema 1.2.3.4. ■

Supóngase ahora que se desea comparar dos procesos  $M(t)$  y  $N(t)$ , que representan el número de saltos que dos procesos estocásticos  $X$  e  $Y$  dan en un intervalo de tiempo  $(0, t]$ . Además de compararlos en el sentido FSD, se puede definir otro tipo de ordenaciones como el siguiente.

Para todo entero  $m$ , consideremos la sucesión  $(B_n)_{n=1,2,\dots,m}$  de conjuntos borelianos sobre el conjunto de los reales positivos. Sean  $M(B_i)$  y  $N(B_i)$  el número de saltos que los procesos dan en un conjunto  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Supongamos que para cualquier elección del entero  $m$  y cualesquiera que sean los borelianos  $B_1, \dots, B_m$  se cumpliera que:

$$(M(B_1), \dots, M(B_m)) \leq_{FSD} (N(B_1), \dots, N(B_m)) \quad (1.16)$$

entonces diremos que el proceso  $M(t)$  es menor que  $N(t)$  en el sentido usual sobre el espacio de medidas aleatorias entero valuadas  $\mathcal{N}$ , y se denota por  $M \leq_{FSD-\mathcal{N}} N$ .

Terminamos este apartado con la noción de monoticidad interna de un proceso estocástico que ayuda a comprender el comportamiento del proceso en el tiempo.

**Definición 1.2.3.2** Un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  es estocásticamente monótono creciente (decreciente) en el sentido usual si y sólo si  $X_{t_1} \leq_{FSD} (\geq_{FSD}) X_{t_2}$  para todos  $t_1, t_2 \in \Gamma$  tales que  $t_1 < t_2$ .

Podemos aplicar la definición anterior al caso de procesos de Markov homogéneos en tiempo discreto. Un proceso de Markov homogéneo en tiempo discreto se dice estocásticamente monótono si  $Z_X(x) =_{FSD} [X(n+1)|X(n) = x]$  es estocásticamente creciente en  $x \in I$ .

**Teorema 1.2.3.6** *Sea  $X = (X(n))_{n \in \mathbb{N}}$  un proceso de Markov homogéneo en tiempo discreto con  $X(0) = x$ . Entonces*

$$\{X^{(x)}(n), n \in \mathbb{N}\} \leq_{FSD} \{X^{(y)}(n), n \in \mathbb{N}\} \quad (1.17)$$

siempre que  $x \leq y$ , con  $\{X^{(x)}(n), n \in \mathbb{N}\}$  indicando el proceso  $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$  bajo la condición  $X(0) = x$ .

**Demostración.** Es consecuencia directa del Teorema 1.2.3.3. ■

#### 1.2.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de primer orden

##### Arbitraje

La relación de la FSD y el Arbitraje fue analizada por Jarrow (1986).

##### Desigualdad social

El análisis actual de la desigualdad social y económica y los conceptos relacionados de pobreza, redistribución, movilidad, etc, se efectúan a través de los criterios de dominancia estocástica para comparar situaciones mediante mediciones básicas.

Los trabajos pioneros de Kolm (1969,1976), Atkinson (1970) y Sen (1973) sobre la desigualdad económica son el punto de partida en el contexto de la economía del bienestar.

El concepto de desigualdad ha sido tratado desde distintos puntos de vista como la Ética, la Sociología o la Filosofía.

En Economía no existe tampoco unanimidad en su significado, Amiel y Cowell (1999), ni en su implementación práctica en lo referente a la desigualdad entre los distintos hogares.

La importancia de un análisis riguroso de la desigualdad económica es obvia, ya que los análisis de los modelos económicos actuales deben responder no sólo a criterios de eficiencia económica sino a criterios distributivos, debido a la fuerte presencia del Sector Público y de las Economías Regionales en el contexto actual.

Se sabe, en la teoría del bienestar social, que el teorema de imposibilidad de Arrow (1963) impide agregar preferencias ordinales individuales para obtener una función del bienestar social de acuerdo con unas propiedades razonables o criterios éticos. El conjunto de criterios éticos se representa por un conjunto de restricciones o supuestos, que reflejan las preferencias sociales sobre las distribuciones de renta, estableciendo órdenes parciales o incompletos en la comparación de la desigualdad.

La forma de resolver la imposibilidad consiste en definir una función del bienestar social individual sobre las utilidades de los individuos, independiente de los precios relativos, (Roberts (1980)),  $W(U_1(Y_1), \dots, U_H(Y_H))$  siendo  $Y = (Y_1, \dots, Y_H)$  el vector de rentas iniciales de  $H$  hogares,  $U_i(Y_i)$  la utilidad de las preferencias individuales y  $W(\cdot)$  las preferencias sociales en el proceso de agregación.

**Definición 1.2.4.1** *La función de bienestar social  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de las distribuciones de renta, de forma tal que si “ $\leq_W$ ” indica el orden de preferencias sociales sobre  $X$  e  $Y$ , perspectivas aleatorias, (es decir  $X \geq_W Y$ ,  $X$  domina débilmente a  $Y$  desde el punto de vista social), en  $\mathbb{R}$ , entonces:*

$$X \geq_W Y \Leftrightarrow W(X) \geq W(Y)$$

**Definición 1.2.4.2** *Un índice de desigualdad  $I(Y)$  es consistente con las distribuciones de bienestar social o con el orden de preferencias  $W(Y)$ , si dadas dos distribuciones  $X$  e  $Y$  cualesquiera definidas sobre  $H$  hogares, con la misma renta media  $\mu(X) = \mu(Y)$  es tal que:*

$$W(Y) \geq W(X) \equiv I(Y) \leq I(X)$$

La función de bienestar social es invariante ante permutaciones de niveles de renta, y por tanto, es simétrica, de lo que se deduce que los índices de desigualdad basados en estas funciones deben ser simétricos.

El principio de Pareto establece que dadas dos distribuciones de renta, si en una de ellas no se observan hogares con renta menor y se observa al menos un hogar con renta mayor, tendrá un nivel de bienestar no inferior a la otra, de ahí, la función de bienestar social es no decreciente.

**Definición 1.2.4.3** *Dadas dos distribuciones de renta  $X$  e  $Y$  de  $H$  hogares, la distribución  $X$  domina en primer grado a  $Y$ , es decir,  $W(X) \geq W(Y)$  para toda función de bienestar social simétrica y no decreciente  $W$ , si y sólo si la función de distribución de  $X$  no está nunca por encima de la de  $Y$ .*

Sapoznik (1981, 1983) analiza en el contexto del bienestar la dominancia de primer grado.

En la teoría de la economía del bienestar o de la desigualdad, la dominancia de primer grado sólo considera la eficiencia en el sentido de Pareto, pero no sobre la desigualdad, ya que si se mantiene la renta constante, la comparación entre distribuciones diferentes, lo es entre distribuciones no comparables y el principio de anonimato establece que el bienestar es independiente de qué hogar recibe qué renta. Por ello interesa añadir restricciones que afecten a la desigualdad o a la dispersión, basándose en el principio de transferencias, Pigou (1912)-Dalton (1920), o desplazamientos que mantienen la media constante o transferencias progresivas.

**Definición 1.2.4.4** *(Principio de transferencias progresivas): Si dada una distribución de renta  $X$  con  $H$  hogares pasamos a otra  $Y$  mediante una transferencia de un hogar rico a otro más pobre, sin que se altere el orden entre ellos, el bienestar de  $Y$  será no inferior al de  $X$ . Ello requiere que la función de bienestar social sea s-cóncava.*

**Definición 1.2.4.5** *Una función  $W(Y)$  es s-cóncava si  $W(A Y) \geq W(Y)$  para toda  $A$  matriz biestocástica.*

La s-concavidad es una condición más débil que la concavidad y la simetría. Toda función s-cóncava es simétrica.

Retorno de un activo

Si  $A \geq_{FSD} B$  entonces el retorno del activo dominante  $A$  es la suma del retorno del activo  $B$  más una v.a. positiva, i.e.,  $r_A = r_B + \vartheta$ , donde  $\vartheta$  representa la v.a. Esta relación se cumple ya que  $E[U(r_A)] = E[U(r_B + \vartheta)] \geq E[U(r_B)]$  por ser  $U$  una función no decreciente.

**1.3. Dominancia Estocástica de Segundo Orden**

SSD clasifica a los individuos que:

- i. Prefieren más a menos riqueza ( $U' \geq 0$ )
- ii. Son adversos o neutrales al riesgo ( $U'' \leq 0$ )

El individuo se preocupa por la dispersión de los retornos.

**1.3.1. Variables aleatorias**

Por simplicidad se consideran distribuciones con la misma media, ya que si las variables aleatorias con la misma media describen los retornos de dos inversiones con riesgo, entonces el decisor con aversión al riesgo elegirá aquella inversión con variabilidad más baja. De ahí que las ordenaciones de la variabilidad sean de gran interés en el contexto de la decisión bajo riesgo.

**Definición 1.3.1.1** *El activo  $A$  domina a  $B$  según SSD, y se denota  $A \geq_{SSD} B$  si*

$$\int_{-\infty}^x (G(t) - F(t)) dt \geq 0$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  y con desigualdad estricta para al menos un valor de  $x$ .

En el caso discreto la integral puede aproximarse por sumas, siempre que sea posible.

**Definición 1.3.1.2** *(SSD con utilidad esperada). El activo  $A$  domina a  $B$  en este sentido cuando  $E[U(r_A)] \geq E[U(r_B)]$ ,  $U'' \leq 0$ , siendo  $U$  la función de utilidad esperada y  $r_A$  y  $r_B$  los rendimientos de  $A$  y  $B$  respectivamente.*

Una caracterización importante de este tipo de dominancia a través de la construcción de espacios de probabilidad comunes es la siguiente.

**Teorema 1.3.1.1** *Dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  satisfacen  $X \leq_{SSD} Y$  si y sólo si existen dos variables aleatorias  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  definidas en el mismo espacio de probabilidad, tales que  $\hat{X} =_{FSD} X$ ,  $\hat{Y} =_{FSD} Y$ , y  $\{\hat{Y}, \hat{X}\}$  es una supermartingala, es decir,  $E[\hat{X}|\hat{Y}] \leq \hat{Y}$  casi seguro.*

*Además las variables  $\hat{X}$  y  $\hat{Y}$  se pueden seleccionar de forma que  $[\hat{X}|\hat{Y} = x]$  sea creciente en  $x$  en el sentido de ordenación usual (FSD).*

**Demostración.** Ver Shaked y Shanthikumar (2007). ■

Al igual que en el caso FSD, SSD también puede caracterizarse a través de los cuantiles.

**Definición 1.3.1.3** *Diremos que  $F$  domina a  $G$  según SSD si y sólo si*

$$\int_0^p [Q_F(t) - Q_G(t)] dt \geq 0$$

*para todo  $p$ , con desigualdad estricta para al menos algún valor  $p$ .*

La caracterización a través de los cuantiles permite establecer un algoritmo para comprobar si dadas dos muestras, una domina a la otra según SSD. En concreto, sean  $X$  e  $Y$  dos v.as. de distribuciones  $F$  y  $G$  respectivamente, de las que se obtienen sendas muestras de tamaño  $n$ :  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

El procedimiento es parecido al del caso FSD, lo primero que se debe hacer es ordenar las muestras, denotadas por:  $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  e  $\{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}\}$  respectivamente, es decir, que  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  e  $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ .

Se le asigna una probabilidad de  $1/n$  a cada observación (si hubiera dos observaciones idénticas, se sitúa una detrás de la otra y se asignará probabilidad  $1/n$  a cada una).

Construimos las secuencias  $\{s_i\}_{i=1, \dots, n}$  y  $\{s'_i\}_{i=1, \dots, n}$  como sigue:

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l}
 s_1 = x_{(1)} \\
 s_2 = x_{(1)} + x_{(2)} \\
 \vdots \\
 s_k = \sum_{i=1}^k x_{(i)} \\
 \vdots \\
 s_n = \sum_{i=1}^n x_{(i)}
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 y
 \quad
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l}
 s'_1 = y_{(1)} \\
 s'_2 = y_{(1)} + y_{(2)} \\
 \vdots \\
 s'_k = \sum_{i=1}^k y_{(i)} \\
 \vdots \\
 s'_n = \sum_{i=1}^n y_{(i)}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

El algoritmo para comprobar SSD se enuncia así:

**Input:** Sendas muestras  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

**Paso 1, Ordenación de las muestras:**  
 $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  e  $\{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}\}$

**Paso 2:** Construcción de las secuencias  $\{s_i\}_{i=1, \dots, n}$  y  $\{s'_i\}_{i=1, \dots, n}$

**Paso 3, Comprobación:**  $F$  (o  $X$ ) domina a  $G$  (o  $Y$ ) según SSD si y sólo si  $s_i \geq s'_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y existe al menos una desigualdad estricta.

**Output:** La respuesta indicará si existe o no SSD.

Figura 1.2: Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de segundo orden.

### 1.3.2. Vectores aleatorios

**Definición 1.3.2.1** Sean  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$  vectores aleatorios  $n$  dimensionales tales que

$$E[\Phi(\mathbf{X})] \leq E[\Phi(\mathbf{Y})]$$

para toda función creciente y cóncava  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  siempre y cuando exista dicha esperanza. En ese caso se dice que  $\mathbf{X}$  es menor que  $\mathbf{Y}$  según SSD (o en el sentido creciente cóncavo) y escribiremos  $\mathbf{X} \leq_{SSD} \mathbf{Y}$ .

**Teorema 1.3.2.1** Dos vectores aleatorios  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  satisfacen  $\mathbf{X} \leq_{SSD} \mathbf{Y}$  si y sólo si existen vectores aleatorios  $\widehat{\mathbf{X}}$  e  $\widehat{\mathbf{Y}}$  definidos en el mismo espacio de probabilidad, tales que  $\widehat{\mathbf{X}} =_{FSD} \mathbf{X}$ ,  $\widehat{\mathbf{Y}} =_{FSD} \mathbf{Y}$ , y  $\{\widehat{\mathbf{Y}}, \widehat{\mathbf{X}}\}$  es una supermartingala, es decir,

$$E[\widehat{\mathbf{X}}|\widehat{\mathbf{Y}}] \leq \widehat{\mathbf{Y}} \text{ casi seguro.}$$

**Demostración.** Se trata de una generalización del Teorema 1.3.1.1, ver Shaked y Shantikumar (2007). ■

### 1.3.3. Procesos estocásticos

En esta subsección se introduce el concepto de dominancia estocástica de segundo orden para procesos estocásticos en tiempo discreto y se establece un resultado básico que afirma que dos procesos estocásticos son comparables en este sentido, si y sólo si cualesquiera martingalas de dimensión finita asociadas a cada uno de ellos son comparables en dicho sentido.

**Definición 1.3.3.1** Sean  $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  e  $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  dos procesos estocásticos en tiempo discreto y con espacio de estados  $\mathbb{R}$ . Supóngase que para cualquier elección de un entero  $m$ , ocurre que:

$$(X(1), X(2), \dots, X(m)) \leq_{SSD} (Y(1), Y(2), \dots, Y(m))$$

entonces se dice que el proceso  $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  es menor según SSD que el proceso  $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  y se escribe  $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\} \leq_{SSD} \{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ .

En el siguiente teorema se hará uso de funcionales cóncavos. He aquí su definición: se dice que un funcional  $g$  es cóncavo si

$$g(\{\alpha x(n) + (1 - \alpha)y(n), n \in \mathbb{N}_+\}) \geq \alpha g(\{x(n), n \in \mathbb{N}_+\}) + (1 - \alpha)g(\{y(n), n \in \mathbb{N}_+\})$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\{x(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  e  $\{y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ .

**Teorema 1.3.3.1** Sean  $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  e  $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  procesos estocásticos en tiempo discreto y con espacio de estados  $\mathbb{R}$ . Entonces  $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\} \leq_{SSD} \{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$  si y sólo si

$$E[g(\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\})] \leq E[g(\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\})] \quad (1.18)$$

para todo funcional continuo (con respecto a la topología producto de  $\mathbb{R}^\infty$ ) y cóncavo creciente, siempre que dicha esperanza exista.

**Demostración.** Ver Shaked y Shanthikumar (2007). ■

### 1.3.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de segundo orden

#### Retorno de un activo

Stiglitz (1970) demostró que  $A \geq_{SSD} B$  si y sólo si  $r_B = r_A + \xi \Rightarrow E[\xi|r_A] = 0$ . Es decir, el retorno del activo  $B$  es igual al retorno del activo  $A$  más una variable aleatoria ortogonal al retorno de  $A$ . Obsérvese que  $r_A$  y  $r_B$  tienen igual media, pero el retorno del activo  $B$  tiene mayor varianza y por lo tanto más riesgo.

Una conexión natural entre la variabilidad de las v.as. y las ordenaciones estocásticas se basan en las funciones reales convexas.

En otros contextos, a este tipo de dominancia se la denota por “ $\leq_{icv}$ ” (increasing concave order). En Ross (1983) se dice estocásticamente más variable y se indica por “ $\leq_v$ ”. Stoyan (1983) la denomina menor en vida residual media y la designa por “ $\leq_c$ ”. En las ciencias actuariales se conoce como orden de pérdida-parada (stop-loss order) y se indica por “ $\leq_{sl}$ ”. El orden convexo se conoce en ese campo como el orden de

pérdida-parada con medias idénticas y se indica por “ $\leq_{sl,=}$ ”.

### Desigualdad social

Desde el punto de vista de la Economía del bienestar se tiene lo siguiente:

**Definición 1.3.4.1** *Dadas dos distribuciones de renta de  $H$  hogares  $X$  e  $Y$ , con la misma renta media, la distribución  $X$  domina en segundo orden a  $Y$  si y sólo si las funciones de distribución acumuladas verifican*

$$\sum_0^{x_i} F_X(x_i) \leq \sum_0^{y_j} F_Y(y_j), \forall x_i = y_j$$

El criterio se establece de forma equivalente en términos de la curva de Lorenz, que es la proporción de renta acumulada que recibe el porcentaje  $p$  más pobre de la población. La curva de Lorenz  $L_X$  se calcula como:

$$L_X(p) = \frac{\sum_0^{x_i} x_j}{H\mu(X)}, \forall x_j \leq x_i \quad (1.19)$$

siendo  $p = F_X(H_i) = i/H$  y  $\mu(X)$  la renta media de la distribución.

Otra forma de definir la curva de Lorenz asociada a una v.a.  $X$  en la que se hace uso de la inversa de su función de distribución  $F$  y su esperanza, siempre que esta exista y sea no nula, es la siguiente:

$$L_X(p) = \frac{1}{E[X]} \int_0^p F^{-1}(u) du, p \in [0, 1] \quad (1.20)$$

Esta función es convexa en  $(0, 1)$ .

Dadas dos distribuciones de renta de  $H$  hogares  $X$  e  $Y$ , con la misma renta media, la distribución  $X$  domina en segundo grado a  $Y$  si y sólo si la curva de Lorenz de  $X$  no va nunca por debajo de la de  $Y$ , es decir,  $L_X(p) \geq L_Y(p), \forall p \in (0, 1)$ .

Este test de dominancia genera un orden parcial o incompleto, pues situaciones con la misma renta, en que estas funciones transformadas se cortan, son incomparables. Ver

Davidson y Duclos (1977) para el test de significancia estadística de los criterios de Lorenz.

Haciendo uso de la definición de la curva de Lorenz dada en (1.20), se puede definir un nuevo tipo de ordenación estocástica entre v.as., conocida como ordenación en el sentido de Lorenz.

**Definición 1.3.4.2** *Dadas  $X$  e  $Y$  v.as. con curvas de Lorenz asociadas  $L_X$  y  $L_Y$  respectivamente, diremos que  $X$  es menor que  $Y$  en el sentido de Lorenz y escribiremos  $X \leq_{Lo} Y$  si*

$$L_Y(p) \leq L_X(p)$$

para todo  $p \in [0, 1]$ .

**Observación 1.3.4.1** *Si las v.as.  $X$  e  $Y$  con distribuciones  $F$  y  $G$  respectivamente, verifican  $X \geq_{SSD} Y$  y  $E[X] \leq E[Y]$ , entonces se tiene la siguiente equivalencia*

$$X \geq_{SSD} Y \iff X \leq_{Lo} Y \tag{1.21}$$

**Demostración.** Basta observar que

$$X \geq_{SSD} Y \iff \int_0^p F^{-1}(u)du \geq \int_0^p G^{-1}(u)du, \quad \forall u,$$

y la definición de dominancia en el sentido de Lorenz. ■

**Observación 1.3.4.2** *Algunos autores definen la ordenación de Lorenz variando el sentido de la desigualdad, es decir  $X \geq_{Lo} Y$  si y sólo si  $L_X(p) \geq L_Y(p)$ , para todo  $p \in [0, 1]$ .*

Shorrocks (1983) y Kakwani (1984) consideran restricciones para analizar la dominancia de segundo grado con renta media variable, que afectan a la desigualdad y eficiencia.

**Definición 1.3.4.3** Dadas dos distribuciones de renta de  $H$  hogares  $X$  e  $Y$  la distribución  $X$  domina en segundo grado a  $Y$ , para toda función de bienestar social no decreciente  $s$ -cóncava,  $W$  si y sólo si  $GL_X(p) \geq GL_Y(p), \forall p \in (0, 1)$  donde  $GL$  es la curva de Lorenz generalizada (Shorrocks (1983)), con  $GL_X(p) = \mu(X)L_X(p)$ , siendo  $\mu(X)$  la esperanza matemática de  $X$ .

Cuando las curvas de Lorenz generalizadas se cortan las situaciones son incomparables de acuerdo con este principio de dominancia.

Una generalización de la curva de Lorenz es la función de distribución ponderada  $\hat{F}_\omega$  asociada a una distribución  $F$  de una v.a.  $X$ . Dicha distribución ponderada estará asociada a una v.a. a la que llamaremos v.a. ponderada y denotaremos por  $\hat{X}_\omega$ .

**Definición 1.3.4.4** Sea  $X$  una v.a. con distribución  $F$ . Sea  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función tal que  $0 < E[\omega(X)] < \infty$ . Entonces

$$\hat{F}_\omega(x) = \frac{1}{E[\omega(X)]} \int_{-\infty}^x \omega(u) dF(u) = \frac{1}{E[\omega(X)]} \int_0^{F(x)} \omega F^{-1}(z) dz$$

es una función de distribución, llamada función de distribución ponderada asociada a  $F$ . En el caso de que existiera densidad  $f$ , entonces la densidad ponderada es

$$\hat{f}_\omega = \frac{\omega(x)f(x)}{E[\omega(x)]}$$

Si  $F(0) = 0$  y  $\omega(x) = x^k, k \in \mathbb{Z}_+$ , diremos que  $\hat{F}_\omega$  es una distribución de longitud sesgada de orden  $k$  y se denota  $\hat{F}_{(k)}$  y si  $k = 1$ ,  $\hat{F}$  (en caso de existir densidad,  $\hat{f}_{(k)}$  y  $k = 1$ ,  $\hat{f}$ , respectivamente)

**Observación 1.3.4.3** En el caso de que la función de ponderación  $\omega(x)$  fuera la identidad y  $0 < E[X] < \infty$  se tendría la expresión de la curva de Lorenz vista anteriormente.

Existen numerosas aplicaciones que utilizan este tipo de distribuciones, especialmente las relacionadas con el análisis de datos relativos a poblaciones y ecología (ver Patil y

Rao (1977), (1978)). También en el ámbito de la fiabilidad (Gupta y Keating (1986)) y en el estudio de distribuciones de vida (Jain (1989), Bartoszewicz y Skolimowska (2004)(a), (b) y Belzunce (2004)).

Muchas distribuciones muy conocidas en estadística se pueden expresar usando este tipo de distribuciones ponderadas, por ejemplo, distribuciones de estadísticos de orden, funciones truncadas, procesos de renovación, etc.

## 1.4. Dominancia Estocástica de Tercer Orden

### 1.4.1. Variables aleatorias

El concepto de Dominancia Estocástica de Tercer Orden fue introducido por Withmore en 1970.

**Definición 1.4.1.1** *Diremos que el activo  $A$  domina a  $B$  según TSD y se denota por  $A \geq_{TSD} B$  si*

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^v (G(t) - F(t)) dt dv \geq 0$$

para todo  $x$  y  $E_F[A] \geq E_G[A]$ .

Al igual que en los casos FSD y SSD, se puede caracterizar TSD según las funciones de utilidad.

**Definición 1.4.1.2** *(TSD con utilidad esperada). El activo  $A$  domina a  $B$  en este sentido cuando  $E[U(r_A)] \geq E[U(r_B)]$ , siendo  $U$  la función de utilidad esperada cumpliendo  $U' \geq 0, U'' \leq 0, U''' \geq 0$  y  $r_A$  y  $r_B$  los rendimientos de  $A$  y  $B$  respectivamente.*

En otros contextos, a este tipo de dominancia se la denota por  $\leq_{3-icv}$  (increasing 3-concave order).

En este caso también existe una caracterización a través de cuantiles.

**Definición 1.4.1.3** Diremos que la distribución  $F$  domina a la distribución  $G$  según TSD si y sólo si:

$$\int_0^p \int_0^t [Q_F(z) - Q_G(z)] dz dt \geq 0$$

para todo  $p$ , con desigualdad estricta para al menos para algún valor  $p$  y

$$\int_0^1 [Q_F(t) - Q_G(t)] dt \geq 0$$

En este caso, la construcción del algoritmo resulta más compleja que en los casos FSD y SSD, debido principalmente a la propia definición de dominancia de tercer orden en la que aparece una integral doble. Por ello, no es posible realizar comparaciones sólo en los puntos donde se produce el salto de la función de distribución (como en el caso FSD y SSD), ya que en este caso la integral no es lineal, cosa que sí ocurría en los dos casos anteriores y por ello un punto interior puede violar la condición de TSD.

Uno de los primeros autores en hacer notar este punto fue Fishburn (1970). El algoritmo propuesto inicialmente en la literatura realizaba comparaciones sólo en los puntos donde se producían los saltos, lo cual es erróneo.

El algoritmo descrito resuelve el problema planteado, la resolución mediante la comparación de una cierta función en los puntos interiores.

Sean:

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt \quad y \quad F_3(x) = \int_{-\infty}^x F_2(t) dt$$

con  $F$  la función de distribución de la v.a.  $X$ . De manera análoga se definen  $G_2$  y  $G_3$ .

Sean sendas muestras ordenadas que provienen de dos v.as.  $X$  e  $Y$ :  $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  e  $\{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}\}$  respectivamente, es decir que  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  e  $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(n)}$ . Considérese la muestra conjunta  $\{z_1, z_2, \dots, z_{2n}\}$ , en la que todo  $z_k$  coincide o bien con un  $x_{(i)}$  o bien con un  $y_{(i)}$ .

De esta manera, las funciones pueden expresarse como:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_{(1)} \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x_{(1)} \leq x < x_{(2)} \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n}, & \text{si } x_{(n-1)} \leq x < x_{(n)} \\ 1, & \text{si } x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq x_{(1)} \\ \frac{(x-x_{(1)})}{n}, & \text{si } x_{(1)} \leq x \leq x_{(2)} \\ \vdots & \\ \frac{kx}{n} - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^k x_{(i)} \right), & \text{si } x_{(k)} \leq x \leq x_{(k+1)} \\ \vdots & \\ x - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_{(i)} \right), & \text{si } x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq x_{(1)} \\ \frac{1}{2n}(x - x_{(1)})^2, & \text{si } x_{(1)} \leq x \leq x_{(2)} \\ \vdots & \\ F_3(x_{(k)}) + \frac{k}{2n}(x^2 - x_{(k)}^2) - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^k x_{(i)} \right) (x - x_{(k)}), & \text{si } x_{(k)} \leq x \leq x_{(k+1)} \\ \vdots & \\ F_3(x_{(n)}) + \frac{1}{2}(x^2 - x_{(n)}^2) - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_{(i)} \right) (x - x_{(n)}), & \text{si } x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

Y finalmente sea  $H(x) = G_3(x) - F_3(x)$

Se supone, sin pérdida de generalidad, que  $G$  no domina a  $F$  según TSD y probemos si  $F$  domina a  $G$  según este criterio.

Para comprobar si  $F$  domina a  $G$  según TSD es suficiente verificar las tres condiciones siguientes:

1.  $E_F[F] \geq E_G[X]$
2.  $F_3(z) \leq G_3(z)$  para todo  $z \in \{x_{(i)}, y_{(i)}\}_{i=1, \dots, n}$ . (Comprobación de la integral en los puntos de salto) .
3. Si para algún  $k$ ,

$$0 \geq H'(z_k) = G_2(z_k) - F_2(z_k)$$

y

$$0 \leq H'(z_{k+1}) = G_2(z_{k+1}) - F_2(z_{k+1})$$

comprobar si  $H(\frac{-b}{2a}) \geq 0$ , siendo  $\frac{-b}{2a}$  el vértice de la parábola  $H$ , que está en el intervalo  $[z_k, z_{k+1}]$ .

De esta manera se puede escribir el siguiente algoritmo de comprobación de TSD:

**Input:** Dos muestras:  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  proviene de una v.a.  $X$  con distribución  $F$  e  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  proviene de una v.a.  $Y$  de distribución  $G$ .

**Paso 1, Ordenación de las muestras:**  
 $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$  e  $\{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}\}$

**Paso 2:** Construcción de la secuencia  $\{z_i\}_{i=1, \dots, 2n}$

**Paso 3:** Construcción de las funciones  $F_2, F_3, G_2, G_3$  y  $H$ .

**Paso 4, Comprobación:**  $F$  (o  $X$ ) domina a  $G$  (o  $Y$ ) según TSD si se verifican las tres condiciones anteriores (1., 2. y 3.)

**Output:** La respuesta indicará si existe o no TSD de  $F$  sobre  $G$ .

Figura 1.3: Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de tercer orden.

### 1.4.2. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de tercer orden

#### Desigualdad social y economía del bienestar

Dada una transferencia fija progresiva entre dos individuos separados por la misma renta, esta tiene un mayor impacto sobre la reducción de la desigualdad de producirse en

un tramo bajo de renta que en un tramo más alto (Kolm (1976)). Este principio denominado de las transferencias decrecientes es básicamente equivalente a otros similares que aparecen en la literatura económica, por ejemplo, el principio de sensibilidad a las transferencias (Shorrocks y Foster (1987)) o aversión a la desigualdad decreciente (Davies y Hoy (1995)) o al principio de mantener constantes la media y la varianza (Menezes y otros (1980)), que son tales que un conjunto de transferencias compuestas progresivas en el tramo bajo y regresivas en el alto, tales que mantienen la media y la varianza constantes no reducen en su conjunto el bienestar o no aumentan la desigualdad. Lo que ocurre es que la función de bienestar social debe tener tercera derivada positiva.

Shorrocks y Foster (1987) y Dardoni y Lambert (1988), establecen las condiciones para la dominancia de tercer grado cuando se produce un único corte de las curvas de Lorenz y las distribuciones tienen la misma renta media.

**Definición 1.4.2.1** *Dadas dos distribuciones de renta de  $H$  hogares  $X$  e  $Y$  con la misma media y la curva de Lorenz generalizada de  $X$  corta a la de  $Y$  una única vez desde arriba y por la izquierda, diremos que la distribución  $X$  domina en tercer grado a  $Y$ , es decir,  $W(X) \geq W(Y)$ ,  $\forall W = \sum U(Y_i)$  con  $U' \geq 0, U'' \leq 0, U''' \geq 0$  si y sólo si la varianza es menor, es decir,  $\sigma^2(X) \leq \sigma^2(Y)$ .*

Davies y Hoy (1995) estudiaron el caso de cruces múltiples entre las curvas de Lorenz y renta media constante y Lambert (1988) el caso en que la renta media fuera variable.

Por tanto, para la dominancia de tercer grado se requieren como condiciones necesarias y suficientes que la curva de Lorenz de  $X$  corte a la de  $Y$  por arriba (lo que implica que la renta mínima de  $X$  es no menor a la de  $Y$ ), que la media de  $X$  no sea menor a la de  $Y$  y que la varianza de  $X$  de todas las subpoblaciones acumuladas en los puntos en los que las curvas de Lorenz generalizadas se cortan, no sean mayores a los de  $Y$ . Por tanto, si estas condiciones se verifican, entonces la distribución de  $X$  puede obtenerse de la distribución de  $Y$  mediante un conjunto de transferencias simétricas de Pareto, un conjunto de transferencias progresivas y de transferencias compuestas que mantienen la media y la varianza constantes y que en su conjunto no disminuyen el bienestar.

## 1.5. Otros tipos de dominancia estocástica

Además de las relaciones de dominancia anteriores, existen muchas otras. En este apartado se muestran algunas de ellas poniendo especial interés en aquellas que son de utilidad en el campo de la Economía.

### Ordenación según la razón de verosimilitud

Este tipo de dominancia es utilizada en el campo de la fiabilidad.

**Definición 1.5.0.2** Sean  $X$  e  $Y$  v.as. con densidades  $f_X$  y  $f_Y$  respectivamente. Se dice que  $X$  es estocásticamente menor que  $Y$  según la razón de verosimilitud si  $f_X(t)/f_Y(t)$  es decreciente en la unión de los soportes de  $X$  e  $Y$ , denotándose  $X \leq_{lr} Y$ .

El siguiente lema nos relaciona la dominancia en este sentido con la convexidad.

**Lema 1.5.0.1**  $X \leq_{lr} Y$  si y sólo si la función  $F_Y[F_X^{-1}(x)]$  es convexa.

**Demostración.** Se probará el caso continuo.  $F_Y[F_X^{-1}(x)]$  es convexa si y sólo si  $\frac{f_Y(f_X^{-1}(x))}{f_X(f_X^{-1}(x))}$  es creciente, y de aquí, si y sólo si  $X \leq_{lr} Y$ . ■

La dominancia según la razón de verosimilitud implica la dominancia estocástica de primer orden, pero el recíproco no es cierto.

En el ámbito de la fiabilidad se pretende caracterizar el envejecimiento de cualquier ítem y esto se realiza normalmente en función de su tasa de fallo y comparaciones estocásticas entre dichas funciones.

### Dominancia estocástica en el sentido de tasa de fallo

**Definición 1.5.0.3** Sean  $X$  e  $Y$  v.as., siendo  $X$  continua e  $Y$  discreta. Entonces se definen sus respectivas funciones de tasa de fallo por

$$r_X(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$$

$$r_Y(y) = \frac{P[Y = y]}{P[Y \geq y]}$$

Al comparar las funciones de tasa de fallo de dos v.as. se establece otra relación de orden estocástica.

**Definición 1.5.0.4** Sean  $X$  e  $Y$  v.as. con funciones de tasa de fallo  $r_X$  y  $r_Y$  respectivamente.  $X$  es estocásticamente menor que  $Y$  según la tasa de fallo y se denota por  $X \leq_{hr} Y$  si y sólo si  $r_X(t) \geq r_Y(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Esta condición se formula en el caso continuo como  $\frac{\bar{F}_X(t)}{\bar{F}_Y(t)}$  decreciente en  $t$ , y en el caso discreto como  $\frac{P[X \geq t]}{P[Y \geq t]}$  decreciente para todo  $t$  que pertenezca a la unión de los soportes de  $X$  e  $Y$ .

#### Dominancia estocástica en el sentido de orden inverso de tasa de fallo

**Definición 1.5.0.5** Sean  $X$  e  $Y$  v.as. con distribuciones  $F$  y  $G$  respectivamente. Diremos que  $X$  es menor que  $Y$  según el orden inverso de tasa de fallo y denotaremos  $X \leq_{rh} Y$ , si  $G(t)/F(t)$  es creciente en  $t \in \mathbb{R}$  o  $\check{r}_F(t) \geq \check{r}_G(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , si  $X$  e  $Y$  son absolutamente continuas, siendo  $\check{r}_F(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$  la función de tasa de fallo (o tasa de azar) inversa de  $X$  (análogamente para  $Y$ ).

La cadena de implicaciones entre los tipos de dominancia vistos hasta ahora es:

$$lr \implies \begin{cases} hr \\ rh \end{cases} \implies FSD \implies SSD \implies TSD.$$

#### Orden de estrella

**Definición 1.5.0.6** Dadas  $X$  e  $Y$  v.as. diremos que  $X$  es menor que  $Y$  según el orden de estrella y lo denotaremos por  $X \leq_* Y$ , si  $G^{-1}F$  tiene forma de estrella (star-shaped), es decir, si  $\frac{G^{-1}F(x)}{x}$  es creciente en  $x > 0$ , siendo  $F$  y  $G$  las funciones de distribución de  $X$  e  $Y$  respectivamente.

En la selección óptima de carteras, se suelen utilizar los criterios básicos de dominancia estocástica (SD) FSD, SSD y TSD. En el caso de selección de activos sin riesgo, los criterios de SD se denotan por SDR.

Dominancia estocástica en el caso de activos sin riesgo

**Definición 1.5.0.7** Diremos que el activo  $A$  domina al  $B$  en el sentido SDR si y sólo si para todo elemento de  $\{B_\beta\}$  existe por lo menos un elemento en  $\{A_\alpha\}$  que le domina en el sentido SD, donde  $\{A_\alpha\}$  y  $\{B_\beta\}$  contienen todas las combinaciones lineales de los bienes sin y con riesgo dadas por:  $A_\alpha = \alpha A + (1-\alpha)r$  y  $B_\beta = \beta B + (1-\beta)r$  con  $\alpha, \beta > 0$  y  $r$  la prima de riesgo.

De manera análoga, denotaremos las reglas FSD, SSD y TSD cuando existen activos sin riesgo por FSDR, SSDR, y TSDR respectivamente.

SDR proporciona una decisión precisa relativa a SD. Supongamos que las distribuciones  $F$  y  $G$  intersecan, en este caso no se puede aplicar la regla FSD. Sea  $F_\alpha$ , obtenida a partir de  $F$  teniendo en cuenta los activos de riesgo, esta  $F_\alpha$  corresponde a la variable  $A_\alpha$ .  $F_\alpha$  gira alrededor de la línea vertical  $A = r$ . Si se logra una combinación tal que  $F_\alpha$  se localiza completamente por debajo de  $G$ , se tendrá que  $F_\alpha$  domina a  $G$  en el sentido FSD.

Es fácil probar que ese valor  $\alpha$  existe y que para cualquier valor  $\beta$  existe un  $\gamma = \alpha \cdot \beta$  tal que  $F_\gamma$  domina a  $G_\beta$  y de aquí que  $F$  domina a  $G$ . De esta forma,  $F$  domina a  $G$  incluso cuando existe riesgo y también en el caso en que no exista.

Se tiene en general  $SD \implies SDR$ , y  $FSDR \implies SSDR \implies TSDR$ .

## Capítulo 2

# Dominancia estocástica de variables aleatorias en Economía. Aplicaciones notables

En este capítulo se consideran aplicaciones de la dominancia estocástica a variables aleatorias en un ambiente económico, en particular la construcción de variables aleatorias truncadas y las reglas de Media-Varianza.

En el primer apartado se analiza la dominancia estocástica de primer orden en el caso de distribuciones truncadas: distribuciones de Pareto, Normales y Lognormales, por su relevancia en Economía.

El segundo estudia la consistencia de las reglas de Media-Varianza y su aplicación a la ponderación de variables, debido a su creciente aplicación en Economía.

### **2.1. Dominancia estocástica de primer orden en distribuciones truncadas. Algunos ejemplos.**

#### **2.1.1. Definiciones y ejemplos**

Se expondrán los conceptos de distribución y densidad truncadas y se ilustrarán con ejemplos.

**Definición 2.1.1.1** Dada una v.a.  $X$  unidimensional definida sobre un espacio de probabilidad  $(E, A, P)$  y de modo que  $P[X \in T] \in (0, 1)$ , siendo  $T$  un elemento de la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$ , se define la distribución truncada de  $X$  como la distribución condicionada

$$P[X \leq x/X \in T] \in (0, 1)$$

definida sobre  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.1.1.2** Si  $F^*$  es la distribución de  $X$ , se define la función truncada  $F$  de  $F^*$  en los puntos  $A$  y  $B$  como:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < A \\ \frac{F^*(x) - \alpha_1}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}, & \text{si } A \leq x < B \\ 1, & \text{si } x \geq B \end{cases}$$

siendo  $A$  y  $B$  los puntos de truncatura que verifican  $F^*(A) = \alpha_1$ ,  $F^*(B) = 1 - \alpha_2$ .

La truncatura puede realizarse simétricamente, es decir,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ , o no simétrica (asimétrica),  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

**Definición 2.1.1.3** Si la v.a.  $X$  es continua, con densidad  $f^*$ , se define la densidad truncada como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f^*(x)}{\int_T f^*(x) dx}, & \text{si } x \in T \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

**Ejemplo 2.1.1.1** La distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$  truncada a la derecha sobre  $n$  valores es:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x! \sum_{x=0}^n \frac{\lambda^x}{x!}}, & \text{si } x = 0, 1, \dots, n \\ 0, & \text{si } x = n + 1, n + 2, \dots \end{cases}$$

**Ejemplo 2.1.1.2** La exponencial de parámetro  $\lambda$  truncada a la izquierda en  $n$  es:

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda x}}{\int_n^{\infty} e^{-\lambda x} dx}, & \text{si } x > n \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < n \end{cases}$$

**Ejemplo 2.1.1.3** La distribución Normal truncada bilateralmente en los puntos  $A$  y  $B$  de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < A \\ \frac{F^*(x) - F^*(A)}{F^*(B) - F^*(A)}, & \text{si } A \leq x < B \\ 1, & \text{si } x \geq B \end{cases}$$

Si llamamos  $Z$  a la variable truncada, entonces sus momentos centrales de primer y segundo orden son:

$$E[Z] = \frac{f(A) - f(B)}{F(B) - F(A)}, Z \in [A, B]$$

$$E[Z^2] = 1 + \frac{Af(A) - Bf(B)}{F(B) - F(A)}, Z \in [A, B]$$

Y la varianza:

$$\text{Var}(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1 + \frac{Af(A) - Bf(B)}{F(B) - F(A)} - \left( \frac{f(A) - f(B)}{F(B) - F(A)} \right)^2$$

Cabe preguntarse sobre la invariancia de la media de la distribución original (sin truncar) tras truncar la variable.

Supongamos que  $f(A) = f(B)$ , entonces, por simetría,  $A = -B$ . Si se fija  $x_d > \mu$  (o bien  $x_d < \mu$ ), entonces:

$$B = \frac{x_d - \mu}{\sigma}$$

$$A = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = -B \Rightarrow x_i = 2\mu - x_d$$

Dada  $\mu$  y fijada  $x_d > \mu$ , basta tomar  $x_i = 2\mu - x_d$  para que la media sea invariante al truncar.

Para simular la variable truncada se sigue el siguiente proceso. Se definen

$$g(x) = \frac{1}{x_d - x_i}$$

y

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x_d - x_i}{\int_{x_i}^{x_d} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx}$$

Por tanto

$$h(x) \leq \frac{x_d - x_i}{\int_{x_i}^{x_d} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt} = c \Rightarrow \frac{f(x)}{cg(x)} = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Lo que permite definir el proceso para simular la variable truncada. El algoritmo es el siguiente:

**Input:**  $x_i, x_d, \mu, \sigma$ .

**Paso 1.** Simular  $U_1$  de  $U(0, 1)$  y calcular  $\hat{U}_1 = x_i + (x_d - x_i)U_1$ .

**Paso 2.** Simular  $U_2$  de una distribución  $U(0, 1)$  independiente de la anterior.

**Paso 3.** Si  $U_2 \leq e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ , parar y hacer  $\hat{X} = U_1$ , en caso contrario hacer  $\hat{X} = 1$  e ir al Paso 1.

**Output:** Valores correspondientes a la v.a. truncada

Figura 2.1: Algoritmo de simulación de variables aleatorias truncadas.

### 2.1.2. Distribuciones de Pareto truncadas

Se analiza la dominancia estocástica de primer orden entre distribuciones de Pareto truncadas, estudiando las relaciones entre las variables originales (sin truncar) y comprobando si el truncamiento es invariante respecto a las relaciones originales de dominancia.

#### 2.1.2.1. Motivación

**Definición 2.1.2.1** *La distribución de Pareto( $b, x_0$ ), es aquella cuya función de distribución es:*

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^b, \quad x \geq x_0 > 0, \quad b \geq 0 \quad (2.1)$$

*Su densidad es:*

$$f(x) = \frac{bx_0^b}{x^{b+1}}, \quad x \geq x_0 > 0, \quad b \geq 0 \quad (2.2)$$

Esta distribución es utilizada en Economía en el ajuste de ingresos o salarios y se define la distribución del ingreso como  $R(x) = 1 - F(x)$ .

En el ámbito de los Seguros, el modelo de Pareto permite trabajar con la distribución de la cuantía del daño por siniestro en el intervalo  $(x_0, \infty)$ .

La ecuación (2.1) implica que la elasticidad de  $R(x)$  con respecto a  $x$  es  $b$ . En otras palabras, si el ingreso  $x$  se incrementa en un 1 %, la proporción de unidades que tienen un ingreso mayor o igual a  $x$  disminuye en un porcentaje igual a un 1 %. Así, el parámetro  $b$  puede interpretarse como la elasticidad o sensibilidad del decrecimiento en el número de unidades cuando pasan a una clase de ingreso mayor.

Si el parámetro  $b$  es mayor que 1, entonces existe la esperanza matemática, y si  $b \leq 2$  no existe el momento central de segundo orden. Sea  $X$  la v.a. de  $Pareto(b, x_0)$ .

La esperanza de  $X$  viene dada por:

$$E[X] = \int_{x_0}^{\infty} x f(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} x \frac{bx_0^b}{x^{b+1}} dx = bx_0^b \int_{x_0}^{\infty} x^{-b} dx = x_0 \frac{b}{b-1}$$

que existirá si  $b > 1$ .

El momento central de segundo orden es:

$$E[X^2] = \int_{x_0}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} x^2 \frac{bx_0^b}{x^{b+1}} dx = bx_0^b \int_{x_0}^{\infty} x^{-b+1} dx = \dots = x_0^2 \frac{b}{b-2}$$

que existirá si  $b > 2$ .

Por tanto la varianza de la v.a.  $X$  es:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{bx_0^2}{(b-1)^2(b-2)}, \quad b > 2.$$

La densidad de Pareto se introduce para modelizar la distribución del ingreso cuando ésta no es equitativa.

El parámetro  $b$  tiene que ver con la dispersión. A mayores valores de  $b$ , se obtienen densidades de Pareto más concentradas cerca del  $x_0$ . El siguiente gráfico muestra este hecho.

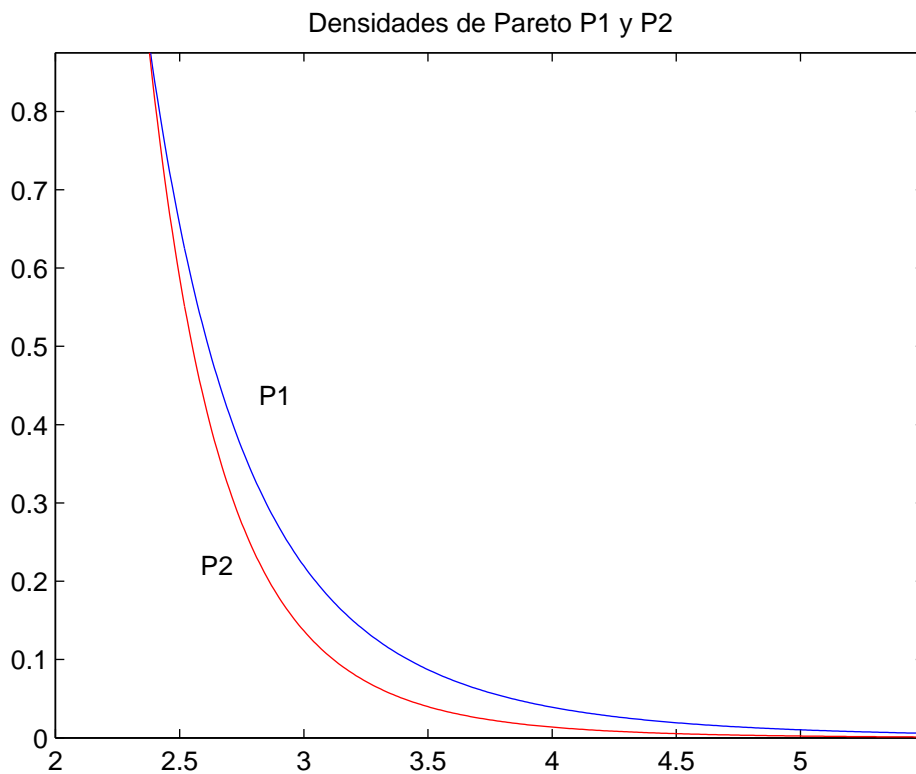


Figura 2.2: Densidades de Pareto,  $P_1 \sim \text{Pareto}(5, 2)$  y  $P_2 \sim \text{Pareto}(7, 2)$

Es interesante en Economía la relación existente entre la distribución de Pareto y la función que acumula los ingresos para todos los individuos con ingresos menores o iguales que  $x$ , a la que denotaremos por  $T(x)$ , es decir, la curva de Lorenz asociada a esta distribución.

La curva de Lorenz (definida en (1.20)) se utiliza para representar y analizar la distribución del ingreso y la riqueza.

Lorenz propuso esta curva en 1905 con el fin de comparar y analizar desigualdades de riqueza en un país en diferentes épocas, o en diferentes países durante la misma época.

Si en la población hay  $N$  individuos, entonces el ingreso total es:

$$N * E[X] = \frac{Nbx_0}{b-1}$$

El ingreso total de los individuos con ingresos menores o iguales que  $x$  viene dado por:

$$Y(x) = \int_{x_0}^x tN \frac{bx_0^b}{t^{b+1}} dt = \frac{Nbx_0^b}{b-1} (x_0^{-b+1} - x^{-b+1}) = \frac{Nbx_0}{b-1} * \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)^{b-1}$$

Entonces, la ordenada  $T(x)$  de la curva de Lorenz en la distribución de Pareto es:

$$T(x) = \frac{Y(x)}{NE[X]} = 1 - \frac{x_0^{b-1}}{x}$$

como por otro lado

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^b, \quad x \geq x_0 > 0, \quad b \geq 0$$

se tiene que:

$$\frac{x_0}{x} = (1 - F(x))^{1/b}$$

Luego:

$$T(x) = 1 - (1 - F(x))^{1-1/b}$$

Por tanto, la relación entre  $T$  y  $F$  sólo depende de  $b$ , además, por ser  $F$  una función de distribución,  $0 \leq F(x) \leq 1$ , y por tanto si  $b > 1$ , entonces  $T(x) \geq 0$  para todo  $x$ .

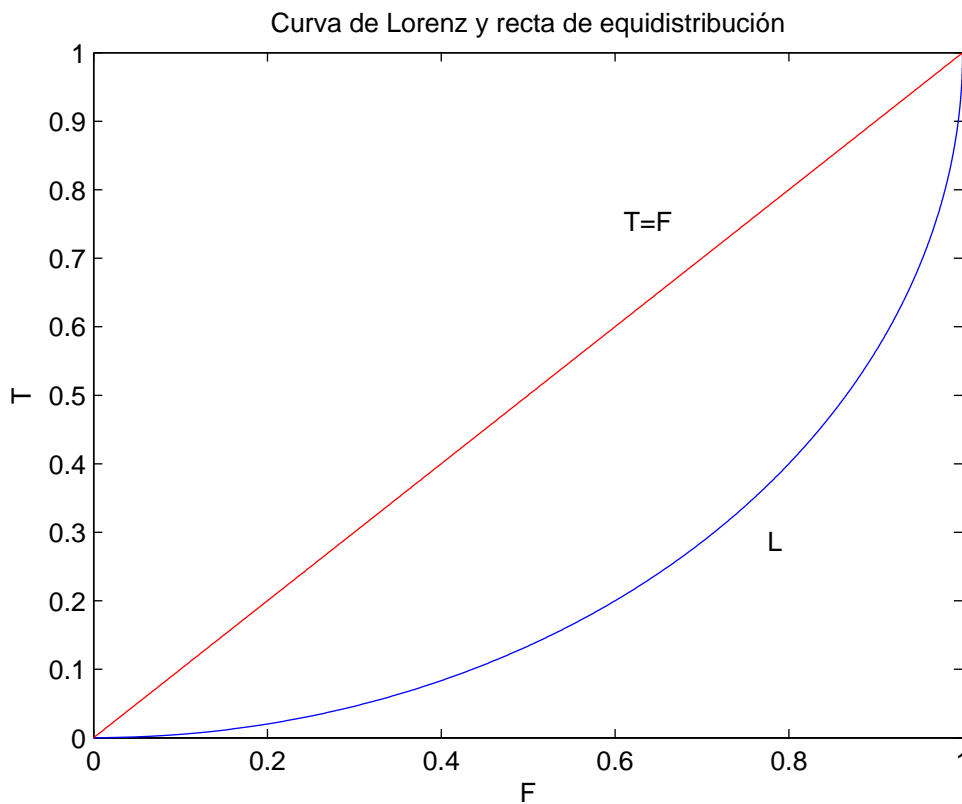


Figura 2.3: *Curva de Lorenz asociada a una distribución de Pareto y la recta de equidistribución.*

La curva de Lorenz  $L$  se sitúa bajo la recta de equidistribución  $T = F$ . Si la curva de Lorenz coincidiera con  $T = F$  implicaría que cada unidad recibe el mismo ingreso, este es el caso de la perfecta igualdad de ingreso. En el caso de la perfecta desigualdad de ingreso, la curva de Lorenz coincidiría con las líneas  $0 - 1$  en el eje horizontal y  $0 - 1$  en el eje vertical, lo cual implicaría que todo el ingreso es recibido por una sola unidad de la población.

Otra aplicación de interés de la distribución de Pareto es la del seguro y reaseguro, por ejemplo en el caso del reaseguro automovilístico. La modalidad más usada es el reaseguro de exceso-pérdida (excess-loss), por el cual corren a cargo del reaseguro las indemnizaciones que superen a una cuantía  $x_0$  y cuando la cuantía del daño  $x$  sea menor que  $x_0$ , la indemnización correrá en su totalidad a cargo del asegurador.

El modelo que se adapta a la distribución de la cuantía del daño por siniestro en el intervalo  $(x_0, \infty)$  es el de Pareto.

Sea  $N_x^{(0,t)}$  la v.a. que indica el número de siniestros con cuantía superior a  $x$  en un cierto período de tiempo  $(0, t)$ , denotemos por  $N(x)$  a la esperanza matemática de  $N_x^{(0,t)}$ .

La prima de riesgo del reaseguro, para una retención  $x$  del asegurador, viene dada por:

$$\pi(x) = N(x)m(x)$$

siendo  $m(x)$  la cuantía media del siniestro a cargo del reaseguro, cuya expresión viene dada por:

$$m(x) = \frac{\int_x^\infty (z-x)dF(z)}{\int_x^\infty dF(z)} = \frac{\int_x^\infty zdF(z)}{\int_x^\infty dF(z)} - x = \frac{\int_x^\infty \frac{bx_0^b}{z^b} dz}{\int_x^\infty \frac{bx_0^b}{z^{b+1}} dz} - x = \frac{x}{b-1}$$

Así,

$$\pi(x) = N(0) \frac{x}{b-1} \left( \frac{x_0}{x} \right)^b .$$

Y la varianza de la variable aleatoria asociada a la indemnización por siniestro a cargo del reaseguro es:

$$V(x) = \frac{\int_x^\infty (z-x)^2 dF(z)}{\int_x^\infty dF(z)} - (m(x))^2$$

de donde, tras operar se obtiene:

$$V(x) = \frac{bx^2}{(b-1)^2(b-2)} .$$

### 2.1.2.2. Dominancia estocástica de primer orden entre distribuciones de Pareto truncadas

Sean  $P_1 \sim \text{Pareto}(b, x_0)$  y  $P_2 \sim \text{Pareto}(c, y_0)$  dos distribuciones de Pareto, tal y como se han definido en la Definición 2.1.2.1. Se denotará por  $F$  a la distribución de  $P_1$  y por  $G$  a la de  $P_2$ . Supóngase primeramente que  $x_0 = y_0$  y se verá la relación de dominancia estocástica de primer orden que se establece entre las funciones de distribución de  $P_1$  y  $P_2$ .

Sea  $x \geq x_0$ , entonces:

$$F(x) \geq G(x) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^b \geq 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^c \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{x}\right)^b \leq \left(\frac{x_0}{x}\right)^c \Leftrightarrow x_0^{b-c} \leq x^{b-c}$$

la expresión anterior equivale a  $x_0 \leq x$ , si  $b - c \geq 0$  y a  $x_0 > x$  si  $b - c < 0$ . Esta última opción no es válida ya que estamos suponiendo un  $x \geq x_0$ , es decir, que:

$$F(x) \geq G(x) \Leftrightarrow b \geq c$$

De lo anterior se deduce el siguiente resultado:

**Teorema 2.1.2.1** *Dadas distribuciones de Pareto:  $P_1 \sim \text{Pareto}(b, x_0)$  y  $P_2 \sim \text{Pareto}(c, x_0)$ , entonces:*

$$P_1 \leq_{FSD} P_2 \Leftrightarrow b \geq c \tag{2.3}$$

Sea el caso  $x_0 \neq y_0$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $x_0 < y_0$ , se debe comparar

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^b, \quad x \geq x_0 > 0,$$

con

$$G(x) = 1 - \left(\frac{y_0}{x}\right)^b, \quad x \geq y_0 > 0.$$

- Si  $x < x_0$ , en ese caso  $F(x) = 0 = G(x)$ .
- Si  $x_0 \leq x < y_0$ , entonces  $F(x) > 0 = G(x)$ .
- Si  $x \geq y_0$ , entonces:

$$F(x) \geq G(x) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^b \geq 1 - \left(\frac{y_0}{x}\right)^c \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{x}\right)^b \leq \left(\frac{y_0}{x}\right)^c \Leftrightarrow \frac{x_0^b}{y_0^c} \leq x^{b-c}.$$

Como  $x \geq y_0 > x_0 > 0$ , existe  $\alpha > 0$  tal que  $y_0 = x_0 + \alpha$  y  $\beta > 0$  tal que  $x = x_0 + \alpha + \beta$ , por tanto la expresión anterior equivale a:

$$\frac{x_0^b}{(x_0 + \alpha)^c} < (x_0 + \alpha + \beta)^{b-c} \Leftrightarrow x_0^b < (x_0 + \alpha)^c (x_0 + \alpha + \beta)^{b-c} \cong (x_0 + \alpha)^b + k$$

siendo  $k > 0$ .

La desigualdad anterior se cumple, luego se llega a la conclusión:

$$x_0 < y_0 \Leftrightarrow F(x) \geq G(x)$$

De lo anterior se deduce el siguiente resultado:

**Teorema 2.1.2.2** Dadas distribuciones de Pareto,  $P_1 \sim \text{Pareto}(b, x_0)$  y  $P_2 \sim \text{Pareto}(c, y_0)$ , con  $x_0 \neq y_0$ , entonces:

$$P_1 \leq_{FSD} P_2 \Leftrightarrow x_0 < y_0 \tag{2.4}$$

Ejemplos gráficos de las situaciones descritas en los dos teoremas anteriores son los siguientes:

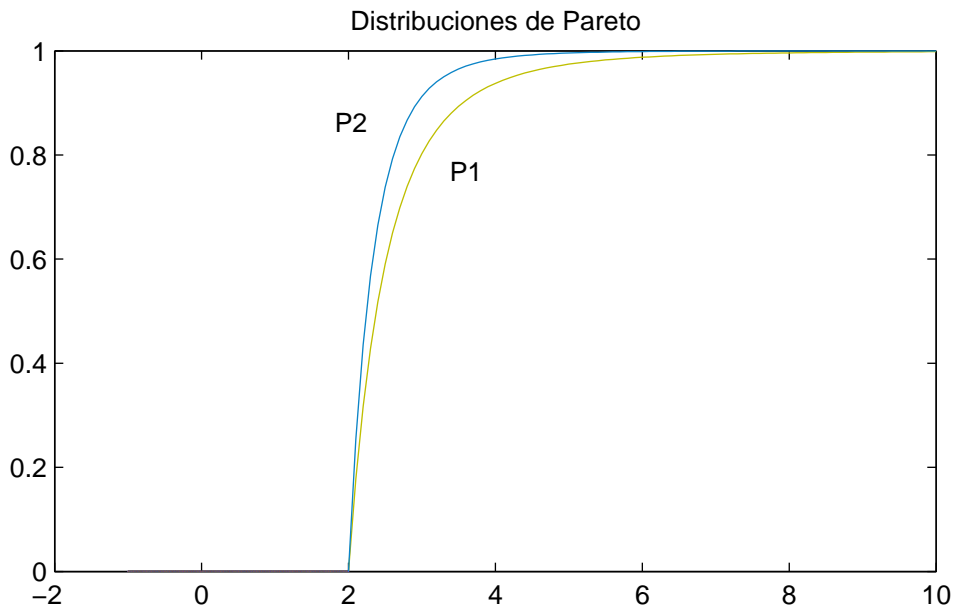


Figura 2.4: *Distribuciones de Pareto,  $P_1 \sim \text{Pareto}(4, 2)$  y  $P_2 \sim \text{Pareto}(6, 2)$*

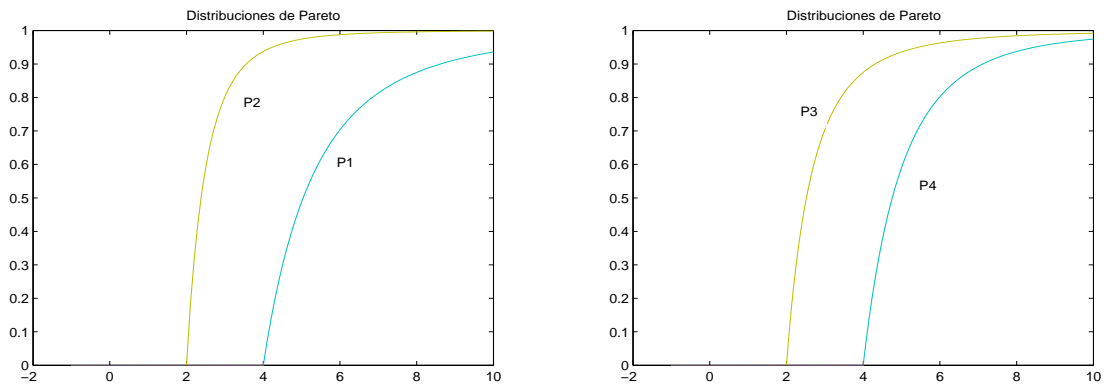


Figura 2.5: *Distribuciones de Pareto, a la izquierda se representan  $P_1 \sim \text{Pareto}(3, 4)$  y  $P_2 \sim \text{Pareto}(4, 2)$  y a la derecha  $P_3 \sim \text{Pareto}(3, 2)$  y  $P_4 \sim \text{Pareto}(4, 4)$*

A continuación se tratará el caso de las distribuciones de Pareto truncadas. Se comenzará estudiando el caso de dos distribuciones de Pareto con  $x_0 = y_0$ .

Sean  $P_1^* \sim \text{Pareto}(b, x_0)$  y  $P_2^* \sim \text{Pareto}(c, x_0)$ , con distribuciones  $F^*$  y  $G^*$  respectivamente, y distribuciones truncadas:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_1^F \\ \frac{F^*(x) - F^*(x_1^F)}{F^*(x_2^F) - F^*(x_1^F)}, & \text{si } x_1^F \leq x < x_2^F \\ 1, & \text{si } x \geq x_2^F \end{cases} \quad (2.5)$$

y

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_1^G \\ \frac{G^*(x) - G^*(x_1^G)}{G^*(x_2^G) - G^*(x_1^G)}, & \text{si } x_1^G \leq x < x_2^G \\ 1, & \text{si } x \geq x_2^G \end{cases} \quad (2.6)$$

siendo  $x_i^H$ ,  $i = 1, 2$  y  $H = F, G$ , los puntos de truncamiento de  $F$  y  $G$  respectivamente, cumpliendo:

$$\begin{aligned} F^*(x_1^F) &= \alpha_1 = G^*(x_1^G) \\ F^*(x_2^F) &= 1 - \alpha_2 = G^*(x_2^G) \end{aligned}$$

siendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dos valores en  $(0, 1)$ ,  $\alpha_1 < 1 - \alpha_2$ .

**Teorema 2.1.2.3** Sean  $P_1^* \sim \text{Pareto}(b, x_0)$  y  $P_2^* \sim \text{Pareto}(c, x_0)$ , con distribuciones  $F^*$  y  $G^*$  respectivamente,  $b > c$ , y considérense las distribuciones truncadas tal y como se definieron en (2.5) y (2.6). Entonces  $P_2$  domina a  $P_1$  según FSD.

**Demostración.** En las condiciones del enunciado, como  $b > c$  se comprobó en el Teorema 2.1.2.1, que  $P_1 \leq_{FSD} P_2$ , es decir que  $F^*(x) \geq G^*(x) \forall x$ , por otro lado  $F^*(x_1^F) = \alpha_1 = G^*(x_1^G)$  luego se debe cumplir que  $x_1^F \leq x_1^G$  y de manera análoga  $x_2^F \leq x_2^G$ .

Se pueden presentar dos situaciones:

$$0 < x_0 \leq x_1^F \leq x_1^G \leq x_2^F \leq x_2^G$$

o bien

$$0 < x_0 \leq x_1^F \leq x_2^F \leq x_1^G \leq x_2^G$$

En el primer caso  $0 < x_0 \leq x_1^F \leq x_1^G \leq x_2^F \leq x_2^G$ :

- Sea  $x < x_1^F$ , entonces  $F(x) = 0 = G(x)$
- Sea  $x_1^F \leq x \leq x_1^G$ , entonces  $F(x) \geq G(x) = 0$
- Sea  $x_1^G < x \leq x_2^F$ , entonces

$$F(x) = \frac{F^*(x) - F^*(x_1^F)}{F^*(x_2^F) - F^*(x_1^F)} = \frac{F^*(x) - \alpha_1}{1 - \alpha_2 - \alpha_1}$$

y

$$G(x) = \frac{G^*(x) - G^*(x_1^G)}{G^*(x_2^G) - G^*(x_1^G)} = \frac{G^*(x) - \alpha_1}{1 - \alpha_2 - \alpha_1}$$

y como  $F^*(x) \geq G^*(x)$ , se tiene que  $F(x) \geq G(x)$

- Sea  $x_2^F \leq x < x_2^G$ , en este caso  $G(x) < 1 = F(x)$
- Por último, sea  $x \geq x_2^G$ , entonces  $G(x) = F(x) = 1$

En el segundo caso  $0 < x_0 \leq x_1^F \leq x_2^F \leq x_1^G \leq x_2^G$ :

- Sea  $x \leq x_1^F$ , entonces  $F(x) = 0 = G(x)$
- Sea  $x_1^F < x \leq x_2^F$ , entonces  $F(x) > 0 = G(x)$
- Sea  $x_2^F \leq x < x_1^G$ , entonces  $F(x) = 1 > 0 = G(x)$
- Sea  $x_1^G \leq x < x_2^G$ , en este caso  $G(x) < 1 = F(x)$
- Por último, sea  $x \geq x_2^G$ , entonces  $G(x) = F(x) = 1$

En ambos casos se ha comprobado que  $F(x) \geq G(x)$  para todo  $x$  y con al menos una desigualdad estricta, por tanto  $P_1 \leq_{FSD} P_2$ , como se quería demostrar. ■

Un ejemplo gráfico del resultado anterior es el siguiente:

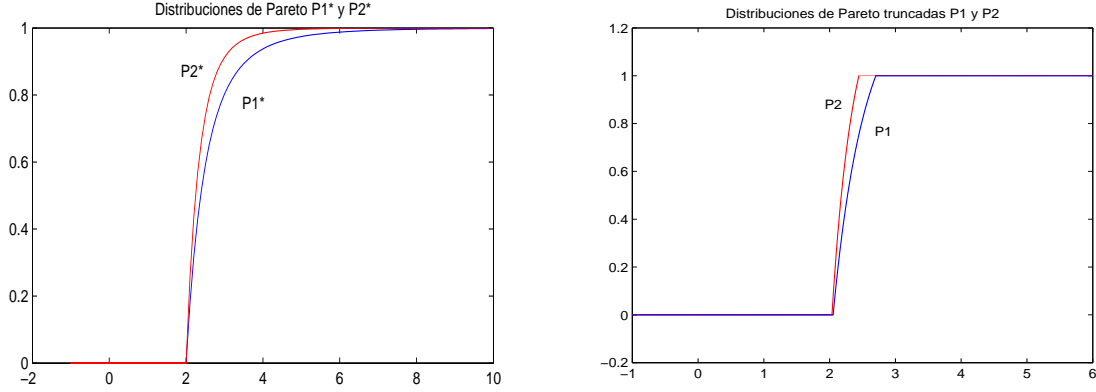


Figura 2.6: A la izquierda se representan las distribuciones de Pareto  $P_1^* \sim \text{Pareto}(4, 2)$  y  $P_2^* \sim \text{Pareto}(6, 2)$  y a la derecha las distribuciones truncadas asociadas  $P_1$  y  $P_2$  siendo los puntos de truncamiento  $x_1^F$  y  $x_1^G$  tales que  $F^*(x_1^F) = 0,1 = G^*(x_1^G)$ ,  $x_2^F$  y  $x_2^G$  tales que  $F^*(x_2^F) = 0,7 = G^*(x_2^G)$

**Teorema 2.1.2.4** Sean  $P_1^* \sim \text{Pareto}(b, x_0)$  y  $P_2^* \sim \text{Pareto}(c, y_0)$ , con distribuciones  $F^*$  y  $G^*$  respectivamente,  $x_0 < y_0$ , y considérense las distribuciones truncadas tal y como se definieron en (2.5) y (2.6). Entonces  $P_2$  domina a  $P_1$  según FSD.

**Demostración.** Según las hipótesis del enunciado, del Teorema 2.1.2.1 se tiene que  $P_1^* \leq_{FSD} P_2^*$ . Por otro lado  $F^*(x_1^F) = \alpha_1 = G^*(x_1^G)$  luego se debe cumplir que  $x_1^F \leq x_1^G$ , de manera análoga  $x_2^F \leq x_2^G$ .

Al igual que en la prueba del resultado anterior, las distintas situaciones de orden entre los puntos de truncamiento son:

- (i)  $0 < x_0 < x_1^F < x_2^F \leq y_0 < x_1^G < x_2^G$
- (ii)  $0 < x_0 < x_1^F \leq y_0 < x_2^F < x_1^G < x_2^G$
- (iii)  $0 < x_0 < x_1^F < y_0 \leq x_1^G \leq x_2^F \leq x_2^G$
- (iv)  $0 < x_0 < y_0 \leq x_1^F \leq x_2^F \leq x_1^G \leq x_2^G$
- (v)  $0 < x_0 < y_0 \leq x_1^F < x_1^G \leq x_2^F < x_2^G$

Analizando cada caso por separado se comprobará que  $F(x) \geq G(x)$  para todo  $x$  y con al menos una desigualdad estricta, con lo que se demostrará el resultado.

- En los casos (i) y (ii):
  - Si  $x < x_1^F$ :  $F(x) = 0 = G(x)$
  - Si  $x_1^F \leq x < x_2^F$ :  $F(x) > 0 = G(x)$
  - Si  $x_2^F \leq x < x_1^G$ :  $F(x) = 1 > 0 = G(x)$
  - Si  $x_1^G \leq x < x_2^G$ :  $F(x) = 1 > G(x)$
  - Si  $x \geq x_2^G$ :  $F(x) = 1 = G(x)$
- En el caso (iii):
  - Si  $x < x_1^F$ :  $F(x) = 0 = G(x)$
  - Si  $x_1^F \leq x < x_1^G$ :  $F(x) > 0 = G(x)$
  - Si  $x_1^G \leq x < x_2^F$ :  $F(x) > G(x)$  al ser  $F^*(x) > G^*(x)$
  - Si  $x_2^F \leq x < x_2^G$ :  $F(x) = 1 > G(x)$
  - Si  $x \geq x_2^G$ :  $F(x) = 1 = G(x)$
- En el caso (iv):
  - Si  $x < x_1^F$ :  $F(x) = 0 = G(x)$
  - Si  $x_1^F \leq x < x_2^F$ :  $F(x) > 0 = G(x)$
  - Si  $x \geq x_2^F$ :  $F(x) = 1 \geq G(x)$
- En el caso (v):
  - Si  $x < x_1^F$ :  $F(x) = 0 = G(x)$
  - Si  $x_1^F \leq x < x_1^G$ :  $F(x) > 0 = G(x)$
  - Si  $x \geq x_1^G < x_2^F$ :  $F(x) \geq G(x)$  al ser  $F^*(x) > G^*(x)$
  - Si  $x \geq x_2^F$ :  $F(x) = 1 > G(x)$

De esta manera se ha visto que  $F(x) \geq G(x)$  para todo  $x$  y con al menos una desigualdad estricta, obteniéndose así el resultado. ■

Un ejemplo gráfico del resultado anterior es el siguiente:

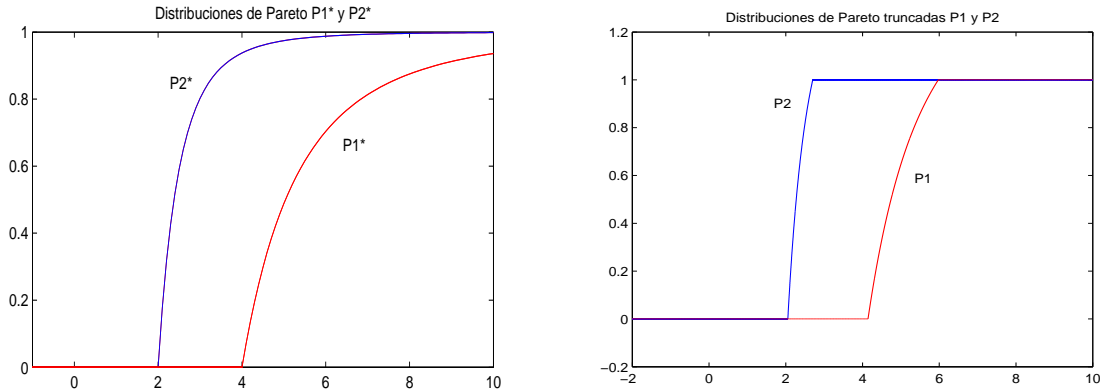


Figura 2.7: A la izquierda se representan las distribuciones de Pareto  $P_1^* \sim \text{Pareto}(3, 4)$  y  $P_2^* \sim \text{Pareto}(4, 2)$  y a la derecha las distribuciones truncadas asociadas  $P_1$  y  $P_2$  siendo los puntos de truncamiento  $x_1^F$  y  $x_1^G$  tales que  $F^*(x_1^F) = 0,1 = G^*(x_1^G)$ ,  $x_2^F$  y  $x_2^G$  tales que  $F^*(x_2^F) = 0,7 = G^*(x_2^G)$

### 2.1.3. Distribuciones lognormales truncadas

En esta sección se establecen condiciones necesarias y suficientes para la dominancia estocástica de primer orden en distribuciones lognormales truncadas. Se definen las distribuciones lognormal y lognormal truncada. Posteriormente se establecen los principales resultados, haciendo un breve comentario a la demostración del resultado correspondiente a la dominancia estocástica de primer orden para distribuciones Normales truncadas de H. Levy (2006).

#### 2.1.3.1. Motivación

Las distribuciones normales son fáciles de manejar matemáticamente, sin embargo, en el ámbito económico tiene más utilidad la distribución lognormal debido principalmente a que el precio de los activos no puede ser negativo, además, el dominio de la

distribución normal es la recta real mientras que la distribución lognormal es una distribución positiva. Por otro lado, se ha observado que en muchas distribuciones de ratios de retorno existe una cierta asimetría positiva, presente en la distribución lognormal y no en la normal.

Al comparar distribuciones lognormales  $F \sim LN(\mu_1, \sigma_1)$  y  $G \sim LN(\mu_2, \sigma_2)$  se llega a la conclusión de que  $F$  domina a  $G$  según FSD si y sólo si  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

### 2.1.3.2. Comentarios a la demostración de Levy

La principal aportación de este comentario es la adecuada demostración del resultado de H. Levy (2006), que ha inspirado algunos de nuestros resultados.

Sean dos distribuciones Normales  $F^* \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  y  $G^* \sim N(\mu_2, \sigma_2)$  y sean las distribuciones Normales truncadas simétricamente  $F$  y  $G$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < A_1 \\ \frac{F^*(x) - \alpha/2}{1 - \alpha}, & \text{si } A_1 \leq x < B_1 \\ 1, & \text{si } x \geq B_1 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < A_2 \\ \frac{G^*(x) - \alpha/2}{1 - \alpha}, & \text{si } A_2 \leq x < B_2 \\ 1, & \text{si } x \geq B_2 \end{cases}$$

siendo  $A_i, i = 1, 2$  y  $B_i, i = 1, 2$  los puntos de truncamiento que verifican:

$$\Phi\left(\frac{A_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \frac{\alpha}{2} = \Phi\left(\frac{A_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

y

$$\Phi\left(\frac{B_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \frac{\alpha}{2} = 1 - \Phi\left(\frac{B_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

siendo  $\Phi$  la función de distribución de la  $Normal(0, 1)$ .

El siguiente teorema propuesto por H. Levy es erróneo en la demostración dada en su texto. La versión correcta es la siguiente.

**Teorema 2.1.3.1** Si  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 < \sigma_2$ , entonces  $F \geq_{FSD} G \Leftrightarrow \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > \delta^1$ .

**Demostración.** Nótese que si  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 < \sigma_2$ , entonces

$$A_1 = \mu_1 - \delta\sigma_1 > \mu_2 - \delta\sigma_2 = A_2$$

y que

$$B_1 > B_2 \Leftrightarrow \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > \delta.$$

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > \delta$ , entonces  $B_1 > B_2$ . En ese caso:

$$\frac{B_1 - \mu_1}{\sigma_1} = \frac{B_2 - \mu_2}{\sigma_2} < \frac{B_1 - \mu_2}{\sigma_2}$$

de lo que se deduce:

$$B_1\sigma_2 - \mu_1\sigma_2 < B_1\sigma_1 - \mu_2\sigma_1 \Leftrightarrow B_1(\sigma_2 - \sigma_1) < \mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1 \Leftrightarrow B_1 < \frac{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = x_0$$

siendo  $x_0$  el punto de intersección de las dos distribuciones Normales  $F^*$  y  $G^*$ .

Así pues  $B_2 < B_1 < x_0$  y  $A_1 > A_2$ , entonces  $F(x) \leq G(x)$  en todo punto  $x$  y con al menos una desigualdad estricta, con lo que  $F \geq_{FSD} G$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \leq \delta$ , entonces  $x_0 \leq B_1 \leq B_2$  y si se escoge  $x > x_0$ , entonces  $F(x) \geq G(x)$  (con alguna desigualdad estricta) luego  $F$  no domina a  $G$  según FSD. ■

### 2.1.3.3. Distribuciones lognormales y lognormales truncadas. Conceptos básicos

**Definición 2.1.3.1** La v.a.  $X$  es lognormal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  y se denota  $X \sim LN(\mu, \sigma)$ , si la v.a.  $Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma)$ .

---

<sup>1</sup> $\delta = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$

Para  $t > 0$ :

$$P[X \leq t] = P[\text{Ln}X \leq \text{Lnt}] = \Phi\left(\frac{\text{Lnt} - \mu}{\sigma}\right)$$

con lo que la densidad correspondiente es:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{Lnt} - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La esperanza matemática de  $X$  es:

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

y su varianza:

$$\text{Var}(X) = 2^{2\mu + \sigma^2} \exp(\sigma^2 - 1)$$

Dos distribuciones lognormales  $F \sim \text{LN}(\mu_1, \sigma_1)$  y  $G \sim \text{LN}(\mu_2, \sigma_2)$ , se cortan a lo sumo en un punto, efectivamente:

$$\begin{aligned} F(x_0) = G(x_0) &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\text{Ln}x_0 - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{\text{Ln}x_0 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\text{Ln}x_0 - \mu_1}{\sigma_1} = \frac{\text{Ln}x_0 - \mu_2}{\sigma_2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{Ln}x_0 = \frac{\sigma_2\mu_1 - \sigma_1\mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_0 = \exp\left(\frac{\sigma_2\mu_1 - \sigma_1\mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1}\right). \end{aligned}$$

Sean  $F^* \sim LN(\mu_1, \sigma_1)$  y  $G^* \sim LN(\mu_2, \sigma_2)$  y las distribuciones truncadas en dos puntos asociadas a cada una de ellas (a las que se denomina  $F$  y  $G$ , respectivamente):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < A_1 \\ \frac{F^*(x) - \alpha_1}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}, & \text{si } A_1 \leq x < B_1 \\ 1, & \text{si } x \geq B_1 \end{cases}$$

y

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < A_2 \\ \frac{G^*(x) - \alpha_1}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}, & \text{si } A_2 \leq x < B_2 \\ 1, & \text{si } x \geq B_2 \end{cases}$$

donde los puntos de truncamiento verifican:

$$LnA_i = \mu_i - \delta_i \sigma_i, \quad i = 1, 2.$$

$$LnB_i = \mu_i + \delta_i \sigma_i, \quad i = 1, 2.$$

con  $\delta_i > 0, i = 1, 2$  y  $F^*(A_i) = \alpha_1 = G^*(A_2), F^*(B_1) = 1 - \alpha_2 = G^*(B_2)$ .

Utilizando estas funciones se establecen condiciones necesarias y suficientes para la dominancia estocástica de primer orden entre ellas, aun en los casos en que no exista dominancia entre las distribuciones originales  $F^*$  y  $G^*$ .

#### 2.1.3.4. Dominancia estocástica de primer orden entre distribuciones lognormales truncadas

En los siguientes resultados se utilizan los conceptos anteriores.

**Teorema 2.1.3.2** Si  $\mu_1 > \mu_2, \sigma_1 > \sigma_2, LnA_2 - \mu_1 > 0, LnA_2 < \mu_2 < \mu_1$  y  $Ln x - \mu_1 > 0$ , entonces  $F \geq_{FSD} G \Leftrightarrow \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2} > \delta_1$

**Demostración.** Obsérvese primeramente que en las condiciones del enunciado  $F^*$  no domina a  $G^*$  según FSD ni  $G^*$  a  $F^*$ . Por otro lado, como  $\sigma_1 > \sigma_2, G^*$  corta a  $F^*$  desde abajo en el punto

$$x_0 = \exp \left\{ \frac{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \right\}$$

Comparemos los puntos de truncamiento, como  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 > \sigma_2$  se tiene que:

$$\text{Ln}B_1 = \mu_1 + \delta_2 \sigma_1 > \mu_2 + \delta_2 \sigma_2 = \text{Ln}B_2$$

con lo que  $B_1 \geq B_2$ .

Por otro lado

$$\text{Ln}A_1 = \mu_1 - \delta_1 \sigma_1 > \mu_2 - \delta_1 \sigma_2 = \text{Ln}A_2 \Leftrightarrow \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2} > \delta_1,$$

luego

$$A_1 > A_2 \Leftrightarrow \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2} > \delta_1$$

( $\Leftarrow$ ) Supóngase que se verifica  $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2} > \delta_1$ , en ese caso  $A_1 > A_2$ . También sabemos que  $B_1 \geq B_2$  y que  $B_i \geq A_i$ ,  $i = 1, 2$ . Veamos ahora la relación existente entre  $A_2$  y  $x_0$ .

$A_1 > A_2$  y por hipótesis  $\mu_1 > \mu_2$  luego

$$\text{Ln}A_1 - \mu_1 > \text{Ln}A_2 - \mu_1$$

y

$$\text{Ln}A_2 - \mu_2 > \text{Ln}A_2 - \mu_1$$

Por otro lado, como  $\sigma_1 > \sigma_2$ , entonces:

$$\frac{\text{Ln}A_2 - \mu_2}{\sigma_2} > \frac{\text{Ln}A_2 - \mu_1}{\sigma_2} > \frac{\text{Ln}A_2 - \mu_1}{\sigma_1}$$

De lo que se deduce que

$$\text{Ln}A_2 > \frac{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

y por tanto que  $A_2 > x_0$ .

Se distinguen dos situaciones, la primera de ellas  $x_0 < A_2 \leq A_1 \leq B_2 \leq B_1$  y la segunda  $x_0 < A_2 < B_2 \leq A_1 < B_1$ .

En el caso  $x_0 < A_2 \leq A_1 \leq B_2 \leq B_1$ :

- Si tomamos  $x \leq A_2$ ,  $F(x) = 0 = G(x)$
- Si  $x \in (A_2, A_1]$ ,  $F(x) = 0 < G(x)$
- Si  $x \in [A_1, B_2)$ ,  $F(x) \leq G(x)$  ya que:

$$F(x) \leq G(x) \Leftrightarrow F^*(x) \leq G^*(x) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{Lnx - \mu_1}{\sigma_1}\right) \leq \Phi\left(\frac{Lnx - \mu_2}{\sigma_2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{Lnx - \mu_1}{\sigma_1} \leq \frac{Lnx - \mu_2}{\sigma_2}$$

al ser  $\Phi$  creciente y esto es cierto porque

$$Lnx - \mu_1 \leq Lnx - \mu_2$$

y

$$\sigma_1 > \sigma_2,$$

por tanto

$$\frac{Lnx - \mu_1}{\sigma_1} \leq \frac{Lnx - \mu_2}{\sigma_1} \leq \frac{Lnx - \mu_2}{\sigma_2}.$$

Así se ha comprobado que  $F(x) \leq G(x)$  para todo valor de  $x$  y con al menos una desigualdad estricta, es decir,  $F \geq_{FSD} G$ .

En el caso  $x_0 < A_2 < B_2 \leq A_1 < B_1$ :

- Si  $x < A_2$ ,  $F(x) = 0 = G(x)$
- Si  $x \in [A_2, B_2)$ ,  $F(x) = 0 < G(x)$
- Si  $x \in [B_2, A_1)$ ,  $F(x) = 0 < G(x) = 1$
- Si  $x \in [A_1, B_1)$ ,  $F(x) < 1 = G(x)$
- Si  $x \geq B_1$ ,  $F(x) = 1 = G(x)$

Así pues,  $F(x) < G(x)$  para todo valor de  $x$  y con al menos una desigualdad estricta, es decir,  $F \geq_{FSD} G$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \leq \delta_1$ , entonces  $A_1 \leq A_2$ . Por otro lado  $A_2 \leq x_0$ , si tomamos  $x \in (A_1, A_2)$ ,  $F(x) > 0 = G(x)$ , luego  $F$  no dominaría a  $G$  según FSD. ■

A continuación se muestran unos gráficos ilustrativos de la situación referida en el Teorema 2.1.3.2.

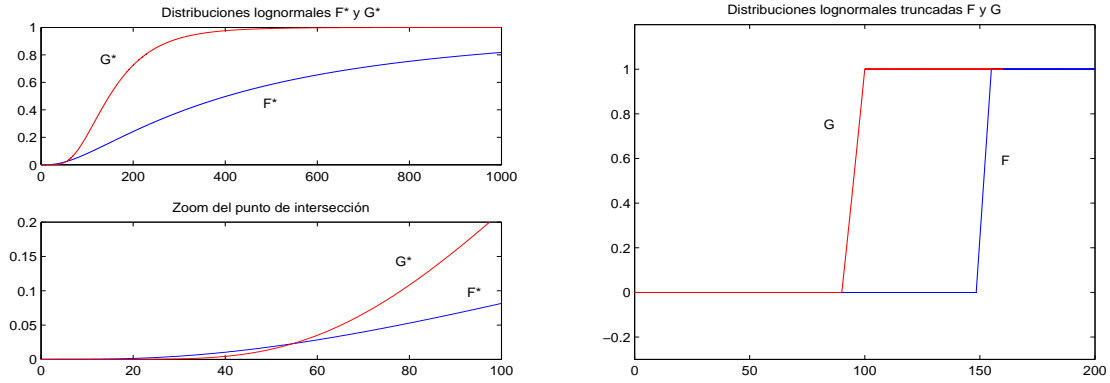


Figura 2.8: Distribuciones lognormales originales  $F^* \sim LN(6, 1)$ ,  $G^* \sim LN(5, 0,5)$  y sus correspondientes distribuciones truncadas asociadas  $F$  y  $G$ .

Se observa que las distribuciones originales  $F^*$  y  $G^*$  se cortan, es decir, que no existe dominancia estocástica usual entre ellas. Por el contrario, al construir las truncadas, conseguimos dominancia de primer orden. Los puntos de truncamiento para construir la  $F$  son  $A_1 = e^5$  y  $B_1 = 155$ , mientras que en el caso de la distribución  $G$ , los puntos de truncamiento han sido  $A_2 = e^{4,5}$  y  $B_2 = 100$ .

**Teorema 2.1.3.3** Si  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 < \sigma_2$ , entonces  $F \geq_{FSD} G \Leftrightarrow \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > \delta_2$ .

**Demostración.** ( $\Leftarrow$ ) Como  $\sigma_1 < \sigma_2$ ,  $F^*$  corta a  $G^*$  desde abajo en el punto

$$x_0 = \exp \left\{ \frac{\sigma_2 \mu_1 - \sigma_1 \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \right\}$$

Por las hipótesis del enunciado se tiene que  $A_1 > A_2$ , por otro lado, si  $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > \delta_2$ , entonces  $B_1 > B_2$ , en efecto:

$$B_1 > B_2 \Leftrightarrow \text{Ln}B_1 > \text{Ln}B_2 \Leftrightarrow \mu_1 + \delta_2\sigma_1 > \mu_2 + \delta_2\sigma_2 \Leftrightarrow \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > \delta_2$$

Además  $x_0 > B_1$ :

$$\frac{\text{Ln}B_1 - \mu_1}{\sigma_1} = \frac{\text{Ln}B_2 - \mu_2}{\sigma_2} < \frac{\text{Ln}B_1 - \mu_2}{\sigma_2}$$

de donde

$$\frac{\sigma_2\mu_1 - \sigma_1\mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > \text{Ln}B_1 \Leftrightarrow x_0 > B_1$$

Al igual que en el teorema anterior se pueden presentar dos situaciones, la primera  $A_2 < A_1 \leq B_2 \leq B_1 < x_0$  y la segunda  $A_2 \leq B_2 < A_1 \leq B_1 < x_0$ , pero en ambos casos, en todo el intervalo  $x < x_0$  se tiene que  $F^*(x) \leq G^*(x)$ , por tanto  $F(x) \leq G(x)$ , mientras que en el intervalo  $x \geq x_0$ ,  $F(x) = 1 = G(x)$ , por tanto  $F$  domina a  $G$  según FSD.

( $\Rightarrow$ ) Si  $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \leq \delta_2$ , entonces  $B_1 \leq B_2$ . Por otro lado,  $x_0 \leq B_1$ , en este caso, si se tomara  $x > x_0$ ,  $F^*(x) > G^*(x)$ , y por tanto  $F(x) > G(x)$ , luego  $F$  no domina a  $G$  según FSD. ■

A continuación se muestran unos gráficos representativos de la situación descrita en el Teorema 2.1.3.3.

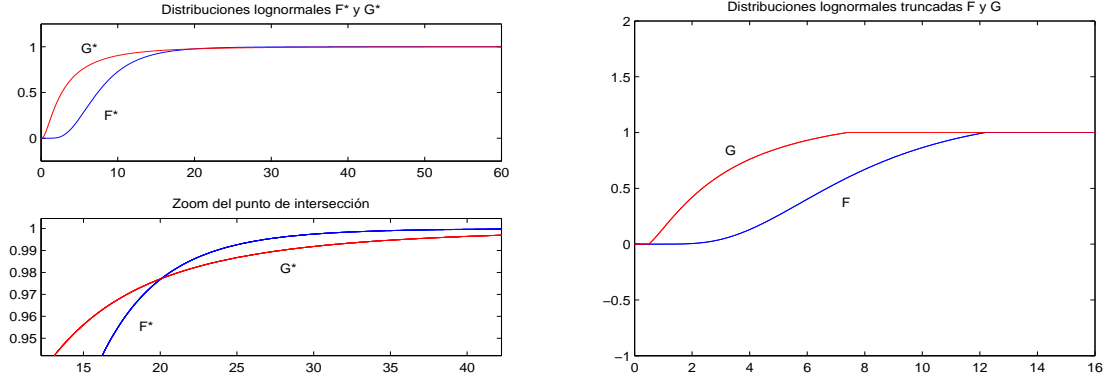


Figura 2.9: *Distribuciones lognormales originales  $F^* \sim LN(2, 0,5)$ ,  $G^* \sim LN(1, 1)$  y sus correspondientes distribuciones truncadas asociadas  $F$  y  $G$ .*

Las distribuciones originales  $F^*$  y  $G^*$  se cortan, es decir, que no existe dominancia estocástica usual entre ellas, por el contrario, al construir las truncadas se obtiene dominancia de primer orden. Los puntos de truncamiento para construir la  $F$  son:  $A_1 = 1$ , y  $B_1 = e^{2,5}$ , mientras que en el caso de la distribución  $G$ , los puntos de truncamiento han sido:  $A_2 = 0,5$  y  $B_2 = e^{1,5}$ .

**Teorema 2.1.3.4** *Si  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 = \sigma_2$  entonces  $F \geq_{FSD} G$ .*

**Demostración.** Si  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  entonces:

$$\ln A_1 = \mu_1 - \delta_1 \sigma_1 > \mu_2 - \delta_1 \sigma_1 = \mu_2 - \delta_1 \sigma_2 = \ln A_2 \Rightarrow A_1 > A_2$$

y

$$\ln B_1 = \mu_1 + \delta_2 \sigma_1 > \mu_2 + \delta_2 \sigma_1 = \mu_2 + \delta_2 \sigma_2 = \ln B_2 \Rightarrow B_1 > B_2$$

Se analizan las dos situaciones posibles:

(1).  $A_2 < A_1 < B_2 < B_1$  y

(2).  $A_2 < B_2 < A_1 < B_1$ .

En (1):

- Si  $x \leq A_2$  entonces,  $F(x) = 0 = G(x)$
- Si  $x \in (A_2, A_1]$ ,  $F(x) = 0 < G(x)$
- Si  $x \in (A_1, B_2]$ ,  $F(x) < G(x)$  porque

$$\begin{aligned} \frac{Lnx - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{Lnx - \mu_2}{\sigma_2} &\Leftrightarrow (Lnx - \mu_1)\sigma_2 < (Lnx - \mu_2)\sigma_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Lnx(\sigma_2 - \sigma_1) < \mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1. \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $\sigma_1 = \sigma_2$  la expresión anterior equivale a que:

$$0 < \sigma_2(\mu_1 - \mu_2),$$

y esta desigualdad es cierta por ser  $\mu_1 > \mu_2$ .

- Si  $x \in (B_2, B_1]$   $F(x) < 1 = G(x)$
- Si  $x > B_1$ ,  $F(x) = 1 = G(x)$ .

En (2):

- Si  $x \leq A_2$  entonces,  $F(x) = 0 = G(x)$
- Si  $x \in (A_2, B_2]$ ,  $F(x) = 0 < G(x)$
- Si  $x \in (B_2, A_1]$ ,  $F(x) = 0 < 1 = G(x)$
- Si  $x \in (A_1, B_1]$   $F(x) < 1 = G(x)$
- Si  $x > B_1$ ,  $F(x) = 1 = G(x)$ .

Con lo que queda probado que  $F \geq_{FSD} G$ . ■

A continuación se muestran unos gráficos representativos de la situación descrita en el Teorema 2.1.3.4

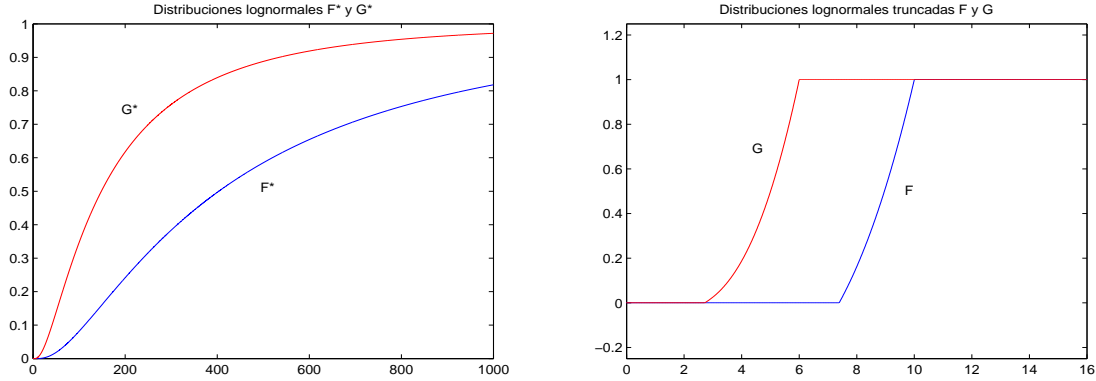


Figura 2.10: *Distribuciones lognormales originales  $F^* \sim LN(6, 1)$ ,  $G^* \sim LN(5, 1)$  y sus correspondientes distribuciones truncadas asociadas  $F$  y  $G$ .*

Existe dominancia estocástica de la distribución  $F^*$  sobre  $G^*$ , este es el único caso en el que ocurre. Por otro lado, las condiciones  $\mu_1 > \mu_2$  y  $\sigma_1 = \sigma_2$  llevan igualmente a la existencia de dominancia de primer orden de  $F$  sobre  $G$ . Los puntos de truncamiento han sido, para  $F$ :  $A_1 = e^2$ , y  $B_1 = e^{10}$ , y para  $G$ :  $A_2 = e$  y  $B_2 = e^6$ .

**Teorema 2.1.3.5** *Si  $\mu_1 = \mu_2$  y  $\sigma_1 > \sigma_2$  entonces  $F$  no domina a  $G$  según FSD ni  $G$  domina a  $F$  según FSD.*

**Demostración.** Como  $\sigma_1 > \sigma_2$ ,  $G^*$  corta a  $F^*$  desde abajo.

Estudiamos la relación existente entre los puntos de truncamiento. Al ser  $\sigma_1 > \sigma_2$ , se tiene que:

$$\ln B_1 = \mu_1 + \delta_2 \sigma_1 > \mu_1 + \delta_2 \sigma_2 = \mu_2 + \delta_2 \sigma_2 = \ln B_2$$

luego  $B_1 > B_2$ .

---

<sup>2</sup>Prueba alternativa: Si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  y  $\mu_1 > \mu_2$  entonces como  $X \sim LN(\mu_1, \sigma)$  e  $Y \sim LN(\mu_2, \sigma)$  entonces  $\ln X \sim N(\mu_1, \sigma)$  y  $\ln Y \sim N(\mu_2, \sigma)$ , por lo que  $\ln X =^d (\mu_1 - \mu_2) + \ln Y$  y  $X =^d \exp^{(\mu_1 - \mu_2)} Y \geq_{c.s.} Y$  por ser  $y$  no negativa

Por otro lado:

$$\text{Ln}A_1 = \mu_1 - \delta_1\sigma_1 < \mu_1 - \delta_1\sigma_2 = \mu_2 - \delta_1\sigma_2 = \text{Ln}A_2$$

luego  $A_1 < A_2$ .

Además:

$$\text{Ln}A_1 - \mu_1 < \text{Ln}A_2 - \mu_1 \Rightarrow \frac{\text{Ln}A_1 - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{\text{Ln}A_2 - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{\text{Ln}A_2 - \mu_1}{\sigma_2} = \frac{\text{Ln}A_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

y por tanto

$$\text{Ln}A_2 > \frac{\sigma_2\mu_1 - \sigma_1\mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \Rightarrow A_2 > x_0$$

Por otro lado,  $A_1 < x_0$  ya que  $\text{Ln}x_0 = \mu_1 > \text{Ln}A_1 = \mu_1 - \delta_1\sigma_1$ .

Tenemos en conclusión, la siguiente situación:  $A_1 < x_0 < A_2 < B_2 < B_1$ , a la izquierda de  $x_0$ ,  $F^*(x) \geq G^*(x)$  y a la derecha  $F^*(x) \leq G^*(x)$ .

- Sea  $x < A_1$ , entonces  $F(x) = 0 = G(x)$
- Sea  $x \in [A_1, x_0)$ ,  $F(x) > 0 = G(x)$
- Sea  $x \in [x_0, A_2)$ ,  $F(x) > 0 = G(x)$
- Sea  $x \in [A_2, B_2)$ , como aquí  $x \geq x_0$ ,  $F^*(x) \leq G^*(x)$  y por tanto  $F(x) \leq G(x)$

Como se observa no puede establecerse una relación de dominancia estocástica de primer orden entre  $F$  y  $G$  como se quería demostrar. ■

A continuación se muestran unos gráficos representativos de la situación descrita en el Teorema 2.1.3.5

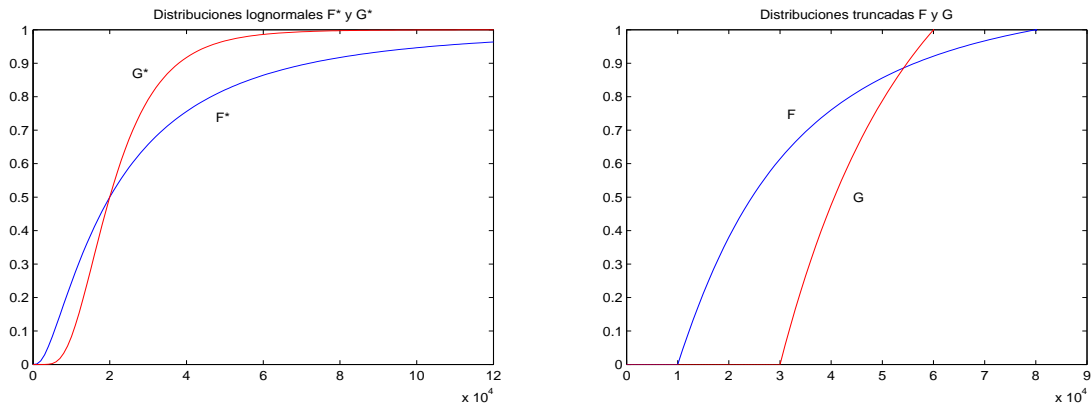


Figura 2.11: *Distribuciones lognormales originales*  $F^* \sim LN(\log(20000), 1)$  y  $G^* \sim LN(\log(20000), 0,5)$  y sus *distribuciones truncadas asociadas*  $F$  y  $G$ .

En ninguno de los dos casos presentados se tiene dominancia estocástica de primer orden entre las distribuciones, tanto en el caso original como en el caso en que se construyan las truncadas. En este caso los puntos usados para truncar han sido, en el caso de la  $F$ :  $A_1 = 10^4$  y  $B_1 = 8 * 10^4$  y en el caso de  $G$ :  $A_2 = 3 * 10^4$  y  $B_2 = 6 * 10^4$ .

## 2.2. Consistencia de las reglas de Media-Varianza. Aplicaciones a variables aleatorias ponderadas

### 2.2.1. Introducción

Las aproximaciones más usuales para comparar inversiones de riesgo están basadas en la media o esperanza matemática y en la varianza de las variables aleatorias que modelizan los activos. Esta metodología fue introducida por Markovitz en 1959. En esta aproximación, un inversor adverso al riesgo asigna una utilidad al activo, modelizado por la v.a.  $X$ , que se define como:

$$U(X) = E[X] - \alpha Var(X), \alpha > 0 \quad (2.7)$$

donde  $\alpha$  indica el grado de aversión al riesgo por parte del inversor.

Esta expresión de la función de utilidad tiene sus inconvenientes, ya que el considerar la varianza en dicha expresión provoca inconsistencia con la regla de dominancia estocástica de primer orden (FSD). Debido a esto, se ha generalizado este concepto atendiendo a otras medidas de riesgo diferentes a la varianza, utilizando por tanto, la siguiente expresión:

$$U(X) = E[X] - \alpha R(X), \alpha > 0 \quad (2.8)$$

siendo  $R(X)$  otra medida de riesgo como puede ser la semi-varianza inferior, un momento de orden  $r$ , un cuantil, o una expresión funcional de cualquiera de las anteriores.

Es de interés el preguntarse si dichas funciones de utilidad propuestas son consistentes o no con las reglas de dominancia estocásticas, es decir, si  $X \leq_{SD} Y$ , ¿se verificará que  $U(X) \leq U(Y)$ ?, ¿bajo qué condiciones?

Existe una medida de riesgo que es siempre consistente con los criterios de dominancia estocástica de primer y segundo orden y que definimos a continuación:

$$\delta^{(1)}(X) = E[X - E[X]]_- = (E[\max\{E[X] - X, 0\}]) = \frac{1}{2}E|X - E[X]| \quad (2.9)$$

que se puede generalizar a grado  $k \in \mathbb{N}$  como sigue:

$$\delta^{(k)}(X) = \left( E \left[ \max\{E[X] - X, 0\}^k \right] \right)^{1/k} \quad (2.10)$$

**Teorema 2.2.1.1** (Ogryczak y Ruszczyński, (1999)). Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias (v.as.), consideremos la función  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha \delta^{(1)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , con  $\xi = X, Y$ . Entonces

$$X \leq_{SSD} Y \Rightarrow U(X) < U(Y)$$

El resultado es válido para cualquier medida

$$\delta^{(k)}(\xi) = \left( E \left[ \max\{E[\xi] - \xi, 0\}^k \right] \right)^{1/k},$$

con  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** Observemos que

$$0 \leq E[X - t]_- - E[X - s]_- \leq t - s, \forall s \leq t \quad (2.11)$$

Además,  $X \leq_{SSD} Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$  y  $E[X - t]_- \geq E[Y - t]_-$  ya que la función  $x \mapsto -(x - t)_-$  es cóncava creciente. Tomando en (2.11)  $s = E[X]$  y  $t = E[Y]$ , obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[Y] - E[X] &\geq E[X - E[Y]]_- - E[X - E[X]]_- \geq \alpha (E[X - E[Y]]_- - E[X - E[X]]_-) \\ &\geq \alpha (E[Y - E[Y]]_- - E[X - E[X]]_-) \end{aligned}$$

y de ahí  $U(X) \leq U(Y)$ , como se quería demostrar. ■

El objetivo es establecer relaciones entre las funciones de utilidad (del tipo definido en el Teorema 2.2.1.1) de variables aleatorias ponderadas dadas las relaciones entre las variables originales (sin ponderar) y estudiar bajo qué condiciones la relación existente entre las utilidades de las variables aleatorias originales se conserva para el caso de la ponderación de las mismas.

En lo que sigue sean  $X$  e  $Y$  v.as. con distribuciones  $F$  y  $G$  respectivamente, en caso de que existan las densidades, las denotaremos por  $f$  y  $g$ . Sean  $\bar{F} = 1 - F$  y  $\bar{G} = 1 - G$  las funciones de supervivencia correspondientes a  $X$  e  $Y$  respectivamente. Sea  $\omega$  una función de ponderación y  $\hat{X}_\omega$  e  $\hat{Y}_\omega$  las v.as. ponderadas asociadas a  $X$  e  $Y$  respectivamente, sus distribuciones las denotaremos por  $\hat{F}_\omega$  y  $\hat{G}_\omega$  respectivamente y, al igual que el caso anterior, si existiesen las densidades, éstas serían denotadas por  $\hat{f}_\omega$  y  $\hat{g}_\omega$ .

### 2.2.2. Consistencia de las reglas de dominancia estocástica en variables aleatorias ponderadas y funciones de utilidad

Se vio en el Teorema 2.2.1.1 que el considerar funciones de utilidad del tipo

$$U(\xi) = E[\xi] - \alpha \delta^{(k)}(\xi), \alpha \in (0, 1], k \in \mathbb{N}$$

era consistente con ciertas reglas de dominancia estocástica. En la presente sección se aplica ese resultado para el caso de variables ponderadas y otros tipos de relaciones estocásticas.

**Teorema 2.2.2.1** *Sea  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha \delta^{(k)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , con  $\xi$  una v.a. Sean  $X$  e  $Y$  v.as. y  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función para la cual  $0 < E[\omega(X)] < \infty$  y  $0 < E[\omega(Y)] < \infty$ . Entonces se tiene el siguiente resultado:*

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow U(\hat{X}_\omega) \leq U(\hat{Y}_\omega) \quad \text{si } \omega \text{ es creciente}$$

$$X \leq_{rh} Y \Rightarrow U(\hat{X}_\omega) \leq U(\hat{Y}_\omega) \quad \text{si } \omega \text{ es decreciente}$$

**Demostración.**  $X \leq_{hr} Y \Rightarrow \hat{X}_\omega \leq_{hr} \hat{Y}_\omega$  si  $\omega$  es creciente y  $X \leq_{rh} Y \Rightarrow \hat{X}_\omega \leq_{rh} \hat{Y}_\omega$  si  $\omega$  es decreciente (ver Bartoszewicz y Skolimowska (2004) (a)).

Se probará el caso de que  $\omega$  sea creciente ya que el caso decreciente se demuestra de manera análoga.

Sean  $\hat{F}_\omega(x)$  y  $\hat{G}_\omega(y)$  las distribuciones ponderadas de  $X$  e  $Y$  respectivamente, tenemos que  $\omega$  si es creciente, entonces como

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\bar{\hat{G}}_\omega(z)}{\bar{\hat{F}}_\omega(z)} = 1,$$

el hecho de que  $\hat{X}_\omega \leq_{hr} \hat{Y}_\omega$  implica que

$$\frac{\bar{\hat{G}}_\omega(z)}{\bar{\hat{F}}_\omega(z)} \geq 1 \Rightarrow \bar{\hat{G}}_\omega(z) \geq \bar{\hat{F}}_\omega(z)$$

para todo valor  $z \in \mathbb{R}$ , lo que prueba que  $\hat{X}_\omega \leq_{FSD} \hat{Y}_\omega$  y por tanto  $\hat{X}_\omega \leq_{SSD} \hat{Y}_\omega$ . Basta aplicar ahora el Teorema 2.2.1.1 para obtener el resultado. ■

**Teorema 2.2.2.2** Sea  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha\delta^{(k)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , con  $\xi$  una v.a. Sean  $X$  e  $Y$  v.as. y  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función creciente, con  $\omega(x) > 0$ ,  $\forall x$ , para la cual  $0 < E[\omega(X)] < \infty$  y  $0 < E[\omega(Y)] < \infty$ . Entonces si  $X \leq_{lr} Y$  se tiene que  $U(\hat{X}_\omega) \leq U(\hat{Y}_\omega)$ .

**Demostración.** En primer lugar:

$$X \leq_{lr} Y \Leftrightarrow \hat{X}_\omega \leq_{lr} \hat{Y}_\omega,$$

se probará para el caso de v.as. absolutamente continuas.

Efectivamente, basta observar las definiciones involucradas en la expresión anterior y que  $\omega(x) > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{f(x)} \text{ creciente} &\Leftrightarrow \frac{g(x)\omega(x)}{f(x)\omega(x)} \text{ creciente} \Leftrightarrow \frac{g(x)\omega(x)/E[\omega(Y)]}{f(x)\omega(x)/E[\omega(X)]} \text{ creciente} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\hat{g}_\omega(x)}{\hat{f}_\omega(x)} \text{ creciente} \Leftrightarrow \hat{X}_\omega \leq_{lr} \hat{Y}_\omega \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que  $\hat{X} \leq_{lr} \hat{Y} \Rightarrow \hat{X} \leq_{FSD} \hat{Y}$ , en efecto, si  $\hat{X} \leq_{lr} \hat{Y}$ , entonces por definición  $\frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)}$  es una función creciente en  $x \in \mathbb{R}$ , por lo tanto existirá un cierto valor  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\frac{\hat{g}_\omega(x)}{\hat{f}_\omega(x)} \begin{cases} \leq 1 & \text{si } x < x_0 \\ \geq 1 & \text{si } x > x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \hat{g}_\omega(x) \begin{cases} \leq \hat{f}_\omega(x) & \text{si } x < x_0 \\ \geq \hat{f}_\omega(x) & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

Por lo tanto  $\hat{G}_\omega(x) - \hat{F}_\omega(x)$  es decreciente para  $x < x_0$  y creciente para  $x > x_0$ . Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\hat{G}_\omega(x) - \hat{F}_\omega(x)) = 0$$

Esto conduce a que  $\hat{G}_\omega(x) \leq \hat{F}_\omega(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , es decir que  $\hat{X} \leq_{FSD} \hat{Y}$  y como  $\hat{X} \leq_{FSD} \hat{Y} \Rightarrow \hat{X} \leq_{SSD} \hat{Y}$ , el resultado es inmediato.

El caso no absolutamente continuo es análogo. ■

**Teorema 2.2.2.3** Sea  $X$  una v.a., sea  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función para la cual

$$0 < E[\omega(X)] < \infty$$

Considérese la función de utilidad dada por  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha \delta^{(k)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , con  $\xi$  una v.a. Entonces:

1. Si  $\omega$  es creciente  $U(X) \leq U(\hat{X}_\omega)$
2. Si  $\omega$  es decreciente  $U(X) \geq U(\hat{X}_\omega)$

**Demostración.**

1. Sea  $X$  absolutamente continua. Si  $\omega$  es creciente se tiene que  $X \leq_{lr} \hat{X}_\omega$ , en efecto, se debe comprobar que  $\hat{f}/f$  es creciente, pero esto es inmediato a través de la definición de densidad ponderada:

$$\frac{\hat{f}(x)}{f(x)} = \frac{\omega(x)f(x)/E[\omega(X)]}{f(x)} = \frac{\omega(x)}{E[\omega(X)]}$$

dicho cociente es creciente al serlo  $\omega$  y por tanto  $X \leq_{lr} \hat{X}_\omega$ .

Por otro lado se tiene que  $X \leq_{lr} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{FSD} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{SSD} \hat{X}_\omega$ , obteniéndose el resultado buscado. El caso discreto se prueba de manera análoga.

2. Si  $\omega$  fuera decreciente se tendría que  $X \geq_{lr} \hat{X}_\omega$  y la demostración es análoga al caso anterior.

■

**Teorema 2.2.2.4** Sean  $X$  e  $Y$  v.as. tales que  $X \leq_{FSD} Y$ . Sea  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función monótona y continua por la izquierda, para la cual se cumple  $0 < E[\omega(X)] < \infty$  y  $0 < E[\omega(Y)] < \infty$ . Sean  $\bar{U} = \omega(X)$ ,  $\bar{V} = \omega(Y)$ , tales que  $\bar{U} \leq_{Lo} \bar{V}$ . Se define  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha \delta^{(k)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , con  $\xi$  una v.a.

Entonces:

1. Si  $\omega$  es creciente  $U(\hat{X}_\omega) \leq U(\hat{Y}_\omega)$
2. Si  $\omega$  es decreciente  $U(\hat{X}_\omega) \geq U(\hat{Y}_\omega)$

**Demostración.**

1. De las hipótesis se tiene que  $F(x) \geq G(x)$  y  $L_{\bar{U}}(p) \geq L_{\bar{V}}(p), p \in [0, 1]$ . Por otro lado, si  $\omega$  es creciente entonces  $\hat{F}_\omega(x) = L_{\bar{U}}F(x)$  (ver Bartoszewicz y Skolimoswka (2004) (b)).

Po lo que:

$$\hat{F}_\omega(x) = F_{\bar{U}}F(x) \geq L_{\bar{V}}F(x) \geq L_{\bar{V}}G(x) = \hat{G}_\omega(x)$$

es decir,  $\hat{X}_\omega \leq_{FSD} \hat{Y}_\omega$ .

Por tanto  $\hat{X}_\omega \leq_{SSD} \hat{Y}_\omega$  y estamos en las condiciones necesarias para aplicar el Teorema 2.2.1.1, obteniéndose el resultado.

2. Este apartado se demuestra de forma análoga al anterior, basta observar que si  $\omega$  es decreciente entonces  $\hat{F}_\omega(x) = \bar{L}_{\bar{U}}\bar{F}(x)$ .

■

**Teorema 2.2.2.5** Sean  $X$  e  $Y$  v.as. tales que  $X \leq_{FSD} Y$  y  $X \leq_* Y$ .

Sea  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \omega(x) = x^p, p \neq 0$ . Sea  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha\delta^{(1)}(\xi), \alpha \in (0, 1]$ , con  $\xi$  una v.a. Entonces:

1. Si  $p > 0$  entonces  $U(\hat{X}_\omega) \leq U(\hat{Y}_\omega)$
2. Si  $p < 0$  entonces  $U(\hat{X}_\omega) \geq U(\hat{Y}_\omega)$

**Demostración.**

1. Según las hipótesis del enunciado,  $X \leq_{FSD} Y$  y  $X \leq_* Y$ . Se tiene que  $X \leq_* Y \Rightarrow X^p \leq_* Y^p$  (Marshall y Proschan (1972)) y que  $X \leq_* Y \Rightarrow X \leq_{Lo} Y$  (Arnold (1987)).

Por otro lado, si  $p > 0$  la función  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \omega(x) = x^p$  es creciente.

También  $\hat{X}_\omega \leq_{FSD} \hat{Y}_\omega$  y por tanto  $\hat{X}_\omega \leq_{SSD} \hat{Y}_\omega$ . A partir de aquí el resultado es inmediato.

2. Este apartado es análogo al anterior, basta notar que si  $p < 0$  entonces la función  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \omega(x) = x^p$  es decreciente y se aplicaría el apartado anterior.

■

En los siguientes resultados se hará uso del siguiente lema.

**Lema 2.2.2.1** *Sea  $F$  una función de distribución arbitraria, sea  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la función de ponderación y  $\hat{F}_\omega$  la función de distribución de longitud sesgada asociada. Tal función  $\hat{F}_\omega$  se puede escribir como  $\hat{F}_\omega(x) = F^*(F(x))$  siendo  $F^*$  una distribución absolutamente continua en el intervalo  $[0, 1]$ .*

**Demostración.** La expresión de la distribución  $\hat{F}_\omega$  es:

$$\hat{F}_\omega(x) = \frac{1}{E[\omega(X)]} \int_{-\infty}^x \omega(u) dF(u) = \frac{1}{E[\omega(X)]} \int_0^{F(x)} \omega F^{-1}(z) dz$$

Basta observar que la función

$$f^*(z) = \frac{\omega F^{-1}(z)}{E[\omega(X)]}$$

es una densidad en  $[0, 1]$ , esto es, la densidad asociada a  $F^*$ .

■

**Teorema 2.2.2.6** *Sean  $X$  una v.a. con distribución  $F$ ,  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , una función tal que  $0 \leq E[\omega(X)] \leq \infty$  y sea  $F^*$  la función de distribución absolutamente continua para la cual  $\hat{F}_\omega = F^* \circ F$ .*

Considérese la función de utilidad  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha\delta^{(1)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , con  $\xi$  una v.a. Entonces:

1. Si  $F^*$  es convexa en  $[0, 1]$ , entonces  $U(X) \leq U(\hat{X}_\omega)$
2. Si  $F^*$  es cóncava en  $[0, 1]$ , entonces  $U(X) \geq U(\hat{X}_\omega)$

**Demostración.**

1.  $F^*$  convexa en  $[0, 1]$  equivale a que  $X \leq_{lr} \hat{X}_\omega$ . En efecto:  $F^*$  es convexa en  $[0, 1] \Leftrightarrow f^*$  es creciente  $\Leftrightarrow X \leq_{lr} \hat{X}_\omega$ .

Por otra parte, del Teorema 2.2.2.2  $X \leq_{lr} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{FSD} \hat{X}_\omega$  y como es sabido  $X \leq_{FSD} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{SSD} \hat{X}_\omega$ , luego se está en las condiciones de aplicar el Teorema 2.2.1.1 obteniéndose así el resultado.

2. Este apartado es análogo, basta observar que  $F^*$  cóncava en  $[0, 1]$  equivale a  $f^*$  decreciente, esto es, que  $X \geq_{lr} \hat{X}_\omega$ .

■

**Teorema 2.2.2.7** Sean  $X$  una v.a. con distribución  $F$ ,  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , una función para la cual  $0 < E[\omega(X)] < \infty$  y  $F^*$  la función de distribución absolutamente continua para la cual  $\hat{F}_\omega = F^* \circ F$ .

Considérese la función de utilidad  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha\delta^{(k)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , con  $\xi$  una v.a. Entonces:

1. Si  $1 - F^*(1 - u)$  es anti star-shaped, entonces  $U(X) \leq U(\hat{X}_\omega)$
2. Si  $1 - F^*(1 - u)$  es star-shaped, entonces  $U(X) \geq U(\hat{X}_\omega)$

**Demostración.**

1.  $1 - F^*(1 - u)$  es anti star-shaped  $\Leftrightarrow \frac{1 - F^*(F(x))}{F(x)}$  creciente en  $x \Leftrightarrow \frac{\hat{F}_\omega}{F(x)}$  creciente en  $x \Leftrightarrow X \leq_{hr} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{FSD} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{SSD} \hat{X}_\omega$ . Obteniéndose así el resultado.

2. En este caso  $1 - F^*(1 - u)$  es star-shaped  $\Leftrightarrow \frac{1 - F^*(F(x))}{F(x)}$  decreciente en  $x \Leftrightarrow \frac{\hat{F}_\omega}{F(x)}$  decreciente en  $x \Leftrightarrow X \geq_{hr} \hat{X}_\omega$ . El resto se sigue de forma análoga. ■

**Teorema 2.2.2.8** Sean  $X$  una v.a. con distribución  $F$ ,  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , una función para la cual  $0 < E[\omega(X)] < \infty$  y  $F^*$  la función de distribución absolutamente continua para la cual  $\hat{F}_\omega = F^* \circ F$ .

Considérese la función de utilidad  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha \delta^{(k)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , con  $\xi$  una v.a. Entonces:

1. Si  $F^*$  es anti star-shaped, entonces  $U(X) \geq U(\hat{X}_\omega)$
2. Si  $F^*$  es star-shaped, entonces  $U(X) \leq U(\hat{X}_\omega)$

**Demostración.**

1.  $F^*$  es anti star-shaped  $\Leftrightarrow \frac{F^*(F(x))}{F(x)}$  decreciente en  $x \Leftrightarrow \frac{\hat{F}_\omega}{F(x)}$  decreciente en  $x \Leftrightarrow X \leq_{hr} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{FSD} \hat{X}_\omega \Rightarrow X \leq_{SSD} \hat{X}_\omega$ . De donde se obtiene el resultado.
2. En este caso  $F^*$  es star-shaped  $\Leftrightarrow \frac{F^*(F(x))}{F(x)}$  creciente en  $x \Leftrightarrow \frac{\hat{F}_\omega}{F(x)}$  creciente en  $x \Leftrightarrow X \leq_{rh} \hat{X}_\omega$ . El resto se sigue de forma análoga. ■

**Teorema 2.2.2.9** Sean  $X$  una v.a. con distribución  $F$ ,  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , una función para la cual  $0 < E[\omega(X)] < \infty$  y sea  $F^*$  la función de distribución absolutamente continua para la cual  $\hat{F}_\omega = F^* \circ F$ .

Considérese la función de utilidad  $U(\xi) = E[\xi] - \alpha \delta^{(k)}(\xi)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , con  $\xi$  una v.a. Entonces:

1. Si  $F^*(t) \leq t$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , entonces  $U(X) \geq U(\hat{X}_\omega)$
2. Si  $F^*(t) \geq t$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , entonces  $U(X) \leq U(\hat{X}_\omega)$

**Demostración.**

1.  $F^*(t) \leq t, \forall t \in [0, 1]$  equivale a  $X \leq_{FSD} \hat{X}_\omega$  y esto implica que  $X \leq_{SSD} \hat{X}_\omega$  obteniéndose así el resultado.
2. Es análogo al anterior.

■

Los resultados vistos para el caso de variables aleatorias pueden extenderse de manera natural al caso de vectores aleatorios, usando las definiciones vistas en el primer capítulo, pero esto no es objeto de esta monografía.



## Capítulo 3

# Procesos Estocásticos en Economía: una breve descripción

### 3.1. Introducción

Cualquier sistema real opera en ambientes donde existe un cierto grado de incertidumbre, principalmente cuando en ese sistema aparecen acciones/decisiones humanas imprevisibles, o acciones de/sobre máquinas. Los modelos determinísticos ayudan a tener una descripción básica de los sistemas, pero éstos no pueden explicar el comportamiento dinámico de los mismos, su incertidumbre. De ahí que sea necesario el tratamiento de éstos con otro tipo de herramientas como son los Procesos Estocásticos, aprovechando ciertas características de regularidad que puedan presentar para ser descritos por modelos probabilísticos.

**Definición 3.1.0.1** *Se define proceso estocástico y lo denotaremos por  $\{X_t : t \in T\}$ , como un conjunto de variables aleatorias indexadas a una variable  $t$  (generalmente la variable tiempo) que se mueve dentro de un conjunto  $T$ . A los valores que  $X_t$  puede asumir se les denomina estados del proceso estocástico, y al conjunto de los mismos  $X$ , conjunto de estados.*

Si  $X_t$  es un proceso estocástico, éste puede representar:

- el estado de una máquina (encendida/apagada) en un instante  $t$
- el número de clientes en una fila de espera en el instante  $t$
- el número de máquinas averiadas al final del día  $t$
- el nivel de stock de un determinado producto al final de un día  $t$
- la condición de funcionamiento de un componente en el instante  $t$

Podemos clasificar los procesos estocásticos atendiendo a su espacio de estados  $X$ , a la naturaleza del conjunto  $T$  y según las características de las variables aleatorias de las variables que lo definen.

1. Según el espacio de estados distinguimos entre:
  - i. Proceso estocástico con espacio de estados discreto (cadena): Cuando el conjunto de estados fuere finito o infinito numerable.
  - ii. Proceso estocástico con espacio de estados continuo: Cuando el espacio de estados fuere continuo.
2. Según la naturaleza del conjunto  $T$  distinguimos entre:
  - i. Proceso estocástico en tiempo discreto: Cuando el conjunto  $T$  fuere discreto.
  - ii. Proceso estocástico en tiempo continuo: Cuando el conjunto  $T$  fuere continuo.
3. Según las características de las variables aleatorias que lo definen:
  - i. Proceso estocástico estacionario: Cuando la función de distribución de las variables aleatorias que lo definen es independiente de la variable tiempo.
  - ii. Proceso estocástico de Markov o markoviano: Proceso estocástico estacionario que además goza de la propiedad de Markov o de pérdida de memoria, esto es, si el comportamiento futuro es independiente de su pasado y sólo depende del estado actual. De hecho, en un proceso de Markov es irrelevante cualquier

información sobre los estados visitados en el pasado o sobre el tiempo de permanencia en el estado presente. En un proceso estocástico las transiciones entre estados son causadas por la ocurrencia de eventos, por lo que la variable aleatoria directamente restringida por la propiedad de ausencia de memoria es el tiempo entre eventos sucesivos y dado que la única variable aleatoria continua que presenta esta propiedad de ausencia de memoria es la exponencial, en un proceso de Markov en tiempo continuo todos los tiempos entre eventos consecutivos se distribuyen según una variable aleatoria exponencial.

- iii. Proceso estocástico semi-markoviano: Se trata de una generalización del modelo markoviano, en el que el tiempo entre eventos puede seguir cualquier tipo de distribución de probabilidad.

Una de las grandes áreas de aplicación de los procesos estocásticos la podemos encontrar en la Economía y Finanzas, por ejemplo en la valoración de activos, estudio del riesgo de inversión, en el problema del seguro-reaseguro, etc.

Como una de las figuras principales en esta área se puede citar a Louis Bachelier (1900), quien mostró en su tesis “Teoría de la Especulación” que los mercados financieros están dominados por leyes probabilísticas, siendo la distribución de los precios especulativos de tipo gaussiana. Introduce el concepto de “Movimiento browniano”, la generalización en tiempo continuo del recorrido aleatorio.

**Definición 3.1.0.2** *Un movimiento browniano estándar  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico con valores reales que satisface las siguientes condiciones:*

1.  *$W$  comienza casi seguramente en 0, es decir  $W_0 = 0$*
2.  *$W$  tiene incrementos independientes:*  
*para cualquier partición  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  y cualquier  $k$ , las variables aleatorias  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  son independientes*
3.  *$W$  tiene incrementos de Gauss (normales), es decir, para cualquier  $t > 0$ ,  $W_t$  se distribuye Normal de media 0 y varianza  $t$*
4.  *$W$  tiene, casi seguramente, recorridos muestrales continuos*

Probó que el comportamiento de los precios de mercado era muy similar al que presentaban pequeñas partículas suspendidas en un fluido. De este modo se estableció un vínculo entre el comportamiento económico y los procesos estudiados por Einstein. Nace así la conexión entre el movimiento browniano y las finanzas. Este hecho llevó a la realización de grandes avances en Economía durante 50 años.

Aunque la condición 4 de la definición anterior indica que los recorridos muestrales de  $W$  son continuos casi seguramente, muestran un comportamiento errático.

**Lema 3.1.0.2** *Sea  $W$  un movimiento browniano estándar, entonces casi seguramente, sus recorridos muestrales son diferenciables por doquier.*

Del lema anterior se pueden deducir las dos siguientes conclusiones:

1.  $W$  tiene variación no acotada sobre todo intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , es decir:

$$\sup_T \sum_{i=1}^n |W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)| = \infty$$

para casi todo  $\omega \in \Omega$ , siendo  $T$  una posible partición  $\{t_0, \dots, t_n\}$  de  $I$  y el supremo tomado sobre todas las posibles particiones.

2. La teoría de integración estándar para funciones con variación acotada no funciona correctamente, es decir:

$$\int_0^t Y_s(\omega) dW_s(\omega)$$

para algún proceso estocástico  $(Y_t)$  no tiene significado inmediato.

El siguiente resultado indica que el movimiento browniano estándar  $W$  tiene variación cuadrática finita.

**Teorema 3.1.0.10** *Si en la definición del movimiento browniano estándar  $W$ , se cambia la condición 3 por*

$$\forall t, W_t \sim N(0, \sigma^2 t), \sigma > 0$$

Entonces para  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 \xrightarrow{L^2} \sigma^2 t$$

donde  $\{t_0, \dots, t_n\}$  es una partición arbitraria de  $[0, t]$  tal que  $\sup_i |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$  y la convergencia en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Las condiciones anteriores junto con alguna condición extra sobre las particiones lleva a poder reemplazar la convergencia cuadrática a una convergencia casi seguro.

Este teorema es la clave para el desarrollo de una nueva teoría de la integración, el cálculo de Itô, que da un significado para los denominados integrandos predecibles.

Varias razones conducen a que el modelo del movimiento browniano sea un buen candidato natural para datos financieros, en particular para el mercado de capitales.

Si se simulan datos de un movimiento browniano, puede observarse el comportamiento errático del mismo, que se parece a la realidad de los mercados, ello se debe a que  $W_t$  se obtiene mediante un número grande de pequeños impulsos independientes. Estos impulsos se consideran cambios de precio pequeños que proviene de un gran número de intercambios.

El algoritmo de simulación del movimiento browniano estándar es el siguiente:

**Input:**  $\delta, n$ .

**Inicialización:**  $W_0 = 0, t_0 = 0$ .

**for**  $j = 1, \dots, n$  **do**

$t_j = t_{j-1} + \delta$

Simular  $Z$  de una distribución  $N(0, 1)$

$W_j = W_{j-1} + Z\sqrt{\delta}$

**Output:**  $n$  valores correspondientes al movimiento browniano estándar  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$

Figura 3.1: Algoritmo de simulación del movimiento browniano estándar.

La siguiente figura nos muestra una trayectoria browniana:

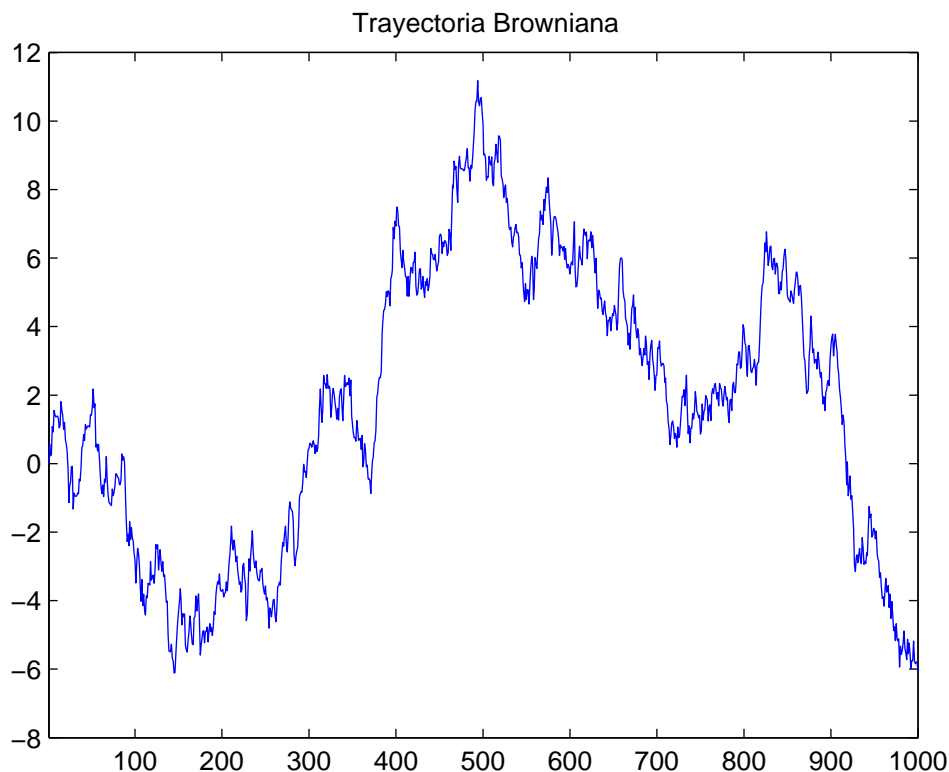


Figura 3.2: *Trayectoria browniana*

Al mismo tiempo que Bachelier realizaba sus trabajos sobre el Movimiento browniano, Filip Lundberg publicó en 1903 su tesis doctoral que se considera el fundamento matemático del seguro de no vida. Estableció un modelo de riesgo en el que utilizaba como elemento modelizador el proceso homogéneo de Poisson.

**Definición 3.1.0.3** *El proceso de conteo  $N = (N_t)_t$  es un proceso homogéneo de Poisson con tasa (razón o intensidad)  $\lambda > 0$  si:*

1.  $N_0 = 0$ , c.s.
2.  $N$  tiene incrementos estacionarios independientes

3.  $\forall 0 \leq s < t < \infty, N_t - N_s \sim P(\lambda(t-s))$ , es decir,

$$P[N_t - N_s = k] = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

En un proceso de Poisson homogéneo de razón  $\lambda$  los tiempos de llegada entre eventos sucesivos son exponenciales con razón  $\lambda$ , (media  $1/\lambda$ ).

Para generar los primeros  $n$  eventos de un Proceso de Poisson homogéneo, generamos exponenciales independientes  $X_i \sim \exp(\lambda)$  con  $1 \leq i \leq n$ :

- Primer evento al instante  $X_1$
- Evento  $j$ -ésimo al instante  $X_1 + \dots + X_j$ , con  $1 \leq j \leq n$

Para generar los eventos en las primeras  $T$  unidades de tiempo, se van obteniendo sucesivamente eventos hasta que  $X_1 + X_2 + \dots + X_{j+1} + 1$  excede a  $T$ . Denotaremos por  $l$  al número de eventos y  $S(l) = X_1 + X_2 + \dots + X_l$  al instante en que acontece el evento  $l$ . Así, el algoritmo de simulación del Proceso de Poisson homogéneo es el siguiente:

```

Input:  $T$ 
Inicialización:  $t = 0, l = 0$ .
while true do
  Generar  $u \sim U(0, 1)$ 
  if  $t - \log(u)/\lambda > T$  then stop
  else
     $t = t - \frac{1}{\lambda} \log(u)$ 
     $l = l + 1$ 
     $S(l) = t$ 
  end
end
Output: Valores correspondientes al proceso de Poisson
homogéneo

```

Figura 3.3: Algoritmo de simulación del proceso de Poisson homogéneo.

Un ejemplo de trayectoria poissoniana es el siguiente:

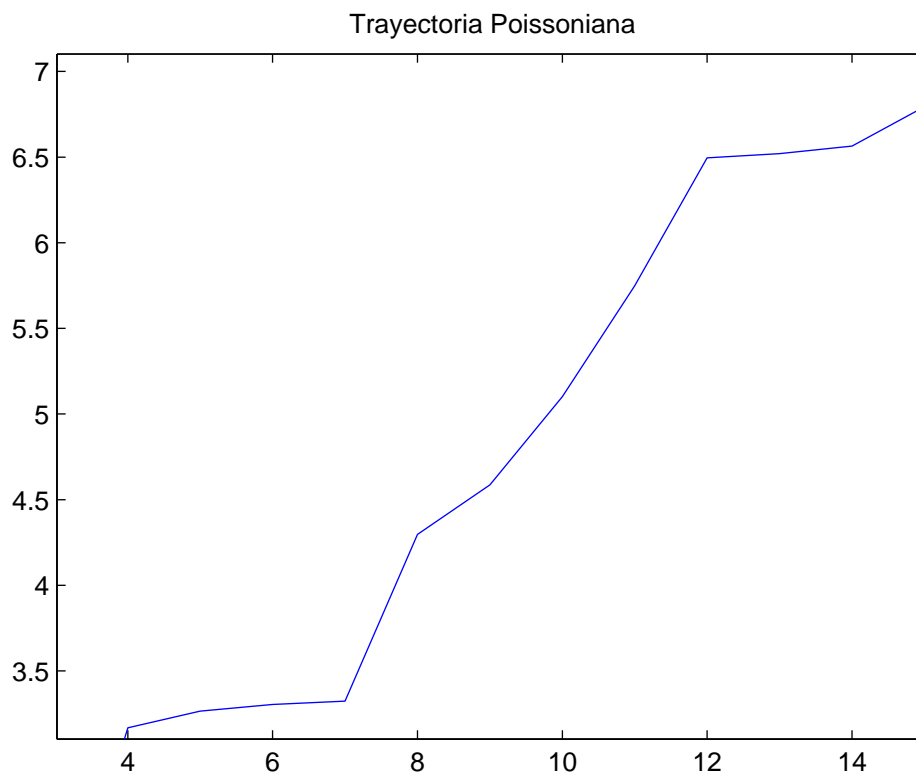


Figura 3.4: Trayectoria típica de un proceso de Poisson homogéneo

La similitud entre las definiciones de movimiento browniano y Proceso de Poisson homogéneo es grande. Ambos procesos son procesos de Lévy. Como sigue.

**Definición 3.1.0.4**  $X = (X_t)_t$  es un proceso de Lévy cuando:

1.  $X$  tiene trayectorias continuas a la derecha con límite a la izquierda
2.  $X_0 = 0$  y tiene incrementos independientes, es decir, considerados los instantes  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes
3. La distribución del incremento  $X_t - X_s$  es homogénea en el tiempo, es decir, depende únicamente de la diferencia  $t - s$

Pero la diferencia fundamental entre ambos, es el comportamiento del recorrido muestral, ya que en el caso del movimiento browniano es continuo y el de Poisson homogéneo es un proceso de saltos.

El interés por un mayor estudio de la dinámica de las series financieras y por la elaboración de diversos modelos probabilísticos para la explicación de las variaciones de los mismos ha crecido significativamente desde la publicación de los trabajos de Kendall en 1953, Black, Scholes y Merton, entre otros.

Black y Scholes (1973), con la contribución posterior de Merton (1973), obtuvieron, a principios de los años 70 del pasado siglo, una fórmula para la determinación de los precios de las opciones, basándose en la técnica de Integración Estocástica desarrollada por Kiyosi Itô y culminada por la escuela francesa.

El gran avance en la matematización de la teoría económica y en la aplicación de los procesos estocásticos a la hora de modelizar situaciones enmarcadas dentro del área económica ha fomentado el estudio del problema del seguro, diversificación de carteras, valoración de activos, etc.

## 3.2. Conceptos matemáticos

En este apartado, se introducen algunos conceptos matemáticos relacionados con los procesos estocásticos.

**Definición 3.2.0.5** (*Proceso de Markov (MP)*). Un proceso estocástico  $\{X_t, t \in T\}$ , se dice proceso de Markov (o proceso markoviano) si

$$\begin{aligned} P[X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n] = \\ = P[X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n] \end{aligned}$$

cualesquiera que sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ .

*Esta condición se conoce como Propiedad markoviana.*

Un proceso markoviano de espacio de estados discreto es conocido como Cadena de Markov, pudiendo ser en tiempo discreto (DTMC) o en tiempo continuo (CTMC).

**Definición 3.2.0.6** (*Proceso de renovación markoviano (MRP)*). Un proceso bivariado  $(Z, S) = (Z_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es un proceso de renovación markoviano con espacio de fases (contable)  $I$  y núcleo  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  donde  $\mathbf{Q}(t) = (Q_{ij}(t))_{i,j \in I}$  es una familia de funciones de sub-distribución tal que  $\sum_{j \in I} Q_{ij}(t)$  es una función de distribución, para todo  $i \in I$ , si es un proceso de Markov en  $I \times \mathbb{R}_+$  tal que  $S_0 = 0$  y

$$Q_{ij}(t) = P[Z_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | Z_n = i, S_n = s]$$

para todo  $n \in \mathbb{N}, i, j \in I$  y  $s, t \in \mathbb{R}_+$

Otra forma de definir un proceso de renovación markoviano es a través de su núcleo subyacente, que separa las probabilidades de transición subyacentes de la distribución de los tiempos de permanencia en los estados entre transiciones.

De la definición de un MRP, se sigue que si  $(Z, S)$  es un MRP con núcleo  $\mathbf{Q}$ , entonces  $Z$  es una DTMC con matriz de probabilidades de transición de un paso  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\infty)$  con

$$p_{ij} = Q_{ij}(\infty) = P[Z_{n+1} = j | Z_n = i]$$

denotando la probabilidad de que si en la fase de transición anterior nos encontrábamos en  $i$  en la siguiente fase nos encontremos en  $j$ .

Por otra parte, condicionando a que la siguiente fase sea  $j$ , es decir, dado que el proceso hace una transición de la fase  $i$  a la fase  $j$ , entonces la cantidad de tiempo en la cual el proceso se encuentra en la fase  $i$  antes de pasar a  $j$  tiene función de distribución

$$F_{(i,j)}(t) = P[S_{n+1} - S_n \leq t | Z_n = i, Z_{n+1} = j] = \frac{Q_{ij}(t)}{Q_{ij}(\infty)}$$

donde, por convenio se considerará  $F_{(i,j)}(t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  siempre que  $p_{ij} = 0$ .

Esto conduce a que

$$Q_{ij}(t) = p_{ij}F_{(i,j)}(t), t \in \mathbb{R}_+$$

para todo  $i, j \in I$  y diremos que el MRP  $(Z, S)$  tiene núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$  donde  $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$  es una matriz estocástica de probabilidades de transición y  $\mathbf{F} = (F_{ij})_{i,j \in I}$  es una matriz de funciones de distribución de variables aleatorias no negativas tales que si  $p_{ij} = 0$  entonces  $F_{(i,j)}(t) = 1$ , con  $t \in \mathbb{R}_+$ . De este modo el MRP queda completamente caracterizado por su núcleo subyacente.

Esta caracterización nos permite simular un MRP  $(Z, S)$  con espacio de estados ordenado  $I$ , isomorfo a algún intervalo acotado o no de  $\mathbb{Z}$ , y núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ . Basta con simular una DTMC  $Z$  con espacio de estados  $I$  y una secuencia  $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de tal manera que  $Z$  tenga asociada una matriz de probabilidades de transición  $\mathbf{P}$  y, condicional a que  $Z_n = i$  y  $Z_{n+1} = j$ , el intervalo de tiempo entre la  $n$ -ésima y la  $(n+1)$ -ésima transiciones de fase  $H_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  tenga distribución  $F_{(i,j)}(\cdot)$  y sea independiente de  $(Z_k, S_k)_{k < n}$ . De hecho, el siguiente procedimiento nos conduce a una secuencia  $(Z, N) = (Z_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para la cual

$$\begin{aligned} Q_{ij}(t) &= P[Z_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | Z_n = i] = \\ &= P[Z_{n+1} = j | Z_n = i] P[S_{n+1} - S_n \leq t | Z_n = i, Z_{n+1} = j] = p_{ij} F_{(i,j)}(t) \end{aligned}$$

es decir, un MRP con núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ .

Para el algoritmo utilizaremos dos secuencias de variables aleatorias independientes Uniformes en el intervalo  $(0, 1)$ ,  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definidas en dos espacios de probabilidad independientes  $\Lambda_1 = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  y  $\Lambda_2 = (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  respectivamente y construiremos  $(Z, S)$  en el espacio de probabilidad producto  $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ .

Concretamente, para  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ , usamos  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para construir  $Z(\omega_1)$  en  $\Lambda_1$  como sigue:

$$Z_0 = \mathbf{p}^{-1}(U_0(\omega_1))$$

$$Z_{n+1}(\omega_1) = [\mathbf{p}_{Z_n(\omega_1), \cdot}]^{-1}(U_{n+1}(\omega_1)), n \in \mathbb{N}$$

donde  $\mathbf{p}$  denota el vector de probabilidad de fase inicial.

Al mismo tiempo, las secuencias  $(Z_n(\omega_1))$  y  $(V_n(\omega_2))$  se usan para generar  $H(\omega) = (H_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}_+}$  como sigue

$$H_{n+1}(\omega) = [F_{(Z_n, Z_{n+1})(\omega_1)}]^{-1}(V_{n+1}(\omega_2)), n \in \mathbb{N}$$

Finalmente, la secuencia de renovación  $S(\omega)$  se obtiene haciendo:

$$S_0 = 0$$

$$S_{n+1}(\omega) = S_n(\omega) + H_{n+1}(\omega), n \in \mathbb{N}$$

Por construcción <sup>1</sup> tenemos que  $Z_0$  tiene como vector de probabilidades  $\mathbf{p}$ ,  $Z_{n+1}|Z_n = i$  tiene como vector de probabilidad  $\mathbf{p}_{i, \cdot}$  para  $n \in \mathbb{N}$  y  $[H_{n+1}|Z_n = i, Z_{n+1} = j]$  tiene función de distribución  $F_{(i,j)}(\cdot)$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

Además, como para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(U_{n+1}, V_{n+1})$  es independiente de  $(U_0, (U_m, V_m)_{m=1,2,\dots,n})$ , se tiene que, dada  $Z_n$ ,  $(Z_{n+1}, S_{n+1} - S_n)$  es independiente de  $(Z_k, S_k)_{k < n}$  y así, el proceso  $(Z, S)$  es un MRP con núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ .

Lo anterior nos conduce al siguiente algoritmo de simulación.

---

<sup>1</sup>Se utiliza el siguiente resultado conocido: Si  $F$  es una función de distribución arbitraria y  $U$  es una v.a.  $U(0, 1)$ , entonces  $F^{-1}(U)$  es una v.a. con función de distribución  $F$ , es decir:  $U \sim U(0, 1) \Rightarrow F^{-1}(U) \sim F$

**Input:** Secuencias independientes de v.as. independientes  $U(0,1)$ :  
 $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ ,  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  y  $N \in \mathbb{N}_+$ .  
 $Z_0 = \mathbf{p}^{-1}(U_0)$   
 $S_0 = 0$   
**for**  $n = 0 \dots, N - 1$  **do**  
 $Z_{n+1} = [\mathbf{p}_{Z_n, \cdot}]^{-1}(U_{n+1})$   
 $S_{n+1} = S_n + [F_{(Z_n, Z_{n+1})}]^{-1}(V_{n+1})$   
**end for**  
**Output:**  $(Z_n, S_n)_{0 \leq n < N}$

Figura 3.5: Algoritmo de simulación de un MRP vía su núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$  y el vector inicial de probabilidad de fase  $\mathbf{p}$ .

Finalmente, se expondrá otra formulación alternativa de los MRP, en esta ocasión a través de la caracterización vía núcleo de tasa de fallo (failure rate kernel). Sea  $W$  un MRP con espacio de fases  $I$  y núcleo  $\mathbf{Q}$ , tal que  $Q_{ij}(t)$  son absolutamente continuas para todos  $i$  y  $j$ . Entonces,  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  con  $\mathbf{q}(t) = (q_{ij}(t))_{i,j \in I}$  tal que

$$q_{ij}(t) = \frac{dQ_{ij}(t)}{dt}$$

se denomina núcleo de densidades de  $W$  y

$$q_i(t) = \sum_{j \in I} q_{ij}(t)$$

denota la densidad del tiempo necesario para la transición desde  $i$ . Además, si denotamos por

$$r_{ij}(t) = \frac{q_{ij}(t)}{1 - \sum_{l \in I} Q_{il}(t)}$$

entonces  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  con  $\mathbf{R}(t) = (r_{ij}(t))_{i,j \in I}$ , se conoce como núcleo de tasa de fallo de  $W$  y

$$r_i(t) = \sum_{j \in I} r_{ij}(t) = \frac{q_i(t)}{1 - \sum_{l \in I} Q_{il}(t)}$$

denota la tasa de fallo en el instante  $t$  del tiempo necesario para que la transición desde  $i$  tenga lugar. En este caso, como  $r_i(t)$  caracteriza a  $q_i(t)$  (ya que

$$q_i(t) = r_i(t) \exp \left\{ - \int_0^t r_i(s) ds \right\}$$

-Ver Kalbfleisch y Prentice (1980)-), se sigue que  $r_{ij}(t)$  caracteriza a  $q_{ij}(t)$  ya que

$$q_{ij}(t) = r_{ij}(t) \exp \left\{ - \int_0^t r_i(s) ds \right\}, i, j \in I, t \in \mathbb{R}_+$$

De esta manera, el MRP queda completamente caracterizado por su núcleo de tasa de fallo.

A continuación definiremos el concepto de proceso semi-markoviano.

**Definición 3.2.0.7** (*Proceso semi-markoviano (SMP)*) Un proceso  $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  es un proceso semi-markoviano con espacio de estados  $I$  y núcleo  $\mathbf{Q}$  (o admitiendo un núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ ) si

$$W_t = Z_n, \quad S_n \leq t < S_{n+1}$$

para algún MRP  $(Z, S)$  con espacio de fases  $I$  y núcleo  $\mathbf{Q}$  (núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ )

Obsérvese que si  $(Z, S)$  es un MRP con espacio de fases  $I$  y núcleo  $\mathbf{Q}$  (núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ ), y se tiene

$$W_t = Z_n, \quad S_n \leq t < S_{n+1}$$

entonces  $W$  es un SMP con espacio de estados  $I$  y núcleo  $\mathbf{Q}$  (núcleo subyacente  $(\mathbf{P}, \mathbf{F})$ ). Recíprocamente, si  $W$  es un SMP con espacio de estados  $I$  y ponemos  $S_0 = 0, Z_0 = W_0$

y

$$\begin{cases} S_{n+1} = \inf \{t \geq S_n : W_t \neq W_{t-}\} \\ Z_{n+1} = W_{S_{n+1}} \end{cases}$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , entonces  $(Z_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es un MRP con espacio de fases  $I$ . Además, si  $\mathbf{Q}((\mathbf{P}, \mathbf{F}))$  denota el núcleo (núcleo subyacente) de  $(Z_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , entonces  $W$  admite un núcleo (núcleo subyacente)  $\mathbf{Q}((\mathbf{P}, \mathbf{F}))$ , denominado núcleo natural de  $W$ .

La forma más habitual de describir un SMP es a través de su núcleo subyacente. El SMP comienza en una fase  $i$  con probabilidad  $p_i$  y cambia de fase de acuerdo con una matriz de probabilidades de transición  $\mathbf{P}$ . Se mueve a la fase  $k$  después de haber entrado en  $j$  con probabilidad  $p_{jk}$ , independientemente de los cambios de fase anteriores. Antes de pasar de  $j$  a  $k$ , el proceso permanece un tiempo aleatorio de tiempo en  $j$ , que es independiente de los tiempos anteriores de permanencia en fases y de las transiciones de fase anteriores, y tiene como función de distribución  $F_{(j,k)}(t)$ . Si el SMP tiene núcleo  $\mathbf{Q}$ , entonces  $p_{jk} = Q_{jk}(\infty)$  y  $F_{(j,k)}(t) = Q_{jk}(t)/p_{jk}$  siempre que  $p_{jk} > 0$ .

A continuación presentamos un algoritmo de simulación de trayectorias de un SMP en un intervalo de tiempo dado  $[0, t]$  vía caracterización del mismo a través de su núcleo. Dicho algoritmo proporciona una secuencia de estados visitados  $(j_0, j_1, \dots, j_k)$  y una secuencia de tiempos (instantes) en los que se producen los saltos  $(s_0, s_1, \dots, s_k)$  con  $s_k \leq t < s_{k+1}$ .

**Input:**  $\mathbf{Q}, \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\infty), t$ .

**Paso 1.**  $k = 0, s_0 = 0, j_0 =$  estado inicial.

**Paso 2.** Muestrear la v.a.  $J$  de acuerdo con una distribución de  $Poisson(j_k, \cdot)$

**Paso 3.** Muestrear la v.a.  $X \sim F_{j_k, j_{k+1}}(\cdot)$  y hacer  $x = X(\omega)$

**Paso 4.**  $k = k + 1, s_k = s_{k-1} + x$ . Si  $s_k \geq t$  entonces finalizar.

**Paso 5.**  $j_k = j_{k+1}$  y continuar en el Paso 2

**Output:**  $(j_0, s_0, j_1, s_1, \dots, j_k, s_k)$

Figura 3.6: Algoritmo de simulación de trayectorias de un SMP e un intervalo de tiempo dado  $[0, t]$  vía caracterización del mismo a través de su núcleo.



## Capítulo 4

# Aplicaciones de los procesos estocásticos en Seguros

### 4.1. Introducción

El modelo clásico de ruina de Cramér-Lundberg, tiene su origen en la tesis doctoral de Filip Lundberg de 1903. En este trabajo Lundberg estudió el problema del reaseguro colectivo y utilizó el proceso compuesto homogéneo de Poisson.

En 1930 Harald Cramér retomó las ideas originales de Lundberg y las formalizó en el contexto de los procesos estocásticos.

El modelo original es:

$$X(t) = X(0) + ct - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n \quad (4.1)$$

con  $c > 0$ ,  $X(0) \geq 0$ .

Siendo  $X(0)$  el capital inicial,  $c$  la prima del seguro, que se asume constante,  $Y_j$  la cantidad de la  $j$ -ésima reclamación y  $N_t$  es un proceso homogéneo de Poisson que representa el número de reclamaciones que han ocurrido hasta el instante  $t$ . Las reclamaciones  $Y_j$  se suponen variables aleatorias independientes y positivas que son independientes del

proceso  $N_t$  y con distribución  $F$ , tal que  $F(0) = 0$  y cuya media  $\mu$  es finita.

Si la llegada de la  $n$ -ésima reclamación se denota por  $S_n$ , entonces:

$$N_t = \sup \{n \geq 1 : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

Los intervalos entre las reclamaciones  $T_k = S_k - S_{k-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots$  son v.as.i.i.d. según una exponencial de parámetro  $\lambda$  con media finita.

El total de las reclamaciones hasta el instante  $t$  viene dado por

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$$

v.a. que se conoce como Poisson compuesta. Su distribución es:

$$G_t(x) = P[S(t) \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x)$$

con  $x, t \geq 0$  y siendo  $F^{n*}$  la  $n$ -ésima convolución de  $F$  con  $F^{0*}$  la función de distribución de la medida de Dirac en 0.

El tiempo hasta la ruina se define como:

$$T = \inf \{t > 0 : X(t) \leq 0\} \quad (4.2)$$

donde  $\inf \emptyset = \infty$ .

La probabilidad de ruina en el intervalo  $[0, t]$  o probabilidad de ruina en horizonte finito se define como:

$$\psi(u, t) = P[T \leq t | X(0) = u] \quad (4.3)$$

y la probabilidad de ruina en horizonte infinito o simplemente probabilidad de ruina:

$$\psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P[T \leq t | X(0) = u] = P[T < \infty | X(0) = u] \quad (4.4)$$

Se prueba en Teoría Matemática del Seguro que bajo la condición de beneficio neto  $c - \lambda\mu > 0$ , entonces:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$$

En el planteamiento de Cramér y Lundberg esta condición se supone siempre y es equivalente a decir que en media se obtiene un mayor ingreso por las primas que pérdidas por reclamaciones.

**Definición 4.1.0.8** *El proceso básico de Cramér-Lundberg se describe como*

$$X(t) = X(0) + (1 + v)\lambda\mu t - S(t)$$

donde  $\lambda\mu t = E[S(t)]$  y  $v = \frac{c}{(\lambda\mu)-1} > 0$  es el denominado “margen de seguridad o solvencia” que garantiza la supervivencia.

**Teorema 4.1.0.11** *Dado un modelo de riesgo de Cramér-Lundberg, entonces*

$$1 - \psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n F_I^{n*}(u), \quad u \geq 0$$

donde  $\rho = \lambda\mu/c < 1$  y la cola integrada de la función de distribución  $F_I$  se define como:

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0$$

siendo  $\bar{F} = 1 - F$  para cualquier función de distribución  $F$  concentrada en  $[0, \infty)$ .

Debido a que  $\psi(u)$  se expresa como una función de distribución compuesta, ello tiene consecuencias notables tanto analíticas como numéricas. En particular, la suma dada es de tipo geométrico.

El proceso de Poisson compuesto con desplazamiento tal y como se describe en (4.1), no es comprensible y no tiene en cuenta por ejemplo, el incremento de primas no lineales del capital debido a una posible inversión o a la inflación y a pagos de dividendos de los accionistas. Sin embargo, este tipo de procesos son los bloques básicos de construcción

de cualquier proceso  $Y$  de Lèvy (sin componente browniana) en el sentido que  $Y$  es el límite (con respecto a la convergencia sobre intervalos compactos) de una sucesión  $Y^{(n)}$  de procesos de Poisson compuestos con desplazamiento.

Las condiciones subyacentes del modelo de Cramér-Lundberg son claramente violadas en la práctica, por ejemplo, puede ocurrir que las reclamaciones lleguen en clusters.

Los actuarios introducen la noción de tiempo operativo. El proceso de llegada de las reclamaciones  $(N_t)_t$  se modela como un proceso de Poisson no homogéneo con medida de intensidad  $\Lambda(t)$ , por ejemplo, el proceso tiene incrementos independientes para  $0 \leq s < t$ , entonces  $N_t - N_s \sim P(\Lambda(t) - \Lambda(s))$ . Esta situación se aproxima más a la realidad.

Entonces, para reducirse al caso homogéneo basta un cambio de escala temporal

$$\tilde{N}_t = N(\Lambda^{-1}(t))$$

Así,  $\tilde{N}$  es un proceso de Poisson homogéneo.

En épocas más recientes, consideraciones acerca del tiempo operativo en la medición estocástica de las finanzas pueden verse en Clark (1973), Pictet (1997) y German y Ané (1996), entre otros.

El objetivo principal de la Teoría de la Ruina es obtener fórmulas o aproximaciones de la probabilidad de ruina en los diferentes modelos de riesgo, véase Seal (1978), Gerber (1979) y Ramsay (1992).

En este contexto es de interés el denominado “Coeficiente de Lundberg”. Si se considera el modelo clásico tal y como se definió (4.1), entonces la familia

$$\{r \in \mathbb{R}, m_Y(r) = E[e^{rY}]\}$$

es una familia de martingalas <sup>1</sup> exponenciales paramétricas asociada al proceso (4.1).

**Definición 4.1.0.9** (*Filtración*) Una familia  $\mathcal{F} = (F_t)_t$  de  $\sigma$ -álgebras sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  se dice una filtración si  $F_t \subset F$  para todo  $t \geq 0$ , y para todo  $s \leq t$ ,  $F_s \subset F_t$ .

---

<sup>1</sup>Se definirán en la Definición 4.1.0.11

Y se dice que la filtración es continua a la derecha si

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \quad (4.5)$$

**Definición 4.1.0.10** Un proceso estocástico  $X = (X_t)_t$  se dice adaptado a  $\mathcal{F}$ , o  $\mathcal{F}$ -adaptado si  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para todo  $t \geq 0$ . La filtración natural de  $X$ , denotada por  $\mathcal{F}^X$ , es la mínima filtración para la cual  $X$  es adaptado.

La interpretación usual de la filtración natural  $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_t$ , es la de una filtración que contiene toda la información disponible de las variables aleatorias  $(X_s)_{s \leq t}$ .

**Definición 4.1.0.11** (Martingala). Un proceso estocástico  $M = (M_t)_t$  sobre el espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathcal{P})$  es una  $F$ -martingala (submartingala<sup>2</sup>, supermartingala respectivamente) si

1.  $M$  es  $F$ -adaptado, integrable y
2.  $\forall 0 \leq s \leq t: E[M_t | \mathcal{F}_s] = (\geq, \leq) M_s$ , c.s. en  $\mathcal{P}$ .

Es de interés en las aplicaciones en Seguros y Finanzas los Teoremas de Parada y de convergencia de la Martingala que se expondrán a continuación.

**Definición 4.1.0.12** Un tiempo de parada  $T$  es una v.a. con valores en  $[0, \infty]$  tal que  $\forall t \geq 0$ , entonces  $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

A la  $\sigma$ -álgebra

$$\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\} \quad (4.6)$$

se le denomina  $\sigma$ -álgebra parada con respecto a  $T$ .

**Teorema 4.1.0.12** (Teorema de parada de la Martingala). Sea  $M$  una  $F$ -martingala (submartingala, supermartingala) y  $T$  un tiempo de parada en  $F$ . Supóngase que  $F$  es continua a la derecha. Entonces también el proceso estocástico parado  $(M_{T \wedge t} : t \geq 0)$  es

<sup>2</sup>Se dice que  $M$  es martingala (submartingala, supermartingala) si es una martingala (submartingala, supermartingala) con respecto a la filtración natural.

una  $F$ -martingala (submartingala, supermartingala), donde  $T \wedge t$  indica el mínimo entre  $t$  y  $T$ .

Además, para todo  $t \geq 0$ ,  $E[M_t | \mathcal{F}_t] = (\leq, \geq) M_{T \wedge t}$ .

Una consecuencia importante del teorema anterior es la siguiente:

$$E[M_t | \mathcal{F}_t] = (\leq, \geq) E[M_0]$$

En diferentes aplicaciones puede representarse  $T \wedge t$  por  $T$ . Este resultado no es cierto en general, se necesitan condiciones extra de integrabilidad uniforme.

El siguiente teorema es crucial en teoría de martingalas:

**Teorema 4.1.0.13** (Teorema de la convergencia de la martingala) Sea  $M$  una  $F$ -supermartingala tal que

$$\sup_{t \geq 0} E[M_t^-] < \infty$$

Si  $F$  es continua a la derecha, entonces

$$M_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$$

existe c.s. en  $\mathcal{P}$ , además  $E[M_\infty] < \infty$

La consecuencia inmediata es que todas las martingalas positivas (o quizás negativas) convergen casi seguramente.

Son importantes las siguientes martingalas relacionadas con el movimiento browniano y el proceso de Poisson homogéneo para la información sobre las probabilidades de ruina.

**Proposición 4.1.0.1** Se tienen los siguientes resultados:

1. Sea  $N$  un proceso homogéneo de Poisson con intensidad  $\lambda > 0$ , entonces

$$(N_t - \lambda t)_t$$

es una martingala.

2. Considérese el modelo de Cramér-Lundberg y sea

$$\theta(r) = \lambda (E [e^{rY} - 1]) - cr$$

para aquellos valores de  $r$  para los que la esperanza exista. Entonces:

$$(M_r(t))_t = (\exp \{-rX(t) - \theta(r)t\})_t$$

es una martingala.

Esta proposición, junto con el teorema de parada, es importante para la información sobre las probabilidades de ruina que veremos más adelante.

**Proposición 4.1.0.2** Sea  $W = (W_t)_t$  un movimiento browniano estándar, entonces,

1.  $W$  y  $W_t^2 - t$  son martingalas.
2. para cualquier  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ , sea  $W_{\mu,\sigma}(t) = \mu t + \sigma W_t$ <sup>3</sup>. Para cada  $\beta \in \mathbb{R}$ , el siguiente proceso:

$$\left( \exp \left\{ \beta W_{\mu,\sigma}(t) - \left( \mu\beta + \frac{\sigma^2\beta^2}{2} \right) t \right\} \right)_t$$

es una martingala asociado al movimiento browniano, llamada “Martingala Exponencial” o “Martingala de Wald”

La función

$$\theta(r) = \lambda (E [e^{rY} - 1]) - cr$$

es estrictamente convexa y cumple  $\theta(0) = 0$ ,  $\theta'(0) = \lambda\mu - c < 0$  por lo que puede existir un cierto valor  $R \in \mathbb{R}$  donde la función  $\theta$  corte al eje de abscisas pasando de ser negativa a positiva.

---

<sup>3</sup> $(W_{\mu,\sigma}(t))$  es denominado movimiento browniano con desplazamiento  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$

**Definición 4.1.0.13** Sea  $F$  la función de distribución de la cantidad de la reclamación. Supongamos que existe  $R \in \mathbb{R}$  tal que  $\theta(R) = 0$ . Entonces se dice que  $R$  es el coeficiente de ajuste o coeficiente de Lundberg del proceso de riesgo (4.1).

Ejemplos típicos de existencia de ese coeficiente de Lundberg son las distribuciones exponencial y Gamma, en cambio no existe para distribuciones de Pareto o lognormales.

Supongamos que ese valor  $R$  existe, entonces  $M_R(t) = \exp\{-R(X(t))_t\}$  es una martingala.

Como el tiempo hasta la ruina  $T$  es un tiempo de parada para el proceso  $(X(t))_t$  podemos aplicar el Teorema 4.1.0.12 y de aquí para  $t \geq 0$ :

$$E[\exp\{-RX(r \wedge t)\}] = E[\exp\{-RX(0)\}] = e^{-RX(0)}$$

El lado izquierdo puede acotarse inferiormente por

$$E[\exp\{-RX(r \wedge t)\}, r \leq t] = E[\exp\{-RX(T)\}]$$

donde  $E[W; A] = \int_A W dP$ .

Usando el teorema de la convergencia monótona,  $t \rightarrow \infty$  y  $X(r) < 0$  se obtiene

$$e^{-RX(0)} \geq E[\exp\{-RX(T)\}] > P[T < \infty]$$

De aquí la denominada desigualdad de Cramér-Lundberg para la probabilidad de ruina en horizonte infinito:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

con  $u = X(0)$ .

Usando el teorema de renovación de Blackwell, en la versión del teorema de renovación clave de Smith, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.0.14** *Supongamos que  $R$  existe y que*

$$\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty$$

*entonces:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) e^{Ru} = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda m'_Y(R) - c}$$

Por tanto, el resultado límite prueba que la desigualdad de Lundberg es asintóticamente ajustada.

A la aproximación asintótica de  $\psi(u)e^{Ru}$  se le denomina aproximación de Cramér-Lundberg.

Existen numerosas aproximaciones de la probabilidad de ruina, como la de Beekman-Bowers (1969), en la que se usa una distribución Gamma para aproximar la distribución de la cantidad de las reclamaciones, o la de De Vylder (1996), que aproxima todo el proceso  $X$  por otro más simple de forma que la aproximación de la probabilidad de ruina es la probabilidad de ruina en el caso exponencial. Un enfoque relativamente reciente de cálculo de aproximaciones a la probabilidad de ruina es el presentado por Goovaerts (1990), donde se establecen cotas mediante el Ordenamiento de Riesgos. Otro tipo de aproximaciones surge del uso de técnicas no paramétricas como el remuestreo (véase Frees (1986)) o la técnica de Monte Carlo (véase Beard, Pentikäinen y Pesonen (1984)).

Modelos de riesgo como los mencionados han sido estudiados por Reinhard (1984) y Asmussen (1989). Reinhard (1984) considera una clase de modelos de riesgo en la cual la frecuencia de las reclamaciones y los montantes a pagar están influidos por un proceso externo (o proceso “ambiente”) markoviano, Reinhard y Snoussi (2001, 2002) han analizado la gravedad de la ruina y la distribución del exceso previo a la ruina en un modelo de riesgo semi-markoviano discreto.

En lo que sigue se ordenarán tiempos hasta la ruina sin tener una expresión explícita para la probabilidad de ruina y sin usar aproximaciones de la misma, tal y como se venía haciendo clásicamente.

## 4.2. Dominancia estocástica de tiempos de ruina en procesos de riesgo semi-Markov modulados

Consideremos la siguiente generalización del modelo clásico:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t c_{J(s)} ds - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n \quad (4.7)$$

donde  $c_j > 0$  para todo  $j$ , y  $X(0) \geq 0$ .

Siendo  $X(0)$  una variable aleatoria que representa el capital inicial;  $J(s)$  un proceso semi-markoviano;  $c_j$  la prima de seguro cuando el proceso  $J(s)$  se encuentra en el estado  $j$ ;  $Y_n$  el montante de la  $n$ -ésima reclamación y  $N_t$  un proceso de conteo asociado al proceso semi-markoviano  $J$  que representa el número de reclamaciones acontecidas hasta el instante  $t$ .

Sea  $(S_n, K_n)$  una secuencia markoviana asociada al proceso  $J$ , donde

$$S_n = \inf \{t \geq 0 : N_t \geq n\}, n \in \mathbb{N}$$

representa una secuencia de ocurrencia de eventos y

$$K_n = J(S_n), n \in \mathbb{N}$$

es una cadena de Markov en tiempo discreto e irreducible con espacio de estados  $I$ , un subconjunto numerable de  $\mathbb{R}$ , matriz de transición  $P = (P_{ij})_{i,j \in I}$  y que representa el estado visitado en la  $n$ -ésima transición, donde

$$J_t = K_n, S_n \leq t < S_{n+1}$$

Sea  $H_n$  el tiempo entre la  $(n-1)$ -ésima y la  $n$ -ésima reclamación:

$$H_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 1 \quad (4.8)$$

De esta forma, el modelo puede ser escrito como:

$$X(t) = X(0) + \sum_{n=0}^{N_t-1} c_{K_n} H_{n+1} + c_{K_{N_t}}(t - S_{N_t}) - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n \quad (4.9)$$

donde  $c_j > 0, \forall j \in I$ .

La estructura de dependencia semi-markoviana en consideración es del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} P[H_{n+1} \leq x, Y_{n+1} \leq y, K_{n+1} = j | K_n = i, (H_r, Y_r, K_r), 0 \leq r \leq n] = \\ = P[H_1 \leq x, Y_1 \leq y, K_1 = j | K_0 = i] = Q_{ij}(x, y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

La secuencia  $Q = (Q_{ij})_{i,j \in I}$  es el núcleo de este proceso.

En este apartado se establecerán condiciones suficientes para la dominancia estocástica de primer orden entre tiempo de ruina de dos procesos como los descritos en (4.7).

#### 4.2.1. Procesos estocásticos supuesto que la cantidad de la indemnización depende del ambiente

Consideremos la siguiente estructura del núcleo del proceso de riesgo:

$$Q_{ij}(x, y) = p_{ij} F_{ij}(x) G_{ij}(y) \quad (4.11)$$

donde

- $p_{ij} = Q_{ij}(\infty, \infty) = P[K_{n+1} = j | K_n = i], n \in \mathbb{N}_+, i, j \in I$
- $F_{ij}$  es la función de distribución de  $H_n | (K_{n-1} = i, K_n = j), n \in \mathbb{N}_+, i, j \in I$
- $G_{ij}$  es la función de distribución de  $Y_n | (K_n = i, K_{n+1} = j), n \in \mathbb{N}_+, i, j \in I$

Esto implica que  $(Y_1, Y_2, \dots)$  y  $(H_1, H_2, \dots)$  son condicionalmente independientes dado  $(K_0, K_1, \dots)$ , es decir, condicionalmente independientes dada la evolución del proceso  $J$ .

La parametrización de este proceso es  $(c, P, F, G)$ , donde  $c = (c_i)_{i \in I}$ ,  $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ ,  $F = (F_{ij})_{i,j \in I}$  y  $G = (G_{ij})_{i,j \in I}$ .

**Teorema 4.2.1.1** Sean  $X^{(1)} = (X^{(1)}(t))_{t \geq 0}$  y  $X^{(2)} = (X^{(2)}(t))_{t \geq 0}$  procesos estocásticos con parametrizaciones  $(c^{(1)}, P^{(1)}, F^{(1)}, G^{(1)})$  y  $(c^{(2)}, P^{(2)}, F^{(2)}, G^{(2)})$  respectivamente, como los descritos en (4.7) y (4.11).

Sean  $J^{(1)}(0) \leq J^{(2)}(0)$  y  $X^{(1)}(0) \leq X^{(2)}(0)$ .

Denótese por

$$T_{ab}^{(l)} = \inf \left\{ t > 0 : X^{(l)}(t) \leq 0 \right\} \mid \left( X^{(l)}(0) = b, K_0^{(l)} = a \right).$$

Si

$$c_i^{(1)} \leq c_k^{(2)}, \quad \forall i \leq k \quad (4.12)$$

$$P^{(1)} \leq_K P^{(2)} \quad (4.13)$$

$$F_{ij}^{(1)} \leq_{st} F_{kl}^{(2)}, \quad \forall i \leq k, j \leq l \quad (4.14)$$

$$G_{kl}^{(2)} \leq_{st} G_{ij}^{(1)}, \quad \forall i \leq k, j \leq l \quad (4.15)$$

entonces  $T_{iu}^{(1)} \leq_{st} T_{jv}^{(2)} \quad \forall i \leq j, u \leq v$ .<sup>4</sup>

**Demostración.** Sean  $X^{(1)}$  y  $X^{(2)}$  como en el enunciado. Debemos probar que  $T_{iu}^{(1)} \leq_{st} T_{jv}^{(2)}$  para todo  $i \leq j, u \leq v$ .

Se designa por  $(S_n^{(l)}, K_n^{(l)})$  a la sucesión markoviana de renovación asociada a  $J^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$ .

---

<sup>4</sup>Sean  $I$  y  $J$  dos conjuntos contables ordenados y  $A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$  y  $B = (b_{ij})_{i \in I, j \in J}$  dos matrices finitas medibles con índices en  $I \times J$ . Entonces  $A$  es menor que  $B$  en el sentido de Kalmykov, ( $A \leq_K B$ ) si y sólo si  $\sum_{m \geq n} a_{im} \leq \sum_{m \geq n} b_{jm} \quad \forall i \leq j$ .

Se define:

$$T_{iu}^{*(l)} = \inf \left\{ S_n^{(l)} : X_{S_n^{(l)}}^{(l)} \leq 0 \right\} | (X_{S_0^{(l)}}^{(l)} = u, K_0^{(l)} = i), \quad l = 1, 2. \quad (4.16)$$

Obsérvese que el hecho de que  $X^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$ , sea una secuencia no decreciente en  $[S_n^{(l)}, S_{n+1}^{(l)})$ , indica que:

$$T_{iu}^{(l)} = T_{iu}^{*(l)} \quad (4.17)$$

por lo tanto es suficiente probar que  $T_{iu}^{*(1)} \leq_{st} T_{jv}^{*(2)} \quad \forall u \leq v, i \leq j$ .

Sea

$$\left( \tilde{X}_n^{(1)}, \tilde{X}_n^{(2)} \right)$$

un emparejamiento de

$$X_{S_n^{(1)}}^{(1)} | X_{S_0^{(1)}}^{(1)} = u \quad y \quad X_{S_n^{(2)}}^{(2)} | X_{S_0^{(2)}}^{(2)} = v$$

en el espacio producto de probabilidad

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 = (\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$$

tal que

$$\tilde{X}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{X}_n^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

y

$$\tilde{S}_n^1(\omega) \leq \tilde{S}_n^2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$$

siendo  $\tilde{S}_n^{(l)}$ , copia del proceso  $S_n^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$ .

Para su construcción se usarán las siguientes secuencias independientes de variables aleatorias uniformes e independientes en el intervalo  $(0, 1)$ :  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  en  $\Lambda_1$ ,  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  y  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  en  $\Lambda_2$ .

Sean  $\tilde{K}_0^{(1)}(\omega_1) = i$  y  $\tilde{K}_0^{(2)}(\omega_1) = j$ .

En detalle, para  $l = 1, 2$ :

$$\tilde{K}_n^{(l)}(\omega_1) = \left[ P_{\tilde{K}_{n-1}^{(l)}}^{(l)} \right]^{-1} (U_n(\omega_1)), \quad n \in \mathbb{N}_+, \omega_1 \in \Omega_1 \quad (4.18)$$

$$\tilde{H}_n^{(l)}(\omega) = \left[ F_{(\tilde{K}_{n-1}^{(l)}(\omega_1), \tilde{K}_n^{(l)}(\omega_1))}^{(l)} \right]^{-1} (V_n(\omega_2)), \quad n \in \mathbb{N}_+, \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad (4.19)$$

$$\tilde{Y}_n^{(l)}(\omega) = \left[ G_{(\tilde{K}_{n-1}^{(l)}(\omega_1), \tilde{K}_n^{(l)}(\omega_1))}^{(l)} \right]^{-1} (W_n(\omega_2)), \quad n \in \mathbb{N}, \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad (4.20)$$

Sean  $\tilde{X}_0^{(1)} = 1$  y  $\tilde{X}_0^{(2)} = v$  y:

$$\tilde{X}_n^{(l)}(\omega) = \tilde{X}_0^{(l)} + \sum_{m=0}^{n-1} c_{\tilde{K}_m^{(l)}}^{(l)} \tilde{H}_{m+1}^{(l)}(\omega) - \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(l)}(\omega), \quad (4.21)$$

$n \in \mathbb{N}$ ,  $l = 1, 2$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ , el proceso de Markov subyacente correspondiente a  $(X_{S_n}^{(l)})_{n \geq 0}$ ,  $l = 1, 2$ .

Usando (4.13), (4.14) y (4.15) se tiene respectivamente, por construcción:

$$\tilde{K}_n^{(1)}(\omega_1) \leq \tilde{K}_n^{(2)}(\omega_1) \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1, n \in \mathbb{N} \quad (4.22)$$

$$\tilde{H}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{H}_n^{(2)}(\omega) \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.23)$$

y

$$\tilde{Y}_n^{(1)}(\omega) \geq \tilde{Y}_n^{(2)}(\omega) \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.24)$$

Por otra parte, de (4.12), (4.23) y (4.24) se tiene que:

$$\sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(1)}(\omega) \geq \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.25)$$

$$\tilde{S}_n^{(1)}(\omega) = \sum_{m=1}^n \tilde{H}_m^{(1)}(\omega) \leq \sum_{m=1}^n \tilde{H}_m^{(2)}(\omega) = \tilde{S}_n^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.26)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} c_{\tilde{K}_m^{(1)}}^{(1)} \tilde{H}_{m+1}^{(1)}(\omega) \leq \sum_{m=0}^{n-1} c_{\tilde{K}_m^{(2)}}^{(2)} \tilde{H}_{m+1}^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.27)$$

lo que conduce a:

$$\tilde{X}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{X}_n^{(2)}(\omega) \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.28)$$

Si se denota por:

$$\tilde{T}_{iu}^{*(l)} = \inf \left\{ \tilde{S}_n^{(l)} : \tilde{X}_n^{(l)} \leq 0 \right\} | (\tilde{X}_0 = u, \tilde{K}_0^{(l)} = i), \quad l = 1, 2 \quad (4.29)$$

se tiene

$$\tilde{T}_{iu}^{*(1)}(\omega) \leq \tilde{T}_{jv}^{*(2)}(\omega), \quad \forall i \leq j, u \leq v, \omega \in \Omega \quad (4.30)$$

como se quería demostrar. ■

En el caso particular en que el ambiente  $J$  fuera markoviano, en particular una CTMC la parametrización del proceso (4.7) sería  $(c, P, q, G)$ , donde  $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ ,  $q$  es el vector de tasas de transición desde los estados de  $J$  y  $G = (G_{ij})_{i,j \in I}$ . En este caso, el teorema anterior tiene una aplicación inmediata, es suficiente con hacer notar que la condición  $F_{ij}^{(1)} \leq_{st} F_{kl}^{(2)}$ ,  $\forall i \leq k, j \leq l$  se traduce en una condición sobre los vectores de tasas de transición desde los estados  $q_k^{(2)} \leq q_i^{(1)} \quad \forall i \leq k$ , es decir, la función de distribución de  $H_n^{(l)} | (K_{n-1}^{(l)} = i, K_n^{(l)} = j)$ ,  $l = 1, 2$ , que se ha denotado por  $F_{ij}^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$  tiene en este caso la siguiente expresión:  $F_{ij}^{(l)}(x) = q_i^{(l)} e^{-q_i^{(l)} x}$  para  $l = 1, 2$ .<sup>5</sup>

De esta manera, se considerarán dos procesos  $X^{(1)}$  y  $X^{(2)}$  como los descritos en (4.7) con parametrizaciones  $(c^{(1)}, P^{(1)}, q^{(1)}, G^{(1)})$  y  $(c^{(2)}, P^{(2)}, q^{(2)}, G^{(2)})$  respectivamente

---

<sup>5</sup>Distribución exponencial de intensidad  $q_i^{(l)}$  y la distribución decrece estocásticamente en el sentido usual con el valor de la intensidad

y entonces, el resultado que se tiene para este caso particular, se enuncia en el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.1.1** Sean  $X^{(1)} = (X_t^{(1)})_{t \geq 0}$  y  $X^{(2)} = (X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  procesos estocásticos con parametrizaciones  $(c^{(1)}, P^{(1)}, q^{(1)}, G^{(1)})$  y  $(c^{(2)}, P^{(2)}, q^{(2)}, G^{(2)})$  respectivamente como los descritos en (4.7), con ambientes  $J^{(1)}$  y  $J^{(2)}$  siendo éstos CTMCs con espacio de estados  $I$ , matrices de probabilidad de transición subyacentes  $P^{(1)}$  y  $P^{(2)}$  y vectores de tasas de transición desde los estados  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ , respectivamente.

Sean  $J^{(1)}(0) \leq J^{(2)}(0)$ , y  $X^{(1)}(0) \leq X^{(2)}(0)$ .

Se denota por

$$T_{ab} = \inf \{t > 0 : X(t) \leq 0\} \mid \left( X^{(l)}(0) = b, K_0^{(l)} = a \right).$$

Entonces si

$$c_i^{(1)} \leq c_k^{(2)}, \quad \forall i \leq k \quad (4.31)$$

$$P^{(1)} \leq_K P^{(2)} \quad (4.32)$$

$$q_k^{(2)} \leq q_i^{(1)} \quad \forall i \leq k \quad (4.33)$$

$$G_{kl}^{(2)} \leq_{st} G_{ij}^{(1)}, \quad \forall i \leq k, j \leq l \quad (4.34)$$

se tiene que  $T_{iu}^{(1)} \leq_{st} T_{jv}^{(2)} \quad \forall i \leq j, u \leq v$ .

**Demostración.** Es consecuencia directa del Teorema 4.2.1.1. ■

Para el caso particular en que ambos procesos tuvieran la misma matriz de transición  $P$  se pueden relajar las condiciones del Teorema 4.2.1.1 e imponer condiciones que sólo involucren a un par de estados  $(i, j)$  tales que  $P_{ij} > 0$ , de la manera siguiente.

**Corolario 4.2.1.2** Sean  $X^{(1)} = (X_t^{(1)})_{t \geq 0}$  y  $X^{(2)} = (X_t^{(2)})_{t \geq 0}$  procesos estocásticos con parametrizaciones  $(c^{(1)}, P, F^{(1)}, G^{(1)})$  y  $(c^{(2)}, P, F^{(2)}, G^{(2)})$  respectivamente, como los descritos en (4.7) y (4.11). Si

$$c_j^{(1)} \leq c_j^{(2)}, \quad \forall j \quad (4.35)$$

y para cada par  $(i, j)$  tal que  $P_{ij} > 0$

$$F_{ij}^{(1)} \leq_{st} F_{ij}^{(2)} \quad (4.36)$$

$$G_{ij}^{(2)} \leq_{st} G_{ij}^{(1)} \quad (4.37)$$

entonces

$$T_{iu}^{(1)} \leq_{st} T_{iv}^{(2)} \quad \forall u \leq v.$$

**Demostración.** El resultado se deriva de la construcción usada en la demostración de Teorema 4.2.1.1 teniendo en cuenta que en este caso se tiene que  $\tilde{K}_n^{(1)}(\omega_1) = \tilde{K}_n^{(2)}(\omega_1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \omega_1 \in \Omega_1$ . Este hecho nos permite concluir (4.23) y (4.24) usando (4.36) y (4.37) en vez de (4.14) y (4.15). El resto de la demostración es análoga. ■

### Una aplicación sencilla

En esta sección se analiza el caso en que el proceso de conteo  $N_t$  se identifica con el proceso semi-markoviano  $J$  cuyo espacio de estados es  $\{0, 1, 2, \dots\}$  y cuya matriz de probabilidades de transición  $P$  es una matriz determinística, en la cual la probabilidad de ir de un estado  $n$  al estado  $n + 1$  es 1.

Sea  $(S_n^{(l)})_{n \geq 0}$  un proceso estocástico con

$$0 = S_0^{(l)} < S_1^{(l)} < \dots$$

tal que

$$H_n^{(l)} = S_n^{(l)} - S_{n-1}^{(l)}, \quad n \in \mathbb{N}_+, \quad l = 1, 2$$

son variables aleatorias independientes con función de distribución

$$F_n^{(l)}, l = 1, 2$$

y sea

$$N_t^{(l)} = \sup \left\{ n \geq 0 : S_n^{(l)} \leq t \right\}, t \geq 0, l = 1, 2$$

el proceso de contaje.

Sea  $(Y_j^{(l)}), j \in \mathbb{N}, l = 1, 2$  una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $(G_j^{(l)}), j \in \mathbb{N}_+, l = 1, 2$ . Sean  $H_n^{(l)}, G_n^{(l)}$  independientes  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ .

Consideremos el proceso  $(X^{(l)}(t))_{t \geq 0}$  con parametrización  $(c^{(l)}, F^{(l)}, G^{(l)})$  con  $l = 1, 2$  definido como sigue:

$$X^{(l)}(t) = X^{(l)}(0) + c^{(l)}t - \sum_{j=1}^{N_t^{(l)}} Y_j^{(l)} \quad (4.38)$$

con  $c^{(l)} > 0, X^{(l)}(0) \geq 0$ , y se define

$$T_u^{(l)} = \inf \left\{ t \geq 0 : X^{(l)}(t) \leq 0 \right\} | X^{(l)}(0) = u \quad (4.39)$$

**Teorema 4.2.1.2** Sean  $X^{(1)} = (X^{(1)}(t))_{t \geq 0}$  y  $X^{(2)} = (X^{(2)}(t))_{t \geq 0}$  procesos estocásticos con parametrizaciones  $(c^{(1)}, F^{(1)}, G^{(1)})$  y  $(c^{(2)}, F^{(2)}, G^{(2)})$  como los descritos en (4.38), con  $X^{(1)}(0) \leq X^{(2)}(0)$ . Si

$$c^{(1)} \leq c^{(2)} \quad (4.40)$$

$$F_n^{(1)} \leq_{st} F_n^{(2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \quad (4.41)$$

$$G_n^{(2)} \leq_{st} G_n^{(1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \quad (4.42)$$

entonces

$$T_u^{(1)} \leq_{st} T_v^{(2)}, \quad \forall u \leq v.$$

**Demostración.** Sean  $X^{(1)}$  y  $X^{(2)}$  como los descritos en el enunciado. Se debe probar que  $T_u^{(1)} \leq_{st} T_u^{(2)}$  para todo  $u \leq v$ .

Defínase:

$$T_u^{*(l)} = \inf \left\{ S_n^{(l)} : X_{S_n^{(l)}}^{(l)} \leq 0 \right\} | X_{S_0^{(l)}}^{(l)} = u, \quad l = 1, 2. \quad (4.43)$$

Obsérvese que el hecho de que  $X^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$ , sea una secuencia no decreciente en  $[S_n^{(l)}, S_{n+1}^{(l)})$ , proporciona que:

$$T_u^{(l)} = T_u^{*(l)} \quad (4.44)$$

por lo tanto, es suficiente probar que  $T_u^{*(1)} \leq_{st} T_v^{*(2)} \quad \forall u \leq v$ .

Para ello, se construyen emparejamientos

$$\left( \tilde{S}_n^{(1)}, \tilde{S}_n^{(2)} \right) \quad y \quad \left( \tilde{X}_n^{(1)}, \tilde{X}_n^{(2)} \right)$$

de

$$\left( S_n^{(1)}, S_n^{(2)} \right) \quad y \quad \left( X_{S_n^{(1)}}^{(1)}, X_{S_n^{(2)}}^{(2)} \right)$$

dado  $\left( X_{S_n^{(1)}}^{(1)}, X_{S_n^{(2)}}^{(2)} \right) = (u, v)$  tales que

$$\tilde{X}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{X}_n^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}$$

y

$$\tilde{S}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{S}_n^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}$$

Para realizar esto, se usan secuencias independientes  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  y  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  de v.as.i.i.d. de acuerdo a una ley de probabilidad  $U(0, 1)$  definidas en el espacio común de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Sean para  $\omega \in \Omega$  y  $l = 1, 2$ :

$$\tilde{H}_n^{(l)}(\omega) = \left[ F_n^{(l)} \right]^{-1} (U_n(\omega)), \quad n \in \mathbb{N}_+ \quad (4.45)$$

$$\tilde{Y}_n^{(l)}(\omega) = \left[ G_n^{(l)} \right]^{-1} (V_n(\omega)), \quad n \in \mathbb{N}_+ \quad (4.46)$$

Sea para  $\omega \in \Omega$  y  $l = 1, 2$ :

$$\tilde{X}_n^{(l)}(\omega) = \tilde{X}_0^{(l)}(\omega) + c^{(l)} \sum_{m=1}^n \tilde{H}_m^{(l)}(\omega) - \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(l)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.47)$$

con  $\tilde{X}_0^{(1)}(\omega) = u$  y  $\tilde{X}_0^{(2)}(\omega) = v$ , el proceso de Markov subyacente de  $(X_t^{(l)})_{t \geq 0}$ , emparejamiento de  $X_{S_n}^{(l)}$   $l = 1, 2$ .

Usando (4.41) y (4.42) se tiene por construcción que:

$$\tilde{H}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{H}_n^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.48)$$

$$\tilde{Y}_n^{(1)}(\omega) \geq \tilde{Y}_n^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.49)$$

Por otra parte, de (4.48) y (4.49) se tiene que:

$$\tilde{S}_n^{(1)}(\omega) = \sum_{m=1}^n \tilde{H}_m^{(1)}(\omega) \leq \sum_{m=1}^n \tilde{H}_m^{(2)}(\omega) = \tilde{S}_n^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.50)$$

$$\sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(1)}(\omega) \geq \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.51)$$

lo que conduce junto con la condición (4.40) a:

$$\tilde{X}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{X}_n^{(2)}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N} \quad (4.52)$$

Si se denota por:

$$\tilde{T}_u^{*(l)} = \inf \left\{ \tilde{S}_n^{(l)} : \tilde{X}_n^{(l)} \leq 0 \right\}, \quad l = 1, 2 \quad (4.53)$$

siendo  $\tilde{T}_u^{*(1)}$  y  $\tilde{T}_u^{*(2)}$  un emparejamiento de  $(T_u^{*(1)}, T_u^{*(2)})$  se tiene, en virtud de (4.50) y (4.52) que

$$\tilde{T}_u^{*(1)}(\omega) \leq \tilde{T}_u^{*(2)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \quad (4.54)$$

como se pretendía. ■

#### 4.2.2. Procesos estocásticos supuesto que la cantidad de la indemnización depende del ambiente y del tiempo entre reclamaciones

Sea la siguiente estructura para el núcleo del proceso:

$$Q_{ij}(dx, dy) = p_{ij}F_{ij}(dx)G_{ijx}(dy) \quad (4.55)$$

donde

- $p_{ij} = Q_{ij}(\infty, \infty) = P[K_{n+1} = j | K_n = i], n \in \mathbb{N}_+, i, j \in I$
- $F_{ij}$  es la función de distribución de  $H_n | (K_{n-1}, K_n) = (i, j), n \in \mathbb{N}_+, i, j \in I$
- $G_{ijx}$  es la función de distribución de  $Y_n | (K_{n-1}, K_n, H_n) = (i, j, x), n \in \mathbb{N}_+, i, j \in I, x \in \mathbb{R}$ .

Esto implica que los pares  $(H_1, Y_1), (H_2, Y_2), (H_3, Y_3), \dots$  son condicionalmente independientes dados  $(K_0, K_1, \dots)$  es decir, condicionalmente independientes dada la evolución del proceso  $J$ .

La parametrización de este proceso es  $(c, P, F, G)$ , donde  $c = (c_i)_{i \in I}$ ,  $P = (p_{ij})_{i, j \in I}$ ,  $F = (F_{ij})_{i, j \in I}$  y  $G = (G_{ijx})_{i, j \in I, x \in \mathbb{R}_+}$ .

**Teorema 4.2.2.1** Sean  $X^{(1)} = (X^{(1)}(t))_{t \geq 0}$  y  $X^{(2)} = (X^{(2)}(t))_{t \geq 0}$  procesos estocásticos con parametrizaciones  $(c^{(1)}, P^{(1)}, F^{(1)}, G^{(1)})$  y  $(c^{(2)}, P^{(2)}, F^{(2)}, G^{(2)})$ , respectivamente, como las descritas en (4.7) y (4.55).

Denótese por

$$T_{ab}^{(l)} = \inf \{t > 0 : X(t) \leq 0\} \mid (X^{(l)}(0) = b, K_0^{(l)} = a).$$

Sean  $J^{(1)}(0) \leq J^{(2)}(0)$  y  $X^{(1)}(0) \leq X^{(2)}(0)$ .

Si

$$c_i^{(1)} \leq c_k^{(2)}, \quad \forall i \leq k \tag{4.56}$$

$$P^{(1)} \leq_K P^{(2)} \tag{4.57}$$

$$F_{ij}^{(1)} \leq_{st} F_{kl}^{(2)}, \quad \forall i \leq k, j \leq l \tag{4.58}$$

$$G_{kly}^{(2)} \leq_{st} G_{ijx}^{(1)}, \quad \forall i \leq k, j \leq l, x \leq y \tag{4.59}$$

entonces

$$T_{iu}^{(1)} \leq_{st} T_{jv}^{(2)} \quad \forall i \leq j, u \leq v.$$

**Demostración.** Sean  $X^{(1)}$  y  $X^{(2)}$  procesos como los descritos en el enunciado. Se debe probar que  $T_{iu}^{(1)} \leq_{st} T_{jv}^{(2)}$  para todo  $i \leq j, u \leq v$ .

Se define:

$$T_{iu}^{*(l)} = \inf \left\{ S_n^{(l)} : X_{S_n}^{(l)} \leq 0 \right\} \mid (X_{S_0}^{(l)} = u, K_0^{(l)} = i), \quad l = 1, 2. \tag{4.60}$$

Obsérvese que del hecho de que  $X^{(l)}, l = 1, 2$ , sea una secuencia no decreciente en  $(S_n^{(l)}, S_{n+1}^{(l)})$ , proporciona que:

$$T_{iu}^{(l)} = T_{iu}^{*(l)} \tag{4.61}$$

de este modo, es suficiente probar que  $T_{iu}^{*(1)} \leq_{st} T_{jv}^{*(2)} \quad \forall u \leq v, i \leq j$ .

Para ello, se construyen emparejamientos

$$\left( \tilde{S}_n^{(1)}, \tilde{S}_n^{(2)} \right) \quad y \quad \left( \tilde{X}_{\tilde{S}_n^{(1)}}^{(1)}, \tilde{X}_{\tilde{S}_n^{(2)}}^{(2)} \right)$$

de

$$\left( S_n^{(1)}, S_n^{(2)} \right) \quad y \quad \left( X_{S_n^{(1)}}^{(1)}, X_{S_n^{(2)}}^{(2)} \right)$$

dato  $\left( X_{S_0^{(1)}}^{(1)}, X_{S_0^{(2)}}^{(2)} \right) = (u, v)$ , en un espacio de probabilidad común

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \Lambda_3 = (\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3, P_1 \times P_2 \times P_3)$$

tal que  $\tilde{S}_n^{(1)}(\omega) \leq \tilde{S}_n^{(2)}(\omega)$  y  $\tilde{X}_{\tilde{S}_n^{(1)}}(\omega) \leq \tilde{X}_{\tilde{S}_n^{(2)}}(\omega)$ ,  $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ .

Para este fin se usan secuencias independientes  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  en  $\Lambda_1$ ,  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  en  $\Lambda_2$  y  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$  en  $\Lambda_3$ , de v.as.i.i.d. según una  $U(0, 1)$ .

En detalle,  $\tilde{K}_0^{(1)}(\omega_1) = i$  y  $\tilde{K}_0^{(2)}(\omega_1) = j$ .

Para  $l = 1, 2$ :

$$\tilde{K}_n^{(l)}(\omega_1) = \left[ P_{\tilde{K}_{n-1}^{(l)}}^{(l)} \right]^{-1} (U_n(\omega_1)), \quad n \in \mathbb{N}_+, \omega_1 \in \Omega_1 \quad (4.62)$$

$$\tilde{H}_n^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = \left[ F_{(\tilde{K}_{n-1}^{(l)}(\omega_1), \tilde{K}_n^{(l)}(\omega_1))}^{(l)} \right]^{-1} (V_n(\omega_2)), \quad n \in \mathbb{N}_+, \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2 \quad (4.63)$$

$$\tilde{Y}_n^{(l)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left[ G_{(\tilde{K}_{n-1}^{(l)}(\omega_1), \tilde{K}_n^{(l)}(\omega_1), \tilde{H}_n^{(l)}(\omega_1, \omega_2))} \right]^{-1} (W_n(\omega_3)), \quad (4.64)$$

$n \in \mathbb{N}, \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, 3$ .

Sean  $\tilde{X}_0^{(1)} = u$ ,  $\tilde{X}_0^{(2)} = v$  y defínase:

$$\tilde{X}_n^{(l)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \tilde{X}_0^{(l)} + \sum_{m=0}^{n-1} c_{\tilde{K}_m^{(l)}}^{(l)} \tilde{H}_{m+1}(\omega_1, \omega_2) - \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(l)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (4.65)$$

$n \in \mathbb{N}$ ,  $l = 1, 2$ ,  $\omega_i \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  como el proceso de Markov subyacente de  $(X_{S_n^{(l)}}^{(l)})_{n \geq 0}$ ,  $l = 1, 2$ .

Usando (4.57), (4.58) y (4.59) se tiene respectivamente, por construcción:

$$\tilde{K}_n^{(1)}(\omega_1) \leq \tilde{K}_n^{(2)}(\omega_1), \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1, n \in \mathbb{N} \quad (4.66)$$

$$\tilde{H}_n^{(1)}(\omega_1, \omega_2) \leq \tilde{H}_n^{(2)}(\omega_1, \omega_2), \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, n \in \mathbb{N} \quad (4.67)$$

y

$$\tilde{Y}_n^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \geq \tilde{Y}_n^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, 3, n \in \mathbb{N} \quad (4.68)$$

Por otro lado, de (4.56), (4.67) y (4.68) se tiene que:

$$\tilde{S}_n^{(1)}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=1}^n \tilde{H}_m^{(1)}(\omega_1, \omega_2) \leq \sum_{m=1}^n \tilde{H}_m^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \tilde{S}_n^{(2)}(\omega_1, \omega_2), \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, n \in \mathbb{N} \quad (4.69)$$

$$\sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \geq \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, 3, n \in \mathbb{N} \quad (4.70)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} c_{\tilde{K}_m^{(1)}}^{(1)} \tilde{H}_{m+1}^{(1)}(\omega_1, \omega_2) \leq \sum_{m=0}^{n-1} c_{\tilde{K}_m^{(2)}}^{(2)} \tilde{H}_{m+1}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, n \in \mathbb{N} \quad (4.71)$$

lo que conduce a:

$$\tilde{S}_n^{(1)}(\omega_1, \omega_2) \leq \tilde{S}_n^{(2)}(\omega_1, \omega_2), \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, n \in \mathbb{N} \quad (4.72)$$

$$\tilde{X}_n^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \leq \tilde{X}_n^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \forall \omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2, 3, n \in \mathbb{N} \quad (4.73)$$

Si se denota por:

$$\tilde{T}^{*(l)} = \inf \left\{ \tilde{S}_n^{(l)} : \tilde{X}_{\tilde{S}_n^{(l)}}^{(l)} \leq 0 \right\}, \quad l = 1, 2 \quad (4.74)$$

se tiene, en virtud de (4.72) y (4.73),

$$\tilde{T}^{*(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \leq \tilde{T}^{*(2)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_l \in \Omega_l, l = 1, 2, 3 \quad (4.75)$$

lo que proporciona

$$T_{iu}^{*(1)} =_{st} \tilde{T}^{*(1)} \leq_{st} \tilde{T}^{*(2)} =_{st} T_{jv}^{*(2)}. \quad (4.76)$$

se concluye así que  $T_{iu}^{*(1)} \leq T_{jv}^{*(2)}$ ,  $\forall i \leq j, u \leq v$  como se quería demostrar. ■

### 4.2.3. Comparación de probabilidades de ruina

Se presenta un algoritmo que permite simular dos secuencias de variables aleatorias como las descritas en (4.7), bajo las condiciones del Teorema 4.2.1.1.

<p><b>Input:</b> Secuencias independientes de v.as. independientes <math>U(0, 1)</math>: <math>(U_n)_{n \in \mathbb{N}_+}</math>, <math>(V_n)_{n \in \mathbb{N}_+}</math>, <math>(W_n)_{n \in \mathbb{N}_+}</math>. Valores <math>x^{(1)}</math> y <math>x^{(2)}</math>, <math>f^{(1)}</math> y <math>f^{(2)}</math> con <math>x^{(1)} \leq x^{(2)}</math>, <math>f^{(1)} \leq f^{(2)}</math>.</p> $\tilde{X}_0^{(1)} = x^{(1)}$ $\tilde{X}_0^{(2)} = x^{(2)}$ $\tilde{K}_0^{(1)} = f^{(1)}$ $\tilde{K}_0^{(2)} = f^{(2)}$ <p><b>for</b> <math>n = 0, \dots, N</math> <b>do</b></p> <p style="padding-left: 2em;"><b>for</b> <math>l = 1, 2</math> <b>do</b></p> $\tilde{K}_{n+1}^{(l)} = \left[ P_{(\tilde{K}_n^{(l)}, \cdot)}^{(l)} \right]^{-1} (U_{n+1})$ $\tilde{H}_{n+1}^{(l)} = \left[ F_{(\tilde{K}_n^{(l)}, \tilde{K}_{n+1}^{(l)})}^{(l)} \right]^{-1} (V_{n+1})$ $\tilde{Y}_{n+1}^{(l)} = \left[ G_{(\tilde{K}_n^{(l)}, \tilde{K}_{n+1}^{(l)})}^{(l)} \right]^{-1} (W_{n+1})$ $\tilde{X}_n^{(l)} = \tilde{X}_0^{(l)} + \sum_{m=0}^{n-1} c_{\tilde{K}_m^{(l)}}^{(l)} \tilde{H}_{m+1}^{(l)} - \sum_{m=1}^n \tilde{Y}_m^{(l)}$ <p style="padding-left: 2em;"><b>end for</b></p> <p><b>end for</b></p> <p><b>Output:</b> Dos secuencias <math>\tilde{X}^{(1)}</math> y <math>\tilde{X}^{(2)}</math> tales que</p> $T_{iu}^{(1)} \leq_{st} T_{jv}^{(2)} \quad \forall i \leq j, u \leq v$
--

Figura 4.1: Algoritmo de simulación de secuencias de variables aleatorias como las definidas en (4.7), bajo las condiciones del Teorema 4.2.1.1.

El siguiente consiste en mostrar un algoritmo que permita estimar la diferencia de las probabilidades de ruina durante un tiempo dado  $T$ , de dos procesos que satisfacen las

condiciones del Teorema 4.2.1.1, es decir, se quiere estimar:  $\psi^{(1)}(u, T) - \psi^{(2)}(u, T)$ . Por simplicidad, se denotará por  $p^{(l)}$  la probabilidad de ruina del proceso  $l$  en el intervalo de tiempo bajo consideración, por lo tanto:  $p^{(l)} = \psi^{(l)}(u, T)$ , para  $l = 1, 2$ .

Para este propósito se simulan  $M$  replicas de cada proceso. Sea  $X_r^{(l)}$ , para  $l = 1, 2$  y  $r = 1, \dots, M$ , la réplica  $r$  del proceso  $l$ . Sea

$$T_r^{(l)} = \inf \left\{ t \geq 0 : X_r^{(l)}(t) \leq 0 \right\}$$

el tiempo para la ruina de la réplica  $r$  del proceso  $l$ , y  $R_r^{(l)} = \mathbf{1}_{\{T_r^{(l)} \leq T\}}$  una variable que indica si el proceso  $X_r^{(l)}$  alcanza la ruina en el intervalo  $[0, T]$ .

El estimador de  $p^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$ , que se denota por  $P^{(l)}$ , es la proporción de réplicas en las que ha acontecido la ruina, es decir:

$$P^{(l)} = \frac{\sum_{r=1}^M R_r^{(l)}}{M}$$

y el estimador para la diferencia de esas probabilidades es:

$$P = P^{(1)} - P^{(2)}$$

El método usado en la demostración del Teorema 4.2.1.1 se basa en simulaciones dependientes de las variables lo que proporcionará una menor varianza para el estimador  $P$ :

$$Var(P) = \frac{P \cdot (1 - P)}{M}$$

en relación a una simulación independiente de las mismas.

Para el algoritmo se necesita una variable de control  $I_r^{(l)}$  que tendrá valor 1 cuando se deba continuar con la simulación y 0 e.o.c.,  $l$  denota el proceso  $l = 1, 2$  y  $r = 1, \dots, M$  el número de la réplica.

**Input:** Secuencias independientes de v.as.i.i.d.  $U(0,1)$ :  $(U_{r,n})_{n \in \mathbb{N}_+}$ ,  $(V_{r,n})_{n \in \mathbb{N}_+}$

**for**  $r = 1, \dots, M$  **do**

$(W_{r,n})_{n \in \mathbb{N}_+}$ ,  $r = 1, \dots, M$ . Valores  $T$ ,  $x$ ,  $f^{(1)}$  y  $f^{(2)}$  con  $f^{(1)} \leq f^{(2)}$ .

$\tilde{X}_{r,0}^{(1)} = x$ ,  $\tilde{X}_{r,0}^{(2)} = x$

$\tilde{K}_{r,0}^{(1)} = f^{(1)}$ ,  $\tilde{K}_{r,0}^{(2)} = f^{(2)}$

$I_r^{(1)} = 1$ ,  $I_r^{(2)} = 1$ ,  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 0$

**while**  $\max\{I_r^{(1)}, I_r^{(2)}\} = 1$  **do**

**for**  $l = 1, 2$  **do**

**if**  $I_r^{(l)} = 1$  **then**

$$\tilde{K}_{r,n_l+1}^{(l)} = \left[ P_{\tilde{K}_{r,n_l}^{(l)}}^{(l)} \right]^{-1} (U_{r,n_l+1})$$

$$\tilde{H}_{r,n_l+1}^{(l)} = \left[ F_{(\tilde{K}_{r,n_l}^{(l)}, \tilde{K}_{r,n_l+1}^{(l)})}^{(l)} \right]^{-1} (V_{r,n_l+1})$$

$$\tilde{Y}_{r,n_l+1}^{(l)} = \left[ G_{(\tilde{K}_{r,n_l}^{(l)}, \tilde{K}_{r,n_l+1}^{(l)})}^{(l)} \right]^{-1} (W_{r,n_l+1})$$

$$\tilde{S}_{r,n_l+1}^{(l)} = \tilde{S}_{r,n_l}^{(l)} + \tilde{H}_{r,n_l+1}^{(l)}$$

$$\tilde{X}_{r,n_l+1}^{(l)} = \tilde{X}_{r,n_l}^{(l)} + c_{\tilde{K}_{r,n_l}^{(l)}}^{(l)} \tilde{H}_{r,n_l+1}^{(l)} - \tilde{Y}_{r,n_l+1}^{(l)}$$

$n_l = n_l + 1$

**end if**

**if**  $\tilde{S}_{r,n_l}^{(l)} \leq T$  and  $\tilde{X}_{r,n_l}^{(l)} \leq 0$  **then**  $R_r^{(l)} = 1$  **end if**

**if**  $\tilde{S}_{r,n_l}^{(l)} > T$  or  $R_r^{(l)} = 1$  **then**  $I_r^{(l)} = 0$  **end if**

**end for**

**end while**

**end for**

**for**  $l = 1, 2$  **do**

$$P^{(l)} = \frac{\sum_{r=1}^M R_r^{(l)}}{M}$$

**end for**

$$P = P^{(1)} - P^{(2)}$$

$$\hat{V}_d = \frac{P*(1-P)}{M}$$

**Output:** El estimador  $P$  de la diferencia de las probabilidades de ruina de los dos procesos bajo consideración y su varianza aproximada  $\hat{V}_d$

Figura 4.2: Algoritmo para estimar la diferencia de las probabilidades de ruina durante un tiempo dado  $T$ , de procesos que satisfacen las condiciones del Teorema 4.2.1.1.

Para  $l = 1, 2$ ,  $P^{(l)}$  representa la proporción de réplicas en las que ocurrió la ruina en el proceso  $X^{(l)}$  hasta el instante  $T$ . El número de réplicas del proceso  $X^{(l)}$  con  $l = 1, 2$  en las que acontece la ruina hasta el instante  $T$ , tiene una distribución Binomial, es decir,  $M \cdot P^{(l)}$  es  $Bi(M, p^{(l)})$ . Por otro lado,  $R_r^{(1)} - R_r^{(2)}$  tiene una distribución  $Be(p^{(1)} - p^{(2)})$  y por tanto,  $M \cdot P$  es  $Bi(M, P)$

Como se comentó anteriormente, el método usado en el Teorema 4.2.1.1 conduce a un estimador de menor varianza con respecto al que se obtendría si las simulaciones realizadas para estimar  $P^{(1)}$  y  $P^{(2)}$  fueran independientes. Efectivamente, sean

$$V_d = \frac{(p^{(1)} - p^{(2)})(1 - (p^{(1)} - p^{(2)}))}{M}$$

y

$$V_i = \frac{p^{(1)}(1 - p^{(1)}) + p^{(2)}(1 - p^{(2)})}{M}$$

las varianzas del estimador en el caso de simulaciones dependientes e independientes, respectivamente y sea

$$E = \frac{\sqrt{V_i} - \sqrt{V_d}}{\sqrt{V_i}}$$

En la siguiente tabla se muestra un ejemplo numérico de la reducción que se obtiene al aplicar el método de simulación dependiente. En cada entrada de la tabla se muestran los siguientes tres valores:  $\sqrt{M \cdot V_d}$ ,  $\sqrt{M \cdot V_i}$  y  $E$  en porcentaje:

$p^{(2)} \backslash p^{(1)}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0.000 0.424 100 %	0.300 0.500 40.0 %	0.400 0.5477 27.0 %	0.458 0.5745 20.2 %	0.490 0.5831 16.0 %	0.500 0.5745 13.0 %	0.490 0.5477 10.6 %	0.458 0.500 8.3 %	0.400 0.4243 5.7 %
0.2	- - -	0.000 0.566 100 %	0.300 0.608 50.7 %	0.400 0.632 36.7 %	0.458 0.640 28.4 %	0.490 0.632 22.5 %	0.500 0.608 17.8 %	0.490 0.566 13.4 %	0.458 0.500 8.3 %
0.3	- - -	- - -	0.000 0.648 100 %	0.300 0.671 55.3 %	0.400 0.678 41.0 %	0.458 0.671 31.7 %	0.490 0.648 24.4 %	0.500 0.6083 17.8 %	0.490 0.548 10.6 %
0.4	- - -	- - -	- - -	0.000 0.693 100 %	0.300 0.700 57.1 %	0.400 0.693 42.3 %	0.458 0.671 31.7 %	0.490 0.632 22.5 %	0.500 0.575 13.0 %
0.5	- - -	- - -	- - -	- - -	0.000 0.707 100 %	0.300 0.700 57.1 %	0.400 0.678 41.0 %	0.458 0.640 28.4 %	0.490 0.583 16.0 %
0.6	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0.000 0.693 100 %	0.300 0.671 55.3 %	0.400 0.632 36.7 %	0.458 0.574 20.2 %
0.7	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0.000 0.648 100 %	0.300 0.608 50.7 %	0.400 0.548 27.0 %
0.8	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0.000 0.566 100 %	0.300 0.500 40.0 %
0.9	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0.000 0.424 100 %

Figura 4.3: Reducción que se obtiene al aplicar el método de simulación dependiente.

Como se comprueba, los valores de  $\sqrt{V_i}$  son mayores que los correspondientes  $\sqrt{V_d}$  obtenidos con simulación dependiente realizada según la demostración del Teorema 4.2.1.1. El caso concreto en el que  $p^{(1)} = p^{(2)}$  proporciona una gran reducción, ya que se obtiene con el método expuesto un valor  $V_d = 0$ , mientras que los valores en el caso independiente son estrictamente positivos.

Con este método se pueden construir intervalos de confianza de menor amplitud de la forma:

$$IC(1 - \alpha) = \left( P \pm \Phi(1 - \alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{P * (1 - P)}{M}} \right)$$

### 4.3. Ordenación estocástica para el modelo financiero de Cox y Rubinstein

En esta sección se analiza la ordenación estocástica en excedencia de nivel  $(* - lc)$  aplicada a procesos de Cox y Rubinstein. Se describe el modelo y se establecen las condiciones suficientes para que exista dominancia estocástica en excedencia de nivel entre procesos que siguen el patrón anterior.

#### 4.3.1. Introducción y descripción del modelo

Se observa el valor de una opción de mercado en  $n$  instantes de tiempo, de forma que al comienzo del primer período la opción posee un valor inicial  $S_0$  y al final del mismo, sólo puede tomar dos posibles valores:  $aS_0$  y  $dS_0$  con probabilidades  $p$  y  $1 - p$  respectivamente, siendo  $0 < d < 1 < a$  y  $p \in [0, 1]$ . La opción tiene el mismo tipo de evolución en cada período, siendo ésta independiente del pasado.

Sean  $\xi_i$ ,  $i \in \mathbb{N}_+$  v.as.independientes tales que:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ 0, & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

y sea  $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  con distribución  $Bi(n, p)$ .

El valor de la opción al final del período  $n$  es

$$Y_n = a^{X_n} d^{n-X_n} S_0 \quad (4.77)$$

y

$$P[Y_n = a^j d^{n-j} S_0] = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad (4.78)$$

con  $j = 0, 1, \dots, n$ .

### 4.3.2. Ordenación en excedencia de nivel. Conceptos fundamentales

La ordenación estocástica en excedencia de nivel propuesta por Irle y Gani, es adecuada para tratar situaciones en la que se está interesado en comparar los tiempos aleatorios en que los procesos estocásticos tardan en exceder un cierto nivel.

**Definición 4.3.2.1** *Se dice que un proceso estocástico  $X$  es menor que el proceso  $Y$  en el sentido de excedencia de nivel si, estocásticamente,  $X$  tarda más tiempo que  $Y$  en exceder cualquier nivel.*

Para establecer una definición matemática del concepto anterior, se necesitan previamente algunas definiciones.

Sean  $(X_t)_t$  e  $(Y_t)_t$  procesos estocásticos con parámetro temporal  $t$  que puede variar en un conjunto discreto o continuo. Se supone que ambos procesos tienen el mismo espacio de estados  $I$  y que parten del mismo estado inicial. En el caso continuo se exigirá que las trayectorias de los mismos sean continuas por la derecha. Entonces, para un estado inicial común  $i$  y  $l \in I$ :

$$S_{i,l} = \inf \{t \geq 0 : X_t \geq l\} \quad T_{i,l} = \inf \{t \geq 0 : Y_t \geq l\}$$

con  $\inf \emptyset = \infty$ , y para  $i \geq l$ ,  $S_{i,l} = T_{i,l} = 0$ .

La definición que sigue se debe a Irle:

**Definición 4.3.2.2** *Se dice que el proceso  $(X_t)_t$  se encuentra en un nivel de paso inferior a  $(Y_t)_t$  y se denota  $(X_t)_t \leq_{lc} (Y_t)_t$ , si para el estado inicial común  $i$  se tiene que  $S_{i,l} \geq_{FSD} T_{i,l}$*

La ordenación en excedencia de nivel (level-crossing) se basa en la ordenación de los tiempos de primer paso en el sentido estocástico usual. Esta definición, extendida por Pacheco y Ferreira en 2005, permite la ordenación en excedencia de nivel en el sentido  $*$ , donde el orden asociado  $\leq_*$  es un orden estocástico entre v.as. y se exige la ordenación entre los tiempos de primer paso (o de llegada a ciertas barreras) en el sentido estocástico  $\leq_*$ .

**Definición 4.3.2.3** *Se dice que un orden estocástico  $\leq_*$  es integral si, dadas dos v.as.  $X$  e  $Y$ ,*

$$X \leq_* Y \Leftrightarrow E[g(X)] \leq E[g(Y)], \quad \forall g \in G_*$$

*siempre que las esperanzas existan y siendo  $G_*$  un conjunto de funciones reales.*

Más concretamente, los órdenes estocásticos integrales  $\leq_*$  son tales que  $G_*$  contiene sólo funciones crecientes en  $\mathbb{R}_+$  y además cerradas bajo la operación de convolución, es decir, órdenes estocásticos integrales para v.a. positivas con funciones crecientes y cerradas bajo convoluciones, u órdenes *IPICC* (integral stochastic orders for positive random variables with increasing functions closed for convolution).

Obsérvese que los órdenes *IPICC* incluyen, en particular, el orden FSD, SSD, el orden según transformada de Laplace *Lt*, el exponencial *exp*, el de los momentos *M*, el del valor esperado *EV* y el de la función generatriz de momentos *MG*. En estos casos,  $G_{FSD}$  es el conjunto de funciones reales crecientes,  $G_{SSD}$  es el conjunto de funciones convexas crecientes,  $G_{Lt} = \{g_s, s > 0 : g_s(x) = -e^{-sx}\}$ ,  $G_{exp} = \{g_s, s > 0 : g_s(x) = -e^{sx}\}$ ,  $G_M$  es el conjunto de funciones potenciales enteras,  $G_{EV}$  es un conjunto que sólo contiene la función identidad y  $G_{MG} = \{g_s, 0 < s < 1 : g_s(x) = s^x\}$ .

Sea  $\Gamma$  cualquiera de los siguientes conjuntos  $\mathbb{N}, \mathbb{N}_+$  o  $\mathbb{R}_+$ . Dado un espacio de estados  $I$  de números reales,  $A \subseteq \mathbb{R}$ , e  $y \in I$ , se denotará por  $\bar{I} = I - \sup I$ ,  $I^A = I \cap A$ ,  $I^{\leq y} := I^{(-\infty, y]}$  y  $I^{\geq y} := I^{[y, \infty)}$ . Además, si  $W = (W_t)_{t \in \Gamma}$  es un proceso estocástico con espacio de estados  $I$ , se denotarán por  $R_y^W$  y  $S_y^W$  los tiempos de primer paso (o de llegada) al conjunto de los valores menores o iguales que  $y$  o mayores o iguales que  $y$ , es decir,

$$R_y^W = \inf \{t \in \Gamma : W_t \leq y\} \quad y \quad S_y^W = \inf \{t \in \Gamma : W_t \geq y\}$$

donde  $\inf \emptyset = \infty$ . Se denota por  $S_{x,y}^W$  al tiempo de llegada al conjunto de valores mayores o iguales que  $y$  partiendo del estado  $x$ .

**Definición 4.3.2.4** Sean  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \Gamma}$  procesos estocásticos con espacio ordenado de estados común  $I$  y sea  $\leq_*$  un orden estocástico de v.as. Se dice que  $X$  es menor que  $Y$  según la ordenación en excedencia de nivel en el sentido  $*$  y se denota  $X \leq_{*lc} Y$ , si, para cualquier estado inicial común  $x$ ,  $S_{x,y}^Y \leq_* S_{x,y}^X$ , para todos  $x, y \in I$ .

Con una notación similar a lo anterior, si  $W = (W_t)_{t \in \Gamma}$  es un proceso estocástico con espacio de estados ordenado  $I$ , se denota por  $W^{\leq y}$  y  $W^{\geq y}$ ,  $y \in I$ , a la restricción del proceso  $W$  al conjunto de estados  $I^{\leq y}$  e  $I^{\geq y}$  respectivamente, de tal manera que el estado  $y$  se convierte en absorbente y todos los estados de  $W$  mayores o iguales que  $y$  o, respectivamente, menores o iguales que  $y$ , colapsan en  $y$ . Esto es,

$$W_t^{\leq y} = \begin{cases} W_t, & \text{si } t < S_y^W \\ y, & \text{si } t \geq S_y^W \end{cases}$$

y

$$W_t^{\geq y} = \begin{cases} W_t, & \text{si } t < R_y^W \\ y, & \text{si } t \geq R_y^W \end{cases}$$

Los siguientes resultados se deben a A. Pacheco y F. Ferreira (2005) (a).

**Lema 4.3.2.1** Si  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \Gamma}$  son procesos estocásticos con espacio ordenado de estados común  $I$ ,  $y \leq_*$  es un orden estocástico de v.as. Entonces

$$X \leq_{*lc} Y \Leftrightarrow X^{\leq y} \leq_{*lc} Y^{\leq y}$$

para todo  $y \in I$ .

**Demostración.** Si  $W = (W_t)_{t \in \Gamma}$  es un proceso estocástico con espacio ordenado de estados  $I$ , entonces, para cada  $x, y \in I$ ,  $S_{x,y}^W = S_{x,y}^{W^{\leq z}}$  para todo  $z \geq \max(x, y)$ .

Como consecuencia, si  $X = (X_t)_{t \in \Gamma}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \Gamma}$  son procesos estocásticos con espacio ordenado de estados común  $I$ , y  $\leq_*$  es un orden estocástico de v.as., entonces

$$\begin{aligned} X \leq_{*-lc} Y &\Leftrightarrow S_{x,y}^Y \leq_* S_{x,y}^X, \forall x, y \in I \\ &\Leftrightarrow S_{x,y}^{Y \leq z} \leq_* S_{x,y}^{X \leq z}, \forall x, y \in I, z \in I^{\geq \max(x,y)} \\ &\Leftrightarrow S_{x,y}^{Y \leq z} \leq_* S_{x,y}^{X \leq z}, \forall z \in I, x, y \in I^{\leq z} \\ &\Leftrightarrow X^{\leq z} \leq_{*-lc} Y^{\leq z}, \forall z \in I. \end{aligned}$$

■

**Lema 4.3.2.2** Sean  $X$  e  $Y$  v.as. definidas en un espacio de probabilidad común  $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ , con  $\Lambda_i = (\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ,  $i = 1, 2$ , tales que  $X(\omega_1, \cdot)$  e  $Y(\omega_1, \cdot)$  son v.as. en  $\Lambda_2$  para cada  $\omega_1 \in \Omega_1$ .

Entonces  $X \leq_* Y$  para cada orden estocástico integral  $\leq_*$  tal que

$$X(\omega_1, \cdot) \leq_* Y(\omega_1, \cdot), \Lambda_1 - c.s \quad (4.79)$$

**Demostración.** Sea  $\leq_*$  un orden estocástico integral con conjunto de funciones asociadas  $G_*$ . Entonces, para  $W = X, Y$  y  $g \in G_*$  se tiene que

$$E_\Lambda[g(W)] = \int_{\Omega_1} E_{\Lambda_2}[g(W(\omega_1, \cdot))] P_1(d\omega_1),$$

donde, para cada  $\omega_1 \in \Omega_1$ ,

$$E_{\Lambda_2}[g(W(\omega_1, \cdot))] = \int_{\Omega_2} g(W(\omega_1, \omega_2)) P_2(d\omega_2).$$

Como, en vista de (4.79),  $E_{\Lambda_2}[g(X(\omega_1, \cdot))] \leq E_{\Lambda_2}[g(Y(\omega_1, \cdot))]$ ,  $\Lambda_1 - c.s.$ , entonces  $E_\Lambda[g(X)] \leq E_\Lambda[g(Y)]$  para cualquier  $g \in G_*$ , es decir,  $X \leq_* Y$ . ■

Los principales resultados para la ordenación de SMP, CTMC y DTMC en el sentido  $*-lc$ , se enuncian a continuación. Para las demostraciones ver Ferreira y Pacheco (2005) (a) y (b), (2007).

**Teorema 4.3.2.1** Sean  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  SMPs con espacio de estados  $I$  y parametrizaciones  $(\mathbf{P}^X, \mathbf{F}^X)$  y  $(\mathbf{P}^Y, \mathbf{F}^Y)$  respectivamente, tal que  $X$  es regular inferior. Sea  $\leq_*$  un orden estocástico de la clase IPICC.

Si

$$\mathbf{P}_{i..}^X \leq_{FSD} \mathbf{P}_{j..}^Y, \quad i, j \in \bar{I}, i \leq j \quad (4.80)$$

y

$$F_{(a,b)}^X \geq_* F_{(c,d)}^Y, \quad (4.81)$$

para todos  $a, c \in \bar{I}, b, d \in I, a \leq c, b \leq d$  y  $P_{ab}^X P_{cd}^Y > 0$ . Entonces  $X \leq_{*-lc} Y$ .

**Teorema 4.3.2.2** Sean  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  e  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  SMPs con espacio de estados  $I$  y parametrizaciones  $(\mathbf{P}^X, \mathbf{F}^X)$  y  $(\mathbf{P}^Y, \mathbf{F}^Y)$  respectivamente, tal que

$$\mathbf{P}_{i..}^X \leq_{FSD} \mathbf{P}_{i..}^Y, \quad i \in \bar{I}, \quad (4.82)$$

y, para algún orden estocástico  $\leq_*$  de la clase IPICC ocurre que

$$F_{(a,b)}^X \geq_* F_{(a,c)}^Y, \quad (4.83)$$

con  $a \in \bar{I}, b, c \in I, b \leq c$  tales que  $P_{ab}^X P_{ac}^Y > 0$ .

Si  $X$  es skip-free a la derecha y regular inferior, entonces  $X \leq_{*-lc} Y$ .

**Teorema 4.3.2.3** Sean  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  DTMCs con espacio de estados  $I$  y matrices de probabilidades de transición  $\mathbf{P}^X$  y  $\mathbf{P}^Y$  respectivamente. Si  $\mathbf{P}_{i..}^X \leq_{FSD} \mathbf{P}_{j..}^Y$  para todos  $i, j \in \bar{I}$  con  $i \leq j$ . Entonces  $X \leq_{st-lc} Y$ .

**Teorema 4.3.2.4** Sean  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  DTMCs con espacio de estados  $I$  y matrices de probabilidades de transición  $\mathbf{P}^X$  y  $\mathbf{P}^Y$  respectivamente. Si  $X$  es skip-free a la derecha y  $\mathbf{P}_{i..}^X \leq_{FSD} \mathbf{P}_{i..}^Y$  para todo  $i \in \bar{I}$ . Entonces  $X \leq_{FSD-lc} Y$ .

**Teorema 4.3.2.5** Sean  $X$  e  $Y$  CTMCs con espacio de estados  $I$ , matrices generadoras  $Q^X, Q^Y$ , vectores de ratios de transición entre estados  $\mathbf{q}^X, \mathbf{q}^Y$  y matrices de probabilidades de transición subyacentes  $\mathbf{P}^X$  y  $\mathbf{P}^Y$ , respectivamente. Entonces  $X \leq_{FSD-lc} Y$  si se da alguna de las condiciones siguientes:

1.  $X$  es regular inferior,  $q_i^X \leq q_j^Y$  y  $\mathbf{P}_{i,\cdot}^X \leq_{FSD} \mathbf{P}_{j,\cdot}^Y$ ,  $i, j \in \bar{I}$ ,  $i \leq j$ .
2.  $X$  e  $Y$  son regulares inferiores y existe una matriz  $\beta = (\beta_{ij})_{i,j \in I}$  con entradas en  $(0, 1]$  tal que

$$\sum_{m \geq n} q_{im}^X \leq \beta_{ij} \sum_{m \geq n} q_{jm}^Y, i, j \in \bar{I}, i \leq j, \wedge (n \leq i \vee n > j)$$

**Teorema 4.3.2.6** Sean  $X$  e  $Y$  CTMCs con espacio de estados  $I$ , matrices generadoras  $\mathbf{Q}^X$ ,  $\mathbf{Q}^Y$ , vectores de ratios de transición entre estados  $\mathbf{q}^X$ ,  $\mathbf{q}^Y$  y matrices de probabilidades de transición de primer paso subyacentes  $\mathbf{P}^X$  y  $\mathbf{P}^Y$  respectivamente. Entonces  $X \leq_{FSD-lc} Y$  si se dan alguna de las condiciones siguientes:

1.  $X$  es skip-free a la derecha, regular inferior,

$$q_i^X \leq q_j^Y$$

y

$$\mathbf{P}_{i,\cdot}^X \leq_{FSD} \mathbf{P}_{j,\cdot}^Y, i, j \in \bar{I}, i \leq j.$$

2.  $X$  e  $Y$  son regulares inferiores,  $X$  es skip-free a la derecha y existe un vector  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \bar{I}}$  con entradas en  $(0, 1]$  tal que

$$\sum_{n \geq m} q_{in}^X \leq \alpha_i \sum_{n \geq m} q_{in}^Y, i \in \bar{I}, m \in I.$$

### 4.3.3. Ordenación en excedencia de nivel en procesos de Cox y Rubinstein

Sean las siguientes dos sucesiones de variables independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo con una  $Be(p_i)$ ,  $i = 1, 2$ :  $(\xi_{in})_{n \in \mathbb{N}_+}$ , con  $i = 1, 2$ ,  $p_i \in [0, 1]$ . Se construyen a continuación las variables  $X_{in} = \sum_{j=1}^n \xi_{ij}$  para  $i = 1, 2$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $X_i = (X_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  con  $i = 1, 2$  e  $Y_i = (Y_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $i = 1, 2$ , donde  $Y_{i,n} = a_i^{X_{in}} d_i^{n-X_{in}} S_0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $Z_i = \{Z_i(t), t \geq 0\}$  un SMP no homogéneo con DTMC subyacente  $Y_i$ , espacio de estados  $I$  y secuencia de instantes de transición  $(T_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$(T_{i,n+1} - T_{i,n}) | (Y_{i,n}, Y_{i,n+1}) = (e, f)$$

tiene como función de distribución

$$F_{(e,f,n)}^{(i)}, \quad i = 1, 2$$

es decir,

$$Z_i(t) = Y_{i,n}, \quad T_{i,n} \leq t < T_{i,n+1}$$

Para este proceso se define el conjunto de sucesores de un estado  $l$  como

$$S_i(l) = \{la_i, ld_i\}$$

con  $i = 1, 2$

**Teorema 4.3.3.1** Sean  $Z_1$  y  $Z_2$  procesos como los descritos anteriormente. Si  $Z_1$  es regular inferior (lower-regular) y,

$$p_1 \leq p_2, a_1 \leq a_2, d_1 \leq d_2 \tag{4.80}$$

$$F_{(e,f,n)}^{(1)} \geq_* F_{(g,h,n)}^{(2)} \tag{4.81}$$

$\forall e \in I_n^{(1)}, f \in S_i(e), g \in I_n^{(2)}, h \in S_i(g), e \leq g, f \leq h$ . Con  $I^{(i)}$  el conjunto de estados del proceso  $i$ .

Entonces

$$Z_1 \leq_{*-lc} Z_2$$

**Demostración.** Sean  $Z_1^*$  y  $Z_2^*$  procesos como los anteriores, verificando la condición (4.81) para un cierto orden  $*$  de la clase *IPICC*. Según la definición de ordenación en excedencia de nivel, se debe probar que  $S_{i,l}^{Z_1^*} \geq_* S_{i,l}^{Z_2^*}$  para todos  $i, l \in I$ , pero en este caso particular dicha condición se concreta en  $S_{1,l}^{Z_1^*} \geq_* S_{1,l}^{Z_2^*}$ , para todo  $l \geq 1$  (ya que el estado inicial es 1 y en el caso de que  $l < 1$ , se tendría  $0 \leq 0$ ), o equivalentemente,  $S_l^{Z_1^*} \geq_* S_l^{Z_2^*}$  para todo  $l \geq 1$ .

Primero supóngase que  $Z_1$  es regular. Se debe probar que

$$S_l^{Z_1} \geq_* S_l^{Z_2}$$

para todo  $l \geq 1$ . Para ello se fija  $l \geq 1$  y se construye un emparejamiento

$$(Z_1^*, Z_2^*)$$

de

$$(Z_1, Z_2) | (Z_{1,0}, Z_{2,0}) = (1, 1)$$

en el espacio producto común

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 = (\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2),$$

tal que  $S_l^{Z_1^*} \geq_* S_l^{Z_2^*}$ .

Para ello, se usan dos secuencias  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de v.as. independientes  $U(0, 1)$ , definidas en  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  respectivamente.

En detalle:

Si  $U_n(\omega_1) \leq p_i$ , entonces  $\xi_{i,n}(\omega_1) = 1$ , en otro caso  $\xi_{i,n}(\omega_1) = 0$ . De esta manera se obtienen sendas secuencias  $(\xi_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $i = 1, 2$ , de v.as.i.i.d. según una  $Be(p_i)$ , con  $i = 1, 2$ .

Por la condición (4.80), se tiene que  $(\xi_{1,n})_{n \in \mathbb{N}} \leq_{FSD} (\xi_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Por otro lado, si definimos  $(\hat{Z}_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$  con  $i = 1, 2$  como sigue:

$$\hat{Z}_{i,0}(\omega_1) = 1 \tag{4.82}$$

$$\hat{Z}_{i,n+1}(\omega_1) = \begin{cases} \hat{Z}_{i,n} a_i(\omega_1), & \text{si } \xi_{i,n+1}(\omega_1) = 1 \\ \hat{Z}_{i,n} d_i(\omega_1), & \text{si } \xi_{i,n+1}(\omega_1) = 0 \end{cases} \tag{4.83}$$

se tiene que:

$$p_1 \leq p_2 \Rightarrow \xi_{1,n+1}(\omega_1) \leq \xi_{2,n+1}(\omega_1), \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.84}$$

y en consecuencia, usando inducción a partir de (4.82) y (4.83)

$$\hat{Z}_{1,n}(\omega_1) \leq \hat{Z}_{2,n}(\omega_1) \quad (4.85)$$

para todo  $\omega_1 \in \Omega_1$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otra parte, se construyen los instantes de las transiciones  $H_n^{Z_i^*}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2$ , usando la secuencia  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como sigue:

$$H_{n+1}^{Z_i^*}(\omega) = [F_{(\hat{Z}_{i,n}, \hat{Z}_{i,n+1}, n)}(\omega_1)]^{-1}(V_{n+1}(\omega_2)) \quad (4.86)$$

y se define, para  $i = 1, 2$ ,  $T_0^{Z_i^*}(\omega) = 0$  y  $(\hat{Z}_{i,n}(\omega_1), \hat{Z}_{i,n+1}(\omega_1), n)$

$$T_{n+1}^{Z_i^*}(\omega) = T_n^{Z_i^*}(\omega) + H_{n+1}^{Z_i^*}(\omega) \quad (4.87)$$

Por último, se define para  $i = 1, 2$  y  $t \geq 0$

$$Z_{i,t}^*(\omega) = \hat{Z}_{i,n}(\omega_1), \quad \text{si } T_n^{Z_i^*}(\omega) \leq t < T_{n+1}^{Z_i^*}(\omega) \quad (4.88)$$

Usando (4.85) se tiene que  $S_l^{\hat{Z}_1}(\omega_1) \geq S_l^{\hat{Z}_2}(\omega_1)$ . Además, teniendo en cuenta (4.81), de nuevo (4.85) y (4.86), se concluye que

$$H_{n+1}^{Z_1^*}(\omega_1, \cdot) \geq_* H_{n+1}^{Z_2^*}(\omega_1, \cdot) \quad (4.89)$$

para todo  $\omega_1 \in \Omega_1$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Además, como los órdenes de la clase IPICC son cerrados para convoluciones

$$\sum_{n=0}^k H_{n+1}^{Z_1^*}(\omega_1, \cdot) \geq_* \sum_{n=0}^k H_{n+1}^{Z_2^*}(\omega_1, \cdot) \quad (4.90)$$

Sea  $\Omega_1^{(l)} = \{\omega_1 \in \Omega_1 : S_l^{\hat{Z}} < \infty\}$  y  $\Omega^{(l)} = \Omega_1^{(l)} \times \Omega_2$ . Como por construcción,  $S_l^{Z_1}(\omega) < \infty$  para todo  $\omega$  tal que  $S_l^{\hat{Z}_1}(\omega) < \infty$ , se sigue que  $S_l^{Z_1^*}(\omega) < \infty$  para todo  $\omega \in \Omega^{(l)}$ . Además, como  $Z_1^*$  es regular y  $S_l^{Z_1^*}(\omega) = \infty$  para todo  $\omega_1 \in \Omega_1 - \Omega_1^{(l)}$ , se concluye que  $S_l^{Z_1^*} = \infty$  para casi todo  $\omega \in \Omega - \Omega^{(l)}$ .

De esta forma

$$\infty = S_l^{Z_1^*}(\omega) \geq S_l^{Z_2^*}(\omega) \quad (4.91)$$

para casi todo  $\omega \in \Omega - \Omega^{(l)}$ .

Por otro lado,  $1 \leq S_l^{\hat{Z}_2}(\omega_1) \leq S_l^{\hat{Z}_1}(\omega_1) < \infty$  para  $\omega_1 \in \Omega_1^{(l)}$ . Entonces, como

$$S_l^{Z_1^*}(\omega_1, \cdot) = \sum_{n=1}^{S_l^{\hat{Z}_1}(\omega_1)} H_n^{Z_1^*}(\omega_1, \cdot), \quad (4.92)$$

(4.90) conduce a

$$S_l^{Z_1^*}(\omega_1, \cdot) \geq \sum_{n=1}^{S_l^{\hat{Z}_2}(\omega_1)} H_n^{Z_1^*}(\omega_1, \cdot) \geq_* \sum_{n=1}^{S_l^{\hat{Z}_2}(\omega_1)} H_n^{Z_2^*}(\omega_1, \cdot) = S_l^{Z_2^*}(\omega_1, \cdot) \quad (4.93)$$

De este modo, se concluye que  $S_l^{Z_1^*}(\omega_1, \cdot) \geq_* S_l^{Z_2^*}(\omega_1, \cdot)$ ,  $\Omega_1$  -c.s. Usando el Lema 4.3.2.2, esto conduce a que  $S_l^{Z_1^*} \geq_* S_l^{Z_2^*}$  o equivalentemente  $S_l^{Z_1} \geq_* S_l^{Z_2}$  como se quería demostrar.

El caso en que  $Z_1$  fuera regular inferior, el resultado se deduce de la aplicación del Lema 4.3.2.1. ■



## Capítulo 5

# Conclusiones y futuras líneas de investigación

Los criterios de dominancia estocástica son fundamentales en diversas áreas de conocimiento, en particular en Economía y Finanzas. Dentro de este campo encontramos su aplicación en la selección de la cartera eficiente, análisis de riesgos y en el problema de la ruina, entre otros.

El porqué de optar por el estudio de modelos económicos a la hora de realizar esta Tesis se ha debido, entre otras razones, al interés y formación de la autora en este tema, a las numerosas aplicaciones que existen de la Probabilidad y la Estadística en campos muy diversos, entre ellos el económico-financiero y a la consecución de una beca de la Fundación Areces para realizar investigación dentro del área de Economía.

### Conclusión 1

En el Capítulo 1 se presentaron aplicaciones de la dominancia estocástica a la ordenación de determinandas opciones de riesgo, selección de activos (en ambiente de riesgo y en ausencia de él) y en general a la selección de la cartera eficiente.

La definición de dominancia estocástica con utilidad esperada y el supuesto de rendimientos con distribución normal, conducen a criterios conocidos como criterios de media-varianza.

Sean  $R_A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$ ,  $R_B \sim N(\mu_B, \sigma_B)$  las v.as. que representan los rendimientos de sendos activos  $A$  y  $B$ , y sea  $y_0$  el nivel de riqueza inicial. Entonces se tienen los siguientes criterios de dominancia.

**Definición 5.0.3.1** (FSD) *El activo  $A$  domina al activo  $B$  cuando  $\mu_A \geq \mu_B$  y  $\sigma_A = \sigma_B$ . Es decir, dado un nivel de riesgo, se elegirá el activo o cartera de mayor rendimiento.*

**Definición 5.0.3.2** (SSD) *El activo  $A$  domina al activo  $B$  cuando  $\mu_A = \mu_B$  y  $\sigma_A \leq \sigma_B$ . Es decir, dado un nivel de rendimiento, se elegirá el activo o cartera de menor riesgo. .*

**Ejemplo 5.0.3.1** *Consideremos los siguientes activos cuyos rendimientos y riesgos se muestran en la siguiente tabla:*

Activo	Rendimiento	Riesgo
$A$	25 %	10 %
$B$	25 %	40 %
$C$	-2 %	7 %
$D$	16 %	7 %

*Dado un nivel de riesgo del 7%, se elegirá  $D$  frente a  $C$ , pues  $D$  proporciona mayor rendimiento según FSD. Dado un nivel de rendimiento del 25 %, se elegirá  $A$  frente a  $B$ , pues  $A$  tiene menor riesgo que  $B$  según SSD. Pero si queremos elegir entre  $A$  y  $D$ , tendremos que basarnos en la utilidad esperada de cada uno de ellos y elegiremos aquel que proporcione un mayor nivel de utilidad esperada.*

Varios autores han tratado estos temas, por ejemplo: Rothschild y Stiglitz (1970) investigaron problemas de inversión-consumo, de selección de carteras (selección eficiente), combinaciones de selección e inversión en carteras, selección de la producción en una empresa, etc. Hanoch y Levy (1970) estudian la selección de la cartera eficiente en el caso de funciones de utilidad cuadráticas y cúbicas, Fishburn y Porter (1976) analizan la diversificación de estrategias entre activos con riesgo y seguros por parte de inversores que sienten aversión al riesgo, Berleant, Andrieu y otros (2008) estudian la selección de la

cartera eficiente haciendo uso de las reglas de media-varianza con las que construyen un conjunto de carteras eficientes y una vez que han determinado dicho conjunto hacen uso de la regla SSD y de la Teoría de la Información Incompleta (Information-Gap Theory) para llegar a una elección. Lozano y Gutiérrez (2008) estudian el problema de la cartera usando la técnica SD unida al análisis DEA (data envelopment analysis), consistente con la representación de las preferencias.

Siguiendo esta línea de investigación, en este trabajo se han propuesto diferentes reglas de selección entre variables aleatorias (que modelizan activos) dadas ciertas condiciones previas y relacionando este tema con la ponderación de variables y el uso de determinadas funciones de utilidad.

En ocasiones, las reglas de dominancia estocástica y la regla de la media-varianza no son eficientes, en el sentido de que no permiten obtener una clasificación rigurosa de las distintas opciones de inversión atendiendo al riesgo de las mismas. Sin embargo, en presencia de préstamos o créditos sin riesgo, la regla de la media-varianza proporciona una ordenación de las opciones, lo que permite realizar la selección de manera óptima y alcanzar un equilibrio. Esto es conocido como el modelo CAPM (Capital Assets Prices Model) (Ver Sharpe (1964) y Lintner (1965)).

Si se permite la existencia de bienes sin riesgo, la SD se denota por SDR.

## Conclusión 2

Otro aspecto de interés es la aplicación de las reglas de dominancia estocástica en clases restringidas de funciones de utilidad tales como las no lineales.

Las teorías no lineales de utilidad analizan los procesos de decisión bajo algunas condiciones suavizadas de los axiomas de von Neumann-Morgenstern (1947). Aunque esta idea no es nueva (ver Allais (1953,1979, 1990)), se desarrolló ampliamente alrededor de 1980.

La motivación surge de la observación constatada de que los inversores violaban los axiomas de von Neumann-Morgenstern a la hora de seleccionar carteras, (ver May (1954), Ellsberg (1961), Tversky (1969), Lichtenstein y Slovic (1973) y Kahneman y

Tversky (1979)).

El criterio FSD es importante en el caso de selección de activos mediante funciones de utilidad no lineales.

La teoría se desarrolla (i) relajando el axioma de independencia y (ii) rebajando el axioma de transitividad.

- (i) Allais rechazó el axioma de independencia pero añadió a su estudio el concepto de preferencia absoluta, es decir, la distribución  $F$  es preferida a la distribución  $G$  siempre que  $F$  domine a  $G$  según FSD. Machina (1982) también desarrolló reglas sin aceptar la independencia, probó que en ausencia de ella  $F$  es preferida a  $G$  siempre que  $F$  domine a  $G$  según FSD.
- (ii) Fishburn (1989)(b) mostró que rebajando el axioma de transitividad y con un cierto grado de linealidad

$$f(\alpha p + (1 - \alpha)q, r) = \alpha f(p, r) + (1 - \alpha)f(q, r)$$

con  $p, q, r$  funciones de probabilidad y  $\alpha > 0$ , se tenía que si la distribución  $F$  domina a la distribución  $G$  según FSD entonces  $F$  es preferida a  $G$ .

En esta monografía se ha trabajado también con determinadas funciones de utilidad para comprobar la relación de orden entre las mismas. En futuras investigaciones se tratarán otras expresiones de utilidades no lineales.

### Conclusión 3

Las reglas de dominancia estocástica también se han aplicado al caso de la transformación de variables. Interesa saber si varían las reglas SD mediante transformaciones de variables. En general existen dos tipos de transformaciones, unas corresponden a transformaciones sobre la misma variable y la decisión, por tanto, entre la variable original y la transformada (existen numerosas aplicaciones de este supuesto (ver Hadar y Russell 1974)) y otras, dadas dos variables originales, considerar sendas transformaciones de las mismas y seleccionar a partir de las transformadas.

Levy y Sarnat (1971) prueban que, si  $A$  domina a  $B$  según alguna/s regla/s SD, entonces, para cualquier  $\alpha > 0$ , se tendrá que  $\alpha A$  dominará a  $\alpha B$  por la correspondiente regla SD. Hadar y Russell (1974) analizan la condición bajo la que la transformación  $\alpha A + B$  domina a la distribución original  $A$ . Sandmo (1971) analizó la transformada  $a + \theta$  donde  $\theta$  es una constante. Meyer (1989), Brooks y Levy (1989) analizan transformaciones más generales,  $m(x)$  y  $n(x)$ .

En la elaboración de este trabajo se tuvo en cuenta el caso de la transformación de variables para intentar generalizar resultados ya existentes. Sin embargo, no se obtuvieron resultados satisfactorios. Por tanto, esto constituye otra futura línea de investigación.

#### Conclusión 4

Una importante aplicación de las reglas de dominancia estocástica es en el estudio del riesgo. En el Capítulo 2 se establecen distintos resultados sobre selección de activos basándose en unas determinadas medidas del riesgo de la inversión que, en el caso considerado, son consistentes con las reglas usuales de dominancia estocástica.

El riesgo es la posibilidad de que ocurra un suceso de probabilidad medible. Sin embargo, se emplea incluso en el caso de que la probabilidad no sea medible, confundiéndola con el concepto de incertidumbre.

Sean  $W$  la riqueza inicial,  $X$  una variable aleatoria y  $\pi$  el valor monetario del riesgo, entonces es conocido que la prima de riesgo de Arrow-Pratt es el valor de que resuelve la ecuación:

$$E_u(W + X) = u(W + EX - \pi) \quad (5.1)$$

siendo  $u$  una función de utilidad.

Sin embargo, esta medida no es objetiva ya que depende de las preferencias.

La determinación del valor de  $\pi$  que el decisor está dispuesto a pagar para no tener riesgo, es función de la rentabilidad media del inversor ( $E[X]$ ). Entonces, una medida pura del riesgo debería estar construida de tal manera que no dependa de  $E[X]$ . Pero, incluso suponiendo que ésta se mantuviera constante, sería imposible cuantificar de manera objetiva el riesgo sin realizar unas hipótesis previas sobre la función de utilidad  $u$ .

**Definición 5.0.3.3** (Rothschild y Stiglitz, 1970) Sean dos distribuciones caracterizadas por el mismo retorno esperado, si:

- Tienen la misma media y
- las funciones de utilidad son no decrecientes y cóncavas

(i)  $Y$  tiene más riesgo que  $X$  si  $Y$  es igual a  $X$  más un término adicional o ruido:

$$Y =^d X + Z$$

donde  $E(Z|X) = 0$ .

(ii)  $Y$  tiene más riesgo que  $X$  si y sólo si todos los individuos que sienten aversión al riesgo prefieren  $X$  a  $Y$ , es decir,  $E_u[X] \geq E_u[Y]$  para toda función de utilidad  $u$  no decreciente y cóncava.

(iii)  $Y$  tiene más riesgo que  $X$  si tiene colas más pesadas que  $X$ .

(iv)  $Y$  tiene más riesgo que  $X$  si tiene mayor varianza.

**Definición 5.0.3.4** Sean  $\{X_\alpha\}$  e  $\{Y_\beta\}$  todas las combinaciones posibles de  $X$  e  $Y$  con los activos de riesgo. Diremos que  $\{Y_\beta\}$  tiene más riesgo que  $\{X_\alpha\}$  si para todo elemento  $X_\alpha \in \{X_\alpha\}$  existe  $Y_\beta \in \{Y_\beta\}$  con  $E[X_\alpha] = E[Y_\beta]$  de forma que  $Y_\beta$  tenga más riesgo que  $X_\alpha$  según la definición de riesgo dada por Rothschild y Stiglitz.

El teorema siguiente permite conocer dadas dos opciones cuál presenta mayor riesgo aunque no posean la misma media. Dadas dos opciones  $X$  e  $Y$  con distinta media, se construye  $Y_\alpha$  con la misma media que  $X$  como sigue:

$$Y_\alpha = (1 - \alpha)r + \alpha Y$$

donde  $r$  es la prima de riesgo.

El valor de  $\alpha$  tal que  $E[Y_\alpha] = E[X]$  es:

$$\alpha = \frac{E[X] - r}{E[Y] - r}$$

**Teorema 5.0.3.2** Sean  $F$  y  $G$  dos opciones de riesgo con  $E_F[X] \neq E_G[X]$ . Igualamos ambas medias según el procedimiento anterior:  $E_{F_\alpha}[X] = E_G[X]$ . Si  $G$  tiene más riesgo que  $F_\alpha$ , según la definición de Rothschild y Stiglitz, entonces para cualquier otra mixtura  $G_\beta$  existe otra  $F_\gamma$  con  $\gamma = \alpha\beta$  y  $E_{F_\alpha}[X] = E_{G_\beta}[X]$ , de manera que  $F_\gamma$  conlleva menor riesgo que  $G_\beta$ . De aquí se dice que la clase  $\{F_\gamma\}$  tiene menos riesgo que la clase  $\{G_\beta\}$ .

Otros autores que han estudiado las reglas de SD y el riesgo son Caballé y Esteban (2007), que proponen el ínfimo del índice de Arrow Pratt de aversión absoluta al riesgo como una medida global de la aversión al riesgo de una cierta función de utilidad.

El problema de la medición del riesgo asociado a los activos de renta variable está ampliamente tratado en la literatura econométrico-financiera.

En general, desde el punto de vista de la definición de riesgo dada por Rothschild y Stiglitz (1970), la varianza no es una buena medida de riesgo ya que puede darse el caso de que se tengan dos opciones  $X$  e  $Y$  de igual media con varianza de  $X$  ( $\sigma_X^2$ ) mayor que la varianza de  $Y$  ( $\sigma_Y^2$ ) y que exista una función  $u$  creciente y cóncava de manera que  $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ , más aún, puede darse el caso en el que  $E[X] < E[Y]$  y  $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$  y en cambio  $Y$  no domina a  $X$  para todos aquellos que tengan aversión al riesgo.

Pero aunque la varianza no es un índice óptimo para medir el riesgo sí proporciona cierta información acerca del mismo. El criterio de la varianza proporciona buenos resultados si, supuesto que  $E[X] = E[Y]$ :

1. La función de utilidad es creciente, cóncava y cuadrática.
2. La función de utilidad es creciente, cóncava y las distribuciones son normales.

3. La función de utilidad es creciente, cóncava y las distribuciones son lognormales.

La varianza es un criterio útil para clasificar un conjunto de productos en función de su riesgo. Lógicamente, esta medida interesa a inversores con vocación a largo plazo y que quieran tener una idea del riesgo asociado a su inversión. Sin embargo, es habitual encontrar en las series históricas períodos en los que se producen cambios bruscos en el perfil de riesgo de los productos, en particular, posteriormente, la volatilidad se incrementa extraordinariamente, volviendo a niveles normales. Es decir, interesa determinar una medida de riesgo total planteada.

Un primer método para abordar cambios en la variabilidad dentro de un mismo período consiste en calcular una varianza móvil obtenida a partir de  $q$  observaciones previas ( $q < s$ ) en cada momento  $t$ .

El cálculo se realizaría de la forma siguiente:

$$\sigma_t^2 = \frac{\sum_{j=1}^q (r_{t-j} - \mu)^2}{q} = \frac{\sum_{j=1}^q \epsilon_{t-j}^2}{q}$$

siendo  $r_j$  la rentabilidad en  $j$  y  $\mu$  el promedio de rentabilidad de los  $q$  períodos utilizados.

Obsérvese que frente a la propuesta anterior, la varianza móvil permite recoger más rápidamente el efecto que las nuevas informaciones tienen en la medida de la volatilidad, ya que se calcula sobre un número de datos inferior ( $q < s$ ), lo que hace que a cada dato se le asigne un peso superior en el cálculo de dicha volatilidad.

El promedio de rentabilidad en  $t$ , calculado a partir de la información hasta  $t - 1$ , se calcula como:

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^s r_{t-j}}{s}$$

donde  $s$  es el número de períodos utilizados para el cálculo de la media.

### **Varianza calculada como media móvil con ponderación exponencial (Método MMPE)**

Los cálculos anteriores tienen la dificultad de asignar el mismo peso a cada una de las desviaciones respecto del promedio y como se está interesado en calcular la volatilidad en

cada momento de tiempo, es más razonable dar un mayor peso a los datos más próximos en el tiempo, es decir:

$$\sigma_t^2 = \sum_{j=1}^q \alpha_j (r_{t-j} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^q \epsilon_{t-j}^2$$

donde  $\alpha_j \geq 0$  y  $\sum_{j=1}^q \alpha_j = 1$ .

Un caso particular es el que permite calcular la varianza como MMPE, en el que los pesos son:

$$\alpha_j = (1 - \lambda)\lambda^{j-1}$$

con  $0 < \lambda < 1$ .

### Modelo GARCH (1,1)

Bollerslev (1986) extendió el trabajo de Engle (1982), desarrollando una técnica que permite que la varianza condicional siga un proceso autorregresivo de medias móviles. El modelo más sencillo es el GARCH(1,1), cuya expresión:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 \sigma^2 - \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

es una generalización del modelo analizado en el subapartado anterior, ya que presenta la varianza condicional como una función de la varianza a largo plazo, la desviación respecto al promedio correspondiente al período anterior y la varianza de dicho período, cada una con su ponderación, de forma que:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 = 1$$

La estabilidad del modelo GARCH (1,1) requiere cumplir la condición:

$$\alpha_1 + \beta_1 < 1$$

y, lógicamente, si el primer sumando se anula, el modelo GARCH (1,1) se reduce al analizado anteriormente. De esta manera el modelo MMPE es un caso particular del GARCH (1,1).

Es claro que existe la posibilidad de plantear modelos que incorporen más retardos, tanto en la parte autorregresiva como en la de medias móviles, llegando así al modelo GARCH (p,q) más general. Sin embargo, dada la utilidad del modelo más sencillo GARCH (1,1) y que, en ocasiones, el incremento de complejidad que supone utilizar modelos más elaborados no se ve compensado por la mejora de los resultados obtenidos, parece adecuado el modelo comentado.

Otras medidas de riesgo son la semivarianza y el índice de Gini.

La regla de la semivarianza afirma que  $X$  domina a  $Y$  si

$$E[X] \geq E[Y] \quad y \quad S_h(X) \leq S_h(Y)$$

con alguna desigualdad estricta, siendo  $S_h$  la semivarianza:

$$S_h = \begin{cases} E[(R-h)^2], & \text{si } R \leq h \\ 0, & \text{si } R > h \end{cases}$$

y  $h$  un punto de referencia.

Puede probarse que esta regla es condición necesaria para la dominancia estocástica de segundo orden.

Por analogía con el desarrollo de Rothschild y Stiglitz, se dice que  $Y$  conlleva más riesgo que  $X$  según el índice de semivarianza si

$$E[X] = E[Y] \quad y \quad S_h(X) < S_h(Y)$$

y según el índice de media-varianza si

$$E[X] = E[Y] \quad y \quad Var(X) < Var(Y).$$

La regla de la media de Gini afirma que  $X$  domina a  $Y$  si

$$E[X] \geq E[Y] \quad y \quad G(X) \leq G(Y)$$

con alguna desigualdad estricta, donde

$$G(\xi) = 2Cov(\xi, F_\xi(x))$$

siendo  $\xi$  una v.a. y  $F_\xi$  la función de distribución de la v.a.

### Conclusión 5

También se encuentran aplicaciones de las reglas de dominancia estocástica en la valoración de empresas y apalancamiento. La regla SSD obtiene límites para los valores de la inversión cuando al inversor se le permite sostener la opción de compra o el activo subyacente. Dichos límites son ( $LI$  indica límite inferior y  $LS$  límite superior):

$$LI = S_0 - X/r + 1/r P_c \int_0^{P'} (X - Q(t)) dt$$

$$LS = S_0/E[\tilde{S}_T] \int_x^\infty (\tilde{S}_T - X) f(\tilde{S}_T) d\tilde{S}_T$$

donde:

- $S_0$  es el precio actual de las existencias
- $\tilde{S}_T$  el precio del stock en la madurez
- $X$  el precio de ejercicio
- $r$  el ratio de interés de menor riesgo
- $f(\tilde{S}_T)$  la función de densidad de  $\tilde{S}_T$
- $P' = P[\tilde{S}_T \leq X]$ , y
- $P_c$  el valor que resuelve la integral  $\int_0^{P_c} (Q_c(t) - r) dt = 0$  donde  $Q_c$  es el cuantil de la distribución del ratio de retorno de la opción de compra.

Bajo estas condiciones se tiene que  $LI \leq LM \leq LS$  donde  $LM$  denota el precio de mercado de la opción de compra. Cuando  $LM < LI$  la opción domina el stock y cuando  $LM > LS$  el stock domina a la opción. Levy (1985) demostró que el valor obtenido por el modelo de Black Scholes (1973) cae dentro de esos límites ( $LI, LS$ ).

### Conclusión 6

Otro punto de aplicación de las reglas de dominancia estocástica a tratar es la medida de desigualdad de ingresos. En concreto, en este trabajo se ha realizado un estudio de la distribución de Pareto y se han obtenido las condiciones que se deben cumplir para que exista dominancia estocástica de primer orden, a la vez que se han generalizado los resultados al caso de distribuciones de Pareto truncadas, siguiendo la misma línea que la realizada para el caso de distribuciones lognormales y lognormales truncadas (ver Capítulo 2).

Algunos trabajos en esta línea son por ejemplo los de I. Ahamdanechzarco y C. García “Bienestar, desigualdad y pobreza en España (1993-2000). Un análisis basado en técnicas inferenciales de dominancia estocástica” en el que analizan los cambios producidos en la distribución personal de la renta en España durante el período 1993-2000 haciendo uso de las técnicas de dominancia estocástica con inferencia estadística.

### Conclusión 7

Los Capítulos 3 y 4 se han centrado en el estudio de los procesos estocásticos y en particular de los procesos estocásticos en Economía y Finanzas.

Como se comentó en el Capítulo 1, otra aplicación de los criterios de dominancia estocástica es en el ámbito del análisis del riesgo de bancarrota y en el problema de la ruina. A este respecto, se ha estudiado el modelo clásico de la ruina y se han realizado algunas generalizaciones. Se ha conseguido ordenar los tiempos hasta la ruina de los modelos propuestos sin necesidad de obtener previamente la expresión de la probabilidad de ruina ni usar aproximaciones de la misma. De esta manera se ha tratado el problema siguiendo una metodología novedosa.

Respecto a este punto, se han de mencionar algunas de las dificultades que se han presentado al tratar este problema. Una de ellas ha sido el encontrar bibliografía en la que se abordara el problema tal y como se había planteado en esta investigación. Esto fue imposible y por tanto, se confirma que la metodología que se estaba usando era

totalmente novedosa. Pero la principal dificultad ha sido el intentar generalizar aún más este modelo, introduciendo una componente adicional modelada por un movimiento browniano. La inclusión de este sumando adicional ha provocado la imposibilidad de ordenar los procesos tratados debido precisamente a la presencia de ese movimiento browniano. Por tanto, una de las futuras líneas de investigación será el estudiar la manera de introducir ese componente browniano de la manera más adecuada y realizar un estudio análogo al presentado en esta Tesis.

Algunos autores que han estudiado este tema son, entre otros, Broske y Levy (1989), que aplican las reglas de dominancia estocástica para estimar la probabilidad de bancarrota conociendo los precios de los bonos de mercado.

#### Conclusión 8

Por último, cabe citar también la importancia de la aplicación de las reglas de dominancia estocástica a datos empíricos. A lo largo de esta Tesis se han propuesto diversos algoritmos de simulación que permiten obtener series de datos que verifican ciertos criterios de SD; además, se han indicado algoritmos que permiten comparar si determinadas series de datos cumplen o no ciertas reglas de SD y algoritmos de simulación de procesos estocásticos.

Las futuras líneas de investigación serán a parte de la ya citada sobre modelos de ruina, el estudio de la cartera eficiente en tiempo continuo, obtención de condiciones para que se cumplan ciertos criterios de SD en el caso de transformación de variables y el estudio en profundidad de las reglas ASD (Almost Stochastic Dominance) que permiten seleccionar unas variables sobre otras pero con un cierto nivel de confianza  $\epsilon$  y su aplicación a modelos económicos.



# Appendix

## Conclusions and future work

Stochastic dominance criteria are used in various areas of knowledge, particularly in Economics and Finance. In economic context, SD is applied for example, in the efficient portfolio selection, analysis of risk and ruin problem.

Some of the reason for this work are the interest and author's knowledge about economic and financial models and in Statistics and Operational Research, the numerous applications of Probability and the Statistics in very diverse areas, for example in the economic and financial framework and the fact that the author got a scholarship of the Fundacion Ramón Areces to carry on researching the Economy area.

### Conclusion 1

In Chapter 1 applications of stochastic dominance in ranking risky options, assets selection (under risk or without risk) and in portfolio selection were presented.

The definition of stochastic dominance using expected utility and the hypothesis of Normal returns give the mean-variance criteria.

Let  $R_A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$ ,  $R_B \sim N(\mu_B, \sigma_B)$  be the random variables that represent the returns of two assets  $A$  and  $B$ , and let  $y_0$  be the initial level of wealth. Then the following criteria of dominance are given.

**Definition 5.0.3.1** (*FSD*) Asset A dominates asset B when  $\mu_A \geq \mu_B$  and  $\sigma_A = \sigma_B$ . That is, given a level of risk, the asset that provides more returns is preferred.

**Definition 5.0.3.2** (*SSD*) Asset A dominates asset B when  $\mu_A = \mu_B$  and  $\sigma_A \leq \sigma_B$ . That is, given a level of return, the asset that has a smaller risk is preferred.

**Example 5.0.3.1** Let us consider the following assets whose returns and risks are given in the next table:

Asset	Return	Risk
A	25 %	10 %
B	25 %	40 %
C	-2 %	7 %
D	16 %	7 %

Given a level of risk of 7%, asset D is preferred to asset C, because D gives higher return according to FSD. Given a level of return of 25 %, asset A is preferred to asset B, because A has less risk than B according to SSD. But if we want to choose between A and D, we will have to base the choice in the expected utility of one of each and we will choose the asset that provides us more level of expected utility.

Many authors have study these problems, for example: Rothschild y Stiglitz investigate the following main issues: investment-consumption, a portfolio problem, a combined portfolio-savings problem, a firm's production problem, etc. G. Hanoch and H. Levy (1970) study the efficient portfolio selection in the case of quadratic and cubic utility functions, Fishburn and Porter (1976) analyze the diversification strategy between the risky asset and the safe asset by risk averters, Berleant et. al. (2008) study the efficient portfolio selection using the mean-variance rules, they build a set of efficient portfolios and use afterwards the SSD criterion and the Information Gap Theory to select one of them. S. Lozano and E. Gutiérrez (2008) study the portfolio selection problem using SD rules and data envelopment analysis.

Following this direction of work, in this monograph different rules of selection between random variables, given certain previous conditions, are given. In addition this theme has been connected with the weighted random variables and the use of certain utility functions. Also the results were extended to the random vectors case.

Sometimes, the stochastic dominance rules are not efficient in the sense that in many cases this framework is unable to rank two risky options under consideration. The well-known mean-variance rule suffers from a similar drawback. However, when riskless borrowing or lending is allowed, the mean-variance rule provides a sharper decision which makes it possible to derive an equilibrium pricing relationship known as the capital assets prices model (CAPM) (see Sharpe (1964) and Lintner (1965)).

When the riskless asset is allowed, the stochastic dominance analysis is denoted by SDR.

### Conclusion 2

Another interesting aspect of application of stochastic dominance rules is in the context of nonlinear utility functions.

Nonlinear utility theories analyze the decision making process under some weaker conditions of the von Neumann-Morgenstern (1947) axioms. Although this idea is not new (see Allais 1953, 1979, 1990) most of these theories were developed around 1980.

The motivation for their development was stimulated by the discovery that investors often violate one or more of the axioms underlying the von Neumann-Morgenstern expected utility paradigm, (see May (1954), Ellsberg (1961), Tversky (1969), Lichtenstein and Slovic (1973) and Kahneman and Tversky (1979)).

FSD criterion plays an important role in the case of assets selection using nonlinear utility functions.

The theory has been developed in two main directions: (i) by relaxing the independence axiom, and (ii) by weakening the transitivity axiom.

- (i) Allais rejects the independence axiom but incorporates in his analysis the concept of absolute preference, that is, distribution  $F$  is preferred to distribution  $G$  when

$F$  dominates  $G$  by FSD. Machina (1982) also develops a decision rule without the independence axiom, he shows that even without the independence axiom,  $F$  is preferred to  $G$  whenever  $F$  dominates  $G$  by FSD.

- (ii) Fishburn (1989 b) shows that by weakening the transitivity axiom and with a limited degree of linearity

$$f(\alpha p + (1 - \alpha)q, r) = \alpha f(p, r) + (1 - \alpha)f(q, r)$$

with  $p, q, r$  probability functions and  $\alpha > 0$ , that if the distribution  $F$  dominates distribution  $G$  by *FSD* then  $F$  is preferred to  $G$ .

In this monograph we have worked with certain utility functions to prove stochastic order relations between them. In future works another expressions of nonlinear utilities will be studied.

### Conclusion 3

Stochastic dominance rules have been applied to the case of transformations of random variables. An interesting question is whether the stochastic dominance relationship is invariant to some transformation of the random variables  $X$  and  $Y$ .

In general, two principal areas of study may be identified: in the first case, it is studied the relation between one random variable and a transformation of it (see Hadar and Russell (1974)) and in the second case it is studied the relation between transformations of two random variables, given the relation between the original random variables.

Levy and Sarnat (1971) prove that if  $A$  dominates  $B$  by the various SD rules then for each  $\alpha > 0$ ,  $\alpha A$  also dominates  $\alpha B$  by the corresponding SD rule. Hadar y Russell (1974) analyze the condition under which the transformation  $\alpha A + B$  dominates the original distribution  $A$ . Sandmo (1971) analyzes the transformation  $a + \theta$  where  $\theta$  is a constant. Meyer (1989), Brooks and Levy (1989) analyze more general transformation,  $m(x)$  and  $n(x)$ .

In the development of this work, the case of transformation of random variables was considered to generalize some results. Unfortunately, satisfactory results were not found, so this constitutes another direction for future work.

#### Conclusion 4

One important application of SD rules is in the study of risk. In Chapter 2 many results on assets selection using some measures of risk, are established. In the case considered the risk measures are consistent with the usual SD rules.

Risk is the possibility that an event of measurable probability happens. However, this word is used also in the case in which the probability can't be measured, mistaking the risk concept for the uncertainty concept.

Let  $W$  be the initial wealth,  $X$  be a random variable and  $\pi$  be the monetary value of the risk, then the well-known Arrow-Pratt risk premium is given by the value  $\pi$  which solves the equation:

$$E_u(W + X) = u(W + EX - \pi) \quad (5.2)$$

with  $u$  an utility function.

However, this measure is not objective. It varies from one preference scheme to another function.

The determination of the value  $\pi$  one is willing to pay to rid himself of the risk involved is also a function of the investment's mean profitability ( $E[X]$ ). Therefore, a pure measure of risk should be constructed in such a way that it will be isolated from  $E[X]$ . But even if the mean profitability is held constant, it is still impossible to objectively quantify the risk unless some specific assumptions on the utility function are imposed.

**Definition 5.0.3.3** (*Rothschild y Stiglitz, (1970)*) *Let us consider two distributions characterized by the same expected return, if:*

- *they have the same mean and*
- *the utility functions are non decreasing and concave*

(i)  $Y$  is riskier than  $X$  if  $Y$  is equal to  $X$  plus a noise term:

$$Y =^d X + Z$$

where  $E(Z|X) = 0$ .

(ii)  $Y$  is riskier than  $X$  if and only if every risk-avertter prefers  $X$  over  $Y$ , namely  $E_u[X] \geq E_u[Y]$  for all utility function  $u$  non decreasing and concave.

(iii)  $Y$  is riskier if it has more weight in the tails than  $X$ .

(iv)  $Y$  is riskier if it has greater variance than  $X$ .

**Definition 5.0.3.4** Let  $\{X_\alpha\}$  and  $\{Y_\alpha\}$  denote all possible combinations of  $X$  and  $Y$  with the riskless asset, respectively. We define  $\{Y_\alpha\}$  to be riskier than  $\{X_\alpha\}$  if for every  $X_\alpha \in \{X_\alpha\}$  there exists  $Y_\alpha \in \{Y_\beta\}$  with  $E[X_\alpha] = E[Y_\alpha]$  and  $Y_\alpha$  is riskier than  $X_\alpha$  by the Rothschild y Stiglitz's definition.

The next theorem allows us to know, given two assets, which one of them is riskier, although they don't have the same mean. Given two assets with different means  $X$  and  $Y$ ,  $Y_\alpha$  is built with the same mean as  $X$  as follows:

$$Y_\alpha = (1 - \alpha)r + \alpha Y$$

where  $r$  is the risk premium.

The value of  $\alpha$  such that  $E[Y_\alpha] = E[X]$  is:

$$\alpha = \frac{E[X] - r}{E[Y] - r}$$

**Theorem 5.0.3.1** Let  $F$  and  $G$  two risky options with  $E_F[X] \neq E_G[X]$ . We make equal means as the above method:  $E_{F_\alpha}[X] = E_G[X]$ . If  $G$  is riskier than  $F_\alpha$ , by the Rothschild y Stiglitz's definition, then for any other mix  $G_\beta$  another mix  $F_\gamma$  with  $\gamma = \alpha\beta$  y  $E_{F_\alpha}[X] = E_{G_\beta}[X]$ , so that  $F_\gamma$  is less risky than  $G_\beta$ . Hence  $\{F_\gamma\}$  is less risky than  $\{G_\beta\}$ .

Others authors that have studied the SD rules and risk are Caballé and Esteban (2007), that suggest the infimum of the Arrow Pratt's index of the absolute risk aversion, as a global measure of the risk aversion of a certain utility function.

The problem of measurement of the risk associated with the assets of variable income is treated extensively in the economic-financial literature.

In general, in the Rothschild and Stiglitz framework, the variance cannot serve as an index for risk. This is because there can be two options,  $X$  and  $Y$ , with the same mean and  $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ , (where  $\sigma_X^2$  is the variance of  $X$  and  $\sigma_Y^2$  is the variance of  $Y$ ), and there exist a function  $u$  increasing and concave such that  $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ . Moreover, even if  $E[X] < E[Y]$  and  $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ ,  $Y$  does not dominate  $X$  for all risk averters.

Nevertheless, with the assumption  $E[X] = E[Y]$  there are three specific cases when the variance can be safely employed as the risk index:

1. The utility function is increasing, concave and quadratic.
2. The utility function is increasing, concave and the distributions are Normal.
3. The utility function is increasing, concave and the distributions are Lognormal.

The variance is an useful criterion to classify a set of financial products attending to their risk. Logically, investors with long-term vocation and who want to have an idea of the risk associated with their investment, are interested in this measure. Nevertheless, it is usual to find in historical series, periods in which sudden changes take place in the profile of risk of the products. In particular, later, the volatility increases extraordinarily, returning at normal levels afterwards. In other words, it is of interest to determine a global risk measure.

The first method to tackle changes in the variability within the same period consists of calculating a mobile variance obtained from  $q$  previous remarks ( $q < s$ ) in every moment  $t$ .

The calculation would be realized in the following form:

$$\sigma_t^2 = \frac{\sum_{j=1}^q (r_{t-j} - \mu)^2}{q} = \frac{\sum_{j=1}^q \epsilon_{t-j}^2}{q}$$

with  $r_j$  denoting the profitability at time period  $j$  and  $\mu$  the mean of profitability of the  $q$  used periods.

Notice that opposite to the previous proposal, the mobile variance allows to get quickly the effect that the new information has in the measure of the volatility, since it is calculated using a small number of values ( $q < s$ ).

The profitability average at period  $t$ , calculated from the information obtained until time  $t - 1$ , is calculated as:

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^s r_{t-j}}{s}$$

where  $s$  is the number of periods that have been used for the mean calculation.

**Variance calculated as a mobile mean with exponential weighting.  
(MMPE method)**

The previous calculations have the difficulty of assigning the same weight to each of the deviations with regard to the mean, and as we are interested in calculating the volatility in every moment, it is more reasonable to give a major weight to the nearest date in time, that is:

$$\sigma_t^2 = \sum_{j=1}^q \alpha_j (r_{t-j} - \mu)^2 = \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2$$

where  $\alpha_j \geq 0$  and  $\sum_{j=1}^q \alpha_j = 1$ .

A particular case is the one that allows us to calculate the variance as MMPE, in which the weight are:

$$\alpha_j = (1 - \lambda)\lambda^{j-1}$$

with  $0 < \lambda < 1$ .

### **GARCH (1,1) model**

Bollerslev (1986) extended the Engle's work (1982), developing a technique that allows the conditional variance to be shaped by an autoregressive moving average process. The simplest model is the GARCH (1,1), whose expression is:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 \sigma^2 - \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

it is a generalization of the previous analyzed model, since it presents the conditional variance as a function of the long term variance, the deviation to the average corresponding to the previous period and the variance of the above mentioned period, each one with his weighting, so that:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 = 1$$

The stability of the model GARCH (1,1) needs the condition:

$$\alpha_1 + \beta_1 < 1$$

and, logically, if the first addend is zero, the GARCH (1,1) model, turns out to the model analyzed previously. This way model MMPE is a particular case of GARCH (1,1) model.

It is clear that there exists the possibility of approach models that incorporate more delays, getting this way GARCH (p,q) model.

There are other measures of risk like the semivariance and the Gini's indexes.

The mean semivariance rule asserts that  $X$  dominates  $Y$  if

$$E[X] \geq E[Y] \quad \text{and} \quad S_h(X) \leq S_h(Y)$$

with at least one strong inequality, where  $S_h$  is the semivariance:

$$S_h = \begin{cases} E[(R - h)^2], & \text{si } R \leq h \\ 0, & \text{si } R > h \end{cases}$$

and  $h$  is some reference point.

It can be shown that this rule is a necessary condition for SSD.

By an analogy with the Rothschild and Stiglitz framework,  $Y$  may be defined as riskier than  $X$  by the semivariance index if

$$E[X] = E[Y] \quad \text{and} \quad S_h(X) < S_h(Y)$$

and using the mean-variance criterion, if:

$$E[X] = E[Y] \quad \text{and} \quad \text{Var}(X) < \text{Var}(Y).$$

The Mean-Gini rule asserts that  $X$  dominates  $Y$  if

$$E[X] \geq E[Y] \quad \text{and} \quad G(X) \leq G(Y)$$

with at least one strict inequality, where  $G$  stands for one half of the Gini mean difference

$$G(\xi) = 2\text{Cov}(\xi, F_\xi(x))$$

with  $\xi$  a random variable and  $F_\xi$  is its distribution function.

#### Conclusion 5

Also there are applications of the SD rules the evaluation of companies and leverage. SSD obtains bounds on the option values when the investor is allowed to hold either the call option or the underlying asset. In this framework, taxes and transaction costs can

be easily incorporated. The bounds obtained are ( $LI$  is the lower bound and  $LS$  the upper bound):

$$LI = S_0 - X/r + 1/r P_c \int_0^{P'} (X - Q(t)) dt$$

$$LS = S_0/E[\tilde{S}_T] \int_x^\infty (\tilde{S}_T - X) f(\tilde{S}_T) d\tilde{S}_T$$

where:

- $S_0$  is the current stock price
- $\tilde{S}_T$  is the stock price at maturity
- $X$  is the exercise price
- $r$  is the riskless interest rate
- $f(\tilde{S}_T)$  is the density function of  $\tilde{S}_T$
- $P' = P[\tilde{S}_T \leq X]$  and
- $P_c$  is the value which solves the integral  $\int_0^{P_c} (Q_c(t) - r) dt = 0$  where  $Q_c$  is the quantile of the distribution of the rate of return on the call option.

Under the conditions of this model, in equilibrium  $LI \leq LM \leq LS$  where  $LM$  stands for the market price of the call option. When  $LM < LI$  the option dominates the stock. Similarly, when  $LM > LS$  the stock dominates the option. Levy (1985) shows that the value obtained by the Black and Scholes model always falls within the bounds ( $LI, LS$ ).

### Conclusion 6

Another application of the SD rules is in the measurement of inequality of income. In particular in this work, a study of the distribution of Pareto has been carried on, and conditions that must be fulfilled to have FSD has been obtained. Moreover we have generalized the results for the case of Pareto truncated distributions, following the same line as we used in the lognormal and lognormal truncated distributions (see Chapter 2).

Some works in this line are I. Ahamdanechzarco and C. García's approach "Bienestar, desigualdad y pobreza en España (1993-2000). Un análisis basado en técnicas inferenciales de dominancia estocástica" in which they analyze the changes produced in the per capita income in Spain during the period 1993-2000, using SD rules and statistical inference.

### Conclusion 7

Chapters 3 and 4 are centred on the study of stochastic processes and in particular stochastic processes in Economy and Finance.

As it was commented in Chapter 1, another application of the SD criteria is in the the analysis of measuring bankruptcy risk by using data taken from the bond market and in the ruin problem. In this respect, the classic risk model has been studied and some generalizations have been realized. Times to ruin of the proposed models have been ranked without knowing previously the expressions of ruin probabilities or approximations of them. This way the problem has been studied following a new methodology.

With regard to this point, some difficulties have appeared along this investigation. One of them has been finding some bibliography in which the problem was studied as we have done. This was impossible and therefore it is confirmed that the used methodology was completely new. But the principal difficulty has been trying to generalize this model introducing an additional component shaped by a Brownian movement. The inclusion of this additional addend has caused the inability to rank the considered processes, due to precisely the presence of this Brownian component. Therefore, one of the directions of future works will be the study of this Brownian component.

Some authors who have studied this topic are, between others, Broske and Levy (1989), that employ SD rules to estimate the probability of bankruptcy as implied by the market price of bonds.

### Conclusion 8

Finally, we will mention the application of SD rules to empirical data. Various algorithms have been developed in this area. Along this Thesis there have been proposed several simulation algorithms that give us series of data verifying some SD criteria, moreover algorithms that inform us if some serie of data verify some SD criteria and simulation algoritms of stochastic processes, have been proposed.

Future directions of work will be the study of others ruin models, the study of the efficient portfolio in continuous time and the study of the ASD (Almost Stochastic Dominance) rules and its application to economic models.



# Bibliografía

1. Almaraz, E. y Pacheco, A., 2009. *Stochastic dominance of ruin times in semi-Markov modelated risk process*. En publicación.
2. Almaraz, E. y Cano, F., 2009. *Consistency of Mean-Variance rules in weighted random variables. Financial Application*. En publicación.
3. Abhyankar, A., Ho, K-Y. y Zhao, H., 2008. *On the discounted penalty function in a markov-dependent risk model*. Quantitative Finance, 8(7), 693-704.
4. Adan, I. y Kulkarni, V., 2008. *Insurance risk with variable number of policies*. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 22(2), 213-219.
5. Ahamdanechzarco, I. y García, C., 2007. *Bienestar, desigualdad y pobreza en España (1993-2000). Un análisis basado en técnicas inferenciales de dominancia estocástica*. Hacienda Pública Española / Revista de Economía Pública, 180, 35-60.
6. Aït-Sahalia, Y. y Brandt, M. W., 2005. *Portfolio and consumption choice with option-implied state prices*. Working paper, Princeton University.
7. Albrecher, H. y Boxma, O., 2005. *On the discounted penalty function in a markov-dependent risk model*. Insurance Mathematics and Economics, 37, 650-672.
8. Allais, M., 1953. *Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulates et Axiomas de l'École Americaine*. Econometrica, 21, 503-546.
9. Allais, M., 1979. *The Foundations of a Positive Theory of Choice Involving Risk and a Criticism of the Postulates and Axioms of the American School*. Utility Hypotheses and the Allais Paradox, Allais, M. and M. Machina (Eds.), D. Reidel, Dordrecht.

10. Allais, M., 1990. *Allais Paradox*. Utility and Probability, The Macmillan Press, United Kingdom, 3-9.
11. Arnold, B.C., 1987. *Majorization and the Lorenz order: A brief introduction*. Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, New York.
12. Asmussen, S., 1989. *Risk theory in a markovian environment*. Scandinavian Actuarial Journal, 2, 69-100.
13. Atkinson, A. B., 1970. *On the Measurement of Inequality*. Journal of Economic Theory, 2, 244-263.
14. Bachelier, L., 1964. *Théorie de la Spéculation*. The random character of stock Market Prices, Cootner, P. (eds.), 17-78, MIT Press. Cambridge Massachusetts.
15. Bai, J. M. y Xiao, H. M., 2008. *A class of new cumulative shock models and its application in insurance risks*. Journal-Lanzhou University Natural Sciences, 44(1), 132-136.
16. Bartoszewicz, J. y Skolimoswka, M., 2004(a). *Preservation of classes of life distributions under weighting*. Mathematical Institute University of Wroclaw, Report 142.
17. Bartoszewicz, J. y Skolimoswka, M., 2004(b). *Stochastic ordering of weighted distributions*. Mathematical Institute University of Wroclaw, Report 143.
18. Bawa, V. S., 1982. *Stochastic Dominance: A Research Bibliography*. Management Science, 28, 698-712.
19. Beard, R. E., Pentikäinen, T. y Pesonen E., 1984. *Risk Theory*, 3<sup>a</sup>ed. Chapman and Hall, London.
20. Beccacece, F., 2006. *Applying the benchmarking procedure: a decision criterion of choice under risk*. Theory and Decision, 61, 75-91.
21. Beekman, J. A., 1969. *A ruin function approximation*. Transactions of Society of Actuaries, 21, 41-48.

22. Belzunce, F. y Shaked, M., 2004. *Failure profile of coherent systems*. Naval Research Logistics, 51(4), 477-490.
23. Belzunce, F., Lillo R., Ruiz, J. M. y Shaked, M., 2001. *Stochastic comparisons of nonhomogeneous processes*. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 15, 199-224.
24. Berleant, D., Andrieu, Argaud, J. P., Barjon, F., Cheong, M. P., Dancre, M., Sheble, G. y Teoh, C. C., 2008. *Portfolio management under epistemic uncertainty using stochastic dominance and information-gap theory*. International Journal of Approximate Reasoning, 101-116.
25. Black, F. y Scholes, M., 1973. *The pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.
26. Blackwell, D., 1951. *Comparison of Experiments*. Proc. Second Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability, University of California Press, Berkeley, 93-102.
27. Blackwell, D., 1953. *Equivalent Comparisons of Experiments*. Annals of Mathematical Statistics, 24, 264-272.
28. Bollerslev, T., 1986. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 31(3), 307-327.
29. Brandt, M. W. y Santa-Clara, P., 2006. *Dynamic Portfolio Selection by Augmenting the Asset Space*. The Journal of Finance, LXI(5), 2187-2217.
30. Engle, R. F., 1982. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica, 50(4), 987-1007.
31. Broske, M. S. y Levy, H., 1989. *The Stochastic Dominance Estimation of Default Probability*. In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), Studies in the Economics of Uncertainty. In Honor of Josef Hadar, Springer Verlag, New York, 91-112.
32. Bühlmann, H., 1970. *Mathematical Models in Risk Theory*. Springer, New York.

33. Caballé, J. y Esteban, J., 2007. *Stochastic dominance and absolute risk aversion*. Social Choice and Welfare, Published online: 5 May 2006, Springer-Verlag 2006.
34. Clark, P., 1973. *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*. *Econometrica*, 41, 135-156.
35. Constantinides, G. M. y Perrakis, S., 2002. *Stochastic dominance bounds on derivatives prices in a multiperiod economy with proportional transaction costs*. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7-8), 1323-1352.
36. Chen, Z. y Lin, R., 2006. *Mutual fund performance evaluation using data envelopment analysis with new risk measures*. *OR Spectrum*, 28(3), 375-398.
37. Dardoni, V. y Lambert, P., 1988. *Welfare ranking of Income Distributions: A Role for the Variance and Some Insights for Tax Reform*. *Social Choice and Welfare*, 5, 1-17.
38. Davies, J. y Hoy, M., 1995. *Making Inequality Comparisons when Lorenz Curves Intersect*. *American Economic Review*, 85(4), 980-986.
39. De Vylder, F., 1996. *Advanced Risk Theory*. Université de Bruxelles, Brussels.
40. Dickson, D. C. M., 2005. *Insurance risk and ruin*. Cambridge University Press.
41. El Karoui, N. y Meziou, A., 2006. *Constrained optimization with respect to stochastic dominance: application to portfolio insurance*. *Mathematical Finance*, 16(1), 103-117.
42. Ellsberg, D., 1961. *Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms*. *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643-669.
43. Embrechts, P., Frey, R., y McNeil, A. J., 2004. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Book manuscript, ETH, Zürich.
44. Embrechts, P., Klüppelberg, C. y Mikosch, T., 1997. *Modelling Extremal events for Insurance and Finance*. Springer, New York.

45. Embrechts, P. y Samorodnitsky, G., 2003. *Ruin Problem and How Fast Stochastic Processes Mix*. The Annals of Applied Probability, 13, 1-36.
46. Emms, P. y Haberman, S., *Asymptotic and numerical analysis of the optimal investment strategy for an insurer*. Insurance Mathematics and Economics, 40(1), (2007), 113-134.
47. Feller, W., 1993. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Volúmenes I y II, Limusa.
48. Ferreira, F. y Pacheco, A., 2005(a). *Level crossing ordering of semi-Markov processes and Markov chains*. Journal of Applied Probability, 42(4), 989-1002.
49. Ferreira, F. y Pacheco, A., 2005(b). *Level crossing ordering of skip-free to the right continuous time Markov chains*. Journal of Applied Probability, 42(1), 52-60.
50. Ferreira, F. y Pacheco, A., 2007. *Comparision of level-crossing times for markov and semi-markov processes*. Statistics and Probability Letters, 77(2), 151-157.
51. Fishburn, P. C., 1964. *Decision and Value Theory*. Wiley, New York.
52. Fishburn, P. C., 1989(a). *Foundations of Decision Analysis: Along the Way*. Management Science, 387-424.
53. Fishburn, P. C., 1989(b). *Stochastic Dominance in Nonlinear Utility Theory*. In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), Studies in the Economics of Uncertainty. In Honor of Josef Hadar, Springer Verlag, New York, 3-20.
54. Fishburn, P. C. y Porter, R. B., 1976. *Optimal Portfolios with One Safe and One Risky Asset: Effects of Changes in Rates of Return and Risk*. Management Science, 22, 1064-1073.
55. Frees, E. W., 1986. *Nonparametric Estimation of the Probability of Ruin*. ASTIN Bulletin, 16, 81-90.
56. Gaier, J. y Grandits, P., 2002. *Ruin probabilities in the presence of regularly varying tails and optimal investment*. Insurance: Mathematics and Economics, 30, 211-217.

57. Geman, H. y Ané, T., 1996. *Stochastic Subordination*. Risk, 9, 146-149.
58. Gerber, H., 1979. *Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation Monograph. 8, University of Pennsylvania.
59. Gerber, H. y Shiu, E., 2005. *The time value of ruin in a Sparre Andersen Model*. North American Actuarial Journal, 9(2), 49-69.
60. Goovaerts, M. J., 1990. *Effective Actuarial Methods*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
61. Guillame, D., Dacorogna, M., Davé, R., Müller, U., Olsen, R. y Pictet, P., 1997. *From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets*. Finance and Stochastics, 1(2), 95-129.
62. Guo, J. Y., Yuen, K. C. y Zhou, M., 2007. *Ruin probabilities in Cox risk models with two dependent classes of business*. Acta Mathematica Sinica, 23(7), 1281-1288.
63. Gupta, R. C. y Keating, J. P., 1986. *Relations for the reliability measures under length biased sampling*. Scandinavian Journal of Statistics, 13, 49-56.
64. Hadar, J. y Russell, W. R., 1969. *Rules for Ordering Uncertain Prospects*. American Economic Review, 59, 25-34.
65. Hadar, J. y Russell, W. R., 1974. *Diversification of Interdependent Prospects*. Journal of Economic Theory, 7, 231-40.
66. Hadar, J. y Seo, T. K., 1990. *The Effects of Shifts in a Return Distribution on Optimal Portfolio*. International Economic Review, 31, 721-736.
67. Hanoch, G. y Levy, H., 1969. *The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk*. Review of Economic Studies, 36, 335-346.
68. Hanoch, G. y Levy, H., 1970. *Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility*. The Journal of Business, 43(2), 181-189.

69. Hernández, D., 1997. *Modelos de Teoría de Riesgo para la solvencia del sector asegurador*. Comisión Nacional de Seguros y Finanzas, Segundo Lugar del Premio de Investigación Sobre Seguros y Fianzas, <http://www.cnsf.gob.mx/>.
70. Huergo, E. y Moreno, L., 2005. *La productividad en la industria española: Evidencia microeconómica*. Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales 05-01, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
71. Irle, A., 2003. *Stochastic ordering for continuous-time processes*. Journal of Applied Probability, 40(2), 361-375.
72. Irle, A. y Gani, J., 2001. *The detection of words and an ordering for Markov chains*. Journal of Applied Probability, 38A, 66-77.
73. Jain, K., Singh, H. y Bagai, I., 1989. *Relations for the reliability measures of weighted distributions*. Communications in Statistics - Theory and Methods, 18, 4393-4412.
74. Jarrow, R., 1986. *The Relationship between Arbitrage and First Order Stochastic Dominance*. Journal of Finance, 41, 915-921.
75. Kahkeman, D. y Tversky, A., 1979. *Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk*. Econometrica, 47, 263-291.
76. Kakwani, N. C., 1984. *Issues in Measuring Poverty*. In Basman, R. and Rhodes, G.: Advances in Econometrics, 3, JAI Press, London.
77. Karamata, J., 1932. *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes*. Publ. Math. Univ. de Belgrade, 1, 145-148.
78. Karatzas, I. y Shreve, S., 1988. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin.
79. Karlin, S., 1960. *Dynamic inventory policy with varying stochastic demands*. Management Science, 6, 231-258.

80. Kolm, S. Ch., 1969. *The optimal production of social justice*. In J. Margolis and H. Guitton (eds.), *Public Economics*. London. Macmillan.
81. Kolm, S. Ch., 1976. *Unequal Inequalities*. *Journal of Economic Theory*, 12, 416-442.
82. Kopa, M. y Chovanec, P., 2008. *A Second-Order Stochastic Dominance Portfolio Efficiency Measure*. *Kybernetika*, 44(2), 243-258.
83. Kroll, Y. y Levy, H., 1960. *Stochastic Dominance Criteria: A Review and Some New Evidence*. *Research in Finance*, Vol 2, JAI Press, Greenwich, CT, 231-258.
84. Krokmal, P. A., 2007. *Higher moment coherent risk measure*. *Quantitative Finance*, 7(4), 373-387.
85. Klüppelberg, C. y Kostadinova, R., 2008. *Integrated insurance risk models with exponential Lévy investment*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 560-577.
86. Lambert, P.J., 1988. *Progressive income taxation is inequality reducing - or is it?*. Working Paper 88/14, Institute for Fiscal Studies.
87. Lehmann, E., 1955. *Ordered Families of Distributions*. *Annals of Mathematical Statistics*, 26, 399-419.
88. Leitner, J., 2005. *A short note on second-order stochastic dominance preserving coherent risk measures*. *Mathematical Finance*, 15(4), 649-651.
89. Levy, H. y Sarnat, M., 1971. *Two-Period Portfolio Selection and Investors' Discount Rates*. *The Journal of Finance*, 26(3), 757-761.
90. Levy, H., 1985. *Upper and Lower Bounds of Put and Call Option Value: Stochastic Dominance Approach*. *The Journal of Finance*, 40(4), 1197-1217.
91. Levy, H., 2006. *Stochastic Dominance. Investment Decision under Uncertainty*. 2ª Edición. Springer.
92. Levy, M., 2009. *Almost Stochastic Dominance and stocks for the long run*. *European Journal of Operational Research*, 194, 250-257.

93. Li, S. y Garrido, J., 2004. *On ruin for the Erlang(n) risk process*. Insurance Mathematics and Economics, 34(3), 391-408.
94. Li, S. y Garrido, J., 2005. *On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function*. Advances in Applied Probability, 37(3), 836-856.
95. Lichtenstein, S. y Slovic, P., 1973. *Response-Induced Reversals of Preference in Gambling: An Extended Replication in Las Vegas*. Journal of Experimental Psychology, 101(1), 16-20.
96. Lintner, J., 1965. *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*. The Review of Economics and Statistics, 47(1), 13-37.
97. Lorenz, M. O., 1905. *Methods of measuring the concentration of wealth*. Journal of the American Statistical Association, 9, 209-219.
98. Lozano, S y Gutiérrez, E., 2008. *Data envelopment analysis of mutual funds based on second-order stochastic dominance*. European Journal of Operational Research, 189, 230-244.
99. Lu, Y. y Li, S., 2005. *On the probability of ruin in a markov-modulated risk model*. Advances in Applied Probability, 37, 522-532.
100. Machina, M., 1982. *'Expected Utility' Analysis without Independent Axiom*. Econometrica, 50, 277-323.
101. Machina, M., 1987. *Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved*. Journal of Economic Perspectives, 1(1), 121-154.
102. Macci, C., 2008. *Large deviations for the time-integrated negative parts of some processes*. Statistics and Probability Letters, 78(1), 75-83.
103. Mann, H.B. y Whitney, D.R., 1947. *On a test of whether one of two random variable is statistically larger than the other*. Annals of Mathematical Statistics, 18, 50-60.

104. Markowitz, H., 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. Wiley, Ney York.
105. Marshall, A. W. y Proschan, F., 1972. *Classes of distributions applicable in replacement, with renewal theory implications*. Proc. 6<sup>th</sup> Berk. Symp. on Prob. and Statist. Vol I, 395-415.
106. May, K. O., 1954. *Intransitivity, Utility, and the Aggregation of Preference Patterns*. *Econometrica*, 22, 1-13.
107. Medova, E., 2000. *Measuring Risk by Extreme Values*. *Risk*, November 2000, 20-26.
108. Melnikov, A., 2003. *Risk analysis in finance and insurance*. Chapman and Hall/CRC.
109. Merino, M. y Vadillo, F., 2007. *Matemática financiera con MATLAB*. *Revista de Métodos cuantitativos para la economía y la Empresa*, 4, 35-55.
110. Merton, R. C., 1973. *Theory of Rational Option Pricing*. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
111. Meyer, J., 1989. *Stochastic Dominance and Transformations of Random Variables*. In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), *Studies in the Economics of Uncertainty*. In Honor of Josef Hadar, Springer Verlag, New York, 45-57.
112. Morais, M. J. C. y Pacheco, A. *Ordenação estocástica: um pouco de história e aplicações*. *Estadística: A diversidade na Unidade*, Souto de Miranda, M. e Pereira, I. eds, 221-235. Edições Salamandra, Lisboa.
113. Muller, A. y Stoyan, D., 2002. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Ed. John Wiley and sons.
114. Nyrhinen, H., 2007. *Convex large deviation rate functions under mixtures of linear transformations, with an application to ruin theory*. *Stochastic processes and their applications*, 117(7), 947-959.

115. Ogryczak, W. y Ruszczyński, A., 1999. *From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures*. European Journal of Operational Research, 116, 33-50.
116. Osaki, Y. y Quiggin, J., 2008. *Stochastic dominance representation of optimistic belief: theory and applications*. Economics Letters, 101(3), 275-278.
117. Parzen, E., 1972. *Procesos Estocásticos*. Paraninfo, Madrid.
118. Patil, G. P. y Rao, C. R., 1977. *The weighted distributions: A survey and their applications*. In Applications of Statistics (ed. P.R. Krishnaiah), North Holland Publ. Co. Amsterdam, 383-405.
119. Patil, G. P. y Rao, C. R., 1978. *Weighted distributions and size biased sampling with applications to wild life populations and human families*. Biometrika, 34, 179-189.
120. Pin, P., 2006. *Evolution of risk preferences*. Mathematical Methods in Economics and Finance, 1(1), 65-76.
121. Prieto Pérez, E., 1969. *Distribución de Pareto aplicaciones al seguro*. Estadística Española, 43, (1969), 63-70.
122. Quirk, J. P. y Saposnik, R., 1962. *Admissibility and Measurable Utility Function*. Review of Economic Studies, 140-146.
123. Ramsay, C., 1992. *A practical algorithm for approximating the probability of ruin*. Transactions of the Society of Actuaries, XLIV, 443-459.
124. Reinhard, J., 1984. *On a class of semi-markov risk models obtained as a classical risk models in a markovian environment*. ASTIN Bulletin, 14, 23-43.
125. Reinhard, J. y Snoussi, M., 2001. *On the distribution of the surplus prior to ruin in a discrete semi-markov risk model*. ASTIN Bulletin, 31, 255-273.
126. Reinhard, J. y Snoussi, M., 2002. *The severity of run in a discrete semi-markov risk model*. Stochastic Models, 18(1), 85-107.

127. Resnick, S., 1992. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, Boston.
128. Roberts, K. S. W. y Neary, J. P., 2002. *The theory of household behaviour under rationing*. European Economic Review, 13(1), 25-42.
129. Roman, D., Darby-Dowman, K. y Mitra, G., 2006. *Portfolio construction based on stochastic dominance and target return distributions*. Mathematical Programming, 108(2-3), 541-569.
130. Ross S. M., 1983. *Stochastic Processes*. John Wiley, New York.
131. Rothschild, M. y Stiglitz, J. E., 1970. *Increasing Risk.I.A Definition*. Journal of Economic Theory, 2, 225-243.
132. Russell, W. R. y Seo, T. K., 1959. *Representative Test for Stochastic Dominance Rules*. In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), *Studies in the Economics of Uncertainty*. In Honor of Joseph Hadar. Springer Velag. New York, 59-76.
133. Sandmo, A., 1971. *On the Theory of Competitive Firm under Price Uncertainty*. American Economic Review, 61, 65-73.
134. Saposnik, R., 1981. *Rank-Dominance in income distributions*. Public Choice, 36(1), 147-151.
135. Saposnik, R., 1983. *On evaluating income distributions: Rank-Dominance, the Suppes-Sen grading principles of justice, and Pareto optimality*. Public Choice, 40, 329-336.
136. Shaked, M. y Shanthikumar, G., 2007. *Stochastic Orders*. Springer Series in Statistics.
137. Sharpe, W. F., 1964. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. Journal of Finance, 19, 425-442.
138. Shorrocks, A. F., 1983. *The impact of income components on the distribution of family incomes*. Quartely Journal of Economics, 98, 311-326.

139. Shorrocks, A. F. y Foster, J. E., 1987. *Transfer sensitive inequality measures*. Review of Economics Studies, 54, 485-497.
140. Siu, T. K., Lau, J. W. y Yang, H., 2008. *Ruin theory under a generalized jump-diffusion model with regime switching*. Applied Mathematical Sciences, 2(29), 1415-1430.
141. Steinbach, M. C., 2001. *Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis*. Siam Review, 43(1), 31-85.
142. Stiglitz, J., 1970(a). *Taxation, Risk-Taking, and the Allocation of Investment*. Cowles Foundation Discussion Papers, 305, Cowles Foundation, Yale University.
143. Stiglitz, J., 1970(b). *The Behaved Economy with the Well Behaved Production Function*. Cowles Foundation Discussion Papers, 303, Cowles Foundation, Yale University.
144. Stoyan, D., 1983. *Comparison methods for queues and other stochastic models*. John Wiley.
145. Szekli, R., 1995. *Stochastic ordering and dependence in applied probability*. Springer Velag, New York.
146. Tversky, A., 1969. *Intransitivity of Preferences*. Psychological Review, 76, 31-48.
147. Weber, S., 2006. *Distribution-invariant risk measures, information, and dynamic consistency*. Mathematical Finance, 16(2), 419-441.
148. Withmore, G. A., 1970. *Third degree stochastic dominance*. American Economic Review, 60, 457-459.
149. Xu, K. y Fisher, G., 2006. *Myopic loss aversion and margin of safety: the risk of value investing*. Quantitative Finance, 6, 481-494.
150. Zhu, J. y Yang, H., 2008. *Ruin theory for a Markov regime-switching model under a threshold dividend strategy*. Insurance: Mathematics and Economics, 42(1), 311-318.